

# Classical Mechanics

March 9, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Argomenti</b>	<b>2</b>
1.1	Sistemi dinamici . . . . .	2
1.2	Meccanica Lagrangiana . . . . .	2
1.3	Meccanica Hamiltoniana . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Sistemi dinamici</b>	<b>3</b>
2.1	Esempi . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Problema ai dati iniziali o di Cauchy</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Oscillatore armonico</b>	<b>8</b>
4.1	ODE lineare omogenea a coefficienti costanti . . . . .	8
4.2	Studio oscillatore armonico . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Sistemi dinamici nel piano</b>	<b>10</b>
5.1	Sistemi dinamici autonomi . . . . .	10
5.1.1	Soluzioni di equilibrio . . . . .	11
5.1.2	Costanti del moto . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Sistemi dinamici autonomi newtoniani conservativi nel piano</b>	<b>12</b>
6.1	Diagrammi di fase . . . . .	14
6.2	Tempo di percorrenza . . . . .	20
6.3	Diagramma di biforcazione . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Sistemi dinamici autonomi generici nel piano</b>	<b>23</b>
7.1	Studio della stabilità (e altro) di un sistema lineare . . . . .	24
7.2	Metodi di Lyapunov . . . . .	26
7.2.1	Primo metodo di Lyapunov . . . . .	27
7.2.2	Secondo metodo di Lyapunov . . . . .	27
7.3	Sistema di punti . . . . .	28
7.4	Lotka-Volterra . . . . .	30
7.5	Modello SIR . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Meccanica Lagrangiana.</b>	<b>34</b>
8.1	Equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	40
8.2	Leggi di Keplero . . . . .	42
8.2.1	Vincolo mobile, dipendente dal tempo, un grado di libertà . . . . .	46
8.3	Struttura formale . . . . .	50
8.4	Frequenze proprie e modi normali . . . . .	54
8.5	Cambi di coordinate . . . . .	63

<b>9</b>	<b>Corpo rigido</b>	<b>64</b>
9.1	Angoli di Eulero e trottola di Lagrange . . . . .	74
9.1.1	Angoli di Eulero . . . . .	75
9.1.2	Trottola di Lagrange . . . . .	75
9.2	Teorema di Noether . . . . .	78
<b>10</b>	<b>Formulazione variazionale delle equazioni di Eulero-Lagrange</b>	<b>82</b>
10.1	Formulazione a più gradi di libertà . . . . .	84
<b>11</b>	<b>Meccanica Hamiltoniana</b>	<b>85</b>
11.1	Introduzione . . . . .	86
11.2	Equazioni di Hamilton-Jacobi. . . . .	87
11.3	Formulazione variazionale . . . . .	90
11.4	Parentesi di Poisson . . . . .	91
11.5	Trasformazioni canoniche. . . . .	94
11.6	Trasformazioni infinitesime. . . . .	104
11.7	Teorema di Noether . . . . .	106
11.8	Teoria di Hamilton-Jacobi . . . . .	107

## Lecture 1: Introduzione

lun 04 ott  
2021 16:30

### 1 Argomenti

Il corso è diviso in tre sezioni: Sistemi dinamici, Meccanica Lagrangiana, Meccanica Hamiltoniana. Essi sono legati tra loro, ma non strettamente.

#### 1.1 Sistemi dinamici

Per sistema dinamico s'intende una modellizzazione matematica di un sistema che evolve nel tempo. I sistemi dinamici descrivono gran parte della realtà. Nel corso si tratta di una parte dei sistemi dinamici, in particolare quella rivolta alla fisica. Si vedono le equazioni differenziali e si studia una sottoclasse: i sistemi dinamici newtoniani conservativi sul piano con anche un'analisi qualitativa. Alcune volte si potranno dare anche risposte quantitative.

Si passa poi allo studio della meccanica classica in situazioni che la meccanica newtoniana non permette di studiare facilmente perché la forma vettoriale delle equazioni di Newton le rende dipendenti dal sistema di riferimento e diventano complicate da risolvere quando sono presenti dei vincoli. Per approcciare il problema è funzionale riscrivere la meccanica classica utilizzando una formulazione adattata alla condizione di vincolo: in particolare, Lagrange passa da vettori ad una grandezza scalare che è invariante sotto cambi di coordinate. La formulazione si avvale della conservazione dell'energia.

#### 1.2 Meccanica Lagrangiana

Si adatta la meccanica del problema per considerare già i vincoli così da non preoccuparsene nella trattazione del problema.

Si passa da una formulazione vettore di newton ad una scalare con il lagrangiano che è indipendente dalla scelta di coordinate.

#### 1.3 Meccanica Hamiltoniana

Essa non porta evidenti vantaggi ai problemi di meccanica classica. Tuttavia, essa pone le basi per la meccanica quantistica e per la meccanica statistica. Altri sviluppi si hanno nella meccanica classica come la teoria di Hamilton-Jacobi, teoria delle perturbazioni e teoria dei moti caotici. Si rende simmetrico il ruolo della posizione e dei momenti (lineari?).

## 2 Sistemi dinamici

Si chiarisce cosa si intende quando ?? alle equazioni differenziali.

Un sistema dinamico è un modello matematico che descrive un sistema che si evolve nel tempo. Si immagina la situazione descritta da una ennupla di numeri reali: essa rappresenta lo stato del sistema  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\underline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Al variare del tempo,  $\underline{x}$  cambia; l'intento è di trovare come cambia  $\underline{x}(t)$  al variare del tempo: si descrive la legge oraria. Si crea un modello con cui capire una situazione e con cui fare previsioni. Si ha bisogno di un sistema di equazioni: sono equazioni differenziali che coinvolgono  $\underline{x}(t)$  e le sue derivate. Un esempio semplice è  $F = ma \iff F = m\ddot{x}$ , dove  $a \equiv \ddot{x} \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ . La forza può non essere costante,  $F = F(t, x, \dot{x})$ , dunque  $F(t, x, \dot{x}) = m\ddot{x}$ . Si vuole descrivere un fenomeno. Si supponga di aver osservato uno stato  $x_0$  a  $t_0$  e di avere un'equazione differenziale come modello; si vuole avere una soluzione, unica almeno nell'intorno di  $t_0$ . I teoremi di esistenza e di unicità sono importanti per un fisico sia per l'esistenza di una soluzione che di possibilità di prevedere l'evoluzione nel futuro:

$$\exists! \text{soluz.} \implies \text{buon modello} \quad (1)$$

$$\exists! \underline{x}(t) \mid \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad \text{Problema di Cauchy} \quad (2)$$

### 2.1 Esempi

Alcuni esempi di sistemi dinamici che non derivano da Newton:

**Decadimento radioattivo.** Si vuole descrivere la quantità  $N(t)$  di atomi radioattivi ad ogni istante. Si definisce  $\Delta N(t) \equiv N(t + \Delta t) - N(t)$ . Si osserva:

- $\Delta N(t) \propto N(t)$ ;
- $\Delta N(t) \propto \Delta t, \forall t$ .

Questi sono i dati sperimentali, le leggi empiriche. Data la validità di entrambi, segue che  $\Delta N(t) = -\gamma N(t) \Delta t$ ,  $\gamma > 0$ ; da cui, passando al continuo

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\gamma N(t) \rightarrow \dot{N} = -\gamma N.$$

Bisogna trovare una funzione  $N(t)$ :

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N \iff \frac{dN}{N} = -\gamma dt \implies \int \frac{dN}{N} = -\gamma \int dt \implies \ln|N| = -\gamma t + C \implies N = e^{-\gamma t + C} = Ae^{-\gamma t}.$$

La costante si fissa in base alle condizioni iniziali:  $N(0) = A$ .

**Modello di Malthus.** Tale modello descrive l'evoluzione temporale di individui della stessa specie. Sia  $x(t)$  il numero di individui della specie. Siano  $\Delta x_+$  le nascite e  $\Delta x_-$  le morti. Dalle osservazioni si ricava  $\Delta x_+ \propto \lambda_+ x \Delta t$ ,  $\lambda_+ > 0$  e  $\Delta x_- \propto \lambda_- x \Delta t$ ,  $\lambda_- < 0$ .

Sia  $\Delta x(t) \equiv x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x_+ + \Delta x_-$ . Quindi, sia  $\lambda \equiv \lambda_+ + \lambda_-$ . Allora si ha

$$\Delta x = \lambda x \Delta t \rightarrow \dot{x} = \lambda x \implies x = Ae^{\lambda t}.$$

**Modello di Lokta-Volterra.** Esso è un modello più realistico con una preda ed un predatore. Si parte dal modello di Malthus per due specie:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = \beta y \end{cases}.$$

Esso corrisponde al modello in assenza di predazione, cioè i due modelli sono indipendenti. Tuttavia, i modi in cui  $x$  individui si incontrano con  $y$  individui di un'altra specie sono proporzionali a  $xy$ . Dunque:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \gamma xy \\ \dot{y} = \beta y + \delta xy \end{cases}.$$

Con  $\gamma, \delta > 0$ , mentre  $x$  è la preda e  $y$  è il predatore. Tale è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine che non è banale risolvere.

**Modello SIR.** (Suscettibili, Infetti, Recovered). Si ha:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\gamma S \cdot I \\ \dot{I} = \gamma S \cdot I - qI \\ \dot{R} = qI \end{cases}.$$

Con  $\gamma, q > 0$ . Rimane costante la somma  $S + I + R = \text{cost.}$  com'è giusto che sia, infatti  $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$ .

Per una forza in direzione generica si ha

$$\underline{F} = m\underline{a} \iff \begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases}.$$

Altri esempi di equazioni differenziali da Fisica I sono:

- Corpo libero in una dimensione,  $\ddot{x} = 0$ ,  $x(t) = x_0 + v_0 t$ .
- Caduta di un grave,  $\ddot{x} = -g$ , supponendo la massa unitaria,  $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ .
- Moto armonico della molla,  $\ddot{x} = -kx$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .

## Lecture 2: ODE

Si studiano le equazioni differenziali.

mar 05 ott  
2021 15:30

**Definizione.** Una ODE scalare nella variabile  $x(t)$  è una relazione che lega  $x(t)$  alle sue derivate ed eventualmente ad una funzione temporale:  $\phi(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(N)}) = 0$ . Dove  $x^{(N)} \equiv \frac{d^N x(t)}{dt^N}$ . Alcune note terminologiche:

- Una ODE è di ordine  $N$  se  $\phi$  contiene al massimo la derivata  $x^{(N)}$  e non le successive.
- Una ODE è in forma normale se si può scrivere come  $x^{(N)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N-1)})$ .
- Una ODE è vettoriale se le variabili sono vettori  $\underline{x}(t)$ .
- Una ODE è autonoma se non dipende esplicitamente dal tempo.

**Esempio.**

- Sia  $\ddot{x} = -g$  una ODE scalare di secondo ordine in forma normale.
- Sia  $3\ddot{x} - t \sin \dot{x} + t^2 = 0$  una ODE scalare di terzo ordine. La sua forma normale è  $\ddot{x} = \frac{1}{3}t \sin \dot{x} - \frac{1}{3}t^2$ .

**Definizione.** Una soluzione di una ODE scalare  $\phi(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N)}) = 0$  è una funzione  $\tilde{x}(t) : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (di classe  $C^N$ ?, derivabile almeno  $N$  volte) tale che  $\phi(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \dots, \tilde{x}^{(N)}(t)) = 0, \forall t \in (a, b)$ .

**Esempio.**

- Sia  $\ddot{x} = -g$  una ODE scalare. Una soluzione è  $\tilde{x}(t) = -\frac{1}{2}gt^2, \dot{\tilde{x}} = -gt, \ddot{\tilde{x}} = -g$ .
- Si vede una ODE vettoriale. Sia  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z), \underline{F} = (0, 0, -g)$  e  $m = 1$  kg. Dunque

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{F} \iff \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}.$$

La soluzione  $\tilde{\underline{x}}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$  deve rispettare le condizioni sopra poste. Ad esempio

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = x_0 + v_{0x}t \\ \tilde{y}(t) = y_0 + v_{0y}t \\ \tilde{z}(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}.$$

Ci si deve aspettare di trovare una classe di soluzioni.

**Definizione.** La soluzione generale di una ODE è una famiglia di funzioni dipendenti da un certo numero di parametri che contiene tutte le possibili soluzioni della ODE.

Le costanti sono fissate dalle condizioni iniziali, così da trovare la soluzione particolare.

**Definizione.** La soluzione particolare è ottenuta dalla soluzione generale scegliendo i valori dei parametri.

La ricerca di soluzioni generali di ODE è complicata, ma ci sono vari metodi; molte volte non esistono soluzioni analitiche.

Si vedono alcuni casi particolari.

**ODE di primo ordine in forma normale a variabili separabili.** Tali ODE sono nella forma

$$\dot{x} = f(x)g(t).$$

Si suppone  $\alpha \leq x \leq \beta \implies f(x) \neq 0$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dunque:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) dt \implies \text{(se analitica)} F(x) = G(t) + C.$$

In generale, si vuole esplicitare  $x(t)$  e lo si fa risolvendo la soluzione analitica rispetto ad  $x$ .

**Esempio.** Sia  $x \neq 0$

$$\dot{x} = xt \iff \frac{dx}{x} = t dt \implies \ln|x| = \frac{1}{2}t^2 + C \implies x = \pm e^{\frac{1}{2}t^2 + C} = \pm k e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

**Osservazione.**

- Una situazione già incontrata è  $\dot{x} = f(x)g(t)$  con  $f(x) = \text{cost.}$ , quindi  $\dot{x} = g(t) \implies x(t) = \int g(t) dt$ .
- Se  $g(t) = \text{cost.}$  allora  $\dot{x} = f(x) \implies \int \frac{dx}{f(x)} = t$ , con  $f(x) \neq 0$ . Si ha  $t$  in funzione di  $x$ , ma si desidera ottenere il viceversa.

**ODE vettoriali.** La situazione vettoriale è analoga: sia  $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$  ODE di prim'ordine in forma normale di rango 2 (il rango è la dimensione dello spazio vettoriale in cui vive la soluzione). Tale ODE equivale a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, t) \end{cases}.$$

Le equazioni scalari di ordine superiore al primo si possono intendere come equazioni vettoriali di prim'ordine.

**Proposizione.** Si consideri una ODE scalare di ordine  $N$  in forma normale. Essa si può scrivere come una ODE vettoriale del prim'ordine di rango  $N$ .

**“Dimostrazione”.** Si consideri una ODE scalare di ordine 2:  $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ . Si pone  $y \equiv \dot{x}$ ,  $\dot{y} = \ddot{x}$  e si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = f(t, x, y) \end{cases}.$$

**Esempio.** Si consideri  $\ddot{x} = (\dot{x})^2 \cdot \ddot{x} + t - \sin x$ . Si pone  $y \equiv \dot{x}$ ,  $z \equiv \dot{y} \equiv \ddot{x}$  e  $\dot{z} = \ddot{y} = \dddot{x}$ :

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ z = \dot{y} \\ \dot{z} = y^2 \cdot z + t - \sin x \end{cases}.$$

### 3 Problema ai dati iniziali o di Cauchy

Data una equazione differenziale, il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione che soddisfi determinate condizioni.

**Secondo ordine.** Sia

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = v_0 \end{cases}.$$

Le ultime due entrate del primo sistema sono le condizioni iniziali; il secondo sistema è un sistema vettoriale di rango 2.

**Esempio.** Sia

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 1 \\ x(0) = 6 \end{cases} \implies \int \frac{dx}{x+1} = \int dt \implies \ln|x+1| = t+C \implies x+1 = \pm e^{t+C} \iff x = ke^t - 1.$$

Questa è la soluzione generale. Tramite le condizioni iniziali si può trovare  $k$ :

$$x(0) = ke^0 - 1 = 6 \iff k = 7.$$

Questa è la soluzione al problema di Cauchy.

Tuttavia, bisogna considerare per quali condizioni iniziali esista una soluzione particolare.

**Teorema.** Di esistenza ed unicità (locale) di Cauchy. Si consideri un sistema di ODE di prim'ordine e rango  $N$  in forma normale:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}) \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = f(t, x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ \dot{x}_N = f(t, x_1, \dots, x_N) \end{cases}.$$

Con  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  e  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_N) : \Omega \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Sia  $\underline{x}^0 \equiv (x_1^0, \dots, x_N^0) \in \Omega$  e  $t_0 \in (t_1, t_2)$ . Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}.$$

Dunque:

- Se  $\underline{f}$  è continua allora il problema di Cauchy ammette una soluzione definita in un intorno di  $t_0$ .
- Se  $\underline{f}$  è differenziabile con continuità (cioè la derivata è continua) in  $\Omega \times (t_1, t_2)$  allora la soluzione è anche unica in tale intorno di  $t_0$ .

**Esempio.**

- Sia

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Si osserva che una soluzione della ODE è  $x(t) = 0, \forall t$ , ma non lo è del problema di Cauchy.

Dunque:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt \implies -\frac{1}{x} = t - C \iff x = \frac{1}{C - t}.$$

Dal problema di Cauchy si ha

$$x(0) = \frac{1}{C - 0} = 1 \iff C = 1 \implies x(t) = \frac{1}{1 - t}.$$

Tale soluzione particolare non è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , ma è definita in un intorno di 0 con raggio  $r \leq 1$ :  $(t_0 - r, t_0 + r)$ .

- Sia

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Si osserva che  $x(t) = 0, \forall t$  è soluzione. Inoltre

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \int dt \implies x(t) = \left[ \frac{1}{3}(t + C) \right]^3.$$

Dal problema di Cauchy si ha

$$x(0) = \left[ \frac{1}{3}C \right]^3 = 0 \iff C = 0 \implies x(t) = \left[ \frac{1}{3}t \right]^3.$$

Entrambe sono soluzioni.

### Lecture 3: Oscillatore armonico

Esercitazione.

mer 06 ott  
2021 15:30

## 4 Oscillatore armonico

Ogni potenziale con un minimo si può approssimare localmente con un oscillatore armonico. Un esempio di ODE è la seconda legge di newton  $F = ma = m\ddot{x} \iff \dot{x} = v \wedge \dot{v} = \frac{F(t,x,v)}{m}$ . Nel caso più generale di un oscillatore armonico si ha

$$\ddot{x} + b\dot{x} + c = F(x).$$

Essa è una ODE lineare di second'ordine a coefficienti costanti. Se  $F(x) = 0$  allora è detta omogenea. Grazie alla linearità di tale equazione, segue che la combinazione lineare di sue soluzioni è a sua volta una soluzione.

### 4.1 ODE lineare omogenea a coefficienti costanti

L'equazione differenziale si può riscrivere come un polinomio con un operatore differenziale  $D \equiv \frac{d}{dt}$ .

$$D^2 + bD + c = 0.$$

Tale è il polinomio dell'equazione differenziale. Le sue radici sono

$$r_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a = 1.$$

Dunque si riscrive l'ODE come

$$(D - r_1)(D - r_2)x = 0 \iff [D^2 - r_1D - r_2D + r_1r_2]x = 0.$$

Dove  $r_1 + r_2 \equiv -b$  e  $r_1r_2 \equiv c$ . Pertanto, le soluzioni sono

$$(D - r_1)x = 0 \quad \text{e} \quad (D - r_2)x = 0.$$

Si risolvono integrando

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \iff \frac{dx}{x} = \alpha dt \implies \ln|x| = \alpha t + C \implies x = \pm ke^{\alpha t}.$$

Quindi, la soluzione alla ODE è la combinazione lineare delle due soluzioni trovate

$$x(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}.$$

Si hanno le condizioni iniziali  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ . Da cui segue  $x_0 = A + B$  e  $v_0 = Ar_1 + Br_2$ . Tuttavia, questo è il caso semplice.

Il problema sorge quando si ha una sola radice con molteplicità doppia, cioè per  $\Delta = 0$ . In tal caso, cioè  $r = r_1 = r_2$ , si può scrivere la ODE come

$$(D - r)^2x = 0 \iff D(Dx - rx) - r(Dx - rx) = 0.$$

Si pone  $z \equiv Dx - rx$  e si ottiene

$$Dz - rz = 0.$$

La cui soluzione è

- $z = 0 \implies x = Ae^{rt}$ ;
- $z = e^{rt} \implies e^{rt} = Dx - rx$  e si risolve:

$$\begin{aligned} e^{-rt}Dx - re^{-rt}x &= 1 \iff e^{-rt}Dx + D(e^{-rt}x) = 1 \iff D(e^{-rt}x) = 1 \\ &\implies e^{-rt}x = t + C \iff x(t) = Ce^{rt} + te^{rt}. \end{aligned}$$



Un altro modo per vedere ciò è il seguente: sia  $r_1 = r$ ,  $r_2 = r + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll r$ . Allora è soluzione anche

$$\frac{1}{\varepsilon}[e^{t(r+\varepsilon)} - e^{rt}].$$

Si sviluppa  $e^{r+\varepsilon}$ :

$$\frac{1}{\varepsilon}[e^{rt}(e^{\varepsilon t} - 1)] = \frac{1}{\varepsilon}[e^{rt}(\varepsilon t + o(\varepsilon))] \implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{rt} \varepsilon t = t e^{rt}.$$

Pertanto, la soluzione generale è

$$x(t) = A e^{rt} + B t e^{rt}.$$

## 4.2 Studio oscillatore armonico

Un oscillatore armonico presenta una forza di richiamo

$$F = -kx = -\frac{dV}{dx}, \quad V = -\frac{1}{2}kx^2, \quad [k] = [F][L]^{-1}.$$

Dunque

$$m\ddot{x} = -kx \iff [mD^2 + k]x = 0.$$

Essa presenta soluzioni immaginarie

$$r_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Sia  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$  e  $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\omega}$ . Il periodo è il tempo che intercorre tra due estensioni massime successive.

La soluzione è

$$x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} = A[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + B[\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] = (A+B) \cos(\omega t) + i(A-B) \sin(\omega t).$$

Con condizioni iniziali  $x(0) = x_0 = A + B$  e  $\dot{x} = v_0 = i\omega(A - B)$ . Si può utilizzare anche un altro metodo. Si osservi  $v = \dot{x}$ ,  $\dot{v} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dt}$ . Quindi

$$\begin{aligned} m v \frac{dv}{dx} = -kx &\implies m \int_{v_0}^{v(x)} v dv = -k \int_{x_0}^x x dx \implies \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_0}^{v(x)} = -\frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x_0}^x \\ &\iff m[v^2(x) - v_0^2] = -k[x^2 - x_0^2] \iff v^2(x) = \frac{k}{m}[-x^2 + x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}] \\ &\iff \frac{dx}{dt} = v(x) = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Dove  $A^2 \equiv x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$ ,  $\omega^2 \equiv \frac{m}{k}$ . Dunque

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm \omega \int_0^t dt \implies -\arcsin \frac{x}{A} \Big|_{x_0}^x = \pm \omega t \implies x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

**Esercizio.** Dimostrare che le due formule sono equivalenti. (Usare lo spazio delle fasi oppure le formule del seno e coseno).

**Pendolo.** L'equazione di moto del pendolo in direzione trasversa è

$$m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta.$$

Questa è una ODE non lineare, tuttavia per  $\theta \approx 0$  si ha

$$m l \ddot{\theta} = -m g \theta \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Con  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  e  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . La soluzione è  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ . Il calcolo del periodo è stato semplice. Tuttavia si potrebbero trovare le quantità da cui dipende attraverso altre considerazioni: l'analisi dimensionale. Infatti, le quantità fisiche del sistema sono l'accelerazione dovuta alla gravità  $g$ , la massa  $m$  e la lunghezza del pendolo  $l$ . Dunque

$$[T] = [LT^{-2}]^\alpha [M]^\beta [L]^\gamma.$$

La soluzione si ha per  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Tuttavia, tale metodo non permette di ottenere la costante di proporzionalità di  $2\pi$ .

## Lecture 4: Sistemi dinamici nel piano

gio 07 ott  
2021 15:30

### 5 Sistemi dinamici nel piano

Si studiano i sistemi dinamici nel piano con una ODE vettoriale lineare di rango due:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}.$$

Nei sistemi dinamici nel piano rientra anche lo studio della dinamica di un punto in una dimensione. Infatti, la seconda legge di Newton per un punto materiale in una dimensione è

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m}f(t, x, y) \end{cases}.$$

#### 5.1 Sistemi dinamici autonomi

Si studiano i sistemi dinamici autonomi nel piano,  $f \neq f(t)$ ,  $g \neq g(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

Si considerano i punti del piano in cui  $f$  e  $g$  siano ben definite e si osserva il valore che esse assumono in tale punto. A questi si associa il vettore  $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ . Dunque, al piano si associa un campo vettoriale.

Similmente, lungo una curva si rappresentano i vettori associati ai punti che costituiscono tale curva. Ci si chiede se esiste una curva tale che il vettore associato ad ogni punto sia tangente a tale curva in quel punto. Curve di questo tipo sono le soluzioni al sistema dinamico.

Per una curva  $(x(t), y(t))$  che soddisfa il sistema di ODE, segue che il vettore tangente a tale curva è  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ .

**Esempio.** Si consideri l'equazione del moto armonico semplice:

$$\ddot{x} = -x \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}.$$

Essa ha per soluzione  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , mentre la velocità è  $y(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$ . Lo spazio delle fasi (phase space) è: Infatti  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  descrivono un'ellisse.

La soluzione non è sempre facile da trovare né è garantito che sia analitica. Ci sono casi in cui esistono soluzioni. Uno di questi è rappresentato dalle soluzioni stazionarie o di equilibrio.

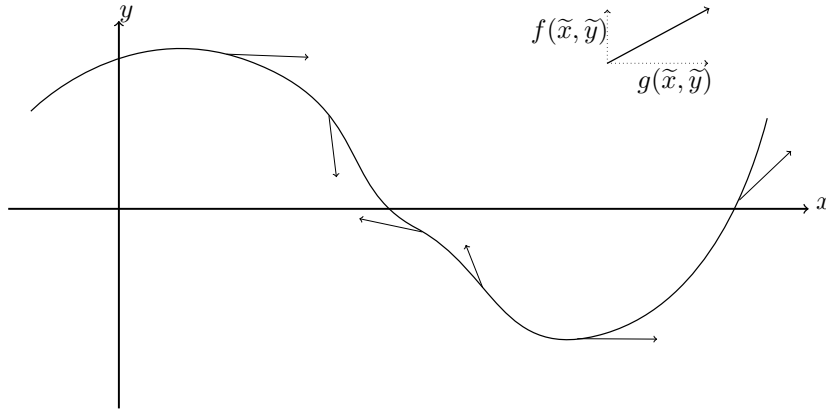


Figure 1: curva-campo

### 5.1.1 Soluzioni di equilibrio

Sia  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ . Si vede un caso degenere. Il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \\ x(0) = \tilde{x} \\ y(0) = \tilde{y} \end{cases}.$$

La soluzione è

$$\begin{cases} x(0) = \tilde{x} \\ y(0) = \tilde{y} \end{cases} \quad \forall t.$$

Infatti,  $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$  e  $f(x, y) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ ,  $g(x, y) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$  per ipotesi. Se si trova un punto tale che  $f = g = 0$  e si pongono le condizioni iniziali in tale punto, allora si rimane in quel punto: essa è una soluzione stazionaria (o di equilibrio) e  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è il punto di equilibrio.

### 5.1.2 Costanti del moto

Un altro metodo per trovare soluzioni analitiche si ottiene per mezzo delle costanti del moto.

Si consideri una funzione  $W : F \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto W(x, y)$ . Si osservano i punti su cui  $W$  è definita: ad ogni punto si associa uno scalare (una quota) così costruendo una superficie.

Si vuole studiare i punti del piano che fanno parte di una particolare traiettoria e di valutarla tramite  $W$ . Dunque,  $W(x(t), y(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione scalare (il tempo è la variabile del dominio ?).

La costante del moto è un funzione che, valutata lungo una curva che è soluzione del sistema di ODE, è costante. Cambiando la curva cambia il valore costante della funzione.

**Definizione.** Sia  $W(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funzione per un sistema dinamico autonomo nel piano. Si consideri una curva  $(x(t), y(t))$  soluzione del sistema dinamico  $\forall t \in (a, b)$ . La funzione  $W$  è una costante del moto per il dato sistema dinamico autonomo nel piano se  $\forall t$ ,  $W(x(t), y(t)) = W(x(t^*), y(t^*)) = \text{cost.}$  con  $t^* \in (a, b)$ .

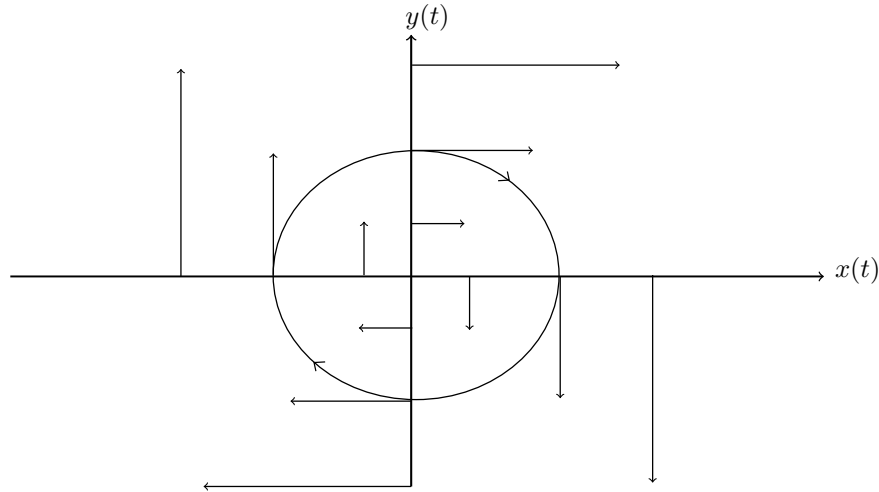


Figure 2: phase-space-esempio

## Lecture 5: SD Autonomi Newtoniani Conservativi nel Piano

lun 11 ott  
2021 16:30

**Definizione.** Si dice che  $W(x, y)$  è una costante del moto per un sistema dinamico nel piano se per ogni curva  $(x(t), y(t))$  soluzione del sistema dinamico si ha che  $W(x(t), y(t)) = \text{cost.}$

Le curve di livello per una funzione  $W(x, y)$  nel piano sono gli elementi dell'insieme  $\{(x, y) \mid W(x, y) = \text{cost.}\}$ .  
Si cerca di scoprire se il sistema dinamico ha delle costanti del moto così da studiar le curve di livello invece di risolvere l'ODE.

## 6 Sistemi dinamici autonomi newtoniani conservativi nel piano

I SDANCP prendono la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}.$$

Newtoniano perché compare la derivata seconda di una posizione, dalla seconda legge della dinamica  $\ddot{x} = f \implies \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f \end{cases}$ .

Conservativo perché la forza è posizionale in una dimensione e quindi esiste un potenziale  $U(x)$  tale che  $\frac{dU(x)}{dx} = -f(x)$ .

Si afferma l'esistenza di una funzione che è costante del moto dunque conservativa. Infatti

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x).$$

è costante del moto per questi tipi di sistemi dinamici. Essa ovviamente cambia da punto a punto; dire costante del moto per un particolare problema significa valutare  $W$  lungo la traiettoria soluzione del sistema dinamico.

Si vuole dimostrare che  $W$  è una costante del moto per SDANCP. Bisogna verificare che

$$\frac{d}{dt}W(x(t), y(t)) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(x(t), y(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - W(x(t), y(t))}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} [W(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - W(x(t), y(t + \Delta t)) \\ &\quad + W(x(t), y(t + \Delta t)) - W(x(t), y(t))].\end{aligned}$$

Dunque, nella prima espressione risulta

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{1}{2} y^2(t + \Delta t) + U(x(t + \Delta t)) - \left( \frac{1}{2} y^2(t + \Delta t) + U(x(t)) \right) \right] = \frac{1}{\Delta t} [U(x(t + \Delta t)) - U(x(t))] \rightsquigarrow \frac{dU}{dx} \dot{x}.$$

La seconda espressione risulta

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{1}{2} y^2(t + \Delta t) + U(x(t)) - \left( \frac{1}{2} y^2(t) + U(x(t)) \right) \right] = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{2} [y^2(t + \Delta t) - y^2(t)] \rightsquigarrow \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dy} \dot{y}.$$

Unendo le due si ha

$$\frac{d}{dt}W(x(t), y(t)) = \frac{dU}{dx} \dot{x} + y \dot{y}.$$

Utilizzando il fatto che  $(x(t), y(t))$  è soluzione del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) = -\frac{dU}{dx} \end{cases}.$$

Si ha

$$-f(x) \cdot y + y f(x) = \frac{dW}{dt} = 0.$$

**Derivate parziali.** L'espressione della derivata è

$$\frac{d}{dt}W(x(t), y(t)) = \partial_x W \cdot \dot{x} + \partial_y W \cdot \dot{y}.$$

In più dimensioni si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Con  $W(x_1, \dots, x_n)$  costante del moto per cui vale

$$\frac{d}{dt}W(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial W}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_n} \dot{x}_n = \nabla W \cdot \underline{f} = 0.$$

**Variabile dinamica.** Si consideri una funzione  $W(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dove  $\underline{x}(t)$  è parametrizzata da  $t \in (t_1, t_2)$ . Allora  $W(\underline{x}(t))$  è detta variabile dinamica ed in generale si ha

$$\frac{d}{dt}W(\underline{x}(t)) = \sum \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{d}{dt}x_i(t).$$

Se  $\underline{x}(t)$  è soluzione di  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$  allora

$$\frac{d}{dt}W(\underline{x}(t)) = \sum \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i(\underline{x}(t)) = \nabla W \cdot \underline{f}.$$

Se  $W$  è costante del moto allora  $\frac{d}{dt}W(\underline{x}(t)) = 0$ , con  $\underline{x}(t)$  soluzione.

**Esempio.** Si consideri  $W(x, y, z) = x^2 + yz + y \sin z$ . Allora si ha

- $\partial_z W = y + y \cos z$
- $\partial_x W = 2x$
- $\partial_y W = z + \sin z$

Lo studio delle curve di livello permette di trascurare le traiettorie e non si sa come esse sono percorse nel tempo.

Si studia il grafico della funzione costante del moto.

Dunque  $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$  è costante del moto per SDANCP. Si consideri  $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si disegna il grafico

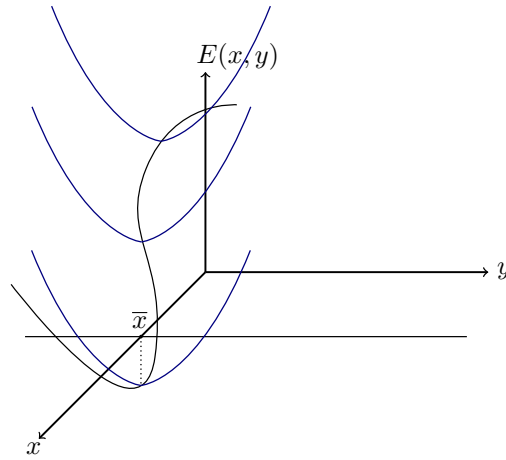


Figure 3: graph-en-potenz

L'espressione  $E(x, 0) = U(x)$  è il potenziale in  $xz$ . Mentre  $E(\bar{x}, y)$  è una parabola in  $yz$ . Quindi le soluzioni del sistema dinamico sono sottoinsiemi delle curve di livello. Inoltre, le curve di livello sono simmetriche rispetto l'asse  $x$ .

## 6.1 Diagrammi di fase

**Punto materiale libero.** Si ha  $F = 0$ ,  $U = \text{cost.}$  e:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}.$$

Dunque,  $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \text{cost.}$  e si pone  $\text{cost.} = 0$ . Si costruiscono le curve di livello dopo aver scelto una quota.

- Sia  $E_0 < 0$ . Non esistono curve di livello, pertanto questo è un livello energetico non permesso.
- Sia  $E_0 = 0$ . Da ciò segue  $\{(x, y) \mid E(x, y) = E_0\} = \{(x, 0)\}$ .
- Sia  $E_0 > 0$ . Dunque  $\frac{1}{2}y^2 = E_0 \iff y = \pm\sqrt{2E_0}$ .

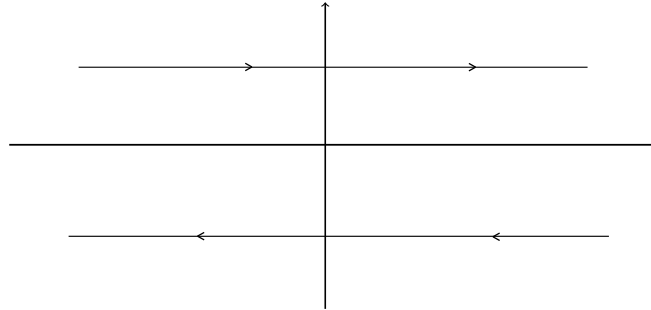


Figure 4: phase-free-motion

Si studia la dinamica:

- Per  $E = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} = 0$  cioè sono punti stazionari. Ogni punto sull'asse  $x$  è di equilibrio.
- Per  $E > 0$ ,  $y \neq 0$ , si ha moto rettilineo uniforme,  $\dot{x} = y$  e  $\dot{y} = 0$ .

**Caduta di un grave.** Sia  $U(x) = gx$ ,  $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + gx$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g \end{cases}.$$

Risulta  $x = \frac{E_0}{g} - \frac{1}{2g}y^2$ . Fissato  $E_0$ , non si può raggiungere un valore più alto di  $\frac{E_0}{g}$ : esso risulta essere un massimo.

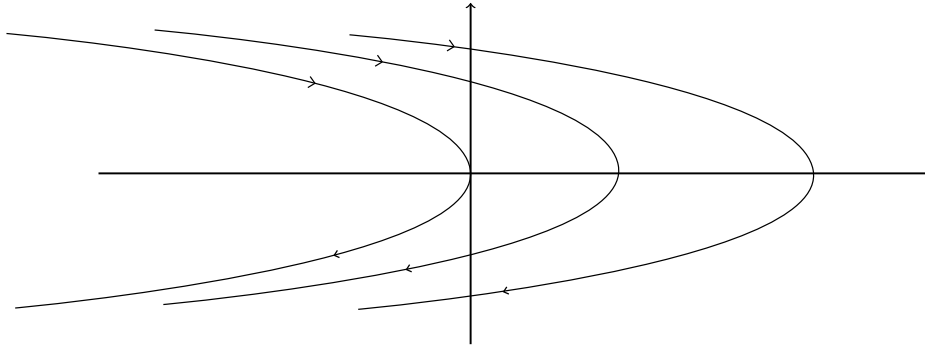


Figure 5: phase-free-falling

## Lecture 6

**Oscillatore armonico.** Si ha

mar 12 ott  
2021 15:30

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}, \quad E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Dunque per

- $E_0 < 0$  non esistono traiettorie ammesse
- $E_0 = 0$  si ha  $(x, y) = (0, 0)$  punto di equilibrio. Infatti  $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$  è esattamente la condizione di equilibrio.
- $E_0 > 0 \iff \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0$  è l'equazione di un ellisse.

Per comprendere il senso di percorrenza si guarda l'equazione del sistema dinamico.



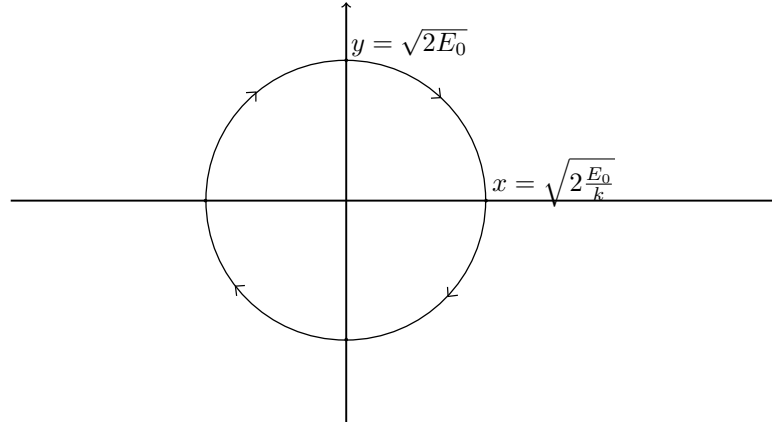


Figure 6: phase-harmonic-oscillator

**Osservazione.** Si consideri  $U(x)$  e  $E_0$  fissati. Le posizioni  $x$  permesse sono tali cui  $U(x) \leq E_0$ . Questo segue da

$$\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E_0 \iff y^2 = 2[E_0 - U(x)] \implies y = \pm \sqrt{2[E_0 - U(x)]}.$$

Affinché  $y$  sia reale si rivela essere necessario che  $U(x) \leq E_0$ .

