

# Elements of Astrophysics

26 novembre 2022

## Indice

<b>1</b>	<b>Contenuti</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Struttura stellare</b>	<b>6</b>
3.1	Equazione di stato . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Evoluzione stellare</b>	<b>18</b>
4.1	Supernovae . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Oggetti compatti</b>	<b>22</b>
5.1	Nane bianche – white dwarfs . . . . .	23
5.2	Stelle di neutroni . . . . .	29
5.3	Buchi neri . . . . .	35

## Lezione 1

mar 27 set  
2022 08:30

### 1 Contenuti

Si vedono:

- introduzione
- struttura ed evoluzione stellare (incluso supernove)
- oggetti compatti:
  - ◊ nane bianche (incluso equazione di stato ed equazioni di struttura)
  - ◊ stelle di neutroni (incluso pulsar, magnetar, osservazioni)
  - ◊ buchi neri (incluso processi di accrescimento)
- onde gravitazionali (non fa parte dell'esame)
- galassie (incluso classificazione, morfologia, AGN)
- cosmologia (incluso scala delle distanze, legge di Hubble, equazione di FLRW, CMB)

Essi sono gli argomenti chiesti all'esame.

### 2 Introduzione

Si studia tutto l'intervallo di onde elettromagnetiche: dalle onde radio ai raggi gamma. Si studiano i corpi celesti tramite il loro spettro di corpo nero. A terra si vedono bene gli intervalli ottico, infrarosso e radio. Gli altri sono schermati dall'atmosfera.

**Sviluppo dei metodi osservativi.** Solamente nel XIX secolo si è sviluppata l'astronomia nell'infrarosso. Nel 1930 si comincia l'osservazione tramite segnali radio, ma è nel 1960 che nasce l'astronomia nell'ultravioletto, nei raggi X e nei raggi gamma. Dal 2015 si utilizzano le osservazioni tramite le onde gravitazionali.

**Tecniche osservative.** La risoluzione angolare in base al diametro  $D$  del telescopio e la lunghezza d'onda  $\lambda$  da osserva è

$$\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Nel visibile, si possono distinguere a occhio nudo due oggetti distanti almeno 60 arcsec. Gli effetti atmosferici peggiorano la risoluzione, mentre varie tecniche interferometriche la possono migliorare. Di un oggetto celeste, si può misurare il flusso (in fotometria tramite il vettore di Poynting), lo spettro (spettroscopia), la polarizzazione (polarimetria).

**Coordinate celesti.** Esistono due sistemi di coordinate. Le coordinate celesti sono utilizzate nell'astronomia amatoriale. La posizione è definita in coordinate polari: ascensione retta (right ascension, RA,  $\alpha$ ), declinazione (declination, DEC,  $\delta$ ). L'ascensione retta si misura in ore da 0 a 24. La declinazione si misura in gradi da  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ .

In astronomia professionale, si utilizzano le coordinate galattiche il cui riferimento è il piano della galassia. L'origine delle coordinate è nel centro galattico. La longitudine  $l$  e la latitudine  $b$  sono entrambe definite in gradi.

**Proiezioni.** Si possono utilizzare due proiezioni. La proiezione azimutale equidistante presenta minime distorsioni, ma rappresenta solamente metà del cielo. La proiezione di Hammer-Aitoff rappresenta completamente il cielo, ma distorce fortemente i poli.

**Onde infrarosse.** Nel visibile, il centro galattico è oscurato da polveri galattiche. L'assorbimento nel piano galattico è una funzione della lunghezza d'onda e colpisce più la luce visibile dell'infrarosso

$$I = I_0 e^{-\alpha r}, \quad \alpha \propto \lambda^{-1}$$

L'infrarosso è assorbito dall'atmosfera, eccetto per alcune lunghezze d'onda in micrometri (J 1.25, H 1.65, K 2.2, L 3.45, M 4.7, N 10, Q 20, Z 35, nome lunghezza). Bisogna porre attenzione al rumore termico, in particolare per oggetti circa a  $T = 300$  K.

**Microonde.** Si osserva una radiazione uniforme di microonde a  $T = 2.728$  K. Sono presenti delle piccole anisotropie, delle variazioni di circa  $\Delta T = 3.353$  mK per effetto doppler di rotazione del Sole attorno al centro galattico. Rimuovendo tale effetto, si può ottenere il fondo di radiazione cosmica ( $\Delta T = 18 \mu\text{K}$ ). Questo indica che, all'inizio, l'universo non era perfettamente omogeneo e tali differenze hanno permesso la nascita di varie strutture celesti.

**Onde radio.** Tramite le onde radio, si sono scoperti segnali con intervalli sempre identici: la prima osservazione di radio pulsar. Inoltre, si sono osservate anche i quasar (i nuclei galattici attivi).

**Raggi X.** Si hanno avute le prime evidenze dei buchi neri (in particolare Cygnus X-1).

**Raggi gamma.** Si osservano i gamma-ray bursts. I flussi misurati sono costituiti da pochi fotoni a causa della lontananza.

**Onde gravitazionali.** Le onde gravitazionali sono predette dalla relatività generale. Esse sono distorsioni dello spazio-tempo come si propagano come un'onda. Sistemi binari di oggetti compatti sono le sorgenti più luminose. Anche le onde gravitazionali sono emesse a frequenze a seconda delle sorgenti.

Tramite le onde gravitazionali si è potuto osservare la presenza di buchi neri sopra le venti masse solari, limite per i buchi neri che emettono radiazione elettromagnetica?.

## Lezione 2

ven 30 set  
2022 13:30

Oltre a misurare l'intensità della radiazione di un corpo celeste, si può anche osservare la radiazione in ogni banda di frequenza. Per la legge di Planck, la densità di energia ad una particolare frequenza è

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

La densità di energia totale è

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = aT^4, \quad a \approx 7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

dove  $a$  è la costante di radiazione. Un corpo nero emette radiazione con un flusso  $f_\nu$  ad una particolare frequenza. In astronomia, si utilizzano le unità CGS

$$[f_\nu] = \text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

dove

$$1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg s}^{-1}$$

Il flusso totale (detto bolometrico in quanto integrato su tutte le frequenze) è

$$f = \int_0^\infty f_\nu d\nu = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 5.7 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann. La potenza emessa ad una frequenza da una stella è

$$L_\nu = f_\nu(r_\star) 4\pi r_\star^2, \quad [L] = \text{erg s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$$

dove  $r_\star$  è il raggio della stella. La luminosità, cioè la potenza irradiata, è

$$L = f(r_\star) 4\pi r_\star^2, \quad [L] = \text{erg s}^{-1}$$

Il flusso ad una distanza  $d$  è

$$f(d) = f(r_\star) \left(\frac{r_\star}{d}\right)^2 = f(r_\star) \frac{4\pi r_\star^2}{4\pi d^2} = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Il flusso è una quantità che si misura sempre. Sapendo la distanza con la stella, si può ricavare la sua luminosità

$$L = 4\pi d^2 f(d)$$

Esistono vari modi per misurare la distanza con una stella. Si vede il metodo della parallasse. Per una stella all'interno della galassia, si nota che, durante l'orbita della Terra, la stella si sposta. Sapendo di quanto si è spostata la Terra, e misurando gli angoli con la stella, si può ricavare la distanza per relazioni trigonometriche. Infatti, si consideri una stella sopra il sole rispetto la direzione perpendicolare al piano dell'eclittica. La distanza tra la stella ed il sole è

$$d\alpha \approx d_\odot$$

dove  $d_\odot$  è la distanza tra la Terra ed il sole, mentre  $\alpha$  è l'angolo che la Terra ed il sole formano, prendendo la stella come vertice.

A causa delle grandi distanze tra gli oggetti celesti, si utilizza il parsec:

$$1 \text{ pc} \approx 3.3 \text{ ly}$$

esso è la distanza alla quale un oggetto ha spostamento nel cielo pari ad un arcosecondo,  $\alpha = 1$  arcsec. La stella più vicina è Proxima Centauri a  $d \approx 1.3$  pc. Il metodo della parallasse funziona per stelle fino a 100 pc (per riferimento, il raggio della Via Lattea è 10 kpc). Per stelle più distanti, non si riesce a distinguere lo spostamento nel cielo. In alcuni casi, si può misurare la luminosità solamente usando informazioni dal flusso, ad esempio come varia oppure il suo spettro. Per stelle di cui si sa misurare la distanza, si ha

$$L = 4\pi d^2 f(d) = 4\pi r_\star^2 f(r_\star)$$

Una stella emette una radiazione di corpo nero. Di esso, si conosce la relazione tra il flusso e la temperatura per

$$L = 4\pi r_\star^2 \sigma T^4$$

Si misura il flusso in funzione della frequenza, si misura la distanza e si ottiene la luminosità. Tramite lo spettro di corpo nero (legge di Wien oppure fittare la legge di Planck) si ricava la temperatura. Così, dalla relazione precedente, si ottiene il raggio della stella.

**Magnitudine.** Gli antichi greci classificavano le stelle in base alla luminosità. Il valore zero è attribuito alla stella più luminosa, mentre cinque la stella meno luminosa a occhio nudo. Nel XIX secolo, la magnitudine (apparente) viene legata al logaritmo del flusso

$$m = k - 2.5 \log_{10} f$$

Si sceglie la costante  $k$  in modo da fissare lo zero. In un primo sistema, la costante è scelta tale per cui la magnitudine  $m$  sia zero per la stella Vega:

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{f}{f_{\text{Vega}}}$$

La stella più luminosa del cielo, Sirio, ha magnitudine  $m = -1.56$ . La magnitudine del sole è  $m = -26.73$ . Un fastidio è conoscere il flusso di Vega in ogni banda. Il sistema AB risolve tale problema:

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{f}{f_0}$$

dove  $f_0$  è fissato ed è lo stesso per ogni frequenza. Questo sistema è utilizzato nell'astronomia ottica.

Contrapposta alla magnitudine apparente, c'è quella assoluta  $M$ . Essa è la magnitudine di un oggetto a distanza di dieci parsec:

$$M \equiv m - 5 \log_{10} \frac{d}{10 \text{ pc}} = M_\odot - 2.5 \log_{10} \frac{L}{L_\odot}$$

dove  $M_\odot \approx 4.75$  e  $L_\odot \approx 3.8 \times 10^{26}$  W sono la magnitudine assoluta e la luminosità del sole.

**Bande di frequenza.** Le bande di frequenza sono denotate da pedici corrispondenti, ad esempio  $M_B$ . In ordine crescente di lunghezze d'onda:

- U, 0.365  $\mu\text{m}$  con larghezza  $\Delta\lambda = 0.068 \mu\text{m}$ , ultravioletto;
- B, 0.44  $\mu\text{m}$  con larghezza  $\Delta\lambda = 0.098 \mu\text{m}$ , blu-violetto;
- V, 0.55  $\mu\text{m}$  con larghezza  $\Delta\lambda = 0.089 \mu\text{m}$ , verde;
- R, 0.70  $\mu\text{m}$  con larghezza  $\Delta\lambda = 0.22 \mu\text{m}$ , rosso;
- I, 0.90  $\mu\text{m}$  con larghezza  $\Delta\lambda = 0.24 \mu\text{m}$ , infrarosso vicino;
- J, H, K, L, M, N, Q, tutte nell'infrarosso.

Si utilizza anche il colore: la differenza tra le magnitudini, apparenti o assolute, di due bande. Ad esempio, un colore è indicato come  $B - V$  ed è un numero puro. Esso è legato alla temperatura superficiale di una stella. Equivale al rapporto tra i flussi in due bande di frequenza.

**Determinazione della massa.** Si sfruttano i sistemi binari. La metà delle stelle come il sole fanno parte di un sistema binario. Si consideri un sistema binario. Le due stelle ruotano attorno al centro di massa sullo stesso piano. Si visualizzino le orbite perpendicolarmente (si noti che le stelle sono diametralmente opposte nelle proprie orbite). Sia  $r_i$  la distanza tra il centro di massa e la stella  $M_i$ . Per definizione di centro di massa si ha

$$r_1 M_1 = r_2 M_2$$

La distanza tra le due stelle è

$$a = r_1 + r_2$$

Per Keplero, la velocità angolare di rivoluzione è

$$\omega^2 = G \frac{M_1 + M_2}{a^3}$$

Riuscendo a risolvere le due stelle nel cielo, si può misurare la separazione angolare (dal centro di massa)

$$r_1 = \theta_1 d, \quad r_2 = \theta_2 d \implies \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

dove  $d$  è la distanza con la Terra. Se si può misurare la distanza con il sistema, allora si ricava  $r_i$  e dunque  $a$  da cui pure la massa totale del sistema tramite Keplero.

Questo metodo non funziona per una stella isolata. In generale, è difficile misurarne la massa. Inoltre, il caso visto è semplice perché si guarda il sistema in modo perpendicolare, altrimenti bisogna anche considerare la direzione di vista rispetto la normale al piano dell'orbita.

Alle volte non si può risolvere la presenza di un sistema binario, tuttavia si può studiare lo spettro di emissione per dedurre la presenza. Ad esempio, si vedono comparire delle righe di assorbimento dell'idrogeno, elemento presente nelle stelle. In quanto, una delle due stelle si muove rispetto l'altra, si osserva un effetto doppler delle righe di assorbimento. Studiando lo spostamento periodico si può inferire la presenza di una stella.

Un altro caso, sono le binarie osservate di taglio rispetto al piano orbitale: una stella eclissa l'altra. Questo modo è utile per rilevare esopianeti: si misurano le eclissi dovute al passaggio dei pianeti di fronte la stella.

### Lezione 3

Per stelle con masse  $M$  tra 1 e 10 masse solari, la luminosità è proporzionale alla massa  $M^{3.5}$ .

mar 04 ott  
2022 08:30

**Diagramma Hertzsprung-Russell.** Nel diagramma Hertzsprung-Russell si rappresentano stelle a distanze note. Si pone il colore  $B - V$  sull'asse delle ascisse, mentre sull'asse delle ordinate si pone la magnitudine assoluta in banda  $V$ . La temperatura cresce andando verso sinistra. Andando verso l'alto si hanno luminosità più alte. Si nota una diagonale discendente detta sequenza principale (main sequence) a cui appartengono la maggior parte delle stelle perché in questa zona esse trascorrono la maggior parte della propria vita. Tutte le stelle nella sequenza principale sono sostenute dalla fusione nucleare, in particolare fondendo idrogeno in elio. Esiste una frazione di stelle che si trovano sulla diagonale principale al di sopra della sequenza principale: questo è il ramo delle giganti (giant branch), le stelle in questa parte hanno raggi molto maggiori rispetto le altre. Ricordando che il colore è legato alla temperatura (in questo caso, maggiore verso sinistra), le stelle giganti hanno stessa luminosità delle stelle che piccano nel blu, ma hanno temperature più basse, per questo hanno un raggio maggiore secondo

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Sono presenti poche stelle nel ramo delle giganti perché è una fase breve di vita rispetto la sequenza principale.

Sono presenti degli oggetti compatti in basso a sinistra del diagramma: sono le nane bianche (white dwarves). Esse hanno stessa luminosità delle stelle che piccano nel rosso, ma hanno

temperatura molto maggiore; per questo hanno raggi più piccoli (domande d'esame!). Le nane bianche sono l'unico oggetto compatto che si riesce a mostrare nel diagramma H-R.

La massa cresce andando verso alto sinistra, ma esiste un limite superiore che causa l'implosione. Per stelle sulla sequenza principale, masse più grandi corrispondono a raggi più grandi. La vita decresce verso alto a sinistra, tali stelle sono più luminose, ma consumano più idrogeno per unità di tempo.

Si può analizzare lo spettro di una galassia per inferire la sua età: se sono presenti solo stelle rosse e non si formano stelle blu, allora la galassia è antica.

**Classificazione.** Le stelle sono classificate in base alla posizione nel diagramma H-R ed allo spettro di assorbimento del materiale sulla superficie della stella. In base allo spettro di assorbimento si assegnano delle lettere (OBAFGKM) ed esiste una correlazione tra lo spettro e la temperatura superficiale (O  $\leftrightarrow$  40 000 K e M  $\leftrightarrow$  2400 K). Si aggiunge un numero romano per indicare la posizione, ad esempio il sole è G2V, dove G2  $\approx$  5800 K. [immagine]

### 3 Struttura stellare

Il sole è composto in massa al 71% di idrogeno, al 27% di elio ed il restante 2% sono gli elementi più pesanti come carbonio, azoto, ossigeno, ferro, detti metalli in quanto più pesanti dell'elio (ma non sono metalli in senso chimico proprio). Le stelle sulla sequenza principale fondono idrogeno in elio rilasciando energia: lo 0.7% della massa dell'idrogeno diventa energia. Esistono processi più efficienti (circa 50%) per produrre energia.

