Theoretical Physics I

7 ottobre 2023

Indice

Lezione 1

lun 02 ott 2023 10:30

1 Introduzione

Il corso di fisica teorica è un corso di introduzione alle teorie quantistiche relativistiche dei campi. La relatività generale è la prima teoria relativistica di una interazione fondamentale, ma non è stata ancora quantizzata. Le altre tre forze fondamentali — elettromagnetica, forte e debole — sono descritte da un'unica teoria relativistica e quantistica. Si vuole capire come quantizzare i campi unendo la relatività, la meccanica quantistica e la teoria dei campi.

Le motivazioni per costruire teorie relativistiche dei campi sono radicate nella storia delle teorie ad inizio XX secolo: dal problema del corpo nero alla relatività speciale ed alla meccanica quantistica. Come scrisse Kuhn, si ebbe un cambiamento di paradigma e le certezza della fisica classica scomparvero: il tempo assoluto ed il determinismo vennero meno. La relatività e la meccanica quantistica non vennero subito accettate. Una prima prova della relatività generale provenne dall'esperimento di Eddington in cui egli osservò la luce provenire da stelle dietro al sole durante un'eclissi. La meccanica quantistica, nata qualche anno dopo, non era relativistica: l'equazione di Schrödinger è la trascrizione operatoriale della formula classica per l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m}\,, \quad p^\mu \to \begin{pmatrix} i\hbar\,\partial_t \\ -i\hbar\nabla \end{pmatrix}$$

Le correzioni fini all'atomo di idrogeno contengono la correzione relativistica che funziona sebbene l'elettrone sia in regime non relativistico: l'energia dell'elettrone è molto più piccola dell'energia a riposo, per questo si può fare lo sviluppo perturbativo. L'ordine di grandezza dell'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno è degli elettronvolt, mentre la massa dell'elettrone è $511\,\mathrm{keV}\,c^{-2}$.

La meccanica quantistica non relativistica fornisce dei dati in grande accordo con quelli sperimentali, tuttavia si sono fatte delle scelte insolite e ad hoc: l'aggiunta dello spin, l'introduzione del fattore giromagnetico nel termine di spin-orbita, il principio di Pauli. Unificare la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, mantenendo i principi di entrambe, non è possibile: si arriva a varie incongruenze che si vedono in seguito.

Bisogna cambiare ancora il paradigma adottando la seconda quantizzazione. Dirac creò la meccanica quantistica relativistica tramite la sua equazione, ma il tutto funziona per energie minori dell'energia a riposo dell'elettrone.

Tutte queste discussioni provengono sempre dal campo elettromagnetico. La velocità della luce nel vuoto è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Einstein aggiunge al principio di relatività anche la costanza della velocità della luce in ogni sistema di riferimento.

Nel corso si vede una evoluzione della fisica teorica a partire da Dirac passando per le teorie dei campi. Si studia cosa significare utilizzare una teoria quantistica relativistica e come spesso le cose non sono semplici. Uno dei problemi è quello delle divergenze: lo sviluppo perturbativo porta con sé delle divergenze che vanno interpretate. Ironicamente, la meccanica quantistica è nata per risolvere la divergenza UV dello spettro del corpo nero.

L'auto-energia dell'elettrone è infinita a causa del termine r^{-1} del campo elettrico. Porre un raggio finito all'elettrone risolve il problema, ma non ha potere predittivo. Le divergenze sono ricorrenti, ma la rinormalizzazione permette di ridefinire le divergenze inserendole nella relazione tra la carica nuda di una particella — che non corrisponde alla carica misurata — e la carica misurata stessa.

Inizialmente, la presenza di anti-materia fu un problema. Per la relatività, la massa è equivalente all'energia $E = mc^2$: l'una si trasforma nell'altra e viceversa. Può capitare che una radiazione diventi una coppia particella-antiparticella. Tuttavia, la meccanica quantistica non relativistica tratta una sola particella

$$\int \mathrm{d}^3x \, |\psi|^2 = 1$$

La probabilità di trovare (esattamente) una particella in tutto lo spazio è unitaria, quindi la creazione e annichilazione di particelle non sono compatibili con tale teoria.

Dalla meccanica razionale — con le variabili canoniche, il formalismo di Lagrange, le equazioni di Hamilton–Jacobi, le parentesi di Poisson — le variabili canoniche diventano equivalenti operatoriali hermitiani nella meccanica quantistica. La funzione d'onda è interpretata come ampiezza di probabilità. Ora, la qualità di operatore è assunta dalla funzione d'onda che crea e distrugge particelle, ed in un certo senso si riprendono le variabili canoniche della meccanica classica. Le variabili canoniche classiche sono discrete, ma la funzione d'onda è continua: si passa ad infiniti gradi di libertà, il campo.

Si conoscono già vari campi: il campo elettrico, magnetico, la temperatura, la pressione, etc. Essi presentano tutti uno stato fondamentale. Per quantizzare un campo, ci si pone attorno allo stato fondamentale e si osservano le piccole fluttuazioni — un oscillatore armonico quantistico — attorno al minimo.