**Esempio.** Sia  $U(x) = (x^2 + 2x)e^x$ . Si cercano le curve di livello. Si studia la funzione: dominio è  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) &= +\infty \\ \frac{dU}{dx} = 0 &\implies x_{\pm} = -2 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

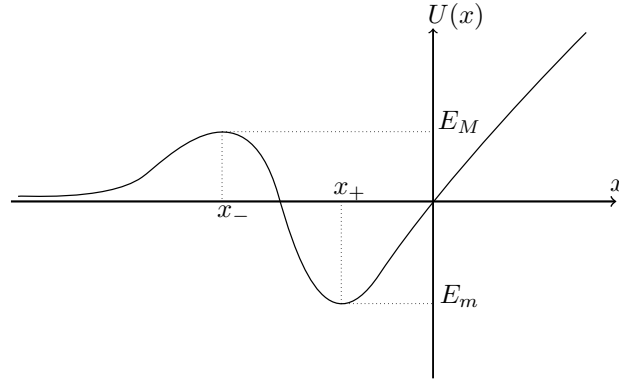


Figure 7: esmp-potential

Sia  $U(x_+) = E_m$  e  $U(x_-) = E_M$ . Le posizioni ammesse si hanno per  $E_0 \geq U(x)$ .

- Per  $E_0 < E_m$  non si hanno traiettorie ammesse. La minima energia è  $E_0 = E_m$  con cui è ammessa solamente  $x = x_+$  la cui  $y = 0$ . Quindi è un punto stazionario.
- Per  $E_m < E_0 \leq 0$  bisogna trovare una curva di livello, cioè trovare  $(x, y)$  soluzione di  $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E_0$ . Tuttavia, si sa che

$$y(x) = \pm \sqrt{2[E_0 - U(x)]}, \quad x \in [\tilde{x}_l, \tilde{x}_r] \text{ entrambi punti di inversione.}$$

- Per  $0 < E_0 < E_M$  si hanno due curve disconnesse che formano la curva di livello. Ad infinito una particella è asintoticamente libera; la sua velocità tende ad una costante (dunque l'energia potenziale diventa costante). La traiettoria a cui ci si muove dipende dalle condizioni iniziali.
- Per  $E_0 > E_M$  si ha  $y = \pm \sqrt{2[E_0 - U(x)]}$  e

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{U'(x)}{\sqrt{2[E_0 - U(x)]}}.$$

Dunque quando  $U(x)$  aumenta si ha  $y$  che diminuisce.

- Per  $E_0 = E_M$  si ha la traiettoria separatrice. Infatti, in  $x = x_-$  si ha  $U = E_M$  e dunque

$$\frac{1}{2}y^2 + E_M = E_0 \implies y(x_-) = \dot{x}(x_-) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y} = -\frac{dU(x_-)}{dx} = 0.$$

La curva di livello corrispondente al valore energetico  $E_M$  passa per il punto  $(x_-, 0)$ , il quale è un punto di equilibrio (instabile), dato che  $y = \dot{x} = 0$  e  $\dot{y} = 0$ . In un intorno di tale punto, si ha la situazione corrispondente a  $0 < E_0 < E_M$ .

[immagini]

Si studia il comportamento della funzione intorno a  $x_-$  tramite Taylor:

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_-) + U'(x_-)(x - x_-) + \frac{1}{2}U''(x_-)(x - x_-)^2 + o((x - x_-)^2) \\ &= E_M + 0 + \frac{1}{2}U''(x_-)(x - x_-)^2 + o((x - x_-)^2). \end{aligned}$$

Tutti i potenziali vicino al punto critico sono parabole ed il sistema si comporta come un repulsore, oscillatore armonico.

Si cerca la curva di livello (a meno di  $o$  piccoli):

$$E(x, y) = E_M \implies \frac{1}{2}y^2 + \left[ E_M + \frac{1}{2}U''(x_-)(x - x_-)^2 \right] = E_M.$$

Si ha  $U''(x_-) < 0$ , l'espressione diventa:

$$\begin{aligned} y^2 - |U''(x_-)|(x - x_-)^2 &= 0 \iff \\ \left[ y - \sqrt{|U''(x_-)|(x - x_-)} \right] \left[ y + \sqrt{|U''(x_-)|(x - x_-)} \right] &= 0 \iff \\ y &= \pm \sqrt{|U''(x_-)|(x - x_-)}. \end{aligned}$$

Vicino al punto, la curva di livello è bene approssimata da due rette.

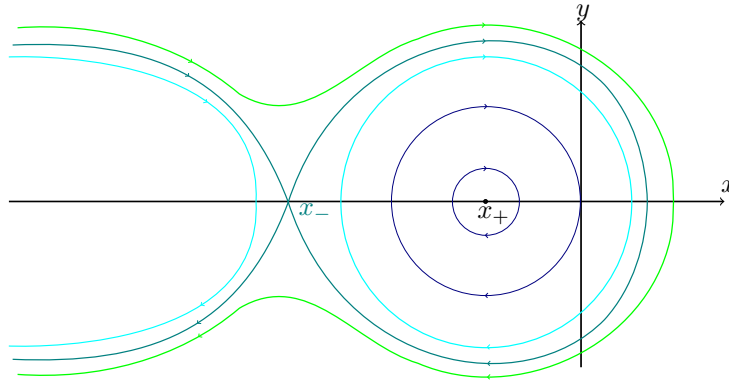


Figure 8: esmp-phase-complete

Tuttavia non è chiara la direzione di percorrenza.

Lo stesso studio si può fare per il punto di equilibrio stabile  $x_+$ . Infatti, l'approssimazione per piccole oscillazioni grazie a Taylor è:

$$U(x) = U(x_+) + U'(x_+)(x - x_+) + \frac{1}{2}U''(x_+)(x - x_+)^2 + o((x - x_+)^2) \implies U(x) \approx E_m + \frac{1}{2}U''(x_+)(x - x_+)^2.$$

Tale espressione è simile a quella di una molla con  $k \equiv U''(x_+)$ . Le traiettorie vicino al punto di equilibrio stabile sono bene approssimate da ellissi e si può calcolare un'approssimazione per il periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{U''(x_+)} \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_+)}} \quad m = 1.$$

Dunque, riassumendo

- Si disegna il grafico del potenziale;
- Si trovano i punti di equilibrio. Per un sistema dinamico autonomo le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

Per NC nel piano si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU}{dx} \end{cases}.$$

Dunque un punto di equilibrio  $(\tilde{x}, 0)$  è tale per cui  $U'(\tilde{x}) = 0$ .

- Classificazione dei livelli energetici.

## Lecture 7

mer 13 ott  
2021 15:30

### 6.2 Tempo di percorrenza

[immagine]

Ci si chiede quando tempo sia necessario per percorrere una traiettoria da  $x_0$  a  $x$ . Il ramo positivo della traiettoria è descritto da  $y(x) = \sqrt{2[E_0 - U(x)]}$ . Dato che

$$E_0 = \frac{1}{2}y^2 + U(x_0), \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU}{dx} \end{cases}$$

Segue

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2[E_0 - U(x)]}$$

cioè una ODE a variabili separabili la cui soluzione è

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}} = \int_{t_0}^t dt$$

Per percorrere la traiettoria da  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$  che non include un punto di inversione, si utilizza un tempo pari a

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}}$$

Dunque la traiettoria è percorsa in un tempo finito perché l'integrando è limitato.

Tuttavia, si vuole studiare il caso per cui  $x \rightarrow \beta$ . Dato che si avrebbe  $E_0 = U(\beta)$  si otterrebbe un integrale improprio:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}}$$

Bisogna capire come l'integrale diverge. Si utilizza Taylor

$$E_0 - U(\xi) = E_0 - U(\beta) - U'(\beta)(\xi - \beta) + o(\xi - \beta)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{2[E_0 - U(\beta)]}} \approx \frac{1}{\sqrt{2U'(\beta)(\xi - \beta)}}$$

Dunque, sotto radice si ha un polinomio di primo grado (in  $\xi$ ) e quindi, vicino a  $\xi = \beta$  l'integrale converge (si ricorda che  $\int_0^b \frac{1}{x^a} dx$  converge per  $a < 1$ ; si considera  $0 < b < +\infty$ ).

Pertanto, fino a  $\beta$  si utilizza un tempo finito: [immagine]

- Per la parte A si ha:  $\int_{x_0}^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}}$ .
- Per la parte B si ha:  $\int_{\beta}^{x_1} \frac{d\xi}{-\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}} = \int_{x_1}^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}}$

Per il punto in  $\alpha$  si segue lo stesso ragionamento.

**Periodo del moto periodico.** Il periodo di un moto periodico è

$$T(E_0) = 2 \int_{\alpha(E_0)}^{\beta(E_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}}$$

Tuttavia, l'integrale potrebbe non essere analitico. Dunque si dà una stima. Inoltre, questa espressione vale per qualsiasi ampiezza di oscillazione. Se  $U(x)$  è quadratico allora si ottiene un moto armonico.

Dunque, nel caso l'integrale non sia analitico si vogliono trovare due funzioni  $f(x)$ ,  $g(x)$  che svolgano il ruolo di minorante e maggiorante per la durata di un certo intervallo:

$$f(x) \leq U(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Inoltre si deve avere

$$E_0 - f(x) \geq 0, \quad E_0 - g(x) \geq 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Con tali condizioni si ha

$$[E_0 - f(x)]^{-\frac{1}{2}} \leq [E_0 - U(x)]^{-\frac{1}{2}} \leq [E_0 - g(x)]^{-\frac{1}{2}}$$

Dunque, integrando rispetto  $\xi$  segue

$$T_f(E_0) \leq T_U(E_0) \leq T_g(E_0)$$

Viene da sé che bisogna scegliere delle curve per cui si sappia calcolare l'integrale.

## Lecture 8

Si supponga che  $U(x)$  sia convessa in  $[\alpha, \beta]$ , cioè  $U''(x) > 0$ ,  $\forall x \in [\alpha, \beta]$ . Si definiscono  $f(x)$ ,  $g(x)$  a tratti in modo tale che

$$f(x) \leq U(x) \leq g(x),$$

$E_0 - f(x) \geq 0$ ,  $E_0 - g(x) \geq 0$ . Quindi, l'integrale associato ad ogni funzione è del tipo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}.$$

che si risolve analiticamente.

**Traiettoria separatrice.** Si vuole calcolare il tempo di percorrenza della traiettoria separatrice: [immagini]

$$T_{x_0 \rightarrow x} = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_M - U(\xi)]}}.$$

[rivedi] Non si conosce la dinamica attorno al punto critico. Si deve calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2[E_0 - U(\xi)]}}.$$

Per Taylor si ottiene

$$U(\xi) = \overbrace{U(\tilde{x})}^{E_M} + \overbrace{U'(\tilde{x})}^0 (\xi - \tilde{x}) + \frac{1}{2} U''(\tilde{x}) (\xi - \tilde{x})^2 + o(\xi^2).$$

Dato che si ha un secondo ordine sotto radice, si ha un integrando di prim'ordine. Dunque, l'integrale diverge: il tempo necessario per arrivare al punto è infinito. Quindi la curva di livello è composta da 5 traiettorie distinte e separate. All'infinito ci si aspetta che il moto non sia libero.

gio 14 ott  
2021 15:30

**Lecture 9**

lun 18 ott  
2021 16:30

aggiungere esempio?

**Esempio.** Il potenziale di Coulomb è  $U(x) = -\frac{1}{x}$ . In tre dimensioni si ha

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}.$$

[immagini]

Per  $E_0 < U(r^*)$  non ci sono traiettorie ammesse.

**Esempio.** Il sistema dinamico di un pendolo semplice è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU(\theta)}{d\theta} \end{cases}.$$

Con  $U(\theta) = -\frac{g}{L} \cos \theta$ . [immagini]. Per  $E_0 < -\frac{g}{L}$  non ci sono traiettorie ammesse. Mentre per  $E_0 = \frac{g}{L}$  si ha la traiettoria separatrice.

Delle condizioni iniziali vicine al punto  $(0,0)$  vi rimangono prossime. Mentre delle condizioni iniziali vicino a  $(\pi,0)$  si allontanano. Dunque, sembra ragionevole affermare che il primo sia un punto di equilibrio stabile mentre il secondo instabile.

Per SDANCP è sufficiente guardare al segno di  $U''(x)$ . Infatti

- Per  $U'' > 0$  si ha una parabola con concavità verso l'alto, dunque il punto è stabile.
- Per  $U'' < 0$  si ha una parabola con concavità verso il basso, pertanto il punto è instabile.
- Per  $U'' = 0$  bisogna trovare un altro modo di discernimento.

**6.3 Diagramma di biforcazione**

Si vogliono studiare quelle situazioni in cui il potenziale dipende da un parametro. Al suo variare si può passare da punti stabili a punti instabili. In particolare, si osserva come i punti di equilibrio evolvono anche guardando il diagramma di biforcazione. In tale diagramma si riassume la posizione e la stabilità dei punti di equilibrio al variare dell'energia potenziale in base al parametro. [rivedi]

Si consider la famiglia di energia potenziali

$$U_\lambda(x) = (x^2 - \lambda)^2.$$

Si trovano i punti di equilibrio

$$\frac{dU_\lambda}{dx} = 4x(x^2 - \lambda).$$

Quindi i punti di equilibrio sono  $(0,0)$  e  $(\pm\sqrt{\lambda},0)$  per  $\lambda > 0$ . Tipicamente con i SDANCP si esplicita solamente la  $x$  perché i punti di equilibrio hanno sempre  $y = 0$ . Nel diagramma di biforcazione si ha [immagini]

Si vogliono aggiungere informazioni sulla stabilità dei punti di equilibrio tramite l'uso della derivata seconda

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 4(x^2 - \lambda) + 8x^2 = 12x^2 - 4\lambda.$$

Per il punto  $x = 0$  si ha  $U''(0) = -4\lambda$ . Dunque, la sua stabilità è data dal segno di  $\lambda$ :

- Per  $\lambda < 0$  si ha un punto di equilibrio stabile.
- Per  $\lambda > 0$  si ha un punto di equilibrio instabile.

Per i punti  $x = \pm\sqrt{\lambda}$  si ha  $U''(\pm\sqrt{\lambda}) = 8\lambda$ , quindi per  $\lambda > 0$  si hanno punti di equilibrio stabile, quando tali punti esistono. [immagini]

## Lecture 10

mar 19 ott  
2021 15:30

**Esercizio.** Si considerino  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$  e  $U(x) = \beta x^4$ , si calcoli il periodo attorno ai punti di equilibrio in funzione dell'energia  $T(E)$ .

## 7 Sistemi dinamici autonomi generici nel piano

Si rimuove la condizione di essere newtoniani e conservativi. Si studiano i sistemi dinamici autonomi generici nel piano (SDAGP). Essi assumono la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

Si può dire qualcosa sebbene non si conosca la forma di  $f$  e  $g$ . Si osserva che sotto opportune ipotesi di regolarità, si possono caratterizzare alcune orbite attorno ai punti non di equilibrio. Localmente, attorno ad un punto qualsiasi, le orbite sono tutte uguali: si ha flusso identico, laminare. Dunque, localmente, tutti i punti di non equilibrio sono equivalenti.

**Teorema.** Scatola di flusso. Si consideri un SDAGP e sia  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  un punto non di equilibrio (cioè  $\dot{x} = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$  oppure  $\dot{y} = g(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ ). Allora esiste un intorno  $U$  di  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  ed esiste un opportuno cambio di coordinate (detto rettificazione)  $(z(x, y), w(x, y)) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  tali per cui il SDAGP scritto per  $z$  e  $w$  diventa banale:

$$\begin{cases} \dot{z} = 1 \\ \dot{w} = 0 \end{cases}.$$

La cui soluzione è  $w(t) = w(0) = \text{cost.}$  e  $z(t) = t + z(0)$  cioè un flusso laminare. [immagine]

**Esempio.** Si consideri l'oscillatore armonico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{w} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{z} = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Questa rettificazione è accettabile per quei punti che non siano di equilibrio, in questo caso solo  $(0, 0)$ . Si dimostra essere un sistema dinamico banale. [immagine] Si studia  $w$  :

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \partial_x w \dot{x} + \partial_y w \dot{y} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \dot{x} + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \dot{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (xy + y(-x)) = 0.$$

Per  $z$  si ha

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \partial_x z \dot{x} + \partial_y z \dot{y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left[ \left(-\frac{y}{x^2}\right) \dot{x} + \frac{1}{x} \dot{y} \right] = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left( \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} \right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left( \frac{-x^2 - y^2}{x^2} \right) = -1?.$$

Per i punti di equilibrio si ha una vasta classificazione. Una prima categoria è quella di stabile ed instabile.

**Definizione.** Un punto di equilibrio  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  per un SDAGP si dice stabile secondo Lyapunov se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che l'evoluto temporale di un qualsiasi punto  $(x_0, y_0) \in B_\delta(\tilde{x}, \tilde{y})$  rimane nella bolla di raggio  $\varepsilon$  centrata in  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid (x_0, y_0) \in B_\delta(\tilde{x}, \tilde{y}) \implies \text{evoluto temporale} \in B_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Altrimenti è detto instabile. La definizione vale per insiemi aperti generici, non necessariamente intorno circolari.

Tuttavia

- La definizione non è pratica, quindi i usano due metodi descritti da Lyapunov stesso per discernere la stabilità.
- La ragionevolezza di tale definizione deriva dall'includere il punto di equilibrio dell'oscillatore armonico nella categoria dei punti stabili.

**Esempio.** Si consideri l'oscillatore armonico con  $\omega^2 = 1$ . Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}.$$

L'energia è  $E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ ,  $E \geq 0$ , mentre le intersezioni degli assi sono  $P_{\pm} \left( \sqrt{\frac{2E_0}{\omega^2}}, 0 \right)$  e  $Q_{\pm} (0, \pm\sqrt{2E_0})$ . Si scelga un intorno di  $(0,0)$  con raggio  $\varepsilon > 0$ . Si supponga che la definizione sia che ogni punto all'interno dell'intorno rimanga dentro l'intorno per poter chiamare stabile il punto al centro. Risulta chiaro che punti vicini alla frontiera della bolla di raggio  $\varepsilon$  escono, quindi il punto sarebbe classificato come instabile. Tuttavia, Lyapunov pone una definizione più lungimirante. [immagini]

[rivedi] Lo spazio delle fasi attorno ad un punto di equilibrio varia notevolmente. Dunque, si osserva l'approssimazione per mezzo di un sistema dinamico lineare. Si parte da SDAGP, lo si linearizza vicino ad un punto di equilibrio e si studia tale linearizzazione. Successivamente si scopre se le semplificazioni sono troppo forti oppure alcune richieste sulle funzioni  $f$  e  $g$  valgono anche in casi non lineari.

Si consideri un SDAGP:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

ed un suo punto di equilibrio  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , cioè  $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ . Per Taylor si ottiene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \cancel{f(\tilde{x}, \tilde{y})} + \overset{0}{\partial_x f(\tilde{x}, \tilde{y})} (x - \tilde{x}) + \partial_y f(\tilde{x}, \tilde{y}) (y - \tilde{y}) + \text{o.s.} \\ g(x, y) &= \cancel{g(\tilde{x}, \tilde{y})} + \overset{0}{\partial_x g(\tilde{x}, \tilde{y})} (x - \tilde{x}) + \partial_y g(\tilde{x}, \tilde{y}) (y - \tilde{y}) + \text{o.s.} \end{aligned}$$

Si pone  $u \equiv x - \tilde{x}$  e  $v \equiv y - \tilde{y}$  elongazioni che soddisfano il sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = \partial_x f(\tilde{x}, \tilde{y}) u + \partial_y f(\tilde{x}, \tilde{y}) v + \text{o.s.} \\ \dot{v} = \dot{y} = \partial_x g(\tilde{x}, \tilde{y}) u + \partial_y g(\tilde{x}, \tilde{y}) v + \text{o.s.} \end{cases}.$$

Troncando la serie di Taylor si ottiene l'approssimazione seguente:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(\tilde{x}, \tilde{y}) & \partial_y f(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \partial_x g(\tilde{x}, \tilde{y}) & \partial_y g(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Esso è un sistema lineare detto linearizzazione. Si studia il sistema lineare per capire com'è fatto lo spazio di fase attorno al punto di equilibrio.

## 7.1 Studio della stabilità (e altro) di un sistema lineare

Il sistema dinamico è rappresentato dalla relazione

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Si cerca di diagonalizzare il problema studiando il polinomio caratteristico, e quindi gli autovalori, della jacobiana  $J$ . Si hanno tre casi:

- I) due radici reali distinte;
- II) due radici complesse coniugate;
- III) due radici reali coincidenti.



**Punto I.** Siano  $\lambda_1, \lambda_2$  autovalori reali distinti e  $\underline{\psi}_1, \underline{\psi}_2$  gli autovettori corrispondenti. Dunque si può scrivere

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u(t)\underline{e}_1 + v(t)\underline{e}_2 = \xi(t)\underline{\psi}_1 + \eta(t)\underline{\psi}_2.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta \end{cases}.$$

il quale ha soluzione

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta(t) = \eta_0 e^{\lambda_2 t}.$$

Le traiettorie dipendono dal segno di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Si vuole capire se il punto di equilibrio è stabile o meno. Si studia la distanza

$$d((\xi, \eta), (0, 0))^2 = \xi^2 + \eta^2 = \xi_0^2 e^{2\lambda_1 t} + \eta_0^2 e^{2\lambda_2 t}.$$

Si osserva che per  $t \rightarrow +\infty$  la sorte della distanza dipende dal segno degli autovalori:

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies d^2 \rightarrow +\infty$ , nodo instabile.
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies d^2 \rightarrow 0$ , nodo stabile (se e solo se per Lyapunov?).
- $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \implies$  dipende da  $\xi_0$  e  $\eta_0$ , tuttavia considerato instabile per Lyapunov. Esso è un punto di sella e si osserva sulla separatrice.

Inoltre

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t} \iff \frac{\xi(t)}{\xi_0} = e^{\lambda_1 t} \implies \left( \frac{\xi(t)}{\xi_0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = e^{\lambda_2 t} = \frac{\eta(t)}{\eta_0}.$$

Le traiettorie nello spazio delle fasi sono del tipo  $\eta = \eta(\xi)$ . [immagini]

## Lecture 11

**Punto II.** Per due autovalori complessi coniugati si ha

$$J\underline{\psi} = \lambda\underline{\psi}, \quad J\overline{\underline{\psi}} = \overline{\lambda\underline{\psi}}.$$

Bisogna cercare le soluzioni con componenti reali. Si cerca un cambio di base così da avere soluzioni reali:

$$\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{\psi} + \overline{\underline{\psi}}), \quad \underline{z} = \frac{1}{2i}(\underline{\psi} - \overline{\underline{\psi}}).$$

Applicando la jacobiana  $J$  risulta

$$J\underline{w} = \frac{1}{2}J(\underline{\psi} + \overline{\underline{\psi}}) = \frac{1}{2}(\lambda\underline{\psi} + \overline{\lambda\underline{\psi}}).$$

Dato che  $\lambda = a + ib$  e  $\overline{\lambda} = a - ib$  si ottiene

$$J\underline{w} = \frac{1}{2}(a + ib)\underline{\psi} + \frac{1}{2}(a - ib)\overline{\underline{\psi}} = a \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\psi} + \overline{\underline{\psi}})}_{\underline{w}} + ib \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\psi} - \overline{\underline{\psi}})}_{i\underline{z}} = a\underline{w} - b\underline{z}.$$

In questo modo si ha un vettore reale. Analogamente:

$$J\underline{z} = b\underline{w} + a\underline{z}.$$

Il problema originale in base canonica si può riscrivere secondo la base  $\{\underline{w}, \underline{z}\}$  così si ha

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \xi\underline{w} + \eta\underline{z}$$

$$J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \dot{\xi}\underline{w} + \dot{\eta}\underline{z} = \xi \underbrace{a\underline{w} - b\underline{z}}_{J\underline{w}} + \eta \underbrace{b\underline{w} + a\underline{z}}_{J\underline{z}} = (\xi a + \eta b)\underline{w} + (-\xi b + \eta a)\underline{z}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Bisogna capire come sono fatte le traiettorie. Bisogna applicare un cambio di coordinate passando a quelle polari:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \theta = \text{atan} \frac{\xi}{\eta} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{\rho} = a\rho \\ \dot{\theta} = b \end{cases}.$$

In tali coordinate, il sistema si disaccoppia e la sua soluzione è

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{at} \\ \theta(t) = \theta_0 + bt \end{cases}.$$

Per  $a > 0$  si ha un fuoco instabile. Per  $a < 0$  si ha un fuoco stabile. Per  $a = 0$  si ha una circonferenza. [immagini] [immagine] finale

### Punto III appunti

I tipi di sistemi dinamici si possono discernere in base al polinomio caratteristico della Jacobiana:

$$\lambda^2 - \text{Tr } J\lambda + \det J = 0.$$

La traccia è  $\lambda_1 + \lambda_2$  e il determinante è  $\lambda_1 \lambda_2$ .

**Esercizio.** Sia  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ . I punti di inversione sono  $\frac{1}{2}kx_{1,2}^2 = E \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$ . Dunque il periodo è

$$T(E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - \frac{1}{2}kx^2]}}.$$

Si può risolvere l'integrale oppure si può compiere un cambio di coordinate:

$$y = \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \iff x^2 = \frac{2E}{k} y^2, \quad y_{1,2} = \pm 1, \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} dy.$$

Dunque

$$\begin{aligned} T(E) &= 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - \frac{1}{2}k\frac{2E}{k}y^2]}} dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \text{asin } y \Big|_{-1}^1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \end{aligned}$$

Per controllare si può utilizzare l'analisi dimensionale. Si sa che  $kx^2 = E \iff k[L]^2 = [M]\frac{[L]^2}{[T]^2} \iff k = \frac{[M]}{[T]^2}$  e la formula trovata è concorde con tali unità.

Si consideri ora  $U = \beta x^4$ . [rivedi]

## Lecture 12

### 7.2 Metodi di Lyapunov

Si ritorna dalla linearizzazione al sistema dinamico di partenza. Si è studiata la stabilità del sistema lineare per inferire delle informazioni sul sistema non lineare. Il passaggio che giustifica la stabilità del punto di equilibrio nel caso non lineare a partire dal caso lineare è dato dal primo metodo di Lyapunov.

lun 25 ott  
2021 16:30

### 7.2.1 Primo metodo di Lyapunov

**Teorema.** Hartman-Grobman per il piano. Sia  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  punto di equilibrio di un sistema dinamico nel piano e sia  $J(\tilde{x}, \tilde{y})$  la jacobiana nel punto di equilibrio. Se ogni autovalore di  $J$  ha parte reale non nulla segue

- Se entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa allora  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è stabile.
- Se almeno un autovalore ha parte reale positiva allora  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è instabile.

**Esempio.** Si consideri

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x \\ \dot{y} = xy^3 - a^2 - x^2 + y^2 \end{cases}, \quad |a| > \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Si trovano i punti di equilibrio:

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ xy^3 - x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm a \end{cases}.$$

La soluzione per  $y = 1$  produce  $x$  complesse, dunque non si considera. Pertanto, si ha  $P^\pm(0, \pm a)$ . Si studia la stabilità:

$$J = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ y^3-2x & 3xy^2+2y \end{pmatrix} \implies J = (0, \pm a) = \begin{pmatrix} \pm a-1 & 0 \\ \pm a^3 & \pm 2a \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori risultano essere  $\lambda_1 = \pm a - 1$  e  $\lambda_2 = \pm 2a$  che sono non nulli per ogni valore di  $a$  permesso. Per il primo metodo di Lyapunov si ha

- $P^+$ ,  $\lambda_1 = a - 1$ ,  $\lambda_2 = 2a$ ; se  $a > 0$  allora  $P^+$  è instabile, altrimenti stabile.
- $P^-$ ,  $\lambda_1 = -a - 1$ ,  $\lambda_2 = -2a$ ; se  $a > 0$  allora  $P^-$  è stabile, altrimenti instabile.

### 7.2.2 Secondo metodo di Lyapunov

Nel caso in cui il primo metodo fallisca, si può provare con il secondo. Sia  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  un punto di equilibrio del sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

Si consideri la funzione  $W(x, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $W \in C^1$  tale che esiste un intorno  $U$  di  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  dove vale:

- $\forall (x, y) \neq (\tilde{x}, \tilde{y}), (x, y) \in U, W(x, y) > W(\tilde{x}, \tilde{y})$ .
- $\partial_x W f + \partial_y W g \leq 0$  lungo le soluzioni  $(x(t), y(t)) \in U$  del sistema dinamico.  
Tale condizione equivale a considerare  $\phi(t) = W(x(t), y(t))$  e  $\partial_t \phi(t) = \partial_x W \dot{x} + \partial_y W \dot{y}$ .  
Infatti, lungo le soluzioni si ha  $\dot{x} = f(x, y)$  e  $\dot{y} = g(x, y)$ .

Allora  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è stabile.

Questo metodo non è costruttivo perché bisogna cercare, se esiste, una funzione  $W$  con tali proprietà.

**Esempio.** Si consideri il sistema dinamico di un oscillatore armonico smorzato:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx - \gamma y - \beta y^3 \end{cases} \quad , \quad k, \beta, \gamma \geq 0.$$

Il punto  $(0,0)$  risulta essere di equilibrio. Se ne studia il tipo. Si applica il primo metodo:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\gamma - 3\beta y^2 \end{pmatrix} \implies J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\gamma \end{pmatrix} \implies \lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2}.$$

Se  $\gamma = 0$  allora  $\Delta < 0 \iff \operatorname{Re}(\lambda) = 0$  e non si può applicare Lyapunov. Dunque, si applica il secondo metodo.

Ci si chiede se l'energia meccanica

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

sia funzione di Lyapunov anche se il sistema dinamico non è conservativo. Si verificano le due condizioni:

- Il punto  $(0,0)$  è minimo locale in quanto la funzione è un paraboloide.
- Per la seconda condizione si ha

$$\partial_x W \dot{x} + \partial_y W \dot{y} = kxy - kxy - \gamma y^2 - \beta y^4 = -\beta y^4 \leq 0, \quad \forall y.$$

Dunque, il punto  $(0,0)$  è un punto stabile.

**Dimostrazione.** [rivedi]

## Lecture 13

Esercitazione. Note Noja, §5.3.

mer 27 ott  
2021 15:30

## Meccanica Lagrangiana?

### 7.3 Sistema di punti

Si descrive un problema ad  $n$  corpi:  $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ . Si vedono alcune grandezze fisiche

- Quantità di moto  $\vec{p} = \sum \vec{p}_j = \sum m_j \vec{v}_j$ .
- Momento angolare  $\Gamma_Q = \sum \Gamma_{Q,j} = \sum (\vec{x}_j - \vec{x}_Q) \times \vec{p}_j$ .
- Energia cinetica  $T = K = \sum K_j = \frac{1}{2} \sum m_j \|\vec{v}_j\|^2$ .
- Forza risultante  $\vec{R} = \sum \vec{F}_j$ .
- Momento risultante  $N_Q = \sum N_{Q,j} = \sum (\vec{x}_j - \vec{x}_Q) \times \vec{F}_j$ .
- Lavoro  $\delta W = \sum \delta W = \sum \vec{F}_j \cdot d\vec{x}_j$ .
- Potenza  $P = \sum P_j = \sum \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j$ .
- Baricentro  $\vec{x}_B = \frac{\sum m_j \vec{x}_j}{\sum m_j}$ ,  $M \equiv \sum m_j$ .

Per un sistema di riferimento arbitrario, il baricentro è un punto privilegiato.

**Esercizio 5.8** Il baricentro è l'unico punto per cui vale

$$\sum m_j(\vec{x}_j - \vec{x}_B) = 0.$$

**Dimostrazione.**

$$\sum m_j \vec{x}_j = \sum m_j \vec{x}_B = \vec{x}_B \sum m_j \iff \vec{x}_B = \frac{\sum m_j \vec{x}_j}{\sum m_j}.$$

Vero per definizione.

**Esercizio 5.9** Per tre punti di massa uguale, il baricentro è il punto di incontro delle mediate del triangolo che ha per vertici tali tre punti.

**Dimostrazione.** Si consideri il triangolo in figura. [immagine] Allora  $M_3CM_2 \sim ABC \implies M_3M_2 = \frac{1}{2}AB$  e  $M_4GM_5 \sim AGB \implies M_4M_5 = \frac{1}{2}AB$ . Dunque  $M_2M_3M_4M_5$  è un parallelogramma per cui le diagonali si bisezionano. Pertanto

$$x_G - x_C = 2(x_{M_1} - x_G) \implies 3x_G = 2x_{M_1} + x_C = x_A + x_B + x_C \iff x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Ed analogo per  $y$  e  $z$ , così come per gli altri due lati.

**Esercizio 5.10** Il baricentro di due sotto insiemi di punti è il baricentro dei baricentri.

**Dimostrazione.** La proposizione segue dalla linearità della definizione di baricentro.

**Proposizione 5.5** In fisica è comodo scegliere il baricentro come punto di riferimento. Infatti, la quantità di moto totale di un sistema di punti è eguale alla quantità di moto  $M\vec{v}_B$  del baricentro considerato come punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema.

**Dimostrazione.** Sia  $\vec{x}'_j = \vec{x}_j - \vec{x}_B$ ,  $\vec{v}'_j = \vec{v}_j - \vec{v}_B$  dove l'apice indica calcolato rispetto al baricentro. Allora

$$\vec{p} = \sum m_j \vec{v}_j = \sum m_j \vec{v}'_j + \sum m_j \vec{v}_B = \sum m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_B) + \sum m_j \vec{v}_B = \sum m_j \vec{v}_B.$$

**Proposizione 5.6** Scomposizione del momento angolare. Il momento della quantità di moto totale di un sistema di punti rispetto ad un polo  $Q$  si può scomporre come

$$\vec{\Gamma}_Q = \vec{\Gamma}_Q^{\text{relativo}} + \vec{\Gamma}_Q^B.$$

**Dimostrazione.** Da  $\vec{\Gamma}_Q = \sum (\vec{x}_j - \vec{x}_Q) \times \vec{p}_j$  si ha

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_Q &= \sum (\vec{x}_j - \vec{x}_B) \times \vec{p}_j + \sum (\vec{x}_B - \vec{x}_Q) \times \vec{p}_j \\ &= \sum (\vec{x}_j - \vec{x}_B) \times m_j \vec{v}'_j + \underbrace{\sum (\vec{x}_j - \vec{x}_B) \times m_j \vec{v}_B}_0 + (\vec{x}_B - \vec{x}_Q) \times \underbrace{\sum \vec{p}_j}_p = \vec{\Gamma}'_Q + \vec{\Gamma}_Q^B. \end{aligned}$$

## Lecture 14

gio 28 ott  
2021 15:30

## 7.4 Lotka-Volterra

Si studia il sistema dinamico di Lotka-Volterra (preda-predatore). La quantità delle prede è  $x$  e quella dei predatori è  $y$ .

Come varia la numerosità di una singola specie è ben descritto dal modello malthussiano:  $\dot{x} = \lambda_1 x$ . La soluzione è di tipo esponenziale: la proliferazione o estinzione dipende dal segno di  $\lambda_1$ . Parlando di prede in assenza di predatori si ha  $\lambda_1 > 0$ . Per predatori in assenza di prede si ha  $\dot{y} = -\lambda_2 y$  con  $\lambda_2 > 0$ .

Lotka-Volterra aggiunge l'interazione tra prede e predatori. Il modo più semplice che modella l'incontro è descrivere tutti i modi possibili di incontri. Dunque, quando una preda incontra un predatore, per lei si ha un evento negativo che diminuisce la sua popolazione:  $-\lambda_4 xy$ . Viceversa, per i predatori. Quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - \lambda_4 xy \\ \dot{y} = -\lambda_2 y + \lambda_3 xy \end{cases}.$$

I casi banali si hanno per  $x = 0$  o  $y = 0$  che si esclude. Si considera  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Si cerca di disegnare il suo diagramma di fase che vive nel piano  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

**Punti di equilibrio.** Si cercano i punti di equilibrio. Pertanto,

$$\begin{cases} \lambda_1 x - \lambda_4 xy = 0 \\ -\lambda_2 y + \lambda_3 xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(\lambda_1 - \lambda_4 y) = 0 \\ y(\lambda_3 x - \lambda_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \\ x = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \end{cases}.$$

[immagine]

Il punto di equilibrio corrisponde alla coppia  $(x(t), y(t))$  costante cioè  $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \frac{\lambda_1}{\lambda_4}\right)$ . Si ha un equilibrio biologico.

Spostandosi dall'equilibrio non si sa come comportarsi. Tuttavia, ciò che può aiutare a come sono fatte le traiettorie è guardare com'è fatto il campo vettoriale, perché le traiettorie sono curve integrali tangenti soluzioni del sistema. Si studia il segno di  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ .

Dunque

$$\begin{aligned} \lambda_1 x - \lambda_4 xy > 0 &\implies y < \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \\ -\lambda_2 y + \lambda_3 xy > 0 &\implies x > \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \end{aligned}$$

[immagine]

Il campo disegnato dà l'idea di una circolazione. Bisogna discutere anche la stabilità del punto di equilibrio. Si studia tale punto per mezzo della costante del moto.

Si consideri la prima equazione:

$$\dot{x} \frac{\lambda_2 - \lambda_3 x}{x} = x(\lambda_1 - \lambda_4 y) \frac{\lambda_2 - \lambda_3 x}{x}.$$

Così per la seconda equazione

$$\dot{y} \frac{\lambda_1 - \lambda_4 y}{y} = -(\lambda_2 - \lambda_3 x)(\lambda_1 - \lambda_4 y).$$

I membri sulla destra sono gli stessi a meno del segno. Dunque sommando membro a membro si ha

$$\lambda_2 \frac{\dot{x}}{x} - \lambda_3 \dot{x} + \lambda_1 \frac{\dot{y}}{y} - \lambda_4 \dot{y} = 0.$$

Quindi

$$\lambda_2 \frac{d}{dt} \ln x - \lambda_3 \dot{x} + \lambda_1 \frac{d}{dt} \ln y - \lambda_4 \dot{y} = 0.$$

Cioè

$$\frac{d}{dt}[\lambda_2 \ln x - \lambda_3 x + \lambda_1 \ln y - \lambda_4 y] = 0.$$

Dunque, questa funzione è una costante del moto. Risulta essere costante quando è valutata lungo curve che soddisfanno l'equazione del sistema dinamico. Quindi  $-G(x, y) = \lambda_2 \ln x - \lambda_3 x + \lambda_1 \ln y - \lambda_4 y$  è una costante del moto. Si potrebbe scoprire che il punto di equilibrio è un minimo assoluto della funzione precedente. Quindi

$$\left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \right).$$

è punto di minimo assoluto. Questo permette di utilizzare il secondo metodo di Lyapunov per dire che tale punto di equilibrio è stabile. Quindi le traiettorie attorno al punto saranno delle specie di ovali che non scappano all'infinito. Tuttavia, l'utilità della costante del moto va ben oltre. Si possono studiare direttamente le traiettorie perché sono sotto insiemi delle curve di livello.

Si studia cosa succede alla costante del moto quando ci si trova ai bordi del dominio. Quando  $x \rightarrow 0$  si ha  $G \rightarrow +\infty$  e lo stesso per  $y \rightarrow 0$ , pure quando  $x, y \rightarrow +\infty$ .

Si ha un equilibrio biologico e fuori dall'equilibrio si hanno delle orbite.

**Valor medi su di un periodo.** La prima legge di Lotka-Volterra afferma che l'evoluzione preda-predatore è periodica.

La seconda legge di Lotka-Volterra. Dato un certo periodo di tempo  $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$ , la media

$$\bar{f}_{\Delta T} \equiv \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} f(t) dt.$$

Si vuole calcolare  $\bar{y}_{\tau_{\tilde{G}}}$  numero medio di predatori lungo un periodo e  $\bar{x}_{\tau_{\tilde{G}}}$  numero medio di prede.

