

# Supersimmetria e modelli statistici

19 settembre 2023

## Indice

<b>I</b>	<b>Supersimmetria</b>	<b>1</b>
1	Algebra	3
2	Supermultipletti	6
2.1	Stati . . . . .	6
2.2	Campi . . . . .	8
2.3	Multipletti chirali . . . . .	10
2.4	Multipletti reali . . . . .	12
3	Supercampi	15
3.1	Supercampi chirali . . . . .	17
3.2	Supercampi reali . . . . .	19
4	Modello di Wess–Zumino	20
<b>II</b>	<b>Supersimmetria in sistemi di materia condensata</b>	<b>25</b>
5	Semimetalli di Weyl e di Dirac	27
6	Punto critico di un modello reticolare	29
7	Emergenza del modello di Wess–Zumino	31
8	Stati legati di Majorana	32
9	Reticolo supersimmetrico	33
10	Punto multicritico	34
	<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>

Questa pagina è stata lasciata intenzionalmente bianca.

## Parte I

# Supersimmetria

La simmetria è una qualità essenziale di molti sistemi fisici e dà forma alle leggi fondamentali che regolano il comportamento dell'universo. Nel corso della storia della fisica, la simmetria ha dimostrato di essere un potente principio guida, rivelando profonde intuizioni sulla natura del mondo. Dalle simmetrie descritte dalle leggi di Keplero sul moto dei pianeti alle simmetrie che sono alla base del Modello Standard della fisica delle particelle, lo studio della simmetria ha portato a scoperte rivoluzionarie e a profonde unificazioni. La simmetria fornisce un riferimento per comprendere le relazioni tra fenomeni apparentemente disgiunti e consente di prevedere nuovi comportamenti sulla base di quelli esistenti. Un esempio dell'importanza della simmetria è il teorema di Noether che stabilisce un profondo legame tra la simmetria e le leggi di conservazione, come la conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare.

Il ruolo della simmetria come guida alla comprensione del mondo diventa particolarmente evidente nella fisica delle particelle. Il Modello Standard, che descrive il comportamento delle particelle fondamentali e delle loro interazioni, è costruito su intricate simmetrie. Queste simmetrie regolano le proprietà delle particelle e le forze che governano le loro interazioni, portando ad una descrizione straordinariamente accurata del mondo subatomico. Tuttavia, il Modello Standard non è privo di limiti: non risponde a diverse domande fondamentali, come la natura della materia oscura, l'unificazione delle forze fondamentali ed il problema della gerarchia, cioè l'apparente disparità tra la forza di gravità e le altre forze fondamentali. La supersimmetria è un metodo teorico e innovativo che estende le simmetrie del Modello Standard: il suo utilizzo è motivato dalla ricerca di soluzioni agli interrogativi precedenti.

La supersimmetria è una simmetria tra fermioni, i costituenti della materia, e bosoni, i mediatori delle forze fondamentali: per ogni tipo di particella elementare si postula l'esistenza di una particella superpartner con natura statistica opposta. Essa può essere realizzata sia nello spazio-tempo piatto che nello spazio-tempo curvo. In quest'ultimo caso, la supersimmetria è resa locale tramite il principio di gauge e la teoria prende il nome di supergravità. Essa unifica in maniera naturale l'interazione gravitazionale con le altre interazioni fondamentali.

La fisica teorica mira a descrivere il maggior numero di fenomeni attraverso una teoria semplice e naturale. Nella fisica delle particelle elementari, la speranza è di arrivare ad una descrizione che unisca tutte le particelle e le loro interazioni in un'unica teoria coerente. La supersimmetria permette avanzare sempre più in tale direzione. Infatti, si tenta di seguire la tendenza storica ad unificare le leggi fisiche. Alcuni esempi di questo sono la legge di gravitazione universale, le leggi di Maxwell, l'elettrodinamica quantistica e così via fino al Modello Standard. La supersimmetria segue naturalmente come il candidato perfetto per continuare la tradizione di unificazione: si unificano le interazioni e si descrivono insieme sia la materia che la radiazione. La supergravità è particolarmente ambiziosa nel tentativo di unificare la gravità con le altre interazioni. Tutti i modelli supersimmetrici riescono in qualche misura a raggiungere questi obiettivi di unificazione, ma non riescono a descrivere effettivamente il mondo reale.

L'unificazione è vincolata da vari teoremi di no-go, in particolare dal teorema di Coleman-Mandula: nel contesto di una teoria dei campi relativistica, risulta impossibile unificare le simmetrie dello spazio-tempo con le simmetrie interne, vale a dire che multipletti di simmetria non possono contenere particelle di massa o spin diversi. Questo teorema si può aggirare

rilassando una sua ipotesi e lo si può generalizzare alle teorie supersimmetriche tramite il teorema di Haag–Łopuszański–Sohnius: la supersimmetria e la supergravità sono le uniche possibilità di unificazione nell'ambito di una teoria quantistica dei campi. Tuttavia, bisogna notare che se teorie simili non riuscissero a dare risultati compatibili con il mondo reale, allora si dovrebbe rinunciare o all'unificazione o alle teorie quantistiche dei campi.

Oltre ai teoremi di no-go, c'è un altro aspetto più tecnico che contraddistingue le teorie supersimmetriche: esse possono risolvere il problema della non rinormalizzabilità della gravità quantizzata. In una teoria quantistica dei campi perturbativa, fermioni e bosoni tendono a contribuire con segni opposti alle correzioni di ordine superiore al primo. La supersimmetria realizza quasi sempre un fine-tuning tra questi contributi che fa scomparire alcuni termini divergenti. Le teorie supersimmetriche presentano un comportamento straordinariamente favorevole quando si tratta di divergenze quantistiche. Questo è particolarmente importante per il problema della gerarchia delle teorie della grande unificazione (grand unified theories, GUTs), ovvero i tredici ordini di grandezza tra la massa della teoria e la massa del bosone  $W$ . Nelle versioni supersimmetriche delle GUTs, nuove particelle vengono scambiate e create in coppia, e questi nuovi processi annullano alcuni degli effetti dei processi presenti nelle controparti non supersimmetriche delle GUTs. Il mescolamento della massa ed il conseguente fine-tuning possono essere generalmente evitati e la gerarchia, una volta instaurata, è stabilizzata.

La supersimmetria promette di colmare importanti lacune nella comprensione moderna del mondo, ma le prove sperimentali della sua realizzazione rimangono tuttora elusive. Ciononostante, bisogna notare che, a causa della rottura di simmetria, non tutte le simmetrie si manifestano: la dinamica di una teoria può essere tale da mascherare una simmetria sottostante. Dunque, la supersimmetria potrebbe essere una simmetria rotta alle basse energie e quindi nascosta. Alla questione sull'esistenza della supersimmetria in natura si aggiunge anche la ricerca dalla scala energetica associata: per il momento, il Large Hadron Collider (LHC) ha permesso solo di porre un limite inferiore. Pertanto, la supersimmetria rimane uno strumento matematico e teorico importante, ma la sua realizzazione fisica è ancora una questione aperta.

La supersimmetria ha trovato impiego anche in ambiti diversi dalla fisica delle particelle. Ad esempio, nel contesto della fisica della materia condensata, la supersimmetria può essere utilizzata per comprendere il comportamento di vari sistemi ai loro punti critici. In particolare, essa si può realizzare come simmetria emergente nel limite di basse energie e grandi distanze, sebbene non sia presente nei costituenti microscopici del sistema [9–11].

Di seguito si introducono i concetti elementari e fondamentali della supersimmetria seguendo in particolare gli articoli di Sohnius [1] e Bertolini [2]. Altre fonti utilizzate sono Tong [3, 4], Bilal [5], West [6] e Ivanov [7].

# 1 Algebra

L'algebra della supersimmetria è un'algebra di Lie graduata, un'estensione del concetto di algebra di Lie che include elementi commutativi e anticommutativi, corrispondenti rispettivamente ai gradi di libertà bosonici e fermionici. L'algebra è definita dalle relazioni di (anti)commutazione dei generatori.

Il generatore di una simmetria è un operatore in uno spazio di Hilbert che rimpiazza uno stato iniziale o finale a più particelle con un altro stato mantenendo inalterata la fisica. L'espressione più generale di tale operatore è

$$G = a^\dagger * K * a = \sum_{ij} \int d^3p d^3q a_i^\dagger(\mathbf{p}) K_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_j(\mathbf{q}). \quad (1.1)$$

Se esso commuta con la matrice di scattering  $[S, G] = 0$  allora è detto generatore di una simmetria. Ogni generatore  $G$  può essere decomposto in una parte pari  $B$  ed una parte dispari  $F$ . La prima cambia lo spin di valori interi, la seconda di valori semi-interi e costituisce così i generatori della supersimmetria.

Si presuppone che gli operatori di creazione e distruzione per i bosoni  $b$  ed i fermioni  $f$  rispettino le regole di quantizzazione canonica:

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad (1.2)$$

dove  $\mathbb{1}$  è l'elemento identità della convoluzione  $*$  e le parentesi  $\{\dots, \dots\}$  denotano il commutatore graduato: se gli operatori sono entrambi fermionici, allora si considera l'anticommutatore, mentre si considera il commutatore in tutti gli altri casi.

La parte pari  $B$  e la parte dispari  $F$ , legate agli operatori  $b$  ed  $f$  tramite i kernel  $K$ , obbediscono le relazioni caratteristiche di un'algebra di Lie graduata. In termini di una base  $(B_i, F_\alpha)$ , tali relazioni sono

$$[B_i, B_j] = i c_{ij}{}^k B_k, \quad [F_\alpha, B_i] = s_{\alpha i}{}^\beta F_\beta, \quad \{F_\alpha, F_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}{}^i B_i. \quad (1.3)$$

Le costanti di struttura  $c$ ,  $s$  e  $\gamma$  non possono assumere valori arbitrari, ma sono vincolate dall'identità di Jacobi graduata. Pertanto, le matrici costruite dalle costanti di struttura formano la rappresentazione aggiunta dell'algebra.

**Generatori bosonici e teorema di Coleman–Mandula.** Le analisi svolte da Coleman e Mandula sulle simmetrie nelle teorie dei campi relativistiche, sebbene trattino solamente generatori bosonici, pongono stringenti condizioni anche sui generatori fermionici a causa dell'identità di Jacobi. Tali analisi trovano che, in una teoria dei campi relativistica, qualsiasi gruppo di simmetrie bosoniche della matrice di scattering è il prodotto diretto del gruppo di Poincaré e di un gruppo di simmetrie interne.

I generatori bosonici sono il quadrimpulso  $P_\mu$ , i sei generatori del gruppo di Lorentz  $M_{\mu\nu}$  e vari generatori hermitiani  $B_r$  delle simmetrie interne. I generatori del gruppo di Lorentz sono associati alle rotazioni  $J_i$  ed ai boost  $K_i$ , e godono delle seguenti relazioni di commutazione

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (1.4)$$

Questi generatori vengono utilizzati per introdurre il tensore antisimmetrico  $M_{\mu\nu}$  definito come

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}, \quad M_{0i} \equiv K_i, \quad M_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (1.5)$$

L'algebra dei generatori bosonici è quella del gruppo di Poincaré,

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

con l'aggiunta del gruppo delle simmetrie interne

$$[B_r, B_s] = i c_{rs}^t B_t. \quad (1.7)$$

La metrica utilizza la convenzione timelike  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ . I generatori  $B_r$  sono invarianti di Lorentz traslazionali poiché commutano sia con  $P_\mu$  che  $M_{\mu\nu}$

$$[B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.8)$$

Gli operatori di Casimir del gruppo di Poincaré  $P^2 \equiv P_\mu P^\mu$  e  $W^2 \equiv W_\mu W^\mu$ , dove  $W^\mu$  è l'operatore di Pauli–Lubański

$$W^\mu \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}, \quad (1.9)$$

commutano con tutti gli elementi del gruppo di Poincaré e con i generatori delle simmetrie interne:

$$[B_r, P^2] = [B_r, W^2] = 0. \quad (1.10)$$

Queste relazioni implicano che i membri di un multipletto del gruppo delle simmetrie interne hanno la stessa massa (teorema di O’Raifeartaigh) e lo stesso spin. Pertanto, il teorema di Coleman–Mandula afferma che tutti i generatori di supersimmetrie devono essere fermionici, ovvero sia cambiano lo spin di una quantità semi-intera e così la statistica dello stato.

**Generatori fermionici e algebra della supersimmetria.** Lo studio delle conseguenze del teorema di Coleman–Mandula imposte ai generatori fermionici è riassunto nel teorema di Haag–Łopuszański–Sohnius.

Tramite varie considerazioni riguardanti le rappresentazioni del gruppo di Lorentz, i generatori della supersimmetria  $Q = F$  soddisfano le seguenti relazioni di commutazione

$$[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i}, \quad [\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}^i{}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \quad (1.11)$$

e anticommutazione

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot{\beta}}\} = 2\delta_i^j(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu. \quad (1.12)$$

L'indice  $i$  identifica gli spinori  $Q_\alpha$  e va da 1 ad un numero intero  $N$ . I generatori sono tali per cui  $\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}} = (Q_{\alpha i})^\dagger$ . Inoltre, le matrici  $\sigma$  a due indici sono definite come

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta &= \frac{i}{2}[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\beta} - (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\beta}], \\ (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= \frac{i}{2}[(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\gamma}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} - (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\gamma}(\sigma^\mu)_{\gamma\dot{\beta}}] \end{aligned} \quad (1.13)$$

dove si ha  $\sigma^\mu = \bar{\sigma}_\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i)$  e  $\sigma_\mu = \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^i)$  con  $\sigma^i$  matrici di Pauli.

