

# Physics 2

March 27, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Legge di Coulomb</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Distribuzioni continue</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Campo elettrico</b>	<b>8</b>
4.1	Calcolo in situazioni particolari . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Legge di Gauss</b>	<b>11</b>
5.1	Applicazioni della legge di Gauss . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Potenziale elettrico</b>	<b>18</b>
6.1	Potenziale di un dipolo elettrico . . . . .	23
6.2	Divergenza . . . . .	25
6.3	Rotore . . . . .	29
6.4	Laplaciano . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Conduttori</b>	<b>31</b>
7.1	Carica immagine . . . . .	36
7.2	Capacità . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Correnti stazionarie</b>	<b>42</b>
8.1	Conduttori Ohmici . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Magnetismo</b>	<b>51</b>
9.1	Circuitazione . . . . .	53
9.2	Configurazioni notevoli. . . . .	60
9.3	Configurazioni elementari . . . . .	62
9.4	Moti notevoli . . . . .	65
9.5	Azioni sui conduttori . . . . .	67
9.6	Lavoro della forza di Lorentz . . . . .	68
9.7	Pressione magnetostatica . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Interazioni tra cariche e moto relativo</b>	<b>70</b>
10.1	Campo elettrico . . . . .	72
<b>11</b>	<b>Induzione elettromagnetica</b>	<b>85</b>
11.1	Cavi assiali . . . . .	100
11.2	Analisi di un circuito RLC . . . . .	101
11.3	Legge di Ampère-Maxwell . . . . .	104
11.4	Configurazioni complesse . . . . .	109
11.5	Trasporto di energia elettromagnetica . . . . .	112

<b>12 Campo elettrico nella materia</b>	<b>114</b>
12.1 Dielettrici . . . . .	114
12.2 Campi variabili . . . . .	125
<b>13 Magnetismo nella materia</b>	<b>125</b>
13.1 Diamagnetismo . . . . .	129
13.2 Paramagnetismo . . . . .	130
13.3 Ferromagnetismo . . . . .	131
13.4 Magnetizzazione . . . . .	131
13.5 Leggi di Maxwell . . . . .	134
<b>14 Campi variabili</b>	<b>137</b>

## Lecture 1: Introduzione

lun 04 OTT  
2021 13:30

### 1 Introduzione

Si studia la forza elettrica e magnetica. Si sviluppa la teoria dell'elettromagnetismo, studiando anche i fondamenti di ottica.

Serve sapere

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Dove  $\vec{F}$  indica la legge di forza, mentre  $m\vec{a}$  descrive l'effetto dinamico. La scrittura con la quantità di moto è tipicamente relativistica, da essa discendono i teoremi dell'energia cinetica e della conservazione dell'energia.

Si trattano molti aspetti formali nuovi per gestire la complessità dell'elettromagnetismo. Interessa interpretare il mondo. Con la legge  $\vec{F} = m\vec{a}$ , conoscendo la legge di forza si conosce il moto, mentre se c'è il moto allora c'è una forza.

Gonfiando un palloncino e strofinandolo con un panno si rivela l'esistenza di una forza non riconducibile a quanto già studiato. Il palloncino rimane "attaccato" al soffitto. Due palloncini, tra di loro, non si attraggono. Nel corso si caratterizza tale forza. La forza elettrica è molto complicata, essa dipende da:

- carica, dato che i corpi si respingono e si attraggono si hanno due classi di materia a cui si dà un segno;
- distanza relativa, (per configurazioni elettrostatiche essa è l'unica oltre la carica);
- velocità, (per configurazioni complicate) si aggiunge una forza magnetica;
- accelerazione, (per sistemi a campi variabili).

Dato che dipende dalla velocità bisogna trovare come si deve descrivere di modo che la relatività sia rispettata. L'elettromagnetismo è di partenza invariante perché è stata la relatività ad essere revisionata.

In Fisica II non ci si occupa dei moti, ma si analizza la struttura della forza in modo progressivo. Bisogna trovare un sistema che permetta di ricavare la forza in qualsiasi situazione. Dall'evidenza sperimentale si passa alla costruzione della struttura della forza.

Si introducono strumenti nuovi come i campi vettoriali  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ , la forza è una funzione delle coordinate. Sebbene tali siano artefici matematici che semplificano la descrizione dei fenomeni, si scopre che si rivelano delle proprietà: i campi elettromagnetici hanno proprietà fisiche come l'energia, la quantità di moto ed il momento angolare misurabili che trasportano l'energia elettromagnetica nelle onde, le quali sono perturbazioni dei campi che si propagano. Nell'elettromagnetismo classico, la carica, la posizione e la velocità sono note con assoluta

certezza; tuttavia, ci sono limiti intrinseci che non permettono la certezza: il principio di indeterminazione di Heisenberg  $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{4\pi}$ . La struttura della forza classica vale anche nella meccanica quantistica.

Si ha una evidenza sperimentale della carica: essa ha due segni; è dovuta a cariche elementari  $e^-$  e  $p^+$ ; si ha la conservazione della carica in sistemi isolati  $\sum q^+ + \sum q^- = \text{cost.}$ . La carica si conserva anche in fenomeni quantistici e relativistici. Nella relatività si può convertire l'energia in massa  $\gamma + N \rightarrow N + e^+ e^-$ . La carica è un invariante relativistico, si conserva ed è la stessa in tutti i sistemi di riferimento (diversamente dalla massa). Nella definizione della carica non si fa attenzione al sistema di riferimento.

La differenza in carica tra  $e^-$  e  $p^+$  è minore di  $10^{-21}$ . Un'altra proprietà della carica è che essa è quantizzata: i sistemi macroscopici hanno cariche pari ad un multiplo di quella elementare. Tuttavia, non si sa perché è quantizzata: è un fatto sperimentale. Inoltre, l'elettrone è privo di struttura fino a  $10^{-18}$  m, cioè la lunghezza d'onda di de Broglie: attualmente non si riescono a raggiungere energie maggiori.

Esistono particelle a cariche frazionarie, ma si trovano solamente in composti, non libere. Inoltre, si descrive la carica come distribuzione continua, sebbene essa sia una quantità discreta.

## 2 Legge di Coulomb

Si scopre la legge fondamentale dell'elettrostatica: la legge di Coulomb

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{u}_{r_{12}}.$$

Dove  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

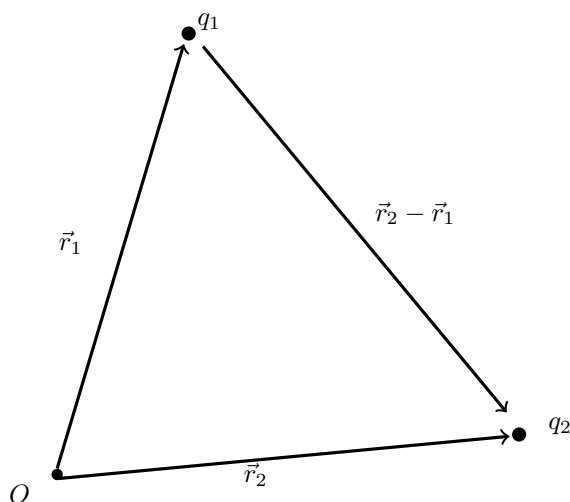


Figure 1: coulomb

Le particelle sono puntiformi, quindi c'è una sola direzione  $\hat{u}_{r_{12}}$ , cioè la congiungente. Inoltre,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , cioè il terzo principio e non è un'osservazione banale; la forza magnetica non ha tale proprietà e nemmeno quella elettrica se non si è nel caso statico. Dunque si ha la dipendenza dal prodotto delle cariche e dal reciproco del quadrato della distanza. La costante  $k$  dipende dal sistema di misura. In SI si ha

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Il  $4\pi$  si ha per ragioni storiche e per semplicità nei casi a simmetria sferica. Il termine  $\varepsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto. Si ha:

- $k = 8.99 \cdot 10^{-19} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$ ;
- $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$ ;
- $e^- = q^+ = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Le unità di misura fondamentali sono scelte in base alla tradizione ed alla precisione. Si può confrontare la forza elettrica con quella gravitazionale:

$$F_E = k \frac{q^2}{d^2}, \quad F_G = G \frac{m_p^2}{d^2} \implies \frac{F_G}{F_E} = \frac{G m_p^2}{k q^2} = \frac{10^{-11} \cdot 10^{-27.2}}{10^9 \cdot 10^{-19.2}} = 10^{-36}.$$

La forza gravitazionale è molto debole a livello atomico. I protoni e gli elettroni hanno forze magnetiche legate al proprio spin, ma nel mondo macroscopico tali forze sono deboli.

Le legge di Coulomb non basta per caratterizzare la forza elettrostatica; serve il principio di sovrapposizione: in un sistema con  $n \geq 3$  cariche,  $q_1, \dots, q_n$ , sulla carica  $Q$  agisce la somma delle forze elettrostatiche tra  $Q$  e  $q_i$ , per ogni  $i$ :

$$\vec{F}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i Q}{r_i^2} \hat{u}_i.$$

con  $r_i$  distanza tra  $Q$  e  $q_i$ . Considerando il sistema al continuo, la densità di carica è la media, ma si fa una media su di un volume relativamente grande rispetto le dimensioni atomiche, altrimenti si ottengono regioni a densità infinita ed altre regioni a densità nulla. Dunque,  $dq = \rho(\vec{r}') d\nu$  con  $\rho$  densità di carica in  $\vec{r}'$  e  $d\nu$  volume infinitesimo, si ha:

$$\vec{F}_Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

## Lecture 2: Legge Coulomb

**Esempio.** [immagine] Data una carica negativa, ci sono tre regioni in cui si può avere un equilibrio. Tale carica è respinta dalla quella in  $C$  ed attratta dalle due in  $A$  e  $B$ . Si può avere equilibrio sopra le tre cariche oppure sotto.

Si consideri la carica al di sotto di tutte e tre. Sia  $l = 1$ . Allora la forza agente da  $q^-$  è

$$F_{q^-} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{3} + |y|)^2}.$$

Mentre per le cariche  $q^+$  le componenti  $x$  si elidono e si ha

$$F_{q^+} = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1+y^2} \sin \alpha = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1+y^2} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

[immagine] La soluzione numerica è  $y \approx 0.15$ .

## 3 Distribuzioni continue

Per una distribuzione continua, la forza elettrica agente su di una carica  $q$  è

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Dove  $d\nu'$  si riferisce ad integrare con rispetto ad  $\vec{r}'$  e non  $\vec{r}$ . Inoltre,  $dq' = \rho(\vec{r}') d\nu' \implies \rho(\vec{r}') = \frac{dq'}{d\nu'}$  che è la densità volumica di carica. L'elemento di volume  $d\nu'$  è scelto in modo tale da

essere macroscopicamente piccolo e microscopicamente grande così da non rendere discontinua la funzione (che succede qualora si considerino separatamente gli atomi; invece, si fa una media). Si può estendere il volume su tutto lo spazio, tuttavia bisogna specificare la funzione di densità:

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho(\dots) & \vec{r}' \in V \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Bisogna trovare  $V$  e  $\rho(\vec{r}')$ . Tuttavia, esistono casi particolari: la carica distribuita su di un piano oppure una retta.

Su di un piano si ha

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \sigma(\vec{r}') & z = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Dunque, si evita di considerare  $dz$  e si ha

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} da.$$

Dove  $da$  è l'elemento di superficie e  $\sigma = \frac{dq}{da}$  è la distribuzione areica. Per una distribuzione lineica l'espressione della forza è analoga e si ha  $\lambda = \frac{dq}{dz}$ .

Non è detto che le superfici siano piane: cilindri, sfere. Bisogna utilizzare delle coordinate appropriate.

**Esempio.** Si consideri un tronco di cono cavo con densità areica

$$\sigma(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma & \text{su superficie} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

[immagine] Si vuole trovare la forza su  $q$ . L'asse verticale è un asse di simmetria, dunque la forza ha direzione lungo tale asse. Quindi  $\vec{F} = F_z \hat{u}_z$ , così il problema non è più vettoriale ma scalare. Quindi:

$$dq = \sigma da, \quad F_z = \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \cos \theta.$$

Dove  $F_z$  è la forza dovuta a  $da$ . Bisogna esprimere  $dq$  in termini di  $x$  che è la quantità che cambia. Tutti i punti a distanza  $x$  hanno la stessa forza, dunque l'elemento naturale di superficie a considerare è un anello:  $da = 2\pi r(x) dx$ . Quindi

$$dF_z = \frac{q\sigma 2\pi r(x) dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos \theta(x).$$

Dato che  $r(x) = x \sin \theta$  e  $\cos \theta = \text{cost.}$  si ha

$$dF_z = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi x \sin \theta}{x^2} \cos \theta dx.$$

Da cui segue

$$F_z = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{L}{2}}^L \sin \theta \cos \theta \frac{2\pi x}{x^2} dx = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dx}{x} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta \ln 2.$$

Se si integra da zero allora la forza diverge.

Si considera un altro problema, questa volta con un valore storico. Si vuole calcolare la forza su di una carica posta all'interno di una sfera cava con densità superficiale uniforme,  $\sigma$ . L'espressione generale della forza è

$$\vec{F}_q = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} da.$$

[immagini] Tuttavia, si osserva che costruendo due superfici in modo tale che sottendono lo stesso angolo solido in  $q$ , si ottengono varie semplificazioni sommandoli a coppie. Un angolo solido  $\Omega$  si misura in steradiani ed è definito dalla superficie che lo sottende  $d\Omega = \frac{da}{r^2}$ , simile alla definizione di radiante  $d\theta = \frac{da}{r}$ .

Sorgono alcuni problemi quando si vuole calcolare un angolo in situazioni particolari. Ad esempio, ci si chiede sotto quale angolo si veda una lunghezza  $d$  da un punto  $P$ . Non si ha più la geometria di un cerchio. L'angolo misurato è legato all'arco  $l$  diviso il raggio  $r$ , anche se l'arco non coincide con la corda, si ha una correzione del secondo ordine che si può ignorare. Dunque,  $d\alpha = \frac{dl}{r} = \frac{d \cos d\theta}{r}$ . [rivedi] per immagini. Se il punto è lungo la normale allora si ha la definizione precedente. Fuori dalla normale bisogna correggere per  $\cos \theta$ . Allo stesso modo con l'angolo solido.

Per una coppia di aree lungo il diametro si ha:

$$F_1 = \frac{q\sigma da_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} = \frac{q\sigma d\Omega r_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \frac{r_2^2}{r_2^2} = F_2.$$

Lungo una qualsiasi altra direzione compare il coseno dell'angolo che, però, si semplifica. Dunque, la somma delle forze è nulla. L'andamento della forza con il reciproco del quadrato della distanza è compensato della geometria sferica. La superficie non dev'essere necessariamente sferica perché ciò accada.

**Proprietà della forza elettrostatica.** Dato un sistema di carica, la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione lo descrivono completamente. Si studiano dei risultati che ne discendono. Alcune proprietà:

- la forza elettrostatica è conservativa, si ha un'energia potenziale e si hanno delle leggi di conservazione. Essa è conservativa perché la forza di Coulomb tra le cariche puntiformi è una forza centrale:  $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$ . Dunque:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r)\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r) dr = -[U(r_B) - U(r_A)].$$

Per convenzione si pone un meno davanti alla primitiva.

- Con  $N$  cariche, la forza complessiva  $\vec{F}_q = \sum \vec{F}_i$  è la somma di solo forze centrali:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_q \cdot d\vec{r} = \int_A^B \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

Si sommano integrali di cammino di forze centrali, ciascuna conservativa, dunque quella totale non dipende dal percorso perché conservativa a sua volta.

**Energia potenziale.** Si introduce l'energia potenziale e ne si trova l'espressione. La situazione più semplice è una coppia di cariche: [immagine]

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{r} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \Big|_{r_A}^{r_B} = -\left[ \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \right] = -[U(r_B) - U(r_A)].$$

Tale energia potenziale è definita a meno di una costante, infatti:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + \text{cost.}$$

Si sceglie un riferimento da cui calcolarla, di modo che si può calcolare il percorso da  $A$  al riferimento  $O$  e calcolare da  $O$  a  $B$ . Si pone  $r_0$  all'infinito, da cui  $U(r_0) = \text{cost.} = 0$ . Dunque

$$U(r) = -\int_{r=+\infty}^r \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Si ha  $U > 0$  per  $q_1 q_2 > 0$  e  $U < 0$  per  $q_1 q_2 < 0$ .

Per  $N$  cariche si sommano le interazioni di coppia tramite il principio di sovrapposizione. Per tre cariche si hanno

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \quad (1)$$

$$U_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}} \quad (2)$$

$$U_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} \quad (3)$$

Infatti

$N$	termini
1	0
2	1
3	3
4	6
$N$	$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$

Dunque

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}}.$$

Essa è una energia potenziale di configurazione.

**Esempio.** Energia di legame di una molecola di Na+Cl-. [immagine]. Sia  $|q| = e^-$ ,  $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$  m. L'energia potenziale è negativa perché le due cariche hanno segno opposto. Per separarle bisogna vincere l'energia di dissociazione, cioè l'energia necessaria per portare tali due cariche a distanza infinita l'una dall'altra.

immagine

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \approx 8 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

Lo si confronta con l'energia termica a temperatura ambiente:

$$K = \frac{5}{2} k_B T = \frac{5}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \approx 10^{-20} \text{ J}.$$

Quindi il sale non si dissocia a temperatura ambiente.

Tuttavia, l'interazione tra le cariche in materiale è affievolita dalla polarizzazione delle cariche all'interno del materiale. La costante dielettrica relativa dell'acqua è  $\epsilon_r = 80$ , dunque l'energia potenziale si riduce di 80 volte ed è così confrontabile con l'energia termica. Questo è fondamentale perché i sali si dissociano nei liquidi fisiologici come il sangue.

**Vantaggi energia potenziale.** L'uso dell'energia potenziale è più conveniente rispetto alla forza, dato che è una grandezza scalare.

Si consideri un anello con densità lineare  $\lambda$  e di disporre una carica  $q$  con stesso segno al centro. Tale è una posizione di equilibrio. Spostandola dal centro di una lunghezza  $\varepsilon$  si ha una configurazione di non equilibrio perché  $F \propto \frac{1}{r^2}$  mentre prendendo due porzioni opposte che sottendono lo stesso angolo, si ha una carica contenuta di  $dq = \lambda r_1 d\alpha$  che non bilancia la forza.

immagine

Si vuole trovare la forza di richiamo. Si ha  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{\varepsilon}$  e

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r.$$

con  $dq = \lambda R d\varphi$ . Risolvendo tutto quanto con la forza risulta complicato. Tuttavia, utilizzando il potenziale è più semplice. Si calcola  $U(\varepsilon)$  e si trova

$$F = -\frac{dU}{d\varepsilon}.$$

Dunque

$$dU = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda R d\varphi}{r} \Rightarrow U = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2 - 2R\varepsilon \cos \varphi}} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi}}.$$

Dato che  $\frac{\varepsilon}{R} \ll 1$  si può utilizzare lo sviluppo di Taylor. Tuttavia, non si sono scritte tutte le interazioni di ogni carica sull'anello con le altre, questo perché tali sono tutte costanti e dunque si possono ignorare perché l'energia potenziale è definita a meno di una costante.

Si utilizza il seguente sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + o(\delta^2).$$

Si pone  $\delta \equiv \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi$ . Dunque

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi}} \sim 1 - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi \right] + \frac{3}{8} \cdot 4 \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \cos^2 \varphi + o\left(\left[\frac{\varepsilon}{R}\right]^3\right).$$

Pertanto

$$U(\varepsilon) = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi = \frac{q\lambda}{2\varepsilon_0} + 0 + \frac{q\lambda}{8\varepsilon_0 R^2} \varepsilon^2.$$

Dunque,  $F = -\frac{dU}{d\varepsilon} = -\frac{q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2} \varepsilon$ .

### Lecture 3: Campo elettrico

Si è detto che per distribuzioni continue di carica, la forza di Coulomb è

mer 06 ott  
2021 13:30

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Invece, per due distribuzioni continue di cariche  $\rho_1, \rho_2$  si ha: [immagine]

$$\vec{F}_{\rho_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu' d\nu.$$

Tuttavia, non interessa tutto  $\rho_1$  esplicitamente. Basta conoscere l'interazione di ciascuna carica puntiforme con  $\rho_2$  e poi sommare per il principio di sovrapposizione.

## 4 Campo elettrico

Si introduce il concetto di campo elettrico: esso permette di rappresentare la forza che agisce su ogni punto dello spazio, conoscendo la carica. Con una distribuzione di cariche si può calcolare il campo elettrico.

Si consideri una distribuzione di cariche puntiformi,  $q_1, \dots, q_n$ , e si ponga una carica esploratrice  $q_0$  in qualsiasi posizione  $\vec{r}$  dello spazio. Dunque

$$\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}_i}.$$



Si definisce una grandezza vettoriale: [immagine]

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}_i}.$$

Per una distribuzione continua si ha:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Da cui risulta  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Il campo elettrico è definito in maniera operativa: esso si misura conoscendo la forza e la carica, senza però sapere la distribuzione delle sorgenti. Nella pratica esso semplifica l'analisi dei problemi.

Il campo elettrico ha una importanza geometrica che permette di analizzare il comportamento del sistema prima di trovare l'espressione del campo: tale importanza è data dalle linee di campo. La linea indica la direzione, la freccia indica il verso e la densità delle linee indica l'intensità del campo. Si disegnano uscenti da cariche positive ed entranti in cariche negative.

Per cariche puntiformi si ha [immagine]

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r.$$

Il campo è definito in modo univoco in ogni punto e la forza segue una linea di campo. Le linee non si intersecano mai, tranne nelle sorgenti o all'infinito.

**Esempio.** Si consideri un sistema di cariche lungo l'asse  $x$  di intensità  $3q > 0$  e  $-q$  poste in  $(-d, 0)$  e  $(0, 0)$  rispettivamente. [immagine]

Si vogliono disegnare le linee di campo e trovare, se esiste, una regione in cui il campo è nullo.

Vicino a  $3q$  si hanno delle linee di campo uscenti radialmente. Un terzo di queste linee si chiudono su  $-q$  e gli altri due terzi proseguono all'infinito. Infatti, guardando dall'infinito, la carica totale è  $2q$ , quindi escono linee solo da  $q$  e non ne entrano da  $-q$ .

Si ha una zona in cui non passano linee del campo elettrico e qui ci si aspetta una posizione di equilibrio. Dunque

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{(d+x)^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

La condizione di equilibrio si ha per  $3x^2 = (d+x)^2$ . Da notare che l'equazione sopra è scritta solo per la zona a destra, infatti per avere validità generale bisogna inserire dei valori assoluti. Inoltre, la soluzione della condizione di equilibrio è quella positiva proprio per la rimozione dei valori assoluti operata precedentemente.

Dunque si ha  $\sqrt{3}x = d+x \iff \frac{d}{\sqrt{3}-1}$ .

## 4.1 Calcolo in situazioni particolari

**Disco.** Si consideri un disco di raggio  $R$  con densità aerica uniforme di carica  $\sigma$ . Si calcola il campo elettrico in un punto  $P$  che si trova lungo l'asse  $z$  il quale passa per il centro  $O$  del disco a cui è perpendicolare. [immagine]

Si sa:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \hat{u}_d.$$

In componenti si ottiene:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \frac{z}{d} \quad (4)$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \frac{r}{d} \quad (5)$$

Con  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ . Se si supponga che il campo elettrico risultante abbia una qualsiasi direzione che non sia quella lungo l'asse  $z$ , allora ruotando il disco di un angolo arbitrario, segue che il vettore campo elettrico punta in un'altra direzione, ma la situazione fisica è identica a quella prima della rotazione, dunque non c'è motivo per cui il vettore debba avere diversa direzione: pertanto, l'unica direzione possibile è quella lungo l'asse  $z$ .

Dunque,  $E_r = 0$ . Si calcola  $E_z$ . Si sa  $P(0, 0, z)$  e  $da(x, y, 0)$ . Inoltre,  $d \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $da = dx dy$ . Pertanto

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{z\sigma dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bisogna discutere il dominio di integrazione, i limiti di integrazione. In coordinate cartesiane, per coprire un cerchio bisogna avere  $x \in [-R, R]$  e  $x^2 + y^2 \leq R^2 \implies y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$ . Da cui risulta

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Tuttavia, utilizzando dei sistemi di coordinate diverse, l'integrale si può semplificare perché si fa uso di simmetrie. Tale sistema di coordinate è quello cilindrico:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Dunque  $d \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$ . [immaginare]

Si ha  $da = r dr d\varphi$ . Quindi

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il dominio di integrazione è  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ :

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si opera la sostituzione  $r^2 + z^2 \equiv u$ ,  $2r dr = du$ , da cui

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2 + R^2} u^{-\frac{3}{2}} du = -\frac{z\sigma}{4\epsilon_0} 2u^{-\frac{1}{2}} \Big|_{z^2}^{z^2 + R^2} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right].$$

Si potrebbe notare che si può anche integrare solo su  $r$  sfruttando la simmetria circolare tramite le corone circolari  $2\pi r dr$ .

Si controlla che il risultato abbia senso fisico andando ad osservare il comportamento per  $z \rightarrow +\infty$ . Ad infinito si vede una carica puntiforme, quindi essa dovrebbe dipendere da  $z^2$ . Dunque per Taylor

$$E_z = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \right].$$

Pertanto

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} E_z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{z} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}\right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} \frac{\pi}{\pi} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{z^2}.$$

Nell'ultimo termine si evidenzia la carica totale  $q \equiv \sigma\pi R^2$  e la dipendenza da  $z^2$ .

**Piano infinito.** Si consideri un piano infinito: esso è una buona rappresentazione della situazione in cui si è molto vicini ad una grande distribuzione planare di carica. Il piano presenta una carica aerica uniforme  $\sigma$ . Si ha simmetria rotazionale e, per la stessa argomentazione precedente, l'unica direzione possibile del campo elettrico è quella verticale lungo  $z$ . Inoltre, si ha simmetria traslazionale, quindi si ha la stessa intensità alla stessa distanza. Non è necessario ripetere il calcolo dell'integrale, basta notare che nella soluzione precedente, quando si ha  $R \rightarrow +\infty$  si ottiene un piano infinito:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \vec{E}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_z.$$

Quindi il campo è lo stesso a qualsiasi distanza.

**Piano infinito con foro circolare.** Si può calcolare il campo elettrico in due modi:

- Calcolare l'integrale:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{z\sigma da}{d^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{+\infty} \frac{z\sigma r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Principio di sovrapposizione: il piano infinito con un foro è la somma della densità di carica  $\sigma^+$  del piano infinito più quella  $\sigma^-$  del foro. Quindi

$$\vec{E}_z = \left[ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \right] \hat{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{u}_z.$$

## Lecture 4: Legge di Gauss

lun 11 ott  
2021 13:30

### 5 Legge di Gauss

La relazione tra campo elettrico e sorgente diventa utile se viene espressa in termini di flusso. Si consideri una superficie in una regione in cui esiste un campo elettrico  $\vec{E}(x, y, z)$ . [immagine] Si ha  $\Delta \vec{a} = \Delta a \hat{n}$ . Si definisce il flusso del campo elettrico attraverso la superficie:  $\Delta \Phi = \vec{E} \cdot \vec{a}$ , dunque  $\Phi_S(\vec{E}) = \sum \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{a}_i$ . La superficie  $\Delta a$  è presa in modo che il campo elettrico è costante, così che il prodotto sia ben definito.

Nel continuo si ha:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

Si è già conosciuta una grandezza legata al flusso. Nei fluidi, la velocità è un vettore descritto in tutti i punti dello spazio, dunque forma un campo vettoriale. Le linee di flusso sono linee di campo. Si è introdotto il tubo di flusso e la portata (o flusso)  $Q = \frac{dV}{dt} = Av$ . Si è presa la sezione ortogonale alla direzione della velocità. [immagine]

Si generalizza in modo che la sezione non sia ortogonale alle linee di flusso. [immagine] Dunque si ha  $dV = Adh = Avd \cos \alpha = A\hat{n} \cdot \vec{v} dt$ . L'integrale lungo una superficie è analogo a  $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , con  $d\vec{s} = s\hat{u}$ .

La legge di Gauss permette di associare il flusso attorno una superficie con le cariche all'interno:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}.$$

[immagine]

La legge discende da una osservazione sperimentale. Essa è conseguenza della legge di Coulomb e del principio di sovrapposizione. Inoltre, le riassume entrambe. D'altra parte, il teorema di Gauss, come tutti i teoremi, è una verità matematica.

Si dimostra l'equivalenza con la legge di Coulomb ed il principio di sovrapposizione:

I Si dimostra versa per una carica puntiforme e una superficie sferica con centro nella carica.

2 Si dimostra vera per una carica puntiforme ed ogni superficie.

3 Si dimostra vera per qualunque distribuzione di cariche e per ogni superficie.

Nei primi due passaggi si utilizza la legge di Coulomb, mentre nel terzo si applica il principio di sovrapposizione.

**Punto I.** Si consideri una sfera  $S$  di raggio  $R$ . Un elemento di area è  $d\vec{a} = da\hat{u}_r$  con  $\hat{u}_r$  direzione radiale che coincide con la direzione normale. Quindi il campo elettrico per una carica puntiforme è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Pertanto

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int_S da = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Questo è anche il motivo per cui la costante di Coulomb presenta il fattore di  $4\pi$ : per simmetria sferica.

**Punto II.** Si consideri una superficie arbitraria al cui interno sia posta una singola carica puntiforme. Si consideri una superficie sferica con centro nella carica e che sia tutta contenuta nella superficie arbitraria. Dunque, la superficie che sottende lo stesso angolo solido  $d\Omega$  è  $dA \cos\theta = d\Omega R^2$ . Dato che il campo è radiale, si utilizza la configurazione con il medesimo angolo solido così da avere la stessa quantità di linee per quantità di area. Quindi

$$\Phi_{da}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\Omega r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dA \cos\theta}{R^2} = \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

**Punto III.** Si consideri una distribuzione qualunque di cariche puntiformi. Si scrive il campo elettrico come sovrapposizione  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$ . Dunque

$$\Phi_S(\vec{E}) \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{a} = \sum \int_S \vec{E}_i \cdot d\vec{a}_i = \sum \Phi_S(\vec{E}_i) = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

## Lecture 5

La legge di Gauss è

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0} \rightarrow \Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Quindi, il flusso attraverso una superficie chiusa in cui non sono presenti cariche è  $\Phi_S(\vec{E}) = 0$ . [immagine] Infatti, il flusso nella superficie  $S+S'$  è  $\Phi_{S+S'}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Si consideri un collegamento infinitesimo si ha:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \implies \Phi_{S'}(\vec{E}) = 0.$$

Un altro modo per vedere che  $\Phi_S = 0$  è sapere che il contributo attraverso le superfici che sottendono lo stesso angolo solido è uguale: il flusso in entrata ed in uscita è lo stesso (solo con segno opposto).

Si scelga una carica puntiforme e la si guardi attraverso una superficie  $da$  che sottende un angolo solido  $d\Omega$ . Allora il flusso attraverso la superficie che sottende tale angolo solido è uguale qualunque sia la superficie. Questo è utile per scegliere la superficie più comoda così da semplificare i calcoli.

Infatti, si considerino due casi come quelli in figura [immagini] Si costruisce un sistema che è la

mar 12 ott  
2021 13:30

somma dei due con  $S = A + A'$ . Si ha  $\Phi_S(\vec{E}) = 0$  perché non ci sono cariche all'interno. Dunque

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{A'} \vec{E} \cdot d\vec{a}' = 0.$$

Per superfici aperte, il verso del versore normale è arbitrario. Per superfici chiuse, esso punta verso l'esterno. Quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = -\Phi_A(\vec{E}) + \Phi_{A'}(\vec{E}) = 0 \implies \Phi_A(\vec{E}) = \Phi_{A'}(\vec{E}).$$

**Esempio.** Si consideri un cono ed una calotta sferica. [immaginare]

Per il cono vale  $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a}$ . Per simmetria, i punti di una corona circolare hanno la stessa intensità del campo elettrico:  $r = \frac{h}{\cos \alpha}$ ,  $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r$ ,  $da = 2dR\hat{n}$ .

Quindi  $R = r \sin \alpha = h \tan \alpha$ ,  $dR = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ . Pertanto

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} da \hat{n} \cdot \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \alpha}{h^2} 2\pi h \tan \alpha \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \cos \alpha = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Dunque

$$\Phi = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta).$$

Per la calotta il calcolo è più semplice:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}; \quad da = 2\pi R \sin \alpha R d\alpha.$$

Quindi

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Da cui il risultato è ancora  $\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$ .

## 5.1 Applicazioni della legge di Gauss

**Sfera piena.** Si consideri una sfera piena con carica uniforme

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & r \leq R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Si calcola il campo elettrico per mezzo della legge di Gauss. Essa ha un'utilità quando si sceglie una superficie opportuna così da semplificare l'integrale, cioè sarebbe comodo trovare una superficie tale per cui il campo elettrico sia costante.

Nella sfera, l'unica direzione possibile è quella radiale, questo è motivato dall'argomento già esposto riguardo la simmetria di rotazione, la quale vale attorno a qualunque asse per il centro. Quindi, la direzione e l'intensità non dipendono dalle componenti angolari:  $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$ . Dunque, la superficie pure la superficie all'interno utilizzata per il calcolo dell'integrale dev'essere sferica con raggio  $r$ . Pertanto

$$\Phi_S(\vec{E}) = E(r) \int_S da = E(r) 4\pi r^2 = (\text{Gauss}) \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\nu.$$

Dunque

- Per  $r \geq R$  si ha

$$\int_V \rho d\nu = \rho \int_{V(r=R)} d\nu = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q.$$

Quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Una sfera uniformemente carica si comporta come una carica puntiforme.

- Per  $r < R$  si ha

$$\int_V \rho d\nu = \int_0^r d\nu = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \text{carica fino a raggio } r.$$

Quindi

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

[immagine]

**Filo infinito.** Si consideri un filo infinito (cioè che si è talmente vicini che appare essere infinito) di densità di carica lineica  $\lambda$  e con simmetria cilindrica. Si consideri inoltre una superficie cilindrica lunga  $L$ . [immagine] Dunque  $\Phi_S(E) = \frac{q}{\epsilon_0}$ ,  $\hat{u}_r \cdot \hat{n} = 1$ . Il flusso è nullo per le basi perché  $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ . Pertanto

$$\int E(r) da = E(r) \int_{\text{Superf. later.}} da = E(r) 2\pi r L.$$

Si ha  $dq = \lambda da$ , da cui  $q = \lambda \int_0^L dz = \lambda L$ . Quindi

$$E(r) 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Questa formula è valida quando si è molto vicini al filo, cioè supponendo che (relativamente) il filo sia infinito.

**Piano infinito.** Si consideri una distribuzione planare di carica con densità areica  $\sigma$ . Per ogni punto si ha simmetria rotazionale e traslazionale. Il campo punta in direzione  $z$ :  $\vec{E}(z) = E\hat{u}_z$ . Tramite Gauss si può utilizzare un cilindro. [immagine]

Non sapendo come il campo elettrico dipenda da  $z$  si sceglie il cilindro in modo tale che il piano lo sezioni a metà. Quindi  $d\vec{a} = \pm da \hat{u}_z$ . Il prodotto scalare sopra e sotto tra  $\vec{E}$  e  $d\vec{a}$  è lo stesso. Inoltre, il contributo delle superfici laterali è nullo perché sono parallele alla direzione del campo. Il campo è concorde con  $d\vec{a}$  per  $\sigma > 0$  e discorde per  $\sigma < 0$ .

Dunque, grazie alle simmetrie si ha

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{base}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2E(z)A = (\text{Gauss}) \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \iff E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \implies \vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_z.$$

Per due piani paralleli con carica opposta si può utilizzare il principio di sovrapposizione.

**Superficie generica.** Si consideri una superficie generica con densità areica  $\sigma$  e altre cariche presenti di cui non si sa la disposizione. [immagine]

Tramite Gauss si può stabilire la relazione tra  $E_1$  ed  $E_2$ , campi da una e dall'altra parte della superficie. Localmente, la superficie è piana, dunque, si consideri un cilindro con altezza  $h$  attraverso cui si calcola il flusso nel limite per cui  $h \rightarrow 0$ . Bisogna notare che in questo caso il flusso attraverso la superficie laterale non è nullo. Nel limite di  $h \rightarrow 0$  il flusso attraverso la superficie laterale va a zero, quindi interessano solo le due basi. Quindi

$$\int_{\text{base sup.}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_1 + \int_{\text{base inf.}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_2 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

Dunque per  $\hat{n}$  con verso uscente dalla superficie si ha

$$(E_{\perp,1} + E_{\perp,2})A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A.$$

Se si considera  $\hat{n}$  con una sola direzione allora si ha

$$\Delta E_{\perp} = (E_1 - E_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Si nota che un campo ha il segno opposto. Infatti, nel piano si ha  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  per  $z > 0$  e  $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  per  $z < 0$  che hanno differenza di  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ .

La discontinuità nel campo elettrico è dovuta alla superficie.

**Sfera cava.** Si consideri una sfera cava uniformemente carica. Si ha  $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$ .

$$\Phi_S(E) = E \int d\vec{a} = (\text{Gauss})0 \implies E = 0 \text{ fino a } r < R.$$

Appena  $r \geq R$  si ha  $Q = 4\pi\sigma R^2$ . Quindi

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

Dunque  $E(R^-) = 0$  e

$$E(R^+) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

**Lavoro per avvicinare delle cariche.** L'energia potenziale può essere scritta in termini di campo elettrico. Quando si portano delle cariche elettriche in uno spazio vuoto, si crea un campo elettrico. Il lavoro per avvicinare due cariche si può intendere come il lavoro che va nell'energia potenziale di interazione oppure come lavoro necessario a creare il campo elettrico. Dunque, si cerca  $U = U(\vec{E})$ .

Si consideri una sfera cava carica. Per avvicinare le cariche di una distanza  $dR$  si compie un lavoro utile a creare del campo elettrico dove prima non era presente, pertanto si aumenta l'energia potenziale  $dU$ . [immagine]

Dunque, il volume infinitesimo è  $dV = 4\pi R^2 dR$ . Si calcola il lavoro necessario ad avvicinare le cariche. Interessa il lavoro compiuto dal campo elettrico:

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dq\vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Con la forza elettrica si intende solo quella dovuta all'eccesso di carica, non alla mutua interazione tra gli atomi né alle loro forze di coesione, le quali sono la somma di tante cariche di segni opposti che, su grandi distanze, si cancellano.

Su una porzione di carica  $dq = \sigma dA$  sulla superficie agisce un campo elettrico che è contributo di tutte le cariche sulla superficie comprese quelle nella regione  $dA$ ; tuttavia, una carica non interagisce con se stessa. Idealmente,  $\vec{F} = dq\vec{E}_{\text{ext}}$ , ma si aggiunge  $\vec{E}_{\text{int}}$  perché le forze interne si bilanciano (per principio di azione, reazione). Dunque

$$\vec{F} = dq(\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}}) = dq\vec{E}.$$

Inoltre, il campo all'interno è  $E = 0$  ed all'esterno è  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ . Il campo da considerare è una media. Infatti, una distribuzione fisica non è mai uno strato di spessore nullo, dunque la superficie ha uno spessore  $d$  piccolo e si consideri una porzione di spessore  $dx$ . Pertanto, la quantità di carica contenuta in  $dx$  è  $dq = \rho dx A = d\sigma(x) A$ . [immagine]

Quindi,  $dF(x) = dqE(x) = d\sigma AE$  e  $d\sigma = \varepsilon_0 dE$  in quanto passando attraverso una superficie, il campo elettrico ha una discontinuità dovuta alla superficie stessa. Dunque

$$dF = AE\varepsilon_0 dE \iff \frac{dF}{A} = E\varepsilon_0 dE \implies \frac{F}{A} = \varepsilon_0 \int_{E_1}^{E_2} E dE = \varepsilon_0 \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\Delta E = \varepsilon_0 \langle E \rangle \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \iff F = dq \langle E \rangle.$$

(nei precedenti passaggi l'area  $A$  era una porzione infinitesimale, dunque è  $dq$  e non  $q$ ). Quindi, per la sfera

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + 0 \right) \implies dF = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} dA.$$

Dunque, il lavoro è

$$W = -dU = -\langle E \rangle q dr = -\langle E \rangle \sigma A dr = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sigma 4\pi r^2 dr.$$

Per  $q > 0$  rimpicciolendo si lavora contro il campo elettrico e similmente per  $q < 0$  si lavora contro la forza e si fa crescere l'energia potenziale. Quindi

$$dU = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 dr 4\pi r^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 dV.$$

Il termine  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  è la densità di energia potenziale.

**Esercizio.** Si considerino due piani paralleli con la stessa densità areica di carica  $\sigma$ . Avvicinando i due piani, il campo elettrico creato è  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  in un volume  $dV = A dx$ . Si calcoli la forza elettrica e qual è il lavoro di tale forza per calcolare la variazione di energia potenziale. Bisogna notare che, considerando una carica, le forze elettrostatiche dovute alle altre cariche sullo stesso piano sono perpendicolari allo spostamento  $dx$ , dunque non compiono lavoro e l'unico contributo al lavoro è dovuto al campo del piano opposto. Infatti,  $W = qE dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sigma A dx = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} A dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$ . [immagine]

## Lecture 6

Le espressioni dell'energia potenziale diventa

mer 13 ott  
2021 13:30

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV, \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Ne caso di due piani paralleli con distribuzione areica uniforme  $\sigma$ . Si ha

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_z & \text{se ext.} \\ 0 & \text{se int.} \end{cases}.$$

Il lavoro per avvicinare i piani è

$$-dU = W = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Isolando  $dq = \sigma dA$ , si ha che tutte le cariche sul piano esercitano su  $dq$  delle forze perpendicolari allo spostamento; dunque si considera solo l'interazione delle cariche dell'altro piano. Quindi

$$W = E dq dx = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sigma dA dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 dA dx.$$

Si crea un campo elettrico dove prima era nullo. L'energia potenziale si può calcolare dal campo elettrico senza avere conoscenza delle cariche.

**Coordinate sferiche.** [immagine]

Le coordinate sono  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $r \in [0, +\infty)$ . I passaggi di coordinate sono

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}.$$

Quindi per ottenere un elemento di volume bisogna passare da  $(r, \theta, \varphi)$  a  $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ . Dunque  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ .



**Esempio.** Si consideri una sfera cava con densità di carica areica  $\sigma$ . Il campo elettrico

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r & r \geq R \end{cases}.$$

Con  $Q = 4\pi R^2 \sigma$ . Il contributo del campo elettrico all'interno della sfera è nullo. Quindi

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^{+\infty} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

La funzione non dipende dalle coordinate angolari  $\theta$  e  $\varphi$ ; dunque, per linearità

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_2 \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2}}_{\frac{1}{R}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Si vede un altro modo di calcolare l'energia potenziale di una distribuzione continua. Si ha il passaggio  $q_i \rightarrow dq_i = \sigma \, da_i$ . Dunque

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \int_S \frac{\sigma \, da \, \sigma \, da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_S \int_S \frac{da \, da'}{|\hat{u}_r - \hat{u}_{r'}|}.$$

[immagine]

Dove  $\vec{r} - \vec{r}' = R\hat{u}_r - R\hat{u}_{r'} = R(\hat{u}_r - \hat{u}_{r'})$ . Inoltre, il secondo integrale vale  $(4\pi R^2)^2$  ed il motivo di tale risultato può essere di seguito informalmente motivato: si tenga fissata la direzione di  $da$  e si integri l'altra  $da'$  così da spazzare tutto l'angolo solido ottenendo un risultato di  $4\pi R^2$ ; ripetendo lo stesso procedimento per ogni direzione di  $da$ , si ripete un numero totale di volte pari a  $4\pi R^2$ . Pertanto il risultato è  $(4\pi R^2)^2$ .

Si vede un terzo modo per calcolare l'energia potenziale. [immagine]

L'energia potenziale è il lavoro necessario per configurare il sistema portando le cariche dall'infinito alla loro posizione. Quando si è ad una carica totale  $0 < q < Q$ , con  $Q = \sigma 4\pi R^2$ , e si vuole portare una carica dall'infinito fino ad  $R$  si ha

$$W = - \int_{+\infty}^R dq \vec{E}_q \cdot d\vec{r} = \frac{q \, dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Dunque, l'energia potenziale della configurazione è

$$U = \int_0^Q \frac{q \, dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

**Equivalenza espressioni.** Si dimostra l'equivalenza delle due espressioni precedentemente citate. Se si dimostra l'equivalenza per una coppia di cariche allora per il principio di sovrapposizione si può estendere il risultato ad un numero arbitrario di cariche.

Si considerino due cariche elementari  $e$  separati da una distanza  $b$ . [immagine]. Si ha l'espressione di interazione delle cariche come

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{b}.$$

Mentre l'espressione con i campi elettrici è

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \, d\nu = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_1^2 \, d\nu + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_2^2 \, d\nu + \epsilon_0 \int_V \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \, d\nu.$$

Si ricorda che  $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ . Inoltre, nei primi due integrali si ha  $E^2 \sim \frac{1}{r^4}$ ,  $d\nu = 4\pi r^2 \, dr$  e dunque gli integrali hanno comportamento asintotico come  $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$ , infatti divergono. Tuttavia, tali

due integrali sono detti di auto-energia: essi rappresentano l'energia necessaria a "creare" una carica puntiforme. Sono divergenti perché per accumulare una quantità finita di carica in uno spazio infinitesimo richiede, nell'elettrodinamica classica, un lavoro infinito. Tuttavia, le cariche puntiformi "esistono pronte all'uso" e ci si occupa solamente di calcolare il lavoro necessario per creare la configurazione, cioè il lavoro di interazione. Inoltre, essi sono costanti e si possono ignorare dato che l'energia potenziale è definita a meno di costanti. Queste divergenze non sono eliminate nella meccanica quantistica: il problema è gestito tramite la rinormalizzazione, cioè si sottrae i termini divergenti irrilevanti. Quindi, l'ultimo integrale (e l'espressione dell'energia potenziale) diventa:

$$U = \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \cos\psi \frac{1}{r^2} \frac{1}{R^2} \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Inoltre  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{b}$  da cui  $R = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}$ , e soprattutto  $\cos\psi = \frac{r-b\cos\theta}{R}$ . [immagine]. Tuttavia, non si segue questa strada di integrazione, ma si manipola l'integrando ancora un po'. Se si integra  $r$  mantenendo  $\theta$  costante si ha  $dr \cos\psi' = dR$ , tuttavia  $\psi' \approx \psi$  per infinitesimi. Dunque

$$U = \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \epsilon_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{\frac{1}{b}} \int_b^{+\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{b}.$$

Tutte le volte che si lavorano con energie potenziali si potrebbero aver costanti infinite dovute alla costruzione della configurazione delle cariche.

## 6 Potenziale elettrico

La forza elettrostatica è conservativa, quindi vi si associa un'energia potenziale. Il campo elettrico è stato introdotto in modo tale che  $\vec{F} = q\vec{E}$  per ogni carica  $q$  che si trova sotto l'influenza della distribuzione di carica statica che genera  $\vec{E}$ . Dunque diventa naturale chiedersi quali proprietà abbia l'integrale di linea del campo elettrico:  $\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}$  è indipendente dal percorso.

La dimostrazione è la stessa di quella utilizzata per la forza. Il campo elettrico di una carica puntiforme è radiale come la forza e vale

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Dunque l'integrale di linea su  $\Gamma$  è

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Si introduce in maniera analoga alla forza, una funzione scalare associata all'integrale di linea. Inoltre, vale il principio di sovrapposizione. Se  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$  allora

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\Gamma \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \int_\Gamma \vec{E}_i \cdot d\vec{s}.$$

Dato che ogni integrale è indipendente dal percorso, allora anche la somma lo è a sua volta. Inoltre, dato che è conservativo segue che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Si introduce la grandezza associata  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  chiamata potenziale elettrostatico:

$$\Delta\varphi \equiv - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

La scelta del segno negativo ritorna dalla convenzione dei segni già usata per la definizione dell'energia potenziale. Infatti

$$\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{P_1}^{P_2} q\vec{E} \cdot d\vec{s} = q\Delta\varphi.$$

Quindi  $\Delta\varphi$  è una energia per unità di carica ed ha come unità di misura:

$$[\Delta\varphi] = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}.$$

Similmente, il campo elettrico ha come unità di misura:

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Il potenziale elettrostatico è definito a partire dalla differenza di potenziale come funzione scalare della posizione  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  definita a partire da un punto di riferimento fissato in modo arbitrario, ma oculato:

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{P_0}^{P(x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Il potenziale elettrostatico è un campo scalare.

Se si suppone di conoscere  $\varphi$  e si vuole trovare il lavoro necessario per andare da un punto all'altro dello spazio si utilizza l'espressione  $q\Delta\varphi$ .

**Nota.** Con le cariche elementari si utilizza l'unità di energia dell'elettronvolt:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

**Esempio.** [immagine]

Si consideri  $\vec{E} = (ky \quad kx \quad 0)$ . La differenza di potenziale tra l'origine ed un punto  $(x, y)$  è seguendo una traiettoria che percorre l'asse  $x$  fino alla proiezione del punto e poi si innalza alla sua ordinata è:

$$\varphi(x, y) = - \int_0^x \vec{E}(x, 0) \cdot dx \hat{i} - \int_0^y \vec{E}(x, y) \cdot dy \hat{j} = 0 - kx \int_0^y dy = -kxy.$$

**Nota.** Non tutte le funzioni di coordinate sono possibili potenziali di campi elettrici. Non tutti i vettori funzioni di coordinate sono possibili campi elettrici. Deve essere soddisfatta la condizione di circuitazione. Si vede più avanti questa caratteristica impone delle condizioni precise sulle derivate di  $f$ .

**Esempio.** Si consideri una sfera cava,  $Q = 4\pi R^2\sigma$ . L'energia potenziale descrive l'interazione tra le cariche ed i campi. Il potenziale è una funzione scalare legata alla configurazione delle cariche. Quindi

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r & r \geq R \end{cases}.$$

Si definisce  $\varphi(\vec{r}) = - \int_{+\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$ . Quindi

- Per  $r \geq R$  si ha

$$\varphi(r) = - \int_{+\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Sulla superficie risulta  $\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$ .

- Per  $r \leq R$  si ha

$$\varphi(r) = - \underbrace{\int_{+\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{\varphi(R)} - \underbrace{\int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}}_0 = \text{cost.}$$

[immagini] All'interno della sfera si ha regime equipotenziale.

**Esempio.** Si consideri una sfera piena di densità di carica uniforme  $\rho$ . La carica totale è  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ . Inoltre

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r & r \geq R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r & r \leq R \end{cases}.$$

Quindi

- Per  $r \geq R$  si ha

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

come precedentemente.

- Per  $r \leq R$  si ha

$$\varphi(r) = - \underbrace{\int_{+\infty}^R \vec{E}_{\text{ext.}} \cdot d\vec{r}}_{\varphi(R)} - \underbrace{\int_R^r \vec{E}_{\text{int.}} \cdot d\vec{r}}_{\varphi_{\text{int.}}}$$

Dove si ha

$$\varphi_{\text{int.}} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{1}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R^2 - r^2).$$

Dato che

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{R} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2.$$

Segue

$$\varphi(r) = \varphi_{\text{int.}} + \varphi(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = a - br^2.$$

[immagini]

## Lecture 7

Il campo elettrico è conservativo, dunque si introduce una funzione che dipende dalle coordinate tale che

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \varphi(x_0, y_0, z_0) \equiv 0, \quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

La forma infinitesimale è  $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ . La funzione  $\varphi$  è la primitiva di  $E$ , tuttavia essa è scalare: non preserva le informazioni geometriche. Pertanto, si utilizza il gradiente il quale preserva tale tipo di informazioni.

**Gradiente.** Si consideri  $f = f(x)$ . Si ha

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = \partial_x f \cdot dx.$$

Nello spazio si ha

$$df(x, y, z) = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy + \partial_z f \cdot dz.$$

Inoltre

$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}.$$

Ricordando il prodotto scalare si scrive

$$df(x, y, z) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s}.$$

con  $\vec{\nabla} f = \partial_x f \hat{i} + \partial_y f \hat{j} + \partial_z f \hat{k}$ . Il gradiente indica la direzione di incremento massimo

$$df = |\vec{\nabla} f| ds \cos \theta.$$

Infatti, si ha variazione massima per  $\theta = 0$ .

**Esempio.** Sia  $f = f(r)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Per  $dr$  a  $r = \text{cost.}$  si ha  $f(r) = \text{cost.}$ ,  $df = 0$ . Dunque  $\vec{\nabla} f = \partial_r f \hat{u}_r$ .

Unendo quanto visto per il campo elettrico ed il gradiente segue

$$dq = \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{a} \implies \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \iff \varphi = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

**Esempio.** Se  $q(x, y) = -kxy$  allora  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = ky \hat{i} + kx \hat{j}$ .

Si vuole collegare il campo elettrico alle sorgenti. Affinché il potenziale sia utile, bisogna collegarlo a tali sorgenti. Da esse si può ricavare il campo come

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Si sa che il campo elettrico è legato al potenziale tramite  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$  di una distanza generica. La si consideri come la sovrapposizione di cariche puntiformi

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = - \sum \vec{\nabla} \varphi_i(\vec{r}).$$

Per una carica puntiforme si ha

$$\varphi_i = - \int_{+\infty}^{r'_i} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r'_i)^2} \hat{u}_{r'_i} \cdot d\vec{s} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'_i}.$$

[immagine] [rivedi] primato e non primato. Quindi  $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\sum \varphi_i)$  il potenziale elettrostatico è additivo cioè  $\varphi = \sum \varphi_i$ , dove  $\varphi_i$  è il potenziale dovuto alla  $i$ -esima carica puntiforme ad una certa distanza  $r'_i$ . Dunque

$$\varphi(r) = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'_i}.$$

Per una distribuzione continua si ha  $dq = \rho d\nu$  e quindi

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'.$$

Se  $\rho = \begin{cases} \sigma & \text{su } S \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$  allora

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da'.$$

Se  $\rho = \begin{cases} \lambda & \text{su } \Gamma \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$  allora

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds.$$

**Esempio.** Si consideri un sfera cava con carica  $\sigma$  sulla superficie. [immagine]  
Utilizzando le coordinate sferiche si ha  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $r = R$ . Dunque

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{R^2 \sin\theta \sigma}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}} d\theta.$$

Dove si è posto  $da = R d\theta R \sin\theta d\varphi$  e  $|\vec{r} - \vec{R}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}$ . Dunque

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi R^2 \sigma}{Rr} \int \frac{2Rr \sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}} \iff \varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & \text{se } r \geq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, & \text{se } r \leq R \end{cases}.$$

**Esempio.** Si consideri il filo infinito. Il campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r.$$

Il potenziale diventa

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z} \rightarrow +\infty.$$

Dunque si deve scegliere il punto di riferimento diverso dall'infinito:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{z + \sqrt{r^2 + z^2}}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + L^2} + L}{\sqrt{r^2 + L^2} - L}.$$

Dato che  $\frac{r}{L} \ll 1$  segue per Taylor

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \text{cost..}$$

Quindi

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\partial_r \varphi \hat{u}_r = -\partial_r \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \text{cost.} \right) \hat{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r.$$

## Lecture 8

Si è introdotto il potenziale elettrostatico

mar 19 ott  
2021 13:30

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Per principio di sovrapposizione, il potenziale è additivo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'.$$

**Esercizio.** Si calcoli il potenziale lungo l'asse di un disco con densità areica di carica uniforme  $\sigma$ . Si scopre che il potenziale lontano si comporta come  $\frac{1}{r}$  e vicino si ha una discontinuità nella derivata: il campo elettrico cambia segno.

## 6.1 Potenziale di un dipolo elettrico

Si consideri una coppia di cariche  $q_+$ ,  $q_-$  separate da una distanza  $l$  tale che  $r \gg l$ . [immagine] Guardando da lontano si vede un polo neutro; da vicino si nota la separazione (simile alle molecole polari). Si vuole trovare il campo. Risulta essere comodo usare il potenziale insieme al principio di sovrapposizione. Quindi:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Si esprimono le distanze in riferimento all'origine. Inoltre, il sistema è simmetrico rispetto la coordinata  $\phi$ . Dunque

$$r_- = r + \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_+ = r - \frac{l}{2} \cos \theta.$$

Pertanto

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta}.$$

Dato che  $r \gg l$  segue

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Si indica  $\vec{r}$  con il simbolo di vettore nell'argomento del potenziale elettrico perché esso dipende da  $r$  e  $\theta$ .