Si formulano delle ipotesi per semplificare il modello di struttura stellare

- simmetria sferica;
- si trascura la rotazione, la velocità del fluido all'interno delle stelle è nulla;
- si trascurano gli effetti del campo magnetico;

**Free-fall timescale – tempo scala di caduta libera.** Si studia il moto di una particella sulla superficie di una stella quando si rimuove la pressione. Tale particella ha un'energia potenziale

$$dU = -\frac{GM dm}{R}$$

La particella cade verso il centro e trasforma l'energia potenziale in energia cinetica

$$\frac{1}{2} dm (dr)^2 = \frac{GM dm}{r} - \frac{GM dm}{R}$$

Il tempo necessario per collassare è

$$\begin{aligned} \tau &= -\int_R^0 \left[ 2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr = -\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_R^0 \sqrt{\frac{Rr}{R-r}} dr \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_R^0 \sqrt{\frac{r}{1-\frac{r}{R}}} dr, \quad x \equiv \frac{r}{R}, \quad dx = \frac{dr}{R} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_0^1 \sqrt{\frac{xR}{1-x}} R dx = \left[ \frac{R^3}{2GM} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \left[ \frac{R^3}{2GM} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si definisce la densità media come

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Da cui

$$\tau = \left[ \frac{3\pi}{32G\bar{\rho}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \propto \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}}$$

Per le stelle di neutroni è importante la dipendenza del tempo di caduta libera  $\tau$  dalla densità media  $\bar{\rho}$ . Per il sole si ha  $\tau \approx 30$  min. Rispetto il tempo tipico di vita, l'implosione è immediata.

**Equilibrio idrostatico.** Si descrive l'andamento della pressione in funzione del raggio. Si consideri un elemento infinitesimo di volume  $A dr$  e di massa  $dm$  posto su di una sfera di raggio  $r$ , la stella. La forza gravitazionale sull'elemento è

$$-\frac{GM(r) dm}{r^2}$$

Tale forza è bilanciata dal gradiente di pressione all'interno della stella. Dunque

$$-\frac{GM(r) dm}{r^2} = dP A$$

Considerato

$$dm = \rho(r) A dr$$

si ottiene

$$-\frac{GM(r)\rho(r)A dr}{r^2} = dP A \implies \boxed{d_r P = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}}$$

Questa è l'equazione di equilibrio idrostatico. Le equazioni di struttura sono equazioni differenziali ordinarie accoppiate: non si possono risolvere analiticamente, ma solo numericamente.

**Conservazione della massa.** La massa di un guscio sferico è

$$dM = \rho(r) 4\pi r^2 dr \implies \boxed{d_r M = \rho(r) 4\pi r^2}$$

Questa è l'equazione di conservazione della massa.

**Teorema.** Si introduce il teorema del Viriale. Dall'equazione di equilibrio idrostatico si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{r_*} 4\pi r^3 d_r P dr &= - \int_0^{r_*} 4\pi r^3 \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} dr = - \int_0^{r_*} 4\pi r^2 \frac{GM(r)\rho(r)}{r} dr \\ &= - \int_0^{M_*} \frac{GM(r) dM}{r} = E_{\text{grav}} < 0 \end{aligned}$$

cioè l'energia potenziale gravitazionale della stella. Inoltre, il primo membro diventa

$$\int_0^{r_*} 4\pi r^3 d_r P dr = \left[ \cancel{P(r) 4\pi r^3} \right]_0^{r_*} - 3 \int_0^{r_*} 4\pi r^2 P(r) dr \equiv E_{\text{grav}}$$

Il punto in cui la pressione si annulla è definito come il raggio della stella. Si trova un legame tra l'energia interna e l'energia gravitazionale. Si ipotizza che la stella sia costituita da un gas perfetto. Tramite relazioni termodinamiche vale

$$P = (\gamma - 1)e$$

dove  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  è il coefficiente di dilatazione adiabatica (detto anche indice adiabatico) ed  $e$  è la densità di energia interna. Dunque

$$E_{\text{grav}} = -3 \int_0^{r_*} 4\pi r^2 (\gamma - 1)e(r) dr = -3(\gamma - 1)E_{\text{thermal}}$$

Per un gas monoatomico classico, la pressione è

$$P = nk_B T, \quad e = \frac{3}{2}nk_B T = \frac{P}{\gamma - 1} \implies \gamma = \frac{5}{3}$$

dove  $n$  è il numero di particelle per unità di volume. Dunque

$$\boxed{E_{\text{gr}} = -3(\gamma - 1)E_{\text{th}}} = -2E_{\text{th}}$$

Questo è il teorema del Viriale. La seconda uguaglianza è la sua conseguenza per una stella costituita da gas monoatomico classico.

**Gas monoatomico classico.** L'energia totale è la somma dell'energia termica e dell'energia potenziale. Si noti che il fluido non si muove e la stella non ruota: non si ha energia cinetica. Quindi, per un gas monoatomico classico

$$E = E_{\text{gr}} + E_{\text{th}} = -E_{\text{th}} < 0$$

cioè la stella è un sistema stabile, legato. La relazione tra energia gravitazionale ed energia termica implica che il sole è un reattore termonucleare stabile, in grado di auto-controllo. Se aumenta l'energia termica, allora la stella si espande a causa dell'ulteriore pressione, l'energia gravitazionale diminuisce in modulo e per

$$-2E_{\text{th}} = E_{\text{gr}}$$

allora pure  $E_{\text{th}}$  deve diminuire in modulo, la stella quindi si stabilizza.

**Gas relativistico.** La pressione è data da due componenti: la pressione del gas dovuta alla temperatura e la pressione di radiazione dovuta ai fotoni. Si ipotizza che il contributo principale della pressione sia dovuto ai fotoni. Per il corpo nero, la pressione di radiazione è data da

$$P = \frac{1}{3}e, \quad \gamma = \frac{4}{3}$$

Da cui

$$-E_{\text{th}} = E_{\text{gr}}$$

L'energia totale è nulla, quindi il sistema è marginalmente legato: una perturbazione causa l'esplosione della stella. In questo modo, si può calcolare la massa massima di una stella sulla sequenza principale.

## Lezione 4

Un altro modo di esprimere il teorema del Viriale è tramite la pressione mediata sul volume

ven 07 ott  
2022 13:30

$$\bar{P} = \frac{\int_0^{r_*} P 4\pi r^2 dr}{\int_0^{r_*} 4\pi r^2 dr} \implies \bar{P}V = \int_0^{r_*} P 4\pi r^2 dr$$

Pertanto

$$E_{\text{gr}} = -3\bar{P}V \iff \boxed{\bar{P} = -\frac{1}{3V}E_{\text{grav}}}$$

In questo modo si può stimare la pressione media di una stella. Per prima cosa bisogna stimare l'energia gravitazionale

$$E_{\text{gr}} = - \int_0^{r_*} \frac{GM\rho 4\pi r^2}{r} dr$$

questa equazione andrebbe calcolata numericamente risolvendo le equazioni di struttura stellare in quanto sia  $M$  che  $\rho$  dipendono dal raggio. Per risolverla analiticamente, si ipotizza una densità  $\rho = \rho_*$  costante. La massa della stella è

$$M = \frac{4}{3}\pi r_*^3 \rho_*$$

Dunque,

$$E_{\text{gr}} = - \int_0^{r_*} \frac{G \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_* \right) \rho_* 4\pi r^2}{r} dr = -\frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{r_*}$$

L'energia reale dovrebbe essere maggiore in modulo perché al centro si ha una pressione maggiore ed essa pesa di più considerando  $\frac{1}{r}$ . Pertanto

$$E_{\text{gr}} \approx -\frac{GM_*^2}{r_*}$$



La pressione media è

$$\bar{P} = -\frac{1}{3V}E_{\text{gr}} \approx \frac{1}{3} \frac{GM_{\star}^2}{r_{\star}} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_{\star}^3} = \frac{GM_{\star}^2}{4\pi r_{\star}^4}$$

Per il sole si ha  $\bar{P} \approx 10^9$  atm. Si può stimare l'energia termica di una stella utilizzando

$$E_{\text{th}} = -\frac{1}{2}E_{\text{gr}} \approx \frac{1}{2} \frac{GM_{\star}^2}{r_{\star}}$$

Si ipotizza gas ideale monoatomico, da cui l'energia termica è

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2}Nk_B T_{\text{vir}}$$

dove  $N$  è il numero di particelle e la temperatura calcolata in questo modo è detta temperatura viriale. Inoltre si ha

$$M_{\star} = N\bar{m}$$

dove  $\bar{m}$  è la massa media di una particella. Pertanto

$$\frac{3}{2}Nk_B T_{\text{vir}} = \frac{1}{2} \frac{GM_{\star}N\bar{m}}{r_{\star}} \implies k_B T_{\text{vir}} = \frac{1}{3} \frac{GM_{\star}\bar{m}}{r_{\star}}$$

Il sole è composto principalmente di idrogeno ionizzato (perché si suppone che la temperatura sia alta):

$$\bar{m} = \frac{m_e + m_p}{2} \approx \frac{1}{2}m_p$$

Dunque, la temperatura viriale del sole è

$$T_{\text{vir}} \approx 10^6 \text{ K}$$

da intendere come una temperatura media.

**Tempo scala di Kelvin-Helmholtz.** Dal teorema del Viriale, si può anche stimare il tempo di vita di una stella per irraggiare completamente la propria energia interna in assenza di processi interni che creino altra energia. Infatti

$$t_{\text{KH}} \approx \frac{E_{\text{KH}}}{L} = -\frac{1}{2} \frac{E_{\text{gr}}}{L} \approx \frac{GM_{\star}^2}{2r_{\star}L}$$

dove  $L$  è la luminosità. Per il sole si ha  $10^7$  yr. Questa è una conferma che esiste un processo che genera continuamente energia in quanto il sistema solare ha circa 5 miliardi di anni,  $5 \times 10^9$  yr.

**Trasporto di energia.** Per un gas, l'energia si può trasportare per convezione o radiazione (trasporto convettivo e radiativo). Nella convezione, l'energia è trasportata dalle particelle stesse. Nella radiazione, l'energia è trasportata dai fotoni.

Il trasporto convettivo è dominante in stelle più grandi del sole, viceversa per le stelle più piccole. Si studia l'equazione del trasporto radiativo.

Un fotone che trasporta l'energia radiativa viene continuamente assorbito da elettroni e poi rimesso: il fotone non è sempre il medesimo. Qua, però, si parla di urti per semplificare la trattazione. Sia  $n$  la densità volumica di numero d'urti. Allora il numero d'urti è

$$N = nd\sigma$$

dove  $d$  è la distanza percorsa e  $\sigma$  è la sezione d'urto (cross-section).

Si definisce il libero cammino medio  $l$  (mean free path). Essa è la distanza media tra due urti successivi. Dunque

$$l = \frac{1}{n\sigma}$$

Questa espressione va bene per un solo tipo di molecole (che determina  $n$ ) ed un solo tipo di processo fisico (che determina la sezione d'urto). In generale si ha

$$l = \frac{1}{\sum_i n_i \sigma_i} = \frac{1}{\rho k}, \quad [k] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$$

dove  $\rho$  è la densità del gas e  $k$  è l'opacità. Questa dipende dalla densità, temperatura ed altri fattori.

Si può calcolare il tempo che un fotone impiega per arrivare in superficie. Si considera il sole. Si supponga che sia composto da elettroni e protoni: si ipotizza un processo di diffusione di Thomson la cui sezione d'urto è

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{l^2}{m_e c^2} \right)^2 \approx 6.7 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Si noti che, a causa della dipendenza dalla massa, la sezione d'urto con il protone è trascurabile rispetto a quella con l'elettrone. La densità di numero di elettroni è

$$n_e = \frac{\rho}{m_H}, \quad \rho \approx 1.4 \text{ g cm}^{-3}$$

Il libero cammino medio risulta essere

$$l = \frac{1}{n_e \sigma_T} \approx 2 \text{ cm}$$

Il tempo per arrivare alla superficie del sole è

$$\tau = \frac{l}{c} \left( \frac{R_\odot}{l} \right)^2 = \frac{R_\odot^2}{lc} \approx 52\,000 \text{ yr}$$

dove le parentesi provengono dal random walk ed è il numero di urti per percorrere il raggio del sole.

Si deriva la l'equazione del trasporto di energia. Un flusso emesso di fotoni viene assorbito e varia secondo

$$df = -k\rho f dr$$

tutte le quantità sono funzioni del raggio. Inoltre, si sa

$$L(r) = f(r)4\pi r^2$$

Alla variazione di flusso corrisponde una variazione di pressione di radiazione

$$dP = -\frac{df}{c} = -\frac{k\rho f}{c} dr$$

La pressione di radiazione di un corpo nero è

$$P = \frac{1}{3}aT^4 \implies d_T P = \frac{4}{3}aT^3 = d_r P d_T r = -\frac{k\rho f}{c} d_T r$$

dove  $a$  è la costante di radiazione. Da cui risulta

$$d_r T = -\frac{3}{4} \frac{k\rho f}{acT^3} = -\frac{3}{16} \frac{k\rho L}{\pi acT^3 r^2}$$

L'equazione del trasporto radiativo è

$$\boxed{d_r T = -\frac{3}{16} \frac{k\rho}{\pi acr^2 T^3} L}$$

dove  $\rho$  e  $T$  sono funzioni del raggio.

## Lezione 5

L'opacità è funzione di

$$k \propto \rho^\beta T^\gamma$$

mar 11 ott  
2022 08:30

A seconda della temperatura, ci sono diversi processi di assorbimento che dominano:

- A basse temperature,  $T < 10^{4.5}$  K, si hanno processi di assorbimento bound-bound: l'elettrone è legato ad un atomo sia prima che dopo l'urto con un fotone. In questo caso, si possono determinare i parametri  $\beta = 0.5$  e  $\gamma = 4$ .
- A temperature intermedie,  $10^{4.5}$  K  $< T < 10^7$  K, si hanno processi bound-free e free-free. Nel primo, l'elettrone è legato ad un atomo, poi viene ionizzato da un fotone e si separa dall'atomo. Nel secondo, un elettrone libero viene colpito da un fotone e rimane libero: si ha un processo di inverse Bremsstrahlung. I parametri sono  $\beta = 1$  e  $\gamma = 3.5$ .
- Ad alte temperature,  $T > 10^7$  K, si ha scattering Thomson. I parametri sono  $\beta = \gamma = 0$ .

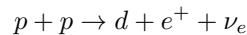
**Conservazione dell'energia.** Si introduce la potenza prodotta per unità di massa  $\varepsilon(r)$  che descrive i processi di generazione dell'energia. Pertanto

$$dm \varepsilon = dL \implies 4\pi r^2 \rho dr \varepsilon = dL \implies \boxed{d_r L = 4\pi r^2 \rho \varepsilon}$$

con  $\rho$  ed  $\varepsilon$  dipendenti dal raggio. Tuttavia,  $\varepsilon$  si può scrivere come funzione di densità e temperatura. Esso descrive processi di fusione nucleare (!). Le stelle sulla sequenza principale fondono idrogeno in elio.

**Fusione nucleare.** Esistono due processi per compiere questa di fusione. Per stelle come il sole, o meno massive, la catena dominante è la  $p-p$  chain, dove  $p$  sta per "protone". Si ha  $\varepsilon \propto \rho T^4$ . Per stelle più massive del sole, il ciclo dominante è CNO cycle (le sigle sono quelle degli atomi mediatori del processo) in cui  $\varepsilon \propto \rho T^{17}$ .

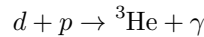
**Catena protone-protone.** Due nuclei di idrogeno sono fusi insieme generando un deuterio, un positrone ed un neutrino elettrico



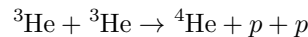
Il positrone interagisce con gli elettroni liberi e si annichilisce producendo fotoni di radiazione  $\gamma$ . Il neutrino è debolmente interagente, cioè interagisce tramite l'interazione debole (mediata dai bosoni vettoriali?), pertanto hanno un cammino medio grande: un terzo di parsec. Il flusso di neutrini dal sole rivelato sulla Terra è circa  $10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

Si è trovata una discrepanza tra il flusso stimato di neutrini elettronici e quelli rivelati: si è scoperto che i neutrini possono cambiare tipo. Questo può avvenire solamente se il neutrino è dotato di massa. Questo è in disaccordo con il modello standard secondo cui i neutrini non avrebbero massa.