Dalla relazione di anticommutazione sopra, si ottiene una proprietà importante delle teorie supersimmetriche. Considerando che il teorema di Haag–Łopuszański–Sohnius presume una metrica positiva, cioè

$$\langle \dots | \{Q, Q^\dagger\} | \dots \rangle = \|Q^\dagger | \dots \rangle\|^2 + \|Q | \dots \rangle\|^2 \geq 0, \quad (1.14)$$

e notando

$$\sum_{\alpha=1}^2 \{Q_{\alpha i}, (Q_{\alpha i})^\dagger\} = 2 \operatorname{tr}(\sigma^\mu P_\mu) = 4P_0, \quad (1.15)$$

segue che in ogni teoria supersimmetrica l'energia è non negativa  $\langle P_0 \rangle \geq 0$ .

I generatori della supersimmetria commutano con il quadrimpulso

$$[Q_{\alpha i}, P_\mu] = [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0. \quad (1.16)$$

Le relazioni di commutazione con i generatori delle simmetrie interne sono

$$[Q_{\alpha i}, B_r] = (b_r)_i^j Q_{\alpha j}, \quad [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, B_r] = -\bar{Q}^j_{\dot{\alpha}} (b_r)_j^i. \quad (1.17)$$

Infine, sempre tramite considerazioni sulle rappresentazioni del gruppo di Lorentz, si ottiene

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad \{\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\} = -2\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z^{ij}, \quad Z^{ij} = (Z_{ij})^\dagger, \quad (1.18)$$

dove si ha la forma simplettica

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad (1.19)$$

mentre gli operatori  $Z_{ij} = a_{ij}^r B_r$  sono combinazioni lineari dei generatori delle simmetrie interne e sono detti cariche centrali perché commutano con ogni generatore  $G$  introdotto

$$[Z_{ij}, G] = 0. \quad (1.20)$$

Poiché il primo anticommutatore sopra è simmetrico per scambio degli indici  $\alpha i$  con  $\beta j$ , e la forma  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  è antisimmetrica, segue

$$Z_{ij} = -Z_{ji} \implies a_{ij}^r = -a_{ji}^r \quad (1.21)$$

che esclude le cariche centrali per supersimmetria  $N = 1$ .

Se una teoria presenta una sola supercarica  $N = 1$ , allora tale teoria esibisce una supersimmetria semplice. Per più supercariche,  $N > 1$ , si ha supersimmetria estesa. Nel caso di supersimmetria semplice, l'unica simmetria interna che agisce in modo non banale è  $U(1)$  generata dalla carica  $R$ :

$$[Q, R] = Q, \quad [\bar{Q}, R] = -\bar{Q}. \quad (1.22)$$

Infine, per i generatori fermionici vale

$$[Q, P^2] = 0, \quad [Q, W^2] \neq 0. \quad (1.23)$$

Dunque, multipletti di supersimmetria contengono particelle con spin diversi, ma medesima massa.

## 2 Supermultipletti

La supersimmetria viene realizzata tramite campi (o stati) che danno luogo alle rappresentazioni dell'algebra. I campi sono organizzati in multipletti, ciascuno contenente componenti bosoniche e fermioniche. Le relazioni di (anti)commutazione dell'algebra della supersimmetria forniscono le trasformazioni di supersimmetria di questi campi. Un multipletto supersimmetrico contiene lo stesso numero di gradi di libertà bosonici e fermionici.

Come una particella è una rappresentazione irriducibile dell'algebra di Poincaré, così una superparticella è una rappresentazione irriducibile dell'algebra della supersimmetria. Poiché l'algebra di Poincaré è una sottoalgebra di quella della supersimmetria, ogni superparticella è una rappresentazione dell'algebra di Poincaré e pertanto corrisponde ad una collezione di particelle legate tra loro dall'azione dei generatori  $Q$  della supersimmetria. Una superparticella viene spesso detta supermultipletto in quanto costituita da un multipletto di diverse particelle.

### 2.1 Stati

Costruendo una rappresentazione della supersimmetria con multipletti di stati, i gradi di libertà sono da considerarsi on-shell.

**Supermultipletto senza massa.** Si consideri una particella senza massa in un riferimento standard:

$$P_\mu = (E, 0, 0, E). \quad (2.1)$$

Le proprietà spazio-temporali dello stato della particella sono determinate dalla sua energia  $E$  e dalla sua elicità  $\lambda$ . L'elicità è la proiezione dello spin lungo la direzione del moto ed è l'autovalore dell'operatore

$$H = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{E}. \quad (2.2)$$

Dalla definizione del vettore di Pauli-Lubański (eq. 1.9) si ha  $W_0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ . Per un autostato  $|E, \lambda\rangle$  dell'elicità con massa nulla si ottiene

$$W_0 = \lambda E, \quad W_\mu |E, \lambda\rangle = \lambda P_\mu |E, \lambda\rangle \quad (2.3)$$

in quanto  $W^2 = 0$ . Agendo con una supercarica  $Q_\alpha$  su uno stato, il quadrimpulso non cambia poiché  $[Q, P_\mu] = 0$ . Tuttavia, l'elicità diventa

$$W_0 Q_\alpha |E, \lambda\rangle = Q_\alpha W_0 |E, \lambda\rangle + [W_0, Q_\alpha] |E, \lambda\rangle = E \left( \lambda \mathbb{1} - \frac{1}{2} \sigma^3 \right)_\alpha^\beta Q_\beta |E, \lambda\rangle. \quad (2.4)$$

Similmente per  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  si ha

$$W_0 \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |E, \lambda\rangle = \bar{Q}_{\dot{\alpha}} W_0 |E, \lambda\rangle + [W_0, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] |E, \lambda\rangle = E \left( \lambda \mathbb{1} + \frac{1}{2} \sigma^3 \right)^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} |E, \lambda\rangle. \quad (2.5)$$

Dunque, le supercariche  $Q_1$  e  $\bar{Q}_2$  diminuiscono l'elicità di mezza unità, mentre  $Q_2$  e  $\bar{Q}_1$  la aumentano.

La positività dello spazio di Hilbert (eq. 1.14) implica che le cariche centrali  $Z_{ij}$  sono nulle. Infatti, studiando i supermultipletti massivi nel caso di supersimmetria estesa, si possono costruire combinazioni lineari delle supercariche i cui anticommutatori sono positivi e segue  $m \geq |z_{(r)}|$ , dove  $m$  è la massa del supermultipletto e  $z_{(r)}$  sono gli autovalori delle cariche centrali  $Z_{ij}$ .



Dalle relazioni di anticommutazione delle supercariche (eq. 1.18) segue che queste commutano tra loro. L'algebra delle supercariche sugli stati della particella nel riferimento standard diventa

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0, \quad \{Q_{2i}, \bar{Q}_{\dot{2}}^j\} = 0, \quad \{Q_{1i}, \bar{Q}_{\dot{1}}^j\} = 4E\delta_i^j. \quad (2.6)$$

Dall'ipotesi di positività si ottiene  $Q_{2i} = 0$  sugli stati citati. Pertanto, l'algebra rimanente risulta essere

$$q_i \equiv \frac{Q_{1i}}{\sqrt{4E}}, \quad \{q_i, q_j\} = \{\bar{q}^i, \bar{q}^j\} = 0, \quad \{q_i, \bar{q}^j\} = \delta_i^j \quad (2.7)$$

cioè l'algebra di Clifford per  $N$  gradi di libertà fermionici. Ogni supermultipletto è caratterizzato da uno stato fondamentale  $|E, \lambda_0\rangle$  di Clifford per cui

$$q_i |E, \lambda_0\rangle = 0. \quad (2.8)$$

Esso può essere sia bosonico che fermionico e non va confuso con lo stato fondamentale della teoria, cioè lo stato a minima energia. Gli altri stati del supermultipletto sono generati dall'applicazione degli operatori  $\bar{q}^i$ :

$$\begin{aligned} \bar{q}^i |E, \lambda_0\rangle &= |E, \lambda_0 + \tfrac{1}{2}, i\rangle, \\ \bar{q}^i \bar{q}^j |E, \lambda_0\rangle &= |E, \lambda_0 + 1, ij\rangle, \\ &\vdots \\ \bar{q}^1 \bar{q}^2 \dots \bar{q}^N |E, \lambda_0\rangle &= |E, \lambda_0 + \tfrac{N}{2}, 1\,2\,\dots\,N\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'applicazione di qualsiasi operatore  $\bar{q}$  sullo stato con la maggiore elicità fornisce zero. Il numero di stati con elicità  $\lambda_0 + \frac{k}{2}$  è pari al coefficiente binomiale  $\binom{N}{k}$ , da cui il numero totale di stati è  $2^N$ : una metà bosonica e l'altra metà fermionica.

Ogni teoria quantistica dei campi locale e Lorentz invariante con hamiltoniana hermitiana presenta simmetria CPT. Pertanto, per ogni stato con elicità  $\lambda$  esiste uno stato con parità opposta ed elicità  $-\lambda$ . Affinché i supermultipletti costruiti rispettino questa simmetria, in generale bisogna aggiungere loro il corrispondente multipletto CPT-coniugato.

Bisogna notare che teorie dei campi locali ed interagenti possono al più contenere particelle con spin 2. Nel limite di bassa quantità di moto, le particelle senza massa con spin maggiore di  $\frac{1}{2}$  si accoppiano con quantità conservate. Tuttavia, particelle con spin  $\frac{3}{2}$  non permettono accoppiamenti rinormalizzabili e particelle con spin  $\frac{5}{2}$  non permettono accoppiamenti coerenti con la gravità. Pertanto, il numero  $N$  di supercariche è limitato a  $N \leq 4$  per teorie rinormalizzabili e  $N \leq 8$  per teorie coerenti di supergravità.

**Supersimmetria  $N = 1$ .** I supermultipletti per supersimmetria  $N = 1$  presentano particelle con due spin diversi. I supermultipletti di interesse sono il multipletto chirale ed il multipletto vettoriale.

Il multipletto chirale  $\lambda_0 = 0$  è anche detto multipletto della materia o di Wess–Zumino:

$$\begin{array}{lll} \text{elicità:} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \text{stati:} & 1 & 2 & 1. \end{array}$$

I gradi di libertà corrispondono ad un fermione di Weyl ed uno scalare complesso. Questo multipletto viene utilizzato nel modello di Wess–Zumino senza massa, un modello che contiene uno scalare, uno pseudoscalare ed un campo di Majorana a spin  $\frac{1}{2}$  in interazione.

Il multipletto vettoriale  $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ , o di gauge, è dato da:

$$\begin{array}{llll} \text{elicità:} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \text{stati:} & 1 & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

I gradi di libertà corrispondono ad un vettore ed un fermione di Weyl. Questo multipletto permette di descrivere i campi di gauge.

**Supersimmetria  $N = 2$ .** Anche in questo caso i supermultipletti di interesse sono il multipletto chirale ed il multipletto vettoriale.

Il multipletto chirale  $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$  viene detto anche ipermultipletto:

$$\begin{array}{llll} \text{elicità:} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \text{stati:} & 2 & 4 & 2. \end{array}$$

I gradi di libertà corrispondono a due fermioni di Weyl e due scalari complessi. Questo multipletto è composto da due multipletti chirali  $N = 1$  con chiralità opposta come richiesto dalla simmetria CPT.

Il multipletto vettoriale  $\lambda_0 = 0$ , detto anche di gauge, presenta:

$$\begin{array}{lllll} \text{elicità:} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \text{stati:} & 1 & 2 & 2 & 2 & 1. \end{array}$$

I gradi di libertà corrispondono ad un vettore, due fermioni di Weyl ed uno scalare complesso. Questo multipletto è dato da un multipletto chirale  $N = 1$  e un multipletto vettoriale  $N = 1$ .

## 2.2 Campi

Per trattare teorie dei campi supersimmetriche, bisogna costruire delle rappresentazioni della supersimmetria utilizzando multipletti di campi al posto di multipletti di stati. Si vede il caso più semplice: il multipletto chirale  $N = 1$ .