Uno dei punti fondamentali in fisica teorica è spiegare un fenomeno, ma anche predire. Un modello spiega un fenomeno, una teoria si basa su un principio fondamentale ed è caratterizzata da una predittività. Il modello di Glashow–Weinberg–Salam nacque come modello, ma con la teoria elettrodebole ed il meccanismo di Higgs divenne una teoria, cioè il Modello Standard. Esso possiede un enorme accordo tra teoria ed esperimenti. Ad esempio, il fattore giromagnetico del muone misurato[1] è

$$a_\mu = \frac{g-2}{2} = 0.001\,165\,920\,59(22)$$

La discrepanza con il valore teorico[2] è

$$a_\mu^{\mathrm{exp}} - a_\mu^{\mathrm{th}} = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$$

Le interazioni elettromagnetica, forte e debole sono correttamente descritte dal Modello Standard alle energie investigate. Esso è una teoria quantistica relativistica dei campi e per questo si pensa essere la teoria corretta. Tuttavia, si pensa anche che il Modello Standard sia una teoria a basse energie, limite di una teoria più grande, poiché non spiega, tra le altre cose, la materia e l'energia oscure.

Il corso è una introduzione alla teoria dei campi. La parte avanzata, tra cui il metodo funzionale, si vede al corso di Teoria Quantistica dei Campi I e II, e pure in Laboratorio di Fisica Computazionale con lo studio delle interazioni forti su reticolo.

Unità di misura. Si utilizza il sistema MKS. Le costanti fisiche di interesse sono

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,, \quad \hbar \approx 6.582 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}$$

Si pone $c = 1$: lunghezza e tempo sono la stessa dimensione. Per ragioni storiche, si elimina il tempo, sebbene sia più preciso da misurare. Come conseguenza, dalla relazione di Einstein

$$E = mc^2$$

[1] Si veda `https://arxiv.org/abs/2308.06230`.
[2] Si veda `https://physics.aps.org/articles/v16/139`.

la massa ha le dimensioni dell'energia. Altre scale di lunghezza interessanti sono l'ångström (o angstrom) ed il fermi
$$1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}\,, \quad 1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m}$$
corrispondenti alle scale atomiche e scale nucleari.

Si pone $\hbar c = 1$, che nel Sistema Internazionale vale $\hbar c \approx 197\,\text{MeV}\,\text{fm}$. Si introduce la lunghezza Compton (ridotta)
$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2}$$
Per l'elettrone vale $\lambda \approx 3.86 \times 10^{-13}\,\text{m}$, mentre per un nucleone è $\lambda \approx 0.21\,\text{fm}$. Dalla lunghezza Compton si ottiene una relazione tra lunghezza e massa. La massa di un nucleone è data da $m = 5\,\text{fm}^{-1}$.

In generale, le particelle elementari sono instabili. Si consideri una vita media
$$\tau = 10^{-23}\,\text{s} \implies \frac{\tau c}{\hbar c} \approx \frac{3}{200}\text{MeV}^{-1}$$
Si passa da un tempo ad una energia: dalla vita media all'indeterminazione sul valore dell'energia e quindi della massa. La relazione
$$\Delta t\,\Delta E \sim 1$$
non è un principio di indeterminazione perché il tempo non è un operatore e le misurazioni sono fatte a tempi diversi. Essa lega l'incertezza sulla misura dell'energia data la differenza temporale tra due misure. La vita media di una particella permette di ottenere l'indeterminazione sulla sua massa. Tornando alla lunghezza Compton, si ha
$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} \implies \lambda mc \sim \hbar \rightsquigarrow \Delta x\,\Delta p \sim \hbar$$
L'ultima relazione è un principio di indeterminazione. Dalle relazioni sopra si nota che risolvere la posizione di una particella su una lunghezza inferiore alla sua lunghezza Compton significa fornirle un'energia dell'ordine della sua massa a riposo e quindi aprire la strada alla creazione di coppia. Confinare una particella porta alla creazione di altre particelle.

Riassumendo, le dimensioni seguono le relazioni
$$\mathsf{E} = \mathsf{L}^{-1} = \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{M}$$

Si può costruire un analogo della lunghezza Compton anche per la massa, cioè la massa di Planck. Non si considera la gravità perché è molto più debole della altre forze fondamentali
$$E_{\text{grav}} = G\frac{m_e M_N}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-41}}{r_{\text{Bohr}}}\,, \quad E_{\text{elet}} = \frac{\alpha}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-2}}{r_{\text{Bohr}}}$$

Scale di energia. L'energia di un fascio del Large Hadron Collider fu $6.5\,\text{TeV}$ per la scoperta del bosone di Higgs. Per il LEP fu $100\,\text{GeV}$. Per il SPS fu $300\,\text{GeV}$ per la scoperta dei bosoni $W^\pm$ e Z. L'energia necessaria ad ottenere tali fasci è $600\,\text{GWh}\,\text{yr}^{-1}$ solo per LHC. Questo perché particelle che accelerano irradiano energia per bremsstrahlung. Tutto il CERN consuma $1.3\,\text{TWh}\,\text{yr}^{-1}$, mentre il mondo produce circa $20\,000\,\text{TWh}\,\text{yr}^{-1}$.

