

Analysis 1

February 24, 2022

Contents

Elenco delle figure	iii
1 Insiemistica.	1
1.1 Valore assoluto.	5
2 Numeri complessi.	17
3 Topologia di \mathbb{R}.	22
4 Funzioni reali di variabili reali.	27
4.1 Limiti.	29
5 Successioni.	39
5.1 Limiti di funzioni e limiti di successioni.	44
5.2 Successioni e Topologia.	47
5.3 Successioni di Cauchy.	50
6 Confronti asintotici.	52
7 Funzioni continue.	55
7.1 Discontinuità.	57
7.2 Teoremi fondamentali.	59
7.3 Funzioni continue invertibili.	63
7.4 Continuità uniforme.	65
8 Serie di numeri reali.	67
8.1 Serie a termini positivi.	69
8.2 Serie a termini di segno qualunque.	73
9 Calcolo differenziale.	75
9.1 Punti singolari.	80
9.2 Derivata e monotonia.	84
9.3 Criterio per la lipschitzianità.	85
9.4 De L'Hôpital	85
9.5 Funzioni convesse.	87
9.6 Criteri di convessità.	88
9.7 Approssimazione locale con polinomi.	90

10 Teoria dell'integrazione.	93
10.1 Calcolo integrali.	101
10.2 Ricerca delle primitive.	103
10.2.1 Integrazione per parti.	104
10.2.2 Integrazione per sostituzione.	105
10.3 Integrale improprio.	106

List of Figures

1	Radici dell'unità.	21
2	Distanza in \mathbb{R}	22
3	Intorno di un punto.	22
4	Intervallo aperto.	23
5	Intervallo generico.	23
6	Intervallo chiuso.	23
7	Punto di accumulazione.	24
8	Intorno in Bolzano-Weierstrass.	26
9	Diagramma di una funzione.	27
10	Funzione caratteristica.	28
11	Intorno in $\widetilde{\mathbb{R}}$	29
12	Circonferenza goniometrica.	34
13	Intorno in localizzazione dei limiti.	36
14	Limite funzione caratteristica.	37
15	Limite funzione monotona.	37
16	Diagramma commutativo del cambio di variabile.	38
17	Diagramma commutativo della continuità della funzione composta.	57
18	Controesempio al teorema dei valori intermedi.	61
19	Grafico di funzione discontinua.	62
20	Limite del teorema di Weierstrass.	63
21	Punti singolari.	81
22	Teorema di Rolle.	83
23	Controesempio al teorema di Rolle.	85
24	Funzione convessa.	87
25	Estremi inferiori nel raffinamento.	94
26	Interpretazione geometrica dell'integrale.	98
27	Commento sulla convergenza dell'integrale improprio.	108

1 Insiemistica.

La definizione di insieme non viene formalizzata, ma si ottiene attraverso una conoscenza innata.

Alcuni simboli d'insiemistica:

- $a \in A$
- $A \subset B, A \subseteq B$
- $A \cup B, A \cap B$
- $A \subset U, A^c$ è complementare di A in U se $A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$

Il professore usa \subset e \subseteq intercambiabilmente. Tuttavia, il primo indica l'inclusione propria, mentre il secondo quella impropria.

Definizione. S e T sono due insiemi. Se $x \in S$ e $y \in T$, la coppia ordinata (x, y) è definita come $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. È una definizione assiomatica di coppia ordinata. Il prodotto cartesiano $S \times T$ è quell'insieme $S \times T = \{(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$.

Proposizione. Due coppie ordinate coincidono se coincidono ordinatamente le componenti: $(x, y) = (t, z) \iff x = t \wedge y = z$.

Dimostrazione. Evidente che $x = t \wedge y = z$ implica $(x, y) = (t, z)$. Viceversa, si supponga $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{t\}, \{t, z\}\}$, bisogna distinguere due casi:

- 1) Se $t \neq z$ allora $\{x\} = \{t\}$ quindi $x = t$. Pertanto, $\{x, y\} = \{t, z\}$ e ciò implica $y = z$ ($\{x\} = \{t\}$ perché sono entrambi insiemi di un elemento; similmente $\{x, y\}$ e $\{t, z\}$ sono insiemi da due elementi).
- 2) Se $t = z$ segue $\{\{t\}, \{t, z\}\} = \{\{t\}, \{t\}\}$, dunque $\{x\} = \{t\}$ e $\{x, y\} = \{t\}$. Pertanto, $x = t$ e $y = t = z$.

Proposizione. $S \times T = T \times S \iff S = T \vee S = \emptyset \vee T = \emptyset$

Dimostrazione. Se $S \times T = T \times S$ e $S \neq \emptyset$ e $T \neq \emptyset$ si deduce che $\forall x \in S$ e $\forall y \in T$ si ha $(x, y) \in T \times S$. Quindi, $x \in T$ e $y \in S$. Poiché x è un elemento arbitrario di S e y è un elemento arbitrario di T , si deduce $S \subset T$ e $T \subset S$ quindi $S = T$. Viceversa, se $S = T$ oppure $S = \emptyset$ oppure $T = \emptyset$ è evidente che $S \times T = T \times S$.

Definizione. Siano S e T due insiemi e sia $G \subset S \times T$. La coppia $R = (S \times T, G)$ è detta relazione o corrispondenza tra S e T avente grafico G . Se $x \in S, y \in T$ e $(x, y) \in G$, si scrive xRy e si dice che x e y sono nella relazione R . G descrive la relazione degli elementi l'uno con l'altro.

Esempio.

- La coppia $R = (S \times T, \emptyset)$ è la corrispondenza vuota. Evidentemente $\forall x \in S$ e $\forall y \in T$, x e y non sono in corrispondenza.
- La coppia $R = (S \times T, S \times T)$ è la corrispondenza totale o universale. Quindi $\forall x \in S$ e $\forall y \in T$ si ha xRy .
- La coppia $R = (S \times S, \Delta_S)$ dove $\Delta_S = \{(x, x) \mid x \in S\}$ è la diagonale di $S \times S$ e prende il nome di identità (I_S o Id_S) di S . Esplicitamente, $xRy \iff x = y$.
- Si consideri $R = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\})$. Questo reticolato del piano cartesiano mostra che il concetto di relazione è molto distante dall'idea di funzione come macchina che prende un elemento e ne restituisce un altro.

Definizione. Sia $R = (S \times T, G)$ una relazione tra S e T , e siano $S' \subset S$ e $T' \subset T$. Posto $G' = G \cap (S' \times T')$, la corrispondenza $R' = (S' \times T', G')$ è detta corrispondenza indotta da R . R' è detta anche relazione ristretta perché è la restrizione della relazione R .

Definizione. Sia $R = (S \times T, G)$ una relazione tra S e T . Si definisce $G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$. La relazione inversa di R è la relazione $R^{-1} = (T \times S, G^{-1})$.

Definizione. Una corrispondenza tra S e S è detta relazione binaria in S .

Definizione. Una corrispondenza $f = (S \times T, G)$ tra gli insiemi S e T è una funzione (o applicazione) di S in T se, $\forall x \in S$, esiste uno ed un solo $y \in T$ tale che xfy . L'elemento y , che dipende generalmente da x , è denotato $y = f(x)$ ed è chiamato immagine di x tramite f o valore di f in x .

In algebra si usa $y = fx$ senza parentesi. La notazione di una funzione diventa $f : S \rightarrow T$. Funzione di S in T , f trasporta S in T tramite una legge.

Terminologia:

- Se $f : S \rightarrow T$ è una funzione, S è il dominio della funzione e T il codominio.
- Una funzione è correttamente descritta quando si indicano dominio, codominio ed il grafico G , cioè la formula o legge secondo cui opera la funzione.

Definizione. Una funzione $f : S \rightarrow T$ di un insieme non vuoto S in un insieme non vuoto T si dice costante se, $\forall x_1 \in S \wedge \forall x_2 \in S$, risulta $f(x_1) = f(x_2)$. Le funzioni costanti sono quelle funzioni che attribuiscono lo stesso valore a tutti i punti del proprio dominio.

Definizione. Siano $f : S \rightarrow T$ una funzione e $X \subset S$. Il sottoinsieme di T , $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ è l'immagine di X mediante f : in particolare $f(S)$ è spesso denotato con $\text{Im}f$.

Definizione. Se $Y \subset T$ il sottoinsieme di S , $f^{-1}(Y) = \{x \in S \mid f(x) \in Y\}$ è chiamato controimmagine (o preimmagine) di Y mediante f .

Definizione. Sia $f : S \rightarrow T$ una funzione e sia $X \subset S$. La nuova funzione “effe ristretto ics” $f|_X : x \in X \rightarrow f(x) \in T$ è chiamata restrizione della funzione f a X . (Simile alla corrispondenza indotta e tale funzione $f|_X$ opera per la stessa legge ma su un dominio ristretto).

Definizione. Sia $f : S \rightarrow T$ una funzione di S in T . Si dice che:

- 1) f è iniettiva se da $f(x_1) = f(x_2)$ segue $x_1 = x_2$ con $x_1, x_2 \in S$.
- 2) f è suriettiva se $f(S) = T$, cioè se, $\forall y \in T, \exists x \in S \mid y = f(x)$.
- 3) f è biunivoca se è 1) e 2).

Esercizio. Dimostra che $f : S \rightarrow T$ è biunivoca $\iff \forall y \in T$ esiste uno ed un solo $x \in S$ tale che $y = f(x)$.

Definizione. Siano $f : S \rightarrow T$ e $g : T \rightarrow V$ due funzioni. L'applicazione, $g \circ f : S \rightarrow V$, definita da $g \circ f = g(f(x)), \forall x \in S$ prende il nome di funzione composta.

Esercizio. Si è definita la composizione $g \circ f$ con l'ipotesi che il codominio di f coincide con il dominio di g . Qual è l'ipotesi minimale su f e g affinché $g \circ f(x) = g(f(x))$ abbia senso $\forall x \in S$? (Risposta: $f : S \rightarrow T \wedge g : U \rightarrow V, T \subset U \wedge T \neq \emptyset$).

Ogni relazione possiede un'inversa che è anch'essa una relazione. Quest'ultimo punto deve avvenire anche per le funzione: l'inverso di una funzione, se esiste, è una funzione a sua volta.

Definizione. Sia $f : S \rightarrow T$ una funzione biunivoca, si definisce la funzione $f^{-1} : T \rightarrow S$ che ad ogni elemento $y \in T$ associa quell'unico $x \in S$ tale che $f(x) = y$, e prende il nome di funzione inversa di f .

La biunivocità garantisce la verità della definizione per ipotesi. La suriettività dice che $\forall y \in T$ sia associato un elemento $x \in S$. L'injectività garantisce che tale $x \in S$ tale che $y = f(x)$ risulti univocamente determinato.

Esercizio. Sia $f : S \rightarrow T$ biunivoca. Allora $f \circ f^{-1} = I_T$ e $f^{-1} \circ f = I_S$.

Definizione. Un insieme ordinato è una coppia (S, R) dove S è un insieme e R una relazione binaria avente le seguenti proprietà:

- Riflessività: $\forall x \in S, xRx$
- Transitività: $\forall x, y, z \in S$ se xRy e yRz allora xRz
- Antisimmetria: $\forall x, y \in S$ se xRy e yRx allora $x = y$

Definizione. Campo totalmente ordinato. Una relazione d'ordine \leq in S è totale se $\forall x, y \in S$ accade una delle seguenti:

- $x < y$
- $x = y$
- $y < x$

Quindi S si dice totalmente ordinato.

Definizione. Quando un insieme possiede una struttura d'ordine si possono misurare degli elementi con particolarità precise.

Si consideri (S, \leq) :

- Un elemento $x \in S$ è detto minimo (massimo) se $x \leq y$ ($y \leq x$), $\forall y \in S$. **Esempio.** (\mathbb{R}, \leq) , $S = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Tale insieme S non ha minimo né massimo.
- Sia $X \subset S$. Un elemento $y \in S$ è un maggiorante (minorante) di X se $x \leq y$ ($y \leq x$), $\forall x \in X$. **Esempio.** (\mathbb{R}, \leq) , $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, risulta che ogni $y < 0$ è un minorante di X . Inoltre, nessun $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di X . $X \subset S$ è limitato superiormente (inferiormente) se possiede un maggiorante (minorante).
- Si consideri $X \subset S$. L'eventuale minimo (massimo) dell'insieme dei maggioranti (minoranti) di X si chiama estremo superiore (inferiore) di X cioè $\sup X$ o $\inf X$.

L'insieme dei numeri reali si può definire in vari modi: in modo intuitivo come insieme dei numeri decimali; come retta dei numeri. Tuttavia, bisogna definirlo in maniera rigorosa. C'è un approccio algebrico che consiste nel partire dalla famiglia più intuitiva di numeri (numeri naturali); da qui gli interi, razionali e poi si passa ad i reali. Nel corso si prende una scorciatoia perché la costruzione rigorosa del sistema numeri naturali prevede l'utilizzo di vari assiomi cioè gli assiomi di Peano che costituiscono una prima formalizzazione assiomatica degli insieme dei numeri naturali. I numeri reali vengono introdotti in maniera assiomatica, così che gli assiomi permettano di identificare un insieme più o meno univoco. Il più o meno scaturisce dal concetto di isomorfismo (trattato più avanti). Gli otto assiomi identificano una struttura di insieme con alcune proprietà chiamata insieme dei numeri reali. Gli assiomi si raggruppano in quattro categorie ognuna con sottocategorie:

(A) Ordinamento totale. Cioè una relazione d'ordine \leq che gode delle seguenti proprietà:

- $(A_1) \forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \vee a = b \vee a > b$. Questa è la totalità della relazione d'ordine considerata.
- $(A_2) a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$.

- (A₃) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$. Proprietà antisimmetrica.
- (A₄) $a \leq a, \forall a$. Proprietà riflessiva.

A questa struttura di insieme totalmente ordinato si aggiunge una struttura aritmetica, algebrica.

(B) Addizione. Cioè un'applicazione che ad ogni $a, b \in \mathbb{R}$ fa corrispondere un elemento $a + b \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- (B₁) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$. Commutatività.
- (B₂) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$. Associatività.
- (B₃) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a$. Esistenza dell'elemento neutro, zero (l'identità additiva).
- (B₄) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = -a + a = 0$. Esistenza dell'elemento inverso rispetto l'addizione (ma opposto rispetto ad a).

(C) Moltiplicazione. Ad ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si associa un elemento $ab \in \mathbb{R}$ (o anche $a \cdot b$) che verifichi:

- (C₁) $\forall a, b \in \mathbb{R} : ab = ba$. Commutatività.
- (C₂) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (ab)c = a(bc)$. Associatività.
- (C₃) $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, tale che, $\forall a \in \mathbb{R}, a1 = 1a = a$. Esistenza dell'elemento neutro, uno (l'identità moltiplicativa)
- (C₄) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Esistenza dell'elemento inverso rispetto la moltiplicazione (e reciproco rispetto ad a).

Occorre collegare gli assiomi (A), (B) e (C) tramite i seguenti assiomi:

- (AB) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \implies a + c \leq b + c$.
- (AC) $0 \leq a \wedge 0 \leq b \implies 0 \leq ab$. Moltiplicazione dei segni.
- (BC) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b)c = ac + bc$. Distributività.

Domanda: Possono questi assiomi caratterizzare (cioè descrivere senza possibilità di errore) l'insieme dei numeri reali? No, perché la struttura numerica dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$ soddisfa gli assiomi precedenti, tuttavia $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ (spiegato successivamente), tale struttura dei numeri razionali non esaurisce né costituisce la totalità dei numeri reali sebbene soddisfi tutti gli assiomi.

1.1 Valore assoluto.

Intermezzo: Valore assoluto, funzione fondamentale per descrivere tutto ciò a che fare con la struttura geometrica dell'insieme dei numeri reali.

Definizione. Sia $a \in \mathbb{R}$. Il valore assoluto $|a|$ è definito da:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

C'è la necessità di provvedere ad una dimostrazione rigorosa, partendo dagli assiomi, delle affermazioni che si fanno.

Lemma. $\forall a \in \mathbb{R}, |a| = \max\{a, -a\}$

Dimostrazione. Per la proprietà di ordine totale, a può essere zero, negativo o positivo. Se è zero, il valore assoluto è zero; il massimo tra zero e meno zero è ancora zero, l'affermazione è ovvia. Se $a \geq 0$ allora $-a \leq 0$ e dunque $a \geq -a$. Quindi $a = |a| = \max\{a, -a\}$. Se $a < 0$, allora $-a > 0$ e $|a| = -a = \max\{a, -a\}$. Dimostrazione diretta che procede per casi che esauriscono tutte le situazioni possibili.

Esercizio. Usando il lemma appena visto, dimostrare che:

- $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $|-a| = |a|$
- $a \leq |a|, -a \leq |a|$

Questa deriva dalla caratterizzazione del lemma.

Possono essere dimostrate dalla definizione con i due casi, talvolta la caratterizzazione come massimo è più pratica e sbrigativa.

Teorema. Disuguaglianza triangolare. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Dimostrazione. Dimostrazione tramite la prima definizione, però occorre incrociare sei casi totali. Una più sbrigativa discende dall'ultima proprietà dell'esercizio: si sa che $a \leq |a|, b \leq |b|$. Quindi, per l'assioma (AB), $a + b \leq a + |b| \leq |a| + |b|$. Ora si considerano gli opposti $-(a + b) = -a + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$. Si deduce che $|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|$.

Esercizio. Disuguaglianza triangolare inversa. Dedurre che $|a + b| \geq ||a| - |b||$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

La prossima definizione anticipa una parte successiva nel corso. Si introducono alcune notazioni e terminologie.

Definizione. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. La distanza tra x e y è $d(x, y) = |x - y|$. Dato $r > 0$, l'intorno sferico $B(x, r)$ del punto $x \in \mathbb{R}$ è $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\}$.

Continua la costruzione assiomatica completa dei numeri reali, così aggiungendo agli assiomi (A), (B) e (C) quell'assioma che permetta di identificare in maniera univoca la struttura dei numeri reali. Assioma di Dedekind o assioma di completezza o continuità. Esso permette di costruire assiomaticamente una struttura che sia più ricca di quella dei numeri razionali.

Osservazione. La precedente definizione dei numeri razionali è sovrabbondante. $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = \dots$. Quando si scrive una frazione, si può sempre supporre che abbia la forma p/q dove $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, e p e q sono primi tra loro, cioè non hanno fattori comuni.

Teorema. Non esiste alcun numero razionale a tale che $a^2 = 2$.

Dimostrazione. Per assurdo, si supponga che esista $a = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, p e q coprimi, tale che $(p/q)^2 = 2$. Quindi $p^2 = 2q^2$. Allora p^2 è un numero pari, e anche p deve esserlo. Esiste dunque $s \in \mathbb{Z}$ tale che $p = 2s$.

$$\begin{cases} p^2 = 4s^2 \\ p^2 = 2q^2 \end{cases} \rightsquigarrow 4s^2 = 2q^2 \rightsquigarrow q^2 = 2s^2$$

Si è dimostrato che q^2 è pari, e pertanto anche q è pari. Numeratore e denominatore sono pari, ma ciò è assurdo perché per ipotesi p e q sono coprimi, pertanto è assurdo ipotizzare un numero razionale il cui quadrato sia pari a due. Questo teorema è una forma analitica di un'osservazione nota ai pitagorici (Ippaso di Metaponto): la diagonale di un quadrato è incommensurabile con il lato del quadrato. Il rapporto tra la lunghezza della diagonale e del lato non è un numero razionale.

Passando alla descrizione dell'assioma di Dedekind. C'è bisogno del concetto di sezione dell'insieme dei numeri reali.

Definizione. Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R} . La coppia (A, B) è una sezione di \mathbb{R} se valgono:

- $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$. Ogni numero reale o cade in A o in B .
- $\forall a \in A, \forall b \in B : a < b$. Insieme A tutto a sinistra di B sulla retta dei numeri.

La sezione divide in due parti in numeri reali senza averne in comune.

(D) Assioma di Dedekind. Per ogni sezione (A, B) di \mathbb{R} esiste un unico numero reale L tale che $a \leq L \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. Quindi L fa da elemento separatore della sezione.

Si mostra che \mathbb{Q} non soddisfa (D). Bisogna mostrare che esista almeno una particolare sezione priva di elemento separatore. Infatti, siano $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0, q^2 < 2\}$ e $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0, q^2 \geq 2\}$. È chiaro che A e B sono disgiunti formati da numeri razionali. Pertanto, (A, B) è una sezione di \mathbb{Q} . Si supponga per assurdo che esista un elemento separatore $L \in \mathbb{Q}$ di A e B , come nell'assioma (D). Necessariamente L appartiene ad A oppure B poiché $\mathbb{Q} = A \cup B$. Ad esempio, $L \in A$. Non può essere $L < 0$: infatti $0 \in A$. Allora $L^2 \leq 2$. Si supponga che non può essere $L^2 = 2$ pertanto $L^2 < 2$. Sia N un numero intero maggiore di $\frac{2L+1}{2-L^2}$. Allora

$$\begin{aligned} \left(L + \frac{1}{N}\right)^2 &= L^2 + \frac{1}{N^2} + 2\frac{L}{N} \\ &< L^2 + \frac{1}{N} + 2\frac{L}{N} = L^2 + \frac{1+2L}{N} \\ &< L^2 + \frac{2L+1}{\frac{2L+1}{2-L^2}} = 2 - L^2 + L^2 = 2 \end{aligned}$$

Da ciò $\left(L + \frac{1}{N}\right)^2 < 2$. Quindi $L + \frac{1}{N} \in A$. Ma questo è impossibile, poiché $L \geq a$ per ogni $a \in A$, mentre $L + \frac{1}{N} > L$. Con ragionamento analogo vale per $L \in B$. In particolare, L è un numero razionale che appartiene ad A o B , ma non appartiene a nessuno dei due, quindi L non può esistere, pertanto la sezione non ha un elemento separatore e quindi i numeri razionali non verificano l'assioma di Dedekind.

È possibile dimostrare che esiste, a meno di isomorfismi (l'isomorfismo è una funzione biunivoca che rispetta la struttura degli insiemi tra cui agisce, cioè un semplice cambio di nome della stessa struttura, ma avendo cura di rispettare il modo in cui questi elementi interagiscono tra loro), uno ed un solo insieme che soddisfa gli assiomi (A), (B), (C) e (D). Questo insieme è denotato con \mathbb{R} , il "campo" dei numeri reali.

I numeri possono essere costruiti progressivamente a partire dalla struttura più piccola dei numeri naturali, crescendo fino alla struttura più grande dei numeri reali. Finora si è costruito assiomaticamente l'insieme dei numeri reali. Tuttavia, si vuole mostrare come i numeri naturali possono essere ricostruiti dagli assiomi dei reali.

Numeri naturali. La costruzione dei numeri naturali non è facile. Si può fare tramite gli assiomi di Peano oppure come sottoinsieme di \mathbb{R} . Il secondo approccio è più sintetico. Per introdurre i numeri naturali si ha bisogno di una classe di insiemi.

Definizione. Un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ è induttivo se soddisfa due condizioni:

- $1 \in \mathcal{A}$
- $s \in \mathcal{A} \implies s + 1 \in \mathcal{A}$

Osservazione. \mathbb{R} è induttivo, così come $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Sulla retta dei numeri gli insiemi induttivi si estendono infinitamente a destra.

Definizione. L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali è l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di \mathbb{R} . (Il generico elemento di \mathbb{N} è un numero che per definizione appartiene tutti i sottoinsiemi induttivi di \mathbb{R})

Proposizione. $\mathbb{N} \neq \emptyset$ è un insieme induttivo.

Dimostrazione. Poiché 1 appartiene ad ogni insieme induttivo, $1 \in \mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} \neq \emptyset$. Sia $x \in \mathbb{N}$ e mostriamo che $x + 1 \in \mathbb{N}$. Per ogni insieme induttivo \mathcal{A} , si ha $x \in \mathcal{A}$ (definizione di \mathbb{N}). \mathcal{A} induttivo $\implies x + 1 \in \mathcal{A}$. Pertanto, $x + 1$ appartiene a qualunque insieme induttivo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$. Dunque, $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Osservazione. Segue dalla definizione e della Proposizione precedente che \mathbb{N} è il più piccolo sottoinsieme induttivo di \mathbb{R} . Quindi non c'è nessun sottoinsieme proprio induttivo contenuto in \mathbb{N} .

Principio di induzione. Se $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ è tale che $1 \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{A} \implies x + 1 \in \mathcal{A}$ allora $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. Se si ha un sottoinsieme induttivo formato da tutti i numeri naturali esso deve coincidere con l'insieme dei numeri naturali stesso. L'induzione significa dunque che \mathbb{N} è il più piccolo sottoinsieme induttivo di \mathbb{R} .

Forma proposizionale del principio di induzione. Forma proposizionale significa che il principio di induzione, invece che in maniera insiemistica, fa una collezione di proposizioni logiche dipendenti da un indice intero positivo: Sia P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) una famiglia di proposizioni, dipendenti da un indice n . Se (a) P_1 è vera; (b) $\forall n : P_n \implies P_{n+1}$ allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{k \in \mathbb{N} \mid P_k \text{ vera}\}$. Le condizioni (a) e (b) garantiscono che \mathcal{A} sia induttivo. Per il principio di induzione, $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. Quindi P_k è vera per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esempio. Disuguaglianza talvolta attribuita a Bernoulli. Dato un numero reale $h \geq -1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $(1 + h)^n \geq 1 + nh$. (Domanda: Perché $h \geq -1$? Se h fosse un qualunque numero reale, sarebbe ancora vera tale disuguaglianza?) Infatti, sia $P_n : (1 + h)^n \geq 1 + nh$. P_1 è vera: $(1 + h) \geq 1 + h$. Si supponga P_n vera e va dimostrato che anche P_{n+1} sia vera. Ora, $(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + nh)$ grazie a P_n . Dunque $(1 + h)^{n+1} \geq 1 + nh + h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$ con $(nh^2 \geq 0)$ e questo significa che P_{n+1} è vera.

Definizione. Il fattoriale di un numero $n \in \mathbb{N}$ è definito da $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$. Si aggiunge, per comodità, $0! = 1$.

L'insieme \mathbb{N} , per come è stato introdotto finora, non ha zero. Tuttavia, per la definizione tramite l'induttività, un'argomentazione se \mathbb{N} possiede zero o meno è inutile, in quanto gli insiemi induttivi si potrebbero far partire da qualsiasi numero. La definizione riportata è in qualche maniera la più antropologicamente naturale. La necessità di contare è primitiva. Lo zero è stato introdotto solamente in un secondo momento.

Definizione. Siano n e k due numeri tali che $n \geq k$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è definito da $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.

Il coefficiente binomiale è importante nella formula del binomio di Newton. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Si applica il principio di induzione alla formula del binomio di Newton. Per poterlo fare bisogna specificare qualche proprietà preliminare.

Lemma. Per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha:

- $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$
- Per ogni $0 \leq k \leq n$ intero, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dimostrazione. Esercizio. (usare definizione fattore e coefficiente binomiale)

Proposizione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni intero $1 \leq k \leq n$, risulta $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. Non è una proprietà immediata, ma è strumentale nella dimostrazione della formula del binomio di Newton.

Dimostrazione. Se $1 \leq k \leq n$, allora $0 \leq k-1 \leq n-1 < n$. Dunque la tesi diventa

$$\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

Semplificando alcuni fattori comuni

$$\frac{n+1}{k(n+1-k)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}$$

Che è una identità.

Ora dimostrazione della formula del binomio di Newton. Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ si ha $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k}a^{1-k}b^k = a+b$.

Supponiamo vera la formula per n , e si dimostra che è vera anche per $n+1$. Ora,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Per ipotesi induttiva. Possiamo usare le proprietà delle sommatorie e continuare così:

$$\begin{aligned}
 \dots &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-1-k} b^{k+1} \\
 &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=k+1=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \dots &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \left[\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} \right] a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} \\
 &= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^h
 \end{aligned}$$

Dunque la formula è vera per $n+1$, e per il principio di induzione garantisce che è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Secondo principio di induzione. Il secondo principio di induzione matematica è apparentemente più generale, ma si dimostra che non c'è alcuna differenza tra i due. Noto anche come principio di induzione completa: Se $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ è tale che:

- $1 \in \mathcal{A}$
- Se $b \in \mathcal{A}$ per ogni $b \leq a$, allora $a+1 \in \mathcal{A}$

Risulta $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. Se si ha un intero $a \in \mathcal{A}$ e si suppone che tutti gli interi minori o uguali di a siano elementi dell'insieme allora anche $a+1$ è elemento dell'insieme. (Confronta con l'ipotesi induttiva già vista). L'ipotesi di questo principio è più forte del primo.

Osservazione. Il secondo principio implica il “primo”. Si mostra che, in realtà, sono principi equivalenti. Si supponga che valga il “primo” principio di induzione e sia $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}$ un sottoinsieme che soddisfa l'ipotesi del secondo principio. Si vuole dimostrare che $\mathcal{B} = \mathbb{N}$. Si consideri $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{N} \mid b \leq a \implies b \in \mathcal{B}\}$. È chiaro che $1 \in \mathcal{A}$. Se $n \in \mathcal{A}$, allora per ogni $b \leq n$ si ha $b \in \mathcal{B}$. Per l'ipotesi del secondo principio si ha $n+1 \in \mathcal{B}$ quindi dato che $n+1 \leq n+1$ allora $n+1 \in \mathcal{A}$. Quindi \mathcal{A} è induttivo e per il “primo” principio $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. Quindi anche $\mathcal{B} = \mathbb{N}$.

Teorema. Ogni sottoinsieme non vuoto $H \subset \mathbb{N}$ ha un elemento minimo.

Dimostrazione. Per assurdo, si sa che H non abbia minimo. Si ponga $\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus H$. Si ha $1 \in \mathcal{A}$, altrimenti $1 \in H$ e sarebbe il minimo di H . Si applica il secondo principio di induzione e si supponga che per ogni $x \leq a$ si abbia $x \in \mathcal{A}$. Poiché H è il complementare di \mathcal{A} , tutti gli elementi di H devono essere maggiori a . Pertanto, se $a + 1 \in H$, allora $a + 1$ sarebbe il minimo di H . Questo è assurdo, e perciò $a + 1 \in \mathcal{A}$. Per il secondo principio di induzione, $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, il che significa $H = \emptyset$. Impossibile. Pertanto, H possiede il suo minimo in \mathbb{N} .

Successivamente l'assioma di Dedekind sarà utile per dimostrare come un insieme in \mathbb{R} possa possedere un estremo superiore o inferiore, senza avere un massimo od un minimo.

Non tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R} possiedono un minimo: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ (perché?). D'altronde nemmeno $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ possiede un minimo, pur essendo limitato inferiormente. Tuttavia, \mathbb{R} gode di una conseguenza dell'assioma di Dedekind.

Teorema. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. L'insieme $\mathcal{M}(A)$ dei maggioranti di A possiede minimo.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}' = \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}(A)$. Si dice che $(\mathcal{M}', \mathcal{M}(A))$ è una sezione di \mathbb{R} . È infatti ovvio, per la definizione di \mathcal{M}' , che $\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}(A) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}(A) = \emptyset$. Si considerino poi $\mu \in \mathcal{M}'$ e $m \in \mathcal{M}(A)$. L'elemento μ non è un maggiorante di A quindi $\exists a \in A$ tale che $\mu < a$. Mentre m è un maggiorante di A quindi $a \leq m$. In conclusione, $\mu < m$. Quindi il generico elemento di \mathcal{M}' è più piccolo del generico elemento di $\mathcal{M}(A)$. L'assioma di Dedekind afferma che ogni sezione possiede un elemento separatore della coppia. Sia L l'elemento separatore di $(\mathcal{M}', \mathcal{M}(A))$, come nell'assioma (D) di Dedekind. Per concludere la dimostrazione, è sufficiente mostrare che $L \in \mathcal{M}(A)$. Se si sa che questo elemento è un maggiorante allora, per costruzione della sezione, esso è necessariamente anche il più piccolo, perché tutti i numeri minori di L non sono maggioranti. Per assurdo, se $L \notin \mathcal{M}(A)$, allora esisterebbe $a \in A$ tale che $L < a$. Poiché $L < \frac{L+a}{2} < a$, $\frac{L+a}{2}$ non è un maggiorante di A , e dunque appartiene a \mathcal{M}' . Questo è impossibile, poiché L separa \mathcal{M}' da $\mathcal{M}(A)$. (In quanto tutto ciò che è minore di L sta in \mathcal{M}' , mentre tutto ciò che è maggiore di L sta in $\mathcal{M}(A)$, la contraddizione sta nel fatto che il punto medio tra L e a sta in \mathcal{M}' seppur essendo maggiore di L). Pertanto, $L \in \mathcal{M}(A)$. Il minimo dei maggioranti è l'estremo superiore.

Il risultato appena trovato si può riassumere come:

Teorema. Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente $A \subset \mathbb{R}$ possiede un estremo superiore. In maniera analoga, ogni sottoinsieme non vuoto e limitato inferiormente $B \subset \mathbb{R}$ possiede estremo inferiore. Notazione: $\sup A$, $\inf A$.

Qualche caratterizzazione equivalente agli estremi superiore ed inferiore. (Una caratterizzazione è una proprietà logicamente equivalente).

Proposizione. Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Il numero reale $L = \sup A$ è caratterizzato dalle proprietà:

- $\forall a \in A, a \leq L$
- $\forall \lambda < L, \exists a \in A$ tale che $\lambda < a$

Esercizio. Formulare una caratterizzazione analoga per l'estremo inferiore.

Convenzione. Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

- $\sup A = +\infty \iff A$ non è limitato superiormente
- $\inf A = -\infty \iff A$ non è limitato inferiormente

(In questo corso il simbolo di infinito non ha propria dignità, ma viene usato solamente come abbreviazione di qualche proprietà).

Esercizio.

- 1. Siano $a < b$ due numeri reali, e sia $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Dimostrare (rigorosamente!) che $a = \inf(a, b)$ e $b = \sup(a, b)$. La scrittura (a, b) inteso come intervallo aperto, non come coppia.
- 2. Sia $A = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Trovare $\inf A$ e $\sup A$. (Studiando la controparte continua $f(n) = n - \frac{1}{n}$, $n \in [1, +\infty)$ e studiando la derivata si nota come $f(n)$ sia una funzione strettamente crescente e pertanto $\inf A = f(1) = A(n=1) = 0$, similmente $\sup A = f(n \rightarrow +\infty) = A(n \rightarrow +\infty) = +\infty$).

Teorema. (Proprietà archimedeica di \mathbb{R} , che discende dall'assioma di Dedekind) Per ogni coppia a, b di numeri reali positivi, esiste un intero positivo N tale che $Na > b$. (Questo teorema, con la scelta specifica $a = 1$, afferma che, qualunque sia b , esiste un intero positivo N maggiore di b . Esso garantisce l'esistenza di numeri naturali arbitrariamente grandi.)

