

# Analysis 2

March 3, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Richiami di Analisi I, Algebra lineare e Geometria</b>	<b>2</b>
1.1	Distanza . . . . .	3
1.2	Forme quadratiche . . . . .	3
1.3	Limite . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Topologia di <math>\mathbb{R}^n</math>.</b>	<b>4</b>
2.1	Punti di accumulazione e limiti . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Funzioni in più variabili</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Continuità per funzioni vettoriali a più variabili</b>	<b>8</b>
4.1	Continuità uniforme . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Derivate di funzioni in più variabili</b>	<b>9</b>
5.1	Funzioni scalari . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Funzioni differenziabili</b>	<b>11</b>
6.1	Funzioni vettoriali . . . . .	12
6.2	Derivate successive ed Hessiana . . . . .	13
6.3	Composizione di funzioni . . . . .	14
6.4	Minimi, massimi e polinomio di Taylor . . . . .	15
6.4.1	Problema di ottimizzazione . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Calcolo integrale in più variabili</b>	<b>16</b>
7.1	Misura di insiemi in $\mathbb{R}^n$ (e funzioni continue) . . . . .	18
7.2	Integrali doppi . . . . .	19
7.3	Volumi dei solidi . . . . .	20
7.4	Cambio di variabili e determinante della Jacobiana . . . . .	21
7.5	Integrali impropri . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Successioni e serie di funzioni</b>	<b>24</b>
8.1	Successioni di funzioni e convergenza . . . . .	24
8.2	Convergenza uniforme e continuità . . . . .	25
8.3	Serie di funzioni . . . . .	27
8.4	Serie di potenze . . . . .	28
8.5	Serie di Fourier . . . . .	35
8.5.1	Trigonometria . . . . .	36
<b>9</b>	<b>Curve e superfici</b>	<b>42</b>
9.1	Curve . . . . .	42
9.2	Superfici . . . . .	45
9.3	Massimi e minimi vincolati. . . . .	49

<b>10 Forme differenziali</b>	<b>50</b>
10.1 Lavoro, circuizione, forme differenziali . . . . .	50
10.2 Forme esatte . . . . .	52
10.2.1 Rotore e divergenza in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	57
<b>11 Equazioni differenziali</b>	<b>58</b>
11.1 Problema ai valori iniziali . . . . .	60
11.2 Prolungamenti. . . . .	62
11.3 Equazioni differenziali lineari . . . . .	63
<b>12 Misura di Lebesgue</b>	<b>69</b>
12.1 Richiami . . . . .	69
12.2 Insiemi di misura nulla. . . . .	70
12.3 Misura interna e misura esterna . . . . .	71
12.4 Misura per insiemi qualsiasi . . . . .	73
12.5 Esempi ed applicazioni . . . . .	75
<b>13 Integrale di Lebesgue</b>	<b>79</b>
13.1 Integrale di Lebesgue . . . . .	81
13.2 Passaggio al limite sotto il segno di integrale . . . . .	84
<b>14 Spazi funzionali ed equazioni differenziali</b>	<b>87</b>
14.1 Spazi metrici . . . . .	87
14.2 Continuità e successioni . . . . .	90
14.2.1 Continuità . . . . .	90
14.2.2 Successioni . . . . .	91
14.3 Completezza . . . . .	91
14.4 Equazioni differenziali, esistenza ed unicità . . . . .	93

## Lecture 1: Introduzione

lun 04 ott  
2021 14:30

### 1 Richiami di Analisi I, Algebra lineare e Geometria

Si ha l'insieme dei numeri reali,  $\mathbb{R}$ , e gli spazi vettoriali delle ennuple ordinate,  $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$ . Alcuni esempi di loro elementi sono  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ ,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

I vettori colonna sono i tipici vettori, mentre i vettori riga sono detti forme lineari o covettori. Sono dei prerequisiti le nozioni di prodotto riga per colonna, prodotto matriciale, determinante, autovalori, autovettori e teorema spettrale.

Negli spazi vettoriali  $\mathbb{R}^n$  si ha:

- il prodotto scalare,  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ ,  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ,  $\underline{x} \cdot \underline{y}$ . Esso è definito come  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \equiv \underline{x} \cdot \underline{y} \equiv \sum x_i y_i$ , con  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- norma, dato  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ , la norma  $\|\underline{x}\|$  (talvolta pure  $|\underline{x}|$ )  $= \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{\sum x_i^2}$ .

Si vedono alcune proprietà:

- $\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$ ;
- $\underline{x}(a\underline{y} + b\underline{z}) = a\underline{x}\underline{y} + b\underline{x}\underline{z}$ ;
- $\|\underline{x}\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x}$ ;
- $|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ ;
- $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ , disuguaglianza "triangolare"; la lunghezza di un vettore è la sua norma;

- Siano  $\underline{v} = \underline{x} - \underline{y}$ ,  $\underline{w} = \underline{y} - \underline{z}$ . Allora

$$\|\underline{v} + \underline{w}\| = \|\underline{x} - \underline{z}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\| = \|\underline{x} - \underline{y}\| + \|\underline{y} - \underline{z}\|.$$

Cioè la disuguaglianza triangolare.

[immagini]

## 1.1 Distanza

Il termine distanza ha un significato preciso: essa uno scalare non negativo ed è una funzione di coppie di punti.

**Definizione.** La distanza tra  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$  è  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ .

**Proprietà.**

- $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$  e  $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$
- $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$ ;
- $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$ , disuguaglianza triangolare.

Queste proprietà caratterizzano completamente la distanza.

## 1.2 Forme quadratiche

Una forma quadratica è un polinomio omogeneo di  $n$  variabili,  $x_1, \dots, x_n$ , di (solo) grado 2.

**Esempio.**

- $x_1^2, x_1x_2, x_2^2$ ;
- $x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2$ ;
- ...;

Per  $n$  variabili si hanno  $\frac{n(n+1)}{2}$  diverse forme quadratiche. Una forma quadratica si può scrivere come

$$\top \underline{x} [\text{Matrice}] \underline{x}.$$

Infatti

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

cioè è la forma matriciale della forma quadratica.

Analogamente la forma lineare è  $a_1x_1 + a_2x_2$ ,  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  oppure  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

## 1.3 Limite

Limite dell'analisi. Si sono già visti i limiti come rapporti incrementali (in fisica), limiti di funzioni e limiti di successioni.

**Definizione.** Sia  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . Allora la palla di centro  $\underline{x}_0$  e raggio  $r$  è  $B_r(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{x}, \underline{x}_0) < r\}$ , con  $d(\underline{x}, \underline{x}_0) \equiv \|\underline{x} - \underline{x}_0\|$ . [immagini]

**Osservazione.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$ . Esso è un intorno circolare se e solo se esso è un intervallo aperto.

**Dimostrazione.** Se  $I$  è un intorno circolare allora tutti i suoi punti distano da  $\underline{x}_0$  strettamente meno di  $r$  dunque esso è  $I = \underline{x}_0 - r, \underline{x}_0 + r$ . Viceversa, se  $I = (a, b)$ , si pone  $r \equiv \frac{b-a}{2}$  e  $\underline{x}_0 \equiv \frac{a+b}{2}$ , dunque si ha  $\underline{x}_0 + r = b$  e  $\underline{x}_0 - r = a$ .

Ci si chiede come si può generalizzare tale intorno in  $\mathbb{R}^n$ . Risulta evidente come non si possa fare il prodotto di intervalli, in quanto si otterrebbe un rettangolo.

**Definizione.** Punto interno di  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Sia  $\underline{x}_0 \in S$ . Esso è interno se  $\exists r \in \mathbb{R}, r > 0 \mid B_r(\underline{x}_0) \subseteq S$ .

L'insieme dei punti di  $S$  che sono interni ad  $S$  si chiama interno di  $S$ , indicato con  $\overset{\circ}{S}$ .

**Definizione.** Punto esterno di  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Sia  $\underline{x}_0 \in S$ . Esso è esterno se è un punto interno al complementare di  $S$ , cioè a  $\mathbb{R}^n \setminus S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} \notin S\}$ .

## Lecture 2: Topologia

**Definizione.** Un punto di frontiera non è interno né esterno. L'insieme di tutti i punti di frontiera costituisce la frontiera.

mar 05 ott  
2021 17:30

Sia  $c \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r > 0$ . Si consideri la palla  $B_r(c)$  di centro  $c$  e raggio  $r$ . Dunque,  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  è

$$\begin{cases} \text{interno} & \text{se } \|\underline{x} - \underline{c}\| < r \\ \text{esterno} & \text{se } \|\underline{x} - \underline{c}\| > r \\ \text{di frontiera} & \text{se } \|\underline{x} - \underline{c}\| = r \end{cases}$$

**Punto interno.** Si vuole dimostrare che  $\|\underline{x} - \underline{c}\| < r \implies \exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(\underline{x}) \subset B_r(\underline{c})$ . Dunque, bisogna trovare un  $\varepsilon$  tale per cui l'affermazione implicata sia vera.  
immagine

Si consideri  $\varepsilon < r - \|\underline{x} - \underline{c}\|$ . Ora si mostra  $B_\varepsilon(\underline{x}) \subset B_r(\underline{c})$  cioè  $\underline{y} \in B_\varepsilon(\underline{x}) \implies \underline{y} \in B_r(\underline{c})$ . Quindi, per ipotesi si sa che

$$\underline{y} \in B_\varepsilon(\underline{x}) \iff \|\underline{y} - \underline{x}\| < \varepsilon < r - \|\underline{x} - \underline{c}\| \implies \|\underline{x} - \underline{c}\| + \|\underline{y} - \underline{x}\| < r \implies \|\underline{y} - \underline{c}\| \leq \|\underline{x} - \underline{c}\| + \|\underline{y} - \underline{x}\| < r.$$

L'ultimo passaggio fa uso della disuguaglianza triangolare. Pertanto,  $\underline{y} \in B_r(\underline{c})$  e quindi per l'arbitrarietà di  $\underline{y}$  si ha  $B_\varepsilon(\underline{x}) \subset B_r(\underline{c})$ .

**Punto esterno.** [esercizio]

## 2 Topologia di $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$ . L'insieme  $A$  è aperto se ogni suo punto è interno,  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**Proposizione.** Gli intorni sferici sono aperti.

**Dimostrazione.** L'intorno circolare è costituito solo da punti interni, dunque è un aperto.

**Proposizione.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Allora  $\overset{\circ}{S}$  è aperto. Dunque, l'insieme dei punti esterni è aperto.

**Dimostrazione.** [immagine]

Ogni punto interno presenta un intorno tutto contenuto in  $S$ . Inoltre,  $\overset{\circ}{S}$  è l'unione di tali intorni aperti quindi è aperto a sua volta:

$$B_\varepsilon(\underline{x}) \subset S \implies B_\varepsilon(\underline{x}) \subset \overset{\circ}{S}.$$

Inoltre, l'esterno è l'interno del complementare, dunque è aperto.

**Proposizione.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Esso è aperto se e solo se non contiene punti di frontiera,  $\partial A$  ( $\iff \partial A \cap A = \emptyset$ ).

**Dimostrazione.** Se  $A$  è aperto allora per definizione  $\partial A \cap A = \emptyset$ . Viceversa, si supponga  $\partial A \cap A = \emptyset$ . Sia  $x \in A$ , esso può essere interno, esterno o di frontiera. Per ipotesi esso non è di frontiera; non è nemmeno esterno perché  $x \notin \mathbb{R}^n \setminus A$ . Dunque è interno e, per la sua arbitrarietà,  $A$  è aperto.

**Proposizione.** Sia  $A_\alpha$  una famiglia di insiemi aperti. Allora  $\bigcup_\alpha A_\alpha$  è aperto. Dove  $\bigcup_\alpha A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha, x \in A_\alpha\}$ .

**Dimostrazione.** Se esiste un indice  $n$  tale per cui  $x \in A_n$  allora  $x$  è interno all'unione di tutti gli  $A_\alpha$ :  $A_\alpha \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$ . Dunque, l'unione è costituita solo da punti interni, pertanto è aperta.

**Proposizione.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi aperti. Allora  $A \cap B$  è aperto. Da cui segue che l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è a sua volta aperta.

**Dimostrazione.** Se  $\underline{x} \in A \cap B$  allora  $\underline{x} \in A$ , quindi  $\exists r_A \mid B_{r_A}(\underline{x}) \subset A$ ; inoltre  $\underline{x} \in B$  quindi  $\exists r_B \mid B_{r_B}(\underline{x}) \subset B$ . Si scelga  $r \leq \min(r_A, r_B)$ . Segue che  $B_r(\underline{x}) \subset A \cap B$  perché  $r \leq r_A$  e  $r \leq r_B$ .

### Lecture 3: Topologia 2 e funzioni in più variabili

gio 07 ott  
2021 16:30

**Definizione.** Un insieme  $C \subset \mathbb{R}$  è chiuso se  $C^c$  è aperto.

Da ciò seguono alcuni risultati interessanti.