Dove  $\tau_{\tilde{G}}$  è il periodo del moto per valore  $\tilde{G} > G_{\min}$ . Quindi

$$\bar{y}_{\tau_{\tilde{G}}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_4}, \quad \bar{x}_{\tau_{\tilde{G}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Dato che  $\int_{T_1}^{T_2} \dot{x} dt = \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_1 - \lambda_4 y) dt$  risulta

$$\ln \left( \frac{x(T_2)}{x(T_1)} \right) = \lambda_1 (T_2 - T_1) - \lambda_4 \int_{T_1}^{T_2} y(t) dt.$$

Se  $T_2 = T_1 + \tau_{\tilde{G}}$  allora  $x(T_1) = x(T_2)$  dunque  $0 = \lambda_1 \tau_{\tilde{G}} - \lambda_4 \int_{T_1}^{T_2} y(t) dt$ . Quindi

$$\bar{y}_{\tau_{\tilde{G}}} = \frac{1}{\tau_{\tilde{G}}} \int_{T_1}^{T_2} y(t) dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_4}.$$

## Lecture 15

Esercitazione. Continuo del sistema di  $N$  corpi.

mer 03 Nov  
2021 15:30

**Proposizione 5.** Teorema di König. Per l'energia cinetica vale la scomposizione

$$K = K^{(\text{rel})} + K^B.$$

**Dimostrazione.** Si ha

$$K = \frac{1}{2} \sum m_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum m_j (\vec{v}_j' + \vec{v}_B)^2 = \frac{1}{2} \sum m_j v_j'^2 + \frac{1}{2} \sum m v_B^2 + \sum m_j \vec{v}_j' \cdot \vec{v}_B = K^{(\text{rel})} + K^B.$$

[rivedi]

**Definizione.** Si assume di poter sempre distinguere tra forze esterne e forze interne che agiscono sul sistema di punti:

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j^{(\text{ext.})} + \vec{F}_j^{(\text{int.})}.$$

**Definizione.** Forze classiche.

- Per ogni coppia di particelle  $P_j, P_k$  si può isolare la forza che la particella  $k$  esercita sulla particella  $j$  come  $\vec{F}_{j,k}^{(\text{int.})}$ , forza a due corpi.
- La forza è funzione soltanto della posizione delle due particelle  $F_{j,k}^{(\text{int.})}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$  è detta forza posizionale a due corpi? [rivedi]
- La forza che agisce sulla particella  $j$  è  $F_j^{(\text{int.})} = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} F_{j,k}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$ . [rivedi]
- $\vec{F}_{j,k}^{(\text{int.})} = -\vec{F}_{k,j}^{(\text{int.})}$
- La forza si trova sulla congiungente,  $(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \cdot \vec{F}_{j,k} = 0$ .
- Quando le forze hanno simmetria sferica, allora la forza  $\vec{F}_{j,k}^{(\text{int.})} = f_{j,k}(|\vec{r}_{j,k}|) \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|}$ .

La risultante è  $\vec{R}^{(\text{ext.})} = \sum_j F_j^{(\text{ext.})}$ . Il momento totale delle forze è  $\vec{N}_Q^{(\text{ext.})} = \sum (\vec{x}_j - \vec{x}_k) \times F_j^{(\text{ext.})}$ . Si dimostra che  $\vec{p} = \vec{R}^{(\text{ext.})}$  e  $d_t \vec{\Gamma}_Q = \vec{N}_Q^{(\text{ext.})} - \vec{v}_Q \times \vec{p}$ .

**Dimostrazione.** Si ha

$$M\ddot{\vec{x}}_B = \dot{\vec{p}} = \sum_j F_j^{(\text{ext.})} + F_j^{(\text{int.})} = \vec{R}^{(\text{ext.})} + \sum F_j^{(\text{int.})}.$$

Per il secondo termine si ha

$$\sum_j F_j^{(\text{int.})} = \sum_{j,k=1, j \neq k}^n F_{j,k}^{(\text{int.})} = \sum_{j,k=1, j \neq k}^n F_{j,k}^{(\text{int.})} + F_{k,j}^{(\text{int.})}.$$

Lo studio dipende dalla situazione fisica: in un atomo non importa il moto del baricentro, ma nelle forze interne; per un razzo verso Marte, importa il baricentro, non le forze interne.

## Lecture 16

Continuo di Lotka-Volterra.

La prima legge di Lotka-Volterra supporta il fatto che alcune fluttuazioni di un sistema può essere dovuto all'interno del sistema stesso e non dovuto a fattori esterni: si ha una causa endogena invece di esogena.

Si discute la terza legge di Lotka-Volterra. Essa spiega alcuni dati empirici osservando la numerosità di alcuni pesci dell'Adriatico. Si vuole descrivere cosa succede quando si fa una pesca indiscriminata. Il sistema è perturbato dall'esterno. Si vuole scrivere un modello che incorpori tale fattore esterno:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - \lambda_4 xy - \delta x & \delta > 0 \\ \dot{y} = -\lambda_2 y + \lambda_3 xy - \delta y \end{cases}$$

L'indiscriminato sta nel fatto che  $\delta$  è comune ad entrambi. Il fenomeno osservato è che l'azione umana fa aumentare il numero medio delle prede, ma diminuire il numero medio dei predatori?. Dunque, ponendo  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - \delta$ , e  $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + \delta$  si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{\lambda}_1 x - \lambda_4 xy \\ \dot{y} = -\tilde{\lambda}_2 y + \lambda_3 xy \end{cases}$$

gio 04 nov  
2021 15:30



Dunque, la pesca indiscriminata modifica i parametri del sistema dinamico. Pertanto

$$\bar{x} = \frac{\tilde{\lambda}_2}{\lambda_3}, \quad \bar{y} = \frac{\tilde{\lambda}_1}{\lambda_4}$$

Dunque, aumentano le prede e diminuiscono i predatori perché  $\lambda_1$  diminuisce e  $\lambda_2$  aumenta.

## 7.5 Modello SIR

Questo modello descrive l'evoluzione semplificata di una pandemia. Esso descrive tre categorie: i sani, gli infetti ed i recovered (i deceduti ed i guariti, che non si possono riammalare):

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, & \beta > 0 \\ \dot{I} = \beta SI - \alpha I, & \alpha > 0 \\ \dot{R} = \alpha I \end{cases}$$

Come si è già notato, la somma membro a membro è nulla:  $N = S + I + R$ ,  $\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$ , cioè il numero totale della popolazione rimane costante nel tempo.

Inoltre, osservando le prime due equazioni del sistema, a destra si trova solo  $S$  o  $I$ , esse sono disaccoppiate dalla terza [rivedi]

Studiando le prime due equazioni si ricorda Lotka-Volterra:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha$ . Tuttavia, il punto di equilibrio scompare perché tende a 0, tuttavia si erano esclusi i casi banali. Infant, l'asse  $I = 0$  è fatto solo da punti di equilibrio.

Non si può partire da un punto di equilibrio e osservare cosa succede attorno. Conviene passare a delle variabili ridotte: alle percentuali. Dunque

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}$$

Conviene perché  $N$  è costante e  $S, I < N$ , dunque  $0 < s, i < 1$ . Inoltre,  $N$  è una costante del moto:  $\dot{s} = \frac{\dot{S}}{N}$  e  $\dot{i} = \frac{\dot{I}}{N}$ . Dunque, il modello SIR per le variabili ridotte è

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta N s i \\ \dot{i} = \tilde{\beta} s i - \alpha i \end{cases}$$

dove si pone  $\beta N \equiv \tilde{\beta}$ . Si studia il campo vettoriale. [immaginare]

Per disegnare le linee di fase si utilizza la costante del moto trovata per Lotka-Volterra e si ottiene la costante

$$i + s - \frac{\alpha}{\tilde{\beta}} \ln s = \text{cost.}$$

Una volta tracciato il campo vettoriale si scopre che, per come è fatto il campo vettoriale, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0$$

Cioè l'epidemia si spegne. Inoltre,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_\infty$$

che dipende dalle condizioni iniziali. Una percentuale della popolazione, a fine pandemia, non è stata infettata. Si vuole calcolare tale numero in funzione dei parametri sotto ipotesi ragionevoli. Quindi

$$C(i, s) = \tilde{\beta}(i + s) - \alpha \ln s$$

Se essa è costante del moto, allora calcolandola su di una soluzione si ha

$$C(i(t), s(t)) = C(i(0), s(0))$$

Si stima  $i(0)$  e  $s(0)$  tramite ipotesi di ragionevolezza. Al tempo zero ci si aspetta che  $i(0) = \varepsilon$  piccolo e  $s(0) = 1 - \varepsilon$ . Pertanto

$$C = \tilde{\beta} - \alpha \ln s(0) = \tilde{\beta} - \alpha \ln(1 - \varepsilon)$$

Dunque

$$C(t) = C(+\infty) = \tilde{\beta} s_\infty - \alpha \ln s_\infty \implies \tilde{\beta} - \alpha \ln(1 - \varepsilon) = \tilde{\beta} s_\infty - \alpha \ln s_\infty$$

Da cui si ottiene (usando la funzione W di Lambert)  $s_\infty$ . [rivedi]

## Lecture 17

lun 08 nov  
2021 16:30

## 8 Meccanica Lagrangiana.

[rivedi]

Nonostante le equazioni del moto siano deterministiche, non si può comunque avere la predicibilità.

Si vogliono studiare problemi la cui ricerca della soluzione porta alla formulazione alternativa della meccanica, ma più potente di quella newtoniana.

Molti problemi sorgono quando dei corpi vivono nello spazio, ma devono soddisfare alcuni vincoli.

**Esempio.** Si supponga di avere due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ . Un punto materiale è un oggetto di dimensioni trascurabili, con massa, soggetto alla dinamica. Si supponga che tali due punti si muovano in  $\mathbb{R}^2$  nel piano  $xz$ . Le posizioni di tali punti sono  $P_1(x_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, z_2)$  non sono tutto il piano, ma  $P_1$  è vincolato ad una circonferenza di raggio  $R$ , mentre  $P_2$  è vincolato all'asse  $z$ ; inoltre, entrambi sono vincolati a stare a distanza  $L$ . Si supponga di voler studiare il moto di tali due punti nel campo gravitazionale. Tale studio sarebbe molto noioso con la meccanica newtoniana.

Si scrivono i vincoli in maniera analitica:

- $x_1^2 + z_1^2 = R^2 \iff x_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$
- $x_2 = 0$
- $(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = L^2 \iff (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2 = 0$

Si scrivono le equazioni di Newton:  $m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i^{\text{tot}}$ , la forza totale è la somma della forza peso e delle reazioni vincolari. È facile calcolare la forza peso, ma è più difficile trovare l'espressione delle forze vincolari che non sono note a priori. Le difficoltà introdotte dai vincoli sono ?? e le reazioni vincolari hanno il ruolo di mantenere i vincoli soddisfatti. [rivedi]

Si vorrebbe costruire una nuova formulazione della meccanica per cui il problema di scrivere esplicitamente le reazioni vincolari non ci sia più. Si vuole riscrivere il problema utilizzando delle coordinate naturalmente adattate al vincolo: le coordinate Lagrangiane che sono coordinate libere.

**Vincoli.** Prima si formalizza il concetto di vincolo. Tutte le condizioni di vincolo hanno la stessa forma: una funzione delle coordinate è posta uguale a zero. In generale, per  $N$  punti materiali nello spazio  $\mathbb{R}^3$  si ha bisogno di  $3N$  coordinate:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N})$$

**Definizione.** I vincoli olonomi sono una funzione del tipo  $f(\underline{x}, t) = 0$  (detto bilatero) oppure  $f(\underline{x}, t) \geq 0$  (detto unilatero).

Se non si ha dipendenza dal tempo, allora il vincolo è fisso; altrimenti è detto mobile.

Si considerano quasi sempre vincoli bilateri. Avere uno o più vincoli significa, geometricamente, Si supponga di avere  $r$  vincoli bilateri fissi:

$$\begin{cases} f_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_r(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

Nell'esempio, i gradi di libertà iniziali sono 4, uno per ciascuna coordinata. Appena si inserisce un vincolo, si condiziona una coordinata a dipendere da un'altra. Dunque, ogni vincolo diminuisce i gradi di libertà: da  $3N$  si passa a  $3N - r$  gradi di libertà. Questo significa che bastano  $3N - r$  variabili per descrivere il sistema le cui posizioni soddisfano i vincoli. Si può riscrivere le coordinate in funzione di tali  $3N - r$  parametri,  $q_i$ :

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(q_1, \dots, q_m) \\ \vdots \\ x_{3N} = \varphi_{3N}(q_1, \dots, q_m) \end{cases}$$

con  $m \equiv 3N - r$ . [immaginel]

Tuttavia bisogna osservare che tale descrizione potrebbe essere valida solo localmente per una scelta di  $\varphi$ ; se ci sono sovrapposizioni tra le descrizioni, esse devono essere compatibili. Inoltre, tali descrizioni devono essere buone, ben definite, cioè si vuole una corrispondenza biunivoca tra lo spazio partenza e di arrivo. Questo equivale a dire che la jacobiana abbia rango massimo

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \partial_{q_1} \varphi_1 & \dots & \partial_{q_m} \varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{q_1} \varphi_{3N} & \dots & \partial_{q_m} \varphi_{3N} \end{pmatrix} = m$$

In una situazione in cui bisogna descrivere  $N$  punti dello spazio con  $r$  vincoli, si hanno  $3N - r$  variabili indipendenti in funzione delle quali si riscrivono le  $3N$  variabili. L'idea è di capire come descrivere la dinamica non usando le coordinate vincolate, ma utilizzando coordinate libere.

Si vuole capire cosa succede quando, invece di muoversi in maniera arbitraria nello spazio di partenza, si cambia una  $q_i$  alla volta. Quando si fa tale studio, si ha la linea coordinata di  $q_i$  sulla superficie di arrivo. Facendo tale costruzione, si esplicita che le coordinate  $q_i$  sono indipendenti tra loro, cosa che per le  $x_i$  non vale, perché vincolate. Per questo le coordinate  $q$  sono dette coordinate libere o coordinate Lagrangiane.

Se si vuole descrivere il moto dei punti materiali, bisogna poter anche calcolare le velocità compatibili con il vincolo. Si utilizza il limite del rapporto incrementale. Si consideri un certo punto  $P = \underline{x}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)$ . Si fissi una linea coordinata  $q_i$ , scelta opportunamente perché passi per  $\tilde{q}$ , spostandosi di  $h$  lungo  $q_i$ :

$$\underline{x}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_i + h, \dots, \tilde{q}_m) - \underline{x}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)$$

Il vettore differenza è un vettore che al limite appartiene allo spazio tangente al punto  $P$ . Si vuole calcolare tale limite. Esso è la derivata

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_i + h, \dots, \tilde{q}_m) - \underline{x}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)}{h} = \frac{\partial \underline{x}(q)}{\partial q_i}$$

Per ogni linea coordinata si può costruire il corrispondente vettore tangente alla superficie e tali vettori sono linearmente indipendenti e formano una base della varietà? superficie nel punto  $P$ . Per una certa curva nello spazio di partenza, parametrizzata dal tempo, i punti dallo spazio di partenza vengono mappati tramite  $\varphi$  sulla varietà (manifold) di arrivo. Si vuole sapere cosa succede a fare la derivata rispetto al tempo di tale curva. Dunque, si vuole trovare la velocità sulla varietà di arrivo, la quale essa per forza sarà compatibile con il vincolo perché passa per  $\varphi$ .

Quindi, sia  $t_0 \in I$  a cui corrisponde un punto sulla curva  $(q_1(t_0), \dots, q_m(t_0))$  per cui, tramite  $\varphi$ , a  $\underline{x}(t_0)$  sulla varietà d'arrivo (con abuso di notazione si intende  $\underline{x}(t_0) = \varphi(q(t_0))$ ). Quindi

$$\underline{v}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t_0 + h) - \underline{x}(t_0)}{h} = \frac{d}{dt} \underline{x}(t_0)$$

Si vuole esprimere tale quantità in termini delle derivate:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(q_1(t), \dots, q_m(t)) = \left( \frac{dx_1(q_1, \dots, q_m)}{dt}, \dots, \frac{dx_{3N}(\cdot)}{dt} \right).$$

Quindi per la prima entrata del vettore si ha

$$\frac{dx_1(q_1(t), \dots, q_m(t))}{dt} = \sum_{j=1}^m \partial_{q_j} x_1 \dot{q}_j$$

E così per le altre componenti. Quindi

$$\underline{v}(t_0) = \sum_{j=1}^m \partial_{q_j} \underline{x}(t_0) \dot{q}_j$$

Dunque, il vettore velocità è un vettore che vive nello spazio tangente alla superficie nel punto identificato dalle coordinate Lagrangiane al tempo  $t_0$ . La velocità è combinazione lineare dei vettori che sono una base dello spazio tangente con coefficienti  $\dot{q}_j$  dette velocità generalizzate.

**Pendolo semplice.** Si vede cosa significa scrivere la dinamica in base alle coordinate generalizzate. Esso è un punto materiale nel piano vincolato ad una circonferenza, soggetto alla forza pesa. Si ha ( $\phi$  è la reazione vincolare):

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 + \phi_x \\ m\ddot{z} = -mg + \phi_z \end{cases}$$

Bisogna scegliere opportunamente le coordinate Lagrangiane. In questo caso, si sceglie  $\theta$ . Si ha una sola variabile Lagrangiana perché i gradi di libertà sono due,  $x$  e  $z$ , ma si ha una condizione di vincolo. Dunque, si fissa l'origine del sistema di riferimento in punto di rotazione del pendolo:

$$\begin{cases} x(\theta) = L \sin \theta \\ z(\theta) = -L \cos \theta \end{cases}$$

Da qua si possono scrivere le velocità compatibili con il vincolo:

$$\begin{cases} \dot{x} = L \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{z} = L \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

Ci si aspetta che le velocità vivono nello spazio tangente, infatti risulta che tale vettore velocità sono tangenti alla circonferenza descritta dal pendolo, cioè perpendicolare al vettore posizione. Per scrivere la dinamica bisogna utilizzare il fatto che la derivata temporale dell'energia cinetica lungo il moto è uguale alla potenza delle forze totali lungo le velocità compatibili con i vincoli.

## Lecture 18

Si osserva che le reazioni vincolari sono tali per cui il punto è vincolato alla circonferenza. Per fare ciò è sufficiente che la reazione vincolare abbia componente nulla nella direzione perpendicolare al filo, cioè l'unica componente nulla è quella perpendicolare allo spazio tangente alla varietà del vincolo. Dunque, se la reazione vincolare è sempre perpendicolare alla velocità compatibile con il vincolo, allora la potenza delle reazioni vincolari è nulla se calcolata lungo gli spostamenti

mar 09 nov  
2021 15:30

compatibili con il vincolo. Inoltre, questa è la definizione di vincolo liscio. L'energia cinetica del sistema è

$$K(\dot{x}(\theta, \dot{\theta}), \dot{z}(\theta, \dot{\theta})) = \frac{1}{2}m(L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}mL^2 \dot{\theta}^2.$$

Inoltre, vale

$$\frac{d}{dt}K = \Pi_{\text{tot}}.$$

[rivedi]

Si osserva che la potenza delle forze totali che agiscono sul punto è

$$\Pi_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{tot}} \cdot \vec{v} = \vec{P} \cdot \vec{v} + \underbrace{\vec{\phi}_{\text{vinc}} \cdot \vec{v}}_0.$$

[rivedi]

Quindi la derivata dell'energia cinetica rispetto al tempo risulta essere

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mL^2 \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2}mL^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mL^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}.$$

Inoltre, considerata la forza peso  $P$  si ha

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (0, -mg) \\ \vec{v} &= (L \cos \theta \dot{\theta}, L \sin \theta \dot{\theta}). \end{aligned}$$

Da cui

$$mL^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} = \vec{P} \cdot \vec{v} = -mgL \sin \theta \dot{\theta} \iff \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta.$$

Si calcolano le reazioni vincolari  $\phi$ . Si nota che le equazioni di Newton sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \phi_x \\ m\ddot{y} = -mg + \phi_y \end{cases}.$$

Si svolge il calcolo solo per la componente  $x$ :  $\ddot{x} = -L \sin \theta \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \ddot{\theta}$ . Dunque

$$\phi_x = -\frac{L}{m} \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{L}{m} \cos \theta \ddot{\theta} = -\frac{L}{m} \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{L}{m} \cos \theta \left( -\frac{g}{L} \sin \theta \right).$$

[rivedi] La forza vincolare non può essere ricavata solo da considerazioni statiche, perché dipende anche dalla velocità e dall'accelerazione. In generale, continuando con l'approccio newtoniano ci si deve confrontare con uno studio intricato delle reazioni vincolari.

**Esempio.** Punto materiale che si muove su di una guida ellittica sempre soggetto alla forza peso. Si identifica un'opportuna coordinata? lagrangiana. Si ha un unico grado di libertà. Sia  $a$  il raggio del cerchio circoscritto e  $b$  il raggio del cerchio inscritto. Per un punto  $P$  sulla traiettoria ellittica si ha

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta \\ z(\theta) = b \sin \theta \end{cases}.$$

Dunque  $\theta$  è la coordinata lagrangiana,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , si ha una forma lineare  $\varphi$  per cui  $x = \varphi_x(\theta)$  e  $z = \varphi_z(\theta)$ .

Ora si ricavano le velocità compatibili con il vincolo:

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta, \dot{\theta}) = -a \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{z}(\theta, \dot{\theta}) = b \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

L'energia cinetica è

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(a^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + b^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}ma^2 \left( 1 + \underbrace{\left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right)}_{\text{eccentricità, } \alpha} \cos^2 \theta \right) \dot{\theta}^2.$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}K(\theta, \dot{\theta}) = ma^2 \dot{\theta} \left[ (1 + \alpha^2 \cos^2 \theta) \ddot{\theta} - \alpha^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \right].$$

Dato che il vincolo è liscio, allora rimane solo il termine di potenza della forza peso. Quindi

$$\frac{d}{dt}K = \Pi_{\text{tot}} = (0, -mg) \cdot (\dot{x}(\theta, \dot{\theta}), \dot{z}(\theta, \dot{\theta})) = -mgb \cos \theta \dot{\theta}.$$

Pertanto,

$$(1 + \alpha^2 \cos^2 \theta) \ddot{\theta} - \alpha^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 = -g \frac{b}{a^2} \cos \theta.$$

Questa è l'equazione differenziale del moto.

Si nota che negli esempi visti, la forza presente è conservativa: esiste una funzione  $U(x, z)$  detta potenziale tale per cui  $-\nabla U = \vec{P}$ . In questo caso, l'energia potenziale risulta essere  $U(x, z) = mgz = mgb \sin \theta$ . Per cui  $-\nabla U = (0, -mg) \equiv P$ . Se si valuta la funzione energia potenziale lungo le posizioni compatibili con il vincolo si osserva che

$$\frac{dU(\theta(t))}{dt} = \frac{dU}{d\theta} \dot{\theta} = mgb \cos \theta \dot{\theta}.$$

Ci si accorge che questa derivata è uguale a meno la potenza della forza peso:

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

Si studia se tale relazione è un caso dell'esercizio o vale in generale.

Si supponga di avere un punto materiale nello spazio vincolato a muoversi lungo una curva: si ha un solo grado di libertà. Dunque si hanno tre funzioni di una sola coordinata lagrangiana  $(x(q), y(q), z(q))$ . Le velocità compatibili con il vincolo sono

$$\left( \frac{dx}{dq} \dot{q}, \frac{dy}{dq} \dot{q}, \frac{dz}{dq} \dot{q} \right).$$

Si suppone di avere delle forze attive che agiscono sul punto materiale che sono di tipo conservativo. Dunque

$$\vec{F}^{\text{attivo}} = -\nabla U.$$

Si suppone di avere vincoli lisci e fissi, cioè

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{tot}} &= \Pi^{\text{attivo}} = \vec{F}^{\text{attivo}} \cdot \vec{v} = -\nabla U \cdot \vec{v} = -[\partial_x U v_x + \partial_y U v_y + \partial_z U v_z] \\ &= -\left[ \partial_x U \frac{dx}{dq} \dot{q} + \partial_y U \frac{dy}{dq} \dot{q} + \partial_z U \frac{dz}{dq} \dot{q} \right]. \end{aligned}$$

Si scrivono tali termini in termini di  $q$  e  $\dot{q}$ :

$$\Pi^{\text{tot}} = -\dot{q} \left[ \partial_x U \frac{dx}{dq} + \partial_y U \frac{dy}{dq} + \partial_z U \frac{dz}{dq} \right] = -\dot{q} \frac{dU}{dq}.$$

Pertanto

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dq} \dot{q}.$$

Si nota che

$$\frac{dU(q(t))}{dt} = \frac{dU}{dq} \dot{q}.$$

Pertanto

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \iff \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(K + U) = 0.$$

questa è la conservazione dell'energia meccanica per forze conservative in presenza di vincoli lisci. Inoltre questo vale lungo il moto, perché la potenza delle forze attive è uguale alla derivata dell'energia cinetica solo per traiettorie lungo il moto.

**Esempio.** Si considerino due aste con un estremo in comune e per la prima asta l'altro estremo è fissato nell'origine e per l'altra, l'estremo è libero di scorrere sull'asse  $z$ . Si considera il centro di massa di ogni asta. La prima asta è lunga  $2l_1$  e la seconda  $2l_2$ . [immagine]  
Si hanno tre vincoli ed un solo grado di libertà. Dunque, si sceglie una coordinata lagrangiana:

$$\begin{cases} x_1(q) \\ z_1(q) \\ x_2(q) \\ z_2(q) \end{cases}.$$

Bisogna controllare che le forze attive siano conservative. Infatti, la forza che agisce è la forza peso. Inoltre, il vincolo è liscio (perché dato dal problema). Dunque, si utilizzano quanto studiato precedentemente. Si ha

- un grado di libertà
- forze conservative
- vincoli lisci

Si sceglie la variabile lagrangiana. Ponendo l'angolo  $\theta$  si ha che  $x_1 = l_1 \cos \theta$ ,  $z_1 = l_1 \sin \theta$ . Bisogna scrivere la dipendenza per il secondo punto. Tracciando la congiungente dei due punti medi si notano due triangoli simili per cui  $x_2 = x_1 = l_1 \cos \theta$ ,  $z_2 = 2z_1 + OB$ . Inoltre,  $OB = OH + HB = 2l_1 \sin \theta + 2l_2 \sin \gamma$  e

$$CH = 2l_1 \cos \theta = 2l_2 \cos \gamma \implies \cos \gamma = \frac{l_1}{l_2} \cos \theta \implies \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \cos^2 \theta}.$$

Riassumendo

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta \\ z_1 = l_1 \sin \theta \\ x_2 = l_1 \cos \theta \\ z_2 = 2l_1 \sin \theta + 2\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \theta} \end{cases}.$$

manca un 2 nell'ultima? [rivedi]

Si trovano le velocità compatibili con il vincolo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{z}_1 = l_1 \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = -l_1 \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{z}_2 = 2l_1 \cos \theta \dot{\theta} + \frac{2l_1^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \theta}} \end{cases}.$$

Quindi

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[ \frac{2l_1^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \theta}} \right]^2.$$

[rivedi] Mentre

$$U(\theta) = m_1 g z_1(\theta) + m_2 g z_2(\theta) = m_1 g l_1 \sin \theta + m_2 g \left( 2l_1 \sin \theta + 2\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \theta} \right).$$

Si pone  $l_1 = l_2$ ,  $m_1 = m_2$ . Quindi

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\theta}\ddot{\theta}) [1 + \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta] + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 [-16 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}].$$

Forse

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\theta}\ddot{\theta}) [1 + \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta] + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 [1 - 6 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}]?$$

[rivedi] Si sceglie la coordinata lagrangiana. Si riscrivono le coordinate iniziali in base alla coordinata lagrangiana. [rivedi]

$$\ddot{\theta} (1 + \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 = -4 \frac{g}{l} \cos \theta.$$

## Lecture 19

mer 10 nov  
2021 15:30

### 8.1 Equazioni di Eulero-Lagrange

Si vede il caso più semplice. Si considera il moto di un punto materiale nello spazio descritto da un'unica coordinata lagrangiana che determina in maniera univoca la sua posizione:

$$q \implies (x(q), y(q), z(q)).$$

le quali sono le posizioni compatibili con il vincolo. Le velocità compatibili con il vincolo sono

$$(x'(q)\dot{q}, y'(q)\dot{q}, z'(q)\dot{q}), \quad \frac{d}{dq}x(q) \equiv x'.$$

Dunque si costruisce l'energia cinetica come

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \underbrace{[x'(q)^2 + y'(q)^2 + z'(q)^2]}_{G(q)} \dot{q}^2.$$

L'energia cinetica dipende dalle velocità generalizzate  $\dot{q}$  e dalla coordinata lagrangiana  $q$ . L'energia cinetica è sempre quadratica in  $\dot{q}$  ed avrà un'espressione arbitrariamente complicata in base a  $q$ . La funzione  $G(q)$  è sempre positiva: non è mai zero a causa di perché non è uno stato contemplato perché il rango della matrice è massimo. Tuttavia l'energia cinetica può essere nulla solo quando  $\dot{q} = 0$ . Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K(q, \dot{q}) &= \partial_q K \dot{q} + \partial_{\dot{q}} K \ddot{q} \\ &= \partial_q K \dot{q} + \partial_t (\partial_{\dot{q}} K \dot{q}) - [\partial_t (\partial_{\dot{q}} K)] \dot{q} \\ &= \partial_t (\partial_{\dot{q}} K \dot{q}) + \dot{q} [\partial_q K - \partial_t \partial_{\dot{q}} K]. \end{aligned}$$

[rivedi] Si ricorda che l'energia cinetica è della forma  $K = \frac{1}{2} G(q) \dot{q}^2$ . Dunque

$$\dot{q} \partial_{\dot{q}} K = G(q) \dot{q}^2 = 2K.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K &= \frac{d}{dt}(2K) + \dot{q} [\partial_{\dot{q}} K - \partial_t \partial_{\dot{q}} K] \\ \frac{d}{dt}K &= \dot{q} [\partial_t \partial_{\dot{q}} K - \partial_q K]. \end{aligned}$$



Dato che il vincolo è liscio allora la potenza delle reazioni vincolari lungo le posizioni permesse è nulla:

$$\frac{d}{dt}K = \Pi^{\text{active}} = \underline{f}^{\text{active}} \cdot \underline{v}.$$

Dove  $\underline{v} = (x', y', z')\dot{q}$ . Quindi

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}}K - \partial_q K = \underline{f}^{\text{active}} \cdot (x', y', z').$$

Questa è vera anche se le forze attive non sono conservative (infatti l'ipotesi di forza conservativa non è stata utilizzata). Qualora le forze attive siano conservative allora esiste un'energia potenziale  $U$  e la potenza delle forze attive diventa

$$\underline{f}^{\text{active}} \cdot \underline{v} = -\frac{dU}{dq}\dot{q}.$$

Dunque ponendo uguali le derivate temporali:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K &= \dot{q}[\partial_{\dot{q}}K - \partial_q K] = -\frac{dU}{dq}\dot{q} \\ \frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}}K &= \partial_q(K - U).\end{aligned}$$

Inoltre  $\partial_{\dot{q}}U = 0$ , per cui

$$\frac{d}{dt}[\partial_{\dot{q}}(K - U)] = \partial_q(K - U).$$

La funzione  $K - U$  è la lagrangiana  $\mathcal{L}$  del sistema:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q).$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per il moto di un punto materiale per un grado di libertà che si muove su di un vincolo liscio soggetto a forze attive conservative è

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

**Pendolo semplice.** Si ha un punto materiale che si muove su di una circonferenza di raggio  $L$ . Si ha

$$\begin{cases} x(q) = L \sin q \\ z(q) = -L \cos q \end{cases}.$$

Le velocità compatibili con il vincolo sono

$$\begin{cases} \dot{x}(q, \dot{q}) = L \cos q \dot{q} \\ \dot{z}(q, \dot{q}) = L \sin q \dot{q} \end{cases}.$$

Quindi l'energia cinetica è

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}mL^2 \cos^2 q \dot{q}^2 + L^2 \sin^2 q \dot{q}^2 = \frac{1}{2}mL^2 \dot{q}^2.$$

Mentre l'energia potenziale è

$$U(q) = mgz(q) = -mgL \cos q.$$

Dunque la lagrangiana è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}mL^2 \dot{q}^2 + mgL \cos q.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\partial_q \mathcal{L} &= -mgL \sin q \\ \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} &= mL^2 \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} &= mL^2 \ddot{q}\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = mL^2 \ddot{q} = -mgL \sin q = \partial_q \mathcal{L} \implies \ddot{q} = -\frac{g}{L} \sin q.$$

**Più gradi di libertà.** In una situazione con più gradi di libertà, bisogna scrivere le equazioni differenziali per ogni grado di libertà. La cosa buona è che il ragionamento è identico a quanto visto:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n).$$

Per cui si ha il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}_1} \mathcal{L} = \partial_{q_1} \mathcal{L} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}_n} \mathcal{L} = \partial_{q_n} \mathcal{L} \end{cases}.$$

Tuttavia, il sistema non disaccoppia perché le due derivate a destra e sinistra dell'uguale potrebbero dipendere ancora da tutte le altre componenti.

## Lecture 20

Esercitazione. Confronta Goldstein.

gio 11 nov  
2021 15:30

## 8.2 Leggi di Keplero

Si ha un problema a due corpi [immagine]

Il modo più semplice per risolverlo è introdurre il baricentro  $B$  in posizione  $\vec{R}$  e sia  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . In questo sistema di riferimento si ha

$$\ddot{\vec{R}} = 0.$$

Si passa ad un sistema ad un solo corpo in cui è presente la coordinata relativa  $\vec{r}$  e la massa ridotta  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  per cui si ha una sorgente statica ferma ed un corpo che gira attorno. La forza tra le due masse risulta essere

$$\vec{F} = m\vec{a} = \dot{\vec{p}}, \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Nel caso di forze centrali, si ha

$$\vec{F} = F(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Quando sono presenti delle simmetria, sono presenti anche delle quantità conservate per il teorema di Noether?. Tali quantità conservate sono l'energia  $E$  e il momento angolare  $\vec{L}$ ; tuttavia, esiste un'altra quantità conservata: il vettore di Laplace-Runge-Lenz.

Dunque sia  $F(|\vec{r}|) = F$  e  $|\vec{r}| = r$ . Allora

$$\vec{p} \times \vec{L} = F \frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{p}).$$

Si ricorda che

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Per cui si ottiene

$$\vec{p} \times \vec{L} = Fm \left[ (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{r} \right].$$

Inoltre

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} [\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 = \dot{r} r.$$

Dunque

$$\vec{p} \times \vec{L} = \frac{mF}{r} [\vec{r}(r\dot{r}) - r^2\dot{r}] = mFr^2 \left[ \dot{r} \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r} \right].$$

Si calcola

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = \vec{p} \times \vec{L} + \underbrace{\vec{p} \times \frac{d}{dt} \vec{L}}_0 = \vec{p} \times \vec{L}.$$

Dunque, unendo quanto fatto si ha

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = \vec{p} \times \vec{L} = -mFr^2 \left[ \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} \right].$$

Dato che  $F = -\frac{k}{r^2}$ , si ha

$$-mFr^2 \left[ \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} \right] = mk \left[ \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{d}{dt} \vec{N} = 0.$$

Tuttavia, le quantità conservate sono sette, sei componenti di vettori e l'energia; ma i gradi di libertà del sistema a due corpi sono le velocità e le posizioni (quindi sei gradi di libertà): questo implica che le quantità conservate sono dipendenti.

Dunque

- $\vec{v} \cdot \vec{L} = 0$  perché perpendicolari
- $\vec{v} \cdot \vec{r} \implies \frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} (1 + \frac{N}{mk} \cos \theta)$
- $N = mk \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$ , con  $E$  energia meccanica e la radice è detta eccentricità  $e$  dell'orbita.

Sostituendo  $N$  nella relazione precedente si ottiene

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos \theta \right].$$

Questa è l'equazione di una conica in coordinate polari. Se  $e = 0$  allora si ha un'orbita circolare. Se  $e = 1$  allora si ha una parabola. Se  $e > 1$  si ha un'iperbole. Se  $0 < e < 1$  si ha un'ellisse.

L'eccentricità dipende dall'energia, dal momento angolare e dall'intensità della forza tra le particelle.

La soluzione dell'equazione del moto è che le orbite non sono tutte chiuse.

[rivedi] Si hanno varie correzioni, una delle quali è che il Sole non è esattamente una sfera. Quindi il potenziale non è  $\frac{1}{r}$ ? ed il vettore di Runge-Lenz si sposta nel tempo e quindi pure il perielio. Questo significa che le orbite non sono chiuse, ma sono spirali: si ha una precessione. Una famosa fenomenologia di precessione è quella di Mercurio per cui esso precede di 574 arcosecondi per secolo. Si è calcolato, considerando i campi gravitazionali degli altri pianeti e la non sfericità del sole, che la precessione sarebbe 531 arcosecondi per secolo. Ma ne mancano 43: questo significa che o c'è un nuovo fenomeno fisico, oppure i teorici e gli sperimentali si sono sbagliati.

Nel 1916 Einstein pubblica l'articolo [rivedi] in cui descrive la relatività generale per cui si ottiene un corretto calcolo della precessione di Mercurio. Dalla formula 75 dell'articolo si trova che la correzione è di 43 arcosecondi, proprio quanto mancava. Questo è uno dei primi risultati sperimentali per cui si vede l'effetto della relatività generale.

La prima e la terza legge di Keplero non valgono a meno che il campo non sia  $\frac{1}{r^2}$ ; mentre la seconda legge vale per la conservazione del momento angolare che segue dall'invarianza di rotazione? [rivedi]

## Lecture 21

lun 15 nov  
2021 16:30

[rivedi] Si ricava la conservazione dell'energia. Si suppone che

$$\partial_t \mathcal{L}(q, \dot{q}) = 0.$$

Si consideri

$$d_t \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \partial_q \mathcal{L} \dot{q} + \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} \partial_t \dot{q} = \partial_q \mathcal{L} \dot{q} + d_t [\partial_{\dot{q}} \mathcal{L} \dot{q}] - \dot{q} d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = \dot{q} [\partial_q \mathcal{L} - d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}] + d_t [\partial_{\dot{q}} \mathcal{L} \dot{q}].$$

Se  $q(t)$  è soluzione allora il primo addendo è nullo:

$$d_t \mathcal{L} = d_t [\partial_{\dot{q}} \mathcal{L} \dot{q}] \iff d_t [\mathcal{L} - \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} \dot{q}] = 0.$$

Pertanto essa è costante del moto. La lagrangiana dipende da  $\dot{q}$  solo tramite l'energia cinetica, la quale è quadratica in  $\dot{q}$ , pertanto

$$\dot{q} \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = 2K.$$

Quindi

$$2K - (K - U) = K + U = K(q, \dot{q}) + U(q).$$

è costante del moto.

L'equazione di Eulero-Lagrange si può scrivere come sistema di equazioni differenziali nel piano. La forma normale delle equazioni di Eulero-Lagrange per un grado di libertà è.

**Forma normale dell'equazione di Eulero-Lagrange.** Dato

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} G(q) \dot{q}^2 - U(q).$$

Quindi, considerato  $f'(q) \equiv \frac{df(q)}{dq}$  si ha

$$\partial_q \mathcal{L} = \frac{1}{2} G'(q) \dot{q}^2 - U'(q)$$

$$\partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = G(q) \dot{q}$$

$$\partial_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = G'(q) \dot{q}^2 + G(q) \ddot{q}.$$

Pertanto, l'Equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$$G'(q) \dot{q}^2 + G(q) \ddot{q} = \frac{1}{2} G'(q) \dot{q}^2 + U'(q)$$

$$\ddot{q} = -\frac{1}{2} \frac{G'(q) \dot{q}^2 - 2U'(q)}{G(q)}.$$

[rivedi] Quindi, ponendo  $y = \dot{q}$  si ha

$$\begin{cases} \dot{q} = y \\ \dot{y} = -\frac{G'(q)y^2}{2G(q)} - \frac{U'(q)}{G(q)} \end{cases}.$$

Si trovano i punti stazionari:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dot{y} = \frac{U'(q)}{G(q)} = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda si ha  $U'(\bar{q}) = 0$ , dunque i punti stazionari sono del tipo  $(\bar{q}, 0)$ .

Inoltre, si osservano le regioni ammesse di  $q$ . Per ora l'energia meccanica è una costante del moto:

$$E(q, y) = K(q, y) + U(q) = \frac{1}{2} G(q) y^2 + U(q).$$

Le traiettorie soluzioni sono sottoinsieme delle curve di livello dell'energia meccanica. Le parabole che costituiscono la superficie che viene sezionata per ottenere le curve di livello, variano in base a  $q$ .

Si studia la stabilità del punto di equilibrio  $(\bar{q}, 0)$ .

**Teorema.** Si consideri un sistema lagrangiano visto e sia  $(\bar{q}, 0)$  un punto di equilibrio (cioè è tale per cui  $U'(\bar{q}) = 0$ ). Se  $U''(\bar{q}) > 0$  allora il punto di equilibrio è stabile secondo Lyapunov.

**Dimostrazione.** Si utilizza il secondo metodo di Lyapunov. La seconda ipotesi è verificata perché  $E$  è una costante del moto. Quindi bisogna controllare che  $(\bar{q}, 0)$  sia un punto di minimo. Dunque

$$\nabla E = (\partial_q E, \partial_y E) = \left( \frac{1}{2} G'(q) y^2 + U'(q), G(q) y \right) \implies \nabla E(\bar{q}, 0) = (0, 0).$$

Pertanto, esso è stazionario per  $E$ . Si calcola la matrice hessiana

$$H_E(q, y) = \begin{bmatrix} \partial_q^2 E & \partial_{qy} E \\ \partial_{yq} E & \partial_y^2 E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} G''(q) y^2 + U''(q) & G'(q) y \\ G'(q) y & G(q) \end{bmatrix}.$$

Quindi, valutata nel punto stazionario si ha

$$H_E(\bar{q}, 0) = \begin{bmatrix} U''(\bar{q}) & 0 \\ 0 & G(\bar{q}) \end{bmatrix}.$$

Entrambi sono positivi, il primo autovalore per ipotesi, il secondo per definizione. Quindi il secondo metodo di Lyapunov garantisce che  $(\bar{q}, 0)$  è un punto di equilibrio stabile.