Si osserva:

- Risulta  $\varphi \propto ql$  quantità detta dipolo elettrico. Se si associa una direzione ad  $l$  con verso dalla carica negativa a quella positiva allora  $\vec{p} = ql\vec{e}$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

- Il potenziale di una carica puntiforme dipende da  $\varphi \propto \frac{1}{r}$ , mentre di un dipolo è  $\varphi \propto \frac{1}{r^2}$ . Per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  si ha  $\varphi = 0$  e questo significa che uno spostamento  $dr$  da  $d\varphi = 0$  quindi il campo elettrico è ortogonale. Dato che  $\varphi \propto \frac{1}{r^2}$  allora  $E \propto \frac{1}{r^3}$ . Questo comportamento è simile alle maree: la luna è la sorgente, mentre le maree ai due capi della Terra sono i dipoli.

Si può creare una configurazione per cancellare i dipoli. [immagini]

Nel quadripolo rimane un termine residui  $\varphi \propto \frac{1}{r^3}$ . In generale, per una distribuzione di cariche localizzata, il potenziale può essere sviluppato come

$$\varphi = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \dots$$

Il termine  $\frac{1}{r}$  è il monopolio che è nullo da lontano perché la configurazione pare neutra. Il termine  $\frac{1}{r^2}$  è il dipolo che è nullo se le cariche positive e negative sono mescolate; compare se c'è polarizzazione.

**Esempio.** Un esempio di potenziale di dipolo è quello del cuore. Le cellule si polarizzano e depolarizzano. Si ha un eccesso di carica, la contrazione è una polarizzazione coordinata. Nell'elettrocardiogramma si pone un elettrodo sul polso e sulla caviglia che è usata come riferimento. [immagini]

Dunque

$$\varphi_A = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_{r_A}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A^2}, \quad \varphi_B - \varphi_A = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (\hat{u}_B - \hat{u}_A), \quad r_A \equiv r_B.$$

Con l'elettrocardiogramma si vede la proiezione del dipolo sulla congiungente degli elettrodi.

Per calcolare il campo elettrico si utilizza il gradiente:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ . Sarebbe utile calcolare il gradiente in coordinate polari: si può ottenere per cambio di coordinate oppure per calcolo diretto.

**Gradiente in coordinate sferiche e cilindriche.** Il differenziale del potenziale elettrico in coordinate sferiche è

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s} = \partial_r\varphi dr + \partial_\theta\varphi d\theta + \partial_\phi\varphi d\phi.$$

Si può scrivere il differenziale dello spostamento come

$$d\vec{s} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{u}_\phi.$$

Dunque bisogna trovare un'espressione per  $\vec{\nabla}\varphi$  tale per cui valga la prima uguaglianza  $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}$ .  
Dunque

$$\vec{\nabla}\varphi = \partial_r\varphi \hat{u}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta\varphi \hat{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\varphi \hat{u}_\phi.$$

Per le coordinate cilindriche si ha

$$d\vec{s} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z.$$

Dunque, il campo elettrico del dipolo risulta essere

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \left( \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = -\partial_r \left( \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_r - \frac{1}{r} \partial_\theta \left( \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_\theta - \cancel{\partial_\phi \left( \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_\phi} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{u}_r + \sin\theta \hat{u}_\theta). \end{aligned}$$

Si ricorda che è un'approssimazione per  $r \gg l$ , inoltre si ha simmetria lungo la coordinata  $\phi$ .  
[immagine]

**Energia potenziale e potenziale elettrico.** L'energia potenziale è associata alla configurazione di cariche. Il potenziale elettrico indica il lavoro necessario a portare una carica dall'infinito.

Per una sfera cava l'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}, \quad Q = 4\pi R^2 \sigma.$$

Mentre il potenziale è

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, & r \leq R \end{cases}.$$

Entrambi esprimono un lavoro ed essere sono legate:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

La seconda sommatoria è il potenziale dovuto a  $q_j$  quando si è a distanza  $r_{ij}$ :

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} = \sum \varphi_j(r_{ij}) = \varphi(r_i).$$

Dunque, l'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(r_i).$$

Per una distribuzione continua risulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi d\nu.$$



**Esercizio.** Trovare l'energia potenziale di una sfera cava utilizzando la formula per una distribuzione continua di carica.

Si sono viste tre espressioni per l'energia potenziale di un sistema:

- $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ , interazione delle cariche
- $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 d\nu$ , campo elettrico
- $U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d\nu$ , densità di carica potenziale

[rivedi]

Dalla legge di Gauss si ha

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\nu.$$

Il campo elettrico statico è conservativo dunque

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \implies \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi.$$

Si vuole tradurre questi integrali in forma differenziale analoghe alla relazione tra campo elettrico e potenziale. Si introducono altri operatori di derivazione dei vettori.

## 6.2 Divergenza

Essa descrive il flusso locale. [immaginare]

Il flusso attraverso la superficie  $S$  si può considerare come il flusso attraverso  $S_1$  e quello attraverso  $S_2$ , con  $S = S_1 + S_2$ . [rivedi]

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{a} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Per tante superfici si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{a}.$$

Il valore dell'integrale dipende dalla dimensione della superficie scelta. Per trovare una misura del flusso indipendente da tale scelta bisogna normalizzare l'integrale per una grandezza con lo stesso ordine di infinitesimo: si utilizza il volume che ha ordine di infinitesimo pari a tre. Dunque, si introduce la divergenza:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Si scrive una relazione che lega il flusso sulla [rivedi] con la divergenza. Si usa il teorema della divergenze o di Gauss (non legge di Gauss che è una proprietà fisica?). Quindi

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{a}}_{\text{div } \vec{F}} V_i = \int_V \text{div } \vec{F} d\nu.$$

Si nota che  $S = \partial V$ . Applicando questo teorema al campo elettrico si ottiene

$$\int_V \text{div } \vec{E} \cdot d\nu = (\text{T. G.}) \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = (\text{L. G.}) \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\nu.$$

Dato che  $V$  è generico, si ha  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , cioè la forma differenziale della legge di Gauss e prima legge di Maxwell.

Si trova un modo per calcolare la divergenza. [immagine]  
Il volume è  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Dunque, sulla faccia di destra si ha

$$\Phi_{\Delta y \Delta z} = \vec{F} \cdot (\Delta y \Delta z) \hat{u}_x = F_x \Delta y \Delta z.$$

In generale si ha

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} & \left[ (F_x(x + \Delta x, y_M, z_M) - F_x(x, y_M, z_M)) \Delta y \Delta z \right. \\ & + (F_y(x_M, y + \Delta y, z_M) - F_y(x_M, y, z_M)) \Delta x \Delta z \\ & \left. + (F_z(x_M, y_M, z + \Delta z) - F_z(x_M, y_M, z)) \Delta x \Delta y \right] = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z. \end{aligned}$$

Dato che il gradiente è

$$\vec{\nabla} f = \partial_x f \hat{u}_x + \partial_y f \hat{u}_y + \partial_z f \hat{u}_z = (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z)(f).$$

Dove l'ultimo operatore differenziale è detto Nabla o Del. Dunque, in simboli risulta

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z)(F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z) \\ &= \hat{u}_x \partial_x F \cdot \hat{u}_x + \hat{u}_x F \overset{0}{\partial_x \hat{u}_x}. \end{aligned}$$

La derivata di un versore degli assi cartesiani (!) è nulla perché essi sono costanti, ma in altri sistemi di coordinate ciò potrebbe non essere più vero.

Pertanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Tuttavia, la legge di Gauss in questa forma non definisce univocamente il campo elettrico. Infatti, se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$  allora vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}).$$

Dunque servono le condizioni al contorno. Inoltre vale

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{F} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.$$

**Equivalenze delle espressioni dell'energia potenziale.** Dalla terza espressione risulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi \, d\nu = (\text{L.G.}) \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \varphi \, d\nu.$$

Applicando la simmetria della divergenza rispetto al prodotto si ha

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) \, d\nu - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varphi \, d\nu.$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale e applicando la legge di Gauss al secondo integrale si ha

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 \, d\nu.$$

La superficie del primo integrale è infinita perché il volume dell'integrale da cui deriva è infinito a sua volta (infatti, è  $\rho$  che assume valori diversi da zero dove interessa). Dunque, dato che  $E \propto \frac{1}{r^2}$  e  $\varphi \propto \frac{1}{r}$  segue  $\varphi E \propto \frac{1}{r^3}$ ; mentre  $S \propto r^2$ . Quindi l'integrale è proporzionale a  $\frac{1}{r}$  pertanto tende a zero per raggio infinito. Pertanto

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 \, d\nu.$$

[rivedi]

## Lecture 9

mer 20 ott  
2021 13:30

Si è vista la divergenza come

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

In coordinate cartesiane vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z.$$

Dove

$$\vec{\nabla} = (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z).$$

Per il teorema di Gauss o teorema della divergenza si ottiene

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Dove  $S$  è la superficie che racchiude il volume  $V$ :  $S = \partial V$ . Per il campo elettrico per cui vale la legge di Gauss si ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

che è la prima equazione di Maxwell.

**Esempio.** Si consideri una lastra di estensione indefinita in  $yz$  con densità di carica uniforme:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho, & x \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}.$$

Dunque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$

Dato che il sistema ha simmetria di rotazione attorno ad un qualsiasi asse che sia parallelo all'asse  $x$  si ha  $\vec{E} = E_x \hat{u}_x$  e  $E_y = E_z = 0$ . Pertanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \implies \frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & x \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}.$$

Per il primo caso si ha

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} + c.$$

Bisogna capire quanto vale la costante  $c$ . Si guarda il sistema: considerando una carica in  $x = 0$ , se  $c \neq 0$  allora si avrebbe una forza; tuttavia, in  $x = 0$  c'è la stessa quantità di carica da una parte e dall'altra ( $F_q(x=0) = 0$ ), quindi per la simmetria del problema si ha  $c = 0$ . Un campo costante sarebbe dato da una carica superficiale infinita che in questo caso non è presente.

Per il secondo caso si ha

$$E_x = \text{cost.} \quad |x| > \frac{l}{2}.$$

Sulla superficie esterna non c'è carica quindi il campo deve essere continuo. Pertanto

$$E = \pm \frac{\rho l}{2\varepsilon_0}.$$

[immagine]

Tuttavia, una equazione del tipo  $\frac{dE_x}{dx} = 0$  permette anche  $E_x = 0$  come soluzione, però le soluzioni particolare sono date dalle condizioni al contorno.

Si guardi la lastra da lontano: ci si aspetta che la discontinuità tra i due lati sia uguale alla carica superficiale:

$$\Delta q = \rho A \Delta x \implies \sigma = \frac{\Delta q}{A} = \rho \Delta x = \rho l.$$

Dunque il salto è

$$\frac{\rho l}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \Delta E_{\perp}.$$

[immagine]

**Esempio.** [immagine] Si consideri un cilindro infinito in  $z$  con densità di carica uniforme

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

Si utilizza Gauss in forma integrale:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V S d\nu.$$

Si sceglie una superficie cilindrica e per simmetria si ha

$$\vec{E} = E(r)\hat{u}_r \implies \int_S E(r) da = E(r) \int_S da = E(r) 2\pi r L = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi r^2 L, & r \leq a \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi a^2 L, & r > a \end{cases} \implies E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}, & r \leq a \\ \frac{\rho \pi a^2}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}, & r > a \end{cases}.$$

Inoltre,  $\rho \pi a^2 L = Q = \lambda L$  quando si osserva il cilindro da lontano.

Si controlla il risultato con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ . Si scrive il campo in coordinate cartesiane. Per  $r \leq a$ :

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y).$$

Quindi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Mentre per  $r > a$ :

$$\vec{E} = \frac{\rho \pi a^2}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\rho \pi a^2}{2\pi \varepsilon_0} \frac{x\hat{u}_x + y\hat{u}_y}{x^2 + y^2}.$$

[rivedi] risultato.

Si vuole partire dall'equazione differenziale e ricavare il campo. Risulta utile conoscere la divergenza in vari sistemi di coordinate.

**Coordinate cilindriche.**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) + \frac{1}{r} \partial_{\theta} (A_{\theta}) + \partial_z A_z.$$

**Coordinate sferiche.**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\theta} (A_{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} A_{\varphi}.$$

Si calcola l'operatore nabla in coordinate cilindriche. Si conosce

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} &= df \\ d\vec{s} &= dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_{\theta} + dz \hat{u}_z \\ \vec{\nabla} &= \hat{u}_r \partial_r + \frac{1}{r} \hat{u}_{\theta} \partial_{\theta} + \hat{u}_z \partial_z. \end{aligned}$$

Dunque

$$(\hat{u}_r \partial_r + \frac{1}{r} \hat{u}_\theta \partial_\theta + \hat{u}_z \partial_z) \cdot (A_r \hat{u}_r + A_\theta \hat{u}_\theta + A_z \hat{u}_z) = \dots = \partial_r A_r + \frac{A_r}{r} + \partial_\theta A_\theta + \text{vedi note online.}$$

Si ricava la legge di Gauss in forma differenziale in coordinate cilindriche. Per simmetria  $E = E(r)\hat{u}_r$ , quindi

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rE_r) = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \iff d(rE_r) = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r dr, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

Per la prima espressione si ha

$$rE_r = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + b \iff E_r = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} + \frac{b}{r}.$$

Il secondo addendo si può intendere come il contributo di un filo infinito carico. Tuttavia, non è presente alcun filo, pertanto si può porre  $b = 0$ .

Per la seconda espressione si ha

$$rE_r = \text{cost.} \iff E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Non è presente una carica superficiale, dunque non ci può essere una discontinuità nel campo: esso dev'essere continuo. Quindi la costante è per forza  $\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ .

### 6.3 Rotore

Esso traduce in forma locale il fatto che il campo elettrico è conservativo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Sia  $\Gamma = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$  [immagini]. Si consideri un percorso e lo si divida in due altri percorsi: la somma della circuitazione su tali due percorsi è uguale alla circuitazione sul percorso originale in quanto il tratto condiviso è percorso due volte ma in sensi opposti, quindi si elidono nella somma. Pertanto

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{l}.$$

Come per la divergenza, l'integrale ha un valore sempre più piccolo, quanto più breve è  $d\vec{l}$ , dunque bisogna bilanciare l'ordine di infinitesimo con un altro, di modo che il rapporto sia una quantità finita: l'integrale ha lo stesso ordine di infinitesimo della superficie,  $\frac{\Gamma_i}{S_i}$  rimane finito. Quindi si introduce il rotore:

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Mandando a zero il circuito, bisogna tener conto alla direzione con cui si costruisce la superficie, per questo si aggiunge nell'espressione del rotore il vettore normale alla superficie. [rivedi]

**Teorema.** Di Stokes. Il teorema di Stokes è analogo al teorema di Gauss, solo in una dimensione inferiore:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{1}{S_i} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}}_{(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n}} S_i = \int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a}.$$

Si nota che  $\hat{n} \cdot d\vec{S}_i \rightarrow d\vec{a} = da \hat{n}$  e  $C = \partial S$ . Si usa la convezione della regola della mano destra. Per il campo elettrico statico risulta

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\text{Stokes}) \int_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{a}.$$

Dato che la superficie  $S$  è qualunque si ha  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . I campi conservativi sono irrotazionali: non si hanno linee chiuse, esse si chiudono solo su sorgenti.

Si esplicita il rotore in coordinate cartesiane. [immaginare]  
L'elemento di superficie è  $\Delta\vec{a} = \Delta y \Delta z \hat{u}_x$ . La circuitazione è

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[ F_z(y + \Delta y) \Delta z - F_z(y) \Delta z - F_y(z + \Delta z) \Delta y + F_y(z) \Delta y \right] = \partial_y F_z - \partial_z F_y.$$

Scambiando gli assi si ottiene

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_y &= \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_z &= \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{aligned}$$

Il modo più semplice di rappresentare il rotore per mezzo di Nabla è attraverso il prodotto vettoriale:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Dato che il campo elettrico è conservativo, esso si può rappresentare attraverso una funzione scalare del potenziale elettrostatico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

Combinare restringono le tipologie di funzioni potenziale:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \iff \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = (\partial_{yz}^2 \varphi - \partial_{zy}^2 \varphi) \hat{u}_x + \dots = 0 \implies \partial_{yz}^2 \varphi = \partial_{zy}^2 \varphi, \dots$$

Tale condizione è necessaria e sufficiente per rappresentare un campo conservativo (la condizione di sufficienza si vede in Analisi II).

## 6.4 Laplaciano

Combinando le espressioni trovate per il campo elettrico si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &= (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z) \cdot (\partial_x \varphi \hat{u}_x + \partial_y \varphi \hat{u}_y + \partial_z \varphi \hat{u}_z) \\ &= \partial_{xx}^2 \varphi \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x + \hat{u}_x \partial_x \varphi \overset{0}{\cancel{\partial_x \hat{u}_x}} + \hat{u}_x \partial_{xy} \varphi \overset{0}{\cancel{\hat{u}_y}} + \dots = \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

L'ultima è detta di Poisson, la cui soluzione è la soluzione del problema generale dell'elettrostatica. [rivedi] La soluzione è

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Tuttavia, costruire  $\varphi$  da  $\rho$  risulta essere complicato. La soluzione all'equazione di Poisson è unica.

**Esercizio.** Verificare che la soluzione del potenziale di una sfera di carica uniforme:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}, & r > R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho R^3}{6\epsilon_0}, & r \leq R \end{cases}.$$

In tutti i problemi elettrostatici esiste una regione in cui non ci sono cariche. Si ottiene l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Essa è più facile da risolvere con le condizioni al contorno che l'equazione di Poisson su tutto lo spazio.

Si può dimostrare che il potenziale di una carica puntiforme soddisfa l'equazione di Poisson, poi per principio di sovrapposizione, l'equazione generale del potenziale è soddisfatta da qualunque distribuzione.

## Lecture 10

lun 25 ott  
2021 13:30

## 7 Conduttori

Esistono materiali che si elettrizzano: essi hanno una virtù elettrica. Altri materiali non si elettrizzano: [rivedi]

Un palloncino elettrizzato si attacca ad un muro neutro. Con un elettroscopio si può osservare la presenza di carica. Quando si avvicina un campo elettrico ad un conduttore, le cariche si ridistribuiscono in base al campo elettrico generato dal corpo carico. Nei conduttori le cariche sono libere di muoversi. [immagini]

Si dimostra che l'elettroscopio può essere elettrizzato se viene toccato da un corpo carico.

Esiste una elettrizzazione locale temporanea dovuta al campo elettrico esterno. [rivedi]

I

II

III Si può trasportare la virtù elettrica da un corpo ad un altro.

La forza è legata alla carica presente sul corpo carico e a quella che si ridistribuisce sull'altro corpo. I materiali sono classificati in isolanti e conduttori. I conduttori si possono elettrizzare per contatto e trasportano le cariche. Esse si ridistribuiscono in presenza di campo elettrico esterno.

La scala dei tempi dei fenomeni ha rilevanza riguardo a cosa viene classificato conduttore e cosa classificato isolante [rivedi]

Per quanto trattato fin'ora, si è assunto che le cariche siano statiche. Introducendo i conduttori si ha una carica statica ed una distribuzione nel conduttore che non è nota a priori, ma dipende dal campo elettrico esterno. Si vuole descrivere i fenomeni elettrostatici quando sono presenti dei conduttori.

Si richiede che il fenomeno sia statico:  $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$ . Su ogni carica agisce una forza  $\vec{F}_{\text{tot}} = q\vec{E} + \vec{F}_{\text{residue}}$ . Agisce anche la gravità, ma essa è molto minore delle forze elettrostatiche. Esistono forze elettrostatiche di interazione dovuta alla configurazione che a lunghe distanze svaniscono [rivedi]

Tali forze dipendono dal materiale. Per gli isolanti le forze residue sono notevoli?. Nei conduttori esse sono nulle,  $\vec{F}_{\text{res}} \approx 0$ . Quindi,  $\vec{F}_{\text{tot}} = 0 \implies \vec{E} = 0$  in un conduttore. In configurazioni statiche il campo elettrico interno è nullo.

**Conduttore carico** Si consideri un conduttore di forma qualunque sul quale si deposita una carica  $Q \neq 0$ . [immagine]

Il campo elettrico interno è nullo per la proprietà fondamentale dei conduttori. Quindi la carica si distribuisce sulla superficie del conduttore, questo perché

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

e, considerando una superficie interna, il campo è nullo e quindi anche la carica contenuta dev'essere zero. Ciò vale anche considerando come superficie quella del conduttore. Tuttavia, le cariche non possono uscire perché l'esterno (il vuoto?) è un isolante perfetto.

**Proprietà dei conduttori.** Si vedono cinque proprietà dei conduttori:

- $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ .
- Le cariche si distribuiscono sulla superficie limite.
- Si ha  $d\varphi - \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \implies \varphi = \text{cost.}$ . Il conduttore è un volume equipotenziale.
- All'esterno del conduttore c'è un campo elettrico ed esso è ortogonale alla superficie perché  $\varphi = \text{cost.}$ . Infatti, le cariche si dispongono in modo che  $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ . Il campo esterno vale  $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$  perché si passa attraverso una superficie perciò si ha una discontinuità nel campo elettrico. Infatti [immagine]

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Per  $h \rightarrow 0$  il contributo delle superfici laterali si annulla:

$$\underbrace{\int_{S_{\text{int}}} \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{a}}_0 + \underbrace{\int_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{a}}_{\rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0} + \int_{S_{\text{ext}}} \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{a} = E_{\text{ext}} \cdot \Delta a = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \iff E_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0 \Delta a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

- Il campo elettrico alla superficie esterna, la carica totale e il potenziale sono legati tra loro

$$Q_{\text{tot}} = \int_S \sigma da = \varepsilon_0 \int_S \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{a} = -\varepsilon_0 \int_S \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{a}.$$

**Conduttore neutro** Si vede il caso in cui un conduttore neutro sia posto in un campo elettrico esterno. [immagine]

Il campo elettrico è presente anche dentro il conduttore, ma dato che dev'essere nullo, segue che la cariche si devono distribuire in modo tale che generino un campo elettrico opposto annullando quello presente a causa delle sorgenti esterne:  $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{indotto}} = 0$ . Inoltre, non esistono linee di campo che vanno da cariche indotte positive a cariche indotte negative [immagine]. Questo perché il campo elettrico è conservativo

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Infatti, se calcola l'integrale su tale linea si ha una circuitazione positiva perché la parte interna del tragitto fornisce un contributo nullo. I campi elettrici indotti si chiudono solo su altre cariche sorgenti.

**Conduttore carico immerso in un campo elettrico.** Nel caso in cui un conduttore carico sia immerso in un campo elettrico esterno basta utilizzare il principio di sovrapposizione.



**Distribuzione delle cariche.** In un conduttore le cariche tendono a distribuirsi sulla superficie limite. Si può capire tale fenomeno osservando l'energia potenziale di una sfera piena ed una sfera cava:

$$U = \frac{6}{5} \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}, \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

Le cariche si pongono in una distribuzione che minimizza l'energia potenziale. Dunque, è facile comprendere come le cariche interne tendano a ridistribuirsi sulla superficie.

**Esercizio.** Si considerino quattro cariche puntiformi  $q$  vincolate ad un anello di raggio fisso. Si dimostri che la configurazione con energia potenziale minore è quella per la quale le cariche sono equidistanziate sulla circonferenza dell'anello.

**Raggio di curvatura.** Se il conduttore ha forma generica allora

$$\sigma \propto \frac{1}{R_{\text{curv}}}.$$

**Dimostrazione.** Per una geometria semplice, si considerino due sfere di raggio  $R_1$  e  $R_2$ . [immagine] Se è presente della carica sulle sfere si ha

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_i^2} \hat{u}_r = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \hat{u}_r.$$

Pertanto il potenziale sulla superficie è

$$\varphi(R_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_i} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} R_i.$$

Unendo le due sfere con un filo conduttore, si fa in modo di porle allo stesso potenziale perché esso è costante sulla superficie di un conduttore. Dunque

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} R_1 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} R_2 \implies \sigma \propto \frac{1}{R}.$$

Le cariche sono come fluidi: non si hanno forze tangenziali perché si sposterebbero le cariche dall'equilibrio, dunque esistono solo forze perpendicolari.

**Induzione totale.** Si studia cosa succede quando si pone una carica all'interno di un conduttore con una cavità. [immagine]

Il campo della carica si chiude sulla superficie del conduttore con linee ortogonali ad essa e su cui si aggregano cariche di segno opposto indotte. Inoltre, dato che il campo elettro all'interno del conduttore è nullo si ha

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 = \frac{q + Q_{\text{indott}}}{\epsilon_0} \implies Q_{\text{indott}} = -q.$$

Se il conduttore è neutro, allora la carica esterna induce la stessa quantità di carica nel conduttore. L'unica zona dove la carica opposta è presente è la superficie estrema. Per una superficie che racchiude tutto il conduttore si ha

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \implies Q_{\text{indott}}^{\text{ext}} = -Q_{\text{indott}}^{\text{int}} = q.$$

Dato che il conduttore è una sfera, segue che la carica è distribuita uniformemente, quindi il campo elettrico esterno è equivalente al campo elettrico di una carica puntiforme: spostando  $q$  all'interno della cavità non si influenza il campo elettrico esterno. Se  $q$  è molto vicina alla superficie interna, allora si ha una carica indotta molto forte. Essa è costituita da cariche dello stesso segno perché altrimenti si avrebbe una circuitazione non nulla.

## Lecture 11

Dunque si ha

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_q + \vec{E}_{Q_{\text{int}}}}_0 + \vec{E}_{Q_{\text{ext}}}.$$

**Carica esterna al conduttore.** [immagine]

Si genera nel conduttore un campo elettrico indotto

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_q + \vec{E}_{Q_{\text{indott}}}.$$

Dato che il conduttore è globalmente neutro, segue che guardando a lontano si vede solo il campo elettrico di  $q$ . Alcune linee del campo della carica vanno all'infinito, altre si chiudono sul conduttore. Le cariche positive indotte mandano linee di campo che si chiudono all'infinito. Inoltre

$$|Q_{\text{indott}}| < |q|.$$

perché non tutte le linee si chiudono sul conduttore.

In un sistema con un conduttore si hanno delle situazioni complicate. La densità di carica su un conduttore non si conosce a priori. Tuttavia, si sa

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ con soluzione formale } \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Non è detto che si conosca  $\rho$  a priori perché essa considera sia le cariche fisse che quelle indotte. Tuttavia, si risolve il problema utilizzando le informazioni sui conduttori:

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0, \quad \varphi = \text{cost}, \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}, \quad Q = \varepsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

e si risolve il problema al di fuori del conduttore e si impongono dei vincoli. Si cerca una regione fuori dal conduttore ponendo condizioni al contorno.

**Esempio.** Si consideri una configurazione con due piani conduttori infiniti e paralleli. Tali sono delle superfici a potenziale costante con  $\varphi_2 > \varphi_1$ . Si risolve l'equazione di Laplace nel volume tra i due conduttori con condizioni al contorno:

$$\varphi(a) = \varphi_1, \quad \varphi(b) = \varphi_2.$$

Dunque

$$\nabla^2 \varphi = 0 \iff \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi = 0.$$

I piani hanno simmetria rotazionale e traslazionale, quindi il campo elettrico può solo dipendere da  $x$ :  $\varphi = \varphi(x)$ . Dunque

$$\partial_x^2 \varphi = 0 \implies \partial_x \varphi = \text{cost} = a \implies \varphi(x) = ax + b.$$

Con condizioni al contorno di

$$\varphi(0) = b = \varphi_1, \quad \varphi(d) = ad + \varphi_1 = \varphi_2 \iff a = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}.$$

Da cui si ottiene

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} x + \varphi_1, \quad x \in [0, d].$$

Il potenziale è definito a meno di una costante (in questo caso  $\varphi_1$ ). Inoltre

$$\vec{E} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \hat{u}_x = -\vec{\nabla} \varphi.$$

mar 26 ott  
2021 13:30

La densità superficiale di carica della superficie del conduttore è  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$ . Quindi sulla superficie a  $x = d$  si ha

$$\vec{E} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \underbrace{\hat{u}_x}_{\hat{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}.$$

Sulla superficie a  $x = 0$  si ha

$$\vec{E} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}.$$

Tale formula è la differenza di potenziale

$$\Delta\varphi = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \implies \Delta\varphi = -Ed.$$

Nel caso in cui tra le due superfici ci sia una carica si ha

$$\partial_x^2 \varphi = \rho \implies \partial_x \varphi = a + \rho x \implies \varphi = \frac{1}{2} \rho x^2 + ax + b.$$

[rivedi]

Per problemi multidimensionali non si ha sempre una soluzione analitica. Si usano dei trucchi per trovare soluzioni attraverso strade differenti dalla integrazione diretta. Si può utilizzare la forma confinata: una zona è tutta racchiusa da conduttori, anche all'infinito. [immagine] [rivedi] Si cercano soluzioni

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Prendendo la derivata seconda e dividendo per l'espressione di  $\varphi(x, y, z)$  si ha

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Che è equivalente a risolvere

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k.$$

per ciascuna coordinata. Essa ha soluzione sinusoidale, dunque la soluzione totale è una combinazione lineare di funzioni sinusoidali. Tuttavia, questo metodo non viene trattato in questo corso, però è descritto in Griffiths. In generale, non si trova la soluzione, ma si possono conoscere le proprietà. [rivedi]

**Proposizione.** Prima. Il potenziale in un punto  $C$  è pari alla media del potenziale dei punti calcolati su di una superficie sferica centrata in  $C$ :

$$\varphi_C = |\varphi|_S.$$

Vale per qualunque potenziale per cui  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$ . Si dimostra vera per una carica puntiforme e per il principio di sovrapposizione vale per ogni distribuzione. Quindi: [immagine]

$$\varphi_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \langle \varphi \rangle_S = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i}.$$

Si supponga che la carica totale sulla superficie  $S$  sia  $q'$ , allora il potenziale dovuto a tale carica equivale al potenziale di una carica  $q'$  posta al centro della sfera, ad una distanza  $r$ :

$$\varphi' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Il lavoro per portare  $q$  a distanza  $r$  dal centro della sfera è

$$W'_q = q\varphi'(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = q'\varphi_C.$$

Il lavoro per portare la sfera ad una distanza  $r$  da  $q$  p

$$W_{q'} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = q' \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = q' \langle \varphi \rangle_S.$$

I due lavori sono uguali perché il campo è conservativo: l'energia per costruire la configurazione non dipende dal percorso. Inoltre, per formare la sfera ci vuole altra energia, ma la si è ignorata perché essa fornisce un contributo costante al lavoro. Dunque

$$W'_q = W_{q'} \iff \varphi_C = \langle \varphi \rangle_S.$$

Nel caso dei due piani paralleli è evidente

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+\delta) + \varphi(x-\delta)}{2}.$$

**Proposizione.** Seconda. Il potenziale elettrostatico non ha estremi nella regione in cui vale  $\nabla^2\varphi = 0$ . Per assurdo, si supponga esista un punto  $P$  tale che  $\varphi(P) = \varphi_{\max}$ . Allora, per tutti i punti sulla sfera attorno a  $P$  si ha  $\varphi_S = \varphi_P$ . Quindi la sfera possiede un potenziale medio per cui vale  $\varphi_S = \varphi_P$ . Pertanto, la sfera ha  $\langle \varphi \rangle_S < \varphi_P$ , il che è assurdo. [rivedi]

Lo stesso argomento vale per il minimo. Dove vale Laplace, la soluzione del potenziale non presenta configurazioni di equilibrio.

**Proposizione.** Terza. La soluzione all'equazione di Laplace è unica. Si ipotizzi di avere  $\varphi_1, \varphi_2$  soluzioni di  $\nabla^2\varphi = 0$ . Quindi  $\varphi(\vec{x}_1) = \varphi_1, \dots, \varphi(\vec{x}_n) = \varphi_n$ . Sia  $W = \varphi_2 - \varphi_1$ . Allora  $W(\vec{x}_1) = \varphi_2(\vec{x}_1) - \varphi_1(\vec{x}_1) = 0$  [rivedi]. Quindi  $W(\vec{x}_i) = 0$  perché è una condizione al contorno. Dato che l'equazione di Laplace è lineare si ha

$$\nabla^2 W = \nabla^2 \varphi_2 - \nabla^2 \varphi_1 = 0.$$

Essa è ancora soluzione con condizioni al contorno nulle, ma dato che non ha massimo né minimo ed è zero al contorno allora è zero ovunque. Per l'equazione di Poisson, la dimostrazione è analoga.

**Gabbia di Faraday.** [immagine] Il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore: si ha una gabbia di Faraday. Nella cavità interna si ha  $\rho = 0$  e quindi  $\nabla^2\varphi = 0$  [rivedi]

Una cavità monodimensionale è ciò che si è visto in precedenza con i due piani paralleli e si impone  $\varphi_1 = \varphi_2$ , quindi  $E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0$ . Inoltre, se ci fossero linee di campo che passassero attraverso la cavità, si potrebbe prendere un percorso per cui la circuitazione non sarebbe nulla [rivedi]

## 7.1 Carica immagine

Si consideri un piano conduttore infinito ed una distribuzione  $\rho$  di carica [immagine]

Si ottiene una configurazione equivalente se si specchia la distribuzione  $\rho$  e le si cambia il segno. Questa situazione è tipica dei problemi elettrostatici con la terra come conduttore. Si dimostra per una carica puntiforme, ma il risultato vale per ogni distribuzione per il principio di sovrapposizione. Si consideri una carica posta a distanza  $h$  dal piano [immagine]

Si ha

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Tale potenziale si è già visto per il dipolo. Inoltre, se  $r_+ = r_-$  allora  $\varphi = 0$ . Interessa sapere come si distribuisce la carica sul piano e conoscere il campo elettrico. La distribuzione è  $\sigma = \varepsilon E_\perp$ , mentre il campo elettrico dovuto alla carica è

$$\vec{E}_+ = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z.$$

[immagine] Quello dovuto alla carica virtuale è  $\vec{E}_- = \vec{E}_+$  e quello totale che agisce perpendicolarmente al piano è

$$\vec{E} = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z.$$

Quindi

$$\sigma(R) = -\frac{2q}{4\pi} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si ha una carica negativa concentrata alla perpendicolare ed il massimo è  $\sigma(0) = -\frac{q}{2\pi} \frac{1}{h^2}$ , mentre la densità si dimezza a  $R = \sqrt{3}h$ .

La carica indotta è  $Q_{\text{ind}} = \int_S \sigma(r) da$ . Si integra in coordinate polari:

$$Q_{\text{ind}} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{h_2 \pi R dR}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qh}{\sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_0^{+\infty} = -q.$$

Cioè si ottiene l'induzione totale in quanto si può pensare che il piano conduttore chiuda la carica. Tutte le linee di campo di  $q$  si chiudono sul piano. Inoltre, la carica contenuta in un cerchio di raggio  $R_A$  risulta essere

$$Q_{\text{ind}}(R < R_A) = \frac{qh}{\sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_0^{R_A} = \frac{qh}{\sqrt{R_A^2 + h^2}} - q.$$

Per cui per avere il 90% di carica bisogna porre  $R_A = 10h$ , mentre il 99% bisogna porre  $R_A = 100h$ .

Globalmente il piano è neutro: la carica positiva è distribuita uniformemente. Il campo dovuto alla carica positiva è trascurabile. Infatti, si consideri un disco con raggio  $R_D \gg h$ , segue

$$\sigma^+ = \frac{q}{2\pi R_D^2}.$$

Il fattore 2 proviene dal fatto che una superficie fisica reale ha spessore e dunque le cariche indotte si separano nei due estremi della superficie. Quindi

$$\sigma^- = -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{(R_D^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \sigma^-(0) = -\frac{q}{2\pi h^2}.$$

Dunque

$$\frac{\sigma^+}{|\sigma^-|} = \frac{h^2}{R_D^2} \ll 1.$$

**Forza sulla carica.** La forza con cui la carica  $q$  è attratta alla superficie è

$$\vec{F} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{u}_z.$$

L'energia potenziale di  $qq'$  è

$$U_{qq'} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2h}.$$

Ma questa non è l'energia potenziale della configurazione, infatti nel caso originale si ha solo la metà del campo elettrico:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 d\nu.$$

Il volume dev'essere solo quello della parte positiva proprio perché la carica opposta è virtuale. Dunque il lavoro della forza su  $q$  è

$$W = \int_h^{+\infty} qE(x) dx = \int_h^{+\infty} \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2x)^2} dx = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4h}.$$

Nel caso reale, allontanando  $q$  si spostano anche le cariche indotte, il cui lavoro è nullo perché sono in un conduttore, il quale ha potenziale costante sulla sua superficie. Un altro modo per interpretare tale fenomenologia è considerare che tali cariche si spostano perpendicolarmente al campo elettrico.

## Lecture 12

mer 27 ott  
2021 13:30

### 7.2 Capacità

Note modificate online?

Si vedono delle proprietà che caratterizzano i conduttori per semplificare i problemi.

Per conduttori isolati si ha

$$C \equiv \frac{Q}{\varphi} = \text{cost.}$$

[immagine]

Tale relazione vale per qualunque condensatore isolato ed dipende solo dalla geometria del conduttore.

**Esempio.** Si consideri una sfera conduttrice di raggio  $R$ ; il potenziale  $\varphi$  è costante:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Quindi  $C = 4\pi\varepsilon_0 R$  dipende solo da un parametro legato alla geometria. Il rapporto  $C$  viene chiamato capacità ed essa misura la quantità di carica che si immagazzina in un conduttore ad un determinato potenziale. In altre geometrie si hanno altri coefficienti. Per un disco conduttore di raggio  $R$  si ha  $C = 8\varepsilon_0 R$ . Il calcolo è complicato perché  $\sigma$  non è uniforme:

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

[immagine]

Sul Purcell è presente la derivazione.

L'espressione è sempre del tipo  $C = k\varepsilon_0\lambda$  dove  $k$  è un coefficiente numero e  $\lambda$  è una lunghezza. L'unità di misura della capacità è il farad:

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}.$$

Inoltre, conviene ridefinire  $\varepsilon_0$  con le unità di misura della capacità e della lunghezza come rapporto tra le due:  $\varepsilon_0 = 8.99 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \approx 9 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ .

La capacità della Terra è

$$C = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 6.8 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ F} < 1 \text{ mF}.$$

**Coppie di conduttori.** Si definisce la capacità per coppie di conduttori. Spesso si incontrano configurazioni di conduttori con stessa carica di diverso segno ed allo stesso potenziale. Tale è un condensatore la cui capacità è

$$C = \frac{Q^+}{\varphi_+ - \varphi_-}.$$

Si discutono alcune configurazioni.

**Condensatori planari o a piatti paralleli.** Si considerino due dischi di raggi  $R$  separati da una distanza  $d$ , con  $R \gg d$ . Il campo elettrico è uniforme tra i due piatti [immagine]. Inoltre

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \hat{n}.$$

Però un disco isolato conduttore non ha distribuzione uniforme. Ma la configurazione dei due dischi risulta essere il problema di Laplace risolto in precedenza per cui il campo è uniforme nella regione tra i piatti:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{d}.$$

Esso è uniforme perché i potenziali sono costanti. Inoltre,

$$\sigma = \varepsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

Se  $E$  è uniforme, allora anche  $\sigma$  è uniforme. Questo è valido per un raggio infinito. Il motivo per cui con due lastre ?? [rivedi] il campo diventa uniforme è il campo elettrico di un solo disco è che la componente tangenziale sposta la carica negativa del disco superiore verso l'interno. Dunque, la capacità è

$$E = E \iff \frac{Q}{A\varepsilon_0} = \frac{\Delta\varphi}{d} \iff C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

A parità di  $\Delta\varphi$ , meno è la distanza, più è la carica; mentre più è l'area, più è la carica. Con condensatori finiti, il campo elettrico non è uniforme e la formula è approssimata.

Si è definita la capacità imponendo  $Q$  uguale sui due piatti. Tuttavia, la definizione è buona in quanto non restringe altri casi. Si considerino due conduttori. Si pongono due cariche  $Q_1 < Q_2$  a potenziali  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Essendo un conduttore, la carica di ogni piatto si divide in due andando sulle due superfici: quella interna e quella esterna. Per una superficie cilindrica che passa per i due piatti si ha flusso nullo perché la superficie laterale è parallela al campo elettrico e le superfici interne alle lastre sono in campo elettrico nullo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0.$$

Quindi

$$Q_1^{\text{int}} + Q_2^{\text{int}} = 0 \implies Q_1^{\text{int}} \equiv q_2^{\text{int}} \equiv -q.$$

Per principio di sovrapposizione, il campo elettrico in  $P$  è:

$$\vec{E}(P) = \left( \frac{\sigma_1^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1^{\text{int}}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2^{\text{int}}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} \right) \hat{n} = \left( \frac{\sigma_1^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} \right) \hat{n} = 0.$$

Perché  $\sigma_1^{\text{int}} = \frac{q}{A}$  e  $\sigma_2^{\text{int}} = -\frac{q}{A}$ . Dunque

$$\sigma_1^{\text{ext}} = \sigma_2^{\text{ext}} \implies Q_1^{\text{ext}} = Q_2^{\text{ext}} \equiv Q = \begin{cases} Q_1 - q \\ Q_2 + q \end{cases} \implies \begin{cases} q = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \\ Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \end{cases}.$$

Sulla superficie interna si ha la stessa carica ed il campo elettrico è lo stesso con verso opposto. Quindi

$$E_{\text{int}} = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \implies C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Si può arrivare a tale risultato anche in un altro modo:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{A}, \quad E_{\text{int}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \frac{1}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}.$$

Infine

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} \iff \Delta\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Da cui risulta chiaro che fissata la carica  $Q$ , segue che misurando  $\Delta\varphi$  si può risalire alla distanza  $d$ : su ciò si basano i trasduttori.

**Conduttore interno ed esterno.** [immagine]

Ponendo una carica sul conduttore interno si crea una capacità

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Tuttavia, si ignora la carica esterna indotta  $-Q_1$ : in tale configurazione si ha conduzione totale. Non interessa il campo esterno perché la differenza di potenziale tra i due conduttori dipende solo dal campo interno:

$$\Delta\varphi = \int_1^2 \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}.$$

Prendendo il conduttore esterno con una carica si ha una situazione di cavità; aggiungendo carica a  $Q_1$  si cambia il potenziale del conduttore interno ed esterno, ma entrambi nella stessa misura, dunque la differenza di potenziale è costante. [rivedi]

**Condensatore cilindrico.** Si può calcolare la capacità in due modi:

- Calcolare il campo elettrico e poi il potenziale.
- Trovare la differenza di potenziale, utilizzare l'equazione di Laplace, prendere il gradiente, poi si ottiene la carica superficiale [rivedi]

Si vede il primo metodo. [immagine]

La densità lineica è  $\lambda = \frac{Q}{L}$ ; per  $L$  molto grande si ha  $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r$ . Quindi

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Pertanto

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{L} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}.$$

**Esercizio.** Calcolare la capacità per condensatori sferici. Dovrebbe essere  $C \propto \frac{ab}{a-b}\varepsilon_0$ ?

**Condensatori in serie.** [immagine]

Si considerino dei condensatori di qualsiasi forma in serie. Si ponga una carica  $Q$  ad un estremo e una carica  $-Q$  all'altro. Sia  $\Delta\varphi$  la differenza totale di potenziale agli estremi della serie. Sapendo che per ogni condensatore vale  $C_i = \frac{Q_i}{\Delta\varphi_i}$ , si vuole attribuire una capacità totale equivalente  $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ . I condensatori in mezzo alle due cariche si hanno carica netta nulla, tuttavia si creano delle cariche indotte. Pertanto, sulla faccia di ciascun condensatore si ha

$$Q_i^{\text{int}} = \frac{Q_i - Q_{i+1}}{2}, \quad Q_i^{\text{ext}} = \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}.$$

Per ogni coppia di piatti connessi [rivedi]

Su ogni piatto si induce una carica  $Q$ . Quindi

$$\Delta\varphi = \sum \Delta\varphi_i = \sum \frac{Q_i}{C_i} = \sum \frac{Q}{C_i} \iff \frac{1}{C} = \frac{\Delta\varphi}{Q} = \sum \frac{1}{C_i}.$$



**Condensatori in parallelo.** [immagine]

I condensatori sono tutti allo stesso potenziale. La capacità di ciascuno è  $C_i = \frac{Q_i}{\Delta\varphi}$ . Dalla carica totale risulta

$$Q = \sum Q_i = \sum C_i \Delta\varphi \implies C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \sum C_i.$$

Non sempre le configurazioni possono essere ridotte in parallele e serie. Si considerino  $N$  conduttori con altrettante cariche e potenziali. [immagine]

La carica su ciascun conduttore dipende dai potenziali di tutti gli altri. Si utilizza il principio di sovrapposizione: si mandino tutti i potenziali  $\varphi_i$  a terra (quindi a zero, cioè possibilmente all'infinito), tranne uno posto su  $Q_1$ . Si può riscrivere il problema con Laplace. Se si raddoppia la carica su  $Q_1$  allora si raddoppia la carica su tutti i  $Q_i$  perché  $Q = \varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{\alpha}$ . Dunque  $Q_i = C_{i1}\varphi_1$ . Si scollegi da terra  $Q_1$  e si colleghi la successiva,  $Q_2$ , e si ripeta quanto fatto prima. Per il principio di sovrapposizione risulta

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \dots + C_{1n}\varphi_n \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2n}\varphi_n \\ &\vdots \\ Q_n &= C_{n1}\varphi_1 + C_{n2}\varphi_2 + \dots + C_{nn}\varphi_n. \end{aligned}$$

I fattori  $C_{ij}$  sono detti coefficienti di induzione [rivedi] e  $C_{ii}$  sono i coefficienti di capacità. Tale problema è un sistema lineare invertibile per cui i potenziali dipendono dalla capacità attraverso appropriati coefficienti di potenziale:

$$Q_i = \sum Q_{ij}\varphi_j, \quad \varphi_i = \sum P_{ij}Q_j.$$

Non tutti i coefficienti sono indipendenti, infatti  $C_{ij} = C_{ji}$  per la conservazione dell'energia. Inoltre, le matrici dei coefficienti sono l'una l'inversa dell'altra:  $P = (P_{ij}) = C^{-1} = (C_{ij})^{-1}$ .

Tuttavia, sapendo che una carica è proporzionale alla differenza di potenziale, appare contro intuitivo che ponendo  $\varphi_i = 0$  si ottiene una  $Q_i \neq 0$ . Risulta essere così perché la proporzionalità vale per conduttori isolati. In questo caso l'infinito (che è preso come messa a terra) ha capacità infinita, dunque si ha  $Q$  finita per  $\varphi$  nullo (infinitesimo).

**Esempio.** Si consideri una sfera cava conduttrice  $B$  con carica  $-Q$  al cui interno ne è presente un'altra  $A$  con carica  $Q$ . [immagine]

Si studia:

I Cosa succede se  $B$  è connessa alla messa a terra.

II Cosa succede se  $A$  è connessa a terra e si studia la sua carica  $Q_A$ .

Quindi

$$\varphi_A = P_{AA}Q_A + P_{AB}Q_B, \quad \varphi_B = P_{BA}Q_A + P_{BB}Q_B.$$

Per il punto primo, si consideri  $r > r_B$ . Il campo è nullo e quindi  $\varphi_B = -\int_{+\infty}^{r_B} \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = 0$ . Quindi collegando il conduttore più esterno a terra non cambia niente.

Nel punto secondo, si consideri il principio di sovrapposizione:

- Sia  $Q_A \neq 0$  e  $Q_B = 0$ . Segue

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_A} = P_{AA}Q_A, & \varphi_B &= \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_B} = P_{BA}Q_A \\ P_{AA} &\equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_A} = \frac{1}{C_{AA}}, & P_{BA} &\equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_B} \end{aligned}$$

- Sia  $Q_A = 0$  e  $Q_B \neq 0$ . Segue

$$\varphi_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_B}, \quad \varphi_A = \varphi_B$$

$$P_{BB} = \frac{1}{C_B}, \quad P_{AB} = P_{BA}$$

Il potenziale  $\varphi_A$  di  $A$  è uguale a  $\varphi_B$  di  $B$  perché all'interno di una sfera cava il potenziale è costante, dato che il campo elettrico è nullo. Dunque dato che  $A$  è collegato a terra si ha

$$\varphi_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_A} + \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_B} = 0 \implies Q_A = -Q_B \frac{R_A}{R_B} = Q \frac{R_A}{R_B} < Q.$$

Collegando  $A$  a terra, un po' di carica se ne va. Se tutta la carica dovesse andarsene allora  $\varphi_A < 0$ , e se tutta la carica dovesse rimanere allora  $\varphi_A > 0$ . Pertanto,  $\varphi_A$  è giustamente nel mezzo.

**Energia immagazzinata in un condensatore.** L'energia immagazzinata è l'energia potenziale di tale condensatore. Si consideri un conduttore costituito da due elettrodi. Per aumentare l'energia immagazzinata bisogna spostare una carica  $dq$  contro la differenza di potenziale:

$$dW = -dq \varphi = -dq \frac{q}{C}.$$

Quindi

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2.$$

Se il condensatore è a piatti paralleli allora la capacità ha un'espressione definita da  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ . Dunque

$$U = \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon_0 A} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Ad}{\epsilon_0} \left( \frac{Q}{A} \right)^2 = \frac{1}{2} Ad\epsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV.$$

## Lecture 13

### 8 Correnti stazionarie

mer 03 nov  
2021 13:30

[immagine]

Fin'ora si sono viste delle correnti statiche. Si sono discussi i conduttori con cariche libere, ma non il moto delle cariche libere. Ora si caratterizza il trasporto delle cariche e capire cosa succede quando si muovono.

Una singola carica è soggetta ad una forza  $\vec{F} = q\vec{E}$  quindi si ha un moto uniformemente accelerato con  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ .

Per il momento si studia il trasporto di cariche dovuto alla presenza di campi elettrici.

Si introduce l'intensità di corrente  $I = \frac{dq}{dt}$  cioè una carica  $dq$  che passa attraverso una superficie. È facile capire quando un conduttore ha una geometria ben definita. Tuttavia esistono configurazioni più complicate. Si vuole generalizzare la definizione. Il passaggio di carica attraverso una superficie è legata al concetto di flusso per mezzo dell'intensità di corrente?

Nel sistema internazionale l'intensità di corrente ha unità di Ampere

$$1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}.$$

Si introduce la grandezza della densità di corrente. Si consideri un conduttore con una certa densità  $n$  di portatore di carica per unità volume. "Portatore di carica" nel senso che le cariche

sono libere di muoversi.

Sia  $q$  la carica di tali portatori di carica. Si immagini che essi si muovano con una velocità  $\vec{v}$ . Inoltre, si consideri una superficie  $\vec{a} = a\hat{n}$ .

La velocità non è per forza allineata con la direzione della superficie. Può avere una direzione  $\theta$ . In un intervallo di tempo  $dt$ , le cariche percorrono una distanza  $v dt$  passando attraverso la superficie. Il volume del prisma è  $a \cdot v \cos \theta$ . Quindi

$$dq = nqV = nq \underbrace{v dt \cos \theta}_{\text{altezza prisma}} \cdot a.$$

Quindi l'intensità di corrente attraverso l'area è

$$I = \frac{dq}{dt} = nq\vec{v} \cdot \vec{a}.$$

Questo non è molto diverso dalla relazione tra portata, sezione e velocità dei fluidi. Perché è detta corrente deriva ancora dai fluidi. Non tutti i conduttori hanno solo una specie portatrice di carica, ognuno ha propria  $n_i$ ,  $q_i$ ,  $v_i$ . Per ciascuna specie si può scrivere una relazione del tipo

$$I_i = n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}.$$

La corrente totale risulta essere la somma delle correnti. In generale

$$I = \sum_{\vec{J}} n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}.$$

Dove  $\vec{J}$  è la densità di corrente con unità di misura  $\frac{J}{m^2}$ . Tuttavia, nella realtà, le particelle hanno una distribuzione di velocità. Tuttavia, poco cambia, basta considerare solamente una specie con velocità differenti. Si immagini che abbia  $k$  valori di velocità differenti detti  $v_k$  che corrisponde a  $n = \sum n_k$ .

Dunque si afferma che per qualsiasi classe di velocità si ha  $I_k = n_k q \vec{v}_k \cdot \vec{a}$ , quindi quella totale è la somma

$$I = \sum n_k q \vec{v}_k \cdot \vec{a} = nq \left( \frac{1}{n} \sum n_k \vec{v}_k \right) \cdot \vec{a}.$$

Dove il valore tra parentesi risulta essere la velocità media ponderata. Dunque al posto di  $v_i$  per ogni specie bisogna mettere

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \langle \vec{v}_i \rangle.$$

Risulta ovvio dal procedimento che a questo punto, se si prende una superficie finita, di forma qualunque, si può calcolare la quantità di carica che vi passa attraverso nell'unità di tempo, cioè la corrente, come

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

[immaginare]

Per una superficie  $d\vec{a}$  piccola. Dunque, la corrente è il flusso di  $\vec{J}$ .

Si consideri una superficie chiusa. Se si ha un flusso netto [rivedi] Dunque

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{a} = -\partial_t Q = -\partial_t \int_V \rho d\nu.$$

Il segno meno è per convenzione, perché il verso delle superfici è rivolto verso l'esterno. Se  $J$  è uscente allora la carica sta diminuendo. Se il flusso è entrante, la carica aumenta. Il meno bilancia l'effetto del versore della superficie. [rivedi]

Tramite il teorema di Gauss, si traduce quanto trovato in una situazione locale:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\nu = -\partial_t \int_V \rho d\nu.$$

Dato che questo è valido in qualunque volume, allora gli integrandi devono essere uguali. Dunque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0.$$

Questa è l'equazione di continuità ed esprime la conservazione della carica. In generale  $\vec{J}$  e  $\rho$  possono dipendere sia dallo spazio che dal tempo. Infatti

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}(\vec{r}, t) \\ \rho &= \rho(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Inoltre

$$I_A = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = I(\vec{r}, t).$$

Esiste una classe di fenomeni su cui ci si concentra (cioè i fenomeni stazionari) in cui non si ha dipendenza dal tempo  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$  e  $\rho = \rho(\vec{r})$ . Si ha una corrente costante attraverso una superficie fissata,  $I = I(\vec{r})$ . La corrente dev'essere nulla attraverso qualunque superficie chiusa:  $\partial_t \rho = 0$  cioè  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  il flusso è nullo attraverso superfici chiuse. Tagliando una superficie, all'interno non si ha accumulo o diminuzione di carica:

$$-\partial_t \int \rho d\nu = 0.$$

Si osservano fenomeni stazionari in cui si hanno correnti.

**Esempio.** Si mostra come la densità di corrente può dipendere dalle coordinate.  
immagine

Si consideri un tubo catodico. Si ha un moto di elettroni verso una lastra. Tale moto è uniformemente accelerato tale per cui  $a = \frac{qE}{m}$ ,  $v = at$  e  $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} \implies v = \sqrt{2ax}$ . La velocità dipende dalla coordinata spaziale. L'intensità di corrente è

$$J = ne^-v(x).$$

Per calcolare la corrente bisogna tagliare una sezione e calcolarne il flusso

$$I = JA.$$

Per geometria  $J$  non dipende da  $y$ . Prendendo due superfici così da costituirne un'unica chiusa succede che, dato che  $J$  dipende da  $x$  ma non dal tempo, si ha un fenomeno stazionario, dunque il flusso netto per la superficie dev'essere nullo:

$$I(x_1) = I(x_2) \implies I = \text{cost.} = ne^-v(x)A.$$

Dato che la velocità dipende da  $x$ , l'unica cosa che può mantenere il prodotto costante è che la densità anch'essa dipenda da  $x$ :

$$\rho = ne^- = \frac{I_0}{A\sqrt{2ax}}.$$

La densità di corrente non è indipendente dalla posizione, ma lo è dal tempo.

Inoltre, esistono molti fenomeni in cui le correnti variano in modo sinusoidale. Essi non sono stazionari, ma guardando il comportamento medio su di un periodo, allora lo risultano essere. Tuttavia, se oscillano molto velocemente, la descrizione fin'ora fatta non vale più.

Ora bisogna capire come  $J$  dipenda da i campi elettrici. Si ha una variabile che descrive il flusso attraverso una superficie e lo si vuole legare alla presenza di un campo elettrico. Un conduttore in un campo elettrico, si ha un riarrangiamento delle cariche, dunque un flusso, tuttavia avviene in tempo rapidi e quindi il flusso si annulla velocemente.

Ora per un effetto esterno, si impedisce che il campo elettrico si annulli [rivedi]  
 Si ha una legge di origine empirica cioè la legge di Ohm generalizzata:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

Dove  $\sigma$  è la conducibilità elettrica ed è caratteristica del materiale. Tale legge è empirica simile alla legge della viscosità. Essa non vale sempre, ma vale solo nei conduttori ohmici (omogenei), cioè quelli per cui vale la legge di Ohm.

Inoltre,  $\sigma$  è scalare e non è il caso generale, in alcuni conduttori l'intensità di corrente è diversa per diverse direzioni del campo elettrico ed in quel caso  $\sigma$  è descritta da un tensore. Si possono ingegnerizzare materiali per ottenere diversa conducibilità in base alla direzione, sia livello di struttura della materia che a livello macroscopico. Per conduttori impilati con conducibilità diversa, la conducibilità è diversa in base alla direzione? [rivedi]

Inoltre, tale relazione vale fin quando il campo elettrico non è forte, vale fino a quando non genera modificazioni strutturali? [rivedi].