Il nucleo di deuterio si fonde con un protone generando  $^3\text{He}$  e un fotone in radiazione  $\gamma$ :



Infine si ha



In totale si hanno bisogno di sei protoni liberi, ma se ne producono due altri. Al netto della reazione, si sono convertiti quattro protoni in un atomo di elio. La differenza in energia è

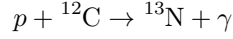
$$[m(4p) - m(^4\text{He})]c^2 = 25.7 \text{ MeV}$$

cioè circa lo 0.7% della massa dei quattro protoni: questa è l'efficienza del processo. I procedimenti di accrescimento dei buchi neri producono energia al 50% di efficienza.

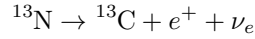
Si può avere una stima del tempo necessario affinché una stella irraggi una frazione della propria massa. Si considera il 10% del sole. Tale tempo è

$$\tau = \frac{M_{\odot} c^2 \cdot 10\% \cdot 0.7\%}{L_{\odot}} \approx 10^{10} \text{ yr}$$

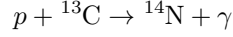
**Ciclo carbonio-azoto-ossigeno.** Questo è sempre un ciclo di fusione di idrogeno in elio per le stelle sulla sequenza principale, ma sono presenti degli intermediari. Si ha



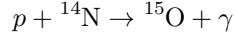
Gli atomi di carbonio sono generati da cicli successivi: provengono da stelle già decadute. L'isotopo dell'azoto ottenuto decade velocemente tramite decadimento beta



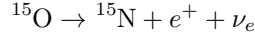
Successivamente



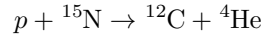
poi



Si ha un altro decadimento beta



Infine



Tale ciclo ha efficienza poco maggiore della catena protone-protone.

**Descrizione catena protone-protone.** Si ritorna alla catena protone-protone. Sebbene si considera il gas in modo classico, bisogna comunque tenere conto di effetti quantistici. I protoni si repellono tramite forza coulombiana. Tuttavia, a piccole scale  $r_0 \approx 1.4 \times 10^{-13} \text{ cm}$ , si ha anche l'interazione forte che domina la forza coulombiana ed avvicina i protoni. Il problema risulta avvicinarli a tale distanza (Figura 1). All'interno del sole si ha una temperatura  $T \approx 10^7 \text{ K}$ .

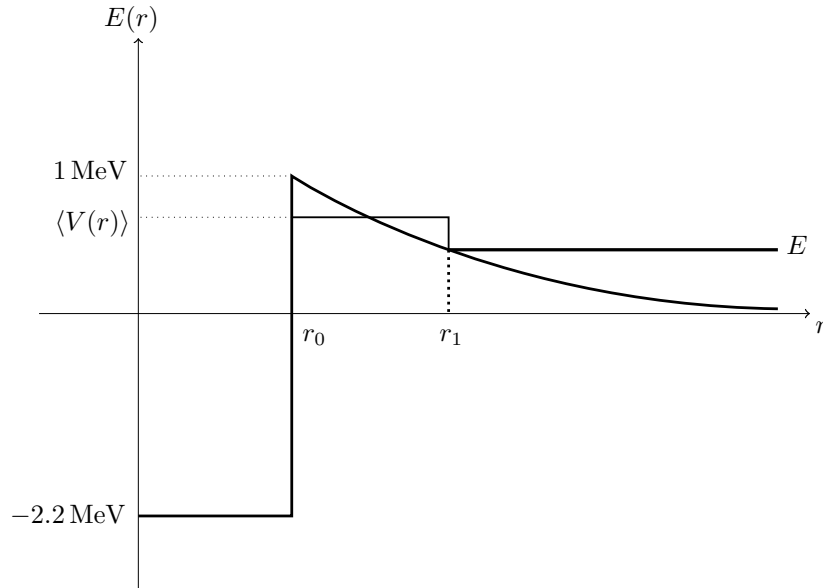


Figura 1: Andamento dell'energia potenziale.

L'energia cinetica di una singola particella (un protone) di gas a tale temperatura è

$$K = \frac{3}{2} k_B T \approx 1 \text{ keV}$$

L'energia coulombiana ad  $r_0$  è maggiore dell'energia cinetica

$$E_{\text{coul}}(r_0) \approx 1 \text{ MeV}$$

Dunque, la distanza minima di avvicinamento tra due protoni per agitazione termica è mille volte maggiore della distanza necessaria al sopravvento dell'interazione forte. Sia  $r_1$  la distanza tra i protoni per cui l'energia cinetica è pari all'energia elettrostatica. Per la distribuzione di energia di Stefan-Boltzmann, la frazione di protoni con energia maggiore dell'energia cinetica  $K$  è

$$e^{-\frac{E}{k_B T}} = e^{-1000} \approx 10^{-434}$$

Si supponga che il sole sia costituito solamente da idrogeno. Il numero di protoni è

$$N_p = \frac{M_{\odot}}{m_H} \approx 10^{57}$$

Pertanto, non ci sono protoni che abbiano energia sufficiente a vincere la repulsione coulombiana. Per la fisica classica, la reazione nucleare protone-protone non potrebbe avvenire. Bisogna utilizzare la meccanica quantistica, in particolare l'effetto tunnel: una particella può oltrepassare una barriera di potenziale.

## Lezione 6

ven 14 ott  
2022 13:30

Si può risolvere il problema in due modi. Nel primo modo bisogna risolvere l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo considerando un protone che da destra va ad impattare sul protone posto nell'origine, ma così bisogna risolvere l'equazione numericamente. Il secondo modo è probabilistico: si considera un flusso di protoni entrante e si studia la percentuale in grado di oltrepassare la barriera. Questo metodo non dipende dal tempo: si può usare l'equazione di Schrödinger stazionaria:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \varphi(r) = [V(r) - E] \varphi(r), \quad V(r) = \frac{e^2}{r}$$

dove  $\mu = \frac{1}{2} m_p$  è la massa ridotta perché il problema è a due corpi. Vale  $V(r_1) = E = K$  in quanto l'energia totale della particella è l'energia potenziale coulombiana. Dunque, si riscrive il potenziale come

$$V(r_1) = \frac{e^2}{r_1} = E \implies V(r) = \frac{Er_1}{r}$$

Per semplificare i calcoli, il potenziale tra  $r_0$  ed  $r_1$  si approssima con una barriera rettangolare la cui altezza è la media del potenziale pesata sul volume:

$$\langle V(r) \rangle = \frac{\int_{r_0}^{r_1} V(r) 4\pi r^2 dr}{\int_{r_0}^{r_1} 4\pi r^2 dr} \approx \frac{3}{2} E, \quad r_1 \gg r_0$$

Si calcola la probabilità che un protone possa oltrepassare la barriera. Nell'equazione di Schrödinger si sostituisce il potenziale con il valore costante calcolato in modo da semplificare i

calcoli. L'equazione diventa

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2}{m_p} \nabla^2 \varphi(r) &= \frac{1}{2} E \varphi(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1 \\ \frac{\hbar^2}{m_p} \frac{1}{r} \partial_r^2 (r \varphi) &= \frac{1}{2} E \varphi \\ \frac{1}{r} \partial_r^2 (r \varphi) &= \frac{m_p E}{2 \hbar^2} \varphi, \quad \beta^2 \equiv \frac{m_p E}{2 \hbar^2} \\ \partial_r^2 (r \varphi) &= \beta^2 r \varphi \\ \varphi(r) &= \frac{A}{r} e^{\beta r}\end{aligned}$$

La soluzione (indipendente) con esponente negativo si può escludere per la condizione di quadrato-integrabilità. Interessa la frazione di protoni arrivati ad  $r_1$  che sono in grado di arrivare a  $r_0$  cioè oltrepassare la barriera. Tale frazione è anche la probabilità di tunneling:

$$\begin{aligned}\frac{|\varphi(r_0)|^2 4\pi r_0^2 dr}{|\varphi(r_1)|^2 4\pi r_1^2 dr} &= e^{2\beta(r_0-r_1)} \approx e^{-2\beta r_1} = \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{\mu E} \frac{e^2}{E} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{2\sqrt{\mu}}{\hbar} \frac{e^2}{\sqrt{E}} \right] = \exp \left[ -\sqrt{\frac{E_G}{E}} \right]\end{aligned}$$

Il termine  $\sqrt{E_G} = \frac{2\sqrt{\mu}e^2}{\hbar}$  è la radice dell'energia di Gamow. In questo caso, essa vale

$$E_G \approx 500 \text{ keV}$$

La frazione di protoni che passano è  $e^{-\sqrt{500}} \approx 10^{-10}$ . Essa è bassa, tuttavia, molto maggiore di quanto calcolato con Stefan-Boltzmann. Confrontando tale valore con il numero di protoni calcolato nel sole, allora il numero di protoni che oltrepassano la barriera sono comunque  $10^{47}$ . Senza effetto tunnel, non si potrebbe avere la fusione nucleare.

**Equazioni di struttura stellare.** Si riassumono le equazioni di struttura stellare. L'equazione di equilibrio idrostatico

$$d_r P = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

L'equazione di conservazione della massa

$$d_r M = 4\pi r^2 \rho$$

L'equazione del trasporto radiativo

$$d_r T = -\frac{3Lk\rho}{16\pi r^2 ac T^3}$$

L'equazione di conservazione dell'energia

$$d_r L = 4\pi r^2 \rho \varepsilon$$

I membri a sinistra e la densità sono le incognite. Infatti, l'opacità  $k$  e  $\varepsilon$  possono essere scritte in funzione della densità e della temperatura. Il sistema non è risolvibile: manca l'equazione di stato.

**Equazione di stato.** Detta equation of state (EoS). Essa descrive come la pressione dipende dalla densità, dalla temperatura e della composizione del gas:

$$P = P(\rho, T, \text{composizione})$$

In questo modo, il sistema è chiuso e si può determinare una soluzione univoca.

Tali equazioni vanno risolte numericamente scegliendo delle condizioni iniziali al centro della stella e si integra fin dove la pressione arriva a zero, cioè alla superficie della stella. Si sceglie il valore della densità e della temperatura al centro della stella. Bisogna anche decidere la composizione. Al centro, la massa e la luminosità sono nulle.

### 3.1 Equazione di stato

Si studia l'equazione di stato. Le frazioni di idrogeno, elio e metalli sono

$$X = \frac{\rho_H}{\rho}, \quad Y = \frac{\rho_{He}}{\rho}, \quad Z = \frac{\rho_{metalli}}{\rho}$$

Il gas nelle stelle è considerato classico e non relativistico; si passa ad un gas quantistico quando si studiano oggetti compatti. Oltre ad essere presente la pressione dovuta alla temperatura del gas, esiste anche la pressione di radiazione:

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$$

La pressione del gas deriva dalla teoria termodinamica classica

$$P_{\text{gas}} = nk_B T = \frac{\rho}{\bar{m}} k_B T$$

dove  $n$  è il numero di particelle per unità di volume e  $\bar{m}$  è la massa media per particella. Per più costituenti, la massa media è

$$\bar{m} = \frac{\sum n_i m_i}{\sum n_i} = \frac{\rho}{n} \implies n = \frac{\rho}{\bar{m}}$$

La dipendenza dell'equazione di stato dalla composizione rientra nella massa media  $\bar{m}$ . I numeri di particelle di idrogeno, elio e metalli per unità di volume sono

$$n_H = \frac{\rho}{m_H} X, \quad n_{He} = \frac{\rho}{4m_H} Y, \quad n_A = \frac{\rho}{A m_H} Z_A$$

Si approssima la massa del neutrone a quella del protone. Questi sono le densità per i singoli atomi, ma il gas è costituito da nuclei ed elettroni liberi: il gas è ionizzato. Il numero totale di particelle per unità di volume è

$$n = 2n_H + 3n_{He} + \sum_A \frac{1}{2} A n_A = \frac{\rho}{m_H} \left[ 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right] = \frac{\rho}{2m_H} \left[ 3X + \frac{1}{2}Y + 1 \right]$$

Si approssima il numero di nuclei di metalli e dei loro elettroni: la metà del nucleo è costituita da protoni a cui corrisponde un elettrone; inoltre non si scrive  $\frac{A}{2} + 1$  perché l'unità costituita dal nucleo è trascurabile rispetto  $\frac{A}{2}$ , soprattutto per elementi più pesanti. Si ricorda che  $X + Y + Z = 1$ .

La massa media risulta essere

$$\frac{\bar{m}}{m_H} = \frac{\rho}{n m_H} = \frac{2}{3X + \frac{1}{2}Y + 1}$$

La composizione non è la stessa per tutte le regioni della stella, ma dipende dal raggio. Per il sole, considerando tutto il volume, si ha

$$X = 0.71, \quad Y = 0.27, \quad Z = 0.02, \quad \bar{m} \approx 0.61 m_H$$

A regioni più centrali si ha meno idrogeno a causa della fusione. Per il sole si ha

$$X = 0.34, \quad Y = 0.64, \quad Z = 0.02, \quad \bar{m} \approx 0.85 m_H$$

Si studia la pressione di radiazione. Tramite l'ipotesi di corpo nero, si ottiene una pressione di radiazione

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$$

Dunque, l'equazione di stato è

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{\rho}{m}k_B T + \frac{1}{3}aT^4$$

## Lezione 7

mar 18 ott  
2022 08:30

Le equazioni di struttura stella non dipendono dal tempo perché sono equazioni di equilibrio. Un'approssimazione è considerare che le grandezze dipendano dal raggio secondo una certa potenza. Dalle prime tre equazioni si ha

$$P \propto \frac{M\rho}{r}, \quad M \propto r^3\rho, \quad L \propto \frac{T^4 r}{k\rho}$$

Si considerano stelle sulla sequenza principale per cui la pressione del gas domina sulla pressione di radiazione:  $P \propto \rho T$ . Si ipotizza che l'opacità  $k$  sia costante: si ha alta temperatura per cui domina lo scattering Thomson. Dunque, dalle relazioni per la pressione  $P$  si ottiene

$$T \propto \frac{M}{r}$$

La luminosità diventa

$$L \propto \frac{M^4}{r^4} \frac{r}{k\rho} \propto \frac{M^4}{r^3\rho} \propto M^3$$

Si è già menzionata questa relazione per la luminosità. In realtà, la potenza della massa varia in base alla posizione nella sequenza principale: basti ricordare che la luminosità va come la massa ad una certa potenza positiva. Il tempo di vita di una stella va come

$$\tau \propto \frac{M}{L} \propto M^{-2}$$

Stelle più massive hanno vita breve. Dalla relazione della temperatura, si può concludere che, sebbene la massa delle stelle sulla sequenza principale cambia, la temperatura nel nucleo non varia molto (dunque è costante) perché la reazione di fusione nucleare è in equilibrio (la variazione in massa è maggiore della variazione della temperatura). Pertanto, si ipotizza che

$$T = \text{cost} \propto \frac{M}{r} \implies \boxed{r \sim M}$$

Da cui si ottiene

$$M \sim r^3\rho \implies \rho \sim M^{-2}$$

Questa relazione non è più valida per oggetti compatti. Stelle più massive hanno densità medie minori. Stelle massive (come quelle blu) hanno vita minore, pertanto osservando lo spettro delle stelle, ne si può stimare l'età e l'età della galassia di cui fanno parte.

