# Physics 2

March 23, 2022

## Contents

### Lecture 40

Si la soluzione formale delle equazioni di Maxwell con sorgenti e si studiano quali sono le caratteristiche delle soluzioni. Si è visto che la sorgente definisce le caratteristiche geometriche del campo. Si vuole mettere direttamente in relazione i campi con le sorgenti. Si utilizzano le equazioni di Maxwell con sorgenti variabili mer 16 mar 2022 08:30

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r},t) + \varepsilon_0 \mu_0 \, \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni include difatti otto equazioni scalari (le equazioni superiori sono scalari, quelle inferiori sono vettoriali), ma le incognite sono sei, cioè i campi che sono anche tra loro collegati. Inoltre, fuori dalle sorgenti, il campo magnetico è completamente determinato dal campo elettrico. Il sistema è sovra-determinato e lo si può ridurre ad un sistema più semplice tramite i potenziali elettrodinamici. Come in elettrostatica, si passa all'uso di potenziali e si descrivono le equazioni per essi.
Si studiano le due equazioni senza sorgenti. Il caso della legge di Gauss per il campo magnetico è uguale al caso statico e quindi si introduce un potenziale vettore $\vec{A}$ tale per cui

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

in quanto vale sempre $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \equiv 0$. Per sostituzione nella legge di Faraday si ha

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \partial_t \vec{A}\right) = 0$$

cioè una grandezza irrotazionale, la cui circuizione è nulla (quindi tale combinazione di campi è un nuovo campo conservativo), pertanto si può descrivere tramite un campo scalare

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Si introduce il segno meno per avere una descrizione consistente con quanto fatto in elettrostatica. Il significato di questo potenziale è diverso da quello dell'elettrostatica. Infatti, nell'elettrostatica si può associare il campo scalare al lavoro di una carica; ma in questo caso non si ha un corrispettivo significato fisico: tale campo scalare è solamente una funzione matematica che si introduce per risolvere il problema. Dunque

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

Si sostituiscono queste due equazioni all'interno delle due equazioni di Maxwell dove compaiono le sorgenti. Nella legge di Gauss (successivamente menzionata come "prima equazione") si ha

$$\nabla^2 \varphi + \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Non si è disaccoppiato $\phi$ da $A$, ma qualora quest'ultimo fosse nullo, si otterrebbe nuovamente l'equazione di Poisson. L'equazione di Ampère-Maxwell (successivamente menzionata come "seconda equazione") diventa

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t\varphi\right) = -\mu_0 \vec{J}$$

Queste due espressioni sono quattro equazioni (una scalare ed una vettoriale) e si hanno quattro incognite. Si disaccoppiano $\vec{A}$ e $\varphi$ tramite l'invarianza di gauge: si definisce il nuovo potenziale vettore come

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}, t) \implies \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

dove $\lambda(\vec{r}, t)$ è un campo scalare; inoltre, il rotore del suo gradiente è nullo perché il campo vettoriale generato dal gradiente di lambda è conservativo. Si ha un'arbitrarietà nella scelta del potenziale vettore. In magnetostatica si è già visto quanto fatto quando si è imposto $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ per ottenere l'equazione di Poisson nella relazione tra potenziale vettore e densità di corrente. Tuttavia, cambiando $\vec{A}$ in tale modo, la prima equazione cambia anche il campo elettrico, pertanto bisogna cambiare il potenziale scalare $\varphi$ per compensare. Dunque si ha

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi' - \partial_t \vec{A}' = -\vec{\nabla}\varphi' - \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\partial_t\lambda \equiv -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}$$

Si può ottenere ancora lo stesso campo elettrico pur di ridefinire il potenziale scalare come

$$\varphi' = \varphi - \partial_t\lambda$$

Dunque, il campo elettromagnetico è invariante sotto la trasformazione

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \partial_t\lambda \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \end{cases}$$

Si possono semplificare le equazioni tramite due modi principali. Il primo è il gauge di Coulomb (o di radiazione) che impone