## 8.1 Conduttori Ohmici

**Legge di Ohm.** Essa afferma

$$V = RI.$$

dove  $R$  è la resistenza elettrica e  $V$  è la differenza di potenziale, non si usa più  $\varphi$  perché si parla di correnti e non di potenziali elettrostatici. Inoltre, l'unità di misura di  $R$  è  $1\Omega = \frac{1V}{1A}$ .

Si mette in relazione  $R$  con  $\sigma$ . [immagine] Si prenda un conduttore cilindrico lungo  $l$  e con sezione  $A$ . Sia la differenza di potenziale ai capi pari a  $V$  costante. Dunque

$$\vec{E} = \frac{V}{l} \hat{u}_l.$$

La scrittura deriva dalla definizione di differenza di potenziale come integrale di cammino. Si presenta della carica superficiale statica che mantiene il campo elettrico all'interno del cilindro. Dunque

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{I}{A} \hat{u}_l.$$

Per convenzione, nella legge di Ohm generalizzata,  $\sigma$  è sempre positiva, dunque la corrente  $J$  è sempre allineata con  $\vec{E}$ . Quindi

$$\frac{\sigma V}{l} = \frac{I}{A} \implies V = \underbrace{\frac{1}{\sigma} \frac{l}{A}}_R I, \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{A}.$$

con  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  resistività. Piegando il filo, la resistenza è sempre la stessa, perché anche piegandolo le cariche seguono una lunghezza  $l$  nel campo elettrico. Le cariche non escono perché esiste una carica superficiale che si configurano in modo tale per cui il campo è sempre interno al filo. Dunque, all'esterno il campo elettrico è zero, mentre dentro dipende dalla differenza di potenziale e dal percorso delle cariche? [rivedi]

Analogamente ai fluidi, la resistenza idraulica è analoga alla resistenza, tuttavia la prima dipende dalla geometria  $R = \eta \frac{l}{A^2}$ . In entrambi i casi si ha un attrito viscoso, la cui forza è proporzionale alla velocità. Infatti, per i conduttori  $\vec{J} = nq\langle \vec{v} \rangle = \sigma \vec{E}$ , dove  $\vec{E}$  è la forza di trascinamento. Quindi  $q\vec{E} - \vec{F}_{\text{attr.}} = 0$ .

Nei fluidi la velocità dipende dalla distanza dalle pareti del condotto, perché l'attrito viscoso è associato allo scorrimento di uno strato sull'altro. Nelle correnti, l'attrito è dovuto agli urti tra le cariche, dunque non dipende dalla distanza, pertanto è uguale in tutta la sezione del condotto. Dato che  $\vec{E}$  è uniforme, allora pure  $\vec{J}$ , dunque pure la velocità. Esistono anche altre correzioni minori, ma sono trascurabili. Una conseguenza della legge di Ohm generalizzata è che per correnti stazionarie, quelle per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , si ha  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ . Quindi, il campo elettrico all'interno di una regione con corrente stazionaria non può avere una distribuzione di carica

$\rho = 0$ . Se il conduttore non è omogeneo si [rivedi]

Si considerino due blocchi adiacenti con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e con stessa sezione. Dunque  $J_1 = JA = J_2$ , ma se sono ohmici si ha  $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ , se le due  $\sigma$  sono diverse allora pure il campo elettrico. L'unica cosa che genera una discontinuità è una densità di carica superficiale.

Ora si interpreta la legge di Ohm generalizzata su un modello corpuscolare. Si vuole trovare una relazione per cui  $J \propto E$ . Si osserva un modello numerico.

Per i metalli la resistività è  $\rho \approx 10^{-8} \Omega\text{m}$ , per i conduttori ionici (come l'acqua salata) è  $\rho \approx 1 \Omega\text{m}$ , per semiconduttori  $\rho \approx 0.1 - 1 \Omega\text{m}$  e per gli isolanti è  $\rho \approx 10^8 \Omega\text{m}$ . In particolare, il rame è  $\rho \approx 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ . Si calcola la velocità di deriva (che determina il trasporto di carica) se si applica una differenza di potenziale di 6 V lungo 1 metro. Sapendo  $J = nqv_D$  si ha  $v_D = \frac{J}{nq}$ . Per il rame si ha un elettrone libero per atomo. Quindi  $n = \frac{\rho_m}{m} N_A$ , con  $\rho_m$  densità massica,  $m$  massa di una mole e  $N_A$  numero di Avogadro. Quindi

$$n = \frac{7.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{74\text{g}} 6 \cdot 10^{23} \approx 8 \cdot 10^{28}.$$

[rivedi]

Dunque

$$v = \frac{I}{Anq} = \frac{V}{RnqA} = \frac{V}{\rho l n q}.$$

Quindi, per l'esempio si ha  $v \approx 2.5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Tale velocità è trascurabile rispetto la velocità di agitazione degli elettroni. Infatti  $\frac{1}{2}mv_T^2 = KT \implies v_T = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$ , dove  $K = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ,  $T = 300\text{K}$  e  $m_e = 8 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ . Dunque si ha  $v_T \approx 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Si può costruire un modello tenendo conto di tali informazioni. Si supponga che l'elettrone abbia una velocità alta e che quando urta con un altro elettrone esso viene riflesso in una direzione casuale. Quindi  $\vec{p} = m\vec{v}_c$ . Fra un urto ed il successivo, l'elettrone è soggetto al campo elettrico, quindi la quantità di moto è aumentata  $\Delta\vec{p} = q\vec{E}\Delta t$ . Si consideri una porzione di conduttore in cui siano presenti  $N$  cariche. Si studia il contributo complessivo di tali  $N$  cariche. In un istante di tempo, per ogni particella sia il tempo precedente dell'urto  $t_i$  (che segue una distribuzione esponenziale). Ciascuna ha  $\vec{p}_i = m\vec{v}_{c,i} + q\vec{E}t_i$ . Dunque la quantità di moto media è

$$m\langle\vec{v}\rangle = \underbrace{m\langle\vec{v}_{c,i}\rangle}_0 + q\vec{E}\tau_M.$$

dove  $\tau_M$  è il tempo medio dall'ultima collisione. Quindi

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{q\vec{E}\tau_M}{m}.$$

Da cui risulta

$$\vec{J} = m q \langle\vec{v}\rangle = \underbrace{\frac{nq^2}{m}}_{\sigma} \tau_M \vec{E}.$$

Il modello corpuscolare funziona, ma non in maniera accurata: per questo serve una trattazione quantistica. Il termine  $\tau_M$ , nei metalli, dipende con la temperatura. La conducibilità di un metallo diminuisce all'aumentare della temperatura. Nei semiconduttori si hanno elettroni poco legati agli atomi e l'energia termica ne libera una certa frazione. Dunque, salendo con la temperatura, la probabilità di liberare elettroni aumenta secondo la distribuzione di Boltzmann  $\propto e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$ .

## Lecture 14

Il tubo catodico non è un conduttore ohmico perché le cariche accelerano, il campo elettrico non è proporzionale a  $\vec{J}$ .

gio 04 nov  
2021 13:30

Si è visto come ingegnerizzare la resistenza di un conduttore scegliendo il materiale e la geometria del conduttore  $R = \rho \frac{L}{A}$ . Per una gran parte di applicazioni, la resistenza caratterizza completamente il comportamento di un sistema, quindi non è necessario conoscere tutte le relazioni fin'ora discusse. L'unica cosa utile conoscere è la resistenza.

Un apparecchio resistivo si può pensare come una scatola nera, senza sapere cosa c'è dentro, completamente caratterizzato dalla resistenza:  $R = \frac{V_{AB}}{I}$ , [immagine], per conduttori ohmici e correnti continue (cioè costanti nel tempo). Per correnti alternate, il comportamento per un apparecchio resistivo richiede delle correzioni. Nel limite stazionario, quanto visto caratterizza completamente il sistema.

L'apparecchio si può ridurre ad elementi più semplici fino ad arrivare alla resistenza. Si ha una rete di resistenze detta circuito resistivo e la sua caratteristica è di avere un elemento circuitale (cioè la resistenza) con relazione  $V = IR$  e altri tratti detti fili che hanno  $V = 0$ , per qualunque  $I$ . Quindi un sistema complesso si condensa in resistenze e fili (che non hanno resistenza e quindi caduta di potenziale).

**Esempio.** Per un circuito come in figura [immagine] entra delle corrente in  $A$  e si hanno resistenze  $R_1 - R_6$ . Il tutto è l'apparecchio elettrico con differenza di potenziale  $V_{AB}$ . Si vuole tradurre il sistema in uno equivalente con resistenza  $R$ . Si procede combinando le resistenze.

**Resistenze in serie.** La prima combinazione che si può considerare è quella in serie. Per  $n$  resistenze in serie, si trova la resistenza equivalente. Si utilizza quanto visto, cioè i potenziali sono additivi:

$$V_{AB} = V_1 + \dots + V_n.$$

Inoltre, se il circuito ha corrente stazionaria allora  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  quindi  $I = \text{cost.}$  e la carica si conserva, cioè la corrente  $I$  è comune a tutte le resistenze:

$$V_{AB} = R_1 I + \dots + R_n I = \underbrace{(R_1 + \dots + R_n)}_R I = RI.$$

Quindi la resistenza equivalente dalle resistenze in serie è  $R = \sum R_i$ .

**Resistenze in parallelo.** [immagine]

Per  $n$  resistenze in parallelo, tutti i punti sul filo prima delle resistenze sono allo stesso potenziale, allo stesso modo per i punti dopo il filo. La corrente da  $A$  si ramifica nelle varie resistenze. Si sa che la corrente totale attraverso una sezione è costante, perché il flusso è costante? Quindi

$$I = I_1 + \dots + I_n = \frac{V_1}{R_1} + \dots + \frac{V_n}{R_n} = \left( \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) V_{AB} = \frac{1}{R} V \implies \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}.$$

Dato che comunque vale Ohm:  $V = IR$ . Per due resistenze la combinazione è semplice  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  e se sono uguali allora  $R = \frac{R_1}{2}$ . Mettendole in parallelo, si aumenta la sezione e quindi diminuisce la resistenza? [rivedi]

Dunque ritornando all'esempio si ha  $R_{12} = R_1 + R_2$ ,  $R_{123} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ ,  $R_{12345} =$  in serie,  $R_{123456} = R_{12345}$  in parallelo con  $R_6$ .

Esistono configurazioni più interessanti, come quello di un cavo resistivo infinito, con una dispersione di corrente verso terra. Il cavo infinito si può frazionare in tanti elementi finiti [immagine]

Dove il filo sotto rappresenta la terra. Si vuole sapere alla fine della catena cosa succede. Inoltre,  $R_1$  rappresenta la resistenza lungo il filo, mentre  $R_2$  è la resistenza verso terra.

Si vuole trovare la resistenza equivalente del sistema e capire come si attenua il segnale. Se il filo è infinito e la sua resistenza equivalente è  $R$ , aggiungendo davanti un altro stadio, il comportamento non cambia e rimane uguale a se stesso [immagine]. Quindi

$$R_1 + (R_2 \parallel R) = R \iff R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = R \iff R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}.$$

Da cui si può ricavare  $R$ .

Si studia la seconda domanda, si cerca la tensione dopo aver passato  $n$  stadi. Si pensi che dopo lo stadio  $n$  ce ne sono ancora infiniti; quindi [immagine]

si ha  $R_2$  ed  $R$  in parallelo, e si ha resistenze in serie, dunque la corrente per le due è la stessa:

$$V_n = I \frac{R_2 R}{R_2 + R}.$$

Inoltre

$$V_{n-1} = I(R_1 + (R_2 \parallel R)) = IR.$$

Ricavando  $I$  da questa si ottiene nella prima:

$$V_n = V_{n-1} \frac{R_2}{R_2 + R}.$$

Generalizzando si ha

$$V_n = \left( \frac{R_2}{R_2 + R} \right)^n V_{\text{ingresso}}.$$

Dunque, il potenziale si attenua con una legge esponenziale. Nella realtà si può far finta di avere un cavo infinito: basta mettere una resistenza  $R$  alla fine del filo. Tale strumento permette di attenuare il potenziale in ingresso di un fattore a piacere.

Tuttavia sorge un problema. Non tutte le configurazioni possono essere ridotte ad una resistenza equivalente tramite resistenze in serie e parallelo. Ad esempio [immagine]

Le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  non hanno la stessa differenza di potenziale ai propri capi. Bisogna utilizzare il metodo generale che risalgono alle leggi generali di un campo stazionario: il campo elettrico è conservativo e in corrente stazionaria le correnti sono conservate. Si ottengono le leggi di Kirchhoff:

- $\sum V_i = 0$  per ogni maglia del circuito, cioè una linea chiusa, questo discende dal fatto che  $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$  e  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ .
- $\sum I_i = 0$  con  $I_i$  correnti ai nodi, questa discende dal fatto che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  e quindi il flusso è nullo attraverso tutte le superfici chiuse.

Con tali due regole, si scrive un'equazione per ogni maglia indipendente, una equazione per ogni nodo e si ottiene un sistema lineare di equazioni.

**Esempio.** [immagine]

Per la prima maglia

$$V_1 + V_2 + V_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 (I_1 - I_2) = 0.$$

Per la seconda maglia

$$R_3 (I_2 - I_1) + R_4 I_2 + R_7 I_2 + R_6 (I_2 - I_3) = 0.$$

Per la terza maglia

$$R_6 (I_3 - I_2) + R_5 I_3 = 0.$$

Si hanno tre equazioni in tre incognite. Infine,  $V_{\text{out}} = R_7 I_2$ .



**Forza elettromotrice.** Considerando un apparecchio rappresentabile con una certa resistenza, si vuole che circoli una corrente: ai capi del terminale bisogna avere una differenza di potenziale non nulla stabile nel tempo. La carica positiva che esce dal terminale  $B$  venga inserita in  $A$ . Questo si può fare inserendo un elemento nel circuito portando le cariche positive da un punto con potenziale più basso ad un di potenziale più alto. Si ha una forza di natura non elettrica che lavora con il campo elettrico: tale forza è detta forza elettromotrice (fem oppure  $\mathcal{E}$ ). Essa è il lavoro per unità di carica della forza non elettrica. Essa è omogenea alla differenza di potenziale, dunque l'unità di misura è il volt. [immagine]

Si costruisce un circuito complesso in cui si hanno tali elementi. Si utilizzando le leggi precedenti: si ha un'equazione per ogni maglia ed un'equazione per ogni nodo. Dunque

$$\sum I_i = 0$$

$$\sum V_i + \sum \mathcal{E}_i = 0$$

In termini generali, si ha

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{c}.$$

La forza su carica unitaria  $\vec{f}$  è

$$\vec{f} = \vec{E} + \vec{f}_{\text{non elettrica sorgente}}.$$

Ora si sa che

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \iff \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{V_{AB}} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Dunque

$$\mathcal{E} = \oint_c (\vec{E} * \vec{f}_s) \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{f}_s \cdot d\vec{s} = \int_B^A f_s ds.$$

Nell'esempio si ha

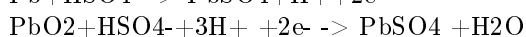
$$R_2 I_1 + \mathcal{E}_1 + R_2 (I_1 - I_2) = 0.$$

Ora ci si chiede cosa sia tale forza di natura non elettrica. Si vede qualche esempio. Tutti i circuiti resistivi si possono ridurre ad un circuito con una sola resistenza equivalente. Mentre un circuito con più forze elettromotrici e più resistenze si può ridurre ad un circuito con una sola forza equivalente ed una sola resistenza equivalente, tutte due in serie. Questo è il teorema di Thevenin?.

**Esempio.** Si vede un esempio storico di forza elettromotrice: la macchina di van de Graaff. [immagine]

Si strofina un nastro, caricandolo. Le cariche positive vengono raccolte e scendono lungo il conduttore attraverso una resistenza. Alla fine le cariche vengono raccolte ancora dal nastro e riportate all'inizio del ciclo: si fornisce una forza elettromotrice che lavora contro il campo elettrico.

Un altro esempio è costituito dalle batterie al piombo



Queste batterie sono reversibili, al contrario delle pile di Volta: si forzano le reazioni inverse. In entrambe le direzioni, gli ioni  $\text{H}^+$  devono vincere la resistenza interna della batteria.

Dato che si ha resistenza interna ed una perdita di energia, ci si chiede quale sia la potenza dissipata.

Ai capi di [rivedi]

Ai capi di una resistenza si ha una differenza di potenziale pari a  $V = RI$ , con  $I = \frac{dq}{dt}$ . Per

un circuito elementare con una sola forza elettromotrice ed una sola resistenza si ha  $\mathcal{E} = IR$ . Il lavoro per spostare una carica attraverso una differenza di potenziale è

$$W = q\Delta V.$$

Quindi la potenza con differenza di potenziale costante è

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = I\Delta V.$$

Per la resistenza vale

$$\frac{dW}{dt} = RI^2.$$

A livello microscopico, il campo elettrico accelera gli elettroni acquisendo una energia, ma non è tutta utilizzata nel trasporto, perché gli elettroni si urtano. Dato che l'energia degli elettroni aumenta, allora aumenta anche la temperatura ed il sistema deve dissipare calore per rimanere alla stessa temperatura.

La prima equazione per la potenza vale per qualsiasi elemento circuitale:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

Una fem non può erogare più di una corrente massima.

**Condensatori.** Si conosce un'altra configurazione di conduttori che si può pensare come elemento circuitale: i condensatori. La relazione di questa componente è  $q = CV$ . Con i circuiti non si usa la carica ma la corrente:  $I = C \frac{dV}{dt}$  e da questo risulta che se la differenza di potenziale è costante allora la corrente è nulla.

Considerando un circuito con un condensatore carico ed una resistenza, succede che chiudendo il circuito la differenza di potenziale iniziale è  $V_0 = \frac{Q_0}{R}$ . La corrente inizia a circolare fino a quando il condensatore si scarica.

Per un tempo  $t \geq 0$  si ha

$$V_C + V_R = 0 \iff V_C + RI = 0 \iff V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0 \iff \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{RC} \implies V_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

La costante si ricava per  $t = 0$ , per cui  $V_C(0) = V_0$ . Quindi

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Un condensatore carico chiuso su di una resistenza si scarica con una legge esponenziale. La costante di tempo  $\tau = RC$ . Inoltre trovare  $I$  e dimostrare  $\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2} CV_0^2$

$$I = .$$

Si può costruire un circuito più complicato prendendo una batteria, un condensatore ed una resistenza. Chiudendo il circuito, si presenta la differenza di potenziale immediatamente al condensatore. Per Kirchhoff si ha

$$-\mathcal{E} + V_C + V_R = 0 \iff -\mathcal{E} + V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0.$$

Si ottiene un'equazione differenziale non omogenea, la cui soluzione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione all'equazione differenziale omogenea associata:

$$V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = \mathcal{E}.$$

Una soluzione particolare è  $V_C = \mathcal{E}$ . Dunque la soluzione generale è

$$V_C(t) = \mathcal{E} + Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Per  $t = 0$ ,  $V_C = 0$  si ottiene

$$V_C(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

## Lecture 15

lun 08 nov  
2021 13:30

## 9 Magnetismo

[rivedi] L'evidenza della forza magnetica si ha dall'esperimento di Ørsted. Si ha un'interazione con un ago magnetico posto attorno ad un filo attraverso cui passa corrente. Si ha una simmetria cilindrica. Si sviluppa un concetto di campo, perché si è sondato lo spazio:  $\vec{B} = k \frac{i}{r} \hat{u}_\theta$ . Si ha un convenzione di segno che discende da come si orientano gli aghi: la regola della mano destra. L'esperimento viene da Ørsted, ma la mappatura avviene con Biot-Savart. Ampère aggiunge un altro filo e si nota che l'interazione con un altro filo dipende dal verso di percorrenza delle correnti: concordi si ha attrazione, discordi si ha repulsione. Se si mettono i fili ortogonalmente non si ha interazione, mentre ad un angolo si ha interazione in parte. Ampère quantifica l'interazione tra fili paralleli in una forza:

$$\vec{F} = \pm k i_1 i_2 \frac{l}{r} \hat{u}_r.$$

Dove  $r$  è la distanza tra i fili ed  $L$  è un tratto di filo. Nel sistema internazionale

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}, \quad \mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{C}^2 \text{m}}.$$

Capita che

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Che si ricava da Maxwell oppure da Lorentz. Si utilizza la interazione tra due fili per definire l'ampere (in verità ora non è più così: dal 20 maggio 2019 tutte le unità fondamentali del sistema internazionale sono definite in base a costanti universali ben precise, ciò significa che  $\mu_0$  deve essere determinata sperimentalmente). L'ampere è la quantità di corrente che fluisce nei due fili quando la forza tra i due fili è  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ , fissando  $\frac{l}{r} = 1$ .

Nell'analisi vettoriale dei fili di Laplace, egli ha scritto la seconda formula di Laplace per cui si può frazionare la forza come un'interazione associata al campo magnetico generato da un filo per la corrente che fluisce nell'altro filo. In particolare, isolando un tratto di filo  $d\vec{l} = dl \hat{u}_z$ , con verso concorde con la corrente, allora

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} = i dl B \underbrace{(\hat{u}_z \times \hat{u}_\theta)}_{-\hat{u}_r}.$$

Dunque, utilizzando tale interazione si ha la forza totale tra due fili paralleli come

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int i_2 d\vec{l} \times k \frac{i_1}{r} \hat{u}_\theta = -k \frac{i_1 i_2}{r} l \hat{u}_r.$$

Se ora si prende la condizione per cui  $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$  allora il campo del filo infinito percorso da corrente assume l'espressione

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \hat{u}_\theta.$$

L'analisi delle interazioni prosegue e porta a specificare qual è l'interazione tra campo magnetico e la carica puntiforme. All'interno dei fili si sposta della carica, quindi l'interazione è tra le cariche in moto. [rivedi]

**Forza di Lorentz.** Si ricostruisce la forza di Lorentz. La forza che agisce su di una carica puntiforme nello spazio è

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Dove il secondo addendo è la forza di Lorentz o legge di forza magnetica. Essa è una forza particolare. L'interazione  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$  è perpendicolare alla velocità. Quindi l'accelerazione subita da una carica in presenza di campo magnetico è centripeta, cioè ortogonale alla traiettoria. Essa è  $a = \frac{qvB}{m}$ .

Un moto ovvio e notevole è il caso in un il campo elettrostatico è nullo e campo magnetico uniforme: l'accelerazione centripeta è costante e si ha moto circolare uniforme.

Inoltre, tale legge di forza si riconcilia con la formula di Laplace suddetta. Pensando di avere una corrente che fluisce in un conduttore, si può immaginare di rappresentarla come  $i = \frac{dq}{dt}$  e  $\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = dq \vec{v} \times \vec{B}$ . Una carica all'interno di un conduttore è vincolata a rimanere nel conduttore, dunque il moto della carica è bloccato dalla reazione vincolare del filo e quindi si ha un effetto meccanico sul filo e non più sulla carica.

rivedi  
Si fa confronto l'intensità della forza elettrica e magnetica? Si consideri un filo carico con densità lineica  $\lambda$  e si ponga una carica puntiforme  $q$  a distanza  $r$ . Quindi il campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r}.$$

Si prenda un filo e si immagini che la corrente  $i = \lambda v$ . Si genera un campo magnetico attorno al filo. Per una carica esterna al filo si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \lambda v \hat{u}_\theta.$$

Dunque il confronto delle forze è

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{qvB}{qE} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Dunque, la forza magnetica è molto piccola rispetto a quella elettrica.

Si specifica il campo elettrico in maniera più chiara. Si definisce  $\vec{B}$  in maniera operativa dalla forza di Lorentz: quando si va a sondare uno spazio con una carica, quell'interazione afferma quanto è il valore di  $\vec{B}$ ; questo si è fatto anche con il campo elettrico, si è definito in maniera indipendente dalle sorgenti.

Si prende una carica  $q$  esploratrice e si sonda lo spazio. Bisogna sondare lo spazio con  $\vec{v} = 0$  in un dato sistema di riferimento e quindi risulta che  $\vec{F}$  misura il campo elettrico. Poi si sonda lo spazio con  $\vec{v} \neq 0$  (anche in tante direzioni) e si attribuisce al campo magnetico la differenza  $\vec{F} - q\vec{E}$  che campiona  $\vec{B}$ . Il campo magnetico definito così è il vettore induzione magnetica che si distingue dai campi prodotti dai mezzi materiali (anche se essi sono dovuti a correnti nei mezzi).  
[rivedi]

L'unità di misura del campo magnetico nel sistema internazionale è

$$[B] = \left[ \frac{F}{qv} \right] = 1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ C} \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

L'intensità media del campo magnetico terrestre è di  $50 \mu\text{T}$ . Le macchine da risonanza magnetica operano su  $1.5 \text{ T}$ .

Data la definizione operativa, il campo magnetico dipende dal sistema di riferimento perché nel procedimento seguito si è scelto un sistema di riferimento in cui si è scelto  $\vec{v} = 0$ . Si possono avere situazioni per cui cambiando sistema di riferimento non si ha più campo elettrostatico, ma solo campo magnetico. Tuttavia, nel momento in cui si fissa il sistema di riferimento, la

definizione operativa è ben posta. Mettendosi in movimento la definizione della forza magnetica è buona se la forza elettrostatica non dipende dalla velocità. Ciò è vero perché discende dal fattore che la carica elettrica è invariante. [rivedi]

Un'altra cosa particolare è che la legge della forza elettrostatica  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r^2} \hat{u}_r$  è espressa rispetto ?? fondamentali [rivedi]. Tuttavia, per il campo magnetico non si sa come ricostruirlo dalla distribuzione di corrente,  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Allora si segue la strada opposta del campo elettrico. Dalle proprietà fondamentali del campo (flusso e circuitazione) si risale alla relazione tra il campo e le sorgenti.

## Lecture 16

### 9.1 Circuitazione

mar 09 nov  
2021 13:30

Si studia la circuitazione di  $\vec{B}$ . Per un filo infinito con corrente  $i$  stazionaria si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \hat{u}_\theta.$$

Si vede che la circuitazione di  $\vec{B}$  dipende dal percorso, quindi  $\vec{B}$  non è conservativo. Infatti, si può costruire un circuito che collega due archi concentrici [immagine] di raggi  $r_1$  e  $r_2$ . Risulta apparente che

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \dots$$

Sui tratti  $AB$  e  $DC$  si ha che  $d\vec{l} \perp \vec{B}$ , perché i due segmenti sono paralleli a  $\hat{u}_r$ . Si riscrive come  $d\hat{u}_r \perp B\hat{u}_\theta$ . Per gli altri due segmenti si ha uno spostamento allineato con  $\hat{u}_\theta$ . Prendendo il tratto  $BC$  si ha  $d\vec{l} = dr \hat{u}_r$ , mentre il campo magnetico è  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{u}_\theta$ . Mentre lungo l'arco  $AD$  si ha  $d\vec{l} = -dr \hat{u}_r$ , ed il campo magnetico è uguale a quello di prima cambiando solo  $r_1$  con  $r_2$ . I contributi dati da  $d\vec{l}$  sono uguali ed opposti, dunque la circuitazione risultante è nulla. Si costruisce un'altra linea chiusa che segue una linea di campo a raggio  $r$  partendo e arrivando allo stesso punto. Si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\theta \cdot r d\theta \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 i.$$

Quindi il campo magnetico non è conservativo. Il campo magnetico attorno ad un filo è

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, & \text{se il filo non passa attraverso la superficie racchiusa dal circuito} \\ n\mu_0 i, & \text{se il filo attraversa la superficie} \end{cases}.$$

Con  $n \in \mathbb{Z}$  in base a quanti giri e con che verso si percorre il circuito.

Questo vale per un percorso qualunque. Per una forma arbitraria si sa che il campo magnetico ha simmetria cilindrica, quindi si deve scrivere  $d\vec{l}$  in coordinate cilindriche:

$$d\vec{l} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z.$$

E quindi

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta.$$

Per una linea che passa attraverso la superficie allora l'integrale è uguale a  $2\pi$ . Per un circuito esterno, per cui il filo non passa attraverso si ha

$$\oint \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta = 0.$$

In generale si può scrivere

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{concatenata}}.$$

Dove per corrente concatenata viene intesa la corrente che passa attraverso la superficie. Inoltre, il segno è dato dalla regola della mano destra. Tale formula è stata scritta per un filo, ma si può generalizzare.

Si consideri un numero arbitrario di fili. Si prenda un circuito arbitrario con alcuni fili che passano attraverso e altri sono esterni. Per ogni filo si ha

$$B_j = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_j \hat{u}_\theta.$$

Il campo magnetico totale è la somma, per il principio di sovrapposizione

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_j.$$

Prendendo una linea chiusa si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c \sum \vec{B}_j \cdot d\vec{l} = \sum \oint_c \vec{B}_j \cdot d\vec{l} = \sum \mu_0 i_j \equiv \mu_0 i_{\text{concatenata}}.$$

Si può scriverlo anche in una forma diversa, passando al continuo con infiniti fili infinitesimi ognuno con una corrente  $dI = \vec{J} d\vec{a}$  e si ottiene

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int dI_{\text{concat}} = \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Dove  $c = \partial A$  ed è detta legge di Ampère (non proprio). Tale relazione vale per correnti stazionarie, cioè che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Le superfici che insistono su  $c$  sono infinite e grazie alla divergenza nulla si può scegliere una superficie qualunque perché la legge di continuità sopra menzionata, in termini macroscopici, implica che il flusso attraverso qualunque superficie chiusa sia nullo e quindi vale la legge appena scritta.

**Esempio.** Si consideri un cavo conduttore di raggio  $R$  in cui passi una densità di corrente  $\vec{J} = \frac{i}{\pi R^2} \hat{u}_z$ . Per come è stata scritta, la densità di carica è uniforme perché il conduttore è ohmico per cui  $J = \sigma E$ ; applicando una differenza di potenziale ai capi si ha lo stesso lavoro per unità di carica su tutti i percorsi, dunque  $E$  è uniforme e quindi pure  $J$ .

Si cerca un circuito di Ampère che risponda alla simmetria del problema. Infatti il campo dipende solo dal raggio. Si sceglie un circuito di Ampère circolare attorno il filo, di raggio  $r$  che potrebbe anche essere più piccolo di  $R$ . Quindi

$$\begin{aligned} \oint \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \implies \\ B_\theta(r) 2\pi r &= \mu_0 J \int d\vec{a}, \quad r \leq R \\ B_\theta(r) &= \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{\mu_0 J}{2} r. \end{aligned}$$

Bisogna specificare  $J$  perché cambia da dentro a fuori dal conduttore. Tuttavia quando si integra l'area, quando si è dentro si integra fino a  $r$ , mentre quando si è fuori si integra fino a  $R$ . Quindi

$$J = \frac{i}{\pi R^2}.$$

Per  $r \geq R$  si ha

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \overbrace{J \pi R^2}^i}{2\pi r}.$$

mentre per  $r \leq R$  si ha

$$B_\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi R^2} \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \mu_0 \frac{J r}{2}.$$

Dunque l'intensità del campo è diretta lungo  $\theta$ , cresce linearmente fino a  $r$  e poi diminuisce come  $\frac{1}{r}$ .

La legge di Ampère così formulata vale sempre, per qualunque distribuzione di correnti, anche se non sono dei fili. Tuttavia questo non si può dedurre per via analitica: è un fatto sperimentale. In particolare, usando le tecniche imparate per l'elettrostatica, si può riformulare tale legge in modo che dia la relazione locale tra il campo magnetico e le sue sorgenti cioè si può scrivere, per correnti stazionarie,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Per il teorema di Stokes si ha

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Che è la forma differenziale della legge di Ampère per correnti stazionarie. Si vede che essa è vera solo per correnti stazionarie. Infatti:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0.$$

Per tale proprietà si ha che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ .

Si dimostra che la divergenza del rotore è zero, in coordinate cartesiane. Infatti

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\nu = (\text{Gauss}) \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = (\text{Stokes}) \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Se la superficie è chiusa, allora il circuito su cui insiste la superficie è un punto, dunque l'ultimo integrale è nullo.

Il fatto che  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  implica che  $\vec{B}$  è, localmente, ortogonale a  $\vec{J}$ . Infatti

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Il versore  $\hat{n}$  è ortogonale al circuito. Il rotore è una grandezza che è ortogonale rispetto a  $\vec{B}$ .

Il rotore in coordinate cilindriche è

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r} (\partial_\theta B_z - \partial_z B_\theta) \hat{u}_r + (\partial_z B_r - \partial_r B_z) \hat{u}_\theta + \frac{1}{r} (\partial_r (r B_\theta) - \partial_\theta B_r) \hat{u}_z.$$

L'unica componente che interessa è l'ultima perché  $J$  è zero lungo le altre due. Inoltre, dato che il campo è invariante per rotazione si ha che la seconda derivata è nulla. Dunque si ha

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \begin{cases} \mu_0 J_z, & r \leq R \\ 0, & r \geq R \end{cases} \implies B_\theta = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_z r}{2} + \frac{k_1}{r}, & r \leq R \\ \frac{k_2}{r}, & r \geq R \end{cases}.$$

Si fissa  $k_1 = 0$  perché prendendo una carica esploratrice con velocità lungo l'asse, essa ha sorgenti di campo magnetico a destra e sinistra simmetriche, dunque la somma delle forze di Lorentz è nulla, dunque pure il campo deve faro zero per  $r = 0$ . Inoltre,  $k_2$  si fissa in modo da avere un campo continuo e risulta essere  $k_2 = \frac{\mu_0 J_z R}{2}$ .

Inoltre, è emerso che  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  non caratterizza completamente il campo, ma servono informazioni in più; infatti si sa che

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} + \vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad \forall \vec{F} \mid \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0.$$

L'informazione in più è fornita dal flusso del campo magnetico. Esso ha una proprietà importante, cioè il flusso di  $\vec{B}$  attraverso una superficie chiusa è sempre nullo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \iff (\text{Teo Gauss}) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Questo significa che il campo magnetico non ha sorgenti di monopoli. Le linee di campo sono sempre chiuse. Nel caso del filo, le linee sono cerchi attorno al filo. Tale proprietà si descrive anche che il campo magnetico è un campo solenoidale.

Questa è l'unica legge che non cambia forma, tuttavia è l'unica senza nome.

**Teorema.** Si collegano le sorgenti ai campi con la legge di Ampère. Per farlo bene si utilizza il teorema di unicità di  $\vec{B}$ . Per sorgenti finite, cioè  $\vec{B} \rightarrow 0$ , per  $r \rightarrow \infty$  le equazioni

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

Definiscono  $\vec{B}$  univocamente.

**Dimostrazione.** Si utilizza quanto imparato per l'elettrostatica e si procede per assurdo. Si supponga che esistano due campi  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  entrambi soluzioni. Allora si costruisce un campo differenza  $\vec{D} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$  con la seguente proprietà:  $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 - \vec{\nabla} \times \vec{B}_2 = 0$ , cioè  $\vec{D}$  è conservativo, pertanto si può rappresentare tramite un potenziale scalare, cioè esiste una funzione  $\varphi$  scalare tale che  $\vec{D} = \vec{\nabla} \varphi$ . Tuttavia, dato che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  segue  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = 0$  cioè  $\nabla^2 \varphi = 0$  le cui condizioni al contorno sono  $\vec{D} \rightarrow 0$ , per  $r \rightarrow \infty$ , da cui segue  $\varphi(\infty) = \text{cost.}$ . Tuttavia, risulta che ad infinito  $\varphi$  è costante, ma dentro il laplaciano è nullo. Dall'elettrostatica, non esistono massimi e minimi locali, dunque  $\varphi$  è costante dappertutto cioè  $\vec{\nabla} \varphi = 0 \implies \vec{D} = 0 \implies \vec{B}_1 = \vec{B}_2$ .

Per configurazioni semplici si utilizza la legge di Ampère, mentre per configurazioni più complicate bisogna seguire un'altra strada.

Si è visto in elettrostatica che si può usare Gauss, però in generale, non si può formulare il problema in termini di una funzione scalare che porti a collegare i campi alle sorgenti. Infatti

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Da cui esiste  $\varphi$  per cui  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ , per cui nella seconda equazione si ottiene  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  di cui si conosce la soluzione formale:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Si vuole ridurre il problema fondamentale della magnetostatica a qualcosa di simile. Dunque, le equazioni sono

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione, il campo magnetico non è conservativo, dunque non si può introdurre un potenziale scalare (se non ci sono correnti, allora esso è conservativo). Dalla seconda equazione, si può introdurre un potenziale vettore, infatti si sa che la legge di Ampère è vera solo nel caso stazionario, si sa che la divergenza del rotore è zero. Quindi introducendo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$



allora segue che

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

Il campo  $\vec{A}$  è ortogonale a  $\vec{B}$ , pertanto ci si aspetta che sia diretto come  $\vec{J}$ . Si vede com'è la relazione tra il rotore di  $\vec{A}$  e le sorgenti. Dunque

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}.$$

Pertanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \implies \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{u}_x = \mu_0 J_x \implies \partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 J_x.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} (\partial_y - \partial_z)B_z &= (\hat{u}_z \partial_y - \hat{u}_y \partial_z) \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \implies \\ \mu_0 J_x &= \partial_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \partial_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z) \\ &= -\partial_y^2 A_x - \partial_z^2 A_x + \partial_x(\partial_y A_y + \partial_z A_z) \\ &= -\partial_x^2 A_x - \partial_y^2 A_x - \partial_z^2 A_x + \partial_x(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) \\ &= -\nabla^2 A_x + \partial_x(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \end{aligned}$$

Analogamente per le altre coordinate. Dunque, in generale

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Se si trova un modo per mandare via il gradiente della divergenza, si ottiene un analogo dell'equazione di Poisson. Si può mettere  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  perché l'introduzione di rappresentare  $\vec{B}$  tramite il rotore di  $\vec{A}$  lascia una certa arbitrarietà:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ , con  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{F}$ , per cui  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , dunque il campo  $\vec{A}$  è arbitrario, perciò si sceglie il più comodo. Quindi, si sceglie il potenziale vettore per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Si ottiene così un analogo all'equazione di Poisson. Il fatto che  $\vec{B}$  possa essere rappresentato con un numero infinito di potenziali è detto invarianza di gauge. Inoltre, esiste sempre la scelta di  $\vec{A}$  per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  ed essa è detta gauge di Coulomb, perché riduce un problema di magnetostatica ad un problema equivalente di elettrostatica.

Infatti, si supponga di avere  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f$  non nullo. Si scelga un  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{F}$  con le condizioni per cui  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -f$  così che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ . Tale scelta esiste sempre perché è analogo alle due equazioni differenziali del campo elettrico.

Dunque, l'equazione diventa

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x.$$

La cui soluzione è

$$A_x = \mu_0 \int \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Analogamente per le altre coordinate. Emerge il quadrivettore: tre correnti ed una densità di carica, un potenziale scalare e tre potenziali vettoriali.

## Lecture 17

Si sono trovate due leggi fondamentali per la magnetostatica

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

mer 10 nov  
2021 13:30

che hanno una soluzione unica per il teorema di unicità. Si è introdotto il potenziale vettore  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , esiste una arbitrarietà nella scelta di  $\vec{A}$  infatti basti prendere  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{F}$ , con  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ . Si sceglie dunque un potenziale vettore comodo che permette di scrivere le equazioni che legano il campo con le sorgenti

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \implies \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Dove la scelta di  $\vec{A}$  è la gauge di Coulomb. In forma compatta si ha

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Questa è simmetrica alla relazione che si conosce per l'elettrostatica

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Le stesse discussione sulle anomalie del secondo integrale valgono anche nel primo. Per ora il potenziale vettoriale è un ente matematico che semplifica i calcoli. Più avanti si vede che ha delle proprietà che lo caratterizzano.

In elettrostatica si sa anche che

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_r d\nu.$$

Si vuole scrivere una relazione generale che permette di collegare il campo magnetico alle sorgenti. Essa è facile da scrivere quando le sorgenti sono delle correnti sui fili; per correnti distribuite su di un volume è più facile utilizzare il potenziale.

**Circuiti.** Si consideri un circuito in cui scorra una corrente  $i$ . Dunque

$$\vec{J} d\nu = Ja d\vec{l} = i d\vec{l}.$$

dove  $a$  è la sezione del filo,  $d\vec{l}$  è un tratto di filo. Dunque, l'integrale del potenziale vettoriale, considerando che  $J = 0$  ovunque tranne sul filo, si ha un integrale di linea su  $d\vec{l}$ :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{i d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

con  $\vec{r}$  punto generico dello spazio. Dunque ora si considera  $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l}}{r}$ . Si fissa un tratto  $d\vec{l}$  e si calcola il suo contributo in un punto qualunque individuato da un vettore  $\vec{r}$  che parte da  $d\vec{l}$ . Così il potenziale assume la forma scritta sopra. Ora si ha, per cui:

$$d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \vec{\nabla} \times \left( \frac{d\vec{l}}{r} \right).$$

Inoltre

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fF_x & fF_y & fF_z \end{vmatrix} = \partial_y f F_z + f \partial_y F_z - \partial_z f F_y - f \partial_z F_y + \dots$$

Quindi segue

$$\underbrace{(\partial_y f F_z - \partial_z f F_y)}_{\vec{\nabla} f \times \vec{F}} + f \underbrace{(\partial_y F_z - \partial_z F_y)}_{f \vec{\nabla} \times \vec{F}} + \dots$$

Quindi risulta

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \times d\vec{l} + \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times d\vec{l} \right].$$

Si sta calcolando il potenziale vettore di un punto qualunque per un  $d\vec{l}$  fisso, dunque la sua derivata si annulla. Ora

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Quindi

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{u}_r \times d\vec{l}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Il campo magnetico totale risulta essere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{|\vec{r}_O - \vec{r}'|^2}.$$

Si è fatta coincidere l'origine del sistema di riferimento con  $d\vec{l}$ , dunque  $\vec{r}' = 0$ .

Questa formula è l'equivalente di quella del campo elettrostatico. Essa è la formula di Biot-Savart o prima formula di Laplace. Bisogna porre attenzione nell'interpretazione di questa legge. Infatti, in alcuni testi c'è un tentativo di collegarla ad una sorgente elementare, ma  $i d\vec{l}$  non è una sorgente elementare: non esiste una corrente  $i$  che vive solo su di un tratto  $d\vec{l}$ , si sta lavorando con correnti stazionarie, quindi il minimo che si può avere sono circuiti chiusi. In alcuni libri si afferma che  $i d\vec{l} = dq \vec{v}$ , però la carica  $dq$  non è una corrente stazionaria, perché il suo flusso attraverso una superficie è infinito quando la traversa e zero negli altri casi.

Inoltre, il campo per correnti impulsive non è così descritto, presenta una forma più complicata che si riduce a quanto trovato per velocità molto minori di  $c$ .

La formula di Laplace è stata costruita empiricamente. Ma qua si è presentata per via concettuale; partire da Laplace è la via utilizzata particolarmente in ingegneria.

Tale legge sembra suggerire che il campo magnetico dipende da  $\frac{1}{r^2}$  come il campo elettrico, tuttavia guardando il circuito da lontano, per ogni coppia di punti ai lati opposti si vedono due correnti opposte e da lontano sono dipoli magnetici e quindi  $r^2$  si semplifica, facendo rimanere solamente  $\frac{1}{r^3}$ .

Si calcola il campo di un tratto di filo. [immagine]

Si ha una densità di corrente  $\vec{J} = i d\vec{l}$ . Ad una distanza  $R$  dall'asse si ha il campo magnetico ortogonale a  $\vec{J}$ . Dunque, per un tratto sul filo  $dz \hat{u}_z$ , si individua la posizione con un raggio vettore  $\vec{r}$ . Quindi il campo magnetico dovuto a quel tratto è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dz \hat{u}_z \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dz \sin \alpha}{r^2} \hat{u}_\theta.$$

Si ha  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \implies \sin \alpha = \cos \varphi$ . Inoltre,  $R = r \cos \varphi \implies r = \frac{R}{\cos \varphi}$  e  $z = r \sin \varphi = R \tan \varphi$ ,  $dz = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi$ . Pertanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{R^2} \cos^2 \varphi \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} [\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1] \hat{u}_\theta.$$

Per un filo infinito, cioè  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i.$$

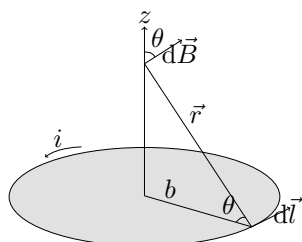


Figure 2: spira-circolare

**Campo di una spira circolare.** Una spira è un anello di corrente. Si calcola il campo magnetico di un punto sull'asse dell'anello di raggio  $b$ . La corrente circola in senso antiorario. Per Biot-Savart, si individua un elemento  $d\vec{l}$ . Ad un'altezza  $z$ , il raggio vettore è  $\vec{r}$ . Il campo magnetico è ortogonale a  $d\vec{l}$ , tuttavia integrando le direzioni trasverse si annullano e rimane solamente la componente verticale. Quindi

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{|d\vec{l} \times \hat{u}_r|}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \cos \theta}{r^2}.$$

Quindi

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{b}{r^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{2} i \frac{b^2}{r^3}.$$

Da qui si vede la dipendenza da  $r^3$ : il comportamento è quello di un campo di dipolo.

Si studia l'andamento delle linee di campo. La componente  $B_\theta = 0$  ovunque. Infatti,  $B_\theta = \text{cost}$  per simmetria rotazionale. Considerano una circonferenza di raggio  $s$  sopra l'anello, si applica la legge di Ampère:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta \oint dl = B_\theta 2\pi s = 0 \implies B_\theta = 0.$$

L'integrale è nullo perché l'anello non concatena nessuna corrente.

Le componenti radiale e assiale non sono nulle. Nel piano dell'anello non si può avere una componente radiale. [immagine] Cambiando segno alla corrente, il campo magnetico cambia verso, ma girando l'anello si ritorna alla situazione prima del cambio di corrente, ma ciò non può succedere; l'unico caso permesso è quello per cui  $B_r = 0$  sul piano.

Il campo è verticale sull'asse, mentre è perpendicolare al piano dell'anello. Si ha una struttura simile al dipolo elettrico a grandi distanze. La forma delle linee di campo è simile ad un toro.

## 9.2 Configurazioni notevoli.

Si trova il campo di alcune configurazioni notevoli.

**Solenoide.** [immagine]

Sia  $b$  il raggio del solenoide. Si individua una piccola regione cilindrica di altezza  $dz$ . Si considera il filo come molto sottile, così che il calcolo è analogo a considerare tanti anelli di spessore  $dz$ . Si supponga siano presenti  $N$  spire ed  $l$  sia la lunghezza del solenoide. Allora  $n = \frac{N}{l}$  è il numero di spire per unità di lunghezza. Quindi in un tratto  $dz$  si ha una corrente

$$dI = n dz i.$$

Prendendo un punto sull'asse, a distanza  $\vec{r}$  dall'anello, allora il campo magnetico sull'asse è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} dI \frac{b^2}{r^3} \hat{u}_z = \frac{\mu_0}{2} ni \frac{dz b^2}{r^2} \hat{u}_z.$$

Quindi risulta  $\frac{b}{r} = \sin \theta$  e  $r d\theta = dz \sin \theta$  [immagine] da cui:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} ni \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2} ni [\cos \theta_1 - \cos \theta_2].$$

Per un solenoide infinito, gli angoli vanno da 0 a  $\pi$ :

$$B_z(r=0) = \mu_0 ni.$$

Si vuole sapere com'è il campo dappertutto. Per un anello, spostandosi dall'asse, il campo magnetico non è più verticale. Se il solenoide è infinito allora il campo è uniforme in  $z$ . La componente  $\theta$  dev'essere zero perché lo era per un anello e quindi lo è per la somma di tanti. Per la direzione radiale, vale ancora l'argomento del campo sul piano, cioè è nullo. Pertanto, il campo ha solo direzione  $z$ :  $\vec{B} = B_z \hat{u}_z$ . Esso è uniforme in  $z$ , ma il suo valore può dipendere da  $r$ , mentre le altre due componenti sono nulle. Si utilizza la legge di Ampère per vedere come dipende, se dipende, da  $r$ . Si costruisce un circuito di Ampère [immagine] con  $r < b$ . Allora, sul circuito si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z(r=0)L - B_z(r)L = 0 \implies B_z(r) = B_z(r=0).$$

Si ha zero perché non si è concatenata nessuna corrente. Vale per un solenoide infinito.

Facendo una circuitazione uscendo orizzontalmente dal solenoide, si concatenano delle correnti e quindi per  $r > b$  si ha

$$B_z(r=0)L - B_z(r)L = \mu_0 i_{\text{concat.}} = \mu_0 niL.$$

Si concatena una corrente  $i$  che circola in ciascun anello intercettato e si hanno  $nL$  anelli. Dunque, dato che  $B_z(r=0) = \mu_0 ni$ , come trovato precedentemente, segue che  $B_z(r) = 0$ . Nella realtà, il solenoide ha un campo disperso sopra e sotto, e c'è anche una corrente che scorre verso l'alto. Pertanto, si dovrebbe rappresentare il solenoide come tanti anelli più una corrente verticale.

Si nota che quando si passa attraverso il bordo del solenoide si ha una discontinuità nella componente del campo parallela alla superficie pari a

$$\Delta B_{\parallel} = \mu_0 ni.$$

Per il campo elettrico la relazione è

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

**Solenoide toroidale.** Si può fare un solenoide toroidale per non avere un campo disperso, tuttavia il campo non è più uniforme.

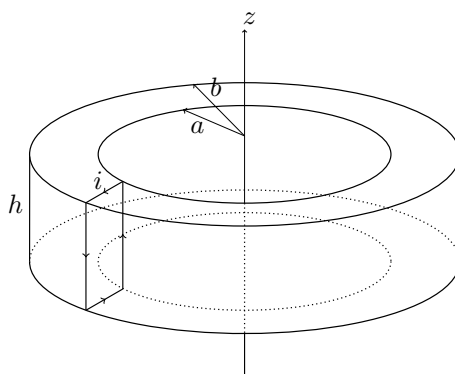


Figure 3: toro

In questo caso  $\vec{B} = B_\theta \hat{u}_\theta$ . Si consideri una sezione del toro. Si supponga che ci sia un campo magnetico in direzione  $z$ . Nel punto diametralmente opposto si ha il campo che punta in verso opposto, tuttavia ruotando il toro si ha ritorna nella situazione iniziale, ma con i versi invertiti e ciò non può essere. Così,  $B_z = 0$  e lo stesso per  $B_r$ .

Trovata la simmetria si utilizza Ampère. Sia  $a$  il raggio interno,  $b$  il raggio esterno e  $h$  l'altezza. Si sceglie un circuito di Ampère circolare di raggio  $r$ . Per simmetria,  $d\vec{l} = r d\theta \hat{u}_\theta$  e dunque:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B_\theta d\theta = B_\theta \oint_c d\theta = B_\theta 2\pi r = \begin{cases} 0, & (r < a \vee r > b) \wedge z \notin [0, h] \\ \mu_0 i N, & \text{all'interno del toro} \end{cases}.$$

con  $N$  avvolgimenti. Dunque

$$\vec{B} = \begin{cases} 0, & \text{esterno} \\ \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}, & \text{interno} \end{cases}.$$

Assomiglia al campo di un filo infinito, ma con campo più intenso. Al di fuori non si ha campo, però all'interno non è uniforme. Ancora, attraversando il bordo si ha una discontinuità.

Le configurazioni possibili per i campi sono solenoidi, toroidi, fili con Biot-Savart per curve integrabili.

immagine

In termini generali, vale una proprietà. Si consideri un foglio sottile di spessore  $d$ . Considerando un tratto  $L$  in cui si ha densità di carica  $J$ , si ha  $i = J L d$ , dove  $\frac{i}{L} = J d$  è definita densità di corrente di strato (o densità di corrente superficiale). Si vuole trovare il campo magnetico dalle due parti della lastra. Si può immaginare che la corrente di strato sia la somma di tanti fili per cui si ha un campo verticale con versi opposti da una parte e dall'altra della lastra. Si consideri un circuito di Ampère che abbracci entrambi i lati della superficie e poi si mandi il circuito ad avere un'altezza trascurabile così che esso prenda il campo appena sopra le due superfici. Dunque, sulla superficie della corrente di strato si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_{+,||} - B_{-,||})L = \mu_0 i_{\text{concat.}} = \mu_0 J L d \implies \Delta B_{||} = \mu_0 K.$$

con  $K = \frac{i}{L} = J d$ .

**Esercizio.** Trovare  $K$  nel caso di un toroide. In un caso  $L = 2\pi a$  e nell'altro  $L = 2\pi b$ .

## Lecture 18

### 9.3 Configurazioni elementari

lun 15 nov  
2021 13:30

[immagine] Quando si ha un circuito percorso da corrente, si è trovata una relazione generale che permette di calcolare il contributo di un tratto  $d\vec{l}$  al campo magnetico  $d\vec{B}(\vec{r})$ :

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Tale relazione è stata trovata utilizzando  $d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A}$ , con

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{r}.$$

Sapendo anche che  $\vec{J} d\nu = i d\vec{l}$ . Il tratto  $d\vec{l}$  non si può vedere come una corrente elementare, perché essa è almeno un anello infinitesimo (dunque puntiforme). Se si pone  $b$  il raggio di tale anello allora si è interessati al campo per  $r \gg b$ . Quindi per calcolare il campo non conviene usare Biot-Savart ma conviene ricavare il potenziale vettore e da ciò ricavare il campo. Si prosegue il calcolo per una geometria semplice e poi si generalizza ad una geometria qualunque.

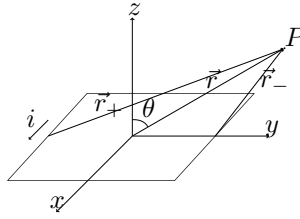


Figure 4: spira-quadrata

**Spira quadrata.** [immagine] Si consideri una spira quadrata di lato  $b$  ed un punto lontano  $P(0, y, z)$ . Quindi, per i lati parallelo ad  $y$  si ha

$$dA_y = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy \hat{u}_y}{r}.$$

La somma sui  $dA_y$  è zero perché le correnti sono uguali ed opposte. Per i lati paralleli ad  $x$ , non si hanno contributi uguali perché i due lati si trovano a distanze diverse:

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \hat{u}_x \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Dato che si è molto lontano, si considerano  $r_+$  ed  $r_-$  costanti, come pure  $\cos \alpha$ . Pertanto

$$r_{\pm} = r \pm \frac{b}{2} \cos \alpha.$$

Dunque

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \hat{u}_x \left( \frac{1}{r + \frac{b}{2} \cos \alpha} - \frac{1}{r - \frac{b}{2} \cos \alpha} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{b \cos \alpha}{r^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \hat{u}_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ib^2 \cos \alpha}{r^2} \hat{u}_x.$$

Inoltre, si ha  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Dunque

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ib^2 \sin \theta}{r^2} \hat{u}_x.$$

Si introduce la grandezza del dipolo magnetico:

$$\vec{m} = ib^2 \hat{u}_z \implies \begin{cases} m = \text{corrente} \cdot \text{area} \\ \text{direzione} \perp \text{ piano della spira} \\ \text{verso secondo la regola della mano destra a partire dal verso di } i \end{cases}.$$

Quindi si riscrive il potenziale in forma più comoda:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

**Spira qualunque.** Si generalizza il risultato per una spira qualunque. [rivedi] Per ogni anello interno, le correnti sui lati condivisi si elidono e rimane solamente la corrente esterne. Quindi  $\vec{B}$  in  $P$  è la sovrapposizione di tali spire. La sovrapposizione vale anche per  $\vec{A}$ .

Dunque ponendo  $N$  il numero dei quadrati di area  $b^2$ , si ha

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{Nb^2 \sin \theta}{r^2} \hat{u}_x.$$

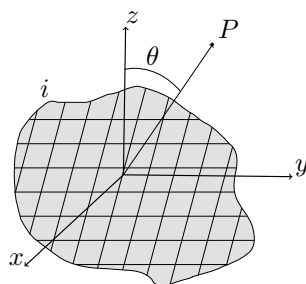


Figure 5: spira-qualunque

Si utilizza  $r$  perché si è nel limite di lontananza, perché infatti non tutti i quadratini sono tecnicamente distanti  $r$ .