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}, na \leq b$. Dunque l'insieme $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente (b è un maggiorante di A). Sia $L = \sup A$. Per definizione, $\forall m \in \mathbb{N}, (m+1)a \leq L$, e dunque $ma \leq L - a$. Ma $L - a < L$ in contraddizione con il fatto che L è il minimo maggiorante di A .

Una conseguenza è che l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è "denso" in \mathbb{R} .

Proposizione. Dati comunque due numeri reali a, b con $a < b$, esiste sempre un numero razionale r compreso tra a e b . (I numeri razionali riempiono l'asse reale senza lasciare buchi, ma non l'esauriscono e non è possibile dire qual è il primo numero razionale più grande di un numero arbitrario).

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che a e b siano positivi (perché? Ciò significa che se è dimostrata con questa condizione aggiuntiva allora è dimostrata anche senza tale condizione). Grazie alla proprietà archimedeica, si può scegliere un intero positivo N maggiore di $\frac{1}{b-a}$. Si considerino i numeri razionali multipli di N^{-1} cioè $N^{-1}, 2N^{-1}, 3N^{-1}, \dots, i \cdot N^{-1}, \dots$. Solo un numero finito di essi è minore o uguale ad a : sia $k \cdot N^{-1}$ il più grande di essi. Allora $r = (k+1)N^{-1}$ è compreso tra a e b . Infatti,

$r > a$ per costruzione. Se poi fosse $r \geq b$, allora $N^{-1} = r - kN^{-1} \geq b - kN^{-1} \geq b - a$, quindi $N \leq (b - a)^{-1}$. Questo contraddice la scelta del numero N . Questo mostra che r è necessariamente e strettamente minore di b . Così si è costruito un numero r che cade tra a e b .

Cardinalità. $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (La cardinalità è una classe d'equivalenza.)

Definizione. Dicasi che due insiemi A e B sono equipotenti (o che hanno la stessa cardinalità), se esiste una applicazione biunivoca $A \rightarrow B$. Si scrive in tal caso $A \sim B$ (“ A equipotente B ”) o anche $\# A = \# B$ “cardinalità A uguale cardinalità di B ”). Tuttavia, la cardinalità di per sé non è definita. Un insieme A è finito, se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \sim \mathbb{I}_n$. In tal caso si dice che la cardinalità di A è n : $\#A = n$. Un insieme è infinito se non è finito.

Convenzione. $\#\emptyset = 0$.

Definizione. Un insieme A è numerabilmente infinito se $A \sim \mathbb{N}$, cioè se è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Inoltre, un insieme A è numerabile se è finito oppure numerabilmente infinito.

Osservazione. Se A è numerabilmente infinito, esiste una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ e in particolare $A = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$. È consuetudine usare una notazione del tipo a_k al posto di $f(k)$, per $k = 1, 2, 3, \dots$. Si dice allora che gli elementi a_1, a_2, a_3, \dots di A sono enumerati (o elencati in successione).

Proposizione. Ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile.

Dimostrazione. Sia S un insieme numerabile, e sia $A \subset S$. Se A è finito, non c'è nulla da dimostrare. Si supponga quindi che A (e dunque S) sia un insieme infinito. Si può scrivere $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$, enumerando gli elementi distinti di S . Sia k_1 il più piccolo numero naturale tale che $s_{k_1} \in A$. Supponendo di aver scelto k_2, k_3, \dots, k_{n-1} , sia k_n il più piccolo numero naturale maggiore di k_{n-1} tale che $s_{k_n} \in A$. Si è così costituito una enumerazione degli elementi di A : $A = \{s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, \dots\}$. Questa enumerazione non contiene ripetizioni, in virtù della scelta di ogni indice k_1, k_2, k_3, \dots . Quindi $A \sim \mathbb{N}$, e la tesi è dimostrata.

Teorema. Sia A_1, A_2, A_3, \dots insiemi disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$) e numerabili. Allora anche $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è numerabile. L'unione numerabile di insieme numerabili e disgiunti è ancora un insieme numerabile.

Dimostrazione. Sia $A_n = \{a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \dots\}$ una enumerazione di A_n , e si ponga $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Ogni $x \in S$ appartiene ad uno ed un solo degli insiemi A_1, A_2, A_3, \dots . Quindi è univocamente determinata una coppia (m, n) di numeri naturali tali che $x = a_{m,n}$ (n indica in quale insieme x cade e l'indice m indica la posizione nell'enumerazione di A_n). L'applicazione f che manda $x \in S$ in $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è iniettiva (perché la coppia (m, n) è univocamente determinata). Poiché $f(S) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ basta dimostrare che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile (se è numerabile,

l'immagine $f(S)$ è un sottoinsieme di un numerabile quindi a sua volta numerabile). Si definisca una funzione g su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ponendo $g(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Questa funzione è iniettiva (perché 2 e 3 sono coprimi), e la sua immagine è un sottoinsieme di \mathbb{N} , quindi numerabile. Pertanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. (C'è una corrispondenza tra un sottoinsieme dei naturali e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Attenzione: questo enunciato ha un'ipotesi tecnica e cioè che gli insiemi della famiglia considerata sono a due a due disgiunti. Talvolta, viene naturale unire sottoinsieme che non siano necessariamente a due a due disgiunti. Quindi la dimostrazione non funziona. Tuttavia, si può sempre scrivere un'unione numerabile di insiemi come un'unione numerabile di insiemi a due a due disgiunti.

Teorema. Siano A_1, A_2, A_3, \dots insiemi, e siano $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ (si sta sottraendo ad A_n il contenuto di tutti gli insiemi precedenti). Allora gli insiemi B_1, B_2, B_3, \dots sono a due a due disgiunti, e $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Dimostrazione. Per costruzione, B_n non ha elementi comuni con i precedenti insiemi $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$. Quindi $B_i \cap B_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. Siano $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Si mostra che $A = B$. Sia $x \in A$, quindi esiste un naturale k tale che $x \in A_k$. Si scelga il più piccolo naturale k con tale proprietà: ne consegue che $x \in A_k$, ma x non appartiene a nessuno dei precedenti $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$. Questo significa che $x \in B_k$, e dunque $x \in B$. Viceversa, se $x \in B_k$ allora $x \in A_k$. Si è così dimostrato che $A \subset B$ e che $B \subset A$. Pertanto, $A = B$. Enunciato fondamentale nella teoria della misura.

Quindi è sempre possibile rappresentare l'unione numerabile di insiemi qualunque mediante l'unione numerabile di insiemi disgiunti. Questo permette il salto logico dal teorema precedente all'enunciato successivamente riportato. I due enunciati precedenti implicano una naturale proprietà degli insiemi numerabili.

Teorema. L'unione di insiemi numerabili è un insieme numerabile. (La numerabilità è stabile per unioni numerabili. Questo è il primo enunciato se la famiglia di insiemi è a due a due disgiunta. Se la famiglia è di insiemi qualsiasi allora l'unione si può presentare come unione di un'altra famiglia di insiemi a due a due disgiunti. In ogni caso l'unione di insiemi numerabili è un insieme numerabile).

Applicazione. L'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è numerabile. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia A_n l'insieme di tutte le frazioni positive aventi per denominatore n . L'insieme di tutti i numeri razionali positivi è $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ne consegue che \mathbb{Q} è numerabile, poiché ogni A_n è numerabile. (I numeri razionali positivi sono numerabili come appena mostrato, mentre quelli negativi sono semplicemente quelli positivi solo con il segno cambiato, pertanto l'insieme dei numeri razionali è l'unione di due insiemi numerabili e quindi esso stesso numerabile).

Tuttavia, esistono insiemi che non sono numerabili. In particolare, è impossibile attribuire una cardinalità numerica agli insiemi infiniti.

Esempio. L'insieme \mathbb{R} non è numerabile. In quanto esistono infinità diverse non si può attribuire un numero agli insiemi infiniti, perciò la cardinalità non è vista come un numero ma come una classe di equivalenza.

È sufficiente mostrare che l'intervallo $(0, 1)$ non è numerabile perché, ragionando per assurdo, se \mathbb{R} fosse numerabile ci sarebbe una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{R} e \mathbb{N} ; in particolare, i numeri reali tra zero e uno sarebbero in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di \mathbb{N} . Ma se si dimostra che $(0, 1)$ non è numerabile, si arriva ad una contraddizione. Pertanto, procedendo per assurdo, e supponendo che

$(0, 1) = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$. Ogni s_n può essere scritto in forma decimale: $s_n = 0.u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3}\dots$ dove $u_{n,i}$ è una cifra compresa tra zero e nove. Si definisca $y = 0.v_1v_2v_3\dots$ dove

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{se } u_{n,n} \neq 1 \\ 2 & \text{se } u_{n,n} = 1 \end{cases}$$

(L'argomento della diagonale di Cantor) Il numero y non appare nell'enumerazione di $(0, 1)$, poiché differisce da s_1 per la prima cifra decimale, da s_2 per la seconda cifra, da s_3 per la terza cifra e così via. Pertanto, tale numero non può comparire. Ma ciò è impossibile, perché quando c'è numerabilità, allora l'enumerazione è una scrittura esaustiva, cioè fa comparire tutti i numeri, una ed una sola volta. Questa contraddizione mostra che è assurdo supporre che l'intervallo fosse numerabile e quindi \mathbb{R} non è un insieme numerabile.

L'assioma di completezza si dimostra identico all'esistenza dell'estremo superiore o inferiore.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato (cioè esiste almeno un maggiorante di A). Quindi, $\xi = \sup A \iff \xi$ è il minimo dei maggioranti.

Proposizione. Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. Un numero $\xi \in \mathbb{R}$ è $\sup A \iff$ valgono le seguenti proprietà:

- 1) $\forall a \in A, a \leq \xi$ cioè ξ è un maggiorante.
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \mid \xi - \varepsilon < x$ cioè ξ è il minimo dei maggioranti.

Dimostrazione. La proprietà 1) dice che ξ è un maggiorante di A , senza specificare se sia il minore. La condizione 2) dice che $\forall \varepsilon > 0$ il numero $\xi - \varepsilon$ non è un maggiorante, cioè nessun numero strettamente minore di ξ è un maggiorante di A . Quindi, 1) e 2) affermano che ξ è il minore dei maggioranti di A cioè $\sup A$.

Esercizio. Dimostrare il viceversa.

Da notare come la caratterizzazione di tutti i numeri minori di ξ tramite la scrittura $\xi - \varepsilon$ è una cosa che ha senso solo in una struttura in cui sia possibile fare un'operazione algebrica che rispetti gli assiomi che legano l'ordinamento con le operazioni.

Lemma. Esercizio di logica. Sia $x \geq 0$ un numero reale. Se $x \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ allora $x = 0$. L'affermazione contronominale equivale a dire che non esiste il minimo dell'insieme dei numeri reali strettamente positivi: $\nexists \min\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. L'unico numero non negativo

che soddisfa tale proprietà è zero. Infatti, non esiste nessuno numero $x > 0$ che cada nell'insieme $(0, \varepsilon)$ in quanto tale insieme è arbitrariamente piccolo.

Dimostrazione. Si supponga $x \neq 0$, quindi $x > 0$. Bisogna negare l'ipotesi, pertanto bisogna dimostrare che $\exists \varepsilon > 0 \mid x > \varepsilon$. Per far ciò basta scegliere $\varepsilon = x/2$.

Esercizio. Dimostrare $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ciò implica che l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni $x \in \mathbb{R}$. Questo dimostra l'incompletezza algebrica di \mathbb{R} : essa è stata il motore che ha portato ad ampliare i sistemi numerici noti. Excursus storico: $x + b = 0, x \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$; $2x - 1 \rightarrow \mathbb{Q}$; $x^2 = 2 \rightarrow \mathbb{R}$; $x^2 = -1 \rightarrow \mathbb{C}$. I numeri complessi.

2 Numeri complessi.

Definizione. Un numero complesso è una coppia ordinata $z = (a, b)$ di numeri reali a e b . L'insieme \mathbb{C} è quindi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le seguenti operazioni. Dati due numeri complessi $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$:

- $z + w = (a + c, b + d)$
- $zw = (ac - bd, ad + bc)$

Se $z = (a, b)$ allora si chiama a la parte reale, $a = \Re(z)$, e b la parte immaginaria, $b = \Im(z)$.

Identificando degli isomorfismi si può scrivere la coppia ordinata (a, b) in un modo più semplice da manipolare. Cioè le rappresentazioni algebrica e polare.

Osservazione. Ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con il numero complesso $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Allora $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1)$ dove la coppia ordinata $(0, 1)$ viene definita unità immaginaria, i .

Definizione. La coppia ordinata $i = (0, 1)$ è l'unità immaginaria.

Lemma. Vale $i^2 = (-1, 0) = -1$.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata, infatti:

$$i = (0, 1) \implies i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$$

Ogni numero complesso è composto da una parte reale e da una immaginaria, quindi la rappresentazione algebrica è: $z = (a, b) = a + bi$. L'uguaglianza tra le due rappresentazioni sottintende l'identificazione di ogni numero reale con il suo complesso e l'utilizzo dell'unità immaginaria $(0, 1)$. Inoltre, $z = \Re(z) + i\Im(z)$.

Esercizio. Verificare attraverso le definizioni che è corretto scrivere il prodotto $zw = (a, b)(c, d) = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bd)i$ e quindi operare per proprietà distributiva rispetto l'addizione.

La struttura algebrica dei numeri in \mathbb{C} si può trattare semplicemente come in \mathbb{R} ricordando che $i^2 = -1$.

Ritornando alla rappresentazione di un numero $z \in \mathbb{C}$ come coppia ordinata, $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, si può dire che tale coppia di numeri reali è un punto nel piano. Pertanto, la rappresentazione geometrica di z è un punto nel piano cartesiano di coordinate (x, y) . Pertanto, è naturale associare a z altre due quantità:

- 1) La distanza dall'origine $\rho = \overline{Oz} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 2) L'angolo rispetto l'asse delle ascisse, θ . L'angolo non è determinato in maniera univoca, ma a meno di giri completi, cioè multipli di 2π .

Definizione. Sia $z \in \mathbb{C} = (x, y) = x + yi$. Allora

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ è il modulo del numero complesso.
- $0 \leq \theta < 2\pi$ è l'argomento, $\arg(z)$, principale (perché si considera il primo giro) di z (viene detto dai fisici anche fase); un'altra convenzione è di scegliere $-\pi \leq \theta < \pi$.

Osservazione. Per $z = (0, 0) = 0$ l'argomento è indefinito, indeterminato.

Esercizio. Svolto. $|z| = 0 \iff z = 0$. Se $z = (0, 0)$ allora il modulo è $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$. Viceversa, si supponga $|z| = 0$. Siano $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$. L'ipotesi diventa $\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 0$. Dato che $x^2 \geq 0 \wedge y^2 \geq 0$, l'unica opzione è $x^2 = y^2 = 0 \rightsquigarrow x = y = 0$.

Inoltre, $x = |z| \cos \theta$ e $y = |z| \sin \theta$. Per le precedenti definizioni si arriva alla rappresentazione polare: $z = (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$. Tale notazione è ambigua perché si può confondere con quella di coppia ordinata, quindi si scrive per esteso: $z = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Definizione. Il (complesso) coniugato di un numero complesso $z = x + yi$ è $\bar{z} = z^* = x - yi$ con $\Re(z) = \Re(\bar{z})$ e $\Im(z) = -\Im(\bar{z})$.

Lemma. $z\bar{z} = |z|^2$.

Dimostrazione. Sia $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Allora $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$.

Teorema. $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \mid zz^{-1} = 1 = (1, 0)$.

Dimostrazione. Dal lemma si sa che $z\bar{z} = |z|^2$ quindi $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, poiché $z \neq 0$ quindi $|z|^2 \neq 0$.

Ciò permette di operare la divisione di numeri complessi.

Esempio.

$$\frac{i-1}{i+1} = (i-1)(i+1)^{-1} = (i-1)\frac{1-i}{2} = -\frac{(1-i)^2}{2} = i$$

Tuttavia, un modo pratico più semplice è quello di razionalizzare il denominatore:

$$\frac{i-1}{i+1} \frac{i-1}{i-1} = -\frac{(1-i)^2}{2} = i$$

Proposizione. Sia $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Risulta:

- 1) $\bar{\bar{z}} = z$. La coniugazione è un'operazione involutoria.
- 2) $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- 3) Se $w \in \mathbb{C}$, allora $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ e $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. L'operazione del complesso coniugato rispetta la struttura algebrica dei numeri complessi.

Dimostrazione. Dati $z = x + yi$ e $w = c + di$:

- 1) $z = w + yi \implies \bar{z} = x - yi \implies \bar{\bar{z}} = \overline{x - yi} = x - (-yi) = x + yi = z$.
- 2)

$$\begin{cases} z = x + yi \\ \bar{z} = x - yi \end{cases} \implies \begin{cases} z + \bar{z} = x + yi + x - yi \\ z - \bar{z} = x + yi - x + yi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$
- 3)
 - ◇ $\overline{z+w} = \overline{(x+yi) + (c+di)} = \overline{x+c + (y+d)i} = x+c - (y+d)i = (x-yi) + (c-di) = \bar{z} + \bar{w}$
 - ◇ $\overline{z \cdot w} = \overline{(x+yi)(c+di)} = \overline{xc + xdi + cyi + ydi^2} = \overline{xc - yd + (xd + cy)i} = xc - yd - (xd + cy)i = xc - yd - xdi - cyi = x(c-di) - y(d-ci) = x(c-di) - yi(d/i - c) = x(c-di) - yi(c-di) = (x-yi)(c-di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

In forma polare, tuttavia, si perde la linearità della somma vettoriale e di conseguenza risulta più difficile sommare due numeri complessi. Ciononostante, la moltiplicazione è più facile rispetto alle coordinate cartesiane. Siano $z = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $w = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Allora:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Il modulo di zw è il prodotto dei moduli di z e w . Mentre l'angolo di zw è la somma degli argomenti di z e w . Da ciò segue che $z^2 = \rho^2[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]$.

Proposizione. Sia $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ un numero complesso e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$. Questa è detta formula di De Moivre.

Dimostrazione. Si proceda per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 1 \implies z^1 = z = \rho[\cos(1 \cdot \theta) + i \sin(1 \cdot \theta)]$. Si supponga che $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$. Pertanto, $z^{n+1} = z^n z = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \cdot \rho[\cos \theta + i \sin \theta] = \rho^{n+1}[\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)]$. La formula è vera anche per $n+1$. Quindi per il principio di induzione essa è vera per ogni n .

Esercizio. Dimostrare che $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $z^{-n} = \rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)]$.

Suggerimento. Basta verificare che $z^n z^{-n} = 1$.

Questa formula serve per risolvere le equazioni in campo complesso, ma anche per introdurre l'ultima notazione. Nella forma trigonometrica, i numeri complessi si comportano come le potenze. I moduli si moltiplicano e le fasi si addizionano. Ciò induce ad introdurre la notazione usata da Eulero: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ si pone $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Alcuni scrivono anche $\text{cis } \theta = \cos \theta + i \sin \theta$. Il senso di tutto questo è che se si prendono due numeri $z = e^{i\theta}$ e $w = e^{i\sigma}$ si ha $zw = e^{i(\theta+\sigma)}$. In generale, un qualunque numero complesso $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$.

L'interesse è risolvere equazioni ed estrarre le radici n -esime. Sia $\alpha = R e^{i\varphi} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ un numero complesso assegnato. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si vuole determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^n = \alpha$ (cioè le radici n -esime di α). Utilizzando la forma algebrica e le coppie ordinate i conti diventano complicati in fretta. Ad esempio se $n = 2$, $\alpha = a + bi$, $z = x + yi \mid z^2 = \alpha$, allora significa fare $(x + yi)^2 = a + bi \iff x^2 - y^2 + xyi = a + bi$ quindi:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Si ha un sistema non lineare di due equazioni in due incognite. Si sta intersecando un'iperbole in forma canonica con un'iperbole equilatera. Per valori di n maggiori di 2 i calcoli risultano sempre più difficili.

Invece nella forma trigonometrica o polare il tutto funziona molto meglio. Allora, si cerca $z = \rho e^{i\theta}$. Quindi l'equazione che caratterizza il problema è $z^n = \alpha \iff (\rho e^{i\theta})^n = R e^{i\varphi} \iff \rho^n e^{in\theta} = R e^{i\varphi}$. Questa equazione ha la forma moltiplicativa quindi è più facile da risolvere. Due numeri in forma trigonometrica coincidono quando coincidono i moduli e la fase differisce per un multiplo di 2π . Pertanto,

$$\begin{cases} \rho^n = R \\ n\theta - \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = R^{1/n} = \sqrt[n]{R} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

I k interi per cui gli angoli θ sono compresi nel primo giro si stabiliscono da $\frac{2\pi}{n}k$ e quando si arriva a $k = n$ si è fatto un giro. Quindi $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, cioè un insieme di n elementi. Pertanto, ogni numero complesso $\alpha = R e^{i\varphi}$ possiede esattamente n radici n -esime distinte caratterizzate da $\rho = \sqrt[n]{R}$ e $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Applicazione delle radici dell'unità.

Se $n = 3$ allora $z^3 = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Dato $z = \rho e^{i\varphi}$ e $1 = R \cdot e^{i\theta}$ con $R = 1$ e $\varphi = 0$, si ha $\rho = \sqrt[3]{R} = 1$ e $\theta = \frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$. Quindi risulta $\rho = 1$ e $\theta \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.

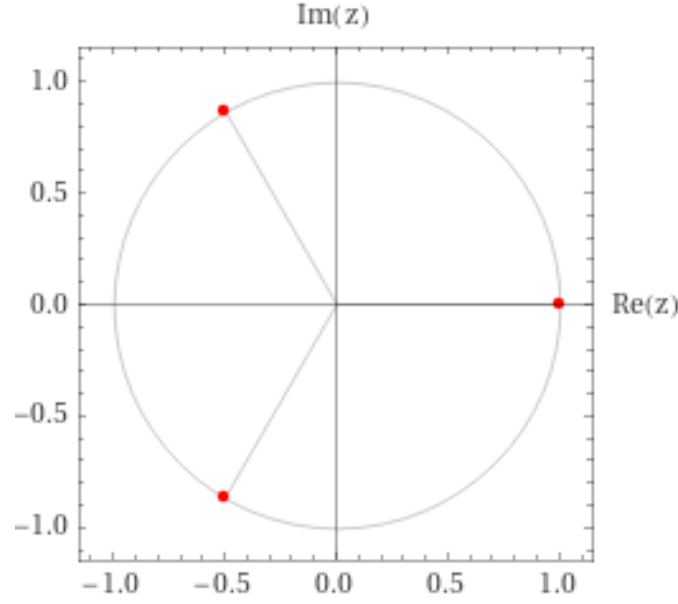


Figure 1: Disposizione delle soluzioni nel piano complesso.

Si individua un triangolo equilatero iscritto nel cerchio unitario. Per $n \in \mathbb{N}$ qualunque, $z^n = 1$ ha le n soluzioni distinte $\{e^{\frac{2k\pi i}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Quindi le radici hanno per angolo al centro dei multipli di $\frac{2\pi}{n}$. Le radici n -esime di 1 sono i vertici del poligono regolare di n lati iscritto nella circonferenza goniometrica.

La disuguaglianza triangolare è fondamentale nel concetto di metrica e spazi normati. Bisogna ricordare che $|z|^2 = z\bar{z}$, $z = x + yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$. In particolare, alcune proprietà:

- $|\Re(z)| \leq |z|$ e anche $|\Im(z)| \leq |z|$. Ciò deriva da $|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ da cui $|z|^2 \geq \Re(z)^2 \implies |z| \geq |\Re(z)|$.
- $|\bar{z}| = |z|$.
- $|zw| = |z||w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

Teorema. Disuguaglianza triangolare. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ si ha $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Dimostrazione. Si svolgono i calcoli.

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$

Dato che $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{\bar{w}} = \bar{z}w$ si ha $|z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2$. Quindi

$$\begin{aligned} |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Pertanto, $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \implies |z + w| \leq |z| + |w|$.

3 Topologia di \mathbb{R} .

Si ritorna ai numeri reali. Il passaggio dall'aspetto algebrico a quello analitico è costituito dalla topologia della retta reale. Essa è lo studio delle proprietà dei sottoinsiemi aventi un concetto che ricorda la distanza. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, la loro distanza è $d(x, y) = |x - y|$. Ciò viene chiamata metrica (o distanza) canonica (euclidea) di \mathbb{R} .

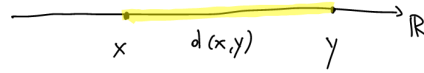


Figure 2: Distanza.

Alcune proprietà:

- $d(x, y) = d(y, x)$, simmetria della metrica.
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$, annullamento.
- $\forall x, y, z, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ cioè $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, disuguaglianza triangolare per la metrica.

In generale, si possono studiare gli spazi metrici come oggetti astratti definiti da queste tre proprietà.

Definizione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. L'intorno centrato (simmetrico, sferico, euclideo) in x_0 e di raggio $r > 0$ è l'insieme $I(x_0, r) = I_r(x_0) = B(x_0, r) = N_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x_0, y) < r\}$. La lettera I è per "intorno", B per "bowl", e N per "neighbourhood". Come visualizzare: $y \in I(x_0, r) \iff d(x_0, y) < r \iff |x_0 - y| < r \iff x_0 - r < y < x_0 + r$.

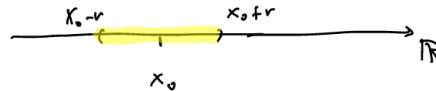


Figure 3: Intorno.

Quindi, $I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ dove il punto medio è proprio x_0 . Gli intorni sono le fondamenta della topologia della retta reale. Una famiglia specifica dei sottoinsiemi dei numeri reali sono gli insiemi aperti che si vanno a definire grazie alla definizione di intorno.

Definizione. Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è aperto se ogni punto $x_0 \in A$ possiede un intorno $I(x_0, r)$ contenuto in A . Ciò equivale a $A = \mathring{A} \iff A \cap \partial A = \emptyset$ dove \mathring{A} è la parte interna, mentre ∂A è la frontiera (definiti più avanti).

Esempio.

- Sia $A = \{c\}$, dove $c \in \mathbb{R}$. Esiste $r > 0$ tale che $I(c, r) \subset A$? Cioè $I(c, r) \subset \{c\}$? Poiché $I(c, r)$ contiene infiniti elementi distinti, la risposta è negativa. L'insieme A non è aperto (aperto e chiuso non sono logicamente opposti: se un insieme non è aperto, allora non è necessariamente chiuso).

- Sia $A = (a, b)$ con $a < b$. Si verifica che A è aperto. Sia $x_0 \in A$. Si cerca $r > 0$ tale che $I(x_0, r) \subset A = (a, b)$. Bisogna che $r < d(x_0, b)$ e $r < d(x_0, a)$. Ad esempio, si prenda $r = \frac{1}{2} \min\{d(x_0, a), d(x_0, b)\}$. Quindi $I(x_0, r) \subset (a, b)$. Poiché x_0 è arbitrario, A è aperto.

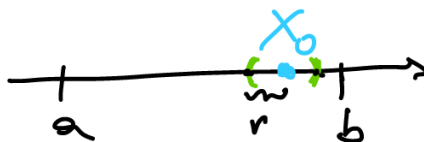


Figure 4: Intervallo aperto.

- Sia $A = [a, b)$, con $a < b$. Sia $x_0 = a$. Qualunque sia $r > 0$ i punti $x_0 - r < x < x_0$ cadono fuori di A . Ma tali punti appartengono a $I(a, r)$. Quindi A non è aperto.

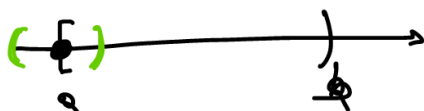


Figure 5: Intervallo né aperto né chiuso.

Convenzione. L'insieme vuoto è un insieme aperto.

Definizione. Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è chiuso se $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ è un insieme aperto.

Esempio. Sia $A = [a, b]$, con $a < b$. Allora $A^c = \mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Si verifica che A^c sia aperto. Sia $x_0 \in A^c$. Si hanno due casi:

- I) Sia $x_0 < a$. Si prenda $r = \frac{1}{2}d(x_0, a)$. Evidentemente, $I(x_0, r) \subset (-\infty, a) \subset A^c$.

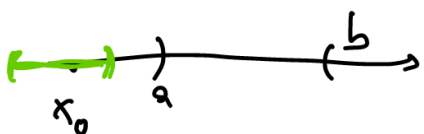


Figure 6: Intervallo chiuso.

- II) Sia $x_0 > b$. Si prenda $r = \frac{1}{2}d(x_0, b)$. Come prima, $I(x_0, r) \subset (b, +\infty) \subset A^c$.

Da I) e II) segue che A^c è aperto e per definizione A è chiuso.

Esercizio. L'insieme $[a, b]$ è chiuso? Perché? (Le due famiglie di insiemi, aperti e chiusi, non sono esaustive in quanto non sono la negazione logica l'uno dell'altro).

Esempio. L'insieme $A = \mathbb{R}$ è sia aperto che chiuso. (Tutti i punti nell'intorno di x_0 fanno parte di \mathbb{R} , ed il complementare di \mathbb{R} , essendo l'insieme vuoto, è anch'esso aperto, quindi \mathbb{R} è sia aperto che chiuso). In \mathbb{R} esistono solo \mathbb{R} e \emptyset come sottoinsiemi sia vuoti che aperti.

Definizione. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per/di A se $\forall r > 0, \exists y \in I(x_0, r) \cap A, y \neq x_0$. Ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A , diverso da x_0 .

Proposizione. Siano A e x_0 come nella definizione precedente. Sono equivalenti:

- I) Il punto x_0 è di accumulazione per A .
- II) Ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A .

Dimostrazione. Se vale II) e se $I(x_0, r)$ è un intorno qualunque di x_0 , allora $I(x_0, r)$ contiene infiniti punti di A . Poiché sono infiniti, almeno uno di essi è diverso da x_0 . Viceversa, se x_0 è un punto di accumulazione per A , si deve dimostrare che ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A . Sia $r_1 > 0$. Per ipotesi esiste $y_1 \in A \mid y_1 \in I(x_0, r_1), y_1 \neq x_0$. Sia $r_2 = \frac{1}{2}d(x_0, y_1)$. Nell'intorno $I(x_0, r_2)$ cade almeno un punto $y_2 \neq x_0, y_2 \in A$.



Figure 7: Punto di accumulazione.

Ora si pone $r_3 = \frac{1}{2}d(x_0, y_2)$ e si trova $y_3 \in A \cap I(x_0, r_3), y_3 \neq x_0$. Come prima $y_3 \neq y_2 \neq y_1$. Iterando tale costruzione, si ottengono infiniti punti di A appartenenti a $I(x_0, r)$.

I punti di accumulazione saranno di interesse con la teoria dei limiti. La definizione complementare di punto di accumulazione è quella di punto isolato.

Definizione. Sia $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A$. Il punto x_0 è isolato se esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che $I(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$. Un punto è isolato quando esiste un intorno che contiene x_0 , ma nessun altro punto di A .

Teorema. Un insieme A è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Dimostrazione.

- a) Sia A un insieme chiuso. Sia x un punto di accumulazione per A . Per assurdo si supponga che $x \in A^c$. Poiché A^c è aperto (perché complementare di un insieme chiuso) questo implica che $\exists I(x, r) \subset A^c$ quindi tutti i punti dell'intorno di x sono contenuti in A^c , pertanto nessuno di quei punti è in A e ciò contraddice il fatto che sia di accumulazione (cioè che ogni intorno di x contiene infiniti punti di A , ma si è costruito un intorno opportuno che non contiene alcun elemento di A). Pertanto, $x \in A$ e dunque A contiene tutti i suoi punti di accumulazione essendo x un punto arbitrario.

- b) Si supponga che A contenga tutti i suoi punti di accumulazione e si dimostra che A^c è aperto (prendendo un punto arbitrario dell'insieme e costruendo un intorno di tale punto contenuto nell'insieme stesso). Sia $x \in A^c$ ($\iff x \notin A$) e si costruisce un intorno $I(x, r) \subset A^c$ (tutti i punti vicini a x meno del raggio r sono punti che non cadono in A). Bisogna usare l'ipotesi che $x \in A$, qua si parte da $x \notin A$. Ipotesi uno: l'insieme A contiene i propri punti di accumulazione; ipotesi due: $x \notin A$; conclusione logica: x non è un punto di accumulazione, se lo fosse cadrebbe in A , ma è un punto del complementare. Poiché $x \notin A$, x non è un punto di accumulazione. Bisogna negare l'affermazione di punto di accumulazione: $\forall r > 0, \exists y \in A \cap I(x, r), y \neq x$. Quindi $\exists r > 0 \mid \forall y \in A \cap I(x, r) \implies y = x$, perciò esiste un intorno che contiene al suo interno al più un solo elemento di A ed è il centro stesso. Sapendo che $x \notin A$, si è individuato un intorno $I(x, r)$ nel quale non cade alcun punto di A , cioè $I(x, r) \subset A^c$. Per l'arbitrarietà di $x \in A^c$, si è dimostrato che A^c è un insieme aperto, cioè che A è chiuso.

Tale teorema è alla base della caratterizzazione dei punti che sono limiti di successioni di punti dell'insieme stesso.

Definizione. Sia $A \subset \mathbb{R}$. L'insieme di tutti i punti di accumulazione di A è detto insieme derivato di A e si denota con A' , $\mathcal{D}A$.

Definizione. La chiusura di $A \subset \mathbb{R}$ è $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A$.

Corollario. L'insieme $A \subset \mathbb{R}$ è chiuso $\iff A = \overline{A} \iff A' \subseteq A \iff \partial A \subseteq A$. Quindi quando A non è chiuso, c'è necessariamente almeno un punto di accumulazione dell'insieme che non sia elemento dell'insieme stesso. In modo equivalente, \overline{A} è il più piccolo insieme chiuso contenente A .

La definizione di chiusura ha il pregio di non dipendere dalla distanza euclidea, perché si basa sulle definizioni che non hanno a priori un particolare legame con la scelta della distanza. Quindi ciò varrebbe in qualunque spazio metrico.

Definizione. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è di frontiera per A se in ogni intorno di x_0 cadono sia punti di A , sia punti di A^c .

Esercizio. Sia $A = (a, b)$. Verificare che a e b sono gli unici punti di frontiera di A . (Avendo il punto a , si prende qualunque intorno e nella metà di destra ci sono infiniti punti dell'insieme e nella metà di sinistra ci sono infiniti punti che non stanno nell'insieme, quindi a è chiaramente di frontiera e lo stesso per b . Tuttavia, bisogna far vedere che non ce ne siano altri, quindi bisogna prendere $x \in \mathbb{R}, x \neq a, b$ e far vedere che non è di frontiera. Si hanno tre casi: $x < a, a < x < b, x > b$). $\partial A = \{a, b\}$.