**Esercizio.** Mostrare che la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\bar{q})}{G(\bar{q})}}.$$

Come si è fatto precedentemente oppure come lagrangiana approssimata.

**Piccole oscillazioni.** Si utilizza la lagrangiana linearizzata. L'idea è quella di operare un cambio di coordinate:

$$\begin{cases} q = \bar{q} + \varepsilon u(t) \implies \dot{q} = \varepsilon \dot{u}(t) \\ y = 0 + \varepsilon v(t) = \varepsilon \dot{u}(t) \end{cases}.$$

Dunque

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = \mathcal{L}(\bar{q} + \varepsilon u, \varepsilon \dot{u}) = \frac{1}{2} G(\bar{q} + \varepsilon u) \varepsilon^2 \dot{u}^2 - U(\bar{q} + \varepsilon u).$$

Si espande attorno ad  $\varepsilon = 0$  fino al secondo ordine. A tal fine,  $G$  può essere espanso solo all'ordine zero:  $G(\bar{q} + \varepsilon u) \approx G(\bar{q})$ . Quindi

$$\tilde{\mathcal{L}}(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} G(\bar{q}) \varepsilon_0 \dot{u}^2 - \left[ U(\bar{q}) + \cancel{U'(\bar{q})}^0 u \varepsilon + \frac{1}{2} U''(\bar{q}) u^2 \varepsilon^2 \right] + o(\varepsilon^2).$$

Pertanto

$$\tilde{\mathcal{L}}(u, \dot{u}) = -U(\bar{q}) + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} G(\bar{q}) \dot{u}^2 - \frac{1}{2} U''(\bar{q}) u^2 \right] + o(\varepsilon^2).$$

[rivedi] La lagrangiana linearizzata è

$$\frac{1}{2} G(\bar{q}) \dot{u}^2 - \frac{1}{2} U''(\bar{q}) u^2.$$

Che è la lagrangiana che si scriverebbe per un oscillatore armonico,  $G(\bar{q}) \equiv m$  e  $U''(\bar{q}) \equiv k$ . Per cui

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U''(\bar{q})}{G(\bar{q})}}.$$

### 8.2.1 Vincolo mobile, dipendente dal tempo, un grado di libertà

**Esempio.** Si consideri un punto vincolato ad una superficie il cui raggio è  $r(t) = r_0 e^t$ . Allora la coordinata lagrangiana implica le seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} x(\theta, t) = r_0 e^t \cos \theta \\ y(\theta, t) = r_0 e^t \sin \theta \end{cases}.$$

In generale si ha

$$\begin{cases} x(q, t) \\ y(q, t) \\ z(q, t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \partial_q x \dot{q} + \partial_t x \\ \frac{d}{dt}y = \partial_q y \dot{q} + \partial_t y \\ \frac{d}{dt}z = \partial_q z \dot{q} + \partial_t z \end{cases}.$$

[rivedi] L'insieme dei termini come primo? addendo delle derivate costituisce lo spazio tangente. Tuttavia, il vettore costituito da queste derivate non vive più nello spazio tangente. Non ci si può più aspettare che la potenza della reazione vincolare sia nulla lungo il moto.

Si considera solamente la componente nello spazio tangente cioè le velocità virtuali:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} - \partial_t x = x' \dot{q} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} - \partial_t y = y' \dot{q} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} - \partial_t z = z' \dot{q}. \end{aligned}$$

Si fissa la varietà ad un certo istante, si osserva un punto e si considera solo la componente della velocità che è parte dello spazio tangente e quindi normale alla varietà in tale punto.

Anche in questa situazione si definisce vincolo liscio quell'oggetto tale per cui la potenza delle reazioni vincolari è nulla lungo le velocità virtuali.

Questa definizione è sensata perché così si può procedere in modo analogo a quanto visto per il vincolo fisso. Si vuole sfruttare il fatto che la potenza delle reazioni vincolari sia nulla lungo le velocità virtuali.

Da Newton si sa

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{tot}} = \mathbf{F}^{\text{attive}} + \mathbf{\phi}^{\text{vincolari}}.$$

Conviene moltiplicare scalarmente per la velocità virtuali, così si eliminano le reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}^{\text{virt}} &= \mathbf{F}^{\text{attive}} \cdot \mathbf{v}^{\text{virt}} + \mathbf{\phi}^{\text{vincolari}} \cdot \mathbf{v}^{\text{virt}} \xrightarrow{0} \\ m(\ddot{x}\partial_q x \dot{q}) + m(\ddot{y}\partial_q y \dot{q}) &= f_x \partial_q x \dot{q} + f_y \partial_q y \dot{q} \\ m\ddot{x}\partial_q x + m\ddot{y}\partial_q y &= f_x \partial_q x + f_y \partial_q y. \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{f}^{\text{attive}} = (f_x, f_y)$  è conservativa, cioè esiste un potenziale  $\mathbf{f} = -\nabla U(x, y)$ , allora

$$m\ddot{x}\partial_q x + m\ddot{y}\partial_q y = -[\partial_x U \partial_q x + \partial_y U \partial_q y].$$

Pertanto,

$$\ddot{x}\partial_q x = \left( \frac{d}{dt} \dot{x} \right) \partial_q x = \frac{d}{dt} (\dot{x} \partial_q x) - \dot{x} \frac{d}{dt} \partial_q x.$$

Quindi

$$m \left[ \frac{d}{dt} (\dot{x} \partial_q x + \dot{y} \partial_q y) - \left( \dot{x} \frac{d}{dt} \partial_q x + \dot{y} \frac{d}{dt} \partial_q y \right) \right] = -\partial_q U.$$

Si utilizzano due lemmi:

- $\partial_q x = \partial_{\dot{q}} \dot{x}$
- $\frac{d}{dt} \partial_q x = \partial_q \dot{x}$

Dunque si ottiene

$$m \left[ \frac{d}{dt} \underbrace{(\dot{x} \partial_{\dot{q}} \dot{x} + \dot{y} \partial_{\dot{q}} \dot{y})}_{\partial_q [\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)]} - \underbrace{(\dot{x} \partial_q \dot{x} + \dot{y} \partial_q \dot{y})}_{\partial_q [\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)]} \right] = -\partial_q U.$$

Da cui ponendo  $K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  si ha

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} (K - U) - \partial_q (K - U) = 0.$$

Con  $\mathcal{L} \equiv K - U$ , dunque si hanno ancora le equazioni di Eulero-Lagrange.

## Lecture 22

Si dimostrano i due lemmi utilizzati precedentemente.

mar 16 nov  
2021 15:30

**Lemma 1.** Vale  $\partial_q x = \partial_{\dot{q}} \dot{x}$ .

**Dimostrazione.** Dato che  $x = x(q, t)$  segue che si ha

$$\partial_{\dot{q}} \frac{d}{dt} x = \partial_{\dot{q}} [\partial_q x \dot{q} + \partial_t x] = \partial_q x.$$

**Lemma 2.** Vale  $\frac{d}{dt} \partial_q x = \partial_q \frac{d}{dt} x = \partial_q \dot{x}$ .

**Dimostrazione.** Si ha

$$\frac{d}{dt} \partial_q x = \partial_q (\partial_q x) \dot{q} + \partial_t \partial_q x = \partial_q (\partial_q (x \dot{q}) + \partial_t x) = \partial_q \frac{d}{dt} x.$$

Si vuole riguardare la formula di Eulero-Lagrange nel modo più generale. Si tratta il caso di  $N$  punti materiali vincolati per ottenere  $d$  gradi di libertà tramite vincoli mobili. Si vogliono trovare le equazioni del moto per tale sistema.

Si hanno  $N$  punti nello spazio  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N})$ . Si suppone che le posizioni possibili vivono su di una varietà di dimensione  $d$ , cioè il numero di gradi di libertà. Dunque, ciascuna delle componenti è

$$x_i(q_1, q_2, \dots, q_d, t), \quad \forall i \in [1, 3N].$$

Un esempio di sistema con più gradi di libertà è rappresentato da due punti materiali vincolati a vivere su di un piano e a stare a distanza fissa (detto vincoli di rigidità), il quale presenta 3 gradi di libertà.

Ottenute le coordinate, si scrive il vettore delle velocità

$$\underline{\dot{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}), \text{ con } \dot{x}_i = \partial_t x_i + \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} x_i \dot{q}_j, \quad \forall i \in [1, 3N].$$

da cui si ottengono le velocità virtuali

$$\underline{v}^{\text{virt}} = (v_1, v_2, \dots, v_{3N}), \text{ con } v_i = \frac{dx_i}{dt} - \partial_t x_i = \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} x_i \dot{q}_j.$$

Le velocità virtuali sono vettori che appartengono allo spazio tangente alla varietà all'istante  $t$  fissato. Si vogliono estrarre le velocità virtuali perché si trattano i vincoli lisci estesi al caso di vincolo mobile: un vincolo liscio mobile soddisfa il principio di d'Alembert (o principio di vincolo liscio) per cui la reazione vincolare ha potenza nulla lungo le velocità virtuali.

**Principio di d'Alembert.** per  $d$  gradi di libertà. Se si pone il vettore delle reazioni vincolari come

$$\underline{\phi}^{\text{vinc}} = (\phi_1, \dots, \phi_{3N}).$$

allora risulta

$$\underline{\phi}^{\text{vinc}} \cdot \underline{v}^{\text{virt}} = 0.$$

Questo è diverso da dire

$$\underline{\phi}^{\text{vinc}} \cdot \underline{v}^{\text{virt}} = \sum_{k=1}^N \underline{\phi}^{(k)} \cdot \underline{v}^{\text{virt}(k)} = \sum_{k=1}^N 0.$$

dove  $\underline{\phi}^{(k)} \equiv (\phi_{1k}, \phi_{2k}, \phi_{3k})$ ,  $1 \leq k \leq N$  e stesso per  $\underline{v}^{(k)}$ . Se la somma è nulla, allora non è detto che ciascun termine sia nullo.

Si procede punto per punto come precedentemente. Le equazioni di Newton sono vere punto per punto

$$\sum_{k=1}^N \underline{v}^{(k)} \cdot (m^{(k)} \underline{a}^{(k)}) = \sum_{k=1}^N \underline{F}^{\text{tot}(k)} \cdot \underline{v}^{(k)} = \sum_{k=1}^N (\underline{F}^{\text{attiva}(k)} + \underline{\phi}^{(k)}) \cdot \underline{v}^{(k)}.$$

quindi ciascun termine della somma potrebbe non essere nullo, ma totalmente utilizzando il vincolo liscio si ha

$$\sum_{k=1}^N m^{(k)} \underline{a}^{(k)} \cdot \underline{v}^{\text{virt}(k)} = \sum_{k=1}^N \underline{F}^{(k)} \cdot \underline{v}^{\text{virt}(k)}.$$

Riscrivendo le velocità virtuali l'equazione precedente diventa

$$\sum_{k=1}^N m^{(k)} \underline{\ddot{x}}^{(k)} \cdot \left( \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} \underline{x}^{(k)} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^d \dot{q}_j \left( \sum_{k=1}^N m^{(k)} \underline{\ddot{x}}^{(k)} \cdot \partial_{q_j} \underline{x}^{(k)} \right) = \sum_{j=1}^d \dot{q}_j \left( \sum_{k=1}^N \underline{F}^{\text{attiva}(k)} \cdot \partial_{q_j} \underline{x}^{(k)} \right).$$

Quest'equazione dev'essere valida per qualsiasi scelta del vettore delle velocità generalizzate  $\dot{q}$ . Si sceglie un vettore  $\dot{q}$  che abbia tutte componenti nulle tranne la  $r$ -esima:

$$\dot{q}_r \left( \sum_{k=1}^N m^{(k)} \underline{\ddot{x}}^{(k)} \cdot \partial_{q_r} \underline{x}^{(k)} \right) = \dot{q}_r \left( \sum_{k=1}^N \underline{F}^{\text{attiva}(k)} \cdot \partial_{q_r} \underline{x}^{(k)} \right).$$

Data l'arbitrarietà, quest'equazione è valida per ogni  $r$ . Così si ha un sistema di  $d$  equazioni differenziali. Ci si aspetta che ogni equazione sia un'equazione di Eulero-Lagrange per un grado di libertà.

Quindi, fissato  $r$  e posto  $\underline{m} = (m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots)$ , si ha

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \partial_{q_r} x_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{\text{attiva}} \partial_{q_r} x_i.$$

Per il membro a sinistra si ha

$$\text{LHS} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \{d_t \dot{x}_i \partial_{q_r} x_i\} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \{d_t (\dot{x}_i \partial_{q_r} x_i) - \dot{x}_i d_t \partial_{q_r} x_i\}.$$

Per i lemmi 1 e 2 si ha

$$\partial_{q_r} x_i = \partial_{\dot{q}_r} \dot{x}_i, \quad d_t \partial_{q_r} x_i = \partial_{q_r} \dot{x}_i.$$

Dunque risulta

$$\text{LHS} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[ d_t \underbrace{(\dot{x}_i \partial_{\dot{q}_r} \dot{x}_i)}_{\partial_{\dot{q}_r} \frac{1}{2} \dot{x}_i^2} - \underbrace{\dot{x}_i \partial_{q_r} \dot{x}_i}_{\partial_{q_r} \frac{1}{2} \dot{x}_i^2} \right] = d_t \partial_{\dot{q}_r} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right) - \partial_{q_r} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right) = d_t \partial_{\dot{q}_r} K - \partial_{q_r} K.$$



Nel membro destro dell'equazione si suppone che le forze attive siano conservative, cioè esiste una funzione potenziale per cui

$$F_i^{\text{attive}} = -\partial_{x_i} U(x_1, \dots, x_{3N}).$$

Pertanto

$$\text{RHS} = - \sum_{i=1}^{3N} \partial_{x_i} U \partial_{q_r} x_i = -\partial_{q_r} U.$$

Unendo le due espressioni si ha

$$\begin{aligned} d_t \partial_{\dot{q}_r} K - \partial_{q_r} K &= -\partial_{q_r} U \\ d_t \partial_{\dot{q}_r} (K - U) &= \partial_{q_r} (K - U). \end{aligned}$$

Chiamando

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) = K - U.$$

Si ha un sistema di  $d$  equazioni differenziali tutti nella forma di Eulero-Lagrange:

$$d_t \partial_{\dot{q}_r} \mathcal{L} = \partial_{q_r} \mathcal{L}, \quad \forall r \in [1, d].$$

**Esempio.** Si vede un esempio con  $d = 2$  gradi di libertà. Si considerino due punti materiali che si muovono sul piano  $xz$ ; il punto  $P$  è vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio  $R$ , mentre il punto  $Q$  è vincolato a muoversi sull'asse  $z$ , inoltre essi sono legati da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla (?).

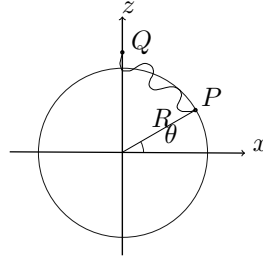


Figure 9: esm-2-gdl

Si pone

$$\begin{cases} x_P = R \cos \theta \\ z_P = R \sin \theta \\ x_Q = 0 \\ z_Q = Rq \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}_P = -R \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{z}_P = R \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_Q = 0 \\ \dot{z}_Q = R \dot{q} \end{cases}.$$

L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} K(\theta, q, \dot{\theta}, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m (R^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + R^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{q}^2) \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'energia cinetica è una forma bilineare definita da una matrice simmetria e definita positiva, simile alla sempre positiva funzione  $G(q)$  per un grado di libertà. L'energia potenziale è

$$U(\theta, q) = mg_P + mgz_Q + \frac{1}{2} k d(P, Q)^2 = mgR \sin \theta + mgRq + \frac{1}{2} k [R^2 \cos^2 \theta + R^2 (\sin \theta - q)^2].$$

Da cui la lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L}(\theta, q, \dot{\theta}, \dot{q}) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{q}^2) - R \left( mg(\sin \theta + q) + \frac{1}{2}kR(1 + q^2 - 2q \sin \theta) \right).$$

Si hanno due equazioni di Eulero-Lagrange. Quindi per la coordinata lagrangiana  $q$  si ha

$$\begin{cases} d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} - \partial_q \mathcal{L} = 0 \\ d_t \partial_{\dot{\theta}} \mathcal{L} - \partial_{\theta} \mathcal{L} = 0 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = mR^2 \dot{q}, \quad d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = mR^2 \ddot{q}, \quad \partial_q \mathcal{L} = -Rmg - \frac{1}{2}kR^2(2q - 2 \sin \theta).$$

Per la coordinata  $\theta$  si ha

$$\partial_{\dot{\theta}} \mathcal{L} = mR^2 \dot{\theta}, \quad d_t \partial_{\dot{\theta}} \mathcal{L} = mR^2 \ddot{\theta}, \quad \partial_{\theta} \mathcal{L} = -mgR \cos \theta + \frac{1}{2}kR^2(2q \cos \theta).$$

Infine risulta

$$\begin{cases} mR^2 \ddot{q} = -Rmg - kR^2(q - \sin \theta) \\ mR^2 \ddot{\theta} = -R \cos \theta [mg - kRq] \end{cases}.$$

Tipicamente le equazioni differenziali sono accoppiate: la dipendenza è con tutte le coordinate lagrangiane.

## Lecture 23

### 8.3 Struttura formale

gio 18 nov  
2021 15:30

Per gradi di libertà  $d > 1$  si ha  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_d)$  e con  $N$  punt materiali. Considerato  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N})$ . Quindi l'energia cinetica è

$$K(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2.$$

Inoltre

$$\dot{x}_i = d_t x_i = \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} x_i \dot{q}_j + \partial_t x_i.$$

Pertanto, l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left( \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} x_i \dot{q}_j + \partial_t x_i \right) \left( \sum_{k=1}^d \partial_{q_k} x_i \dot{q}_k + \partial_t x_i \right).$$

Si hanno termini quadratici, lineari e indipendenti da  $\dot{q}$ . Dunque

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \sum_{i=1}^{3N} m_i \partial_{q_j} x_i \partial_{q_k} x_i \dot{q}_j \dot{q}_k + G_1 + G_2.$$

Con  $G_1$  lineare in  $\dot{q}$  e  $G_2$  indipendente. Essi sono nulli per vincoli fissi.

Dunque, per vincoli fissi, cioè che non dipendono esplicitamente dal tempo si ha

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \sum_{i=1}^{3N} m_i \partial_{q_j} x_i \partial_{q_k} x_i \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d G_{jk}(q_1, \dots, q_d) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dots & \dot{q}_d \end{pmatrix} G(q_1, \dots, q_d) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dove la matrice  $G$  è una matrice simmetrica  $d \times d$  definita positiva con entrate

$$G_{jk}(\underline{\dot{q}}) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \partial_{q_j} x_i \partial_{q_k} x_i = G_{kj}(\underline{\dot{q}}).$$

Si mostra che per ogni scelta di  $\underline{\dot{q}} \neq \underline{0}$  si ha  $\sum_{jk} G_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k > 0$ . Dato che quest'ultimo è  $2K$  risulta chiaro che  $K > 0$  implica che pure esso è sempre positivo.

Ponendo  $\underline{v} = \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} \underline{x} \dot{q}_j$ , segue che  $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$  e  $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$ . Ma se esistesse  $\underline{v} = \underline{0}$  con  $\underline{\dot{q}} \neq \underline{0}$ , allora tutte le derivate parziali rispetto a  $q_i$  sarebbero nulle, tuttavia si è detto che

$$\text{rank } J = \text{rank} [\partial_{q_j} x_i] = d.$$

cioè il rango massimo.

**Esercizio.** Pendolo sferico. Esso ha due gradi di libertà.

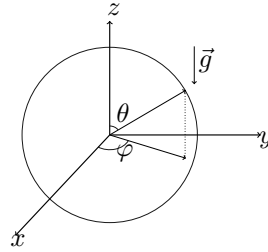


Figure 10: pendolo-sferico

La condizione di vincolo è  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e si scelgono coordinate lagrangiane  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Quindi

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}.$$

Quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = R \cos \theta \dot{\theta} \cos \varphi - R \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R \cos \theta \dot{\theta} \sin \varphi + R \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z} = -R \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

L'energia cinetica risulta essere

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left[ (\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi})^2 + (\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m R^2 & 0 \\ 0 & m R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si scrive il potenziale

$$U(\theta, \varphi) = mgR \cos \theta.$$

Dunque, la lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = K - U = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta.$$

In questo caso la lagrangiana non dipende da  $\varphi$ . Essa è detta variabile ciclica.

**Esercizio.** Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per  $\theta$  e  $\varphi$ :

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + Rmg \sin \theta \iff \ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \sin \theta.$$

per  $\varphi$  l'equazione è identicamente nulla.

## Lecture 24

lun 22 nov  
2021 16:30

La situazione in cui la lagrangiana non dipende da una variabile è una situazione particolare.

**Definizione.** Se la lagrangiana  $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d)$  non dipende da  $q_j$  allora  $q_j$  è detta variabile ciclica.

Si supponga che  $q_j$  sia una variabile ciclica. Segue che

$$\partial_{q_j} \mathcal{L} = 0 \implies d_t \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} = 0.$$

e dunque lungo il moto la funzione  $\partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L}$  è una costante del moto.

Pertanto, nell'esempio del pendolo sferico, si ha una costante del moto:

$$\partial_{\dot{\varphi}} \mathcal{L} = L_0 \equiv mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}.$$

Tale oggetto è la componente  $z$  del momento angolare. Tuttavia, questo non vuol dire che  $\dot{\varphi}$  è costante.

In generale, avendo una costante del moto ed una lagrangiana con una variabile ciclica, si vuole scrivere una lagrangiana che non dipenda da  $\varphi$  né dalle sue derivate temporali: si ha una lagrangiana ridotta. Siccome alla variabile ciclica è associata una costante del moto, per scrivere la lagrangiana ridotta si utilizza scrivere l'energia e vi si sostituisce la variabile ciclica con un'espressione che dipende dalle altre variabili e dalla costante del moto.

Infatti, si vuole trovare una lagrangiana che descriva il moto di tutti i gradi di libertà tranne il  $j$ -esimo:  $\mathcal{L}(q_1, \dots, \cancel{q_j}, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \cancel{\dot{q}_j}, \dots, \dot{q}_d)$ . Dunque, per la costante del moto si ha

$$C = \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} \rightsquigarrow \dot{q}_j = f(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d, C).$$

Nell'energia del problema  $E = K + U$  si sostituisce ad ogni  $\dot{q}_j$  la sua espressione in termini delle altre coordinate e di  $C$ . Per cui si ottiene l'energia efficace:

$$E' = K|_{\dot{q}_j=f(\dots)} + U.$$

Dopo la sostituzione, l'energia non dipende più da  $q_j$  (in quanto già di partenza, l'energia non ne dipendeva perché  $q_j$  è la variabile ciclica) e da  $\dot{q}_j$  perché si è ora scritta in termini delle altre velocità generalizzate e della costante del moto. Ora si identifica un nuovo termine cinetico ed un nuovo termine potenziale:

$$E' = K^{\text{eff}} + U^{\text{eff}}.$$

Per individuare tali termini, prima si identifica l'energia cinetica efficace che è quadratica nelle  $\dot{q}$  e tutto il resto è il potenziale efficace. Fatto questo, si scrive la lagrangiana ridotta come

$$\mathcal{L}^{\text{rid}} = K^{\text{eff}} - U^{\text{eff}} = \mathcal{L}(q_1, \dots, \cancel{q_j}, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \cancel{\dot{q}_j}, \dots, \dot{q}_d, C).$$

Bisogna specificare che la lagrangiana ridotta non è la lagrangiana calcolata in  $\dot{q} = f(\dots)$ . Tornando all'esempio del pendolo sferico, si vuole ottenere la lagrangiana ridotta  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, L_0)$ . Quindi

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \theta}.$$

L'energia del problema è

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\theta.$$

Per cui l'energia valutata in  $\dot{\varphi}$  risulta essere

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\left(\frac{L_0}{mR^2\sin^2\theta}\right)^2 + mgR\cos\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2}_{K^{\text{eff}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta}_{U^{\text{eff}}(\theta)}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\mathcal{L}^{\text{rid}}(\theta, \dot{\theta}; L_0) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta\right).$$

Si può ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange per  $\theta$  partendo da quella della lagrangiana non ridotta e sostituendovi l'espressione per  $\dot{\varphi}$ . Dunque, le equazione del moto ridotte sono:

$$\begin{cases} mR^2\ddot{\theta} = mgR\sin\theta + \frac{L_0^2}{mR^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \\ \dot{\varphi}\sin^2\theta = \frac{L_0}{mR^2} \end{cases}.$$

Così facendo si passa da due gradi di libertà ad un solo grado.

**Studio qualitativo del moto.** Si consideri il caso in cui  $L_0 = 0$ . Le equazioni del moto corrispondenti si semplificano:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \\ \dot{\varphi} = 0, \quad \sin\theta \neq 0 \end{cases}.$$

La prima è l'equazione del pendolo semplice (l'assenza del meno è giustificata dalla scelta di  $\theta$  come angolo preso a partire dal verso positivo della verticale); mentre  $\varphi$  è costante.

Sia  $L_0 \neq 0$ . Da quanto imparato nella sezione di Sistemi Dinamici, si separa l'equazione di secondo ordine in due equazioni di prim'ordine. L'energia si conserva, si studia il potenziale efficace:

$$U^{\text{eff}}(\theta) = mgR\cos\theta + \frac{L_0^2}{2mR^2\sin^2\theta}.$$

Il sistema dinamico è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = \frac{g}{R}\sin\theta + \frac{L_0^2}{m^2R^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \end{cases}.$$

Si pone  $b \equiv mgR > 0$  e  $a \equiv \frac{L_0^2}{mR^2} > 0$ . Dunque

$$U^{\text{eff}}(\theta) = b\cos\theta + \frac{a}{2\sin^2\theta}.$$

Si studia il comportamento:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} U^{\text{eff}}(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} U^{\text{eff}}(\theta) = +\infty.$$

Inoltre

$$d_{\theta}(U^{\text{eff}}(\theta)) = -b\sin\theta - a\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0 \iff \sin^4\theta = -\frac{a}{b}\cos\theta.$$

ha soluzione  $\bar{\theta}$  ottenuta tramite metodo grafico. Risulta evidente che  $\bar{\theta} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Posto  $U^{\text{eff}}(\bar{\theta}) = U_{\min}$  segue che

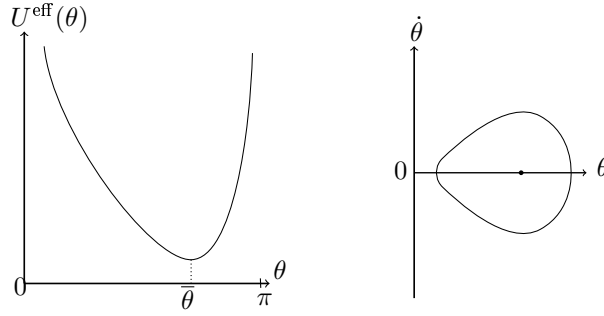


Figure 11: pendolo-sferico-graphs

- Per  $E < U_{\min}$  non si hanno traiettorie;
- Per  $E = U_{\min}$  si ha un punto di equilibrio  $(\bar{\theta}, 0)$ , per cui risulta

$$\begin{cases} \theta(t) = \bar{\theta} \\ \dot{\varphi} = \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \bar{\theta}} \end{cases}.$$

da cui segue  $\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \bar{\theta}} t$  cioè un moto circolare uniforme.

- Per  $E > U_{\min}$  si hanno dei moti periodici in  $\theta$  in una zona simile ad un napkin ring; di  $\varphi$  non si conosce il moto, però si può trovare  $\Delta\varphi$  in un periodo di  $\theta$ . Infatti

$$d_\theta \varphi = d_t \varphi d_\theta t = \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(E - U^{\text{eff}}(\theta))}}.$$

Il secondo termine si è ricavato a partire dall'energia:

$$E = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + U^{\text{eff}}(\theta) \implies \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U^{\text{eff}})}{mR^2}}.$$

Pertanto,

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta d_\theta \varphi = 2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(E - U^{\text{eff}}(\theta))}}.$$

Poiché l'orbita sia chiusa periodica si desidera che  $n\Delta\varphi = 2\pi m$ , per qualche  $n, m \in \mathbb{N}$ . Altrimenti, la traiettoria riempie densamente la zona del napkin ring.

- Per  $E \approx U_{\min}$  si può pensare al potenziale come un potenziale armonico. Si ha

$$T_\theta = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{U''_{\text{eff}}(\bar{\theta})}{mR^2}}}.$$

## 8.4 Frequenze proprie e modi normali

Le frequenze proprie ed i modi normali sono la generalizzazione del problema delle piccole oscillazioni. Si tratta il caso lagrangiano in cui si hanno forze conservative, vincoli lisci e fissi.

Si pone  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_d)$ . Dunque

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^d G_{\alpha\beta}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(\underline{q}).$$

dove  $G_{\alpha\beta}$  è una matrice simmetrica definita positiva. L'equazione di Eulero-Lagrange per il  $\gamma$ -esimo grado di libertà è

$$d_t \partial_{\dot{q}_\gamma} \mathcal{L} = \partial_{q_\gamma} \mathcal{L}.$$

Posto  $G_{\alpha\beta}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \equiv \Gamma_{\alpha\beta}$  risulta

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{q}_\gamma} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_{\dot{q}_\gamma} \left[ \sum_{\alpha=\gamma, \beta \neq \gamma}^d \Gamma_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha \neq \gamma, \beta=\gamma}^d \Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha=\beta=\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{\beta \neq \gamma}^d G_{\gamma\beta}(\underline{q}) \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha \neq \gamma}^d G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha + 2G_{\gamma\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\gamma \right]. \end{aligned}$$

Dato che  $G$  è simmetrica si ha che  $G_{\alpha\beta}(\underline{q}) = G_{\beta\alpha}(\underline{q})$ . Dunque

$$\sum_{\beta \neq \gamma}^d G_{\gamma\beta}(\underline{q}) \dot{q}_\beta = \sum_{\alpha \neq \gamma}^d G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha.$$

Pertanto

$$\partial_{\dot{q}_\gamma} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ 2 \sum_{\alpha \neq \gamma}^d G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha + 2G_{\gamma\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\gamma \right] = \sum_{\alpha=1}^d G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha.$$

## Lecture 25

Nel caso di un grado di libertà con forze attive conservative non è ovvio come trovare dei punti di equilibrio. La forma generale della lagrangiana è

mar 23 nov  
2021 15:30

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} G(q) \dot{q}^2 - U(q).$$

Non è ovvio che i punti di equilibrio si trovino tramite i punti di minimo del potenziale. Infatti, scrivendo l'equazione di Eulero-Lagrange poi trasformata in un sistema dinamico nel piano si ha

$$G(q) \ddot{q} + G'(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} G'(q) \dot{q}^2 - U'(q) \iff \begin{cases} \dot{q} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{2} \frac{G'(q)}{G(q)} y^2 - \frac{U'(q)}{G(q)} \end{cases}.$$

Per trovare i punti di equilibrio bisogna porre i membri secondi delle due equazioni pari a zero. Nella seconda equazione, dato che  $y = 0$  rimane solamente il termine del potenziale; ma ciò non è un'affermazione ovvia aver fatto lo studio precedente.

Si vuole cominciare lo studio del problema delle piccole oscillazioni attorno un punto di equilibrio per  $d$  gradi di libertà, partendo dallo studio dei punti di equilibrio. La lagrangiana generica per un sistema dinamico con vincoli lisci, fissi, e forze attive, conservative si scrive come

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta}^d G_{\alpha\beta}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(\underline{q}).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono un sistema di equazioni differenziali della stessa forma

$$d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} = \partial_{q_i} \mathcal{L}, \quad \forall i \in [1, d].$$

L'idea è di riscrivere l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema in forma normale e di studiare cosa succede quando si annullano le  $f$  e le  $g$  del sistema dinamico, osservando come trovare i

punti di equilibrio.

Proseguendo quanto fatto si ha

$$d_t \partial_{\dot{q}_\gamma} \mathcal{L} = d_t \left( \sum_{\alpha=1}^d G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^d G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^d \dot{q}_\alpha d_t G_{\alpha\gamma}(\underline{q}).$$

Dove si ha

$$d_t G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) = \sum_{\beta=1}^d \partial_{q_\beta} G_{\alpha\gamma}(\underline{q}) \dot{q}_\beta.$$

per cui risulta

$$d_t \partial_{\dot{q}_\gamma} \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^d G_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha,\beta=1}^d \partial_{q_\beta} G_{\alpha\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta.$$

Si vuole simmetrizzare il secondo addendo, dunque

$$S = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha,\beta=1}^d \partial_{q_\beta} G_{\alpha\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha,\beta=1}^d \partial_{q_\alpha} G_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha \right).$$

Ora, si calcola il secondo membro dell'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\partial_{q_\gamma} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^d \partial_{q_\gamma} G_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - \partial_{q_\gamma} U.$$

Inoltre, si pone

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} (\partial_{q_\gamma} G_{\alpha\beta} - \partial_{q_\beta} G_{\alpha\gamma} - \partial_{q_\alpha} G_{\beta\gamma}).$$

così si raccolgono i termini in  $\ddot{q}$ ,  $\dot{q}$  e solo da  $q$ . Quindi l'equazione di Eulero-Lagrange si scrive in maniera compatta:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^d G_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\alpha = \sum_{\alpha,\beta=1}^d \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - \partial_{q_\gamma} U \\ \gamma = 1, \dots, d \end{cases}.$$

Si evita di porre  $y_\alpha = \dot{q}_\alpha$ . Per trovare i punti di equilibrio si cercano i punti stazionari cioè quelli per cui  $y = 0$  e  $\dot{y} = 0$ . Dunque, si ha  $\underline{\dot{q}} = 0$  e da cui segue

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^d \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = 0.$$

Pertanto, si cerca  $\underline{q}_0$  tale per cui

$$\partial_{q_\gamma} U(\underline{q}_0) = 0, \forall \gamma \iff \nabla_{\underline{q}} U(\underline{q}_0) = \underline{0}.$$

Il gradiente rispetto a  $\underline{q}$  di  $U$  valutato in  $\underline{q}_0$  dev'essere il vettore nullo. Per studiare la stabilità si utilizza un teorema.

**Teorema.** Lagrange-Dirichlet. Si consideri un sistema con forze attive, conservative con vincoli olonomi, lisci e fissi. Si supponga che  $U(q)$  abbia punti critici isolati. Allora i punti di minimo per  $U$  corrispondono a punti di equilibrio stabile del sistema.

Si supponga che  $\underline{q}_0$  sia tale per cui  $\nabla U(\underline{q}_0) = 0$ . Si osserva l'hessiana

$$H(\underline{q}) = [\partial_{q_j q_i}^2 U].$$



Quindi  $\underline{q}_0$  è di minimo se  $H(\underline{q}_0)$  è definita positiva.

Interessa capire cosa succede per condizioni iniziali vicine al punto di equilibrio stabile. L'idea è di operare un cambio di coordinate che metta in evidenza gli scostamenti dalla posizione di equilibrio e poi fare un'espansione nel limite in cui tali spostamenti sono piccoli.

Si supponga che  $\underline{q}^*$  sia un punto di minimo isolato per il potenziale  $U(\underline{q})$ . Si studia il moto vicino ad esso. Si considerano soluzioni che si scrivono come

$$\underline{q}(t) = \underline{q}^* + \varepsilon \underline{u}(t).$$

L'uguaglianza vale per componenti:

$$q_i(t) = q_i^* + \varepsilon u_i(t) \rightsquigarrow \dot{q}(t) = \varepsilon \dot{\underline{u}}(t), \quad \ddot{q}(t) = \varepsilon \ddot{\underline{u}}(t).$$

Si sostituiscono le equazioni precedenti dentro l'equazione di Eulero-Lagrange trovata precedentemente. Quindi si ha

$$\sum_{\alpha}^d G_{\gamma\alpha}(\underline{q}^* + \varepsilon \underline{u}) \varepsilon \ddot{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta=1}^d \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(\underline{q}^* + \varepsilon \underline{u}) \varepsilon^2 \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta} - \partial_{q_{\gamma}} U(\underline{q}^* + \varepsilon \underline{u}).$$

Si sviluppa in  $\varepsilon$  fino al primo ordine utile. Per il membro a sinistra, il primo ordine non nullo di  $G$  è l'ordine zero, perché  $\varepsilon$  è già presente. Il primo termine del secondo membro è trascurabile perché di secondo ordine; dunque si espande solamente  $U$  al prim'ordine. Inoltre, tutte le derivate di  $U$  rispetto  $q_{\gamma}$  sono nulle se valutate in  $\underline{q}^*$  perché il punto  $\underline{q}^*$  è stato scelto proprio con questa proprietà:

$$\partial_{q_{\gamma}} U(\underline{q}^* + \varepsilon \underline{u}) = \overbrace{\partial_{q_{\gamma}} U(\underline{q}^*)}^0 + \sum_{\beta=1}^d [\partial_{q_{\beta}} (\partial_{q_{\gamma}} U)](\underline{q}^*) \varepsilon u_{\beta}.$$

Pertanto, l'equazione di Eulero-Lagrange approssimata diventa

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^d G_{\gamma\alpha}(\underline{q}^*) \varepsilon \ddot{u}_{\alpha} = - \sum_{\beta=1}^d \partial_{q_{\beta} q_{\gamma}}^2 U(\underline{q}^*) \varepsilon u_{\beta} \\ \gamma = 1, \dots, d \end{cases}.$$

Questo è un insieme di  $d$  equazioni approssimate in  $\varepsilon$ . Esso può essere scritto in forma compatta (per mezzo del prodotto matrice-vettore):

$$[G(\underline{q}^*) \ddot{\underline{u}}]_{\gamma} = - [H_U(\underline{q}^*) \underline{u}]_{\gamma} \implies G(\underline{q}^*) \ddot{\underline{u}} = -H_U(\underline{q}^*) \underline{u}.$$

Queste sono le equazioni di Eulero-Lagrange approssimate che descrivono il moto vicino al punto di equilibrio stabile  $\underline{q}^*$ .

Si vede un altro metodo per arrivare alla stessa conclusione, più veloce. Tale sistema di equazioni ottenuto è il sistema delle equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana linearizzata

$$\mathcal{L}^{\text{lin}}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}) = \frac{1}{2} (\dot{\underline{u}} \cdot G(\underline{q}^*) \dot{\underline{u}}) - \frac{1}{2} (\underline{u} \cdot H(\underline{q}^*) \underline{u}).$$

Questo problema assomiglia a quello di un oscillatore armonico perché il potenziale è una forma quadratica nelle  $\underline{u}$ .

**Esercizio.** Verificare quanto affermato. Inoltre verificare che la lagrangiana linearizzata è la lagrangiana originaria valutata con il cambio di variabili ( $\underline{q} = \underline{q}^* + \varepsilon \underline{u}$ ) fatto e presa al primo ordine sensato (cioè  $\varepsilon^2$ ).

Chiesto all'orale!

Si vogliono studiare le equazioni approssimate. Noto che tali equazioni sono quelle per la lagrangiana linearizzata suddetta — che assomiglia a quella di un oscillatore armonico —, segue

che ci si aspetta che le soluzioni del problema delle equazioni approssimate assomiglino a quelle dell'oscillatore armonico. Dunque, si cercano soluzioni  $\underline{u}(t)$  del tipo

$$\underline{u}(t) = \underline{w} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

con  $\underline{w}$  vettore che non dipende dal tempo e diverso dal vettore nullo. Si osserva se tale vettore  $\underline{u}$  è soluzione del sistema di equazioni. Quindi

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = -\underline{w}\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{\underline{u}} = -\underline{w}\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \underline{u} \end{cases}.$$

Si pone  $G_0 \equiv G(\underline{q}^*)$  e  $H_0 \equiv H_U(\underline{q}^*)$ . Dunque, sostituendo si ha

$$-\omega^2 G_0 \underline{u} = -H_0 \underline{u} \iff (\omega^2 G_0 - H_0) \underline{u} = \underline{0} \iff (\omega^2 G_0 - H_0) \underline{w} \cos(\omega t + \varphi_0) = \underline{0}.$$

Se l'equazione vale per ogni tempo, allora vale anche

$$(\omega^2 G_0 - H_0) \underline{w} = \underline{0}.$$

Le soluzioni sono non banali quando il nucleo della matrice è diverso dall'insieme vuoto (tecnicamente sarebbe diverso dall'insieme che contiene solo il vettore nullo, ma si esclude il vettore nullo perché si è preso  $\underline{w}$  proprio diverso da esso), quindi tale matrice deve avere determinate nullo. Dunque, si cercano valori di  $\omega$  tali per cui

$$\det(\underbrace{\omega^2}_{\lambda} G_0 - H_0) = 0.$$

che assomiglia al polinomio caratteristico di una matrice per la ricerca degli autovalori. Trovato  $\lambda$  si trova  $\underline{w}$ . I matematici chiamano questi  $\lambda$  "autovalori di  $H_0$  rispetto a  $G_0$ ", mentre  $\underline{w}$  è l'autovettore di  $H_0$  rispetto a  $G_0$ . I fisici li chiamano pulsazioni proprie  $\omega$  e modi normali  $\underline{w}$  corrispondenti. Tali frequenze di oscillazioni corrispondono a moti periodici che coinvolgono tutti i gradi di libertà contemporaneamente.