Dunque, ponendo  $a$  l'area della spira si ha

$$\vec{m} = ia\hat{u}_z.$$

Pertanto, il risultato finale è

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Essa è simile, ma non identica alla relazione trovata per il dipolo elettrico:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}.$$

Ora si trova il campo magnetico:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Il potenziale vettore  $\vec{A}$  è perpendicolare al piano contenente  $\hat{u}_z$  e  $\hat{u}_r$ . Tale piano ha come vettore normale  $\hat{u}_\varphi$ . Quindi  $\vec{A} = (0, 0, A_\varphi)$ . Pertanto

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2}.$$

Da cui

$$\vec{B} = (B_r, B_\theta, 0).$$

Conoscendo l'espressione del rotore in coordinate sferiche si ha

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \partial_\theta (A_\varphi \sin \theta) - \cancel{\partial_\varphi A_\theta} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} 2 \cos \theta$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \cancel{\partial_\varphi A_r} - \partial_r (r A_\varphi) \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \sin \theta.$$

Pertanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta).$$

L'espressione di un dipolo elettrico ha la stessa struttura quando visti da lontano, mentre localmente sono diversi, perché diverse sono le sorgenti

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta).$$

[immagine] Per i campi magnetici non si hanno dipoli. Inoltre, allontanandosi, il campo magnetico diminuisce come  $\frac{1}{r^3}$ , mentre per il campo elettrico è  $\frac{1}{r^2}$ .

Inoltre, le sorgenti elementari sono monopoli elettrici e dipoli magnetici. Esistono dipoli elementari, irriducibili. Le particelle elementari hanno un dipolo magnetico associato al loro spin. Il campo magnetico deriva da moti di cariche, che sono anche sorgenti irriducibili dove tuttavia non c'è moto di carica.



## Lecture 19

mar 16 nov  
2021 13:30

## 9.4 Moti notevoli

Si vedono dei moti notevoli dovuti alla forza di Lorentz:

$$\vec{F}_{\vec{B}} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Essa ha una dipendenza esplicita dalla velocità, per cui bisogna porre attenzione al sistema di riferimento che è quello in cui si misura  $\vec{B}$ .

In generale, se la velocità è nulla, allora non si ha nessuna forza. Ci si immagina di avere una velocità non nulla. Essa può avere direzione qualunque rispetto al campo magnetico, tuttavia si può sempre scomporre in due componenti: una parallela al campo magnetico ed una perpendicolare:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \hat{u}_{\perp}.$$

Da cui risulta  $F = q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$ ; inoltre si ipotizza che non ci siano campi elettrici  $\vec{E} = 0$  e quindi si ha un moto rettilineo uniforme. Inoltre, la forza trasversa vive nel piano ortogonale a  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ :

$$F = qv_{\perp} B \hat{u}_{\perp}.$$

Si supponga si abbia solo moto dovuto ad una forza trasversa e si supponga che  $\vec{B}$  sia uniforme (in caso contrario  $\vec{F}$  è una funzione della posizione e si ha un moto vario). [immagine] Si ha moto circolare uniforme perché l'accelerazione

$$a = \frac{qv_{\perp} B}{m} \perp v.$$

Infatti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_v) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_v + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_{\perp}.$$

Da cui risulta che cambia solamente il verso, ma non il modulo: cioè un moto circolare uniforme. Dunque, ponendo  $v = v_{\perp}$  si ha

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m} \iff mv = qBR.$$

La quantità di moto è proporzionale al raggio di curvatura, alla carica ed all'intensità del campo magnetico. Inoltre, la velocità angolare risulta essere

$$\frac{v}{R} = \frac{qB}{m} = \omega.$$

Detta frequenza di Larmor ed è la frequenza caratteristica con cui avviene il moto circolare. Considerando anche una componente verticale della velocità diversa da zero. [immagine] Il moto nel piano è circolare uniforme a cui bisogna sovrapporre un moto rettilineo uniforme nella direzione verticale. Quindi

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \varphi) \\ z(t) = v_{\parallel} t + z_0 \end{cases}.$$

Dunque si ha un moto elicoidale. La distanza tra due punti successivi con le stesse coordinate  $x$  e  $y$  è detto passo dell'elica pari a

$$\Delta z = v_{\parallel} T.$$

con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

La descrizione è più complicata quando si considera anche un campo elettrico non nullo. Infatti,

esso può avere una direzione qualunque rispetto al campo magnetico; e lo si divide in due componenti

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \hat{u}_{\perp}.$$

Dato che la forza dovuta al campo elettrico è allineata ad esso; mentre dato che la forza magnetica è trasversa rispetto al campo magnetico; e se  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  allora l'accelerazione dovuta al campo magnetico è [rivedi] Si ha che in  $(x, y)$  il moto è circolare uniforme perché  $q\vec{E} = qE\hat{u}_z$ . Mentre  $z(t) = \frac{1}{2}qEt^2 + v_{\parallel}t + z_0$ , si ha un moto uniformemente accelerato lungo  $z$  e non si può trovare un sistema di riferimento per cui si elimina la componente parallela; inoltre, il passo dell'elica non è costante.

Per un campo elettrico perpendicolare al campo magnetico si ha una combinazione di accelerazioni nello stesso piano.

**Moto cicloide.** Si consideri un campo elettrico  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . Si sceglie  $\vec{E} = E\hat{u}_z$ ,  $\vec{B} = B\hat{u}_x$  e  $v(0) = 0$ .

La particella, ferma nell'origine, comincia a muoversi per effetto del campo elettrico. Quando parte, sviluppa una velocità in  $z$  e quindi si ha una forza di Lorentz nella direzione  $y$ . Più la particella acquisisce velocità, essa viene piegata verso l'asse  $y$  e la forza di Lorentz. Si arriva ad un punto in cui  $F_B > F_E$  e la particella torna verso il basso fino a quando si ferma, e il ciclo ricomincia. Il moto è in direzione [rivedi]

$$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{EB} = \hat{u}_y.$$

Le accelerazioni sono solamente nel piano  $yz$ . La forza elettrica è  $\vec{F}_z = qE\hat{u}_z$ , mentre la forza di Lorentz è  $F_B = -qv_y B\hat{u}_z + qv_z B\hat{u}_y$ . Quindi l'equazione del moto è

$$\begin{cases} m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = qE - qB\dot{y} \end{cases}.$$

Posto  $\omega = \frac{qB}{m}$  si ha

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega\dot{z} \\ \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \end{cases}.$$

Il moto è accoppiato nei due assi. Per disaccoppiarlo, si prende la derivata della prima espressione e la si sostituisce nella seconda espressione:

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega\dot{z} \\ \ddot{y} = \omega^2\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \end{cases}.$$

Si riscrive per ottenere

$$\ddot{y} + \omega^2\dot{y} = \omega^2\frac{E}{B}.$$

Risulta essere l'oscillatore armonico forzato. La cui soluzione particolare e la soluzione dell'omogenea associata sono

$$\dot{y} = \frac{E}{B}, \quad \dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t).$$

Per cui la soluzione è

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{E}{B} \\ \dot{z}(t) = -a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \end{cases}.$$

Dato che la velocità iniziale è nulla si ha  $\dot{z}(0) = \dot{y}(0) = 0$ , per cui

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = a + \frac{E}{B} = 0 \implies a = -\frac{E}{B} \\ \dot{z}(0) = b = 0 \end{cases}.$$

Dunque segue

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{E}{B}(1 - \cos(\omega t)) \\ \dot{z}(t) = \frac{E}{B} \sin(\omega t) \end{cases}.$$

Si integrano queste velocità per trovare la traiettoria

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) + y_0 \\ z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + z_0 \end{cases}.$$

Le condizioni iniziali sono  $y(0) = z(0) = 0$ ; da cui si ottiene

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ z_0 = \frac{E}{\omega B} \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) \\ z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}.$$

Si pone  $R \equiv \frac{E}{\omega B}$  che è una lunghezza, da cui si ottiene

$$\begin{cases} y(t) - R\omega t = R \sin(\omega t) \\ z(t) - R = R \cos \omega t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (y(t) - R\omega t)^2 = R^2 \sin^2(\omega t) \\ (z(t) - R)^2 = R^2 \cos^2(\omega t) \end{cases} \implies (t - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Questa è l'equazione di una circonferenza di raggio  $R$  e centro  $(R\omega t, R)$ . Essa descrive un cicloide con  $z_{\max} = 2R$  che corrisponde a  $\omega t = \pi$  e  $y = \pi R$ . L'osservatore al centro del cerchio vede un moto circolare uniforme, per cui il campo elettrico si elimina. Imparare come si trasformano i campi è utile. Inoltre, se esiste un sistema di riferimento in cui non si ha campo elettrico e ne esiste uno in cui si ha anche campo elettrico allora significa che le trasformazioni di coordinate devono trasformare i campi l'uno nell'altro.

## 9.5 Azioni sui conduttori

Si studia l'azione della forza magnetica sui conduttori. Si osserva il comportamento macroscopico.

**Comportamento macroscopico.** Dalla prima formula di Laplace

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Discende dalla forza di Lorentz applicata alla densità di corrente

$$\vec{J} d\nu = i d\vec{l}, \quad \vec{J} = nq\vec{v}.$$

Essa permette di descrivere un conduttore quando viene considerato come elemento rigido. Osservando quest'ultimi bisogna occuparsi di forze e momenti.

Per le forze si ha

$$\vec{R} = \sum \vec{F}.$$

E per i momenti si ha

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

**Esempio.** [immagine] Si consideri una spira quadrata come precedentemente. Il momento di dipolo magnetico è  $\vec{m} = ib^2 \hat{u}_z$ . Si è scelto  $\vec{B} = B_x \hat{u}_x$ . Per come è allineato il campo magnetico, si ha forza di Lorentz nei due tratti paralleli all'asse  $y$ . Dunque

$$\begin{aligned} F_B^1 &= -ibB_1 \hat{u}_z \\ F_B^2 &= ibB_2 \hat{u}_z. \end{aligned}$$

Se il campo magnetico è uniforme allora la risulta è nulla,  $\vec{R} = 0$ . Inoltre, considerando il campo magnetico uniforme, si hanno le due forze uguali ed opposte, pertanto

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \Delta\vec{r} \times \vec{F}.$$

Con  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ed  $\vec{F} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Dato che  $\Delta r = b$  si ha

$$\vec{\tau} = ib^2 B \hat{u}_\perp = \vec{m} \times \vec{B}.$$

L'interazione magnetica di un dipolo è di questo tipo. [rivedi]

**Comportamento microscopico.** [immagine] Si consideri un campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{u}_x$  e si ha una corrente  $\vec{J} = nq\vec{v} = \sigma\vec{E}_{\text{conduzione}}$  in direzione  $y$ . Considerando un portatore di carica, questo si muove in un verso in base al segno della carica. Si verifica l'effetto Hall: la presenza di un campo magnetico esterno genera una forza di Lorentz sulle cariche che si stanno muovendo, in questo caso agisce sempre verso  $-z$ . Muovendosi verso il basso, si svuota la parte superiore di cariche e quindi si genera un campo elettrico che si oppone al movimento di cariche fino a raggiungere un equilibrio in cui

$$qE_z\hat{u}_z + q\vec{v} \times \vec{B} = 0.$$

Moltiplicando per  $n$  si ottiene

$$E_z\hat{u}_z = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{nq}.$$

La direzione ed il verso di  $\vec{J}$  sono indipendenti dal segno della carica; tuttavia, nell'espressione del campo elettrico dipende dal segno del portatore di carica. Misurando la direzione del campo elettrico si può risalire a capire che segno hanno i portatori di carica: nei metalli la corrente è trasportata da carica negativa.

Per misurare il campo elettrico si sa che ai capi del conduttore si ha  $\Delta V = E_z d$ .

Si supponga di avere un conduttore cilindrico senza campo magnetico esterno [rivedi]. Se fluisce una corrente  $\vec{J}$  si ha un campo magnetico

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi r} i, & \text{dentro} \\ \frac{\mu_0 J r}{2}, & \text{fuori} \end{cases}.$$

La differenza di potenziale per la sezione del cilindro è trascurabile. [rivedi]

## 9.6 Lavoro della forza di Lorentz

La forza di Lorentz è sempre perpendicolare allo spostamento, dunque il suo lavoro è nullo. Tuttavia, tale situazione non è immediatamente riconoscibile in tutte le configurazioni. Si possono avere dei casi in cui sembra che ciò non avvenga.

immagine

Si consideri una regione in cui si abbia una regione di campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{u}_y$  ed una regione in cui esso è nullo. Si consideri un circuito alimentato da una batteria.

Si sceglie di far circolare una corrente tale per cui si ha una configurazione di equilibrio. Si ha una forza magnetica verso l'alto bilanciata dalla forza peso

$$F_B = iaB = mg \implies i = \frac{mg}{aB}.$$

Aumentando la corrente, se  $i > \frac{mg}{aB}$  allora la forza di Lorentz è maggiore e quindi sale di un tratto  $\Delta z$ . Il lavoro compiuto su tale sistema per farlo salire è

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F}_B \cdot \Delta\vec{z} = iaB\Delta z.$$

Questo è un lavoro apparente, perché la forza di Lorentz non compie lavoro. Questo lavoro non è compiuto dalla forza di Lorentz. Mentre il filo sale, la velocità con cui si muovono i portatori di

carica non sono solo lungo [rivedi] La velocità effettiva delle cariche è inclinata. Quindi con un campo magnetico che va verso l'interno, segue che la forza di Lorentz è ortogonale alla velocità e si può scomporre in due componenti lungo  $z$  ed  $x$ . Quindi  $\Delta x = v_x \Delta t$ ,  $\Delta z = v_z \Delta t$  da cui segue  $v_x \Delta z = v_z \Delta x$ . Ora, la forza lungo  $z$  è

$$F_z = \Delta q v_x B = iaB, \quad F_x = -\Delta q v_z B.$$

La forza  $F_x$  è diretta lungo il filo, ma in verso opposto a quello in cui circola la corrente. Per far circolare la corrente, la batteria deve vincere tale forza. Dunque

$$W_b = -\vec{F}_x \cdot \Delta \vec{x} = \Delta q v_z B \Delta x = \Delta q v_x B \Delta z = iaB \Delta z.$$

Dunque è la batteria che compie lavoro.

## 9.7 Pressione magnetostatica

[immagine] Si consideri un cilindro cavo di raggio  $R$  con una corrente  $I$  che fluisce attraverso la superficie esterna.

Il campo magnetico all'interno Considerando un circuito di Ampère si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concat.}}$$

Per cui

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}.$$

Dunque si ha una discontinuità di

$$\Delta B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \equiv \mu_0 k.$$

alla superficie. [rivedi] Si ha una pressione magnetostatica che si può calcolare con la formula di Laplace. Si trova l'interazione associato al campo con un quadrato di lato  $L$  sulla superficie del cilindro. Nel quadrato fluisce una corrente  $i$ . La forza che si vuole calcolare è

$$\vec{F} = iL \langle B \rangle \hat{u}_r = kL^2 \langle B \rangle \hat{u}_r.$$

(verso l'interno quindi  $-\hat{u}_r$ ? [rivedi]) Dunque

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{1}{\mu_0} (B_{\text{ext}} - B_{\text{int}}) \frac{B_{\text{ext}} + B_{\text{int}}}{2} = \frac{1}{2\mu_0} (B_{\text{ext}}^2 - B_{\text{int}}^2).$$

[rivedi] I plasmi in campi magnetici subiscono delle pressioni. [rivedi] Questa espressione è una densità di energia. Anche il campo magnetostatico può accumulare energia.

Si immagini di modificare il volume del cilindro comprimendolo sotto l'azione della pressione. Nello spazio prima occupato dal cilindro si crea un campo magnetico [rivedi]

$$p d\nu = \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\nu.$$

In questo caso, sembra che [rivedi] La corrente va verso l'alto, quando si comprime si ha una forza.

Si ritrovano i risultati sull'energia quando si parla di campi variabili e conduzioni?

## Lecture 20

lun 22 nov  
2021 13:30

## 10 Interazioni tra cariche e moto relativo

e trasformazioni dei campi.

Si sa che l'interazione tra la carica ed i campi è descritta da una legge di forza generale

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Questa definizione dipende dal sistema di riferimento a causa della velocità  $\vec{v}$ . Risulta evidente che da questa discende una dipendenza dei campi stessi dal sistema di riferimento.

La definizione del campo elettrico è  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  nel sistema di riferimento in cui  $\vec{v}_q = 0$ . Inoltre, questa definizione operativa non pone nessuna restrizione sullo stato di moto delle cariche sorgenti. Essa pone una restrizione sul moto della carica esploratrice. Tuttavia, non si sa caratterizzare il campo di cariche in moto.

Nella definizione di  $\vec{B}$  compare esplicitamente la velocità definita in un particolare riferimento. Dunque ci si chiede come dipendono i campi da sorgenti in moto; come si trasformano i campi nei sistemi relativi; come si trasforma la forza (perché non è un invariante relativistico). Si analizza tutto questo alla luce del principio di relatività. Esso era noto ai fisici che hanno sviluppato l'elettromagnetismo, ma in questo corso si utilizza il principio di relatività ristretta istituzionalizzato da 116 anni.

**Principio di relatività.** Esso afferma

- Le leggi della fisica (non solo della meccanica come per Galileo) sono invarianti nella forma per ogni sistema di riferimento inerziale (SRI, sacro romano impero).
- La velocità della luce  $c$  è costante in ogni sistema di riferimento.

Si vuole trovare come si trasformano i campi. Le sorgenti sono

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \vec{J} = \frac{dq}{dt dA} \hat{u}_A.$$

Si sa come si trasformano le coordinate spaziali e temporali, ma non si sa come trasforma la carica. Inoltre, per il primo principio, quando si sa come trasformano le sorgenti, allora si possono usare le stesse leggi del caso statico per legare il campo alle sorgenti in movimento.

Le trasformazioni di Lorentz per un sistema di riferimento  $S'$  in moto rettilineo uniforme rispetto un sistema  $S$  lungo l'asse  $x$  con velocità  $\vec{v}$  sono:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma \beta ct \\ ct' = \gamma ct - \gamma \beta x \end{cases}.$$

La trasformazione reciproca è

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma \beta ct' \\ ct = \gamma ct' + \gamma \beta x' \end{cases}.$$

con  $\beta = \frac{v}{c}$  e  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . Due relazioni risultano essere importanti

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}, \quad \Delta t' = \gamma \Delta t.$$

per eventi nello stesso tempo ed eventi nello stesso luogo rispettivamente. Inoltre, esistono anche le relazioni per le coordinate trasverse le quali rimangono invariate.

Per la carica, bisogna rivederne la definizione perché la carica è stata definita in modo contestuale alla legge di Coulomb dove si sono scelte la carica sorgente del campo e la carica esploratrice entrambi statici. Quando si definisce un'interazione del tipo  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  si vincola  $q$  ad essere statica,

ma non si ha nessun vincolo sulla velocità della carica sorgente. Introducendo una definizione elettrostatica della carica, indipendente dalla direzione:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{F}{q}.$$

con  $q$  carica esploratrice, e  $v_Q = v_q = 0$  non si ha nessuna direzione privilegiata, perché la forza dipende dalla congiungente tra le cariche. Ponendosi in un sistema in cui la carica è in moto, non si ha la garanzia che non ci sia una direzione privilegiata. In linea di principio, l'interazione può dipendere dalla direzione relativa.

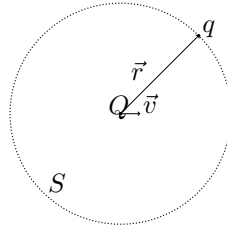


Figure 6: def-carica-relativ

Si può generalizzare la definizione. Si consideri una carica  $Q$  con velocità  $\vec{v}_Q$  rispetto l'osservatore. Si prenda una superficie  $S$  sferica solidale con l'osservatore su cui si pone una carica  $q$ , che ha  $v_q = 0$ . Dunque, la nuova definizione di carica è la media dell'interazione su tutte le direzioni:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \left\langle \frac{F}{q} \right\rangle_S.$$

Tale media si calcola quando la carica  $Q$  si trova al centro di tale superficie  $S$ . Dunque si ha

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \Phi_S(\vec{E}).$$

cioè la legge di Gauss per cui si ha una definizione di carica indipendente dalla direzione. Si trovano due cose:

- nel limite in cui la carica è ferma, tale definizione collassa in quella elettrostatica;
- la relazione scritta esprime in maniera esplicita l'invarianza in forma della legge di Gauss.

Questo non dice come trasforma la carica. Risulta essere un fatto sperimentale che la carica è un invariante relativistico. Una prova sperimentale è considerare l'elio, il quale è un sistema di due protoni e due neutroni. Si consideri anche una molecola con due atomi di deuterio: ha due protoni e due elettroni. Gli orbitali dei due sono diversi, tuttavia sono entrambi neutri con precisione molto alta. Per dieci moli di sostanza si hanno  $10^{24}$  molecole. Facendole uscire si osserva se si ha una carica che si accumula:

$$\Delta Q = N \Delta q.$$

risulta essere neutra in una parte in  $10^{20}$ . Quindi,  $Q$  è lo stesso per ogni sistema di riferimento. Pertanto, interessa solamente la trasformazione del volume.

Tuttavia, la conservazione è diversa dall'invarianza. La conservazione della carica deriva dall'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0.$$

Inoltre, l'energia si conserva per il secondo principio della termodinamica, ma non è un invariante relativistico. L'energia si trasforma come il tempo.

## 10.1 Campo elettrico

Si studia la trasformazione di un sistema semplice e poi si generalizza il risultato.

Si consideri una doppia distribuzione planare con  $\sigma$  uniforme. Si osserva cosa succede quando questa è in moto relativo rispetto ad un osservatore. Si fa l'analisi della componente longitudinale e trasversa rispetto al moto relativo.

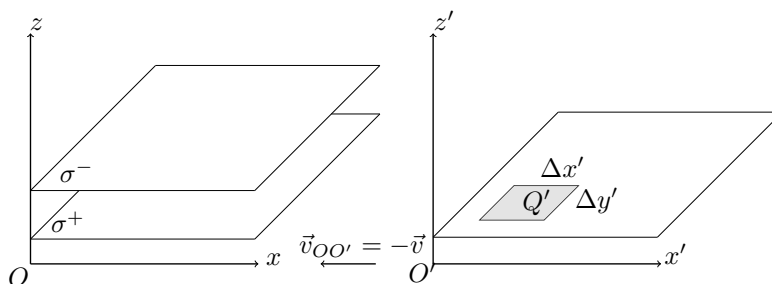


Figure 7: trasf-camp-eletttr

Si consideri un sistema di riferimento  $O$  solidale con le cariche. In tale configurazione si ha un campo elettrostatico pari a

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_z.$$

Si consideri un altro riferimento  $O'$  in cui tali distribuzioni siano in moto con velocità  $\vec{v}$ . Dunque si prende  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$ , velocità di  $O'$  rispetto ad  $O$ . Bisogna calcolare il campo elettrico in tale sistema. Si può calcolare cosa succede alla densità di carica:

$$\sigma' = \frac{Q'}{\Delta x' \Delta y'} = \frac{Q}{\frac{\Delta x}{\gamma} \Delta y} = \gamma \frac{Q}{\Delta x \Delta y} = \gamma \sigma.$$

Quindi tale riferimento vede una densità di carica maggiore. Un corollario di tale formula è che la densità di carica è minima nel sistema di riferimento solidale.

Si può prendere la legge di Gauss e trovare il campo, tuttavia si ha un problema: in  $O$  si sa applicare Gauss perché il sistema presenta delle simmetrie che si possono sfruttare; in  $O'$  si ha una direzione definita dalla velocità delle cariche, non si ha simmetria per rotazione. Non si può assumere una simmetria cilindrica che, in  $O$ , permetteva di assumere che il campo fosse ortogonale. Quello che si può usare è l'invarianza per traslazione che implica l'uniformità. Pertanto, si ha un campo elettrico inclinato rispetto al piano e con tutte le linee parallele. [immagine]

Per principio di sovrapposizione, il campo di ciascuna lastra esiste ovunque nello spazio e si nota immediatamente che

$$\vec{E}' = 0.$$

oltre lo spazio delle lastre. Inoltre, dato che all'interno le linee hanno lo stesso angolo, la componente orizzontale si elide e rimane la componente verticale

$$\vec{E}' = E'_z \hat{u}_z.$$

Ora si sa collegare il campo alle sorgenti. Si considera una superficie gaussiana cilindrica attraverso una delle due lastre. [immagine]

Dunque,

$$\oint_S \vec{E}' \cdot d\vec{a} = E'_z A' = (\text{L.G.}) \frac{Q'}{\epsilon_0}.$$



dove  $Q'$  è la carica contenuta nel cilindro. Pertanto

$$E'_z = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A'} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_z.$$

Si può scegliere una qualsiasi orientazione dei piani fin quando la velocità è parallela ad essi. Per cui la relazione precedente si può generalizzare come

$$E'_\perp = \gamma E_\perp.$$

Tale risultato è vero se  $\vec{B} = 0$  nel sistema di partenza. Per la componente longitudinale si girano i piani. [immagine]

Per cui in  $O$  si ha

$$\vec{E} = E_x \hat{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_x.$$

Considerando un altro riferimento  $O'$  con velocità  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$  si ha che il piano vive in  $\Delta y' \Delta z'$  per cui

$$\sigma' = \frac{Q'}{\Delta y' \Delta z'} = \frac{Q}{\Delta y \Delta z} = \sigma.$$

Si ha invarianza per traslazione e rotazione attorno la velocità, dunque il campo è ortogonale al piano. La legge di Gauss dà lo stesso risultato del sistema  $O$  sostituendo  $\sigma'$ . Infatti, risulta

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_x.$$

La componente longitudinale è invariante. Si studia una configurazione più complicata. Il campo elettrico ha significato locale. Infatti, con la definizione  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  si misura il campo in un punto ignorando la distribuzione delle sorgenti; si può fare tale operazione nel riferimento  $O$  e nel riferimento  $O'$ . Tuttavia,  $O$  ed  $O'$  devono comunicarsi i campi elettrici in maniera indipendente dalla distribuzione delle sorgenti. Questo significa che la relazione trovata per una specifica distribuzione deve valere per tutte le distribuzioni. Se in quel punto si ha un campo elettrico, allora un altro riferimento vede un campo elettrico con componenti

$$\begin{cases} E'_\perp = \gamma E_\perp \\ E'_\parallel = E_\parallel \end{cases}.$$

## Lecture 21

La componente longitudinale è invariante, mentre la componente trasversa si dilata. Tale comportamento è diverso rispetto a come trasformano le coordinate.

Da qua si ricavano i campi elettrici per configurazioni notevoli in cui le cariche sono in moto rispetto al riferimento.

**Carica puntiforme.** Sapendo come si trasforma una carica puntiforme, allora per il principio di sovrapposizione si conosce come trasforma ogni campo. Si considera un campo elettrico  $\vec{E}$  dovuto ad una carica  $Q$  con velocità  $\vec{v}$  costante nel sistema di riferimento. Esiste un riferimento  $O$  solidale con la carica. [immagine]. Il campo ha intensità

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}.$$

si è in un regime elettrostatico. Dato che si conoscono le leggi di trasformazione delle componenti del campo elettrico, si considera che la carica sia in moto lungo l'asse  $x$ . Dunque

$$\begin{cases} E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2+z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}.$$

Si sceglie un riferimento  $O'$  in moto con velocità  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$  per cui in  $O'$  risulta che la carica  $Q$  è in moto con velocità  $\vec{v}$ . Si valuta il campo quando la carica si trova sull'origine  $O'$ . Inoltre si ha

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma \beta ct' \\ z' = z \end{cases}.$$

Pertanto,  $z$  rimane costante, mentre per  $x$  bisogna tenere conto di un fattore  $\gamma$ . Si sceglie l'asse del riferimento di modo che l'origine dei tempi sia esattamente nel momento in cui la carica passa per l'origine  $O'$ , dunque  $t' = 0$ . Pertanto,  $x = \gamma x'$ . Quindi, si ha l'espressione per i campi

$$\begin{cases} E'_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E'_z = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}.$$

Le due espressioni sono identiche. Risulta che

$$\frac{E'_z}{E'_x} = \frac{z'}{x'}.$$

cioè la tangente dell'angolo con l'asse  $x$ , pertanto il campo è radiale.

Tuttavia, il campo non è centrale: il modulo  $E'$  non dipende solamente da  $r'$ , ma dipende anche dall'angolo  $\theta'$ . Infatti

$$\begin{aligned} (E'_x)^2 + (E'_z)^2 &= \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(\gamma x')^2 + (\gamma z')^2}{((\gamma x')^2 + (z')^2)^3} = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\gamma^2 (r')^2}{[\gamma^2 ((x')^2 + (z')^2) + (1 - \gamma^2)(z')^2]^3} \\ &= \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\gamma^2 (r')^2}{(\gamma r')^6 [1 - \beta^2 \frac{(z')^2}{(r')^2}]^3} \Rightarrow E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r')^2} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta']^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Il campo dipende dal reciproco del quadrato della distanza; ha un fattore che dipende dalla trasformazione; ed ha una dipendenza angolare nella sua intensità. Non è un campo centrale, perché l'intensità non è uniforme a tutti gli angoli. Si ha campo elettrico  $E'$  massimo per  $\theta' = \pm \frac{\pi}{2}$ , mentre  $E'$  è minimo quando  $\theta' = k\pi$ . Nel limite  $\beta \rightarrow 1$ , il campo tende tutto nella direzione di campo massimo.

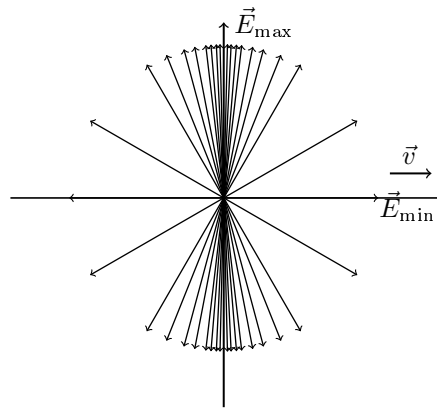


Figure 8: campo-elettrico-puntiforme-relativistico

Inoltre, tale campo non è conservativo. [immagine] Considerano un percorso con due archi si ha

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}' \cdot d\vec{l}.$$

dove il secondo ed il quarto integrale sono zero perché il campo elettrico è parallelo allo spostamento. I due integrali rimanendo non si elidono perché l'intensità del campo sui due percorsi è diverso. Una carica stazionaria ha un campo elettrico associato che non è elettrostatico, ha proprietà differenti: è radiale, ma non è centrale quindi non è conservativo. Sembra esserci una violazione apparente del principio di causalità. Infatti, si afferma che il campo associato ad una carica nel centro di  $O'$  ha la forma in figura, per cui

$$\vec{E} = \vec{E}(r', \theta').$$

Significa che  $r'$  e  $\theta'$  sono coordinate qualunque in tutto lo spazio. Tuttavia, la carica è in moto, dunque quando si trova in una nuova posizione, con lo stesso procedimento si scelgono degli assi centrati in quel punto, si opera la stessa trasformazione e si ritrova lo stesso campo in tutto lo spazio: la carica si trascina dietro il campo elettrico, anche a distanza infinita. Non c'è violazione di causalità perché il moto viene a velocità costante: l'informazione sulla la posizione futura è disponibile a tutti gli osservatori a tutti i tempi e tale posizione è prevista da ciascuno senza incertezze.

**Moto variabile.** Se il moto è variabile il campo non può essere come visto dappertutto. Si consideri una configurazione di moto variabile. Si consideri

$$\begin{cases} \vec{v} \neq 0, & t < 0 \\ a \neq 0, & t \approx 0 \\ \vec{v} = 0, & t > 0 \end{cases}.$$

La carica  $Q$  ha una certa velocità e poi si ferma. Un osservatore che vede la carica ferma, nota che il campo è radiale con le linee distribuite uniformemente sull'angolo. L'informazione che la carica si è fermata non ha raggiunto tutti gli osservatori istantaneamente. Per un tempo  $t > 0$ , tale informazione ha percorso una distanza  $R \leq ct$ . Dunque, all'interno di una regione di raggio  $R = ct$  gli osservatori sanno che la carica si è fermata. Per quelli fuori non è così e pensano che la carica sia proseguita con il proprio moto. In base all'informazione che  $\vec{v} \neq 0$  per  $t < 0$ , gli osservatori esterni presumono che la carica abbia continuato per un tratto  $\vec{v}t$ .

Siccome non ci sono cariche sulla superficie che separa gli osservatori segue che le linee di campo devono avere continuità. Pertanto, compare un campo  $\vec{E} = E\hat{u}_\theta$  rispetto al punto in cui si è fermata la carica. Si ha un campo stazionario esterno associato al moto della carica, un campo stazionario interno associato alla carica fissa ed un fronte sferico con un campo trasverso che si allarga all'infinito: esso è un campo di radiazione, si ha un'onda elettromagnetica.

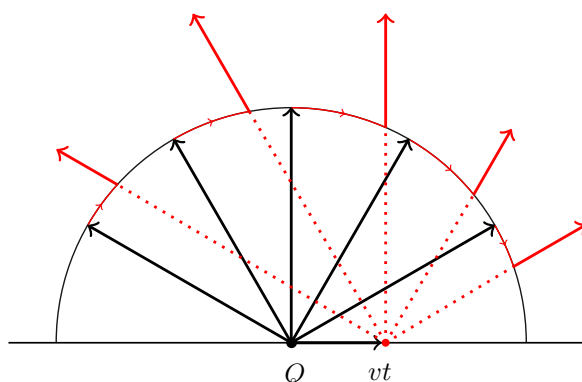


Figure 9: cmp-elettr-puntiforme-rel-moto-variabile

**Esempio.** Si vede un altro campo notevole con un filo infinito in moto con velocità  $\vec{v}$  lungo l'asse e densità di carica  $\lambda$  nel laboratorio. Si può trovare il campo in due modi

- ci si mette nel riferimento delle sorgenti, si conosce il campo elettrostatico di tale configurazione e quindi si può trasformare il campo in quello del laboratorio;
- si capisce la simmetria del campo in una configurazione in cui le cariche sono in moto e poi si usa la legge di Gauss perché è invariante in forma.

Con il secondo modo, per qualunque punto che si individua, si hanno due elementi di carica  $dq$  e  $dq'$  simmetrici rispetto al punto considerato. Essi hanno un campo di una carica in moto come visto sopra: molto dense nella perpendicolare e più rade lungo la parallela. Sulla verticale del punto considerato, le componenti assiali dei campi dovuti ai due elementi di carica considerati si elidono e le componenti trasverse si sommano. Il campo è solamente radiale.

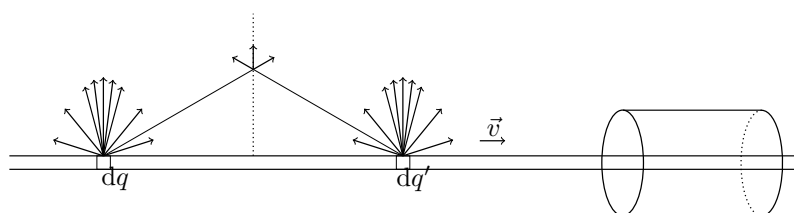


Figure 10: filo-infinito-relativistico

Dunque, si considera una superficie di Gauss cilindrica attorno al filo e ne si calcola il flusso attraverso:

$$E(r)2\pi rL = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}L \implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Utilizzando il primo modo, si prende un riferimento comovente con le sorgenti. Si ha un filo statico con una densità  $\lambda_0$  ed il campo elettrostatico è

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'} = \frac{\frac{\lambda}{\gamma}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'}.$$

con  $r' = r$  perché direzioni trasverse. Dato che  $E_{\text{lab}} = \gamma E$  allora risulta che

$$E_{\text{lab}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

L'interazione tra le cariche è una forza, cioè un prodotto tra una carica ed un campo. Si studia l'interazione tra le carica in sistemi in cui la carica esploratrice e le cariche sorgenti sono in moto relativo

**Interazione tra cariche in moto.** [immagine] Si considerino una carica  $q$  ed una distribuzione planare  $\sigma$  fisse. Tale configurazione è elettrostatica, quindi

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_z, \quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Non si hanno fenomeni magnetici.

Si consideri una seconda configurazione in cui si ha una distribuzione planare  $\sigma$  fissa ed una carica  $q$  in moto. Un'altra configurazione è quella per la quale è in moto il piano e la carica è fissa. Un'ultima configurazione è quella in cui sia il piano che la carica sono in moto con la stessa velocità; tale configurazione è analoga alla prima, semplicemente ci si trova in un sistema di riferimento in moto. Similmente per la seconda e la terza configurazione.

**Analisi della seconda configurazione.** Nel riferimento  $O$  si sa che

$$\begin{cases} E_{\parallel} = 0 \\ E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases}.$$

Inoltre, dato che le sorgenti sono statiche, si può pensare che la forza sia  $F = qE$ . Tuttavia, la definizione di interazione elettrica è stata data nel limite statico (della carica esploratrice?). Si consideri un riferimento  $O'$  solidale con la carica  $q$ . In  $O'$ , la forza  $\vec{F} = \vec{F}'_E = q\vec{E}'$  perché  $q$  è a riposo. Inoltre,  $E' = E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ . Quindi  $F' = \gamma q E_{\perp}$ . Per confrontarla con la definizione  $F = qE$  si vede come trasformano le forze.

**Trasformazione della forza.** Nel riferimento comovente con un punto di massa  $m_0$ . Si consideri una forza  $\vec{F}$  in tale riferimento  $O$ . Si vuole trovare la forza  $\vec{F}'$  in un riferimento in moto relativo. Quindi, si studia cosa succede alla massa  $m_0$  quando soggetta a tale forza. In un tempo  $dt$  si ha

$$d\vec{p} = \vec{F} dt, \quad dE = \frac{(dp)^2}{2m_0} = \frac{F^2}{2m_0} dt^2.$$

l'energia è al secondo ordine in  $dt$ . Dato che la massa si è messa in moto allora cambia anche la posizione:

$$dx = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} dt^2.$$

che è anch'esso al secondo ordine in  $dt$ . Nel riferimento  $O'$  in moto relativo si ha

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \Rightarrow \begin{cases} F'_{\perp} = \frac{dp'_{\perp}}{dt'} = \frac{dp_{\perp}}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} \sim \frac{1}{\gamma} F_{\perp} \\ F'_{\parallel} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt} = \frac{\gamma dp_{\parallel} - \gamma\beta c dt}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = F_{\parallel} \end{cases}.$$

si trascura il termine al secondo ordine  $\frac{\gamma\beta}{c} dx$  perché gli infinitesimi sono prossimi a zero. Quindi tornando nel riferimento  $O$  si ha  $F = \frac{1}{\gamma} F'$  per cui  $F = \frac{1}{\gamma} F' = \frac{1}{\gamma} \gamma q E_{\perp} = q E_{\perp}$  che è l'espressione della forza in  $O$  scritta precedentemente. (In questo caso  $F$  è la forza sulla carica nel riferimento  $O$  cioè quello in cui la carica si muove, mentre  $F'$  è la forza, che è solamente elettrica, nel riferimento  $O'$  che si muove con la carica; la scelta di posizionare l'apice è alquanto infelice, perché opposta alla trattazione appena fatta sulla trasformazione della forza, sebbene si continui ad utilizzare l'apice per il riferimento in moto).

Quando ci si pone nella configurazione seconda e osservando i campi usando le loro trasformazioni, si scopre quanto si è già commentato nell'analisi dell'elettrostatica come evidenza empirica: cioè la definizione di campo elettrico ha la carica esploratrice ferma, ma quando essa è in moto si ha evidenza che i moti delle cariche sono uniformemente accelerati. Quindi, l'interazione del campo elettrico con una carica, in assenza di campi magnetici, è esattamente  $\vec{F} = q\vec{E}$  cioè l'interazione elettrica non dipende dallo stato di moto della carica, è indipendente dalla velocità.

Il sistema tre è analogo al sistema due a meno di un cambio di coordinate. Quindi in queste due situazioni la forza è solamente elettrica.

**Analisi della quarta configurazione.** [immagine] La prima configurazione è pari alla quarta configurazione considerato  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$ . Pertanto, nel riferimento  $O$  si ha

$$\vec{E} = E_z \hat{u}_z = E_{\perp} \hat{u}_z, \quad \vec{F} = q E_{\perp} \hat{u}_z.$$

La forza è solamente elettrica. Nel riferimento  $O'$  si ha

$$E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}, \quad F'_E = q E'_{\perp} = \gamma q E_{\perp}.$$

la forza elettrica è su di una carica esploratrice a riposo in  $O'$ . Dunque, la forza totale in  $O'$  è

$$F' = \frac{1}{\gamma} F = \frac{1}{\gamma} q E_{\perp} \hat{u}_z \neq F'_E.$$

Le due forze sono differenti, la cui differenza è data dalla forza magnetica

$$F'_B = F'_{\text{tot}} - F'_E = \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) qE_{\perp} = -\gamma\beta^2 qE_{\perp} = -qv \frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp}.$$

Si interpreta tale espressioni in termini di campo magnetico  $B$  diretto lungo  $y$  per cui

$$\vec{B} = -\frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp} \hat{u}_y.$$

Inoltre

$$\vec{F} = qv\hat{u}_x \times \left( -\frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp} \right) \hat{u}_y = -qv \frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp} \hat{u}_z = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

L'interazione, in un riferimento, tra un piano di cariche in moto, che è di fatto una corrente, con una carica in moto — configurazione che in un altro riferimento è puramente elettrostatica — si interpreta, in un riferimento in cui sono entrambi in moto, in termini di un campo magnetico che deriva dalla trasformazione del campo elettrico e possiede una struttura della forza pari a quella che si è introdotta con la forza di Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dunque, il campo magnetico è una manifestazione del campo elettrico in un altro sistema di riferimento.

In questo modo si rivela anche una parte della trasformazione dei campi elettromagnetici. Si mette in evidenza il fatto che i fenomeni magnetici sono prescritti e resi necessari dal principio di relatività e dall'invarianza della carica.

Si spinge il confronto oltre e si rende esplicita l'espressione della forza tenendo conto il valore del campo  $E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  e sapendo che il riferimento  $O'$  della configurazione quarta, che interpreta tali fenomeni in termini magnetici, attribuisce a tale campo l'intensità  $\vec{B} = \frac{\mu_0 k}{2}$  con  $k$  corrente di strato (o superficiale). Dunque, dall'espressione trovata per il campo magnetico segue

$$B = \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{v\gamma\sigma}{2c^2\varepsilon_0} \equiv \frac{\mu_0 k}{2}.$$

Si vuole che la descrizione fenomenologica che si è data dei fenomeni magnetici coincida con  $\frac{\mu_0 k}{2}$ . Si studia la corrente di strato. Si consideri una superficie di lato  $L$  con densità superficiale  $\sigma'$  e che si muove con velocità  $\vec{v}$ . Allora, il lato parallelo alla velocità è  $v dt$  e dunque la quantità di carica contenuta nella superficie passa attraverso il bordo perpendicolare la superficie nell'intervallo di tempo  $dt$ . [immagine] Quindi

$$I = d_t q = d_t (\sigma' L v dt) = L \sigma' v.$$

(manca un differenziale da qualche parte).

La corrente di strato è una corrente per unità di lunghezza, dunque

$$k = \frac{I}{L} = \sigma' v.$$

Si utilizza  $\sigma'$  perché l'osservatore che interpreta il fenomeno come magnetico è  $O'$  cioè quello che vede il piano e la carica muoversi. Mentre,  $\sigma$  la densità di carica è nel riferimento in cui le sorgenti sono fisse. Nel riferimento comovente, la densità di carica è minima, quindi

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\gamma}.$$

pertanto

$$B = \frac{v(\gamma\sigma)}{2c^2\varepsilon_0} = \frac{v\sigma'}{2c^2\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 k}{2}.$$

Tramite tale trasformazione si ha il campo magnetico misurato dall'osservatore  $O'$  purché si abbia

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} \implies c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Il principio di relatività non solo prescrive l'insorgenza dei fenomeni magnetici, ma anche che le costanti  $\mu_0$  ed  $\varepsilon_0$  siano legate tra loro tramite la velocità della luce. Tale uguaglianza è stata storicamente trovata da Maxwell che osservò come nelle soluzioni ad onde delle equazioni del campo elettromagnetico compare una velocità di propagazione.

**Esercizio.** Si considerino due cariche puntiformi in moto con stessa velocità  $\vec{v}$  a distanza  $d$  in un riferimento  $O$ . Si trovi l'interazione tra le due cariche. Il meccanismo è mettersi nel riferimento solidale  $O'$  con le cariche e trasformare nel sistema  $O$  per cui si ha:

$$F_E = \gamma q E_\perp$$

$$F_{\text{tot}} = \frac{1}{\gamma} q E_\perp.$$

## Lecture 22

lun 29 nov  
2021 13:30

In alcune configurazioni particolari, il campo magnetico si può interpretare come una manifestazione della forza elettrica. Si interpretano gli esperimenti di Ørsted, Biot-Savart ed Ampère alla luce dei risultati fin'ora ottenuti. Si studia l'interazione tra correnti e cariche in moto. Ci si pone nel riferimento in cui la carica è fissa — la forza è solo elettrica — e poi si utilizzano le trasformazioni per tornare al riferimento del laboratorio e si studia cosa succede alla forza. Si sa

$$\begin{cases} \vec{F}'_\perp = \frac{1}{\gamma} \vec{F}_\perp \\ F'_\parallel = F_\parallel \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}'_\perp = \gamma \vec{E}_\perp \\ E'_\parallel = E_\parallel \end{cases}.$$

questo vale per  $\vec{B} = 0$ . (Il primato indica il riferimento in moto relativo).

**Carica e filo.** Si sceglie una configurazione semplice. [immagine] Si consideri un filo metallico attraversato da una corrente  $I = v_0 \lambda_0$ : gli elettroni sono in moto con una velocità  $\vec{v}_0$  rispetto al riferimento del laboratorio,  $O$ . Mentre le cariche positive sono fisse. Si sceglie il piano  $xy$  tale che contenga una carica  $q$  con velocità  $\vec{v}$  lungo l'asse  $x$ . Le grandezze sono

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = v_0 \hat{u}_x \\ \vec{v} = v \hat{u}_x \end{cases}.$$

Inoltre, nella configurazione del laboratorio, il filo è neutro: una carica statica non interagisce in modo elettrostatico con la corrente. Un filo neutro implica che le densità di carica lineica dovute ai cationi ed agli elettroni sono uguali ed opposte:  $\lambda_\pm = \pm \lambda_0$ .

Il riferimento  $O$  è quello proprio dei cationi, ma non quello degli elettroni perché sono in moto. Nel riferimento proprio degli elettroni, la densità di carica degli elettroni è diversa da  $\lambda_0$  e vale  $\lambda_e = -\frac{\lambda_0}{\gamma_0}$  perché nel riferimento proprio le lunghezze sono massime e le densità sono minime; dove

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}.$$

è il fattore di Lorentz necessario per spostarsi nel riferimento proprio degli elettroni e quindi deve essere associato alla loro velocità.

Nel riferimento  $O'$  in cui  $q$  è a riposo si hanno solo forze elettrostatiche. Il riferimento  $O'$  si muove con  $q$  a velocità  $\vec{v}_{OO'} = \vec{v}$  e, quindi, le cariche positive si muovono con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}$  ed hanno densità di carica dovuta al moto relativo pari a

$$\lambda'_+ = \frac{dq'}{dx'} = \gamma \frac{dq}{dx} = \gamma \lambda_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Gli elettroni si muovono con una composizione delle velocità  $\vec{v}_0$  e  $-\vec{v}$ :

$$\vec{v}'_0 = \frac{\vec{v}_0 - \vec{v}}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} \implies \beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta \beta_0}.$$

La densità degli elettroni in questo nuovo riferimento  $O'$  è

$$\lambda'_- = \gamma'_0 \lambda_e = \gamma'_0 \frac{\lambda_0}{\gamma_0} \neq \lambda'_+.$$

Nel riferimento  $O'$ , il filo ha densità di carica non nulla e quindi genera un campo elettrico:  $\lambda' \neq 0$ . Si ha un campo elettrico in  $O'$ :

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}.$$

Si trova l'espressione completa di  $\lambda'$  e per farlo si trova  $\gamma'_0$ . Infatti

$$\begin{aligned} \gamma'_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta'_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\beta_0 - \beta)^2}{(1 - \beta\beta_0)^2}}} = \frac{1 - \beta\beta_0}{\sqrt{1 - 2\beta\beta_0 + (\beta\beta_0)^2 - \beta_0^2 + 2\beta\beta_0 - \beta^2}} \\ &= \frac{1 - \beta\beta_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_0^2)}} = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0). \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lambda'_- = \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} \lambda_0 = \gamma(1 - \beta\beta_0) \lambda_0.$$

La densità che si cerca è

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \gamma\lambda_0 - \gamma(1 - \beta\beta_0)\lambda_0 = \gamma\beta\beta_0\lambda_0 > 0.$$

Si ha un filo con densità di carica positiva nel riferimento  $O'$  solidale con la carica. Se questa ha lo stesso segno del filo allora sente una forza repulsiva; attrattiva altrimenti. Tale forza è trasversa rispetto alla direzione delle trasformazioni, perché il campo elettrico del filo risulta essere

$$E'_\perp = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}.$$

ed è diretto radialmente a partire dal filo. Esso è un campo trasverso rispetto la direzione del moto. Dunque, si ha

$$F'_\perp = qE'_\perp.$$

Si ritorna nel riferimento del laboratorio e si ha

$$F_\perp = \frac{1}{\gamma} F'_\perp = q \frac{\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} = \frac{qv(v_0\lambda_0)}{c^2\epsilon_0 2\pi y} = qv \left( \frac{I}{c^2\epsilon_0 2\pi y} \right).$$

e, per una carica positiva, la forza è diretta come  $-\hat{u}_y$ , con  $\vec{v} = v\hat{u}_x$ . Quindi, si interpreta il termine tra parentesi come un campo magnetico:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2\epsilon_0} \frac{I}{2\pi y} \hat{u}_z = \frac{1}{c^2\epsilon_0} \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\theta.$$

(si sostituisce  $y$  con  $r$  perché l'asse  $y$  è un asse trasverso qualunque e dunque la direzione ortogonale risulta essere  $\theta$ ). Ricordando  $\hat{u}_x \times \hat{u}_z = -\hat{u}_y$ , si ottiene nuovamente

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

In questo si ha anche una convenzione di segno. Inoltre, si ha  $c^2\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0}$ . Si ottiene il campo di Biot-Savart. Il campo stabilito per via empirica coincide con il campo che si trova in un sistema di questo tipo partendo dalla configurazione elettrostatica, supponendo valido il principio di relatività e valida l'invarianza della carica.



**Fili paralleli.** [immagine]

Si considerino due fili paralleli. Nel laboratorio, in uno le cariche negative si muovono con velocità  $\vec{v}_1$  a densità  $\lambda_1$  e nel secondo filo le cariche negative si muovono con  $\vec{v}_2$  a densità  $\lambda_2$ . Si studia la forza tra i due fili. Sempre nel laboratorio, essi sono neutri, quindi le cariche positive non risentono l'effetto di alcuna forza a causa dell'altro filo. Dunque, l'unica interazione possibile è sulle cariche in moto. Ci si pone in un riferimento in cui i cationi sono in moto, ma si ignorano perché operando la trasformazione verso il laboratorio, si sa già essere fissi e non agisce alcuna forza su loro. Quindi si calcola solamente la forza sugli elettroni.

Ci si pone nel riferimento solidale con gli elettroni del filo primo. Sugli elettroni, in questo riferimento fissi, agisce il campo elettrico dovuto alla densità di carica degli elettroni dell'altro filo pari a:

$$\lambda'_2 = \gamma_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_2.$$

Quindi, la forza che agisce sulla carica del filo primo dovuta a tale densità è

$$F' = \frac{\gamma_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} q_1.$$

con  $r$  distanza tra i due fili. Questa espressione è il campo dovuto al filo secondo per la carica degli elettroni nel filo primo. Ritornando nel riferimento del laboratorio si ha

$$F = \frac{\beta_1 \beta_2 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1 l}{r} = \frac{1}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{v_1 \lambda_1 v_2 \lambda_2}{r} l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} l.$$

con  $q_1 = \lambda_1 l$ , per  $l$  un tratto di filo. Si ottiene l'espressione di Laplace per l'interazione tra due fili.

Il campo magnetico non è una manifestazione separata dai fenomeni magnetici anche se non è possibile descrivere tutti i fenomeni solo in forma elettrica.

**Filo percorso da corrente.** [immagine]

Si consideri un filo percorso da corrente come nella situazione precedente. Si sceglie una carica  $q$  con una velocità  $\vec{v}$  perpendicolare verso il filo. Il caso generale si può ridurre ad uno con velocità parallela e velocità perpendicolare. Nel filo, le cariche negative si muovono con velocità  $\vec{v}_0$ , mentre i cationi sono fissi.

Nel riferimento della carica, il filo si muove verso la carica con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}$  e gli elettroni si muovono con una velocità  $\vec{v}_0 - \vec{v}$ . In tale riferimento, si ha il campo elettrico di una carica in moto. Si sa che tale campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{\frac{3}{2}}}.$$

l'intensità del campo non è uniforme nell'angolo. Prendendo coppie di elettroni simmetrici rispetto alla carica, l'angolo formato a destra è maggiore rispetto a quello formato a sinistra. Dunque, il campo a destra è maggiore di quello a sinistra; pertanto la risultante ha una direzione verso destra.

Tuttavia, nel riferimento  $O$ , con il campo magnetico diretto come  $z$ , ci si aspetta che la forza sia parallela al filo. Infatti, scomponendo la forza ottenuta in componenti parallela  $\vec{F}_{\parallel}$  e perpendicolare  $\vec{F}_{\perp}$  alla velocità con cui si è fatta la trasformazione tra i riferimenti. La forza che si è calcolata è quella dovuta agli elettroni; tuttavia, agisce anche una forza dovuta ai cationi: dato che essi sono fissi, si sviluppa una forza la cui intensità è uguale ed opposta alla componente parallela della forza prodotta dagli elettroni del filo. Questo perché il filo è neutro nel riferimento del laboratorio e dato che ci si sposta ortogonalmente al filo, non si ha una contrazione della lunghezza, quindi le densità di carica positiva e negativa sono le stesse nei due riferimenti. Quindi, la forza totale è dovuta al fatto che il campo elettrico a destra ed a sinistra non è uguale per le cariche in moto.

La descrizione efficace tramite il campo magnetico è equivalente a quanto visto. In conclusione,

per l'invarianza della carica e per il principio di relatività, l'espressione della forza in un riferimento qualunque può essere rappresentata come

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

dove il primo termine è il campo definito operativamente per una carica esploratrice fissa, mentre il secondo è il termine residuo quando la carica esploratrice è in moto.

Nelle sorgenti reali, il filo dev'essere chiuso (perché finito), dunque la velocità cambia direzione e quindi non esiste mai un riferimento in cui si hanno a riposo tutte le cariche contemporaneamente: è necessario lavorare con un campo magnetico. La manifestazione di un fenomeno come elettrico o magnetico dipende dal riferimento.

A conclusione di quest'analisi, esistono configurazioni elettrostatiche, esistono configurazioni magnetostatiche, ma di fatto esiste sempre e solo un campo elettromagnetico in cui le componenti elettriche e magnetiche sono accoppiate e dipendono dal sistema di riferimento.

## Lecture 23

mar 30 nov  
2021 13:30

Si estende l'analisi e si vede come trasforma il campo magnetico. Si considera una configurazione in cui si ha anche campo magnetico. [immagine] Si considera il riferimento del laboratorio in cui sono presenti due piani infiniti con densità di carica  $\sigma$  del laboratorio uguale ed opposta. I piani sono in moto con velocità costante  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{u}_x$ : essa è anche la velocità delle cariche nel riferimento del laboratorio. Si ha un campo elettrico

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

lo spostamento del piano non influisce sulla disposizione delle cariche. [rivedi]

Inoltre, a causa del moto si ha una densità di corrente

$$J = d_t q = d_t(\sigma L v_0 dt) \implies \frac{I}{L} = \sigma v_0 \equiv K.$$

Quindi il campo magnetico dentro è rivolto verso l'alto, mentre fuori si ha campo nullo:

$$B_z = \mu_0 K = \mu_0 v_0 \sigma.$$

Si vogliono trovare i campi in un riferimento in moto relativo che non è il riferimento proprio. In questi la densità di carica è

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}.$$

Si sceglie un riferimento  $O'$  in moto con velocità  $\vec{v} = v \hat{u}_x$  e si studiano le trasformazioni. In particolare, si studiano le componenti trasverse dei campi. Si trova la densità delle cariche e delle correnti del nuovo sistema, per poi usare le leggi che legano i campi alle sorgenti.