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Questa scelta è giustificata in quanto si è dimostrato in magnetostatica che è sempre possibile scegliere un campo vettoriale $\vec{A}$ che abbia divergenza nulla: se così non fosse, si può passare ad un campo $\vec{A}'$ purché $\lambda$ soddisfi l'equazione di Poisson:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2\lambda = 0 \implies \nabla^2\lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

La cui soluzione esiste sempre ed è anche unica per il teorema fondamentale dell'elettrostatica. La seconda scelta è il gauge di Lorentz con cui si rende la seconda equazione solo dipendente da $\vec{A}$. Si sceglie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t\varphi = 0$$

Se tale equazione non è soddisfatta, allora si cerca una nuova coppia di potenziali per i quali tale condizione vale:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t\varphi' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t\varphi + \nabla^2\lambda - \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t^2\lambda$$

da cui risulta

$$\nabla^2\lambda - \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t^2\lambda = s(\vec{r}, t)$$

dove $s$ è una funzione scalare. Si ha un'equazione delle onde non omogenea per $\lambda$. Essa ha sempre soluzione (la dimostrazione si vede successivamente).

Con tali scelte si possono disaccoppiare le equazioni. In elettrodinamica classica, si usa il gauge di Lorentz, mentre in elettrodinamica quantistica si usa il gauge di Coulomb. Si discutono entrambi. Una volta capita la struttura delle soluzioni, si isolano i termini interessanti usare, tralasciando inutili complicazioni.

**Gauge di Coulomb.** Si sceglie $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$. La prima equazione diventa

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

cioè è l'equazione di Poisson. La seconda diventa

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} - \varepsilon_0\mu_0\,\vec{\nabla}\partial_t\varphi$$

Della prima si sanno trovare le soluzioni, poi sostituendo $\varphi$ nella seconda, il secondo membro di questi diventa una funzione scalare $s(\vec{r},t)$ e si ottiene un'equazione delle onde non omogenea per $\vec{A}$. Infatti

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\nu'$$

è la soluzione formale dell'equazione di Poisson. Si ha un problema: la carica si muove, ma secondo tale formula il potenziale è istantaneamente ridefinito in tutto lo spazio. Tuttavia, non si viola il principio di causalità perché le grandezze che hanno significato fisico sono il campo elettrico ed il campo magnetico. Entrambi dipendono da $\vec{A}$ che obbedisce l'equazione delle onde e dunque si propaga con velocità finita, seguendo il principio di causalità. Quindi la prima equazione definisce una configurazione statica dei campi che poi entra nella seconda equazione per descrivere come nell'equazione delle onde bisogna tener conto di come si riconfigurano le sorgenti. L'informazione si trasmette tramite la propagazione dell'onda.
Il potenziale scalare fornisce un potenziale di tipo coulombiano (per questo è detto gauge di Coulomb). Quindi il campo elettrico associato a tale potenziale è di tipo coulombiano e dipende da $\frac{1}{r^2}$; mentre il campo di radiazione è associato solamente ad $\vec{A}$, che si propaga. Se interessa solamente il campo di radiazione si può porre

$$\begin{cases}\varphi = 0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0\end{cases}$$

che si può fare quando si è lontani dalla sorgente. Questa è la scelta tipica dell'elettrodinamica quantistica: si gestisce la singola carica come sorgente e si osserva il campo generato intorno quando interagisce con oggetti che hanno distanze su dimensioni finite, mentre la carica è puntiforme (cioè ha dimensione infinitesima). Inoltre, quando si è fuori dalla sorgente, il termine $s(\vec{r},t)$ è nullo e la soluzione è un'onda trasversale (cioè soddisfa $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$) associata ad $\vec{A}$.
Il fotone è una particella di spin 1, cioè uno spin che può essere lungo $x$, $y$ oppure $z$, ma dato che è solo trasversale, segue che solo due sono possibili e lo spin lungo la direzione di propagazione del fotone non è ammesso: solo due stati di polarizzazione sono possibili.

