Maths for Physics

March 3, 2022

Contents

1 Introduzione **1**

2 Analisi complessa **1**
2.1 Numeri complessi 1

Lecture 1

mar 01 mar 2022 12:30

1 Introduzione

Il corso si articola in due filoni principali:

- Analisi complessa
- Spazi funzionali, algebra operatoriale, spazi infiniti dimensionali
  - ◇ trasformata di Fourier
  - ◇ trasformata di Laplace
  - ◇ distribuzioni

Libri. vedi e-learning

2 Analisi complessa

2.1 Numeri complessi

Si vede un richiamo sui numeri complessi. Storicamente sono comparsi nel XVI secolo per la risoluzione di equazioni polinomiali di terzo grado. Con essi si trovano soluzioni algebriche che non hanno soluzioni nel campo reale. Un esempio è $x^2 + 1 = 0$.
In fisica si sono visti nell'elettromagnetismo: in elettrotecnica si utilizza l'impedenza; in meccanica quantistica, la funzione d'onda è un oggetto complesso, $\Psi \in \mathbb{C}$.

Definizione. Un numero complesso è una coppia ordinata (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ tali che siano definite l'addizione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

la moltiplicazione

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

e la relazione di equivalenza

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \land b = d$$

con tale definizione è possibile dimostrare che l'insieme di tale coppie ordinate formano un campo (nel senso della definizione algebrica).

Teorema. L'insieme
$$\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$
è un campo abeliano rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione.

Osservazione.

- La proprietà commutativa e la proprietà associativa derivano da quelle dei numeri reali.
- Esiste l'identità additiva (detto zero per analogia con $\mathbb{R}$) ed è $(0,0)$.
- Esiste l'opposto di (a,b) definito come
$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$$
- Esiste l'identità moltiplicativa (detta uno) ed è $(1,0)$.
- Esiste l'inverso di (a,b) definito come
$$(a,b) \cdot \frac{1}{(a,b)} = (1,0)$$
Per trovare l'inverso si risolve
$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0) \implies \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$
Dunque
$$\frac{1}{(a,b)} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

Teorema. Il sottoinsieme
$$\mathbb{C}_0 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$
è un campo a sua volta rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione. Esso è isomorfo ad $\mathbb{R}$: cioè esiste una mappa tra i due insiemi che ne preserva la struttura: $f(a,0) \mapsto f(a)$.
Inoltre, $\mathbb{C}_0$ ha la stessa relazione di ordine di $\mathbb{R}$. Questo è importante perché $\mathbb{C}$ non ha nessuna relazione d'ordine e non è possibile introdurne una in maniera sensata.

Definizione. L'unità immaginaria è $(0,1) = i$.
Si nota subito che multipli di i non hanno sempre parte immaginaria e dunque numeri che hanno solo parte immaginaria non formano un campo:
$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \in \mathbb{C}_0$$

Quindi la soluzione di $x^2+1=0$ risulta essere $x = (0,1)$. Si nota che anche $(0,-1)$ risulta essere soluzione. In particolare, $(0,-1) = -i$.
Segue che $\pm i = \pm\sqrt{-1}$. Quindi $x^2+1=0$ ha soluzioni $x = \pm i$.

Definizione. Forma cartesiana. Considerato
$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib$$
con $a,b \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Inoltre, $a = \mathrm{Re}\{z\}$ e $b = \mathrm{Im}\{z\}$.

Definizione. La coniugazione complessa è un automorfismo (cioè una corrispondenza tra di un campo e se stesso che lascia invariate le relazioni). Considerato, $z = a + ib$, il suo complesso coniugato è

$$\overline{z} = a - ib = (a, -b)$$

Ne segue che

$$\overline{i} = -i, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

Le operazioni notevoli che si possono fare sono

$$z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}, \quad z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}\{z\}, \quad z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Piano complesso. di Argand-Gauss. Il piano ha due assi ortogonali su cui si rappresenta la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso. Ogni punto è individuato da coordinate cartesiane o da coordinate sferiche. In questo modo la somma di numeri complessi diventa la somma di vettori.