Il pendolo doppio ha due modi normali: quando i pendoli sono in fase e quando sono in contro-fase.

**Teorema.** Siccome  $G_0$  è simmetrica e definita positiva; ed  $H_0$  è simmetrica allora

- esiste una base di  $\mathbb{R}^d$  formata da autovettori di  $H_0$  rispetto a  $G_0$ ;
- autovettori corrispondenti ad autovalori diversi (di  $H_0$  rispetto a  $G_0$ ) sono ortogonali rispetto a  $G_0$ . Cioè il prodotto scalare tramite  $G_0$  è nullo:  $\langle \underline{w}_1, G_0 \underline{w}_2 \rangle = 0$ ;
- se  $H_0$  è definita positiva (che è vero perché  $\underline{q}^*$  è di minimo) allora gli autovalori sono positivi.

## Lecture 26

Esercitazione.

gio 24 nov  
2021 15:30

**Esercizio.** [immagine]

**Metodo primo.** Si utilizza la conservazione dell'energia:  $d_t(K + V) = 0$ . Si ha

$$\begin{cases} x(t) = l \cos \theta(t) \\ y(t) = l \sin \theta(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -l \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = l \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

Quindi

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad V = mgy.$$

Pertanto

$$ml^2 d_t \left( \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \sin \theta \right) = 0 \iff ml^2 \left( \dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cos \theta \dot{\theta} \right) = 0.$$

Si ha soluzione per  $\dot{\theta} = 0$ . Mentre per  $\dot{\theta} \neq 0$  si ha

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cos \theta = 0.$$

cioè l'equazione di un pendolo.

**Metodo secondo.** Si utilizza la lagrangiana.

$$\mathcal{L} = K - V, \quad \partial_{\dot{\theta}}\mathcal{L} = ml^2\dot{\theta}, \quad \partial_{\theta}\mathcal{L} = -mgl \cos \theta.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per tale sistema è

$$d_t \partial_{\dot{\theta}}\mathcal{L} = \partial_{\theta}\mathcal{L} \iff ml^2\ddot{\theta} = -mgl \cos \theta.$$

**Esercizio.** Si considerano due masse  $m_1 \neq m_2$ , con  $A(0, y(t))$  e  $B(x(t), 0)$ . Dunque, si ha

$$\begin{cases} x(t) = 2l \cos \theta \\ y(t) = 2l \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_B \\ \dot{y} = v_A \end{cases}.$$

Dunque

$$K = \frac{1}{2} (m_1 v_A^2 + m_2 v_B^2), \quad V = m_1 g(2l) \sin \theta.$$

Per conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\begin{aligned} 2l^2 d_t \left[ (m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + m_1 \frac{g}{l} \sin \theta \right] &= 0 \\ [m_1 \cos^2 \theta + m_2 (1 - \cos^2 \theta)] \ddot{\theta} + (m_2 - m_1) \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + m_1 \frac{g}{2l} \cos \theta &= 0 \\ \left( 1 + \frac{m_1 - m_2}{m_2} \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_2} \sin 2\theta \dot{\theta}^2 + \frac{g}{2l} \frac{m_1}{m_2} \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

**Esercizio.** Si considera il moto di una massa puntiforme su di un ellisse. [immagine]  
L'equazione di un ellisse è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si pone l'eccentricità pari a

$$\epsilon = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}, \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Inoltre, posto  $l \equiv a$  risulta

$$\begin{cases} x(t) = l \cos \theta \\ y(t) = l\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -l \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = l\sqrt{1 - \epsilon^2} \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

L'angolo  $\theta$  è detto anomalia eccentrica. La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 [\sin^2 \theta + (1 + \epsilon^2) \cos^2 \theta] - mgl\sqrt{1 + \epsilon^2} \cos \theta.$$

Dunque, l'equazione di Eulero-Lagrange risulta essere

$$(1 + \epsilon^2 \cos^2 \theta)\ddot{\theta} - \epsilon^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{l}\sqrt{1 + \epsilon^2} \cos \theta.$$

Ponendo

$$\begin{cases} \epsilon^2 \equiv \frac{m_1 - m_2}{m_2} \\ l_{\text{asta}} = \frac{m_1}{2m_2}l\sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon^2}} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \end{cases}.$$

si ottiene l'equazione dell'esercizio precedente.

## Lecture 27

gio 25 nov  
2021 15:30

**Esempio.** [immagine] Si considerino due punti materiali di massa  $m$  vincolati al piano  $xz$ . Il punto  $P$  è vincolato all'asse  $x$  ed è attaccato tramite una molla all'origine. Il punto  $Q$  è vincolato da un'asta rigida a stare a distanza fissa  $L$  da  $P$ . Inoltre,  $Q$  è legato ad una molla verticale legata all'asse  $x$ .

Il sistema presenta due gradi di libertà. Questo perché i due punti hanno in tutto sei gradi; due sono tolti dal piano, un altro tolto dalla distanza fissa tra  $P$  e  $Q$ ; ed un ultimo è tolto dal vincolo di  $P$  sull'asse  $x$ .

Si scelgono due coordinate lagrangiane: l'angolo  $\theta$  e la coordinata  $x$  del punto  $P$ ; si prendono due coordinate con stesse dimensioni, dunque si pone  $\xi \equiv \frac{x_P}{L}$ .

Dunque

$$\begin{cases} x_P = L\xi \\ z_P = 0 \\ x_Q = L\xi + L \sin \theta \\ z_Q = -L \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_P = L\dot{\xi} \\ \dot{z}_P = 0 \\ \dot{x}_Q = L\dot{\xi} + L \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{z}_Q = L \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

Le seconde sono le velocità compatibili con il vincolo. Tutte le forze attive sono conservative (cioè solo la forza peso e la forza elastica). Il potenziale è

$$U(\xi, \theta) = -mgL \cos \theta + \frac{1}{2}kL^2 (\cos^2 \theta + \xi^2).$$

L'energia cinetica è

$$K(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mL^2 (2\dot{\xi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \cos \theta \dot{\xi} \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2mL^2 & mL^2 \cos \theta \\ mL^2 \cos \theta & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

La lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L}(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mL^2 (2\dot{\xi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \cos \theta \dot{\xi} \dot{\theta}) + mgL \cos \theta - \frac{1}{2}kL^2 (\cos^2 \theta + \xi^2).$$

Al posto di scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange si cercano punti di equilibrio e determinare la loro stabilità. Qualora siano punti di equilibrio stabile si vogliono determinare le frequenze proprie ed i modi normali.

Si cercano i punti che annullano il gradiente di  $U$ :

$$\nabla U = (kL^2\xi \quad mgL \sin \theta - kL^2 \sin \theta \cos \theta).$$

Si cercano i punti che risolvono

$$\begin{cases} kL^2\xi = 0 \\ L \sin \theta (mg - k \cos \theta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \xi = 0 \\ (*) \end{cases}.$$

Dall'equazione (\*) si ha

$$\begin{aligned}\sin \theta = 0 &\implies \theta = 0 \vee \theta = \pi \implies A_1 = (0, 0), \quad A_2 = (0, \pi) \\ mg = kL \cos \theta &\implies \cos \theta = \frac{mg}{kL}\end{aligned}$$

posto  $\alpha \equiv \frac{kL}{mg}$ , la seconda equazione ha soluzione solo se  $\frac{1}{\alpha} < 1$ . Dunque, se  $\alpha > 1$  allora

$$\theta_{\pm} = \arccos\left(\frac{mg}{kL}\right).$$

da cui si ha  $A_{\pm} = (0, \theta_{\pm})$ . Si sono trovati quattro punti di equilibrio. Due che esistono per ogni valore di  $\alpha$  e due che ne dipendono.

Si studia la stabilità dei punti di equilibrio. Prima di studiare analiticamente si disegna il sistema.  
immagine

Il punto  $A_1$  ha una molla tutta contratta in zero e  $Q$  è verso il basso; il caso non è chiaro, se la molla è debole allora si ha un pendolo semplice, se la molla è forte allora la forza peso è trascurabile; infatti in base al valore di  $\alpha$  si hanno comportamenti diversi: si ha un caso di biforcazione. Per  $A_2$  la situazione è come prima, ma  $Q$  è verso l'alto; si ha un equilibrio instabile. Per i punti  $A_{\pm}$  si ha un equilibrio stabile creato dal bilancio tra la forza di richiamo della molla su  $Q$  e della forza peso.

Si calcola l'hessiana del potenziale

$$H_U(\xi, \theta) = \begin{pmatrix} kL^2 & 0 \\ 0 & mgL \cos \theta - kL^2(2 \cos^2 \theta - 1) \end{pmatrix}.$$

la si valuta per ciascuno dei quattro punti e si controlla quando è definita positiva. Quindi per  $A_1$

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} kL^2 & 0 \\ 0 & mgL - kL^2 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva per

$$mgL > kL^2 \iff 1 > \frac{kL}{mg} = \alpha.$$

quindi è stabile per  $\alpha < 1$  ed instabile per  $\alpha > 1$ .

Ora per  $A_2$

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} kL^2 & 0 \\ 0 & -mgL - kL^2 \end{pmatrix}.$$

il secondo termine sulla diagonale è sempre negativo, dunque  $A_2$  è sempre instabile per ogni  $\alpha$ .

Per  $A_{\pm}$  si ha

$$H_U(0, \theta_{\pm}) = \begin{pmatrix} kL^2 & 0 \\ 0 & \frac{mgL}{\alpha} + kL^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \end{pmatrix}.$$

dunque

$$\begin{aligned}mgL \frac{mg}{kL} + kL^2 - 2kL^2 \frac{m^2 g^2}{k^2 L^2} > 0 &\iff \frac{m^2 g^2}{k} + kL^2 - 2 \frac{m^2 g^2}{k} > 0 \\ \iff kL^2 - \frac{m^2 g^2}{k} > 0 &\iff 1 - \frac{m^2 g^2}{k^2 L^2} > 0 \iff 1 - \frac{1}{\alpha^2} > 0.\end{aligned}$$

Dunque, tali punti sono sempre stabili quando esistono perché  $\alpha > 1$ . [immagine]

## Lecture 28

Si studiano le frequenze proprie ed i modi normali dei punti equilibrio stabili. Si osserva il punto  $(\xi, \theta) = (0, 0)$ . Si pone  $G_0 = G(0, 0)$  e dunque si ha

$$\mathcal{L}(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2mL^2 & mL^2 \cos \theta \\ mL^2 \cos \theta & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} - \frac{kL^2}{2} (\xi^2 + \cos^2 \theta) - mgL \cos \theta.$$

lun 29 nov  
2021 16:30

Quindi

$$G_0 = mL^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_0 = \begin{pmatrix} kL^2 & 0 \\ 0 & mgL - kL^2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\lambda G_0 - H_0 = \begin{pmatrix} 2\lambda mL^2 - kL^2 & mL^2\lambda \\ mL^2\lambda & mL^2\lambda - mgL + kL^2 \end{pmatrix}.$$

il cui determinante è

$$\begin{aligned} \det(\lambda G_0 - H_0) &= (2\lambda mL^2 - kL^2)(mL^2\lambda - mgL + kL^2) - m^2 L^4 \lambda^2 \\ &= L^2 [(2\lambda mL - kL)(mL\lambda - mg + kL) - m^2 L^2 \lambda^2]. \end{aligned}$$

Trovando le soluzioni per il determinante nullo si ha

$$\begin{aligned} 2m^2 L^2 \lambda^2 - 2\lambda m^2 gL + 2\lambda k mL^2 - mkL^2 \lambda + mkgL - k^2 L^2 - m^2 L^2 \lambda^2 &= \\ \lambda^2 (m^2 L^2) + \lambda (-2m^2 gL + 2kmL^2) + mkgL - k^2 L^2 &= \\ \lambda^2 (m^2 L^2) + \lambda mL(-2mg + kL) + kL(mg - kL) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Si sceglie  $\alpha = \frac{kL}{mg} = \frac{3}{5}$  di modo che i conti si semplificano, così che  $mg = \frac{5}{3}kL$ . Pertanto

$$\lambda^2 (m^2 L^2) + \lambda mL \left(-\frac{7}{3}\right) + kL \left(\frac{2}{3}kL\right) = 0 \iff \lambda^2 - \frac{7}{3} \frac{k}{m} \lambda + \frac{2}{3} \frac{k^2}{m^2} = 0.$$

il parametro  $\frac{k}{m}$  ricorda il quadrato della pulsazione delle oscillazioni armoniche. Il parametro  $\lambda$  ha dimensione  $s^{-2}$ . Quindi

$$\left(\lambda - \frac{1}{3} \frac{k}{m}\right) \left(\lambda - 2 \frac{k}{m}\right) = 0.$$

Da cui si trovano i due autovalori positivi (come ci si aspetta dalla teoria):

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3} \frac{k}{m} \\ \lambda_2 = 2 \frac{k}{m} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{3m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases}.$$

Si trovano gli autovettori e i modi normali associati; si osserva a che moti corrispondono; infine, si scrive la soluzione generale. Si sceglie  $\omega_1$ , si sostituisce  $\lambda_1$  corrispondente nella matrice  $\lambda_1 G_0 - H_0$  e si trova il suo kernel. Quindi

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_0 - H_0 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \frac{k}{m} mL^2 - kL^2 & \frac{1}{3} \frac{k}{m} mL^2 \\ mL^2 \frac{1}{3} \frac{k}{m} & mL^2 \frac{1}{3} \frac{k}{m} - mgL + kL^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} kL^2 & \frac{1}{3} kL^2 \\ \frac{1}{3} kL^2 & \frac{4}{3} kL^2 - \frac{5}{3} kL^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} kL^2 & \frac{1}{3} kL^2 \\ \frac{1}{3} kL^2 & -\frac{1}{3} kL^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{kL^2}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si cerca  $\underline{w}_1$  che annulla la matrice:

$$(\lambda_1 G_0 - H_0) \underline{w}_1 = \frac{kL^2}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per  $\lambda_2$  si ottiene

$$\lambda_2 G_0 - H_0 = kL^2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

I vettori  $\underline{w}_i$  sono i modi normali cioè i moti periodici attorno al punto di equilibrio stabile. Ad ogni vettore è associata una soluzione per la quale le componenti del vettore cambiano di

uno stesso fattore  $\cos(\omega t + \varphi)$ . I moti periodici non sono del punto  $P$  o punto  $Q$ , ma tali moti coinvolgono tutti i gradi di libertà. [immagine]

Questi due moti periodici sono approssimazioni del moto vero attorno al punto di equilibrio e la soluzione generale è la sovrapposizione lineare dei due, i quali hanno periodi diversi. Infatti

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, gli autovettori sono ortogonali rispetto a  $G_0$ :

$$\begin{aligned} \underline{w}_1 \cdot \underline{w}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \neq 0 \\ \underline{w}_1 \cdot G_0 \underline{w}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

## 8.5 Cambi di coordinate

Si discute la scelta delle coordinate lagrangiane. Per due scelte di coordinate  $\underline{q}$ ,  $\tilde{\underline{q}}$ , si può passare da una all'altra tramite una mappa regolare, almeno localmente. Scrivendo

$$q_j = q_j(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_d), \quad J_{kj} = \partial_{\tilde{q}_j} q_k.$$

con  $J$  tale che  $\det J \neq 0$ . Si supponga di aver scritto una lagrangiana in termini delle coordinate  $\underline{q}$ . La lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$  è tale per cui

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\underline{q}}, \dot{\tilde{\underline{q}}}) = \mathcal{L}(\underline{q}(\tilde{\underline{q}}), \dot{\underline{q}}(\tilde{\underline{q}}, \dot{\tilde{\underline{q}}}).$$

Risolvendo le equazioni di Eulero-Lagrange di  $\tilde{\mathcal{L}}$ , ci si chiede se le trasformate di  $\tilde{\underline{q}}$  (cioè le  $\underline{q}$  corrispondenti) sono soluzioni per  $\mathcal{L}$ .

**Proposizione.** L'espressione  $\underline{q}(t)$  è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  se e solo se l'espressione  $\tilde{\underline{q}}$  è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per  $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\underline{q}}, \dot{\tilde{\underline{q}}})$ .

**Dimostrazione.** Implicazione diretta. Si ha

$$\begin{aligned} d_t \partial_{\dot{\tilde{q}}_j} \tilde{\mathcal{L}} &= d_t \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \partial_{\dot{\tilde{q}}_j} \dot{q}_i = d_t \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \partial_{\tilde{q}_j} q_i = \sum_{i=1}^d d_t (\partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}) \partial_{\tilde{q}_j} q_i + \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} d_t \partial_{\tilde{q}_j} q_i \\ &= \sum_{i=1}^d d_t (\partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}) \partial_{\tilde{q}_j} q_i + \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \partial_{\tilde{q}_j} \dot{q}_i. \end{aligned}$$

si sono applicati i lemmi visti. Per ipotesi valgono le equazioni di Eulero-Lagrange, quindi

$$d_t (\partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}) = \partial_{q_i} \mathcal{L}.$$

Pertanto

$$d_t \partial_{\dot{\tilde{q}}_j} \tilde{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^d \partial_{q_i} \mathcal{L} \partial_{\tilde{q}_j} q_i + \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \partial_{\tilde{q}_j} \dot{q}_i = \partial_{\tilde{q}_j} \tilde{\mathcal{L}}.$$

L'implicazione inversa è immediata.

**Esempio.** Si consideri la lagrangiana dell'oscillatore armonico:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Si opera un cambio di coordinate:

$$\begin{cases} q = \tilde{q}^3 \\ \dot{q} = 3\tilde{q}^2\dot{\tilde{q}} \end{cases} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \mathcal{L}(\tilde{q}^3, 3\tilde{q}^2\dot{\tilde{q}}) = \frac{9}{2}m\tilde{q}^4\dot{\tilde{q}}^2 - \frac{1}{2}k\tilde{q}^6.$$

Tutta la costruzione della teoria è fatta in modo che le equazioni di Eulero-Lagrange siano invarianti: non si è mai fatta una scelta particolare. Dunque, trovando una soluzione per un insieme di coordinate, segue che le loro trasformate sono soluzione in un altro sistema di coordinate.

Si consideri un problema a cui è associata una lagrangiana per una certa scelta di coordinate  $q$ . Trovate le soluzioni, ci si chiede se esiste un'altra lagrangiana per cui le equazioni di Eulero-Lagrange hanno le stesse soluzioni.

Data  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ , ci si chiede se esiste  $\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$  tale che  $q(t)$  è soluzione per entrambe (soluzione di entrambe le equazioni di Eulero-Lagrange). Il caso banale è quello di aggiungere una costante, perché il potenziale è definito a meno di una costante. Si vuole dimostrare che vale anche scegliendo

$$\mathcal{L}' = \alpha\mathcal{L} + d_t F(q, t).$$

**Proposizione.** Per ogni scelta di una funzione  $F(q, t)$  e per ogni scelta di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , segue che la lagrangiana  $\mathcal{L}$  e la lagrangiana  $\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \alpha\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + d_t F(q, t)$  portano alle stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

**Dimostrazione.** Sia  $L_0 = d_t F$  e  $\mathcal{L}' = \alpha\mathcal{L} + L_0$ . Quindi

$$d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}' = \alpha d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} + d_t \partial_{\dot{q}_i} L_0.$$

Il secondo addendo a destra risulta essere

$$d_t \partial_{\dot{q}_i} L_0 = d_t \partial_{\dot{q}_i} \dot{F} = d_t \partial_{\dot{q}_i} F = \partial_{q_i} \dot{F} = \partial_{q_i} L_0.$$

dove si sono applicati i due lemmi. Dunque

$$d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}' = \alpha d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} + \partial_{q_i} L_0 = \alpha \partial_{q_i} \mathcal{L} + \partial_{q_i} L_0 = \partial_{q_i} (\alpha\mathcal{L} + L_0) = \partial_{q_i} \mathcal{L}'.$$

si ricorda che per ipotesi valgono le equazioni di Eulero-Lagrange. Il viceversa è immediato.

## Lecture 29

### 9 Corpo rigido

mar 30 nov  
2021 15:30

Si vogliono trattare situazioni in  $N$  gradi di libertà, ma un problema tale risulta essere velocemente intrattabile. Si studiano  $N$  punti materiali con una quantità di vincoli presenti tra loro in modo da ridurre efficacemente i gradi di libertà. Si studia il corpo rigido: un insieme di punti materiali rigidamente collegati tra loro.

**Definizione.** Considerati due punti  $\underline{x}_1$  e  $\underline{x}_2$  in  $\mathbb{R}^3$ , essi si dicono rigidamente collegati se  $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|$  è costante nel tempo.

Si studia un insieme di punti materiali le cui distanze relative sono fisse. Tale insieme è il corpo rigido. Successivamente, si passa ad una distribuzione continua di punti. Per poter trattare tale situazioni con il formalismo lagrangiano, bisogna accertarsi che tale vincolo faccia parte dei vincoli lisci.

**Lemma.** Il vincolo di rigidità è liscio (cioè la potenza delle reazioni vincolari è nulla sulle velocità compatibili con il vincolo).



**Dimostrazione.** Si calcola la potenza sulle velocità compatibili con il vincolo. Si sa che  $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|^2$  è costante, dunque

$$d_t \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|^2 = 0 \iff d_t [(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_2)] = 2(\dot{\underline{x}}_1 - \dot{\underline{x}}_2) \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = 0.$$

Quindi i due sono vettori ortogonali: la velocità relativa è ortogonale al vettore posizione relativa.

**Osservazione.** [immagine]

Affinché il vincolo di rigidità tra due punti sia soddisfatto, si necessita dell'esistenza di reazioni vincolari. Le reazioni vincolari  $\underline{\phi}_i$  sono sulla direzione della congiungente:

$$\begin{cases} \underline{\phi}_1 = \alpha(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \\ \underline{\phi}_2 = -\alpha(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \end{cases}.$$

Dunque, la potenza totale delle reazioni vincolari

$$\Pi_{RV}^{tot} = \underline{\phi}_1 \dot{\underline{x}}_1 + \underline{\phi}_2 \dot{\underline{x}}_2 = \alpha(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \dot{\underline{x}}_1 - \alpha(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \dot{\underline{x}}_2 = \alpha(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \cdot (\dot{\underline{x}}_1 - \dot{\underline{x}}_2) = 0.$$

perché perpendicolari.

Si considerino  $N$  punti rigidamente vincolati tra loro nel piano. Ci si chiede quanti gradi di libertà sono presenti. Contare i gradi di libertà significa di capire quante coordinate sono necessarie ad identificare la posizione in modo univoco: si identifica l'origine del riferimento del corpo rigido e poi bisogna identificare l'orientazione degli assi. Nel piano si hanno due coordinate per l'origine ed una coordinata per l'orientazione. Nello spazio si ha bisogno di sei gradi di libertà: tre per la posizione e tre per l'orientazione (si ha bisogno di tre gradi di libertà per la rotazione perché bisogna identificare la rotazione attorno ad ogni asse cartesiano; nel riferimento sferico, invece, due gradi  $\theta$  e  $\phi$  identificano la posizione relativa al corpo rigido e l'ultimo grado porta informazioni sulla rotazione attorno al raggio vettore della posizione relativa).

Si vuole descrivere la lagrangiana per questo problema. Ciò che risulta arduo è il moto del corpo rigido immerso in un campo di forze conservative; in particolare l'energia cinetica del corpo rigido. Essa è la somma delle energie cinetiche di ogni punto descritto nel sistema di riferimento del laboratorio.

Si comincia lo studio da un solo punto. [immagine] Si consideri un punto  $P$  appartenente al corpo rigido. Siano  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  i versori del riferimento del laboratorio (i cui vettori posizione sono  $\underline{x}$ ), e  $\hat{E}_1$  e  $\hat{E}_2$  i versori del riferimento del corpo rigido (i cui vettori posizione sono  $\underline{y}$ ). Allora

$$\underline{x}_P = \underline{x}_O + \underline{y}_P, \quad \dot{\underline{x}}_P = \dot{\underline{x}}_O + \dot{\underline{y}}_P.$$

L'energia cinetica del corpo rigido è la somma di tutte le  $N$  energie cinetiche. Studia  $\dot{\underline{y}}_P$  e il quadrato della sua norma.

Sia  $\underline{y} \equiv \underline{y}_P$ . Allora, qualora le origini dei due riferimenti coincidano, si ha

$$\underline{y} = y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 = Y_1 \hat{E}_1 + Y_2 \hat{E}_2.$$

Si ricorda la matrice di rotazione

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

essa è una matrice ortogonale, cioè  $RR^\top = I$ . (Una matrice di rotazione in qualsiasi dimensione risulta essere una matrice ortogonale solamente quando la base scelta è ortonormale).

Dunque, la trasformazione da un riferimento all'altro coinvolge la matrice di rotazione. Infatti, la coordinata  $i$ -esima del punto  $P$  nella base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$  risulta essere

$$y_i = (R\underline{Y})_i = \sum_{k=1}^2 R_{ik} Y_k.$$

Inoltre, i versori del riferimento del corpo rigido sono

$$\hat{E}_i = \sum_{k=1}^2 R_{ki} \hat{e}_k.$$

Dunque

$$\underline{\dot{y}} = \dot{y}_1 \hat{e}_1 + \dot{y}_2 \hat{e}_2 = d_t \left( \sum_{k=1}^2 R_{1k} Y_k \right) \hat{e}_1 + d_t \left( \sum_{k=1}^2 R_{2k} Y_k \right) \hat{e}_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \dot{R}_{ik} Y_k \hat{e}_i.$$

La matrice  $R$  dipende dal tempo perché l'angolo  $\theta$  cambia, mentre  $Y$  non dipende dal tempo perché è solidale con la rotazione. Notato che i versori del riferimento del laboratorio sono

$$\hat{e}_i = \sum_{k=1}^2 R_{ik} \hat{E}_k.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{\dot{y}} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \dot{R}_{ik} Y_k \sum_{j=1}^2 R_{ij} \hat{E}_j = \sum_{k,j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \dot{R}_{ik} R_{ij} Y_k \hat{E}_j \\ &= \sum_{k,j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \dot{R}_{ik} (R^\top)_{ji} Y_k \hat{E}_j = \sum_{j,k=1}^2 (R^\top \dot{R})_{jk} Y_k \hat{E}_j. \end{aligned}$$

si ricorda che  $R_{ij} = (R^\top)_{ji}$ . La matrice  $R^\top \dot{R}$  non dipende dal punto e contiene in sé tutta la dinamica; la dipendenza dal punto si ha solo in  $Y_k$  che però non dipende dal tempo. Infatti

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{R} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \dot{\theta} & -\cos \theta \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$R^\top \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si pone  $R^\top \dot{R} \equiv A$ , essa è antisimmetrica cioè  $A + A^\top = 0$ . Il ragionamento in due dimensioni vale anche per tre. Dunque

$$\underline{\dot{y}} = \sum_{j,k=1}^2 (R^\top \dot{R})_{jk} Y_k \hat{E}_j = -\dot{\theta} Y_2 \hat{E}_1 + \dot{\theta} Y_1 \hat{E}_2.$$

Da cui segue:

$$\|\underline{\dot{y}}\|^2 = \dot{\theta}^2 (Y_2^2 + Y_1^2) = \dot{\theta}^2 (y_1^2 + y_2^2) = \dot{\theta} \|\underline{y}\|^2.$$

La lunghezza del vettore è un invariante. Pertanto, esplicitando nuovamente le coordinate del punto  $P$  si ha

$$\|\underline{\dot{y}}_P\|^2 = \dot{\theta}^2 \|\underline{y}_P\|^2.$$

la norma di  $\underline{y}$  non cambia nel tempo quando il sistema ruota perché il corpo è rigido.

Si osserva che, considerando la direzione ortogonale  $\hat{E}_3$  al piano del moto, risulta

$$\underline{y}_P = Y_1 \hat{E}_1 + Y_2 \hat{E}_2 + Y_3 \hat{E}_3.$$

Considerato un “vettore”(bivettore?) tipicamente chiamato velocità angolare

$$\underline{\Omega} = \dot{\theta} \hat{E}_3.$$

allora risulta

$$\underline{\Omega} \times \underline{y}_P = \det \begin{pmatrix} \hat{E}_1 & \hat{E}_2 & \hat{E}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} = -\dot{\theta} Y_2 \hat{E}_1 + \dot{\theta} Y_1 \hat{E}_2 = \underline{\dot{y}}_P.$$

Si scrive l'energia cinetica completa del corpo rigido. Fin'ora si è scritto il modulo quadro della velocità di un punto. Bisogna fare la somma su tutti e anche considerare il contributo dovuto alla traslazione.

Si considera il caso in cui l'origine del corpo rigido non coincida con l'origine del riferimento del laboratorio. Si ha

$$\underline{\dot{x}}_P = \underline{\dot{x}}_O + \underline{\dot{y}}_P.$$

Pertanto, l'energia cinetica risulta essere

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{P=1}^N m_P \|\underline{\dot{x}}_P\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{P=1}^N m_P (\underline{\dot{x}}_O + \underline{\dot{y}}_P) \cdot (\underline{\dot{x}}_O + \underline{\dot{y}}_P) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{P=1}^N m_P \left( \|\underline{\dot{x}}_O\|^2 + 2\underline{\dot{x}}_O \cdot \underline{\dot{y}}_P + \|\underline{\dot{y}}_P\|^2 \right). \end{aligned}$$

la velocità del riferimento del corpo rigido non dipende dal punto, quindi

$$K = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{P=1}^N m_P}_{M_{\text{tot}}} \|\underline{\dot{x}}_O\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{P=1}^N m_P \|\underline{\dot{y}}_P\|^2 + \underline{\dot{x}}_O \cdot \sum_{P=1}^N m_P \underline{\dot{y}}_P.$$

Scegliendo l'origine del riferimento solidale con il corpo rigido coincidente con il centro di massa, segue che

$$\sum_{P=1}^N m_P \underline{\dot{y}}_P = 0 \quad (= M_{\text{tot}} \underline{\dot{y}}_{\text{CM}}).$$

quindi, l'ultimo addendo scompare. Dunque

$$K = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_{P=1}^N m_P \|\underline{y}_P\|^2.$$

Si definisce il momento di inerzia rispetto al (l'asse passante per il) centro di massa.

$$I_{z,\text{CM}} = \sum_{P=1}^N m_P \|\underline{y}_P\|^2.$$

che dipende solamente dalla geometria del corpo, non dalla dinamica.

## Lecture 30

Esercitazione. cfr Goldstein??

mer 01 dic  
2021 15:30

**Esercizio.** [immagine] [r] Si consideri una forza  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Sia la massa totale del sistema  $M = m_1 + m_2$ . Si introducono due raggi  $\vec{r}_1'$  e  $\vec{r}_2'$ . [immagine]  
Per il teorema di König si ha

$$K = \frac{1}{2} M \vec{R}^2 + \frac{1}{2} (m_1 \vec{r}_1'^2 + m_2 \vec{r}_2'^2).$$

Dato che  $\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}$ ,  $m_1 \vec{r}'_1 = -m_2 \vec{r}'_2$  si ha

$$m_1(\vec{r}'_2 - \vec{r}) = -m_2 \vec{r}'_2 \implies \begin{cases} \vec{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r} \\ \vec{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r} \end{cases}.$$

Si scrive l'energia cinetica totale in termini dei raggi del nuovo riferimento. Quindi

$$\frac{1}{2} (m_1 \vec{r}'_1{}^2 + m_2 \vec{r}'_2{}^2) = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \left[ m_1 \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \right] = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \mu.$$

Si introduce la massa ridotta  $\mu$ . La lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - V(\vec{r}, \vec{r}, \dots).$$

La lagrangiana per il baricentro si riduce a

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} M \dot{R}^2.$$

[r]

Tutto il sistema si è ridotto ad un problema ad un singolo corpo con una forza che dipende dalla distanza  $\vec{r}$ . Pertanto, si ha una particella con massa  $\mu$  a distanza  $\vec{r}$  su cui agisce una forza radiale  $F(\vec{r})$ .

Inoltre

$$\dot{L} = d_t [\vec{r} \times \vec{\phi}] = \vec{r} \times m \vec{a} + \vec{r} \times m \vec{v} = 0 + 0 = 0.$$

dove  $\phi$  è la quantità di moto. Il momento angolare si conserva: tale conservazione vale per qualunque campo centrale.

In generale, questo tipo di problemi si risolvono in coordinate polari. [immagine]

Il moto sono contenuto nel piano tale per cui la normale è parallela alla momento angolare. Si parametrizza tale moto piano:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{r}(t) \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}(t) = \dot{r}(t) \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

In tali coordinate si scrive l'energia cinetica e si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange in coordinate piane:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \vec{r}'^2 &= \frac{1}{2} \mu [\dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2 \vec{r}' \cdot \vec{r} \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} \\ &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2 \vec{r}' \cdot \vec{r} \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}] = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2). \end{aligned}$$

Quindi [r]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(\vec{r}).$$

Dunque

$$\phi_\theta = \partial_{\dot{\theta}} \mathcal{L} = \mu r^2 \dot{\theta}.$$

Inoltre

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{\phi}| = m r (r \dot{\theta}).$$

Dunque

$$d_t \phi_\theta = 0.$$

Poi

$$\partial_{\dot{r}} \mathcal{L} = \mu \dot{r}, \quad \partial_r \mathcal{L} = \mu r \dot{\theta}^2 - \partial_r V.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\mu d_t \dot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \partial_r V = 0 \iff \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \partial_r V = 0.$$

[r] Per comprendere tale equazione fisicamente si compie un'altra trasformazione.  
immagine

In tale sistema  $\underline{u}_r$  e  $\underline{u}_\theta$  dipendono dal tempo. Infatti

$$\begin{cases} \underline{u}_r = \cos \theta \underline{u}_x + \sin \theta \underline{u}_y \\ \underline{u}_\theta = -\sin \theta \underline{u}_x + \cos \theta \underline{u}_y \end{cases}.$$

Risulta  $\underline{u}_r \cdot \underline{u}_\theta = 0$ . Pertanto

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \underline{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \underline{u}_y = \dot{\theta} \underline{u}_\theta \\ \dot{\underline{u}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \underline{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \underline{u}_y = -\dot{\theta} \underline{u}_r \end{cases}.$$

Dunque

$$\begin{cases} \vec{P} = r \underline{u}_r \\ \vec{P} = \dot{r} \underline{u}_r + r \dot{\theta} \underline{u}_\theta \\ \vec{P} = \ddot{r} \underline{u}_r + \dot{r} \dot{\underline{u}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \underline{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\underline{u}}_\theta \end{cases}.$$

Infine si ha

$$\vec{P} = \ddot{r} \underline{u}_r + \dot{r} \dot{\underline{u}}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \underline{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \underline{u}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \underline{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \underline{u}_\theta.$$

[r] Non si ha accelerazione ortogonale al raggio???

Ritornando alla prima equazione di Eulero-Lagrange, si ha un'interpretazione fisica

$$mr^2 \dot{\theta} = mr(r\dot{\theta}).$$

dove  $r\dot{\theta}$  è la componente tangenziale della velocità. Dato che  $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ . [immagine] Il settore infinitesimo dell'area è

$$dA = \frac{1}{2} r r d\theta \iff d_t A = \frac{1}{2} r^2 d_t \theta.$$

L'area spazzata da un raggio è costante: questa è la seconda legge di Keplero che vale per qualunque campo centrale. La prima legge e la terza, valgono solo per campi con simmetria sferica, cioè proporzionali a  $\frac{1}{r}$ .

## Lecture 31

Per una distribuzione continua di massa si fa il passaggio al limite:

gio 02 dic  
2021 15:30

$$I_{z,CM} = \int_{\Omega} \rho(x,y)(x^2 + y^2) dx dy.$$

con  $x^2 + y^2$  distanza quadratica dall'origine del riferimento nel corpo rigido, e  $\Omega$  una regione del piano. [immagine]

**Esempio.** Si consideri un rettangolo di dimensioni  $a$  e  $b$  con densità omogenea. Il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro (che è anche il centro di massa) risulta essere

$$I_{z,CM}^{\text{rett}} = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dx dy = 2\rho b \frac{a^3}{24} + 2a\rho \frac{b^3}{24} = \rho \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

ricordando che  $\rho = \frac{M}{ab}$ .

**Esempio.** Si consideri un disco con densità omogenea. Il centro di massa è il centro geometrico del disco:

$$\iint \rho(x^2 + y^2) dx dy = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = \frac{1}{2}MR^2.$$

**Puro rotolamento.** Si descrive la situazione di un disco omogeneo di raggio  $R$  con massa  $M$  che rotola senza strisciare (cioè il punto di contatto ha velocità istantanea nulla: questo è un vincolo in più) sull'asse  $x$ . Inoltre, il centro di massa è vincolato a rimanere ad una distanza fissa dall'asse: si ha un altro vincolo. Dunque, è presente un solo grado di libertà (tre coordinate libere iniziali dovute al corpo rigido nel piano, meno due vincoli).

Si trova la relazione tra la distanza percorsa dal centro di massa e dall'arco percorso

$$dx_{\text{CM}} = R d\theta \implies \dot{x}_{\text{CM}} = R\dot{\theta}.$$

questa è la condizione di non strisciamento che vincola le velocità, non le posizioni. Essa è equivalente a

$$x_{\text{CM}}(t) = R\theta(t) + \text{cost.}$$

Quindi, questo problema ha un solo grado di libertà. L'energia cinetica è

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{z,\text{CM}}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2.$$

Tale energia cinetica è corretta perché si è scelta come riferimento il centro di massa e si è calcolato il momento di inerzia rispetto al centro di massa. Un altro modo per ottenere tale equazione è scegliere l'origine del riferimento nel punto di contatto, perché la velocità istantanea è nulla:  $\dot{x}_O = 0$  e si ottiene la stessa formula dalla derivazione precedente dell'energia cinetica.

**Esempio.** [immagine] Si consideri un piano inclinato di angolo  $\alpha$  verso il basso su cui è posto un disco di massa  $M$  che rotola senza strisciare. Sulla circonferenza del disco è presente un punto materiale di massa  $M$  che può muoversi. Tale punto risente di un potenziale armonico che dipende dalla distanza dall'asse  $x$  (vi è presente una molla verticale). Il sistema è soggetto alla forza di gravità.

Si hanno cinque coordinate lagrangiane (tre del corpo rigido e due del punto) meno tre vincoli (il punto vincolato al disco, la condizione di puro rotolamento e fissare il centro di massa ad una certa distanza dalla retta). Dunque, rimangono due coordinate libere: la distanza del centro di massa  $\xi R$  e l'angolo  $\varphi$  del punto con l'orizzontale.

Si trova l'energia cinetica come somma di quella del disco e quella del punto. Per l'energia cinetica del disco si ha

$$K_D = \frac{3}{4}MR^2\dot{\xi}^2.$$

dove  $\dot{\xi} = \dot{\theta}$  nella discussione precedente, dato che il disco non striscia, la velocità di traslazione corrisponde alla velocità di rotazione; dato che entrambi sono adimensionali, segue che essi rappresentano le velocità angolari. Inoltre

$$\begin{cases} x_{\text{CM}} = R(\xi \cos \alpha + \sin \alpha) \\ z_{\text{CM}} = -R(\xi \sin \alpha - \cos \alpha) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_{\text{CM}} = R\dot{\xi} \cos \alpha \\ \dot{z}_{\text{CM}} = -R\dot{\xi} \sin \alpha \end{cases} \implies \dot{x}_{\text{CM}}^2 + \dot{z}_{\text{CM}}^2 = R^2\dot{\xi}^2.$$

Sul disco solo la forza gravitazionale è una forza attiva. Allora l'energia potenziale del disco è

$$U_D = Mgz_{\text{CM}} = -MgR(\xi \sin \alpha - \cos \alpha).$$

Per il punto si ha

$$\begin{cases} x_P = x_{\text{CM}} + R \cos \varphi \\ z_P = z_{\text{CM}} + R \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_P = R \cos \alpha \dot{\xi} - R \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z}_P = -R \sin \alpha \dot{\xi} + R \cos \varphi \dot{\varphi} \end{cases}.$$

Quindi l'energia cinetica del punto risulta essere

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{1}{2}M [R^2 \cos^2 \alpha \dot{\xi}^2 - 2R^2 \cos \alpha \sin \varphi \dot{\xi} \dot{\varphi} + R^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 - 2R^2 \sin \alpha \cos \varphi \dot{\xi} \dot{\varphi} + R^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 \\ &\quad + R^2 \sin^2 \alpha \dot{\xi}^2 - 2R^2 \sin \alpha \cos \varphi \dot{\xi} \dot{\varphi} + R^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2] \\ &= \frac{1}{2}M [R^2 \dot{\xi}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 - 2R^2 \sin(\alpha + \varphi) \dot{\xi} \dot{\varphi}]. \end{aligned}$$

L'energia potenziale del punto è

$$U_P = Mgx_P + \frac{1}{2}kz_P^2.$$

Si noti che l'energia cinetica del punto non dipende da  $\xi$ .