Lezione 2

mar 03 ott 2023 10:30

Diagramma di Minkowski. In un diagramma xt di Minkowski, la bisettrice dei quadranti indica oggetti che si muovo alla velocità della luce (ricordando $c = 1$). Si costituisce un cono luce. Al di sopra e al di sotto dell'origine O si hanno eventi che possono essere causalmente connessi con l'origine: in particolare, per eventi al di sopra, l'origine O può avere un effetto causale, si ha il futuro; gli eventi al di sotto hanno potuto influenzare causalmente l'origine, si ha il passato. Ai lati, gli eventi non possono essere causalmente connessi con l'origine perché bisogna superare la velocità della luce.

La metrica nello spazio di Minkowski non è definita positiva: l'intervallo spazio-temporale può cambiare segno. Gli eventi con $t = 0$ sono contemporanei all'origine. In base al segno — positivo, nullo e negativo — si ha vettori di tipo tempo, luce e spazio. Ai lati del cono sono presenti vettori di tipo spazio, sopra e sotto si hanno vettori di tipo tempo. Lungo le bisettrici si hanno vettori di tipo luce.

1.1 Problemi della meccanica quantistica con la relatività

Si vedono alcuni problemi nel conciliare la meccanica quantistica con la relatività.

Problema primo. Si svolge un esercizio preso dalle Coleman's Lectures, p. 12. Si considera una particella localizzata nell'origine $|\mathbf{x}=0\rangle \equiv |0\rangle$. Per ottenere uno stato ad un tempo successivo a $t=0$ si applica l'operatore di evoluzione temporale. Ricordando varie relazioni, tra cui la completezza nello spazio dei momenti,

$$I = \int \mathrm{d}^3k \, |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}| \, , \quad H|\mathbf{k}\rangle = E_k |\mathbf{k}\rangle \, , \quad E_k^2 = k^2 + m^2$$

così come

$$\langle\mathbf{k}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, , \quad \langle\phi| A |\psi\rangle = \langle\psi| A^\dagger |\phi\rangle^*$$

Si ottiene

$$\psi(\mathbf{x},t) = \langle\mathbf{x}| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} |0\rangle = \int \mathrm{d}^3k \, \langle\mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle \, \langle\mathbf{k}| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} |0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t}$$

dove si applica l'esponenziale a $\langle\mathbf{k}|$ facendo l'espansione in serie di Taylor. Passando in coordinate polari r e θ, si ha

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{x}| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} |0\rangle &= \int \frac{k^2 \, \mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t} = \int \frac{k^2 \, \mathrm{d}k}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\theta) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathrm{i}r} \int_0^\infty \mathrm{d}k \, k^2 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathrm{i}r} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \, k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \, k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{k^2+m^2}}
\end{aligned}$$

Si passa nel piano complesso. La radice è una funzione polidroma: si pone il branch cut da $-\infty$ a $-\mathrm{i}m$ e da $\mathrm{i}m$ a ∞. Il cammino di integrazione è una semicirconferenza con base l'asse reale e che evita il branch cut, percorsa in senso anti-orario. La funzione integranda è analitica all'interno del cammino, pertanto l'integrale è nullo. Vicino al taglio si ha

$$E_k = -\mathrm{i}\sqrt{(\operatorname{Im} k)^2 - m^2} \, , \quad E_k = \mathrm{i}\sqrt{(\operatorname{Im} k)^2 - m^2}$$

a sinistra e destra. Si studia il limite in cui il raggio della semicirconferenza tende ad infinito. L'esponenziale sul segmento discente a sinistra tende a zero, ma non a destra. Supponendo che la particella viaggi più veloce della luce $r > t$, allora anche tale termine si annulla all'infinito. Inoltre, gli archi non contribuiscono all'integrale. Sia $k = \mathrm{i}z$, così $k\,\mathrm{d}k = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}(\mathrm{i}z)$. Pertanto, solamente i segmenti verticali contribuiscono con termini non nulli:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{x}| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} |0\rangle &= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2 r} \int_m^\infty \mathrm{d}(\mathrm{i}z) \, (\mathrm{i}z) \mathrm{e}^{-zr} [\mathrm{e}^{t\sqrt{z^2-m^2}} - \mathrm{e}^{-t\sqrt{z^2-m^2}}] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2\pi^2 r} \int_m^\infty \mathrm{d}z \, z e^{-zr} \sinh\left(t\sqrt{z^2-m^2}\right) > 0
\end{aligned}$$

Da questo risultato si nota che, a partire da una particella è localizzata nell'origine, ad un tempo infinitesimo successivo, la funzione d'onda è non nulla ovunque: si potrebbe trovare al di fuori del cono luce. Non si è coerenti con la relatività speciale. Si ha violazione di causalità nel momento in cui si localizza una particella. La localizzazione diventa un concetto che non si riesce più a mantenere, come già visto discutendo della lunghezza Compton.