La struttura dell'algebra della supersimmetria è molto simile alla struttura di una algebra di Clifford e così si può costruire esplicitamente una rappresentazione. Si consideri un campo scalare complesso  $A(x)$  come stato fondamentale della rappresentazione. Si impone la condizione di chiralità

$$[A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0. \quad (2.10)$$

Si definiscono i campi  $\psi_{\alpha}(x)$ ,  $F_{\alpha\beta}(x)$  e  $X_{\alpha\dot{\beta}}(x)$  tramite

$$[A, Q_{\alpha}] \equiv 2i\psi_{\alpha}, \quad \{\psi_{\alpha}, Q_{\beta}\} \equiv -iF_{\alpha\beta}, \quad \{\psi_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \equiv X_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (2.11)$$

Utilizzando la formula

$$\{[A, Q], \bar{Q}\} + \{[A, \bar{Q}], Q\} = [A, \{Q, \bar{Q}\}] = 2i\sigma^{\mu} \partial_{\mu} A, \quad (2.12)$$

si applica l'algebra al campo  $A(x)$ :

$$2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} \partial_{\mu} A = 2i\{\psi_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2iX_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (2.13)$$

Tramite un'identità simile per  $[A, \{Q, Q\}]$ , si ottiene

$$0 = 2i\{\psi_\alpha, Q_\beta\} + 2i\{\psi_\beta, Q_\alpha\} = 2(F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}), \quad (2.14)$$

la cui soluzione è  $F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}F$  dove  $F(x)$  è un campo scalare complesso. Si definiscono i campi  $\lambda_\alpha$  e  $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$  tramite

$$[F, Q_\alpha] \equiv \lambda_\alpha, \quad [F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}. \quad (2.15)$$

Si applica l'algebra al campo  $\psi$  ottenendo le condizioni

$$-i\varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\chi}_{\dot{\beta}} + 2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\psi_\beta = 2i(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\partial_\mu\psi_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda_\gamma + \varepsilon_{\alpha\gamma}\lambda_\beta = 0, \quad (2.16)$$

le cui soluzioni sono

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = 2(\partial_\mu\psi^\beta)(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}, \quad \lambda_\alpha = 0. \quad (2.17)$$

Come controllo si utilizzano le relazioni

$$[\psi, \{\bar{Q}, \bar{Q}\}] = [F, \{Q, Q\}] = [F, \{\bar{Q}, \bar{Q}\}] = 0, \quad [F, \{Q, \bar{Q}\}] = 2i\sigma^\mu\partial_\mu F. \quad (2.18)$$

In questo modo si è costruita una rappresentazione della supersimmetria  $N = 1$  tramite un multipletto  $\phi$  di campi

$$\phi = (A; \psi; F). \quad (2.19)$$

La rappresentazione è espressa in termini di (anti)commutatori

$$\begin{aligned} [A, Q_\alpha] &= 2i\psi_\alpha, & [A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= 0, \\ \{\psi_\alpha, Q_\beta\} &= -i\varepsilon_{\alpha\beta}F, & \{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu A, \\ [F, Q_\alpha] &= 0, & [F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= 2(\partial_\mu\psi^\beta)(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tipicamente si introducono i parametri spinoriali anticommutanti  $\zeta^\alpha$  per cui vale  $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \equiv (\zeta^\alpha)^*$ . Essi anticommutano con gli operatori fermionici e commutano con quelli bosonici. Quindi si può definire la variazione di supersimmetria infinitesimale

$$\delta\phi \equiv -i[\phi, \zeta^\alpha Q_\alpha + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}]. \quad (2.21)$$

Pertanto, le leggi di trasformazione del multipletto  $\phi$  sono

$$\begin{aligned} \delta A &= 2\zeta\psi, \\ \delta\psi &= -\zeta F - i(\partial_\mu A)\sigma^\mu\bar{\zeta}, \\ \delta F &= -2i(\partial_\mu\psi)\sigma^\mu\bar{\zeta}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

mentre l'algebra diventa

$$[\delta_1, \delta_2]\phi = 2i(\zeta_1\sigma^\mu\bar{\zeta}_2 - \zeta_2\sigma^\mu\bar{\zeta}_1)\partial_\mu\phi. \quad (2.23)$$

**Gradi di libertà.** Il multipletto  $\phi$  ha quattro gradi di libertà bosonici:  $\text{Re } A$ ,  $\text{Im } A$ ,  $\text{Re } F$  e  $\text{Im } F$ , e quattro fermionici:  $\text{Re } \psi_1$ ,  $\text{Im } \psi_1$ ,  $\text{Re } \psi_2$  e  $\text{Im } \psi_2$ . Questo è il minore numero di gradi di libertà in  $3 + 1$  dimensioni, ma non corrisponde al numero trovato per il multipletto chirale  $N = 1$  visto in precedenza, in cui si hanno due gradi bosonici e due fermionici. Nel caso dei campi, i gradi di libertà sono da considerarsi off-shell. Infatti, passando on-shell, i quattro gradi fermionici si riducono a due grazie all'equazione di Dirac, mentre la diminuzione dei gradi bosonici è dovuta alla natura del campo  $F$ . Esso è un campo ausiliario e non dinamico: costruendo delle lagrangiane, le equazioni del moto associate suggeriscono che il campo  $F$  dipende dai campi  $A$  e  $\psi$ .

Successivamente, nello studio del modello di Wess–Zumino, si prosegue la discussione delle rappresentazioni off-shell ed on-shell notando come la differenza tra le due diventi evidente.

### 2.3 Multipletti chirali

Si passa alla notazione a quattro componenti lasciando la notazione chirale degli spinori. Si utilizzano le matrici di Dirac e la notazione di Feynman:

$$\gamma^\mu \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 \equiv \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.24)$$

Si definiscono gli spinori di Majorana come

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{\alpha i} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha} i} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{Q}_i^\dagger \gamma^0 = [Q_i^\alpha \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i]. \quad (2.25)$$

L'algebra delle supercariche diventa

$$\{\mathbf{Q}_i, \bar{\mathbf{Q}}_j\} = 2(\delta_{ij} \gamma^\mu P_\mu + i \operatorname{Im} Z_{ij} + i \gamma_5 \operatorname{Re} Z_{ij}), \quad (2.26)$$

insieme a

$$[\mathbf{Q}, P_\mu] = 0, \quad [\mathbf{Q}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathbf{Q}, \quad [\mathbf{Q}, R] = i \gamma_5 \mathbf{Q}. \quad (2.27)$$

Definendo uno spinore di Majorana  $\zeta^i$ , si ha

$$\zeta^{\alpha i} Q_{\alpha i} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}^i = \bar{\zeta} \mathbf{Q}, \quad \delta \phi = -i[\phi, \bar{\zeta} \mathbf{Q}], \quad (2.28)$$

così come

$$[\delta_1, \delta_2] \phi = 2i \bar{\zeta}_1 \gamma^\mu \zeta_2 \partial_\mu \phi + 2i \bar{\zeta}_1^i [\phi, \operatorname{Im} Z_{ij} + \gamma_5 \operatorname{Re} Z_{ij}] \zeta_2^j. \quad (2.29)$$

Una forma reale, Majorana, del multipletto chirale  $N = 1$  si può ottenere nel seguente modo. Sia  $\phi = (A'; \psi_\alpha; F')$ . Siano  $A, B$  e  $F, G$  le parti reali ed immaginarie dei campi complessi  $A'$  e  $(F')^\dagger$ :

$$A' \equiv A + iB, \quad (F')^\dagger \equiv F + iG. \quad (2.30)$$

Si costruisce uno spinore di Majorana  $\Psi$  dallo spinore chirale  $\psi_\alpha$  ed il suo coniugato  $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ . Le leggi di trasformazione del multipletto

$$\phi = (A, B; \Psi; F, G) \quad (2.31)$$

si possono ricavare a partire dalle trasformazioni dei campi complessi (eq. 2.22) come fatto successivamente; oppure costruire un multipletto secondo la procedura della sottosezione 2.2 scegliendo una coppia scalare–pseudoscalare  $(A, B)$ , imponendo che  $\delta B$  sia pari a  $\delta A$  ma con l'aggiunta della matrice  $\gamma_5$  e infine applicando l'algebra delle supercariche (eq. 2.26 e 2.27) in assenza di cariche centrali. In ogni caso si ottiene

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\zeta} \Psi, & \delta B &= \bar{\zeta} \gamma_5 \Psi, \\ \delta \Psi &= -(F + \gamma_5 G) \zeta - i \not{\partial} (A + \gamma_5 B) \zeta, \\ \delta F &= i \bar{\zeta} \not{\partial} \Psi, & \delta G &= i \bar{\zeta} \gamma_5 \not{\partial} \Psi. \end{aligned} \quad (2.32)$$

In base alla presenza della matrice  $\gamma_5$  si deduce la parità:  $A$  ed  $F$  sono scalari, mentre  $B$  e  $G$  sono pseudoscalari. La proprietà che definisce il multipletto chirale, vale a dire l'assenza del

parametro  $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}$  nella variazione del campo complesso  $A'$  (eq. 2.22) si manifesta nel fatto che lo spinore in  $\delta B$  risulta essere  $\gamma_5$  volte quello in  $\delta A$ . Infatti

$$\begin{aligned}\delta A' &= 2\zeta^\alpha \psi_\alpha = \zeta^\alpha \psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} + \zeta^\alpha \psi_\alpha - \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \\ &= \zeta^\alpha \psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} + i(-i\zeta^\alpha \psi_\alpha + i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}) \\ &= \bar{\zeta} \Psi + i\bar{\zeta} \gamma_5 \Psi = \delta(A + iB).\end{aligned}\quad (2.33)$$

Similmente per  $\delta F$  e  $\delta G$ :

$$\begin{aligned}\delta(F')^\dagger &= 2i\zeta^\alpha \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = i\zeta^\alpha \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\zeta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_\alpha + i\zeta^\alpha \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\zeta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_\alpha \\ &= i\bar{\zeta} \not{\partial} \Psi + i(i\bar{\zeta} \gamma_5 \not{\partial} \Psi) = \delta(F + iG).\end{aligned}\quad (2.34)$$

Infine, la trasformazione dello spinore  $\Psi$  si ottiene considerando le trasformazioni degli spinori  $\psi_\alpha$  e  $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ :

$$\begin{aligned}\delta \Psi \equiv \begin{bmatrix} \delta \psi_\alpha \\ \delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} F' \zeta_\alpha + i\sigma^\mu (\partial_\mu A') \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \\ (F')^\dagger \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\sigma}^\mu [\partial_\mu (A')^\dagger] \zeta_\alpha \end{bmatrix} \\ &= - \left( F \begin{bmatrix} \zeta_\alpha \\ \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} + iG \begin{bmatrix} -\zeta_\alpha \\ \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \right) - i \begin{bmatrix} \sigma^\mu \partial_\mu (A + iB) \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (A - iB) \zeta_\alpha \end{bmatrix} \\ &= -(F + \gamma_5 G) \zeta - i \not{\partial} (A + \gamma_5 B) \zeta.\end{aligned}\quad (2.35)$$

**Prodotto di multipletti.** Dati due multipletti chirali  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , ne si può costruire un terzo definendo il prodotto tra multipletti  $\phi_3 = \phi_1 \cdot \phi_2$ . Per la condizione di chiralità, si ha

$$[A'_1, \bar{Q}] = [A'_2, \bar{Q}] = 0 \implies [A'_1 A'_2, \bar{Q}] = 0, \quad (2.36)$$

dove  $A'_1$  e  $A'_2$  sono campi complessi. Si definisce  $A'_3 \equiv A'_1 A'_2$  e, utilizzando i commutatori associati ai multipletti chirali (eq. 2.20) — in particolare i primi due nella colonna di sinistra —, si possono ottenere le altre componenti del multipletto:

$$\psi_3 = A'_1 \psi_2 + \psi_1 A'_2, \quad F'_3 = A'_1 F'_2 + F'_1 A'_2 + 2\psi_1 \psi_2. \quad (2.37)$$

In termini di campi reali e con notazione a quattro componenti, segue:

$$\begin{aligned}A_3 &= A_1 A_2 - B_1 B_2, \\ B_3 &= B_1 A_2 + A_1 B_2, \\ \Psi_3 &= (A_1 - \gamma_5 B_1) \Psi_2 + (A_2 - \gamma_5 B_2) \Psi_1, \\ F_3 &= F_1 A_2 + A_1 F_2 + B_1 G_2 + G_1 B_2 + \bar{\Psi}_1 \Psi_2, \\ G_3 &= G_1 A_2 + A_1 G_2 - B_1 F_2 - F_1 B_2 - \bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Inoltre, il prodotto di tre multipletti è associativo e quindi ben definito per un numero arbitrario di multipletti.

**Multipletto cinetico.** Dal multipletto  $\phi$  si può costruire un altro multipletto. I campi reali  $F$  e  $G$  sono il suo inizio: questo lo si può capire osservando che lo spinore in  $\delta G$  è  $\gamma_5$  volte quello in  $\delta F$ . Il nuovo multipletto è detto multipletto cinetico  $\mathbb{T}\phi$  con componenti

$$\mathbb{T}\phi = (F, G; i \not{\partial} \Psi; -\square A, -\square B). \quad (2.39)$$

Inoltre, si nota che

$$\mathbb{T}\mathbb{T}\phi = -\square \phi, \quad (2.40)$$

da cui viene naturale considerare  $\mathbb{T}$  come la generalizzazione dell'operatore di Dirac  $i \not{\partial}$ .