**Gauge di Lorentz.** In questo caso si ha

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\varphi = 0$$

che semplifica l'equazione di Ampère-Maxwell e le due equazioni diventano

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t^2\varphi = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)\end{cases}$$

Si osserva che le caratteristiche delle soluzioni sono identiche nelle due scelte di gauge. In questo caso non si ha un'apparente violazione del principio di causalità. Comunque, entrambi i membri secondi sono sorgenti variabili $s(\vec{r},t)$.

Qualunque sia la scelta di gauge, bisogna risolvere un'equazione del tipo

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t^2\psi(\vec{r},t) = -s(\vec{r},t)$$

cioè un'equazione delle onde non omogenea.
Le equazioni nel gauge di Lorentz, nel caso in cui non ci sia dipendenza dal tempo, collassano in equazioni di Poisson per $\varphi$ e per $\vec{A}$ che si sanno risolvere in modo formale. Quindi, dato che in questo caso è presente la dipendenza dal tempo, ci si aspetta che la soluzione sia simile a quella dell'equazione di Poisson, ma con un ritardo temporale.
Si risolve l'equazione per una sorgente puntiforme perché ogni sorgente è un insieme di più sorgenti puntiformi:

$$s(\vec{r},t)\begin{cases} = 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \neq 0, & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

Dunque, si può separare la soluzione. Con questa ipotesi, si possono scegliere delle coordinate sferiche con l'origine nella sorgente per cui si introduce una singolarità, ma importa studiare ciò che succede oltre la sorgente stessa.
Quindi, per $\vec{r} \neq 0$ si ha

$$\nabla^2 \psi(\vec{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \, \partial_t^2 \psi = 0$$

cioè un'equazione delle onde omogenea, però per la scelta della carica puntiforme, bisogna risolverla in coordinate polari. La soluzione è una funzione del tipo

$$\psi(r,t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Si è messa in evidenza la fase temporale. Quando si è lontani dalla sorgente si ha un andamento di questo tipo. Si definisce com'è fatta la funzione $f$ per raccordare la soluzione in $\vec{r} \neq 0$ alla soluzione in $\vec{r} = 0$: cioè esattamente quello che si è fatto quando si è discusso il problema della singolarità nella scorsa lezione e si è vista l'equazione di Poisson nel limite statico raccordata con la presenza della carica nell'origine.
Si vede un'approssimazione della soluzione della soluzione formale perché gli strumenti matematici (funzione e propagatore di Green) non sono ancora disponibili. L'approssimazione fornisce la soluzione giusta e la si giustifica con il proprio senso fisico.
Per $\vec{r} \to 0$, il ritardo $\frac{r}{c}$ sparisce. Inoltre, osservando l'equazione delle onde, il laplaciano diverge nell'origine

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \, \partial_r^2 (r\psi)$$

mentre il secondo addendo rimane finito e si può escludere [r] Pertanto

$$\nabla^2 \psi = -s(t)$$

[r] Si risolve tale equazione. Si sa

$$\psi(r \to 0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s(t)}{r} \, d\nu'$$

cioè è la soluzione dell'equazione di Poisson. In questo caso $\vec{r}'$ è collassato in un punto che coincide con l'origine ed $r$ non è una variabile di integrazione:

$$\psi(r \to 0) = \frac{1}{4\pi r} \int_V s(t) \, d\nu' = \frac{S(t)}{4\pi r}$$

Inoltre, per $r \neq 0$ si ha

$$\psi(r,t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

[r] Si identifica $f = \frac{S}{4\pi}$ e quindi

$$\psi(r,t) = \frac{S\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \, d\nu'$$

Si risolve l'equazione in una regione senza sorgenti e poi la si raccorda con continuità ai punti dove si hanno le sorgenti. Una sorgente estesa si può pensare come un insieme di sorgenti puntiformi. [immagine] Dunque si ha

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}'$$

Ritornando alle due equazioni che si devono risolvere in $\varphi$ ed $\vec{A}$ si ha rispettivamente

$$s(\vec{r}, t) = \frac{\rho(r, , t)}{\varepsilon_0}, \quad s(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$$

Pertanto, i potenziali elettrodinamici ritardati sono

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}\nu'$$

cioè il potenziale di Poisson ma con un ritardo [r]. Queste sono le soluzioni del gauge di Lorentz? [r]. Lo stesso per il potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}\nu'$$