L'integrale non presenta una soluzione esplicita in forma chiusa, ma si può trovare un limite superiore all'ampiezza di probabilità

$$\psi(x,t) < \frac{\mathrm{i}}{2\pi^2 r} \int_m^\infty \mathrm{d}z \, z \mathrm{e}^{-z(r-t)} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi^2 r} \mathrm{e}^{-m(r-t)} \left[\frac{m}{r-t} + \frac{1}{(r-t)^2}\right]$$

Si noti il campo complesso $\mathbb{C}$ non è un campo totalmente ordinato, quindi la relazione di disuguaglianza è valida in senso lessicografico. Fuori dal cono di luce, l'ampiezza di probabilità è esponenzialmente piccola, ma comunque non nulla. In generale, una simmetria semplifica il problema, ma la simmetria di Lorentz rovina la meccanica quantistica. In natura deve esistere qualcosa che cancella la violazione di causalità: le anti-particelle forniscono contributi che cancellano la violazione. La scala che descrive quanto scende la probabilità è data dalla massa m. La lunghezza Compton associata ad una particella è il reciproco della massa: cercando di confinare una particella in una regione più piccola della lunghezza Compton — il problema visto considera la particella in un punto infinitesimo, l'origine — si ottiene una violazione della causalità.

Problema secondo. Seguendo Bohr, si consideri una particella in una scatola perfettamente riflettente: la particella rimbalza continuamente. Il lato superiore della scatola è un pistone che si può muovere per diminuire lo spazio all'interno della scatola. Ricordando la relazione di Einstein, per il principio di indeterminazione

$$\Delta p \, \Delta x \sim \hbar$$

la particella acquista abbastanza energia da irraggiare qualsiasi cosa e creare tutte le particelle compatibili con il principio di conservazione dell'energia.

Relazione di Einstein. Le difficoltà sorgono dalla relazione di Einstein $E = mc^2$. Si tenta dare un senso a tale formula. Si consideri una scatola. Si emette della radiazione dal lato sinistro della scatola con energia E. Per una radiazione, il momento portato è $p = \frac{E}{c}$. Per conservazione del momento $p = 0$, la scatola si sposta verso sinistra con momento $p = -\frac{E}{c}$. La scatola si sposta fino a quando la radiazione incide sull'altro lato. La velocità con cui si muove la scatola è $v = -\frac{E}{Mc}$. La distanza percorsa è

$$\Delta x = -\frac{E}{Mc}\frac{L}{c} = -\frac{EL}{Mc^2}$$

corrispondente al tempo di viaggio della radiazione. La scatola è un sistema isolato, ma si è spostato: il baricentro deve restare fermo. Per Einstein, la radiazione porta con sé della massa, infatti dall'equazione del baricentro si ottiene

$$mL + M\Delta x = 0 \implies mL - M\frac{EL}{Mc^2} = 0 \implies E = mc^2$$

Si ricordi che non si può considerare il carrello come un corpo rigido giacché si sta trattando la Relatività Speciale. Tuttavia, il problema di considerare il corpo rigido o meno non si pone poiché le conclusioni sono le medesime.

Si vede un esempio in cui si trova la relazione di Einstein. Le stelle sono sorrette dalla fusione nucleare

$$^1\mathrm{H}_1 + {}^2\mathrm{D}_1 \to {}^3\mathrm{He} + \gamma$$

La massa iniziale dei reagenti è $m = 5.016\,24 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, mentre l'elio ha massa $m = 5.008\,234 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. L'eccesso di massa che si trasforma in energia è $\Delta m \approx 7.97 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$. Con questa reazione, insieme a delle altre, il Sole perde una quantità di massa pari a

$$\Delta M = 4.5 \times 10^{11}\,\mathrm{s}^{-1} \approx 10^{-11}\,M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}©$$

dove $M_\odot$ è una massa solare. [r] simbolo sole

Esperimento di Nichols e Hull. Nichols e Hull si posero la questione di misurare il momento portato dalla luce. I due costruirono una bilancia di torsione con due specchi rivolti nella stessa direzione. L'esperimento rivelò

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Problema terzo. Quando un commutatore tra due operatori è nullo, si possono misurare le quantità associate in modo indipendente (l'ordine non è importante). Nella rappresentazione di Heisenberg, gli operatori dipendono solo dal tempo. Rispetto ad una misura fatta all'origine del diagramma di Minkowski, nella regione sopra e sotto del cono di luce, il commutatore con un'altra misura è diverso da zero perché le due misure si possono influenzare, mentre ai lati il commutatore deve essere nullo perché i sistemi non si possono influenzare. Dunque i commutatori devono dipende anche dalla posizione delle misure.

Problema quarto. Si veda Cohen E_{II}. Si considerino due operatori tali per cui

$$[q,p] = \mathrm{i}\hbar\,, \quad [q,q] = [p,p] = 0$$

Dal primo commutatore segue

$$qp - pq = \mathrm{i}\hbar \implies qp^2 - pqp = \mathrm{i}\hbar p \implies qp^2 - p^2 q - \mathrm{i}\hbar p = \mathrm{i}\hbar p$$

In generale si ottiene

$$[q, p^n] = n\mathrm{i}\hbar p^{n-1}\,, \quad [p, q^n] = -\mathrm{i}n\hbar q^{n-1}$$

cioè relazioni simili a quelle delle derivate. Si consideri una generica funzione dei momenti e delle coordinate:

$$[q, G(p)] = \mathrm{i}\hbar\,\partial_p G(p)\,, \quad [p, F(q)] = -\mathrm{i}\hbar\,\partial_q F(q)$$