Notazione. L'insieme dei punti di frontiera di A denotato con ∂A (frontiera o bordo di A).

Teorema. Bolzano-Weierstrass. Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$, limitato e infinito, possiede almeno un punto di accumulazione.

L'essere infinito non è condizione sufficiente a garantire l'esistenza di punti di

accumulazione (tipo \mathbb{N}). Però se si aggiunge la proprietà di essere limitato, allora la proprietà di infinitezza fornisce almeno un punto di accumulazione. Questa non è una caratterizzazione degli insiemi con punti di accumulazione, ma è solo una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Dimostrazione. Poiché E è limitato (quindi ha almeno un maggiorante ed almeno un minorante), si possono scegliere $a < b$ tali che $E \subset [a, b]$, basta prendere a un minorante e b un maggiorante. (È una dimostrazione che contiene l'argomento di bisezione o tecnica di bisezione). Si divide $[a, b]$ in due parti uguali $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$. Almeno uno dei sottointervalli deve contenere infiniti elementi di E . Si chiami $[a_1, b_1]$ tale sottointervallo. Si divide $[a_1, b_1]$ in due parti uguali $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Come prima, almeno uno di tali sottointervalli deve contenere infiniti elementi di E : sia $[a_2, b_2]$ questo sottointervallo. Iterando tale costruzione, si ottengono $[a_3, b_3], [a_4, b_4], \dots$. Sia $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. A ogni indice, si è dimezzato l'intervallo dell'indice precedente. Quindi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Per costruzione $a \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$ e $b \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \dots$. Si costruisce sotto mentite spoglie il limite della successione come estremo superiore o inferiore di A e B . Siano a_k e b_s due elementi rispettivamente di A e di B . Sia n un naturale maggiore sia di k , sia di s . Risulta $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_s$. Quindi, b_s è un maggiorante di A : $\sup A \leq b_s$. Poiché $b_s \in B$ è arbitrario, il numero $\sup A$ è un minorante di B , e quindi $\sup A \leq \inf B$. Si verifica che $\sup A = \inf B$. Infatti, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \leq \sup A$, $b_n \geq \inf B$. Quindi $0 \leq \inf B - \sup A \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Si ha una quantità non negativa più piccola di una quantità dove n è arbitrario, quindi: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \frac{b-a}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$ (l'esistenza di n è una conseguenza della proprietà archimedeica dei numeri reali). Quindi $0 \leq \inf B - \sup A \leq \frac{b-a}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario $\inf B = \sup A$. Sia $z = \inf B = \sup A$. Si consideri un intorno arbitrario $I(z, r)$ e si fa vedere che esso contiene punti di E .

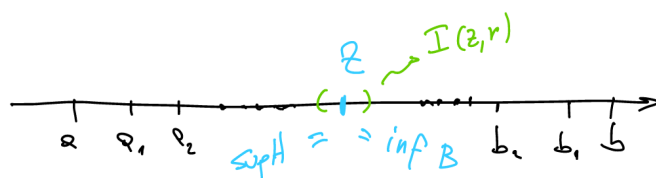


Figure 8: Intorno di z .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $z \in [a_n, b_n]$. Si sceglie $n \in \mathbb{N}$ così grande che $2^n > \frac{b-a}{r}$ allora $[a_n, b_n] \subset I(z, r)$. Ma per costruzione $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di E quindi l'intorno contiene infiniti elementi. Si deduce che z è un punto di accumulazione per E .

Ciò permette di fare certi limiti sotto condizioni abbastanza ragionevoli. Quindi la teoria sarà resa più semplice dagli insiemi infiniti, limitati.

Esercizio. Dimostrare che l'intersezione di due insiemi aperti è un insieme aperto. (Si prende un punto dell'intersezione, si scrive l'ipotesi cioè che esistono i due intorni del punto rispettivamente per l'insieme A e per l'insieme B e si fa vedere che scegliendo bene il raggio, si ottiene un intervallo che sta nell'intersezione di A e B).

4 Funzioni reali di variabili reali.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$

Definizione. Una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama successione a valori reali.

Notazioni. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$. Si indica con $\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$ l'estremo superiore dell'immagine di A mediante f e $\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$ l'estremo inferiore. Inoltre, $x_0 \in A$ è punto di minimo per f se $f(x_0) = \min f(A)$ e $x_0 \in A$ è punto di massimo di f se $f(x_0) = \max f(A)$.

In astratto, per assegnare una funzione occorre specificare il dominio, il codominio e la “legge” (il grafico) della funzione. In questo contesto, se non altrimenti detto, si considera il “dominio naturale” delle funzioni, cioè il più grande sottoinsieme di \mathbb{R} nel quale la legge della funzione è calcolabile.

Esempio. $f(x) = \log(x + 1)$. Affinché $\log(x + 1)$ sia calcolabile, bisogna imporre $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$. Il dominio naturale di f è $(-1, +\infty)$. Per $g(x) = \frac{\log x}{x-1}$ si ha $x > 0 \wedge x \neq 1$.

Richiamo. Sia $f : S \rightarrow T$ una funzione. La funzione f è invertibile se è biunivoca, $f^{-1} : T \rightarrow S$.

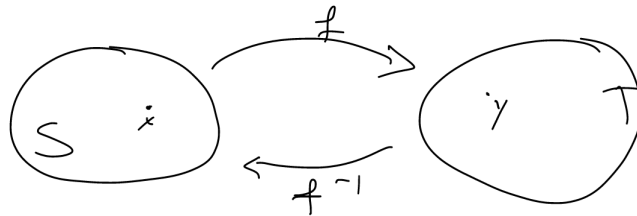


Figure 9: f e f^{-1} .

Questa è l'unica scelta coerente nella generalità dei due insiemi S e T . Quando si parla di funzioni reali a variabile reale, il codominio è meno fondamentale nella definizione e solitamente si ha $T = \mathbb{R}$ e $S \subset \mathbb{R}$, perché si è sempre nell'insieme dei numeri reali. La richiesta che f sia biunivoca può essere mantenuta, tuttavia spesso è più comodo sacrificare il fatto che il dominio della funzione inversa sia tutto T . Se ci si dovesse attenere alla rigida definizione allora si avrebbe $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ e quindi f^{-1} sarebbe sempre definita su tutto \mathbb{R} e ciò va contro la terminologia consueta.

Esempio. $f(x) = e^x$, $S = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{R}$ non è biunivoca, poiché la sua immagine è $(0, +\infty)$, quindi non è invertibile. Per dire che è biunivoca, e quindi ammette inversa, bisogna cambiare il codominio a $T = (0, +\infty)$.

Per questa ragione si preferisce seguire la tradizione e rendere più numerose le funzioni invertibili.

Definizione. Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva, si dice che è invertibile, e la sua inversa è la funzione $f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow S$ che ad ogni $y \in \text{Im } f$ associa l'unico $x \in S$ | $f(x) = y$.

Quindi da una parte si rinuncia a dire che certe funzioni elementari sono una l'inverso dell'altra; dall'altra si rinuncia ad avere per dominio dell'inversa il codominio della funzione diretta. Nelle funzioni reali a variabile reale si preferisce rendere più numerose le funzioni invertibili dicendo che per convenzione sono quelle iniettive e naturalmente la funzione inversa è definita su un insieme più piccolo dell'intero asse reale, cioè sull'immagine della funzione diretta. Nel corso si utilizza chiamare funzione invertibile la funzione iniettiva.

Qualcosa d'altro che è specifico delle funzioni reali a variabile reale è la monotonia che si basa sul concetto di ordinamento.

Definizione. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$

- f è monotona crescente se $\forall x_1, x_2 \in S : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f è strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in S : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- f è monotona decrescente se $-f$ ($x \in S \mapsto -f(x)$) è crescente.
- f è strettamente decrescente se $-f$ ($x \in S \mapsto -f(x)$) è strettamente crescente.

Osservazione. In base alla definizione, le funzioni costanti sono sia monotone crescenti che monotone decrescenti.

Esercizio. Verificare che ogni funzione strettamente monotona (crescente oppure decrescente) è iniettiva. (Bisogna verificare che se si prendono due punti diversi nel dominio hanno immagine diversa, ma se sono diversi nel dominio essi sono uno minore stretto dell'altro; dato che la funzione è monotona anche l'immagini sono una minore stretto dell'altra, quindi diverse). Tutte le funzioni monotone sono invertibili.

Esempio. Sia $A \subset \mathbb{R}$. La funzione caratteristica di A è:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

La funzione traduce in numeri l'appartenenza di x ad A oppure al suo complementare.

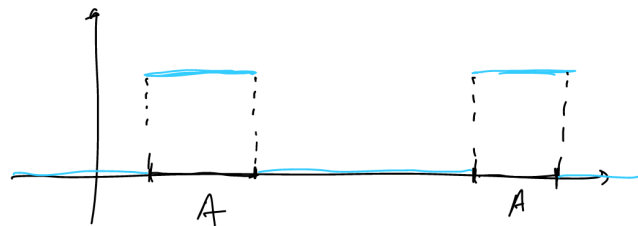


Figure 10: $\chi_A(x)$.

4.1 Limiti.

La teoria dei limiti di funzioni è più semplice da raccontare se si arricchisce l'insieme dei numeri reali: la retta reale estesa. Essa non è un ente numerico perché non c'è modo di introdurre delle operazioni sui simboli di infinito che rispettino tutti gli assiomi dei numeri reali. Tuttavia, è possibile fare la parziale aritmetizzazione dell'infinito.

Definizione. La retta reale estesa è $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Più e meno infinito non fanno parte di \mathbb{R} e da un punto di vista topologico si può generalizzare il concetto di intorno. Dato $p \in \tilde{\mathbb{R}}$, un insieme U è intorno di p se avviene una delle seguenti:

- $U = I(p, r)$ se $p \in \mathbb{R}$;
- $U = (-\infty, b)$ se $p = -\infty$;
- $U = (a, +\infty)$ se $p = +\infty$.

Tale definizione permette di definire con una definizione univoca il concetto di limite senza dover incrociare tutti i casi possibili in cui i punti sono sostituiti da infinito.

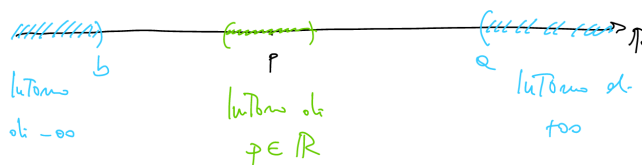


Figure 11: Intorno di p .

Un certo $p \in \tilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per $A \subset \tilde{\mathbb{R}}$ se ogni intorno di p contiene infiniti punti di A .

Dire che $+\infty$ è un punto di accumulazione per A significa che ogni semiretta aperta a destra contiene infiniti punti di A .

Esempio. Il punto $+\infty$ è di accumulazione per A se A contiene elementi positivi arbitrariamente grandi. Quindi $+\infty$ è di accumulazione per \mathbb{N} . Il limite di successione si potrà definire da qua.

Definizione. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in \tilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A . Si dice che $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se per ogni intorno V di λ esiste un intorno U di p tale che $x \in U \cap A$, $x \neq p \implies f(x) \in V$.

Esempio. $p \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice che

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in I(p, \delta), x \neq p \implies f(x) \in I(\lambda, \varepsilon)$$

Equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < d(x, p) < \delta \implies d(f(x), \lambda) < \varepsilon$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

La definizione epsilon-delta è difficile da estendere al limite all'infinito.

Per $p = +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R} \mid x > K \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Per $p \in \mathbb{R}$, $\lambda = -\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta \implies f(x) < M$$

Si pone un problema, nella definizione generale con λ si sottointende che ce ne sia uno solo. Una funzione non ha sempre dei limiti e la definizione di limite si può dare in contesti molto generali, in funzioni tra spazi topologici, e l'unicità del limite dipende dalla topologia del dominio e codominio. Sta sotto la proprietà di Hausdorff o la separazione dei punti. Nelle funzioni reali a variabile reale, tale proprietà è facile da dimostrare e si può dire che il limite, se esiste, di sicuro è unico.

Teorema. Unicità del limite. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \widetilde{\mathbb{R}} \cap A'$. Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ allora $\lambda_1 = \lambda_2$.

Dimostrazione. Siano $p, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta_1 \implies |f(x) - \lambda_1| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta_2 \implies |f(x) - \lambda_2| < \varepsilon$.

Ci si focalizza sui punti che sono in entrambi gli intorni, quindi si prende l'intorno con il raggio più piccolo tra i due. Quindi sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Sia $x \in A \mid 0 < |x - p| < \delta$. A causa della scelta $f(x)$ soddisfa entrambe le definizioni. Pertanto, $0 \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \leq |\lambda_1 - f(x)| + |f(x) - \lambda_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Quindi si ha la distanza $d(\lambda_1, \lambda_2)$ che è più piccola di una quantità positiva arbitraria. Da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $|\lambda_1 - \lambda_2| = 0$, cioè $\lambda_1 = \lambda_2$.

Se la funzione ha limite infinito con $\lambda_1 = -\infty$ e $\lambda_2 = +\infty$ o viceversa (se entrambi sono lo stesso infinito non c'è nulla da dimostrare), con $p \in \mathbb{R}$.

- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta_1, x \in A \implies f(x) < M$.
- $\forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta_2, x \in A \implies f(x) > N$.

Se tali implicazioni sono vere, si è liberi di scegliere ad esempio $M < 0$ e $N > 0$. Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e si scelga un punto $x \in A \mid 0 < |x - p| < \delta$. Allora tale punto soddisfa entrambe le tesi delle due implicazioni perché $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$. Pertanto, $f(x) < M < 0$ e $f(x) > N > 0$ che è impossibile.

Per quanto la definizione di limite possa essere data sulla retta reale estesa senza nessuna particolare differenza formale tra il caso di limite finito e il caso di limite infinito, la situazione diventa delicata quando esistono i limiti infiniti in quanto un buon numero di risultati diventano falsi. Le così dette forme di indecisione o forme indeterminate. Non c'è la speranza di avere una teoria generale sulla retta reale estesa che abbia la stessa potenza tanto per i limiti finiti quanto per i limiti infiniti. Di seguito ci sono alcuni risultati che si ottengono.

Proposizione. Locale limitatezza. Sia $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A . Si supponga che $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \mu \in \mathbb{R}$. Allora esiste un intorno U di p tale che $x \in U \cap A$, $x \neq p \implies |g(x)| < |\mu| + 1$. Questa è una funzione che ammette come limite un valore finito per x che converge ad un valore finito. Localmente, in un opportuno intorno U escluso al più p , la funzione si mantiene in valore assoluto limitata, in particolare minore di $|\mu| + 1$. Se una funzione tende ad un limite finito allora la funzione è localmente limitata attorno al punto p .

Dimostrazione. Si scelga $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite: esiste un intorno U di p tale che $x \in U \cap A$, $x \neq p \implies |g(x) - \mu| < 1$. Per tali x , si ha $|g(x)| = |g(x) - \mu + \mu| \leq |g(x) - \mu| + |\mu| < 1 + |\mu|$.

Tale proposizione si può applicare ai limiti di successioni e si ottiene un punto fondamentale per parlare della compattezza per successioni.

Teorema. Algebra dei limiti. Siano f, g due funzioni reali definite in $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \widetilde{\mathbb{R}} \cap A'$, e si supponga che $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \mu \in \mathbb{R}$. Allora

- 1. $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = \lambda + \mu$;
- 2. $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = \lambda\mu$;
- 3. Se $\mu \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Dimostrazione. 1. Per ipotesi, preso arbitrariamente $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U_f di p tale che $x \in U_f \cap A$, $x \neq p \implies |f(x) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$. Similmente, esiste un intorno U_g di p tale che $x \in U_g \cap A$, $x \neq p \implies |g(x) - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si ponga $U = U_f \cap U_g$ e sia $x \in U \cap A$. Quindi:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (\lambda + \mu)| &= |f(x) + g(x) - \lambda - \mu| = \\ &= |f(x) - \lambda + g(x) - \mu| \leq |f(x) - \lambda| + |g(x) - \mu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $f(x) + g(x)$ tende a $\lambda + \mu$.

2. Come nel punto 1., dato $\varepsilon > 0$, esistono un intorno U_f e un intorno U_g di p tali che

- $x \in U_f \cap A$, $x \neq p \implies |f(x) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{|\mu| + 1}$;
- $x \in U_g \cap A$, $x \neq p \implies |g(x) - \mu| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ con $\lambda \neq 0$.

Sia $U = U_f \cap U_g$ e $x \in U \cap A$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \lambda\mu| &= |f(x)g(x) - \lambda g(x) + \lambda g(x) - \lambda\mu| = \\ &= |(f(x) - \lambda)g(x) + \lambda(g(x) - \mu)| \leq |f(x) - \lambda||g(x)| + |\lambda||g(x) - \mu| \end{aligned}$$

Per la proposizione precedente, esiste un intorno W di p tale che $x \in W \cap A$, $x \neq p \implies |g(x)| < |\mu| + 1$. Se $x \in U \cap W \cap A$, $x \neq p$ allora

$$|f(x)g(x) - \lambda\mu| \leq |f(x) - \lambda||g(x)| + |\lambda||g(x) - \mu| < \frac{\varepsilon}{|\mu| + 1}(|\mu| + 1) + |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = 2\varepsilon$$

Quindi $f(x)g(x)$ tende a $\lambda\mu$, sotto l'ipotesi aggiuntiva $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ bisogna dimostrare che $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$. Quindi $|f(x)g(x) - \lambda\mu| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\mu| + 1}(|\mu| + 1) = \varepsilon$, $\forall x \in U_f \cap W \cap A$, $x \neq p$.

Esercizio. Dimostrare che, se $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow p$ e se g è una funzione limitata, allora $f(x)g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow p$.

Esercizio. Sono equivalenti:

- a) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$
- b) $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - \lambda) = 0$

Per dimostrare 3., si usa il seguente risultato:

Proposizione. Permanenza del segno. Sia $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \tilde{\mathbb{R}} \cap A'$, $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \mu > 0$ (eventualmente $+\infty$). Allora esiste un intorno W di p tale che se $x \in A \cap W$, $x \neq p$, si ha $g(x) > 0$.

Dimostrazione. Sia $\mu > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Si sceglie $\varepsilon = \frac{\mu}{2} > 0$ nella definizione di limite: esiste un intorno W di p tale che se $x \in A \cap W$, $x \neq p$, si ha $|g(x) - \mu| < \frac{\mu}{2}$. Questa disuguaglianza equivale a $\mu - \frac{\mu}{2} < g(x) < \mu + \frac{\mu}{2}$ e in particolare $g(x) > \frac{\mu}{2} > 0$. Resta il caso $\mu = +\infty$. Per definizione, per ogni $M > 0$ esiste un intorno W di p tale che se $x \in W \cap A$, $x \neq p$ si ha $g(x) > M > 0$.

Osservazione. Con lo stesso ragionamento si verifica che dall'ipotesi $g(x) \rightarrow \mu < 0$ per $x \rightarrow p$ deriva $g(x) < 0$ (e addirittura $g(x) < \frac{\mu}{2}$ se $\mu \in \mathbb{R}$) in un intorno di p . In particolare per $\mu \in \mathbb{R}$ esiste un intorno di p nel quale $|g(x)| > \frac{|\mu|}{2}$, $x \neq p$.

Venendo alla dimostrazione del punto 3. Sia $\mu \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\lambda}{\mu} \right| &= \left| \frac{\mu f(x) - \lambda g(x)}{\mu g(x)} \right| = \frac{|\mu f(x) - \mu \lambda + \mu \lambda - \lambda g(x)|}{|\mu| |g(x)|} = \\ &= \frac{|\mu(f(x) - \lambda) + \lambda(\mu - g(x))|}{|\mu| |g(x)|} \leq \frac{|\mu| |f(x) - \lambda| + |\lambda| |g(x) - \mu|}{|\mu| |g(x)|} \end{aligned}$$

Sia $0 < \varepsilon < \frac{|\mu|}{2}$. Esiste un intorno U_f di p tale che $x \in U_f \cap A$, $x \neq p \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Analogamente esiste un intorno U_g di p tale che $x \in U_g \cap A$, $x \neq p \implies |g(x) - \mu| < \varepsilon$. Infine, esiste un intorno W di p tale che $x \in W \cap A$, $x \neq p \implies |g(x)| > \frac{|\mu|}{2}$. Sia $U = U_f \cap U_g \cap W$. Per ogni $x \in U$, $x \neq p$ si ha $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|\mu|}$, e quindi

$$\frac{|\mu| |f(x) - \lambda| + |\lambda| |g(x) - \mu|}{|\mu| |g(x)|} < \frac{1}{|\mu|} \frac{2}{|\mu|} (|\mu| \varepsilon + |\lambda| \varepsilon) = \frac{2}{\mu^2} (|\mu| + |\lambda|) \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$ per $x \rightarrow p$.

Perché è stato necessario supporre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$? (La risposta è che quando si considerano dei limiti infiniti, la cosa non funziona più).

Esempio. Sia $p = 0$. Sia $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$. Allora $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/x^2}{1/x^4} = \frac{1}{x^2} x^4 = x^2 \rightarrow 0$.

D'altra parte $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1/x^4}{1/x^2} = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$.

Quindi non si può sperare di avere un teorema dell'algebra dei limiti che dica univocamente senza ulteriori analisi, cosa accade al quoziente di due funzioni che siano entrambi divergenti all'infinito. Ciò porta alle forme di indecisione. Le forme indeterminate sono quelle relazioni di limiti che sfuggono all'ipotesi del teorema dell'algebra dei limiti.

Esercizio. Se $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow p$, allora $f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$.

Alcune forme indeterminate sono: $[+\infty - \infty]$, $[0 \cdot (\pm\infty)]$, $[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}]$, $[\frac{0}{0}]$. Questi casi danno le situazioni fondamentali di indeterminazione quando si cerca di far passare un'operazione di limite all'interno di una delle operazioni dell'aritmetica.

Funzioni elementari. Le più elementari sono i polinomi, costruiti con le operazioni dell'aritmetica. Poi ci sono le razionali fratte. Poi si entra nelle funzioni trascendenti che non sono definite attraverso le operazioni dell'aritmetica: l'esponenziale, logaritmica e altre. Tuttavia, a questo punto della conoscenza matematica, è fuorviante dire che alcune funzioni siano elementari. Ad esempio, definire la funzione che ad x associa 2^x può essere facile se $x \in \mathbb{N}$ e quindi 2 si moltiplica per se stesso x volte; poi si può avere $-x \in \mathbb{N}$ ed allora si utilizza l'operazione di divisione; però già a $x \in \mathbb{Q}$ le cose si complicano perché si inizia a fare l'estrazione di radice; e quando si arriva a $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'operazione diventa difficile da definire.

La funzione esponenziale è

$$e^x : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

A parte dare il senso ad una somma infinita, in questa definizione sono presenti solamente operazioni aritmetiche. Per dare senso a tale formula occorre aver sviluppato la teoria delle serie numeriche.

La funzione logaritmica è:

$$\ln(x) : x > 0 \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Anche questa definizione è abbastanza elementare perché coinvolge solo la divisione, sebbene abbia anche il simbolo di integrale; pertanto, per capirla bisogna sapere cos'è l'integrale e bisogna aver sviluppato una teoria dell'integrale per poterne studiare le proprietà.

La funzione seno è definita come l'unica funzione che soddisfa

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Un'equazione differenziale del secondo ordine con due condizioni di Cauchy o condizioni iniziali. Essa ha una sola soluzione con tali condizioni iniziali e da qui bisogna manipolare tale soluzione per ottenere tutte le proprietà della funzione seno. Una via alternativa è l'arcotangente:

$$\arctan(x) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Da qui ricostruire le identità goniometriche, dimostrare che esiste un'inversa e una volta trovata la tangente definire il seno e il coseno attraverso identità che le legano.

Non ci sono definizioni di queste funzioni che non vadano oltre la teoria finora sviluppata, se non con l'approccio assiomatico. In nessun corso di Analisi I ci si aspetta di avere tutti gli strumenti per definire le funzioni elementari; si accetta che esistano, che abbiano quelle note proprietà e si va avanti fin quando non si riescono a ricostruire attraverso i concetti del calcolo differenziale.

Esempio. Ad esemplificazione di quanto detto sui limiti, si dimostra il seguente limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Si consideri $0 < x < \frac{\pi}{2}$. In questo momento il fatto che si lavori con valori minori di $\frac{\pi}{2}$ non è restrittivo in quanto si è interessati alle x in un intorno di zero. La condizione che $x > 0$ è una restrizione in quanto nella definizione di limite si ha sempre a che fare con intorni sferici.

Si porta una rappresentazione geometrica in quanto ci si sta basando su una definizione ingenua e, pertanto, si lavora sulla circonferenza goniometrica e si visualizzano le funzioni trigonometriche come lunghezze di opportuni segmenti.

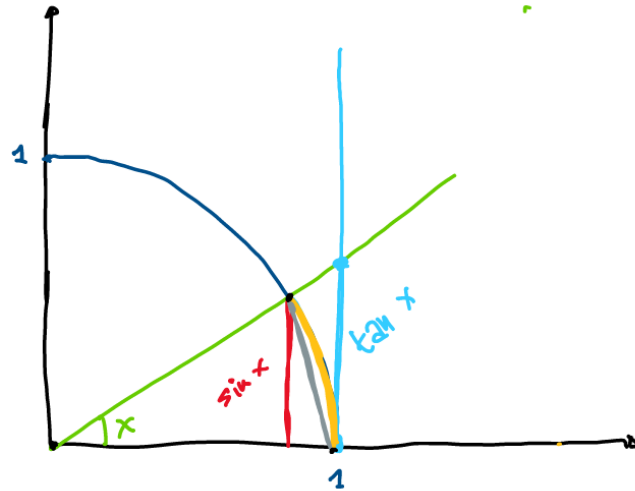


Figure 12: Circonferenza goniometrica.

Concentrandosi sul triangolo che ha per vertici l'origine, $(1, 0)$ e $(\cos x, \sin x)$ e anche sul triangolo che ha per vertici l'origine, $(1, 0)$ e $(1, \tan x)$. Si nota che il primo triangolo ha un'area minore del secondo. Il primo triangolo ha un'area pari a $1 \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{2}$, l'area del secondo triangolo è $1 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{2}$; mentre l'area del settore circolare è $\frac{x}{2}$. Pertanto, per le inclusioni geometriche, si ha:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} &< \frac{x}{2} < 1 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{2} \\ \sin x &< x < \tan x \\ 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ \cos x &< \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Poiché $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$ si ha

$$\begin{aligned} \cos(-x) &< \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right) \\ \cos x &< \frac{-\sin x}{-x} < 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

Segue che

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

Ricordando che $|\sin \alpha| < |\alpha|$ per $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il cateto verticale è sempre più piccolo dell'arco di circonferenza sotteso da x . Pertanto:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Sia $\varepsilon > 0$ qualunque e si scelga $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$ allora:

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{\delta^2}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Quindi, il limite $\frac{\sin x}{x}$ esiste e vale uno. Si è utilizzato il limite di una funzione ausiliaria per concludere che il limite della funzione interessata sia proprio uguale a 1.

Teorema. Del confronto. Siano f, g due funzioni definite in $A \subset \mathbb{R}$ e sia $p \in \tilde{\mathbb{R}} \cap A'$. Se risulta $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in A$, $x \neq p$ e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$ allora $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi su g , fissato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, esiste un intorno U di p tale che per ogni $x \in U \cap A$, $x \neq p$, si abbia $g(x) < \varepsilon$ (non si mette il valore assoluto a $g(x)$ perché per ipotesi $|f(x)| \leq g(x)$ e dato che il modulo è sempre maggiore o uguale a zero, ciò implica che lo sia pure $g(x)$). Allora, sempre per $x \in U \cap A$, $x \neq p$ si ha $|f(x) - 0| = |f(x)| \leq g(x) < \varepsilon$.

Osservazione. Spesso l'enunciato è proposto nella forma seguente (sottintendendo i dettagli iniziali). Sia $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ e si suppone che $h(x) \rightarrow \lambda$ e $g(x) \rightarrow \lambda$. Però $0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$. Da qua si ha che $g(x) - h(x) \rightarrow \lambda - \lambda = 0$ e pertanto anche $f(x) - h(x) \rightarrow 0$.

Si vede un aspetto dei limiti che formalizza il fatto che il concetto di limite sia un concetto estremamente localizzato. Limiti e derivate sono locali, mentre serie e integrali sono globali. Nel calcolo del limite non interessa ciò che è lontano da un punto p , ma interessa solo quello che succede in un opportuno intorno del punto stesso. Questo permette di introdurre il limite per eccesso ed il limite per difetto che servono per mostrare come non tutte le funzioni hanno limite.

Definizione. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$. Sia p un punto di accumulazione per B . Si chiama $f|_B$ la restrizione di f a B .

Esercizio. Verificare che $p \in A'$.

Si sta per dimostrare che $\exists \lim_{x \rightarrow p} f(x) \iff \exists \lim_{x \rightarrow p} f|_B(x)$ ed in tal caso i due limiti coincidono. Il limite è un'operazione che non viene influenzata dalla restrizione o ampliamento del dominio intorno al punto p . Il limite è un fatto locale.

Teorema. Localizzazione dei limiti. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A . Per ogni $r > 0$ si denota f_r la restrizione di f a $I(p, r) \cap A$. Si ha $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda \iff \lim_{x \rightarrow p} f_r(x) = \lambda$.

Dimostrazione. Si supponga $f(x) \rightarrow \lambda$ per $x \rightarrow p$. Allora $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in A, x \neq p, |x - p| < \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon$.

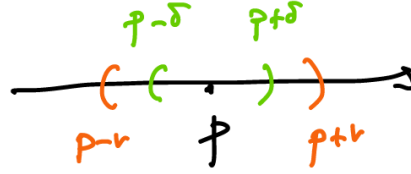


Figure 13: Intorno di p .

Si può sempre supporre $\delta < r$, perché la condizione di limite vale per un certo δ e a maggior ragione per tutti quelli più piccoli. Ora $f_r(x)$ nell'intorno verde è la stessa che nell'intorno arancione, perché il primo è un sottoinsieme del secondo; all'interno dell'intorno con gli estremi rossi $f_r(x) = f(x)$. Quindi $x \in A, x \neq p, |x - p| < \delta < r \implies |f(x) - \lambda| = |f_r(x) - \lambda| < \varepsilon$, le x che soddisfano la condizione sono all'interno del dominio di $f_r(x)$ e quindi la legge che descrive la restrizione è la stessa che descrive la funzione generale, pertanto per quelle $x, f(x) = f_r(x)$. Questo dimostra che se il limite globale della funzione vista nella sua interezza è λ allora anche quello della restrizione $f_r(x)$ è λ . Viceversa, si supponga $f_r(x) \rightarrow \lambda$ per $x \rightarrow p$. Per ogni intorno V di λ esiste un intorno U di p tale che, per ogni $x \in U \cap I(p, r), x \neq p, x \in A$, risulti $f_r(x) \in V$. Si osserva che $f_r(x) = f(x)$ per queste x appena considerate, perché si è dentro l'intorno di raggio r cioè dentro il dominio della restrizione e le due leggi coincidono in questa parte comune. Ma $U \cap I(p, r)$ è un intorno di p e dunque $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap I(p, r) \cap A, x \neq p$. Pertanto, $f(x) \rightarrow \lambda$ per $x \rightarrow p$.

Definizione. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$. Si pone $A_+ = A \cap (p, +\infty)$ e $A_- = A \cap (-\infty, p)$, e si supponga che p sia un punto di accumulazione per A_+ e per A_- (quindi arbitrariamente vicino a p ci sono sia punti del dominio più grandi di p e sia punti più piccoli di p). Si dice che $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lambda$ ($f(x) \rightarrow \lambda$ per $x \rightarrow p^+$) se per ogni intorno V di λ esiste un intorno U di p tale che $x \in U \cap A_+, x \neq p \implies f(x) \in V$ (si cambia la richiesta in modo che si guardino tutti i punti del dominio maggiori di p). Similmente, $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \lambda$ ($f(x) \rightarrow \lambda$ per $x \rightarrow p^-$) se per ogni intorno V di λ esiste un intorno U di p tale che $x \in U \cap A_-, x \neq p \implies f(x) \in V$. Questa definizione è utile per definire limiti di restrizioni a insiemi di natura molto diversa, come in dimensioni superiori a una.

Teorema. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, p$ punto di accumulazione per A_+ e A_- . Si ha $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lambda$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lambda = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$. Il limite globale esiste se e solo se esistono i due limiti direzionali (per eccesso e per difetto); questo teorema non ha un corrispettivo nelle funzioni a più variabili.

Esempio. Funzione che non ha limite. Sia $\chi_{[0,1]}$. Allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \chi_{[0,1]}(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \chi_{[0,1]}(x) = 0$. In quanto queste due quantità differiscono, non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \chi_{[0,1]}(x)$.

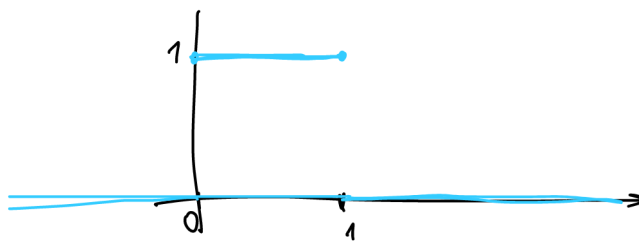


Figure 14: $\chi_{[0,1]}(x)$.

Osservazione. Una funzione monotona non possiede necessariamente limite. Ma la monotonia garantisce sempre l'esistenza del limite destro e del limite sinistro in qualunque punto di accumulazione.

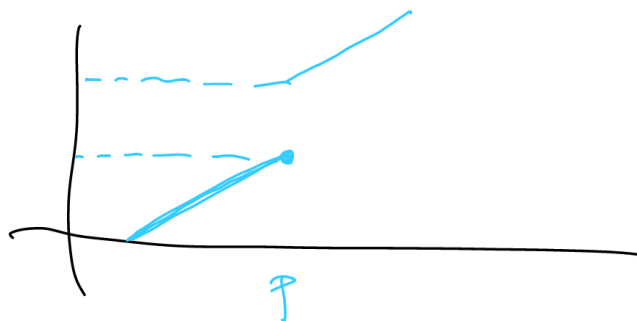


Figure 15: Una funzione monotona.