**Esercizio.** 3.2 Maoz. Si mostra che la pressione del gas domina sulla pressione di radiazione nel nucleo del sole. La pressione totale è

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{\rho}{m}k_B T + \frac{1}{3}aT^4$$

Nel nucleo del sole, la temperatura è  $T = 10^7$  K. Il sole si trova a metà della propria vita, dunque la sua composizione è

$$X = 0.34, \quad Y = 0.64, \quad Z = 0.02$$



La massa media per particella nel nucleo è  $\bar{m} \approx 0.85m_{\text{H}}$ . La densità è stimata essere  $\rho = 150 \text{ g cm}^{-3}$ . Pertanto, la pressione del gas è

$$P_{\text{gas}} \approx 1.45 \times 10^{17} \text{ dyn cm}^{-2} \approx 10^{11} \text{ atm}$$

La pressione di radiazione risulta essere

$$P_{\text{rad}} \approx 2.5 \times 10^{13} \text{ dyn cm}^{-2} \approx 10^7 \text{ atm}$$

**Esercizio.** 3.3 Maoz. Si stima la massa massima di una stella sulla sequenza principale. Si ipotizzi che l'energia potenziale gravitazionale sia

$$E_{\text{gr}} = -\frac{GM^2}{R}$$

Per il teorema del viriale, risulta

$$\bar{P} = -\frac{1}{3} \frac{E_{\text{gr}}}{V}$$

Si mostra la dipendenza della pressione dalla massa e dalla densità:

$$P = \frac{1}{3} \frac{GM^2}{R} \frac{1}{V} = \frac{1}{3} \frac{GM}{R} \rho$$

Noto

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \implies R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Si ottiene la pressione totale

$$P = \frac{1}{3} G \rho M \left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi}{3^4}\right)^{\frac{1}{3}} G M^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}$$

Si ipotizzi che la pressione di radiazione sia uguale alla pressione del gas. Si trova la pressione totale. Si ha

$$\frac{\rho}{\bar{m}} k_B T = P_{\text{gas}} = P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4$$

Si vuole rimuovere la dipendenza dalla temperatura:

$$T^3 = \frac{3\rho k_B}{a\bar{m}}$$

La pressione totale risulta essere

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{2}{3} a T^4 = \frac{2}{3} a \left(\frac{3\rho k_B}{a\bar{m}}\right)^{\frac{4}{3}} = 2 \left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{k_B \rho}{\bar{m}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Si eguagliano le due espressioni trovate per la pressione: la prima vale in generale, la seconda vale per stelle marginalmente legate. Quindi

$$\left(\frac{4\pi}{3^4}\right)^{\frac{1}{3}} G M^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} = 2 \left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{k_B \rho}{\bar{m}}\right)^{\frac{4}{3}} \implies M^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3^4}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{2}{G} \left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{k_B}{\bar{m}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Infine, si ipotizza che la stella sia costituita interamente da idrogeno completamente ionizzato, per cui  $\bar{m} = 0.5m_{\text{H}}$ . Dunque, il valore massimo è

$$M \approx 114 M_{\odot}$$

Esiste anche un limite inferiore ed è tale per cui bisogna avere temperature e densità nel nucleo per permettere la fusione nucleare.

## 4 Evoluzione stellare

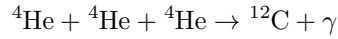
Si studia cosa succede quanto terminano i processi di fusione nucleare di idrogeno in elio. Si trattano prima le stelle come il sole, per stelle con massa

$$M \lesssim 8M_{\odot}$$

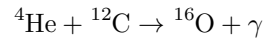
Il nucleo della stella è costituito da elio, mentre gli strati esterni sono elio. Nel nucleo, non è più generata energia e viene a mancare la pressione tenere in pieni la stella. Il nucleo si contrae e aumenta la temperatura. L'idrogeno immediatamente oltre il nucleo comincia a fondere. Dunque, lo strato di idrogeno comincia ad espandersi: la stella si muove verso le giganti rosse [r]. Le temperature e densità aumentano fino a valori

$$T \sim 10^8 \text{ K}, \quad \rho \sim 10^4 \text{ g cm}^{-3}$$

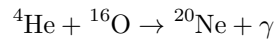
Oltre i quali si ha la fusione dell'elio tramite la reazione triple alpha:



[r] Oltre al carbonio, si può anche produrre ossigeno



Si ha anche una reazione minore



[r] La fusione nucleare è ripresa. Gli strati estremi vengono espulsi a causa dell'espansione. Per il sole, la velocità di espulsione è

$$\dot{M} \sim 10^{-14} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

Quando la stella fonde l'elio, ha un tasso di espulsione pari a

$$\dot{M} \sim 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

In questa fase sono importanti i moti convettivi. Essa dura un decimo della vita passata sulla sequenza principale. Finito l'elio, il nucleo è costituito da carbonio e ossigeno: la stella si contrae. Il mantello più esterno viene espulso creando le nebulose planetarie (planetary nebulae, ma non hanno a che fare con la creazione dei pianeti). Resta un rimasuglio del nucleo della stella di circa una massa solare. Ad un certo punto la contrazione si arresta e rimane un nana bianca [r]. Ora si considera una stella con massa

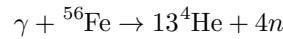
$$M \gtrsim 8M_{\odot}$$

La sequenza è uguale fino alla fusione dell'elio in carbonio ed ossigeno. Quando termina l'elio, durante la fase di contrazione si possono raggiungere temperature e densità maggiori del caso precedente: si inizia a fondere il carbonio. Si ha una nuova fase che arresta il collasso: si produce neon, magnesio e sodio. Finito il carbonio, il nucleo riprende a contrarsi e, come prima, fonde il neon in ossigeno e magnesio. Finito il neon, il nucleo collassa e si fonde l'ossigeno in silicio, argon e calcio. Finito l'ossigeno, il nucleo collassa e si fonde il silicio in ferro, nickel (e, in misura minore, cromo, manganese e cobalto). Finito il silicio, si ha un nucleo ferroso che si contrae, ma non continua la fusione nucleare: l'energia di legame del ferro è la più alta, l'energia richiesta per la fusione è maggiore di quella liberata. Non si ha una fusione auto-sostenibile. La stella è instabile e si ha un'esplosione di supernova. Il rimasuglio è una stella di neutroni oppure un buco nero. La scelta tra i due dipende dalle masse solari: si ha la prima fino a venti masse solari, il secondo si ha per masse superiori.

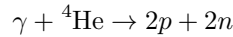
## Lezione 8

ven 21 ott  
2022 13:30

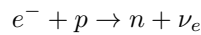
Una stella di massa  $M = 15M_{\odot}$  fonde idrogeno in elio per  $10^7$  yr [Woosley & Janka, 2005]. Finito l'idrogeno, si fonde l'elio in carbonio, ossigeno e neon per  $10^6$  yr. La stella si sposta sul ramo delle giganti rosse: gli strati più esterni si espandono a causa della temperatura della fusione dell'elio. Dal carbonio si genera neon, magnesio e sodio per  $10^3$  yr. Si fonde il neon in ossigeno e magnesio per meno di un anno. Si fonde l'ossigeno in silicio, argon e calcio per due anni e mezzo. Il silicio si fonde in ferro e nickel per diciotto giorni. Tra ogni stadio e l'altro, la stella si compie sempre più e si creano vari strati di materiali. Il nucleo ferroso consuma più energia di quanta la fusione ne rilascia. Esso è circondato dagli elementi più leggeri creati in precedenza (sebbene i moti convettivi siano importanti). Sezionando una stella si trovano vari strati concentrici (onion scheme structure): ferro, silicio, ossigeno, neon, carbonio, elio ed idrogeno. Le sezioni più esterne sono più grandi di quelle interne. Densità e temperatura diminuiscono con il raggio crescente: nel nucleo non ci sono processi di fusione nucleare, ma continuano negli altri strati. La stella collassa su se stessa e avvengono vari processi. In primo luogo, la fotodisintegrazione. Il nucleo si trova ad alta temperatura. I fotoni emessi disintegrano i nuclei ferrosi



Tali nuclei sono colpiti a loro volta dai fotoni energetici



Si ha un gas di nucleoni ed elettroni liberi. La stella si contrae, la densità aumenta: avviene la neutronizzazione. Gli elettroni si fondono con i protoni



questo processo è detto anche inverse  $\beta$ -decay. Questo processo domina sul decadimento del neutrone libero per densità

$$\rho \gtrsim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$$

Per densità  $\rho \sim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  si ha un nucleo dominato da neutroni

$$n_e = n_p = \frac{1}{10} n_n$$

Per stelle sulla sequenza principale con massa  $8M_{\odot} \lesssim M \lesssim 20M_{\odot}$  si formano stelle di neutroni perché il nucleo di neutroni fornisce una pressione che stabilizza la stella. Sotto le otto masse solari, si forma una nana bianca perché i processi di fusione si arrestano al carbonio. Per stelle massicce  $M > 20M_{\odot}$  il nucleo diventa troppo massivo e si ha un buco nero (black hole).

Le stelle di neutroni ed i buchi neri sono prodotti a seguito di una supernova. Il nucleo ha una grande pressione che rallenta il collasso del nucleo, tuttavia gli strati più esterni collassano comunque sul nucleo creando così una esplosione di supernova. Tale esplosione espelle gli strati più esterni che sono costituiti da materiali che costituiscono i pianeti. Per masse molto grandi, si produce direttamente un buco nero senza passare dalla supernova.

Le nane bianche sono oggetti molto stabili e dunque durano nel tempo. Se essa si trova in un sistema binario, allora può strappare del materiale alla sua stella sorella ed esplodere, oppure le due spiraleggiano emettendo onde gravitazionali e collidono.

## Lezione 9

mar 25 ott  
2022 08:30

### 4.1 Supernovae

Le supernovae sono state osservate nel corso dei secoli perché sono fenomeni alquanto luminosi. La prima supernova storicamente attestata è quella del 1006, poi sono successe quelle del 1054, 1181, 1572 e 1604. La più recente nel nostro gruppo locale è 1987A. La supernova del 1054 è famosa perché nel XVIII secolo si sono osservati i suoi resti: la nebulosa del granchio.

Nel 1968, con l'avvento di telescopi in altre bande dello spettro elettromagnetico, nella nebulosa del granchio si è osservata una sorgente luminosa nella banda radio: una stella di neutroni. Essa è stata la prima pulsar ad essere stata collegata con un'esplosione di supernova.

**Classificazione.** Le supernovae si classificano in base alle righe di assorbimento nel loro spettro. Prima si osservano le righe di assorbimento dell'idrogeno: se ci sono, allora le supernovae sono di tipo II, altrimenti di tipo I. Di queste ultime sono presenti dei sottotipi. Se sono presenti delle righe di assorbimento del silicio alla seconda ionizzazione (Si II) allora la supernova è di tipo Ia, altrimenti si controllano le linee di assorbimento di prima ionizzazione dell'elio (He I): se sono presenti allora si ha una supernova di tipo Ib, altrimenti di tipo Ic. Le supernovae di tipo II, Ib e Ic sono dovute all'esplosione di stelle sopra le otto masse solari. Quelle di tipo II sono dovute a stelle che avevano ancora il loro mantello di idrogeno prima dell'esplosione, mentre gli altri due tipi hanno espulso lo strato esterno di idrogeno. Le supernovae di tipo Ia costituiscono una categoria a parte interessante in cosmologia.

**Supernovae tipo Ia.** La caratteristica particolare delle supernovae di tipo Ia è come le loro curve di luce (cioè l'evoluzione della luminosità del flusso in funzione del tempo) siano simili (a parte un fattore di scala). Questo è utile in cosmologia perché vale la relazione

$$M_{\max}(B) = -21.726 + 2.698\Delta m_{15}$$

La magnitudine (la luminosità) massima della banda  $B$  è in relazione con la variazione della magnitudine apparente  $\Delta m_{15}$  (il flusso) tra il momento di massimo e quindici giorni dopo. Tale relazione vale per supernovae di cui si conosce la distanza. Si suppone che tale relazione valga per ogni supernova di tipo Ia e non solo quelle di cui si conosce la distanza. Questo permette di misurare la distanza di supernovae Ia. Questo metodo permette di misurare la distanza con galassie molto lontane. In cosmologia, queste supernovae permettono di studiare la struttura dell'universo: si è scoperta l'esistenza dell'energia oscura. Esse hanno frequenza media di un evento ogni trecento anni.

Si trovano in tutti i tipi di galassie (antiche e giovani): questo fa pensare che esse siano dovute all'esplosione di una nana bianca in sistemi binari. Il meccanismo di esplosione di tali nane bianche è ancora oggetto di studi, ma ci sono due idee. La nana bianca da sola è stabile, ma se si trova in sistema binario si hanno due scenari: la compagna è una stella sulla sequenza principale oppure è anch'essa una nana bianca. Nel primo caso (single degenerate scenario), la compagna ha dei venti di materia che accrescono la nana bianca. Possono avvenire due processi: una fusione incontrollata che coinvolge atomi di elio e causa una esplosione, oppure la nana bianca accumula abbastanza materia da collassare su sé. Nel secondo caso (double degenerate scenario), il sistema emette onde gravitazionali che portano energia e momento angolare: le due nane bianche si avvicinano collidendo in un'esplosione.

Il fatto che queste supernovae sono presenti in galassie antiche fa pensare che i loro progenitori sono stelle antiche, cioè nane bianche che si formano alla fine del ciclo di vita di stelle sulla sequenza principale. Inoltre, l'esplosione distrugge completamente la stella coinvolta perché non si osservano più indizi della presenza di qualche corpo. La supposizione delle nane bianche si riconcilia anche con il fatto che le supernovae Ia sono eventi rari perché bisogna attendere la formazione di almeno una nana bianca in un sistema binario.

**Core collapse supernova.** Gli altri tipi di supernovae sono prodotti da stelle più massive, per questo sono più frequenti (stelle più massive muoiono prima). Il meccanismo di esplosione è il collasso del nucleo (core collapse). I dettagli esatti sono oggetto di studio. L'idea generale è una stella sulla sequenza principale con più di otto masse solari arriva al punto in cui ha un nucleo ferroso, collassa su se stessa, avviene la fotodisintegrazione e la neutralizzazione: il gas nel nucleo è costituito da fermioni a pressioni elevate ed inizia ad arrestare il collasso formando una proto-stella di neutroni (da cui, in base alla massa del nucleo, si ottiene una stella di neutroni oppure un buco nero). Gli elementi più esterni cadono sul nucleo generando un'onda d'urto e l'esplosione associata.

Si è osservato un caso diretto che questo tipo di supernova sono dovute al collasso del nucleo, alla morte di una stella. Gli elementi più pesanti del ferro (come oro, platino, uranio, etc) sono creati durante le supernovae nel processo rapido di nucleosintesi (r-process nucleosynthesis, "r" per "rapid"). Durante l'esplosione, i nuclei degli elementi assorbono i neutroni liberi del gas

espulso: tali neutroni liberi sono assorbiti in tempi minori del tempo scala di decadimento di un neutrone (un neutrone libero decade in un protone ed un elettrone), per questo il processo è detto “rapido”. In questo modo si ottengono gli elementi più pesanti del ferro. Questo processo non avviene solamente nelle supernovae di questo tipo, ma anche nella collisione tra due stelle di neutroni.

**Similitudini e differenza tra tipo Ia e tipo II.** Le supernovae di tipo Ia

- non presentano righe di assorbimento dell'idrogeno;
- sono dovute all'esplosione termonucleare di una nana bianca;
- comportano la distruzione totale di una stella?;
- il materiale espulso ha energia cinetica pari a  $10^{51}$  erg;
- la velocità del materiale espulso (ejecta) va da  $5000 \text{ km s}^{-1}$  a  $30\,000 \text{ km s}^{-1}$ ;
- non si è osservata alcuna emissione di neutrini;
- l'energia totale emessa nella banda ottica è  $10^{49}$  erg;
- la luminosa al picco è  $10^{43} \text{ erg s}^{-1}$  per due settimane, che è la stessa luminosità di una galassia;
- avvengono una volta ogni trecento anni;
- producono due terzi del ferro;
- avvengono in galassie antiche e galassie giovani.

Le supernovae di tipo II

- presentano righe di assorbimento dell'idrogeno;
- sono dovute al collasso di stelle con massa maggiore di otto masse solari;
- producono una stella di neutroni oppure un buco nero;
- il materiale espulso ha energia cinetica pari a  $10^{51}$  erg;
- la velocità del materiale espulso (ejecta) va da  $2000 \text{ km s}^{-1}$  a  $30\,000 \text{ km s}^{-1}$ ;
- si è osservata l'emissione di neutrini dovuta al processo di neutralizzazione;
- l'energia totale emessa nella banda ottica è  $10^{49}$  erg;
- la luminosa al picco è  $3 \times 10^{53} \text{ erg s}^{-1}$  per tre mesi, che è la stessa luminosità di una galassia;
- avvengono due volte ogni cento anni;
- producono un terzo del ferro;
- avvengono in galassie giovani.