**Invarianti.** Si costruisce un invariante tramite il multipletto contragradiente del multipletto chirale  $\phi$ :

$$\mathcal{L} = Af + Bg + \bar{\Psi}\chi + Fa + Gb. \quad (2.41)$$

I campi  $a, b, \chi, f$  e  $g$  corrispondono al multipletto contragradiente e le loro trasformazioni di supersimmetria si trovano imponendo che la densità  $\mathcal{L}$  trasformi come una divergenza totale:

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu \kappa_\mu. \quad (2.42)$$

Dunque l'integrale della densità su tutto lo spazio-tempo è invariante e costante: si possono costruire delle lagrangiane. Calcolando la trasformazione dell'invariante  $\mathcal{L}$  e ricordando le trasformazioni del multipletto chirale (eq. 2.32), si ottiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & A\delta f + B\delta g + \bar{\Psi}\delta\chi + F\delta a + G\delta b + f\bar{\zeta}\Psi + g\bar{\zeta}\gamma_5\Psi - \bar{\zeta}(F + \gamma_5 G)\chi \\ & + i\bar{\zeta}[\not{D}(A - \gamma_5 B)]\chi + i\bar{\zeta}(\not{D}\Psi)a + i\bar{\zeta}\gamma_5(\not{D}\Psi)b. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Integrando per parti la seconda riga, si ha

$$\delta\mathcal{L} = \dots - i\bar{\zeta}(A + \gamma_5 B)\not{D}\chi - i\bar{\zeta}[\not{D}(a - \gamma_5 b)]\Psi + \partial^\mu [i\bar{\zeta}(A + \gamma_5 B) + \gamma_\mu\chi + i\bar{\zeta}(a + \gamma_5 b)\gamma_\mu\Psi]. \quad (2.44)$$

A questo punto si impone che la variazione  $\delta\mathcal{L}$  sia pari alla divergenza nella riga sopra. Confrontando i coefficienti dei campi  $A, B, \bar{\Psi}, F$  e  $G$ , si ottengono le trasformazioni del multipletto contragradiente: esse sono uguali a quelle del multipletto chirale  $\phi$  (eq. 2.32). Pertanto, il multipletto contragradiente è un multipletto chirale:

$$\phi' = (a, b; \chi; f, g). \quad (2.45)$$

Questo implica che il multipletto chirale è auto-contragradiente. Inoltre si nota che l'invariante  $\mathcal{L}$  è la componente  $F$  del prodotto  $\phi \cdot \phi'$ :

$$\mathcal{L} = (\phi \cdot \phi')_F. \quad (2.46)$$

Dunque, ogni componente  $F$  di un multipletto chirale è una densità scalare.

**Nota sulla costruzione di lagrangiane.** Costruire una lagrangiana nel modo presentato rende piuttosto arduo e tedioso verificare che l'azione associata sia effettivamente invariante per trasformazioni di supersimmetria. Per ovviare a questo problema si trattano le teorie dei campi supersimmetriche tramite il concetto di superspazio, un'estensione dello spazio di Minkowski che tiene conto delle simmetrie associate ai generatori di supersimmetria. In tale modo la costruzione di lagrangiane che rispettino la supersimmetria è un'operazione semplice e diretta.

## 2.4 Multipletti reali

I multipletti reali sono dei multipletti vettoriali che permettono la descrizione dei campi di gauge. A differenza dei multipletti chirali, non si impone la condizione di chiralità, bensì la condizione di realtà: si costruisce un multipletto  $V$  in maniera analoga alla sottosezione 2.2, ma si impone la condizione  $V = V^\dagger$ . In questo modo, tutte le sue componenti sono reali o Majorana, e si ha un grado di libertà vettoriale. Il multipletto reale è dato da

$$V = (C; \chi; M, N, A_\mu; \lambda; D). \quad (2.47)$$

Le sue leggi di trasformazione sono

$$\begin{aligned}
\delta C &= \bar{\zeta} \gamma_5 \chi, \\
\delta \chi &= (M + \gamma_5 N) \zeta - i \gamma^\mu (A_\mu + \gamma_5 \partial_\mu C) \zeta, \\
\delta M &= \bar{\zeta} (\lambda - i \not{\partial} \chi), \\
\delta N &= \bar{\zeta} \gamma_5 (\lambda - i \not{\partial} \chi), \\
\delta A_\mu &= i \bar{\zeta} \gamma_\mu \lambda + \bar{\zeta} \partial_\mu \chi, \\
\delta \lambda &= -i \sigma^{\mu\nu} \zeta \partial_\mu A_\nu - \gamma_5 \zeta D, \\
\delta D &= -i \bar{\zeta} \not{\partial} (\gamma_5 \lambda).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

**Sottomultipletti.** Si possono trovare vari sottomultipletti all'interno di un multipletto reale. Posto

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.49}$$

si nota che i campi  $F_{\mu\nu}$ ,  $\lambda$  e  $D$  si trasformano tra loro. Essi costituiscono il multipletto rotore

$$dV = (\lambda; F_{\mu\nu}, D). \tag{2.50}$$

Le trasformazioni sono date da

$$\begin{aligned}
\delta \lambda &= -\frac{1}{2} i \sigma^{\mu\nu} \zeta F_{\mu\nu} - \gamma_5 \zeta D, \\
\delta F_{\mu\nu} &= -i \bar{\zeta} (\gamma_\mu \partial_\nu - \gamma_\nu \partial_\mu) \lambda, \\
\delta D &= -i \bar{\zeta} \not{\partial} (\gamma_5 \lambda).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Poiché  $F_{\mu\nu}$  è un rotore, vale

$$\partial_{[\kappa} F_{\mu\nu]} = 0 \iff \partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} = 0 \tag{2.52}$$

e le trasformazioni sopra rappresentano l'algebra della supersimmetria.

Un altro sottomultipletto è il multipletto chirale

$$\partial V = (M, N; \lambda - i \not{\partial} \chi; \partial^\mu A_\mu, D + \square C). \tag{2.53}$$

Dati questi due multipletti, si può imporre che il multipletto reale  $V$  contenga solo uno dei due:  $dV = 0$  oppure  $\partial V = 0$ . In entrambi i casi, i campi rimanenti si trasformano solo tra loro. Per  $dV = 0$ , le componenti rimaste si possono disporre in un multipletto chirale

$$\phi = (A, C; \chi; -M, -N), \tag{2.54}$$

dove il campo  $A$  è dato dalla soluzione  $A_\mu = \partial_\mu A$  di  $F_{\mu\nu} = 0$ . Per  $\partial V = 0$ , le componenti che rimangono formano il multipletto lineare

$$L = (C; \chi; A_\mu) \tag{2.55}$$

le cui trasformazioni sono

$$\begin{aligned}
\delta C &= \bar{\zeta} \gamma_5 \chi, \\
\delta \chi &= -i \gamma^\mu (A_\mu + \gamma_5 \partial_\mu C) \zeta, \\
\delta A_\mu &= i \bar{\zeta} \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \chi.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Esse rappresentano l'algebra della supersimmetria qualora  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

**Prodotto di multipletti e invarianti.** La definizione del prodotto tra multipletti reali e la costruzione di invarianti segue analogamente quanto fatto per i multipletti chirali. Infatti, si può costruire un multipletto reale a partire da altri due  $V_3 = V_1 \cdot V_2$ . Inoltre, si può trovare la struttura del multipletto contragradiente con l'ansatz

$$\mathcal{L} = CD' + \bar{\chi}\chi' - MM' - NN' - A^\mu A'_\mu + \bar{\lambda}\chi' + DC'. \quad (2.57)$$

Confrontando i coefficienti dei campi del multipletto  $V$  nella variazione della densità  $\mathcal{L}$ , si deducono delle leggi di trasformazione. Dai campi primati si può ottenere il multipletto reale

$$V' = (C'; \chi'; M', N', A'_\mu; \lambda' + i\phi\chi'; D' - \square C'). \quad (2.58)$$

Infine, ogni componente  $D$  di un multipletto reale è una densità scalare

$$\mathcal{L} = (V \cdot V')_D + \partial^\mu \alpha_\mu, \quad (2.59)$$

dove  $\partial^\mu \alpha_\mu$  rappresenta una generica divergenza e la componente  $D$  di un prodotto di multipletti reali è data da

$$\begin{aligned} D_3 = & C_1 D_2 + D_1 C_2 - M_1 M_2 - N_1 N_2 - \partial_\mu C_1 \partial^\mu C_2 \\ & - A_{1\mu} A_2^\mu + \bar{\lambda}_1 \chi_2 + \bar{\chi}_1 \lambda_2 - \frac{1}{2} i (\phi \bar{\chi}_1 \chi_2 - \bar{\chi}_1 \phi \chi_2). \end{aligned} \quad (2.60)$$



### 3 Supercampi

Il modo più naturale per costruire una lagrangiana con supersimmetria  $N = 1$  si basa sul superspazio, un'estensione dello spazio di Minkowski. Alle coordinate spaziotemporali  $x^\mu$  associate al quadrimpulso  $P_\mu$ , generatore delle traslazioni, si aggiungono delle coordinate di Grassmann,  $\theta_\alpha$  e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ , associate ai generatori della supersimmetria  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ . In questo modo, le proprietà della supersimmetria diventano evidenti.

Gli spinori  $\theta_\alpha$  e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  sono un insieme di numeri di Grassmann costanti definiti dalla proprietà di anticommutare con ogni oggetto fermionico e commutare con ogni oggetto bosonico:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0, \quad \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \{\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (3.1)$$

In questo modo si può esprimere l'algebra della supersimmetria tramite soli commutatori:

$$[\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}] = 0, \quad [\theta Q, \theta Q] = [\bar{\theta} \bar{Q}, \bar{\theta} \bar{Q}] = 0. \quad (3.2)$$

Un elemento del gruppo corrispondente all'algebra, il gruppo di superPoincaré, è dato da

$$\tilde{g}(x, \theta, \bar{\theta}, \omega) = \exp(ix^\mu P_\mu + i\theta^\alpha Q_\alpha + i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) = g(x, \theta, \bar{\theta})h(\omega). \quad (3.3)$$

Un punto  $(x, \theta, \bar{\theta})$  del superspazio viene identificato dal rappresentante  $g(x, \theta, \bar{\theta})$  del superspazio.

I supercampi sono campi nel superspazio, cioè funzioni delle coordinate  $(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$  del superspazio. Poiché le coordinate di Grassmann  $\theta$  anticommutano, il prodotto di almeno tre di loro è nullo. Pertanto, il supercampo più generale ha la seguente espansione

$$\begin{aligned} Y(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha m(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} n(x) \\ & + \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} v_\mu(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \rho_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} d(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Trasformazioni.** Una traslazione di un supercampo  $Y(x, \theta, \bar{\theta})$  nel superspazio, cioè una trasformazione di supersimmetria, pari ad una quantità  $(\zeta_\alpha, \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}})$  è definita come

$$Y(x + \delta x, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) = e^{-i(\zeta Q + \bar{\zeta} \bar{Q})} Y(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i(\zeta Q + \bar{\zeta} \bar{Q})}, \quad (3.5)$$

mentre la variazione come

$$\delta Y(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv Y(x + \delta x, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) - Y(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (3.6)$$

Dalla definizione di traslazione sopra e dalla formula di Baker–Campbell–Hausdorff si ottiene

$$\delta x^\mu = i\theta \sigma^\mu \bar{\zeta} - i\zeta \sigma^\mu \bar{\theta}, \quad \delta \theta^\alpha = \zeta^\alpha, \quad \delta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}. \quad (3.7)$$

Confrontando l'espansione di Taylor della variazione  $\delta Y$  con la definizione di traslazione sopra, si ricava

$$[Y, Q_\alpha] = \mathcal{Q}_\alpha Y, \quad [Y, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}} Y, \quad (3.8)$$

dove le lettere calligrafiche sono la rappresentazione delle supercariche come operatori differenziali:

$$\mathcal{Q}_\alpha = -i\partial_\alpha - \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu, \quad \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \theta \sigma^\mu \partial_\mu. \quad (3.9)$$

Da queste relazioni, la variazione si può esprimere come

$$\delta Y = i(\zeta \mathcal{Q} + \bar{\zeta} \bar{\mathcal{Q}}) Y. \quad (3.10)$$

**Differenziazione ed integrazione.** Per costruire una lagrangiana a partire da supercampi bisogna definire le operazioni di differenziazione e integrazione.

Le derivate rispetto le coordinate di Grassmann sono definite da

$$\partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad \partial_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = 0, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \theta^\beta = 0, \quad (3.11)$$

con

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad \partial^\alpha = -\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_{\dot{\beta}}. \quad (3.12)$$

L'integrazione in una coordinata di Grassmann  $\theta$  è definita da

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta \theta = 1. \quad (3.13)$$

Per una funzione generica  $f(\theta) = f_0 + \theta f_1$  si ha

$$\int d\theta f(\theta) = f_1, \quad \int d\theta \delta(\theta) f(\theta) = f_0. \quad (3.14)$$

Integrare in una variabile di Grassmann equivale a farne la derivata. Generalizzando tali relazioni per il superspazio  $N = 1$  e considerando

$$\int d^2\theta \equiv \frac{1}{2} \int d\theta^1 d\theta^2, \quad \int d^2\bar{\theta} \equiv \frac{1}{2} \int d\bar{\theta}^{\dot{1}} d\bar{\theta}^{\dot{2}}, \quad (3.15)$$

si ottiene

$$\int d^2\theta \theta\theta = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\theta} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} = 1. \quad (3.16)$$

**Azione supersimmetrica.** Un'azione è invariante per trasformazioni di superPoincaré se la lagrangiana si trasforma come una densità scalare per trasformazioni di Poincaré e la sua variazione di supersimmetria è una divergenza totale. La costruzione di un'azione supersimmetrica a partire da un supercampo diventa immediata. Considerato che la misura è un invariante traslazionale per costruzione, allora

$$\delta S = \delta \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} Y(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \delta Y(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (3.17)$$

Ricordando l'espressione per la variazione di un supercampo (eq. 3.10), si ha

$$\delta Y = \zeta^\alpha \partial_\alpha Y + \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} Y + \partial_\mu [-i(\zeta \sigma^\mu \bar{\theta} - \theta \sigma^\mu \bar{\zeta}) Y]. \quad (3.18)$$

Integrare nelle coordinate di Grassmann elimina i primi due addendi, mentre l'ultimo termine è una divergenza totale. Pertanto

$$\delta S = 0. \quad (3.19)$$

Il supercampo considerato deve essere tale da fornire una densità di lagrangiana — un operatore reale che si trasforma come una densità scalare — una volta integrato nelle coordinate di Grassmann. A tale scopo, il supercampo generale  $Y$  (eq. 3.4) presenta troppe componenti: bisogna imporre dei vincoli per ottenere un sottoinsieme delle sue componenti che sia ancora un supercampo. Come per i supermultipletti, due esempi di condizioni da imporre sono la chiralità e la realtà.