Da queste equazioni non è evidente che i campi di radiazione dipendono da $\frac{1}{r}$. Ne si vede una dimostrazione formale. Si è interessati ad una sorgente variabile la cui variazione oscillante la si può intendere come somma di sinusoidi per lo sviluppo di Fourier. Pertanto, si scrivono le sorgenti elementari come

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}) \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\rho(\omega) e^{-i\omega t}\right) \\ J(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r}) \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(J(\omega) e^{-i\omega t}\right) \end{aligned}$$

[r] Le sorgenti più complicate sono somme di sorgenti elementari e si applica il principio di sovrapposizione.
Il potenziale vettore risulta essere

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}\nu'$$

Si osservano le soluzioni lontano dalla sorgente $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$. Considerato lo sviluppo

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{u}_r \cdot \vec{r}'}{r}} \approx r \left(1 - \frac{\hat{u}_r \cdot \vec{r}'}{r}\right) = r - \hat{u}_r \cdot \vec{r}'$$

Sostituendo nel potenziale vettore si ha un valore lontano dalle sorgenti di

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}\left(r - \hat{u}_r \cdot \vec{r}'\right)}}{r} \,\mathrm{d}\nu' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{u}_r \cdot \vec{r}'} \,\mathrm{d}\nu'$$

dove $k = \frac{\omega}{c}$ è il numero d'onda. L'integrale è una sorta di ampiezza che dipende dalle sorgenti e dalla loro disposizione spaziale; mentre il termine esponenziale è un'onda sinusoidale sferica

$$\vec{A} = \mathrm{Re}\,(\ldots) = a \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}$$

il potenziale vettore è un campo che si propaga come un'onda sferica. Ritornando ai campi elettromagnetici, si sa che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}$$

la derivata temporale non cambia la dipendenza spaziale, dunque $\partial_t \vec{A} \sim \frac{1}{r}$ cioè il campo di radiazione va come $\frac{1}{r}$. Per il campo magnetico, la dipendenza da $\frac{1}{r}$ è meno immediata perché si ha un rotore. Tuttavia, per le onde sferiche si ha comunque

$$\vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}$$

[r].
Inoltre, l'ampiezza data dall'integrale, quando $k$ [r] è piccolo, si può fare uno sviluppo in multipoli dove il termine che domina è quello di dipolo: una carica oscillante (anche isolata) si può approssimare ad un dipolo.
A questo punto bisogna ricavare il potenziale scalare [r]. Distanti dalle sorgenti si ha

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_V \rho \left( \vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \mathrm{d}\nu'$$

dove si è approssimato $|\vec{r} - \vec{r}'|$ con $r$. L'integrale risulta essere la carica, ma la dipendenza è comunque da $\frac{1}{r}$ per cui il campo statico dipende da $\frac{1}{r^2}$. [r]

**Esempio.** Si consideri un dipolo oscillante. Si considera una carica puntiforme che oscilla lungo $z$ con punto medio nell'origine. Essa ha velocità

$$\vec{v} = \mathrm{d}_t \vec{\delta}$$

A tale movimento si associa una corrente lungo $z$ che dipende solo dal tempo

$$i(t) = q\vec{v} = \partial_t \vec{p}$$

dove $\vec{p} = q\vec{\delta}$ è una rappresentazione per il dipolo. Inoltre

$$i(t) = \int_V \rho \vec{v} \, \mathrm{d}\nu' = \int_V \vec{J} \, \mathrm{d}\nu'$$

Scritto in questo modo si può introdurre il potenziale

$$A(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\left( \vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}\nu' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \vec{J} \left( t - \frac{r}{c} \right) \mathrm{d}\nu'$$

nel caso dell'esempio si ha $\vec{r}' = 0$. Da quanto scritto sopra, si sa che tale integrale sul volume risulta essere la corrente

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} i(\xi) \hat{u}_z, \quad \xi \equiv t - \frac{r}{c}$$