Si consideri l'operatore di traslazione in una dimensione

$$T(a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\frac{p}{\hbar}}$$

dove a è una coordinata. Dal primo dei due commutatori sopra segue

$$qT(a) = T(a)q + \mathrm{i}\hbar\,\partial_p T = T(a)q + aT(a) = T(a)(q+a)$$

L'operatore di posizione agisce sugli autostati della posizione come

$$\hat{q}\,|q'\rangle = q'\,|q'\rangle$$

Applicando prima l'operatore di traslazione, si ottiene

$$\hat{q}T(a)\,|q'\rangle = (q'+a)T(a)\,|q'\rangle$$

Il vettore $T(a)\,|q'\rangle$ è ancora autovettore della posizione ed ha autovalore $q'+a$. Il parametro a è un numero reale arbitrario. Se lo spettro di un operatore che ha commutatore $\mathrm{i}\hbar$ con un altro è continuo e illimitato (superiormente o inferiormente), allora pure lo spettro dell'altro operatore è continuo e illimitato. In questo caso lo spettro dell'operatore di traslazione $T(a)$ è continuo e illimitato, pertanto lo è pure quello della posizione $\hat{q}$.

Ne si vede la motivazione. Se due operatori sono finiti e discreti, allora — sapendo $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ —

$$0 = \mathrm{Tr}[A,B] = \mathrm{Tr}\,\mathrm{i}\hbar = N\mathrm{i}\hbar$$

che è una contraddizione. Pertanto, operatori che non commutano, non possono essere finiti, in modo che la traccia non sia definita.

Seguendo Pauli, per rendere coerenti la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, bisogna aggiungere alle regole di commutazione ordinarie — come $[x,p] = \mathrm{i}\hbar$ —, tutte le altre regole di commutazione:

$$[t,H] = -\mathrm{i}\hbar\,, \quad [x,H] = 0\,, \quad [t,p] = 0$$

Per la prima regola di commutazione, supponendo di avere un operatore tempo, poiché t è illimitato, allora pure l'hamiltoniana H deve avere spettro illimitato (in particolare illimitato inferiormente): ciò non è possibile perché non ci sarebbe uno stato fondamentale stabile ed i sistemi non sarebbero quantizzabili. La seconda regola di commutazione afferma che la posizione è conservata e misurabile in modo indipendente dall'energia. Similmente per la terza regola. Pertanto, la possibilità di trovare regole di commutazione compatibili con la regola tra posizione e momento, generalizzate ai quadrivettori posizione e momento, porta ad un assurdo.

Lezione 3

mer 04 ott 2023 10:30

1.2 Infiniti gradi di libertà

Si passa ad infiniti gradi di libertà rimanendo in meccanica classica. Si vede l'esempio di una corda vibrante in una dimensione: si hanno n masse m alternate a delle molle di costante k.

Nello stato a minima energia, tutte le masse hanno una distanza pari al passo reticolare a. La lagrangiana del sistema è data da

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La corda ha una dimensione finita e bisogna scegliere le condizioni al contorno: si possono fissare gli estremi $q_1(t) = q_n(t) = 0$ oppure imporre delle condizioni periodiche $q_i(t) = q_{i+n}(t)$. L'hamiltoniana è data da

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La densità di massa e la tensione della corda sono

$$\rho = \frac{m}{a}\,, \quad \sigma = ka$$

Nel limite di $a \to 0$ si ha

$$\frac{q_{j+1} - q_j}{a} = \partial_x \phi(x, t)\,, \quad \sum_j \to \frac{1}{a} \int \mathrm{d}x$$

dove ϕ è il campo spostamento di ogni massa dalla propria posizione di equilibrio. La lagrangiana diventa funzione una del campo, e passando in tre dimensioni, si ha

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2} \rho \, (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

L'hamiltoniana è data da

$$H(\phi, \dot{\phi}) = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2} \rho \, (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

Si introducono le densità di lagrangiana e di hamiltoniana

$$L = \int \mathrm{d}^3 x \, \mathcal{L}\,, \quad H = \int \mathrm{d}^3 x \, \mathcal{H}$$

I momenti coniugati sono

$$\pi = \partial_{\dot{\phi}} \mathcal{L}\,, \quad \mathcal{H} = \pi \cdot \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

Le equazioni del moto sono

$$\partial_\phi \mathcal{L} - \partial_\mu \partial_{\partial_\mu \phi} \mathcal{L} = 0$$

In generale, si utilizzano le condizioni periodiche perché le teorie trattate sono locali [r]. Utilizzare un campo porta una difficoltà. Si è riusciti a scrivere un'energia, ma non si riesce a scrivere in modo relativisticamente corretto un potenziale: questo perché un potenziale descrive un effetto istantaneo. Bisogna utilizzare qualcos'altro: uno scambio di particelle, i mediatori delle interazioni fondamentali. Il potenziale in quanto tale non può più esistere.

1.3 Formalismo covariante

Si veda Landau vol. 2 per una trattazione completa. Si studia il formalismo covariante nella relatività speciale. Le trasformazioni di Galileo sono equivalenti alle trasformazioni di Lorentz nel limite di piccole velocità.