### 3.1 Supercampi chirali

Le condizioni da applicare ad un supercampo  $Y$  devono mantenerlo un supercampo. Le operazioni tra supercampi che forniscono un altro supercampo sono la somma  $Y_1 + Y_2$ , il prodotto  $Y_1 Y_2$  e la moltiplicazione per uno scalare  $\alpha Y$ . Allo stesso modo pure la derivata spazio-temporale  $\partial_\mu Y$ , ma non le derivate chirali  $\partial_\alpha Y$  e  $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} Y$ .

Si possono definire le derivate covarianti

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta \sigma^\mu \partial_\mu, \quad (3.20)$$

per cui vale

$$[\zeta \mathcal{Q} + \bar{\zeta} \bar{\mathcal{Q}}, \mathcal{D}_\alpha] = [\zeta \mathcal{Q} + \bar{\zeta} \bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}] = 0. \quad (3.21)$$

Questo implica

$$\delta(\mathcal{D}_\alpha Y) = \mathcal{D}_\alpha(\delta Y), \quad (3.22)$$

cioè se  $Y$  è un supercampo, allora pure  $\mathcal{D}_\alpha Y$ . La condizione che definisce un supercampo chirale  $\Phi$  è dato da

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0, \quad (3.23)$$

Analogamente, per un supercampo antichirale si ha

$$\mathcal{D}_\alpha \Psi = 0. \quad (3.24)$$

Per trovare le componenti di un supercampo chirale conviene cambiare le coordinate:

$$y^\mu = x^\mu + i\theta \sigma^\mu \bar{\theta}, \quad \bar{y}^\mu = x^\mu - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta}. \quad (3.25)$$

Il vincolo di chiralità implica

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta F(y), \quad (3.26)$$

che, espresso in termini delle variabili originali, fornisce

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \theta\theta F(x) \\ &+ i\theta\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \phi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \partial_\mu \psi(x) \sigma^\mu \bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \square \phi(x). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Questo supercampo ha meno componenti del supercampo generale  $Y$  e alcune sono funzioni di altre. Esso descrive esattamente i gradi di libertà di un multipletto chirale di campi (eq. 2.19). In maniera analoga si può ottenere l'espressione del supercampo antichirale  $\bar{\Phi}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \bar{\phi}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) - \bar{\theta}\bar{\theta} \bar{F}(x) \\ &- i\theta\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \bar{\phi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \square \bar{\phi}(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le trasformazioni di supersimmetria del supercampo si ricavano calcolando la variazione

$$\delta\Phi(y, \theta) = i(\zeta \mathcal{Q} + \bar{\zeta} \bar{\mathcal{Q}})\Phi(y, \theta). \quad (3.29)$$

Riscrivendo gli operatori differenziali  $\mathcal{Q}$  in termini delle coordinate  $y$  si ottengono le trasformazioni

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}\zeta\psi, \\ \delta\psi_\alpha &= \sqrt{2}i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi - \sqrt{2}\zeta_\alpha F, \\ \delta F &= \sqrt{2}i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\zeta}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

analoghe a quelle trovate per il multipletto chirale (eq. 2.22).

**Lagrangiane e azioni.** Si vuole costruire una densità di lagrangiana che descriva un supercampo chirale. Un primo termine è dato dall'integrale

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (3.31)$$

dove  $K$  è una funzione generica del supercampo chirale  $\Phi$  e del supercampo antichirale  $\bar{\Phi}$ , con varie proprietà. Essa viene detta potenziale di Kähler ed è un supercampo, una funzione scalare e reale, e infine una funzione di  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$ , ma non di  $\mathcal{D}_\alpha \Phi$  né  $\bar{\mathcal{D}}_\alpha \bar{\Phi}$ . La sua espressione più generale è data da

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \bar{\Phi}^m \Phi^n, \quad c_{mn} = c_{nm}^*. \quad (3.32)$$

I coefficienti  $c_{mn}$  hanno dimensione negativa per  $m$  o  $n$  maggiori di uno, mentre  $c_{11}$  è adimensionale: per una teoria rinormalizzabile, solo il primo coefficiente può essere diverso da zero. I casi con  $m = 0$  o  $n = 0$  producono funzioni  $K$  che, sebbene diverse, hanno lo stesso integrale nel superspazio.

Tuttavia, in questo modo non si possono descrivere interazioni rinormalizzabili come interazioni scalari che non coinvolgono derivate e interazioni di Yukawa. Un altro metodo per costruire integrali invarianti nel superspazio riguarda l'integrazione di un supercampo chirale  $\Sigma$  — ottenuto da prodotti del supercampo chirale  $\Phi$  — su metà superspazio

$$\int d^4x d^2\theta \Sigma. \quad (3.33)$$

Tale integrale è invariante poiché la componente  $\theta\theta$  di un supercampo chirale si trasforma come una divergenza totale per trasformazioni di supersimmetria (eq. 3.30). Un integrale in questa forma è più generale di un integrale su tutto il superspazio: alcuni integrali su metà superspazio non si possono riscrivere per includerlo tutto, ma vale il viceversa. Il termine che descrive le interazioni di un supercampo chirale è dato da

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \int d^2\theta W(\Phi) + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}(\bar{\Phi}), \quad (3.34)$$

dove  $W$  è il superpotenziale, una funzione olomorfa del supercampo chirale  $\Phi$ , ancora chirale, che non contiene derivate covarianti. La sua espressione più generale è data da

$$W(\Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi^n. \quad (3.35)$$

Per una teoria rinormalizzabile, la potenza del supercampo chirale dev'essere al più  $n = 3$ . Le componenti del superpotenziale sono

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2} \frac{\partial W}{\partial \phi} \theta\psi - \theta\theta \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi\psi \right). \quad (3.36)$$

L'espressione della lagrangiana di interazione diventa

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\partial W}{\partial \phi} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi\psi + \text{h.c.} \quad (3.37)$$

Unendo quanto trovato, si può scrivere la più generale lagrangiana con supersimmetria  $N = 1$  che descrive la dinamica di un supercampo chirale  $\Phi$

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \bar{\Phi}) + \int d^2\theta W(\Phi) + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}(\bar{\Phi}). \quad (3.38)$$

### 3.2 Supercampi reali

Un supercampo reale  $V$  è un supercampo vincolato dalla condizione di realtà

$$V = \bar{V}. \quad (3.39)$$

Le sue componenti sono

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] \\ & - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right] \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) - \frac{1}{2}\square C(x)\right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

I supercampi reali permettono la descrizione di teorie di gauge supersimmetriche. Infatti, si può definire una generalizzazione delle trasformazioni di gauge,

$$V' = V + \Phi + \bar{\Phi}, \quad (3.41)$$

per cui la componente vettoriale del supercampo si trasforma come

$$v'_\mu = v_\mu - \partial_\mu(2\text{Im}\phi). \quad (3.42)$$

Tuttavia, anche le altre componenti hanno delle trasformazioni. Questo permette di fare una scelta di gauge, in particolare il gauge di Wess–Zumino,

$$C = M = N = \chi = 0. \quad (3.43)$$

In questo gauge, il supercampo si può riscrivere come

$$V_{\text{WZ}} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \quad (3.44)$$

Il gauge di Wess–Zumino non vincola le componenti del vettore  $v_\mu$  e pertanto si possono fare delle trasformazioni di gauge ordinarie.

## 4 Modello di Wess–Zumino

Il modello di Wess–Zumino è il più semplice esempio non banale di teoria supersimmetrica. Esso considera un solo supercampo chirale  $\Phi$  in autointerazione rinormalizzabile.

Questo modello può emergere a basse energie in sistemi di materia condensata [10] e può essere simulato tramite reticoli ottici [11].

**Azione.** Il modello di Wess–Zumino è una teoria rinormalizzabile: il potenziale di Kähler e il superpotenziale assumono la seguente forma

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = \bar{\Phi}\Phi, \quad W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{3}\Phi^3. \quad (4.1)$$

A priori dovrebbe essere presente anche il termine  $a_1\Phi$ , ma si può eliminare tramite una ridefinizione dei campi.

L'azione corrispondente al potenziale di Kähler si ottiene moltiplicando tutti i termini dei supercampi  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$  che contribuiscono alla componente  $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$  e integrando nel superspazio. Si ricavano cinque addendi che, manipolati tramite integrazione per parti e ricordando

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\theta\theta\varepsilon^{\alpha\beta}, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad (4.2)$$

così come

$$\sigma^{(\nu}\bar{\sigma}^{\mu)} = \eta^{\mu\nu}, \quad \psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_\alpha, \quad (4.3)$$

producono la seguente azione cinetica

$$S_{\text{kin}} = \int d^4x [\partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\phi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \bar{F}F]. \quad (4.4)$$

Combinando l'azione sopra con il termine di interazione di un supercampo chirale (eq. 3.37) si ottiene l'azione di Wess–Zumino

$$S = S_{\text{kin}} + S_{\text{int}} = \int d^4x \left[ \partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\phi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \bar{F}F - \left( F\frac{\partial W}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\psi\psi + \text{h.c.} \right) \right], \quad (4.5)$$

dove si ha

$$\frac{\partial W}{\partial\phi} = m\phi + \lambda\phi^2, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2} = m + 2\lambda\phi. \quad (4.6)$$

Le equazioni del moto di Eulero–Lagrange sono

$$\begin{aligned} -\square\phi &= m\bar{F} + 2\lambda\bar{\phi}\bar{F} + \lambda\bar{\psi}\bar{\psi}, \\ -i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi &= m\bar{\psi} + 2\lambda\bar{\phi}\bar{\psi}, \\ F &= \frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}} = m\bar{\phi} + \lambda\bar{\phi}^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

e riassunte in termini di supercampi hanno la seguente forma

$$\frac{1}{4}\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}_\alpha\Phi = \frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\Phi}}. \quad (4.8)$$

**Formulazione on-shell.** Il campo  $F$  è un campo ausiliario perché non presenta termini cinetici: non ha gradi di libertà di propagazione e non dà luogo a stati di particelle quando quantizzato. Eliminare tale campo tramite le equazioni del moto permette di ricavare la formulazione on-shell del modello di Wess–Zumino

$$S = \int d^4x \left[ \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \left| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\phi}^2} \bar{\psi} \bar{\psi} \right]. \quad (4.9)$$

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} -(\square + m^2)\phi &= m\lambda(2\bar{\phi}\phi + \phi^2) + 2\lambda^2\phi^2\bar{\phi} + \lambda\bar{\psi}\bar{\psi}, \\ -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi &= m\bar{\psi} + 2\lambda\bar{\phi}\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le trasformazioni di supersimmetria associate alla formulazione on-shell sono

$$\delta\phi = \sqrt{2}\zeta\psi, \quad \delta\psi_\alpha = \sqrt{2}i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi - \sqrt{2}\zeta_\alpha\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}}, \quad (4.11)$$

cioè le trasformazioni off-shell (eq. 3.30) in cui si sostituisce  $F$  con la rispettiva equazione del moto.

**Invarianza.** Si calcola esplicitamente la variazione dell'azione on-shell per verificare che le trasformazioni associate siano una simmetria. Diversamente dal caso off-shell, non si può verificare indipendentemente l'invarianza della parte cinetica e della parte superpotenziale.

Si calcola la variazione di ogni termine della lagrangiana singolarmente. Per il primo termine si ha

$$\delta\mathcal{L}_I = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu (\delta\phi) + \text{h.c.} = \sqrt{2} \partial_\mu \bar{\phi} \zeta^\alpha \partial^\mu \psi_\alpha + \text{h.c.} \quad (4.12)$$

Per il secondo termine

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{II} &= -i \delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha - i \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu (\delta\psi_\alpha) \\ &= -\sqrt{2}\zeta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\phi} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\nu \psi_\alpha + \sqrt{2}i \frac{\partial W}{\partial \phi} \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \partial_\nu \phi (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\zeta}^{\dot{\beta}} + \sqrt{2}i \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \zeta_\alpha \partial_\mu \frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Per il terzo termine

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{III} &= -\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}} \delta \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) + \text{h.c.} = -\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \delta\phi + \text{h.c.} \\ &= -\sqrt{2} \frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \zeta^\alpha \psi_\alpha + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Per il quarto termine

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{IV} &= -\frac{1}{2} \delta \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) \psi^\alpha \psi_\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \delta\psi^\alpha \psi_\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi^\alpha \delta\psi_\alpha \\ &= \sqrt{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \left[ \frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{\phi}} \psi^\alpha \zeta_\alpha - i \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Espandendo il primo addendo di questo termine, si ottiene un fattore proporzionale a  $\psi^3$ , ma questi è nullo poiché  $\psi$  è un campo di Grassmann a due componenti. Infine, il quinto termine è l'aggiunto del quarto:

$$\delta\mathcal{L}_V = (\delta\mathcal{L}_{IV})^\dagger. \quad (4.16)$$

A questo punto si unisce quanto trovato:

- Il primo addendo del quarto termine elimina il primo addendo del terzo termine.
- Il secondo addendo del quarto termine elimina il secondo addendo del secondo termine dopo aver integrato per parti e ricordata la seconda relazione di (4.3).
- Il quinto termine agisce come il quarto, ma si occupa dei termini coniugati.
- Integrando due volte per parti il primo addendo del secondo termine, esso viene simmetrizzato rispetto gli indici  $\mu\nu$  e, nota la prima relazione di (4.3), elimina così il primo addendo del primo termine.
- Il procedimento per i due addendi rimanenti è analogo al punto precedente.