Nel nuovo riferimento le sorgenti sono in moto con una velocità

$$\vec{v}'_0 = \frac{\vec{v}_0 - \vec{v}}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} \iff \beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0}, \quad \gamma'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2_0}} = \gamma_0 \gamma (1 - \beta\beta_0).$$

Dunque la densità areica in  $O'$  risulta essere

$$\sigma' = \gamma'_0 \frac{\sigma}{\gamma_0} = \gamma(1 - \beta\beta_0)\sigma.$$

Si studia la densità di corrente di strato

$$K' = v'_0 \sigma' = \beta'_0 c \sigma' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \gamma(1 - \beta\beta_0) c \sigma = \gamma(\beta_0 - \beta) c \sigma.$$

Si studia il campo elettrico. Per Gauss risulta

$$E'_y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \gamma(1 - \beta\beta_0) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_y - \gamma\beta \frac{v_0\sigma}{\varepsilon_0 c} = \gamma E_y - \gamma\beta c B_z.$$

Si studia il campo magnetico. Si considera un circuito di Ampère che abbraccia le due regioni di una lastra. Da un riferimento all'altro, la simmetria del campo rimane, cambia solamente l'intensità della corrente, perché cambia la velocità della corrente. Quindi

$$B'_z = \mu_0 K' - \mu_0 \gamma (\beta_0 - \beta) c v = \mu_0 c \gamma \frac{v_0}{c} \sigma - \mu_0 c \gamma \beta \sigma = \gamma B_z - \gamma \frac{\beta}{c} E_y.$$

Riassumendo si ha

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y - \gamma\beta c B_z \\ c B'_z = \gamma c B_z - \gamma\beta E_y \end{cases}.$$

Si mescolano  $B_z$  e  $E_y$  passando dall'uno all'altro riferimento. [rivedi]

Si consideri una configurazione come prima, ma con i campi paralleli a  $xy$ . Nel riferimento del laboratorio si ha

$$\begin{cases} E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ B_y = -\mu_0 K \end{cases}.$$

Dunque, per il campo elettrico

$$\begin{cases} E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma(1 - \beta\beta_0) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_z + \gamma\beta c B_y \\ B'_y = \mu_0 K' = \gamma B_y + \gamma \frac{\beta}{c} E_z \end{cases}.$$

Per le componenti ortogonali al moto relativo si ha

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y - \gamma\beta c B_z \\ E'_z = \gamma E_z + \gamma\beta c B_y \end{cases} \quad \begin{cases} c B'_y = \gamma c B_y + \gamma\beta E_z \\ c B'_z = \gamma c B_z - \gamma\beta E_y \end{cases}.$$

[rivedi] Si studia la componente longitudinale di  $\vec{B}$ . [immaginare] Si consideri un solenoide infinito. Nel riferimento del laboratorio si ha

$$\vec{B} = B_x \hat{u}_x, \quad B_x = \mu_0 \frac{N}{L} I.$$

Si consideri un riferimento  $O'$  in moto relativo con velocità  $\vec{v}_{OO'}$  lungo l'asse  $x$ . Il numero  $N$  è invariante. La lunghezza  $L$  è longitudinale rispetto lo spostamento, dunque si contrae  $L' = \frac{L}{\gamma}$ .

La corrente  $I' = d_t q' = \frac{dq}{\gamma dt} = \frac{1}{\gamma} I$ . Dunque, per Ampere si ha

$$B'_x = \mu_0 \frac{N}{L'} I' = \mu_0 \frac{N}{L} I = B_x.$$

Dunque, in questo caso il campo magnetico risulta essere invariante. Dunque le componenti sono

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x.$$

Si riscrivono le componenti in forma compatta:

$$E_x = E_{\parallel}, \quad E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z = \vec{E}_{\perp}.$$

ed analogamente per  $\vec{B}$ . Pertanto,

$$E'_y \hat{u}_y + E'_z \hat{u}_z = \gamma(E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z) + \gamma\beta c(-B_z \hat{u}_y + B_y \hat{u}_z) = \gamma \vec{E}_{\perp} \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}.$$

Quando la velocità è lungo  $x$  si ha che la componente  $z$  del campo magnetico va a finire sulla componente  $y$  del campo elettrico e ciò è il prodotto vettoriale. Dunque, la forma compatta risulta essere

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \gamma E_{\perp} + \gamma(\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ B'_{\perp} = \gamma B_{\perp} - \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{cases}.$$

Questo è un tensore.

Si studia il campo di una carica puntiforme  $q$  in moto con velocità  $\vec{v}$  nel riferimento del laboratorio. Si è imparato a calcolare il campo da correnti stazionarie tramite Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Molti hanno la tentazione di affermare che  $i d\vec{l} = d_t q d\vec{l} = dq d_t \vec{l} = dq \vec{v}$ , ma isolando una carica non valgono più le ipotesi di partenza per cui si ottiene l'equazione precedente.

In questa configurazione si trova il campo elettrico nel riferimento solidale con la carica e poi si trasforma al riferimento del laboratorio. Nel riferimento solidale si ha

$$\begin{cases} \vec{B} = 0 \\ E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \end{cases}.$$

Trasformando nel riferimento del laboratorio in moto con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}$  si ha

$$\begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ B'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp} + \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{cases}.$$

Dato che  $\vec{v} \times \vec{E}_{\parallel} = 0$  si ha

$$\vec{B}' = \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}) = \gamma \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_r}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Questa espressione è identica a Biot-Savart dove si identifica  $i d\vec{l}$  con  $q\vec{v}$  a meno del fattore  $\gamma$ .

Esiste un riferimento in cui si ha solo uno dei due campi. [rivedi]

Si può trovare una relazione che collega  $B_{\text{lab}} = B_{\text{lab}}(E_{\text{lab}})$  anche se potrebbe non essere conveniente.

**Caso notevole.** Si studia un caso notevole in cui esiste un sistema di riferimento inerziale in cui  $\vec{B} = 0$ . In un altro qualunque riferimento in moto relativo si ha

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \gamma E_{\perp} + 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0 \\ B'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp} + \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{cases}.$$

per avere la carica con velocità  $\vec{v}$  bisogna avere il riferimento con velocità  $-\vec{v}$ . Quindi

$$\vec{B}' = B'_{\parallel} + B'_{\perp} = 0 + \frac{\vec{v} \times (E'_{\parallel} + \gamma E'_{\perp})}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}').$$

questa relazione insegna che il campo magnetico dovuto ad una carica in moto è perpendicolare alla velocità della carica ed al campo elettrico da essa generata.

Lo stesso si può fare partendo dalla configurazione in cui

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{B} \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} E'_{\parallel} = 0 \\ E'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp} - \gamma(\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) = -\vec{v} \times (\vec{B}_{\parallel} + \gamma \vec{B}_{\perp}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp} + 0 \end{cases}.$$

quindi

$$\vec{E}'_{\perp} = -\vec{v} \times \vec{B}'.$$

la velocità relativa risulta essere  $v = \frac{E}{B}$ , questo ricorda il moto cicloide: due campi sono mutualmente ortogonali.

**Paradosso.** Si consideri una carica  $q_1$  in moto con una velocità  $\vec{v}_1$ ; e una carica  $q_2$  fissa rispetto al riferimento del laboratorio. Si vuole calcolare la forza su  $q_2$  dovuta ai campi di  $q_1$  e viceversa. La carica prima genera sia un campo elettrico che magnetico perché è in moto. La seconda carica genera solamente un campo elettrico. Data l'espressione generale della forza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

[rivedi] tra le due cariche si ha solamente interazione elettrica. Infatti, la forza sulla carica seconda dovuta alla prima è

$$\begin{cases} F_{2,1} = q_2 E_1 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-\beta^2}{r^2} \\ F_{1,2} = q_1 E_2 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{cases}.$$

Dunque  $F_{1,2} \neq F_{2,1}$ . Per il principio di relatività vale il reciproco, ma si è persi il principio di azione-reazione: in un sistema isolato, la quantità di moto delle forze interne è nullo. Il problema è che il sistema non è solamente definito da delle due cariche: esistono anche i campi. Esiste una quantità di moto associata ai campi (ai quali si è già associata un'energia, e si è già trovata una radiazione elettromagnetica).[rivedi] Si ha anche un momento angolare dovuto ai campi.

## Lecture 24

lun 13 dic  
2021 13:30

## 11 Induzione elettromagnetica

Si studiano fenomeni con campi variabili. [r] La carica, sorgente del campo elettrico, induce carica nei conduttori; Faraday si chiede se le correnti, sorgenti del campo magnetico, inducono correnti nei conduttori. La risposta è negativa. Correnti stazionarie non inducono correnti, ma correnti variabili invece sì.

Si ha un'evidenza sperimentale divisa in tre fenomeni

- 1 per  $\vec{B}$  stazionario si osservano correnti indotte in un circuito in moto nel campo o che si deforma;
- 2 un circuito solidale con il riferimento del laboratorio e le sorgenti del campo magnetico in moto (cioè il campo non è stazionario)
- 3 si ha un circuito fisso, delle sorgenti fisse, ma il campo magnetico è variabile.

Tali tre leggi sono state riassunte in una relazione fondamentale da Faraday. Per sostenere una corrente si ha bisogno di una forza elettromotrice indotta:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

(faraday, neumann, lenz=??)

il sistema si oppone al cambiamento del flusso. Per arrivare a tale legge generale si analizzano le configurazioni precedenti facendo vedere i fenomeni che emergono sulla base di quanto è noto.

La forza elettromotrice è definita come

$$f_{em} = \mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

dove  $\vec{f}$  è la forza su carica unitaria. La superficie del circuito è una qualunque che abbia come bordo il circuito. Per correnti stazionarie si ricorda che la configurazione del sistema è una batteria a cui è collegato un circuito elettrico con una combinazione di resistenze e si ha

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}_0 + \oint \vec{f}_S \cdot d\vec{s}.$$

con  $\vec{f} = \vec{E} + \vec{f}_S$  con l'ultimo termine indica le forze dovute alle sorgenti (come la batteria). Per correnti stazionarie, il campo elettrico è stazionario ed è conservativo. Inoltre, tipicamente  $\vec{f}_S$  è confinata all'interno della batteria:

$$\vec{f}_S = \begin{cases} 0, & \text{sul circuito} \\ \neq 0, & \text{nella batteria} \end{cases}.$$

per cui, tipicamente si ha

$$\oint_c \vec{f}_S \cdot d\vec{s} = \int_-^+ \vec{f}_S \cdot d\vec{s} = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta V_{\text{ai morsetti}}.$$

dato che il campo elettrico è conservativo, vale la penultima uguaglianza. Nella situazione nuova, dove non si ha una batteria, risulta

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

**Situazione 1.** [immagine] Si analizza la prima situazione. Si consideri la situazione con un campo magnetico uniforme  $\vec{B} = B\hat{u}_z$  ed un conduttore aperto costituito da una sbarra metallica allineata lungo  $x$  messa in moto con una velocità  $\vec{v} = v\hat{u}_y$ . Il campo elettrico è nullo. In quanto la sbarra è un conduttore, al suo interno si hanno delle cariche libere che sono soggette ad una forza:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{u}_x.$$

Si ha una forza che tende a spostare le cariche come  $+x$ . Ad un certo punto si ha un eccesso di carica positiva da  $+x$  ed una carica negativa all'estremo opposto. Si ha una condizione di equilibrio per

$$q\vec{E}_{\text{indot}} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \iff \vec{E}_{\text{indot}} = -q\vec{v} \times \vec{B} = -vB\hat{u}_x.$$

Compare un campo elettrico anche all'esterno della sbarra. Da lontano si ha un campo di dipolo.

**Situazione 2.** [r]

Si considera la stessa situazione precedente ma ci si pone in un riferimento solidale con la sbarra, cioè con velocità  $\vec{v}_{SS'} = \vec{v}$ . Si hanno  $\vec{B}'$  e  $\vec{E}'$  non nulli. Si sa che

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0.$$

Inoltre si ha

$$\left\{ E'_{\perp} = \cancel{\gamma E_{\perp}} + \gamma \vec{v} \times \vec{B}_{\perp} \implies E' = \vec{v} \times \vec{B}' B'_{\perp} = \gamma B_{\perp} - \cancel{\gamma \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}}{c^2}} \right. .$$

la forza su carica unitaria risulta essere

$$\vec{f}' = \vec{E}' + \vec{v}_q \times \vec{B}', \quad v_q = 0.$$

si ha solamente forza elettrica sulle cariche: essere si redistribuiscono in modo da rendere nullo il campo elettrico. Compare una distribuzione di carica tale per cui nel conduttore si ha

$$\vec{E}'_{\text{condut}} = \vec{E}' + \vec{E}_{\text{indot}} = 0 \iff \vec{E}'_{\text{indot}} = -\vec{E}' = -\vec{v} \times \vec{B}' = -vB'\hat{u}_x.$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità relativa tra i due riferimenti. Dunque, l'osservatore  $O'$  vede un campo elettrico indotto in direzione  $-\hat{u}_x$  all'interno della sbarra che va a sommarsi al campo  $\vec{E}'$  presente in tutto lo spazio, di modo che all'interno del conduttore ci sia campo elettrico totale nullo. L'interpretazione del fenomeno è diversa, tuttavia rimane identico il fatto dell'accumulazione della carica ai due estremi ed alla presenza di un campo elettrico indotto definito dalla relazione  $-vB'\hat{u}_x$ .

In moto relativo, i fenomeni osservati e le relazioni sono gli stessi anche se [r]

**Situazione 3.** [r] Si consideri un circuito rigido: un campo magnetico generato da un solenoide di lunghezza finita. Si considera un circuito rettangolare di dimensioni  $a$  e  $b$ , con campi magnetici  $B_1$  e  $B_2$  sui lati di lunghezza  $a$  per cui  $B_2 < B_1$ .

Si trascina il circuito con una velocità  $\vec{v} = v\hat{u}_y$ . Si ritorna alla situazione uno. Le cariche si separano e perché soggette ad una forza di Lorentz  $\vec{F}_1 = -qvB_1\hat{u}_x$  e sull'altro lato si ha  $\vec{F}_2 = -qvB_2\hat{u}_x$ .

I tratti lungo  $b$  non si ha una distribuzione di carica [r]

Tuttavia, le cariche su di un estremo non sono in equilibrio, ma migrano e si genera una corrente indotta che scorre in senso antiorario. Continuando a tirare il circuito a velocità costante, si vuole trovare la forza elettromotrice [r].

Ricordando la definizione di forza elettromotrice segue

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

in tale configurazione si ha  $\vec{E} = 0$ . Dividendo il circuito in quattro sezioni si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^a (\vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot d\vec{s} + \int_a^0 (\vec{v} \times \vec{B}_2) \cdot d\vec{s} + \int_0^b (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_0) \cdot d\vec{s} + \int_b^0 (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_0) \cdot d\vec{s} \\ &= v(B_1 - B_2)a. \end{aligned}$$

essa è sempre diversa da zero per  $B_1 \neq B_2$ . [r]

Si ha una forza elettromotrice associata al lavoro della forza di Lorentz su carica unitaria. Ma la forza di Lorentz non compie lavoro: essa è un tramite. Il lavoro è compiuto dalla forza esterna che ~~trascina~~  
immagine il circuito.

Infatti, dopo un certo intervallo di tempo  $dt$ , il circuito si è spostato in una nuova posizione. Gli elettroni si muovono all'interno del circuito con velocità

$$\vec{v}_q = v_{\text{deriva}}\hat{u}_x + v\hat{u}_y.$$

quindi, la forza di Lorentz risulta essere

$$\vec{F}_B = q\vec{v}_q \times \vec{B} = -qv_D B_1 \hat{u}_y + qv B_1 \hat{u}_x.$$

si hanno due componenti della forza. Quella lungo il filo determina il moto delle cariche, l'altra determina la resistenza al trascinamento. Per avere velocità costante, la forza esterna dev'essere uguale a quella che si oppone. Si calcola il lavoro della forza esterna come

$$W = F_{\text{ext}} \Delta y = qv_D (B_1 - B_2) \Delta y.$$

Si immagini di osservare tale circuito per un intervallo di tempo  $\Delta t$  tale per cui gli elettroni percorrono una distanza  $a$ :

$$a = v_D \Delta t, \quad \Delta y = v \Delta t \implies \frac{a}{\Delta y} = \frac{v_D}{v} \iff v_D \Delta y = av.$$

dunque, nella relazione precedente si ha

$$f = \frac{W}{q} = v_D \Delta y (B_1 - B_2) = va(B_1 - B_2).$$

la forza di Lorentz non lavora: essa è solamente un tramite.

Tale espressione, per la configurazione studiata, è pari alla variazione del flusso del campo magnetico:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

## Lecture 25

mar 14 dic  
2021 13:30

Si è descritta la situazione con il campo magnetico stazionario. Esiste una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

nel caso in cui  $\vec{E} = 0$  vale la seconda uguaglianza. Si traduce tale risultato in uno più generale. Quanto ottenuto si può esprimere come la variazione di flusso attraverso una superficie  $S$  che insiste sul circuito:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

la superficie può essere qualunque perché vale

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

**Circuito in moto, che si deforma.** Si consideri un circuito in moto che si può spostare e deformare. [immagine] La posizione sotto è raggiunta ad un tempo  $t + dt$ . Si considera un campo magnetico  $\vec{B}$  stazionario. Si calcola la variazione di flusso

$$d\Phi = \Phi_{S(t+dt)}(\vec{B}) - \Phi_{S(t)}(\vec{B}).$$

il campo magnetico non dipende dal tempo:  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ . Invece di considerare la superficie piatta del circuito inferiore, si prende quella costituita dal bordo tra la superficie che collega i due circuiti e la superficie piatta del circuito sopra. Dunque

$$d\Phi = \Phi_{S(t)}(\vec{B}) + \Phi_{\Delta S}(\vec{B}) - \Phi_{S(t)}(\vec{B}) = \Phi_{\Delta S}(\vec{B}) = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

per ogni punto si ha una velocità  $\vec{v}$  ed un certo tratto  $d\vec{l}$  lungo il circuito iniziale. Il circuito si sposta di  $d\vec{s} = \vec{v} dt$ ; la superficie risulta essere  $da = dl v dt \sin \alpha$  da cui  $d\vec{a} = \vec{v} dt \times d\vec{l}$ . [immagine] Pertanto

$$d\Phi = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_c \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \times d\vec{l}).$$

si ricorda una proprietà del prodotto vettoriale

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \equiv \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}).$$

pertanto

$$d\Phi = \oint_c d\vec{l} \cdot (\vec{B} \times \vec{v} dt).$$

dato che il circuito è iniziale e il campo magnetico è stazionario, allora l'integrale non dipende dal tempo:

$$d_t \Phi = - \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{l}.$$

in generale  $f$  include anche il campo elettrico, ma in questo caso esso è assente e si ha solamente la forza di Lorentz.

**Esempio.** [immagine] Si consideri un circuito rigido, un campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{u}_z$  uniforme, una spira quadrata di lato  $a$  il cui normale forma un angolo  $\theta$  rispetto l'asse  $z$  verticale. Si pone in rotazione tale spira con una velocità angolare  $\omega$ .

Si ha

$$\Phi_S(\vec{B}) = Ba^2 \cos \theta, \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t.$$

dunque

$$d_t \Phi = -\omega Ba^2 \sin(\theta_0 + \omega t).$$



questo è un modo semplice di generare una forza elettromotrice tramite un'azione meccanica. Essa non è una corrente continua, dato  $\mathcal{E} = -d_t\Phi$  segue che la corrente ha un andamento sinusoidale. Quando il normale della spira è allineata con il campo, si ha flusso massimo, ma la variazione è nulla.

La corrente indotta che gira nel campo magnetico, crea a sua volta un campo magnetico il cui flusso compensa la variazione di flusso associata al campo esterno. Il sistema reagisce aggiungendo un campo di modo che il campo totale rimane costante.

**Esempio.** Vedi idex. Si considerino due binari che hanno un contatto con una sbarra che viene trascinata con velocità  $\vec{v}$ . L'area del circuito cambia.

**Esempio.** [immagine] Dinamo di Faraday. La variazione di flusso risulta essere difficile da conoscere. Il circuito risulta passare attraverso il disco. Il campo magnetico è uniforme ed ortogonale al normale della superficie del circuito. Per la perpendicolarità il prodotto scalare tra il campo e la normale risulta essere nulla. Tuttavia, il disco fornisce la forza elettromotrice:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_0^R (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

L'unico tratto che contribuisce all'integrale va dal centro del disco al bordo. Le cariche si muovono con una velocità  $v = \omega r$ . Quindi

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega R B dr = \frac{1}{2} \omega r^2 B.$$

**Sorgenti in moto.** Si consideri quanto detto precedentemente sulla sbarra metallica quando le sorgenti del campo magnetico sono in moto. [immagine]

Si consideri il circuito costituito da una spira quadrata di dimensione  $a$  che si muove rispetto ad un ... [r]

dato che il circuito è fisso segue che  $B'$  non ha effetto, mentre

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'.$$

quindi segue

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{s}.$$

Le cariche si muovono con una velocità di deriva lungo il filo, ma la forza di Lorentz è inefficace perché è perpendicolare al filo. Sostituendo  $\vec{E}'$  nell'integrale si ottiene l'espressione trovata precedentemente:

$$\mathcal{E} = \int_0^a \vec{E}'_1 \cdot d\vec{s} + \int_0^a \vec{E}'_2 \cdot d\vec{s} = v(B'_1 - B'_2)a = \mathcal{E}'.$$

[r] Questa espressione della forza elettromotrice è ancora una volta la variazione del flusso. Pertanto, l'osservatore  $S'$  ottiene

$$\mathcal{E}' = -d_t\Phi'.$$

tale legge rimane uguale in forma. Il circuito è fisso e cambia il campo magnetico. [r]

**Campo magnetico variabile.** Si ha un'altra configurazione. Si consideri il solenoide ed il circuito fissi, ma si cambia l'intensità della corrente del solenoide e quindi si ha un campo magnetico variabile.

Si ha un risultato sperimentale: tutte le volte che la variazione locale di campo magnetico sono identiche al caso precedente, la corrente indotta misurata è identica. Dunque, la legge vale indipendentemente dalla causa della variazione del campo.

Faraday conclude che

$$\mathcal{E} = -d_t\Phi.$$

è una legge generale che vale indipendentemente dalla storia delle sorgenti. In termini formali, per ogni linea chiusa  $c$  stazionaria, se il campo magnetico  $\vec{B}$  cambia nel tempo allora vale tale relazione, a prescindere da come esso è cambiato. La relazione diventa

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad d_t \Phi = d_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

La prima relazione afferma che il campo elettrico in configurazioni con campi magnetici variabili, non è conservativo. [r] In generale vale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

dove  $\vec{E}$  può essere la somma di un campo statico ed un campo indotto, perché l'integrale su di una linea chiusa del primo è nulla.

Tale relazione si può tradurre in una locale. In generale

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\text{Stokes}) \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

se il campo è statico, allora la derivata può entrare nel segno di integrale, e dunque

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\partial_t (\vec{B} \cdot d\vec{a}).$$

se la superficie è abbastanza piccola allora la derivata non dipende dall'elemento di superficie e quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}.$$

Questa è la legge di Faraday in forma differenziale. Il campo elettrico è perpendicolare alla direzione del campo magnetico, almeno localmente.

**Esempio.** [immagine] Si consideri un campo magnetico [r]

$$\vec{B} = B \cos(\omega t) \hat{u}_z.$$

allora

$$\Phi(B) = \pi r^2 B \cos(\omega t), \quad \mathcal{E} = \pi r^2 \omega B \sin(\omega t).$$

Per Faraday è dato che il campo magnetico è costante, dunque il campo elettrico ha simmetria cilindrica si ha

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oint_c d\vec{s} = E 2\pi r \iff E = \frac{r}{2} \omega B \sin(\omega t).$$

La discussione formale è stata fatta con i circuiti. Tuttavia, la legge vale a prescindere che ci sia effettivamente un circuito o meno.

Più avanti si vede che la legge di Faraday insieme ad un'altra, sono necessarie per affermare che esistono campi magnetici ed elettrici accoppiati. [r]

Si è vista la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

[r] il cui membro a sinistra è

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

[r] Per il caso generale con un campo magnetico variabile ed il circuito che si sposta, si tengono conto di entrambi gli effetti nell'integrale.

La forza elettromotrice è una differenza di potenziale, ma di solito tale differenza si associa ad un campo conservativo, dunque si parla di tensione elettrica. [r]

**Configurazioni pratiche.** Risulta utile ricavare delle grandezze per caratterizzare le configurazioni pratiche.

**Mutua induttanza.** [r] [immagine] Il flusso  $\Phi_{21}$ , generato da  $c_1$  su  $c_2$  [r]  
Si sa che

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

essa è proporzionale all'intensità di corrente. Il flusso risulta essere

$$\Phi_{21} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}.$$

la corrente dipende dal tempo e non dalle variabili di integrazione. Pertanto,  $\Phi_{21} \propto I_1$  con cui il termine di proporzionalità dipende solamente dalla geometria. Dunque

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1.$$

dove  $M_{21}$  è detta mutua induttanza e dipende solamente dalla geometria della configurazione. Si può associare un'unità di misura. Infatti

$$\mathcal{E}_{21} = -d_t \Phi_{21} = -M_{21} d_t I_1.$$

si suppone che i due circuiti siano in posizioni fisse. Questa è una relazione per ricavare la forza elettromotrice a partire dalla corrente. Le dimensioni dell'induttanza risulta essere

$$[M_{21}] = \frac{V \cdot s}{A} = H, \quad \text{detta Henry.}$$

Si può calcolare  $M_{12}$ . Il significato di tali coefficienti è analogo ai coefficienti di potenziale  $\varphi = PQ$ .

**Esempio.** Si considerino due anelli concentrici con raggi  $R_2 \ll R_1$ . Sull'anello esterno circola una corrente,  $I_1$ . Si vuole trovare la corrente indotta nell'anello interno associata a variazioni nella corrente  $I_1$ . [r]

Si calcola la corrente indotta. La mutua induttanza risulta essere

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi R_2^2 B_1}{I_1}.$$

dato che l'anello esterno è molto maggiore dell'anello interno, allora si suppone che in esso il campo magnetico sia costante:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R_1}.$$

pertanto si ha

$$M_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}.$$

dipende dalla geometria, in particolare da una lunghezza. Dunque, si può definire le unità di misura per  $\mu_0$ :

$$[\mu_0] = \frac{H}{m}.$$

Si può modificare l'anello considerando la spira esterna avvolta su se stessa con  $N_1$  avvolgimenti e  $N_2$  per la spira interna. Si ottiene

$$M_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} N_1 N_2.$$

La mutua induttanza per l'anello grande risulta più difficile perché il campo magnetico non è costante. In soccorso, si utilizza il teorema di reciprocità.

**Teorema.** di reciprocità. Per ogni coppia di circuiti qualunque  $[r]$  risulta  $M_{21} = M_{12}$ .

**Dimostrazione.** [immagine] Si considerino due circuiti  $c_1, c_2$ . Si può calcolare il flusso di  $\vec{B}$  ricorrendo al potenziale vettore. Infatti

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \implies \Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = (\text{Stokes}) = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Dunque, un tratto  $d\vec{l}_1$  su  $c_1$  genera un potenziale vettore su  $d\vec{l}_2$  di  $c_2$ . Si ricorda che

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} d\nu}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}}{r}.$$

la  $\vec{J} d\nu$  si traduce in  $I d\vec{l}$  perché si ha un circuito. Pertanto

$$\Phi_{S_2}(\vec{B}) = \oint_{c_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{c_2} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}.$$

La mutua induttanza risulta essere

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_2} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{21}} = M_{12}.$$

per calcolare  $M_{12}$  bisogna scambiare gli indici, ma sono tutti simmetrici, anche l'ordine degli integrali.

**Problema.** [immagine] problema dato l'anno scorso. Si consideri solenoide toroidale a sezione quadrata con un filo infinito per il centro. Facendo variare la corrente nel filo, si vuole trovare la corrente indotta nel solenoide; e viceversa. cfr idefix.

Il filo genera un campo che passa per il solenoide. Variando la corrente, allora si ha un flusso nel solenoide. Dunque

$$\Phi = \int_{S_{\text{toro}}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr h = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} h I \implies M_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}.$$

La corrente indotta nel solenoide toroidale risulta essere

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{M_{12}}{R} d_t I_{\text{filo}}.$$

Viceversa. Fuori dal toroide, il campo magnetico è nullo. Tuttavia, vale il teorema di reciprocità: infatti, il filo infinito si chiude all'infinito dunque la corrente che varia passa per la superficie e si ha mutua induttanza.

Il calcolo fatto del flusso vale per una sola spira. Per  $N$  spire basta moltiplicare per  $N$ .

## Lecture 26

Si è introdotta la mutua induttanza. Esiste un fenomeno più intricato: l'autoinduttanza, cambiare una corrente in un circuito induce un'altra corrente nel circuito stesso.

[immagine]

Si consideri un anello. Il campo magnetico generato risulta essere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Si può calcolare il flusso di tale campo attraverso la superficie dell'anello

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \cdot d\vec{a}.$$

mer 15 dic  
2021 13:30

Cambiando la corrente, cambia il flusso. Avendo corrente variabile, il flusso cambia. Si introduce l'autoinduttanza  $L$  definita come

$$L \equiv \frac{\Phi_{11}}{I_1}.$$

utilizzando la relazione tra la forza elettromotrice ed il flusso si sa che esiste una fem che agisce su tale circuito data da

$$\mathcal{E}_{11} = -\mathrm{d}_t \Phi_{11} = -L \mathrm{d}_t I_1.$$

con due anelli si ha che sul primo anello si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -\mathrm{d}_t \Phi = -\mathrm{d}_t (\Phi_{11} + \Phi_{21}) = -L_1 \mathrm{d}_t I_1 - M_{12} \mathrm{d}_t I_2 \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \mathrm{d}_t I_2 - M_{21} \mathrm{d}_t I_1. \end{aligned}$$

con più anelli il sistema si complica sempre più. Tipicamente, si vogliono costruire sistemi che dipendono solamente da  $L$ , rendendo  $M$  poco significativo. In altri casi si vuole fare l'opposto come adattare la tensione in un sistema con corrente alternata.

Si osserva il segno. Si sa che

$$\oint_c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{a}.$$

l'integrale di linea è percorso in un senso specifico, così come il verso della superficie (antiorario equivale a positivo e si segue la regola della mano destra).

**Solenoide toroidale.** Si consideri un solenoide toroidale a sezione quadrata con  $N$  avvolgimenti. Figura 3. L'autoinduttanza risulta essere

$$L = \frac{\Phi(B)}{I}, \quad B = \begin{cases} 0, & r \notin [a, b] \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, & r \in [a, b] \end{cases}.$$

grazie alla legge di Ampère. Il flusso di  $B$  nel toroide è

$$\Phi(B) = N \Phi_{\text{anello}}(B) = N \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \mathrm{d}r h = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}.$$

[immagine] dunque, l'autoinduttanza risulta essere

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}.$$

essa cresce con  $N^2$ . Tipicamente un solenoide di tale tipo ha campo esterno nullo. Esso è un sistema che risponde alla necessità di avere un valore di  $L$  che prevale sulla mutua induttanza  $M$ .

Il solenoide lineare finito ha un campo disperso se ideale.

**Induttore in un circuito elettrico.** [immagine] Si studia il comportamento di un induttore in un circuito elettrico. Si consideri un solenoide collegato ad una batteria. Una bobina reale è un filo elettrico: non esiste nessun circuito che non abbia una resistenza in serie con l'autoinduttanza con tale circuito. Lo schema equivalente risulta essere un circuito con una batteria, una resistenza ed un solenoide di autoinduttanza  $L$  (supponendo che le mutue induttanze siano trascurabili). La relazione di componente del solenoide risulta essere

$$\mathcal{E} = -L \mathrm{d}_t I.$$

chiudendo il circuito, inizia a circolare una corrente. La tensione della batteria è  $\mathcal{E}_0$ . Chiudendo il circuito si ha una forza elettromotrice indotta, per cui la forza elettromotrice totale risulta essere

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = RI \implies \mathcal{E}_0 = -\mathcal{E} + RI = L \mathrm{d}_t I + RI = V_L + V_R, \quad V_L = L \mathrm{d}_t I, \quad V_R = RI.$$

Si risolve tale equazione differenziale come la somma della soluzione particolare e della soluzione all'equazione omogenea associata. L'integrale particolare è

$$I_P = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \quad I_G(t) : L \, d_t I + RI = 0.$$

la seconda equazione diventa

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \implies I_G(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

La soluzione generale diventa

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad I(0) = 0.$$

per cui si ottiene  $A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$ , da cui:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

la costante di tempo risulta essere  $\tau = \frac{L}{R}$ . Fenomeni stazionari risultano essere quelli per cui si è in regime asintotico, i fenomeni di induzione spariscono e si è in un sistema puramente resistivo. Non si può generare corrente istantaneamente perché il sistema si oppone alla variazione di flusso. Si studia la scarica del solenoide. [immagine] Aprendo il circuito, la corrente che passa non può immediatamente arrestarsi perché la variazione di flusso si oppone, dunque la corrente in eccesso è scaricata da ciò che apre meccanicamente il circuito. Pertanto, bisogna scaricarlo attraverso una resistenza, collegando un altro filo e facendo chiudere l'interruttore su tale circuito. Quindi, il circuito equivalente è costituito dal solenoide e da una resistenza. Si ha

$$L \, d_t I + RI = 0 \implies \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \implies I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

esso si scarica con la stessa legge esponenziale con cui si carica.

Facendo passare della corrente attraverso una resistenza, si dissipa energia che dev'essere presa dall'induttore. Dunque, l'induttore deve aver immagazzinato dell'energia. L'energia dissipata si può calcolare dalla potenza come

$$W = \int_0^{+\infty} RI^2 \, dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} \, dt = \frac{1}{2} \frac{L}{R} RI_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Questa dev'essere anche l'energia immagazzinata all'inizio, prima della scarica. Dunque, l'energia immagazzinata nell'induttore è

$$U = \frac{1}{2} LI^2.$$

si nota l'analogia con il condensatore dove

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Inoltre, per definizione  $\Phi = LI$ , quindi la prima equazione si può scrivere come

$$U = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}.$$

Si è imparata una diversa espressione dell'energia del campo magnetico:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, dV.$$

si dimostra che tale relazione è equivalente a quella precedente.

La relazione dell'energia immagazzinata si può ricavare in modo più immediato. La differenza di potenziale ai capi dell'induttore è

$$V_L = L \, d_t I.$$

quindi il lavoro infinitesimo per far passare una carica attraverso l'induttore risulta essere

$$dW = L \, d_t I \, dq = L \, d_t I \, I \, dt = LI \, dI \implies W = \int_0^I LI \, dI = \frac{1}{2} LI^2.$$

il lavoro è l'integrale per passare da una corrente iniziale nulla ad una corrente finale pari ad  $I$ , cioè per carica l'induttore.

Si dimostra l'equivalenza delle due espressioni. Si vede prima nella geometria del solenoide toroidale e poi lo si generalizza:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, d\nu = \frac{1}{2} LI^2.$$

In prima approssimazione, il campo esterno del toroide è nullo: dato che le spire non possono essere tutte parallele, ma si devono spostare di un poco, risulta essere presente una corrente che segue un percorso circolare; dunque la configurazione è quella di un toroide ed un anello che dà un campo di dipolo che è molto meno intenso ed inoltre è asintotico a  $\frac{1}{r^3}$ , e quindi diventa trascurabile molto velocemente.

Pertanto

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \left( \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right) 2\pi r h \, dr = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 I^2 h \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}}_L I^2.$$

con  $dV = dr \, h 2\pi r$  grazie alle simmetrie. Ora si generalizza. La dimostrazione coinvolge il ripasso di tre mesi di corso. L'energia risulta essere

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, d\nu = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \, d\nu.$$

Dato che

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \partial_x (a_y b_z - b_y a_z) + \partial_y (a_z b_x - a_x b_z) + \partial_z (a_x b_y - a_y b_x) \\ \implies b_x (\partial_y a_z - \partial_z a_y) &= b_x (\vec{\nabla} \times \vec{a})_x, \quad -a_x (\partial_y b_z - \partial_z b_y) = a_x (\vec{\nabla} \times \vec{b})_x \\ \implies \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

risulta

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) \, d\nu + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \, d\nu.$$

ricordando che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Inoltre, si può applicare al teorema di Gauss al primo integrale e la legge di Ampère al secondo:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_S (\vec{B} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot \mu_0 \vec{J} \, d\nu.$$

nel primo integrale, la superficie è infinita e tutte le sorgenti finite sono dipoli magnetici, pertanto  $B \sim \frac{1}{r^3}$  e  $A \sim \frac{1}{r^2}$  e dunque  $\vec{B} \times \vec{A} \sim \frac{1}{r^5}$ , mentre l'area va come  $r^2$ , pertanto il primo integrale è nullo.

Nel secondo integrale, dato che la corrente passa per un circuito risulta  $\vec{J} \, d\nu = I \, d\vec{l}$  e quindi

$$U = \frac{1}{2} \oint_c \vec{A} \cdot I \, d\vec{l} = \frac{1}{2} I \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} I \Phi(B) = \frac{1}{2} LI^2.$$

**Applicazione.** [immagine] Si osserva il funzionamento delle cucine ad induzione. Si supponga che il fornello ad induzione sia un solenoide di raggio  $R$  con una corrente variabile  $I = I(t)$ . In tale solenoide si ha un campo magnetico variabile  $\vec{B} = \mu n I(t) \hat{u}_z$ , con  $n = \frac{N}{L}$ . Dato che il campo magnetico è variabile, esiste un campo elettrico associato tale per cui

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\mu_0 n \partial_t I.$$

Quindi

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = -\mu_0 n \partial_t I \hat{u}_z \iff \partial_x E_y - \partial_y E_x = -\mu_0 n \partial_t I.$$

Quindi, il campo elettrico vive nel piano ortogonale all'asse  $z$ . Per la simmetria del problema, si usano le coordinate cilindriche per cui il rotore risulta essere

$$\frac{1}{2} (\partial_r (r E_\theta) - \partial_\theta E_r)_z.$$

per simmetria, il campo elettrico non dipende da  $\theta$  perché se si avesse un campo con intensità diversa in base a  $\theta$ , allora ruotando le sorgenti si hanno due punti con campo diverso, ma con configurazione uguale nei due casi e ciò è assurdo: perciò il campo non può dipendere da  $\theta$ . Il campo non dipende da  $z$  perché invariante per traslazione. Dunque, esso è necessariamente  $\vec{E} = E_\theta(r) \hat{u}_\theta$ .

Dato che si è individuata una simmetria, si utilizza la forma integrale della legge di Faraday che è più semplice:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\partial_t \int \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

scegliendo un circuito circolare di raggio  $r$  si ha campo elettrico e magnetico uniformi per cui

$$E_\theta(r) 2\pi r = - \begin{cases} \mu_0 n \partial_t I \pi r^2, & r < R \\ \mu_0 n \partial_t I \pi R^2, & r \geq R \end{cases}.$$

Dunque il campo elettrico risulta essere

$$E_\theta(r) = \begin{cases} -2\mu_0 n \partial_t I \frac{r}{2}, & r < R \\ -\mu_0 n \partial_t I \frac{R^2}{2r}, & r \geq R \end{cases}.$$

Si pone un disco metallico sopra il solenoide. All'interno del metallo si stabiliscono delle correnti  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , con  $\sigma$  conducibilità del mezzo materiale. Inoltre, si sa che  $\vec{J} = n_e q \vec{v}$ . Si sa che le correnti all'interno di un materiale resistivo dissipano energia. Dunque, la potenza dissipata su di una carica è

$$d_t W = q \vec{E} \cdot \vec{v} = q E v.$$

perché le cariche si muovono come il campo. La potenza per unità di volume risulta essere

$$\frac{1}{V} d_t W = n_e q v E = n_e q v E = J E = \sigma E^2.$$

che è dissipata dalla lastra. Nella realtà il solenoide è poco lungo e gli anelli hanno diversa ampiezza perché altrimenti si scaldano solamente i bordi.

Si noti che il campo elettrico è indotto in tutto lo spazio, mentre in un metallo chiuso si ha una corrente indotta.

## Lecture 27

Si considerino due circuiti. Sul primo circuito si ha una forza elettromotrice autoindotta ed una indotta dall'altro circuito:

$$\mathcal{E}_1 = -L d_t I_1, \quad \mathcal{E}_2 = -M_{12} d_t I_2$$

lun 20 dic  
2021 13:30



Un esempio già visto è quello della carica e scarica di un induttore. Esso è collegato ad una sorgente continua di forza elettromotrice e si è osservato che

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = RI \iff \mathcal{E}_0 = -\mathcal{E} + RI = L \frac{dI}{dt} + RI$$

dove il primo addendo equivale alla differenza di potenziale  $V_L$  ai capi dell'induttore. Pertanto, l'induttore si può utilizzare come un elemento circuitale con una relazione di componente che lega la caduta di potenziale ai capi dell'induttore nel modo qua visto.

Per tale relazione segue che l'induttore è inefficace se non esistono variazioni di corrente. Inoltre, non si può avere una forza elettromotrice autoindotta se non viene fornito lavoro dall'esterno: si ha bisogno che esista qualcosa che generi una variazione di corrente. Ad esempio, un interruttore che si chiude iniettando una forza elettromotrice esterna; oppure un campo magnetico variabile; oppure, se il campo magnetico è stazionario, allora si deforma il circuito.

Questo lo si può vedere nel segno negativo della legge di Lenz  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ : la natura aborrisce i cambi di flusso e tende ad opporsi ad una sua variazione. In ultima analisi, si ritrova il secondo principio della termodinamica: non si può avere un induttore che, da solo, si genera una corrente e dopodiché si auto-sostiene tale corrente estrapolando energia senza che niente di esterno compia lavoro sul sistema. Pertanto, senza sorgenti esterne non si hanno variazioni di flusso.

**Esempio.** [immagine] Si considerino due piani superconduttori: la corrente generata rimane all'infinito; la resistenza è trascurabile. Essi sono collegati da due fili in modo da avere un circuito. Si studia la variazione di energia allontanando le due piastre in due configurazioni differenti:

- quando la corrente è costante  $I = \text{cost}$ , cioè si ha una sorgente esterna;
- si è in un sistema isolato senza sorgenti esterne,  $\mathcal{E}_{\text{ext}}, \vec{B} = 0$ ; tranne quella che è servita per generare la corrente iniziale.

Questo sistema è l'analogo del condensatore rispettivamente per  $V$  costante e per  $Q$  costante.

**Primo caso.** Si può usare

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}, \quad L = \frac{\Phi}{I}$$

La variazione dell'energia è

$$dU = \frac{1}{2}dL I^2$$

la corrente passa per i piani e quindi si ha una corrente superficiale, di strato  $K$ . Dunque

$$B = \mu_0 K = \mu_0 \frac{I}{b}$$

dove  $\delta$  è lo spesso trascurabile del piatto:  $Jb\delta = I = Kb$ , dove  $K \equiv J\delta = \frac{I}{b}$ . Il flusso risulta essere

$$\Phi = \mu_0 I \frac{lx}{b} \implies L = \mu_0 \frac{lx}{b}, \quad dL = \mu_0 \frac{l}{b} dx$$

dato che  $dx > 0$  allora  $dL > 0$  e bisogna compiere del lavoro che viene immesso dall'esterno: l'energia potenziale aumenta.

**Secondo caso.** Cambiando  $x$  cambia anche l'autoinduttanza  $L$ , ma deve cambiare anche la corrente perché il flusso deve rimanere costante attraverso le piastre: non si può avere variazione di flusso senza immissione di energia dall'esterno. Dunque

$$dU = \frac{1}{2}d\left(\frac{1}{L}\right)\Phi^2 = -\frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L^2}dL$$

per uno spostamento infinitesimo  $\frac{\Phi}{L} = I$  non cambia perché la configurazione generale rimane uguale. La formula diventa

$$dU = -\frac{1}{2}I^2 dL$$

che è uguale a quella all'inizio del primo caso tranne per un segno. Nel primo caso si aumenta l'energia, nel secondo la si diminuisce.

Questo risulta analogo a quanto visto per il condensatore quando si allontanano le piastre: tenendo costante la differenza di potenziale, l'energia aumenta; tenendo costante la carica, l'energia diminuisce.

**Combinazione di induttanze.** Si vede come si combinano le induttanze nei circuiti.

Si considerino due induttori in serie caratterizzate da  $L_1$  e  $L_2$ . [immagine] La relazione che si può scrivere in generale è che la forza elettromotrice indotta in  $L_1$  risulta essere

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 d_t I - M_{12} d_t I$$

il campo magnetico dovuto ad  $L_2$  può non rimanere confinato in esso e dunque influenzare il primo induttore. Analogamente per  $\mathcal{E}_2$ . Complessivamente, ai capi del circuito si ha

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = RI \implies \mathcal{E}_0 = (L_1 + L_2 + 2M) d_t I + RI$$

dove si è posto  $M_{12} = M_{21} = M$ . L'autoinduttanza equivalente è il coefficiente di  $d_t I$ . Per situazioni più complicate, l'espressione dell'autoinduttanza equivalente diventa complicata anch'essa, pertanto è tipico lavorare in condizioni in cui le mutue induttanze sono trascurabili.

**Esempio.** [immagine] Si consideri un solenoide ideale lungo  $l$  e di raggio  $r$  con  $N$  spire. Pertanto, il campo magnetico di un solenoide ideale risulta essere

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{l} I, & \text{interno} \\ 0, & \text{esterno} \end{cases}$$

pertanto, l'autoinduttanza è

$$L = \frac{\Phi(R)}{I} = N \pi r^2 \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{1}{I} = \pi r^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}$$

Si studiano due combinazioni: una in serie collegando uno dopo l'altro; l'altra sempre in serie, ma un solenoide sovrapposto all'altro si ha lunghezza  $l$ .

Ci si aspetta che il primo caso sia equivalente ad un solo solenoide di lunghezza  $2l$  con  $2N$  spire. Dunque

$$L_1 = \pi r^2 \mu_0 \frac{4N^2}{2l} = 2L$$

Si analizza il sistema per com'è fatto fisicamente, non utilizzando la relazione precedentemente trovata. Per il secondo caso

$$L_2 = \pi r^2 \mu_0 \frac{4N^2}{l} = 4L$$

ponendo in serie gli stessi elementi, ma in configurazioni diverse, si hanno autoinduttanze diverse. Nella prima combinazione si ha

$$L_1 + L_2 + 2M = L + L + 0 = 2L$$

con  $M = 0$  perché si hanno solenoidi ideali. Per la seconda combinazione si ha

$$L_1 + L_2 + 2M = L + L + 2M = 4L$$

i due solenoidi sono identici, dunque i flussi indotti sono pari ai flussi autoindotti:

$$M = \frac{\Phi_{\text{aranc}}(B_{\text{bianco}})}{I_{\text{bianco}}} = \pi r^2 N_{\text{aranc}} \mu_0 I_{\text{bianco}} \frac{N_{\text{bianco}}}{l} \frac{1}{I_{\text{bianco}}} = \pi r^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} = L$$

questo risulta evidente dalla geometria perché gli induttori si trovano l'uno nell'altro, quindi la mutua induttanza non può essere altro che l'autoinduttanza.

Per induttanze fatte come piccoli solenoidi, quando sono messe come la prima configurazione si ha comunque un flusso disperso; se invece sono poste l'una di fianco all'altra ed lontane, allora la mutua induttanza diventa nulla. Inoltre, disponendole come un toro non si ha campo disperso.

**Trasformatore.** Si tratta il caso in cui si vuole avere un valore della mutua induttanza diversa da zero. Si vede il trasformatore. [immagine] La variazione del campo magnetico nell'induttore induce una corrente nell'altro circuito su cui si può ottenere una forza elettromotrice controllata dal primo e dalla configurazione dei solenoidi. Ci si aspetta di avere

$$\mathcal{E}_2 = -M \, d_t I_1$$

nel secondo circuito scorre una corrente generata dal passaggio di  $I_1$ . Se i solenoidi hanno la stessa geometria allora si ha

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

si può trasformare l'ampiezza della differenza di potenziale della sorgente usando un numero differente di avvolgimenti. Tipicamente è solito trasformare dalla bassa tensione all'alta tensione per maggiore efficienza nel trasporto di corrente come si vede successivamente. Infatti, si ha

$$\mathcal{E}_1 = -\partial_t \Phi_1 = -N_1 \partial_t \Phi_{\text{anello}} = -\frac{N_1}{N_2} (N_2 \partial_t \Phi_{\text{anello}}) = -\frac{N_1}{N_2} \partial_t \Phi_2 = \frac{N_1}{N_2} \mathcal{E}_2$$

l'ipotesi che i due solenoidi abbiano identica geometria implica che l'area di ciascun anello è identica per entrambi i solenoidi. Trasformare la tensione della corrente non viola le leggi di conservazione dell'energia perché la potenza media sul periodo nei due circuiti è uguale:

$$\langle P_1 \rangle = \langle \mathcal{E}_1 I_1 \rangle, \quad \langle P_2 \rangle = \langle R I_2^2 \rangle$$

Si calcolano tali potenze. Posto  $\mathcal{E}_1 = V_1 \cos(\omega t)$  (la fase non importa perché tanto si fa la media sul periodo), sul primo circuito si ha

$$\mathcal{E}_1 = L_1 \, d_t I_1 + M \, d_t I_2$$

mentre sul secondo circuito si ha

$$-R I_2 = L_2 \, d_t I_2 + M \, d_t I_1$$

dato che i due termini a destra sono le differenze di potenziale ai capi degli induttori, la formula sopra segue per la prima legge di Kirchhoff. Sostituendo si ha

$$\begin{cases} d_t I_1 = -\frac{1}{M} (R I_2 + L_2 \, d_t I_2) \\ \mathcal{E}_1 = -\frac{L_1 R}{M} I_2 - \frac{L_1 L_2}{M} d_t I_2 + M \, d_t I_2 = -\frac{L_1 R}{M} I_2 \end{cases}$$

si ricorda che  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , infatti

$$L_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{\pi r^2}{l}, \quad L_2 = \mu_0 N_2^2 \frac{\pi r^2}{l}, \quad M = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi r^2}{l}$$

osservando l'esempio precedente, gli  $N_i$  provengono dall'intensità del campo e dal numero di avvolgimenti nell'induttore in cui si calcola il flusso. Per la mutua induttanza, un  $N$  è dovuto dall'intensità del campo dell'altro solenoide e dal proprio numero di avvolgimenti. Questo vale per un trasformatore in cui la geometria delle due bobine è identica. Pertanto,

$$\begin{cases} I_2 = -\frac{1}{R} \frac{M}{L_1} \mathcal{E}_1 = -\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \mathcal{E}_1 \\ I_1 = \frac{1}{R} \frac{L_2}{L_1} \mathcal{E}_1 - \underbrace{\frac{R}{M} \int I_2 \, dt}_{\sim \sin(\omega t)} \end{cases}$$

Si calcolano le potenze. La potenza in entrata e la potenza in uscita è

$$P_1 = \langle \mathcal{E}_1 I_1 \rangle = \frac{1}{2R} \frac{L_2}{L_1} V_1^2$$

$$P_2 = \langle R I_2^2 \rangle = \frac{1}{2R} \frac{L_2}{L_1} V_2^2$$

Se la potenza è identica, significa che più alta è la forza elettromotrice e più bassa è la corrente. Dato che la potenza dissipata dipende dalla resistenza e dalla corrente, risulta vantaggioso trasportare la corrente utilizzando l'alta tensione.

## Lecture 28

La potenza media erogata dalla forza elettromotrice sul primo dei due anelli è

mar 21 dic  
2021 13:30

$$P = \langle \mathcal{E}_1 I_1 \rangle = .$$

[r] cfr appunti

Mentre sull'altro circuito si ha

$$P = \langle R I_2^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_2 I_2 \rangle.$$

si dimostra che le due potenze sono uguali e sono uguali anche i prodotti all'interno della media per cui

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}.$$

ad alta tensione si ha una corrente piccola e quindi una piccola dissipazione: si possono costruire lunghi cavi con cui trasportare la corrente.

Al mondo esiste una sola linea ad tensione in corrente continua e si trova in Russia.

### 11.1 Cavi assiali

[immagine] Il cavo si può immaginare come un cilindro con un conduttore esterno ricoperto da una guaina [r]. Tale conduttore è a massa e si collega una batteria separata da un interruttore. Si studia cosa succede sulla linea e cosa succede ad un carico ad essa collegato.

Si conoscono le proprietà di un cilindro fatto in tale modo in elettrostatica. La sua capacità risulta essere

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}.$$

questa capacità è quella tra il conduttore interno ed esterno. Iniettando una differenza di potenziale, si ha una corrente che circola attraverso il filo in una direzione e torna indietro attraverso il conduttore esterno. Dunque, si ha un flusso attraverso un anello [r]. Sia  $\mathcal{E}_0$  la forza elettromotrice della batteria. Si suppone che la resistenza del filo sia nulla.

Il filo è indefinito; lo si immagina con tante sezioni: si fa una rappresentazione ad elementi finiti.

**Elementi finiti.** [immagine] Si ha un conduttore su cui si innesta una differenza di potenziale e si pone un condensatore tra il circuito e la massa. Questo si ripete all'infinito.

Per una differenza di potenziale  $V$ , sul conduttore centrale passa una corrente  $I$ ; dunque la differenza di potenziale risulta essere

$$dV = L_l dx dI.$$

dove  $L_l$  è l'induttanza per unità di lunghezza. Ai capi del condensatore, si ha un po' di corrente che fugge e il resto va sul condensatore [r]. Quindi

$$dI = C_l dx dV.$$

Si ricorda che

$$V_L = L \, d_t I, \quad I_C = C \, d_t V_0.$$

dunque per un tratto  $dx$  si ha una differenza di potenziale  $dV$  ed di corrente  $dI$  che dipendono anche dal tempo. Pertanto

$$\begin{cases} \partial_x V = L_l \partial_t I \\ \partial_x I = C_l \partial_t V \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_x^2 V = L_l \partial_t^2 I \\ \partial_x^2 I = L_l C_l \partial_t^2 V \end{cases} \rightsquigarrow \partial_x^2 V - L_l C_l \partial_t^2 V = 0.$$

vale su tutti gli elementi del filo. Questa è l'equazione di d'Alembert, è l'equazione delle onde monodimensionale:

$$\partial_x^2 V - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 V = 0.$$

Dunque, le soluzioni sono delle funzioni del tipo

$$V(x, t) = V(x \pm vt).$$

Quando si chiude il circuito e si inietta un impulso, tale impulso si propaga senza cambiare forma con velocità  $v = \frac{1}{\sqrt{C_l L_l}}$ .

Si calcola l'induttanza. [immagine] Si isola un pezzo di filo lungo  $l$ . Il rapporto flusso del campo magnetico dovuto alla corrente che circola e la corrente stessa è l'induttanza:

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = \frac{1}{I} \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l \, dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \implies L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

la velocità di propagazione risulta essere

$$v = \frac{1}{\sqrt{C_l L_l}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c.$$

il segnale si propaga con una velocità pari a quella della luce. Tale relazione è vera se il cavo è nel vuoto, altrimenti se c'è un materiale dielettrico bisogna considerare  $\varepsilon_r > 1$ .G

**Discussione Veritasium.** [immagine] Si consideri una batteria, un interruttore. Si misura la forza elettromotrice della batteria  $V_1$ ; si ha un lungo filo che poi ritorna vicino al primo circuito e si misura una differenza di potenziale  $V_2$ .

La discussione riguarda il tempo per accendere la lampadina misurato da quando si chiude il circuito. [r]

## 11.2 Analisi di un circuito RLC

Le relazioni di componente fin'ora studiate sono

$$V = \frac{q}{C}, \quad V = RI, \quad V = L \, d_t I.$$

per un condensatore, resistenza e induttore rispettivamente. Ad essi sono associate energie

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad RI^2, \quad U_L = \frac{1}{2} L (d_t q)^2.$$

si pensi a  $q$  come una variabile di posizione, dunque nella prima equazione il potenziale assomiglia ad uno di tipo elastico con  $k = \frac{1}{C}$ ; mentre nella terza equazione l'energia ricorda l'energia cinetica con massa  $L$ ; mentre la seconda equazione è un termine dissipativo. Pertanto, ci si aspetta che le tre componenti siano legate da un moto armonico smorzato perché l'energia dissipata funziona da attrito viscoso.

Si vede prima l'oscillatore libero e poi forzato.

**Circuito RLC libero.** [immagine] Si consideri una differenza di potenziale iniziale ai capi del condensatore  $V_C(0) = V_0$ . Si chiude l'interruttore al tempo  $t = 0$ . Passa la stessa corrente in tutte le componenti. Si ha

$$V_C + V_L + V_R = 0 \iff \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = 0.$$

ricordando  $I = dq$  si ha un'equazione di second'ordine nella carica. Tuttavia, si scrive l'equazione per una differenza di potenziale ai capi del condensatore. La corrente è comune ed è legata ai capi del condensatore tramite  $I = C \frac{dV_C}{dt}$ . Pertanto si ha

$$V_C + CL \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} = 0 \iff \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = 0 \iff \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

con  $x \equiv V_C$ ,  $2\gamma = \frac{R}{L}$  e  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , cioè l'equazione dell'oscillatore armonico libero smorzato. Si cercano soluzioni del tipo  $f(t) = e^{\alpha t}$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$  e cioè che interessa davvero è  $\text{Re}(f(t))$ . Infatti, risulta  $\frac{d^2 f}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$  e  $\frac{d f}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$ . [r]

Si ha  $V = V_R + iV_I$  e si risolve l'equazione per la parte reale ed immaginaria. [r] L'equazione che si ottiene è

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \implies \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Si hanno tre casi

- $\gamma^2 < \omega_0^2$ , il determinante è negativo: si hanno due soluzioni complesse. Quindi  $\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Questa è la condizione di oscillatore smorzato.
- $\gamma = \omega_0$  si hanno due soluzioni coincidenti,  $\alpha_{1,2} = -\gamma$ ; si ha un oscillatore criticamente smorzato
- $\gamma^2 > \omega_0^2$  si hanno due soluzioni reali,  $\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ; si ha un oscillatore sovrasmorzato.

per il secondo ed il terzo caso non si hanno oscillazioni. Nel primo caso, il sistema torna a zero passando prima per un numero di oscillazioni.