La lagrangiana del sistema risulta essere (rimuovendo le costanti dell'energia potenziali)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K_D + K_P - (U_D + U_P) \\ &= \frac{1}{2}MR^2 \left[ \frac{5}{2}\dot{\xi}^2 - 2\sin(\alpha + \varphi)\dot{\xi}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \right] + Mgr[2\xi \sin \alpha - \sin \varphi] - \frac{1}{2}k[\cos \alpha - \xi \sin \alpha + \sin \varphi]^2. \end{aligned}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per  $\xi$  risulta essere

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\xi}} \mathcal{L} &= \frac{5}{2}MR^2 [\dot{\xi} - \sin(\alpha + \varphi)\dot{\varphi}] \\ d_t \partial_{\dot{\xi}} \mathcal{L} &= \frac{5}{2}MR^2 [\ddot{\xi} - \sin(\alpha + \varphi)\ddot{\varphi} - \cos(\alpha + \varphi)\dot{\varphi}^2] \\ \partial_{\xi} \mathcal{L} &= 2MR \sin \alpha + k(\cos \alpha - \xi \sin \alpha + \sin \varphi) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{5}{2}MR^2 [\ddot{\xi} - \sin(\alpha + \varphi)\ddot{\varphi} - \cos(\alpha + \varphi)\dot{\varphi}^2] = 2MR \sin \alpha + k(\cos \alpha - \xi \sin \alpha + \sin \varphi) \sin \alpha.$$

Si pone  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  e si studia la stabilità. Quindi

$$U_{\alpha}(\xi, \varphi) = 2MgR(-\xi \sin \alpha + \cos \alpha + MgR \sin \varphi + \frac{1}{2}kR^2(-\xi \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \varphi)^2).$$

Dunque

$$U_{\frac{\pi}{4}}(\xi, \varphi) = 2MgR \left( -\xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + MgR \sin \varphi + \frac{1}{2}mR^2 \left( -\xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \varphi \right)^2.$$

Da cui si ha

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} U &= -MgR\sqrt{2} - kR^2 \left( -\xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \varphi \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \partial_{\varphi} U &= MgR \cos \varphi + kR^2 \left( -\xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \varphi \right) \cos \varphi. \end{aligned}$$

[r] Si studia la stabilità. Si calcola la matrice hessiana per i due punti:

$$H_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kR^2 & 0 \\ 0 & RMg \end{pmatrix}, \quad H_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kR^2 & 0 \\ 0 & -MgR \end{pmatrix}.$$

dunque  $A$  è un punto di equilibrio stabile, mentre  $B$  è di equilibrio instabile.

Si pone  $kR = 3mg$  e si trovano le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile  $A$ . Quindi, ricordando che

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & -\frac{1}{2}mR^2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}MR^2\sqrt{2} & MR^2 \end{pmatrix}.$$

allora risulta

$$\det(\lambda G_0 - H_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\lambda MR^2 - \frac{3}{2}RMg & -\frac{1}{2}\lambda MR^2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\lambda MR^2\sqrt{2} & \lambda MR^2 - MgR \end{pmatrix} = 2\lambda^2 M^2 R^4 - 4R^3 g \lambda M^2 + \frac{3}{2}R^2 g^2 M^2 = 0.$$

le cui soluzioni sono  $\lambda_1 = \frac{3}{2}\frac{g}{R}$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{g}{R}$ . Si trova il modo normale del primo autovalore:

$$\lambda_1 G_0 - H_0 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}MgR & -\frac{3}{2}MgR\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}MgR\sqrt{2} & \frac{1}{2}MgR \end{pmatrix}.$$

Il cui modo normale risulta essere  $w_1 = (1, \frac{3}{2}\sqrt{2})$ . Analogo per il secondo autovalore.

Posto  $k = 0$  e  $g = 0$  si osserva che la coordinate  $\xi$  diventa ciclica. Risulta che  $\partial_\xi \mathcal{L} \equiv \frac{P}{R}$  è una costante del moto. Dunque, la lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 MR^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\varphi}\dot{\xi}MR^2\sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Si ricava l'equazione di Eulero-Lagrange:

$\partial_\xi \mathcal{L} = \frac{5}{2}MR^2\dot{\xi} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}MR^2\sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) \equiv \frac{P}{R} = \text{cost.}$  Ricavando  $\dot{\xi}$  e sostituendolo nella lagrangiana si ottiene la lagrangiana ridotta.

## Lecture 32

gio 09 dic  
2021 15:30

Si continua la trattazione del corpo rigido. Lo si studia in tre dimensioni. Si pone il sistema di riferimento del corpo rigido coincidente con il centro di massa così che si semplifichino alcuni termini. Si scrive l'espressione dell'energia cinetica rotazionale. Si descrive la posizione di un punto  $P$  del corpo rigido rispetto al riferimento del centro di massa. Si ha

$$\underline{y}_P = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 Y_i \hat{E}_i.$$

Considerando i due riferimenti con stessa origine, allora per la matrice di rotazione  $R$  si ottiene

$$y_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} Y_k.$$

si ricorda che la matrice di rotazione è ortogonale  $R^\top R = RR^\top = I$ ; inoltre, tale matrice non dipende dal punto, ma dipende dal tempo. Per lo stesso procedimento del caso bidimensionale, si ricava la velocità relativa

$$\dot{\underline{y}}_P = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (R^\top \dot{R})_{jk} Y_k \hat{E}_j.$$

ponendo  $A = R^\top \dot{R}$ , si osserva che essa è antisimmetrica.

**Proposizione.** Si consideri una famiglia di matrici ortogonali  $R(t)$ , tali che  $\dot{R}(t)$  sia ben definita. Allora

$$(R^\top \dot{R}) + (R^\top \dot{R})^\top = \underline{0}, \quad \forall t.$$

**Dimostrazione.** Dall'ipotesi di ortogonalità si ha

$$d_t(R^\top R) = d_t I = \underline{0}.$$

svolgendo la derivata si ha

$$d_t(R^\top R)_{ij} = d_t \left( \sum_{k=1}^D (R^\top)_{ik} R_{kj} \right) = \sum_{k=1}^D (\dot{R}^\top)_{ik} R_{kj} + (R^\top)_{ik} \dot{R}_{jk} = \dot{R}^\top R + R^\top \dot{R} = \underline{0}.$$



Si ricorda che  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ . Dunque

$$(R^\top \dot{R})^\top = \dot{R}^\top (R^\top)^\top = \dot{R}^\top R.$$

Pertanto

$$\dot{R}^\top R + R^\top \dot{R} = (R^\top \dot{R})^\top + R^\top \dot{R} = \underline{0}.$$

Questo vale per qualsiasi dimensione.

La matrice  $R$  è globale, riguarda ogni punto; essa appare espressa come  $A$  nell'energia cinetica. La matrice  $A$  ha nove entrate, mentre i gradi di libertà di rotazione sono tre.

La matrice  $A$  è l'unica a dipendere dal tempo, se tutte le entrate fossero indipendenti allora si avrebbe bisogno di nove gradi di libertà. Tuttavia, dato che  $A$  è antisimmetrica, segue che per descrivere  $D^2$  entrate, si ha bisogno di  $\frac{D^2-D}{2}$  entrate perché sulla diagonale si hanno solo zeri e, inoltre, bisogna prendere la metà delle entrate restanti a causa dell'antisimmetria.

Per  $D = 3$  dimensioni, si hanno  $\frac{9-3}{2} = 3$  gradi di libertà, che sono quelli di rotazione.

Dunque si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si definisce un vettore  $\underline{\Omega} = \Omega_1 \hat{E}_1 + \Omega_2 \hat{E}_2 + \Omega_3 \hat{E}_3$ . Quindi,

$$\dot{\underline{y}}_P = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{jk} Y_k \hat{E}_j = \underline{\Omega} \times \underline{y}_P.$$

il prodotto vettoriale è indipendente dalla base, però, dato che si è definito  $\underline{\Omega}$  nella base  $\hat{E}$  allora conviene usare tale base. La velocità angolare  $\underline{\Omega}$  non è un vettore, ma sono le entrate di una matrice antisimmetrica; le sue coordinate non trasformano come un vettore: esso è detto vettore assiale.

L'energia cinetica risulta essere

$$\begin{aligned} K_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_P m_P \left\| \dot{\underline{y}}_P \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_P m_P \left\| \underline{\Omega} \times \underline{y}_P \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_P m_P \left\| \underline{\Omega} \right\|^2 \left\| \underline{y}_P \right\|^2 \sin^2 \alpha(\underline{\Omega}, \underline{y}_P) \\ &= \frac{1}{2} \sum_P m_P \left\| \underline{\Omega} \right\|^2 \left\| \underline{y}_P \right\|^2 (1 - \cos^2 \alpha(\underline{\Omega}, \underline{y}_P)) = \frac{1}{2} \sum_P m_P \left( \left\| \underline{\Omega} \right\|^2 \left\| \underline{y}_P \right\|^2 - (\underline{\Omega} \cdot \underline{y}_P)^2 \right). \end{aligned}$$

la scrittura  $\alpha(\underline{\Omega}, \underline{y}_P)$  indica l'angolo formato da  $\underline{\Omega}$  e  $\underline{y}_P$ . Si osserva che l'energia cinetica rotazione è uno scalare e quindi non dipende dalla scelta della base: infatti, sia il modulo che il prodotto scalare non dipendono dalla base. Conviene scegliere una base in modo da isolare tutta la dipendenza temporale in  $\Omega$ : la scelta è il riferimento solidale con il corpo rigido. Dunque,

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\Omega} \right\|^2 &= \sum_{j,k=1}^3 \Omega_j \Omega_k \delta_{jk} \\ (\underline{\Omega} \cdot \underline{y}_P)^2 &= \sum_{j,k=1}^3 \Omega_j Y_j \Omega_k Y_k. \end{aligned}$$

dove  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker. Si mette in evidenza il termine che dipende dal tempo. Quindi, l'energia cinetica risulta essere

$$\begin{aligned} K_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_P m_P \sum_{j,k=1}^3 \left( \Omega_j \Omega_k \delta_{jk} \left\| \underline{y}_P \right\|^2 - \Omega_j \Omega_k Y_j^P Y_k^P \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Omega_j \Omega_k \sum_P m_P \left( \delta_{jk} \left\| \underline{y}_P \right\|^2 - Y_j^P Y_k^P \right). \end{aligned}$$

risulta essere evidente che la sommatoria su  $P$  di destra non dipende dal tempo e lo si pone come  $I_{jk}$  detto tensore di inerzia (è un tensore di rango (0,2), cioè covariante di secondo ordine):

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1} \Omega_j I_{jk} \Omega_k = \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot I \underline{\Omega}.$$

si osserva che  $I$  è simmetrico  $I_{jk} = I_{kj}$ . Esso non è un multiplo dell'identità, cioè non è diagonale; esso dipende dalla geometria del corpo rigido rispetto al riferimento. Tuttavia, per una scelta opportuna del riferimento,  $I$  può diventare diagonale. Il fatto che sia simmetrico garantisce l'esistenza di autovalori reali e positivi (esso è semi-definito positivo, semi perché ci potrebbero essere degenerazioni nel corpo), dunque è diagonalizzabile. Pertanto, esiste una scelta particolare tale per cui la descrizione in termini del tensore di inerzia diventa più semplice.

Si vedono alcune sue proprietà; il tensore di inerzia  $I$

- è simmetrico;
- descrive la geometria delle masse in una base scelta;
- non è diagonale, ma si può diagonalizzare.

Scegliendo la base in modo che esso sia diagonale allora si sono scelti gli assi principali di inerzia. Quindi, il tensore si scrive come:

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

dove  $I_j$  sono i momenti principali di inerzia. In generale,  $I_j$  sono diversi tra loro perché essi dipendono dalla disposizione delle masse. Con tale scelta, l'energia cinetica diventa

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\Omega_1^2 I_1 + \Omega_2^2 I_2 + \Omega_3^2 I_3).$$

si ricorda che tale scrittura è vera quando  $I_j$  sono i momenti principali di inerzia (che sono anche gli autovalori del tensore) e  $\Omega_j$  sono le componenti rispetto agli assi principali di inerzia. Si nota che gli assi principali di inerzia hanno origine nel centro di massa in quanto l'energia cinetica di rotazione è calcolata ponendo l'origine del sistema di riferimento nel centro di massa.

## Lecture 33

### 9.1 Angoli di Eulero e trottola di Lagrange

mar 14 dic  
2021 15:30

Si ricorda che l'energia cinetica è stata scritta come

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Omega_j \Omega_k \sum_P m_P \left( \|y_P\|^2 \delta_{jk} - Y_j^P Y_k^P \right).$$

l'ultima sommatoria non dipende dal moto, ma solo dalla disposizione delle masse. Le componenti  $\Omega_j$  si possono vedere come componenti del vettore velocità angolare  $\underline{\Omega}$  scritta nella base  $\hat{E}$ . In modo compatto

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot I \underline{\Omega}.$$

Il tensore d'inerzia  $I$  è simmetrico:

$$I = \begin{pmatrix} \sum_P m_P ((Y_2^P)^2 + (Y_3^P)^2) & -\sum_P m_P Y_1^P Y_2^P & -\sum_P m_P Y_1^P Y_3^P \\ -\sum_P m_P Y_2^P Y_1^P & \sum_P m_P ((Y_1^P)^2 + (Y_3^P)^2) & -\sum_P m_P Y_2^P Y_3^P \\ -\sum_P m_P Y_3^P Y_1^P & -\sum_P m_P Y_3^P Y_2^P & \sum_P m_P ((Y_1^P)^2 + (Y_2^P)^2) \end{pmatrix}.$$

Per la simmetria, gli autovalori sono reali e nella base degli assi principali di inerzia, la matrice diventa diagonale

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

con  $I_j$  momenti principali di inerzia che dipendono solo dalla geometria delle masse del corpo. In particolare, se il corpo è simmetrico attorno ad un asse (sia geometricamente che come distribuzione delle masse) e posto un vettore della base coincidente con l'asse di simmetria, allora il tensore di inerzia risulta essere ortogonale.

Trovati gli assi principali di inerzia, l'energia cinetica diventa

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j^2 I_j.$$

la difficoltà sta nel descrivere la dipendenza dal tempo di tali componenti, che dipendono anche dai tre gradi di libertà della rotazione. Bisogna scegliere bene le coordinate lagrangiane.

Si ricorda che  $\underline{\Omega}$  (non proprio) vettore della velocità angolare, le cui componenti sono le entrate della matrice antisimmetrica  $A = R^\top \dot{R}$ . Si identificano tre coordinate per descrivere la rotazione  $R(t)$  che al tempo  $t$  porta a descrivere la sovrapposizione delle coordinate. Si utilizza tale parametrizzazione per descrivere  $A$  e dunque per identificare le coordinate di  $\underline{\Omega}$ .

### 9.1.1 Angoli di Eulero

Il modo migliore per descrivere la rotazione del riferimento del corpo rigido rispetto a quello del laboratorio è l'utilizzo degli angoli di Eulero. Sono tre angoli a cui corrispondono rotazioni precise.

Si identifica la linea dei nodi (identificata dal versore  $\hat{e}_n$ ) che è l'intersezione del piano  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  con il piano  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ . [immagine]

L'idea è di sovrapporre la terna di  $\hat{e}$  con quella di  $\hat{E}$ . Prima si ruota di un angolo  $\varphi$  attorno  $\hat{e}_3$ , per cui risulta  $\hat{e}_1 = \hat{e}_n$ . Ora, si ruota attorno  $\hat{e}_n$  di un angolo  $\theta$  in modo da avere  $\hat{e}_3 = \hat{E}_3$ . In questo modo, i due piani sono coincidenti; dunque bisogna far coincidere i restanti versori. Si ruota attorno  $\hat{E}_3$  di un angolo  $\psi$  così da sovrapporre i versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  con  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$  rispettivamente. Si sottolinea che le rotazioni devono essere fatte in un ordine preciso perché in tre dimensioni le rotazioni non sono commutative. Riassumendo

- Si ruota di  $\varphi$  attorno a  $\hat{e}_3$ , per cui  $\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_n$ .
- Si ruota di  $\theta$  attorno a  $\hat{e}_n$ , per cui  $\hat{e}_3 \rightarrow \hat{E}_3$ .
- Si ruota di  $\psi$  attorno a  $\hat{E}_3$ , per cui  $\hat{e}_1 \rightarrow \hat{E}_1$  e  $\hat{e}_2 \rightarrow \hat{E}_2$ ; questo vale perché la terna è ortogonale e destrorsa.

Fissati gli angoli, si fissa la rotazione che serve per sovrapporre i due sistemi. Ad ogni istante  $t$ , individuare i tre angoli, corrisponde ad aver individuato la posizione del corpo solido in maniera univoca. Dunque, tali angoli sono una buona scelta delle coordinate lagrangiane.

Studiare il moto di un corpo rigido in tre dimensioni è, in generale, complicato. La situazione si semplifica in alcuni casi particolari. Si vede la trottola di Lagrange.

### 9.1.2 Trottola di Lagrange

Per descrivere  $\Omega_j$  bisogna scegliere un caso particolare, perché la trattazione generale è complicata.

La trottola di Lagrange è una trottola, cioè un corpo rigido simmetrico attorno ad un asse. In particolare, si considera la densità di massa  $\rho$  costante. Si vuole studiare la trottola che si può pensare come avente un punto fisso diverso dal baricentro, cioè il punto di contatto con la superficie su cui poggia. L'ultima caratteristica è che il sistema è immerso in un potenziale di

forze simmetrico rispetto all'asse verticale (tipicamente si utilizza il potenziale gravitazionale).  
immagine

Si sceglie il sistema di riferimento in modo che il punto fisso sia coincidente con l'origine del sistema. Il problema ha tre gradi di libertà: si hanno sei coordinate e tre vincoli sono dovuti a fissare un punto del corpo rigido oppure fissando un punto, la posizione del centro di massa è vincolata a rimanere su di una sfera (ciò corrisponde due gradi di libertà, il terzo è dato dalla rotazione del corpo rigido sul proprio asse) oppure ancora si può pensare di avere i tre angoli di Eulero.

Si scrive la lagrangiana. Il potenziale risulta essere

$$U(\varphi, \theta, \psi) = Mgz_{\text{CM}} = Mgd \cos \theta.$$

le coordinate del centro di massa sono

$$\begin{cases} x_{\text{CM}} = d \sin \theta \cos \varphi \\ y_{\text{CM}} = d \sin \theta \sin \varphi \\ z_{\text{CM}} = d \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_{\text{CM}} = d \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - d \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y}_{\text{CM}} = d \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + d \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z}_{\text{CM}} = -d \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}.$$

Per cui l'energia cinetica del centro di massa diventa

$$K_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M (\dot{x}_{\text{CM}}^2 + \dot{y}_{\text{CM}}^2 + \dot{z}_{\text{CM}}^2) = \frac{1}{2} M d^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Si nota che a causa della scelta degli assi,  $\hat{E}_3$  coincide con l'asse di simmetria, dunque i tre versori  $\hat{E}$  sono gli assi principali di inerzia (non proprio, perché l'origine del sistema di riferimento non coincide con il centro di massa [r]), pertanto il tensore d'inerzia è diagonale:

$$I = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

per cui

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2.$$

Fissato un istante  $t$ , la rotazione  $R$  è la composizione di tre rotazioni:

- $\varphi$  attorno a  $\hat{e}_3$
- $\theta$  attorno a  $\hat{e}_n$
- $\psi$  attorno a  $\hat{E}_3$

Si supponga di compiere un moto di rotazione solamente attorno a  $\hat{e}_3$ . La velocità angolare corrispondente è  $\dot{\varphi} \hat{e}_3$ . Si dimostra che, in generale, componendo tali rotazioni, la velocità angolare risulta essere

$$\underline{\Omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\psi} \hat{E}_3.$$

si vuole scrivere tale vettore in termini della base  $\hat{E}$ . Si dovrebbe scrivere  $\hat{e}_3$  e  $\hat{e}_n$  nella base  $\hat{E}$ . Tuttavia, si osserva

- la trottola è stata scelta come un corpo rigido simmetrico rispetto all'asse  $\hat{E}_3$ ; questo significa che la lagrangiana e l'energia cinetica rotazionale non dipende da  $\psi$  (per il teorema di Noether), pertanto  $\psi$  è una coordinata ciclica.
- per costruzione, il problema analizzato è simmetrico rispetto all'asse verticale (della gravità)  $\hat{e}_3$ , pertanto pure  $\varphi$  è ciclica.

Dato che l'energia cinetica finale non dipende da tali due coordinate cicliche, si può calcolare  $\underline{\Omega}$  scegliendo in modo comodo queste coordinate. Tale scelta risulta essere  $\varphi = 0$  per cui  $\hat{e}_1 = \hat{e}_n$ , e  $\psi_0$  per cui  $\hat{e}_n = \hat{E}_1$ . Dunque si ha  $\hat{E}_1 = \hat{e}_1 = \hat{e}_n$ . Pertanto, il vettore velocità angolare risulta essere

$$\underline{\Omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{E}_1 + \dot{\psi} \hat{E}_3.$$

A questo punto bisogna esprimere  $\hat{e}_3$  in termini di  $\hat{E}$ . Risulta immediato che  $\hat{e}_3 = \sin \theta \hat{E}_2 + \cos \theta \hat{E}_3$ . Per cui si ha

$$\underline{\Omega} = \dot{\varphi}(\sin \theta \hat{E}_2 + \cos \theta \hat{E}_3) + \dot{\theta} \hat{E}_1 + \dot{\psi} \hat{E}_3 = \dot{\theta} \hat{E}_1 + \sin \theta \dot{\varphi} \hat{E}_2 + (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}) \hat{E}_3.$$

Pertanto, l'energia cinetica rotazionale risulta essere

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2.$$

Dunque, la lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}} - U = \frac{1}{2} (I + Md^2) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 - Mgd \cos \theta.$$

essa è la lagrangiana di un oggetto in tre gradi di libertà ( $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\psi$ ) in cui  $\varphi$  e  $\psi$  non compaiono esplicitamente e sono variabili cicliche. Si osserva, inoltre, che  $J_1 = J_2 \equiv I + Md^2$  è la componente 1, 2 del momento di inerzia calcolati rispetto assi principali la cui origine è un punto diverso dal centro di massa, cioè nel punto fisso (risulta essere il teorema degli assi paralleli, Huygens-Steiner).

Dato che la lagrangiana contiene due variabili cicliche, segue che si può ridurre il problema ad un solo grado di libertà.

**Riduzione ad un grado di libertà.** Avere variabili cicliche significa

$$\partial_{\dot{\psi}} \mathcal{L} = \text{cost} = L_3 = I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})$$

$$\partial_{\dot{\varphi}} \mathcal{L} = \text{cost} = L_z = J_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos \theta = J_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + L_3 \cos \theta.$$

si vuole scrivere una lagrangiana per la sola variabile non ciclica, così da avere un problema unidimensionale; pertanto, non si sostituiscono tali espressioni nella lagrangiana, ma in altre costanti del moto oppure nelle equazioni del moto. In particolare, le si sostituiscono nell'energia meccanica. Dunque

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \cos \theta \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta}.$$

sostituendo si ottiene

$$E = K + U = \underbrace{\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2}_{K_{\text{eff}}} + \underbrace{\frac{1}{2} J_1 \sin^2 \theta \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{J_1^2 \sin^4 \theta} + \frac{1}{2} I_3 \frac{L_3^2}{J_1^2 \sin^4 \theta}}_{U_{\text{eff}}} + Mgd \cos \theta.$$

questa è l'energia per un sistema ad un grado di libertà con potenziale efficace

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{J_1 \sin^2 \theta} + Mgd \cos \theta.$$

Il termine cinetico si può intendere descrivere il moto di un punto materiale di massa  $J_1$  che si muove nel potenziale sopra trovato.

Si procede con uno studio qualitativo del sistema. Si studia il potenziale efficace con quanto noto da Sistemi Dinamici. Il potenziale diverge per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . Il moto risulta essere periodico per i livelli energetici ammessi tra due angoli  $\theta$ : si ha un moto confinato in una regione della sfera simile ad un napkin ring, come si è visto per il pendolo sferico. [immagine]

Il segno di  $\dot{\varphi}$  dipende da  $L_z - L_3 \cos \theta$ , in particolare dipende da  $\theta$ . Si hanno tre situazioni:

- il segno è sempre lo stesso
- il segno cambia
- caso degenerare in cui al punto di inversione per  $\theta$  si ha  $\dot{\varphi} = 0$  e quindi si hanno delle cuspidi.

[immagine]

## Lecture 34

gio 16 dic  
2021 15:30

### 9.2 Teorema di Noether

**Definizione.** Gruppo ad un parametro di trasformazioni di coordinate (diffeomorfismi)

$$q_j \rightsquigarrow q'_j = Q_j(\underline{q}, s), \quad s \in \mathbb{R}$$

Se soddisfa

- per ogni  $s$  fissato  $Q(\underline{q}, s)$  dev'essere invertibile;
- fissato un punto  $\underline{q}$ , la trasformazione  $Q(\underline{q}, s)$  si differenziabile in  $s$ ;
- per  $s = 0$  si ha  $Q(\underline{q}, 0) = \underline{q}$ , cioè l'identità;
- $\underline{q} \rightarrow Q(\underline{q}, s_1) \rightarrow Q(Q(\underline{q}, s_1), s_2)$  la composizione è ancora un elemento della famiglia pari a  $\underline{q} \rightarrow Q(\underline{q}, s_1 + s_2)$ .

**Esempio.** Si conoscono esempi di gruppi ad un parametro di trasformazione. Si consideri un problema ad un grado di libertà, la seguente trasformazione di coordinate è un gruppo ad un parametro:

$$\begin{cases} q'_i = q_j, & \forall j \neq d \\ q'_d = q_d + s \end{cases}$$

**Esempio.** Un altro gruppo è la rotazione. Le coordinate sono  $(x, y, z)$  in  $\mathbb{R}^3$  e si compie una rotazione attorno all'asse  $z$ . Dunque

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove la matrice  $R_s$  risulta essere

$$R_s = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio.** Si vedono le traslazioni in  $\mathbb{R}^d$  secondo un certo vettore  $\underline{q}$ . Dunque si ha

$$\underline{q}' = \underline{q} + s\underline{v}$$

con  $\underline{v} \in \mathbb{R}^d$  costante.

**Definizione.** Generatore infinitesimale di un gruppo ad un parametro di diffeomorfismo. Per  $s$  piccolo si fa un'espansione della definizione del gruppo:

$$q'_j = Q_j(\underline{q}, s) = Q_j(\underline{q}, 0) + d_s Q_j(\underline{q}, 0) \cdot s + o(s) = q_j + d_s Q_j(\underline{q}, 0) \cdot s + o(s)$$

dove  $Y_j(\underline{q}) = d_s Q_j(\underline{q}, 0)$  è la componente  $j$  del generatore infinitesimale. Esso dipende dalle  $q$ , ma non più da  $s$ . Risulta utile ricordare che

$$q'_j - q_j = \delta q_j = Y_j(\underline{q}) \cdot s + o(s)$$

**Esempio.** Per il secondo esempio fatto  $\underline{x}' = R_s \underline{x}$ . Quindi

$$\begin{cases} x' = x \cos s - y \sin s \\ y' = x \sin s + y \cos s \\ z' = z \end{cases}$$

L'espansione risulta essere

$$\begin{cases} x' = x - sy + o(s) \\ y' = sx + y + o(s) \\ z' = z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{Y}} + o(s)$$

con  $\underline{Y}$  è il generatore infinitesimale.

Per il terzo esempio fatto, risulta semplice verificare che il generatore infinitesimale è  $\underline{Y} = \underline{v}$  cioè il vettore costante delle traslazioni.

**Definizione.** Simmetria di  $\mathcal{L}$ . Si vede quando un gruppo è una simmetria per il problema, per la lagrangiana. Diciasi che un gruppo ad un parametro di trasformazioni è una simmetria per della lagrangiana  $\mathcal{L}$  se tale lagrangiana è invariante in forma sotto tale trasformazione. “Invariante in forma” significa che considerata la lagrangiana  $\mathcal{L}$ , funzione di  $\underline{q}$  e  $\dot{\underline{q}}$ , allora valutandola in  $q' = \underline{Q}(\underline{q}, s)$  e  $\dot{q}' = \dot{\underline{Q}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, s)$  espressi come funzioni di  $\underline{q}$  ed  $s$ , si ha

$$\mathcal{L}(\underline{q}', \dot{\underline{q}}', t) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = (\underline{q}', \dot{\underline{q}}', t) = \mathcal{L}(\underline{Q}(\underline{q}, s), \dot{\underline{Q}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, s), t) = \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$$

se vale l'ultima uguaglianza, allora la lagrangiana è invariante in forma.

**Esempio.** Si consideri una lagrangiana in due gradi di libertà

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)^4$$

le rotazioni in  $\mathbb{R}^2$  sono una simmetria per tale lagrangiana. Infatti, il gruppo ad un parametro di trasformazioni è

$$\begin{cases} q'_1 = q_1 \cos s - q_2 \sin s \\ q'_2 = q_1 \sin s + q_2 \cos s \end{cases} \iff \underline{q}' = R(s)\underline{q}$$

da cui si ottengono le trasformazioni per le velocità generalizzate:

$$\begin{cases} \dot{q}'_1 = \dot{q}_1 \cos s - \dot{q}_2 \sin s \\ \dot{q}'_2 = \dot{q}_1 \sin s + \dot{q}_2 \cos s \end{cases} \iff \dot{\underline{q}}' = R(s)\dot{\underline{q}}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \|\underline{q}'\|^2 &= (q'_1)^2 + (q'_2)^2 = \|\underline{q}\|^2 \\ \|\dot{\underline{q}}'\|^2 &= \|\dot{\underline{q}}\|^2. \end{aligned}$$

La lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L}(\underline{q}'(\underline{q}), \dot{\underline{q}}'(\underline{q}, \dot{\underline{q}})) = \tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$$

**Osservazione.** Anche la lagrangiana di un punto materiale che si muove in un campo centrale nel piano in coordinate cartesiane:

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$$

è invariante per rotazione.

**Teorema.** Di Noether. Sia  $q_j \rightarrow Q_j(q, s)$  una simmetria per una certa lagrangiana. Sia  $\underline{Y}(q)$  il generatore infinitesimale di tale trasformazione. Allora

$$I = \sum_{j=1}^d Y_j(\underline{q}) \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L}$$

è una costante del moto.

Ad una simmetria esiste associata una costante del moto.

**Osservazione.** Se la lagrangiana è quadratica nelle  $\dot{q}$  allora la costante del moto è lineare nelle  $\dot{q}$ .

**Dimostrazione.** Si è detto che l'espansione al prim'ordine è

$$\begin{aligned} Q_j(\underline{q}, s) &= q_j + s Y_j(\underline{q}) + o(s) \\ \dot{Q}_j(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, s) &= \dot{q}_j + s \, d_t Y_j(\underline{q}) + o(s) \end{aligned}$$

si vuole scrivere la lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, s)$  e svilupparla al primo ordine. Tale lagrangiana è

$$\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, s) = \mathcal{L}(Q(\underline{q}, s), \dot{Q}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, s), t)$$

e si sviluppa al primo ordine in  $s = 0$ :

$$\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, s) =$$

$$= \mathcal{L}(Q(\underline{q}, 0), \dot{Q}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, 0), t) + s \sum_{j=1}^d \partial_{Q_j} \mathcal{L} Y_j + s \sum_{j=1}^d \partial_{\dot{Q}_j} \mathcal{L} \, d_t Y_j + o(s) = \mathcal{L}(Q(\underline{q}, 0), \dot{Q}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, 0), t) + s \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} \mathcal{L} Y_j$$

Si nota che  $\underline{Q}$  e  $\underline{q}$  differiscono per un ordine di  $s$  e pertanto si sostituisce l'uno nell'altro ed i termini in più vengono inclusi in  $o(s)$ .

Per ipotesi, il gruppo è una simmetria, cioè

$$\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, s) = \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \mathcal{L}(Q(\underline{q}, s), \dot{Q}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, s)), \quad \forall s$$

l'espansione della lagrangiana dev'essere uguale alla lagrangiana originale:

$$\mathcal{L}(Q(\underline{q}, 0), \dot{Q}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, 0), t) + s \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} \mathcal{L} Y_j + s \sum_{j=1}^d \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} \, d_t Y_j + o(s) = \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$$

si nota che il primo addendo è uguale alla lagrangiana, pertanto si semplifica. Quindi risulta:

$$\sum_{j=1}^d \partial_{q_j} \mathcal{L} Y_j + \sum_{j=1}^d \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} \, d_t Y_j = 0$$

ora si calcola tale quantità lungo il moto per cui significa che valgono le equazioni di Eulero-Lagrange; pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \partial_{q_j} \mathcal{L} Y_j + \sum_{j=1}^d \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} \, d_t Y_j &= \sum_{j=1}^d d_t \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} Y_j + \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} \, d_t Y_j \\ &= \sum_{j=1}^d d_t (\partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} Y_j) = d_t \sum_{j=1}^d (\partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} Y_j) = 0 \end{aligned}$$



## Lecture 35

lun 20 dic  
2021 16:30

**Osservazione.** Il teorema non fa esplicito riferimento ad una particolare scelta delle coordinate lagrangiane, mentre la costante del moto invece sì. Questo significa che l'esistenza della costante del moto dipende dalla simmetria della lagrangiana. Cambiando le coordinate lagrangiane, non si cambia il problema, quindi la costante e la simmetria dev'essere comunque presente; tuttavia, la simmetria può cambiare natura, può essere espressa in modo diverso.

**Esempio.** Si consideri un moto in un campo centrale in coordinate cartesiane nel piano del moto. Il problema tridimensionale si riduce a bidimensionale. Si sceglie il piano del moto e le coordinate cartesiane su di esso. La lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

risulta evidente che il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di rotazioni attorno all'asse  $z$  è una simmetria per la lagrangiana [r]. Per cui il generatore infinitesimale risulta essere

$$Y = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

dunque la costante del moto risulta essere

$$I = -ym\dot{x} + xm\dot{y}.$$

Lo stesso identico problema si può scrivere in coordinate polari:

$$\mathcal{L}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - U(\rho).$$

in questo caso, la simmetria rotazionale diventa il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi corrispondenti alle traslazioni in  $\theta$ . [r]

$$\begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + s \end{cases} \rightsquigarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

che la costante

$$I = 0 \partial_r \mathcal{L} + 1 \partial_\theta \mathcal{L} = m\rho^2 \dot{\theta}.$$

[r]

**Definizione.** Si estende il teorema e lo si fa valere per le simmetrie estese per una lagrangiana. Una simmetria estesa è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi tale per cui

$$\mathcal{L}(Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}), \underline{\dot{Q}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})) - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = s \, d_t F(\underline{q}, t) + o(s).$$

[r]

**Teorema.** Noether. Se la lagrangiana  $\mathcal{L}$  possiede una simmetria estesa allora

$$I = \sum_{j,k=1}^d Y_j \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} - F(\underline{q}, t).$$

è costante del moto. La dimostrazione è analoga a quella precedente.

**Dimostrazione.** Infatti

$$\sum_j \partial_{q_j} \mathcal{L} Y_j + \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} d_t Y_j = d_t F.$$

per Eulero-Lagrange si ottiene

$$d_t \left[ \sum_j Y_j \partial_{\dot{q}_j} \mathcal{L} - F \right] = 0.$$

## 10 Formulazione variazionale delle equazioni di Eulero-Lagrange

Si supponga di aver fissato un problema con la sua lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . Per ora si consideri il problema ad un solo grado di libertà.

Si considerino due istanti di tempo  $t_0$  e  $t_1$ , ed una certa  $q(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  funzione (derivabile quante volte necessario). Si valuta la lagrangiana lungo  $q$  (che è qualsiasi, non necessariamente soluzione delle equazioni del moto):

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t), \quad \forall t \in (t_0, t_1).$$

si possono integrare tali valori lungo la curva: si calcola l'integrale d'azione  $S$

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

esso dipende dalla curva  $q(t)$  scelta, mentre la lagrangiana è fissata. Dunque,  $S$  è funzione dei cammini: essa è un funzionale, cioè una funzione di funzioni. Si studia il dominio di tale funzionale: esso è detto spazio dei cammini  $C^1[t_0, t_1]$ . In esso si fissa l'intervallo  $[t_0, t_1]$ , gli estremi  $q_0, q_1$ . Esso è lo spazio di tutte le curve lisce abbastanza che hanno estremi in  $q_0$  e  $q_1$ . Quindi  $C^1[t_0, t_1]$  è lo spazio dei cammini  $q(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui  $q(t_0) = q_0$  e  $q(t_1) = q_1$ , e derivabile a sufficienza.

Si vuole valutare l'azione su tutti i possibili cammini e osservare come varia. Il principio variazionale afferma che se una curva è soluzione dell'equazioni di Eulero-Lagrange, allora  $S$  assume un punto critico e vale il viceversa. [r]

Tuttavia, bisogna definire cosa sia la derivata di un funzionale, in modo da trovare i punti critici. Essa è definita tramite il rapporto incrementale. [r]

**Derivata dell'azione.** Dunque, l'incremento risulta essere

$$S[q + h] - S[q].$$

tuttavia, già per  $q + h$  si ha un problema (dove  $h$  è un funzione). La funzione  $h$  non può essere qualunque, perché  $q + h$  deve rimanere nello spazio dei cammini. Bisogna scegliere  $h$  in modo accorto, ma le si devono scegliere da una sottoclasse di funzioni.

L'incremento  $h(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  anch'essa derivabile a sufficienza, deve essere tale per cui  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ . Per fare il limite del rapporto incrementale, si vuole mandare  $h$  a zero, però essa è una funzione. La cosa accorta è quella di moltiplicare  $h$  per un valore arbitrario  $\varepsilon$ :

$$\mathcal{D}_h S[q] \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[q + \varepsilon h] - S[q]}{\varepsilon}.$$

Se la funzione  $q$  è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange, allora la derivata è nulla per ogni  $h$ , e viceversa.

**Principio variazionale.** Il cammino  $q(t)$  è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{L}$  sse

$$\mathcal{D}_h S[q] = 0, \quad \forall h \text{ incremento.}$$

**Dimostrazione.** Si svolge il limite. La differenza a numeratore risulta essere

$$S[q + \varepsilon h] - S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

si considera  $\varepsilon \approx 0$ , dunque si espande il primo termine per Taylor al prim'ordine in  $\varepsilon$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) + \partial_q \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \varepsilon h(t) + \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \varepsilon \dot{h}(t) + o(\varepsilon) dt.$$

pertanto si ha

$$S[q + \varepsilon h] - S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \partial_q \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \varepsilon h(t) + \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \varepsilon \dot{h}(t) + o(\varepsilon) dt.$$

integrando per parti  $\partial_{\dot{q}} \mathcal{L}$ :

$$S[q + \varepsilon h] - S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \partial_q \mathcal{L} \varepsilon h dt + \left[ \varepsilon \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} h \right]_{t_0}^{t_1} - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} h + o(\varepsilon) dt.$$

dato che  $h$  si annulla agli estremi allora il secondo addendo è nullo. Pertanto

$$S[q + \varepsilon h] - S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon [\partial_q \mathcal{L} - d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}] h + o(\varepsilon) dt.$$

dunque

$$\frac{S[q + \varepsilon h] - S[q]}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} [\partial_q \mathcal{L} - d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}] h + o(1) dt.$$

e la derivata risulta essere

$$\mathcal{D}_h S[q] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} [\partial_q \mathcal{L} - d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}] h(t) dt.$$

Se  $q(t)$  è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange, allora l'integrando è nullo e quindi l'integrale, e pertanto la derivata è nulla a sua volta per ogni  $h$ .

Viceversa, se la derivata è nulla, allora anche l'integrale è nullo per ogni  $h$ . Si vuole trovare un cammino  $q$  tale per cui l'integrale è nullo per ogni  $h$ . [r]

La dimostrazione è data da un lemma di analisi funzionale.