Tutti i termini considerati si annullano e la variazione di supersimmetria della lagrangiana on-shell è una divergenza totale:

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu \alpha_\mu. \quad (4.17)$$

Pertanto, l'azione associata è invariante e le trasformazioni di cui sopra (eq. 4.11) sono una simmetria.

**Rappresentazioni off-shell ed on-shell.** Le trasformazioni del supercampo chirale (eq. 3.30) rappresentano la supersimmetria in modo indipendente dalla dinamica, cioè dalla lagrangiana, tramite quattro campi bosonici reali e quattro campi fermionici reali. I due termini dell'azione off-shell (eq. 4.5) si trasformano separatamente come una divergenza totale secondo le trasformazioni citate. In questo caso si parla di supersimmetria off-shell.

La lagrangiana on-shell (eq. 4.9) si trasforma come una divergenza totale tramite le trasformazioni on-shell (eq. 4.11). Tuttavia, queste sono diventate dipendenti dal modello, cioè da  $m$  e  $\lambda$ , e nessuna parte della lagrangiana si trasforma separatamente dalle altre. La formulazione on-shell implica che l'algebra on-shell si chiude solo se valgono le equazioni del moto.

**Rottura spontanea della supersimmetria.** La rottura spontanea di simmetria si riferisce al caso in cui i potenziali di interazione in una teoria, e quindi la dinamica, sono simmetrici, ma ciò non avviene per lo stato ad energia minore.

In una teoria supersimmetrica, lo stato di vuoto rispetta la supersimmetria qualora  $Q|0\rangle = 0$ , simile a quanto visto per lo stato fondamentale di Clifford (eq. 2.8). Pertanto, la supersimmetria è spontaneamente rotta se e solo se l'energia del vuoto è maggiore di zero:

$$\langle 0|E|0\rangle \neq 0 \iff Q_\alpha|0\rangle \neq 0. \quad (4.18)$$

L'energia minima è data da

$$E_{\min} \equiv \langle 0|E|0\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \|Q_\alpha|0\rangle\|^2, \quad (4.19)$$



ma essa equivale anche a  $E_{\min} = \langle 0|V|0\rangle$ . Infatti, lo stato di vuoto è uno stato Poincaré invariante: tutte le derivate dei campi e tutti i campi non scalari hanno valori di aspettazione nulli. L'unica parte non banale dell'hamiltoniana diversa da zero è il potenziale.

Pertanto, da queste due relazioni segue che la supersimmetria è spontaneamente rotta se e solo se il minimo del potenziale è positivo. Dall'azione on-shell (eq. 4.9) si nota che il potenziale scalare,

$$V(\phi, \bar{\phi}) = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right|^2, \quad (4.20)$$

risulta essere non negativo come richiesto da una teoria supersimmetrica. Considerato anche il termine  $a_1\Phi$ , si ha un minimo nullo qualora

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = 0 \implies a_1 + m\phi + \lambda\phi^2 = 0 \implies \tilde{\phi} = -\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4\lambda a_1}}{2\lambda}. \quad (4.21)$$

Poiché esistono soluzioni, il modello di Wess–Zumino non presenta una rottura spontanea della supersimmetria. Ridefinendo

$$\phi' = \phi - \tilde{\phi}, \quad (4.22)$$

si può eliminare il termine  $a_1\Phi$  dalla lagrangiana e si sposta un minimo a  $\phi' = 0$ .

Questa pagina è stata lasciata intenzionalmente bianca.

## Parte II

# Supersimmetria in sistemi di materia condensata

La supersimmetria nacque dai tentativi di unificare le forze della natura, in particolare nel contesto della teoria delle stringhe e della teoria quantistica dei campi. Essa ha trovato applicazioni in vari ambiti, uno dei quali è la fisica della materia condensata, una branca della fisica che studia le proprietà fisiche macroscopiche e microscopiche dei materiali nei loro stati condensati, cioè di sistemi a molti costituenti con forti interazioni tra di essi. Alcuni esempi di stati condensati sono lo stato solido, liquido, la superconduzione ed il condensato di Bose–Einstein.

Le tecniche supersimmetriche permettono di analizzare il comportamento critico delle transizioni di fase, degli isolanti topologici e dei sistemi quantistici di Hall [9], rivelando profonde connessioni tra fenomeni apparentemente non correlati. Inoltre, la supersimmetria si è dimostrata fondamentale per comprendere il comportamento di sistemi fortemente interagenti, come quelli che presentano transizioni di fase quantistiche. Mappando un dato sistema di materia condensata su un modello supersimmetrico equivalente, si possono sfruttare le simmetrie e le tecniche matematiche associate alla supersimmetria per ottenere importanti informazioni sulle proprietà e sulla dinamica del sistema. Ad esempio, la supersimmetria è stata impiegata per studiare i sistemi disordinati, come la localizzazione di Anderson [15], in cui il disordine induce una localizzazione degli stati elettronici.

Nella fisica della materia condensata, la supersimmetria non riguarda la ricerca di superpartner o l'unificazione di tutte le forze, ma viene utilizzata come strumento matematico per risolvere e comprendere alcuni sistemi complessi. Si vedono alcuni esempi.

- Isolanti topologici: si tratta di materiali che sono isolanti elettrici nel loro interno, ma che presentano stati superficiali conduttivi. Il comportamento e le proprietà di questi stati superficiali possono talvolta essere descritti tramite teorie che presentano una supersimmetria (si veda [9]).
- Transizioni di fase quantistiche: le transizioni di fase quantistiche sono cambiamenti di fase della materia alla temperatura dello zero assoluto. Queste transizioni sono causate da fluttuazioni quantistiche. La supersimmetria è utilizzata per descrivere alcuni aspetti di queste transizioni di fase.
- Catene di spin: sistemi monodimensionali di particelle con spin quantistici possono talvolta essere descritti utilizzando la supersimmetria (ad esempio [12]). Questi modelli forniscono indicazioni sul magnetismo quantistico e sul comportamento dei sistemi quantistici in dimensioni ridotte.

La supersimmetria si può realizzare in sistemi di materia condensata sia come simmetria esplicita che emergente. Essa può emergere nel limite di basse energie in sistemi non supersimmetrici. Le teorie di campo supersimmetriche si possono realizzare anche in modelli reticolari tramite una regolazione fine dei loro parametri oppure secondo meccanismi dinamici per i quali una supersimmetria esplicita garantisce l'emergenza di una supersimmetria del continuo.

Lo studio dell'emergenza della supersimmetria viene fatto attraverso il gruppo di rinormalizzazione con cui si investigano sistematicamente i cambiamenti di un sistema quando viene osservato a scale differenti. Aumentare la scala equivale a diminuire l'energia poiché le due sono quantità coniugate secondo il principio di indeterminazione di Heisenberg. I cambiamenti nei parametri di una teoria inducono un flusso di rinormalizzazione che può presentare dei punti fissi. Questi descrivono i possibili stati macroscopici di un sistema a grandi scale. La supersimmetria viene spesso cercata alle transizioni di fase. Infatti, una transizione continua presenta l'emergenza di comportamenti universali: la fisica nel limite di basse energie non dipende dai dettagli microscopici e può essere completamente descritta in termini di una classe di universalità.

L'origine delle analisi di supersimmetria emergente è riconducibile ad un articolo [16] in cui si scopre la presenza di supersimmetria nel modello di Ising tricritico. In tale pubblicazione, si discute la realizzazione dell'invarianza superconforme in una teoria quantistica dei campi bidimensionale. Una teoria di campo superconforme è l'estensione supersimmetrica di una teoria conforme. Lo spazio di Hilbert di una teoria superconforme è diviso in due settori: uno rappresenta l'algebra di Neveu–Schwarz e l'altro rappresenta l'algebra di Ramond. L'articolo nota che tali due settori corrispondono rispettivamente al settore  $\mathbb{Z}_2$  pari ed al settore  $\mathbb{Z}_2$  dispari del modello di Ising tricritico. Dunque, tale modello è una teoria superconforme, in particolare una teoria supersimmetrica. La connessione tra il modello di Ising tricritico e l'invarianza superconforme offre un legame tra studi teorici e fenomeni osservabili empiricamente.

Di seguito si vedono vari articoli riguardanti l'applicazione della supersimmetria a sistemi di materia condensata sia come simmetria emergente che esplicita.

## 5 Semimetalli di Weyl e di Dirac

L'articolo "Emergent Spacetime Supersymmetry in 3D Weyl Semimetals and 2D Dirac Semimetals" [9] studia l'emergenza della supersimmetria alla transizione di fase delle onde di densità di coppia (pair density waves, PDW) di semimetalli di Weyl in tre dimensioni e semimetalli di Dirac in due dimensioni.

I semimetalli citati sono esempi di materia di Dirac, cioè sistemi di materia condensata in cui le eccitazioni di quasi-particelle sono descritte dall'equazione di Dirac generalizzata. La distinzione tra i due semimetalli è data da, tra le altre cose, il numero di bande che si intersecano in un punto dello spazio dei momenti: due per i semimetalli di Weyl e quattro per i semimetalli di Dirac [17]. La fase delle onde di densità di coppia è uno stato di superconduzione in cui i parametri d'ordine variano periodicamente in funzione della posizione in modo che la loro media spaziale sia nulla [18].

**Semimetalli di Weyl in tre dimensioni.** Si introduce un modello microscopico di fermioni con spin  $\frac{1}{2}$  interagenti e posizionati in un reticolo cubico. Le bande del cristallo si toccano a due particolari quantità di moto che corrispondono ai punti di Weyl. Espandendo l'hamiltoniana del modello attorno a tali punti, si ottiene l'hamiltoniana di due fermioni di Weyl nel limite di basse energie. Per energie di interazione sufficientemente grandi, questi due fermioni sono instabili nelle fasi in cui si ha rottura di simmetria. L'unica candidata di queste è la fase delle onde di densità di coppia e la transizione del semimetallo è continua. Vicino al punto critico quantistico della transizione, la fisica a basse energie viene descritta da due fermioni  $\psi_{\pm}$  e due parametri d'ordine di accoppiamento  $\phi_{\pm}$ , i bosoni partner. I fermioni hanno momenti lineari pari a  $\pm \mathbf{K}$ , mentre i parametri d'ordine pari a  $\pm \mathbf{Q} = \pm 2\mathbf{K}$ . La teoria dei campi efficace in prossimità del punto di transizione descrive i fermioni  $\psi$  non interagenti, le fluttuazioni dei parametri d'ordine  $\phi$  della fase delle onde di densità di coppia e l'accoppiamento di Yukawa tra bosoni e fermioni.

Tramite l'analisi del gruppo di rinormalizzazione, emerge una simmetria di Lorentz che si manifesta come velocità identiche dei bosoni e dei fermioni. Inoltre, i flussi di rinormalizzazione tendono ad un unico punto fisso stabile che corrisponde a bosoni e fermioni liberi. Al punto fisso si ottiene un'azione efficace che descrive due copie indipendenti di un multipletto chirale  $N = 1$ . L'azione è invariante rispetto le trasformazioni di supersimmetria e dunque il sistema manifesta una supersimmetria  $N = 2$  emergente.

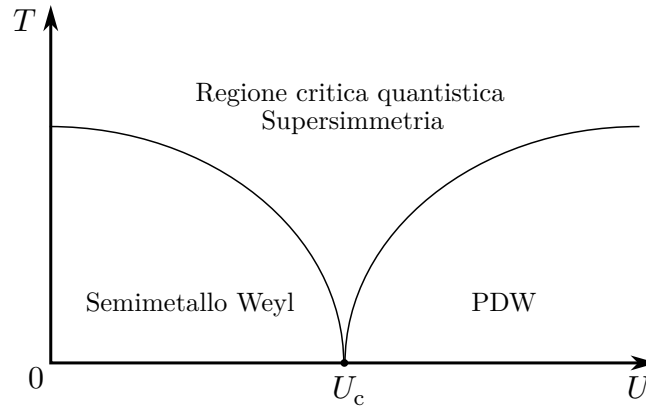


Figura 1: Diagramma di fase schematico per un semimetallo di Weyl in funzione dell'intensità delle interazioni  $U$  e della temperatura  $T$ . Nel punto tra le due fasi emerge la supersimmetria.

**Semimetalli di Dirac in due dimensioni.** Il modello utilizzato considera dei fermioni senza spin disposti in un reticolo esagonale che interagiscono con i primi e secondi vicini. Il conteggio dei modi bosonici e fermionici è simile al caso precedente. Per i semimetalli di Dirac al punto di transizione verso la fase delle onde di densità di coppia si hanno due punti di Dirac che si trovano a  $\pm \mathbf{K}$ . In ogni punto si ha l'accoppiamento di due fermioni. Infatti, un punto di Dirac è una coppia degenera di punti di Weyl. La teoria efficace che descrive il modello è la stessa di cui sopra, ma in una dimensione inferiore. L'analisi del gruppo di rinormalizzazione porta ancora a velocità identiche, ma le quasi-particelle non sono più libere, sebbene i parametri d'ordine  $\phi$  con quantità di moto opposte si disaccoppino. Infatti, al punto fisso rimane un termine di interazione a quattro bosoni e un termine di accoppiamento di Yukawa. Variando i parametri di interazione del modello, l'analisi rivela l'emergenza di due copie di supersimmetria  $N = 2$  alla transizione delle onde di densità di coppia di un semimetallo di Dirac.