**Supernova 1987A.** La supernova 1987A fu una supernova di tipo II avvenuta nella nube di Magellano (ad una decina di kiloparsec) osservata il 24 febbraio 1987. Tale supernova coincise con la posizione della stella gigante Sanduleak -69 202: dopo l'esplosione non rimase alcun corpo. Tale stella aveva circa venti masse solari. Vennero rilevati 20 neutrini. Anche le esplosioni di supernova possono generare onde gravitazionali, ma negli anni ottanta non erano disponibili rilevatori abbastanza sensibili. La stella emise già i propri strati esterni e, quando esplose, l'onda d'urto andò, con il tempo, a riscaldare l'anello più esterno di materiali espulsi. Le esplosioni di supernova sono studiate dal punto di vista numerico per comprendere i dettagli delle esplosioni: si simulano le esplosioni fino a quando si riesce a riprodurre qualcosa che somigli a quanto si osserva. In astrofisica computazionale, non è così semplice causare una supernova. Gli strati più esterni cadono sul nucleo di neutroni, rimbalzano ed esplodono verso l'esterno: affinché l'esplosione abbia successo, l'onda d'urto deve attraversare tutti gli strati della stella, ma non è banale come essa, con una certa energia cinetica, contrasti gli strati esterni che continuano a cadere sul nucleo e possa uscire fuori. L'esplosione non ha simmetria sferica. Tramite simulazioni (in cui si rappresenta l'entropia specifica che si può tradurre in temperatura), si è mostrato proprio il fatto che l'onda d'urto potrebbe non uscire dalla stella e dunque essa non causa una esplosione (il fenomeno è detto Standing Accretion Shock Instability). Inoltre, si perde la simmetria sferica: si genera una instabilità che, tra le altre cose, causa un moto oscillatorio del fluido della stella. L'instabilità avviene nel plasma che compone la stella, ma essa è stata studiata in laboratorio con un sistema simile (Foglizzo, Physical Review Letters 108, 051103, 2012). In un piano circolare e curvo, si pone una sottile lamina d'acqua, al centro si pone un cilindro che simula la superficie della proto-stella di neutroni. Il flusso d'acqua si scontra con tale superficie, si genera una onda d'urto che si espande, ma va in stallo perché non ha energia sufficiente a contrastare l'acqua che arriva dall'esterno. In questo esperimento si osserva la stessa instabilità vista nelle simulazioni numeriche. Sembra che il successo di un'esplosione di supernova sia dipendente dal flusso di neutrini provenienti dal nucleo. La materia esterna collassa, si forma l'onda d'urto con una sua energia cinetica. L'energia cinetica dell'onda non è abbastanza per sopraffare gli strati esterni e va in stallo. L'onda può acquistare energia tramite il flusso di neutrini che provengono dai processi di neutralizzazione nel nucleo (la proto-stella di neutroni). Sebbene i neutrini siano debolmente interagenti, essi trasportano energia e momento donandoli alla materia che li catturano.

## Lezione 10

ven 28 ott  
2022 13:30

## 5 Oggetti compatti

Le nane bianche, le stelle di neutroni ed i buchi neri sono oggetti compatti: essi non mantengono l'equilibrio tramite la pressione sviluppata da un fluido al proprio interno. Essi sono detti compatti perché hanno un alto valore di compattezza

$$C \equiv \frac{MG}{Rc^2}$$

dove  $M$  è la massa ed  $R$  è il raggio. Si vede un confronto tra vari oggetti celesti:

Tabella 1: Confronto tra oggetti compatti ed il Sole.

Oggetto	Massa	Raggio	Densità/(g cm <sup>-3</sup> )	Compattezza
Sole	$M_{\odot}$	$R_{\odot}$	$\sim 1$	$10^{-6}$
White dwarf	$0.6M_{\odot}$	$\sim 10^{-2}R_{\odot}$	$\sim 10^6$	$10^{-4}$
Neutron star	$\sim 1.4M_{\odot}$	$\sim 10^{-5}R_{\odot}$	$\sim 10^{14} - 10^{15}$	0.2
Black hole	No limite	$\frac{2MG}{c^2}$	Non applicabile	0.5 - 1

Si utilizzano i valori mediani. La densità di una stella di neutroni è la stessa densità all'interno di un nucleo atomico [r]. A livello teorico, i buchi neri non hanno un limite di massa. Il raggio del

buco nero è scritto per un buco nero senza momento angolare. Non ha senso di parlare densità per un buco nero perché esiste a prescindere dalla presenza di materia. I valori di compattezza sono dati per buchi neri senza momento angolare e per buchi neri con massima rotazione possibile. Per le stelle di neutroni e buchi neri si ha bisogno della relatività generale per descrivere la struttura. Per le nane bianche, le correzioni di relatività generale non sono così importanti, pertanto esse possono essere studiate tramite le equazione di struttura stellare. Tuttavia, per studiare l'equilibrio si deve comunque usare la relatività generale.

Le nane bianche si trovano nella regione in basso a sinistra del diagramma H-R. Le stelle di neutroni ed i buchi neri non sono visibili nell'ottico e dunque non si possono posizionare in un diagramma H-R. La scoperta della stella di neutroni non è avvenuta tramite l'emissione di corpo nero, ma tramite gamma ray bursts?. Un buco nero non emette radiazione elettromagnetica: le prime osservazione sono avvenute tramite i dischi di accrescimento che si riscaldano ed emettono radiazione in X. La prima scoperta indiretta è stata fatta così. Negli ultimi anni, molte misure sono state fatti tramite le onde gravitazionali.

## 5.1 Nane bianche – white dwarfs

Le nane bianche sono state scoperte nel 1863 tramite l'osservazione di Sirius B, la stella compagna di Sirio. Le nane bianche si possono osservare nell'ottico. All'inizio non si sapeva come un oggetto così potesse esistere. Esse si trovano in basso a sinistra nel diagramma H-R: hanno la stella luminosità delle stelle in basso a destra sulla sequenza principale, però hanno temperature molto più alte, quanto le stelle in alto a sinistra della sequenza principale. Lo spettro osservato è di corpo nero, il cui flusso alla superficie è

$$S = \sigma T^4$$

La luminosità è

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Questo implica che il raggio è piccolo a parità di luminosità di stelle sulla sequenze principali. Si ottiene un raggio dell'ordine di quello terrestre. Grazie al fatto che Sirius B è in un sistema binario con Sirio, ne si può stimare la massa: circa una massa solare.

Nel XIX secolo, non si spiegava l'esistenza delle nane bianche: tutti i modelli di struttura stellare che derivano dalle equazioni omonime si applicano a stelle sulla sequenza principale. La soluzione di questo mistero è data dalla meccanica quantistica: ad ogni particella si può associare la propria lunghezza d'onda di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}, \quad K = E = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $p$  è il momento della particella. La seconda uguaglianza vale nel limite non relativistico. Le particelle delle nane bianche costituiscono un gas a cui si può applicare la termodinamica. Quando due particelle si trovano ad una distanza confrontabile con la lunghezza d'onda di de Broglie, bisogna trattare tali due particelle in modo quantistico e non più classico.

Per una stella come il Sole, considerando la temperatura al centro e gli elettroni che compongono il gas, [r]. Dunque, dentro il sole, il gas è classico. Per le nane bianche, si hanno densità maggiori, di ordini  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$ . A tali densità, gli elettroni si trovano ad una distanza inferiore alla propria lunghezza d'onda di de Broglie. Pertanto, le nane bianche non presentano un gas classico e non sono tenute in equilibrio dalla pressione di tale gas: si ha un gas quantistico. Questo discorso non è valido per i nuclei perché servono densità maggiori: essi costituiscono comunque un gas classico.

Si studia la struttura delle nane bianche tramite un'equazione di stato che tenga conto della natura quantistica del gas di elettroni. Gli elettroni sono dei fermioni e per essi vale il principio di esclusione di Pauli: due fermioni non possono occupare la stessa posizione all'interno dello spazio delle fasi (fasi inteso come posizione e momento, dunque lo stesso stato quantistico?).

Lo spazio delle fasi è quantizzato in termini di  $\sqrt{\frac{h}{2}}$ . Comprimeo il gas, lo spazio disponibile è minore, pertanto gli elettroni devono aumentare in momento: si riempiono livelli energetici maggiori a parità di numero di elettroni. Si forzano gli elettroni ad occupare livelli energetici maggiori ed essi generano una pressione (disconnessa dalla temperatura della stella). Si ipotizza che sia questa pressione a mantenere l'equilibrio delle nane bianche. Questo effetto domina per alte densità. L'equazione di stato per un gas di questo tipo è funzione solamente della densità.

**Statistica di Fermi-Dirac.** Gli elettroni seguono la statistica, distribuzione di Fermi-Dirac [r]

$$\frac{dN}{d^3p dV} = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu(T)}{k_B T}\right) + 1}$$

dove  $N$  è il numero di particelle,  $p$  è il momento e  $\mu$  è il potenziale chimico: esso descrive quanto il gas cambia aggiungendo una particella mantenendo volume ed entropia costanti. Il termine  $k_B T$  è sempre minore dell'energia  $E$  dei fermioni in una nana bianca (temperature massime di  $10^8$  K), pertanto, si ha una buona approssimazione per  $T \rightarrow 0$ . In tale limite, il potenziale chimico tende all'energia di fermi  $\mu(T) \rightarrow E_F$ . Inoltre, si ottiene

$$\frac{dN}{d^3p dV} = \begin{cases} \frac{2}{h^3}, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases}$$

La funzione è a gradino. L'energia di fermi è il livello energetico più alto occupato dagli elettroni. Per le nane bianche, l'energia è dell'ordine di  $10^{10}$  K.

**Number density.** Si calcola il numero di elettroni per unità di volume

$$n_e = \int_0^\infty \frac{dN}{d^3p dV} d^3p$$

[r] Nel caso non relativistico, il livello energetico massimo è

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e}$$

una particella in tale livello ha quantità di moto di Fermi. Nel caso relativistico si ha

$$E_F^2 = (p_F c)^2 + (m_e c^2)^2$$

Poiché non esistono particelle ad energia maggiore dell'energia di Fermi, dunque non hanno momento maggiore del momento di Fermi, segue

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$$

ipotizzando che i momenti siano distribuiti in maniera isotropa. Si ipotizza che la nana bianca sia composta da un unico elemento di numero atomico  $Z$  (in verità c'è carbonio ed ossigeno):

$$n_e = Z n_N = Z \frac{\rho}{A m_p} \iff \rho = \frac{A}{Z} m_p n_e$$

dove  $n_N$  è la number density dei nuclei in quanto la stella è neutra e  $A$  è il numero di massa.



## Lezione 11

ven 04 nov  
2022 13:30

**Pressione di un gas di elettroni – equazione di stato.** Un elettrone urta con una superficie interna della stella generando una pressione. La forza infinitesimale esercitata su di una superficie perpendicolare alla direzione  $x$  è

$$dF_x = \frac{2p_x}{dt}$$

La pressione corrispondente ad un elettrone è

$$d_A F_x = \frac{2p_x}{dA} \frac{dx}{dt} = \frac{2p_x}{dV} v_x$$

La pressione totale risulta essere

$$P = \frac{1}{2} \int \frac{2p_x v_x}{dV} \frac{dN}{d^3p} d^3p$$

Il fattore  $\frac{1}{2}$  è motivato dal fatto che solamente la metà degli elettroni colpisce la parete, l'altra metà si sta allontanando da essa. Per il caso non relativistico si ottiene

$$p_x v_x = m v_x^2 = \frac{1}{3} m v^2 = \frac{1}{3} p v$$

in quanto, per isotropia dei momenti, si ha

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2$$

cioè la velocità è essenzialmente radiale. La pressione totale diventa

$$P = \frac{1}{3} \int p v \frac{dN}{dV d^3p} d^3p = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} p v d^3p = \frac{2}{3} \int_0^{p_F} p v 4\pi p^2 dp$$

Si trattano i limiti relativistico e classico. In quest'ultimo si ha  $v \ll c$  e quindi

$$P = \frac{8\pi}{3} \int_0^{p_F} \frac{1}{h^3} p \frac{p}{m_e} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5 = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{5m_e} n_e^{\frac{5}{3}}$$

Sostituendo la number density in funzione della densità, si ottiene l'equazione di stato

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{20m_e m_p^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{5}{3}}$$

dove  $\frac{Z}{A} \approx 0.5$  per la maggior parte di elementi. Per riferimento

$$\rho \sim 10^6 \text{ g cm}^{-3} \implies P \approx 10 \times 10^{16} \text{ atm}$$

cioè cinque ordini di grandezza maggiori rispetto alla pressione al centro del sole. Questa pressione è solamente quella dovuta agli elettroni. Ad essa bisogna aggiungere quella dovuta ai nuclei. A densità di questo ordine, i nuclei sono comunque più distanti rispetto alla loro lunghezza d'onda di de Broglie: la pressione è dovuta alla temperatura. Infatti

$$P_{\text{th}} = n_N k_B T = \frac{\rho}{A m_p} k_B T \approx 10^{14} \text{ atm}, \quad T = 10^7 \text{ K}$$

Il calcolo è svolto per il carbonio-12. Il contributo corrisponde ad una parte su cento. La pressione per un gas di elettroni degenere non relativistico è

$$P = k \rho^{\frac{5}{3}}$$

Il regime non relativistico corrisponde al limite di basse densità. Viceversa, il caso fortemente relativistico corrisponde a densità elevate che tendono ad infinito. Si studia questo caso,  $v = c$ . Si ha l'equazione di stato

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} p c 4\pi p^2 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{4m_p^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{4}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} = k\rho^{\frac{4}{3}}$$

Una equazione di stato della forma

$$P = k\rho^\gamma$$

viene detta politropica. Per un gas non relativistico e per un gas fortemente relativistico rispettivamente si ha

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad \gamma = \frac{4}{3}$$

Pure i neutroni sono fermioni (come gli elettroni) e si ritrovano le stesse espressioni.

**Equazioni di struttura stellare.** Si è trovata l'equazione di stato per un gas di elettroni degeneri: essa descrive come la pressione varia in funzione della densità. La pressione dovuta al principio di esclusione di Pauli domina sulla pressione dovuta all'agitazione termica. In quanto non sono più presenti processi di fusione nucleare, si può ignorare l'equazione di conservazione dell'energia. Inoltre, l'equazione di trasporto radiativo è superflua perché l'equazione di stato non dipende dalla temperatura: il profilo di temperatura è irrilevante per la struttura (la pressione termica si può trascurare). Le uniche equazioni di struttura stella necessarie sono quella di conservazione della massa e quella di equilibrio idrostatico

$$d_r M = 4\pi r^2 \rho, \quad d_r P = -\frac{GM\rho}{r^2}, \quad P = k\rho^\gamma$$

Si hanno tre incognite,  $M$ ,  $P$  e  $\rho$ , in tre equazioni: il sistema è determinato. Per trovare la soluzione bisogna conoscere la pressione e la densità al centro della stella (dove la massa è nulla). Si integra fino a che la pressione si annulla: tal punto è il raggio della nana bianca. Tuttavia, si può applicare un trucco per studiare il comportamento di equilibrio senza trovare la soluzione numerica. Questo metodo è utile per caratterizzare le nane bianche. Si uniscono due equazioni al prim'ordine in una al secondo ordine. Si arriva all'equazione di Lane-Emden: una soluzione di tale equazione rappresenta una famiglia di soluzioni per le due precedenti. Una volta fissato  $\gamma$ , e risolvendo l'equazione di Lane-Emden, si ottengono tutte le soluzioni con l'equazione di stato sopra riportata, senza dover integrare numericamente per ogni valore di  $\rho$  al centro della stella. Dunque

$$\frac{r^2}{\rho} d_r P = -GM \implies d_r \left( \frac{r^2}{\rho} d_r P \right) = -G d_r M = -4\pi G r^2 \rho \implies \frac{1}{r^2} d_r \left( \frac{r^2}{\rho} d_r P \right) = -4\pi G \rho$$

Si sostituisce  $P = k\rho^\gamma$  e si rende l'equazione adimensionale. Si pone

$$\gamma \equiv 1 + \frac{1}{n}, \quad \theta^n = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c = \rho(r=0), \quad \xi \equiv \frac{r}{a}, \quad a = \left[ \frac{(n+1)k\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}}$$

dove  $n$  è l'indice politropico. Si ottiene l'equazione di Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} d_\xi (\xi^2 d_\xi \theta) = -\theta^n \iff \nabla_\xi^2 \theta = -\theta^n$$

Le condizioni al bordo sono

$$\theta(\xi=0) = 1, \quad d_\xi \theta(0) = \theta'(\xi=0) = 0$$

La condizione sulla derivata deriva dalla volontà di avere un massimo al centro della stella. Fissato  $n$ , l'equazione si risolve numericamente integrando da  $\xi = 0$  fino a quando  $\theta = 0$ . Sia  $\xi_1$  il punto in cui ciò accade. Una volta trovata la soluzione, la massa è

$$M = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} d\xi (\xi d_\xi \theta) d\xi = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

alla terza uguaglianza si utilizza Lane-Emden. Si mette il modulo in quanto è noto che la derivata è negativa. Il raggio risulta essere

$$R = a\xi_1 = \left[ \frac{(n+1)k}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1-n}{2n}} \xi_1$$

Queste due grandezze dipendono dalla densità centrale della stella: una singola soluzione all'equazione di Lane-Emden fornisce una famiglia di soluzioni di nane bianche per diversi valori di densità centrali. Combinando le due espressioni si può ottenere una relazione tra la massa ed il raggio

$$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

Nel caso non relativistico si ha

$$\gamma = \frac{5}{3} \implies n = \frac{3}{2} \implies R \propto M^{-\frac{1}{3}}$$

Più aumenta la massa e più piccola è la stella. Le nane bianche non possono avere una massa illimitata: esse diventano sempre più compatte. Il limite superiore si ottiene considerando il caso fortemente relativistico, cioè per grandi densità

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 4\pi \left[ \frac{(n+1)k}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

Per il caso relativistico si ha

$$\gamma = \frac{4}{3} \implies n = 3 \implies \boxed{M = 1.457 \left( \frac{A}{2Z} \right)^{-2} M_\odot}$$

La massa non dipende più dalla densità. Questo limite si chiama massa di Chandrasekhar. La soluzione generale si può trovare sullo Shapiro.