**Proposizione.** Se  $S \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme, allora  $\partial S$  è un insieme chiuso di  $\mathbb{R}^n$ .

**Dimostrazione.** È noto  $\mathbb{R}^n \setminus \partial S = \overset{\circ}{S} \cup S^e$ . Dato che  $\overset{\circ}{S}$  è aperto e  $S^e$  pure, risulta che pure  $\mathbb{R}^n \setminus S$  è aperto perché unione di insiemi aperti. Pertanto  $\partial S$  è chiuso.

**Proposizione.** L'insieme  $C \subset \mathbb{R}^n$  è chiuso se e solo se  $\partial C \subset C$ .

**Dimostrazione.** Si sa che  $\partial C = \partial(\mathbb{R}^n \setminus C)$  e che l'interno di  $C$  è l'esterno del suo complementare e viceversa. Dunque,  $C$  è chiuso se e solo se  $\mathbb{R}^n \setminus C$  è aperto. I punti di frontiera del complementare non fanno parte del complementare stesso perché coincide con il suo interno. Dunque, i punti di frontiera sono solo in  $C$ .

**Proposizione.** L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è chiusa. L'unione di una famiglia finita di chiusi è chiusa.

**Dimostrazione.** La conclusione segue dalle leggi di de Morgan, infatti  $\bigcap_\alpha C_\alpha$  è chiuso se e solo se  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha$  è aperto. Tuttavia,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (\mathbb{R}^n \setminus C_\alpha)$  cioè è l'unione di insiemi aperti.

Similmente,  $\bigcup_j^n C_j$  è chiuso se e solo se  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j^n C_j$  è aperto. Ma,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j^n C_j = \bigcap_j^n (\mathbb{R}^n \setminus C_j)$ , cioè l'intersezione di insiemi aperti.

**Definizione.** La chiusura di  $S \subset \mathbb{R}^n$  è  $\overline{S} = S \cup \partial S$ .

**Proposizione.** Dato  $S \subset \mathbb{R}^n$ , la sua chiusura  $\overline{S}$  è un insieme chiuso.

**Dimostrazione.** L'insieme  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{S}$  è aperto perché non contiene la frontiera  $\partial S$ , pertanto  $S$  è chiuso.

## 2.1 Punti di accumulazione e limiti

**Definizione.** Un punto  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  è di accumulazione per  $S \subset \mathbb{R}^n$  se in ogni intorno  $B_r(\bar{x}_0)$  sono presenti infiniti punti di  $S$ . Equivalentemente,  $\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (B_r(\bar{x}_0) \setminus \{\bar{x}_0\}) \cap S \neq \emptyset$ .

**Definizione.** Dato  $S \in \mathbb{R}^n$ , il suo insieme derivato,  $S'$  è l'insieme dei punti di accumulazione di  $S$ .

**Proposizione.** Siano  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ , allora  $x \in \partial S \implies x \in S'$ .

**Dimostrazione.** Un punto  $x \in \partial S$  se e solo se non è interno né esterno, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap S^c \neq \emptyset.$$

Da ciò risulta che  $x$  è di accumulazione (si nota che  $x \in S^c$ ).

**Teorema.** Sia  $x \in \mathbb{R}$  qualsiasi, allora esso è punto di accumulazione per  $\mathbb{Q}$ . Equivalentemente,  $x \in \mathbb{R} \implies \exists \frac{p_n}{q_n} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ .

**Dimostrazione.** Per ogni intorno bisogna trovare un numero infinito di razionali vicino ad  $x$ . Si può supporre che in ogni intervallo ci sono infiniti elementi di  $\mathbb{Q}$ . Dunque, in ogni intorno  $B_r(x) = (x - r, x + r)$ , con  $r \rightarrow 0$ , ci sarebbero infiniti razionali in ogni intorno. Per dimostrare che in ogni intervallo ci siano infiniti elementi di  $\mathbb{Q}$  bisogna immaginarsi un intervallo qualsiasi. Si prendono i numeri razionali del tipo  $\frac{j}{10^k}$ , per un  $k$  abbastanza grande. Tali numeri sono distanziati equamente. Sebbene non siano una famiglia infinita, si può prendere un solo intervallo e porre dentro i numeri con al denominatore  $k + 1, k + 2, \dots$ , facendo l'unione con tutti i possibili denominatori grandi a piacere che i punti sono infiniti. Altrimenti, per assurdo, se ci fossero un numero finito di razionali, allora si troverebbero due irrazionali senza un razionale in mezzo, ma questa è una proprietà degli interi, non dei razionali. Prendendo la media di due qualsiasi numeri se ne ha un altro in mezzo. Quindi si può approssimare un numero reale con una famiglia di numeri razionali, ma ciò non vuol dire che si sa come approssimarlo.

**Definizione.** Limite di successione.

Sia  $\{\underline{x}_k\}_k$  una successione,  $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n, \forall k$ . Essa converge al limite  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid k > k_0 \implies \|\underline{x}_k - \tilde{x}\| < \varepsilon.$$

**Proposizione.** Sia  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \tilde{x}$  se e solo se tutte le componenti  $x_k^{(j)}$  convergono a  $\tilde{x}^{(j)}$ . Dove  $x_k^{(j)}$  è la  $j$ -esima componente di  $\underline{x}_k = (\underline{x}_1^{(1)}, \dots, \underline{x}_k^{(n)})$ .

## 3 Funzioni in più variabili

Il corso di Analisi II è incentrato sull'analisi matematica multivariata.

Una funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione scalare,  $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ . Si similmente una funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione vettoriale,  $\underline{x} \mapsto \underline{y} = f(\underline{x})$ .

Per una funzione scalare si ha  $f(x_1, \dots, x_n)$ , dove  $x_j$  è la  $j$ -esima componente del vettore. Per una funzione vettoriale si ha  $\underline{y} = f(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x})$  un vettore di funzioni  $\underline{F}(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots, F_m(\underline{x}))$ .

**Campo vettoriale** in  $\mathbb{R}^n$ . Ad ogni ennupla si associa il vettore  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} \mapsto \underline{F}(\underline{x})$ . Tuttavia, sorge il problema di come poter visualizzare un campo vettoriale.

**Visualizzare un campo scalare.** Per due variabili si può utilizzare una superficie  $z = f(x, y)$ , oppure le isoplete (le curve di livello), dove ogni curva è la soluzione di  $f(x, y) = k$ , per qualche  $k$ . [immagine]

**Esempio.**

- Si consideri  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . [immagini]  
Tale funzione dipende dalla distanza dall'origine, ma non dall'angolo. Dunque, essa è una superficie di rotazione.
- Si consideri  $f(x, y) = x^2 - y^2 = z$  [immagini]

**Definizione.** Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  di accumulazione per  $X$ . Si dice che  $f$  converge al limite  $\underline{L}$  per  $\underline{x}$  che tende a  $\underline{x}_0$ :

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{L} \quad \left( \Longleftrightarrow \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \|f(\underline{x}) - \underline{L}\| = 0 \right).$$

Se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \underline{x} \in B_\delta(\underline{x}_0), \underline{x} \neq \underline{x}_0 \implies f(\underline{x}) \in B_\varepsilon(\underline{L}).$$

**Proprietà.**

- $\lim f + g = \lim f + \lim g$
- $\lim fg = \lim f \cdot \lim g$
- $\lim f(g) = \dots$
- Teorema di permanenza del segno ( $f$  scalare: deve valere per ogni componente)
- Come per  $\mathbb{R}$ , sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , allora

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \iff \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \mid \underline{x} \in B_\delta(\underline{x}_0), \underline{x} \neq \underline{x}_0 \implies f(\underline{x}) > L.$$

Nell'esempio di prima si ha  $z = f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ , tuttavia quando  $x, y \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow \infty$  ma ci si chiede di quale segno. [immagine]

## Lecture 4: Continuità

Si richiamano alcuni concetti degli spazi euclidei e delle nozioni di compattezza.

ven 08 ott  
2021 13:30

**Teorema.** di Bolzano-Weierstrass. Sia  $S \in \mathbb{R}^n$  limitato e infinito. Esso presenta almeno un punto di accumulazione in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione.** Un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  è compatto (per successioni) se ogni successione in  $X$  ammette una sotto successione che converge ad un limite in  $X$  (ogni successione ammette una sotto successione che converge in  $X$ ).

**Teorema.** Ogni successione limitata di  $\mathbb{R}^n$  ammette una sotto successione convergente.

**Nota.** Tutte le cose trattate in Analisi I hanno il loro corrispettivo in  $\mathbb{R}^n$ . Le definizioni e le dimostrazioni sono simili.

**Teorema.** Heine-Borel. Un insieme  $K \subset \mathbb{R}^n$  è compatto (per successioni) se e solo se  $K$  è chiuso e limitato.

**Definizione.** Sia  $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Allora  $\{\underline{x}_k\}_k$  è una successione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid h, k > k_0 \implies \|\underline{x}_k - \underline{x}_h\| < \varepsilon.$$

**Proposizione.** Una successione  $\{\underline{x}_k\}_k$  di  $\mathbb{R}^n$  è di Cauchy se e solo se pure le sue componenti sono successioni di Cauchy:  $\underline{x}_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$ .

**Teorema.** della completezza di  $\mathbb{R}^n$ . Tutte le successioni di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$  convergono in  $\mathbb{R}^n$ . Vale anche il viceversa: in  $\mathbb{R}$  si sa che vale la doppia implicazione, quindi se la successione è di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ , allora ogni sua componente lo è essa stessa, ma ogni componente ha elementi di  $\mathbb{R}$ , dunque converge; ma se ogni componente converge, allora pure la successione di  $\mathbb{R}^n$  converge a sua volta.

**Definizione.** (Non detta esplicitamente). Il diametro di un insieme è la massima distanza in tale insieme.

## 4 Continuità per funzioni vettoriali a più variabili

**Definizione.** Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione e  $\underline{x}_0 \in X$  un punto del suo dominio. Allora  $f$  è continua in  $\underline{x}_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in B_\delta(\underline{x}_0) \cap X \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(\underline{x}_0)).$$

La formulazione equivalente è

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in B_\delta(\underline{x}_0) \cap X, f(x) \in B_\varepsilon(f(\underline{x}_0)).$$

Se  $f$  è continua  $\forall x \in X$  allora si dice che  $f$  è continua in  $X$ .

**Proposizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua se e solo se sono continue le sue componenti. Con  $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(m)}) \equiv (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))$ .

**Teorema.** Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione e  $\underline{x}_0 \in X$  un punto di accumulazione per  $X$ . Dunque,  $f$  è continua in  $\underline{x}_0$  se e solo se  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$ .

**Esempio.** Sia  $X = \{0\} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$ . Allora  $f$  è continua in  $0$ .

**Osservazione.** Una funzione è sempre continua nei punti isolati.

**Proposizione.** Una funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua se e solo se la controimmagine di ogni insieme aperto di  $\mathbb{R}^m$  è un insieme aperto di  $X$ .

La controimmagine di un insieme  $U \in \mathbb{R}^m$  è  $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\} \in X$ .

**Esempio.** Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Essa è discontinua. Si mostra l'esistenza di almeno un insieme aperto la cui controimmagine non è un insieme aperto: qualsiasi intervallo che contenga 0 oppure 1 è un valido esempio (perché  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  non sono aperti né chiusi, ma contengono solamente punti di frontiera).



**Proposizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua se e solo se la controimmagine di ogni insieme chiuso di  $\mathbb{R}^m$  è un insieme chiuso di  $X$  a sua volta.

**Proposizione.** La composizione di funzioni continue è una funzione continua.

**Teorema.** dei valor intermedi. Sia  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $I \subset X$  un intervallo. Allora,  $f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, f(x) = y\}$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Tale teorema non ha un corrispettivo in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione.** (Non detta esplicitamente). Un intervallo è un insieme per cui per ogni coppia di punti, tutti i punti nel mezzo fanno parte dell'intervallo.

**Teorema.** Weierstrass. Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $X$  un insieme compatto. Allora  $f$  ammette un massimo ed un minimo in  $X$ . Cioè

$$\exists x_1, x_2 \in X \mid f(x_1) = \min_{x \in X} f(x) \wedge f(x_2) = \max_{x \in X} f(x).$$

## 4.1 Continuità uniforme

**Definizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è uniformemente continua se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta \implies \|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| < \varepsilon.$$

**Teorema.** Heine-Cantor. Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione continua e sia  $X$  compatto. Allora  $f$  è uniformemente continua in  $X$ .