Si può scrivere anche un potenziale scalare, ma da un campo coulombiano che non è rilevante a grandi distanze [r]. Si descrive il campo magnetico. Noto che $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, segue che il campo magnetico ha componenti solamente in $B_x$ e $B_y$ dato che $\vec{A} = A_z \hat{u}_z$. Dunque

$$\begin{aligned} B_x &= \partial_y A_z - \cancel{\partial_z A_y} \\ B_y &= \cancel{\partial_z A_x} - \partial_x A_z \end{aligned}$$

Si calcola solamente la prima componente

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_y \left( \frac{1}{r} \right) i(\xi) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \partial_y i(\xi)$$

ricordando $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, si ha

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{y}{r} i(\xi) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \partial_\xi i \, \partial_y \xi = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} i(\xi) \sin\varphi \sin\theta - \frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \partial_t i \, \partial_\xi t \, \frac{y}{r} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} i(\xi) \sin\varphi \sin\theta - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \partial_t i \, \sin\varphi \sin\theta \end{aligned}$$

Il primo addendo è di tipo coulombiano perché va come $\frac{1}{r^2}$ e si attenua rapidamente a grandi distanze. Il secondo addendo è il campo di radiazione perché dipende da $\frac{1}{r}$ e

$$\partial_t i = \partial_t(q\vec{v}) = q\vec{a}$$

cioè i campi di radiazione dipendono dall'accelerazione delle cariche.
Si può trovare il campo elettrico in due modi: Faraday e Ampère-Maxwell oppure

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t\vec{A}$$

dove il primo addendo è di tipo coulombiano, mentre il secondo termine è quello di radiazione. Si nota che $\vec{A}$ è lungo $z$ e dunque puro $\vec{E}$: ancora una volta il campo elettrico è ortogonale al campo magnetico.

**Esercizio.** Ricavare la relazione $E = cB$.

## Lecture 41

mer 23 mar 2022 08:30

Si sono viste le proprietà generali dei campi di radiazione risolvendo in maniera formale le equazioni. Le soluzioni dipendono dal reciproco della distanza dalla sorgente.

**Carica accelerata.** Imparate le proprietà generale, si sceglie la sorgente elementare di radiazione e si analizza in maniera completa come vanno i campi e la potenza. I sistemi di sorgenti variabili sono la somma di cariche accelerate.
Si consideri una carica con velocità nulla. Ad un tempo $t = 0$, essa viene accelerata in un tempo $\Delta t$ piccolo fino ad una certa velocità $v \neq 0$ tale che

$$v = a\Delta t$$

Durante tale intervallo di tempo, la carica si sposta di un tratto

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

Si osserva il campo elettromagnetico ad un tempo $t \gg \Delta t$, cioè quando l'informazione del movimento della carica si è propagata in una regione finita dello spazio. Dunque, $vt \gg \Delta x$ [r] ed esiste un certo raggio $r = ct$ che definisce la regione investita dall'informazione di movimento della carica. Questa è una rappresentazione schematica che permette di ricavare il risultato per una carica con un'accelerazione istantanea. Si può pensare che essa sia comunque una rappresentazione limitata, perché una carica che subisce un'accelerazione istantanea potrebbe avere velocità iniziale non nulla, tuttavia ciò non importa perché si può sempre sceglie un riferimento co-movente con la carica [r]. Inoltre, si ipotizza $v \ll c$. Quindi, il risultato ottenuto può sembrare vero solamente nel limite non relativistico [r]
.[immagine] Si consideri un sistema di riferimento. La carica si trova nell'origine, poi accelera in un tratto $\Delta x$ e successivamente continua a muoversi con velocità costante per un tratto $vt$ fino ad una posizione $O'$. La distanza tra le origini è $OO' \approx vt$. Gli osservatori all'interno del cerchio definito dal raggio $r = ct$ vedono un campo centrale nell'origine $O'$. Gli osservatori all'esterno vedono ancora un campo centrale nell'origine $O$. Si ha una regione dove compare una discontinuità del campo. Tale regione non ha spessore nullo: tale spessore radiale è $\Delta r = c\Delta t$. Ci chiede come si possa descrivere il campo in tale regione di transizione.
In generale, per una carica in moto, il campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{u}_r}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Nella regione esterna, $\beta = 0$ e quindi si ha un campo a simmetria sferica che punta in $O$:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

con $\vec{r}$ riferito ad $O$. Nella regione interna $\beta \approx 0$, $\beta \ll 1$, dunque