Proposizione. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Per ogni $p \in \mathbb{R}$, punto di accumulazione per A , i limiti destro e sinistro di $f(x)$ per $x \rightarrow p$ esistono in \mathbb{R} (finiti o infiniti). Supponendo f crescente, si ha:

- a) Se p è di accumulazione per $A^- = A \cap (-\infty, p)$ allora $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in A^-\}$.
- b) Se p è di accumulazione per $A^+ = A \cap (p, +\infty)$ allora $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in A^+\}$.

Se f è decrescente allora è sufficiente scambiare inf e sup in a) e b).

Dimostrazione. Si mostra la validità di b). Sia $l = \inf\{f(x) \mid x \in A^+\}$.

- Sia $l \in \mathbb{R}$. Si prende un intorno $I(l, \varepsilon)$ di l con raggio $\varepsilon > 0$ arbitrario. Poiché $\varepsilon > 0$, si ha $l < l + \varepsilon$; per definizione di l come estremo inferiore, esiste $x_\varepsilon \in A^+$ tale che $f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$. Essendo f crescente, $x < x_\varepsilon$, $x \in A$ implica $f(x) \leq f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$. Si è così verificato che, per ogni $x \in A$ con $p < x < x_\varepsilon$, si ha $l \leq f(x) < l + \varepsilon$. Si è costruito un intorno destro con la proprietà che tutti gli elementi di tale intorno hanno immagine tra l e $l + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε si è dimostrato che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow p^+$.
- Sia $l = -\infty$, meno infinito perché si approssima p da numeri più grandi (non si può approssimare $+\infty$ da numeri più grandi). Si fissa $M \in \mathbb{R}$ arbitrario. Allora

$l = -\infty = \inf\{f(x) \mid x \in A^+\} \implies \exists x_M \in A^+ \mid f(x_M) < M$. Per ogni $x \in A$, $x < x_M$, si ha $f(x) \leq f(x_M) < M$. Dato che M è arbitrario si ha $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty$.

La dimostrazione di a) è analoga.

Questo è il primo risultato che garantisce l'esistenza dei limiti (anche infiniti) sotto un'ipotesi astratta. Questa garanzia è confinata a poche situazioni. L'altra situazione è quella della continuità.

Osservazione. Sia $f(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$. Se $p = 0$ allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Nulla vieta che inf e sup possano essere infiniti.

Limiti fondamentali.

- Se $a > 0$ allora $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, con il caso particolare di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.
- Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Osservazione. I primi due limiti sono equivalenti. L'idea è quella di "cambiare variabile". Ponendo $e^x - 1 = t \iff x = \ln(1+t)$ si ha $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)}$. Per le proprietà elementari di e^x e $\ln x$, si ha $x \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0$. Quindi, se $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$ allora anche $\frac{t}{\ln(1+t)} \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$, e viceversa.

Teorema. Cambiamento di variabile nei limiti. Siano D ed E sottoinsiemi di $\widetilde{\mathbb{R}}$, siano $c, p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punti di accumulazione per D ed E rispettivamente. Siano $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : E \rightarrow D$ biunivoca e tale che $\lim_{t \rightarrow p} \phi(t) = c$, $\lim_{x \rightarrow c} \phi^{-1}(x) = p$. Allora $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ esiste se e solo se $\lim_{t \rightarrow p} f(\phi(t))$ esiste. In tal caso i due limiti sono uguali (finiti o infiniti).

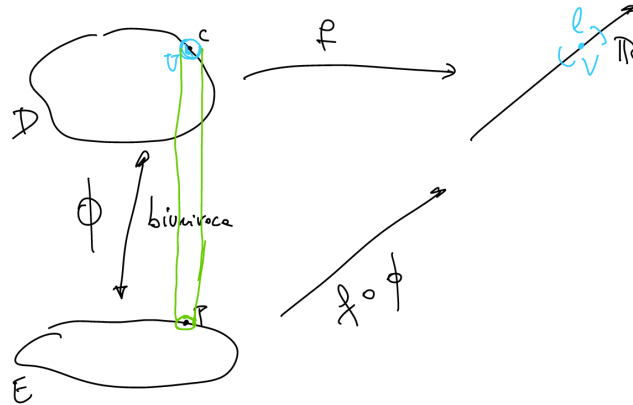


Figure 16: Diagramma commutativo del cambio di variabile.

Dimostrazione. Si supponga che esista il limite l di $f(x)$ per $x \rightarrow c$. Sia V un intorno di l in \mathbb{R} ; dunque esiste un intorno U di c in \mathbb{R} tale che $f(U \cap D \setminus \{c\}) \subset V$, cioè $x \in U, x \neq c \implies f(x) \in V$. Poiché ϕ è iniettiva, esiste un solo punto $a \in E$ tale che $\phi(a) = c$. Per le ipotesi sui limiti di ϕ e ϕ^{-1} , esiste un intorno W di p in \mathbb{R} tale che $\phi(W \cap E \setminus \{p\}) \subset U$. Bisogna far sì che gli elementi in tale intorno vadano a finire in qualcosa diverso da c . Se $a = p$ non ci sono difficoltà; se $a \neq p$ allora si può rimpicciolire l'intorno W in modo tale che $a \notin W$. In ogni caso:

$$\phi(W \cap E \setminus \{p\}) \subset U \setminus \{c\} \implies f \circ \phi(W \cap E \setminus \{p\}) \subset f(U \setminus \{c\}) \subset V$$

Ma ciò significa che $\lim_{t \rightarrow p} f(\phi(t)) = l$.

Per dimostrare l'implicazione inversa è sufficiente considerare le funzioni $f \circ \phi$ e ϕ^{-1} : per quanto appena dimostrato, da $f \circ \phi(t) \rightarrow l$ per $t \rightarrow p$ segue che $f \circ \phi \circ \phi^{-1} \rightarrow l$ cioè $f \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$.

Osservazione. In questo corso non si usa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$. Si usa $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Va bene anche $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$.

5 Successioni.

Le successioni sono funzioni definite su \mathbb{N} o sottinsiemi. Esse sono una matematica discreta perché permettono di descrivere in modo più concreto alcuni concetti come i punti di accumulazione e come la chiusura di un insieme. Esse permettono anche di fare da modello a situazioni discrete, sistemi ed evoluzione discreti, che hanno tutta una teoria che poi passa attraverso la teoria equivalente delle serie che ha degli sviluppi non indifferenti.

Definizione. Sia A un insieme. Una successione a valori in A è una funzione che ad ogni numero naturale associa un elemento di A .

Notazione. È consuetudine utilizzare una notazione “non standard” (rispetto le funzioni) per le successioni. Invece di $a : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a(n)$ si usa $\{a_n\}_n$ o $(a_n)_n$ o $\langle a_n \rangle_n$, ecc. L'indice della successione è una variabile muta: $\{a_n\}_n = \{a_k\}_k = \{a_i\}_i = \dots$ (di solito n, m, i, j, k).

Terminologia. Quando $A = \mathbb{R}$ si parla di successioni (a valori) reali o anche, per antonomasia, di successioni.

Osservazione. In base alle definizioni di $\widetilde{\mathbb{R}}$, $+\infty$ è un punto di accumulazione per \mathbb{N} (ciò significa che $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid N > M$, esistono numeri naturali arbitrariamente grandi, è un caso speciale della proprietà archimedeica o una conseguenza della costruzione con gli assiomi come sottoinsieme induttivo dei numeri reali).

Caso particolare della definizione di limite che si è proposta è il seguente.

Definizione. Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale. Si dice che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ (o $a_n \rightarrow L$ per $n \rightarrow +\infty$) se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Similmente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$ se

$$\forall M > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies a_n > M \text{ (rispettivamente } a_n < -M)$$

Esempio.

- Sia $a_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$: $\forall \varepsilon > 0$, la relazione $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ equivale a $\frac{1}{n} < \varepsilon$, cioè $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Basta scegliere $\nu_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ (parte intera del numero reale $\frac{1}{\varepsilon}$, cioè il più grande naturale $\geq \frac{1}{\varepsilon}$).
- Sia $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\}$. Poiché $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ si conclude che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

- Sia

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

cioè $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$: $\forall \varepsilon > 0$, si distinguono due casi:

- ◊ i) Sia n è pari. Allora $|a_n| < \varepsilon \iff \left| \frac{2}{n} \right| < \varepsilon \iff \frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon}$. Quindi basta scegliere $\nu_\varepsilon^1 = \lfloor \frac{2}{\varepsilon} \rfloor + 1$.
- ◊ ii) Sia n dispari. Allora $|a_n| < \varepsilon \iff \dots \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Quindi basta scegliere $\nu_\varepsilon^2 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rfloor + 1$.

Per concludere basta porre $\nu_\varepsilon = \max\{\nu_\varepsilon^1, \nu_\varepsilon^2\}$. Tuttavia, non c'è una necessità di distinguere i pari dai dispari. Una volta trovata una soglia ν_ε per i pari, se si trova un numero dispari maggiore allora basta lasciarlo da parte e sapere che spostandosi avanti con ν_ε si è trovata una soglia che va bene sia per i pari che per i dispari. Però, ciò non vale sempre.

- Sia $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ e si studia $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{p}$. Si ricorda una disuguaglianza vista per induzione: $\forall h \geq -1$ risulta $(1+h)^n \geq 1+nh$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- ◊ i) Sia $p > 1 \implies \sqrt[n]{p} > 1$. Si pone $h_n = \sqrt[n]{p} - 1$ e si osserva che $h_n > 0$. Dalla precedente disuguaglianza di Bernoulli, si deduce

$$(1+h_n)^n \geq 1+nh_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$p = (1+h_n)^n \geq 1+nh_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 < h_n \leq \frac{p-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$h_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ (Teorema del confronto)

Dunque $\sqrt[n]{p} = h_n + 1 \rightarrow 0 + 1 = 1$.

- ◇ ii) Sia $0 < p < 1$. Allora si definisce $k_n > 0$, mediante $\sqrt[p]{p} = \frac{1}{1+k_n}$. Come sopra

$$(1+k_n)^n \geq 1+nk_n \iff p = \left(\frac{1}{1+k_n}\right)^n \leq \frac{1}{1+nk_n}$$

$$p \leq \frac{1}{1+nk_n} \implies 1+nk_n \leq \frac{1}{p} \implies k_n \leq \frac{\frac{1}{p}-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Poiché $k_n > 0$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$. Per l'algebra dei limiti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+k_n} = \frac{1}{1+0} = 1$

Riassumendo: $\forall p > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{p} = 1$.

- Progressione geometrica. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n = \alpha^n$.

- ◇ Sia $0 < \alpha < 1$. Allora si pone $\alpha = \frac{1}{h+1}$, con $h > 0$. Quindi $0 < \alpha^n = \frac{1}{(h+1)^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e dunque $\alpha^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ◇ Sia $-1 < \alpha < 0$. Allora $0 < |\alpha|^n = |\alpha|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \alpha^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, dato che $0 < |\alpha| < 1$ si applica il punto precedente.
- ◇ Sia $\alpha = 1$. Allora $a_n = 1^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.
- ◇ Sia $\alpha > 1$. Allora si scrive $\alpha = 1+h$, con $h > 0$. Quindi $\alpha^n = (1+h)^n > 1+nh \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = +\infty$.
- ◇ Sia $\alpha = -1$. Allora $a_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ non ha limite per $n \rightarrow +\infty$.
- ◇ Sia $\alpha < -1$. Allora a_n è alternativamente positivo e negativo, ma $|a_n| = |\alpha|^n \rightarrow +\infty \implies \{a_n\}_n$ non ha limite.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \nexists & \text{se } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

- Sia $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$. Allora si pone $b_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$. Se $n > 1$ allora $b_n > 1$ e quindi si può scrivere $b_n = 1+h_n$, $h_n > 0$. Per Bernoulli:

$$\sqrt[n]{n} = (b_n)^n = (1+h_n)^n > 1+nh_n$$

$$0 < h_n < \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$$

Pertanto, $1 \leq a_n = b_n^2 = (1+h_n)^2 = 1+2h_n+h_n^2 < 1+\frac{2}{\sqrt[n]{n}}+\frac{1}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt[n]{n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1+\frac{3}{\sqrt[n]{n}}$. Per confronto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Teorema. Siano $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{c_n\}_n$ successioni reali. Allora:

- Il limite di $\{a_n\}_n$, se esiste, è unico.
- Se $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow M \in \mathbb{R}$ per $n \rightarrow +\infty$, allora $a_n + b_n \rightarrow L + M$, $a_n b_n \rightarrow LM$ e $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$.
- Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e se $a_n \rightarrow L$, $c_n \rightarrow L$ per $n \rightarrow +\infty$ allora $b_n \rightarrow L$ per $n \rightarrow +\infty$.

Proposizione. Ogni successione convergente (a un limite finito) è limitata. Quindi $\{a_n\}_n$ è limitata se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Si supponga che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Si prenda $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite: $\exists \nu_1 \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < 1$ per $n > \nu_1$. Si definisce $M = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{\nu_1}| + |L| + 1$. Se $n \leq \nu_1$ allora $|a_n| < M$. Se $n > \nu_1$ allora $|a_n| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L| \leq M$. In conclusione $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi M è un maggiorante.

Definizione. Una successione $\{a_n\}_n$ è detta

- (monotona) crescente se: $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (monotona) decrescente se: $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposizione. Se $\{a_n\}_n$ è crescente, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se è decrescente, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Dimostrazione. Si consideri il caso crescente, l'altro segue ponendo $\{-a_n\}_n$. Si supponga che $L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq L < L + \varepsilon$. Poiché $L - \varepsilon$ non è un maggiorante per i valori della successione, allora esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\nu_\varepsilon} > L - \varepsilon$. Per ogni $n > \nu_\varepsilon$ la monotonia della successione implica $a_n \geq a_{\nu_\varepsilon}$, sicché $L - \varepsilon < a_{\nu_\varepsilon} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$. Si deduce che $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Resta il caso $L = +\infty$. Per definizione, ciò significa che la successione non è limitata dall'alto: per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un indice $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\nu_M} > M$. Qualunque sia $n > \nu_M$, per la monotonia si ha che $a_n \geq a_{\nu_M} > M$. Si conclude che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Esempio. Si consideri la successione

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

Allora

- $\{T_n\}_n$ è crescente. Infatti, per la formula del binomio di Newton:

$$T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{n^k}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli:

$$1 - \frac{k}{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \quad \text{con } h = -\frac{1}{n+1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} T_n &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} < \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = T_{n+1} \end{aligned}$$

- La successione $\{T_n\}_n$ è limitata dall'alto. Infatti, usando ancora lo sviluppo binomiale

$$\begin{aligned} T_n &\leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{ricordando } n! \geq 2^{n-1} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \right] \\ &= 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

Per la proposizione precedente, esiste finito il $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = e$. Numericamente si trova che $e \approx 2.718281 \dots$

Osservazione. Si vedrà più avanti un'ulteriore caratterizzazione del numero di Nepero.

Esempio. Le potenze ad esponente reale. Sia $A > 0$ un numero reale assegnato. L'obiettivo è definire rigorosamente il simbolo di potenza A^α dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un esponente qualsiasi. Si utilizzerà un linguaggio delle successioni per definire A^α .

Se $0 < A < 1$ allora si pone $A^\alpha = (A^{-1})^{-\alpha}$. Quindi è sufficiente considerare il caso $A > 1$. Utilizzando l'operazione di estrazione delle radici, per $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ si può definire $A^\alpha = (A^{\frac{1}{n}})^m$. Pertanto, si possono calcolare le potenze A^r con esponente razionale r . Si verifica che valgono le due proprietà

- (P₁) $A^r > 0$, $A^r > 1$, poiché $A > 1$.
- (P₂) $A^{r+s} = A^r A^s$, se $r, s \in \mathbb{Q}$.

In particolare $r < s \implies A^r < A^s$, per $r, s \in \mathbb{Q}$.

Si mostra che per ogni successione a valori razionali $\{a_n\}_n$ si ha $a_n \rightarrow 0 \implies A^{a_n} \rightarrow 1$.

Infatti, si ricordi che $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{\frac{1}{n}} = 1$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che $\left| A^{\frac{1}{N}} - 1 \right| < \varepsilon$. Poiché $a_n \rightarrow 0$, esiste un intero ν tale che $n > \nu \implies |a_n| < \frac{1}{N}$. Quindi

$$a_n \leq |a_n| \rightsquigarrow A^{a_n} \leq A^{|a_n|} \rightsquigarrow A^{a_n} - 1 \leq A^{|a_n|} - 1 \rightsquigarrow |A^{a_n} - 1| \leq A^{|a_n|} - 1 \leq A^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon.$$

Sia $\{r_n\}_n$ una successione crescente di numeri razionali convergente ad α . Anche $\{A^{r_n}\}_n$ è crescente ed è limitata dall'alto (se n è un intero maggiore di α si ha $A^{r_n} \leq A^n$).

Si sa che esiste finito il $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{r_n} = L$. Si mostra che L non dipende dalla scelta della successione $\{r_n\}_n$.

Sia $\{s_n\}_n$ una successione di numeri razionali tale che $s_n \rightarrow \alpha$. Si ha $A^{s_n} - A^{r_n} = (A^{s_n - r_n} - 1)A^{r_n}$. Poiché $s_n - r_n \rightarrow \alpha - \alpha = 0$, si è visto prima che $A^{s_n - r_n} \rightarrow 1$. Inoltre, $\{A^{r_n}\}_n$ è limitata e si conclude che $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{s_n} - A^{r_n} =$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A^{s_n - r_n} - 1)A^{r_n} = 0. \quad \text{Quindi } \lim_{n \rightarrow +\infty} A^{s_n} = L = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^{r_n}.$$

Definizione. Siano $A > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si pone $A^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^{r_n}$, dove $\{r_n\}_n$ è una qualunque successione di numeri razionali che converge ad α .

L'elevamento a potenza con esponente reale qualunque occorre il passaggio al limite, l'assioma di completezza dei reali. Essa è un'operazione trascendente cioè che sfrutta le proprietà di \mathbb{R} come campo ordinato, in particolare quella dell'estremo superiore.

Complementi.

•

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) &= \frac{\cancel{n+1}n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \frac{n+1-k}{\cancel{n+1}} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

- Si ricorda $(1+h)^k \geq 1+kh$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $h > -1$. Si sceglie $h = -\frac{1}{n+1}$:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \geq 1 - \frac{k}{n+1}$$

•

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{n^k}_{k \text{ fattori} \leq 1}} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^{n-1}$. Sia

$$b_n = \frac{n!}{2^{n-1}} \implies b_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{n+1}{2} \frac{n!}{2^{n-1}} = \frac{n+1}{2} b_n$$

Poiché $\frac{n+1}{2} \geq 1$ per ogni n e $b_1 = 1$ si ha $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$. Dunque $b_n \geq 1$ per ogni n .

5.1 Limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A . Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}_n$ a valori in $A \setminus \{p\}$ e convergente a p , risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

Dimostrazione. Solo nel caso L finito (per esercizio gli altri casi). Si supponga che $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e sia $\{x_n\}_n$ una successione a valori in $A \setminus \{p\}$ convergente a p . Sia $\varepsilon > 0$ e sia U un intorno di p tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in U \setminus \{p\}$. Poiché $x_n \rightarrow p$ esiste un intero ν tale che $x_n \in U$ per ogni $n > \nu$. Inoltre, per ipotesi, $x_n \neq p$. Quindi, per ogni $n > \nu$ si ha $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$. Viceversa, si supponga che la relazione $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ sia falsa. Ciò significa che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni intorno U di p , esiste $x \in U$, $x \neq p$, con $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Si scelga:

$$U = \begin{cases} I(p, \frac{1}{n}) & \text{se } p \in \mathbb{R} \\ (n, +\infty) & \text{se } p = +\infty \\ (-\infty, -n) & \text{se } p = -\infty \end{cases}$$

attribuendo ad n i valori $1, 2, 3, \dots$. Così facendo, si deduce l'esistenza di punti $x_n \neq p$, $x_n \in I(p, \frac{1}{n})$ oppure $x_n > n$ oppure $x_n < -n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi:

$$\begin{cases} x_n \rightarrow p & \text{se } p \in \mathbb{R} \\ x_n \rightarrow +\infty & \text{se } p = +\infty \\ x_n \rightarrow -\infty & \text{se } p = -\infty \end{cases}$$

In ogni caso, $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon > 0$ e dunque $f(x_n)$ non converge ad L .

Si vuole introdurre uno strumento per analizzare più nel dettaglio le successioni che non convergono. Serve per capire meglio se una successione ha o meno limite.

Definizione. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali. Se essa non è limitata dall'alto, allora si pone

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Similmente, se la successione non è limitata dal basso, allora si pone

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Nota. Succede di trovare notazioni alternative per il limite superiore:

$$\max \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overset{''}{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

e per il limite inferiore:

$$\min \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overset{' }{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Ora si viene al caso delle successioni limitate.

Definizione. Si dice che un numero reale M è un maggiorante definitivo per $\{a_n\}_n$ se esiste un intero ν tale che $a_n \leq M$ per ogni $n > \nu$, cioè $M = \sup_{n > \nu} a_n$. Si dice che un numero reale N è un minorante definitivo per $\{a_n\}_n$ se esiste un intero ν tale che $a_n \geq N$ per ogni $n > \nu$, cioè $N = \inf_{n > \nu} a_n$.

Quindi M è un maggiorante di tutti i termini della successione oltre un certo indice ν . I maggioranti definitivi generalizzano il concetto di maggiorante propriamente detto.

Definizione. Si definisce il limite superiore di $\{a_n\}_n$ come l'estremo inferiore dell'insieme \mathcal{M} dei maggioranti definitivi per $\{a_n\}_n$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf \mathcal{M}$$

Analogamente, il limite inferiore è l'estremo superiore dell'insieme \mathcal{N} dei minoranti definitivi:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup \mathcal{N}$$

Non è una definizione immediata. Sarà utile ottenere delle caratterizzazioni equivalenti più maneggevoli.

Esempio.

- i) Sia $a_n = (-1)^n$. La successione è composta da solo due numeri, ± 1 . I maggioranti definitivi sono tutti e soli i numeri reali maggiori o uguali ad 1, mentre i minoranti definitivi sono tutti e soli i numeri reali minori o uguali a -1 . Si deduce che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$ e $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1$. Questi due limiti descrivono completamente l'esistenza del limite di una successione.
- ii) Sia $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Un qualsiasi numero positivo α è un maggiorante definitivo: infatti $a_n < \alpha$ per ogni $n > \frac{1}{\alpha}$. Viceversa, nessuno numero $\alpha \leq 0$ può essere un maggiorante definito, poiché $a_n > 0 \geq \alpha$ per tutti gli indici n pari. L'insieme dei maggioranti definitivi sono i numeri reali strettamente positivi. Quindi il limite inferiore è $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Nello stesso modo si ha che i minoranti definitivi sono i numeri strettamente negativi, perciò $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. La successione è convergente a zero. I due limiti, superiore ed inferiore, entrambi convergono a zero. Questi due limiti caratterizzano l'esistenza del limite.

Teorema. Una successione $\{a_n\}_n$ ha limite L (finito o infinito) se e solo se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$. Questo ricorda il teorema che afferma che il limite esiste se il limite destro ed il limite sinistro esistono e coincidono.

Dimostrazione. Il caso $L = \pm\infty$ è immediato per le definizioni. Si considera $L \in \mathbb{R}$. Sia $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero ν tale che, per ogni $n > \nu$, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. Quindi $L + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo e $L - \varepsilon$ è un minorante definitivo. Per definizione $L - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq L + \varepsilon$. Ne segue che $0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n - \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 2\varepsilon$ e si conclude per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. Viceversa, si fissa $\varepsilon > 0$, si ricordano le definizioni dei limiti inferiore e superiore. Poiché $L + \varepsilon > L$ è un maggiorante definitivo, esiste un intero ν_1 tale che $a_n \leq L + \varepsilon$, $\forall n > \nu_1$. Similmente, poiché $L - \varepsilon < L$ è un minorante definitivo, esiste un intero ν_2 tale che $a_n \geq L - \varepsilon$, $\forall n > \nu_2$. Se si prende $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n > \nu$ si ha che $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ e dunque $a_n \rightarrow L$ per $n \rightarrow +\infty$.

Si propone un'utile caratterizzazione dei limiti inferiore e superiore.

Proposizione. Se $\{a_n\}_n$ è una successione reale limitata, risulta:

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k\end{aligned}$$

Dimostrazione. Si dimostra la seconda uguaglianza. Il numero $\lambda_n = \inf_{k \geq n} a_k$ è un minorante definitivo: infatti $\lambda_n \leq a_k$ per ogni $k \geq n$. Dunque $\lambda_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Occorre dimostrare la disuguaglianza opposta. Si consideri un generico minorante definitivo l : esiste un intero n_0 tale che $a_k \geq l$ per ogni $k \geq n_0$. Pertanto

$$l \leq \inf_{k \geq n_0} a_k = \lambda_{n_0} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$$

Poiché questo vale per qualunque minorante definitivo l , si è dimostrato che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$$

Pertanto $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$.

In alternativa, si può dimostrare che la successione λ_n è crescente. Infatti

$$\lambda_n = \inf_{k \geq n} a_k \leq \lambda_{n+1} = \inf_{k \geq n+1} a_k$$

Pertanto

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$$

Oppure, sia \mathcal{N} l'insieme dei minoranti definitivi, allora dalla definizione si ha

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \mathcal{N} = \sup \{ \lambda_n = \inf_{k \geq n} a_k \mid n \in \mathbb{N} \} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$$

Tale caratterizzazione aiuta dal punto di vista teorico e di esercizio.

Esercizio. Dimostrare la prima uguaglianza.

5.2 Successioni e Topologia.

Teorema. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $p \in \mathbb{R}$ appartiene alla chiusura di A se e solo se esiste una successione $\{x_n\}_n$ a valori in A tale che $x_n \rightarrow p$. I punti della chiusura sono i limiti di successioni formate da elementi dell'insieme stesso.

Dimostrazione.

- a) Poiché \overline{A} è chiuso, il suo complementare $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ è aperto. Se $p \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$ allora esiste un intorno U di p nel quale non cadono punti di \overline{A} e, a maggior ragione, punti di A . Quindi p non può essere il limite di una successione di punti di A (se lo fosse, ogni intorno di p conterrebbe infiniti punti di A). In conclusione, se esiste una successione $\{x_n\}_n$ di punti di A con $x_n \rightarrow p$ allora $p \in \overline{A}$.

- b) Viceversa, si supponga che $p \in \overline{A} = A \cup A'$ e si dimostra l'esistenza di una successione $\{x_n\}_n$ di punti di A tali che $x_n \rightarrow p$. Se $p \in A$ allora si può considerare la successione costante $\{p\}_n$. Si supponga invece $p \in A'$, cioè p è un punto di accumulazione per A . Per ogni valore di $n = 1, 2, 3, \dots$ si sa che l'intorno $I(p, \frac{1}{n})$ contiene un punto $x_n \in A$, $x_n \neq p$. Quindi $|x_n - p| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, cioè $x_n \rightarrow p$.

Il teorema garantisce una scrittura equivalente dei punti della chiusura di un insieme attraverso l'identificazione con i limiti di successioni. Tale caratterizzazione descrive completamente gli insiemi. Si può recuperare tutta la tipologia della retta reale con i limiti di successioni.

Definizione. Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni. Si dice che $\{b_n\}_n$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$, o che $\{b_n\}_n$ è estratta da $\{a_n\}_n$, se esiste una successione strettamente crescente di numeri naturali $\{k_n\}_n$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}: b_n = a_{k_n}$.

Si vanno a selezionare tra tutti i termini della successione $\{a_n\}_n$ solo quelli con indice k_n .

Commento. L'idea di sottosuccessione è più semplice della definizione formale. Partendo da $\{a_n\}_n$ si selezionano infiniti indici $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ e si estrae $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots$. Da una successione si possono estrarre infinite sottosuccessioni.

Esempio. Sia $a_n = n$. Sono sottosuccessioni:

$$\begin{aligned} b_n &= 2n \quad (k_n = 2n) \quad \text{pari} \\ b_n &= 2n + 1 \quad (k_n = 2n + 1) \quad \text{dispari} \\ b_n &= 2^n \quad (k_n = 2^n) \quad \text{potenze di 2} \\ b_n &= n^2 \quad (k_n = n^2) \quad \text{quadrati perfetti} \end{aligned}$$

Teorema. Se la successione $\{a_n\}_n$ ha limite L allora ogni sottosuccessione ha limite L .

Dimostrazione. Si dimostra l'enunciato per $L \in \mathbb{R}$. Per ipotesi, dato $\varepsilon > 0$ esiste un intero ν_ε tale che $a_n \in I(L, \varepsilon)$ per ogni $n > \nu_\varepsilon$. Sia $\{b_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n$ una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$. Si osserva che $k_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal momento che $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ e ogni k_n è un numero naturale. Se $n > \nu_\varepsilon$ allora anche $k_n > \nu_\varepsilon$, e dunque $a_{k_n} = b_n \in I(L, \varepsilon)$. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = L$.

Esercizio. Dimostrare per $L = \{\pm\infty\}$.

Proposizione. Da ogni successione $\{a_n\}_n$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{b_n\}_n$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Dimostrazione. Se $\{a_n\}_n$ non è limitata, la conclusione è banale. Sia $\{a_n\}_n$ limitata. Sia $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Dato $\varepsilon > 0$ esistono infiniti indici n tali che $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. Sia $\varepsilon = 1$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che $L - 1 < a_{k_1} < L + 1$. Sia $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $k_2 > k_1$ tale che $L - \frac{1}{2} < a_{k_2} < L + \frac{1}{2}$. Sia $\varepsilon = \frac{1}{3}$ e $k_3 > k_2$ tale che $L - \frac{1}{3} < a_{k_3} < L + \frac{1}{3}$. Sia $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $k_n > k_{n-1}$ tale che $L - \frac{1}{n} < a_{k_n} < L + \frac{1}{n}$. Per

$n \rightarrow +\infty$ e per il teorema del confronto si ha $a_{k_n} \rightarrow L$. Ovviamente vale un enunciato analogo per il limite inferiore di $\{a_n\}_n$.

Esempio.

$$e := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Si conosce già la definizione di e come limite di successione. Ora che si è dato un significato alle potenze con esponente qualunque, si calcola questo limite notevole di funzione.

Visto che x è un numero reale che tende a più infinito si può porre, senza perdere generalità, che $x \geq 1$. Si osserva che ogni $x \geq 1$ può essere compreso tra due naturali consecutivi: $n \leq x < n+1$ (definizione della parte intera di x). In effetti $n = \lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x . Quindi

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Per le proprietà delle potenze,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Si costruiscono tutti i fondamentali per l'uso di un teorema del confronto. Le successioni agli estremi fanno da carabinieri, il termine in mezzo è la funzione interessata. Si sa che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{e}{1} = e$$

e similmente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

Poiché $n \leq x < n+1$, si ha $n \rightarrow +\infty$ se e solo se $x \rightarrow +\infty$, e per confronto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Sarebbe più difficile dimostrare tale risultato senza utilizzare le successioni che hanno goduto di proprietà di monotonia, infatti dimostrare la monotonia della funzione senza aver a disposizione alcun strumento di calcolo differenziale non è facile.

Teorema. Siano $\{a_n\}_n$ una successione, con $a \in \mathbb{R}$. Se da ogni sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ si può estrarre una sottosuccessione convergente ad a allora $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Dimostrazione. Sia $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e sia $\{b_n\}_n$ una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ convergente a L . Per ipotesi, da $\{b_n\}_n$ si può estrarre una sottosuccessione convergente ad a , e per unicità del limite, risulta $a = L$. Analogamente si dimostra che $a = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Ma allora $a = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e si sa che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Teorema. Weierstrass. Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. È sufficiente prendere una sottosuccessione che converga al limite superiore.

Si definiscono una particolare classe di insiemi.

Definizione. Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ è compatto per successioni (o anche sequenzialmente compatto) se da ogni successione a valori in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di K .

Osservazione. In Topologia, si definisce la classe degli insiemi compatti, che in generale non coincidono con gli insiemi compatti per successioni.

Grazie al Teorema di Weierstrass, si possono caratterizzare gli insiemi compatti per successioni.

Teorema. Sono sequenzialmente compatti in \mathbb{R} tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati. Cioè un insieme è compatto in \mathbb{R} se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione. Se K è chiuso e limitato, e se $\{x_n\}_n$ è una successione a valori in K , per il Teorema di Weierstrass esiste una sottosuccessione convergente. Il suo limite deve essere finito poiché K è limitato. Inoltre il limite deve appartenere a K , poiché K è chiuso (quindi coincide con la sua chiusura, cioè contiene tutti i propri punti di accumulazione, ed il limite della successione è necessariamente un punto di accumulazione per K stesso).

Viceversa, si supponga che K sia sequenzialmente compatto. Si dimostra che K è limitato. Per assurdo, se K non fosse limitato, ad esempio se $\sup K = +\infty$, esisterebbe una successione a valori in K divergente a $+\infty$. Infatti si può scegliere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un punto di $x_n \in K$ tale che $x_n > n$: evidentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Dalla successione $\{x_n\}_n$ non è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di K , contro l'ipotesi. Analogamente si esclude che $\inf K = -\infty$.

Si dimostra, infine, che K è un insieme chiuso. Sia $x_0 \in \overline{K}$: per un teorema già dimostrato (§5.2 Successioni e Topologia, primo teorema), esiste una successione $\{x_n\}_n$ a valori in K che converge a x_0 . D'altra parte, K è sequenzialmente compatto: si può estrarre da $\{x_n\}_n$ una sottosuccessione convergente a un punto $x_1 \in K$. Per l'unicità del limite, $x_1 = x_0$ e quindi $x_0 \in K$. Tale ragionamento mostra che $\overline{K} \subset K$, e dunque K è chiuso.

Osservazione. Il concetto di compattezza ha un ruolo importante in Analisi Matematica. Lo si incontra in tutti i corsi. La proprietà di compattezza diventa di grande importanza soprattutto quando si discute di teoremi di esistenza. La compattezza è uno dei concetti topologici più ricchi di significati nell'intera Analisi.

5.3 Successioni di Cauchy.

Il concetto di successione di Cauchy può essere scelto come pietra angolare su cui si fonda l'intera struttura dei numeri reali. Quando si vuole far vedere che esiste una struttura algebrica che soddisfa tutte le richieste degli assiomi dei numeri reali, si hanno diverse possibilità. Una di queste è costruire i numeri reali come limiti di successioni di

Cauchy a valori razionali, del tipo fondamentale di seguito descritte. È una costruzione lungimirante, perché può essere imitata in varie situazioni più avanzate nell'analisi matematica.

La definizione di limite per le successioni (ma anche per le funzioni) ha una debolezza: richiede che si conosca il valore del limite. La definizione di limite non è costruttiva, ma di verifica. Ma è possibile garantire che una successione abbia limite senza calcolare il valore (almeno per le successioni a valori reali).