## Lecture 5: Derivate di funzioni in più variabili

lun 11 ott  
2021 14:30

## 5 Derivate di funzioni in più variabili

### 5.1 Funzioni scalari

**Definizione.** Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{v} \neq \underline{0}$  vettore direzione e sia  $\underline{x}_0 \in X$ . La derivata direzionale di  $f$  in  $\underline{x}_0$  lungo  $\underline{v}$  è

$$(D_{\underline{v}}f)(\underline{x}_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ se il limite esiste.}$$

**Osservazione.** In alcuni testi si pone  $\|\underline{v}\| = 1$ .

[immagine]

L'espressione  $\underline{x}_0 + t\underline{v}$  è una retta parametrizzata da  $t$ . Infatti,  $t = 0 \implies \underline{x}_0$ ;  $t = 1 \implies \underline{x}_0 + \underline{v}$ . Dunque,  $z = f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$  è una funzione di  $t \in \mathbb{R}$  (inoltre  $t$  dev'essere tale per cui  $\underline{x}_0 + t\underline{v} \in X$ ) e si ha un grafico nel piano  $tz$ .

**Definizione.** Siano  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$  i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Le derivate parziali sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) &\equiv \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_j}(\underline{x}_0) \equiv (D_{\underline{e}_j}f)(\underline{x}_0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_j) - f(\underline{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{t}. \end{aligned}$$

Quando il limite esiste. Varia solo la variabile  $x_j$  e le altre rimangono costanti; quindi si applicano le stesse regole di derivazione delle funzioni ad una sola variabile.

Altri simboli  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv \partial_{x_1} f \equiv D_{x_1} f \equiv f_{x_1}$ .

**Esempio.**

- $f = x^2 \cos y$ ;  $\partial_x f = 2x \cos y$ ;  $\partial_y f = -x^2 \sin y$ .
- $f = xye^{xy}$ ;  $\partial_x f = ye^{xy} + xy^2e^{xy}$ ;  $\partial_y f = xe^{xy} + x^2ye^{xy}$ .

**Definizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{x}_0 \in X$ , è derivabile in  $\underline{x}_0$  se possiede tutte le derivate parziali in  $\underline{x}_0$ . Si dice derivabile in  $X$  se è derivabile in tutti i punti di  $X$ .

**Definizione.** Il gradiente di  $f$  in  $\underline{x}_0 \in X$  è il vettore che ha per componenti le derivate parziali di  $f$  in  $\underline{x}_0$ . I simboli sono  $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \equiv Df \equiv \nabla f \equiv \nabla f$ . Tuttavia, più avanti tali simboli avranno significati diversi.

**Osservazione.** Se  $f$  è derivabile in  $X \subset \mathbb{R}^n$ , allora il gradiente è un campo vettoriale su  $X$ .

**Nota.** Vettori e covettori. Si prenda un sistema di coordinate  $\underline{x}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Cambiando sistema di riferimento, cambia anche la descrizione del gradiente.

Le coordinate dei vettori si moltiplicano da sinistra con una matrice,  $\vec{v} = v^i \underline{e}_i$ . Le coordinate dei covettori si moltiplicano da destra con una matrice,  $\alpha = \alpha_i \underline{e}^i$ .

**Esempio.** Si consideri

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq \underline{0} \\ 0 & \text{se } (x, y) = \underline{0} \end{cases}.$$

Si vede se le restrizioni di  $f$  sono derivabili in  $\underline{0}$ :

$$f(x, 0) = \frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^4} = 0, \quad f(0, y) = \frac{0 \cdot y^2}{0^2 + y^4} = 0.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \partial_x f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \\ \partial_y f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Tuttavia,  $f$  non è continua. Infatti, sia  $\underline{v} = (\alpha \ \beta)$ :

$$f(t\underline{v}) = f(t\alpha, t\beta) = \frac{t^3 \alpha \beta^2}{t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4} = \frac{t \alpha \beta^2}{\alpha^2 + t^2 \beta^4}.$$

Quindi

$$\partial_t f(t\underline{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\underline{v}) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + t^2 \beta^4} = \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

con  $\alpha, \beta \neq 0$ . Inoltre  $f(t^2, t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$ .

La funzione è nulla sugli assi, ma vale  $\frac{1}{2}$  sulla parabola  $x = y^2$ . Pertanto, essa non è continua.

**Teorema.** Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\underline{v} \neq \underline{0}$ ,  $f$  ha massimo o minimo in  $\underline{x}_0$  interno ad  $X$  ed esiste  $\partial_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)$  allora

$$\partial_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = 0.$$

**Dimostrazione.** Sia  $g(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$ . Essa ha un massimo o minimo per  $t = 0$ . Dunque,  $g'(0) = 0$  perché è ad una variabile  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tuttavia

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \equiv \partial_{\underline{v}} f(\underline{x}_0).$$

**Definizione.** Il punto  $\underline{x}_0 \in X$  è stazionario (o critico) di  $f$  se  $\nabla f = 0$ , cioè se  $\partial_{x_j} f = 0, \forall j$ .

**Corollario.** Se  $f$  è derivabile in  $\underline{x}_0 \in X$  interno, massimo o minimo, allora  $\underline{x}_0$  è stazionario (o critico).

## 6 Funzioni differenziabili

Derivabile  $\neq$  differenziabile.

**Definizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $\underline{x}_0 \in X$  se

$$\begin{aligned} \exists \underline{L} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + \langle \underline{L}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \\ &= f(\underline{x}_0) + l(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|). \end{aligned}$$

Con  $l$  forma lineare.

**Landau.** Si ricorda il significato dei simboli di Landau:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{L}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle &= o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \iff \\ \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{L}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} &= o(1) \iff \\ \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{L}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} &= 0. \end{aligned}$$

Quando  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$  allora  $\underline{L}$  si dice  $f'$ ,  $Df$ ,  $\partial_{\underline{x}} f$ ,  $(\nabla f)$  sebbene il gradiente è più legato alle derivate parziali).

**Teorema.** Se  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , allora:

- $f$  è continua in  $\underline{x}_0$  (non basta essere derivabile)
- $f$  è derivabile in  $\underline{x}_0$
- $\underline{L} = \nabla f$  è detto differenziale di  $f$  in  $\underline{x}_0$

e vale

$$\partial_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle = df(\underline{x}_0)\underline{v}.$$

con  $df(\underline{x}_0) = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)$ . Il prodotto scalare standard è lineare rispetto  $\underline{v}$  dunque pure la derivabilità è lineare.

Inoltre, il gradiente può essere presente anche se la funzione non è differenziale, ma solo derivabile.

**Esempio.** Sia  $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ . Allora  $\nabla f = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Infatti

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \nabla f(\underline{x}_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|\right) \\ \alpha x + \beta y - \alpha x_0 - \beta y_0 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|\right) \\ \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) &= \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|\right). \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio risulta chiaro che  $o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|\right) = 0$ .

Dunque nell'esempio di prima, la funzione  $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$  non è differenziabile in  $(0,0)$  perché non è continua e  $\underline{v} \mapsto \partial_{\underline{v}} f$  non è lineare:  $\partial_t f(t\underline{v}) = \frac{\beta^2}{\alpha}$ . Se fosse lineare, allora  $\underline{v} = \alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2$ . Quindi  $\partial_{\underline{v}} f = \alpha \partial_x f + \beta \partial_y f = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ .

**Definizione.** Gradiente e curve di livello. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora una curva di livello è  $z = f(x, y)$ . [immagine]  
 Si calcola la derivata direzionale quando la funzione è differenziabile in  $\underline{x}_0$ . Sia  $\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .  
 Dunque

$$D_{\underline{v}}f = \nabla f \cdot \underline{v} \iff D_{\underline{v}}f = \partial_t f(\underline{x}_0 + t\underline{v}).$$

Supponendo  $\|\underline{v}\| = 1$ , la massima, minima pendenza si ha per  $\underline{v} \parallel \nabla f$ .

**Piano tangente** Il piano tangente a  $z = f(x, y)$  esiste se  $f$  è differenziabile perché

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \underline{L}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle.$$

è la formula di un piano nello spazio.

## Lecture 6: Piano tangente

Il piano tangente di  $z = f(x, y)$  esiste se  $f$  è differenziabile. Si fissa uno  $y = y_0$  e si ha

mar 12 ott  
2021 17:30

$$z = z_0 + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) \iff \frac{z - z_0}{x - x_0} = \partial_x f(x_0, y_0).$$

Similmente, fissato  $x = x_0$  si ha

$$z = z_0 + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \iff \frac{z - z_0}{y - y_0} = \partial_y f(x_0, y_0).$$

L'equazione di un piano che passa in  $(x_0, y_0, z_0)$  è

$$z = z_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0).$$

Se  $x = x_0$  allora  $z = z_0 + \beta(y - y_0)$ . Se  $y = y_0$  allora  $z = z_0 + \alpha(x - x_0)$ . Queste rette devono essere uguali a quelle calcolate prima, che definiscono il piano. Quindi  $\alpha = \partial_x f(x_0, y_0)$  e  $\beta = \partial_y f(x_0, y_0)$ . Dunque l'equazione del piano tangente è

$$z = z_0 + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Teorema.** Differenziale totale. Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  aperto,  $\underline{x}_0 \in X$ . Se  $f$  ha derivate parziali in un intorno di  $\underline{x}_0$  e sono continue in  $\underline{x}_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ .

**Definizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è detta di classe  $C^1$  in  $X$  e si scrive  $f \in C^1(X)$  se ha derivate parziali continue in  $X$  (dunque  $f$  è differenziabile in  $X$ ). Si considera  $C^0$  l'insieme delle funzioni continue.

## 6.1 Funzioni vettoriali

**Definizione.** La funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice differenziabile in  $\underline{x}_0 \in X$  se esiste un operatore lineare  $f' = df = L$ :

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$$

$$\iff f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|).$$

Tutte le  $m$  componenti di  $f$  sono differenziabili, in simboli  $f' \equiv df \equiv J_f$  cioè essa è la matrice jacobiana. La matrice associata è  $m \times n$ :

$$\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right], \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Si moltiplica il vettore da sinistra,  $\underline{v} \mapsto f'(\underline{v})$  utilizzando il prodotto righe per colonne. Invece, il differenziale  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $df$ , è una matrice  $1 \times n$ . Dunque è un vettore riga, mentre il gradiente è un vettore colonna.

Se  $n = 1$  allora  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $t \mapsto \underline{x}(t)$  e si hanno delle curve nello spazio di dimensione  $m$ , con  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , la cui derivata si scrive  $\underline{x}' \equiv \dot{\underline{x}} \equiv \frac{d\underline{x}}{dt}$ .

## 6.2 Derivate successive ed Hessiana

La derivata seconda utilizza come simboli

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv D_{xx}f \equiv f_{xx}.$$

Per le derivate miste si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv D_{yx}f \equiv (f_x)_y = f_{xy}.$$

**Teorema.** Derivate miste, Schwarz-Clairaut. Se  $f$  ha derivate miste in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e sono continue in tale punto allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Tale teorema vale per ogni  $n \geq 2$  variabili e per le derivate successive.

**Corollario.** La matrice  $n \times n$  delle derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{per } f(x_1, \dots, x_n).$$

è simmetrica se vale il teorema. Essa è detta matrice Hessiana. Per una funzione scalare essa è di dimensioni  $n \times n$ .

**Esercizio.** Trovare la matrice Hessiana della seguente forma quadratica:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

## Lecture 7

**Esempio.** Matrice Hessiana di una forma quadratica. Si consideri

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Dunque l'Hessiana risulta essere

$$H = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}.$$

Infatti, in generale, si consideri  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ , se  $f(\underline{x}) = {}^T \underline{x} M \underline{x}$ ,  ${}^T M = M$  allora la matrice Hessiana è  $f = 2M$ . L'Hessiana non dipende dalle coordinate del punto in cui si valutano le coordinate.

**Parentesi sulle forme quadratiche.** Sia  $q(\underline{x})$  una forma quadratica in  $x_1, \dots, x_n$ , cioè un polinomio omogeneo di grado 2. Essa si può scrivere in forma matriciale come

$$q(\underline{x}) = {}^T \underline{x} M \underline{x}, \quad {}^T M = M.$$

Dove  ${}^T \underline{x} \in (\mathbb{R}^n)^*$ ,  $M \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$  e  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ .

ven 15 ott  
2021 13:30

**Teorema.** Completamento dei quadrati di Lagrange. Con operazioni del tipo:

- Sostituire ad una variabile  $x_j$  la somma  $\hat{x}_j + bx_k$ , con  $k \neq j$  e  $b \in \mathbb{R}$ .
- Con  $j \neq k$  indici, si sostituisce  $\hat{x}_j + \hat{x}_k$  a  $x_j$ , e si sostituisce  $\hat{x}_j - \hat{x}_k$  a  $x_k$ .

È possibile scrivere  $q(\underline{x})$  in forma diagonale

$$q(\underline{x}) = c_1 x_1^2 + \dots + c_n x_n^2.$$

con  $c_j \in \mathbb{R}$ .