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{u}_{r'}}{(r')^2}$$

con $\vec{r}'$ riferito ad $O'$. Si studiano le linee di campo nella regione di transizione. La linea di campo all'interno con un angolo $\theta$ con la direzione di moto deve raccordarsi con la linea di campo dello stesso angolo nella seconda regione. Si sa che si raccordano sullo stesso angolo perché si può considerare una superficie chiusa che segue le linee di campo dentro e fuori, e si prenda un percorso a raggio costante dentro e fuori. Si calcola il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie. Esso dev'essere nullo perché non si ha carica nel volume racchiuso

$$\int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = 0$$

Su tutti i tratti radiali si ha $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = 0$. Per i tratti a raggio costante $S_1$ ed $S_2$ si ha

$$\Phi_{S_1}(E) + \Phi_{S_2}(E) = 0$$

Questo perché il flusso del campo elettrico sotto una superficie che sottende lo stesso angolo solido è costante. Le due superfici vedono lo stesso angolo solido rispetto a due punti diversi ($O$ ed $O'$), tuttavia i campi interno ed esterno sono [r]. Dunque, complessivamente per ottenere un flusso nullo si richiede che nella zona di transizione si ha $\vec{E} \cdot \mathrm{d}a = 0$ e dunque il campo elettrico congiunge le linee di campo con lo stesso angolo. [r]
Il campo nella regione di transizione si può scomporre in componente trasversa $\vec{E}_\perp$ e in componente radiale $\vec{E}_\parallel$. Tramite un'analisi geometrica si costruire il rapporto tra le due componenti. Quella radiale è lunga quanto la regione di transizione, $c\Delta t$; mentre la componente trasversa è relazionata al segmento $OO' = vt + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \approx vt$. Pertanto

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{vt\,\sin\theta}{c\Delta t}$$

Al posto di $\Delta t$ si può sostituire l'accelerazione. Infatti

$$a\Delta t = v, \quad r = ct$$

Pertanto

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{a\sin\theta\, r}{c^2}$$

Si sa com'è fatto il campo radiale e trasverso, quindi si può mettere in relazione il campo nella regione di transizione con gli altri due. Si utilizza la legge di Gauss su di una superficie nella regione esterna e di transizione [r]. Pertanto, il campo parallelo dev'essere identico al campo nella regione esterna.:

$$E_\perp = E_{\text{ext}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Quindi si può calcolare la componente trasversa:

$$E_\perp = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{a\sin\theta}{c^2}$$

Si considera infinitesimo $\Delta t$, la regione di transizione diventa nulla, ma $E_\perp$ non dipende dal tempo e dunque per un'accelerazione istantanea, si ha un campo trasverso [r].
Pertanto, il campo di radiazione elettrico è

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{a\sin\theta}{c^2}\hat{u}_\theta$$

Esso dipende dalla componente trasversa dell'accelerazione $a_\perp = a\sin\theta$. Il campo elettrico è massimo nella direzione ortogonale in cui accelera la carica [r]. Si calcola il campo magnetico associato. Risulta noto

$$\vec{B}_{\text{rad}} = \frac{\vec{c}\times\vec{E}}{c^2} = \frac{\hat{u}_r\times\vec{E}}{c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^3}\frac{a\sin\theta}{r}\hat{u}_\varphi$$

Mentre il vettore di Poynting risulta essere

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\hat{u}_r = \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{a^2\sin^2\theta}{c^3r^2}\frac{1}{\mu_0c^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2\sin^2\theta}{c^3}\frac{1}{4\pi r^2}\hat{u}_r$$