**Lemma.** Si consideri una funzione  $G(t)$  continua. Se

$$\int_{t_0}^{t_1} G(t) h(t) dt = 0, \quad \forall h.$$

allora  $G(t) \equiv 0$ . [r]

**Dimostrazione.** Per assurdo, si supponga che esiste  $t^* \in [t_0, t_1]$  tale per cui  $G(t^*) = 2A \neq 0$ . Senza perdita di generalità sia  $A > 0$ . Dato che la funzione è continua, allora è continua in un intorno. [r]

In tale intorno,  $A < G(t) < 3A$  per  $t \in [t^* - \delta, t^* + \delta]$ . L'assurdo a cui si arriva è trovare una funzione  $h$  per cui l'integrale non sia nullo. Infatti, già trovato tale intorno, i valori esterni sono

nulli; bisogna trovare una funzione  $h$  liscia che colleghi i punti esterni con  $G(t^*)$ . La funzione  $h$  è del tipo

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t^* - \delta) \\ L(t), & t \in [t^* - \delta, t^* - \frac{\delta}{2}) \\ 1, & t \in [t^* - \frac{\delta}{2}, t^* + \frac{\delta}{2}] \\ R(t), & t \in [t^* + \frac{\delta}{2}, t^* + \delta) \\ 0, & t \in [t^* + \delta, t_1] \end{cases}.$$

Si stima l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} G(t)h(t) dt = \int_{I_1}' + \int_{I_2} + \int_{I_3} + \int_{I_4} + \int_{I_5}'.$$

il secondo ed il quarto integrale è quello di una funzione positiva, dunque è positivo. [r] Per cui

$$\int_{t_0}^{t_1} Gh dt \geq \int_{I_3} Gh dt = \int_{I_3} G dt \geq \int_{I_3} A dt = A\delta > 0.$$

e qui si è trovato l'assurdo. [r]

### 10.1 Formulazione a più gradi di libertà

Si consideri il cammino  $q(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Quindi

$$\underline{q}(t_0) = \underline{q}^0, \quad \underline{q}(t_1) = \underline{q}^1.$$

L'incremento  $h : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  è tale per cui  $\underline{h}(t_0) = \underline{h}(t_1) = 0, \forall t$ . Pertanto

$$S[\underline{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t) dt.$$

$$S[\underline{q} + \varepsilon \underline{h}] - S[\underline{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^d \partial_{q_i} \mathcal{L} \varepsilon h_i + \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \varepsilon \dot{h}_i + o(\varepsilon) \right] dt.$$

si integra per parti e si ricorda che ogni  $h_i$  è nulla negli estremi. Pertanto si trova la derivata

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[\underline{q} + \varepsilon \underline{h}] - S[\underline{q}]}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^d \int_{t_0}^{t_1} [\partial_{q_i} \mathcal{L} - d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}] h_i dt.$$

[r]

Quando si è vista la famiglia di lagrangiane equivalenti si è detto che dato  $\mathcal{L}_1$ , allora

- $\mathcal{L}_2 = \alpha \mathcal{L}_1, \alpha \neq 0$
- $\mathcal{L}_2 = \alpha \mathcal{L}_1 + C$
- $\mathcal{L}_2 = \alpha \mathcal{L}_1 + d_t F(q, t)$

hanno tutte le stesse soluzioni. [r]

### Lecture 36

Si dimostra tale affermazione con il formalismo variazionale. Si divide il procedimento nelle tre parti sopra. Si dimostra che se  $q(t)$  è tale per cui

$$\mathcal{D}_h^{\mathcal{L}_1}[q] = 0, \quad \forall h$$

[r]

mar 21 dic  
2021 15:30

**Caso primo.** Si ha  $\mathcal{L}_2 = \alpha \mathcal{L}_1$ ,  $\alpha \neq 0$ . Si denoti

$$S_1[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_1(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

l'azione valutata sulla corrispondente lagrangiana. Si ha

$$\mathcal{D}_h^{\mathcal{L}_2}[q] = \alpha \mathcal{D}_h^{\mathcal{L}_1}[q]$$

dunque se la prima è zero, allora lo è anche la seconda e viceversa. [r]

**Caso secondo.** Si ha l'azione per la lagrangiana  $\mathcal{L}_2$

$$S_2[q] = \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}_1 + C)(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} C dt = S_1[q] + C(t_1 - t_0)$$

si calcola la derivata

$$\mathcal{D}_h^{\mathcal{L}_2}[q] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_2[q + \varepsilon h] - S_2[q]}{\varepsilon}$$

Si osserva il numeratore

$$S_2[q + \varepsilon h] = S_1[q + \varepsilon h] + C(t_1 - t_0), \quad S_2[q] = S_1[q] + C(t_1 - t_0)$$

pertanto

$$S_2[q + \varepsilon h] - S_2[q] = S_1[q + \varepsilon h] - S_1[q]$$

e quindi la derivata è identica.

**Caso terzo.** Si ha

$$S_2[q] = \alpha S_1[q] + \int_{t_0}^{t_1} d_t F(q(t), t) dt = \alpha S_1[q] + F(q(t_1), t_1) - F(q(t_0), t_0)$$

Inoltre

$$S_2[q + \varepsilon h] = S_1[q + \varepsilon h] + F(q(t_1) + \varepsilon h(t_1), t_1) - F(q(t_0) + \varepsilon h(t_0), t_0)$$

per cui

$$S_2[q + \varepsilon h] - S_2[q] = \alpha(S_1[q + \varepsilon h] - S_1[q])$$

[r]

## 11 Meccanica Hamiltoniana

**Integrale di Jacobi.** Si introduce l'integrale di Jacobi che è necessario per il formalismo Hamiltoniano.

Si consideri una lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . La funzione

$$d_t \left[ \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right] = -\partial_t \mathcal{L}$$

è l'integrale di Jacobi (solo la parte sulla sinistra).

Si nota che se  $\partial_t \mathcal{L}$  (cioè la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo) allora l'integrale (inteso come costante del moto) di Jacobi è costante del moto.

**Dimostrazione.** Infatti

$$d_t \left[ \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right] = \sum_{i=1}^d d_t (\partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \dot{q}_i) - d_t \mathcal{L} = \sum_{i=1}^d [(d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}) \dot{q}_i + \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \ddot{q}_i] - d_t \mathcal{L}$$

l'ultimo termine corrisponde a

$$d_t \mathcal{L} = \sum_{i=1}^d \partial_{q_i} \mathcal{L} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \ddot{q}_i + \partial_t \mathcal{L}$$

Dato che  $q(t)$  è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange, segue che  $\partial_{q_i} \mathcal{L} = d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}$ . Pertanto

$$d_t \left[ \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right] = \sum_{i=1}^d [(d_t \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}) \dot{q}_i + \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \ddot{q}_i] - \sum_{i=1}^d \partial_{q_i} \mathcal{L} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \ddot{q}_i - \partial_t \mathcal{L} = -\partial_t \mathcal{L}$$

Nel caso in cui la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, significa che l'integrale di Jacobi è una costante del moto.

Si nota che  $\mathcal{L} = K - U$ , segue  $\sum_{i=1}^d \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L} \dot{q}_i = 2K$  e l'integrale di Jacobi corrisponde all'energia meccanica. [r]

### 11.1 Introduzione

Il formalismo Hamiltoniano pone al centro l'integrale di Jacobi e ciò permette di ottenere le equazioni di Hamilton-Jacobi che hanno il pregio di essere già in forma normale e c'è un ruolo simmetrico tra le coordinate lagrangiane ed i [r] al prezzo di aver raddoppiato il numero delle variabili.

Non si guadagna molto a semplificare, ma è alla base di sviluppi di corsi successivi.

Già le equazioni di Eulero-Lagrange suggeriscono i passaggi per ottenere delle equazioni in forma normale. Accanto alle coordinate generalizzate, si vuole al posto di  $\ddot{q}$ , la derivata rispetto al tempo di un'altra variabile  $y = \dot{q}$ . Tuttavia, sembra conveniente utilizzare le variabili  $p = \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ , così che le equazioni di Eulero-Lagrange sono già in forma normale:

$$\begin{cases} \dot{q} = \phi(q, p, t) \\ \dot{p} = d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \end{cases}$$

[r] L'unico passaggio da capire è come scrivere la funzione  $\phi$  che si ottiene invertendo  $p = \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . Per far questo si utilizzano le trasformate di Legendre.

**Trasformata di Legendre.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  e convessa. Si definisce  $p(x) = d_x f(x)$ . Dato che  $f$  è convessa, allora  $p$  è monotona crescente e quindi invertibile:  $x = x(p)$ .

Si mostra che

$$x(p) = d_p g(p), \quad g(p) = [xp - f(x)]_{x=x(p)} = x(p)p - f(x(p))$$

dove  $g(p)$  è la trasformata di Legendre di  $f(x)$ . Infatti

$$d_p g(p) = d_p x(p) p + x(p) - \underbrace{d_x f}_{p} d_p x = x(p)$$

**Osservazione.** Si nota che la trasformata di Legendre è un'involutione. Se  $g(p)$  è la trasformata di Legendre di  $f(x)$  allora  $f(x)$  è la trasformata di Legendre di  $g(p)$ :

$$f(x) = [xp - g(p)]_{p(x)}$$

**Esempio.** Si consideri

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2, \quad p(x) = d_x f = \alpha x \rightsquigarrow x(p) = \frac{p}{\alpha}$$

Si ha

$$g(p) = [xp - f(x)]_{x=x(p)} = \frac{p}{\alpha}p - \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\alpha}$$

**Trasformata per più variabili.** Si supponga di avere più variabili e di voler ottenere la trasformata di Legendre per una di esse.

Sia  $f(x, y)$  una funzione. Si definisce  $p(x, y) = \partial_x f(x, y)$  da cui si ottiene invertendo  $x = \phi(p, y)$ . Pertanto, si ha

$$x = \partial_p g(p, y), \quad g(p, y) = [xp - f(x, y)]_{x=\phi(p, y)}$$

La dimostrazione è come precedentemente

$$g(p, y) = \phi(p, y)p - f(\phi(p, y), y) \rightsquigarrow \partial_p g = \partial_p \phi p + \phi - \partial_x f \partial_p \phi = \phi = x$$

Si osserva cosa succede quando si fa la derivata parziale di  $g$  rispetto alla variabile per cui non si è trasformato:

$$\partial_y g = p \partial_y \phi - \underbrace{\partial_x f}_{p} \partial_y \phi - \partial_y f = -\partial_y f(x, y)|_{x=\phi(p, y)}$$

## 11.2 Equazioni di Hamilton-Jacobi.

Si ritorna al problema originale. La lagrangiana in un grado di libertà [r]  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  convessa in  $\dot{q}$ . Posto  $p = \partial_{\dot{q}} \mathcal{L}$ ,  $f \leftrightarrow \mathcal{L}$  [r] La funzione  $g$  è chiamata Hamiltoniana

$$H(q, p, t) = [\dot{q}p - \mathcal{L}]_{\dot{q}=\phi(q, p, t)}$$

associata al sistema, essa è la trasformata di Legendre della lagrangiana rispetto a  $\dot{q}$ . Le equazioni sono in forma normale e più simmetriche rispetto a quelle di Eulero-Lagrange.

Per quanto fatto prima, si ha

$$\dot{q} = \partial_p H, \quad \dot{p} = d_t p = d_t \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} \stackrel{E-L}{=} \partial_q \mathcal{L} \Big|_{\dot{q}=\phi(q, p, t)} = -\partial_q H$$

La prima equazione è vera sempre, la seconda vale se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange e quindi si hanno le equazioni di Hamilton-Jacobi (vale anche il viceversa, se vale Hamilton, vale Lagrange).

Data  $H(q, p, t)$ , le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H \\ \dot{p} = -\partial_q H \end{cases}$$

i due formalismi sono equivalenti; tuttavia, con Hamilton, le equazioni sono in forma normale, sono simmetriche anche se sono il doppio.

Il passaggio a più gradi di libertà è immediato. [r] Si consideri una funzione  $f(x_1, \dots, x_d)$  tale che  $\det(\partial_{x_i x_j}^2 \mathcal{L}) \neq 0$ . Posta  $p_i = \partial_{x_i} f$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Allora

$$g(p_1, \dots, p_d) = \left[ \sum_{i=1}^d x_i p_i - f(x_1, \dots, x_d) \right]_{x=\phi(p)}$$

[r] Pertanto, l'Hamiltoniana risulta essere

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) = [\underline{\dot{q}} \cdot \underline{p} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)]_{\dot{q}=\phi(\underline{q}, \underline{p}, t)}, \quad p_i = \partial_{\dot{q}_i} \mathcal{L}$$

[r] Il tempo non viene trasformata con Legendre, dunque

$$\partial_t H = -\partial_t \mathcal{L}|_{\dot{q}=\phi(q,p,t)}$$

Valutando tale uguaglianza lungo il moto si ha

$$-\partial_t \mathcal{L}|_{\dot{q}=\phi} = d_t(\text{Integrale di Jacobi}) = d_t H$$

e l'integrale di Jacobi è proprio il termine dell'Hamiltoniana valutato in  $\dot{q} = \phi$ . Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono [r]

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \partial_{p_i} H \\ \dot{p}_i = -\partial_{q_i} H \end{cases}, \quad i = 1, \dots, d$$

## Lecture 37

gio 23 dic  
2021 15:30

**Esempio.** Si consideri la lagrangiana dell'oscillatore armonico

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

La coordinata  $p$  risulta essere

$$p = \partial_{\dot{q}} \mathcal{L} = m \dot{q} \iff \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Quindi l'hamiltoniana risulta essere

$$H(q, p) = \frac{p}{m} p - \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Dunque, le equazioni di Hamilton-Jacobi sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\partial_q H = -kq \end{cases}$$

**Esempio.** Si consideri la lagrangiana di un moto in un campo centrale. Le coordinate e le velocità sono

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

e risulta  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$ .

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - U(\rho)$$

Si associano due momenti coniugati:

$$\begin{aligned} p_\rho &= \partial_{\dot{\rho}} \mathcal{L} = m \dot{\rho} \implies \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ p_\theta &= \partial_{\dot{\theta}} \mathcal{L} = m \rho^2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m \rho^2} \end{aligned}$$

L'hamiltoniana associata risulta essere

$$\begin{aligned} H(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) &= [p_\rho \dot{\rho} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}]_{\dot{\rho}, \dot{\theta}} = p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\theta \frac{p_\theta}{m \rho^2} - \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{p_\rho}{m} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{p_\theta}{m \rho^2} \right)^2 \right) + U(\rho) \\ &= \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m \rho^2} + U(\rho) \end{aligned}$$



per cui

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \partial_{p_\theta} H = \frac{p_\theta}{m\rho^2} \\ \dot{\rho} = \partial_{p_\rho} H = \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{p}_\theta = -\partial_\theta H = 0 \\ \dot{p}_\rho = -\partial_\rho H = -\partial_\rho U - \frac{p_\theta^2}{m}\rho^3 \end{cases}$$

[r] La variabile  $\theta$  è ciclica, dunque  $p_\theta$  è un costante del moto. Pertanto, si può scrivere l'hamiltoniana ridotta

$$H(\rho, p_\rho) = H(\rho, p_\rho, p_\theta)_{p_\theta=c}$$

per cui dall'hamiltoniana originale si ottiene

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\rho_\theta^2}{2m\rho^2} + U(\rho)$$

diversamente dalla lagrangiana, con l'hamiltoniana si può identificare direttamente il potenziale efficace. [r]

**Esempio.** Si vede la lagrangiana di una particella carica in un campo elettromagnetico. Si consideri una particella di massa  $m$  in presenza di un campo elettrico  $E$  e di un campo magnetico  $B$ . La forza su di lei agente risulta

$$m\ddot{\underline{x}} = q\underline{E} + q(\dot{\underline{x}} \times \underline{B})$$

ricordando  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$  e  $\underline{E} = -\nabla\phi$  si ha

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\underline{x}}^2 - q\phi + q\dot{\underline{x}} \cdot \underline{A}$$

tuttavia, dati  $E$  e  $B$  esiste la scelta di gauge,  $\Lambda(\underline{x}, t)$ : infatti  $\underline{A}$  e  $\phi$  non sono unicamente determinate:

$$\begin{aligned} \underline{A}' &= \underline{A} + \nabla\Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda \end{aligned}$$

[r] Infatti

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\dot{\underline{x}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\partial_t\Lambda + \frac{q}{c}\dot{\underline{x}} \cdot (\underline{A} + \nabla\Lambda) = \frac{1}{2}\dot{\underline{x}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\dot{\underline{x}} \cdot \underline{A} + \frac{q}{c}(\partial_t\Lambda + \nabla\Lambda \cdot \dot{\underline{x}})$$

l'ultimo addendo è in più rispetto alla lagrangiana originale:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{q}{c}(\partial_t\Lambda + \nabla\Lambda \cdot \dot{\underline{x}}) = \mathcal{L} + d_t \left( \frac{q}{c}\Lambda(\underline{x}, t) \right)$$

[r] dunque la dinamica è la stessa. Si scrive l'hamiltoniana.

$$\underline{p} = \partial_{\dot{\underline{x}}}\mathcal{L} = m\dot{\underline{x}} + \frac{q}{c}\underline{A} \implies \dot{\underline{x}} = \frac{\underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A}}{m}$$

si ricorda che la derivata di un vettore è da intendere come le derivate componente per componente. Quindi

$$H(\underline{x}, \underline{p}) = [\underline{p} \cdot \dot{\underline{x}} - \mathcal{L}]_{\dot{\underline{x}}=\dots} = \frac{\underline{p}}{m} \left( \underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A} \right) - \frac{1}{2}m \left( \left\| \underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A} \right\|^2 \right) + \dots = \frac{\left\| \underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A} \right\|^2}{2m} + q\phi$$

## Lecture 38

lun 10 gen  
2022 16:30

Il formalismo Hamiltoniano introduce le variabili coniugate  $p$  accanto alle variabili  $q$ . Si hanno le coordinate canoniche  $(\underline{q}, \underline{p})$ .

**Osservazione.** Il sistema di equazioni di Hamilton si può scrivere in maniera compatta come

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\underline{q}} H \\ \partial_{\underline{p}} H \end{pmatrix}$$

la matrice è  $2n \times 2n$  divisa a blocchi  $n \times n$ . [r] come mettere le linee di divisione dei blocchi. La matrice è detta simplettica standard,  $E$ .

Si nota che  $E^\top = -E$  e  $E^{-1} = -E$  e quindi  $E^2 = -I$ .

Sia  $\underline{z} = (\underline{q} \quad \underline{p})^\top$ . Inoltre si usa la notazione

$$\nabla_{\underline{z}} H = (\partial_{q_1} H, \dots, \partial_{q_n} H, \partial_{p_1} H, \dots, \partial_{p_n} H)$$

Dunque le equazioni di Hamilton risultano essere

$$\dot{\underline{z}} = E \nabla_{\underline{z}} H$$

Si osserva che le equazioni sono scritte in forma normale dove il secondo membro è il campo vettoriale  $\underline{v}(\underline{z})$  che definisce il sistema di equazioni differenziali.

**Proposizione.** Si mostra che  $\nabla \cdot \underline{v}(\underline{z}) = 0$ .

**Dimostrazione.** Infatti

$$\nabla \cdot \underline{v}(\underline{z}) = \sum_{k=1}^{2n} \partial_{z_k} v(\underline{z})_k = \sum_{k=1}^{2n} \partial_{z_k} (E \nabla_{\underline{z}} H)_k = \sum_{k=1}^{2n} \partial_{z_k} \left( \sum_{j=1}^{2n} E_{kj} (\nabla_{\underline{z}} H)_j \right)$$

inoltre  $(\nabla_{\underline{z}} H)_j = \partial_{z_j} H$  pertanto

$$= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} E_{kj} \partial_{z_k} \partial_{z_j} H = 0$$

la somma è nulla perché vale  $E_{kj} = -E_{jk}$ .

### 11.3 Formulazione variazionale

Nel formalismo lagrangiano si è definito un funzoinale di azione: fissato un tempo iniziale ed uno finale, valutando la lagrangiana su di un certo cammino tra i due tempi; allora le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange sono quelle che rendono stazionarie il funzionale. [r]

Lo stesso si può fare con le equazioni di Hamilton. Si definisce il funzionale d'azione che dipende da due funzioni:

$$S[q, p] = \int_{t_0}^{t_1} (p\dot{q} - H) dt$$

questo perché la lagrangiana è la trasformata di Legendre dell'hamiltoniana. Nello spazio  $qp$ , ad un certo istante  $t_0$  si è fissato  $q_0$  ed a  $t_1$  si è fissato  $q_1$ , ma  $p$  può variare arbitrariamente. Nello spazio  $qp$  si cercano delle curve che rispettino le condizioni degli estremi per  $q$ . Dunque, si può riscrivere

$$q(t) \rightarrow q(t) + \varepsilon h(t), \quad p(t) \rightarrow p(t) + \varepsilon k(t)$$

così si è costruito l'analogo dello spazio dei cammini quando si è trattata la lagrangiana. Rimangono i vincoli  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ .

Si scrive il limite della differenza incrementale in  $\varepsilon$  di  $S$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[q + \varepsilon h, p + \varepsilon k] - S[q, p]}{\varepsilon}$$

La discussione è ad un grado di libertà, quella a più segue senza difficoltà. Si calcola il numeratore:

$$S[q + \varepsilon h, p + \varepsilon k] - S[q, p] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ (p + \varepsilon k)(\dot{q} + \varepsilon \dot{h}) - H(q + \varepsilon h, p + \varepsilon k) - (p\dot{q} - H(q, p)) \right] dt$$

si ricorda che  $q, p, h, k$  sono funzioni del tempo, lo si omette per notazione. Si espande al primo ordine in  $\varepsilon$ :

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \varepsilon(k\dot{q} + p\dot{h}) - \varepsilon(\partial_q H h + \partial_p H k) + \text{o.s.} \right] dt = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} k[\dot{q} - \partial_p H] - h[\dot{p} + \partial_q H] + \text{o.s.} dt$$

si utilizza il fatto che  $\int_{t_0}^{t_1} p\dot{h} dt = p h \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p} h dt$ . Si divide per  $\varepsilon$  e si prende il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[q + \varepsilon h, p + \varepsilon k] - S[q, p]}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} k[\dot{q} - \partial_p H] - h[\dot{p} + \partial_q H] dt$$

Si vuole dimostrare che  $q(t), p(t)$  sono soluzione per le equazioni di Hamilton sse rendono stazionario il funzionale di azione. La dimostrazione dell'implicazione diretta è immediata, perché si ha l'integrale di una funzione identicamente nulla. La dimostrazione dell'implicazione inversa è identica a quanto visto per il caso della lagrangiana.

## 11.4 Parentesi di Poisson

Si consideri una variabile dinamica, cioè una funzione delle coordinate valutata lungo il moto  $f(q, p, t)$ . Si considera  $f$  differenziabile quanto serve. Alcuni esempi di variabili dinamiche sono [r]  $U, H, q_i, p_i$ .

Dato due funzioni  $f(q, p, t)$  e  $g(q, p, t)$ , con  $n$  gradi di libertà, si definiscono le parentesi di Poisson  $\{f, g\}$  la funzione

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \partial_{q_j} f \partial_{p_j} g - \partial_{p_j} f \partial_{q_j} g$$

se si valutano  $f, g$  lungo il moto, dunque sono variabili dinamiche, allora pure le parentesi sono una variabile dinamica.

Ricordando  $\underline{z} = (\underline{q}, \underline{p})^\top$ ,  $E = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nabla_z f = \partial_z f = (\partial_q f, \partial_p f)^\top$ . Segue che le parentesi di Poisson si possono scrivere come

$$\{f, g\} = \langle \nabla_z f, E \nabla_z g \rangle$$

Infatti

$$E \nabla_z g = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_q g \\ \partial_p g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_p g \\ -\partial_q g \end{pmatrix}$$

e si ha

$$(\partial_q f \quad \partial_p f) \begin{pmatrix} \partial_p g \\ -\partial_q g \end{pmatrix} = \partial_q f \cdot \partial_p g - \partial_p f \cdot \partial_q g$$

si ricorda che si sta utilizzando la notazione compatta, ogni vettore è lungo  $2n$ .

**Proposizione.** Si vedono alcune proprietà delle parentesi di Poisson. Si considerino tre funzioni  $f, g, h$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 1 Antisimmetria:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ . Questo implica che  $\{f, f\} = 0$ .
- 2 Linearità:  $\{f + h, g\} = \{f, g\} + \{h, g\}$  e  $\{\alpha f, g\} = \alpha \{f, g\}$ .
- 3 Proprietà di Leibniz:  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ . Si nota che il prodotto è tra due funzioni e quindi è commutativo. Tuttavia, in meccanica quantistica, le parentesi di Poisson sono commutatori e la proprietà commutativa del prodotto non è sempre garantita; dunque, per abitudine, si mette la seconda funzione a destra nel prodotto.
- 4 Identità di Jacobi:  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ , la somma delle permutazioni cicliche è identicamente nulla.

**Proposizione.** Si scrive l'evoluzione di una variabile dinamica tramite le parentesi di Poisson. Data una certa funzione  $f(\underline{q}(t), \underline{p}(t), t)$ , variabile dinamica (quindi  $\underline{q}, \underline{p}$  soluzioni delle equazioni di Hamilton), si vuole studiare come essa varia lungo il moto. Si afferma

$$d_t f = \{f, H\} + \partial_t f$$

Infatti

$$d_t f = \sum_{j=1}^n \partial_{q_j} f \dot{q}_j + \partial_{p_i} f \dot{p}_i + \partial_t f$$

Sfruttando l'ipotesi che valgono le equazioni di Hamilton segue che

$$d_t f = \sum_{j=1}^n \partial_{q_j} f \partial_{p_j} H - \partial_{p_i} f \partial_{q_i} H + \partial_t f = \{f, H\} + \partial_t f$$

la sommatoria è proprio la parentesi di Poisson.

**Osservazione.** Si consideri una funzione che non dipende esplicitamente dal tempo  $f(\underline{q}, \underline{p})$ , da cui segue

- $\dot{f} = \{f, H\}$
- se  $\{f, H\} = 0$  allora  $\dot{f} = 0$  e la funzione  $f$  è una costante del moto (si ricorda che l'equazione delle parentesi di Poisson sopra affermata vale lungo il moto). Se la funzione  $f$  non dipende esplicitamente dal tempo allora vale anche il viceversa. Nel caso in cui  $f$  dipenda esplicitamente dal tempo, essa potrebbe comunque essere una costante del moto.
- Se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo  $H(\underline{q}, \underline{p})$  allora per la conseguenza precedente e per la proprietà di antisimmetria delle parentesi allora l'hamiltoniana è una costante del moto.

**Teorema.** di Poisson. Date due costanti del moto, ne si può trovare una terza tramite l'identità di Jacobi.

Siano  $f(\underline{q}, \underline{p})$  e  $g(\underline{q}, \underline{p})$  costanti del moto per un certa hamiltoniana  $H$ . Allora la funzione

$$h(\underline{q}, \underline{p}) = \{f, g\}$$

è costante del moto.

**Dimostrazione.** (L'identità di Jacobi vale per  $f, g, h$  arbitrarie. Dunque, vale pure per  $h$  come parentesi di Poisson. Questa frase non centra niente). Si usa l'identità di Jacobi su  $f, g, H$ :

$$\{H, \{f, g\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0$$

per l'ipotesi che  $f, g$  sono costanti del moto e quindi non dipendono esplicitamente dal tempo risulta  $\{g, H\} = \{H, f\} = 0$ , inoltre per una funzione  $k$  si ha  $\{k, 0\} = 0$ . Dunque, risulta che

$$\{H, \{f, g\}\} = 0$$

[r]  $H$  non può essere nulla, né  $\{f, g\}$  [r]

**Esercizio.** Il teorema è utile in alcuni casi, ma non sempre. Per costruire nuove costanti del moto si rende necessario che le costanti di partenza siano indipendenti tra loro.

Si studia il punto materiale libero. Considerati  $\underline{q} = (x, y, z)$  e  $\underline{p} = (p_x, p_y, p_z)$ , l'hamiltoniana risulta essere

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

dato che essa non dipende esplicitamente dal tempo segue che essa è una costante del moto. Si verifica che  $\{p_j, H\} = 0, \forall j$  e quindi ogni  $p_j$  è costante del moto. Considerando il momento angolare  $L_x = yp_x - zp_y$  si verifica che  $\{L_x, H\} = 0$ . Si sono trovate sette costanti del moto: l'hamiltoniana, il momento lineare ed il momento angolare (1+3+3). Tuttavia, non si è ancora applicato il teorema di Poisson. Prendendo a coppie le costanti del moto, si costruiscono altre costanti del moto. Ma ciò non va bene, perché già sette costanti sono troppe. Per esempio

$$\{p_x, p_y\} = 0, \quad \{L_z, H\} = 0, \quad \dots$$

ed è banale che sia costante del moto. Facendo le parentesi tra due componenti del momento angolare, si ottiene la componente restante.

## Lecture 39

[r] sistemare

Si dimostrano le quattro proprietà delle parentesi di Poisson.

mar 11 gen  
2022 15:30

**Antisimmetria.** Si vede il caso per  $n = 1$ . Si ha

$$\{f, g\} = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g = -(\partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g) = -\{g, f\}$$

Per  $n \geq 1$  si ha

$$\{f, g\} = \nabla f^\top E \nabla g = (E \nabla g)^\top \nabla f = \nabla g^\top E^\top \nabla f = -\nabla g^\top E \nabla f = -\{g, f\}$$

**Linearità.** Si consideri  $\{\alpha f + \beta g, h\}$ . Per  $n = 1$  si applica la linearità delle derivate

$$\partial_q(\alpha f + \beta g) \partial_p h - \partial_p(\alpha f + \beta g) \partial_q h = (\alpha \partial_q + \beta \partial_g) \partial_p h - (\alpha \partial_p f + \beta \partial_p g) \partial_q h = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\}$$

Per  $n \geq 1$  si ha

$$\begin{aligned} [\nabla(\alpha f + \beta g)]^\top E \nabla h &= (\alpha \nabla f + \beta \nabla g)^\top E \nabla h = \left[ \alpha (\nabla f)^\top + \beta (\nabla g)^\top \right] E \nabla h \\ &= \alpha \nabla f^\top E \nabla h + \beta \nabla g^\top E \nabla h = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\} \end{aligned}$$

la linearità vale anche per l'altra entrata grazie all'antisimmetria.

**Proprietà di Leibniz.** Per  $n = 1$  si ha

$$\partial_q(fg) \partial_p h - \partial_p(fg) \partial_q h = (f \partial_q g + \partial_q f g) \partial_p h - (f \partial_p g + \partial_p f g) \partial_q h = f \{g, h\} + \{f, h\} g$$

Per  $n \geq 1$  si ha

$$\{fg, h\} = (\nabla fg)^\top E \nabla h = (f \nabla g^\top + \nabla f^\top g) E \nabla h = f \{g, h\} + \{f, h\} g$$

**Lemma.** Si studia il gradiente di una parentesi di Poisson:

$$\nabla(\{g, h\}) = H_g E \nabla h - H_h E \nabla g$$

dove  $H$  è l'hessiana.

**Dimostrazione.** Si calcola la componente  $\gamma$ -esima del vettore gradiente delle parentesi. Essa è la derivata rispetto  $z_\gamma$ :

$$\begin{aligned}\partial_{z_\gamma} \{g, h\} &= \partial_{z_\gamma} (\nabla g^\top E \nabla h) = \partial_{z_\gamma} \left( \sum_{\alpha=1}^{2n} \partial_{z_\alpha} g (E \nabla h)_\alpha \right) = \partial_{z_\gamma} \left( \sum_{\alpha=1}^{2n} \partial_{z_\alpha} g \sum_{\beta=1}^{2n} E_{\alpha\beta} \partial_{z_\beta} h \right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{2n} \partial_{z_\gamma} (\partial_{z_\alpha} E_{\alpha\beta} \partial_{z_\beta} h) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2n} \partial_{z_\gamma z_\alpha}^2 g E_{\alpha\beta} \partial_{z_\beta} h + \partial_{z_\alpha} g E_{\alpha\beta} \partial_{z_\gamma z_\beta}^2 h \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{2n} (H_g)_{\gamma\alpha} E_{\alpha\beta} (\nabla h)_\beta + \dots = \sum_{\beta=1}^{2n} (H_g E)_{\gamma\beta} (\nabla h)_\beta + \dots \\ &= (H_g E \nabla h)_\gamma - (H_h E \nabla g)_\gamma\end{aligned}$$

per il termine sostituito dall'ellissi, si ricorda che  $E_{\alpha\beta} = -E_{\beta\alpha}$ .

**Identità di Jacobi.** Si utilizza il lemma precedente. Pertanto, per i tre addendi dell'identità si ha

- $(\nabla f)^\top E [H_g E \nabla h - H_h E \nabla g]$
- $(\nabla g)^\top E [H_h E \nabla f - H_f E \nabla h]$
- $(\nabla h)^\top E [H_f E \nabla g - H_g E \nabla f]$

L'identità diventa quindi

$$\begin{aligned} & (\nabla f)^\top E H_g E \nabla h - (\nabla f)^\top E H_h E \nabla g \\ & + (\nabla g)^\top E H_h E \nabla f - (\nabla g)^\top E H_f E \nabla h \\ & + (\nabla h)^\top E H_f E \nabla g - (\nabla h)^\top E H_g E \nabla f \end{aligned}$$

si raccolgono i termini con la stessa matrice hessiana

$$(\nabla f)^\top E H_g E \nabla h - (\nabla h)^\top E H_g E \nabla f + \dots$$

questo oggetto è identicamente nullo e così gli altri due. Inoltre, si osserva che

$$(E H E)^\top = E^\top H^\top E^\top = -E H (-E) = E H E$$

Dunque risulta

$$(\nabla f)^\top E H_g E \nabla h - [(\nabla f)^\top (E H_g E) \nabla h]^\top = (\nabla f)^\top E H_g E \nabla h - [(\nabla f)^\top (E H_g E) \nabla h] = 0$$

e così gli altri due termini.

## 11.5 Trasformazioni canoniche.

Si è visto che data una certa hamiltoniana  $H(q, p, t)$ , le equazioni del moto di Hamilton hanno una forma particolare

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H \\ \dot{p} = -\partial_q H \end{cases}$$

la struttura di tali equazioni è particolare, che non è scontata. Si consideri

$$\begin{cases} \dot{q} = 3q \\ \dot{p} = p^2 \end{cases}$$

ci si chiede se tale problema abbia forma hamiltoniana. Se fosse così, allora deve esistere una funzione  $H(q, p)$  tale per cui il problema si può scrivere come equazioni di Hamilton. Se tale funzione esiste allora

$$\dot{q} = 3q = \partial_p H \implies H(q, p) = 3qp + f(q)$$

Tuttavia, tale hamiltoniana non rispetta la seconda equazione del problema:

$$\dot{p} = -\partial_q H = p^2 \implies \partial_q(3pq + f(q)) = 3p + f'(q)$$

e non esiste una funzione che dipende solamente da  $q$  tale che si ottenga  $p^2$ . Questo significa che il sistema non è di forma hamiltoniana.

Si vogliono trovare delle trasformazioni di coordinate che siano buone (determinante jacobiana non nullo) e che preservino la natura hamiltoniana delle equazioni del moto. Non tutti i cambi di coordinate siano tali da preservare la struttura; quelli che preservano sono dette trasformazioni canoniche.

**Definizione.** Trasformazione canonica. Si considerino delle variabili  $(q, p)$  mappate a variabili  $(Q(q, p, t), P(q, p, t))$  tramite una trasformazione buona (cioè il determinante della jacobiana non sia nullo almeno in un aperto). Tale trasformazione è canonica se [r]  
per ogni hamiltoniana  $H(q, p, t)$  esista un'altra hamiltoniana  $K(Q, P, t)$  tale che

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H \\ \dot{p} = -\partial_q H \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{Q} = \partial_P K \\ \dot{P} = -\partial_Q K \end{cases}$$

il problema hamiltoniano si trasforma in un altro problema hamiltoniano. [r]

**Esempio.** Si consideri la trasformazione

$$(q, p) \rightarrow (Q = q + 3, P = p + 4), \quad \det J = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

[r]

Data una certa  $H$  la  $K$  corrispondente è

$$K(Q, P) = H(q, p), \quad \text{con } q = Q - 3, \quad p = P - 4$$

si controlla che si abbia nuovamente un problema hamiltoniano

$$\dot{Q} = d_t Q(q, p) = \partial_q Q \partial_t q = 1 \dot{q} + 0|_{\dot{q}=\dot{Q}}$$

Si controlla essere uguale a

$$\partial_P K = \partial_P H(q(Q, P), p(Q, P)) = \partial_q H \partial_P q + \partial_p H \partial_P p = \partial_p H = \dot{q}$$

[r] Tuttavia, questo metodo potrebbe non essere così banale.

Si ricorda che le soluzioni delle equazioni di Hamilton rendono stazionario del funzionale d'azione.

[r]

Se la trasformazione è canonica allora le nuove coordinate devono ancora rendere stazionario il funzionale di azione scritto in termini di  $Q$ ,  $P$  e  $K$ . Se questo è il caso, allora si può ignorare il fatto di preservare il problema hamiltoniano e si afferma che i due funzionali di azione devono essere equivalenti. Affinché essi lo siano, si rende necessario che essi ammettano una differenza di una funzione che dipende dal tempo [r]:

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + d_t F$$

dove  $P, Q, K, d_t F$  sono tutte funzioni di  $p, q$  e  $t$ . [r] Equivalentemente si afferma la trasformazione implica l'esistenza della funzione  $F$  di modo che valga l'uguaglianza

$$d_t F = (p\dot{q} - H) - (P\dot{Q} - K)$$

bisogna capire in che modo tale relazione è sufficiente per stabilire se la trasformazione è canonica. Se la trasformazione è canonica, allora la funzione  $F$  esiste. Si gira la domanda: conoscendo  $F$  si costruisce una famiglia di trasformazioni canoniche. [r]

Convien scegliere come variabili indipendenti le variabili  $q, Q$ . Per capire cosa si sta facendo si consideri il seguente esempio. Si consideri un punto  $R$  lontano dall'origine del piano cartesiano. Le coordinate di tale punto possono essere le coordinate cartesiane oppure quelle polari. Per identificare univocamente il punto si hanno più sistemi di coordinate. Tuttavia, si può anche dare una combinazione di tali due sistemi ad esempio con solo  $\theta$  e  $x$ . Questo cambio di coordinate è permesso qualora il determinante della jacobiana non è nullo in tale punto.