**Esempio.** Si  $q(x, y) = x^2 + y^2 - bxy$ . Si vuole ottenere  $q = c_1 \hat{x}^2 + c_2 \hat{y}^2$ . Dunque sostituendo  $\hat{x} + \beta y$  a  $x$  e  $\hat{y} + \beta x$  a  $y$  si ottiene

$$\begin{aligned} q &= x^2 + (\hat{y} + \beta x) - bx(\hat{y} + \beta x) = x^2 + \hat{y}^2 + 2\beta x\hat{y} + \beta^2 x^2 - bx\hat{y} - b\beta x^2 \\ &\implies 2\beta - b = 0 \iff \beta = \frac{b}{2} \\ &\implies q = x^2 + y^2 + \frac{b^2}{4}x^2 - \frac{b^2}{2}x^2 = \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 1\right)x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{b^2}{4}\right)x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Ci si chiede quando sia definita positiva (negativa) cioè  $\underline{x} \neq \underline{0} \implies q(\underline{x}) > 0$  ( $< 0$  negativa). Così come ci si chiede quando è semi-definita positiva (negativa) cioè  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, q(\underline{x}) \geq 0$  ( $\leq$  per negativa).

La forma  $q = \left(1 - \frac{b^2}{4}\right)x^2 + y^2$  è definita positiva per  $1 - \frac{b^2}{4} > 0$ ; mentre semi-definita positiva per  $1 - \frac{b^2}{4} \geq 0$ . Se  $1 - \frac{b^2}{4} < 0$  allora non è definita positiva né negativa (cioè è indefinita, è una sella).

**Teorema.** Legge di inerzia di Sylvester. Sia  $q(\underline{x})$  forma quadratica in  $\mathbb{R}^n$ . Allora esistono degli indici  $p$  e  $n$  tali che in certe coordinate  $\hat{x} = Mx$  si ha

$$\hat{q}(\underline{x}) = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_p^2 - \hat{x}_{p+1}^2 - \dots - \hat{x}_r^2.$$

L'indice  $p$  è detto di positività, mentre l'indice  $q$  è detto di negatività; mentre  $r = p + q$  indica il rango. Inoltre, la matrice  $M \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$  è la matrice del cambio lineare di coordinate. Quando si diagonalizza la forma quadratica, poi si può normalizzare le variabili (così da ottenere qualcosa di analogo alla forma canonica di Sylvester). Il teorema implica che l'essere definito positivo non dipende dal calcolo della forma diagonale.

### 6.3 Composizione di funzioni

**Definizione.** Siano  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : Y \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  due funzioni. Se  $\underline{x} \in X$  e  $f(\underline{x}) \in Y$  allora si definisce la funzione composta

$$g \circ f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \underline{x} \mapsto (g \circ f)(\underline{x}) = g(f(\underline{x})).$$

**Teorema.** Si considerino  $f \in C^1(X, Y \subset \mathbb{R}^m)$  e  $g \in C^1(Y, \mathbb{R}^k)$ . Allora la funzione composta  $g \circ f \in C^1(X, \mathbb{R}^k)$  e vale  $(g \circ f)' = g' \cdot f'$  oppure equivalentemente  $d(g \circ f) = dg \cdot df$ . Dove la moltiplicazione è da intendersi come il prodotto tra matrici:

$$g' \cdot f' = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} g_1 & \dots & \partial_{y_m} g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} g_k & \dots & \partial_{y_m} g_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{bmatrix}.$$

**Esempio.** Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tali che  $P(t) = (x(t), y(t))$  e  $f(P(t)) = f(x(t), y(t))$ . Quindi la derivata è

$$\frac{d}{dt}(f \circ P) = f' \cdot P' = \begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \partial_x f \cdot \dot{x} + \partial_y f \cdot \dot{y}.$$

**Esempio.** Siano  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  direzione,  $\underline{v} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{x}_0 \in X$ ,  $g(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$ ,  $\underline{x}(t) = P(t) = \underline{x}_0 + t\underline{v}$ . Dunque

$$\dot{g} = f' \cdot \underline{x}' = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f & \dots & \partial_{x_n} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = {}^\top (\nabla f) \underline{v} = df \underline{v} = \langle \nabla f, \underline{v} \rangle = D_{\underline{v}} f.$$

Inoltre

$$\ddot{g} = \frac{d}{dt}(df \underline{v}) = \frac{d}{dt}(\nabla f \cdot \underline{v}) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) \cdot v_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} [\partial_{x_j} f(\underline{x}_0 + t\underline{v})] \cdot v_j.$$

Dato

$$\frac{d}{dt} [\partial_{x_j} f(\underline{x}_0 + t\underline{v})] = d(\partial_{x_j} f) \cdot \underline{v} = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} (\partial_{x_j} f) \cdot v_k.$$

Si ha

$$\ddot{g} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} v_k v_j.$$

Quindi per  $t = 0$  si ha  $\ddot{g}(0) = {}^\top \underline{v} \nabla^2 f \underline{v}$ , dove  $\nabla^2 f$  è l'Hessiana di  $f$ ; mentre  $\dot{g}(0) = \nabla f \cdot \underline{v}$ .

## 6.4 Minimi, massimi e polinomio di Taylor

**Teorema.** Sia  $\underline{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^2(X, \mathbb{R})$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  aperto (oppure  $\underline{x}_0$  interno). Se  $\underline{x}_0$  è di massimo relativo, locale, allora

- $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$
- La matrice Hessiana  $D^2 f(\underline{x}_0)$  è semi-definita negativa (positiva) se massimo (minimo).

**Teorema.** Sia  $f$  come sopra,  $\underline{x}_0 \in X$  qualsiasi interno. Allora il polinomio di Taylor di  $f$  è

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \overbrace{f'(\underline{x}_0)}^{\text{riga}} \overbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}^{\text{colonna}} + \frac{1}{2} {}^\top (\underline{x} - \underline{x}_0) D^2 f(\underline{x}_0) (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2).$$

Equivalentemente si ha

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\underline{x}_0) (\underline{x} - \underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2).$$

**Corollario.** Se  $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$  e  $D^2 f(\underline{x}_0)$  è definita positiva, negativa (cioè  $\underline{x}_0$  è un punto critico, stazionario), allora  $\underline{x}_0$  è punto di minimo, massimo, locale stretto.

Infatti  $f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2} {}^\top (\underline{x} - \underline{x}_0) D^2 f(\underline{x}_0) (\underline{x} - \underline{x}_0)$ :

- Se definita positiva allora  $D^2 f > 0 \implies f(\underline{x}) > f(\underline{x}_0)$ .
- Se definita negativa allora  $D^2 f < 0 \implies f(\underline{x}) < f(\underline{x}_0)$ .

### 6.4.1 Problema di ottimizzazione

**Teorema.** Criterio di Sylvester. Sia  $q$  una forma quadratica su  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $A$  la sua matrice associata:  $q = {}^T \underline{x} A \underline{x}$ ,  ${}^T A = A$ . Siano  $d_1, \dots, d_n$  i determinanti delle sotto-matrici principali. Dunque  $q$  è definita positiva se e solo se  $d_j > 0, \forall j$ .

**Esempio.** Si tratta il caso  $2 \times 2$ . Si consideri una matrice arbitraria bidimensionale simmetrica. Si può completare i quadrati, ma con il precedente criterio si può essere più veloci. Dunque,  $d_1 = a$ ,  $d_2 = ac - b^2$ . Quindi

- Se  $d_1 > 0$  e  $d_2 > 0$  allora la matrice è definita positiva (e se fosse una Hessiana, allora il punto corrispondente alla matrice sarebbe un minimo).
- Se  $d_1 > 0$  e  $d_2 < 0$  allora il teorema vale anche per matrici diagonali il cui determinante è il prodotto dei termini sulla diagonale, dunque per  $d_2$  se il primo termine (equivalente a  $d_1$ ) è positivo allora per forza il secondo sulla diagonale è negativo; dunque la matrice è indefinita.
- Se  $d_1 < 0$  e  $d_2 > 0$  allora è definita negativa e ciò risulta apparente sempre per lo stesso ragionamento.
- Se  $d_1 < 0$  e  $d_2 < 0$  allora è indefinita per lo stesso ragionamento.

## Lecture 8

lun 18 ott  
2021 14:30

## 7 Calcolo integrale in più variabili

**Definizione.** Un intervallo o rettangolo di  $\mathbb{R}^n$  è il prodotto cartesiano di  $n$  intervalli di  $\mathbb{R}$ :

$$I = \prod_{j=1}^n I_j = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Un intervallo è un sottoinsieme di quattro tipi

- $[a_j, b_j]$
- $[a_j, b_j)$
- $(a_j, b_j]$
- $(a_j, b_j)$

con  $a_j < b_j$ .

**Proposizione.** L'interno di  $I$  è il prodotto

$$\overset{\circ}{I} = \prod_{j=1}^n \overset{\circ}{I}_j.$$

**Definizione.** La misura di un insieme è

$$m(I) = \prod_{j=1}^n m(I_j) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

La misura di un intervallo è la sua lunghezza. Il concetto di misura estende a più dimensione la lunghezza, l'area ed il volume.



**Definizione.** La funzione caratteristica o indicatrice di  $S \subset \mathbb{R}^n$  è

$$\chi_S(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{x} \in S \\ 0 & \text{se } \underline{x} \notin S \end{cases}.$$

**Definizione.** La funzione a gradini (step function) è una combinazione lineare finita a coefficiente reali di un numero finito di funzioni caratteristiche di intervalli di  $\mathbb{R}^n$ . Quindi

$$\varphi = \sum_{k=1}^l f_k \chi_{I_k}.$$

con  $f_k \in \mathbb{R}$ , coefficiente e  $I_k \subset \mathbb{R}^n$  intervallo. Inoltre

$$\varphi(\underline{x}) = \sum_{k=1}^l f_k \chi_{I_k}(\underline{x}).$$

[rivedi]

Se  $\exists! \mid \underline{x} \in I_k$  allora  $\varphi(\underline{x}) = f_k \overbrace{\chi_{I_k}}^1 = f_k$ .

Lo spazio di tutte le funzioni a gradini in  $\mathbb{R}^n$  è  $\mathcal{S}$  ed è uno spazio vettoriale.

**Definizione.** Sia  $f \in \mathcal{S}$ . Se  $f = \sum_{k=1}^l f_k \chi_{I_k}$  allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) d\underline{x} \equiv \sum_{k=1}^l f_k m(I_k).$$

**Osservazione.** [rivedi] Questa è una definizione ben posta perché non dipende dalla forma con cui è scritta  $f$ . Se  $f = \sum_{k=1}^l f_k \chi_{I_k} = \sum_{j=1}^m g_j \chi_{A_j}$  cioè la combinazione lineare non è unica:  $\chi_{I_1} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$ , con  $I_1 = A_1 \cup A_2$ . Allora  $\int f(\underline{x}) d\underline{x}$  non cambia

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^l f_k m(I_k) \\ \sum_{j=1}^m g_j m(A_j) \end{cases}.$$

**Definizione.** Il supporto di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è

$$\text{supp}(f) = \overline{\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) \neq 0\}}.$$

la chiusura dell'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  dove  $f$  non si annulla.

Una funzione a supporto compatto è una funzione il cui insieme supporto è compatto, cioè limitato perché è sempre chiuso.

**Definizione.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata ed a supporto compatto. Siano  $\mathcal{S}^-$  e  $\mathcal{S}^+$  insiemi di funzioni a gradini minoranti e maggioranti rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^- &= \{\varphi \in \mathcal{S} \mid \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\underline{x}) \leq f(\underline{x})\} \\ \mathcal{S}^+ &= \{\varphi \in \mathcal{S} \mid \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\underline{x}) \geq f(\underline{x})\}. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale inferiore e superiore sono

$$\begin{aligned} \int_- f &= \sup_{\varphi \in \mathcal{S}^-} \int \varphi d\underline{x} \\ \int^+ f &= \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^+} \int \varphi d\underline{x} \end{aligned}.$$

Dunque  $f$  è integrabile secondo Riemann se

$$\int_{\underline{f}} f = \int_{\bar{f}} f \left( \equiv \int f(\underline{x}) d\underline{x} \right).$$

**Definizione.** Sia  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora

$$\int_X f(\underline{x}) d\underline{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) \chi_X(\underline{x}) d\underline{x} \quad \text{quando esiste.}$$

**Esercizio.** Ci si chiede se  $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$  è integrabile. Per  $\varphi(x) \leq f(x)$  e  $x \notin \mathbb{Q} \implies f(x) = 0$ , si prendono  $I_k$  disgiunti e dunque  $\varphi(x) \leq 0$  in ogni  $I_k$ , pertanto  $\int f = \sup \leq 0$ . Mentre per  $\varphi(x) \geq f(x)$  e  $x \in \mathbb{Q} \implies f(x) = 1$ ; prendendo  $I_k$  disgiunti si ha  $\varphi(x) \geq 1$  in  $I_k$  quindi  $\int f = \inf \geq 1$ .

## 7.1 Misura di insiemi in $\mathbb{R}^n$ (e funzioni continue)

**Definizione.** L'insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  limitato è misurabile secondo Peano-Jordan se  $\chi_X$  è Riemann integrabile:

$$m(X) \equiv \int \chi_X(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Si dice  $\overline{m}(X) = \int \chi_X d\underline{x}$  la misura esterna, mentre  $\underline{m}(X) = \int \chi_X d\underline{x}$  la misura interna.