Il vettore dipende dal reciproco della superficie [r]. La potenza totale risulta essere

$$P = \int_A \vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{a} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi \sin^2\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3}$$

ricordando che in coordinate sferiche $\mathrm{d}a = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Quest'ultima è la formula di Larmor (legge?) che è l'energia irradiata da una carica quanto sottoposta ad un'accelerazione. Inoltre, i campi rispettano le relazioni ricavate in termini generali [r]. Questa formula introduce un problema: quando si osserva una carica in moto in un campo elettrico, tale carica subisce una forza $\vec{F} = q\vec{E}$ da cui l'equazione del moto è $m\vec{a} = q\vec{E}$ per cui l'accelerazione è $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$; tuttavia, se la carica accelera, essa irraggia e quindi non guadagna tutta l'energia fornita dal campo elettrico. In termini statici, la particelle guadagna un'energia $\Delta K = q\Delta V$, mentre ora bisogna sottrarre la quantità irraggiata [r]. Tuttavia, per (quasi) tutte le configurazioni studiate, la potenza irraggiata è trascurabile. Infatti

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m^2c^3}(\mathrm{d}_t p)^2$$

ricordando che $\mathrm{d}_t p = \mathrm{d}_x K$. Aumentando l'energia cinetica su di una distanza, la potenza irradiata aumenta. Tutto questo è sempre rimanendo nel limite non relativistico. [r] in tale limite la potenza irraggiata è trascurabile. Essa rimane trascurabile anche nel limite relativistico.
La situazione cambia quando si ha un'accelerazione centripeta: si ha una correzione relativistica significativa? [r]. [r] la forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ determina una forza centripeta. Pertanto, una particella in un campo magnetico irraggia energia e dunque il moto non è circolare ma è a spirale perché diminuisce la sua velocità.
Ci sono molti esempi in cui viene utilizzato un campo magnetico per pilotare delle particelle: gli acceleratori di particelle, anche se ogni giro si perde una parte di energia. Dato che vengono portate a velocità relativistiche si ha [r] dovuto al fattore di Lorentz.
L'irraggiamento è rilevante anche per le particelle cariche che attraverso campi magnetici nello spazio. Inoltre, l'atomo classico non può vivere all'infinito a causa dell'irraggiamento e dunque si necessita di una descrizione alternativa.

**Caso relativistico.** Si studia la potenza irraggiata in casi relativistici: ci si pone nel sistema di riferimento solidale con la particella e poi si trasformano le coordinate nel rifermento del laboratorio.
.[r] Nel riferimento solidale, il campo elettromagnetico parallelo alla direzione di spostamento sono

$$E'_\parallel = E_\parallel = 0, \quad B'_\parallel = B_\parallel = 0$$

Mentre le componenti trasverse sono

$$\vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}), \quad \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c}\right)$$

[r] $c^2$?. La forza risulta essere $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \cancel{\vec{v}' \times \vec{B}'})$ [r]. Pertanto la forza nel riferimento del laboratorio è

$$\vec{F}' = \gamma(q\vec{v} \times \vec{B})$$

cioè si ha un fattore $\gamma$ che amplifica la forza. Dunque,

$$P' = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma^2}{c^3}\left(\frac{qvB}{m}\right)^2$$

Tuttavia, la potenza nel laboratorio è $P' = P$. Questo perché

$$P' = \mathrm{d}_{t'}E'_m = \mathrm{d}_t E_m = P$$

[r] Lo si vede esplicitamente:

$$\mathrm{d}t = \gamma(\mathrm{d}t' + \gamma\frac{\beta}{c}\,\mathrm{d}x'), \quad \mathrm{d}E = \gamma(\mathrm{d}E' + \gamma\frac{\beta}{c}\,\mathrm{d}p'_{\parallel})$$

In $S'$ si ha $\mathrm{d}x' = \mathrm{d}p'_{\parallel} = 0$? [r]
Per accelerare le particelle a velocità relativistiche [r]
L'energia dissipata dall'LHC è di circa 100 MW. Si ha una dipendenza del quadrato della massa, LHC accelera a 7 TeV. L'energia irraggiata fornisce radiazione di raggi X, così che si possano fare analisi.

**Esercizio.** La velocità è parallela al campo elettrico. Trovare la potenza. Si vede che il fattore $\gamma$ non compare.