Definizione. Si dice che una successione $\{a_n\}_n$ è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \nu_\varepsilon$ e $m \geq \nu_\varepsilon \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$. (Dove n ed m sono indipendenti a patto di rispettare l'ipotesi). A partire da un certo ν_ε in avanti, tutti i termini della successione distano tra loro meno di ε .

In questa definizione non c'è alcun riferimento ad alcun limite. Questa proprietà è equivalente all'esistenza di un limite finito per la successione.

Teorema. Criterio di convergenza di Cauchy. Una successione $\{a_n\}_n$ a valori reali converge ad un limite finito se e solo se è una successione di Cauchy.

Dimostrazione. Si supponga che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu_\varepsilon \implies |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se $n > \nu_\varepsilon$ e $m > \nu_\varepsilon$, per la disuguaglianza triangolare risulta

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Viceversa, la dimostrazione dell'implicazione contraria è più complicata. Perché bisogna costruire il limite, dato che nella condizione di Cauchy non si ha nessuna quantità che possa essere scelta come limite. Si supponga che $\{a_n\}_n$ sia una successione di Cauchy. Si dimostra che $\{a_n\}_n$ è limitata. Per ipotesi, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n_0 \implies |a_n - a_{n_0}| < 1$$

Considerando $\varepsilon = 1$ e $m = n_0$ nella condizione di Cauchy. Pertanto $|a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_{n_0}| + 1$ per ogni n (§5 Successioni, prima proposizione.). Adesso si sa che $\{a_n\}_n$ è limitata, per il teorema di Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ convergente ad un valore L finito. Per concludere la dimostrazione, si fa vedere che L è il limite dell'intera successione $\{a_n\}_n$. Dato che $\{a_n\}_n$ è successione di Cauchy, si fissa $\varepsilon > 0$, ed esiste $\nu_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu_\varepsilon^1, m > \nu_\varepsilon^1 \implies |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre, solo un numero finito di termini di $\{a_{k_n}\}_n$ può cadere fuori dall'intorno $I(L, \frac{\varepsilon}{2})$, poiché $a_{k_n} \rightarrow L$. Esiste, pertanto, un intero $n > \nu_\varepsilon^2$, tale che $|a_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. In conclusione, per ogni $n > \max\{\nu_\varepsilon^1, \nu_\varepsilon^2\}$ si ha

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$.

Osservazione. Può essere comodo formulare in modo equivalente la condizione di Cauchy: una successione $\{a_n\}_n$ è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero ν_ε tale che $\forall n > \nu_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}: |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$. (Dove $n + k = m$ e $m > \nu_\varepsilon$ dato che $k \geq 0$ e $n > \nu_\varepsilon$).

Questa variante della definizione sarà utile quando si sviluppino le teorie delle serie numeriche.

6 Confronti asintotici.

Nella teoria dei limiti, può essere utile introdurre un modo per confrontare due funzioni (o due successioni) nell'intorno di un punto della retta reale estesa. Uno strumento fondamentale è quello dei simboli di Landau (matematico tedesco, e non il più celebre fisico sovietico Lev Landau). Al solito, si tratta il caso delle funzioni, deducendo la corrispondente teoria per le successioni come caso particolare.

Nel seguito, si lavora con funzioni definite (almeno) in un intorno di un punto $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Per brevità, si evita di ripetere tale ipotesi in ogni enunciato.

Definizione. Si dice che una funzione f è trascurabile rispetto ad una funzione g nel punto c e si scrive $f = o_c(g)$ se esiste una funzione ω tale che

- $f(x) = \omega(x)g(x)$ in un intorno di $c, x \neq c$
- $\lim_{x \rightarrow c} \omega(x) = 0$

Notazione. Può capitare di leggere $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow c$, e anche il più corretto $f \in o_c(g)$ perché i due enti f e $o_c(g)$ non hanno la stessa natura: è difficile definire $o_c(g)$ come una funzione, tutt'al più è possibile definire $o_c(g)$ come un insieme di funzioni, cioè tutte quelle che sono trascurabili rispetto a g nel punto c . Il simbolo “o piccolo” è stato introdotto da Landau.

Osservazione. Se $g(x) \neq 0$ per x in un intorno del punto $c, x \neq c$, la definizione precedente equivale a

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Sebbene meno generale, spesso si propone questa condizione come definizione di “o piccolo”.

Definizione. Si dice che le funzioni f, g sono asintoticamente equivalenti nel punto c se $f - g = o_c(g)$ e si scrive $f \sim_c g$ (“effe equivalente a gi nel punto ci”).

Deve esistere una funzione ω tale che $\omega(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$, e $f(x) - g(x) = \omega(x)g(x)$ in un intorno di $c, x \neq c$. Quindi $f(x) = g(x)[1 + \omega(x)]$ in tale intorno. Se poi $g(x) \neq 0$ per ogni x vicino a $c, x \neq c$ deve risultare

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

L'equivalenza asintotica richiede che il quoziente abbia limite uguale all'unità quando $g(x) \rightarrow c$. Si può poi introdurre un concetto più generale nel seguente modo.

Definizione. Siano f, g due funzioni e si supponga che g non si annulli in un intorno di c . Si dice che f e g hanno lo stesso ordine per $x \rightarrow c$ se $\lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l \in (0, +\infty)$. In questo caso si scrive $f \asymp g$ per $x \rightarrow c$. Questa non è più l'equivalenza asintotica, ma è lo stesso ordine asintotico.

Osservazione. C'è una forte somiglianza tra l'equivalenza asintotica e possedere lo stesso ordine. In effetti l'unica differenza è il valore del rapporto tra le due funzioni.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \leftrightarrow \sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} \leftrightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &\rightarrow 1 - \cos x \asymp x^2 \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &\not\rightarrow 1 - \cos x \sim x^2 \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Esempio.

- $f(x) = l(1 + o(1))$ per $x \rightarrow c \iff \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}$. La parte a sinistra è la “scrittura fuori dal limite”
- $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$; $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$; $e^x \sim 1 + x$ per $x \rightarrow 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\ln(1 + x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$
- Per le dimostrazioni si usano strumenti del calcolo differenziale.
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0: x^\alpha = o(e^{\beta x})$ per $x \rightarrow +\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$
 $\forall \alpha > 0: \ln x = o(x^\alpha)$ per $x \rightarrow +\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
 Si ha una gerarchia degli infiniti tra queste classi di funzioni. Una gerarchia di velocità di divergenza. La dimostrazione di queste gerarchie si fa successivamente con il teorema di De L'hôpital.

Teorema. Principio di sostituzione. Si supponga che $f_1 = o(f)$, $g_1 = o(g)$ per $x \rightarrow c$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

La relazione d'uguaglianza sussiste in senso forte. Uno di due limiti esiste se e soltanto se esiste l'altro, ed in tal caso i due limiti coincidono.

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono funzioni ω_1, ω_2 tali che $\omega_1(x) \rightarrow 0, \omega_2(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$ e inoltre $f_1(x) = \omega_1(x)f(x), g_1(x) = \omega_2(x)g(x)$ in un intorno di c . Quindi

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) + \omega_1(x)f(x)}{g(x) + \omega_2(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) 1 + \omega_1(x)}{g(x) 1 + \omega_2(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) 1 + 0}{g(x) 1 + 0} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Nel calcolo di un limite che si presenta come quoziente, si possono trascurare gli o piccoli, cioè i termini di ordine inferiore: il limite è totalmente governato dai termini di ordine più alto. Questo risultato non dev'essere sopravvalutato: le due ipotesi sono abbastanza pesanti, perché bisogna sapere già che valgono tali ipotesi. Occorre preventivamente sapere quali siano i termini trascurabili a numeratore ed a denominatore. Questa è la parte difficile nell'applicare tale teorema. Successivamente, è

importante il concetto di derivata per stabilire confronti asintotici, e anche per confrontare le funzioni con polinomi (sviluppo in serie di Taylor).

Per ottenere informazioni sempre più dettagliate bisogna necessitare di scale di confronto con funzioni di campione. Bisogna disporre di un campionario di funzioni che si sanno confrontare. Uno dei modi più utili è quello di prendere a campione delle funzioni specifiche in modo da ottenere delle unità di misura.

Definizione. Sia f una funzione tale che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$. Si dice che $\beta \in \mathbb{R}$ è l'ordine di infinitesimo di f nel punto c se $f(x) \asymp |x - c|^\beta$ per $x \rightarrow c$ (cioè $f(x) = \lambda|x - c|^\beta + o_c(|x - c|^\beta)$).

La definizione non afferma che qualunque funzione che ha limite zero per $x \rightarrow c$, ma provvede solo ad un test per dire che β sia l'ordine di infinitesimo della funzione. Tuttavia, esistono funzioni che sono ordini di infinitesimo superiori a $|x - c|^\beta$. Quindi, non tutte le funzioni hanno, in questo senso, un ordine di infinitesimo.

Osservazione. Questa definizione è significativa solo per $c \in \mathbb{R}$, ed esplicitamente richiede che

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{|x - c|^\beta} = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Il calcolo differenziale offre un potente strumento, il polinomio di Taylor, per determinare l'ordine di infinitesimo delle funzioni in un punto.

Tale definizione può descrivere un termine di paragone solo di una funzione che tende a zero. Però si può introdurre anche un ordine di infinito.

Definizione. Si supponga che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$. Il numero $\beta \in \mathbb{R}$ è l'ordine di infinito di f nel punto c se

$$\lim_{x \rightarrow c} |x - c|^\beta |f(x)| \in (0, +\infty)$$

Si utilizza come unità di misura $\frac{1}{|x - c|^\beta}$. Quando il numeratore tende a zero, la frazione diverge a più infinito. Tale frazione diventa l'infinito campione ed è la grandezza di confronto per gli infiniti.

Posto $c = \pm\infty$, con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la condizione diventa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^\beta |f(x)| \in (0, +\infty) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^\beta} \in (0, +\infty)$$

C'è una forte arbitrarietà, come per la scelta del campione.

Osservazione. I numeri β e $x - c$ sono numeri reali, mettere i valori assoluti permette di non elevare numeri negativi ad esponenti irrazionali, in quanto non sono definiti.

L'utilizzo dei confronti asintotici è ampio nella teoria della complessità algoritmica. Si utilizza il concetto dello stesso ordine asintotico. Si conclude con un cenno a tale tipo di confronto asintotico: il simbolo \mathcal{O} , "o grande".

Avvertimento. Ci sono definizioni incompatibili di "o grande" utilizzate in relazione al contesto. Per questa ragione l'uso di "o grande" è meno universale di quello di "o piccolo".

Definizione. Date due funzioni f e g , si dice che f è “o grande” di g nel punto c , in simboli $f = \mathcal{O}_c(g)$, se esiste una funzione limitata k tale che $f(x) = k(x)g(x)$ in un intorno del punto c , escluso al più c stesso.

Esercizio. Dimostrare l'implicazione $f = o_c(g) \implies f = \mathcal{O}_c(g)$. Utilizzare la locale limitatezza.

L'informazione “o piccolo” è più ricca dell'informazione data da “o grande”. Se una funzione è trascurabile rispetto ad un'altra funzione vicino al punto c allora è anche “o grande” di quell'altra vicino al punto c . L’“o grande” è un confronto asintotico debole. L'utilizzo dell’“o grande” appare per dare ordine di grandezza del resto del polinomio di Taylor. Usando l’“o grande”, un polinomio approssima abbastanza bene una certa funzione nell'intorno del punto c , ma non si è capaci di distinguere se si approssima esattamente con tale velocità, oppure si approssima con una velocità di ordine superiore.

7 Funzioni continue.

La continuità sembra essere un caso speciale dei limiti, cioè il limite coincide con il valore della funzione in quel punto. Tuttavia, questa è una visione superficiale. La continuità è un concetto importante che scavalca i limiti degli insegnamenti di Analisi I. Il concetto di continuità appartiene al dominio della Topologia Generale, si può anzi dire che lo scopo della Topologia Generale è proprio lo studio delle proprietà che si considerano dopo l'applicazione di funzioni continue. Per questo motivo si propone una definizione “topologica” della continuità. Questa definizione si ritrova anche in corsi successivi.

Definizione. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- La funzione f è continua nel punto $c \in A$ se, per ogni intorno V di $f(c)$, esiste un intorno U di c tale che $f(U \cap A) \subset V$. Questa è la definizione topologica.
- La funzione f è continua nell'insieme A se essa è continua in ogni punto $c \in A$.

La definizione è puntuale, si applica punto per punto, ma poi è estesa ad una situazione globale estendendo a tutti i punti la situazione locale.

Si cerca di tradurre tale definizione “topologica” in una definizione “analitica”: f continua nel punto $c \in A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A, |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. (Definizione epsilon-delta della continuità). A questo punto è spontaneo cercare di leggere nella precedente proposizione logica, una relazione di limite. Tuttavia, questo è possibile solo con la condizione aggiuntiva che il punto c sia di accumulazione per l'insieme A : $c \in A \cap A'$. In questo caso — e solo in questo caso — la definizione di continuità nel punto c equivale a richiedere che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. È la riformulazione della continuità nell'ipotesi in cui c sia un punto di accumulazione.

Osservazione. Se il punto $c \in A$ non è punto di accumulazione allora, negando la definizione di punto di accumulazione, si deduce l'esistenza di un intorno U_0 di c tale che $U_0 \cap A = \{c\}$. Sia V un intorno di $f(c)$. Qualunque sia l'intorno U del punto c , tale che $U \subset U_0$, risulta $U \cap A \subset U_0 \cap A$ e $f(U \cap A) \subset f(U_0 \cap A) = f(c) \in V$. Quindi f è continua nel punto c .

In conclusione si può riformulare la definizione di continuità di f nel punto c come segue:

- Se $c \in A$ non è di accumulazione per A , f è sempre continua in c ;
- Se $c \in A$ è di accumulazione per A , la continuità di f nel punto c equivale a $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Osservazione. Ha senso parlare di continuità solo nei punti del dominio di definizione della funzione. Nella definizione di limite interessano i punti di accumulazione. Qua interessano i punti appartenenti al dominio.

Esempio. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue in \mathbb{R} . La disuguaglianza $-x \leq \sin x \leq x$ dimostra che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$. Quindi $\sin x$ è continua in 0. Sia $c \in \mathbb{R}$. Si ricorda la formula di prostaferesi

$$\sin x - \sin c = 2 \sin \left(\frac{x - c}{2} \right) \cos \left(\frac{x + c}{2} \right)$$

Pertanto $0 \leq |\sin x - \sin c| \leq 2 \left| \sin \left(\frac{x - c}{2} \right) \right| \cdot 1$, e si applica il teorema del confronto osservando che $\frac{x - c}{2} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$; quindi la funzione seno è continua in ogni punto del proprio dominio. Per il coseno si osserva che

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Dunque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e in particolare $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$. Ciò significa che $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$. La continuità di un generico punto c segue dalla formula di prostaferesi

$$\cos x - \cos c = -2 \sin \left(\frac{x + c}{2} \right) \sin \left(\frac{x - c}{2} \right)$$

Questo dimostra anche la continuità del coseno nel generico punto del dominio.

Grazie alla caratterizzazione della continuità mediante il linguaggio dei limiti, la seguente proposizione è una conseguenza diretta dell'algebra dei limiti.

Proposizione. Siano f, g due funzioni continue in un punto c del comune dominio di definizione. Allora le funzioni $f + g$, $f \cdot g$ e f/g (purché $g(c) \neq 0$) sono continue nel punto c .

Dimostrazione. Se il punto c è un punto isolato, non c'è nulla da dimostrare, perché tutte le funzioni sono continue nei propri punti isolati. Se c è un punto di accumulazione del dominio di definizione di f e g , per l'algebra dei limiti $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = f(c) + g(c)$, e perciò la funzione $f + g$ è continua nel punto c . Analogamente si verificano le altre affermazioni.

Proposizione. Continuità delle funzioni composte. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Si supponga che f sia continua in $x_0 \in A$ e che g sia continua nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0 .

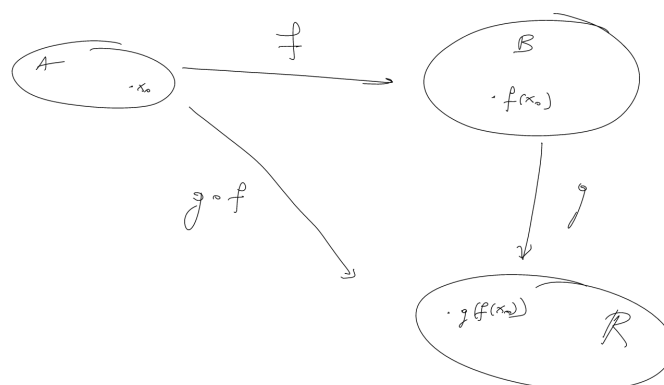


Figure 17: Diagramma commutativo della continuità della funzione composta.

Dimostrazione. Per ogni intorno U di $g(f(x_0))$ esiste un intorno W di $f(x_0)$ tale che $g(W \cap B) \subset U$ (questa è la definizione topologica degli intorni della continuità di g nel punto $f(x_0)$). In corrispondenza di W esiste un intorno V di x_0 tale che $f(V \cap A) \subset W \cap B$. Quindi $(g \circ f)(V \cap A) \subset g(W \cap B) \subset U$. Ne segue che $g \circ f$ è continua in x_0 .

Resta esclusa l'operazione di inversione. La dimostrazione del teorema di continuità per la funzione inversa è più faticosa di quanto dimostrato finora. Per questo è posticipata nel corso.

7.1 Discontinuità.

La discontinuità non è così interessante, perché ciò che interessa una funzione è proprio la continuità. La classificazione dei punti di discontinuità è sempre soggetta a scelte legate al gusto personale di chi le propone. Non c'è un'unica classificazione. Tuttavia, anche la discontinuità sempre parla di punti del dominio.

Si consideri una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$. Sia poi $x_0 \in A$. In quali modi la funzione f può essere discontinua nel punto x_0 ?

In un punto isolato del dominio, la funzione è sempre continua.

Si consideri ora i punti sempre di accumulazione. Una prima possibilità è che il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ esista finito, e tuttavia sia diverso dal valore $f(x_0)$. Un tale punto x_0 è una discontinuità eliminabile, o fittizia o di prima specie, per f : è infatti sufficiente cambiare il valore di f in x_0 per rendere la funzione continua nel punto.

Il più semplice esempio di un punto di discontinuità "vero" è un punto x_0 tale che esistano finiti i limiti per eccesso e per difetto, cioè:

$$s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq 0$$

Il numero reale $s(x_0)$ si chiama salto della funzione f nel punto x_0 : f è continua in x_0 se e solo se $s(x_0) = 0$ e $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$.

Teorema. Una funzione monotona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ può avere al più un insieme numerabile di punti di discontinuità. (Le funzioni monotone possiedono sempre i limiti

per eccesso e per difetto).

Dimostrazione. Si supponga, ad esempio, f crescente. Per iniziare, si dimostra che se $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sono punti di discontinuità e se $s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)$ sono i rispettivi salti, allora $s(x_1) + s(x_2) + \dots + s(x_n) \leq f(b) - f(a)$. Per ogni $y \in (a, b)$ si definisce $f_+(y) = \lim_{x \rightarrow y^+} f(x)$, $f_-(y) = \lim_{x \rightarrow y^-} f(x)$. Poiché f è crescente, si ha $f_+(x_{i-1}) \leq f_-(x_i)$ per $i = 2, 3, \dots, n$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s(x_i) &= \sum_{i=1}^n [f_+(x_i) - f_-(x_i)] \\ &= f_+(x_n) - f_-(x_1) - \overbrace{\sum_{i=2}^n [f_-(x_i) - f_+(x_{i-1})]}^{\geq 0} \\ &\leq f_+(x_n) - f_-(x_1) \leq f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Grazie a questa disuguaglianza, può esistere al più un numero finito di punti di discontinuità con salto superiore a 1: siano questi x_1, x_2, \dots, x_{n_1} . Analogamente può esistere al più un numero finito di punti di discontinuità con salto compreso tra $\frac{1}{2}$ e 1: siano questi $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}$. Considerando via via i punti di discontinuità con salto compreso tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, ecc, si ottiene un'enumerazione di tutti i punti di discontinuità di f .

Un secondo tipo di discontinuità si ha nei punti x_0 in cui i limiti per eccesso e per difetto esistono, ma almeno uno di essi è infinito (o entrambi). Questi punti di discontinuità si chiamano di seconda specie.

Da ultimo, un punto x_0 nel quale almeno il limite per eccesso o il limite per difetto non esiste è chiamato discontinuità di terza specie.

Osservazione. I punti di discontinuità sono punti del dominio di definizione della funzione. Ciò significa che la funzione deve essere definita anche in tali punti. Altri seguono definizioni diverse, per esempio Giusti.

Esempio.

- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x_0 = 0$. Invece, la funzione $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $g(x) = \frac{1}{x^2}$ per ogni $x \neq 0$ è continua in tutti i punti del proprio dominio di definizione. La funzione f prolunga la funzione g cioè è definita su un dominio maggiore della seconda, ma coincide con essa nel dominio comune.

- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di terza specie nel punto $x_0 = 0$. Si considerino infatti le due successioni $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, osservando che $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Tuttavia, $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$, $f(y_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1$, e pertanto $f(x_n) \rightarrow 1$, $f(y_n) \rightarrow -1$ per $n \rightarrow +\infty$. Si sono trovate due successioni entrambe convergenti a zero ma con $f(x_n) \rightarrow 1$ e $f(y_n) \rightarrow -1$. Grazie al teorema ponte (§5.1 Limiti di funzioni e limiti di successioni, primo teorema.) ne consegue che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$. Anche stavolta, se non si attribuisse alcun valore alla funzione nel punto $x_0 = 0$, si avrebbe una funzione continua nel dominio di definizione.

7.2 Teoremi fondamentali.

Le funzioni continue godono di alcune proprietà notevoli, che si riassumono in tre teoremi fondamentali. Come premessa, si osserva un caso speciale del teorema della permanenza del segno, dimostrato precedentemente.

Proposizione. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nel punto $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$, esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in V \cap A$. Analogamente, se $f(x_0) < 0$, esiste un intorno di x_0 nel quale f rimane minore di 0. (Nel caso di punto isolato si ha che l'ipotesi coincide con la tesi).

Dimostrazione. Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (per la continuità), la tesi segue dal teorema di permanenza del segno.

Questo enunciato che è la rivisitazione di un teorema già visto, è lo strumento fondamentale per la dimostrazione di due dei teoremi fondamentali per le funzioni continue. Si vede che questi risultati si dividono in due argomenti. Un paio di questi teoremi riguarda la proprietà dei valori intermedi e come caso particolare il teorema degli zeri per le funzioni continue. Un secondo argomento dove la continuità riveste un ruolo cruciale è l'argomento variazionale: la problematica di ricerca di massimo e minimo, così come altri punti di interesse. La teoria variazionale è importante nella matematica contemporanea. La continuità è uno strumento quasi essenziale (quasi essenziale, perché quello essenziale è la semi-continuità, che non viene trattata in questo corso) per garantire che le funzioni a valori reali abbiano punti di massimo e minimo.

Il teorema degli zeri è un risultato importante. Se ne vedono due dimostrazioni. La prima può sembrare più elegante e raffinata: evidenzia il ruolo giocato dalla struttura numerica dei reali, ovverosia dell'assioma di Dedekind o dei suoi equivalenti, più avanti si usa il principio di esistenza dell'estremo superiore. La seconda dimostrazione può essere efficientemente implementata in un algoritmo numerico, seguendo la linea usata per la dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, per la ricerca degli zeri in maniera automatica. La ricerca degli zeri attraverso il metodo di bisezione porta in un tempo breve ad approssimare arbitrariamente gli zeri delle funzioni continue.

Teorema. Degli zeri. Sia f una funzione continua in un intervallo I , e siano x_1, x_2 due punti di I tali che $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$. Allora esiste un punto x_0 compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(x_0) = 0$.

La vera essenza di questo teorema resta nascosta, ma è una proprietà importante cioè che la funzione sia continua in un intervallo. Gli intervalli sono gli unici sottoinsiemi connessi della retta reale, è una proprietà per nulla topologica. Il teorema degli zeri è un teorema legato alla connessione del dominio della funzione. La prima dimostrazione mette enfasi sull'esistenza dell'estremo superiore e quindi sulla struttura dei numeri reali. Tuttavia, il teorema degli zeri vale per ogni funzione continua definita su un sottoinsieme connesso di una struttura topologica qualunque.

Prima Dimostrazione. Estremo superiore. Sia $E = \{x \in [x_1, x_2] \mid f(x) < 0\}$. Per ipotesi $x_1 \in E$, mentre x_2 è un maggiorante di E . Esiste pertanto $x_0 = \sup E$. Si dimostra che $f(x_0) = 0$. Si utilizza la tricotomia dei numeri reali rispetto all'ordinamento. Lo zero divide i numeri reali in due parti. Se fosse $f(x_0) < 0$, si avrebbe $x_0 < x_2$ e per la permanenza del segno esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta)$. Quindi x_0 non sarebbe l'estremo superiore di E . Se fosse $f(x_0) > 0$, allora $x_0 > x_1$, ed esisterebbe un intervallo $(x_0 - \delta, x_0]$ in cui f sarebbe positiva. Allora $E \subset [x_1, x_0 - \delta]$, e $x_0 - \delta$ sarebbe un maggiorante di E più piccolo di x_0 . Assurdo. Resta così dimostrato che $f(x_0) = 0$.

Questa dimostrazione ha un paio di difetti: l'enfasi sull'estremo superiore, non è tanto la struttura del dominio, ma teoremi di questo genere si basano su domini definiti su intervalli connessi. Altro difetto è che è una dimostrazione poco costruttiva: questo teorema garantisce solamente l'esistenza dello zero, ma non provvede ad un'approssimazione di tale zero della funzione.

Seconda Dimostrazione. Per successioni. Per bisezione. Si imita la dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass facendo una costruzione basata sulla bisezione. Si dimezza $[x_1, x_2]$ mediante $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

- $f(c) = 0$: fine
- $f(c) < 0$: $a_1 = c$, $b_1 = x_2$
- $f(c) > 0$: $a_1 = x_1$, $b_1 = c$

Si ripete, considerando l'intervallo $[a_1, b_1]$ al posto di $[x_1, x_2]$. L'idea è semplice: si parte sulla retta reale dall'intervallo $[x_1, x_2]$, si ha $f(x_1)$ e $f(x_2)$ di segno opposto; si prende c come la metà e si controlla il segno così da prendere l'intervallo di modo che i due estremi abbiano segno opposto. Quindi si ha $c = \frac{a_1 + b_1}{2}$

- $f(c) = 0$: fine
- $f(c) < 0$: $a_2 = c$, $b_2 = b_1$
- $f(c) > 0$: $a_2 = a_1$, $b_2 = c$

Iterando questo algoritmo si ottengono due successioni: $x_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ e $x_2 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ con le proprietà che $f(a_i) < 0$, $f(b_i) > 0$, $b_i - a_i = \frac{x_2 - x_1}{2^i}$, per $i = 1, 2, 3, \dots$. Per monotonia $a_i \rightarrow a^* \in [x_1, x_2]$, $b_i \rightarrow b^* \in [x_1, x_2]$ per $i \rightarrow +\infty$. Ma $b^* - a^* = \lim_{i \rightarrow +\infty} (b_i - a_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_2 - x_1}{2^i} = 0$ cioè $a^* = b^*$. Si definisce $x_0 = a^* = b^*$. Per permanenza del segno $f(x_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(a_i) \leq 0$ e

$f(x_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(b_i) \geq 0$ e dunque $f(x_0) = 0$.

Tuttavia, il teorema degli zeri non è capace di dare un'informazione più precisa come contare quanti zeri sono presenti in un intervallo.

Il teorema degli zeri è uno strumento fondamentale per risolvere equazioni. Si consideri infatti una funzione f definita in un intervallo I , e sia $t \in \mathbb{R}$ un numero assegnato. Si vuole risolvere l'equazione $f(x) = t$ nell'incognita $x \in I$. Riscrivendo l'equazione nella forma $f(x) - t = 0$, si può applicare il teorema degli zeri alla funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - t$.

Teorema. Dei valori intermedi. È equivalente al teorema degli zeri. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I . Per ogni $\inf_I f < t < \sup_I f$, esiste almeno un valore $x \in I$ tale che $f(x) = t$.

Dimostrazione. Si scelgano due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) < t < f(x_2)$ (perché esistono? Partire dall'ipotesi su t e arrivare alla proprietà qua scritta: è una conseguenza dell'estremo superiore e inferiore). La funzione $g(x) = f(x) - t$ è continua nell'intervallo compreso tra x_1 e x_2 . Inoltre, $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$. Pertanto esiste $x \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x) = 0$, cioè $f(x) = t$.

Controesempio. Eliminando l'ipotesi di continuità, il teorema diventa falso:

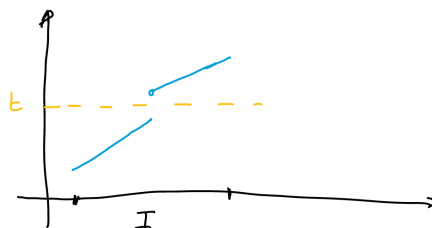


Figure 18: Controesempio.

Esercizio. Si è creduto a lungo, prima che l'Analisi Matematica fosse sottoposta ad un processo di rigorosa revisione, che la cosiddetta "proprietà dei valori intermedi", cioè la proprietà che una data funzione assuma tutti i valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore, fosse equivalente alla continuità. Non è vero che tutte le funzioni che abbiano la proprietà dei valori intermedi siano continue, ma è vero che tutte le funzioni continue hanno la proprietà dei valori intermedi. Dimostrare che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

gode delle proprietà dei valori intermedi, sebbene sia discontinua nel punto $x_0 = 0$. Inizialmente, tale funzione non era definita come una funzione, una relazione di tipo speciale. Ma si concepiva come una formula. La definizione procedurale (cioè per casi) delle funzioni non era concepita in maniera rigorosa. Pertanto, era facile cadere nella confusione che tutte le funzioni che godessero della proprietà dei valori intermedi fossero solo e soltanto le funzioni continue.

Il terzo e ultimo risultato fondamentale che si dimostra per le funzioni continue si allaccia a quella branca della Matematica che prende il nome di Calcolo delle Variazioni, Teoria dell'Ottimizzazione. Cioè si ricercano i massimi ed i minimi delle funzioni. Una grande parte della fisica moderna è basata sulla concezione che i fenomeni fisici siano governati da un'intelligenza del fenomeno fisico e naturale che porta la natura a selezionare la soluzione ottimale. In fisica è quello che si chiama come il principio di minima azione.

Il problema “variazionale” più semplice consiste nella ricerca dei punti di minimo o massimo assoluti per una data funzione.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si introducono le notazioni

- $\arg \min_X f = \{x \in X \mid f(x) = \min f(X)\}$
- $\arg \max_X f = \{x \in X \mid f(x) = \max f(X)\}$

per indicare, rispettivamente, l'insieme dei punti di minimo e di massimo di f in X . Bisogna dare delle condizioni per cui questi due insiemi non siano vuoti. La difficoltà nella risoluzione di problemi variazionali è che non ci si può aspettare l'esistenza delle soluzioni.

Esempio.

- Siano $X = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Allora $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty \rightsquigarrow \arg \max_{\mathbb{R}} f = \emptyset$. Anche $\inf f(\mathbb{R}) = 0$ ($e^x > 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$) $\rightsquigarrow \arg \min_{\mathbb{R}} f = \emptyset$.
- Sia $X = [-1, 1]$, con

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

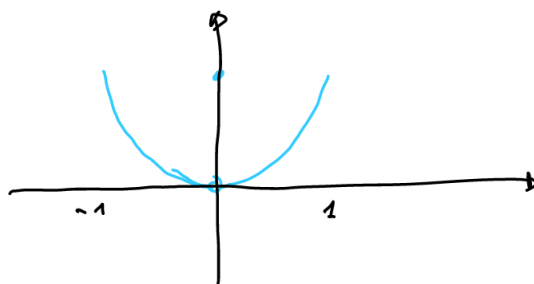


Figure 19: Grafico.

$$\arg \max_{[-1,1]} f = \{-1, 0, 1\} \text{ e } \arg \min_{[-1,1]} f = \emptyset$$

Questi esempi mostrano che i punti estremanti di una funzione (cioè i punti di massimo o di minimo assoluti) possono esistere oppure non esistere. È quindi spontaneo chiedersi quali ipotesi garantiscono sempre la loro esistenza.

Teorema. Weierstrass. I Teorema del calcolo variazionale. Una funzione continua su un insieme compatto (per successioni) possiede almeno un punto di minimo assoluto e almeno un punto di massimo assoluto.

Questo teorema continua ad essere valido sotto compattezza topologica. Qua si usa la compattezza per successioni perché è quella che è stata definita.

Dimostrazione. È possibile dimostrare questo teorema sulla falsa riga del teorema degli zeri, cioè è una dimostrazione che sia inutilmente basata sull'assioma di Dedekind. Tuttavia, questo teorema non dipende dalla struttura algebrica dei numeri reali ma dipende solo dall'ipotesi di compattezza del dominio. Sia $K \subset \mathbb{R}$ compatto per successioni e sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $x_n \in K$ un punto tale che $\inf_K f \leq f(x_n) < \frac{1}{n} + \inf_K f$. Si può fare questo per definizione dell'estremo inferiore, infatti $\frac{1}{n} + \inf_K f$ non è un minorante. Questa successione $\{x_n\}_n$ si chiama successione minimizzante. Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf_K f$. Quindi, K compatto implica l'esistenza di una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n$ di $\{x_n\}_n$ tale che $x_{k_n} \rightarrow x^* \in K$. Inoltre, f continua implica che $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x^*)$. Per l'unicità del limite si ha $f(x^*) = \inf_K f$. Questo significa che $x^* \in K$ è un punto di minimo assoluto della funzione f . In maniera analoga si dimostra che esiste un punto di massimo assoluto di f in K .

Osservazione.

- Quanti sono i punti estremanti di una funzione data? Per ogni $k \in \mathbb{N}$ è facile costruire una funzione f continua su un insieme compatto per successioni, tale da avere almeno k punti estremanti. L'idea è di considerare funzioni periodiche in un intervallo abbastanza grande, ma finito.
- È possibile localizzare i punti di estremo locale ma non globale? Con gli strumenti della continuità, non è possibile. Il teorema di Weierstrass non “vede” i massimi o i minimi locali.

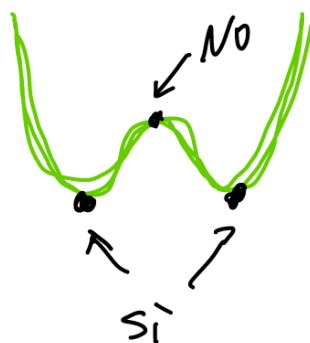


Figure 20: Limite del teorema di Weierstrass.