**Proposizione.** Segue che

$$\begin{aligned} \overline{m}(X) &= \inf \{m(P) \mid X \subseteq P, P \text{ unione finita di intervalli}\} \\ \underline{m}(X) &= \sup \{m(P) \mid P \subseteq X, P \text{ unione finita di intervalli}\}. \end{aligned}$$

e  $\chi_X$  è Riemann integrabile se e solo se  $\overline{m}(X) = \underline{m}(X)$ .

**Corollario.** L'insieme  $X$  è Peano-Jordan misurabile se e solo se  $\partial X$  ha misura nulla.

**Esempio.** L'insieme  $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  non è misurabile secondo Peano-Jordan. Infatti sia  $I_k$  un intervallo. Dunque

- $I_k \subset X \implies I_k = \emptyset, a_j$ . Quindi, ha misura zero.
- Sia  $\bigcup_{k=1}^l I_k$  un intervallo. Segue  $X \subset \bigcup_{k=1}^l I_k \implies [0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^l I_k \implies \overline{m} \geq 1$

Dato che  $[0, 1]$  ha misura 1 e  $X \subset [0, 1]$  segue  $\overline{m}(X) = 1$ .

**Teorema.** Sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $X$  Peano-Jordan misurabile e compatto. Allora  $f$  è Riemann integrabile in  $X$ .

**Proposizione.**

- Linearità.

$$\int_X \alpha f(\underline{x}) + \beta g(\underline{x}) d\underline{x} = \alpha \int_X f(\underline{x}) d\underline{x} + \beta \int_X g(\underline{x}) d\underline{x}.$$

- Se esistono il minimo ed il massimo di  $f$  in  $X$  ed  $f$  è Riemann integrabile in  $X$  allora

$$\min f \leq \frac{1}{m(X)} \int_X f(\underline{x}) d\underline{x} \leq \max f.$$

- Se  $f \leq g$  (cioè  $\forall \underline{x}, f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ ) allora

$$\int_X f(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \int_X g(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

- Se  $f \geq 0$  e  $A \subset B$ ,  $f$  integrabile allora

$$\int_A f(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \int_B f(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

- Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_X f(\underline{x})g(\underline{x}) \, d\underline{x} \right|^2 \leq \int_X |f(\underline{x})|^2 \, d\underline{x} \cdot \int_X |g(\underline{x})|^2 \, d\underline{x}.$$

- Un'altra disuguaglianza utile

$$\left| \int_X f(\underline{x}) \, d\underline{x} \right| \leq \int_X |f(\underline{x})| \, d\underline{x}.$$

- Si ha  $m(X) \in [0, +\infty)$ , non si può avere misura infinita: deve essere per forza approssimata dall'alto.
- Se  $X_1, \dots, X_l$  sono insiemi disgiunti e misurabili, allora  $\bigcup_{j=1}^l X_j$  è misurabile e

$$m\left(\bigcup_{j=1}^l X_j\right) = \sum_{j=1}^l m(X_j).$$

Se non sono disgiunti allora

$$m\left(\bigcup_{j=1}^l X_j\right) \leq \sum_{j=1}^l m(X_j).$$

**Proposizione.** Un'unione infinita numerabile non è misurabile:

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} X_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(X_j).$$

Infatti, sia  $X_j = \{j\text{-esimo razionale tra } [0, 1]\}$ :  $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  non è misurabile, ma è numerabile. Quindi la sua misura è  $m(X_j) = 0$ . Inoltre

$$\overline{m}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} X_j\right) \not\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \overline{m}(X_j).$$

[rivedi]

## Lecture 9

### 7.2 Integrali doppi

mar 19 ott  
2021 17:30

**Teorema.** Fubini. Sia  $X = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $x, y$  secondo Riemann in  $\mathbb{R}^2$ . Si supponga che  $\forall x \in [a, b]$  la funzione  $f(x, -) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  sia integrabile in  $y$ . Allora la funzione

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

è integrabile in  $[a, b]$  e vale

$$\int_X f(x, y) \, dx \, dy \left( = \int_X f(\underline{x}) \, d\underline{x} \right) \equiv \int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

Tale integrale iterato è l'analogo del principio di Cavalieri. Lo stesso concetto vale per più variabili e vale anche prima in  $x$  e poi in  $y$ : l'ordine di integrazione non importa.

**Definizione.** Dominio normale rispetto ad un asse. Si considerino due funzioni  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora l'insieme normale rispetto ad  $y$  è

$$X = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Se  $X$  è normale rispetto all'asse  $y$  allora

$$m(X) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_X \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d \chi_X(x, y) \, dy \, dx.$$

Si consideri  $x \in [a, b]$ , allora

$$\chi_X(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x) \leq y \leq g(x) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dunque

$$m(X) = \int_a^b 1 \cdot (g(x) - f(x)) \, dx.$$

[immagine][rivedi]

**Esempio.** Sia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \pi, -1 \leq x \leq \cos y\}.$$

Dunque

$$m(X) = \int_0^\pi \int_{-1}^{\cos y} dx \, dy = \int_0^\pi 1 + \cos y \, dy = \pi.$$

[immagine]

**Proposizione.** Se  $X$  è normale:  $X = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$  allora

$$\int_X \varphi(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) \, dy \, dx.$$

**Esempio.** Sia

$$\int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(x, y) \, dx \, dy.$$

con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Risulta

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \, dx \, dy = -\pi, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \, dy \, dx = \pi.$$

Infatti,  $f$  non è continua e dato che il dominio è compatto segue che  $f$  non è limitata dunque non è Riemann integrabile.

### 7.3 Volumi dei solidi

**Solidi di rotazione.** Si consideri un solido di rotazione, la cui area ad un'altezza  $z$  è

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [z_0, z_1], r(z) \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

e dove esiste una funzione  $r(z) > 0$ . Il grafico di  $0 < x \leq r(z)$  girato attorno a  $z$ . [rivedi]  
Per calcolare il volume si utilizza l'integrale

$$m(A) = \int_{z_0}^{z_1} \pi r^2(z) \, dz.$$

Dove  $\pi r^2(z)$  è l'area del cerchio di raggio  $r(z)$ .

**Esercizio.** Calcolare il volume di una sfera centrata in  $\underline{0}$  di raggio  $R$  utilizzando  $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ . Dunque

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz.$$

## Lecture 10

Si sono viste le aree come regioni del piano e volumi come regioni dello spazio.

ven 22 ott  
2021 13:30

**Esempio.** Si calcola il volume della sfera. Si fa ruotare un semi-disco intorno a  $z$ :

$$V = \int_{-R}^R \pi r^2(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = 2\pi R^3 - \frac{\pi}{3}(2R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Si vede come risolvere l'integrale per regioni più complicate.

## 7.4 Cambio di variabili e determinante della Jacobiana

Si consideri  $A$  una matrice  $n \times n$ . Essa è costituita da  $n$  vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Quindi

$$\det(A) = \pm \text{Misura del parallelogramma generatore dai } n \text{ vettori.}$$

Per un vettore, il determinante è la lunghezza del vettore stesso. Per due vettori, il determinante l'area del parallelogramma. Per tre vettori, il determinante è il volume. Tutti i vettori contenuti nel parallelogramma sono combinazioni lineari degli  $n$  vettori con coefficienti tra 0 e 1. Il determinante è la misura con segno di tale spazio.

**Esempio.** [immagine]

L'area risulta essere

$$\frac{1}{2} |\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}| = \frac{5}{2}.$$

Mentre il volume del tetraedro rispetto a quello del cubo risulta essere

$$\int_0^1 \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{6} z^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Dunque il tetraedro è un sesto del volume del cubo.

**Teorema.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  dominio e sia  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzione integrabile su  $X$ . Sia  $\varphi : Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$ ,  $\varphi \in C^1$  funzione del cambio di coordinate, invertibile e con inversa di classe  $C^1$ . Siano  $\underline{x} \in X$  e  $\underline{y} \in Y$  coordinate di  $X$  e  $Y$ . Allora si ha

$$\int_X f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_Y f(\varphi(\underline{y})) \left| \det \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{y}} \right| d\underline{y}.$$

Infatti, la scrittura  $d\underline{x} = \varphi' d\underline{y}$  non vale più ed il suo analogo è  $|\det \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{y}}|$  cioè

$$|\det J| = \left| \det \begin{bmatrix} \partial_{y_1} x_1 & \dots & \partial_{y_n} x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} x_n & \dots & \partial_{y_n} x_n \end{bmatrix} \right|.$$

**Esempio.** [immagine]

Si consideri il parallelogramma descritto da due vettori. L'area di  $X$  è  $\int_X dx_1 dx_2$ . Cambiando le coordinate si vuole ottenere

$$Y \subset \mathbb{R}^2 \mid Y = [0, 1] \times [0, 1], \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Serve  $\underline{x}$  in funzione di tali coordinate:

$$\underline{x} = y_1 \underline{a} + y_2 \underline{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi la Jacobiana è

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{y}} = (\underline{a} \quad \underline{b}) \implies \int_Y \overbrace{1}^{\varphi} |\det(\underline{a} \quad \underline{b})| dy_1 dy_2 = |\det(\underline{a} \quad \underline{b})|.$$

**Interpretazione infinitesima.** L'integrale è la somma di aree infinitesime. Cambiando le coordinate, si anche la descrizione dell'area, dunque bisogna correggere con la Jacobiana.

**Coordinate polari.** Le coordinate polari presentano coppie ordinate del tipo  $(\rho, \theta)$ . Per passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane si utilizza la trasformazione  $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Quindi

$$\int_X \varphi(x, y) dx dy = \int_U \varphi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) |\det| d\rho d\theta.$$

La matrice jacobiana ed il suo determinante sono

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det J = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho.$$

Pertanto l'integrale diventa

$$\int_U \varphi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

Infatti,  $dx dy = \rho d\rho d\theta$ .

**Esempio.** Sia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Allora la sua area o misura è

$$m(X) = \int_X dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\theta = 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2.$$

**Esempio.** Sia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 2x, 1 < x + y < 3\}.$$

e si consideri l'integrale

$$\int_X \frac{dx dy}{x + y}.$$

Non esiste una trasformazione lineare che trasporti  $X$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$  perché esse conservano il parallelismo, tuttavia,  $x$  e  $2x$  si intersecano, mentre il dominio di arrivo è rettangolare. Dunque si usa un cambio di coordinate non lineare

$$x < y < 2x \implies 1 < \frac{y}{x} < 2, \quad v \equiv \frac{y}{x}, \quad u \equiv x + y.$$

Pertanto si ha  $1 < v < 2$  e  $1 < u < 3$ , cioè  $[1, 3] \times [1, 2]$ . Quindi

$$\begin{cases} x + y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \implies \begin{cases} x + vx = u \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{u}{1+v} v \end{cases}.$$

La matrice jacobiana ed il suo determinante risultano essere

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}, \quad \det J = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

[rivedi]

**Esempio.** Sugli appunti è presente la misura del disco di raggio  $R$  in  $\mathbb{R}^n$ . Per le prime tre dimensioni maggiori di uno sono:  $\pi R^2$ ,  $\frac{4}{3}\pi R^3$  e  $\frac{\pi^2}{2}R^4$ .

**Coordinate sferiche.** Le coordinate sono  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\theta \in [0, \pi)$ . Se  $\varphi \in [-\pi, \pi)$  allora è detta longitudine. Mentre  $\theta$  è detta colatitudine. Si consideri un punto sul piano  $xz$  giacente sulla sfera unitaria. Esso ha coordinate  $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ . Ruotandolo di un angolo  $\varphi$  nello spazio si ha:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Pertanto per passare dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane si utilizza

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{bmatrix} \\ = \cos \theta [-r^2 \sin^2 \varphi (\cos \theta \sin \theta) - r \cos^2 \varphi (\cos \theta \sin \theta)] - r \sin \theta [r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta] \\ = -r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che si è usata la terna di coordinate  $(r, \varphi, \theta)$  al posto di quella più comune  $(r, \theta, \varphi)$ .

## 7.5 Integrali impropri

Si ha un integrale improprio quando almeno una di due cose si verifica:

- Il dominio è illimitato;
- La funzione è illimitata.

In questi due casi si possono risolvere utilizzando i limite. Successivamente, basta utilizzare l'integrale secondo Lebesgue.

**Esempio.** Un esempio può essere

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^1, \quad \text{Diverge.}$$

**Esempio.** Si consideri

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dy dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-\rho^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} -\pi \int_0^{-R^2} e^r dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} -\pi(e^{-R^2} - 1) = \pi.\end{aligned}$$

Da ciò risulta

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

## Lecture 11

lun 25 OTT  
2021 14:30

### 8 Successioni e serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

#### 8.1 Successioni di funzioni e convergenza

Si sono trattate le successioni di punti in uno spazio metrico  $x \rightarrow \bar{x}$  in  $\mathbb{R}^d$ . Tuttavia, le funzioni non sono elementi di uno spazio vettoriale euclideo.