## Lezione 12

Isolando la densità centrale nelle espressioni della massa e del raggio, si ottiene

$$M = 4\pi R^{\frac{3-n}{1-n}} \left[ \frac{(n+1)k}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{3-n}{n-1}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

Per stelle sulla sequenza principale, maggiore è la massa e maggiore è il raggio. Per le nane bianche è l'opposto. Tale differenza si è potuta ottenere utilizzando una equazione di stato politropica (a differenza di una equazione di stato di un gas perfetto).

Si vedono i valori numerici per l'equazione di Lane-Emden. Per il caso non relativistico, si ha

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad n = \frac{3}{2}, \quad \xi_1 \approx 3.65, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \approx 2.71$$

Da cui si ottiene

$$R \approx 1.122 \times 10^4 \left( \frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{6}} \left( \frac{A}{2Z} \right)^{-\frac{5}{6}} \text{ km}$$

$$M \approx 0.496 \left( \frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{A}{2Z} \right)^{-\frac{5}{2}} M_\odot$$

Per il caso relativistico, si ha

$$\gamma = \frac{4}{3}, \quad n = 3, \quad \xi_1 \approx 6.90, \quad \xi_1^2 |\theta'(x_1)| \approx 2.02$$

La massa corrispondente è la massa di Chandrasekhar. Oltre di essa, nemmeno una densità infinita sarebbe in grado di generare una pressione sufficiente da sostenere la stella. Questo è anche il motivo per cui le nane bianche si formano da stelle con masse minore alle otto masse solari. Per stelle con masse maggiori, il nucleo ferroso ha una massa superiore al limite ed il gas di neutroni degeneri non è in grado di sostenere il nucleo portando la stella al collasso.

**Processo di raffreddamento.** Le nane bianche non hanno più processi di fusione nucleare. Esse si sono formate con una temperatura residua della stella che le ha formate: con il tempo esse vanno raffreddandosi. La temperatura superficiale è tipicamente  $10^4$  K, mentre all'interno fino a  $10^7$  K. Questa energia termica viene irradiata come onde elettromagnetiche

$$L = -d_t E_{\text{therm}} = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Lo spettro di emissione è quello di corpo nero perché la radiazione è di natura termica. L'energia termica è fornita dai nuclei che costituiscono ancora un gas classico

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2} N_{\text{nuclei}} k_B T \implies d_t E_{\text{th}} = \frac{3}{2} N_{\text{nuc}} k_B d_t T$$

Il numero di nuclei rimane costante in quanto non è presente alcun processo di fusione nucleare. Si noti che si sta trascurando il profilo radiale della temperatura: nell'espressione della luminosità, la temperatura è quella superficiale, mentre nell'energia termica non essa sarebbe strettamente la stessa. Si ipotizza che la temperatura sia la stessa in tutta la stella. Combinando le due equazioni si ottiene

$$-4\pi R^2 \sigma T^4 = \frac{3}{2} N_{\text{nuc}} k_B d_t T \implies \tau = \int_0^\tau dt = - \int_{T_0}^{T_\tau} \frac{3 N_{\text{nuc}} k_B}{8\pi R^2 \sigma} \frac{dT}{T^4} \propto \frac{1}{T_\tau^3}$$

dove  $t = 0$  è l'istante in cui è nata la nana bianca e  $\tau$  è la sua età. Si ipotizza che  $T_0 \gg T_\tau$ . Dunque

$$T_\tau \propto \tau^{-\frac{1}{3}}$$

Il processo di raffreddamento è estremamente lento. Modelli accurati prevedono che sono necessari più di un miliardo di anni affinché una nana bianca possa raffreddarsi ad una temperatura di qualche migliaio di kelvin. La nana bianca più fredda osservata ha una temperatura superficiale di 3500 K. Il motivo per cui sono dette bianche è che presentano temperatura efficaci elevate (a sinistra sul diagramma H-R).

**Classificazione.** Pure le nane bianche si possono classificare in base agli spettri di emissione: DA, DB, DO, DC, DZ, DQ. Le prime tre hanno marcate linee H, He I, He II rispettivamente. La quarta ha uno spettro continuo. La penultima ha marcate linee di metalli e l'ultima ha marcate linee del carbonio.

**Altre considerazioni.** Tra il 2004 ed il 2005 si osservò una nana bianca (BPM 37093) che mostrava oscillazioni. Da esse si può misurare la densità media. Il tempo scala dinamico per cui una stella può collassare su se stessa è lo stesso tempo scala che determina le oscillazioni: tale tempo dipende dal reciproco della radice della densità media. La stella osservata era in accordo con un modello di nana bianca il cui interno è costituito da un cristallo di carbonio ed ossigeno.

## 5.2 Stelle di neutroni

La storia delle osservazioni e predizioni delle nane bianche è

- 1863, prima osservazione di una nana bianca, Sirius B;
- 1926, statistica di Fermi-Dirac;
- 1931, massa di Chandrasekhar.

Per le stelle di neutroni, la storia è l'opposto. Nel 1930 si scopre il neutrone. Dall'idea del gas di elettroni degeneri, si è pensata alla possibilità di stelle sostenute da gas di neutroni degeneri, in quanto pure i neutroni sono fermioni e obbediscono la statistica di Fermi-Dirac. Nel 1934, Baade e Zwicky propongono che le supernovae possano produrre una stella di neutroni. Per avere un gas quantistico di neutroni si necessitano densità più elevate di quelle di nane bianche: le stelle sono più compatte. Bisogna utilizzare la relatività generale per descrivere la struttura. Nel 1939, Tolman, Oppenheimer e Volkoff trovano le equazioni di struttura stellare. Finora è tutto teoria. Nel 1967 si osserva la prima stella di neutroni.

**Equazioni di struttura.** Le stelle di neutroni sono così compatte che è necessario utilizzare le equazioni di struttura in relatività generale. Si utilizzano le unità naturali:  $G = c = 1$ . Le equazioni di struttura derivano da

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = (\rho + \rho\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Nella prima equazione si ha il tensore di Einstein  $G^{\mu\nu}$  che si può intendere come un potenziale gravitazione e il tensore energia-impulso  $T^{\mu\nu}$  che descrive la distribuzione di massa ed energia. Da queste deriva l'equazione di Poisson. La seconda equazione è la conservazione dell'energia e dell'impulso dove la notazione con il punto e virgola indica la derivata covariante. Nella terza equazione,  $\rho$  è la densità di massa a riposo,  $\varepsilon$  è l'energia interna per unità di massa,  $P$  è la pressione,  $u^\mu$  è la quadri-velocità e  $g^{\mu\nu}$  è il tensore della metrica.

L'equazione equivalente dell'equilibrio idrostatico è

$$\partial_r P = -(e + P) \partial_r \phi, \quad \partial_r \phi = \frac{4\pi r^3 P + m}{r(r - 2m)}$$

la grandezza  $\phi$  si può intendere come il potenziale gravitazionale. L'equazione equivalente della conservazione della massa è

$$\partial_r m = 4\pi r^2 e$$

Dove le equazioni di stato sono

$$P = k p^\gamma, \quad e = \rho + \rho\varepsilon = \rho + \frac{P}{\gamma - 1}$$

La prima è l'equazione politropica per la pressione e la seconda è la densità di energia totale che considera la densità di energia interna e la densità di energia di massa. Le equazioni devono essere ancora risolte numericamente.

**Equazione di equilibrio idrostatico.** La formula esplicita è

$$\begin{aligned} \partial_r P &= -(e + P) \partial_r \phi = -(e + P) \frac{4\pi r^3 P + m}{r(r - 2m)} = -\frac{e + P}{r^2} (m + 4\pi r^3 P) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \\ &= -\frac{G \left(e + \frac{P}{c^2}\right)}{r^2} \left(m + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2mG}{rc^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Per basse compattezze e per gas non relativistici vale

$$\rho\varepsilon + P \ll \rho c^2$$

per cui si ottiene l'equazione di equilibrio statico ricordando

$$e = \rho + \frac{\rho\varepsilon}{c^2}$$

**Massa.** La massa massima teorica delle stelle di neutroni è di circa  $0.7M_{\odot}$ . Tuttavia, le osservazioni forniscono un valor modale, più frequente di  $1.4M_{\odot}$ . Pertanto, non funziona il modello teorico dell'equazione di stato politropica inserito l'equazione di struttura stellare in relatività generale. Questo perché l'equazione di stato per una stella di neutroni è più complicata di una equazione politropica. Sebbene i neutroni siano fermioni, essi sono anche nucleoni soggetti alla forza forte. Tuttora, non si ha idea di come i neutroni si comportino a densità ( $10^{14} - 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ) superiori a quelle di un nucleo atomico. Ciò che risulta determinante per capire come la densità di neutroni si traduca in una pressione, è comprendere come i neutroni interagiscono a densità elevate.

Una stella di neutroni viene divisa in quattro regioni: la crosta esterna, la crosta interna (insieme spesse circa 1 km, mentre il raggio è 10 – 14 km), nucleo esterno e nucleo interno (in cui si raggiungono densità maggiori a quelle dei nuclei atomici).

Le equazioni di fisica nucleare che modellano le interazioni non sono risolvibili analiticamente e non si sa nemmeno quale debba essere il potenziale che descrive l'interazione a tali densità. Ma soprattutto, non si possono fare esperimenti a terra in tali condizioni. Negli acceleratori di particelle, i nucleoni sono accelerati ad alte velocità, quindi si possono intendere come se fossero ad alte temperature, tuttavia, nelle stelle di neutroni, la temperatura è irrilevante. Non si riescono a riprodurre densità elevate a basse temperature.

**Osservazioni.** Esistono varie equazioni di stato che possono produrre le masse osservate. Tuttavia, risulta difficile misurare il raggio delle stelle di neutroni, in quanto, essendo oggetti piccoli, il flusso della radiazione di corpo nero è talmente debole che non si può osservare nell'ottico.

La prima stella di neutroni fu osservata come pulsar nel 1967. Le pulsar sono stelle di neutroni magnetizzate con spin elevati, ma costanti. Dai periodi di osservazione si capì che l'unico oggetto in grado di generare un segnale del genere è una stella di neutroni.

L'anno dopo si scoprì una pulsar all'interno della nebulosa del granchio residuo della supernova SN 1054. La maggior parte di stelle di neutroni si osservano come pulsar. Per altre (come SN 1054) si possono apprezzare segnali anche nei raggi X e gamma.

**Catalogo.** Si può costruire il diagramma  $P\dot{P}$  simile a quello H-R dove si pone il periodo sulle ascisse e la sua derivata temporale sulle ordinate.

## Lezione 13

**Associazione delle pulsar alle stelle di neutroni.** Si vede l'associazione delle pulsar alle stelle di neutroni. Si studia la pulsar della nebulosa del granchio: molti valori numerici mostrati successivamente fanno riferimento a questa pulsar. Il periodo è

$$P = 33 \text{ ms}, \quad \dot{P} = 4.2 \times 10^{-13}, \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = 100 \text{ Hz}$$

La potenza irradiata nello spettro radio è

$$L \approx 5 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$$

Si possono avanzare varie spiegazioni::

- Si può supporre che la radiazione periodica di una pulsar sia dovuta all'orbita di un sistema binario. Dalla legge di Keplero si ha

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \implies a = \frac{[G(M_1 + M_2)]^{\frac{1}{3}}}{\omega^{\frac{2}{3}}} \approx 200 \text{ km}$$

dove  $a$  è la distanza relativa tra le due stelle. Dunque, le due stelle che orbitano non possono appartenere alla sequenza principale in quanto la distanza di orbita è minore del raggio. Non sono nemmeno due nane bianche. L'unico oggetto celeste ammissibile

ven 11 nov  
2022 13:30

sarebbero le stelle di neutroni: dalle equazioni di struttura stellare si ottengono dei raggi di stelle di neutroni pari alla decina di chilometri. Tuttavia, compare un problema osservando la derivata del periodo. Ipotizzando che il segnale letto in radio sia dovuto all'energia irradiata dall'orbita delle due stelle, allora la distanza dovrebbe diminuire e così il periodo. Però la derivata è positiva: il periodo aumenta. Inoltre, si può supporre che il segnale radio non sia a scapito del momento angolare, ma, dalla relatività generale, i due corpi irradiano onde gravitazionali, così perdendo comunque energia. Questa spiegazione non funziona.

- Si vede una seconda spiegazione. Quando si risolvono le equazioni in relatività generale, si è interessati ad modelli di equilibrio stabile: si suppone che il segnale sia dovuto alle oscillazioni radiali di una stella attorno alla posizione di equilibrio. [r] Il tempo scala è

$$P \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

Questa relazione è soddisfatta solamente dalle densità tipiche di una stella di neutroni. Si pone un problema anche in questo caso. Il sistema irradia energia nel radio così perdendola. Se questa perdita è a scapito dell'energia gravitazionale, allora la stella diverrebbe più compatta: la densità media aumenta ed il periodo diminuisce. Questo è in contraddizione con l'osservazione di una derivata positiva del periodo. Nemmeno questo modello non funziona.

- Si vede l'ultima spiegazione. Si ipotizza che sia presente una stella che ruoti su se stessa. Non tutte le stelle possono ruotare arbitrariamente veloci: la forza centripeta può essere al massimo la forza gravitazionale. Infatti

$$m\omega^2 R \leq \frac{GMm}{R^2} \implies \frac{M}{R^3} \geq \frac{\omega^2}{G}$$

Passando alla densità media, si ha

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho} \implies \bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} \geq \frac{3}{4\pi} \frac{\omega^2}{G} \approx 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$$

Tali densità sono raggiungibili solamente in stelle di neutroni. Si suppone che l'energia irradiata (in spettro radio) sia a scapito dell'energia rotazionale:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ipotizzando che il momento di inerzia si costante, allora diminuendo l'energia, diminuisce anche la pulsazione  $\omega$  quindi aumenta il periodo. Questa spiegazione sembra plausibile.

La luminosità irraggiata è

$$L = -d_t E_{\text{rot}} = -I\omega\dot{\omega} = -\frac{2}{5}MR^2\omega\dot{\omega} \implies MR^2 = -\frac{5}{2} \frac{L}{\omega\dot{\omega}} \approx 3 \times 10^{45} \text{ g cm}^2$$

supponendo che la stella sia una sfera rigida con momento d'inerzia pari a  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .

Per una stella di neutroni si ha

$$MR^2 \approx 10^{45} \text{ g cm}^2$$

Invece, per il sole

$$MR^2 \approx 10^{54} \text{ g cm}^2$$

Ci si chiede come una stella di neutroni possa ruotare con periodi dei millisecondi. Per riferimento, il sole ruota ogni venticinque giorni. Nel momento in cui una stella implode in una stella di neutroni, si può supporre la conservazione del momento angolare

$$J = I\omega$$

Se il momento di inerzia diminuisce di nove ordini di grandezza, allora la pulsazione deve aumentare dello stesso valore e dunque si hanno periodi dei millisecondi. Si noti che non si ha veramente una conservazione del momento angolare, tuttavia la discussione in ordini di grandezza rimane verosimile.