Dunque, operando la trasformazione a  $(q, Q)$ , le variabili dell'equazione sopra sono tutte funzioni di  $(q, Q)$ :

$$d_t F(q, Q, t) = \partial_q F \dot{q} + \partial_Q F \dot{Q} + \partial_t F \equiv (p(q, Q, t)\dot{q} - H) - (P\dot{Q} - K)$$

se la trasformazione vale allora segue

$$\begin{cases} p \equiv \partial_q F \\ P \equiv -\partial_Q F \\ K \equiv H + \partial_t F \end{cases}$$

data  $F(q, Q, t)$  quella precedente è una trasformazione canonica. La funzione  $F$  è detta funzione generatrice e tale tipo di trasformazione in cui le variabili sono  $q$  e  $Q$  sono dette trasformazioni di prima specie. Esistono tre specie che differiscono dalla scelta delle variabili indipendenti. [r] Si può operare la scelta di seconda specie: si scelgono le variabili indipendenti  $q$  e  $P$ . Dunque si ottiene

$$d_t F(q, P, t) = \partial_q F \dot{q} + \partial_P F \dot{P} + \partial_t F$$

tuttavia, ora non si può confrontare le espressioni termine a termine. [r] Quindi bisogna passare per un'altra strada. Data una funzione  $F$  le variabili dipendenti sono

$$\begin{cases} Q(q, P, t) = \partial_P F \\ p(q, P, t) = \partial_q F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

## Lecture 40

lun 17 gen  
2022 16:30

Una trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  è canonica quando conserva la struttura hamiltoniana del problema e si ha

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + d_t F$$

Per trasformazioni di prima specie le variabili indipendenti sono  $(q, Q)$  e quindi le altre sono funzioni di  $(q, Q, t)$ . Inoltre si ha

$$d_t F = \partial_q F \dot{q} + \partial_Q F \dot{Q} + \partial_t F$$

e per sostituzione si ottiene

$$\begin{cases} p = \partial_q F \\ P = -\partial_Q F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

**Osservazione.** Si sa che le equazioni di Hamilton si possono ricavare dalla condizione di stazionarietà del funzionale d'azione [r]. Ma tali equazioni si possono anche ricavare dalla stazionarietà di un altro funzionale d'azione:

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} (-q\dot{p} - H) dt$$



Per verificare la veridicità di tale affermazione si osserva se la differenza tra  $S[q, p]$  e  $\tilde{S}$  è una derivata totale di una funzione. Infatti

$$(p\dot{q} - H) - (-q\dot{p} - H) = p\dot{q} + q\dot{p} = d_t(pq)$$

**Funzioni generatrici di seconda specie.** Si studia la trasformazione di seconda specie. [r]  
Per le variabili nuove si utilizza la formulazione equivalente. Dunque si cerca una funzione  $F$  tale per cui

$$p\dot{q} - H = -Q\dot{P} - K + d_t F$$

esplicitando si ha

$$d_t F(q, P, t) = p\dot{q} - H + Q\dot{P} + K$$

dove  $p$  e  $Q$  sono funzioni di  $(q, P, t)$ . Quindi

$$d_t F = \partial_q F \dot{q} + \partial_P F \dot{P} + \partial_t F = p\dot{q} + Q\dot{P} + K - H, \quad \forall \dot{q}, \dot{P}$$

Se vale per ogni  $\dot{q}$  e  $\dot{P}$ , segue

$$\begin{cases} p = \partial_q F \\ Q = \partial_P F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

**Osservazione.** Esiste una trasformazione canonica importante che può essere generata da una trasformazione canonica di seconda specie: essa è la trasformazione identità

$$\begin{cases} Q = q \\ P = p \end{cases}$$

risulta banale che sia una trasformazione canonica. Considerato  $F(q, P) = qP$ , essa è una funzione generatrice di seconda specie che genera la trasformazione identità:

$$\begin{cases} p = \partial_q F = P \\ Q = \partial_P F = q \end{cases}$$

essa non è la trasformazione canonica, ma risulta banale esprimere le nuove coordinate in funzione delle vecchie:

$$\begin{cases} P = p \\ Q = q \end{cases}$$

**Osservazione.** Si è già detto per il caso lagrangiano che una buona trasformazione genera delle nuove equazioni del moto in forma lagrangiana. [r]

Data  $Q = f(q)$  si vuole sapere come esprimere  $P(q, p)$  di modo che la trasformazione sia canonica. [r]

Per essere una buona trasformazione di coordinate bisogna avere  $f' = d_q f \neq 0$ . Per ottenere la trasformazione canonica bisogna avere  $P = \frac{p}{f'(q)}$ . [r]

La funzione che la genera è di seconda specie  $F(q, P) = f(q)P$  e quindi la trasformazione è canonica. Infatti

$$\begin{cases} p = \partial_q F = f'(q)P \\ Q = \partial_P F = f(q) \end{cases} \implies P = \frac{p}{f'(q)}$$

[r]

**Trasformazioni di terza specie.** La coppia di variabili indipendenti è  $(p, Q)$  [r]. Gli integrandi nei funzionali d'azione sono invertiti:

$$-q\dot{p} - H = P\dot{Q} - K + d_t F = P\dot{Q} - K + \partial_p F \dot{p} + \partial_Q F \dot{Q} + \partial_t F$$

per cui si ha

$$\begin{cases} q = -\partial_p F \\ P = -\partial_Q F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

**Trasformazioni di quarta specie.** Le variabili indipendenti sono  $(p, P)$  e si ha [r]

$$-q\dot{p} - H = -Q\dot{P} - K + d_t F \leftrightarrow \begin{cases} q = -\partial_p F \\ Q = \partial_P F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

**Osservazione.** Si nota che le variabili piccole sono derivate di variabili piccole e così per quelle grandi; ciò che cambia è il segno. Seconda e terza specie hanno segno concorde; prima e quarta discorde.

Inoltre, l'hamiltoniana nuova è sempre quella vecchia più una derivata temporale.

**Più gradi di libertà.** L'ultimo passaggio da compiere è quello di passare a più gradi di libertà.

Si studia solamente per una specie perché per le altre è uguale.

Si consideri una trasformazione di  $n$  variabili. Si cercano funzioni generatrici di prima specie

$$F(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t)$$

Si parte dalla formulazione variazionale. I due integrali nel funzionale d'azione sono

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + d_t F$$

si svolge la derivata totale

$$d_t F = \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} F \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \partial_{Q_i} F \dot{Q}_i + \partial_t F$$

e si confronta termine per termine

$$\begin{cases} p_i = \partial_{q_i} F \\ P_i = -\partial_{Q_i} F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

lo stesso si fa per le altre specie.

Si estende a più gradi di libertà le due osservazioni per le trasformazioni di seconda specie.

**Prima osservazione.** Si consideri la trasformazione identità

$$\begin{cases} Q_i = q_i \\ P_i = p_i \end{cases}$$

ammette una funzione generatrice di seconda specie

$$F(\underline{q}, \underline{P}) = \sum_{i=1}^n q_i P_i$$

la cui trasformazione canonica è

$$\begin{cases} p_i = \partial_{q_i} F \\ Q_i = \partial_{P_i} F \\ K = H + \partial_t F \end{cases}$$

**Teorema.** delle trasformazioni di contatto. [r] Si consideri la trasformazione di contatto

$$\begin{cases} Q_i = f_i(q_1, \dots, q_n) \\ P_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}(\underline{q}) p_k \end{cases}$$

Essa è una trasformazione canonica sse  $A^{-1} = J_{q \rightarrow Q}^\top$ . Tale trasformazione può essere generata da una funzione generatrice di seconda specie

$$F(\underline{q}, \underline{P}) = \sum_{j=1}^n f_j(\underline{q}) P_j$$

Il teorema dà il risultato corretto qualora  $Q_i = f_i(\underline{q}) = q_i$ .

**Seconda osservazione.** Si estende il caso a più dimensioni. Ci si aspetta che  $P$  sia lineare nelle  $p_i$  e quindi può essere una matrice che dovrebbe dipendere dalla jacobiana.

La trasformazione non deve essere singolare, cioè il determinante della jacobiana  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  sia diverso da zero. La jacobiana una matrice  $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} \partial_{q_i} Q_j & \partial_{p_i} Q_j \\ \partial_{q_i} P_j & \partial_{p_i} P_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{q_i} f_j & 0 \\ \partial_{q_i} P_j & A \end{pmatrix}$$

[r] Da cui se il determinante della jacobiana deve essere diverso da zero allora

$$\det(J_{q \rightarrow Q}) \neq 0, \quad \det(A) \neq 0$$

[r] Altrimenti si può cercare una funzione generatrice di seconda specie  $F(\underline{q}, \underline{P})$  in modo che generi la trasformazione di contatto. [r]

Se la funzione generatrice genera la trasformazione di contatto allora

$$\partial_{P_1} F = f_1(\underline{q}) \implies F = f_1(\underline{q}) P_1 + \phi_1(\underline{q}, P_2, \dots, P_n)$$

per il secondo termine si sostituisce quanto trovato e si ha

$$\partial_{P_2} F = f_2(\underline{q}) = \partial_{P_2} \phi_1(\underline{q}) \implies \phi_1 = f_2(\underline{q}) P_2 + \phi_2(\underline{q}, P_3, \dots, P_n)$$

[r] continuando così si ha che

$$F = \sum_{i=1}^n f_i(\underline{q}) P_i + \psi(\underline{q})$$

Si utilizza il fatto che  $P$  è una funzione lineare in  $p_i$  [r].

Si ha

$$P_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} p_k \iff \underline{P} = A \underline{p} \iff \underline{p} = A^{-1} \underline{P}$$

[r] dalla funzione generatrice si trova  $\underline{p}$ . Infatti

$$p_j = \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{jk} P_k = \partial_{q_j} F$$

sostituendo la funzione generatrice si ha

$$\partial_{q_j} F = \sum_{k=1}^n \partial_{q_j} f_k(\underline{q}) P_k + \partial_{q_j} \psi(\underline{q})$$

deve valere l'uguaglianza affinché [r] e allora la trasformazione è canonica. Dunque deve risultare

$$\partial_{q_j} \psi(\underline{q}) = 0, \quad \forall j \implies \psi(\underline{q}) = \text{cost} = c$$

che si può prendere arbitrariamente pari a zero perché la funzione generatrice è definita a meno di costante. [r] Inoltre

$$(A^{-1})_{jk} = \partial_{q_j} f_k = J_{kj} = (J^T)_{jk}$$

[r]

**Ricerca di funzioni generatrici.** Data una trasformazione canonica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , si vuole sapere quale specie di funzioni generatrici esistono che generano tale trasformazione. Sia

$$J = \begin{pmatrix} \partial_q Q & \partial_p Q \\ \partial_q P & \partial_p P \end{pmatrix}$$

la matrice jacobiana della trasformazione. [r]

Si cerca una trasformazione di prima specie  $(q, p) \rightarrow (q, Q)$  che si può fare quando la trasformazione è non singolare ( $\det J \neq 0$ ). Dunque

$$\det J_{(q,p) \rightarrow (q,Q)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_q Q & \partial_p Q \end{pmatrix}$$

il determinante è diverso da zero quando  $\partial_p Q \neq 0$ . [r] Per le altre specie, il ragionamento è analogo.

Si consideri la seconda specie:  $(q, P)$ . La trasformazione  $(q, p) \rightarrow (q, P)$  si può fare quando  $\det J \neq 0$ . Quindi

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_q P & \partial_p P \end{pmatrix} = \partial_p P \neq 0$$

[r] Per più gradi di libertà si considera il determinante delle sotto-matrici.

$$J = \begin{pmatrix} \partial_q Q & \partial_p Q \\ \partial_q P & \partial_p P \end{pmatrix}$$

Seguendo una figura ad "N", partendo da in alto a destra, si può determinare quali tipi di trasformazioni esistono (alto destra: I specie; basso destra: II specie; alto sinistra: III specie; basso sinistra: IV specie).

## Lecture 41

Si vuole verificare se una trasformazione sia canonica.

mar 18 gen  
2022 15:30

**Teorema.** Si consideri una trasformazione di coordinate  $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$  che non dipende esplicitamente dal tempo. La trasformazione è canonica sse preserva le parentesi di Poisson fondamentali.

Considerate delle funzioni  $Q_j(\underline{q}, \underline{p})$  e  $P_k(\underline{q}, \underline{p})$ . Si valutano tra ogni possibile coppia le parentesi di Poisson:

$$\begin{aligned} \{Q_j, Q_k\} &= 0 \\ \{P_j, P_k\} &= 0 \\ \{Q_j, P_k\} &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

queste sono le parentesi di Poisson fondamentali. [r]

La trasformazione identità conserva tali parentesi di Poisson.

**Dimostrazione.** Si consideri una dimensione  $n = 1$ . Le coordinate sono  $Q(q, p)$  e  $P(q, p)$ . Le parentesi sono

$$\begin{aligned}\{Q, Q\} &= 0 \\ \{P, P\} &= 0 \\ \{Q, P\} &=?\end{aligned}$$

La trasformazione è canonica quando preserva il carattere hamiltoniano delle equazioni del moto. La trasformazione non dipende dal tempo e quindi  $\dot{Q} = \{Q, H\}$ , dove  $H$  è l'hamiltoniana delle coordinate originali. Dunque

$$\dot{Q} = \{Q, H\} = \partial_q Q \partial_p H - \partial_p Q \partial_q H$$

l'hamiltoniana  $H(q, p) = K(Q(q, p), P(q, p))$  [r] Si ha

$$\partial_q H = \partial_Q K \partial_q Q + \partial_P K \partial_p P$$

sostituendo si ha

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \partial_q Q [\partial_Q K \partial_p Q + \partial_P K \partial_p P] - \partial_p Q [\partial_Q K \partial_q Q + \partial_P K \partial_q P] \\ &= \partial_Q K [\partial_q Q \partial_p Q - \partial_p Q \partial_q Q] + \partial_P K [\partial_q Q \partial_p P - \partial_p Q \partial_q P] \\ &= \partial_P K \{Q, P\}\end{aligned}$$

similmente

$$\dot{P} = \{P, H\} = \partial_Q K \{P, Q\}$$

se le parentesi sono conservate allora  $\{Q, P\} = 1 = -\{P, Q\}$  e si mantengono le equazioni di hamilton (e viceversa).

Si consideri  $n \geq 1$ . Si utilizza la notazione compatta

$$\underline{Z}^\top = (z_1, \dots, z_{2n}) = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$$

Allora si ha

$$\{Z_\alpha, Z_\beta\} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}$$

dunque, preservare le parentesi significa affermare che tale matrice è la matrice symplettica standard. Si procede allo stesso modo.

$$\dot{Z}_\alpha = \{Z_\alpha, H\} = \langle \nabla_z Z_\alpha, E \nabla_z H \rangle = \sum_{j,k=1}^{2n} \partial_{z_j} Z_\alpha E_{jk} \partial_{z_k} H$$

si riscrive  $H$  come un'hamiltoniana  $K$  valutata nel cambio di coordinate e come precedentemente

$$\partial_{z_k} H = \sum_{l=1}^{2n} \partial_{Z_l} K \partial_{z_k} Z_l$$

pertanto

$$\begin{aligned}\dot{Z}_\alpha &= \sum_{j,k=1}^{2n} \partial_{z_j} Z_\alpha E_{jk} \sum_{l=1}^{2n} \partial_{Z_l} K \partial_{z_k} Z_l \\ &= \sum_{l=1}^{2n} \partial_{Z_l} K \sum_{j,k=1}^{2n} \partial_{z_k} Z_\alpha E_{kj} \partial_{z_j} Z_l = \sum_{l=1}^{2n} \partial_{Z_l} K \{Z_\alpha, Z_l\}\end{aligned}$$

Per avere forma hamiltoniana, le equazioni trasformate devono avere la forma

$$\underline{\dot{Z}} = E \nabla_Z K$$

quindi significa che

$$E_{\alpha l} = \{Z_\alpha, Z_l\}$$

e viceversa.

**Esempio.** Si consideri la trasformazione

$$\begin{cases} Q = p^\alpha \cosh(2\gamma q) \\ P = \beta p^\alpha \sinh q \end{cases}$$

Si vede per quali valori dei parametri, la trasformazione è canonica.

$$\begin{aligned} \partial_q Q &= p^\alpha 2\gamma \sinh(2\gamma q) \\ \partial_p Q &= \alpha p^{\alpha-1} \cosh(2\gamma q) \\ \partial_q P &= \beta p^\alpha \cosh q \\ \partial_p P &= \alpha \beta p^{\alpha-1} \sinh q \end{aligned}$$

pertanto

$$\{Q, P\} = \partial_q Q \partial_p P - \partial_p Q \partial_q P = 2\alpha\beta\gamma p^{2\alpha-1} \sinh(2\gamma q) \sinh q - \alpha\beta p^{2\alpha-1} \cosh(2\gamma q) \cosh q \equiv 1$$

Si deve avere

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -2, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

per cui la trasformazione finale risulta essere

$$\begin{cases} Q = \sqrt{p} \cosh q \\ P = -2\sqrt{p} \sinh q \end{cases}$$

**Esempio.** Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2} q_1 \frac{p_2}{q_2} \\ Q_2 = 2q_1 q_2 \frac{p_1}{p_2} + q_2^2 \\ P_1 = 2p_1 \frac{q_2}{p_2} \\ P_2 = \frac{1}{2} \frac{p_2}{q_2} \end{cases}$$

Per dimostrare che sia una trasformazione canonica si fanno le parentesi di Poisson incrociate. (Parte fatta ad esercitazione). Dunque

$$\begin{aligned} \{Q_1, P_1\} &= \left\{ \frac{p_2 q_1}{q_2}, \frac{p_1 q_2}{p_2} \right\} = \left[ \frac{p_2}{q_2} \frac{q_2}{p_2} - 0 \right] + \left[ \frac{p_2 q_1}{q_2^2} \frac{p_1 q_2}{p_2^2} - \frac{q_1}{q_2} \frac{p_1}{p_2} \right] = 1 \\ \{Q_1, P_2\} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{p_2 q_1}{q_2}, \frac{p_2}{q_2} \right\} = \frac{1}{4} \left[ \frac{p_2}{q_2} \cdot 0 - 0 \right] + \left[ -\frac{p_2 q_1}{q_2^2} \frac{1}{q_2} - \frac{q_1}{q_2} \left( -\frac{p_2}{q_2^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

e così le altre. Si cerca quali specie di funzioni generatrici sono ammesse dalla trasformazione osservando la jacobiana della trasformazione

$$J = \begin{bmatrix} \partial_{p_1} Q_1 = 0 & \partial_{p_2} Q_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1}{q_2} \\ \partial_{p_1} Q_2 = 2 \frac{q_1 q_1}{p_2} & \partial_{p_2} Q_2 = -2 \frac{p_1 q_1 q_2}{p_2^2} \\ \partial_{p_1} P_1 = 2 \frac{q_2}{p_2} & \partial_{p_2} P_1 = -2 \frac{p_1 q_2}{p_2^2} \\ \partial_{p_1} P_2 = 0 & \partial_{p_2} P_2 = \frac{1}{2} q_2 \end{bmatrix}$$

le altre per esercizio. Si cerca la funzione generatrice di prima specie

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) \rightsquigarrow \begin{cases} p_1 = \partial_{q_1} F \\ p_2 = \partial_{q_2} F \\ P_1 = -\partial_{Q_1} F \\ P_2 = -\partial_{Q_2} F \end{cases}$$

Tramite manipolazioni algebriche si ottiene [r]

$$\frac{P_1}{p_2} = \frac{Q_2 - q_2^2}{2q_1q_2}, \quad P_2 = 2\frac{Q_1q_2}{q_1}, \quad P_1 = \frac{Q_2 - p_2^2}{q_1^2}Q_1$$

pertanto, la trasformazione diventa

$$\begin{cases} \partial_{q_1} F = \frac{Q_2 - q_2^2}{q_1^2} Q_1 = p_1 \\ \partial_{q_2} F = 2\frac{Q_1q_2}{q_1} = p_2 \\ \partial_{Q_1} F = -\frac{Q_2 - q_2^2}{q_1} = -P_1 \\ \partial_{Q_2} F = -\frac{Q_1}{q_1} = -P_2 \end{cases}$$

Il differenziale della funzione generatrice risulta essere

$$\begin{aligned} dF &= p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - P_1 dQ_1 - P_2 dQ_2 \\ &= \frac{Q_2 - q_2^2}{q_1^2} Q_1 dq_1 + 2\frac{Q_1q_2}{q_1} dq_2 - \frac{Q_2 - q_2^2}{q_1} dQ_1 - \frac{Q_1}{q_1} dQ_2 \end{aligned}$$

si può vedere a occhio che

$$F = -\frac{Q_2 - q_2^2}{q_1} Q_1$$

altrimenti si può operare per integrazione. Infatti, dalla seconda equazione si ha

$$F = \frac{q_2^2}{q_1} Q_1 + \xi(q_1, Q_1, Q_2)$$

dalla quarta equazione

$$\partial_{Q_2} F = \partial_{Q_2} \xi = -\frac{Q_1}{q_1} \implies \xi = -\frac{Q_1 Q_2}{q_1} + \zeta(q_1, Q_1)$$

dalla terza

$$\partial_{Q_1} F = -\frac{Q_2}{q_1} + \frac{q_2^2}{q_1} \equiv \frac{q_2^2}{q_1} - \frac{Q_2}{q_1} + \partial_{Q_1} \zeta \implies \partial_{Q_1} \zeta = 0$$

dalla prima

$$F = \frac{1}{q_1} (q_2^2 - Q_2) Q_1 + \eta(q_1)$$

dove si pone  $\eta(q_1) = 0$ . (Fine della parte di esercitazione).

Come si deduce dalla jacobiana, questa trasformazione ammette anche una funzione generatrice di seconda specie. Si cerca tale funzione generatrice

$$F(q_1, q_2, P_1, P_2) \rightsquigarrow \begin{cases} Q_1 = \partial_{P_1} F \\ Q_2 = \partial_{P_2} F \\ p_1 = \partial_{q_1} F \\ p_2 = \partial_{q_2} F \end{cases}$$

dalla funzione generatrice si ottiene come valgono le variabili dipendenti.

Si estrapolano le variabili dipendenti in funzione di quelle indipendenti dalla trasformazione di coordinate data. Dalla quarta equazione si ha  $p_2 = 2P_2q_2$ ; nella prima equazione si ha  $Q_1 = q_1P_2$ ; nella terza si ha  $p_1 = P_1P_2$ ; nella seconda si ha  $Q_2 = q_1P_1 + q_2^2$ . Dunque

$$\begin{cases} Q_1 = q_1P_2 \\ Q_2 = q_1P_1 + q_2^2 \\ p_1 = P_1P_2 \\ p_2 = 2P_2q_2 \end{cases}$$

Quindi

$$Q = \partial_{P_1} F = q_1 P_2 \implies F = q_1 P_1 P_2 + \phi(q_1, q_2, P_2)$$

Per la terza si ha

$$p_1 = \partial_{q_1} F = P_1 P_2 + \partial_{q_1} \phi \equiv P_1 P_2 \implies \phi = \phi(q_2, P_2)$$

Per la quarta equazione

$$p_2 = \partial_{q_2} F = \partial_{q_2} \phi \equiv 2q_2 P_2 \implies \phi(q_2, P_2) = q_2^2 P_2 + f(P_2)$$

Per la seconda equazione

$$Q_2 = \partial_{P_2} F = q_1 P_1 + q_2^2 + d_{P_2} f(P_2) \equiv q_1 P_1 + q_2^2 \implies f(P_2) = \text{cost.}$$

Pertanto

$$F(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1 P_1 P_2 + q_2^2 P_2$$

si prende la costante pari a zero.

## 11.6 Trasformazioni infinitesime.

[r] Si consideri una famiglia di trasformazioni che dipende da un parametro  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo. Quando tale parametro è nullo, ogni trasformazione è la trasformazione identità:

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon A(q, p) + o(\varepsilon) \\ P = p + \varepsilon B(q, p) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

questa è la trasformazione infinitesima (essa è la perturbazione di una trasformazione identità). Si cercano quali condizioni bisogna avere su  $A$  e  $B$  di modo che tale trasformazione sia canonica al prim'ordine in  $\varepsilon$ .

Per costruzione, per  $\varepsilon = 0$  la trasformazione è canonica e la funzione generatrice è di seconda specie:

$$F_0(q, P) = qP$$

Dunque si cerca una funzione generatrice di seconda specie

$$F(q, P) = qP + \varepsilon F_1(q, P) + o(\varepsilon)$$

Pertanto

$$\begin{cases} Q = \partial_P F = q + \varepsilon \partial_P F_1 + o(\varepsilon) \\ p = \partial_q F = P + \varepsilon \partial_q F_1 + o(\varepsilon) \end{cases}$$

Si vuole confrontare con la trasformazione di coordinate data. Si ricava  $Q$  e  $P$  in funzione di  $q$  e  $p$ . Dunque

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon \partial_P F_1(q, P) + o(\varepsilon) \\ P = p - \varepsilon \partial_q F_1(q, P) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

tuttavia, le due derivate sono ancora funzioni di  $q$  e  $P$ . Dunque non si possono confrontare direttamente con  $A$  e  $B$ . Però, si osserva che  $P - p$  è di ordine  $\varepsilon$  (cioè è un  $O(\varepsilon)$ ). Pertanto,  $P = p + O(\varepsilon)$  ed i termini che provengono dalla derivazione che contengono  $\varepsilon$  vengono poi moltiplicati ancora per  $\varepsilon$  e quindi sono  $o(\varepsilon)$ . Quindi

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon \partial_P F_1(q, p) + o(\varepsilon) \\ P = p - \varepsilon \partial_q F_1(q, p) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

a questo punto si può operare il confronto.

Pertanto, la trasformazione infinitesima è canonica se

$$\begin{cases} A(q, p) = \partial_p F_1(q, p) \\ B(q, p) = -\partial_q F_1(q, p) \end{cases}$$



## Lecture 42

gio 20 gen  
2022 15:30

**Esempio.** Si consideri la trasformazione generatrice di seconda specie

$$F(q, P) = qP + \varepsilon(aqP^3 + bq^3P + cq^4)$$

essa è la funzione generatrice di una trasformazione infinitesima:

$$\begin{cases} Q = \partial_P F = q + \varepsilon(3aqP^2 + bq^3) \\ p = \partial_q F = P + \varepsilon(aP^3 + 3bq^2P + 4cq^3) \end{cases}$$

Si trovano  $Q$  e  $P$  in funzione di  $q$  e  $p$ . Questo non è possibile farlo in maniera esplicita. Tuttavia, è solamente necessario il primo ordine in  $\varepsilon$  che non è difficile da ottenere. Considerato

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon(3aqP^2 + bq^3) \\ P = p - \varepsilon(aP^3 + 3bq^2P + 4cq^3) \end{cases}$$

Posto  $P = p - O(\varepsilon)$  si ha

$$Q = q + \varepsilon[3aq(p - O(\varepsilon))^2 + bq^3] = q + \varepsilon[3aqp^2 + bq^3] + o(\varepsilon)$$

e similmente per  $P$ . Quindi

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon(3aqp^2 + bq^3) + o(\varepsilon) \\ P = p - \varepsilon(ap^3 + 3bq^2p + 4cq^3) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

**Osservazione.** Si consideri una trasformazione canonica infinitesima. Si può scrivere una trasformazione generatrice di seconda specie

$$F = qP + \varepsilon F_1(q, P) + o(\varepsilon)$$

che genera

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon \partial_P F_1(q, p) + o(\varepsilon) \equiv q(\varepsilon) \\ P = p - \varepsilon \partial_q F_1(q, p) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

questa è una famiglia di trasformazioni che dipende dal parametro  $\varepsilon$ . Si studia il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Q - q}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q(\varepsilon) - q(0)}{\varepsilon} = d_\varepsilon q(\varepsilon = 0) \equiv \partial_P F_1$$

Quindi

$$\begin{cases} d_\varepsilon q(\varepsilon) = \partial_P F_1 \\ d_\varepsilon p(\varepsilon) = -\partial_q F_1 \end{cases}$$

che ricordano le equazioni di Hamilton per  $\varepsilon = t$  e  $F_1 = H$ . [r]

Le equazioni di Hamilton generano una famiglia di trasformazioni infinitesime che, per costruzione, sono canoniche. L'evoluzione temporale [r] è la trasformazione canonica.

Una prima conseguenza è la conservazione del volume nello spazio delle fasi.

**Lemma.** Se  $(\underline{Q}, \underline{P})$  è una trasformazione canonica allora  $\det J_{(q,p) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P})} = \pm 1$ .

**Dimostrazione.** Una trasformazione è canonica se le parentesi di Poisson sono conservate cioè

$$\{Z_\alpha, Z_\beta\} = E_{\alpha\beta} = \sum_{k,j=1}^{2n} \partial_{z_k} Z_\alpha E_{kj} \partial_{z_j} Z_\beta = (J_{z \rightarrow Z} E J_{z \rightarrow Z}^\top)_{\alpha\beta}$$

Dunque la trasformazione canonica implica

$$J E J^\top = E$$

ed il determinante delle due matrici è identico

$$\det(J E J^\top) = \det E \iff (\det J)(\det E)(\det J^\top) = 1 \iff (\det J)^2 = 1$$

**Teorema.** di Liouville. [r] Si consideri una famiglia di trasformazioni di coordinate  $\phi^t : (q_0, p_0) \rightarrow (q_t, p_t)$ . Si è visto che tale trasformazione è canonica. Un volume nello spazio delle fasi di partenza è preservato dalla trasformazione. [r]

**Dimostrazione.** Infatti

$$\text{Vol}(D_t) = \int_{D_t} dq_t dp_t = \int_{D_0} dq_0 dp_0 |\det J_{\phi^t}|$$

la relazione è soddisfatta se  $\det J_{\phi^t} = \pm 1$ . [r]

Si ricorda che la trasformazione è canonica e dunque, per il lemma, si ottiene la tesi.

**Proposizione.** La composizione di due trasformazioni canoniche è anch'essa canonica. [r]

**Dimostrazione.** Se le trasformazioni  $A$  e  $B$  sono canoniche allora  $J_A E J_A^\top = E$  e  $J_B E J_B^\top = E$ . Dunque  $A \circ B$  è canonica e  $J_{A \circ B} = J_A J_B$ . Infatti

$$J_{A \circ B} E J_{A \circ B}^\top = J_A J_B E J_B^\top J_A^\top = J_A (J_B E J_B^\top) J_A^\top = J_A E J_A^\top = E$$

## Lecture 43

lun 24 gen  
2022 14:30

### 11.7 Teorema di Noether

Tra le conseguenze dirette di avere identificato le trasformazioni canoniche infinitesime si ha il teorema di Liouville e di Noether con il formalismo hamiltoniano.

Nel formalismo lagrangiano, il teorema di Noether afferma che ad una simmetria si associa una costante del moto.

**Definizione.** Se, fissato  $s \in I$ , la trasformazione  $(q, p) \xrightarrow{G(s)} (Q, P)$  è canonica, allora  $G(q, p, s)$  è una famiglia ad 1 parametro di trasformazioni canoniche.

La funzione  $G$  è detta gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche se

- 1)  $G(q, p, 0)$  è la trasformazione identità
- 2)  $G(q, p, -s) = G^{-1}(q, p, s)$
- 3) legge di composizione di gruppo; considerata una trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q, P) = G(q, p, s_1)$  con  $s_1$  fissato; e considerata una trasformazione  $(Q, P) \rightarrow (Q', P') = G(Q, P, s_2)$ , con  $s_2$  fissato; allora la trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q', P')$  è ancora una trasformazione canonica elemento della famiglia di trasformazioni, con parametro  $s_3 = s_1 + s_2$ :

$$G(G(q, p, s_1), s_2) = G(q, p, s_3 = s_1 + s_2)$$

- 4) Per ogni  $q, p$  fissati, la trasformazione è derivabile rispetto ad  $s$ .

Per  $s \approx 0$ , è evidente queste proprietà inducono  $G$  ad essere una famiglia di trasformazioni canoniche infinitesime. [r]

Si ricorda che considerata  $F$  una funzione generatrice di seconda specie, la sua scritta infinitesima è

$$F(q, P, s) = qP + sF_1(q, P) + o(s)$$

la famiglia di trasformazioni canoniche generate è

$$\begin{cases} Q = q + s \partial_p F_1(q, p) + o(s) \\ P = p - s \partial_q F_1(q, p) + o(s) \end{cases}$$

**Definizione.** Si definisce cos'è una simmetria per un'hamiltoniana.

Un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche è detto simmetria una certa hamiltoniana  $H$  se

$$H(G(q, p, s)) = H(q, p), \quad \forall s \in I$$

cioè l'hamiltoniana in funzione di  $Q, P$  scritte come funzioni di  $q, p$  dev'essere identica alla vecchia hamiltoniana in funzione di  $q, p$ .

Dicasi simmetria infinitesima se l'uguaglianza non è stretta, ma vale a meno di  $o(s)$

$$H(Q(q, p, s), P(q, p, s)) - H(q, p) = o(s)$$

**Teorema.** di Noether. Il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche  $G$  è una simmetria infinitesima per  $H$  sse  $F_1$  è costante del moto.

**Dimostrazione.** Si consideri l'hamiltoniana  $H$  per cui  $G$  sia una simmetria infinitesima. Si sviluppa  $H$  nell'intorno di  $s = 0$ :

$$H(Q(q, p, s), P(q, p, s)) = H(q, p) + \partial_q H \partial_p F_1 s - \partial_p H \partial_q F_1 s + o(s)$$

[r] Pertanto

$$H(Q(q, p, s), P(q, p, s)) - H(q, p) = s \{H, F_1\} + o(s)$$

se  $G$  è una simmetria infinitesima allora  $\{H, F_1\} = 0$  (e vale il viceversa) e questo implica che  $F_1$  è una costante del moto (e viceversa).

## 11.8 Teoria di Hamilton-Jacobi

Si trattano le equazioni di Hamilton-Jacobi.

La ricerca di trasformazioni canoniche ha un fine. Talvolta, si riesce a guardare il problema da una prospettiva diversa che permette di risolvere il problema in un modo più semplice. L'idea alla base di tale equazioni è portare tale programma all'estremo: dato un problema hamiltoniano, si cerca l'hamiltoniana più semplice possibile, cioè l'hamiltoniana nulla.

Si consideri un'hamiltoniana ad un grado di libertà  $H(q, p, t)$ , si cerca una kamiltoniana  $K(Q, P, t)$  ottenuta per trasformazione canonica più semplice possibile:  $K = 0$ . Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = 0 \\ \dot{P} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} Q(t) = Q_0 \\ P(t) = P_0 \end{cases}$$

la soluzione non dice niente della dinamica. Tutta la dinamica è scomparsa dalle equazioni di Hamilton e si ritrova nella trasformazione canonica che, per forza, deve dipendere dal tempo perché scompare nelle equazioni di Hamilton.

Qualsiasi sia il tipo delle funzioni generatrici, la kamiltoniana si trova come

$$K = H + \partial_t F$$

il secondo termine è quello che contiene tutta la dinamica. Inoltre,  $K = 0$  e dunque

$$H + \partial_t F = 0$$

non si cerca direttamente la trasformazione, ma si trova la funzione generatrice (che si può pensare essere di seconda specie; le motivazioni di tale scelta non vengono esplicate in questo corso). Pertanto

$$H(q, p) + \partial_t F(q, P) = 0 \iff H(q, \partial_q F) + \partial_t F(q, P) = 0$$

perché si ricorda che  $p = \partial_q F$ . Bisogna trovare  $F$  che risolve questa equazione alle derivate parziali. Questa è l'equazione di Hamilton-Jacobi ad un grado di libertà.

**Esempio.** Si consideri un oscillatore armonico, la cui hamiltoniana è

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$$

le equazioni di Hamilton-Jacobi sono

$$\frac{1}{2m}(\partial_q F)^2 + \frac{1}{2}kq^2 + \partial_t F = 0$$

dove  $F(q, P, t)$ .

**Osservazione.** Si nota che l'equazione di Hamilton-Jacobi fissa una relazione tra le derivate parziali di  $q$  e del tempo; mentre  $P$  non è coinvolta nelle derivate, ma è un parametro.

**Più gradi di libertà.** Con più gradi di libertà, l'idea è sempre la stessa. Dunque

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} Q_i(t) = Q_{i,0} \\ P_i(t) = P_{i,0} \end{cases}$$

e si ha

$$K = H(\underline{q}, \underline{p}, t) + \partial_t F$$

si cerca  $F$  di seconda specie e  $p_i = \partial_{q_i} F$ , pertanto

$$H(\underline{q}, \nabla_{\underline{q}} F, t) + \partial_t F = 0$$

Bisogna capire se tale riscrittura è sensata così da poter risolvere le equazioni di Hamilton-Jacobi.

**Esempio.** Si vede un punto materiale che si muove in un campo centrale. Il moto si svolge in un piano e le coordinate polari sono convenienti:

$$H(r, p_r, \theta, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r)$$

[r] Le equazioni di Hamilton-Jacobi risultano essere

$$\frac{1}{2m} \left[ (\partial_r F)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta F)^2 \right] + U(r) + \partial_t F = 0$$

in cui si cerca la funzione  $F(r, \theta, t; P_r, P_\theta)$ , dove  $P_r$  e  $P_\theta$  sono considerati parametri.

Si ritorna alla situazione ad un solo grado di libertà. Si studia per quale situazione l'equazione alle derivate parziali risulta semplificare il problema, anziché complicarlo. Si osservano le strategie che si possono adottare per un grado di libertà. Non si cerca la soluzione generale, ma si trova una classe di soluzioni sotto l'ipotesi di separazione.

**Ipotesi di separazione.** Si cercano soluzioni all'equazione di Hamilton-Jacobi in cui la dipendenza da  $q$  e da  $t$  sia separata:

$$F_P(q, t) = W(q) + G(t)$$

non tutte le soluzioni si possono scrivere in tale modo. Questa ipotesi permette di semplificare il problema.

**Esempio.** Si consideri un punto materiale libero

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi risulta essere

$$\frac{1}{2m} (\partial_q F)^2 + \partial_t F = 0$$

Si aggiunge l'ipotesi di separazione e segue

$$\partial_q F = d_q W = W'(q), \quad \partial_t F = d_t G = G'(t)$$

dunque in Hamilton-Jacobi si ha

$$\frac{1}{2m} (d_q W)^2 + d_t G = 0 \iff \frac{1}{2m} (\partial_q W)^2 = -d_t G$$

Si osserva che il primo membro dipende solamente da  $q$ ; il secondo membro dipende solo da  $t$ . Le due sono uguali se sono la stessa costante

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} (d_q W)^2 = P \\ -d_t G = P \end{cases}$$

si ritrova  $P$  come parametro arbitrario costante. Si hanno due equazioni differenziali ordinarie che si risolvono

$$\begin{cases} d_q W = \pm \sqrt{2mP}, & P \geq 0 \\ d_t G = -P \end{cases} \implies \begin{cases} W(q) = \pm \sqrt{2mP}q + \text{cost} \\ G(t) = -Pt + \text{cost} \end{cases}$$

Pertanto

$$F_P(q, t) = \pm \sqrt{2mP}q - Pt$$

la costante nella funzione generatrice scompare in ogni caso, dunque si pone pari a zero. Si è trovata una famiglia di soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Essa dipende dal parametro  $P$ . Tuttavia, si vuole che  $F$  sia una funzione generatrice di seconda specie.

Si richiede che la trasformazione canonica generata da  $F(q, P, t) = \pm \sqrt{2mP}q - Pt$  sia una buona trasformazione, cioè che  $(q, p) \rightarrow (q, P)$  sia buona. Per essere tale, lo il determinante della jacobiana deve essere diverso da zero. Si osserva la trasformazione inversa  $(q, P) \rightarrow (q, p)$ :

$$\det J = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & \partial_P p \end{pmatrix} = \partial_P p \neq 0$$

Ricordando che  $p = \partial_q F(q, P)$ , la condizione sullo jacobiano diventa

$$\partial_{qP}^2 F \neq 0$$

[r]

Si utilizza l'ipotesi di separazione, si risolvono le equazioni separate (se hanno soluzione analitica), si promuove la funzione a funzione generatrice quando vale la condizione precedente detta condizione di completezza. [r]

Riassumendo

- per l'ipotesi di separazione  $F(q, t) = W(q) + G(t)$  si ottiene una famiglia di soluzioni ad un parametro  $P$
- si promuove tale famiglia a funzione di due variabili (cioè la funzione generatrice) solo quando la trasformazione di coordinate  $(q, P) \leftrightarrow (q, p)$  sia buona cioè  $\partial_{qP}^2 F \neq 0$ .

**Più gradi di libertà.** A più gradi di libertà si ha un'ipotesi di separazione [r]  
Si cerca una funzione

$$F(q_1, \dots, q_d, t) \rightsquigarrow H(q_j, p_j = \partial_{q_j} F, t) + \partial_t F = 0$$

si separano le  $q_j$  dalla  $t$ , cioè si cerca una funzione

$$F(\underline{q}, t) = W(\underline{q}) + G(t)$$

si spera di separare  $W$  [r]

L'idea è che compaiano  $P_j$  come parametri e la famiglia di soluzione dipendono da  $d$  parametri.

Poi tale famiglia  $F_{\underline{P}}(\underline{q}, t)$  si promuove a funzioni di [r]

Quindi, la trasformazione  $(\underline{q}, \underline{P}) \leftrightarrow (\underline{q}, \underline{p})$  è buona quando

$$\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ \dots & \partial_{\underline{P}\underline{P}} \end{pmatrix} = \det(\partial_{\underline{P}\underline{P}}) = \det(\partial_{\underline{q}\underline{P}}^2 F) \neq 0$$

**Definizione.** Una soluzione  $F$  dell'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(\underline{q}, \nabla_{\underline{q}} F, t) + \partial_t F = 0 \iff H(q_1, \dots, q_d, \partial_{q_1} F, \dots, \partial_{q_d} F, t) + \partial_t F = 0$$

è detta integrale completo se dipende da  $d$  parametri  $(P_1, \dots, P_d)$  ed è tale per cui

$$\det(\partial_{q_j P_k}^2 F) \neq 0$$

Nel caso in cui l'ipotesi di separazione [r] L'ipotesi di separazione non è l'unico modo per ottenere tali  $d$  parametri.

**Osservazione.** Si riassume quanto visto ad un grado di libertà.

- $p = \partial_q F$
- $H(q, \partial_q F, t) = -\partial_t F$
- 

$$\begin{cases} \dot{Q} = 0 \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$

Si supponga di valutare  $F(q, P, t)$  lungo il moto. Si calcola la sua variazione temporale

$$d_t F = \partial_q F \dot{q} + \partial_P F \dot{P} + \partial_t F = p\dot{q} + \partial_P F \cdot 0 - H(q, p, t)$$

Quindi lungo il moto  $d_t F$  è la trasformata di Legendre dell'hamiltoniana, cioè è la lagrangiana.  
[r]

La funzione  $F(q, P, t)$  è l'integrale d'azione visto come funzione del suo secondo estremo calcolato lungo il moto:

$$S[q, p] = \int_{t_0}^t p\dot{q} - H \, d\tau = F(q, P, t)$$

[r]