**Definizione.** La scrittura  $f_n : X \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  indica una successione di funzioni.

**Definizione.** La successione  $f_n$  converge puntualmente ad una funzione limite  $\bar{f}$  se e solo se per ogni  $\underline{x} \in X$ , la successione  $f_n(\underline{x})$  di punti di  $\mathbb{R}^m$  converge a  $\bar{f}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^m$ .

**Esempio.** Si osserva per quali punti la successione di funzioni  $f_n(x) = x^n$  converge puntualmente.

- $x \in (-1, 1) \implies f_n(x) \rightarrow 0$ ;
- $x \in \{-1, 1\} \implies$  oscilla per  $x = -1$  e converge per  $x = 1$ ;
- $|x| > 1 \implies$  diverge, non converge.

Quindi la funzione  $f_n(x)$  converge puntualmente per  $x \in X = (-1, 1]$  alla funzione limite

$$\bar{f} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

**Esempio.** Si consideri

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{se } 0 < |x| < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Essa converge puntualmente su tutto  $\mathbb{R}$  a  $\bar{f}(x) = 0$ . Infatti

$$\forall x \neq 0, \exists \bar{n} = \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil + 1 \mid |x| > \frac{1}{\bar{n}} \implies f_n(x) = 0 \text{ per } n > \bar{n}.$$



**Esempio.** La successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{1+nx}.$$

Converge puntualmente a  $\bar{f}(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ :

$$f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} + x} \rightarrow \frac{1}{x}.$$

**Definizione.** La successione  $f_n : X \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  converge uniformemente ad una funzione limite  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall \underline{x} \in X, \forall n > N, \|f_n(\underline{x}) - \bar{f}(\underline{x})\| < \varepsilon.$$

In simboli  $f_n \rightrightarrows \bar{f}$ .

**Proposizione.**  $f_n \rightrightarrows \bar{f} \implies f_n \rightarrow \bar{f}$ .

**Esempio.** Convergenza puntuale, ma non uniforme. Si consideri ancora  $f_n(x) = \frac{n}{1+nx}$ . Essa converge puntualmente in  $(0, +\infty)$  a  $\frac{1}{x}$ . Tuttavia, non uniformemente, infatti  $\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  e  $f_n \rightarrow n$  per  $x \rightarrow 0$ . Formalmente, bisogna negare la definizione di convergenza uniforme e mostrare che per  $x = \frac{1}{n}$  vale tale negazione.

**Esempio.** Si consideri  $f_n(x) = x^n$ ,  $X = (-1, 1]$ . Ogni funzione  $f_n(x)$  è continua, ma scegliendo  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  si vede che  $f_n$  non converge uniformemente a  $f$ .

**Esempio.** Sia

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)x.$$

una successione di funzioni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La funzione limite puntuale risulta essere  $\bar{f}(x) = x$ . Tuttavia, fissato  $\varepsilon$  non è possibile che tutti i punti di  $f_n(x)$  distino meno di  $\varepsilon$  perché aumentando l'ascissa, le due rette si allontanano sempre più. Non si ha convergenza uniforme in  $\mathbb{R}$ , ma la si può avere su un intervallo limitato.

## 8.2 Convergenza uniforme e continuità

**Teorema.** Sia  $f_n : X \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  una successione di funzioni continue e  $f_n \rightrightarrows \bar{f}$  in  $X$ . Allora  $\bar{f}$  è continua in  $X$ .

**Dimostrazione.** Sia  $\underline{x}_0 \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ . Per ipotesi di continuità uniforme si ha

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(\underline{x}) - \bar{f}(\underline{x})\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se vale per  $n \geq N$  allora vale anche per  $n = N$ . Quindi  $f_N$  è continua in  $\underline{x}_0 \in X$ :

$$\exists \delta > 0 \mid x \in B_\delta(\underline{x}_0) \implies f_N(\underline{x}) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_N(\underline{x}_0)).$$

Si supponga che  $x \in B_\delta(\underline{x}_0)$ . Dunque

$$\begin{aligned} \|\bar{f}(\underline{x}) - \bar{f}(\underline{x}_0)\| &\leq \|\bar{f}(\underline{x}) - f_N(\underline{x})\| + \|f_N(\underline{x}) - \bar{f}(\underline{x}_0)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|f_N(\underline{x}) - f_N(\underline{x}_0)\| + \|f_N(\underline{x}_0) - \bar{f}(\underline{x}_0)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La maggiorazione del primo e del terzo termine derivano dalla convergenza uniforme, mentre del secondo dalla continuità.

**Esempio.** Si mostra un esempio dove non si ha convergenza uniforme e quindi il teorema non si applica:  $f_n(x) = x^n$ .

**Teorema.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^d$  un dominio limitato,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  successione di funzioni integrabili,  $f_n \rightrightarrows \bar{f}$ . Allora  $\bar{f}$  è integrabile in  $X$  e vale

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n.$$

**Teorema.** Sia  $f_n \in C^1([a, b])$ ,  $f_n \rightrightarrows \bar{f}$ ,  $f'_n \rightrightarrows g$  detta limite uniforme. Allora  $\bar{f}$  è derivabile e vale

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} (f_n(x)).$$

**Definizione.** La norma uniforme di  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Potrebbe anche essere illimitata. Una funzione è un elemento dello spazio vettoriale di tutte le funzioni ed ha dimensione infinita.

**Proprietà.**

- $\|f\|_\infty \geq 0$ ,  $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$
- $\|cf\|_\infty = |c| \|f\|_\infty$ ,  $c \in \mathbb{R}$
- $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  disuguaglianza triangolare

Si può definire una distanza uniforme di  $f$  e  $g$ :  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ .

**Proposizione.** La funzione  $f_n \rightrightarrows \bar{f}$  in  $X$  se e solo se  $\|f_n - \bar{f}\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Teorema.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $B \subset \mathbb{R}^k$  compatti. Sia  $B$  misurabile,  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora la funzione integrale

$$G(\underline{x}) = \int_B f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

è continua in  $A$ . Se  $\underline{v} \in \mathbb{R}^d$  e  $D_{\underline{v}} f(\underline{x}, \underline{y})$  esiste ed è continua allora  $G(\underline{x})$  è derivabile e si ha

$$D_{\underline{v}} G(\underline{x}) = \int_B D_{\underline{v}} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}.$$

**Esempio.** Si consideri

$$G(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (at + b - \cos t)^2 dt.$$

Ponendo  $\underline{x} \in A$ ,  $\underline{x} \equiv (a, b)$ ;  $\underline{y} \in B = [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\underline{y} \equiv t$  si ha

$$\begin{aligned} \partial_a t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial_a (at + b - \cos t)^2 dt \\ \partial_b t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial_b (at + b - \cos t)^2 dt. \end{aligned}$$

### 8.3 Serie di funzioni

La serie

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Converge puntualmente dove la successione

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n.$$

converge.

### Lecture 12

Dunque

mar 26 ott  
2021 17:30

- Se  $x = 1$  allora diverge perché  $S_N(x) = S_N(1) = \sum_{n=0}^N 1 = N + 1 \rightarrow +\infty$ .
- Se  $|x| < 1$  allora  $x^{N+1} \rightarrow 0$  e  $S_N(x) \rightarrow \frac{1}{1-x}$ .
- Se  $|x| > 1$  allora diverge.
- Se  $x = -1$  allora oscilla.

#### Criteri di convergenza delle serie.

- Condizione necessaria. Se  $\sum a_n$  converge allora  $a_n \rightarrow 0$ .
- Convergenza assoluta. Se  $\sum |a_n|$  converge allora  $\sum a_n$  converge.
- Confronto. Sia  $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n > \bar{n}$ . Se  $\sum b_n$  converge allora  $\sum a_n$  converge. Se  $\sum a_n$  diverge allora  $\sum b_n$  diverge.
- Confronto asintotico. Sia  $a_n, b_n \geq 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ . La serie  $\sum a_n$  converge se e solo se  $\sum b_n$  converge.
- Radice. Sia  $a_n > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ . Se  $L < 1$  allora  $\sum a_n$  converge. Se  $L > 1$  allora  $\sum a_n$  diverge.
- Rapporto. Sia  $a_n > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Se  $L < 1$  allora  $\sum a_n$  converge. Se  $L > 1$  allora  $\sum a_n$  diverge.
- Leibniz. Sia  $a_n$  una serie decrescente e tendente a zero. Allora  $\sum (-1)^n a_n$  converge.
- Integrale. Sia  $a_n = f(n), f > 0$  monotona decrescente. Allora  $\sum a_n$  converge (diverge) se e solo se  $\int_1^{+\infty} f(n)$  converge (diverge).
- Esponente. La serie  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge per  $\alpha > 1$  e diverge per  $\alpha \leq 1$ .
- Geometrica.

$$\sum x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & |x| < 1 \\ \infty, & x \geq 1 \\ \nexists, & x \leq -1 \end{cases}.$$

**Definizione.** La serie di funzioni  $\sum a_n(x)$  tale che  $\sum \|a_n\|_\infty$  converge, si dice che converge totalmente.

**Teorema.** Se la serie di funzioni  $\sum a_n(x)$  converge totalmente su un dominio  $X$  allora converge uniformemente ad una funzione limite.

**Teorema.** M-test di Weierstrass. Se

$$\forall n, \exists M_n \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X, |a_n(x)| \leq M_n.$$

e se  $\sum M_n$  converge allora  $\sum a_n(x)$  converge uniformemente su  $X$  ad una funzione limite.

I due teoremi sono equivalenti, infatti

$$|a_n(x)| \leq M_n, \forall x \in X \implies \sup_{x \in X} \|a_n(x)\| = \|a_n(x)\|_\infty \leq M_n.$$

Quindi per confronto, se  $\sum M_n$  converge allora  $\sum \|a_n(x)\|$  converge totalmente.

**Esempio.** Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

La sua norma uniforme è

$$\left\| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right\|_\infty = \frac{1}{n^2}.$$

Dato che  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, segue che la serie originale converge totalmente.

**Esempio.** Sia  $X = [0, 1]$  e

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n.$$

Dunque

$$\|x(1-x)^n\|_\infty = \sup_{x \in X} x(1-x)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Segue che  $\sum \frac{1}{n+1}$  diverge, cioè  $\sum \|x(1-x)^n\|_\infty$  diverge. Oltretutto

$$x \sum (1-x)^n = x \frac{1}{1-(1-x)} = 1.$$

converge, ma non totalmente. Quando  $x = 0$  o  $x = 1$  si ha  $\sum x(1-x)^n = 0$  converge, quindi la successione converge solo puntualmente.

Si poteva già notare che la somma parziale  $\sum x(1-x)^n$  è un polinomio e quindi è continuo, ma la funzione limite non è continua, pertanto non è uniformemente continua e tanto meno totalmente continua.

## Lecture 13

ven 29 ott  
2021 13:30

Si hanno le serie di funzioni che convergono in tre modi. Se la convergenza è uniforme allora funzione continua tende a continua e differenziale tende a differenziale e vale lo scambio di operatori di limite e derivata e lo scambio tra limite ed integrale. Vale per successioni di funzioni e dunque vale anche per le serie di funzioni (perché sono successioni di somme parziali). Si osserva un tipo particolare di serie.

## 8.4 Serie di potenze

**Definizione.** La serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  con  $a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$  è una serie di potenze.

Il modello per la serie di funzioni è la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , dove  $a_n = 1, \forall n$ .

**Definizione.** La serie di funzioni si può anche scrivere come

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

cioè la serie di potenze centrata in  $x_0$ . Tuttavia, essa è equivalente a quella di prima per cambio di variabile.

Le serie di funzioni sono funzioni a loro volta. La funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

È una funzione  $X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  il dominio è l'insieme dei punti per cui la funzione converge puntualmente.

**Proposizione.** Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge per  $x \neq 0$ , allora per ogni  $\rho$  tale che  $0 < \rho < |x|$ , la serie converge uniformemente in  $[-\rho, \rho] \subset \mathbb{R}$ .

**Dimostrazione.** Uno dei criteri di convergenza di una serie è la condizione necessaria che implica  $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| \leq M$ . Sia  $0 < \rho < |x|$ . Quindi

$$\forall t \in [-\rho, \rho] \implies |a_n t^n| = |a_n| |t^n| \leq |a_n| \rho^n \equiv M_n.$$

I termini  $M_n$  fanno parte di una serie che converge:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Infatti

$$|a_n| \rho^n = |a_n| \frac{x^n}{x^n} \rho^n = \underbrace{|a_n x^n|}_{\leq M} \underbrace{\left| \frac{\rho}{x} \right|^n}_{\left| \frac{\rho}{x} \right| < 1} \leq M \left| \frac{\rho}{x} \right|^n.$$

Per il criterio del confronto, la serie converge. Pertanto la serie originale converge totalmente e quindi uniformemente in  $[-\rho, \rho]$ .

**Definizione.** Raggio di convergenza. Sia  $R \in [0, +\infty)$ . Il raggio di convergenza  $R$  della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  è l'estremo superiore dei valori di  $x$  per cui la serie converge.