**Radiazione emessa.** Rimane da comprendere il motivo per cui una stella di neutroni che ruota irradia un segnale in banda radio. Si consideri una stella di neutroni il cui asse di rotazione sia l'asse  $z$ . Si supponga che il campo magnetico abbia un asse di momento magnetico  $\vec{m}$  ad un angolo  $\theta$  rispetto l'asse di rotazione. Questa situazione rappresenta un dipolo magnetico oscillante. La potenza irradiata di un dipolo che varia nel tempo è

$$L = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2$$

in unità cgs. Si calcola la derivata del momento di dipolo magnetico. Si consideri la rappresentazione intrinseca  $\vec{m} = m_0 \hat{m}$ . Il campo magnetico ha direzione poloidale rispetto all'asse di momento magnetico. Quindi

$$m_0 = \frac{1}{2} B R^3$$

dove  $B = \text{cost}$  è il campo magnetico sulla superficie della stella di neutroni al polo nord magnetico. Solamente il versore varia nel tempo di un angolo  $\omega t$  attorno all'asse  $z$ . Le componenti del versore in coordinate cartesiane risultano essere

$$\hat{m}_x = \sin \theta \cos \omega t, \quad \hat{m}_y = \sin \theta \sin \omega t, \quad \hat{m}_z = \cos \theta$$

La derivata seconda temporale è

$$\ddot{\vec{m}} = (-\omega^2 \sin \theta \cos \omega t, -\omega^2 \sin \theta \sin \omega t, 0) = -\omega^2 (\hat{m}_x, \hat{m}_y, 0)$$

Il suo modulo quadro è

$$|\ddot{\vec{m}}|^2 = \omega^4 \sin^2 \theta$$

La potenza diventa

$$L = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2 = \frac{2}{3c^3} m_0^2 |\ddot{\vec{m}}|^2 = \frac{1}{6c^3} B^2 R^6 \omega^4 \sin^2 \theta$$

Affinché si abbia emissione, il momento magnetico non deve essere allineato con la direzione di rotazione. Da questa relazione si ottiene il campo magnetico

$$B = \frac{\sqrt{6c^3 L}}{R^3 \omega^2 \sin \theta} \approx 8 \times 10^{12} \text{ G} = 8 \times 10^8 \text{ T}, \quad R = 10 \text{ km}$$

si utilizza l'approssimazione  $\sin \theta = 1$ : interessano gli ordini di grandezza. Questo campo magnetico superficiale al polo nord è molto intenso. Per confronto, il campo magnetico del sole sulla superficie è dell'ordine di 1 G.

La spiegazione di questa differenza può essere contenuta in un discorso analogo alla conservazione del momento angolare: si ha conservazione del flusso del campo magnetico. Infatti

$$B R^2 = \text{cost}$$

Per una stella che, implodendo, diminuisce il raggio di cinque ordini di grandezza, allora il campo magnetico aumenta del doppio di tali ordini. Le pulsar sono stelle di neutroni che ruotano su se stesse con campi magnetici intensi.

**Relazione tra campo magnetico e periodo.** Si vuole lega il campo magnetico al periodo ed alla sua derivata. La potenza irradiata proviene dall'energia rotazionale

$$L = -d_t E_{\text{rot}} = -I \omega \dot{\omega} = \frac{1}{6c^3} B^2 R^6 \omega^4 \sin^2 \theta$$

Da cui si ottiene

$$\dot{\omega} = -\frac{B^2 R^6 \sin^2 \theta}{6c^3 I} \omega^3 = -C \omega^3$$



Questa legge si scrive in modo generale come

$$\dot{\omega} = -C\omega^n$$

dove  $n$  è l'indice di frenamento (braking index). Derivando ancora, si possono utilizzare le relazioni ricavate per misurare  $n$  senza conoscere  $C$ . Per la pulsar della nebulosa del granchio si ha  $n = 2.51 \pm 0.01$  (Ho & Andersson, 2012). Sebbene il modello non si discosti di molto dalle osservazioni, esso non è perfetto. Da Fisica II è noto che l'emissione di dipolo non è collimata, ma emette in tutte le direzioni (sebbene in dipendenza dall'angolo). Invece, l'idea del segnale periodico è che l'emissione sia collimata e punti verso la Terra ogni periodo. Ancora oggi non si sa perché la radiazione sia ben collimata.

Il modello di dipolo magnetico oscillante può stimare l'età di una pulsar. Per quella della nebulosa del granchio, si ottiene una età coerente con l'età nota dalle osservazioni storiche di supernova. Inoltre, supponendo che la pulsar stia rallentando a causa di emissione di onde gravitazionali, si possono ripercorrere gli stessi calcoli (però in relatività generale) ed ottenere una relazione simile con  $n = 5$ . Dunque, il modello sviluppato funziona bene, ma non è completo.

## Lezione 14

**Età di una pulsar.** Si vede come stimare l'età di una pulsar utilizzando la relazione trovata. Per separazione di variabili si ha

mar 15 nov  
2022 08:30

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^n} = \int_{t_0}^t -C dt \implies \frac{1}{1-n} [\omega^{1-n} - \omega_0^{1-n}] = -C\tau \implies \tau = \frac{1}{C(n-1)} [\omega^{1-n} - \omega_0^{1-n}]$$

dove  $t_0$  è il momento in cui la pulsar è nata e  $\tau \equiv t - t_0$  è l'età della pulsar. Dalla relazione iniziale si può eliminare la costante

$$C = -\frac{\dot{\omega}}{\omega^n} \implies \tau = \frac{1}{1-n} \frac{\omega^n}{\dot{\omega}} [\omega^{1-n} - \omega_0^{1-n}] = \frac{1}{1-n} \frac{\omega}{\dot{\omega}} \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{n-1} \right]$$

Si può ipotizzare che, in origine, la pulsar ruotasse più velocemente di ora,  $\omega_0 \gg \omega$ . Pertanto

$$\tau = \frac{1}{1-n} \frac{\omega}{\dot{\omega}}$$

Considerando il modello di dipolo magnetico oscillante, si ottiene

$$n = 3 \implies \tau = -\frac{\omega}{2\dot{\omega}} \approx 1200 \text{ yr}$$

Questa relazione è quella tipicamente utilizzata nei diagrammi  $P\dot{P}$  quando si aggiungono le curve riguardanti le età delle pulsar.

Questa età è confrontabile con le fonti storiche: la pulsar della nebulosa del granchio si è formata a seguito di una supernova osservata nel 1054. Viceversa, poiché è nota l'età della pulsar, si può stimare la velocità di rotazione al momento successivo alla supernova. Si ottiene un valore pari a  $\omega_0 \approx 2.5 \text{ ms}$ . Rispetto ad oggi, la pulsar ha rallentato di un ordine di grandezza.

**Campo magnetico al polo.** Si stima il campo magnetico di una pulsar. Si utilizza il modello di dipolo oscillante:

$$\dot{\omega} = -\frac{B^2 R^6 \sin^2 \theta}{6c^3 I} \omega^3 \implies B^2 \sin^2 \theta = -\frac{\dot{\omega}}{\omega^3} \frac{6c^3 I}{R^6}$$

Esplicitando il periodo al posto della pulsazione

$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \quad \dot{\omega} = -\frac{2\pi}{P^2} \dot{P}, \quad -\frac{\dot{\omega}}{\omega^3} = \frac{1}{4\pi^2} P \dot{P}$$

si ottiene

$$B \sin \theta = \sqrt{\frac{3c^3 I}{2\pi^2 R^6}} P \dot{P} \approx 3.2 \times 10^{19} \text{ G} \sqrt{\frac{P \dot{P}}{1 \text{ s}}} = 3.2 \times 10^{15} \text{ T} \sqrt{\frac{P \dot{P}}{1 \text{ s}}}$$

I campi magnetici si stimano con  $\sin \theta \approx 1$ ,  $M \approx 1.4M_\odot$  e  $R \approx 10 \text{ km}$ . Per la pulsar della nebulosa del granchio si ha

$$B \approx 10^{12} \text{ G}$$

**Osservazione.** Sul grafico  $P\dot{P}$  si osservano delle stelle di neutroni con periodi del millisecondo e derivate dell'ordine di  $10^{-20}$ . Questo implica una età dell'ordine dei miliardi di anni: ci si chiede come fanno ad esistere pulsar così anziane, ma con ancora periodi di rotazione brevi. Una possibile spiegazione potrebbe essere data dai sistemi binari: la pulsar divora la stelle compagna ed il materiale donato aggiunge momento angolare.

**Magnetar.** In alto a destra al grafico sono presenti le magnetar con campi magnetici dell'ordine di  $10^{14} \text{ G}$ . Risulta semplice spiegare campi magnetici di  $10^{10} \text{ G}$  tramite la conservazione del flusso del campo magnetico. Per le magnetar questo non basta, la spiegazione è ancora oggetto di ricerca. Una idea è la possibile presenza di flussi del fluido che creano correnti che amplificano il campo magnetico: si ha l'effetto dynamo. Le magnetar sono oggetti particolari. Le pulsar si osservano nella banda radio. Le magnetar sono state scoperte in un altro modo. Si sono osservati due fenomeni fisici successivamente associati alle magnetar:

- soft gamma repeaters (SGRs);
- anomalous X-ray pulsars (AXPs).

**Soft gamma repeaters.** Negli anni '60 si osservò il cielo nella banda gamma. Si notarono vari fenomeni come i gamma ray bursts. Essi provengono dalla distruzione della loro sorgente. I gamma ray bursts si dividono in lunghi e brevi. I primi durano più di due secondi e sono causati da esplosioni di supernovae. Gli altri sono dovuti alla collisione di due stelle di neutroni. D'altra parte, i SGRs sono fenomeni di emissione di raggi gamma che provengono dallo stesso punto del cielo: la sorgente non viene distrutta dall'emissione gamma. L'aggettivo "soft" indica che l'energia dei fotoni è minore di quella osservata nei ray bursts.

La luminosità al picco è

$$L_{\text{peak}} \approx 10^{42} \text{ erg s}^{-1}$$

La durata tipica è tra il centesimo di secondo al secondo. Si è ipotizzato che l'origine di tali raggi gamma fossero stelle di neutroni con campi magnetici più intensi delle pulsar. Infatti, per una stella di neutroni con campo magnetico  $B \approx 10^{15} \text{ G}$ , l'energia magnetica è

$$E_{\text{mag}} \approx 10^{48} \text{ erg}$$

L'energia persa durante il lampo è trascurabile rispetto l'energia totale. La prova che le magnetar siano stelle di neutroni con campi magnetici molto intensi si ebbe nel 1998 (Kouveliotu et al.): se esse sono stelle di neutroni, allora ci si può aspettare un segnale periodico in altre bande elettromagnetiche. Si osservò il cielo nella banda X trovando emissioni persistenti con periodicità come per le pulsar nel radio. La luminosità ed il periodo sono

$$L_X \sim 10^{35} \text{ erg s}^{-1}, \quad P \sim 5 - 8 \text{ s}, \quad \dot{P} \sim 10^{-11}$$

Inserendo questi dati nel diagramma  $P\dot{P}$  facendo uso del modello di dipolo oscillante, si ottengono campi magnetici dell'ordine di  $10^{14} \text{ G}$ .

Può capitare che i SGRs emettano radiazioni più intense del solito: i giant flares. Un esempio è il SGR 1900 + 14. Il 27 agosto 1998 emise un lampo nei gamma più intenso del solito:

$$L_{\text{peak}} \sim 10^{45} \text{ erg s}^{-1}$$

Questo oggetto si trova nella Via Lattea, ma diametralmente opposto al sistema solare. Ciononostante, il suo flusso fu abbastanza intenso da ionizzare parte dell'atmosfera. L'evento più energetico osservato è stato SGR 1806 – 20 il 27 dicembre 2004 con potenza pari a

$$L_{\text{peak}} \sim 10^{47} \text{ erg s}^{-1}$$

Non è chiaro cosa causi i giant flares: si pensa che essi siano causati da terremoti sulla superficie della magnetar.

**Anomalous X-ray pulsars.** Questi fenomeni furono osservati per la prima volta negli anni '80. Si videro sorgenti periodiche di raggi X. Essi hanno periodi lunghi

$$P \sim 5 - 12 \text{ s}, \quad L_X \sim 10^{35} - 10^{36} \text{ erg s}^{-1}$$

Come i SGRs, essi si possono spiegare con il modello di dipolo oscillante come stelle di neutroni con campi magnetici intensi. Si dicono anomali perché la luminosità osservata è maggiore rispetto a quanto predetto dal modello sulla base del periodo osservato. Negli anni, anche per questi fenomeni si sono osservati dei bursts nei gamma: la distinzione tra SGRs e AXPs è sfumata.

**Osservazione.** Ad oggi si conoscono solamente 30 magnetar. Questa scarsità è data dal fatto che nella costante della relazione

$$\dot{\omega} = -C\omega^3$$

compare il quadrato del campo magnetico: per campi magnetici intensi, la magnetar rallenta molto più rapidamente di una pulsar. Si arriva a periodi così lunghi che la potenza emessa dal dipolo non è più osservabile.

Delle 30 magnetar, ne sono state osservate 16 come SGRs e 14 come AXPs.

### 5.3 Buchi neri

Sia le nane bianche che le stelle di neutroni presentano un limite massimo di massa oltre il quale la pressione interna non può più sostenere il collasso. La storia dei buchi neri è come segue:

- 1795, Laplace pensa che possano esistere oggetti talmente massivi da cui nemmeno la luce può fuggire;
- 1915, Einstein formula la teoria della relatività generale;
- 1916, Schwarzschild trova la prima soluzione delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto; tale soluzione è l'analogo del moto di un corpo puntiforme in fisica newtoniana; essa può descrivere un buco nero;
- 1931, massa di Chandrasekhar;
- 1939, Oppenheimer e Sneider studiano il comportamento oltre la massa limite di una sfera di polvere, cioè di un gas senza pressione, in cui le particelle interagiscono solamente per mezzo della forza gravitazionale; essi ottengono la soluzione di Schwarzschild;
- 1963, soluzione di Kerr per un buco nero con momento angolare;
- 1968, Wheeler introduce il termine “buco nero”, nell'unione sovietica si utilizzava il termine “frozen star”.

I buchi neri sono completamente caratterizzati da tre parametri fisici: la massa  $M$ , il momento angolare  $J$  e la carica  $Q$ . In astrofisica si trascura la carica perché gli oggetti celesti sono tipicamente neutri. La proprietà fondamentale che distingue un buco nero è la presenza della superficie detta orizzonte degli eventi (event horizon): si ha una barriera invalicabile per cui nessun evento può comunicare dall'esterno all'interno e viceversa. Si studia la soluzione di Schwarzschild.

**Buchi neri stellari.** Alcuni buchi neri si trovano in sistemi binari con stelle compagne. La stella compagna espelle materia ed accresce il buco nero. Tale materia si riscalda ed irradia. Il primo candidato per un buco nero è stato Cygnus X-1 nella costellazione del cigno. Si è osservata una intensa sorgente X in compagnia di una stella sulla sequenza principale. Questa è stata la prima evidenza indiretta. I buchi neri inferiori alle cento masse solari (ma sopra le cinque) sono detti buchi neri di masse stellari dovuti al collasso di stelle sulla sequenza principale con più di venti masse solari.

Dal 14 settembre 2015<sup>1</sup> si sono potute fare osservazioni di onde gravitazionali dovute alla collisione di buchi neri in sistemi binari. Queste sono osservazioni dirette dell'esistenza di buchi neri: essi perdono energia e momento angolare per emissione di onde gravitazionali.

Tramite le onde gravitazionali si è potuta osservare la presenza di buchi neri di massa superiore alle venti masse solari (venti masse perché è il limite superiore osservato con dischi di accrescimento). Lo studio di evoluzione stellare ha visto un cambiamento di modelli per rimanere coerente con le osservazioni.

**Buchi neri supermassivi.** I buchi neri supermassivi sono buchi neri con masse molto maggiori rispetto alle stelle sulla sequenza principale. Un esempio è Sagittarius A\* al centro della Via Lattea. Tali buchi neri hanno masse comprese tra  $10^6$  e  $10^{10}$  masse solari. Sagittarius A\* è stato osservato in maniera indiretta analizzando le orbite delle stelle prossime: tali stelle orbitano un oggetto centrale che non si vede. Applicando Keplero si può stimare la massa di tale oggetto. Per le altre galassie si osserva la radiazione elettromagnetica emessa dai dischi di accrescimento. Le galassie collidono tra loro: si ipotizza la formazione di binarie di buchi neri supermassivi che emettono onde gravitazionali. Tali onde hanno frequenze che non sono rilevabili da interferometri a terra, ma bisogna aspettare gli anni 2030 per il lancio di LISA.

## Lezione 15

I buchi neri sono classificati in massa secondo:

- massa stellare, dalle cinque alle cento masse solari;
- massa intermedia, dalle cento alle  $10^4$  masse solari (IMBH);
- massivi, massa pari a  $10^5$  masse solari;
- supermassivi, sopra le  $10^6$  masse solari.