Definizione. In questo modo si può utilizzare la rappresentazione tramite le coordinate polari. Considerato

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\tan\theta = \frac{b}{a}$ a meno di 2π. L'angolo θ è detto anche argomento e si indica come

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \\ -\pi, & a < 0, b = 0 \end{cases}$$

tutto questo è definito a meno di $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione. Formula di Eulero. Per utilizzare tale formula, si vuole estendere ai numeri complessi, l'esponenziale definito per i numeri reali. Considerato $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ allora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

si assume che le proprietà della funzione esponenziale rimangano invariante sia per argomento reale che per argomento complesso. Quindi si ha $e^x \in \mathbb{R}$ e $e^{iy} \in \mathbb{C}$. Pertanto

$$e^{iy} = A(y) + iB(y)$$

si deriva una volta rispetto ad y e si assume che la derivata si comporti allo stesso modo anche con i numeri complessi. Quindi

$$\mathrm{d}_y e^{iy} = ie^{iy} = i(A(y) + iB(y)) = A'(y) + iB'(y) \implies \begin{cases} A(y) = B'(y) \\ B(y) = -A'(y) \end{cases}$$

derivando una seconda volta si ha

$$\mathrm{d}_y^2 e^{iy} = i(ie^{iy}) = -e^{iy} = -A(y) - iB(y) = A''(y) + iB''(y) \implies \begin{cases} A(y) = -A''(y) \\ B(y) = -B''(y) \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni differenziali da cui si può estrarre la soluzione; le condizioni al contorno sono $e^{i0} = 1$. Dunque

$$\begin{cases} A(0) = 1 \\ B(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A'(0) = 0 \\ B'(0) = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono
$$\begin{cases} A(y) = \cos y \\ B(y) = \sin y \end{cases}$$
questa è detta forma polare o di Eulero:
$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$
Dunque si è così estesa la definizione di esponenziale ai numeri complessi.
Si nota che
$$e^z = e^x e^{iy} = e * x(\cos y + i \sin y)$$
e considerato $|z| \ll 1$, cioè $x, y \ll 1$ si utilizza l'espansione in serie di Taylor per ottenere
$$e^z \approx (1+x)(1+iy) = 1 + x + iy = 1 + z$$
dunque l'espansione di Taylor funziona anche per i numeri complessi. In particolare
$$e^z = \lim_{z\to\infty} \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Osservazione. Considerato $z = re^{i\theta}$ segue $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Inoltre
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$
Da ciò si evince la formula di de Moivre. Considerato $n \in \mathbb{Z}$, segue
$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Definizione. Così si può trovare anche la radice n-esima. La radice n-esima w di un numero complesso z è tale per cui $w^n = z$. Infatti
$$w = z^{\frac{1}{n}} = [r(\cos\theta + i \sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$
per de Moivre [r]. Inoltre, esistono n differenti radici di z se $|z| \neq 0$.

Esempio.

- La radice quadrata di $1 = 1e^{i0}$ risulta essere $e^{ik\pi}$, con $k \in \{0, 1\}$.
- La radice quadrata di $-1 = e^{i\pi}$ risulta essere $e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}$ con $k \in \{0, 1\}$.

Equazione di secondo gradi in $\mathbb{C}$. Un'equazione di secondo grado su $\mathbb{C}$ si scrive come
$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Teorema. Un'equazione di tale tipo ha sempre due soluzioni nel campo complesso. La natura delle soluzioni è dato dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Per $\Delta \geq 0$ si ha
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_{1,2} \in \mathbb{R}$$
- Per $\Delta < 0$ (cioè $-\Delta > 0$) si ha
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_{1,2} \in \mathbb{C}$$
e si ha $z_1 = \overline{z}_2$.

Logaritmo. Considerato
$$z = re^{i\varphi} = e^{\ln r}e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$$

Si può definire il logaritmo come
$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

Il logaritmo ha valori diversi in base all'angolo: se tale angolo viene considerato con multipli di 2π, il numero z è sempre lo stesso, ma il suo logaritmo cambia. Il logaritmo è una funzione polidroma.
Dunque, bisogna fare una scelta del valore di φ in modo da renderlo univoco

$$\begin{cases} \varphi \in [0, \pi], & y > 0 \\ \varphi \in [-\pi, 0], & y < 0 \end{cases}$$

[r] La funzione $\operatorname{Arg}(z)$ ha già le proprietà corrette, dunque si definisce il logaritmo in modo univoco come
$$\ln z = \ln r + i \operatorname{Arg}(z)$$

Tuttavia, in questo modo la funzione non è più continua e si ha un branch cut. Il logaritmo è discontinuo per $x \in (-\infty, 0]$. Il branch cut risulta essere $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$.

Osservazione. Vale $\overline{\ln z} = \ln \overline{z}$. Infatti

$$\ln r - i \operatorname{Arg}(z) = \ln r + i \operatorname{Arg}(\overline{z})$$

dato che si ha
$$\overline{z} \rightsquigarrow \begin{cases} \overline{r} = r \\ \overline{\varphi} = -\varphi \end{cases}$$