**Osservazione.** Sia  $x = 0$ . Allora la serie converge. Pertanto  $R \geq 0$ . Infatti  $\sum a_n 0^n = a_0$ .

**Osservazione.** Se  $x > R$  allora  $\sum a_n x^n$  non converge. Perché la serie non può convergere e  $R$  essere l'estremo superiore.

Se  $x < -R$  allora  $\sum a_n x^n$  non converge.

**Corollario.** Sia  $R > 0$  il raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Allora la serie converge uniformemente in tutti gli intervalli  $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ . Questo segue dalle due osservazioni precedenti.

Quando la convergenza è uniforme si può derivare termine a termine.

**Teorema.** Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $R > 0$ . Allora la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

ha raggio di convergenza  $R$  e converge a  $f'$ .

Dunque, iterando, la derivata  $k$ -esima

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

ha raggio di convergenza  $R$  ed essa è la somma delle derivate  $k$ -esime e anch'essa converge uniformemente.

**Corollario.** Vale

$$f^{(k)}(0) = a_k k! \iff a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dunque, prendendo una serie scritta come  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  allora  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . Questo è familiare perché ricorda Taylor, tuttavia esso procede nell'altro verso [rivedi]. Storicamente le funzioni sono definite come serie di potenze:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il suo raggio è  $R = +\infty$ .

**Teorema.** Raggio di convergenza. Si considera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Se  $0 < L < +\infty$  allora  $R = \frac{1}{L}$ . Oppure  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ , se  $0 < L < +\infty$  allora  $R = \frac{1}{L}$ . Se  $L = 0$  allora  $R = +\infty$ . [rivedi]

**Dimostrazione.** Esercizio.

**Esempi e applicazioni.** Bose-Einstein

$$\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{t^3}{e^t - 1} dt.$$

Il problema è integrare  $\frac{t^3}{e^t - 1}$ . Bisogna trasformarlo in una serie. La serie geometrica converge in  $(-1, 1)$  a  $\frac{1}{1-x}$ . Tuttavia,  $e^t \geq 1$  sul dominio di integrazione. Il trucco è dividere per  $e^{-t}$ :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{t^3 e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Infatti, sul dominio si ha  $e^{-t} < 1$ . Dunque

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}.$$

Dunque l'integrale risulta essere

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L t^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L t^3 e^{-nt} dt.$$

Il problema rimane la convergenza della serie. Tuttavia, essa converge uniformemente sui compatti e  $[0, L]$  risulta essere compatto dunque si può scambiare l'operatore di somma con l'operatore di integrale. Dato che

$$\int_0^L t^3 e^{-nt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^3 e^{-nt} dt = \frac{6}{n^4}.$$

Quindi si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}.$$

**Esempio.** La funzione esponenziale è definita come

$$e^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il raggio di convergenza è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \implies R = +\infty.$$

Si vede per quali  $x$  la serie converge

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0, \quad \forall x.$$

**Esempio.** Le funzioni coseno e seno sono definite come

$$\begin{aligned} \cos x &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ \sin x &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

**Numeri complessi.** Con i numeri complessi, le definizioni di serie di potenze funzionano ancora:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Inoltre  $\cos t + i \sin t = e^{it}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

**Esempio.** Si consideri la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \implies \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

**Esempio.** Sia

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Questa ha raggio di convergenza  $R = 1$ . Inoltre

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Dove la serie converge si possono scambiare gli operatori di somma.

**Esempio.** Sia  $t \in (-1, 1)$ . Si consideri

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Dunque

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Esempio.** Si consideri

$$(1+x)^\alpha = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k, & \alpha \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, & \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

## Lecture 14

Dimostrazioni.

mar 02 nov  
2021 15:30

**Teorema.** Se  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  allora  $f$  è continua e derivabile in  $\underline{x}_0$  (cioè esistono le derivate parziali). Inoltre, per  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\partial_{\underline{v}} f = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle = df(\underline{x}_0) \underline{v}.$$

**Dimostrazione.** La funzione  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  se la funzione è lineare nell'infinitesimo:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \hat{L} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|).$$

Con  $\hat{L}$  forma lineare. Ricordando che

$$g = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \iff \frac{g}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0, \quad \underline{x} \rightarrow \underline{x}_0.$$

Tale formula è lo sviluppo di Taylor/MacLaurin troncato al prim'ordine. Inoltre

$$\partial_{\underline{v}} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}.$$

Cioè è la derivata  $g'(0)$  dove  $g(t) = \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$ . Dunque si sostituisce

$$\hat{L}(\underline{x} - \underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle.$$

Dunque, sostituendo  $\underline{x}$  con  $\underline{x}_0 + t\underline{v}$  si ottiene:

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(t) \implies f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = t \langle \hat{L}, \underline{v} \rangle + o(t).$$

Questa vale per tutti i  $\underline{v}$ . Si divide per  $t$  e si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \langle \hat{L}, \underline{v} \rangle.$$

Se  $\underline{v} = \underline{e}_i$  allora  $L = \nabla f$  e quindi  $f$  è derivabile.

Se  $f$  è differenziabile, allora

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + 0.$$

Il secondo limite tende a zero perché

$$|\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \rightarrow 0.$$

Pertanto,  $f$  è continua in  $\underline{x}_0$ .



**Teorema.** Differenziale totale. Sia  $f$  una funzione con derivate parziali  $\partial_x f$  e  $\partial_y f$  in un intorno  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e siano continue in  $(x_0, y_0)$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ .

**Dimostrazione.** [immagine]

Si supponga che l'intorno sia grande abbastanza per contenere un rettangolo con vertici su una diagonale di  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$ . In tale intorno, le derivate parziali sono continue in  $(x_0, y_0)$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(x_0, y_0).$$

Analogamente per  $\partial_y f$ . Bisogna far vedere che è differenziabile, cioè:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right\rangle + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right\|\right).$$

Bisogna dividere tutto per la norma e mostrare che il limite è zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Si osservi il disegno: lavorare con una sola variabile risulta essere più semplice. Quindi

$$f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Si consideri una funzione  $g(t)$  definita per  $t \in [x_0, x]$  come

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(\xi).$$

con  $\xi \in [x_0, x]$ . Dunque esiste  $\xi$  per cui la derivata è pari alla differenza, ma  $g'$  sarebbe la derivata parziale:

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(\xi, y_0)(x - x_0).$$

E similmente

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \partial_y f(x, \eta)(y - y_0), \quad \eta \in [y_0, y].$$

Quindi il limite diventa

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\partial_y f(x, \eta)(y - y_0) + \partial_x f(\xi, y_0)(x - x_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\overbrace{[\partial_x f(\xi, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)]}^{\rightarrow 0} (x - x_0) + \overbrace{[\partial_y f(x, \eta) - \partial_y f(x_0, y_0)]}^{\rightarrow 0} (y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

[rivedi]

## Lecture 15

Continuo dimostrazioni.

ven 05 nov  
2021 13:30

**Teorema.** Derivate miste. Si enuncia per due dimensioni. Sia  $f(x, y) : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione in due variabili. Sia  $(x_0, y_0) \in X$  interno. Si supponga che le derivate parziali miste siano continue in  $(x_0, y_0)$  (e definite in un intorno). Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Ciò equivale ad affermare che la matrice hessiana è simmetrica in  $(x_0, y_0)$ .

**Dimostrazione.** La derivata parziale rispetto ad  $x$  è

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y)}{x - x_0}.$$

E lo stesso per  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Derivando due volte si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right) \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} - \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Scambiando  $x$  con  $y$  si ha l'espressione analoga, ma con diverso ordine dei limiti:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)}.$$

Bisogna stabilire se tali due limiti coincidano. Sia il numeratore  $A(x, y)$ . Ora, per ipotesi le derivate seconde sono continue, cioè devono esistere, quindi pure  $A(x, y)$  è una funzione derivabile nell'intorno. Dunque, per Lagrange si ha:

$$A(x, y) - A(x_0, y) = \frac{\partial A(\xi, y)}{\partial x} (x - x_0).$$

Con  $\xi \in [x_0, x]$ . Ora

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0).$$

Dunque, riscrivendo quando ottenuto da Lagrange si ha

$$A(x, y) = A(x_0, y) + \left( \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(\xi, y_0)}{\partial x} \right) (x - x_0).$$

Inoltre, sostituendo  $y$  al posto di  $y_0$ : [rivedi]

$$A(x_0, y) = 0 \implies A(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} \right) \right) (y - y_0)(x - x_0).$$

con  $\eta \in [y_0, y]$ . Inoltre,  $\xi$  ed  $\eta$  dipendono da  $x, y$ , tuttavia è importante che siano all'interno del rettangolo  $(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$ , di modo che  $\xi - x_0 \leq x - x_0$  e  $\eta - y_0 \leq y - y_0$ . Si vuole mostrare che i due limiti sono uguali. Tuttavia, se la derivata seconda

$$A(x, y) = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial y \partial x} (x - x_0)(y - y_0).$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{A(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}.$$

Tuttavia, quando  $x \rightarrow x_0$  e  $y \rightarrow y_0$  anche  $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Dunque se la derivata seconda è continua, allora il limite è il valore della funzione nel punto  $(x_0, y_0)$ .

Si vede un controesempio. Sia

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Essa è pari a zero per  $x = 0, y = 0, x = \pm y$ . Il grafico ottenuto è la monkey saddle. Il punto critico  $(0, 0)$  non può essere rappresentato da un'hessiana.

**Esempio.** Sia  $n \geq 1$ . Sia  $I_n$  un intervallo tale per cui  $I_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}] = \{t \in \mathbb{R} \mid 2^{-n} \leq t \leq 2^{-n+1}\}$ . Sia  $g_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita da

$$g_n(t) = -\pi 2^{n-1} \sin(2^n \pi t).$$

Dunque,  $\sin(2^n \pi t) = 0$  per  $2^n \pi t = k\pi \implies t = \frac{k}{2^n}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Il seno è negativo tra  $2^n$  e  $2^{n+1}$ , ed il segno meno lo rende positivo. Dunque ogni intervallo  $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$  ha un arco di seno che è nullo agli estremi ed il punto massimo vale  $\pi 2^{n-1}$  cioè  $g_n(t) = 0$  se  $t \in \{2^{-n}, 2^{-n+1}\} = \partial I_n$ . Per  $n = 0$ , l'area è

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) dt = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = 1.$$

Dividendo, la base per 2 e moltiplicando l'altezza per 2 l'area rimane la stessa. Dunque, fissato  $n$  l'integrale di  $g_n(t)$  è sempre 1.

A questo punto si prende  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} g_n(x)g_n(y), & \text{se } x, y \in I_n \\ -g_{n+1}(x)g_n(y), & \text{se } x \in I_{n+1}, y \in I_n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[immagine]

Essa è continua dappertutto perché vale zero sui bordi, tuttavia, non è continua quando è prossima all'origine. Inoltre fissato  $y$ , la funzione incontra prima  $I_{n+1}$  e poi  $I_n$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dx &= \int_{I_{n+1}} -g_{n+1}(x)g_n(y) dx + \int_{I_n} g_n(x)g_n(y) dx \\ &= \left( -\int_{I_{n+1}} g_{n+1}(x) dx + \int_{I_n} g_n(x) dx \right) g_n(y) = 0. \end{aligned}$$

Inoltre, fissando la  $x$ , quando essa è maggiore di  $\frac{1}{2}$  si incontra un solo intervallo ed in tal caso si ha:

$$\int_0^1 f(x, y) dy = 1.$$

Mentre per gli altri valori di  $x$  l'integrale è nullo. [rivedi]

## Lecture 16

### 8.5 Serie di Fourier

lun 08 nov  
2021 14:30

**Definizione.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo (minimo)  $T$  se  $\forall x \in \mathbb{R}$  vale  $f(x+T) = f(x)$ . In genere, se è periodica di periodo  $T$  allora è periodica di periodo  $kT$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Inoltre,

$$f(x+T) = f(x) \implies f(x+kT) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi basta conoscere  $f$  in  $[0, T]$  e vale necessariamente  $f(0) = f(T)$ .

**Esempio.** Alcuni esempi sono  $\sin x$ ,  $\cos x$  che hanno periodo  $T = 2\pi$ . La parte frazionaria  $\{x\} = x - \lceil x \rceil$  ha periodo  $T = 1$ .

Le funzioni periodiche si sono viste in Fisica I quando si sono viste le onde.

**Definizione.** La funzione  $f$  è pari se  $\forall x \in \mathbb{R}$  si ha  $f(-x) = f(x)$ . Mentre  $f$  è dispari se  $\forall x \in \mathbb{R}$  si ha  $f(-x) = -f(x)$ .

**Definizione.** La funzione  $f$  è continua a tratti (in  $[0, T]$ ) se è continua tranne in un numero finito di punti e nei quali esistono i limiti sinistro e destro.

**Definizione.** La funzione  $f$  regolare a tratti (in  $[0, T]$ ) se è continua a tratti e derivabile con derivata continua ovunque tranne in un numero finito di punti, nei quali esistono i limiti sinistro e destro della derivata.