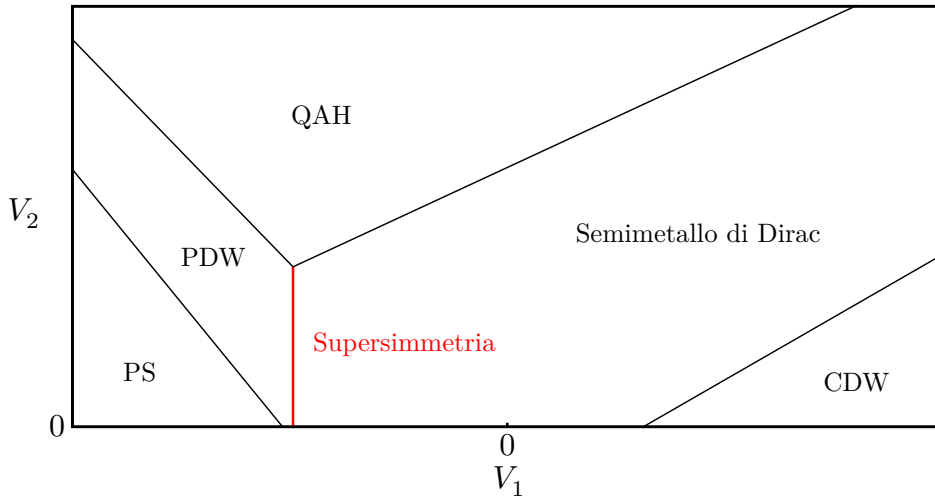


Figura 2: Diagramma di fase schematico per un semimetallo di Dirac in funzione delle interazioni con i primi vicini  $V_1$  e con i secondi vicini  $V_2$ . QAH: effetto di Hall anomalo quantistico; CDW: onde di densità di carica; PS: separazione di fase.

## 6 Punto critico di un modello reticolare

Nell'articolo “Emergence of supersymmetry at a critical point of a lattice model” [10] si costruisce un modello reticolare bidimensionale in cui emergono l'invarianza di Lorentz e la supersimmetria al punto critico di un sistema microscopico che non presenta tali proprietà.

Il modello è costituito da un insieme di bosoni e fermioni interagenti. Si considerano dei fermioni senza spin disposti in un reticolo esagonale e si tiene conto dei termini di hopping con i primi vicini, cioè termini cinetici legati all'effetto tunnel delle particelle tra i siti reticolari. I bosoni sono disposti in un reticolo triangolare — il duale del precedente — e sono soggetti a termini di hopping verso i primi vicini e termini on-site di repulsione. L'interazione tra le due classi di particelle è da intendersi come l'accoppiamento di due fermioni a costituire un bosone posto al centro di un esagono, e viceversa. Un bosone si può interpretare come una coppia di Cooper.

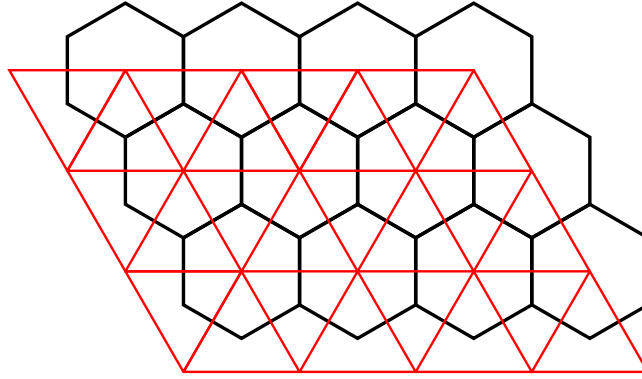


Figura 3: I reticoli dei fermioni (nero) e dei bosoni (rosso).

A questo punto si identificano i modi dei bosoni e dei fermioni nel limite di basse energie in assenza del termine di accoppiamento. Lo spettro energetico dei fermioni presenta due valori nulli in corrispondenza di due punti di Fermi pari a due vertici adiacenti,  $\mathbf{k}_A$  e  $\mathbf{k}_B$ , del reticolo reciproco ancora esagonale. Le eccitazioni attorno a tali punti sono descritte da due fermioni di Dirac,  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , senza massa e con la stessa velocità  $c_f$  data dal prodotto dell'energia di hopping fermionica e del passo reticolare. Per lo studio dei bosoni si introduce un campo bosonico ed un potenziale associato. Lo spettro energetico dei bosoni presenta due minimi negli stessi punti di Fermi del reticolo reciproco dei fermioni. Si introducono i bosoni  $\phi_1$  e  $\phi_2$  per rappresentare i modi a bassa energia attorno a  $\mathbf{k}_B$  e  $\mathbf{k}_A$  rispettivamente. Nella teoria efficace, i bosoni interagiscono tra loro, possiedono una massa  $m$  eventualmente nulla e hanno la stessa velocità  $c_b$  funzione dell'energia di hopping bosonica, dell'energia di repulsione e del passo reticolare. Il bosone  $\phi_1$  possiede lo stesso momento del fermione  $\psi_2$  e, analogamente, il bosone  $\phi_2$  ha lo stesso momento del fermione  $\psi_1$ . Tuttavia, in generale la velocità  $c_b$  dei bosoni è diversa dalla velocità  $c_f$  dei fermioni e dunque non è presente la simmetria di Lorentz: questa richiede che le velocità di tutte le particelle prive di massa siano identiche. Infine, il termine di interazione tra i modi bosonici e fermionici si ottiene espandendo il termine di interazione originale e considerando solo i contributi rilevanti alle basse energie. Solamente bosoni e fermioni con lo stesso indice interagiscono.

Nell'analisi del gruppo di rinormalizzazione si studia il caso di bosoni senza massa al fine di poter esplorare il flusso di rinormalizzazione delle altre costanti di accoppiamento del

modello. Si trovano due valori della costante di interazione tra bosoni e fermioni: un valore nullo corrispondente a punti fissi instabili ed un valore finito, non nullo e con un punto fisso stabile. Per il primo caso si incontrano tre punti fissi, ma sono tutti instabili. I bosoni ed i fermioni sono disaccoppiati ed il sistema di fermioni è costituito da fermioni non interagenti. Nel secondo caso, le velocità dei bosoni e dei fermioni tendono ad un valore comune poiché l'interazione mescola le velocità: emerge la simmetria di Lorentz tramite correzioni quantistiche. Proseguendo con l'analisi, al punto fisso del flusso di rinormalizzazione, i modi  $\psi_n, \phi_n$  con indice diverso si disaccoppiano: i condensati di Bose–Einstein con diverso momento lineare  $\mathbf{k}_A$  e  $\mathbf{k}_B$  si sviluppano indipendentemente nella fase condensata; inoltre, la teoria è supersimmetrica e le trasformazioni associate sono indipendenti. Ogni coppia bosone–fermione costituisce un multipletto chirale e la teoria corrisponde al modello di Wess–Zumino  $N = 2$  in  $d = 2 + 1$  dimensioni. Il punto critico della transizione di fase è descritto da una teoria supersimmetrica, sebbene le fasi separate dal punto sono entrambe non supersimmetriche.

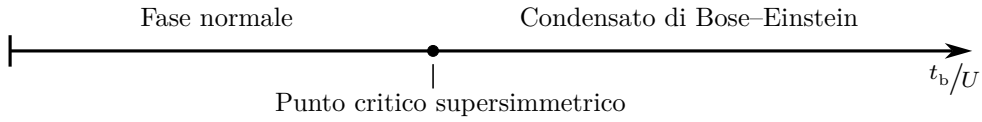


Figura 4: Diagramma di fase schematico in funzione del rapporto tra l'intensità dei termini di hopping e dei termini on-site bosonici.



## 7 Emergenza del modello di Wess–Zumino

L'articolo “Simulating Wess–Zumino Supersymmetry Model in Optical Lattices” [11] tratta l'emergenza del modello di Wess–Zumino in miscele di atomi e molecole nel limite di basse energie in due dimensioni tramite l'utilizzo di reticoli ottici. Lo studio espande quanto trovato nell'articolo precedente dimostrando che la supersimmetria può emergere anche in punti non critici.

Un reticolo ottico è un reticolo formato dall'interferenza di fasci laser. Essi creano un potenziale periodico che intrappola degli atomi nei propri minimi. La disposizione degli atomi è simile ad un reticolo cristallino.

Si considerano degli atomi fermionici disposti in un reticolo quadrato. Il reticolo presenta due punti di Dirac nella prima zona di Brillouin ed essi sono tali per cui una molecola biatomica costituita da due atomi che provengono dallo stesso punto ha quantità di moto nulla. Ogni molecola è la superpartner bosonica di un atomo fermionico.

Il modello tiene conto dei termini di hopping verso i primi e secondi vicini. Inoltre, si aggiunge un campo di gauge periodico generato da dei fasci laser, che si accoppia agli atomi. Si divide il reticolo in due sottoreticoli e si studia il sottospazio di stati la cui differenza di energia sui due sottoreticoli ha un determinato valore. Si espande l'hamiltoniana a singolo fermione intorno ai punti di Dirac per ottenere l'hamiltoniana efficace in cui compaiono due campi di Dirac. Quando la differenza di energia tra gli stati risulta essere pari ad una particolare combinazione dei termini di hopping, un campo di Dirac diventa senza massa e l'altro diventa massivo, ma quest'ultimo non entra a far parte esplicitamente del limite a basse energie. Si aggiunge un termine attrattivo tra gli atomi fermionici al fine di facilitare l'accoppiamento o la formazione di molecole. Tale interazione è modellata secondo la risonanza di Feshbach utilizzando due canali di reazione: quando due atomi lenti collidono, possono formare un legame temporaneo creando una molecola instabile con un breve tempo di vita. Variando i parametri di interazione della teoria, emerge l'invarianza di Lorentz e la lagrangiana efficace corrisponde al modello di Wess–Zumino senza massa (cfr. eq. 4.9 posto  $m = 0$ ).

Si può ottenere la versione massiva del modello aggiungendo una sorgente esterna nella forma di un condensato di Bose–Einstein di coppie di molecole. Il condensato scambia delle coppie con il sistema in esame. Considerato il campo esterno della sorgente come suo stesso parametro d'ordine, si ottiene la riduzione bidimensionale della lagrangiana on-shell di Wess–Zumino (cfr. eq. 4.9). La supersimmetria è sempre rotta a temperatura finita, ma non allo zero assoluto. La rottura si manifesta, ad esempio, come una diversa massa delle componenti del multipletto supersimmetrico, che si può misurare sperimentalmente.

L'utilizzo di un reticolo ottico permette di aggiustare i parametri della teoria in modo da simulare il modello di Wess–Zumino in due dimensioni così da offrire delle opportunità per studiare la supersimmetria.

## 8 Stati legati di Majorana

L'articolo "Emergent Supersymmetry from Strongly Interacting Majorana Zero Modes" [13] studia l'emergenza della supersimmetria al punto critico di una catena di modi zero di Majorana fortemente interagenti.

I modi zero di Majorana sono quasi-particelle di spin  $\frac{1}{2}$  che si manifestano a zero energia, localizzate a difetti topologici e sono stati fondamentali che compaiono in alcuni materiali superconduttori monodimensionali [19, 20].

Si costruisce il più semplice modello reticolare di fermioni di Majorana — particelle fermioniche che sono le proprie antiparticelle — interagenti. Si considera un reticolo monodimensionale in cui sono presenti termini di hopping  $t$  con i primi vicini e interazioni attrattive  $g$  tra i quattro modi più vicini. Oltre un valore critico del termine di hopping,  $|t| > t_c$ , il sistema è descritto dal modello di Ising, una teoria conforme che descrive il ferromagnetismo tramite spin in un reticolo. Per valori minori,  $0 < |t| < t_c$ , si ha una fase con gap in cui viene meno la simmetria traslazionale. Infine, al valore critico di hopping,  $|t| = t_c$ , il sistema è ben descritto dal modello di Ising tricritico realizzata tramite operatori bosonici e fermionici. Tale è un modello di Ising diluito, cioè presenta siti reticolari vuoti [16, 21, 22] ed esibisce un punto tricritico, ovvero l'estremo di una linea nel diagramma di fase in cui tre stati della materia coesistono.

Nel limite di intensi termini di hopping,  $t/g \rightarrow \infty$ , il sistema è descritto da una teoria libera di Majorana, senza massa e che corrisponde alla fase critica del modello di Ising a campo trasverso. D'altra parte, poiché al punto critico le interazioni dominano i termini di hopping,  $t_c \ll g$ , il limite di forti interazioni,  $t/g \rightarrow 0$ , fornisce una buona approssimazione qualitativa al comportamento della fase con gap. Si riscrive l'hamiltoniana in modo più generale rimuovendo l'invarianza traslazionale. I modi di Majorana si possono accoppiare secondo due modalità diverse per formare dei fermioni di Dirac. Per  $t = 0$  si ha una transizione di fase per cui gli stati relativi alle due modalità si scambiano la proprietà di ferromagnetismo, cioè gli stati sono o tutti vuoti o tutti pieni. Questa transizione implica che tutti gli stati citati contribuiscono allo stato fondamentale del sistema e che sia presente un gap energetico. Per  $|t| > 0$ , la fase diventa due volte degenera al posto di quattro volte, grazie alla perturbazione fornita dal termine di hopping.