Si necessita di strumenti più potenti per lo studio di funzioni.

7.3 Funzioni continue invertibili.

Osservazione. In generale non ci si può aspettare che l'inversa di una funzione continua (e ovviamente iniettiva) sia continua. Posto ad esempio $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

con

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (2, 3] \end{cases}$$

si ha che f è continua in A ed è iniettiva. La sua inversa è la funzione $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow A$ definita da

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x + 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Il punto $x_0 = 1$ è una discontinuità a salto per f^{-1} . La continuità non passa attraverso l'inversione di funzioni. Nonostante questo esempio, sotto ulteriori ipotesi si può dimostrare la continuità della funzione inversa.

Lemma. Una funzione f , continua e invertibile in un intervallo I , è monotona.

Dimostrazione. Si dimostra innanzitutto che preso comunque un punto $x_0 \in I$, la funzione $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ ha sempre lo stesso segno a destra di x_0 . Ad esempio, se per un punto $\bar{x} > x_0$ si ha $f(\bar{x}) > f(x_0)$, allora si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x > x_0$. Infatti, se esistesse un punto $x' > x_0$ tale che $f(x') \leq f(x_0)$ allora per il teorema dei valori intermedi esisterebbe un punto ξ compreso tra x' e \bar{x} (dunque diverso da x_0), tale che $f(\xi) = f(x_0)$. Ma questo contraddice l'injectività di f . Si considerino ora due punti a e b di I , con $a < b$, e si supponga che $f(a) < f(b)$. Si dimostra che f è strettamente crescente in I . Siano infatti $x_1 < x_2$ due punti di I , e sia $b_1 = \max\{b, x_2\}$. Poiché $f(b) > f(a)$, deve essere $f(x) > f(a)$ per ogni $x > a$. In particolare $f(b_1) > f(a)$. Ancora per lo stesso motivo, deve risultare $f(x) < f(b_1)$ per ogni $x < b_1$, e dunque $f(x_1) < f(b_1)$. Da questa relazione segue infine che $f(x) > f(x_1)$ per ogni $x > x_1$, e in particolare $f(x_1) < f(x_2)$.

Lemma. Una funzione g definita in un intervallo J e ivi monotona è continua se e solo se l'immagine $g(J)$ è un intervallo. (Caratterizzazione completa della continuità di funzioni monotone).

Dimostrazione. Si può supporre che g sia crescente in J . Se g è continua, per il teorema dei valori intermedi g assume tutti i valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore. Quindi $g(J)$ è un intervallo. Ogni volta che si prendono due punti dell'immagine, anche tutti i punti compresi fanno parte dell'immagine, proprio per il teorema dei valori intermedi. Viceversa, si supponga che $g(J)$ sia un intervallo. Per assurdo, se g non fosse continua in un punto $x_0 \in J$ si avrebbe $l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = L$. (Le discontinuità di una funzione monotona sono per forza di salto). Poiché g è crescente, per $x < x_0$ si ha $g(x) < l$, mentre per $x > x_0$ si ha $g(x) > L$. L'idea è che ci si deve avvicinare a x_0 in maniera monotona crescente. Ne deriva che dei punti compresi tra l e L , al più uno (quello corrispondente a x_0) può appartenere all'immagine $g(J)$. Ma allora $g(J)$ non può essere un intervallo. Assurdo.

Si può finalmente dimostrare un primo risultato di continuità per la funzione inversa.

Teorema. Sia f una funzione continua e invertibile in un intervallo I . Allora f^{-1} è continua.

Dimostrazione. Per il primo dei due lemmi precedenti, la funzione f è monotona. Per il Teorema dei valori intermedi, la sua immagine $J = f(I)$ è un intervallo. La funzione f^{-1} definita in J è monotona e la sua immagine è l'intervallo I . Per il secondo lemma essa è continua.

Grazie a questo risultato è possibile affermare che le funzioni $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \arcsin x$, $x \mapsto \arccos x$, $x \mapsto \arctan x$ sono funzioni continue nei rispettivi domini di definizione. Un secondo risultato di continuità per la funzione inversa è il seguente.

Teorema. Se f è una funzione continua e invertibile in un insieme compatto K , allora f^{-1} è continua.

Dimostrazione. Sia $y_0 \in f(K)$. Occorre dimostrare che, per ogni successione $\{y_n\}_n$ a valori in $f(K)$ e convergente a y_0 , la successione $x_n = f^{-1}(y_n)$ converge a $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Se ciò non fosse vero allora esisterebbe un intorno V di x_0 e una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n$ estratta da $\{x_n\}_n$ tale che $x_{k_n} \notin V$ per ogni n (questo significa negare che la successione sia arbitrariamente vicina a x_0). Poiché K è compatto, dalla successione $\{x_{k_n}\}_n$ si può poi estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{x_n^*\}_n$ convergente ad un punto x_0^* di K . Per quanto detto sopra, $x_0^* \neq x_0$ (perché i punti di $\{x_{k_n}\}_n$ sono ben distanti da x_0). Ricordando che f è continua, si ha $f(x_n^*) \rightarrow f(x_0^*)$. Però $\{x_n^*\}_n$ è estratta da $\{x_{k_n}\}_n$ e per ipotesi $f(x_{k_n}) = y_{k_n} \rightarrow y_0 = f(x_0)$. In conclusione $f(x_0) = f(x_0^*)$ e questo è assurdo poiché f è per ipotesi una funzione iniettiva.

Questo è un risultato più generale del precedente, perché si può applicare qualsiasi volta si possa parlare di continuità e compattezza.

Osservazione. Le ipotesi dei due teoremi non sono paragonabili, poiché esistono intervalli compatti (quelli chiusi e limitati), e intervalli non compatti (tutti gli altri).

7.4 Continuità uniforme.

Nella definizione di continuità epsilon-delta, il valore di $\delta > 0$ dipende — in generale — sia da $\varepsilon > 0$, sia dal punto x_0 .

Esempio. Sia $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Sia $x_0 \in (0, 1)$ e si fissa $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Calcolando il limite per $x \rightarrow x_0$, non è restrittivo supporre $x > \frac{x_0}{2}$.

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} \right| < \varepsilon$$

$$|x \cdot x_0| = x \cdot x_0 > \frac{x_0^2}{2} \implies \frac{1}{|x \cdot x_0|} < \frac{2}{x_0^2}$$

Quindi, per avere $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$ (con $x > \frac{x_0}{2}$), è sufficiente avere

$$\left| \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} \right| < 2 \left| \frac{x - x_0}{x_0^2} \right| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \frac{x_0^2}{2} \varepsilon := \delta$$

È evidente che δ dipende da ε e da x_0 , ma l'osservazione più importante è che

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \delta = 0$$

È impossibile selezionare $\delta > 0$ nella definizione di continuità in maniera indipendente dal punto x_0 .

La definizione epsilon-delta varia punto per punto, e non c'è speranza di avere un solo δ che vada bene per tutti gli x_0 .

Definizione. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è uniformemente continua in A se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x_0 \in A$ e per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$ risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si confronta la continuità con l'uniforme continuità:

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in A, \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Nella continuità uniforme il δ dipende solo da ε e non anche da x_0 . (Attenzione all'ordine dei quantificatori).

Un buon modo per capire la definizione di continuità uniforme consiste nel negarla: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in A, \exists y_\delta \in A : |x_\delta - y_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Essendo $\delta > 0$ arbitrario, si può scegliere della forma δ_n , ($n \in \mathbb{N}$), in modo che $\delta_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Per verificare che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ non è uniformemente continua è dunque sufficiente dimostrare che esistono $\varepsilon_0 > 0$ e due successioni $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ a valori in A , tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - y_n| = 0$, ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio. Siano $A = (0, 1)$ e $f(x) = \frac{1}{x}$. Siano $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n+1}$. Allora $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ che converge a zero e $f(x_n) - f(y_n) = n - (n+1) = -1$, la cui distanza è 1. Ponendo $\varepsilon_0 = 1$ e usando le due successioni precedenti si è provato la non uniforme continuità.

Si vedono un paio di risultati teorici sulle funzioni uniformemente continue.

Teorema. Una funzione uniformemente continua in un insieme limitato A è una funzione limitata.

Dimostrazione. Ponendo $\varepsilon = 1$ nella definizione di continuità uniforme, si può concludere che esiste un $\delta > 0$ tale che se $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$, si ha $|f(x) - f(y)| < 1$. Poiché A è un insieme limitato, si può ricoprire (partizionare) A con un numero finito di intervalli I_1, \dots, I_n ognuno di lunghezza δ . Per $k = 1, \dots, n$ si sceglie un punto $x_k \in I_k \cap A$. Ogni punto $x \in A$ deve appartenere ad uno degli intervalli I_1, \dots, I_k . Esiste, perciò, un $h \in \{1, \dots, n\}$ tale che $|x - x_h| < \delta$, e quindi $|f(x) - f(x_h)| < 1$. Ma allora $|f(x)| < |f(x_h)| + 1 \leq |f(x_1)| + \dots + |f(x_n)| + 1$.

La condizione che la funzione trasformi insiemi limitati in insiemi limitati è una condizione necessaria per cui una funzione è uniformemente continua.

Osservazione. Se f è uniformemente continua allora f è continua (confronto immediato dalle definizioni). Si sa che l'implicazione inversa è — in generale — falsa. Tuttavia, essa diventa vera se si aggiunge un'ipotesi relativa al dominio di definizione.

Teorema. Una funzione f , continua in un insieme K compatto, è uniformemente continua. Su insiemi compatti la continuità è logicamente equivalente alla continuità uniforme.

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Se la tesi fosse falsa, esisterebbe $\varepsilon_0 > 0$ e due successioni $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ a valori in K , tali che $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. A causa della compattezza di K , da $\{x_n\}_n$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n$ convergente a qualche $x_0 \in K$, e da $\{y_n\}_n$ una sottosuccessione $\{y_{k_n}\}_n$ convergente a qualche $y_0 \in K$. Ora, $|x_n - y_n| \rightarrow 0 \implies |x_{k_n} - y_{k_n}| \rightarrow 0 \implies |x_0 - y_0| = 0 \implies x_0 = y_0$. Però $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0$, e passando al limite (perché f è continua) $0 = |f(x_0) - f(y_0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0 > 0$. Assurdo. Essendo una dimostrazione per assurdo, essa non è costruttiva, quindi non si sa come costruire quel δ a partire da ε .

La continuità uniforme è alla base della verifica di un importante risultato di integrabilità: la dimostrazione che le funzioni continue sono integrabili.

Esercizio. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in A$. Dimostrare che tutte le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue.

Suggerimento. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < \varepsilon$ non appena $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

Osservazione. Il calcolo differenziale offre strumenti potenti con i quali si garantisce la lipschitzianità di alcune classi di funzioni. In particolare, quando la derivata risulta limitata, allora la funzione è lipschitziana.

8 Serie di numeri reali.

Sia $\{a_k\}_k$ una successione di numeri reali. Si costruisce la successione delle sue somme parziali: $s_1 = a_1, \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n$. Brevemente $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Quando si introduce una serie occorre specificare quale sia il primo addendo delle somme parziali.

Definizione. La coppia $(\{a_k\}_k, \{s_n\}_n)$ è detta serie associata alla successione $\{a_k\}_k$. Più brevemente, è consuetudine chiamare serie (associata a $\{a_k\}_k$) il simbolo $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Tuttavia, non c'è un modo di dare senso alla somma infinita con l'algebra dei numeri reali. La teoria delle serie numeriche non è diversa da quella delle successioni. Tuttavia, la si tende a nascondere sotto notazioni apparentemente complicate e ciò crea dei forti dubbi. In realtà, le serie sono successioni associate ad altre successioni.

Osservazione. La variabile k è muta, e si potrebbe scrivere $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{l=1}^{+\infty} a_l$, ecc.

Osservazione. Data una successione $\{s_n\}_n$, esiste sempre una successione $\{a_k\}_k$ della quale $\{s_n\}_n$ è la serie: si può infatti definire $a_k = s_k - s_{k-1}$ per $k \geq 2$ e $a_1 = s_1$. Per questo motivo non esiste una differenza concettuale fra successioni e serie: sono modi diversi di parlare dello stesso ente matematico.

Definizione. Dicasi che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è convergente se esiste finito il $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. La serie converge se esiste finito il limite della successione delle somme parziali. In altre parole, deve esistere finito il $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + \cdots + a_n) = s$. In tal caso, s è detto “somma della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ”. In questo modo si recupera il senso della somma infinita, cioè passando al limite.

Con linguaggio analogo a quello usato per le successioni, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è:

- Divergente, se $\{s_n\}_n$ diverge a $\pm\infty$.
- Oscillante o indeterminata, se $\{s_n\}_n$ non possiede limite, né finito né infinito.

Esempio.

- Sia $q \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ è chiamata “serie geometrica di ragione q ”. (Cambiando da quale indice si parte, non si cambia l’esistenza del limite per la somma finita). Si è già visto (per induzione) che $s_n = q^0 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$. Quando $q = 1$ la serie diverge. Pertanto, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ è convergente se e solo se $|q| < 1$.
- Una serie del tipo $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k-1})$, essendo $\{b_k\}_k$ una successione assegnata, si chiama “serie telescopica”. Ove

$$s_n = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) = (\cancel{b_1} - b_0) + (b_2 - \cancel{b_1}) + \cdots + (b_n + \cancel{b_{n-1}}) = b_n - b_0$$

Ne si deduce che $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k-1})$ è convergente se e solo se esiste finito il $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$. In tal caso, la somma della serie è $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k - b_0$.

Si dice “studiare il carattere di una serie” per indicare le condizioni di divergenza, convergenza e indeterminatezza di una serie.

◇ Ad esempio:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{k+1}}_{b_k} - \underbrace{\frac{1}{k}}_{b_{k-1}} \right)$$

Poiché $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0$, la serie di Mengoli converge a $-(0-1) = 1$. In simboli $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Sebbene lo studio della convergenza di una serie sia un “semplice” studio della convergenza di una successione, l’ostacolo principale è costituito dalla mancanza di una formula chiusa per esprimere — in generale — i termini delle somme parziali. Insomma: bisogna analizzare il comportamento al limite di una successione senza avere una formula per esprimere tale successione!

In questo senso si può dire che la teoria delle serie numeriche si identifica con la ricerca di “criteri di convergenza”: teoremi che permettano di dedurre la convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sulla base di proprietà della successione $\{a_k\}_k$.

8.1 Serie a termini positivi.

Le serie numeriche, senza ulteriori ipotesi, presentano le stesse caratteristiche di una successione a numeri reali. Se si aggiunge la condizione che ogni addendo sia non negativo allora le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ per cui ogni $a_k \geq 0$ sono dette serie a termini positivi (le seguenti proprietà valgono anche se la serie è a termini positivi definitivamente, quindi la scelta dell'indice iniziale non influisce sul carattere della serie). Inoltre, non c'è alcuna differenza concettuale tra la positività o negatività degli addendi.

Proposizione. Una serie a termini positivi è convergente o divergente a $+\infty$. Si esclude che la serie sia oscillante.

Dimostrazione. Poiché $s_n = a_1 + \dots + a_n \geq a_1 + \dots + a_{n-1} = s_{n-1}$ (essendo $a_n \geq 0$), si conclude che la successione $\{s_n\}_n$ è una successione monotona crescente. È ben noto che esiste, finito o infinito, il limite di s_n per $n \rightarrow +\infty$. Quindi la serie $\sum_k a_k$ è convergente oppure divergente a $+\infty$.

L'ipotesi sul segno degli addendi semplifica l'analisi della convergenza della serie. Se la serie alle somme parziali è limitata allora la serie converge, altrimenti diverge.

Teorema. Del confronto. Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi. Si supponga che $a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sotto queste ipotesi:

- Se $\sum_k b_k$ converge allora converge anche $\sum_k a_k$.
- Se $\sum_k a_k$ diverge allora diverge anche $\sum_k b_k$.

Dimostrazione. Siano $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Per ipotesi, $s_n \leq t_n$ per ogni n . Se $\{t_n\}_n$ converge ad un limite finito allora si vede che $\{s_n\}_n$ è limitata dall'alto, e pertanto converge ad un limite finito. Se invece $s_n \rightarrow +\infty$, anche $t_n \rightarrow +\infty$.

Un corollario particolarmente utile è il seguente criterio del confronto asintotico.

Corollario. Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi. Se $a_k \sim b_k$ per $k \rightarrow +\infty$ (cioè $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$), allora le due serie hanno lo stesso carattere (cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti).

Dimostrazione. Per ipotesi, sia $\varepsilon = \frac{1}{2}$, quindi per ogni $k > \nu$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \frac{a_k}{b_k} \right| < \frac{1}{2} \iff |a_k - b_k| < \frac{1}{2}|b_k| \iff -\frac{1}{2}b_k < a_k - b_k < \frac{1}{2}b_k \iff \frac{1}{2}b_k < a_k < \frac{3}{2}b_k$$

La tesi segue immediatamente dal teorema del confronto.

Osservazione. Il teorema del confronto è utile quando esistono “termini” di paragone conosciuti. Solo a quel punto si può confrontare una serie con un'altra. Il vero termine di paragone è la serie geometrica. Talvolta pure la serie di Mengoli.

Teorema. Cauchy per le serie. Si ricorda che le successioni di Cauchy sono tutte e sole quelle successioni a numeri reali convergenti ad un limite finito.

Una serie $\sum_k a_k$ (di segno qualunque, quindi non basata sulla monotonia) è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \nu$ e ogni $p \in \mathbb{N}$, risulta

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Dimostrazione. È la condizione necessaria e sufficiente di Cauchy applicata alla successione delle somme parziali di $\sum_k a_k$. Cioè se $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ si ha $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

Corollario. Condizione necessaria per la convergenza. Se la serie $\sum_k a_k$ è convergente, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per il criterio di Cauchy con $p = 1$, deve essere $\left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon$, cioè $|a_{n+1}| < \varepsilon$, per ogni $n > \nu$. Quindi $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esempio. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k+1}$ è divergente, dal momento che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$.

Il precedente corollario non può essere rovesciato: se $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$, nulla si può dire sulla convergenza di $\sum_k a_k$.

Esempio. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ è divergente. Infatti

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \overbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ volte}} = \frac{1}{2}$$

Dunque

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right) \\ s_8 &= s_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right) \\ s_{16} &= s_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

e per induzione $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{8}$. La successione delle somme parziali non è limitata, e dunque $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ prende il nome di “serie armonica”.

Teorema. Criterio della radice. Cauchy. Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi. Se esistono un numero $\beta \in (0, 1)$ ed un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq \nu$ si abbia $\sqrt[k]{a_k} \leq \beta$, allora la serie $\sum_k a_k$ è convergente.

Dimostrazione. Per ogni $k \geq \nu$ si ha $a_k \leq \beta^k$. Poiché la serie geometrica $\sum_k \beta^k$ è convergente, anche $\sum_k a_k$ è convergente.

Teorema. Criterio del rapporto. d'Alembert. Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi. Se esistono $\beta \in (0, 1)$ ed un intero ν tale che per ogni $k \geq \nu$ si abbia $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \beta$, allora la serie $\sum_k a_k$ è convergente.

Dimostrazione. Per $k \geq \nu$ si ha

$$a_k \leq \beta a_{k-1} \leq \beta^2 a_{k-2} \leq \cdots \leq \beta^{k-\nu} a_\nu.$$

La serie $a_\nu \sum_{k=\nu}^{+\infty} \beta^{k-\nu}$ è convergente (perché serie geometrica), e dunque anche $\sum_k a_k$ è convergente.

Osservazione. Questi due criteri, molto popolari, funzionano per confronto con serie geometriche. Da questo punto di vista, si tratta di criteri di convergenza piuttosto “deboli”.

Corollario. Se $\sum_k a_k$ è una serie a termini positivi tali che $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, allora $\sum_k a_k$ è convergente. Se invece $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$ allora la serie $\sum_k a_k$ è divergente.

Dimostrazione. Si ponga $L = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Si supponga $L < 1$. Allora $L + \frac{1-L}{2} = \frac{L+1}{2}$ è un maggiorante definitivo della successione $\{\sqrt[k]{a_k}\}_k$ (perché L è il minimo dei maggioranti definitivi a cui si aggiunge una quantità positiva). Quindi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_k \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^k$ per ogni $k \geq \nu$. Siccome $\frac{L+1}{2} < 1$, la tesi segue dal criterio della radice.

Si supponga infine $L > 1$. Devono esistere infiniti indici k tali che $\sqrt[k]{a_k} > 1$ (altrimenti 1 sarebbe maggiorante definitivo, cosa che va contro l'ipotesi, inoltre $a_k > 1^k = 1$), e dunque la successione $\{a_k\}_k$ non converge a zero. Quindi la serie $\sum_k a_k$ è divergente.

Osservazione. Un corollario analogo può essere dimostrato sostituendo a $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k}$ il $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Osservazione. Se $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ allora $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, ma non vale il viceversa.

Esempio. Si studi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

La serie converge per il criterio del rapporto. In effetti $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$, lo si vede in seguito.

Si è dimostrato che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ è convergente. Si stabilisce l'importante uguaglianza

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Si ricorda che, posto $T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, risulta $T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$. Si è dimostrato in precedenza che $\{T_n\}_n$ è una successione crescente, e che

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} < \frac{1}{k!}$$

In modo che $T_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \implies e = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Si osserva che, se $n > m$ allora

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^m \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$, risulta che per ogni $k = 0, 1, 2, \dots, m$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1$$

In conclusione, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta $\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq e$. Per definizione di serie, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq e$, e pertanto $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Proposizione. Criterio di condensazione. (Cauchy). Sia $\{a_k\}_k$ una successione positiva e decrescente. Le due serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

Dimostrazione. Si ha, per le ipotesi,

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_1 \\ a_2 + a_3 &\leq 2a_2 \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leq 4a_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} a_1 &\geq \frac{1}{2}a_1 \\ a_2 &\geq \frac{1}{2}2a_2 \\ a_3 + a_4 &\geq \frac{1}{2}4a_4 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 &\geq \frac{1}{2}8a_8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si indica con s_n le somme parziali di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e con σ_n quelle di $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$, dalle relazioni precedenti risulta $s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n$ e $s_{2^n} \geq \frac{1}{2}\sigma_n$. Quindi $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ sono entrambe limitate o entrambe illimitate.

Esempio. Sia $p > 0$ un numero reale. La serie armonica generalizzata è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$. Se $p = 1$ si ottiene la serie armonica detta per antonomasia.

Si usa il criterio di condensazione. Sia $a_k = \frac{1}{k^p}$ allora $a_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ e $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^p} < \frac{1}{k^p} = a_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Pertanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k-kp} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-p)k}$$

Questa è una serie geometrica di ragione 2^{1-p} . Pertanto, converge se e solo se $2^{1-p} < 1 \iff 1-p < 0 \iff p > 1$. Quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ è convergente se e solo se $p > 1$. In particolare, si ritrova $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

8.2 Serie a termini di segno qualunque.

Premessa. Lo studio del carattere di una serie qualunque — senza ipotesi sul segno dei suoi addendi — può essere difficile e legato alla specificità del singolo caso. Non esistono criteri generali di convergenza.

Definizione. Sia $\sum_n a_n$ una serie di numeri reali. Si dice che essa converge assolutamente (o che è assolutamente convergente) se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente.

Osservazione. Per definizione di valore assoluto, la serie $\sum_n |a_n|$ ha termini positivi. Ad essa si applicano, dunque, tutte le considerazioni viste per quel tipo di serie numeriche.

Proposizione. Ogni serie assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. Si propongono due diverse dimostrazioni. Sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente.

- 1) Si definisce $b_n = \max\{a_n, 0\}$ e $c_n = \max\{-a_n, 0\}$ e si osserva che $a_n = b_n - c_n$. Per definizione, $0 \leq b_n \leq |a_n|, 0 \leq c_n \leq |a_n|$. Per confronto, la serie a termini positivi $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ sono convergenti. Quindi anche $\sum_n (b_n - c_n) = \sum_n a_n$ è convergente.
- 2) Per ipotesi, $\sum_n |a_n|$ converge, e dunque soddisfa il criterio di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intero ν_ε tale che

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

Per ogni $n > \nu_\varepsilon$ e ogni $p \in \mathbb{N}$. Usando la disuguaglianza triangolare,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

e pertanto anche $\sum_k a_k$ soddisfa il criterio di Cauchy. Come è noto, $\sum_k a_k$ è allora una serie convergente.

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è assolutamente convergente, poiché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

La prima serie è convergente assolutamente per confronto con la serie armonica generalizzata.

Schematicamente:

$$\boxed{\text{Assolutamente convergente} \implies \text{convergente}}$$

Ogni volta che un matematico legge una implicazione logica, la domanda più naturale è se valga anche l'implicazione opposta. Tuttavia, in genere non è il caso. Ci sono, però, dei controesempi, ma la parte difficile è dimostrare che una serie a segno variabile sia convergente, ma non assolutamente convergente. Per fornire un controesempio, si introduce una nuova classe di serie numeriche.

Definizione. Sia $\{a_k\}_k$ una successione di numeri positivi. La serie $\sum_k (-1)^k a_k$ si chiama serie a termini di segno alterno.

Osservazione. In modo apparentemente più generale, una serie $\sum_k b_k$ è a segno alterno se $b_{2k} \geq 0$, $b_{2k+1} \leq 0$, per ogni k (o viceversa). Tuttavia, è chiaro che

$$\sum_k b_k = \sum_k (-1)^k |b_k|$$

Così da ricondursi alla definizione precedente.

Osservazione. Il fatto che gli addendi di una serie siano un po' positivi e un po' negativi non è sufficiente per parlare di serie a segni alterni. Questo nome è riservato alle serie i cui addendi siano alternativamente di segni opposti.

Teorema. Leibniz. Si supponga che $\sum_k (-1)^k a_k$ sia una serie a segni alterni. Se

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$, addendi infinitesimi;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq \dots \geq 0$, addendi ordinati in modo decrescente;

allora $\sum_k (-1)^k a_k$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}_n$ la successione delle somme parziali di $\sum_k (-1)^k a_k$. Si mostra che la successione con indici pari è decrescente, mentre la successione con indici dispari è crescente. Per questo, dalla monotonia si può dedurre che tali due successioni sono convergenti, altresì convergenti allo stesso limite. Pertanto

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} \overbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}^{\leq 0} \leq s_{2n} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} \overbrace{+ a_{2n} - a_{2n+1}}^{\geq 0} \geq s_{2n-1} \\ s_{2n+1} &= s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \end{aligned}$$

Quindi $\{s_{2n}\}_n$ è decrescente, mentre $\{s_{2n+1}\}_n$ è crescente. Inoltre

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &\leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \cdots \leq s_2 = -a_1 + a_2 \\ s_{2n} &\geq s_{2n+1} \geq s_{2n-1} \geq \cdots \geq s_1 = -a_1 \end{aligned}$$

Perciò $\{s_{2n}\}_n$ è limitata dal basso da $-a_1$, mentre $\{s_{2n+1}\}_n$ è limitata dall'alto da $-a_1 + a_2$. Pertanto, per il teorema che afferma che le successioni monotone limitate hanno limite finito, si può allora concludere che esistono finiti

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} \quad \text{e} \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1}$$

Ora,

$$S - \sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = 0$$

per ipotesi, dunque $S = \sigma$. Questo dimostra che $\{s_n\}_n$ converge.

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (è la serie armonica a segni alterni, si ricorda che la serie armonica per antonomasia diverge). Posto infatti: $a_n = \frac{1}{n}$, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, e $\{a_n\}_n$ è decrescente. Il criterio di Leibniz garantisce allora la convergenza. Si nota che questa serie non converge assolutamente, dal momento che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente. Questo è un controesempio.

Riassumendo, la convergenza assoluta è una richiesta più forte della semplice convergenza di una serie numerica, e in generale non c'è equivalenza tra i due concetti di convergenza.

9 Calcolo differenziale.

La definizione di derivata come rapporto incrementale non è lungimirante né robusta perché non include i casi più generali come quelli che si incontrano nel corso di Analisi Matematica II: cioè le derivate direzionali individuate da vettori (contrapposte alle più familiari derivate che operano sugli assi cartesiani).

Definizione. Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} , sia $x \in I$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita in I . Si dice che f è derivabile nel punto x se esiste un numero reale A tale che $f(x+h) = f(x) + Ah + o(h)$ per $h \rightarrow 0$, dove $f(x) + Ah$ è la parte lineare e $o(h)$ è il resto.

Tale scrittura è la linearizzazione di f in x , cioè il concetto portante di ogni corso di Analisi; con le funzioni lineari si può fare tutto: calcolare i valori in un punto, sapere che sono definite globalmente, che hanno un nucleo ed un'immagine, conoscere l'iniettività, la suriettività, l'invertibilità, che si possono risolvere con vari algoritmi secondo schemi

generali; la linearizzazione è un modo per semplificare degli enti non lineari in tali, sperando che molto vicino ad un punto si comportino più o meno in modo lineare. Il resto descrive quanto la componente lineare approssima la funzione f della variabile h rispetto ad h stesso. Le funzioni derivabili sono quelle che si possono sviluppare in un termine lineare che dipende dal punto x e da un coefficiente A opportuno, e da un resto trascurabile rispetto all'incremento h . In questo caso il numero A è chiamato derivata di f nel punto x , ed è indicato con uno dei seguenti simboli: $f'(x)$, $Df(x)$, $df(x)$ (soprattutto usato dai geometri, ad esempio nello studio delle varietà), $\frac{df}{dx}$ (usato in fisica, ma la notazione ha qualche problematica dal punto di vista logico).

Teorema. Nelle stesse ipotesi della precedente definizione, sono equivalenti:

- I) La funzione f è derivabile in x ;
- II) esiste finito il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, il limite del rapporto incrementale;
- III) esiste una funzione ω , continua in zero, tale che $f(x+h) - f(x) = \omega(h)h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x+h \in I$ (definizione introdotta da Weierstrass, che mette in evidenza lo stesso concetto di linearizzazione e approssimazione locale).

Dimostrazione. $I \implies II$. Per ipotesi, esiste una funzione $\sigma = \sigma(h)$, definita in un intorno di $h = 0$, tale che $f(x+h) = f(x) + Ah + \sigma(h)h$, e $\sigma(h) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ ($o(h) \iff \sigma(h)h$ con $\sigma(h) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$). Per ogni $h \neq 0$, si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A + \sigma(h)$$

Pertanto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A$.

$II \implies III$. Si definisce, per ogni h tale che $x+h \in I$,

$$\omega(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & \text{se } h \neq 0 \\ A & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

Per l'ipotesi II, $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = A$, e dunque ω è continua in $h = 0$. Inoltre $f(x+h) - f(x) = \omega(h)h$ per ogni h tale che $x+h \in I$.

$III \implies I$. Poiché $\omega(h) \rightarrow \omega(0)$ per $h \rightarrow 0$, si può scrivere $\omega(h) = \omega(0) + o(1)$ per $h \rightarrow 0$. Quindi

$$f(x+h) - f(x) = [\omega(0) + o(1)]h = \omega(0)h + o(1)h = \omega(0)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Quindi f è derivabile in $x \in I$ e $f'(x) = \omega(0)$.

In virtù del teorema appena dimostrato, si può enunciare il seguente risultato.

Proposizione. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x \in I$ se e solo se esiste finito il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$: il valore di tale limite è la derivata di f in x .

Definizione. Una funzione f è derivabile in I se essa è derivabile in ogni punto $x \in I$.

Osservazione. Con il cambiamento di variabile $x + h = t$, la relazione di derivabilità diventa $f(t) = f(x) + A(t-x) + o(t-x)$ per $t \rightarrow x$. Si usa spesso questa forma equivalente, così come

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Esempio. Si sottointende il dominio di definizione di una funzione come un intervallo aperto.

- Ogni funzione costante è derivabile, e la sua derivata è ovunque identicamente nulla. Infatti, sia f costante in un intervallo aperto I , e sia $x \in I$. Poiché f è costante, per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x + h \in I$ (perché x è un punto interno, quindi ha un intervallo tutto incluso in I), si ha $f(x+h) = f(x)$ e dunque $f(x+h) = f(x) + 0h$, perciò $f'(x) = 0$. È vero anche il viceversa, se una funzione ha derivata nulla in ogni punto dell'intervallo, allora è costante (questa proposizione si dimostra usando il teorema dei valori intermedi).
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $p_n : x \mapsto x^n$ è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, e vale $p'_n(x) = nx^{n-1}$. È infatti sufficiente osservare che, per ogni $x, t \in \mathbb{R}$ si ha $t^n - x^n = (t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + \dots + tx^{n-2} + x^{n-1})$. Quando $t \rightarrow x$, $\frac{t^n - x^n}{t - x} \rightarrow x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}$. Vale per le potenze ad esponente intero, proprio perché vale la formula che permettere di espandere $t^n - x^n$. Tuttavia, si impara che la formula di derivazione delle potenze vale anche per qualsiasi esponente reale.
- Le funzioni seno e coseno sono derivabili in ogni punto, e risulta $D \sin x = \cos x$, $D \cos x = -\sin x$. Si dimostra la formula per il seno. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$ risulta $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$. Pertanto

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h$$

Quindi

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x$$

Ora, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} h = -\frac{1}{2} 0 = 0$, sicché $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$.

- La funzione esponenziale $\exp : x \mapsto e^x$ è derivabile in ogni punto, e si ha $De^x = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essa è la prima funzione non costante invariante rispetto alla derivata. Quando si risolvono le equazioni differenziali, le uniche due funzioni, a meno di opportuni fattori moltiplicativi costanti, hanno tale invarianza sono la funzione identicamente nulla e la funzione esponenziale. Infatti, $e^{x+h} = e^x e^h$, sicché $e^{x+h} - e^x = (e^h - 1)e^x$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = e^x$ in virtù del limite notevole per l'esponenziale.
- Usando il limite notevole per il logaritmo naturale, si mostra che la funzione $x \mapsto \ln x$ è derivabile in ogni $x > 0$, e risulta $D \ln x = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$.

Proposizione. Sia I intervallo aperto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in I$. Se f è derivabile in x , allora f è continua in x .

Dimostrazione. Per ipotesi, $f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + o(t - x)$. Quindi $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{t \rightarrow x} f(x) + f'(x)(t - x) + o(t - x) = f(x)$.

Tale risultato è una condizione necessaria per la derivabilità. Si può affermare che una funzione discontinua in un certo punto non può essere derivabile in tale punto. Tuttavia, ci si chiede se ogni funzione continua è necessariamente derivabile.

Esempio. La funzione $x \mapsto |x|$ non è derivabile nel punto $x = 0$. Infatti, per $t \neq 0$, $\frac{|t| - |0|}{t - 0} = \frac{|t|}{t}$. Quindi, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$, mentre $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{t} = -1$.