**Caso primo.** Le due soluzioni sono

$$\begin{aligned} V_+(t) &= A_+ e^{-\gamma t} e^{i\omega t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ V_-(t) &= A_- e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Il passaggio per trovare la soluzione reale coinvolge la rappresentazione di Eulero e si estrae solamente la parte reale che è del tipo

$$v(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\gamma t}.$$

il parametro  $A$  definisce l'ampiezza, mentre  $\varphi$  definisce la fase iniziale. Infatti,  $V(0) = A \cos \varphi$ . Dato che si sceglie l'asse dei tempi in modo arbitrario, si fa in modo che in  $t = 0$  si abbia l'ampiezza massima. Il periodo dell'oscillazione è  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  e  $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ . Se la resistenza è piccola, il secondo termine tende a zero e la frequenza delle oscillazioni tende a  $\omega_0$ .

L'energia nel condensatore è  $U = \frac{1}{2} C V^2$ . Dunque, l'energia è massima quando si è agli estremi dell'oscillazione. Nell'induttore si ha  $U = \frac{1}{2} L I^2$ , dove la corrente che fluisce nel circuito è

$$I = C \frac{dV_C}{dt} = -AC\omega \left( \sin(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \cos(\omega t) \right) e^{-\gamma t}.$$

per un buon oscillatore si ha  $\frac{\gamma}{\omega} \rightarrow 0$  e quindi la corrente varia con il seno, mentre la tensione varia con il coseno. Esse sono sfasate di  $\frac{\pi}{2}$ . Per un picco sul condensatore si è ad uno zero per

l'induttore e viceversa; simile ad una molla: l'energia cinetica va in potenziale e viceversa. Tuttavia, in tale scambio, la resistenza dissipa energia. Infatti

$$\begin{aligned} d_t U &= d_t \left( \frac{1}{2} C V_C^2(t) + \frac{1}{2} L I^2(t) \right) = C V_C d_t V_C + L d_t I I \\ &= V_C I + V_L I = I(V_L + V_C) = -V_R I = -R I^2. \end{aligned}$$

Si qualifica la bontà dell'oscillatore tramite il fattore di qualità che indica quanto poco rapidamente viene dissipata l'energia, il tempo richiesto perché l'energia nell'oscillatore si riduca di un fattore di  $\frac{1}{e}$ . [r] Il fattore di qualità è il numero di cicli in tale tempo. [r] Pertanto

$$e^{-2\gamma t_q} = \frac{1}{e} \iff t_q = \frac{1}{2\gamma} \implies Q = \omega t_q = \frac{\omega L}{R}.$$

se la resistenza è piccola si ha una buona qualità.

**Casi secondo e terzo.** Essi sono interessanti in meccanica (inteso come lavoro sulle automobili) per evitare le oscillazioni. Mentre nei circuiti interessa l'oscillazione.

**Oscillatore forzato.** [immagine] L'equazione è

$$\frac{q}{C} + L d_t I + R I = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t).$$

la soluzione generale è una soluzione particolare più la soluzione dell'omogenea associata. Quest'ultima si è appena trovata: a tempi lunghi essa si estingue e quindi la soluzione è solo quella particolare.

La tecnica è la stessa: il termine noto è complesso  $\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$  e la soluzione è

$$I = A e^{i\varphi} e^{i\omega t} \implies q = \int I dt.$$

pertanto l'equazione diventa

$$A e^{i\varphi} \frac{1}{i\omega C} e^{i\omega t} + A e^{i\varphi} i\omega L e^{i\omega t} + R A e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \iff I(\omega) \left[ \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R \right] = V(\omega).$$

[r] Si sostituisce la legge di Ohm con l'impedenza  $Z = Z(\omega)$ :

$$V(\omega) = Z I(\omega).$$

per cui si ha

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

dunque, l'equazione è risolta:

$$A e^{i\varphi} \left[ i\omega L - \frac{i}{\omega C} + R \right] = \mathcal{E}_0 \iff A e^{i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

si ha una ampiezza complessa alla quale bisogna estrarre la parte reale. L'ampiezza ha un picco in  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Dunque si ha

$$A = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Inoltre, quanto è piccata la curva del massimo è determinato dal valore relativo tra  $R$  ed  $L$ . In particolare, la larghezza a mezza altezza della potenza (nota come Full Width at Half Maximum, FWHM) è pari a  $\frac{\omega_0}{Q}$ , dove  $Q$  è il fattore di qualità.

Lo si dimostra. Dato che  $P \propto I^2$  allora il valore di FWHM risulta essere  $\frac{P}{2} \propto \frac{I^2}{2}$  cioè la corrente si riduce di un fattore  $\sqrt{2}$ . Considerato

$$I_{\max}(\omega = \omega_0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \implies \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R\sqrt{2}} \implies R = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

la seconda implicazione deriva dalla formula precedente dell'ampiezza in cui bisogna fare in moto che il denominatore sia pari a  $R\sqrt{2}$ . Si cerca il punto FWHM spostandosi dal massimo:  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ . Pertanto

$$\begin{aligned} R &= (\omega_0 + \Delta\omega)L - \frac{1}{(\omega_0 + \Delta\omega)C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \\ &= \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = 2\omega_0 L \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \end{aligned}$$

nella penultima uguaglianza si utilizza il fatto che  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$  e si sviluppa l'ultima frazione. Pertanto

$$\text{FWHM} \equiv 2\Delta\omega = \frac{\omega_0 R}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

se il fattore di qualità è grande, cioè il sistema oscilla con poca dissipazione di energia, allora la FWHM è stretta: si ha una risonanza stretta. Si può costruire un circuito con  $\omega_0$  arbitraria, che risponde solamente ad una precisa frequenza: su questo principio si basano le radio. La larghezza del picco descrive la larghezza di banda su cui il circuito risponde.

Negli oscillatori meccanici è difficile realizzare un alto fattore di qualità dovuto al fatto che gli attriti sono difficili da eliminare. Mentre negli apparati elettrici si possono avere fattori di qualità molto alti. Per avere fattori buonissimi serve utilizzare basse temperature che permettono l'utilizzo di superconduttori.

Inoltre

- per  $\omega \rightarrow 0$  si ha un comportamento capacitivo: il condensatore è aperto e l'induttore si comporta come un filo.
- per  $\omega \rightarrow \omega_0$  si ha un comportamento resistivo,  $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t)$ , non si ha sfasamento perché i termini si semplificano.
- per  $\omega \rightarrow \infty$  si ha un comportamento induttivo: l'induttore è aperto, mentre il condensatore è chiuso e si comporta come un filo.

Quando si ha un circuito con tanti elementi, valgono sempre le leggi di Kirchhoff. Per ciascun elemento si può scrivere una relazione simbolica tra la corrente e la differenza di potenziale entrambe ai suoi capi:  $\tilde{V} = Z\tilde{I}$  dove l'impedenza può essere  $R$ , oppure  $i\omega L$  oppure  $\frac{1}{i\omega C}$ . A questo punto, dato che tutti i termini in tale relazione rispondono con un termine  $e^{i\omega t}$ , basta usare le relazioni di Kirchhoff in cui al posto di una rappresentazione reale di  $I$  e  $V$ , si utilizza una rappresentazione complessa e poi si estrae la parte reale.

## Lecture 29

### 11.3 Legge di Ampère-Maxwell

Si è imparato che la legge di forza è in generale data dalla relazione

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

la fatica sta nel trovare la descrizione dei campi a partire dalle sorgenti. Si conoscono quattro equazioni

$$\bullet \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \int_S \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

lun 10 gen  
2022 13:30



- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \iff \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$ , con  $c = \partial S$ .
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \iff \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$ , con  $c = \partial S$ .

il campo elettrico ed il campo magnetico sono mutualmente accoppiati: ciò si era già visto quando si è trattata la relatività. Nel caso in cui il campo magnetico sia statico, allora dalle prime due si può definire un potenziale.

Oltre a tali quattro equazioni si è citata l'equazione di continuità:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$ , che garantisce la conservazione della carica.

La quarta legge è valida solo per fenomeni stazionari, cioè  $\partial_t \rho = 0$ ,  $\rho = \rho(\vec{r})$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , perché infatti si ricorda valere  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ .

Si sono studiati campi variabili, in particolare campi elettrici variabili per cui  $\rho$  è variabile nel tempo; dunque, l'ultima delle quattro equazioni è incompatibile.

Un secondo problema, che pure Maxwell nota, è che le quattro equazioni sono asimmetriche. Egli estende l'equazione di Ampère anche a fenomeni variabili.

Si studia la criticità associata al fatto che l'equazione di continuità non è soddisfatta. [immagine] Si consideri un condensatore a piani paralleli. Tra i due piatti è presente un campo elettrico pari a  $\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \hat{u}_n$ . Chiudendo l'interruttore, il condensatore si scarica, compare una corrente  $I(t)$  che segue una legge esponenziale e vale  $I(t) = \partial_t Q$ , dove  $Q$  è la carica sui piatti. Avendo una corrente, si ha un campo magnetico variabile attorno al filo del circuito. Si costruisce un percorso circolare attorno al filo in cui si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t)$$

la corrente risulta essere

$$I(t) = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

si ricorda che la superficie  $S$  è una qualunque che insiste sul circuito. Si prende una superficie aperta rassomigliante un vaso che include uno dei due piatti. [immagine] Attraverso tale superficie non passa alcuna corrente, perché nel condensatore non si ha corrente, ma solamente nel filo. Dunque, la legge precedente non è sufficiente a descrivere il sistema; bisognerebbe prenderne una particolare, mentre il teorema di Stokes garantisce che si può prenderne una qualunque. In questo caso non vale la condizione di stazionarietà  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Si deve aggiungere un pezzo alla legge di Ampère. Si vuole trovare una legge che includa sia fenomeni stazionari che non.

Dall'equazione di continuità, tramite la legge di Gauss si esprime  $\rho$  in funzione del campo elettrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t (\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}) = 0$$

l'ordine di derivazione si può cambiare; si ha un vettore la cui divergenza è sempre nulla, sia per fenomeni stazionari che dinamici. Quindi si modifica la legge di Ampère nella relazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$$

essa è la legge di Ampère-Maxwell in cui è già inclusa la legge di continuità e collassa nella legge di Ampère per fenomeni stazionari.

Nell'esempio considerato, tra i piatti si ha un campo elettrico variabile:

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} \hat{u}_n, \quad I(t) = \partial_t Q = A \varepsilon_0 \partial_t E = \int_S \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

[r] La legge di Ampère-Maxwell in forma integrale è

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

A questo punto, le quattro equazioni risultano essere simmetriche. Dirac a tentato di sintetizzare le quattro equazioni in modo che siano identiche, ma ciò richiederebbe l'esistenza di un monopolo magnetico, cosa che in natura non si è mai osservata.

La complicazione ora è di risolvere sistemi in cui si hanno campi elettromagnetici variabili. Si è imparato che quando  $\vec{B}$  varia, bisogna calcolare una forza elettromotrice. Ora quando varia il campo elettrico, varia anche quello magnetico, per cui bisognerebbe ricalcolare la forza elettromotrice e così via all'infinito. Si troveranno delle tecniche differenti con cui gestire tale caso.

**Esempio.** Si vede un altro caso che giustifica tale aggiunta alla legge di Ampère senza passare per particolari superfici. [immagine]

Si consideri un conduttore sferico al cui centro ci sia una carica. [r] Si ha  $\partial_t Q \neq 0$ . Nel conduttore si ha  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . Il campo elettrico è sostenuto dalla carica elettrica rimasta:

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r$$

Il campo magnetico in tale configurazione risulta essere  $\vec{B} = B(r)\hat{u}_r$ . Si pensi di isolare una linea radiale in cui fluisce una corrente  $\vec{I}$ ; per la regola della mano destra si ha un campo magnetico simile a quello di un filo. Ogni linea radiale ha la stessa corrente  $\vec{I}$  che genera un campo come quello precedente. Prendendo il punto a metà, il contributo delle due correnti si annulla [r] per questo il campo magnetico può essere solamente radiale.

Dato che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  allora

$$\int_{4\pi r^2} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \iff B(r)4\pi r^2 = 0 \iff B(r) = 0$$

sulla superficie sferica, il campo magnetico è costante. In tale configurazione il campo magnetico è nullo per motivi di simmetria. Questo esempio è incompatibile con la legge di Ampère per il caso statico, perché  $\vec{J} \neq 0$ . Aggiungendo il termine di Maxwell, il problema si risolve. Si calcola quanto vale  $\vec{J}$  e  $\vec{E}$  su di una superficie sferica di raggio  $r$ :

$$\int \vec{J} \cdot d\vec{a} = I = \partial_t Q \iff J(r)4\pi r^2 = \partial_t Q \iff J(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \partial_t Q$$

per motivi di simmetria,  $\vec{J}$  è costante a tutti i raggi. Il campo elettrico vale

$$\epsilon_0 \partial_t E = \frac{1}{4\pi r^2} \partial_t Q$$

le espressioni sono identiche. Tuttavia, bisogna sistemare i segni. Se la corrente fluisce verso l'esterno, allora  $\vec{J} = J\hat{u}_r$  e il campo elettrico ha stesso verso, ma la variazione del campo ha la stessa direzione che  $\vec{J}$  (proprio perché diminuisce). [r]

Per motivi storici, si ha la corrente di spostamento

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

dove "d" è per displacement. Viene detta corrente perché è così che Maxwell la si è figurata, anche se non si ha nessuna corrente. Risulta tuttavia utile immaginarla come corrente [r].

In un condensatore si può immaginare di avere una corrente esterna al condensatore come una corrente reale che si racconta con continuità alla corrente di spostamento. [r]

A differenza della legge di Faraday che è stata dedotta per via sperimentale (in quanto la correzione è imponente), quella di Maxwell è stata dedotta in modo teorico e sono stati necessari vent'anni per la verifica in quanto è una correzione piccola.

Si sono costruite le leggi e d'ora in poi le si applicano.

## Lecture 30

Si è generalizzata la legge di Ampère-Maxwell come  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$  e si può pensare come una relazione in cui, oltre alla corrente fisica, si ha una corrente associata alla variazione del campo elettrico  $\vec{J}_d = \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ .

mar 11 gen  
2022 13:30

**Esempio.** [immagine] Si torna sull'esempio del condensatori a piani paralleli. Si studia cosa succede al campo magnetico tra i piatti. I piatti hanno una carica  $Q$ , sono ad una distanza  $d$  ed il raggio dei piatti circolari è  $b$ . La relazione di Maxwell fornisce due termini. Si costruisce un circuito di Ampère e si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \dots d\vec{a}$$

l'integrale si può dividere in base a dove si è in relazione al condensatore (dentro o fuori). Se il circuito è all'esterno allora solamente il primo termine dell'equazione di Maxwell rimane, mentre se si è dentro rimane il secondo termine.

Tra le due armature si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

il campo elettrico vale

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi b^2} \hat{u}_n$$

Per simmetria cilindrica del problema si prende un circuito di Ampère circolare di raggio  $r$  attorno all'asse del condensatore. Il campo magnetico, per simmetria, ci si aspetta che non dipenda da  $\theta$  e  $z$ . Dunque, la formula sopra diventa

$$B(r)2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t Q \frac{1}{\varepsilon_0 \pi b^2} \begin{cases} \pi r^2, & r \leq b \\ \pi b^2, & r \geq b \end{cases} \implies B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \min\left(\frac{r^2}{b^2}, 1\right)$$

il secondo membro cambia in base alla dimensione relativa del raggio del circuito rispetto al raggio del condensatore. Si trova un campo magnetico che ricorda quello di un cilindro percorso da una corrente costante.

Il campo esterno risulta essere quello di un filo. Quando si attraversa la parete del condensatore si ha una discontinuità del campo. Questo significa che si ha una corrente di strato  $K$  tale che  $\Delta B = \mu_0 K$ . Tale corrente di strato percorre i piatti per poi finire sul filo, che ha senso perché il condensatore si sta (s)caricando. [r] Pertanto

$$\Delta B = \mu_0 K = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)$$

Per togliere della carica dai piatti attraverso il filo, la carica deve fluire verso il punto in cui il filo tocca il piatto [r] Supponendo che la carica sia distribuita uniformemente sulla superficie, la frazione di carica che si trova in una regione compresa tra un raggio  $r$  ed un raggio  $b$  risulta essere proporzionale all'area:

$$\frac{\pi b^2 - \pi r^2}{\pi b^2} = 1 - \frac{r^2}{b^2}$$

da una piatto con carica uniforme si rimuove tale carica [r]

Emerge un altro aspetto interessante: si ha un campo variabile che, per Faraday, induce un campo elettrico variabile. Il campo magnetico indotto induce a sua volta un campo elettrico indotto. Si valuta se questi dà un contributo significativo oppure si può trascurare.

Si ha un campo elettrico calcolato come se si fosse in configurazione statica

$$\vec{E}_0 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi b^2}$$

per Ampère si ha un campo magnetico interno al condensatore

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi b^2} I(t) r \hat{u}_\theta$$

Esiste la relazione  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ , dato che  $\vec{B}$  varia, si ha un contributo al campo elettrico:

$$\oint_c \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

dato che si ha un rotore, ci si aspetta che  $\vec{E}$  sia ortogonale al campo magnetico e dunque è assiale perché il campo magnetico è un anello; ci si aspetta che tale campo elettrico dipenda solamente dal raggio [r].

Si sceglie un circuito rettangolare che passa per l'asse centrale del condensatore e per i due piatti. [immagine] Per la regola della mano destra, il versore della superficie risulta essere parallelo al versore del campo magnetico. [r]

Pertanto la circuitazione risulta essere

$$(E_1(b) - E_1(0)) d = -d_t \int_0^d \int_0^b \frac{\mu_0}{2\pi b^2} I(t) r dr dx$$

dato che  $\vec{E}$  è assiale allora il campo elettrico sui tratti che passano per i dischi è nullo. Quindi si ha

$$\Delta E_1^{\max} = E_1(b) = \frac{\mu_0}{4\pi} d_t I$$

Si calcola la massima correzione al campo elettrico

$$\frac{E_1(b)}{E_0(b)} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{4\pi} \frac{\pi b^2}{Q} d_t^2 Q = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{4} b^2 \frac{1}{Q} d_t^2 Q$$

si supponga che il condensatore si scarica con una legge  $Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Considerato  $d_t^2 Q = \frac{1}{\tau^2} Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q(t)}{\tau^2}$ , si ha

$$\frac{\Delta E_1^{\max}}{E_0} = \frac{1}{4} \left( \frac{b}{c\tau} \right)^2$$

tale rapporto è molto piccolo tutte le volte che  $\frac{b}{c\tau}$  è molto piccolo. Il valore  $c\tau$  è la distanza percorsa da [r] nel tempo  $\tau$ . Se il campo varia molto più velocemente di quanto si (s)carica il condensatore, allora si può ignorare il contributo che deriva dalla variazione del campo magnetico: si ha l'approssimazione quasi-statica. [r]

Questo è il caso di un decadimento esponenziale della carica. Tuttavia, il caso per altre funzioni è analogo. Ad esempio, considerato  $Q = Q_0 \sin(\omega t)$ ; derivando due volte si ha un  $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$  che, a meno di un fattore, si ha ancora la relazione precedente.

Per oggetti delle dimensioni di 3 – 30 cm servono delle frequenze dell'ordine di  $\omega \approx 10^8$  Hz: al di sotto si può stare in situazione quasi-statica.

Si può sempre ignorare tutti i termini successivi quando si è in situazioni quasi-statica. Tuttavia, se non si possono ignorare, si procede all'infinito con  $B_1$ ,  $E_2$ ,  $B_2$ , etc; si ha una serie infinita tutta di termini di prim'ordine che, dunque, non converge. Si utilizza una tecnica diversa di cui si dà un accenno ora, ma si discuterà in tempi successivi.

**Esempio.** Confronta idex. Tutto quanto fatto con la legge di Faraday è discusso in regime quasi-statico.

Si consideri un solenoide in cui la corrente varia come  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Il campo magnetico lungo  $z$  risulta essere  $B_z(t) = \mu_0 n I$  e per Faraday si ha un campo elettrico interno circolare

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \iff E 2\pi r = \mu_0 n I d_t I \pi r^2 \implies E(t) = \frac{\mu_0}{2} n d_t I r$$

a tale campo elettrico è associato un campo magnetico indotto

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \iff \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

[r] [immagine] Si sceglie un percorso rettangolare e si ha

$$(B(b) - B(0)) l = \varepsilon_0 \mu_0^2 n d_t^2 I l \frac{b^2}{4}$$

[r] Si calcola ancora una volta il rapporto

$$\frac{B_1(b)}{B_0(b)} = \frac{\Delta B_{\max}}{B_{\text{statico}}} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{4} b^2 d_t^2 I \frac{1}{I} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{4} \frac{b^2}{\tau^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{b}{c\tau} \right)^2$$

si ha la relazione analoga a quella di prima. Si ha un modo per risolvere tutti i problemi senza complicare inutilmente.

## 11.4 Configurazioni complesse

Per ora le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

[r] Nel caso statico si è scritto

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

che si è ottenuta combinando le prime due equazioni per il campo elettrico nel caso statico (in particolare, il campo elettrico risulta essere conservativo).

Per il campo magnetico si ha

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

[r] che si è ottenuto dalle equazioni per il campo magnetico nel caso statico. Tali due equazioni sono disaccoppiate perché non compaiono i termini che mescolano i campi. La relazione del laplaciano per il potenziale vettore è stata ottenuta considerando

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

la prima equazione diventa

$$-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

[r] Si è fatta una scelta di gauge con cui si sceglie, tra tutti i potenziali vettori, quelli per cui la divergenza è nulla. Si è utilizzato questo trucco perché scrivendola in questo modo si sanno già le soluzioni che sono identiche a quelle del campo elettrico.[r]

Si consideri la condizione per cui  $\rho = 0$  e  $\vec{J} = 0$  (che è analogo ad utilizzare l'equazione di Laplace più le condizioni al contorno che derivano da ciò che si trova oltre la regione considerata; si ricorda essere il problema generale dell'elettrostatica). Si osserva cosa succede alle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

[r] si possono disaccoppiare risolvendo l'ultima equazione per  $\vec{B}$  e lo si sostituisce nelle altre. Si prende il rotore delle equazioni dove compare il campo magnetico:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \iff -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \iff -\nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{B} \end{aligned}$$

si hanno due equazioni identiche. Applicando le condizioni sulla divergenza si ha

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

questa è l'equazione delle onde di d'Alembert in tre dimensioni. [r] Si mostra che l'onda piana è una soluzione. Le equazioni di Maxwell, dove non si hanno sorgenti, hanno come soluzioni

le onde [r]. Le onde piane hanno una direzione di propagazione definita (posta arbitrariamente come  $\hat{u}_y$ ). Si svolge lo studio per  $E$  dato che per  $B$  è identica. Il campo elettrico è una funzione del tipo

$$\vec{E}(y, t) = \vec{E}(y \pm vt) = \begin{cases} E_x = E_x(y \pm vt) \\ E_y = \dots \\ E_z = \dots \end{cases}$$

questa è l'equazione di un impulso che si propaga senza dissipazione né dispersione. Confronta Fisica I.

Si supponga che l'onda si sposti con una velocità  $v$ . Si può scegliere un riferimento solidale con l'impulso che si propaga. La funzione  $f(y') = f(y, t = 0)$  e  $y' = y - OO' = y - vt$ , essa è un'onda progressiva descritta da  $f(y - vt)$ , dove  $y - vt$  è la fase dell'onda.

Si dimostra che tale espressione risolve l'equazione delle onde. Si sa che  $\vec{E}$  non dipende da  $x$  né da  $z$ , pertanto si ha  $\partial_y^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0$ . Sia  $\xi = y \pm vt$ . L'equazione si può riscrivere come

$$\partial_\xi^2 \vec{E} (\partial_y \xi)^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_\xi^2 \vec{E} (\partial_t \xi)^2 = (\partial_\xi^2 \vec{E}) (1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2) = 0$$

si fa la derivata della funzione composta:  $\vec{E} = \vec{E}(\xi(y, t))$ . [r] è soddisfatta per  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \equiv c$ .

Da cui Maxwell ha collegato la luce con i campi elettromagnetici.

Si può fare lo stesso con il campo magnetico e si ha la stessa soluzione per le onde piane.

Si specifica che le soluzioni delle equazioni di Maxwell nella regione senza sorgenti sono soluzioni delle equazioni delle onde; ma il viceversa non è necessariamente vero.

**Esempio.** Si vede l'esempio di un'onda piana. Si osserva che si rende necessaria la presenza sia di un campo elettrico che di un campo magnetico.

Si consideri un piano infinito in  $xz$  in cui fluisce una corrente di strato  $\vec{K} = K\theta(t)\hat{u}_x$ , dove è la funzione a gradino di Heaviside? [r] che è l'integrale della funzione delta di Dirac:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Nel caso statico si ha

$$\vec{B} = \pm \frac{\mu_0}{2} K \hat{u}_z$$

Tuttavia, non si è in caso statico perché la corrente cambia. In ogni punto, il campo non arriva immediatamente, ma al massimo alla velocità della luce [r]:

$$B(y) = \begin{cases} 0, & t > \frac{y}{c} \\ \frac{\mu_0}{2} K, & t \geq \frac{y}{c} \end{cases}, \quad y > 0$$

con la funzione a gradino, il campo magnetico risulta essere

$$B(y, t) = \frac{\mu_0}{2} K \theta\left(t - \frac{y}{c}\right)$$

[r] Si ha un campo magnetico che si propaga lungo  $y$ . Dietro il fronte dell'onda si ha un campo statico, tale fronte si propaga con una velocità  $c$ .

Si necessita l'esistenza anche di un campo elettrico che deve vivere sul fronte perché nelle altre regioni il campo magnetico è statico. Per Faraday

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

oltre il fronte, il campo magnetico è nullo. Si prende un circuito rettangolare con un lato sul fronte ed il resto oltre. Pertanto, in un certo intervallo di tempo  $dt$  il campo magnetico avanza di  $dy = c dt$ . Dunque, la variazione del flusso è  $d\Phi = Bl dy$ :

$$E(y)l = -\partial_t (B dy l) = -Bcl$$

quindi, per un'onda che si propaga in  $y$  risulta essere

$$E_x(y) = -cB_z(y)$$

si ha una [r]

Il campo elettrico esiste solamente sul fronte.

Si mostra che la relazione così ricavata è una relazione generale.

## Lecture 31

mer 12 gen  
2022 13:30

Si è visto che nelle regione senza sorgenti le equazioni di Maxwell possono essere disassociate ed assumono la forma delle equazioni delle onde. Si cercano soluzioni ondulatorie; ma non tutte le soluzioni ondulatorie sono anche soluzioni per il campo elettromagnetico.

Si vede in generale che il campo elettrico e quello magnetico sono sempre accoppiate. Si consideri una soluzione di un'onda piana  $\vec{E} = \vec{E}(y \pm ct)$ ; essa si propaga nella direzione arbitraria  $\hat{n} = \hat{u}_y$ . Oltre a soddisfare l'equazione delle onde bisogna richiedere che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ . Questo implica che

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0$$

Dato che il campo dipende solamente da  $y$ , allora la prima e la terza derivata sono nulle  $\partial_x E_x = \partial_z E_z = 0$ . La condizione da soddisfare è che  $\partial_y E_y = 0$  che implica  $E_y = \text{cost}$ . In tale analisi si è interessati a campi variabili. Si può avere un campo elettrico lungo  $y$  ma non deve essere variabile. La stesa cosa vale per il campo magnetico nella direzione in cui si propaga.

Il campo magnetico deve propagarsi lungo  $y$  anch'esso questo perché

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \quad (\iff \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B})$$

quindi, il campo magnetico deve essere ondulatorio e deve anche soddisfare l'equazione precedente.

Dato che il campo magnetico varia nel piano trasverso, si sceglie l'asse  $z$  di modo che sia parallelo al campo elettrico:  $\vec{E} = E_z(y \pm ct)\hat{u}_z$ . Pertanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}|_x = 0, \quad \vec{\nabla} \times B|_y = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}|_z = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E_z(y \pm ct)$$

si pone la fase  $\xi = y \pm ct$ . La componente non nulla risulta essere

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = \pm c \varepsilon_0 \mu_0 \partial_\xi E_z(\xi)$$

[r] Il campo magnetico può dipendere solamente da  $y$  e  $t$ . Pertanto  $\partial_x B_y = 0$ .

Si studia la prima componente del rotore:

$$\partial_y B_z - \cancel{\partial_z B_y} = 0 \implies \partial_y B_z = 0 \implies B_z = \text{cost}$$

Pertanto,  $B$  può essere solamente nella direzione in  $x$ . Per la seconda componente è analogo.

A questo punto risulta

$$\partial_y B_x = \partial_\xi B_x \partial_y \xi = \mp c \varepsilon_0 \mu_0 \partial_\xi E_z \implies B_x = \mp \frac{1}{c} E_z(y \pm ct)$$

i campi costituiscono una terna destrorsa con la direzione di spostamento:  $\vec{c}, \vec{E}, \vec{B}$ . Si può scrivere la relazione in forma compatta come

$$\vec{B} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{c}$$

dove  $\hat{n}$  è la direzione di propagazione dell'onda.

La relazione trovata è vera in forma locale; dunque, la richiesta che l'onda sia piana non è necessaria.

Si è già vista un'onda sferica: l'esempio della carica puntiforme che da un moto rettilineo uniforme si ferma istantaneamente. Tutti gli osservatori che si trovano ad una distanza  $ct$  sanno che la

carica si è fermata, coloro che si trovano più lontano sono ancora ignoranti e si aspettano che la carica sia ancora in movimento ed osservano un campo che è ancora radiale a partire dalla carica in moto. Si ha una discontinuità del campo sul fronte d'onda. I campi dentro e fuori il fronte sono entrambi campi statici, mentre variabile è quello sul fronte d'onda il quale è sferico  $\hat{u}_r$ . In ciascun punto, il campo elettrico è in direzione trasversa rispetto la direzione di propagazione del fronte. [r] Da lontano, un'onda sferica risulta essere piana. Questo tipo di fronte d'onda è a colpo singolo.

Qualora si facesse oscillare la carica, si avrebbe una sequenza di fronti. La forma delle onde dipendono dalla sorgente; tuttavia, quanto discusso fin'ora rimane valido. Tra tutti i casi di oscillazioni quella dell'onda cromatica sinusoidale è quella più semplice. Si ricorda che tutti i fenomeni periodici si possono descrivere come somma di sinusoidi. L'onda monocromatica sinusoidale ha la forma

$$\vec{E} = E_z \sin(ky \pm \omega t) \hat{u}_z, \quad \vec{B} = B_x \sin(ky \pm \omega t) \hat{u}_x, \quad B_x = \mp \frac{E_z}{c}$$

Fissata l'onda ad un tempo qualunque, il periodo spaziale (cioè la lunghezza d'onda) è  $\lambda$  e vale  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  che viene chiamato numero d'onda. Similmente, fissando l'onda nello spazio, si ha la frequenza angolare (pulsazione)  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

La soluzione delle onde ha un argomento pari a  $y \pm ct$ , tuttavia si è scritta la soluzione utilizzando  $ky \pm \omega t$ . Si mostra che questa seconda risolve l'equazione delle onde

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) E_z \sin(ky \pm \omega t) = 0$$

che è vera  $\forall y, t$  se  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \iff \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$  questa è la relazione di dispersione. In generale, nei fenomeni ondulatori  $\frac{\omega}{k}$  è la velocità di propagazione che può essere funzione di  $\omega$  ma nel vuoto non lo è e quindi l'onda non disperde (e nemmeno nell'acustica, perché infatti tutte le onde acustiche hanno la velocità del suono e non diverse velocità in base alla propria frequenza). [r] La relazione di dispersione si può scrivere come una relazione tra la lunghezza d'onda e il periodo:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

la frequenza della radiazione elettromagnetica è legata alla lunghezza d'onda.

Questa è la soluzione elementare; la soluzione generale è la composizione di più onde semplici: si può avere un'onda stazionaria che è sovrapposizione di un'onda progressiva e di una regressiva. Si avrebbe

$$\vec{E} = E_0 [\sin(ky - \omega t) + \sin(ky + \omega t)] \hat{u}_z, \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} [\sin(ky - \omega t) - \sin(ky + \omega t)] \hat{u}_x$$

per somma di seni (prostaferesi?) si ha

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(ky) \cos(\omega t), \quad \vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(ky) \sin(\omega t)$$

queste sono onde stazionarie. Il campo magnetico è sfasato di  $\frac{\pi}{2}$ ? [r]. Questo è il caso ideale, tipicamente per specchi metallici, perché per un conduttore ideale  $\vec{E} = 0$  all'interno: si avrebbe un nodo dove c'è la parete dello specchio. Ponendo una cavità in un conduttore si avrebbe una situazione simile a quella di una corda con due vincoli, si potrebbero generare solamente certe frequenze (questo è il caso del microonde, con la misura della lunghezza d'onda e della frequenza si può misurare la velocità della luce).

## 11.5 Trasporto di energia elettromagnetica

La densità di energia risulta essere

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$



[r]

$$\partial_t u = \partial_t \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B}$$

[r]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \end{aligned}$$

questo implica

$$\partial_t u = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

**Intermezzo.** Si vede una proprietà della divergenza

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

Che si può ricorda in modo mnemonico come -abc = +baci -cibi. Questo proviene dalla regola del prodotto triplo.

Si ponga  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ . Per le soluzioni ondulatorie esso diventa  $\frac{1}{\mu_0} EB\hat{n}$ . Dunque risulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \partial_t u = 0$$

il secondo termine è un'energia sul tempo e volume (una potenza per unità di volume); il primo termine è reciproco della lunghezza (dovuta alla divergenza) e dato che i termini devono essere dimensionalmente identici allora  $S$  ha dimensioni di energia su tempo e superficie. Essa è un flusso di energia; ma si conosce già un'equazione simile:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$  cioè l'equazione di continuità che descrive la conservazione di carica. Dunque l'equazione trovata per  $S$  descrive la conservazione di energia ed è detto teorema di Poynting ed il vettore  $S$  è il vettore omonimo (molto adeguato come nome). La forma integrale del teorema è

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} d\nu = -\partial_t \int_V u d\nu \iff \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{a} = -\partial_t \int_V u d\nu$$

la superficie è chiusa, dunque il vettore normale alla superficie punta verso l'esterno per convenzione. [r]

**Esempio.** [r] Si studia la carica e la scarica del condensatore. Il vettore di Poynting risulta

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} EB\hat{n}$$

[immagine] Si consideri un condensatore a piatti circolari paralleli con carica  $Q$  e scorre una densità di corrente  $\vec{J}$ . Si studia la scarica. Tra i piatti si ha una corrente di spostamento

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

all'interno del condensatore si ha un campo magnetico circolare. Si considerino due punti diametralmente opposti  $A$  e  $B$  che si trovino sul limite del condensatore (ideale). Sui punti, il campo elettrico è verso il basso, mentre il campo magnetico è circolare in senso antiorario, il vettore di Poynting punta verso l'esterno e ciò ha senso perché si ha una carica accumulata e la si sta rimuovendo.

Per la carica si ha l'opposto: il vettore punta verso l'interno (il campo magnetico è circolare in senso orario).

Si studia la scarica. L'energia immagazzinata nel condensatore è

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \pi b^2 d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{Q(t)^2}{(\pi b^2 \varepsilon_0)^2} \pi b^2 d$$

dove  $b$  è il raggio e  $d$  è la distanza tra i piatti del condensatore. La variazione di energia (la potenza) risulta essere

$$d_t U = \frac{Q}{\pi b^2 \varepsilon_0} d_t Q d = EdI = \Delta \varphi I$$

il flusso del vettore di Poynting risulta essere

$$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\mu_0} 2\pi b d E \frac{\mu_0}{2\pi b} I = EdI$$

[r] che è identico a quanto trovato prima. Con della corrente alternata, il vettore di Poynting nel condensatore continua a cambiare direzione e così il flusso, pertanto il condensatore diventa un generatore di onde elettromagnetiche. [r]

Si mostra che la relazione è valida solamente nel vuoto.

**Esempio.** Si vede un esempio con un conduttore circolare con corrente stazionaria  $\vec{J} = \text{cost.}$  [immagine] All'interno del conduttore, il campo elettrico risulta essere  $\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J}$ . Dato che si ha una corrente, segue che bisogna avere anche un campo magnetico circolare secondo la regola della mano destra; il vettore di Poynting punta verso l'interno del conduttore.

Il campo elettrico risulta essere  $\vec{E} = \frac{\mu_0}{2} J r \hat{u}_\theta$ . Se  $J$  è costante nel tempo, allora pure  $B$ . Pertanto,  $\partial_t u = 0$ . Tuttavia  $S \neq 0$ :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \neq 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

si sta immettendo energia nel conduttore e tale energia è dissipata nel conduttore contro la resistenza del conduttore stesso.

Confronta idex. Calcolando esplicitamente il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie esterna del conduttore di raggio  $b$ , lunghezza  $l$  e conducibilità  $\sigma$  si ottiene

$$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} = RI^2$$

## Lecture 32

lun 17 gen  
2022 13:30

## 12 Campo elettrico nella materia

### 12.1 Dielettrici

Fin'ora i materiali dielettrici sono stati materiali [r]: mantengono la loro carica e alle cariche all'interno del mezzo non succede nulla. Tuttavia, nella realtà non è così, ed il dielettrico diventa una sorgente di campo elettrico.

Per i conduttori si sa che

$$\vec{E}_{\text{condut}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}} = 0$$

Il campo elettrico esterno è noto, mentre quello interno è deducibile da quello interno. Per un dielettrico si ha

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{polariz}} \neq 0$$

L'ultimo termine è il campo di polarizzazione: le cariche si possono spostare, ma non neutralizzare il campo. Tuttavia, le cariche sono vincolate, quindi esistono altre forze che bilancia il campo elettrico: tali forze sono date da un campo locale di natura atomica che non fa parte del campo qui studiato.

Si vuole trovare una tecnica che permette di descrivere il campo di polarizzazione a partire dalla distribuzione di cariche. Così si può capire come si redistribuiscono le carica e come calcolare il campo a partire dalla distribuzione.

**Discussione fenomenologica.** Le osservazioni fenomenologiche risalgono a Faraday. Si consideri un condensatore a piatti paralleli nel vuoto con una differenza di potenziale  $\varphi_{12}$  e con capacità  $C = \frac{Q}{\varphi_{12}}$ . Si consideri un condensatore identico al cui interno sia presente un dielettrico che occupi completamente lo spazio tra i piatti; esso ancora con una differenza di potenziale  $\varphi_{12}$ .

Si osserva comparire una carica sulle facce del condensatore  $Q' > Q$ . A parità di differenza di potenziale, la carica è maggiore in presenza di un dielettrico.

Inoltre, variando la differenza di potenziale ai capi del secondo condensatore, rimane una relazione  $Q' \propto \varphi$ . Si può introdurre una relazione che definisce la capacità del sistema  $C' = \frac{Q'}{\varphi}$ . Per i dielettrici, tale relazione vale entro un certo intervallo di potenziale; perché si può creare un campo elettrico talmente forte da vincere i campi locali che tengono insieme le cariche agli atomi.

La terza proprietà notevole è che  $\frac{Q'}{Q} = \frac{C'}{C}$  non dipende dal potenziale e non dipende dalla geometria. Così si individua una proprietà caratteristica del dielettrico che lo caratterizza [r] ed è detta costante dielettrica relativa:

$$\varepsilon_r = \frac{C'}{C} > 1$$

esso è un numero puro ed è maggiore di uno per l'approssimazione di campi statici. Il Purcell indica  $\varepsilon_r$  come  $\kappa$ .

Si studia in che modo si possono associare tali osservazioni alla ridistribuzione delle cariche. [r]

Si discute per analogia. [immagine] Si consideri un conduttore nel vuoto con distanza tra i piatti  $d$ . La differenza di potenziale è

$$\Delta\varphi = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} d$$

non ci si preoccupa del segno. All'interno dei due piatti si introduce una barra conduttrice di spessore  $s$ . Il campo all'interno della barra dev'essere nullo, così come anche oltre il condensatore. Si applica il teorema di Gauss [r] su di una superficie come nell'immagine per cui  $Q_{\text{tot}} = 0$  e si ha induzione completa; si presenta una carica indotta  $Q'$ . In tale configurazione la differenza di potenziale risulta essere

$$\Delta\varphi = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} d$$

Nel primo tratto, il campo elettrico è  $E_1 = \frac{Q'}{A\varepsilon_0} = E_2 = E_3$ . [r]

Se si vuole avere la stessa differenza di potenziale allora si ottiene la relazione

$$Q' = Q \frac{d}{d-s} > Q$$

Il campo nel condensatore diminuisce l'intensità del campo e quindi serve più carica per avere la stessa differenza di potenziale.

Quando si manda  $s \rightarrow d$  si ha che  $Q' \rightarrow \infty$  e quindi in un conduttore si ha  $\varepsilon_r = \infty$ .

Nel dielettrico si deve avere una situazione analoga, però  $C'$  non sarà infinita. [r]

Il comportamento di un dielettrico si può descrivere così: in un condensatore, le cariche positive attraggono quelle negative e le tirano verso sé. Le cariche nel dielettrico direttamente prossime ai piatti del condensatore si separano e così ogni lastra di atomi all'interno. Dunque globalmente le cariche positive e negative si sono spostate. [r] Si ha

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{Q'}{A\varepsilon_0}$$

e il campo di polarizzazione ha il verso opposto del campo esterno. Pertanto, dato che

$$\Delta\varphi = \int (\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{pol}}) \cdot d\vec{l}$$

[r] Se la carica negativa e la carica positiva appartengono ad uno stesso atomo, lo si può deformare senza separare le due cariche.

Si può avere una deformazione della distribuzione della carica degli atomi; mentre le molecole possono essere polari: si ha una asimmetria della distribuzione nella carica, mediamente hanno una distribuzione casuale, mentre accedendo un campo elettrico si ha una redistribuzione. Questi due casi sono polarizzazione per [r] e per [r]

Per i gas si ha  $\varepsilon_r \approx 1$ ; per liquidi non polari e solidi si ha  $2 - 10$ ; per liquidi polari  $30 - 80$ , dove si ricorda che  $80$  è la costante dielettrica relativa dell'acqua.

Bisogna capire come l'azione di un campo esterno interagisce su distribuzioni con cariche separate; qual è l'interazione di una distribuzione di carica non uniforme in presenza di campo esterno: questo descrive come si orientano le cariche; bisogna trovare un modo per descrivere il campo associato alla distribuzione di cariche [r]

**Potenziale associato ad un fenomeno di polarizzazione.** Per trovare il campo elettrico si può ricorrere al potenziale. Si trova la forma generale del potenziale elettrostatico per [r] di cui si è interessati.

Ricordando  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  con

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

[immagine] Si consideri una distribuzione di carica arbitraria. Si è interessati a calcolare il campo nella condizione in cui  $r \gg r'$ , cioè quando si ha una distribuzione di carica polarizzata e si vuole calcolare il campo macroscopico. Posto  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  si ha

$$R = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta'}$$

Nel limite dell'approssimazione si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right)$$

con  $\varepsilon = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta'$ . Sostituendo  $\varepsilon$  si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} + o\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \right)$$

sostituendolo nel potenziale si ha

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int_V \rho(r') d\nu' + \frac{1}{r^2} \int_V \rho(r') r' \cos \theta' d\nu' + \frac{1}{r^3} \int_V \dots \right]$$

in generale, per una distribuzione qualunque, la forma del potenziale si può scrivere come lo sviluppo di termini  $\frac{1}{r^n}$  moltiplicati per dei coefficienti  $\kappa_{n-1}$ . Questo è lo sviluppo in multipoli dove  $\kappa_0$  è il termine di monopolio elettrico,  $\kappa_1$  è il dipolo,  $\kappa_2$  è un quadripolo, etc. Il primo termine non nullo è quello che determina il campo.

Il termine di monopolio è

$$\kappa_0 = \int_V \rho(r') d\nu' = Q$$

[r] Nei dielettrici neutri  $Q = 0$ . Il campo di polarizzazione nel dielettrico non è un campo di monopolio. Il primo termine non nullo è quello di dipolo. Per cui

$$\kappa_1 = \int_V r' \cos \theta' \rho(r') d\nu' = \hat{u}_r \cdot \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\nu'$$

ricordando  $r' \cos \theta' = r' \hat{u}_{r'} \cdot \hat{u}_r$ . Si definisce il dipolo elettrico come

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\nu'$$

in questo modo il termine di dipolo diventa

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}$$

quest'espressione si è già incontrata quando si è costruito il sistema con una carica positiva  $q^+$  e negativa  $q^-$  a distanza  $\vec{\delta}$ :  $\vec{p} = q\vec{\delta} = q(\vec{r}^+ + \vec{r}^-)$ .

In generale si può definire il centro di carica

$$\frac{\int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\nu'}{Q}$$

[r]

In una polarizzazione per deformazione si ha un dipolo elettrico. In una molecola polare si ha un dipolo per costruzione. Il campo elettrico di un dipolo polarizzato è la somma di tanti dipoli elementari. Bisogna capire come costruire il campo dai dipoli elementari [r].

**Esercizio.** Considerato che il potenziale di dipolo è

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

si calcoli il campo elettrico tramite  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  utilizzando le coordinate sferiche.

Si vede come il campo esterno interagisce per creare dipoli [r].

## Lecture 33

Il campo è costruibile da un potenziale associato al potenziale di dipolo

mar 18 gen  
2022 13:30

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}$$

dove il momento di dipolo è

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\nu' \equiv q\vec{\delta}$$

Per una distribuzione asimmetrica si può semplificarla con delle cariche  $\pm q$  ad una distanza  $\delta$ . Si vogliono capire le azioni meccaniche di un campo elettrico esterno sui dipoli. Si considera un dipolo costituito da due cariche ad una distanza costante.

**Azioni meccaniche.** [immagine] Si consideri un dipolo costituito da due cariche  $\pm q$  ad una distanza  $\vec{d}$ . Il momento di dipolo è  $\vec{p} = q\vec{d}$ . Si consideri un campo elettrico esterno. Considerando il sistema come un corpo rigido si ha una forza

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

[r] La forza risultante è nulla. Dunque non si sposta ma ha un momento torcente non nullo. Infatti, considerando un polo qualunque  $V$  si ha [immagine]

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times q\vec{E} = \vec{\delta} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

[r] La configurazione in cui il dipolo è parallelo al campo elettrico è di energia potenziale minima. Infatti, l'energia potenziale associata a spostare di un angolo  $\theta$  dalla posizione di energia minima è [immagine]

$$W_+ = \int_0^\theta q\vec{E} \cdot d\vec{s} = -qE\Delta s = -qE\frac{\delta}{2}(1 - \cos\theta)$$

Per la seconda uguaglianza si considera il campo elettrico uniforme. Dato che

$$W = -\Delta U \implies \Delta U_+ = \frac{q\delta}{2}E(1 - \cos\theta)$$

Dunque

$$\Delta U = \Delta U_+ + \Delta U_- = pE(1 - \cos\theta) \implies U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

si ricorda che il potenziale è definito a meno di una costante. [r]

La stessa cosa non vale per dipoli con polarizzazione per deformazione perché si ha anche un termine che dipende da quanto le cariche distano.

Se il campo non è uniforme allora la forza che agisce sul dipolo è

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-) \right] = q\Delta\vec{E}$$

dato che i dipoli sono di dimensioni atomiche, la distanza è  $\delta$  molto piccola. Dunque, dato che  $\Delta\vec{E}$  è la variazione del campo elettrico lungo l'estensione del dipolo. Pertanto, considerato  $\Delta\vec{E} = (\Delta E_x, \Delta E_y, \Delta E_z)$  si ha

$$\Delta E_x = \partial_x E_x dx + \partial_y E_y dy + \partial_z E_z dz = \vec{\nabla} E_x \cdot \vec{\delta}$$

Quindi, sostituendo, la forza sul dipolo è

$$F_x = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_x$$

$$F_y = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_y$$

$$F_z = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_z$$

che si scrive in forma compatta come

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

Un dipolo in un campo elettrico non uniforme, si sposta seguendo il gradiente del campo.

**Studio macroscopico.** Si studia cosa succede a livello macroscopico quando i dipoli di un mezzo polare si orientano in presenza di un campo elettrico esterno.

Le molecole polari hanno un dipolo permanente di circa  $\vec{p} \approx 6 \cdot 10^{-30}$  C m per l'acqua. Considerando un campo elettrico intenso di  $E \approx 10^6 \frac{V}{m}$ , si avrebbe una differenza massima di energia potenziale di

$$\Delta U_{\max} = 2pE \approx 10^{-23} \text{ C V} \approx 10^{-4} \text{ eV}$$

Sapendo che l'energia termine dipende da un fattore  $k$  che dipende dai gradi di libertà delle molecole si ha un'energia termine di  $kT \approx 25 \text{ meV}$ , quindi [r]

La polarizzazione media è

$$\langle p \rangle = \frac{\int_\Omega n(\theta) p \cos\theta d\Omega}{\int_\Omega n(\theta) d\Omega}$$

dove  $\Omega$  è l'angolo solido. Dalla teoria cinetica, gli stati disponibili nello spazio delle fasi vengono occupati con una probabilità proporzionale al fattore di Boltzmann  $e^{-\frac{U}{kT}}$ . In questo caso particolare si ha

$$U = -pE \cos\theta$$

dato che  $U \ll kT$  si ha

$$e^{-\frac{U}{kT}} \approx 1 + pE \cos \theta$$

Sostituendo nell'integrale del momento di dipolo elettrico medio si ha

$$\langle p \rangle = \frac{p^2}{kT} E$$

il campo elettrico compare nello sviluppo di  $n(\theta)$ . L'energia cinetica si oppone alla polarizzazione. Invece di pensare a tutte le molecole disordinate, si possono pensare come molecole ordinate con dipolo  $\langle p \rangle$  con cui poi si calcola il campo macroscopico.

Per i mezzi non polari non si ha un dipolo permanente, ma gli atomi si deformano a causa della presenza del campo elettrico esterno. [immagine] [r]

Il campo elettrico separa le cariche di segni diversi: la nuvola di elettroni di un atomo ha un baricentro diverso dalla posizione occupata dal nucleo. Si può approssimare tale sistema a due cariche puntiformi a distanza  $\Delta z$ . La condizione di equilibrio si ha per

$$\vec{F}_{q+} = 0 = q\vec{E} + q\vec{E}_{\text{elettroni}}$$

Si crea un momento di dipolo  $\vec{p} = q\Delta z$  che è parallelo a  $\vec{E}$ . Sapendo che  $\vec{E} = E_{\text{elettroni}}$ , supponendo che la distribuzione abbia simmetria sferica, allora si può calcolare la forza. Quindi

$$E_{\text{elettroni}} 4\pi \Delta z^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(\Delta z)} \rho_{\text{elett}} d\nu = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4\pi}{3} \Delta z^3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta z}{a^3} \implies \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E} \approx 10^{-34} \text{ C m}$$

ricordando che  $p = q\Delta z$ . Anche in questo caso, il dipolo elettrico che si forma è proporzionale all'intensità del campo elettrico esterno. Il fattore di proporzionalità è legato alla costante dielettrica ed alla geometria della nube [r]. Tale modello è primitivo perché la distribuzione non rimane sferica quando si spostano i centri. Tuttavia, esso risulta essere una buona descrizione della polarizzabilità degli atomi. Inoltre, la polarizzazione associata a tali fenomeni è meno intensa di quella per le molecole polari.

Considerando un mezzo, a livello microscopico, indipendentemente dalla sua struttura (polare o non polare) ed immerso in un campo elettrico, si ha una configurazione in cui le cariche si separano ed a ciascuna coppia si può associare un dipolo elementare.

Per calcolare il campo macroscopico associato a tale polarizzazione, si individua un volume piccolo macroscopicamente e grande microscopicamente a cui si associa un vettore di polarizzazione

$$\vec{P} = N\vec{p}_0$$

dove  $N$  è il numero di dipoli per unità di volume e  $\vec{p}_0$  è il dipolo elementare. Le sue unità di misura sono  $\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ .

**Campo elettrico in un mezzo polarizzato.** Si conosce il potenziale in un punto lontano

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}$$

si divide la regione in tanti piccoli volumi a cui ciascuno si associa  $\vec{p} = \vec{P} d\nu$ . [r]

Si consideri una lastra planare con polarizzazione uniforme  $\vec{P}$ . [immagine] Si calcola il potenziale e poi il campo esterno alla lastra. Si considera un volume  $d\nu = da dz$ . A tale volume si associa un dipolo  $\vec{p} = \vec{P} da dz$ . Il contributo del potenziale è

$$d\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Quindi

$$\varphi_{da} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\vec{P} da dz \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

[immagine] si ha  $dz \cos \theta = -dr$ , e quindi ( $da$  indica un elemento di area)

$$\varphi_{da} = -\frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Questo è l'equivalente di un potenziale di dipolo lungo quanto il cilindro e presenta sulla superficie superiore una carica  $Q_+ = P da$ , mentre sulla superficie inferiore una carica  $Q_-$ . [r]

Le uniche cariche che non si bilanciano sono quelle sulla superficie limite. [r]

Si ha una distribuzione superficiale di carica. Si è calcolato il campo elettrico nella regione esterna ai piatti perché si è usata l'approssimazione dei multipoli.

Si consideri un sistema nel vuoto costituito da due piatti identici con densità  $\sigma = \pm P$ . Il sistema è equivalente a quello precedente e quindi [r]

Nel vuoto si sa com'è il campo interno:  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ; quindi, facendo un percorso interno da  $A$  a  $B$  si può calcolare

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \int_{A, \text{ext}}^B \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

dato che il sistema è conservativo,  $\varphi$  è indipendente dal percorso. [r]

Anche nel caso del dielettrico è conservativo il campo. Quando ci si muove all'interno si ha che [r]

Quando ci si sposta all'interno del dielettrico, si potrebbe passare per un dipolo e poi in una regione vuota; nel limite in cui si accetta un campo microscopicamente medio si ha

$$\langle E_{\text{polar}} \rangle = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{p}{\epsilon_0} \implies \vec{E}_{\text{polar}} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

[r] tale risultato vale in tale forma solo per una distribuzione planare.

Si ha un problema. SI è detto che il campo elettrico totale risulta essere

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{pol}}$$

ma il vettore di polarizzazione è  $\vec{P} = N\vec{p}_0(\vec{E})$ . Dunque si avrebbe

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{pol}}(\vec{E})$$

il che [r]

la polarizzazione dipende dal campo totale.

Si studia la geometria semplice considerata e poi la relazione si estende a relazioni più complicate.

Si considerino due lastre cariche con  $Q_{\pm}$  [r]

Compare una polarizzazione con verso identico al campo esterno. Sui due piatti compaiono delle cariche di segno opposto e si ha una carica  $Q_0 = Q + Q'$ . Il campo elettrico totale risulta

$$\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_{\text{pol}} = \left( \frac{Q}{A\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0} \right) \hat{u}_z$$

Si può considerare il sistema come la sovrapposizione dei due campi e si può osservare un sistema equivalente in cui si pone una differenza di potenziale  $\Delta\varphi$  di modo che si abbia lo stesso campo elettrico  $\vec{E}$  [r]. Per la legge di Gauss, la carica su ciascun piatto risulta essere  $Q_0 = Q + Q'$ . Dagli studi fenomenologici di Faraday si sa che  $Q > Q_0$  e  $Q = \epsilon_r Q_0$ . Pertanto, nell'espressione del campo elettrico totale si ha

$$\vec{E} = \left( \frac{\epsilon_r Q_0}{\epsilon_0 A} - \frac{P}{\epsilon_0} \right) \hat{u}_z = \epsilon_r \vec{E} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \implies \vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

in un mezzo dielettrico omogeneo si ha una relazione di proporzionalità mediata dalla costante dielettrica relativa. La grandezza  $\chi_E = \epsilon_r - 1$  è detta suscettibilità dielettrica. Tale relazione è



detta costitutiva; problemi di polarizzazione non si possono risolvere se non si conosce  $[\mathbf{r}]$  tensore. Tale relazione si può riscrivere come

$$N\vec{p}_0 = \varepsilon_0\chi_E\vec{E}$$

per i mezzi non polari si ha  $\vec{p}_0 = 4\pi\varepsilon_0a^3\vec{E}$  e quindi

$$N_4\pi\varepsilon_0a^3\vec{E} = \varepsilon_0\chi_X\vec{E} \implies \chi_E = 4\pi a^3 N$$

alcune volte si indica il termine di polarizzabilità come  $\alpha_E = 4\pi\varepsilon_0a^3 [\mathbf{r}]$ .