Il modello di Ising tricritico risulta essere la teoria più naturale per connettere i due regimi limite e risulta essere una teoria supersimmetrica [16]. In esso è presente un solo operatore rilevante che preserva la supersimmetria dell'hamiltoniana. A questo punto risulta chiara l'emergenza della supersimmetria da una catena di modi zero di Majorana.

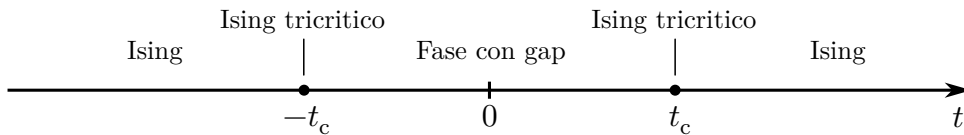


Figura 5: Diagramma di fase schematico in funzione dell'intensità dei termini di hopping  $t$  con  $g = 1$ .

## 9 Reticolo supersimmetrico

L'articolo "Lattice Models with  $\mathcal{N} = 2$  Supersymmetry" [12] propone un reticolo monodimensionale con hamiltoniana supersimmetrica, il cui limite al continuo risulta essere il modello di Thirring senza massa, una nota teoria quantistica dei campi monodimensionale con simmetria superconforme  $N = 2$ .

Si introduce un reticolo monodimensionale di fermioni interagenti dotato di supersimmetria  $N = 2$  esplicita. Il reticolo presenta un numero finito di siti e delle condizioni al contorno periodiche. Si studia il sottospazio con quantità di moto nulla [8] a cui corrisponde un'hamiltoniana data da  $H = \{Q, Q^\dagger\}$ . Alcune conseguenze immediate sono: l'energia è non negativa, gli stati fondamentali hanno energia nulla e gli stati ad energia positiva fanno parte di una coppia [4].

Si costruisce un modello costituito da una sola specie di fermioni posizionati nei siti del reticolo. Si impone la restrizione che i fermioni abbiano un nucleo rigido (hard-core) cioè non possono essere presenti due fermioni su due siti adiacenti del reticolo. Si può riscrivere l'hamiltoniana come somma di due termini: il primo è un termine di hopping verso i primi vicini e il secondo è un potenziale repulsivo. Entrambi contribuiscono alla repulsione di hard-core. Inoltre, il secondo termine favorisce la presenza di più fermioni fin tanto che essi si trovano a più di due siti reticolari di distanza.

Applicando l'ansatz di Bethe si può studiare il limite al continuo del modello. L'ansatz di Bethe è una funzione di prova che permette di trovare le funzioni d'onda esatte di alcuni modelli quantistici a molti corpi, comunemente modelli reticolari monodimensionali. Nel caso in esame, l'ansatz viene applicato agli autostati dell'hamiltoniana. Vista la natura dell'operatore hamiltoniano, i suoi autostati sono anche autostati della supersimmetria. Quest'ultima è una simmetria continua e pertanto fissa i parametri liberi dell'ansatz. Dall'utilizzo dell'ansatz si trova che lo stato fondamentale presenta un fermione ogni tre siti reticolari.

Quando si considera un numero di siti arbitrariamente grande, il modello presentato coincide con la catena XXZ di Heisenberg, un modello statistico monodimensionale — una catena di spin — utilizzato per lo studio di punti critici e transizioni di fase di sistemi magnetici, in cui lo spin è trattato in modo quanto-meccanico. Nel limite continuo, la catena è descritta dal modello di Thirring, una teoria quantistica dei campi che tratta le auto-interazioni di un campo di Dirac in una dimensione. Equivalentemente, la catena è descritta da un bosone libero senza massa, cioè la più semplice teoria dei campi con simmetria superconforme  $N = 2$ . I generatori della supersimmetria corrispondono a particolari operatori che sono funzioni del bosone.

Si possono costruire anche modelli più avanzati, ad esempio modelli quantistici a dimeri in cui si descrivono i legami tra i siti reticolari al posto dei siti stessi, oppure trattando più di una sola specie di fermioni. In tutti questi modelli, gli stati sono composti solo da fermioni, ma ciò non preclude la presenza di bosoni quando si passa al limite continuo.

## 10 Punto multicritico

L'articolo “Emergent Supersymmetry at the Ising–Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Multicritical Point” [14] studia le proprietà del punto multicritico in cui coincidono le transizioni di Ising e di Berezinskii–Kosterlitz–Thouless (BKT) per sistemi quantistici monodimensionali o sistemi classici bidimensionali. In particolare si osserva come in certe condizioni emerge la supersimmetria.

La transizione di Berezinskii–Kosterlitz–Thouless è una transizione di fase del modello XY bidimensionale, un sistema semplice di spin interagenti in un reticolo cristallino.

L'articolo espande vari studi fatti in precedenza su sistemi con possibile presenza di punti critici con supersimmetria  $N = 1$  emergente. In particolare, si è trovata un'emergenza di supersimmetria  $N = 1$  alla transizione di Ising posto che la temperatura a cui avvenga il cambio di fase sia minore di quella della transizione di Berezinskii–Kosterlitz–Thouless. Il punto multicritico può comparire in sistemi con simmetrie  $\mathbb{Z}_2$  e  $U(1)$  come, ad esempio, catene di spin monodimensionali e molecole polari in reticoli ottici.

Si costruisce un modello che descrive un grado di libertà bosonico ed uno fermionico in interazione con una densità di lagrangiana che presenta le due simmetrie citate. Al punto multicritico, il fermione non ha massa e la sua velocità si rivela essere al più pari a quella del bosone, così da permettere l'emergenza della supersimmetria. Tramite un'ampia e dettagliata analisi del gruppo di rinormalizzazione, si trova una retta di punti fissi in corrispondenza della quale emerge l'invarianza di Lorentz poiché le velocità del bosone e del fermione sono identiche. Questo implica anche la presenza di una supersimmetria  $N = 1$ . La retta poi fluisce in un punto fisso stabile in cui i due gradi di libertà sono disaccoppiati e le velocità tendono ad annullarsi. Inoltre, compare una supersimmetria  $N = 2$  in aggiunta a quella precedente.

Dunque, il punto multicritico studiato è descritto da una teoria Lorentz invariante con due tipi di supersimmetrie, in cui sia l'invarianza di Lorentz che la supersimmetria sono proprietà emergenti.

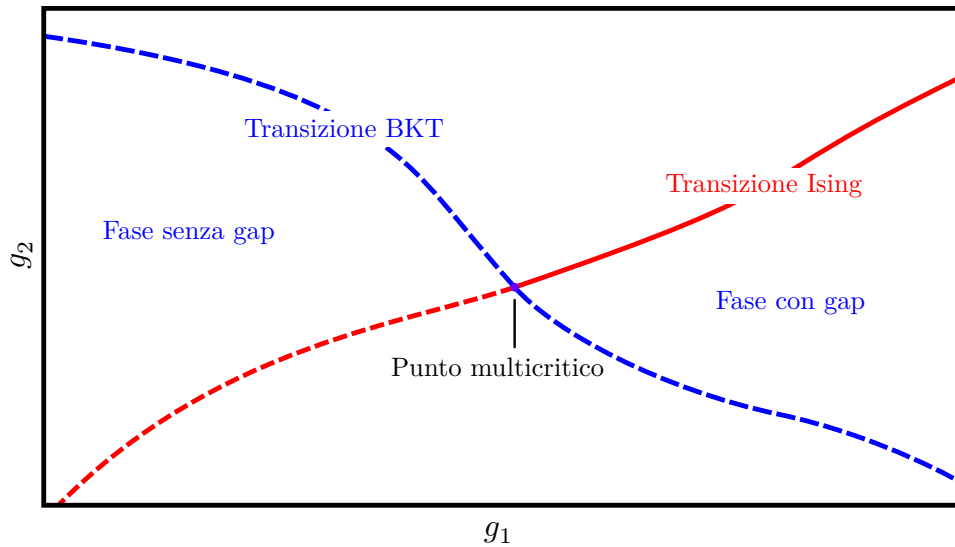


Figura 6: Diagramma di fase schematico in funzione di due parametri  $g_1$  e  $g_2$ . La transizione di Ising all'interno della fase senza gap (linea rossa tratteggiata) può esibire supersimmetria  $N = 1$ .

# Bibliografia

## Supersimmetria

- [1] Martin F. Sohnius. «Introducing supersymmetry». In: *Physics Reports* 128.2 (1985), pp. 39–204. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(85\)90023-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90023-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157385900237>.
- [2] Matteo Bertolini. *Lectures on Supersymmetry*. 2014. URL: <https://people.sissa.it/~bertmat/teaching.htm>.
- [3] David Tong. *Supersymmetric Field Theory*. 2022. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susy.html>.
- [4] David Tong. *Lectures on Supersymmetric Quantum Mechanics*. 2022. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susyqm.html>.
- [5] Adel Bilal. *Introduction to Supersymmetry*. 2001. arXiv: [hep-th/0101055](https://arxiv.org/abs/hep-th/0101055) [hep-th].
- [6] P. C. West. *Introduction to Rigid Supersymmetric Theories*. 1998. arXiv: [hep-th/9805055](https://arxiv.org/abs/hep-th/9805055) [hep-th].
- [7] Evgeny Ivanov. *Five Lectures on Supersymmetry: Elementary Introduction*. 2015. arXiv: [1403.3009](https://arxiv.org/abs/1403.3009) [hep-th].
- [8] Edward Witten. «Constraints on supersymmetry breaking». In: *Nuclear Physics B* 202.2 (1982), pp. 253–316. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(82\)90071-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90071-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382900712>.

## Materia condensata – Articoli

- [9] Shao-Kai Jian, Yi-Fan Jiang e Hong Yao. «Emergent Spacetime Supersymmetry in 3D Weyl Semimetals and 2D Dirac Semimetals». In: *Physical Review Letters* 114.23 (giu. 2015). DOI: [10.1103/physrevlett.114.237001](https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.237001). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.114.237001>.
- [10] Sung-Sik Lee. «Emergence of supersymmetry at a critical point of a lattice model». In: *Physical Review B* 76.7 (ago. 2007). DOI: [10.1103/physrevb.76.075103](https://doi.org/10.1103/physrevb.76.075103). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevb.76.075103>.
- [11] Yue Yu e Kun Yang. «Simulating the Wess-Zumino Supersymmetry Model in Optical Lattices». In: *Physical Review Letters* 105.15 (ott. 2010). DOI: [10.1103/physrevlett.105.150605](https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.150605). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.105.150605>.
- [12] Paul Fendley, Kareljan Schoutens e Jan de Boer. «Lattice Models with  $\mathcal{N} = 2$  Supersymmetry». In: *Physical Review Letters* 90.12 (mar. 2003). DOI: [10.1103/physrevlett.90.120402](https://doi.org/10.1103/physrevlett.90.120402). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.90.120402>.
- [13] Armin Rahmani et al. «Emergent Supersymmetry from Strongly Interacting Majorana Zero Modes». In: *Physical Review Letters* 115.16 (ott. 2015). DOI: [10.1103/physrevlett.115.166401](https://doi.org/10.1103/physrevlett.115.166401). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.115.166401>.

- [14] Liza Huijse, Bela Bauer e Erez Berg. «Emergent Supersymmetry at the Ising-Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Multicritical Point». In: *Physical Review Letters* 114.9 (mar. 2015). DOI: 10.1103/physrevlett.114.090404. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.090404>.

## Materia condensata – Altre fonti

- [15] Elihu Abrahams. *50 Years of Anderson Localization*. WORLD SCIENTIFIC, 2010. DOI: 10.1142/7663. eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/7663>. URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/7663>.
- [16] Daniel Friedan, Zongan Qiu e Stephen Shenker. «Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model». In: *Physics Letters B* 151.1 (1985), pp. 37–43. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)90819-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90819-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269385908196>.
- [17] Jin Hu et al. «Transport of Topological Semimetals». In: *Annual Review of Materials Research* 49.1 (lug. 2019), pp. 207–252. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070218-010023. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-070218-010023>.
- [18] Daniel F. Agterberg et al. «The Physics of Pair-Density Waves: Cuprate Superconductors and Beyond». In: *Annual Review of Condensed Matter Physics* 11.1 (mar. 2020), pp. 231–270. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031119-050711. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050711>.
- [19] Sihao Huang. *Introduction to Majorana Zero Modes in a Kitaev Chain*. 2021. arXiv: 2111.06703 [cond-mat.str-el].
- [20] Frank Wilczek. «Majorana returns». In: *Nature Physics* 5.9 (set. 2009), pp. 614–618. ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys1380. URL: <https://doi.org/10.1038/nphys1380>.
- [21] Sung-Sik Lee. *TASI Lectures on Emergence of Supersymmetry, Gauge Theory and String in Condensed Matter Systems*. 2010. arXiv: 1009.5127 [hep-th].
- [22] M. Wortis. «Tricritical behavior in the dilute Ising ferromagnet». In: *Physics Letters A* 47.6 (1974), pp. 445–446. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(74\)90569-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(74)90569-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960174905696>.