Proposizione. Siano f, g definite in un intervallo aperto I , e si supponga che siano derivabili in un punto $x \in I$. Allora anche le funzioni $f + g$, fg sono derivabili in x , e valgono le formule $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (la derivata è lineare), $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (la derivata non è moltiplicativa: rispetta il prodotto combinando prodotti simmetrici).

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono due funzioni σ e τ tali che $\sigma(h) \rightarrow 0$, $\tau(h) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, e inoltre $f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \sigma(h)h$, $g(x + h) = g(x) + g'(x)h + \tau(h)h$. Quindi

$$\begin{aligned} f(x + h) + g(x + h) &= f(x) + f'(x)h + \sigma(h)h + g(x) + g'(x)h + \tau(h)h \\ &= f(x) + g(x) + [f'(x) + g'(x)]h + [\sigma(h) + \tau(h)]h \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{h \rightarrow 0} [\sigma(h) + \tau(h)] = 0$, si conclude che $f + g$ è derivabile in x , e $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Si passa al prodotto.

$$\begin{aligned} f(x + h)g(x + h) &= [f(x) + f'(x)h + \sigma(h)h][g(x) + g'(x)h + \tau(h)h] \\ &= f(x)g(x) + f(x)g'(x)h + f(x)\tau(h)h + f'(x)g(x)h + f'(x)g'(x)h^2 \\ &\quad + f'(x)\tau(h)h^2 + \sigma(h)g(x)h + \sigma(h)g'(x)h^2 + \sigma(h)\tau(h)h^2 \\ &= f(x)g(x) + [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h + [f(x)\tau(h) + f'(x)g'(x)h \\ &\quad + f'(x)\tau(h)h + g(x)\sigma(h) + g'(x)\sigma(h)h + \sigma(h)\tau(h)h]h \end{aligned}$$

Per concludere è sufficiente osservare che tutti i termini nelle seconde parentesi quadre tendono a zero per $h \rightarrow 0$.

Osservazione. La formula $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ è conosciuta con il nome di formula di Leibniz.

Proposizione. Se f, g sono come nella proposizione precedente, e se g è diversa da zero nel punto x , allora $\frac{f}{g}$ è derivabile, e vale la formula

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Dimostrazione. Poiché g è continua in x , l'ipotesi $g(x) \neq 0$ implica (perché? per la continuità) che g sia diversa da zero in un intorno di x . Come sopra, per $h \neq 0$ abbastanza piccolo:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)g(x)}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

Si passa alle regole per le operazioni funzionali: composizione e inversione. La derivata ha regole ben generali, tantoché si può calcolare la derivata di ogni funzione. D'altra parte, l'integrale non ha regole generali e, pertanto, il suo studio è percepito come più difficile.

Teorema. Chain Rule. Siano I e J due intervalli aperti, $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in I$; si supponga che f sia derivabile in x e che g sia derivabile in $f(x)$. Allora la funzione $h = g \circ f$ è derivabile in x , e risulta $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Dimostrazione. Per $t \in I$, $y \in J$, si può scrivere $f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \sigma(t)(t - x)$, $g(y) = g(f(x)) + g'(f(x))(y - f(x)) + \tau(y)(y - f(x))$, dove $\sigma(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow x$ e $\tau(y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow f(x)$. Quindi

$$\begin{aligned}h(t) &= g(f(t)) = g(f(x)) + g'(f(x))(f(t) - f(x)) + \tau(f(t))(f(t) - f(x)) \\ &= h(x) + g'(f(x))[f'(x)(t - x) + \sigma(t)(t - x)] + \tau(f(t))(f'(x)(t - x) + \sigma(t)(t - x)) \\ &= h(x) + g'(f(x))f'(x)(t - x) + \sigma(t)[g'(f(x))(t - x) + \tau(f(t))(t - x)] \\ &\quad + f'(x)\tau(f(t))(t - x)\end{aligned}$$

Ricordando che f è continua in x , si conclude che $h(t) = h(x) + g'(f(x))f'(x)(t - x) + o(t - x)$ per $t \rightarrow x$.

Teorema. Derivata della funzione inversa. Sia f una funzione continua e invertibile nell'intervallo (a, b) . Si supponga che f sia derivabile nel punto $x \in (a, b)$ e che risulti $f'(x) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$, e risulta $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Dimostrazione. Si sa già che f^{-1} è continua nel punto $y = f(x)$, essendo la funzione inversa di una funzione definita e invertibile in un intervallo. Si considera la funzione

$$v(t) = \begin{cases} \frac{t-x}{f(t)-f(x)} & \text{se } t \neq x \\ \frac{1}{f'(x)} & \text{se } t = x \end{cases}$$

La funzione v è continua nel punto x (perché facendo il limite per $t \rightarrow x$ si fa il limite del quoziente della prima equazione la quale è il reciproco del rapporto incrementale, quindi tende a $\frac{1}{f'(x)}$), e inoltre

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{z - y} = v(f^{-1}(z))$$

per ogni $z \neq y$. Passando a limite per $z \rightarrow y$ si ha

$$\lim_{z \rightarrow y} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{z - y} = \lim_{z \rightarrow y} v(f^{-1}(z)) = v(f^{-1}(y)) = v(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

Esempio.

- $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1, 1)$. Si ricorda che $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ sono le funzioni inverse di \sin e \cos ristrette rispettivamente a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $[0, \pi]$. Sia $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e sia $y = \sin x$. $D \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x}$. Poiché $\cos x > 0$, si ha $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, sicché $D \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, e questo vale per ogni $y \in (-1, 1)$. La verifica della formula per \arccos è analoga.
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $y \in (0, +\infty)$ e sia $x \in \mathbb{R}$, $y = e^x \iff x = \ln y$. $D \ln y = \frac{1}{D e^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$.

Poiché la derivata è un limite, ha senso distinguere il limite per eccesso e il limite per difetto.

Definizione. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se $x \in [a, b]$, allora si dice derivata destra il limite

$$\lim_{t \rightarrow x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'_+(x) = D^+ f(x)$$

Analogamente la derivata sinistra è il limite

$$\lim_{t \rightarrow x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} f'_-(x) = D^- f(x)$$

Si osserva che nel punto $x = a$ ha senso parlare solo della derivata destra, e nel punto $x = b$ solo della derivata sinistra. Inoltre, sia $x \in (a, b)$, allora f è derivabile in $x \iff f'_+(x) = f'_-(x) \in \mathbb{R}$.

9.1 Punti singolari.

Definizione. Una funzione, definita almeno in un intorno di un punto x , è detta singolare in x se essa è continua in x , ma non è derivabile in x .

Osservazione. La condizione di continuità esclude i casi “banali” in cui l’assenza della derivata è causata da una discontinuità.

In accordo con le definizioni date, la classificazione dei punti singolari è abbastanza semplice.

- I) Nel punto x , sia $f'_+(x)$ che $f'_-(x)$ sono finite ma diverse. Un punto x di questo tipo è un punto angoloso.
- II) Nel punto x , una delle derivate $+/-$ è finita e l'altra è infinita; oppure sono entrambe infinite ma di segno opposto. Si parla di cuspide (per gli analisti; per i geometri solo entrambe infinite sono cuspide, mentre una finita e l'altra infinita corrisponde al punto angoloso).
- III) Nel punto x , le due derivate $+/-$ sono entrambe infinite, con lo stesso segno. Il punto x è detto punto a tangente verticale.
- IV) Nel punto x , almeno una delle derivate $+/-$ non esiste. Il punto x si chiama singolarità essenziale (la terminologia "essenziale" si ritrova anche nelle funzioni di variabile complessa).

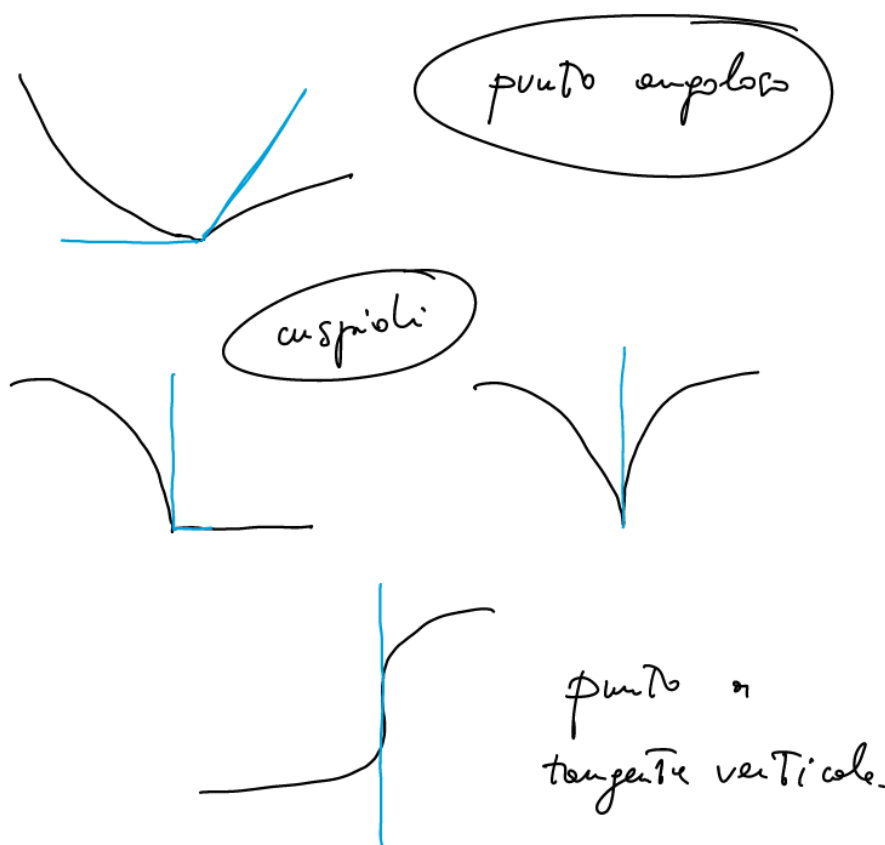


Figure 21: Punti singolari.

Definizione. Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto I . La funzione derivata è la funzione $f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$.

Definizione. Se f è derivabile in un intervallo aperto I , si dice che f è derivabile due volte in $x \in I$ se f' è derivabile in x . La derivata di f' in x è allora chiamata derivata seconda di f in x , e denotata con uno dei simboli $f''(x)$, $D^2f(x)$. In modo analogo si

definiscono le derivate terza, quarta, ecc. In generale la derivata n -esima di f in x è denotata con uno dei simboli $f^{(n)}(x)$, $D^n f(x)$.

Esempio.

- Si definisce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Per ogni $x \neq 0$, i teoremi precedenti permettono di affermare che

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

Nel punto $x = 0$ si usa direttamente la definizione

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sin t$$

Questo limite non esiste, e dunque la funzione non è derivabile in $x = 0$.

- Si definisce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Come sopra, se $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Per $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{t}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{t} = 0 \quad \left(0 \leq \left| t \sin \frac{1}{t} \right| \leq |t| \cdot 1 = |t| \right) \end{aligned}$$

In conclusione

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È interessante osservare che non si è potuto calcolare $f'(0)$ come $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$: infatti $\lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ non esiste (questo metodo funziona a volte, sotto certe ipotesi).

Definizione. Se f è continua in un insieme A , si scrive brevemente $f \in C(A)$. Se f è derivabile in un insieme A , e se f' è continua in A , si scrive $f \in C^1(A)$ (“ f è C^1 in A ” oppure “ f è di classe C^1 in A ”). Più in generale, $f \in C^k(A)$, con $k \in \mathbb{N}$, se esistono in A le derivate $f', f'', \dots, f^{(k-1)}$, e se $f^{(k)}$ è continua in A . A parole: $f \in C^k(A)$ se f e tutte le sue derivate fino all'ordine k sono funzioni continue in A . Queste sono le classi di regolarità delle funzioni.

Si ricorda la seguente definizione.

Definizione. Sia f una funzione a valori reali definita in un insieme A . Un punto $x_0 \in A$ è un massimo (minimo) relativo di f , se esiste un intorno $I(x_0, \delta)$, con $\delta > 0$, tale che per ogni $x \in I(x_0, \delta) \cap A$ si abbia $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Teorema. Fermat. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$ un punto di massimo o di minimo relativo di f . Se x_0 è un punto interno ad A e se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Senza perdere generalità, si supponga che x_0 sia un punto di minimo interno ad A . Per definizione esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I(x_0, \delta) \cap A$, si abbia $f(x_0) \leq f(x)$. In particolare, se $x \in I(x_0, \delta) \cap A$ e $x > x_0$, risulta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \geq 0$. Analogamente, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \leq 0$. Ma per ipotesi f è derivabile in x_0 , sicché $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, e si conclude che $f'(x_0)$ è sia ≥ 0 che ≤ 0 . L'unica possibilità è che $f'(x_0) = 0$.

La situazione in cui x_0 è massimo è analoga: basta cambiare il verso delle disuguaglianze.

Osservazione. Se il punto x_0 non è interno ad A allora la tesi è in generale falsa. Come controesempio, si consideri $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, e $x_0 = 0$. Il punto x_0 è un minimo relativo (anzi: assoluto), ma $f'_+(x_0) = 1 \neq 0$.

Teorema. Rolle. Sia g una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $g(b) = g(a)$ allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $g'(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass, g possiede massimo e minimo assoluti in $[a, b]$. Se questi punti di massimo e minimo cadono entrambi negli estremi, allora g è costante in $[a, b]$. La tesi è allora ovvia, poiché qualsiasi $\xi \in (a, b)$ soddisfa $g'(\xi) = 0$. Se invece almeno uno dei punti di massimo e minimo di g cade in (a, b) , per Fermat risulta $g' = 0$ in tale punto. La tesi è così dimostrata in ogni caso.

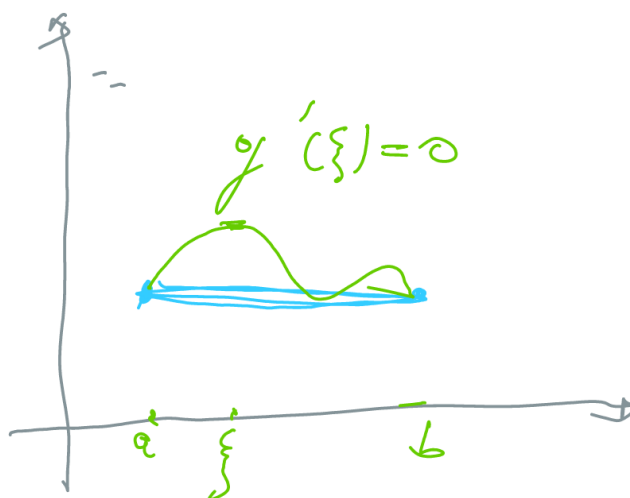


Figure 22: Teorema di Rolle.

Definizione. I punti dove una funzione derivabile ha derivata nulla si dicono punti critici o stazionari. La teoria dei punti critici è una teoria molto avanzata. I punti critici si ritrovano anche nel corso di Meccanica Classica: infatti i punti critici sono le equazioni del moto.

Teorema. Cauchy. Del valor medio. Se f, g sono due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$[g(b) - g(a)]f'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi)$$

Talvolta la tesi è scritta come $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, tuttavia questa formulazione richiede un'ipotesi ulteriore: i denominatori non devono annullarsi.

Dimostrazione. Si definisce, per ogni $x \in [a, b]$,

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$$

La funzione h è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) , e risulta $h(a) = h(b)$. Per Rolle, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $h'(\xi) = 0$, cioè

$$[g(b) - g(a)]f'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi)$$

Corollario. Lagrange. Teorema del valor medio (per antonomasia). Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Dimostrazione. Basta considerare la funzione $g : x \mapsto x$ nel teorema di Cauchy.

Questo risultato è alla base di una vasta moltitudine di strumenti differenziali: il teorema di De L'Hôpital, il polinomio di Taylor e Maclaurin, il calcolo integrale.

9.2 Derivata e monotonia.

Proposizione. Sia f una funzione derivabile in (a, b) .

- 1. La funzione f è costante in (a, b) se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
- 2. La funzione f è crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Dimostrazione.

- 1. Si sa che f costante implica $f' = 0$ in ogni punto. Viceversa, se $f' = 0$ in (a, b) , allora si possono fissare due punti $x_1, x_2 \in (a, b)$ e si applica il teorema di Lagrange: $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$ per ipotesi. Poiché x_1 e x_2 sono due punti arbitrari di (a, b) , f è costante in (a, b) .
- 2. Se f è crescente, per ogni $x, x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$, si ha $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Quindi $0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Viceversa, se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, si fissano due punti qualsiasi $x_1 < x_2$ di (a, b) e si applica il teorema di Lagrange: esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$, sicché $f(x_1) \leq f(x_2)$. Dunque f è crescente in (a, b) .

Osservazione. È falso, in generale, che una funzione strettamente crescente abbia derivata strettamente positiva. Un controesempio è $f(x) = x^3$ in $(-1, 1)$. Si ha infatti $f'(0) = 0$ sebbene f sia strettamente crescente. Tuttavia, una derivata strettamente positiva implica che la funzione è strettamente crescente.

Osservazione. Il teorema di Rolle, e dunque tutti i teoremi che si basano su di esso, diventano in generale falsi se l'insieme di definizione non è un intervallo. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x - 2 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

ha derivata positiva in $A = (0, 1) \cup (2, 3)$, ma essa non è monotona crescente nell'insieme A .

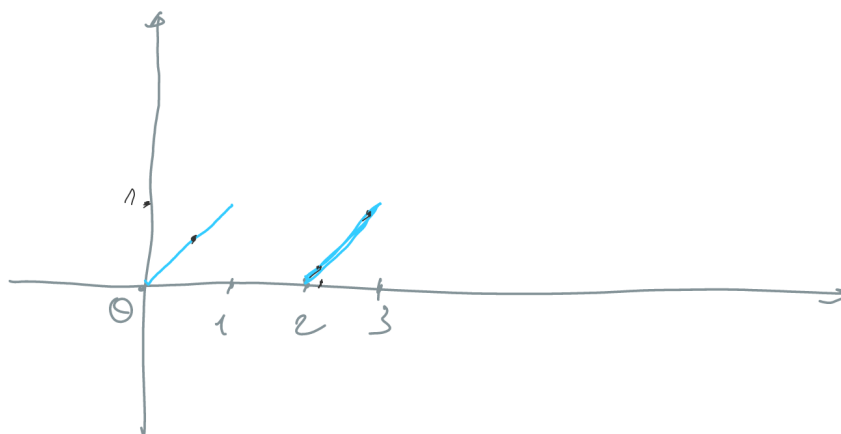


Figure 23: Controesempio al teorema di Rolle.

9.3 Criterio per la lipschitzianità.

Proposizione. Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . La derivata f' è limitata in (a, b) se e solo se f è lipschitziana.

Dimostrazione. Sia f' limitata. Per ipotesi, esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f'(\xi)| \leq M$ per ogni $\xi \in (a, b)$. Presi due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$, esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Perciò $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \leq M|x_2 - x_1|$. Quindi f è lipschitziana in $[a, b]$.

Viceversa, sia f lipschitziana. Allora sia $x \in (a, b)$ e sia h tale per cui $x+h \in (a, b)$. Allora risulta $|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|$ da cui $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M$. Visto che f è derivabile in ogni punto di (a, b) allora $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = |f'(x)| \leq M$.

9.4 De L'Hôpital

Il teorema, o talvolta la regola, di De L'Hospital (così si firmava il Marchese, ma oggi è più diffusa la variante De L'Hôpital), è uno degli strumenti più conosciuti e dibattuti dell'intera Analisi Matematica.

Teorema. Bernoulli-L'Hôpital. Siano f, g due funzioni derivabili in (a, b) e tali che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si supponga che $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow A$ per $x \rightarrow a^+$. Se

- 1. $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow a^+$, oppure
- 2. $g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow a^+$,

allora $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow A$ per $x \rightarrow a^+$.

Osservazione. Nell'enunciato $A \in \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Inoltre, l'enunciato è valido per $x \rightarrow b^-$, o se $g(x) \rightarrow -\infty$ in 2.

Dimostrazione. Si considera innanzitutto il caso $-\infty < A < +\infty$. Sia q un numero reale tale che $q > A$, e sia r un numero tale che $A < r < q$. Per ipotesi, esiste un numero $c \in (a, b)$ tale che $a < x < c$ implica $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$. Se $a < x < y < c$, allora il teorema di Cauchy implica l'esistenza di un punto $t \in (x, y)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \quad (\star)$$

Se vale l'ipotesi 1., passando al limite per $x \rightarrow a^+$ si ottiene

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad \text{per ogni } a < y < c$$

Se vale invece l'ipotesi 2., si può scegliere un punto $c_1 \in (a, c)$ tale che $g(x) > g(y)$ e $g(x) > 0$ se $a < x < c_1$. Moltiplicando (\star) per $\frac{g(x) - g(y)}{g(x)} > 0$ si deduce quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad \text{per ogni } a < x < c_1$$

Poiché $g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow a^+$, esiste un punto $c_2 \in (a, c_1)$ tale che $a < x < c_2$ implica

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Si è così dimostrato che, per ogni $q > A$ esiste $c_2 \in \mathbb{R}$ tale che se $a < x < c_2$ allora $\frac{f(x)}{g(x)} < q$. Ragionando in modo analogo, si può dimostrare che, se $-\infty < A \leq +\infty$, scelto arbitrariamente $p < A$, esiste $c_3 \in \mathbb{R}$ tale che $a < x < c_3$ implica $\frac{f(x)}{g(x)} > p$. Queste due conclusioni dimostrano che $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow A$ per $x \rightarrow a^+$.

Esempio.

- 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$. Infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, e le ipotesi del teorema di De L'Hôpital sono soddisfatte.
- 2. Per ogni $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$. Infatti $x^\alpha \ln x = \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0$.

- 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Infatti, applicando ripetutamente De L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

- 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = 1$. Si scrive infatti $x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$, e si osserva che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} x \ln x = 1 \cdot 0 = 0.$$
 Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1.$$

Esercizio. Dedurre che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

Suggerimento. Dato $\alpha > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq \alpha < n + 1$. Procedere per confronto.

9.5 Funzioni convesse.

Lo studio delle funzioni convesse è utile nella teoria dell'ottimizzazione e nella teoria dei giochi per la migliore strategia.

Definizione. Sia I un intervallo (aperto, chiuso, limitato oppure illimitato), e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è una funzione convessa in I se, per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e per ogni $x_1, x_2 \in I$, risulta $f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1)$ (disuguaglianza di convessità). Si dice che f è concava in I se $-f$ è convessa in I .

Osservazione. Fissati $x_1, x_2 \in I$, al variare del parametro $\lambda \in [0, 1]$ il punto $\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$ descrive il segmento di estremi x_1 e x_2 . Chiedere che f sia convessa in I è allora equivalente alla seguente condizione geometrica: scelti arbitrariamente due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sul grafico di f , la "curva" $y = f(x)$ giace al di sotto della retta che congiunge $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$.

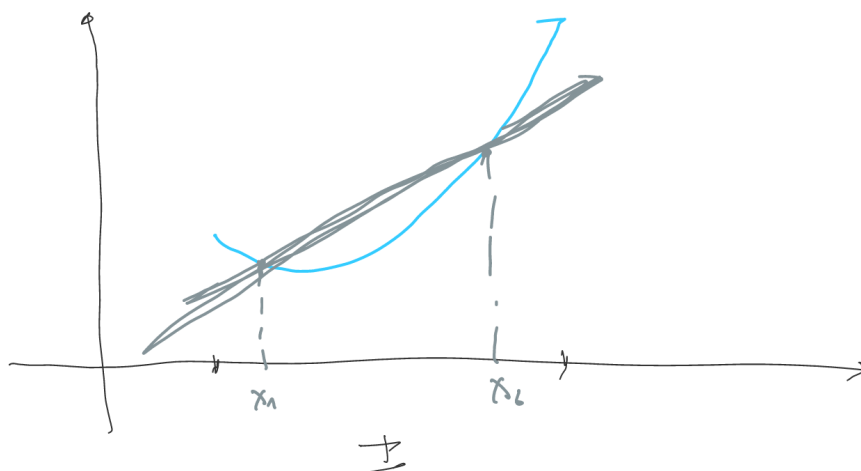


Figure 24: Funzione convessa.

Per lavorare più comodamente con le funzioni convesse è opportuno riscrivere la condizione di convessità in un altro modo.

Siano $x_1, x_2 \in I$, e sia x un punto qualsiasi compreso tra x_1 e x_2 . Si pone $x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$ cioè è combinazione convessa di x_1, x_2 , e si riscrive

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

Quindi f è convessa se e solo se per ogni $x \in (x_1, x_2)$ si ha

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Si supponga $x_2 > x_1$ e si deduce dalla precedente

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

Si scrive ora $x_2 - x = x_2 - x_1 - (x - x_1)$:

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x_1)f(x_1) - (x - x_1)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

Cioè

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Scrivendo invece $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$ si ottiene

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Si è così dimostrato il seguente teorema.

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione reale f sia convessa è che il rapporto incrementale preso a partire da un qualunque punto x_0 , cioè la funzione $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ($x \neq x_0$) sia monotona crescente.

Ricordando ora l'esistenza dei limiti per le funzioni monotone, si può dedurre un'importante proprietà di regolarità delle funzioni convesse.

Teorema. Una funzione convessa definita in un intervallo I possiede in ogni punto x_0 interno ad I la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$, ed esse sono finite. Inoltre, $f'_+(x_0) \geq f'_-(x_0)$.

Corollario. Ogni funzione convessa definita in un intervallo I è continua in tutti i punti interni di I .

9.6 Criteri di convessità.

Il calcolo differenziale aiuta, attraverso il “solito” teorema di Lagrange, ad esprimere anche la convessità attraverso le proprietà delle derivate della funzione.

Teorema. Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in $[a, b]$ è che f' sia una funzione monotona crescente.

Dimostrazione. Si supponga che f sia convessa in I . Si è visto sopra che, presi $x_1 < x < x_2$, risulta

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Per $x \rightarrow x_1$, si ottiene

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Per $x_2 \rightarrow x_1$ si ottiene infine

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

cioè la monotonia di f' . Viceversa, si supponga che $x \mapsto f'(x)$ sia crescente in $[a, b]$. Presi tre punti $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$, esistono ξ_1 e ξ_2 tali che $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ e

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

Poiché $\xi_1 < \xi_2$, si ha $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ cioè

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Come visto, questo significa che f è convessa in $[a, b]$.

A questo punto, ricordando il legame dimostrato tra monotonia e segno della derivata, si può enunciare il seguente criterio della derivata seconda.

Teorema. Sia f una funzione due volte derivabile nell'intervallo $[a, b]$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in $[a, b]$ è che $f''(x) \geq 0$ per ogni punto x .

Esempio.

- 1. $x \mapsto e^x$ è convessa in \mathbb{R} , poiché la derivata seconda $x \mapsto e^x$ è sempre positiva.
- 2. La funzione $x \mapsto \ln x$ è concava in $(0, +\infty)$, poiché la derivata seconda $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ è sempre negativa.
- 3. La funzione $x \mapsto x^3$ è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$, poiché la sua derivata seconda $x \mapsto 6x$ è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.

Definizione. Sia I un intervallo, e sia f una funzione definita e derivabile in I . Un punto $x_0 \in I$ è un punto di flesso della funzione f se x_0 è estremo comune di due intervalli in uno dei quali f è convessa e nell'altro concava.

Si conclude con una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di flesso. Alla luce delle caratterizzazioni viste, questo risultato è analogo al teorema di Fermat per i punti estremanti.

Proposizione. Sia f una funzione derivabile in (a, b) , e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di flesso. Se f è derivabile due volte in x_0 , allora $f''(x_0) = 0$. Tuttavia, gli zeri della derivata seconda, non sono necessariamente flessi: con $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$ si ha $f''(0) = 0$, ma x_0 è minimo assoluto.

9.7 Approssimazione locale con polinomi.

L'approssimazione globale si fa in media, ma il polinomio interpolatore può non approssimare localmente punto per punto. L'approssimazione locale cerca di descrivere quanto più possibile le proprietà differenziali locali delle funzioni.

Definizione. Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, e sia x_0 un punto di (a, b) . Se esistono le derivate $f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$, si definisce il polinomio di Taylor:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x; x_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

Il resto è $T_n(x; x_0) = f(x) - P_{n-1}(x; x_0)$. Approssimare bene la funzione f nell'intorno di x_0 significa prendere il resto T_n più piccolo possibile.

Osservazione. Il polinomio di grado zero è $P_0(x; x_0) = f(x_0)$. La retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ è $P_1(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Si dimostra che il polinomio di Taylor è uno strumento di approssimazione locale di f in un intorno del punto x_0 .

Teorema. Si supponga valgano le ipotesi della definizione precedente.

- (I) **Resto di Peano.** Se esiste $f^{(n)}(x_0)$, allora

$$T_n(x; x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o(|x - x_0|^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

- (II) **Resto di Lagrange.** Si supponga che le derivate di f , fino all'ordine $n - 1$, esistano e siano continue in (a, b) , e che la derivata di ordine n esista in (a, b) . Allora esiste un punto $\theta \in (a, b)$ tale che

$$T_n(x; x_0) = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!} (x - x_0)^n$$

Osservazione. La formula con resto di Peano formalizza il fatto che $P_{n-1}(x; x_0)$ rappresenta una approssimazione locale della funzione f in un intorno di x_0 , e che l'errore di approssimazione ha ordine di grandezza superiore a $|x - x_0|^n$ quando $x \rightarrow x_0$.

Dimostrazione. (I). Si dimostra per induzione che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0 \quad (\star)$$

La relazione (\star) è senz'altro vera per $n = 1$, ricordando la definizione di derivata come linearizzazione di f in x_0 .

Si supponga che (\star) sia vera per $n - 1 \in \mathbb{N}$, e si deduce che è vera anche per n . Il limite

in (\star) è una forma $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si usa il teorema di De L'Hôpital per concludere che (\star) è vera non appena

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - \dots - f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

Per l'ipotesi induttiva (applicata alla funzione f'), quest'ultima relazione è vera, e ne si deduce dunque che (\star) è vera per n . Il principio di induzione consente di affermare che (I) è soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione di (II) è più articolata. Si introducono le funzioni ausiliarie $T_n(x; x_0) = F(x) - P_{n-1}(x; x_0)$ e $G(x) = (x - x_0)^n$. Si osserva che $G^{(k)}(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Inoltre

$$\begin{aligned} F(x_0) &= F'(x_0) = F''(x_0) = \dots = F^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ G(x_0) &= G'(x_0) = G''(x_0) = \dots = G^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ G^{(n)}(x_0) &= n! \end{aligned}$$

Si applica ripetutamente il teorema del valor medio di Cauchy:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1) - F'(x_0)}{G'(x_1) - G'(x_0)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \dots = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)}$$

per opportuni punti $a < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < b$. L'uguaglianza $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)}$ coincide con $\frac{T_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$ e questo conclude la dimostrazione per $\theta = x_n \in (a, b)$.

Osservazione. La scelta del punto-base x_0 è in realtà apparente. È sempre possibile ricondursi al caso $x_0 = 0$ (e si parla del polinomio di MacLaurin) considerando $f(x - x_0)$ invece di $f(x)$.

Esempio. In virtù della precedente osservazione, si consideri $x_0 = 0$.

- $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$
- $\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$

Osservazione. La formula di Taylor con il resto di Peano è molto utile nel calcolo di limiti (questo perché si dimostra con De L'Hôpital). Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + o(x) = \frac{1}{6}$$

Applicare Taylor o De L'Hôpital è equivalente. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Importante. È meglio non sostituire il resto di Peano con qualsiasi puntini di sospensione, scrivendo

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x^3} = \frac{1}{6} + \dots$$

poiché non è affatto chiaro quale ordine di grandezza si nasconda dietro i puntini. Nelle situazioni più intricate, alcuni termini dei “puntini” potrebbero elidersi con altri termini, conducendo a spiacevoli errori. Scrivendo invece i corretti resti nella forma di Peano si è al riparo da tali inconvenienti.

Il teorema di Taylor mostra come le derivate successive alla prima descrivano in modo sempre più accurato l'andamento di una funzione nell'intorno di un punto fissato x_0 .

Applicazione. Si supponga che f sia derivabile in un intervallo (aperto) I , e che $x_0 \in I$ sia un punto critico ($f'(x_0) = 0$) di f . Per analizzare la natura di x_0 è pratica comune studiare il segno di f' in I . Si vede che l'analisi del punto x_0 può essere condotta per mezzo del polinomio di Taylor. Se f è derivabile due volte, esiste $\theta \in I$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\theta)}{2}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\theta)}{2}(x - x_0)^2$$

Se f'' è continua in x_0 allora per il teorema di permanenza del segno, in un piccolo intorno di x_0 il segno di $f''(\theta)$ coincide con il segno di $f''(x_0)$. Quindi

$$\begin{aligned} f''(x_0) > 0 &\implies f(x) \geq f(x_0) \\ f''(x_0) < 0 &\implies f(x) \leq f(x_0) \end{aligned}$$

in un intorno del punto x_0 . Nel primo caso, x_0 è un minimo locale, nel secondo è un massimo locale. Se $f''(x_0) = 0$, la permanenza del segno non si può più applicare, quindi lo studio della derivata seconda è inconclusivo. Infatti, se $f(x) = x^3$ e $x_0 = 0$ si ha che x_0 è un flesso; mentre se $f(x) = x^4$ e $x_0 = 0$ si ha che x_0 è minimo assoluto. Questi due esempi dimostrano che nell'ipotesi $f''(x_0) = 0$ non si può concludere nulla, e si deve “sviluppare” f fino ad un ordine maggiore:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}(x - x_0)^3 \end{aligned}$$

La funzione $f(x)$ e $f(x_0)$ cambiano ordinamento ($f(x) \geq f(x_0) \rightsquigarrow f(x_0) \geq f(x)$ o viceversa) quando x passa attraverso x_0 , pertanto x_0 è un punto di flesso. E così via.

10 Teoria dell'integrazione.

Uno dei progressi più significativi dell'Analisi Matematica è stata l'intuizione, dovuta a Bernhard Riemann, di separare il concetto di derivata. Fino ad allora i matematici si erano ostinati a pensare in termini di "operazione inversa della derivata", ossia in termini di "primitive".

Nella tradizione pedagogica della scuola, questo approccio classico è ancora prevalente: i liceali credono che il vero integrale sia quello indefinito. Tuttavia, la dimostrazione che certe classi di funzioni possiedono primitive è difficile e richiede strumenti più avanzati di quelli fino ad ora posseduti.

Nella matematica moderna, invece, le teorie dell'integrazione si occupano di definire un concetto di integrale definito.