Considerato  $a \approx 10^{-30}$  m raggio dell'atomo; per un gas perfetto  $N \approx 0.25 \cdot 10^{-26} \text{ m}^{-3}$ ;  $\chi_E \approx 3 \cdot 10^{-4}$ ; per cui si ottiene  $\varepsilon_r = 1.0003$ . Per un solido si hanno valori decimali maggiori.

**Relazione generale.** Non tutti i mezzi sono polarizzabili e non tutti sono delle lastre. Si cerca la relazione generale tra  $\vec{P}$  e  $\vec{E}_P$ .  
immagine

Si consideri una regione con una polarizzazione  $\vec{P}$ . Ad ogni punto si associa un dipolo elettrico  $\vec{p} = \vec{P} d\nu$ . Il potenziale risulta essere

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{P} \cdot \hat{u}_r}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\nu'$$

si pone  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Si sa che  $\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{\hat{u}_r}{r^2}$ , ed allo stesso modo  $\vec{\nabla}(R) = -\frac{\hat{u}_r}{R^2}$ , così pure  $\vec{\nabla}'(\frac{1}{R}) = \frac{\hat{u}_r}{R^2}$ .  $[\mathbf{r}]$

Si riscrive il potenziale come

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \vec{P} \cdot \vec{\nabla}'(\frac{1}{R}) d\nu' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\frac{\vec{P}}{R}) d\nu' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{R} d\nu' \\ &\stackrel{\text{T.G.}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{a}}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{(-\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{R} d\nu' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma_P da}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_P d\nu'}{R} \end{aligned}$$

$[\mathbf{r}]$

sapendo che  $\vec{\nabla} \cdot (\frac{\vec{P}}{R}) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{R} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla}(\frac{1}{R})$ .

## Lecture 34

Si è discussa la formula generale del potenziale di polarizzazione

mer 19 gen  
2022 13:30

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma_P da'}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_P d\nu'}{R}$$

dove si ha

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

**Esempio.** [immagine] Si consideri una lastra polarizzata. Se  $\vec{P}$  è uniforme si ha  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ . Sulle superfici sopra e sotto si ha  $\sigma_P = \pm P$ . Si ha l'equivalente di una distribuzione planare di cariche. Sulle superfici laterali  $\vec{P} \cdot \hat{n} = 0$ . Questo è vero nel limite ideale.

**Esempio.** Un altro caso notevole in cui si sviluppa una polarizzazione uniforme è quello della sfera. Si consideri una sfera con  $\vec{P}$  uniforme.  $[\mathbf{r}]$  Posto  $\vec{P} = P\hat{u}_z$  allora  $\sigma_P = P \cos \theta$ . Ai poli si ha una densità massima in modulo, mentre all'equatore la densità è nulla.

La sfera è un caso notevole per due motivi. Un dielettrico in un campo elettrico uniforme sviluppa un campo uniforme all'interno solo se il dielettrico è una lastra od una sfera.  $[\mathbf{r}]$  Vale per tutte le forme ellissoidali. L'altro motivo è che quando si vuole studiare la polarizzazione molecolare, si studia il campo di una molecola costruendo un campo locale medio?  $[\mathbf{r}]$

**Campo di polarizzazione di una sfera.** Si studia il campo di polarizzazione  $\vec{E}_{\text{pol}}$  di una sfera con  $\vec{P} = \text{cost.}$  Dall'esempio precedente si capiscono come si distribuiscono le cariche. All'interno della sfera, le cariche si separano e si hanno due nuvole leggermente discostate di carica di segno opposto. Calcolando l'area delle calotte spostate dalla sfera è proporzionale a  $\cos \theta$ . Osservando il sistema da lontano, esso equivale a due cariche  $\pm Q$  puntiformi (che sono il baricentro delle due nuvole) separate. [immagine] Il potenziale si può calcolare come quello di una carica puntiforme. Si ha un dipolo

$$\vec{p}_0 = Q \Delta \vec{z} = Nq \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta \vec{z} = N\vec{p} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$$

dove  $q$  sono le cariche elementari, mentre  $N$  è il numero di cariche per unità di volume. Quindi, il potenziale nella regione esterna risulta essere

$$\varphi(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{u}_r}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Si vuole trovare il potenziale all'interno, ma non vale l'approssimazione della lontananza. Si usa un'altra strategia: si sa che all'interno della sfera ci sono solamente cariche di polarizzazione (non ci sono cariche libere) pertanto [r]. Pertanto, vale l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \varphi = 0$  e si conoscono le condizioni al contorno che sono definite dal potenziale esterno. Il potenziale sulla sfera risulta essere

$$\varphi(r = R) = \frac{P \cos \theta r}{3\epsilon_0} = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

Le soluzioni al problema generale dell'elettrostatica esiste ed è unica. Facendo la derivata seconda rispetto ad ogni coordinata segue che l'equazione di Laplace è verificata e pertanto  $\varphi(r = R)$  è la soluzione anche all'interno:

$$\varphi(r < R) = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

Pertanto il campo di polarizzazione all'interno risulta essere

$$\vec{E}_P(r < R) = -\vec{\nabla} \varphi = -\partial_z \varphi \hat{u}_z = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{u}_z$$

[r] dipende dalla geometria. Per poche geometria vale questo metodo di soluzione. Il campo di polarizzazione esterno risulta essere

$$\vec{E}_P = -\vec{\nabla} \varphi = -\partial_r \left( \frac{P \cos \theta R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_r - \frac{1}{r} \partial_\theta \left( \frac{P \cos \theta R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_\theta = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)$$

Pertanto [immagine] all'interno le linee di campo sono equispaziate e sono tutte in verso opposto al vettore di polarizzazione. All'esterno si ha un campo di dipolo che ha verso opposto rispetto al campo interno. La cosa da notare è la discontinuità del campo quando si passa dall'interno all'esterno e viceversa. Tuttavia, questo è atteso perché  $\Delta \vec{E}_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . All'equazione, entrambi i campi sono paralleli e non si ha discontinuità perché essa compare solo per la componente perpendicolare.

Infatti la variazioni di campo elettrico di polarizzazione tra interno ed esterno risulta essere:

$$\Delta E_\perp = \frac{P}{3\epsilon_0} 2 \cos \theta - \left( -\frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \right) = \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0}$$

questo è un caso particolare. Il campo elettrico generale è la somma del campo elettrico di polarizzazione e del campo esterno [r]. Si ha polarizzazione uniforme solo se il campo esterno è uniforme. Dunque

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$$

si consideri  $\vec{E}_0$  uniforme e pure  $\vec{P}$ . Allora si può scrivere

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{E}}{3} \chi_E \implies \vec{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0$$

si sa che per mezzi omogenei e lineari? [r] (cioè non presentano anisotropie?) si ha  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}$ .

Si ricorda che  $\chi_E = \epsilon_r - 1$ . [r]

Inoltre  $|E| < |E_0|$ .  
immagine

Se la sfera fosse un conduttore, allora le linee di campo sarebbero perpendicolari alla superficie; ma per un dielettrico non è questo il caso. Inoltre, la discontinuità passando attraverso la superficie rimane.

**Caso generale.** Si riscrivono le equazioni di Maxwell considerando la carica di polarizzazione. Se la polarizzazione non è uniforme le cose si complicano. La carica di polarizzazione è

$$0 \neq Q_P = \int_V \rho_P d\nu = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d\nu$$

la carica in un mezzo dielettrico rimane nulla anche quando si polarizza. Quando si polarizza un dielettrico, della carica deve uscire [r]

Questo si vede infatti da

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d\nu = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{a} \iff Q_P = Q'_P$$

la carica di polarizzazione deve essere identica alla carica che fluisce? [r].

Si immerga una carica puntiforme  $q$  in un campo uniforme. Essa attira le cariche negative e respinge quelle positive. Considerando una regione [r]  
immagine

In riferimento alla legge di Gauss, si ha

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_P + \rho d\nu \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_P + \rho)$$

alle volte  $\rho_P = \rho_b$  dove  $b$  indica bound e  $\rho = \rho_f$  dove  $f$  indica free. Si mettono in relazione il campo elettrico con le sorgenti, ma il termine  $\rho_P$  dipende ancora dal campo elettrico: l'equazione è formalmente corretta, ma è scomoda nella pratica. Sapendo che  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  segue

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

si ha un vettore che è la combinazione del campo elettrico e della polarizzazione; tale vettore definisce il campo  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  di induzione elettrica o campo elettrico ausiliario. Non si risolve il problema fin quando non si conosce la relazione tra  $P$  ed  $E$  [r]. Bisogna conoscere  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$  per risolvere un problema nei mezzi dielettrici.

In generale, si ricostruisce per via empirica la relazione tra  $P$  ed  $E$ . Per i dielettrici lineari ed omogenei, la relazione risulta essere

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}$$

pertanto

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

si ha una relazione di proporzionalità controllata da  $\chi_E$ . Dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica del mezzo.

**Esempio.** Si studia il campo elettrico generato da una carica puntiforme immersa in un dielettrico. Il campo elettrico nel vuoto  $\vec{E}_0$  ha simmetria sferica. Se il dielettrico è omogeneo e lineare allora  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}$  (con  $\vec{E} \neq \vec{E}_0$ ) e ci si aspetta che il campo nel dielettrico segua una simmetria sferica. Dunque, per Gauss

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_V \rho d\nu \iff D(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \iff \vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$$

per risalire al campo elettrico si ha

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$$

[r] Una volta trovato il campo  $\vec{E}$  si trova la polarizzazione tramite  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E}$ .

Il campo non è sempre caratterizzato solamente da tale equazione. L'altra equazione è quella del rotore che rimane identica (perché non è legata alle sorgenti). Pertanto, le due equazioni di Maxwell nel limite statico con un dielettrico sono

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

non si utilizza  $\vec{\nabla} \times \vec{D}$  perché non è scontato che  $\vec{P}$  sia conservativo. Queste equazioni sono importanti per ricavare la forma generale [r]

**Caso generale.** Si consideri l'interfaccia tra due mezzi con costante dielettrica  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  con campi elettrici  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$ . In generale i due campi sono diversi e quindi pure le polarizzazioni sono diverse. [r]

Il campo elettrostatico è conservativo e si può calcolare la circuitazione su di un circuito attraverso l'interfaccia con lati ad essa paralleli e si ha [immagine]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1,\parallel} l - E_{2,\parallel} l + \left( \lim_{h \rightarrow 0} E \right) = 0 \implies E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel}$$

Ora si osserva la componente perpendicolare, utilizzando Gauss nell'ipotesi che non ci sia carica libera all'interfaccia. Quindi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

Si considera una superficie cilindrica di altezza  $h$  infinitesima posta tra l'interfaccia. Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = (D_{1,\perp} - D_{2,\perp}) A = 0 \iff D_{1,\perp} = D_{2,\perp}$$

dunque la componente ortogonale è continua quando ci si sposta da un mezzo all'altro. Tuttavia, questo implica che il campo elettrico sia comunque discontinuo. Infatti la relazione si scrive come

$$\varepsilon_1 E_{1,\perp} = \varepsilon_2 E_{2,\perp}$$

[r] Dalle proprietà fondamentali del campo si sa che  $\Delta E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ . Si calcola tale differenza

$$\Delta D_\perp = \Delta(\varepsilon_0 E_\perp + P_\perp) = 0 \implies \Delta E_\perp = -\frac{\Delta P_\perp}{\varepsilon_0} = \frac{\vec{P}_1 \cdot \hat{n}}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{P}_2 \cdot \hat{n}}{\varepsilon_0} =$$

[r] che sono le due densità di carica di polarizzazione. [r]

Passando da un mezzo all'altro si ha  $E_{1,\perp} < E_{2,\perp}$  perché  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ .

Posto  $\varphi$  costante ai capi di un condensatore, nel vuoto si ha una certa carica  $Q$ , in un dielettrico si ha una carica  $Q' = \varepsilon_r Q$  e vale  $C' = \varepsilon_r C$ . L'energia immagazzinata nel campo risulta essere

$$U = \frac{1}{2} C \varphi^2 \rightsquigarrow U = \frac{1}{2} C' \varphi^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C \varphi^2$$

ci si aspetta che l'energia nel dielettrico sia maggiore. Inoltre, l'energia si può scrivere come

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 d\nu \rightsquigarrow U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V E^2 d\nu = \frac{1}{2} \int_V D E d\nu$$

## 12.2 Campi variabili

Questa parte non è soggetta alla valuta della prova scritta.

Se si ha un campo  $\vec{E}$  variabile allora pure  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E}$  è variabile e quindi le cariche si spostano anche solo localmente; pertanto, la polarizzazione può generare un campo magnetico variabile [r].

Pertanto la variazione del dipolo è

$$d\vec{p} = q d\vec{s} \implies N d\vec{p} = Nq d\vec{s} \iff d\vec{P} = \rho d\vec{s}$$

dove  $d\vec{s}$  è lo spostamento infinitesimo. Osservando tale relazione nell'unità di tempo si ha

$$\partial_t \vec{P} = \rho \vec{v} = \vec{J}_P$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità locale delle cariche. Vale l'equazione di continuità. Infatti

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P = \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = -\partial_t \rho_P \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P + \partial_t \rho_P = 0$$

il flusso della corrente corrisponde alla variazione delle cariche (attraverso una superficie).

Il rotore del campo magnetico diventa

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{J}_P = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \partial_t (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \partial_t \vec{D}$$

ricordando che  $\vec{J}_P = \partial_t \vec{P}$ . [r]

## Lecture 35

[r]

lun 24 gen  
2022 13:30

## 13 Magnetismo nella materia

Nella magnetizzazione [r] si possono avere fenomeni proporzionare [r]

La maggior parte dei materiali è costituita da diamagnetici [r]

Come per la polarizzazione, si discute l'origine microscopica di tali fenomeni dando modelli semiclassici per capire l'origine del paramagnetismo e del diamagnetismo; mentre per il ferromagnetismo [r]; poi si fa la descrizione dei campi macroscopici attraverso un vettore analogo a quello della polarizzazione.

Il percorso è lo stesso per la polarizzazione, non si ripete ogni cosa, ma si evidenziano le differenze.

**Sorgente elementare.** [r] [immagine] Si è visto

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

dove  $\vec{m} = ia\hat{u}_z$ , con  $a$  area. Si è ricavato tale risultato per una spira quadrata e per una spira arbitraria. Il campo  $\vec{A}$  è equivalente a quanto scritto nello sviluppo in multi poli

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}$$

[r]

Si vede come pure  $\vec{A}$  si trova da uno sviluppo in multipoli.

Il potenziale vettore deve soddisfare l'equazione per ciascuna componente

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

la cui soluzione formale è

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d\nu'$$

Se si ha un anello allora si ha

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l}}{R}$$

per cui vale  $\vec{J} d\nu = i d\vec{l}$ . Si fa lo sviluppo di

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + o \left( \frac{r'}{r} \right)^3 \right]$$

si ha lo stesso sviluppo del potenziale scalare; solamente si ha un risultato diverso

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[ \frac{1}{r} \oint_c d\vec{l} + \frac{1}{r^2} \oint (\vec{r}' \cdot \hat{u}_r) d\vec{l} + \dots \right]$$

dove il primo termine nelle parentesi è il termine di monopolo, mentre il secondo è il termine di dipolo. Tuttavia, il primo integrale è zero, perché si integra la sorgente sempre su di una linea chiusa. [r]

Il secondo termine è una corrente per un'area. Si dimostra che

$$\oint_c (\vec{r}' \cdot \hat{u}_r) d\vec{l} = -\hat{u}_r \times \oint_S d\vec{a}$$

dove  $S$  è la superficie con  $c$  come frontiera. La dimostrazione si può trovare negli esercizi 1.23, 1.61, 1.62 del Griffiths. Dunque, l'integrale chiuso è un'area e si ottiene  $m = ia$ , così dimostrando l'espressione iniziale di  $\vec{A}$ .

**Esempio.** [immagine] Si consideri un anello circolare di raggio  $b$ . [r] Si considera un vettore  $\vec{r}$  nel piano  $yz$ . Si ha

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= \cos \theta \hat{u}_z + \sin \theta \hat{u}_y \\ \vec{r}' &= b \cos \varphi \hat{u}_x + b \sin \varphi \hat{u}_y \end{aligned}$$

Da cui si ottiene

$$\vec{r}' \cdot \hat{u}_r = b \sin \theta \sin \varphi$$

Il tratto del circuito si può scrivere come

$$d\vec{l} = b d\varphi \hat{u}_\varphi$$

Integrando in  $\varphi$ ,  $\hat{u}_\varphi$  non è costante e conviene esprimerlo nelle coordinate cartesiane di modo che gli assi del sistema di riferimento siano fissi durante l'integrazione. Quindi

$$d\vec{l} = b d\varphi (-\sin \varphi \hat{u}_x + \cos \varphi \hat{u}_y)$$

Dunque, l'integrale di interesse è

$$\oint (\hat{u}_r \cdot \vec{r}') d\vec{l} = b^2 \sin \theta \int_0^{2\pi} [-\sin^2 \varphi \hat{u}_x + \sin \varphi \cos \varphi \hat{u}_y] d\varphi = -\pi b^2 \sin \theta \hat{u}_x = -\hat{u}_r \times \pi b^2 \hat{u}_z$$

dove il secondo termine del prodotto vettoriale è l'area della spira.[r]

Per  $r \gg r'$  si ha

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta]$$

la cui espressione è identica a quella del campo elettrico.

Un materiale è fatto di tanti correnti atomiche [r]. Per capire come si magnetizza un mezzo, bisogna studiare le azioni meccaniche del campo sul dipolo magnetico.

Si è visto valere l'equivalenza  $\vec{m} = Ia \hat{u}_z$ . Per comprendere l'interazione tra  $\vec{m}$  e  $\vec{B}$  si considera un dipolo elementare [r]. Si consideri una spira rettangolare di lati  $b$  e  $c$  ed un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ . Sui lati si sviluppa una forza che per tramite la formula di Laplace risulta essere

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

[r] Sui lati  $c$  le forze sono uguali ed opposte. Sui lati  $b$  si ha

$$F_b^\pm = ibB \sin \theta$$

La risultante di tutte le forze è nulla, ma c'è un momento torcente (calcolato per un vertice qualunque)

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_b = \Delta \vec{r} ibB \sin \theta = icbB \sin \theta = \vec{m} \times \vec{B}$$

dove  $\vec{m} = icb \hat{u}_z$ ; si ha la relazione analoga del dipolo magnetico  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ . Il momento magnetico tende ad orientarsi alla direzione del campo. Si ha una configurazione di equilibrio stabile per  $\vec{m} \parallel \vec{B}$ , dunque è una configurazione di minima energia potenziale [r]. Si ha

$$dU = -dW = -\tau d\theta = mB \sin \theta d\theta$$

si ha un segno positivo perché il momento torcente richiama il sistema alla posizione di equilibrio. Quindi

$$U_m(\theta) = \int_0^\theta mB \sin \theta d\theta = -mB \cos \theta + \text{cost} = -m\vec{B}$$

che è identico al potenziale del dipolo elettrico  $U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ ; tuttavia, l'energia del dipolo elettrico è tutta l'energia del sistema; per il dipolo magnetico, l'energia potenziale non include tutti i termini di energia, ma solamente i termini di energia meccanica; questo deriva dal fatto che il campo magnetico non è conservativo.

Si consideri una spira quadrata con un momento magnetico  $\vec{m}$  ed un campo uniforme  $\vec{B}$  allineato con  $\vec{m}$ . Dunque si hanno due forze  $F_1$  e  $F_2$  sull'asse  $x$ . L'energia potenziale è l'opposto del lavoro per portare tale spira dall'infinito ad  $x_1$  risulta essere

$$U_m = - \int_{+\infty}^{x_1} F_1 dx + \int_{+\infty}^{x_2} F_2 dx = -ibB(x_1 - x_2) = -ibB\Delta x = -mB$$

si ricorda [r]

Tuttavia, se  $\vec{B}$  non è uniforme, allora il flusso attraverso l'area cambia, dunque per avere la stessa corrente nel circuito bisogna avere una forza elettromotrice che sostenga la corrente. [r] Similmente se si ruota il dipolo: cambia l'area su cui si integra il flusso e si ha una corrente indotta.

L'espressione  $U_m$  è utile per fare problemi di equilibrio meccanico, ma non [r].

## Lecture 36

[r] Se il campo magnetico non è uniforme, si ha anche una forza netta sul dipolo:

$$\vec{F}_m = -\vec{\nabla} U_m = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

questa espressione è diversa da quella del dipolo elettrico:

$$\vec{F}_e = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

mar 25 gen  
2022 16:30

Sviluppando la prima espressione si ha una somma di quattro termini

$$\vec{F}_m = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \text{termini con scambio di } \vec{B} \text{ e } \vec{m}$$

[r] Il motivo di tale complicazione è che  $\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$ . [r] Si può prendere nullo su sistemi elementari perché, in termini integrali,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concat}}$$

senza altre sorgenti [r]. Per cui si ritrova l'espressione

$$\vec{F}_m = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

dove

$$F_i = (m_x \partial_x + m_y \partial_y + m_z \partial_z) B_i, \quad i = x, y, z$$

**Esempio.** [immagine] Si consideri un solenoide finito. Uscendo dal solenoide, il campo si chiude ed esso non è uniforme: il suo gradiente non è nullo. Si consideri una spira di raggio  $b$  coassiale al solenoide posta al di sopra del solenoide. Ad essa si associa un momento magnetico

$$\vec{m} = i\pi b^2 \hat{u}_z$$

Si studia la forza che agisce sulla spira. [r] Dunque, l'espressione si traduce in

$$\vec{F} = m \partial_z B \hat{u}_z, \quad \partial_z B < 0$$

Siccome l'intensità del campo diminuisce allontanandosi, il momento magnetico è verso l'alto, il campo magnetico decresce e dunque la forza è verso il basso. [r]

Si può calcolare la forza in maniera diretta, tramite Laplace:

$$F = \oint_c i d\vec{l} \times \vec{B}$$

per simmetria, il campo è costante lungo l'anello, con una componente radiale e verticale. La corrente è in senso antiorario e dunque per punti diametralmente opposti si ha una forza verso l'esterno  $F_{B_z}$  uguali ed opposte ed una forza verso il basso  $F_{B_r}$  che si sommano. Pertanto

$$F = i2\pi r B_r$$

Si dimostra essere uguale all'espressione trovata precedentemente. Si consideri un cilindro di altezza  $dz$  simile alla spira. Il flusso attraverso la sua superficie esterna è nullo. Quindi

$$\begin{aligned} \Phi(B) &= B_z(z + dz) \cdot \pi b^2 - B_z(z) \pi b^2 + B_r 2\pi b dz \equiv 0 \\ \iff \Phi(B) &= \partial_z B_z \pi b^2 dz + B_r 2\pi b dz = 0 \end{aligned}$$

questo significa che

$$i\pi b^2 \partial_z B_z = -2\pi b B_r i \iff m \partial_z B_z \hat{u}_z = \vec{F}$$

[r] Si chiamano diamagnetici, paramagnetici o ferromagnetici in base se la magnetizzazione è parallela od antiparallela [r].

Si consideri un solenoide collegato ad un condensatore carico [immagine]. Ponendo un chiodo nel solenoide si ha una pistola. [r]



### 13.1 Diamagnetismo

[immagine] Si studia quando la magnetizzazione è anti parallela a  $\vec{B}$ . Il diamagnetismo è associato al moto degli elettroni negli orbitali [r].

che si può esprimere come  $\vec{m} = i\pi r^2 \hat{u}_z$ , dove  $r$  è il raggio dell'orbita. Quest'espressione si può manipolare ricordando che

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r} v$$

dove  $T$  è il periodo del moto orbitale e  $e$  è la carica dell'elettrone. Sostituendo nell'espressione della magnetizzazione si ha

$$\vec{m} = \frac{1}{2} e r v \hat{u}_z$$

Si ricorda che il momento angolare è definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

Dunque, a meno di una massa,  $\vec{m}$  risulta essere il momento angolare [r]:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

il meno compare perché  $\vec{L}$  è verso il basso. Questo è il momento magnetico associato al moto degli elettroni. Così si ha un dipolo magnetico elementare. [r]

Quando si accende un campo magnetico, il moto viene alterato perché il campo magnetico esercita un momento torcente sul momento magnetico:

$$\vec{\tau}_B = \vec{m} \times \vec{B}$$

e si introduce un'equazione della dinamica del momento angolare

$$\vec{\tau} = d_t \vec{L}$$

dato che  $\vec{m}$  è legato ad  $\vec{L}$ ; nella dinamica si ha un momento torcente che modifica la posizione di  $\vec{L}$ . Un fenomeno simile si è visto in Fisica I con il momento di precessione. [r]

**Moto di precessione.** [immagine] Si ha un momento torcente

$$\vec{\tau}_B = -\frac{e}{2m} \vec{L} \times \vec{B}$$

si consideri  $\vec{B}$  uniforme rispetto all'asse  $z$  ed il momento angolare  $\vec{L}$  con direzione casuale. Posto  $\theta$  l'angolo tra i due, si ha

$$\vec{\tau}_B = \frac{e}{2m} B L \sin \theta \hat{u}_\varphi$$

dove  $L \sin \theta$  risulta essere  $L_r$  cioè la componente radiale di  $\vec{L}$ . [r]

Nell'equazione del moto deve valere  $\vec{\tau} = d_t \vec{L}$ . Pertanto

$$d_t L_z = 0, \quad d_t L_r = 0, \quad L_r d_t \varphi = \tau_B$$

si ricorda che  $\vec{L} = L_z \hat{u}_z + L_r \hat{u}_r$  e la sua derivata è

$$d_t \vec{L} = d_t L_z \hat{u}_z + d_t L_r \hat{u}_r + L_r d_t \hat{u}_r$$

con  $d_t \hat{u}_r = d_t \varphi \hat{u}_\varphi$ . [r]

Esplicitando

$$d_t \varphi = \frac{eB}{2m} \frac{L \sin \theta}{L \sin \theta}$$

si ha un modo di precessione che è proporzionale a  $eB$  ed al [r]. Questa è la frequenza di Larmor [r]. Dunque i momenti magnetici ruotano attorno a  $\vec{B}$ .

Si consideri un sistema in cui bisogna portare un campo magnetico da un valore nullo ad un valore arbitrario  $B$ : cioè si ha un campo variabile. Si ha l'anello di corrente associato al moto dell'elettrone. Si supponga che  $\vec{B}$  sia verso il basso. Il flusso del campo magnetico attraverso l'anello varia. Sull'anello si ha un campo elettrico indotto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

il campo magnetico cresce verso il basso, dunque il campo elettrico segue la corrente nell'anello (che è opposta al moto dell'elettrone). Tale campo elettrico sviluppa una forza sull'elettrone

$$F_e = -e\vec{E}$$

che ne aumenta la velocità. La corrente aumenta e quindi aumenta il momento magnetico. [r] Il momento torcente risulta essere

$$\vec{\tau}_E = \vec{r} \times \vec{F}_e = -\dot{u}_z$$

si nota che  $\vec{\tau}_E \parallel \vec{L}_z$  perché è opposto al momento magnetico. Per una situazione più complicata con un angolo, si genera comunque una componente lungo l'asse  $z$  di campo elettrico. Dunque le equazioni diventano

$$\tau_E = d_t L_z, \quad 0 = d_t L_r, \quad L_r d_t \varphi = \tau_B$$

Si hanno [r]

La velocità di precessione varia solamente con  $B$ , però la componente  $L_z$  aumenta per effetto di  $\tau_E$ .

Si calcola  $\tau_E$ . Bisogna calcolare il campo elettrico. La variazione del flusso del campo magnetico attraverso l'anello è la circuitazione del campo magnetico:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \iff E 2\pi r = \pi r \partial_t B \iff E = \frac{r}{2} \partial_t B$$

sostituendo nell'espressione di  $\tau_E$  si ottiene

$$\Delta L \propto \Delta B$$

[r] Tuttavia

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

dunque  $m$  cambia proporzionalmente a  $\Delta B$ , ma che si manifesta in modo opposto al campo magnetico.

Questa derivazione è di tipo semi-classico perché non tutti i valori di  $L_z$  sono disponibili in sistemi quantizzati.

guarda segni negli appunti.

La componente radiale rimane invariata  $d_t L_r = 0$ , dunque l'orbita dell'elettrone è sempre la stessa. Dato che  $L_r d_t \varphi = \tau_B$  è proporzionale al campo, l'elettrone gira sulla stessa orbita con velocità maggiore o minore. La forza centripeta che garantisce la stessa orbita è la forza di Lorentz proporzionale a  $vB$  [r]

Quindi si è visto che  $\Delta \vec{m} = -\Delta \vec{B}$ .

## 13.2 Paramagnetismo

Il paramagnetismo è un fenomeno differente, esso è prettamente quantistico. In un sistema quantistico, il momento angolare è sempre associato ad un momento magnetico [r] Quindi

$$\vec{\mu} = -g \frac{e}{2m} \vec{S}$$

dove  $\vec{S}$  è il momento angolare? Gli elettroni hanno un momento angolare intrinseco detto spin. [r]

Succede che nella quantizzazione, lo spin ha solamente valori discreti che sono semi-interi per l'elettrone. Individuato l'asse  $z$  su cui si accende il campo magnetico, allora lo spin risulta essere  $S_z = \pm \frac{1}{2}$  (in unità naturali). Siccome è noto che l'energia meccanica associata al momento angolare è  $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{U}$ , allora alle due orientazioni corrispondono energia diverse, una più grande dell'altra. Quando  $\vec{\mu}$  è più vicino al parallelismo l'energia è più bassa. Gli elettroni tendono ad orientarsi come il campo; ma l'orientamento non è mai completo perché è contrastato dall'agitazione termica. Il risultato è che per minimizzare l'energia, il momento magnetico è mediamente orientato come il campo. Così si origina il paramagnetismo [r]. Esso è più forte del diamagnetismo in intensità (che è equivalente alla polarizzazione per deformazione) [r]. Tuttavia, il paramagnetismo avviene in poche sostanze. Questo perché per la regola dell'ottetto e per il principio di esclusione di Pauli, gli spin si bilanciano [r]

### 13.3 Ferromagnetismo

Esso è anche originato dal paramagnetismo. Tuttavia, gli elettroni influenzano lo spin degli elettroni vicini ed assumono la stessa orientazione; ma mediamente non orientato perché si hanno varie regioni con spin diverso. Accendendo un campo magnetico, si modifica lo spin verso una stessa direzione e dato che si ha un'interazione interna, gli atomi ritengono lo spin dal campo. Questa spiegazione è data dalla meccanica quantistica ed è interesse dei teorici per passare dal disordine all'ordine nelle transizioni di fase. Infatti, esiste una temperatura oltre la quale non si ha più magnetizzazione. Questo campo è anche quello per cui Parisi ha preso il nobel nel 2021.

### 13.4 Magnetizzazione

Si introduce un vettore di magnetizzazione

$$\vec{M} = N\vec{m}$$

dove  $N$  è la densità di dipoli per unità di volume. Il momento magnetico ha unità di misura  $[m] = \text{A m}^2$ , dunque quelle della magnetizzazione sono quelle di una corrente di strato

$$[M] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

esattamente come la polarizzazione è una densità superficiale di carica. Ci si aspetta di trovare delle simmetria quando si studiano i campi. Si opera quanto fatto con la polarizzazione. Si consideri un blocco magnetizzato con  $\vec{M}$ . Si considera un volume infinitesimo  $d\nu$  a cui si associa una magnetizzazione  $d\vec{m} = \vec{M} d\nu$ . [r] [immaginare]

Il potenziale vettore risulta essere

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times \hat{u}_r}{R^2}$$

con  $R = \vec{r} - \vec{r}'$ . Quindi

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times \hat{u}_r}{R^2} d\nu'$$

Come per quanto fatto per il potenziale scalare:  $\frac{\hat{u}_r}{R^2} = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)$ . Dunque

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M} \times \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) d\nu'$$

si scrive una relazione che permette di individuare dei termini che si possono associare a delle correnti di magnetizzazione. Ricordando la relazione

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{M} + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

pertanto

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla} \times' \vec{M}}{R} d\nu' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) d\nu'$$

In generale si sa che

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d\nu'$$

che si può identificare nel primo integrale dell'espressione precedente:  $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  viene detta densità di corrente di magnetizzazione, che vive nel volume. Ci si aspetta che il secondo integrale viva sulla superficie. Ricordando

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{F} dx dy dz = \int_V [\partial_y F_z - \partial_z F_y] \hat{u}_x + \dots dx dy dz = \int_S (F_z dx dz - F_y dx dy) \hat{u}_y$$

dove  $dx dz = da_y$  è un'area e dunque si ha  $-\vec{F} \times d\vec{a}$ . Quindi

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla} \times' \vec{M}}{R} d\nu' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{M}}{R} \times d\vec{a} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_M}{R} d\nu' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}_M}{R} da$$

dove si ha  $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  e  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$ . La prima esiste solamente se  $\vec{M}$  non è uniforme; la seconda esiste sempre.

Analogamente per la polarizzazione si ha  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$  e  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ .

**Magnetizzazione uniforme.** [immagine] Si consideri una corrente di magnetizzazione di strato/superficie  $\vec{M}$  uniforme. Si consideri un prisma con base di forma arbitraria con altezza  $dz$ . Si consideri di dividere la figura in tanti prismi a base quadrata in cui si ha un momento magnetico

$$d\vec{m} = \vec{M} da dz$$

Si può sempre associare il momento magnetico ad una corrente in un anello. Quindi

$$i da = M da dz \implies M = \frac{i}{dz}$$

che è esattamente quanto si è visto per una corrente di strato [r]. Si può far questo per ciascun quadratino; per  $\vec{M}$  uniforme ed aree  $da$  uguali, la corrente netta è quella che circola sulla superficie laterale esterna e si ha  $\vec{M} \times \hat{n} = \vec{K}_M$ .

Per le due basi si ha  $\vec{M} \parallel \hat{n}$  e quindi  $\vec{K}_M = 0$ . Al contrario, le distribuzioni superficiali di polarizzazione si distribuiscono sulle due basi.

Un magnete permanente con vettore di magnetizzazione costante è equivalente ad un solenoide con corrente  $i = Mz$ . Tuttavia, il calcolo fatto per  $\vec{A}$  assume l'ipotesi di essere lontani e quindi all'esterno del solenoide. [r]

Tuttavia, si può portare avanti un'argomentazione simile a quella utilizzata nell'analogia con un condensatore nel vuoto. [r] In questo caso la relazione equivalente è quella del flusso [immagine]

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Si considera un solenoide nel vuoto con una corrente  $i$ . Si consideri una superficie chiusa che taglia l'induttore e ne contenga un estremo. Allora

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{ext}}} \vec{B} \cdot d\vec{a} + \int_{S_{\text{int}}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

mentre considerando la stessa superficie, ma per l'oggetto magnetizzato si ha

$$\int_{S_{\text{ext}}} \vec{B}_M \cdot d\vec{a} + \int_{S_{\text{int}}} \vec{B}_M \cdot d\vec{a} = 0$$

[r] Tuttavia,

$$\int_{S_{\text{ext}}} \vec{B}_M \cdot d\vec{a} = \int_{S_{\text{ext}}} \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

dunque il campo interno dev'essere uguali nei due casi. [r]

Quindi per il magnete permanente, il campo all'interno è uniforme e poi agli estremi curva. [immagine] Sulle superfici laterali, il campo magnetico ha una discontinuità perché è presente una corrente di strato e si sa che  $\Delta B_{\parallel} = \mu_0 K_M$ . Sulle superficie della base, le linee di campo si raccordano perfettamente. [r]

Quando si attacca un magnete ad un ferromagnete, non ha un'importanza con quale lato si appoggia. [r]

Ponendo una pila con pezzo di ferro su una base in un filo di ferro, si crea una corrente che crea un campo magnetico e la pila si muove. [r]

## Lecture 37

mer 26 gen  
2022 13:30

Si osserva come emerge  $\vec{J}_M$  quando si ha una magnetizzazione non uniforme? [r]

[immagine] Si consideri una magnetizzazione. Si isola la componente  $z$  e si suppone che dipenda proporzionalmente da  $y$ :  $M_z(y)$ . Alla magnetizzazione si può associare un dipolo magnetico  $d\vec{m} = \vec{M} da dz$ , dove  $da$  è l'elemento infinitesimo d'area. Dalla relazione del dipolo magnetico si ha

$$i da = M da dz \implies i = M dz$$

il dipolo magnetico è associato ad una corrente elementare che fluisce sulla superficie laterale del volume infinitesimo. Tra due volumi adiacenti sull'asse  $y$  si ha una corrente netta sulla faccia condivisa data da

$$I = [M_z(y + dy) - M_z(y)] dz = \partial_y M_z dy dz$$

si nota che l'area di un volume infinitesimo è  $dy dz$  e dunque

$$J_x = \frac{I}{dy dz} = \partial_y M_z$$

Similmente, si considerano due volumi adiacenti sull'asse  $z$ . Si considera la magnetizzazione  $M_y(z)$ . Ancora una volta, la densità di corrente netta sulla faccia condivisa è

$$J_x = -\partial_z M_y$$

Facendo la stessa discussione per due volumi adiacenti lungo  $x$ , con una componente  $M_x$  si avrà una componente della densità di corrente lungo  $y$  e mai lungo  $x$ . Pertanto

$$J_x = \partial_y M_z - \partial_z M_y$$

questo implica che

$$J_z = (\text{curl} \vec{M})_x$$

Risulta evidente che si ruotino gli assi in senso destrorso si ha la relazione

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Questa è una grandezza fondamentale associata alla magnetizzazione, sono manifestazione della geometria finita del corpo magnetizzato.

Infatti,  $\vec{K}_M$  è comodo per calcolare configurazioni di campo magnetico [r]. Quando si scrive la relazione tra campi e sorgenti basta  $\vec{J}_M$ .

Si consideri un prisma con base arbitraria. Si supponga che la magnetizzazione esterna sia  $\vec{M} = 0$ . Precedentemente si è calcolato l'integrale sul volume e sulla superficie; ma l'integrale si può calcolare su tutto lo spazio [r].

[immagine] Si consideri la presenza di una corrente superficiale sulla superficie laterale del prisma

$$I_M = \int \vec{J}_M \cdot d\vec{a}$$

Considerando una superficie semi inserita nella superficie laterale con dimensioni  $h$  orizzontale,  $dz$  verticale. La corrente si può esprimere come

$$I_M = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{M} \cdot d\vec{a} = \oint_c \vec{M} \cdot d\vec{l} \stackrel{h \rightarrow 0}{=} \vec{M} dz \hat{u}_z$$

nel limite di  $h \rightarrow 0$ . Cioè si ha

$$I_M = M_{\parallel} dz$$

questa è l'espressione che si è già trovata  $i = M dz$ . Per isolare la componente parallela di un vettore alla superficie si usa  $|\vec{M} \times \hat{n}| = M_{\parallel}$ . [r]

Nelle equazioni di Maxwell, bisogna utilizzare  $\vec{J}_M$ , mentre  $\vec{K}_M$  compare dalla geometria del corpo. [r]

### 13.5 Leggi di Maxwell

I risultati sono stati ottenuti assumendo che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , ma è sempre vera perché  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  dato che anche nella magnetizzazione, le sorgenti sono sempre dipoli. Mentre per la seconda legge si ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_M = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

e questa vale per campi statici. Nella seconda uguaglianza compaiono solamente correnti libere. Dunque si può scrivere

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

e si può definire il campo magnetico (ausiliario)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

che dipende solamente dalle correnti libere e dalla densità di una corrente di magnetizzazione. Pertanto

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

con  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Si ha una simmetria nelle formule.

La legge di Ampère in forma integrale diventa

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

dunque  $\vec{H}$  dipende solamente dalla corrente libera; similmente  $\vec{D}$  dipende dalle cariche libere. Sebbene, sia il campo  $\vec{D}$  quello fondamentale, non si usa; ed al contrario per  $\vec{H}$  che non è fondamentale ma nella pratica si usa perché direttamente collegato alla corrente  $I$ . Questo perché  $\vec{D}$  non è direttamente collegato alle cariche, bensì lo è il campo elettrico

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta\varphi_{AB}$$

In un solenoide si ha che il campo magnetico (ausiliario) risulta  $H = ni$  e il campo  $\vec{B}$  corrispondente nel vuoto è  $B = \mu_0 H = \mu_0 ni$ . [r]

Si definisce la suscettività magnetica? [r]  $\chi_m$  come

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

da cui si ottiene

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \implies \vec{H}(1 + \chi_m) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \implies \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \vec{B} \iff \mu\vec{H} = \vec{B}$$

dove si indica  $\mu_r = 1 + \chi_m$  la permeabilità magnetica relativa e pertanto  $\mu = \mu_0\mu_r$ . Pertanto si avrebbe

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Bisogna capire quanto vale la suscettività dielettrica. Si costruisce un grafico  $\vec{B}(H)$ . Si ha una retta con una pendenza  $\mu_0$ . In un materiale diamagnetico la retta ha coefficiente minore. Per uno paramagnetico, la retta ha coefficiente maggiore. Per un materiale ferromagnetico il  $\mu_f$  sale rapidamente fino a saturare. [r]

Si ha

$$\chi_m \approx -10^{-5}$$

per materiali diamagnetici ? [r] Mentre per materiali paramagnetici si ha  $\chi_m \approx +10^{-7} - 10^{-4}$ . Per i materiali ferromagnetici bisogna dare una funzione e tipicamente il range è  $10 - 10000$ .

Il ferromagnetismo dipende dalla storia del campo (isteresi?) quando [r]

Il campo  $H$  si misura per mezzo di un solenoide con corrente  $i$  perché  $H = ni$ . Mentre  $B$  si misura come campo indotto in un altro solenoide sovrapposto al solenoide precedente, in quanto vale

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\partial_t \vec{E}$$

e quindi bisogna misurare la forza elettromotrice. Tuttavia, se la corrente è statica, allora il campo magnetico  $B$  è nullo. Quindi bisogna costruire il grafico tramite correnti che variano. Dunque, si misura la carica che si ha nel circuito indotto perché

$$Q = \frac{S\Delta B}{R}$$

[r]

**Esempio.** [immagine] Si consideri un cilindro di un materiale conduttore in cui entra una densità di corrente  $\vec{J}$ . Si vuole calcolare la corrente, il campo magnetico? [r]. Il materiale ha permeabilità  $\mu$ . Si considera un circuito di Ampère circolare, quindi

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{concat}} \iff H(r)2\pi r = I_{\text{concat}} \implies H(r) = \frac{I_{\text{concat}}}{2\pi r}$$

la corrente è diversa in base se il circuito si trova dentro o fuori dal cilindro. Quindi

$$H(r) = \begin{cases} \frac{Jr}{2}, & r < R \\ \frac{JR^2}{2r}, & r > R \end{cases}$$

dunque il campo magnetico risulta essere

$$B(r) = \begin{cases} \mu_r\mu_0\frac{Jr}{2}, & r < R \\ \mu_0\frac{JR^2}{2r}, & r > R \end{cases}$$

per tutti i materiali diamagnetici e paramagnetici si ha  $\mu_r = 1$  in una parte su  $10^5$ . Ma in un ferromagnete, il campo è, per la maggior parte, confinato all'interno del conduttore. Inoltre, compare una discontinuità nella componente parallela del campo magnetico

$$\Delta B_{\parallel} = \mu_0 K_M$$

**Equazione di continuità.** Si ottiene l'equazione di continuità [r]. Si considerino due mezzi adiacenti con permeabilità  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Per una superficie cilindrica con altezza  $h \rightarrow 0$  tra i due mezzi si deve avere un flusso nullo e quindi [r]

$$B_{1,\perp} = B_{2,\perp}$$

Per  $H$  ci si pone in una configurazione in cui non si abbiano correnti libere. Si considera un circuito tra i due corpi e per  $h \rightarrow 0$  si utilizza la circuitalità  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$  per cui

$$H_{1,\parallel} = H_{2,\parallel}$$

questa relazione è locale. Da qua si ha

$$\frac{B_{1,\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2,\parallel}}{\mu_2}$$

Quindi si ha una discontinuità nella componente parallela. Infatti

$$\Delta H_{\parallel} = \Delta \left( \frac{B}{\mu_0} - M \right)_{\parallel} \implies \Delta B_{\parallel} = \mu_0 \Delta M_{\parallel}$$

si ricorda che  $M_{\parallel} = \left| \vec{M} \times \hat{n} \right| = K_M$ . Pertanto sulla superficie di contatto si hanno due correnti [r]

Nel caso dell'esempio precedente, il campo magnetico è

$$B(r) = \begin{cases} \mu_r \mu_0 \frac{Jr}{2}, & r < R \\ \mu_0 \frac{JR^2}{2r}, & r > R \end{cases}$$

Per cui

$$B^{\text{int}}(R) = \mu_r \mu_0 \frac{J\pi R^2}{2\pi R}, \quad B^{\text{ext}}(R) = \mu_0 \frac{J\pi R^2}{2\pi R}$$

da cui segue

$$\Delta B = (\mu_r - 1) \mu_0 \frac{I}{2\pi R} = \chi_m \mu_0 H = \mu_0 M_{\parallel}$$

[r]

Si considerino due solenoidi, uno in ferro ed uno nel vuoto. [r] In entrambi i casi

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni$$

il campo interno è  $H_{\text{int}} = ni$ , con  $n = \frac{N}{L}$ , dove  $L$  è la lunghezza. Nel ferro si ha

$$B_F = \mu_r \mu_0 ni$$

mentre nel vuoto

$$B_0 = \mu_0 ni$$

In un materiale, si può ottenere lo stesso campo, ma con corrente minore che nel vuoto.

Però risulta difficile mettere un solenoide in un blocco di ferro. Quello che si fa è creare un blocco di ferro a forma di "C" (detto traferro? [r]) avvolgendo sulla sinistra il solenoide [r]. Nella parte destra della "C" si ha un campo fruibile perché le linee di campo seguono il metallo e quindi si chiudono passando nello spazio vuoto.

Inoltre, dato che il solenoide è finito, oltre il solenoide il campo deve chiudersi, quando incontra la divisione tra ferro ed aria si ha che

$$B_{\text{ext}} = B_{\perp}^{\text{int}} \hat{u}_{\perp} + \frac{B_{\parallel}^{\text{int}} \hat{u}_{\parallel}}{\mu_r}$$



[r] quindi la maggior parte del flusso è costretto a seguire il ferro. [r] [immagine] Inoltre, il campo è confinato e non si hanno mai mutue induttanze. Si considerino due percorsi lungo la superficie estrema dell'anello su cui è avvolto il solenoide; una superficie poco interna ed una poco esterna. Dunque si ha

$$\oint_{c_1} \vec{H}_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = I = \oint_{c_2} \vec{H}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}$$

[r] la corrente concatenata è la stessa ed i percorsi sono identici a meno di un infinitesimo. Pertanto  $H_1 = H_2$  da cui  $B_1 \gg B_2$  perché  $B_1 = \mu_r B_2$ . [r] Per la figura a "C", con lunghezza del circuito di  $H$  e intervallo  $s$  del traforo, si ha

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \iff \int_{l-s} H_1 dl + \int_s H_2 dl$$

dato che  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ , in assenza di campo disperso ed a sezione costante, il campo magnetico rimane costante. [r] Dunque pure  $H$  è costante. Perciò

$$H_1(l-s) + H_2s = ni$$

Inoltre, si sa che quando si passa sull'interfaccia del traferro si ha che  $\Delta B_{\perp} = 0$  e quindi

$$B_2 = B_1$$

[r] Per tanto

$$\frac{b_1}{u_1}(l-s) + \frac{B_2}{u_2}s = ni \implies B_2^{\text{trafer}} = \frac{ni}{\frac{l-s}{u_1} + \frac{s}{u_2}} = \frac{\mu_1 ni}{l-s + s \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

[r]

**Campi variabili.** Si aggiungono i termini dei campi variabili alle equazioni di Maxwell.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \mu_0(\epsilon_0 \partial_t \vec{E} + \partial_t \vec{P}) = \vec{J} + \mu_0 \partial_t \vec{D} \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases}$$

il campo elettrico non dipende dalle correnti ma solo dalle variazioni del campo magnetico. Inoltre  $\epsilon_0 \partial_t \vec{E}$  è il termine di Maxwell, mentre il termine  $\partial_t \vec{P}$  è la corrente di polarizzazione. [r]

## Lecture 38

### 14 Campi variabili

mer 02 mar  
2022 08:30

Si inizia l'ultima parte del corso: i campi variabili. Non ha un esame scritto, solamente orale. Si fa un ripasso di quanto già visto.

Interessa stabilire qual è la legge di forza: come le cariche interagiscono tra loro. La legge di forza dipende dalla carica, dalla geometria, dalle velocità e dalle accelerazioni. Si è vista la dipendenza dalla carica, dalla geometria e dalle velocità. Ora si studia la dipendenza della carica dall'accelerazione. Le cariche in moto variabile danno origine a campi con delle caratteristiche particolari che si vogliono studiare.

Si vuole

- discutere le soluzioni particolari nel vuoto ed in assenza di sorgenti. Queste sono le soluzioni ondulatorie. Per "assenza di sorgente" si intende che non è presente localmente, bensì lontano perché altrimenti non si avrebbero campi. Si vede in modo generale come le onde, in questi casi, si propagano nello spazio.

Nel vuoto si hanno delle onde non dissipative, cioè non perdono energia, e non dispersive, cioè la forma della perturbazione rimane invariata nello spazio, questo dipende dalla natura della sorgente: un'onda piana rimane sempre invariata, un'onda cilindrica, o sferica, ha un'ampiezza che diminuisce con la distanza, però la forma con cui si propaga rimane costante.

- stabilire le relazioni tra i campi variabili  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  con le sorgenti  $\rho(\vec{r}, t)$  e  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ . Si discute una soluzione generale per trovare i campi da qualsiasi densità di cariche e correnti. Si utilizza una tecnica simile all'elettrostatica tramite l'introduzione di campi elettrodinamici. Si studiano i campi di radiazione e si studia la radiazione elettromagnetica; entrambi dipendono dall'accelerazione delle cariche e dalla geometria. La legge di forza rimane sempre  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , ma i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  hanno una struttura diversa a causa dei fenomeni variabili. Non si devono nemmeno modificare le leggi di Maxwell, ma bisogna aggiungere la dipendenza dei campi dai fenomeni variabili.
- studiare le soluzioni nei mezzi materiali in cui si hanno fenomeni dissipativi dovuti alla presenza delle cariche del materiale che subiscono una forza, e dispersivi in quanto la velocità di propagazione delle onde dipende dalla frequenza. Come dissipa e disperde dipende dal mezzo: si hanno dielettrici e conduttori, la cui distinzione dipende dalla frequenza: ad alte frequenze i conduttori non sono più ideali. Si discute il comportamento all'interfaccia tra due mezzi: si hanno fenomeni di riflessione e rifrazione che si giustificano non tramite leggi empiriche, ma tramite delle proprietà del campo elettromagnetico. Si pone la base fisica dell'ottica geometrica.
- studiare l'ottica "descrittiva" (contrapposta a quella prescrittiva). L'ottica è stata formulata in maniera descrittiva prima che l'elettromagnetismo ne avesse potuto porre le basi fisiche. Si utilizzano tali basi fino al punto precedente e poi si passa all'approssimazione descrittiva. Il corso copre dai 0 Hz ai  $10^{15}$  Hz, frequenza oltre la quale si ottengono fenomeni quantistici (UV, Raggi X, Raggi  $\gamma$ ) perché l'interazione con i mezzi materiali dipende dalla frequenza. Si è già introdotta la relazione fondamentale (nel vuoto)  $\lambda\nu = c$ . Il bosone di Higgs decade in due fotoni che hanno un'energia pari a  $10^9$  volte la frequenza di un fotone ottico cioè di circa  $10^{24}$  Hz. Lo spettro elettromagnetico è molto vasto, mentre la porzione che si studia nell'ottica è minuscola perché, di fatto, dipende dall'intervallo di trasparenza dell'acqua. In questo corso, si studiano solo i fenomeni dell'ottica, ma la cui descrizione vale anche per frequenze minori.

La matematica necessaria per la soluzione generale (che si tratta nel secondo punto) non è ancora disponibile, pertanto si utilizza una soluzione approssimata di un caso particolare (cioè il primo punto) che però ha senso fisico pieno.

Si ricorda la legge di Gauss nel vuoto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\nu$$

La legge di Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \iff \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

per cui il campo elettrico dinamico non è conservativo e quindi non si può definire un potenziale. La legge di Gauss per il campo magnetico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \iff \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

per cui non si hanno monopoli magnetici. La legge di Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \iff \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

Si ricorda che per ciascuna legge si ha  $\partial S = c$  e  $\partial V = S$ . Tali equazioni sono state usate nella statica per osservare che lontano dalle sorgenti, il campo dipende dalla distanza come  $E \propto \frac{1}{r^2}$  e

$B \propto \frac{1}{r^3}$ . Si sono visti alcuni campi particolari, come il filo infinito che ha dipendenza da  $\frac{1}{r}$ . Ma i campi finiti sono come i due precedenti. I campi di radiazione hanno dipendenza diversa.

Nella legge di Gauss per il magnetismo, si può introdurre un potenziale (vettore)  $\vec{A}$  tale per cui  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Ci si pone nel vuoto e si considera una regione lontano dalle sorgenti. Le equazioni si simmetrizzano

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

In alcune configurazioni particolari, è possibile risolvere tali equazioni senza particolari difficoltà.

[immagine] Si è visto l'esempio di un piano infinito parallelo a  $yz$  con una corrente di strato  $\vec{K} = K \hat{u}_y$ , per cui il campo magnetico è  $\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 K}{2} \hat{u}_z$  (il cui segno dipende da  $x$ ).

Il caso in cui  $\vec{K}$  dipende dal tempo è definito come

$$\vec{K}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ K \hat{u}_y, & t \geq 0 \end{cases}$$

Accendendo il campo, cioè a tempi positivi, bisogna comunque soddisfare il principio di causalità: ad ogni tempo  $t$ , osservatori più distanti di  $ct$  non possono rendersi conto dell'accensione del campo. Pertanto, il campo magnetico è

$$\vec{B} = \begin{cases} 0, & |x| > ct \\ \pm \frac{\mu_0 K}{2} \hat{u}_z, & |x| \leq ct \end{cases}$$

Inoltre, si può scrivere

$$\vec{K}(t) = \vec{K} \theta(t)$$

dove  $\theta(t)$  è la funzione a gradino di Heaviside. Quindi, si può usare la stessa espressione per descrivere il campo ad una coordinata  $x$ :

$$\vec{B}(x, t) = \pm \frac{\mu_0}{2} K \hat{u}_z \theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right)$$

L'osservatore si accorge del ritardo dopo  $ct$ , dunque il campo riflette ciò che è successo alla sorgente, ma con un ritardo. Considerata una corrente di strato

$$\vec{K}(t) = \vec{K} [\theta(t - t_0) - \theta(t - t_1)]$$

si ha una corrente tra  $t_0$  e  $t_1$  (supponendo che  $t_0 < t_1$ ). Quindi, il campo magnetico segue lo stesso andamento con un ritardo di  $\frac{|x|}{c}$  che dipende dalla distanza del punto dalla sorgente.

La funzione  $\vec{K}(t)$  non deve per forza essere a gradini, però ogni funzione la si può considerare come la somma di infinite funzioni a gradini per cui segue immediatamente quanto già detto. Pertanto, si trova una campo la cui espressione dipende da un termine che di fatto è di fase:

$$\theta\left(t - \frac{x}{c}\right) = \theta\left(-\frac{1}{c}(|x| - ct)\right)$$

dove  $|x| - ct$  è l'espressione che si ha nella soluzione ad onde.