Si considerino due sistemi di riferimento S ed S' equiversi. Il secondo si muove lungo l'asse z del primo. Le trasformazioni sono di Lorentz sono

$$x' = x\,, \quad y' = y\,, \quad z' = \gamma(z - \beta ct)\,, \quad ct' = \gamma(ct - \beta z)\,, \quad \beta = \frac{v}{c}\,, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 1$$

Interessa capire come una certa quantità si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. Queste esistono anche in termini di funzioni iperboliche in funzione della rapidità.

L'intervallo spazio-temporale è una quantità costante

$$x^\mu x_\mu = s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \text{cost.}$$

Dei sistemi di riferimento tipicamente usati sono:

- il target system, cioè il sistema del laboratorio solidale con una particella su cui impatta un'altra particella;
- il riferimento del centro di massa.

Qualunque evento è caratterizzato da un punto (t, x, y, z) nello spazio di Minkowski. Si introduce il quadrivettore posizione

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

Le sue componenti sono coordinate contravarianti perché controvariano rispetto le trasformazioni dei cambi di base cioè le trasformazioni di Lorentz. Il moto di una particella è una curva, una linea di universo, $x^\mu = x^\mu(\tau)$ che descrive come essa si muove nello spazio-tempo. Le trasformazioni nello spazio di Minkowski sono trasformazioni lineari e corrispondono alle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Nel formalismo covariante bisogna fare attenzione alla posizione degli indici: scritture del tipo $x^\mu x^\mu$ sono legittime e perfettamente definite, ma non sono quantità invarianti per trasformazioni di Lorentz. Queste hanno caratteristiche particolari che determinano la forma delle matrici associate. Per i due sistemi di riferimento sopra, si ottiene

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Il tensore metrico è definito secondo la convenzione timelike

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Pertanto, il quadrivettore posizione covariante è dato da

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

In questo modo si passa da componenti contravarianti a covarianti e viceversa. Si può definire la norma

$$\|x\|^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

Proprietà delle trasformazioni di Lorentz. Le matrici delle trasformazioni sono matrici 4×4 con 16 componenti. Le trasformazioni che si vogliono sono rotazioni e boost [r], pertanto bisogna limitare le componenti indipendenti. Dato

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

si calcola l'invariante spazio-temporale nel riferimento S' che deve essere identico all'invariante calcolato nel riferimento S:

$$x'^\mu x'_\mu = g_{\mu\rho} x'^\mu x'^\rho = g_{\mu\rho} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma \equiv g_{\eta\theta} x^\eta x^\theta$$

Si hanno delle relazioni tra gli elementi di matrice delle trasformazioni di Lorentz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = g_{\nu\sigma}$$

Sommando su ρ si ottiene $\Lambda_{\mu\sigma}$ da cui segue

$$g_{\nu\sigma} = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_{\mu\sigma} = (\Lambda^\top)_\nu{}^\mu \Lambda_{\mu\sigma}$$

vale a dire

$$\delta^\nu{}_\sigma = (\Lambda^\top)^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma = \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma = (g\Lambda g^{-1})_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = [(g\Lambda g^{-1})^\top]^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma$$

che in forma matriciale risulta essere

$$I = (g\Lambda g^{-1})^\top \Lambda \iff g = \Lambda^\top g \Lambda \iff \Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^\top g = g\Lambda g^{-1}$$

Per passare alla notazione matriciale bisogna porre attenzione alla posizione degli indici. La matrice trasposta di $\Lambda^\mu{}_\sigma$ non è $(\Lambda^\top)^\nu{}_\mu$, bensì $(\Lambda^\top)_\nu{}^\mu$. Infatti vale[3]

$$\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu\,, \quad \Lambda^\top = (\Lambda^\top)_\mu{}^\nu\,, \quad \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$$

così come

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^\top)_\nu{}^\mu = (\Lambda^{-1})_\nu{}^\mu$$

La derivazione può seguire anche un altro modo, si può introdurre direttamente la matrice trasposta

$$(\Lambda^\top)_\nu{}^\mu g_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma = g_{\nu\sigma} \implies \Lambda^\top g \Lambda = g$$

Si consideri il determinante

$$\det\bigl(\Lambda^\top g\Lambda\bigr) = \det g \implies (\det\Lambda)^2 = 1$$

Le matrici delle trasformazioni di Lorentz soddisfano l'equazione derivata sopra. I vincoli sono $n + \frac{n(n-1)}{2}$ cioè dieci equazioni per $n = 4$ dimensioni: si hanno sei gradi di libertà.

Elementi di teoria dei gruppi. Le trasformazioni di Lorentz costituiscono il gruppo di Lorentz $\mathrm{O}(1,3)$. Un gruppo è un insieme G in cui esiste una regola di composizione tale per cui vale:

- chiusura: $g_i \circ g_k = g_j \in G$;
- associatività: $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$;
- elemento identità: $\exists g_0$ tale per cui $g_0 \circ g_i = g_i \circ g_0 = g_i$ per ogni $g \in G$;
- elemento inverso: $\forall g_i \in G$, $\exists g_s \in G$ tale per cui $g_s \circ g_i = g_i \circ g_s = g_0$.