Esistono molteplici teorie dell'integrazione:

- Riemann (nelle varianti di Cauchy, valida solo per le funzioni continue, e Darboux);
- Lebesgue (partendo dalla Teoria della Misura, oppure in senso opposto, secondo Daniell);
- Integrali di Gauge (Kurzweil, Henstock, ecc) che generalizzano la definizione di Riemann.

La teoria di Lebesgue, che si studia nei corsi più avanzati, è ormai uno strumento essenziale per ogni matematico (e fisico teorico). Per le funzioni ad una sola variabile, gli integrali di Riemann e Lebesgue non differiscono di tanto. In due o più variabili, la teoria di Riemann è più macchinosa della teoria di Lebesgue. L'integrale di Lebesgue interessa i fisici perché la più grande debolezza dell'integrale di Riemann è integrare funzioni su insiemi illimitati.

L'interesse dell'integrale di Riemann non è però solo storico, poiché esso collega la teoria dell'integrazione definita con quella della derivata.

In questa sezione, si considerano le funzioni limitate f su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Questo perché la generalizzazione a situazioni più ampie non si riesce a trattare con la seguente costruzione. Bisogna definire un ente separato: l'integrale improprio generalizzato.

Definizione. Una partizione P di $[a, b]$ è un insieme finito di punti

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Per ogni sottointervallo $[x_{k-1}, x_k]$ di P , si pone

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad \text{e} \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

La somma inferiore di f rispetto a P è

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e la somma superiore di f rispetto a P è

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

Osservazione. Si ha $L(f, P) \leq U(f, P)$ poiché $m_k \leq M_k$.

Definizione. Una partizione Q di $[a, b]$ è un raffinamento di una partizione P se $P \subset Q$.

Lemma. Se Q è un raffinamento di P , allora

$$L(f, Q) \geq L(f, P) \quad \text{e} \quad U(f, Q) \leq U(f, P)$$

Dimostrazione. Si consideri il caso in cui Q contenga esattamente un punto in più di P , cioè $Q = P \cup \{z\}$, $z \notin P$. Per qualche $k = 1, 2, \dots, n$ si ha $x_{k-1} < z < x_k$. Sia $m'_k = \inf_{z \leq x \leq x_k} f(x)$ e $m''_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq z} f(x)$.

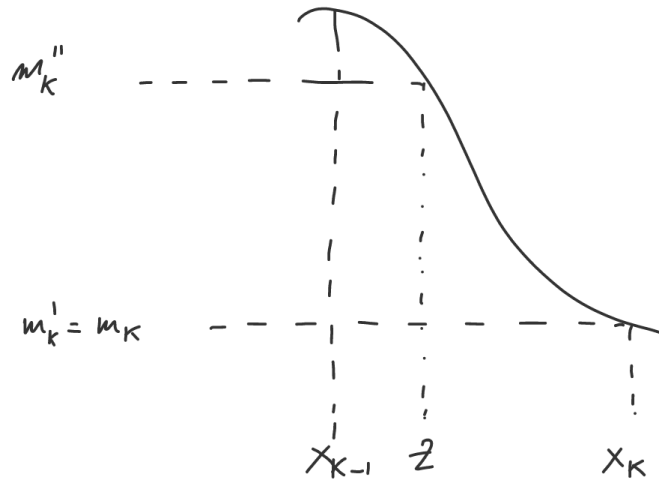


Figure 25: Estremi inferiori di due intervalli nel raffinamento.

Risulta

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - z) + m_k(z - x_{k-1}) \leq m'_k(x_k - z) + m''_k(z - x_{k-1})$$

Inoltre, si ha $m'_k, m''_k \geq m_k$. Quindi $L(f, Q) \geq L(f, P)$. In modo simile si dimostra che $U(f, Q) \leq U(f, P)$. Se Q è ottenuto aggiungendo a P due o più punti allora si può iterare il ragionamento precedente un numero finito di volte.

L'idea storica di Riemann era di far tendere all'infinito il numero di punti. Tuttavia, dal punto di vista logico c'è qualche difficoltà in quanto si è appena detto che le partizioni contengono un numero finito di punti. Quindi, bisogna passare attraverso il concetto di limite. La difficoltà dietro tale idea è dimostrare che tale limite esiste. Infatti, non è ovvio che il limite di tali somme esista. Cauchy ha dimostrato l'esistenza di tale limite nel caso delle funzioni continue, sebbene la dimostrazione non sia precisa e rigorosa. Quindi, l'idea di far tendere il numero di punti all'infinito è valida per le funzioni continue. Tuttavia, esse non sono l'unico tipo di funzione che si vuole integrare.

Lemma. Se P_1, P_2 sono due partizioni di $[a, b]$, allora $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$.

Dimostrazione. Sia $Q = P_1 \cup P_2$ il raffinamento comune di P_1 e P_2 . Per il lemma precedente si ha

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_2)$$

La definizione seguente si basa sull'assioma di Dedekind e quindi è profondamente legata alla struttura di \mathbb{R} .

Definizione. Sia \mathcal{P} la collezione di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$. Si definisce l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f esteso ad $[a, b]$ rispettivamente come

$$\begin{aligned} \int_a^b f \, dx &= \sup\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\} \\ \bar{\int}_a^b f \, dx &= \inf\{U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

Si dice che f è Riemann-integrabile in $[a, b]$ se

$$\int_a^b f \, dx = \bar{\int}_a^b f \, dx$$

ed in questo caso si scrive $\int_a^b f \, dx$ per indicare il comune valore dei due membri.

Osservazione. La notazione dell'integrale è ridondante, poiché il simbolo dx non ha alcun ruolo significativo. Per questo si scrive spesso $\int_a^b f$. Al contrario, è talvolta utile scrivere $\int_a^b f(x) \, dx$, oppure $\int_a^b f(t) \, dt$, oppure $\int_a^b f(s) \, ds$, ecc, in quanto la variabile di integrazione è muta e può essere sostituita da qualunque altra lettera.

La definizione è implicita in quanto è una condizione quasi impossibile da verificare perché si dovrebbe scegliere una partizione arbitraria, costruire la somma L relativa alla partizione, e poi tra tutte le infinite partizioni di $[a, b]$ scegliere qualcosa che massimizza la somma inferiore, per poi fare nuovamente in modo speculare i passaggi per la somma superiore e dimostrare che alla fine si ottiene lo stesso numero.

Teorema. Criterio fondamentale di integrabilità. Una funzione limitata f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P_ε di $[a, b]$ tale che $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Se esiste una siffatta partizione P_ε , risulta

$$0 \leq \bar{\int}_a^b f - \int_a^b f \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha $\bar{\int}_a^b f = \int_a^b f$ e f è allora integrabile. Si ricorda $\int_a^b f \, dx = \sup\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ e $\bar{\int}_a^b f \, dx = \inf\{U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$.

Viceversa, sia f integrabile. Per definizione, esiste una partizione P_1 di $[a, b]$ tale che

$$U(f, P_1) < \bar{\int}_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Similmente, esiste una partizione P_2 di $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_2)$$

Posto $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, e ricordando che $\int_a^b f = \bar{\int}_a^b f = \int_a^b f$, si ha

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq U(f, P_1) - L(f, P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Concludendo la dimostrazione.

Corollario. Una funzione limitata f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se esiste una successione $\{P_n\}_n$ di partizioni $[a, b]$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0$$

In questo caso, $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f, P_n)$. L'indice n non è il numero di divisioni uniformi dell'intervallo $[a, b]$. Tuttavia, si recupera l'integrale come limite, sebbene non sia il limite del numero di punti della partizione, ma il limite della successione delle partizioni. Per dimostrare il corollario, si segue la dimostrazione precedente e si sostituisce al posto di $\varepsilon > 0$ una successione $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Esempio. Sia $f(x) = x$ per ogni $x \in [0, 1]$. Dato $n \in \mathbb{N}$, si consideri la partizione P_n di $[0, 1]$ ottenuta dividendo $[0, 1]$ in n parti uguali:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

Poiché

$$\sup \left\{ x \mid \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} \right\} = \frac{k}{n}$$

$$\inf \left\{ x \mid \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} \right\} = \frac{k-1}{n}$$

Risulta

$$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad L(f, P_n) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

Ora,

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$$

Si deduce che f è integrabile in $[0, 1]$ e che

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Ci sono due famiglie ampie che risultano essere integrabili: le funzioni continue e le funzioni monotone e limitate. Il criterio fondamentale di integrabilità è molto utile — anche nella sua variante “per successioni” — da un punto di vista teorico. È però scarsamente maneggevole nei casi concreti.

Proposizione. Se f è continua in $[a, b]$ allora f è integrabile.

Per dimostrare tale proposizione è necessario l'uso della continuità uniforme. Infatti, i primi pionieri della matematica erano alieni a tale concetto e davano per scontata l'esistenza dell'integrale delle funzioni continue. Essi non si rendevano conto che la continuità punto per punto non è sufficiente per completare la dimostrazione dell'integrabilità.

Dimostrazione. Poiché $[a, b]$ è chiuso e limitato, esso è un insieme compatto. Quindi f è uniformemente continua in $[a, b]$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Sia P una partizione di $[a, b]$ tale che $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sia minore di δ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$. Per il teorema di Weierstrass, per ogni k esistono punti z_k e y_k in $[x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$\begin{aligned} M_k &= f(z_k) = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ m_k &= f(y_k) = \min\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \end{aligned}$$

Dunque

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=1}^n (f(z_k) - f(y_k)) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

Quindi f è integrabile in $[a, b]$.

Proposizione. Se f è monotona e limitata in $[a, b]$ allora f è integrabile.

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}$, la partizione P_n suddivide $[a, b]$ in n parti uguali mediante i "nodi" $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, con $k = 0, 1, \dots, n$. Senza perdere generalità, sia f crescente in $[a, b]$. Allora $M_k = f(x_k)$ e $m_k = f(x_{k-1})$. Pertanto,

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Per $n \rightarrow +\infty$, si ha $U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$ e quindi f è integrabile. La dimostrazione nel caso in cui f sia decrescente in $[a, b]$ è analoga.

Esempio. Una funzione non integrabile. Sia g la funzione di Dirichlet ristretta a $[0, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

Poiché \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} segue che qualunque sottointervallo di qualunque partizione P di $[0, 1]$ contiene un punto (e anzi infiniti punti) tale che $g = 1$. Quindi $U(g, P) = 1$.

Per la stessa ragione si ha $L(g, P) = 0$. Dunque è impossibile soddisfare la condizione di integrabilità essendo

$$\int_0^1 g = 1 \neq 0 = \int_0^1 g$$

Si vedono alcune proprietà dell'integrale: l'additività rispetto al dominio di integrazione o relazione di Chasles.

Proposizione. Si supponga che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia limitata e sia $c \in (a, b)$. La funzione f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se è integrabile sia in $[a, c]$, sia in $[c, b]$. In questo caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

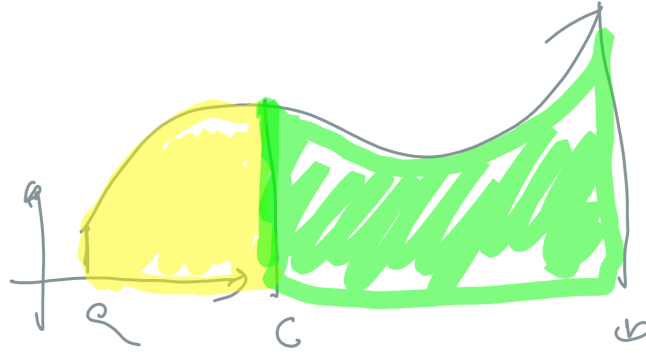


Figure 26: Interpretazione geometrica dell'integrale.

Dimostrazione. Se f è integrabile in $[a, b]$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P tale che $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. Si aggiunge il punto c alla partizione P e si pone $P_1 = P \cap [a, c]$ e $P_2 = P \cap [c, b]$. Segue che

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon$$

$$U(f, P_2) - L(f, P_2) < \varepsilon$$

dunque f è integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$.

Viceversa, sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$ segue che esistono due partizioni P_1 e P_2 di $[a, c]$ e $[c, b]$ tali che

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

La partizione $P = P_1 \cup P_2$ di $[a, b]$ soddisfa $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ sicché f è integrabile in $[a, b]$. Inoltre

$$\int_a^b f \leq U(f, P) \leq L(f, P) + \varepsilon \leq L(f, P_1) + L(f, P_2) + \varepsilon \leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$$

Similmente

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leq U(f, P_1) + U(f, P_2) \leq L(f, P_1) + L(f, P_2) + \varepsilon \leq L(f, P) + \varepsilon \leq \int_a^b f + \varepsilon$$

Come sopra, si conclude che

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f$$

Unendo le due disuguaglianze, si è dimostrato che

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

L'insieme delle funzioni limitate e integrabili in $[a, b]$ ha la struttura di uno spazio vettoriale. Si omette la dimostrazione di questo risultato a causa dell'uso ripetitivo di partizioni e di raffinamenti.

Proposizione. Si supponga f, g siano integrabili in $[a, b]$. Allora

- I) La funzione $f + g$ è integrabile in $[a, b]$ e risulta $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- II) Per ogni costante $k \in \mathbb{R}$, la funzione $k \cdot f$ è integrabile in $[a, b]$.
- III) Se $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$.
- IV) Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Osservazione. La proprietà IV è un teorema del confronto per gli integrali. Si nota che III è un caso particolare di IV: infatti basta scegliere prima $f(x) = m$ e poi $g(x) = M$.

Di seguito si considera formalmente il fatto che capita di dover scrivere integrali in cui gli estremi di integrazioni hanno ordinamento opposto rispetto ad \mathbb{R} .

Convenzione. Se $a > b$ allora si pone

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

Se $a = b$ allora si pone

$$\int_a^a f = 0$$

Si dà senso all'intervallo degenere.

Si dimostra invece, soprattutto per l'interessante tecnica della dimostrazione, il seguente risultato.

Proposizione. Si supponga che f sia limitata e integrabile in $[a, b]$. Allora le funzioni f^+ , f^- e $|f|$ sono integrabili in $[a, b]$ e risulta

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Cioè il valore assoluto passa all'interno dell'integrale con una disuguaglianza.

Dimostrazione. Si ricorda che

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} \geq 0 \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\} \geq 0 \end{aligned}$$

Inoltre $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Dalla seconda uguaglianza si deduce che basta dimostrare l'integrabilità di f^+ e di f^- così poi da utilizzare la struttura vettoriale dell'insieme delle funzioni limitate e integrabili. Si osserva che $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Dalle definizioni segue che

$$\begin{aligned} \sup f^+ - \inf f^+ &\leq \sup f - \inf f \\ \sup f^- - \inf f^- &\leq \sup f - \inf f \end{aligned}$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia P_ε una partizione di $[a, b]$ tale che

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Per le disuguaglianze precedenti

$$\begin{aligned} U(f^+, P_\varepsilon) - L(f^+, P_\varepsilon) &< \varepsilon \\ U(f^-, P_\varepsilon) - L(f^-, P_\varepsilon) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Dunque f^+ e f^- sono integrabili e $|f| = f^+ + f^-$ è integrabile in quanto somma di funzioni integrabili.

Infine, si ricorda che $f(x) \leq |f(x)|$ e $-f(x) \leq |f(x)|$ per ogni $x \in [a, b]$. Dal confronto per gli integrali segue

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{e} \quad -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Quindi

$$\left| \int_a^b f \right| = \max \left\{ \int_a^b f, -\int_a^b f \right\} \leq \int_a^b |f|$$

Esercizio. Costruire una funzione integrabile f tale che $\left| \int_a^b f \right| < \int_a^b |f|$.

Osservazione. Se $|f|$ è integrabile, non si è autorizzati a concludere che f è integrabile. Per esempio, sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

È facile far vedere che $\int_0^1 f \geq 1$ e $\int_0^1 f \leq -1$, sicché f non è integrabile in $[0, 1]$. Tuttavia, $|f(x)| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\int_0^1 |f| = \int_0^1 1 = 1 - 0 = 1$.

L'integrale di Riemann non è un integrale assoluto. L'integrale di Lebesgue, al contrario, soddisfa la seguente proprietà: f è Lebesgue-integrabile $\iff |f|$ è Lebesgue-integrabile. L'integrale di Lebesgue interessa solamente le funzioni con segno costante, mentre l'integrale di Riemann non ne dipende. L'integrale improprio nasce dalla costruzione dell'integrale di Riemann in quanto si introducono compensazioni di segno che creano problemi se il dominio di definizione della funzione o la funzione stessa sono illimitati.

10.1 Calcolo integrali.

A volte — scherzando ma non troppo — si dice al matematico interessi sapere che un integrale esista, al fisico quanto valga. Finora si sono soprattutto accontentati i matematici, ed è arrivato il momento di accontentare i fisici.

La definizione di integrale non è costruttiva: nella maggior parte dei casi concreti risulta impossibile calcolare elementarmente l'integrale superiore e quello inferiore. Per fortuna esiste un legame di grande importanza tra la nozione di derivata e quella di integrale.

Il teorema è attribuito, nelle scuole italiane, a Torricelli. Tuttavia, egli non avrebbe avuto possibilità di formare il seguente teorema essendo nato precedentemente allo sviluppo dell'analisi matematica.

Il teorema collega risultati del calcolo differenziale con i concetti del calcolo integrale.

Teorema. Fondamentale del calcolo.

- I) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- II) Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Si pone $G(x) = \int_a^x g$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora G è continua in $[a, b]$. Se poi g è continua in un punto c , allora G è derivabile in c e risulta $G'(c) = g(c)$.

Guardando la tesi di II) e l'ipotesi di I) si deduce che se g è continua in tutti i punti allora G ha la proprietà richiesta nel punto I).

Dimostrazione. I) Sia P una partizione di $[a, b]$. Per il teorema del valor medio di Lagrange:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

dove $x_{k-1} < t_k < x_k$. Si considera ora $L(f, P)$ e $U(f, P)$. Poiché $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$, si ha $f(t_k) \in [m_k, M_k]$ dove $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$ e $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$. Quindi

$$L(f, P) \leq \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f, P)$$

Ma

$$\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

Si deduce che

$$L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P)$$

Infine, in quanto il termine centrale è indipendente dalla partizione, si ha

$$\int_a^b f \leq F(b) - F(a) \leq \bar{\int}_a^b f$$

e per l'ipotesi di integrabilità deve essere

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

II) Siano $x > y$ due punti di $[a, b]$. Si ha

$$|G(x) - G(y)| = \left| \int_a^x g - \int_a^y g \right| = \left| \int_y^x g \right| \leq \int_y^x |g| \leq M|x - y|$$

essendo M un maggiorante di $|g|$. Quindi G è uniformemente continua in $[a, b]$. Si supponga infine che g sia continua in un punto c di $[a, b]$. Si ha

$$\frac{G(x) - G(c)}{x - c} = \frac{\int_a^x g - \int_a^c g}{x - c} = \frac{\int_c^x g}{x - c}$$

Sia $\varepsilon > 0$ qualunque. Poiché g è continua in c , esiste $\delta > 0$ tale che $|t - c| < \delta$ implica $|g(t) - g(c)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x) - G(c)}{x - c} - g(c) \right| &= \left| \frac{\int_c^x g}{x - c} - g(c) \right| = \left| \frac{\int_c^x g(t) dt - g(c) \int_c^x dt}{x - c} \right| \\ &= \left| \frac{\int_c^x [g(t) - g(c)] dt}{x - c} \right| \leq \frac{\int_c^x |g(t) - g(c)| dt}{|x - c|} < \frac{\varepsilon |x - c|}{|x - c|} = \varepsilon \end{aligned}$$

non appena $x \neq c$, $|x - c| < \delta$. Si è così dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{G(x) - G(c)}{x - c} = g(c)$$

e questo completa la dimostrazione.

Osservazione. Le somme $\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ sono dette di Cauchy-Riemann.

Teorema. Della media integrale. Sia f integrabile in $[a, b]$. Se $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$. Se f è continua, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f$$

Dimostrazione. La prima affermazione segue dal teorema del confronto. Poiché in particolare il numero $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ (chiamato media integrale di f nell'intervallo di $[a, b]$) cade tra $\inf_{[a,b]} f$ e $\sup_{[a,b]} f$, per il teorema dei valori intermedi segue che esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \bar{f}$.

Definizione. Si dice che una funzione F è primitiva di una funzione f in $[a, b]$ se F è derivabile in $[a, b]$ e se risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Il teorema fondamentale dice, tra le altre cose, che il calcolo di un integrale si riconduce alla determinazione di una primitiva della funzione integranda. Inoltre, la cosiddetta funzione integrale di g in $[a, b]$, definita dalla formula $x \mapsto \int_a^x g$ è una primitiva di g sotto l'ipotesi che g sia continua in $[a, b]$.

10.2 Ricerca delle primitive.

Definizione. L'integrale indefinito di una funzione f è l'insieme di tutte le sue primitive. Si indica tale insieme con il simbolo di $\int f$ (ma spesso $\int f(x) dx$, $\int f(t) dt$, ecc).

Osservazione.

- Sommando una costante ad una primitiva, si ottiene un'altra primitiva della stessa funzione. Dunque l'esistenza di una primitiva implica l'esistenza di infinite primitive.
- La notazione $\int f$ non contiene alcun riferimento esplicito al dominio in cui le primitive sono definite. Solitamente il contesto chiarisce il dominio.

Esercizio. Siano F e G due primitive della stessa funzione f in un intervallo $[a, b]$. Dimostrare che la funzione $F - G$ è costante in $[a, b]$.

Suggerimento. Calcolare la derivata di $F - G$ e applicare un corollario del teorema del valor medio di Lagrange.

Questo esercizio mostra che

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

dove F è una primitiva di f . Con abuso di notazione si scrive spesso $\int F(x) dx = F(x) + C$.

La vera domanda ormai è come si trovano le primitive. La mancanza di una risposta esaustiva e soddisfacente a questa domanda è certamente la ragione per cui il calcolo integrale è spesso sgradito agli studenti. Infatti, per la derivata si hanno delle regole di derivazione tramite le quali si può trovare la formula della derivata di una funzione elementare perché per ogni operazione di addizione, moltiplicazione, composizione e inversione esiste una regola di derivazione. Pertanto, si riesce a scrivere le derivate di tutte le funzioni elementari. Per le primitive ciò non vale. In questo corso non si dimostra rigorosamente che non è possibile scrivere alcune primitive. È possibile dimostrare che l'insieme delle funzioni elementari le cui primitive sono funzioni elementari è un sottoinsieme proprio delle funzioni elementari: esiste almeno una

funzione elementare la cui primitiva non è una funzione elementare. Un esempio di questo è la funzione a campana di Gauss e^{-x^2} , cioè la funzione di densità di probabilità uniforme. Essa è usata nel calcolo delle probabilità per ottenere una probabilità come $\int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$, ma la sua primitiva non è elementare.

Osservazione. Ogni formula di derivazione è anche una formula di integrazione, basta leggerla al contrario:

- $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \rightsquigarrow \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, se $\alpha + 1 \neq 0$.
- $D \sin x = \cos x \rightsquigarrow \int \cos x dx = \sin x + C$.
- $D \cos x = -\sin x \rightsquigarrow \int \sin x dx = -\cos x + C$.
- $D \ln|x| = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Questi esempi sono talvolta chiamati integrali immediati, e dovrebbero essere conosciuti a memoria.

Attenzione. L'integrale è lineare, nel senso che $\int(f+g) = \int f + \int g$ e $\int(kf) = k \int f$, $k \in \mathbb{R}$. Non è però moltiplicativo, per “colpa” della regola di derivazione del prodotto. In generale, l'integrale del prodotto di due funzioni è diverso dal prodotto dei rispettivi integrali!

Dal punto di vista della teoria, l'integrazione indefinita si riduce a qualche primitiva elementare, e a due tecniche di calcolo.

10.2.1 Integrazione per parti.

Sia I un intervallo di \mathbb{R} . Se $F, G \in C^1(I)$ con derivate $F' = f$ e $G' = g$, allora

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx$$

Dimostrazione. Si sa che $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$. Quindi FG è primitiva di $fG + Fg$, cioè

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx$$

Nella tradizione didattica, F è il fattore finito, mentre g (o anche $g(x) dx$) è il fattore differenziale.

Esempio.

- $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

D	I	
+	x	$\cos x dx$
-	$1 dx$	$\sin x$

- Sia $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \int x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C = e^{\alpha x} \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) + C \end{aligned}$$

	D	I
+	x^2	$e^{\alpha x} dx$
-	$2x dx$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$
+	x	$e^{\alpha x} dx$
-	$1 dx$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

-

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-x) dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx \end{aligned}$$

L'ultimo integrale ha la forma $\int \frac{1}{\sqrt{\phi(x)}} \phi'(x) dx$, essendo $\phi(x) = 1 - x^2$. Per la regola di derivazione della funzione composta segue che $(\phi(x))^{-\frac{1}{2}} \phi'(x)$ è la derivata di

$$\frac{(\phi(x)^{\frac{1}{2}})}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\phi(x)}$$

Quindi $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx = 2\sqrt{1-x^2} + C$, e infine

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

	D	I
+	$\arcsin x$	$1 dx$
-	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	x

10.2.2 Integrazione per sostituzione.

Siano I e J due intervalli di \mathbb{R} , e sia $\phi : J \rightarrow I$ una funzione di classe C^1 . Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora

$$\left(\int f(x) dx \right) \circ \phi(t) = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

per ogni $t \in J$.

Se ϕ è anche invertibile, con inversa ϕ^{-1} di classe C^1 , allora

$$\int f(x) dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t) dt \right) \circ \phi^{-1}(x)$$

per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. Basta osservare che se F è una primitiva di f , allora $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi)\phi' = (f \circ \phi)\phi'$. Dunque, $F \circ \phi(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$. Nell'ultimo caso, $F(x) = (\int f(\phi(t))\phi'(t) dt) \circ \phi^{-1}(x)$.

Osservazione. Il senso del risultato appena dimostrato è che

$$\begin{cases} \int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt \\ x = \phi(t) \end{cases}$$

Per calcolare l'integrale a primo membro si sostituisce $x = \phi(t)$, e si calcola l'integrale a secondo membro, e alla fine si torna alla variabile $x = \phi(t) \iff t = \phi^{-1}(x)$ (nell'ipotesi in cui ϕ sia invertibile).

Esempio. Si ritorna a $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Si pone $1 - x^2 = t$, e si osserva che $\frac{dt}{dx} = -2x$. Quindi $dt = -2x dx$, cioè $x dx = -\frac{1}{2} dt$. Per la regola di integrazione per sostituzione segue

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Si sarebbe potuto anche ricavare $x = \phi(t) = \sqrt{1-t}$, osservare che $\phi'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}$, e scrivere

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

10.3 Integrale improprio.

Finora due ipotesi strutturali sono state inderogabili.

- 1) La limitatezza dell'intervallo $[a, b]$ di integrazione.
- 2) La limitatezza della funzione f integranda.

Queste richieste dipendono dalla costruzione dell'integrale di Riemann: che senso avrebbe una partizione di una semiretta? Che senso avrebbero le quantità M_k e m_k , se fossero infinite? La definizione dell'integrale di Riemann dev'essere opportunamente estesa per includere tali situazioni.

Definizione. Sia f una funzione definita in $[a, b]$, e si supponga che

- Per ogni $c \in (a, b)$ esista l'integrale $\int_c^b f$.
- Esista finito $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f$.

In tal caso si dice che f è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(a, b]$, e si pone

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f$$

Osservazione. Questa definizione è conveniente per funzioni non limitate nell'intorno del punto a . Se la funzione f non è limitata nell'intorno del punto b , ma è integrabile in $[a, c]$ per ogni $c < b$, si pone

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f$$

qualora questo limite esista finito.

Se infine la funzione f non è limitata nell'intorno di un punto x_0 interno all'intervallo $[a, b]$, si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ se f è integrabile in senso improprio in entrambi gli intervalli $[a, x_0)$ e $(x_0, b]$. In tal caso

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$$

La richiesta che l'integrale improprio esista finito sia a destra che a sinistra di x_0 non è così naturale.

Esempio. Per $\alpha > 0$, si ha $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$. Fissato $c \in (0, 1)$, l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ esiste perché la funzione integranda è continua in $[c, 1]$. Inoltre

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\ln c & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(1 - c^{1-\alpha}) & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

L'integrale improprio esiste finito (e vale $\frac{1}{1-\alpha}$) se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Commento. Si consideri $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$. La funzione integranda $\frac{1}{x}$ è illimitata nell'intorno di $x_0 = 0$. Quindi si calcolano gli integrali su $(-1, 0)$ e $(0, 1)$:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx = -\infty \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Ciò implica che l'integrale originale non converge. Tuttavia

$$\int_{-1}^{-c} \frac{1}{x} dx = \ln c \quad \text{e} \quad \int_c^1 \frac{1}{x} dx = -\ln c$$

Quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-c} \frac{1}{x} dx + \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln c - \ln c = 0$$

Ma ciò non è vero. Il problema è che il ragionamento di simmetria è basato su un arbitrio.

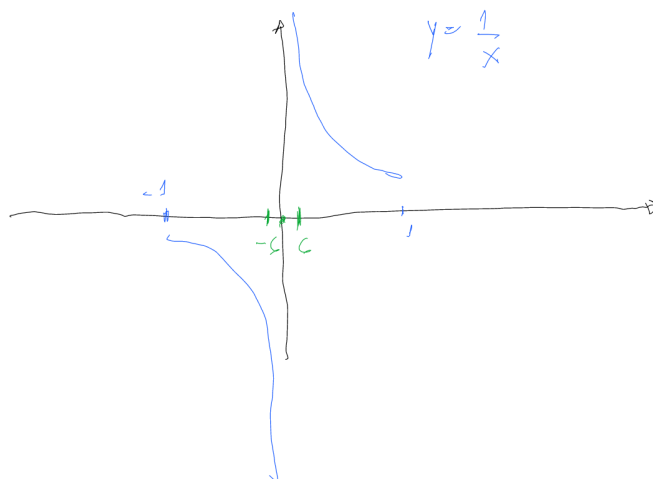


Figure 27: Scelta non arbitraria dell'intervallo.

Infatti si è introdotta un'ipotesi aggiuntiva, cioè si è rimosso il punto $x_0 = 0$ eliminando un suo piccolo intorno. Non si è fatto in modo arbitrario, ma in maniera simmetrica scegliendo $-c$ e c . Quindi, l'area a sinistra è uguale e di segno opposto all'area di destra. Tuttavia, con due variabili indipendenti si ha

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-c} \frac{1}{x} dx + \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_d^1 \frac{1}{x} dx \iff \lim_{(c,d) \rightarrow (0^+, 0^+)} \ln c - \ln d = \lim_{(c,d) \rightarrow (0^+, 0^+)} \ln \frac{c}{d}$$

Il limite può essere qualsiasi cosa in dipendenza dall'ordine di infinitesimo di c e d . Pertanto, non si riesce a dare una definizione coerente senza guardare a parte l'una e l'altra sezione del dominio d'integrazione.

In fisica è solito dire Valore Principale (PV) dell'integrale improprio la scrittura

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-c} \frac{1}{x} dx + \int_c^1 \frac{1}{x} dx$$

Tuttavia, il valore dell'integrale improprio non esiste.

Analogamente si può definire l'integrale improprio di f su una semiretta.

Definizione. Data una funzione f definita in $[a, +\infty)$, si supponga che per ogni $c > a$ esista l'integrale $\int_a^c f$, ed esista finito $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f$. Si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$, e che

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f$$

Con le ovvie modifiche, si può definire $\int_{-\infty}^b f$ come $\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f$.

Osservazione. Per definire $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, il buon senso suggerisce di calcolare

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (-\infty, +\infty)} \int_a^b f$$

Si tratta però di un limite in due variabili, e non ne si conosce la teoria.

Si procede diversamente: si sceglie un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ nel cui intorno la funzione f sia limitata. Si dice che f è integrabile in senso improprio in $(-\infty, +\infty)$ se f è integrabile in senso improprio sia in $(-\infty, x_0]$, sia in $[x_0, +\infty)$. In tal caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{x_0} f + \int_{x_0}^{+\infty} f$$

Esempio. Per $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$. Come sopra, per ogni $c > 1$ si ha

$$\int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln c & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}(1 - c^{1-\alpha}) & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Si conclude la trattazione con alcuni criteri di convergenza per gli integrali impropri. Nel seguito si espongono alcuni criteri di integrabilità in senso improprio nel caso di funzioni definite in $[a, +\infty)$. Resta sottinteso che analoghi risultati sono validi per gli integrali impropri di funzioni illimitate nell'intorno di un punto al finito, con le dovute modifiche agli enunciati.

Si considera dunque una funzione $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $c > a$ esista l'integrale

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx$$

Si tratta di dare criteri sufficienti affinché esista finito il limite di $F(c)$ per $c \rightarrow +\infty$.

Un caso importante è quello in cui $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq a$. Infatti, F risulta essere monotona crescente (teorema di additività rispetto al dominio), e dunque l'esistenza del limite equivale alla limitatezza di F in $[a, +\infty)$.

Teorema. Criterio del confronto. Siano f, g due funzioni definite in $[a, +\infty)$. Si supponga che esista $x_0 \geq a$ tale che per ogni $x \geq x_0$ si abbia

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Se g è integrabile in $[a, +\infty)$, allora anche f lo è. Se f non è integrabile in $[a, +\infty)$, allora nemmeno g lo è.

Dimostrazione. Per $c > x_0$, si ha

$$\int_{x_0}^c f(x) dx \leq \int_{x_0}^c g(x) dx$$

Ne segue che

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c f(x) dx \leq \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c g(x) dx$$

nelle prime ipotesi. D'altra parte

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^{x_0} f(x) \, dx + \int_{x_0}^c f(x) \, dx$$

quindi f è integrabile in senso improprio.

Se invece f non è integrabile, allora

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c g(x) \, dx \geq \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c f(x) \, dx = +\infty$$

e si conclude.

Esattamente come per le serie numeriche, esiste un corollario “asintotico”.

Corollario. Si supponga che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq x_0$. Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ allora f e g sono simultaneamente integrabili oppure non integrabili in senso improprio in $[a, +\infty)$.

Teorema. Assoluta integrabilità. Sia f definita in $[a, +\infty)$. Se $|f|$ è integrabile in $[a, +\infty)$ allora anche f lo è, e risulta

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| \, dx$$

Dimostrazione. Si ricorda che si può sempre scrivere $f = f^+ - f^-$, dove $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Si sa che $0 \leq f^+ \leq |f|$ e $0 \leq f^- \leq |f|$. Per confronto, f^+ ed f^- sono allora integrabili in senso improprio, e anche $f = f^+ - f^-$ lo è, in quanto somma di funzioni integrabili. La relazione di disuguaglianza è una conseguenza immediata.