Si tratta il caso generale di un'onda piana (generale perché anche onde sferiche sono localmente descritte da onde piane). Ora si considera una zona lontano dalla sorgente. Si ha un campo generato che si propaga con una velocità  $\vec{v}$ . Nell'esempio fatto, è esplicito che il campo ha direzione lungo  $z$  e si propaga lungo  $x$ . Si calcola la variazione di flusso di  $\vec{B}$ . [immagine] Deve essere presente un campo elettrico. Considerato un circuito di Ampère e ricordando che vale  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ , il campo elettrico è ortogonale a  $\vec{B}$ , dunque il campo elettrico è in  $y$  oppure in  $x$ . In una regione senza sorgenti si ha  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pertanto

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0$$

dato che  $\vec{B}$  dipende solamente da  $x$ , allora  $\vec{E}$  dipende solamente da  $x$  (e da  $t$ ). Pertanto, le ultime due derivate sono nulle; da cui segue che  $E_x$  è costante. Tuttavia si cercano soluzioni variabili e dunque si pone  $E_x = 0$ . A questo punto si considera la relazione integrale della legge di Faraday sul circuito di Ampère

$$E_y(x)l = -d_t\Phi_B$$

si ha un unico contributo alla circuitazione, perché nell'altro il campo magnetico è nullo. La variazione di flusso nel circuito dipende dalla variazione di area, non dalla variazione del campo magnetico, perché esso è costante (in modulo). Pertanto

$$E_y(x)l = -d_t(-B_zlv\,dt) = B_zlv \implies E_y = B_zv$$

Si utilizza la legge di Ampère-Maxwell: [immaginare]

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \partial_t \vec{E}$$

Si fa uso della legge integrale. Si considera un circuito, per cui

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_zl \equiv \varepsilon_0\mu_0 \partial_t \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

ancora una volta, la variazione di flusso è causata dal movimento del campo magnetico:  $\Delta\Phi = Ev\,dt\,l$ . Quindi

$$B_zl = \varepsilon_0\mu_0 d_t(E_yv\,dt\,l) \implies B_z = \varepsilon_0\mu_0 v E_y$$

Le due espressioni trovate sono in relazione. Per cui si ha

$$B_z = \varepsilon_0\mu_0 v^2 B_z \implies v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Il principio di causalità implica che da sorgenti variabili si propagano campi elettromagnetici con una velocità  $v$ ; da Faraday si ha che i campi sono legati tramite la velocità e per Ampère-Maxwell si ha il valore di tale velocità.

Si erano trovati tali risultati in maniera formale. Si studiano dei risultati più generali sempre per onde piane. In una configurazione come quella appena descritta, la strategia è usare il rotore dei campi e sostituirli l'uno nell'altro:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\partial_t(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \varepsilon_0\mu_0 \partial_t(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\varepsilon_0\mu_0 \partial_t^2 \vec{E} \\ -\nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\varepsilon_0\mu_0 \partial_t^2 \vec{B} \end{cases}$$

dato che non si hanno sorgenti ed il campo magnetico è solenoidale, il secondo addendo del primo membro è nullo in entrambe le equazioni; pertanto

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \partial_t^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

si hanno due equazioni che ricordano quella di d'Alembert ed ammettono soluzione (come onda piana con direzione generica)

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 f(\hat{n} \cdot \vec{r} \mp ct) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 f(\hat{n} \cdot \vec{r} \mp ct) \end{cases}$$

dove  $f$  è una funzione che dipende da una fase che descrive la propagazione dell'onda. Tra le tante possibili soluzioni, si ha un'onda piana che ha un fronte unico e si propaga in una direzione. Si

utilizza una descrizione generale (cioè senza scelte particolari del sistema di riferimento), dunque  $\hat{n}$  è il vettore normale al fronte di propagazione, mentre  $\vec{r}$  è il raggio vettore che identifica nel sistema di riferimento scelto il punto del fronte d'onda che è la proiezione della sorgente sul piano del fronte.

Si consideri  $\xi = \hat{n} \cdot \vec{r} \mp ct$  la fase dell'onda. Per la non dispersione e non dissipazione, l'ampiezza dell'onda e la sua forma rimangono uguali, dunque  $f(\xi') = f(\xi)$ . [immagine] Se l'onda rimane uguale a se stessa, allora si considera un asse solidale con il fronte d'onda, per cui le origini dei sistemi di riferimento differiscono di  $OO' = ct$ . Quindi  $\hat{n} \cdot d\vec{r} = \pm c dt$ , dove  $c$  rappresenta la velocità di fase lungo la direzione  $\hat{n}$ . Si vede come  $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\xi)$  sia una soluzione delle equazioni dell'onda piana:

$$\nabla^2 f(\xi) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 f(\xi) = 0$$

Si calcola il laplaciano. Considerato che  $\xi$  è funzione di  $x, y, z$  allora

$$\nabla = \hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z = \hat{u}_x \partial_x \xi + \hat{u}_y \partial_y \xi + \hat{u}_z \partial_z \xi$$

notato che

$$\xi = \hat{n} \cdot (\hat{u}_x x + \hat{u}_y y + \hat{u}_z z) \pm ct$$

allora

$$\vec{\nabla} = [\hat{u}_x (\hat{u}_x \cdot \hat{n}) + \hat{u}_y (\hat{u}_y \cdot \hat{n}) + \hat{u}_z (\hat{u}_z \cdot \hat{n})] \partial_\xi = [\hat{u}_x n_x + \hat{u}_y n_y + \hat{u}_z n_z] \partial_\xi = \hat{n} \partial_\xi$$

Dunque, il primo addendo dell'equazione risulta essere

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \hat{n} \partial_\xi \cdot (\hat{n} \partial_\xi f) = \partial_\xi^2 f$$

mentre il secondo termine è

$$\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 f = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\partial_t f) = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \xi \partial_\xi (\partial_t \xi \partial_\xi f) = \varepsilon_0 \mu_0 (\pm c)^2 \partial_\xi^2 f$$

pertanto

$$\partial_\xi^2 f - \varepsilon_0 \mu_0 c^2 \partial_\xi^2 f = 0 \iff 1 - \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 0 \implies c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

si esclude il caso banale che  $f$  abbia derivata seconda nulla. Purché la velocità con cui si propagano queste forme d'onda sia  $c$ , l'espressione dell'onda piana  $f$  rappresenta una soluzione dell'equazione di d'Alembert. Dunque,  $f(\hat{n} \cdot \vec{r} \pm ct)$  è un'onda piana che si propaga lungo  $\hat{n}$ .

Si sa che il campo elettrico ed il campo magnetico sono accoppiati e, inoltre, bisogna soddisfare le condizioni imposte dalle equazioni di Maxwell. Ricordando  $\vec{\nabla} = \hat{n} \partial_\xi$  si ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies \hat{n} \cdot \partial_\xi \vec{E} = 0 \implies \partial_\xi (\hat{n} \cdot \vec{E}) = 0$$

si nota che  $\hat{n}$  è costante nello spazio e nel tempo. Pertanto,  $\hat{n} \cdot \vec{E} = \text{cost}$ , non ci sono componenti variabili lungo tale direzione e quindi sono necessariamente ortogonali. Lo stesso vale per  $\vec{B}$ .

Inoltre, bisogna soddisfare anche

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \iff (\hat{n} \cdot \partial_\xi) \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

svolgendo il prodotto vettoriale come determinante formale di una matrice si ha

$$\partial_\xi (\hat{n} \times \vec{E}) = \pm c \partial_\xi \vec{B}$$

integrando in  $\xi$  si ha

$$\hat{n} \times \vec{E} = \pm c \vec{B}$$

dove  $+$  è per l'onda progressiva e  $-$  per l'onda regressiva (i segni sono da intendersi fissando  $\hat{n}$  in una direzione e verso, quando si mette il versore nella direzione di propagazione dell'onda, allora la terna è sempre destrorsa e si usa sempre  $+$ ). Per far scomparire il segno si può fare

$$\pm c \hat{n} \times \vec{E} = \hat{c} \vec{B} \iff \vec{c} \times \vec{E} = c^2 \vec{B}$$

## Lecture 39

mer 09 mar  
2022 08:30

Si sono trattate le onde piane come soluzione dell'equazione delle onde. La loro espressione è  $f(\hat{n} \cdot \vec{r} \mp ct)$ ; per il campo elettrico e magnetico si ha  $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\hat{n} \cdot \vec{r} \mp ct)$ .

La geometria dei campi dipende dalla geometria delle sorgenti. Si discutono soluzioni con geometria differente, in particolare la soluzione per simmetria sferica che è importante perché ogni sorgente si può considerare come somma di cariche puntiformi.

Si è già visto l'esempio di una carica  $q$  ferma e poi accelera finitamente in tempo infinitesimo così che ha sempre moto uniforme. L'informazione che la carica si è messa in moto raggiunge gli osservatori che distano  $ct$ . Oltre, gli osservatori non sanno che si è messa in moto ed osservano un campo centrale; gli osservatori all'interno della regione vedono, invece, un campo centrale in una posizione nuova dovuta al movimento della carica.

Si assume che  $v \ll c$ . Il campo di una carica in moto è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Per l'assunzione, l'ultimo fattore diventa prossimo ad uno e si ha nuovamente un campo centrale. Per continuità, il campo si deve raccordare sul fronte d'onda tramite la presenza di un campo trasverso.

Si discutono le proprietà generali dell'onda sferica come soluzione dell'equazione delle onde. Un'onda sferica è un'onda che si propaga in direzione radiale

$$\varphi(\vec{r}, t) = f(r \mp ct) = \varphi(r, t)$$

dove  $r = \hat{u}_r \cdot \vec{r}$ , con  $\hat{n} = \hat{u}_r$ . Tuttavia, tale espressione non è completa perché l'onda sferica dipende anche dalla distanza dal centro:

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r \mp ct)}{r}$$

I fronti in cui la funzione rimane costante a tempo fissato sono dei fronti sferici.

Per le onde piane, considerato un sistema di riferimento cartesiano ed individuata la direzione  $\hat{n}$  di propagazione segue, ad un tempo  $t$  fissato si osservano le due fasi

$$\xi' = \hat{n} \cdot \vec{r}' \pm ct, \quad \xi = \hat{n} \cdot \vec{r} \pm ct$$

si vogliono trovare i punti per cui  $f(\xi) = f(\xi')$  che implica  $\xi' = \xi$  e dato il tempo costante si ha

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = 0 \implies \hat{n} \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

Il luogo dei punti per cui  $\vec{r}'$  può variare ma  $\Delta\vec{r}$  rimane ancora perpendicolare è un piano coincidente con il fronte d'onda piano. Analogamente per le onde sferiche, il fronte è una sfera che si propaga nel tempo.

Si dimostra che  $\varphi = \varphi(r, t)$  è soluzione dell'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi = 0$$

si utilizzano le coordinate sferiche e la derivata della funzione composta

$$\partial_x \varphi = \partial_r \varphi \partial_x r = \frac{x}{r} \partial_r \varphi$$

ricordando che  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; analogamente per  $y$  e  $z$ . Inoltre

$$\partial_x^2 \varphi = \partial_x \left( \frac{x}{r} \partial_r \varphi \right) = \frac{x^2}{r^2} \partial_r^2 \varphi + \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \partial_r \varphi$$

Pertanto

$$\nabla^2 \varphi = \partial_r^2 \varphi + \frac{2}{r} \partial_r \varphi = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r\varphi)$$

Si scrive l'equazione delle onde come

$$\frac{1}{r} \partial_r^2(r\varphi) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi = 0$$

dato che  $r$  e  $t$  sono due variabili indipendenti si ha

$$\partial_r^2(r\varphi) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2(r\varphi) = 0$$

cioè è un'equazione delle onde monodimensionale nella coordinata  $r$  della funzione  $\psi = r\varphi$ . La soluzione è un'onda piana

$$\psi = Af(r \mp ct) \implies \varphi(r, t) = \frac{Af(r \mp ct)}{r}$$

**Osservazione.** Si osserva che

- Per  $r = 0$  la soluzione diverge e questo accade quando si svolge il calcolo per il laplaciano e si sostituisce  $r$ ; tuttavia, non importa la soluzione in tale punto perché semplicemente c'è la sorgente. Già l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \varphi = 0$  in elettrostatica non è definita in  $r = 0$ :

$$\frac{1}{r} \partial_r^2(r\varphi) = 0 \implies d_r(r\varphi) = a \implies r\varphi = ar + b \implies \varphi(r) = a + \frac{b}{r}$$

si risolve l'equazione nello spazio vuoto e poi si aggiungono le condizioni al contorno. Si sceglie un riferimento all'infinito per cui il potenziale è nullo e così si fissa  $a$  e poi si fissa  $b$  tramite Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

sapendo che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{b}{r^2} \hat{u}_r$ , dunque si può prendere una superficie sferiche per l'integrale e tale equazione diventa

$$4\pi b = \frac{q}{\varepsilon_0} \implies b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \implies \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

per le onde non si può fare così perché si ha anche una dipendenza dal tempo.

- Formalmente l'equazione ammette soluzioni con entrambi i segni: sia progressive che regressive. L'equazione delle onde e le equazioni di Maxwell sono valide in entrambi i versi del tempo; tuttavia, il senso fisico è dato solo dalla soluzione progressiva. Pure con l'onda sferica si ha una riflessione che si può intendere come onda regressiva, ma si può più semplicemente descrivere come progressiva da un altro punto.
- Si può descrivere l'onda anche come

$$\varphi(r, t) = \frac{Ag\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

che mette in evidenza il ritardo temporale e la causalità tra gli eventi.

- Le onde sferiche, per  $r$  grande, sono piane. Localmente, sul fronte d'onda, un'onda sferica è piana. Se vale l'approssimazione di onda piana, allora tutto quanto trattato per le onde piane vale ancora per le onde sferiche perché le relazioni sono ricavate localmente: nelle espressioni scritte basta sostituire  $\hat{n}$  con  $\hat{u}_r$  e dunque l'onda si propaga radialmente, il campo è trasverso rispetto la direzione radiale e la relazione

$$\vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}$$

rimane inalterata.

Nel porre in relazione  $\vec{B}$  ed  $\vec{E}$  nell'espressione precedente si è utilizzato Faraday, però si può usare anche Ampère-Maxwell. Tuttavia, ci si chiede qualora le equazioni siano ridondanti. I due campi soddisfano le equazioni delle onde, possono progressivi o regressivi, entrambi sono trasversi. Quando si scrive l'equazione di Faraday si trova una relazione come quella precedente, ma il verso di un campo non vincola il verso (non la direzione) di  $\vec{B}$  rispetto ad  $\vec{E}$ : una potrebbe essere regressiva e l'altra progressiva. Usando entrambe le equazioni, viene fissato il segno così da avere i campi entrambi progressivi o regressivi.

**Osservazione.** L'ampiezza dell'onda sferica

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} f(r - ct)$$

diminuisce come  $\frac{1}{r}$ . Questo significa che, quando si considerano le soluzioni per il campo elettrico e magnetico, i due campi diminuiscono come  $\frac{1}{r}$  e questo è diverso dai campi statici che seguono  $\frac{1}{r^2}$  e  $\frac{1}{r^3}$  rispettivamente: lontani dalle sorgenti si sente solamente la radiazione elettromagnetica, mentre il campo statico si è già affievolito. Questo è quello che permette le trasmissioni radio perché non si sente il campo statico.

Il significato fisico della dipendenza da  $\frac{1}{r}$  deriva dalla conservazione dell'energia. Infatti, la densità di energia del campo elettromagnetico è

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2 \mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E^2$$

La densità di energia associata ad un'onda è la somma dell'energia elettrica e magnetica, ma esse sono uguali in intensità anche se  $\vec{B}$  è molto meno intenso. Sommate, si ha un'energia proporzionale al quadrato del campo elettrico, cioè al quadrato dell'ampiezza dell'onda che si propaga nel campo elettrico.

Osservando un fronte d'onda di un'onda sferica e considerando un guscio sferico infinitesimale si ha un'energia

$$U = u_{em} dV = 4\pi r^2 dr \cdot \varepsilon_0 E^2$$

Se l'energia dev'essere costante, allora  $E \propto \frac{1}{r}$  ed anche  $B$ .

Si possono ricavare le equazioni delle onde cilindriche e con un po' di manipolazioni si dimostra che l'equazione è  $f = \sqrt{r}\varphi$ . Altrimenti, studiando l'energia trasportata dal fronte d'onda, un cilindro cresce con il raggio

$$2\pi r h dr \cdot \varepsilon_0 E^2 \implies E \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

La dipendenza del campo elettrico da  $\frac{1}{r}$  si può anche ricavare dal vettore di Poynting che rappresenta il flusso di energia per unità di tempo:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Si è ricavata un'equazione di continuità per l'energia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \partial_t u_{em} = 0 \iff \int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} = -\partial_t \int_V u_{em} dV$$

Calcolando il flusso attraverso due diversi fronti d'onda sferici, si deve ottenere lo stesso valore perché l'onda trasporta la medesima energia:

$$S(R_1)4\pi R_1^2 = S(R_2)4\pi R_2^2 \implies S \propto \frac{1}{r^2}$$



e quindi  $E \propto \frac{1}{r}$ , perché l'uguaglianza deve valere a tutti i raggi. Il vettore di Poynting ha simmetria sferica dovuta ai campi e dunque dipende solamente dalla coordinata radiale.

In generale, i campi sono variabili nel tempo e quindi  $u_{\text{em}}$  e  $\vec{S}$  sono funzioni di  $r$  e  $t$ . Tipicamente, si considera la misura di una media temporale. Le relazioni scritte vanno intese come medie su di un periodo

$$\langle u_{\text{em}} \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle, \quad \langle |\vec{S}| \rangle = \left\langle \frac{E^2}{c\mu_0} \right\rangle = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

La quantità  $I = |\vec{S}|$  è l'intensità dell'onda perché, difatti, è l'energia per unità di superficie per unità di tempo nella direzione propagazione dell'onda.

Per un'onda vale

$$\langle S \rangle = c \langle u_{\text{em}} \rangle$$

Il vettore di Poynting e l'energia trasportata da un'onda sono legati da  $c$ . Considerata la media su di un periodo, compare  $\frac{1}{2}$  quando si hanno delle sinusoidi; ma la relazione delle medie vale in generale, perché non è detto che i campi siano perfette sinusoidi. Si ritorna successivamente sulle onde come sovrapposizione di onde monocromatiche quando si vede il trasporto nei mezzi materiali, perché in tale caso non tutte le onde si propagano con la stessa velocità. Nel vuoto la velocità di propagazione delle onde è la stessa per tutte le frequenze.

La relazione di continuità per l'energia è valida solamente nel vuoto: per un mezzo materiale, bisogna tenere conto del fatto che l'energia può essere ceduta al materiale. Il teorema di Poynting afferma proprio questo caso più generale.

Si consideri una regione con una certa quantità di carica. La forza che agisce su di una carica elementare è la forza di Lorentz generalizzata  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , dove  $q = \rho dV$ , con  $\rho$  una densità di carica e  $V$  un volume. L'energia e la potenza trasferite alla carica nel volume  $dV$  quando viene investita da un campo elettromagnetico sono

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad d_t W = \vec{F} \cdot \vec{v} = \rho dV \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Quando la carica è ferma, la velocità data dall'onda è anche l'unica velocità che compare nella forza di Lorentz, ma siccome  $\vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{B})$ , segue che il prodotto scalare della velocità con il prodotto vettoriale è nullo: la forza di Lorentz non lavora. Si ricorda  $\vec{J} = \rho \vec{v}$  e si vede la densità di energia per unità di volume trasferita alla materia

$$u_{\text{materia}} = dV W$$

Pertanto

$$\partial_t u_{\text{mat}} = \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}) = -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

L'espressione si è manipolata tramite la legge di Ampère-Maxwell.

Nel ricavare l'equazione di continuità dell'energia nel vuoto si è utilizzata un'identità vettoriale (dell'amante smilzo, "più baci, meno cibi"):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Pertanto

$$\partial_t u_{\text{mat}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \partial_t E^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

Si applica la legge di Faraday  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  e quindi

$$\partial_t u_{\text{mat}} = -\partial_t \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\partial_t u_{\text{em}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$$

In forma integrale tale equazione risulta essere

$$\partial_t \int_V u_{\text{em}} dV = -\partial_t \int_V u_{\text{em}} dV - \int_A \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

Essa fornisce un bilancio complessivo dell'energia quando si includono anche le interazioni con la materia. In un certo volume  $V$ , la variazione di energia associata alla materia, cioè il moto delle cariche, deve avvenire a spese dei campi elettromagnetici all'interno di tale volume oppure da un'energia trasportata all'interno della regione da un campo che si sta propagando.

Si può rigeneralizzare tale espressione in termini differenziali e l'equazione di continuità risulta essere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \partial_t(u_{\text{em}} + u_{\text{mat}}) = 0$$

L'energia contenuta in un volume, può rimanere costante tutte le volte che la divergenza di  $S$  sia nulla (che non implica che  $S$  sia nullo, perché infatti potrebbe essere costante). Questo è equivalente all'equazione di continuità per la carica: quando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  allora pure  $\partial_t \rho = 0$ , cioè nei fenomeni stazionari si richiede che le correnti siano stazionarie e non che le correnti siano assenti. Si possono avere situazioni in cui non cambia il contenuto di energia in un volume (cioè i campi elettromagnetici sono statici,  $u_{\text{em}} = 0$ ), ma si ha un flusso di energia che bilancia la variazione di  $u_{\text{mat}}$ .

**Esempio.** Si consideri una corrente  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  all'interno di una resistenza, mantenendo il campo elettrico costante con una batteria. Si ha un campo magnetico per la presenza della corrente ed è ortogonale ad  $\vec{E}$ . Il vettore di Poynting non è nullo, i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono statici, ma si ha  $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \neq 0$ : infatti, si ha un flusso associato ad  $S$  che dall'esterno entra nella resistenza. Dato che i due campi sono statici, il termine  $u_{\text{em}}$  non cambia nel tempo. Quindi, avendo una divergenza di  $S$  non nulla, per l'equazione di continuità deve cambiare  $u_{\text{mat}}$ . Infatti, per sostenere il moto delle cariche, si ha una potenza dissipata sulla resistenza  $RI^2$ . Inoltre, si ha

$$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} = RI^2$$

Quindi, il teorema di Poynting vale nel caso statico, vale per le onde e, qualora ci si trovi nel vuoto, si ha una relazione diretta tra  $S$  e  $u_{\text{em}}$  che si può usare per ricavare le dipendenze dai campi dalle distanze.

**Quantità di moto.** Un'onda elettromagnetica trasporta energia, ma anche una quantità di moto. Si vedono le proprietà generali dei campi elettromagnetici: sono trasversali, sono mutualmente accoppiati, trasportano energia, hanno quantità di moto ed hanno momento angolare.

Si è già visto un esempio alla fine della discussione sulla relatività, di una configurazione con due cariche, una fissa ed una in moto verso la prima. La forza della prima sulla seconda è

$$|\vec{F}_{12}| = |q_2 \vec{E}_1| = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2}$$

Mentre la forza esercitata dalla carica in moto è

$$|\vec{F}_{21}| = |q_1 \vec{E}_2| = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} (1 - \beta^2)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione del moto e la direzione del campo: in questo caso,  $\theta = 0$ . Quindi

$$|\vec{F}_{21}| \neq |\vec{F}_{12}| \implies \Delta \vec{p} \neq 0$$

la quantità di moto non si conserva. Tuttavia, il sistema non è costituito solo dalle due cariche, ma è presente anche il campo elettromagnetico, la cui quantità di moto compensa esattamente quella mancante dalle due forze.

Si vede un altro esempio. Si considerino due cariche con velocità perpendicolari che si avvicinano. [immagine]. Le cariche esercitano una forza l'una sull'altra. Le forze sono uguali

se le velocità sono uguali, altrimenti non sono bilanciate e si ha una forza netta  $\vec{f}_E \neq 0$  sulla congiungente. Tuttavia, sono anche presenti delle forze magnetiche ed il campo magnetico è

$$\vec{B} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

Pertanto, la carica discendente crea un campo uscente nei pressi dell'altra carica, mentre la carica orizzontale crea un campo entrante nei pressi dell'altra. Si hanno due forze magnetiche con modulo diverso e direzione diversa dalla forza elettrica:

$$\vec{F}_{12} \neq \vec{F}_{21}$$

In generale, le forze del sistema non sono bilanciate. Si sa che la forza magnetica non compie lavoro; nel caso in cui le forze elettriche si bilanciano, le forze magnetiche sono sbilanciate, non compiono lavoro possono comunque cambiare la quantità di moto: si ha un impulso associato alla forza magnetica. Un esempio di questo è la traiettoria circolare di una particella carica in un campo magnetico: la forza magnetica non compie lavoro perché è perpendicolare alla direzione di spostamento, tuttavia la velocità cambia direzione e quindi il vettore di quantità di moto cambia direzione anch'esso.

La derivazione del tensore di quantità di moto nella configurazione in esame è presente sul Griffiths.

**Lampo di luce.** Si vede che ad una radiazione elettromagnetica che si propaga in una direzione specifica (un lampo di luce) è associata una densità di quantità di moto elettromagnetica

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

Per ricavare tale risultato si utilizza un esperimento concettuale ideato da Einstein. [immagine] Si consideri un carrello isolato (cioè che può scorrere senza attrito su una rotaia) di lunghezza  $L$  e massa  $M$ , dove è presente dell'energia  $U$  su di un lato che viene trasferita in un lampo dall'altro lato del carrello. Tale lampo di luce impiega un tempo  $\Delta t = \frac{L}{c}$  per arrivare dall'altro lato. Dato che il sistema è isolato, la quantità di moto deve conservarsi. Quindi, mentre la luce procede avanti, il carrello rincula di  $\Delta x$  (cioè si sposta indietro): la condizione  $\Delta \vec{p} = 0$  equivale al centro di massa che non si sposta. Lo spostamento del carrello deve essere identico allo spostamento del lampo di luce

$$M\Delta x = L\frac{U}{c^2} = \frac{U}{c}\Delta t \implies M\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{U}{c} \implies q_{em} = \frac{U}{c} \implies g_{em} = \frac{u_{em}}{c}$$

ricordando che  $U \equiv E = mc^2$ . L'espressione dopo la prima implicazione è la quantità di moto del carrello che, per la conservazione della quantità di moto, è anche quella del lampo di luce. Quindi si divide tale espressione per il volume e si ottiene  $g_{em}$ . Dalle relazioni precedenti  $u_{em} = \varepsilon_0 E^2$ ,  $S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2 = cu_{em}$  si ha

$$g_{em} = \frac{S}{c^2} \implies \vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

La quantità di moto è trasportata nella direzione in cui si propaga la radiazione e dunque si può riscrivere l'espressione in termini vettoriali.

L'evidenza sperimentale di tale fatto è dimostrata nell'interazione quantistica tra fotoni e materia che la radiazione ha associata un'energia ed una quantità di moto legate dalla relazione precedente.

Si ha anche una evidenza macroscopica della quantità di moto: quando una radiazione elettromagnetica investe una superficie, si ha una pressione di radiazione su tale superficie vista come impulso trasferito.

**Pressione di radiazione.** La situazione varia in base al comportamento della radiazione: essa può essere assorbita oppure riflessa. Se essa viene assorbita, allora la quantità di moto è tutta convertita in impulso. La pressione di radiazione si può scrivere come una forza su di una superficie

$$p_{\text{rad}} = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta q_{\text{em}}}{\Delta t}$$

Noto che la radiazione si muove con velocità  $c$ , segue che la superficie viene investita da tutta una radiazione in un volume  $A\Delta x = Ac\Delta t$ . Pertanto

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{A} \frac{\Delta q_{\text{em}}}{\Delta t} \frac{c}{c} = g_{\text{em}} c = u_{\text{em}}$$

**Esercizio.** Sulla superficie terrestre arriva un flusso di energia di  $1 \text{ kW m}^{-2}$  dovuta al Sole. Ricavare la pressione di radiazione (circa  $10^{-7} \text{ Pa}$ ). Tuttavia, per una stella la pressione di radiazione è vitale per bilanciare la forza di gravità.

## Lecture 40

mer 16 mar  
2022 08:30

Si la soluzione formale delle equazioni di Maxwell con sorgenti e si studiano quali sono le caratteristiche delle soluzioni. Si è visto che la sorgente definisce le caratteristiche geometriche del campo. Si vuole mettere direttamente in relazione i campi con le sorgenti. Si utilizzano le equazioni di Maxwell con sorgenti variabili

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni include difatti otto equazioni scalari (le equazioni superiori sono scalari, quelle inferiori sono vettoriali), ma le incognite sono sei, cioè i campi che sono anche tra loro collegati. Inoltre, fuori dalle sorgenti, il campo magnetico è completamente determinato dal campo elettrico. Il sistema è sovra-determinato e lo si può ridurre ad un sistema più semplice tramite i potenziali elettrodinamici. Come in elettrostatica, si passa all'uso di potenziali e si descrivono le equazioni per essi.

Si studiano le due equazioni senza sorgenti. Il caso della legge di Gauss per il campo magnetico è uguale al caso statico e quindi si introduce un potenziale vettore  $\vec{A}$  tale per cui

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

in quanto vale sempre  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$ . Per sostituzione nella legge di Faraday si ha

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

cioè una grandezza irrotazionale, la cui circuizione è nulla (quindi tale combinazione di campi è un nuovo campo conservativo), pertanto si può descrivere tramite un campo scalare

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Si introduce il segno meno per avere una descrizione consistente con quanto fatto in elettrostatica. Il significato di questo potenziale è diverso da quello dell'elettrostatica. Infatti, nell'elettrostatica si può associare il campo scalare al lavoro di una carica; ma in questo caso non si ha un corrispettivo significato fisico: tale campo scalare è solamente una funzione matematica che si introduce per risolvere il problema. Dunque

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

Si sostituiscono queste due equazioni all'interno delle due equazioni di Maxwell dove compaiono le sorgenti. Nella legge di Gauss (successivamente menzionata come "prima equazione") si ha

$$\nabla^2 \varphi + \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Non si è disaccoppiato  $\phi$  da  $A$ , ma qualora quest'ultimo fosse nullo, si otterrebbe nuovamente l'equazione di Poisson. L'equazione di Ampère-Maxwell (successivamente menzionata come "seconda equazione") diventa

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi) = -\mu_0 \vec{J}$$

Queste due espressioni sono quattro equazioni (una scalare ed una vettoriale) e si hanno quattro incognite. Si disaccoppiano  $\vec{A}$  e  $\varphi$  tramite l'invarianza di gauge: si definisce il nuovo potenziale vettore come

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda(\vec{r}, t) \implies \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

dove  $\lambda(\vec{r}, t)$  è un campo scalare; inoltre, il rotore del suo gradiente è nullo perché il campo vettoriale generato dal gradiente di  $\lambda$  è conservativo. Si ha un'arbitrarietà nella scelta del potenziale vettore. In magnetostatica si è già visto quanto fatto quando si è imposto  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  per ottenere l'equazione di Poisson nella relazione tra potenziale vettore e densità di corrente. Tuttavia, cambiando  $\vec{A}$  in tale modo, la prima equazione cambia anche il campo elettrico, pertanto bisogna cambiare il potenziale scalare  $\varphi$  per compensare. Dunque si ha

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi' - \partial_t \vec{A}' = -\vec{\nabla} \varphi' - \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \partial_t \lambda \equiv -\vec{\nabla} \varphi - \partial_t \vec{A}$$

Si può ottenere ancora lo stesso campo elettrico pur di ridefinire il potenziale scalare come

$$\varphi' = \varphi - \partial_t \lambda$$

Dunque, il campo elettromagnetico è invariante sotto la trasformazione

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \partial_t \lambda \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \end{cases}$$

Si possono semplificare le equazioni tramite due modi principali. Il primo è il gauge di Coulomb (o di radiazione) che impone

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Questa scelta è giustificata in quanto si è dimostrato in magnetostatica che è sempre possibile scegliere un campo vettoriale  $\vec{A}$  che abbia divergenza nulla: se così non fosse, si può passare ad un campo  $\vec{A}'$  purché  $\lambda$  soddisfi l'equazione di Poisson:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda = 0 \implies \nabla^2 \lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

La cui soluzione esiste sempre ed è anche unica per il teorema fondamentale dell'elettrostatica. La seconda scelta è il gauge di Lorentz con cui si rende la seconda equazione solo dipendente da  $\vec{A}$ . Si sceglie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi = 0$$

Se tale equazione non è soddisfatta, allora si cerca una nuova coppia di potenziali per i quali tale condizione vale:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi + \nabla^2 \lambda - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \lambda$$

da cui risulta

$$\nabla^2 \lambda - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \lambda = s(\vec{r}, t)$$

dove  $s$  è una funzione scalare. Si ha un'equazione delle onde non omogenea per  $\lambda$ . Essa ha sempre soluzione (la dimostrazione si vede successivamente).

Con tali scelte si possono disaccoppiare le equazioni. In elettrodinamica classica, si usa il gauge di Lorentz, mentre in elettrodinamica quantistica si usa il gauge di Coulomb. Si discutono entrambi. Una volta capita la struttura delle soluzioni, si isolano i termini interessanti usare, tralasciando inutili complicazioni.

**Gauge di Coulomb.** Si sceglie  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . La prima equazione diventa

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}$$

cioè è l'equazione di Poisson. La seconda diventa

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} - \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \partial_t \varphi$$

Della prima si sanno trovare le soluzioni, poi sostituendo  $\varphi$  nella seconda, il secondo membro di questi diventa una funzione scalare  $s(\vec{r}, t)$  e si ottiene un'equazione delle onde non omogenea per  $\vec{A}$ . Infatti

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

è la soluzione formale dell'equazione di Poisson. Si ha un problema: la carica si muove, ma secondo tale formula il potenziale è istantaneamente ridefinito in tutto lo spazio. Tuttavia, non si viola il principio di causalità perché le grandezze che hanno significato fisico sono il campo elettrico ed il campo magnetico. Entrambi dipendono da  $\vec{A}$  che obbedisce l'equazione delle onde e dunque si propaga con velocità finita, seguendo il principio di causalità. Quindi la prima equazione definisce una configurazione statica dei campi che poi entra nella seconda equazione per descrivere come nell'equazione delle onde bisogna tener conto di come si riconfigurano le sorgenti. L'informazione si trasmette tramite la propagazione dell'onda.

Il potenziale scalare fornisce un potenziale di tipo coulombiano (per questo è detto gauge di Coulomb). Quindi il campo elettrico associato a tale potenziale è di tipo coulombiano e dipende da  $\frac{1}{r^2}$ ; mentre il campo di radiazione è associato solamente ad  $\vec{A}$ , che si propaga. Se interessa solamente il campo di radiazione si può porre

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases}$$

che si può fare quando si è lontani dalla sorgente. Questa è la scelta tipica dell'elettrodinamica quantistica: si gestisce la singola carica come sorgente e si osserva il campo generato intorno quando interagisce con oggetti che hanno distanze su dimensioni finite, mentre la carica è puntiforme (cioè ha dimensione infinitesima). Inoltre, quando si è fuori dalla sorgente, il termine  $s(\vec{r}, t)$  è nullo e la soluzione è un'onda trasversale (cioè soddisfa  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ) associata ad  $\vec{A}$ .

Il fotone è una particella di spin 1, cioè uno spin che può essere lungo  $x$ ,  $y$  oppure  $z$ , ma dato che è solo trasversale, segue che solo due sono possibili e lo spin lungo la direzione di propagazione del fotone non è ammesso: solo due stati di polarizzazione sono possibili.

**Gauge di Lorentz.** In questo caso si ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi = 0$$

che semplifica l'equazione di Ampère-Maxwell e le due equazioni diventano

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \varphi = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Si osserva che le caratteristiche delle soluzioni sono identiche nelle due scelte di gauge. In questo caso non si ha un'apparente violazione del principio di causalità. Comunque, entrambi i membri secondi sono sorgenti variabili  $s(\vec{r}, t)$ .

Qualunque sia la scelta di gauge, bisogna risolvere un'equazione del tipo

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \psi(\vec{r}, t) = -s(\vec{r}, t)$$

cioè un'equazione delle onde non omogenea.

Le equazioni nel gauge di Lorentz, nel caso in cui non ci sia dipendenza dal tempo, collassano in equazioni di Poisson per  $\varphi$  e per  $\vec{A}$  che si sanno risolvere in modo formale. Quindi, dato che in questo caso è presente la dipendenza dal tempo, ci si aspetta che la soluzione sia simile a quella dell'equazione di Poisson, ma con un ritardo temporale.

Si risolve l'equazione per una sorgente puntiforme perché ogni sorgente è un insieme di più sorgenti puntiformi:

$$s(\vec{r}, t) \begin{cases} = 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \neq 0, & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

Dunque, si può separare la soluzione. Con questa ipotesi, si possono scegliere delle coordinate sferiche con l'origine nella sorgente per cui si introduce una singolarità, ma importa studiare ciò che succede oltre la sorgente stessa.

Quindi, per  $\vec{r} \neq 0$  si ha

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \psi = 0$$

cioè un'equazione delle onde omogenea, però per la scelta della carica puntiforme, bisogna risolverla in coordinate polari. La soluzione è una funzione del tipo

$$\psi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Si è messa in evidenza la fase temporale. Quando si è lontani dalla sorgente si ha un andamento di questo tipo. Si definisce com'è fatta la funzione  $f$  per raccordare la soluzione in  $\vec{r} \neq 0$  alla soluzione in  $\vec{r} = 0$ : cioè esattamente quello che si è fatto quando si è discusso il problema della singolarità nella scorsa lezione e si è vista l'equazione di Poisson nel limite statico raccordata con la presenza della carica nell'origine.

Si vede un'approssimazione della soluzione della soluzione formale perché gli strumenti matematici (funzione e propagatore di Green) non sono ancora disponibili. L'approssimazione fornisce la soluzione giusta e la si giustifica con il proprio senso fisico.

Per  $\vec{r} \rightarrow 0$ , il ritardo  $\frac{r}{c}$  sparisce. Inoltre, osservando l'equazione delle onde, il laplaciano diverge nell'origine

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r\psi)$$

mentre il secondo addendo rimane finito e si può escludere [r] Pertanto

$$\nabla^2 \psi = -s(t)$$

[r] Si risolve tale equazione. Si sa

$$\psi(r \rightarrow 0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s(t)}{r} d\nu'$$

cioè è la soluzione dell'equazione di Poisson. In questo caso  $\vec{r}'$  è collassato in un punto che coincide con l'origine ed  $r$  non è una variabile di integrazione:

$$\psi(r \rightarrow 0) = \frac{1}{4\pi r} \int_V s(t) d\nu' = \frac{S(t)}{4\pi r}$$

Inoltre, per  $r \neq 0$  si ha

$$\psi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

[r] Si identifica  $f = \frac{S}{4\pi}$  e quindi

$$\psi(r, t) = \frac{S\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\nu'$$

Si risolve l'equazione in una regione senza sorgenti e poi la si raccorda con continuità ai punti dove si hanno le sorgenti. Una sorgente estesa si può pensare come un insieme di sorgenti puntiformi. [immagine] Dunque si ha

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

Ritornando alle due equazioni che si devono risolvere in  $\varphi$  ed  $\vec{A}$  si ha rispettivamente

$$s(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad s(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$$

Pertanto, i potenziali elettrodinamici ritardati sono

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

cioè il potenziale di Poisson ma con un ritardo [r]. Queste sono le soluzioni del gauge di Lorentz? [r]. Lo stesso per il potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

Da queste equazioni non è evidente che i campi di radiazione dipendono da  $\frac{1}{r}$ . Ne si vede una dimostrazione formale. Si è interessati ad una sorgente variabile la cui variazione oscillante la si può intendere come somma di sinusoidi per lo sviluppo di Fourier. Pertanto, si scrivono le sorgenti elementari come

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}) \cos(\omega t) = \text{Re}(\rho(\omega) e^{-i\omega t}) \\ J(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r}) \cos(\omega t) = \text{Re}(J(\omega) e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

[r] Le sorgenti più complicate sono somme di sorgenti elementari e si applica il principio di sovrapposizione.

Il potenziale vettore risulta essere

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

Si osservano le soluzioni lontano dalla sorgente  $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$ . Considerato lo sviluppo

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{u}_r \cdot \vec{r}'}{r}} \approx r \left(1 - \frac{\hat{u}_r \cdot \vec{r}'}{r}\right) = r - \hat{u}_r \cdot \vec{r}'$$

Sostituendo nel potenziale vettore si ha un valore lontano dalle sorgenti di

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}(r - \hat{u}_r \cdot \vec{r}')}}{r} d\nu' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{u}_r \cdot \vec{r}'} d\nu'$$

dove  $k = \frac{\omega}{c}$  è il numero d'onda. L'integrale è una sorta di ampiezza che dipende dalle sorgenti e dalla loro disposizione spaziale; mentre il termine esponenziale è un'onda sinusoidale sferica

$$\vec{A} = \text{Re}(\dots) = a \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}$$

il potenziale vettore è un campo che si propaga come un'onda sferica. Ritornando ai campi elettromagnetici, si sa che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}$$



la derivata temporale non cambia la dipendenza spaziale, dunque  $\partial_t \vec{A} \sim \frac{1}{r}$  cioè il campo di radiazione va come  $\frac{1}{r}$ . Per il campo magnetico, la dipendenza da  $\frac{1}{r}$  è meno immediata perché si ha un rotore. Tuttavia, per le onde sferiche si ha comunque

$$\vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}$$

[r].

Inoltre, l'ampiezza data dall'integrale, quando  $k$  [r] è piccolo, si può fare uno sviluppo in multipoli dove il termine che domina è quello di dipolo: una carica oscillante (anche isolata) si può approssimare ad un dipolo.

A questo punto bisogna ricavare il potenziale scalare [r]. Distanti dalle sorgenti si ha

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V \rho \left( \vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) d\nu'$$

dove si è approssimato  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  con  $r$ . L'integrale risulta essere la carica, ma la dipendenza è comunque da  $\frac{1}{r}$  per cui il campo statico dipende da  $\frac{1}{r^2}$ . [r]

**Esempio.** Si consideri un dipolo oscillante. Si considera una carica puntiforme che oscilla lungo  $z$  con punto medio nell'origine. Essa ha velocità

$$\vec{v} = d_t \vec{\delta}$$

A tale movimento si associa una corrente lungo  $z$  che dipende solo dal tempo

$$i(t) = q\vec{v} = \partial_t \vec{p}$$

dove  $\vec{p} = q\vec{\delta}$  è una rappresentazione per il dipolo. Inoltre

$$i(t) = \int_V \rho \vec{v} d\nu' = \int_V \vec{J} d\nu'$$

Scritto in questo modo si può introdurre il potenziale

$$A(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \left( \vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \vec{J} \left( t - \frac{r}{c} \right) d\nu'$$

nel caso dell'esempio si ha  $\vec{r}' = 0$ . Da quanto scritto sopra, si sa che tale integrale sul volume risulta essere la corrente

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} i(\xi) \hat{u}_z, \quad \xi \equiv t - \frac{r}{c}$$

Si può scrivere anche un potenziale scalare, ma da un campo coulombiano che non è rilevante a grandi distanze [r]. Si descrive il campo magnetico. Noto che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , segue che il campo magnetico ha componenti solamente in  $B_x$  e  $B_y$  dato che  $\vec{A} = A_z \hat{u}_z$ . Dunque

$$\begin{aligned} B_x &= \partial_y A_z - \cancel{\partial_z A_y} \\ B_y &= \cancel{\partial_z A_x} - \partial_x A_z \end{aligned}$$

Si calcola solamente la prima componente

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_y \left( \frac{1}{r} \right) i(\xi) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \partial_y i(\xi)$$

ricordando  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , si ha

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{y}{r} i(\xi) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \partial_\xi i \partial_y \xi = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} i(\xi) \sin \varphi \sin \theta - \frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \partial_t i \partial_\xi t \frac{y}{r} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} i(\xi) \sin \varphi \sin \theta - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \partial_t i \sin \varphi \sin \theta \end{aligned}$$

Il primo addendo è di tipo coulombiano perché va come  $\frac{1}{r^2}$  e si attenua rapidamente a grandi distanze. Il secondo addendo è il campo di radiazione perché dipende da  $\frac{1}{r}$  e

$$\partial_t i = \partial_t(q\vec{v}) = q\vec{a}$$

cioè i campi di radiazione dipendono dall'accelerazione delle cariche.

Si può trovare il campo elettrico in due modi: Faraday e Ampère-Maxwell oppure

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}$$

dove il primo addendo è di tipo coulombiano, mentre il secondo termine è quello di radiazione. Si nota che  $\vec{A}$  è lungo  $z$  e dunque puro  $\vec{E}$ : ancora una volta il campo elettrico è ortogonale al campo magnetico.

**Esercizio.** Ricavare la relazione  $E = cB$ .

## Lecture 41

mer 23 mar  
2022 08:30

Si sono viste le proprietà generali dei campi di radiazione risolvendo in maniera formale le equazioni. Le soluzioni dipendono dal reciproco della distanza dalla sorgente.

**Carica accelerata.** Imparate le proprietà generale, si sceglie la sorgente elementare di radiazione e si analizza in maniera completa come vanno i campi e la potenza. I sistemi di sorgenti variabili sono la somma di cariche accelerate.

Si consideri una carica con velocità nulla. Ad un tempo  $t = 0$ , essa viene accelerata in un tempo  $\Delta t$  piccolo fino ad una certa velocità  $v \neq 0$  tale che

$$v = a\Delta t$$

Durante tale intervallo di tempo, la carica si sposta di un tratto

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

Si osserva il campo elettromagnetico ad un tempo  $t \gg \Delta t$ , cioè quando l'informazione del movimento della carica si è propagata in una regione finita dello spazio. Dunque,  $vt \gg \Delta x$  [r] ed esiste un certo raggio  $r = ct$  che definisce la regione investita dall'informazione di movimento della carica. Questa è una rappresentazione schematica che permette di ricavare il risultato per una carica con un'accelerazione istantanea. Si può pensare che essa sia comunque una rappresentazione limitata, perché una carica che subisce un'accelerazione istantanea potrebbe avere velocità iniziale non nulla, tuttavia ciò non importa perché si può sempre scegliere un riferimento co-movente con la carica [r]. Inoltre, si ipotizza  $v \ll c$ . Quindi, il risultato ottenuto può sembrare vero solamente nel limite non relativistico [r]

[immagine] Si consideri un sistema di riferimento. La carica si trova nell'origine, poi accelera in un tratto  $\Delta x$  e successivamente continua a muoversi con velocità costante per un tratto  $vt$  fino ad una posizione  $O'$ . La distanza tra le origini è  $OO' \approx vt$ . Gli osservatori all'interno del cerchio definito dal raggio  $r = ct$  vedono un campo centrale nell'origine  $O'$ . Gli osservatori all'esterno vedono ancora un campo centrale nell'origine  $O$ . Si ha una regione dove compare una discontinuità del campo. Tale regione non ha spessore nullo: tale spessore radiale è  $\Delta r = c\Delta t$ . Ci chiede come si possa descrivere il campo in tale regione di transizione.

In generale, per una carica in moto, il campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Nella regione esterna,  $\beta = 0$  e quindi si ha un campo a simmetria sferica che punta in  $O$ :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

con  $\vec{r}$  riferito ad  $O$ . Nella regione interna  $\beta \approx 0$ ,  $\beta \ll 1$ , dunque

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_{r'}}{(r')^2}$$

con  $\vec{r}'$  riferito ad  $O'$ . Si studiano le linee di campo nella regione di transizione. La linea di campo all'interno con un angolo  $\theta$  con la direzione di moto deve raccordarsi con la linea di campo dello stesso angolo nella seconda regione. Si sa che si raccordano sullo stesso angolo perché si può considerare una superficie chiusa che segue le linee di campo dentro e fuori, e si prenda un percorso a raggio costante dentro e fuori. Si calcola il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie. Esso dev'essere nullo perché non si ha carica nel volume racchiuso

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$$

Su tutti i tratti radiali si ha  $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ . Per i tratti a raggio costante  $S_1$  ed  $S_2$  si ha

$$\Phi_{S_1}(E) + \Phi_{S_2}(E) = 0$$

Questo perché il flusso del campo elettrico sotto una superficie che sottende lo stesso angolo solido è costante. Le due superfici vedono lo stesso angolo solido rispetto a due punti diversi ( $O$  ed  $O'$ ), tuttavia i campi interno ed esterno sono  $[r]$ . Dunque, complessivamente per ottenere un flusso nullo si richiede che nella zona di transizione si ha  $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$  e dunque il campo elettrico congiunge le linee di campo con lo stesso angolo.  $[r]$

Il campo nella regione di transizione si può scomporre in componente trasversa  $\vec{E}_\perp$  e in componente radiale  $\vec{E}_\parallel$ . Tramite un'analisi geometrica si costruisce il rapporto tra le due componenti. Quella radiale è lunga quanto la regione di transizione,  $c\Delta t$ ; mentre la componente trasversa è relazionata al segmento  $OO' = vt + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \approx vt$ . Pertanto

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{vt \sin \theta}{c\Delta t}$$

Al posto di  $\Delta t$  si può sostituire l'accelerazione. Infatti

$$a\Delta t = v, \quad r = ct$$

Pertanto

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{a \sin \theta r}{c^2}$$

Si sa com'è fatto il campo radiale e trasverso, quindi si può mettere in relazione il campo nella regione di transizione con gli altri due. Si utilizza la legge di Gauss su di una superficie nella regione esterna e di transizione  $[r]$ . Pertanto, il campo parallelo dev'essere identico al campo nella regione esterna.:

$$E_\perp = E_{\text{ext}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Quindi si può calcolare la componente trasversa:

$$E_\perp = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{a \sin \theta}{c^2}$$

Si considera infinitesimo  $\Delta t$ , la regione di transizione diventa nulla, ma  $E_\perp$  non dipende dal tempo e dunque per un'accelerazione istantanea, si ha un campo trasverso  $[r]$ . Pertanto, il campo di radiazione elettrico è

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{a \sin \theta}{c^2} \hat{u}_\theta$$

Esso dipende dalla componente trasversa dell'accelerazione  $a_{\perp} = a \sin \theta$ . Il campo elettrico è massimo nella direzione ortogonale in cui accelera la carica [r]. Si calcola il campo magnetico associato. Risulta noto

$$\vec{B}_{\text{rad}} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2} = \frac{\hat{u}_r \times \vec{E}}{c} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \frac{a \sin \theta}{r} \hat{u}_{\varphi}$$

Mentre il vettore di Poynting risulta essere

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{u}_r = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{c^3 r^2} \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{c^3} \frac{1}{4\pi r^2} \hat{u}_r$$

Il vettore dipende dal reciproco della superficie [r]. La potenza totale risulta essere

$$P = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{c^3} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{c^3}$$

ricordando che in coordinate sferiche  $da = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . Quest'ultima è la formula di Larmor (legge?) che è l'energia irradiata da una carica quanto sottoposta ad un'accelerazione. Inoltre, i campi rispettano le relazioni ricavate in termini generali [r]. Questa formula introduce un problema: quando si osserva una carica in moto in un campo elettrico, tale carica subisce una forza  $\vec{F} = q\vec{E}$  da cui l'equazione del moto è  $m\vec{a} = q\vec{E}$  per cui l'accelerazione è  $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ; tuttavia, se la carica accelera, essa irraggia e quindi non guadagna tutta l'energia fornita dal campo elettrico. In termini statici, la particella guadagna un'energia  $\Delta K = q\Delta V$ , mentre ora bisogna sottrarre la quantità irraggiata [r]. Tuttavia, per (quasi) tutte le configurazioni studiate, la potenza irraggiata è trascurabile. Infatti

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^3} (d_t p)^2$$

ricordando che  $d_t p = d_x K$ . Aumentando l'energia cinetica su di una distanza, la potenza irradiata aumenta. Tutto questo è sempre rimanendo nel limite non relativistico. [r] in tale limite la potenza irraggiata è trascurabile. Essa rimane trascurabile anche nel limite relativistico.

La situazione cambia quando si ha un'accelerazione centripeta: si ha una correzione relativistica significativa? [r]. [r] la forza di Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  determina una forza centripeta. Pertanto, una particella in un campo magnetico irraggia energia e dunque il moto non è circolare ma è a spirale perché diminuisce la sua velocità.

Ci sono molti esempi in cui viene utilizzato un campo magnetico per pilotare delle particelle: gli acceleratori di particelle, anche se ogni giro si perde una parte di energia. Dato che vengono portate a velocità relativistiche si ha [r] dovuto al fattore di Lorentz.

L'irraggiamento è rilevante anche per le particelle cariche che attraverso campi magnetici nello spazio. Inoltre, l'atomo classico non può vivere all'infinito a causa dell'irraggiamento e dunque si necessita di una descrizione alternativa.

**Caso relativistico.** Si studia la potenza irraggiata in casi relativistici: ci si pone nel sistema di riferimento solidale con la particella e poi si trasformano le coordinate nel riferimento del laboratorio.

[r] Nel riferimento solidale, il campo elettromagnetico parallelo alla direzione di spostamento sono

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0$$

Mentre le componenti trasverse sono

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c}\right)$$

[r]  $c^2$ ?. La forza risulta essere  $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}')$  [r]. Pertanto la forza nel riferimento del laboratorio è

$$\vec{F}' = \gamma(q\vec{v} \times \vec{B})$$

cioè si ha un fattore  $\gamma$  che amplifica la forza. Dunque,

$$P' = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2}{c^3} \left( \frac{qvB}{m} \right)^2$$

Tuttavia, la potenza nel laboratorio è  $P' = P$ . Questo perché

$$P' = d_{t'} E'_m = d_t E_m = P$$

[r] Lo si vede esplicitamente:

$$dt = \gamma(dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx'), \quad dE = \gamma(dE' + \gamma \frac{\beta}{c} dp'_{\parallel})$$

In  $S'$  si ha  $dx' = dp'_{\parallel} = 0$ ? [r]

Per accelerare le particelle a velocità relativistiche [r]

L'energia dissipata dall'LHC è di circa 100 MW. Si ha una dipendenza del quadrato della massa, LHC accelera a 7 TeV. L'energia irradiata fornisce radiazione di raggi X, così che si possano fare analisi.

**Esercizio.** La velocità è parallela al campo elettrico. Trovare la potenza. Si vede che il fattore  $\gamma$  non compare.

Le espressioni valgono con il  $\gamma$  quando vengono scritte in termini della variazione di quantità di moto. Se si volesse esprimere la potenza in termini di accelerazione si avrebbe

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \gamma^4 \left( \gamma^2 a^2 - \left| \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{c} \right|^2 \right) \propto \gamma^6 a_{\parallel}^2 + \gamma^4 a_{\perp}^2$$

[r]

**Frequenze di emissione.** Si studiano le frequenze di emissione. Si consideri un moto armonico

$$z(t) = A \cos(\omega t), \quad \ddot{z} = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

Si possono scrivere il campo magnetico e la potenza irradiata tramite le relazioni scritte per la carica puntiforme. Quindi

$$\vec{E}_{\text{rad}}(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_{\perp}(t)}{c^2} \frac{1}{r} \hat{u}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{A\omega^2}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{A\omega^2}{r} \cos(\omega t - kr) \sin\theta$$

dove il fattore  $\frac{r}{c}$  tiene conto del ritardo e  $k = \frac{\omega}{c}$ . L'ultimo termine è un'onda sferica sinusoidale [r]. La potenza irradiata media su di un periodo

$$\langle P \rangle = \langle c\epsilon_0 E^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \frac{A^2 \omega^4}{2}$$

Tale potenza esprime la variazione temporale di energia meccanica associata all'oscillazione. In media, l'energia meccanica è metà in quella meccanica e metà in quella potenziale [r]. Dunque

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \implies \langle E_m \rangle = \frac{1}{2} m (A\omega)^2$$

Pertanto

$$\langle P \rangle = -\langle d_t E_m \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{mc^3} \left( \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \right)$$

Inoltre [r]

$$d_t \langle E_m \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{mc^3} \langle E_m \rangle$$

Dunque

$$\langle E_m \rangle = \langle E_0 \rangle e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove  $\tau$  è legato al fattore di  $\langle E_m \rangle$  nell'equazione differenziale. [r] L'ampiezza evolve come

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Complessivamente, il moto dell'elettrone non è un moto armonico libero, ma è dissipativo. Dato che il moto ha tale andamento, la legge oraria è

$$z(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t)$$

Dunque la radiazione emessa dalle oscillazioni non può essere monocromatica pura (perché non è una senoide pura). Si studia quanto essa non sia pura. Per un oscillatore, quando  $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$ , segue che esso è un buono oscillatore (dove  $\gamma$  è il fattore dissipativo nell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico). Pertanto

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mc^2} \frac{\omega^2}{c}$$

La grandezza

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mc^2} \approx 10^{-15} \text{ m}$$

è il raggio classico dell'elettrone. [r] Si può sostituire ad  $\omega$  le transizioni atomiche

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{2}{3} \frac{r}{c} \omega = \frac{4\pi}{3} \frac{r}{c} \nu = \frac{4\pi}{3} \frac{r}{\lambda} \approx \frac{10^{-15} \text{ m}}{5 \times 10^{-7} \text{ m}}$$

[r] sono in ottima approssimazione monocromatiche.

Il modello ad oscillatore si usa per descrivere l'interazione tra radiazione e cariche.

**Osservazione.** Una carica in moto circolare in un campo magnetico irraggia ad una frequenza specifica, perché il moto circolare è la composizione di due moti armonici (uno per ogni asse); si mantiene energia per tenere la traiettoria circolare, dunque la frequenza emessa non decade, ma rimane fissa. [r]

L'emissione di energia è trascurabile quando si ha [r]

**Antenna lineare ed antenna circolare.** Si consideri una corrente  $I = i_0 \sin(\omega t)$ . L'antenna lineare crea un campo elettrico di dipolo, mentre l'antenna circolare crea un dipolo magnetico. Si osserva che la potenza è

$$P = (I\omega)^2, \quad P = \frac{(I\omega)^2}{c^2}$$

rispettivamente. [r] Una radiazione di dipolo magnetico è molto minore di una di dipolo elettrico.