Si verificano queste proprietà. La composizione di più trasformazioni di Lorentz danno

$$x''^\mu = (\Lambda')^\mu{}_\nu x'^\nu = (\Lambda')^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \implies x'' = \Lambda'\Lambda x$$

[r]

Trasformazioni di tensori. Un quadrivettore è un insieme di quattro componenti che si trasformano come le coordinate. Per la velocità si ha

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$$

Un tensore di tipo $(2,0)$ è un oggetto di sedici componenti per cui ogni indice si trasforma come le coordinate

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}$$

Un quadrivettore covariante si trasforma come

$$v'_\mu = g_{\mu\nu} v'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho v^\rho = \Lambda_\mu{}^\nu v_\nu$$

La derivata rispetto un quadrivettore covariante si può scrivere come

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Sapendo

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\,, \quad x' = \Lambda x \implies g^{-1}\Lambda^\top g x' = x \implies x^\nu = (\Lambda^\top)^\nu{}_\mu x'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu$$

[3] Si veda `https://physics.stackexchange.com/q/567237` e `https://physics.stackexchange.com/q/456640`.

oppure in modo più diretto

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \implies (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \delta^\rho{}_\nu x^\nu = x^\rho$$

si ottiene [r]

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \iff \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

La derivata di un quadrivettore rispetto alle componenti contravarianti è invariante, $\partial_\mu v^\mu$. Il d'Alembertiano $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ è anch'esso invariante. Data un'equazione nel formalismo covariante, la sua forma è identica in ogni sistema di riferimento inerziale. Ad esempio

$$\partial_\mu J^\mu = 0\,, \quad \Box\, A^\mu = v^\mu$$

Lezione 4

gio 05 ott 2023 10:30

L'equazione di Schrödinger non è un invariante relativistico e nemmeno invariante galileiano. Basta considerare $x' = x + vt$. Bisogna ridefinire la funzione d'onda con un argomento che è funzione della velocità: l'equazione non è invariante, ma le osservabili non cambiano perché compare solo un fattore di fase.

Un tensore di tipo (p, q) si trasforma con p componenti contravarianti e q componenti covarianti. Il tensore metrico si trasforma secondo la relazione che definisce il gruppo di Lorentz $\Lambda^\top g \Lambda = g$. Le trasformazioni di Lorentz contengono sei parametri: gli angoli di Eulero e le componenti della velocità, corrispondenti alle rotazioni ed ai boost. Si può considerare una trasformazione più generale che considera anche una traslazione ottenendo il gruppo di Poincaré

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \delta^\mu$$

[r] Il determinante delle trasformazioni di Lorentz è una funzione discreta [r]. Esistono quattro settori del gruppo di Lorentz. Si consideri

$$\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho = g_{\sigma\rho}$$

Scegliendo $\rho = \sigma = 0$ si ha

$$1 = \Lambda^\mu{}_0 g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \implies \Lambda^0{}_0 = \pm\sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2}$$

Insieme al determinante, si hanno quattro settori non legati tra loro: non si può passare da un settore all'altro. Tali settori sono

- trasformazioni ortocrone proprie: $\Lambda^0{}_0 > 0$, $\det\Lambda = 1$. Esse sono le trasformazioni infinitesime che si possono risommare a partire dall'unità [r]; esse formano un gruppo. Un esempio è l'identità.
- trasformazioni ortocrone improprie: $\Lambda^0{}_0 > 0$, $\det\Lambda = -1$. Un esempio è la parità $P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- trasformazioni anticrone improprie: $\Lambda^0{}_0 < 0$, $\det\Lambda = -1$. Un esempio è l'inversione temporale $T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- trasformazioni anticrone proprie: $\Lambda^0{}_0 < 0$, $\det\Lambda = 1$. Un esempio è la trasformazione $PT = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, -1)$.

Questi settori sono disgiunti perché non esiste una trasformazione infinitesima che permette di passare da un settore ad un altro.

Teorema 1.1. Le trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono non cambiano il segno della componente temporale di un vettore di tipo tempo.

Dimostrazione. Si consideri

$$\Lambda^0{}_0 = \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2} = \sqrt{1 + |\mathbf{\Lambda}|^2}$$

Un vettore di tipo tempo è caratterizzato da

$$v_\mu v^\mu = (v^0)^2 - |\mathbf{v}|^2 > 0 \implies (v^0)^2 > |\mathbf{v}|^2$$

Si consideri $v^0 > |\mathbf{v}|$ e $v^0 > 0$. Applicando una trasformazione di Lorentz si ottiene

$$v'^0 = \Lambda^0{}_0 v^0 + \Lambda^0{}_i v^i = \Lambda^0{}_0 v^0 + |||\mathbf{v}| \cos\theta \geq \Lambda^0{}_0 v^0 - |||\mathbf{v}| > \Lambda^0{}_0 v^0 - \Lambda^0{}_0 |\mathbf{v}| > 0$$

Dunque la trasformazione mantiene la qualità di tipo tempo. La dimostrazione è analoga per $v^0 < 0$. □

Un evento non può influenzarne un altro che si trova al di là della bisettrice del diagramma di Minkowski. La componente temporale di un quadrivettore è il tempo a cui esso dista rispetto l'origine. Operando una trasformazione di Lorentz, l'evento può avvenire prima o dopo l'origine, in base al sistema di riferimento considerato: non c'è causalità.