Le espressioni valgono con il $\gamma$ quando vengono scritte in termini della variazione di quantità di moto. Se si volesse esprimere la potenza in termini di accelerazione si avrebbe

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^3}\gamma^4\left(\gamma^2 a^2 - \left|\frac{\vec{a}\times\vec{v}}{c}\right|^2\right) \propto \gamma^6 a_{\parallel}^2 + \gamma^4 a_{\perp}^2$$

[r]

**Frequenze di emissione.** Si studiano le frequenze di emissione. Si consideri un moto armonico

$$z(t) = A\cos(\omega t), \quad \ddot{z} = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

Si possono scrivere il campo magnetico e la potenza irraggiata tramite le relazioni scritte per la carica puntiforme. Quindi

$$\vec{E}_{\text{rad}}(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a_\perp(t)}{c^2}\frac{1}{r}\hat{u}_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{A\omega^2}{r}\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\sin\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{A\omega^2}{r}\cos(\omega t - kr)\sin\theta$$

dove il fattore $\frac{r}{c}$ tiene conto del ritardo e $k = \frac{\omega}{c}$. L'ultimo termine è un'onda sferica sinusoidale [r]. La potenza irraggiata media su di un periodo

$$\langle P\rangle = \langle c\varepsilon_0 E^2\rangle = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^3}\frac{A^2\omega^4}{2}$$

Tale potenza esprime la variazione temporale di energia meccanica associata all'oscillazione. In media, l'energia meccanica è metà in quella meccanica e metà in quella potenziale [r]. Dunque

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \implies \langle E_m\rangle = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

Pertanto

$$\langle P \rangle = -\langle \mathrm{d}_t E_m \rangle = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{mc^3}\left(\frac{1}{2}mA^2\omega^2\right)$$

Inoltre [r]

$$\mathrm{d}_t\langle E_m \rangle = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{mc^3}\langle E_m \rangle$$

Dunque

$$\langle E_m \rangle = \langle E_0 \rangle e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove $\tau$ è legato al fattore di $\langle E_m \rangle$ nell'equazione differenziale. [r] L'ampiezza evolve come

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Complessivamente, il moto dell'elettrone non un moto armonico libero, ma è dissipativo. Dato che il moto ha tale andamento, la legge oraria è

$$z(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega t)$$

Dunque la radiazione emessa dalle oscillazioni non può essere monocromatica pura (perché non è una sinusoide pura). Si studia quanto essa non sia pura. Per un oscillatore, quando $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$, segue che esso è un buono oscillatore (dove $\gamma$ è il fattore dissipativo nell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico). Pertanto

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}\frac{\omega^2}{c}$$

La grandezza

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2} \approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

è il raggio classico dell'elettrone. [r] Si può sostituire ad $\omega$ le transizioni atomiche

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{2}{3}\frac{r}{c}\omega = \frac{4\pi}{3}\frac{r}{c}\nu = \frac{4\pi}{3}\frac{r}{\lambda} \approx \frac{10^{-15}\,\mathrm{m}}{5\times 10^{-7}\,\mathrm{m}}$$

[r] sono in ottima approssimazione monocromatiche.
Il modello ad oscillatore si usa per descrivere l'interazione tra radiazione e cariche.

**Osservazione.** Una carica in moto circolare in un campo magnetico irraggia ad una frequenza specifica, perché il moto circolare è la composizione di due moti armonici (uno per ogni asse); si mantiene energia per tenere la traiettoria circolare, dunque la frequenza emessa non decade, ma rimane fissa. [r]

L'emissione di energia è trascurabile quando si ha [r]

**Antenna lineare ed antenna circolare.** Si consideri una corrente $I = i_0\sin(\omega t)$. L'antenna lineare crea un campo elettrico di dipolo, mentre l'antenna circolare crea un dipolo magnetico. Si osserva che la potenza è

$$P = (lI\omega)^2, \quad P = \frac{(lI\omega)^2}{c^2}$$

rispettivamente. [r] Una radiazione di dipolo magnetico è molto minore di una di dipolo elettrico.