Le stelle di neutroni osservate hanno massa massima pari alle due masse solari. Per questo si ha un salto di massa degli oggetti celesti dalle tre alle cinque masse solari. I buchi neri supermassivi si sono osservati fino a masse di  $10^{10} M_{\odot}$  (come Messier 87 di cui si ha una immagine in microonde). Inoltre, non è ben chiaro come essi si formino. Inoltre, i buchi neri di massa intermedia sono stati osservati recentemente tramite le onde gravitazionali.

**Equazioni di campo di Einstein.** Schematicamente, le equazioni di campo di Einstein sono

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

dove  $G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein e  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia momento. Le componenti del tensore di Einstein sono date dalla metrica  $g_{\mu\nu}$  e dalle sue derivate prime e seconde. Le equazioni di campo di Einstein sono un sistema di dieci equazioni differenziali alle derivate parziali al secondo ordine accoppiate. La soluzione fornisce la metrica. Nella maggior parte dei casi, tali equazioni si devono risolvere numericamente. Per i buchi neri esistono soluzioni analitiche: la prima trovata è stata la soluzione di Schwarzschild. Egli trova la soluzione per le equazioni di Einstein nel vuoto

$$G_{\mu\nu} = 0$$

<sup>1</sup>Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Abbott et al., Physical Review Letters, 2016

Tuttavia, la soluzione più banale di questa equazione è la metrica di Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Questa segnatura (mostly-plus) della metrica è tipica dell'astrofisica. L'altra (mostly-minus) è tipica della fisica delle particelle. La distanza in coordinate sferiche è

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(c dt)^2 + (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2$$

**Metrica di Schwarzschild (1916).** Schwarzschild trova una soluzione non banale alle equazioni di campo di Einstein ipotizzando simmetria sferica ed un buco nero puntiforme di massa  $M$  (questo è l'equivalente newtoniano di un campo gravitazionale generato da una massa puntiforme). L'elemento di linea è

$$(ds)^2 = - \left[ 1 - \frac{2MG}{rc^2} \right] (c dt)^2 + \left[ 1 - \frac{2MG}{rc^2} \right]^{-1} (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2$$

Ponendo  $M = 0$  si ottiene la metrica di Minkowski. Tale metrica è singolare per due valori radiali:

$$r = 0, \quad r = \frac{2MG}{c^2}$$

La seconda singolarità è apparente perché dovuta alla scelta del sistema di coordinate. La superficie definita da tale raggio (detto raggio di Schwarzschild,  $R_S$ ) è l'orizzonte degli eventi. La prima singolarità è fisica: corrisponde alla singolarità al centro del buco nero.

La superficie dell'orizzonte degli eventi è importante perché, al di fuori, si ha

$$r > \frac{2MG}{c^2}$$

per cui la metrica ha segnatura  $(-, +, +, +)$ . Il tempo scorre solo in avanti e ci si può muovere liberamente nello spazio. Viceversa, all'interno si ha

$$r < \frac{2MG}{c^2}$$

per cui la metrica ha segnatura  $(+, -, +, +)$ : non si può invertire la direzione radiale e si è costretti a cadere verso la singolarità, però ci si può muovere a piacere nel tempo. Tuttavia, non si può comunicare oltre la barriera.

Si può procedere ad una discussione più approfondita di quanto detto. In relatività speciale, la quadri-velocità è

$$u^\mu = d_\tau x^\mu, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

L'invariante ad essa associato è

$$u^\mu u_\mu = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = -c^2$$

Si sceglie il riferimento solidale per il quale si ha  $u^j = 0$ . Si è liberi di cambiare riferimento e, quindi, la velocità in quanto il segno meno che si trova nell'invariante è portato dalla componente

$$u^0 = d_\tau(ct) = c d_\tau t = \gamma c$$

che non si può annullare e dunque non si può passare dal tempo che scorre in avanti al tempo che scorre indietro. Viceversa, all'interno del buco nero, il segno negativo dell'invariante è portato dal termine radiale: il termine temporale può diventare negativo, ma non si può cambiare la direzione radiale.

Si studia come cambia il tempo proprio misurato da un osservatore che si avvicina all'orizzonte

degli eventi rispetto ad un osservatore all'infinito. Si consideri un osservatore a riposo  $dx^j = 0$ . Il tempo proprio risulta essere

$$(ds)^2 = (d\tau)^2 = \left[1 - \frac{2MG}{rc^2}\right] (dt)^2$$

dove  $dt$  è il tempo di un osservatore distante. All'esterno dell'orizzonte degli eventi, si ha

$$r > \frac{2MG}{c^2} \implies d\tau < dt$$

vicino al buco nero, il tempo passa più lentamente. Questo causa un effetto di redshift gravitazionale: la lunghezza d'onda misurata da un osservatore all'infinito è maggiore di quella emessa vicino al buco nero

$$\lambda = \left[1 - \frac{2MG}{rc^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \lambda_0$$

All'orizzonte degli eventi, la lunghezza d'onda è infinita: non si ha più emissione verso l'esterno.

**Orbite attorno ad un buco nero.** Si torna alla fisica newtoniana studiando l'orbita di una particella di prova di massa  $m$  con un certo momento angolare attorno ad un oggetto massivo  $M$ . Si conserva l'energia della particella ed il suo momento angolare

$$E = K + U = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2] - G\frac{mM}{r}, \quad L = mr^2\dot{\phi}$$

Combinando queste due equazioni si ottiene

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \implies E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + G\frac{mM}{r} = E - V(r), \quad V(r) \equiv \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

dove  $V(r)$  è il potenziale efficace. Si ha un termine attrattivo dato dal termine gravitazionale che domina a grande distanza, mentre un termine è repulsivo, dato dal momento angolare che domina a brevi distanze: si può pensare come una forza centrifuga. L'orbita della particella dipende dall'energia della particella. Per energie positive, il sistema non è legato e l'orbita è iperbolica. Per energie negative, si ha un'orbita legata di forma ellittica. Per energia zero, l'orbita è parabolica?. Il minimo del potenziale efficace corrisponde ad un'orbita circolare.

Si può utilizzare un potenziale efficace anche in relatività generale (con metrica di Schwarzschild). Infatti compare un nuovo termine attrattivo che domina a distanze ancora più piccole

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} - G\frac{M+m}{mc^2r^3}L^2$$

Procedendo dall'infinito all'origine, il potenziale parte da zero, scende ad un minimo, poi sale ad un massimo e termina tendendo a meno infinito. Se l'energia è positiva, ma minore del massimo, l'orbita è aperta. Se l'energia è sopra il massimo, allora la particella di prova si trova su una traiettoria (capture orbit) che interseca l'orizzonte degli eventi, ed è destinata a cadere sulla singolarità. In questa discussione si intende il momento angolare fisso: cambia la velocità della particella all'infinito. Inoltre, esiste un valore minimo di momento angolare per cui si hanno orbite stabili: al di sotto, il massimo del potenziale efficace scompare. Il raggio  $R$  corrispondente all'orbita circolare più piccola (cioè il punto di minimo del potenziale disegnato per il valore minimo di momento angolare) definisce la innermost stable circular orbit (ISCO)

$$R_{\text{ISCO}} = \frac{6MG}{c^2} = 3R_S$$

Tale raggio corrisponde al raggio più interno che può avere un disco di materia che accresce un buco nero. Questo ha conseguenze importanti sullo spettro elettromagnetico emesso dal disco.

## Lezione 16

ven 25 nov  
2022 13:30

**Mettrica di Kerr.** La mettrica di Kerr descrive buchi neri con momento angolare  $J \neq 0$ . Si introduce il parametro

$$a = \frac{J}{Mc}, \quad \dim a = L$$

Il raggio dell'orizzonte degli eventi è

$$R_{\text{EH}} = \frac{R_S + \sqrt{R_S^2 - 4a^2}}{2}$$

Per  $J = 0$  si ritorna al caso di buco nero non rotante  $R_{\text{EH}} = R_S$ . A causa del termine sotto radice, esiste un limite massimo del momento angolare affinché si ottenga una soluzione reale. Infatti, per

$$J = \frac{M^2 G}{c} \implies R_{\text{EH}} = \frac{1}{2} R_S$$

Per momenti angolari superiori, non si ha più una soluzione reale cioè non esiste più un orizzonte degli eventi: si ha una singolarità nuda (naked singularity). Non si ha nessuna evidenza della loro esistenza da cui nasce la cosmic censorship hypothesis. Il limite sul momento angolare è invalicabile: un disco che aggiunge materia ad un buco nero aumenta il momento angolare, ma la massa aumenta più velocemente [r] e quindi

$$J < \frac{M^2 G}{c}$$

La ISCO ha raggio pari a

$$R_{\text{ISCO}} = \begin{cases} \frac{6MG}{c^2}, & J = 0 \\ R_{\text{EH}} = \frac{MG}{c^2}, & J = \frac{M^2 G}{c} \end{cases}$$

Il disco ha raggio più piccolo se le particelle ruotano nella stessa direzione del buco nero. Per momenti angolari opposti si ha

$$R_{\text{ISCO}} = \frac{9MG}{c^2}$$

**Sistemi binari.** Si considerino due masse  $M_1$  e  $M_2$ . Nel sistema co-rotante si possono disegnare le superfici equipotenziali: si evidenziano i lobi di Roche che descrivono le zone di influenza delle due masse. Sia  $M_2$  una gigante, allora può inglobare tutto il proprio lobo e una parte invade il lobo dell'oggetto compagno  $M_1$ . La materia in questo lobo è attirata più fortemente dal compagno e dunque lo accresce. Un'altra possibilità è che la stella abbia degli venti di emissione che finiscono nel lobo compagno. Sia  $M_1$  un oggetto compatto. La materia che entra nel lobo ha del momento angolare che viene aggiunto ad  $M_1$  stesso. La materia si aggrega in un toroide con orbite stabili detto disco di accrescimento.

Se l'oggetto compatto è una nana bianca, allora la presenza del disco crea una nova. Se l'oggetto compatto è una stella di neutroni, oppure un buco nero, si ha una X-ray binary. Il nome deriva dal fatto che si possono generare delle orbite instabili all'interno del disco che causano una caduta di materiale sull'oggetto compatto: il disco si scalda ed emette radiazione (ultravioletto per nane bianche e raggi X per stelle di neutroni e buchi neri). La nascita di instabilità è dovuta alla viscosità del disco. Se la viscosità fosse assente, allora ogni orbita circolare non interagisce con quelle più interne ed esterne. La viscosità permette l'interazione. Si ricordi che per orbite circolari, la velocità orbitale dipende dal raggio. Le orbite interne hanno velocità maggiori. Esse interagiscono con le orbite appena più esterne accelerandole. La natura della viscosità è ancora oggetto di studio.

**Disco di accrescimento.** I processi di creazione di un disco non sono così semplici. Le orbite circolari rappresentano la configurazione di minima energia. Si studiano dischi di accrescimento viscosi che generano orbite instabili ed emettono radiazione. Si consideri un anello di massa  $dm$  che si sposta a orbite minori attorno ad un oggetto compatto  $M$ . L'energia potenziale diminuisce. Ipotizzando che il processo di accrescimento sia lento, si può utilizzare il teorema del viriale. Altrimenti si può calcolare la variazione di energia potenziale e si ottiene lo stesso risultato [r]. Il cambiamento di energia potenziale va ad aumentare l'energia termica. Si ha

$$dE_{\text{th}} = \frac{1}{2} \left( \frac{GM dm}{r} - \frac{GM dm}{r + dr} \right)$$

Si supponga che l'energia termica sia irradiata

$$dL = d_t E_{\text{th}} = \frac{1}{2} GM d_t m \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + dr} \right) = \frac{1}{2} GM \dot{m} \frac{dr}{r(r + dr)} \approx \frac{1}{2} GM \dot{m} \frac{dr}{r^2}$$

Si suppone  $M$  costante perché la massa dell'oggetto è molto maggiore della massa del disco di accrescimento, e quindi essa aumenta di poco. La quantità  $\dot{m}$  è detta tasso di accrescimento. Si può pensare che la radiazione abbia spettro di corpo nero: il disco si è riscaldato. La potenza irradiata è

$$dL = 2\sigma T^4 2\pi r dr$$

Il fattore 2 deriva dal numero di facce da cui il disco emette: superiore ed inferiore (si suppone che il disco sia piatto). Eguagliando le due espressioni trovate si esprime la temperatura in termini del raggio

$$\frac{1}{2} GM \dot{m} \frac{dr}{r^2} = 4\pi r dr \sigma T^4 \implies T^4 = \frac{GM \dot{m}}{8\pi \sigma} \frac{1}{r^3}, \quad T \propto r^{-\frac{3}{4}}$$

Le regioni più vicine hanno temperatura maggiore rispetto le regioni esterne. Lo spettro di emissione è la somma di tanti spettri di corpo nero che coprono tutto l'intervallo di frequenze (a causa della diversa temperatura in base alla distanza). Inoltre, la luminosità dipende dal reciproco del quadrato della distanza. La luminosità totale è

$$L = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{1}{2} GM \dot{m} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} GM \dot{m} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} GM \dot{m} \left[ \frac{1}{r_{\text{in}}} - \frac{1}{r_{\text{out}}} \right] \approx \frac{1}{2} GM \dot{m} \frac{1}{r_{\text{in}}}$$

Si ipotizza che  $\dot{m}$  non dipende dal raggio e  $r_{\text{out}} \gg r_{\text{in}}$ . Se  $\dot{m}$  fosse molto diverso da un punto all'altro, allora si avrebbero degli accumuli di materia a certi raggi (o di rarefazione), ma queste sono situazioni in stabili. Per un processo che genera potenza, si può stimarne l'efficienza. L'efficienza è

$$\eta = \frac{L}{\dot{m} c^2} = \frac{1}{2} \frac{GM}{r_{\text{in}} c^2}$$

Per un buco nero di Schwarzschild, il raggio interno del disco di accrescimento è quello della ISCO

$$r_{\text{in}} = R_{\text{ISCO}} = \frac{6MG}{c^2} \implies \eta \approx \frac{1}{12}$$

Questa efficienza è un ordine di grandezza maggiore della fusione nucleare. Per buchi neri di Kerr massimamente rotanti si ha

$$r_{\text{in}} = R_{\text{EH}} = \frac{MG}{c^2} \implies \eta \approx 50\%$$

Si possono produrre grandi luminosità sebbene le masse dell'oggetto nel mezzo del disco sia piccolo.



**Esempio.** Si consideri un disco di accrescimento attorno ad una nana bianca con massa  $M = 1 M_{\odot}$ . Sia il raggio interno pari alla superficie della nana bianca

$$r_{\text{in}} \approx R_{\text{WD}} = 10^4 \text{ km}$$

Si suppone un tasso di accrescimento pari a

$$\dot{m} = 10^{-9} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

Il valore scelto è a metà strada tra il vento solare ( $10^{-14} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ ) ed il vento di giganti ( $10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ ). La luminosità risulta essere

$$L = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{m}}{r_{\text{in}}} \approx 4 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} = L_{\odot}$$

Un disco di accrescimento produce una luminosità pari a quella del sole. Si può anche calcolare lo spettro del picco [r]. La temperatura del raggio più interno è

$$T = \left[ \frac{GM\dot{m}}{8\pi\sigma} \right]^{\frac{1}{4}} r_{\text{in}}^{-\frac{3}{4}} \approx 5 \times 10^4 \text{ K}$$

che corrisponde all'ultravioletto. I processi di accrescimento su di una nana bianca fanno parte di una categoria più generale detta cataclysmic variables.

**Esempio.** Si ripetono gli stessi calcoli per una stella di neutroni oppure un buco nero. Si consideri un disco di accrescimento attorno ad una stella di neutroni od un buco nero. Si considerino le quantità

$$M = 1.4 M_{\odot}, \quad r_{\text{in}} = 10 \text{ km}, \quad \dot{m} = 10^{-9} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

La luminosità totale ottenuta e la temperatura del raggio più interno sono

$$L = 10^{37} \text{ erg s}^{-1}, \quad T \approx 10^7 \text{ K}$$

La temperatura ha spettro di emissione piccato nei raggi X.

**Osservazione.** Si tenga a mente che i calcoli fatti sono stime in ordini di grandezza. Per stime più accurate bisogna utilizzare modelli numerici. Sebbene si è calcolata la temperatura di picco di emissione del disco, in verità si osserva la radiazione di materia espulsa dal sistema. Tale materia produce emissione di sincrotrone.