Questo teorema si può vedere in modo geometrico. Si consideri un vettore di tipo tempo con norma $k^2 > 0$. Essa è la stessa per ogni riferimento inerziale. Pertanto

$$t^2 - x^2 = k^2 \implies t = \pm\sqrt{k^2 + x^2}$$

cioè un iperboloide nello spazio di Minkowski che si trova nella zona sopra o sotto all'origine, ma le due zone sono disconnesse e la componente di tipo tempo non cambia. D'altra parte, per un vettore di tipo spazio, la norma è $-k^2$ con $k^2 > 0$, da cui

$$x^2 - t^2 = k^2$$

cioè ancora un iperboloide ma al di fuori dal cono di luce, ai lati dell'origine. Una trasformazione di Lorentz cambia il segno della componente tempo e per questo non si può avere una relazione di causalità.

1.4 Equazioni di Maxwell

Vedere Landau, vol. 2, p. 70. Le equazioni di Maxwell sono quattro equazioni, due scalari e due vettoriali

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho\,, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

I gradi di libertà non sembrano essere corrette. Sei gradi di libertà fisici (le componenti dei campi), ma otto equazioni: alcune sono ridondanti. In fisica classica, la conservazione della carica è aggiunta manualmente e non si può dedurre dalle equazioni di Maxwell:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Non è evidente che le equazioni di Maxwell siano invarianti relativistici. In forma integrale, il teorema di Gauss è

$$\int_V \rho \, \mathrm{d}^3 x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}^3 x = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Per la seconda equazione si ha

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \, \mathrm{d}s = \oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}l = \partial_t \int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

La terza è analoga alla prima ed afferma l'inesistenza del monopolo magnetico. La quarta equazione è

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\partial_t \int_S \mathbf{B} \, \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Si introducono dei quadrivettori utili per lo studio dell'elettrodinamica. Considerato

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\nabla)\,, \quad J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$$

La seconda si può motivare nel seguente modo. La carica infinitesima $\rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}q$ è un invariante relativistico. Operando una trasformazione di Lorentz, la misura diventa

$$\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' = \frac{\partial(t', x', y', z')}{\partial(t, x, y, z)}\,\mathrm{d}^4x = \det\Lambda\,\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x$$

cioè è un invariante. Poiché $\rho\,\mathrm{d}V$ è un invariante e $\mathrm{d}V$ si trasforma come le componenti spaziali di un quadrivettore, allora ρ si deve trasformare come la componente temporale. Pertanto, l'equazione di continuità è data da

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

che è chiaramente un invariante relativistico. Si consideri la legge di Gauss per il magnetismo:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} \equiv \nabla\times\mathbf{A}$$

dove $\mathbf{A}$ è il potenziale vettore. Si dimostra l'implicazione sopra tramite il simbolo di Levi–Civita

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0$$

poiché ε_{ijk} è completamente anti-simmetrico, mentre la derivata $\partial_i\partial_j$ è simmetrica. Inserendo il potenziale vettore nella legged di Faraday si ha

$$\nabla\times\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} = 0 \implies \nabla\times(\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{A}) = 0$$

Il vettore tra parentesi è irrotazionale:

$$\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{A} \equiv -\nabla\phi \implies \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$$

Dalla legge di Gauss si ottiene

$$\nabla\cdot(-\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}) = \rho \implies -\nabla^2\phi - \partial_t(\nabla\cdot\mathbf{A}) = \rho$$

Aggiungendo e rimuovendo $\partial_t\phi$ all'interno della derivata temporale si ha

$$\rho = \Box\,\phi - \partial_t(\partial_t\phi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = \Box\,\phi - \partial_t\partial_\mu A^\mu$$

dove $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Si consideri la legge di Ampere [r]

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{J} - \partial_t\nabla\phi - \partial_t^2\mathbf{A}$$

Ricordando

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

si ottiene

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{J} - \partial_t\nabla\phi - \partial_t^2\mathbf{A}$$

che riordinato diventa

$$\partial_t^2\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A} + \partial_t\phi) = \mathbf{J} \implies \Box\,\mathbf{A} + \nabla(\partial_\mu A^\mu) = \mathbf{J}$$

Le due equazioni trovate si possono riassumere come

$$\Box\,A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Da questa scrittura risulta evidente che le leggi di Maxwell sono covarianti. Il numero di gradi di libertà sembra essere quattro, poi diventeranno tre e infine due. Il campo elettromagnetico è estremamente patologico: la particella che media le interazioni ha massa nulla.

Si può riscrivere l'equazione per ottenere

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = J^\mu \implies \partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\mu$$

Il termine tra parentesi è un tensore di tipo $(2, 0)$ totalmente anti-simmetrico detto tensore di campo (o di Faraday) per cui le equazioni di Maxwell si possono scrivere come

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \implies \partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$$

Le componenti indipendenti del tensore di campo sono solo sei e corrispondono alle componenti del campo elettromagnetico. Considerando la derivata si ottiene la conservazione della corrente

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

La conservazione della carica è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Si studiano le componenti del tensore di campo

$$F^{0i} = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = -\partial_t A^i - \nabla\phi = E^i$$

[r] Le componenti del tensore hanno perso il proprio senso assoluto: il campo elettrico diventa magnetico e viceversa.