### 8.5.1 Trigonometria

**Werner e prostaferesi.** Detti in inglese sum-to-product e product-to-sum. Si ricavano nel seguente modo:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \iff \\ e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) &= 2 \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

**Polinomio trigonometrico.** Per un oscillatore armonico, una soluzione è

- $a \sin(\omega(t - t_0))$
- $a \cos(\omega(t - t_0))$
- $a \sin(\omega t + \varphi)$
- $ae^{i\omega(t-t_0)}$

Dove  $a$  è l'ampiezza dell'oscillazione,  $\omega$  è la frequenza o velocità angolare per cui il periodo è  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

La somma (intesa come sovrapposizione) di oscillatori armonici è il polinomio trigonometrico:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x).$$

Con  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  e dove si fissa il periodo minimo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Dunque, nel polinomio trigonometrico si prendono i primi  $n$  multipli del periodo. Tale fenomeno si manifesta in particolare nelle armoniche degli strumenti a corda: le corde vibrano con lunghezza d'onda multiplo della lunghezza fondamentale.

In forma complessa risulta

$$\sigma_n = \sum_{k=-n}^n A_k e^{ik\omega x}.$$

con  $A_k$  funzioni di  $a_k$  e  $b_k$ .

Tali due formule descrivono la somma di oscillatori armonici con diverse ampiezze. In questo modo si definisce il timbro del suono. Si vogliono usare tali funzioni nel polinomio di Taylor. Le serie di Fourier servono per calcolare le funzioni periodiche arbitrarie, ma bisogna trovare i coefficienti.

Si consideri la forma d'onda a dente di sega (sawtooth), si utilizza la serie di Fourier per approssimare tale onde (non si può replicare perché non è continua, mentre gli addendi sono tutti funzioni continue)

Per semplicità si pone  $\omega = 1$ , così  $T = 2\pi$ . Quindi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Si vuole analizzare la convergenza.

**Prodotto scalare di funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ .** Date due funzioni  $f$  e  $g$  periodiche di periodo  $2\pi$ , continue a tratti, il prodotto scalare è

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Bisogna verificare che sia una forma bilineare non degenera definita positiva. Per verificare la forma bilineare è semplice. Si verifica essere non degenera e definita positiva:

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 0 \implies f = 0.$$

Quindi, per  $k, h \in \mathbb{Z}$ :

$$\langle \cos(kx), \sin(hx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(hx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{pari} \cdot \text{dispari} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{dispari} dx = 0.$$

Similmente

$$\langle \cos(kx), \cos(hx) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx + hx) + \cos(kx - hx) dx.$$

Per  $|k| \neq h$  si ha [rivedi]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx + hx) + \cos(kx - hx) dx = \left[ \frac{\sin(kx + hx)}{k + h} + \frac{\sin(kx - hx)}{k - h} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Dato che  $k, h \geq 0$ , significa che  $k + h = 0 \iff k = h = 0$  e quindi

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 2 dx = 2\pi.$$

Mentre se  $k = h \neq 0$  allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(hx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2kx) dx = \pi.$$

Riassumendo:

$$\langle \cos(kx), \cos(hx) \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq h \\ \pi, & k = h \neq 0 \\ 2\pi, & k = h = 0 \end{cases}.$$

Analogamente

$$\langle \sin(kx), \sin(hx) \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq h \\ \pi, & k = h \neq 0 \\ 0, & k = h = 0 \end{cases}.$$

Tutti i multipli dell'oscillatore assomigliano ai vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (la base dev'essere ortogonale, non per forza ortogonale).

Si consideri  $V$  lo spazio delle funzioni continue a tratti e periodiche di periodo  $2\pi$ . Per  $k \in \mathbb{N}_0$  risulta che  $\cos(kx)$  e  $\sin(hx)$  sono ortogonali tra loro.

Si consideri la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Se essa converge uniformemente ad una funzione in  $V$  allora

$$\begin{aligned} \langle f(x), \cos(hx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) \cos(hx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(hx) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(hx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(hx) dx \\ &= \begin{cases} \pi a_0, & h = 0 \\ \pi a_h, & h > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Similmente

$$\langle f(x), \sin(hx) \rangle = \pi b_h.$$

I termini  $a_k$  e  $b_k$  si chiamano coefficienti di Fourier che corrispondono ai multipli della frequenza di base dell'oscillatore armonico.

**Definizione.** Prendendo una funzione  $f$  arbitraria  $2\pi$ -periodica e continua a tratti si ha

$$a_k \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \cos(kx) \rangle, \quad k \geq 0$$

$$b_k \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \sin(kx) \rangle, \quad k \geq 1$$

Invece, per una funzione di periodo  $T$  ed una pulsazione  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  si ha

$$a_k \equiv \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad b_k \equiv \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(k\omega x) dx.$$

Mentre la serie di Fourier in forma esponenziale è

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\omega k x}, \quad c_k \equiv \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

Bisogna comprendere se la serie di Fourier converge. [rivedi]

**Esempio.** Si vede l'onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Si calcolano i coefficienti di Fourier:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = 0, & k > 0 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{(1 - \cos(k\pi))}{k\pi} = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} \frac{2}{k\pi}, & k \text{ dispari} \\ 0, & k \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$

Le ampiezze decadono, questa serie è l'analogo della serie armonica con solo elementi dispari. Si studia la convergenza. Non si ha convergenza totale.

**Lemma.** Disequazione di Bessel. Si consideri  $f$  una funzione come vettore in uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

**Dimostrazione.** Infatti

$$0 \leq \left\langle f - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), f - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\rangle.$$

Considerando il polinomio trigonometrico, prendendo una somma parziale finita si ha la proiezione di  $f$ , dunque la distanza tra  $f$  e il polinomio trigonometrico troncato è non negativa.

## Lecture 17

mar 09 nov  
2021 17:30

Le serie di Fourier sono il proseguimento di quanto fatto da Pitagora, in particolare dell'acustica e del teorema di Pitagora.

Continuo della dimostrazione. Dunque si ha

$$0 \leq \langle f - S_n, f - S_n \rangle = \langle f, f \rangle - 2\langle f, S_n \rangle + \langle S_n, S_n \rangle.$$

Inoltre

$$\langle f, S_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx.$$

con  $S_n$  polinomio trigonometrico. Quindi

$$\begin{aligned} \langle f(x) - S_n(x), \cos(kx) \rangle &= \langle f(x), \cos(kx) \rangle - \langle S_n(x), \cos(kx) \rangle \\ &= \pi a_k - \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx), \cos kx \right\rangle \\ &= \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2(kx) dx = \pi a_k - \pi a_k = 0. \end{aligned}$$

Mentre se  $k = 0$  si ha  $\langle \frac{a_0}{2}, \cos 0 \rangle = \frac{a_0}{2} 2\pi = \pi a_0$ . Dunque risulta

$$\begin{aligned} \langle f, \cos(kx) \rangle &= \langle S_n, \cos(kx) \rangle \\ \langle f, \sin(kx) \rangle &= \langle S_n, \sin(kx) \rangle. \end{aligned}$$

Da ciò risulta che  $(f - S_n) \perp \cos(kx)$ , per  $k \geq 0$  e  $(f - S_n) \perp \sin(kx)$ , per  $k \geq 1$ .

Teorema di Pitagora. Si ha

$$\|f\|^2 = \|S_n\|^2 + \|f - S_n\|^2.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \langle f - S_n + S_n, f - S_n + S_n \rangle = \langle f - S_n, f - S_n \rangle + 2 \underbrace{\langle f - S_n, S_n \rangle}_0 + \langle S_n, S_n \rangle \\ &= \|S_n\|^2 + \|f - S_n\|^2. \end{aligned}$$

Il secondo termine è zero perché se  $f$  è perpendicolare ad ogni  $\sin(kx)$  e  $\cos(kx)$  allora lo è pure ad ogni loro combinazione lineare, cioè pure  $S_n$ .

Inoltre

$$\begin{aligned} \|S_n\|^2 &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2} \right\rangle + \sum_{k=1}^n a_k^2 \langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle + b_k^2 \langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle \\ &= \frac{a_0^2}{4} 2\pi + \sum_{k=1}^n a_k^2 \pi + b_k^2 \pi \\ &= \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \end{aligned}$$

Dato che vale per ogni  $n$  allora in particolare

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

**Corollario.** Sia  $f$  una funzione integrabile. Allora i suoi coefficienti di Fourier  $a_k, b_k$ , hanno la proprietà che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

**Dimostrazione.** Infatti,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Se  $f$  è integrabile allora l'integrale è finito e dunque la serie è convergente. Pertanto, per la condizione necessaria di convergenza si ha che  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^2 + b_k^2 = 0$ .

**Esempio.** Si consideri la funzione delta di Dirac. Si vede la serie di Fourier. Infatti

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \cos(k0) = \frac{1}{\pi}.$$

Questo perché  $\delta(x) dx = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ . Dunque i coefficienti di Fourier sono  $a_k = 1, \forall k$ ; mentre  $b_k = 0, \forall k$ . Quindi la serie di Fourier è

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx).$$

Ci si chiede se converge. Essa è una serie geometrica. [rivedi] confronta con Giusti.

## Lecture 18

Un aspetto delle serie di Fourier è anche l'analisi dei segnali sia audio che video e telecomunicazioni.

ven 12 nov  
2021 13:30

**Teorema.** Si consideri una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodica, regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge a  $f(x)$  nei punti in cui  $f(x)$  è continua. Altrimenti converge alla media dei limite sinistro e destro:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

**Dimostrazione.** Si vede uno schema. La dimostrazione è legata alla serie di Fourier della funzione delta di Dirac.

**Lemma.** Sia

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Si osserva che essa è la  $n$ -esima serie parziale della serie di Fourier  $S(x)$  della funzione delta di Dirac.

Allora, se  $S_n(x)$  è la somma parziale  $n$ -esima della serie di Fourier di  $f(x)$  si ha

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$



Si dimostra l'uguaglianza dell'equazione precedente. Si consideri

$$2D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx).$$

Utilizzando la formula di Eulero risulta

$$\begin{cases} e^{it} = \cos t + i \sin t \\ e^{-it} = \cos t - i \sin t \end{cases} \implies e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} 2D_n(x) &= 1 + \sum_{k=1}^n e^{ikx} + e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^{2n} e^{i(k-n)x} \\ &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k = e^{-inx} \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$e^{-inx} \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}} \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}}} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{2i \sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2i \sin \frac{x}{2}}.$$

Ricordando che

$$2i \sin t = e^{it} - e^{-it}.$$

Ora si dimostra perché la serie di Fourier troncata è uguale all'integrale sopra scritto. Si vedano gli appunti.

**Teorema.** Se  $f(x)$  è regolare a tratti e continua,  $2\pi$ -periodica, allora la sua serie di Fourier converge totalmente alla funzione  $f(x)$ .

In generale, se  $f$  è solo regolare a tratti, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente negli intervalli chiusi in cui  $f$  è continua.

**Corollario.** Sia  $f$  una funzione  $2\pi$ -periodica, regolare a tratti e continua; allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

e questa si chiama identità di Parseval.

**Esempio.** Dente di sega. Si consideri  $f(x) = x$  con  $x \in [-\pi, \pi)$ , una funzione  $2\pi$ -periodica. Dunque

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 \\ b_k &= \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \end{aligned}$$

Risulta immediato che tutti gli  $a_k$  sono nulli in quanto la funzione è dispari. Dunque si ha

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(kx) - kx \cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Dunque

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kx).$$

La serie converge uniformemente per  $[-T, T]$  con  $0 < T < \pi$ . La serie converge a 0 per  $x = \pi \pm 2k\pi$ . Si consideri

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Considerando che

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ pari} \\ (-1)^h, & k \text{ dispari con } k = 2h + 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{2h+1} (-1)^{2h+2} (-1)^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Esempio.** Si consideri  $f(x)$ ,  $2\pi$ -periodica,  $f(x) = \pi^2 - x^2$  in  $[-\pi, \pi]$ . Si trovano i coefficienti

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = 0$$

ricordando che  $f$  è pari. Pertanto, se  $k = 0$  allora

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi^2 - x^2 dx = \frac{4}{3} \pi^2.$$

Mentre se  $k > 0$  allora:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2 \sin(kx)}{k} - \frac{2x \cos(kx)}{k^2} - \frac{(k^2 x^2 - 2) \sin(kx)}{k^3} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{2 \sin(\pi k) - 2\pi k \cos(\pi k)}{k^3} = (-1)^{k+1} \frac{4}{k^2}.$$

**Corollario.** Si consideri

$$f(\pi) = 0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^{k+1} (-1)^k = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Da cui risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

## Lecture 19

## 9 Curve e superfici

### 9.1 Curve

**Definizione.** Una curva parametrica è una funzione  $P : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I$  intervallo,  $n \geq 2$ .

Inoltre,  $P$  è detta regolare se  $P \in C^1(I)$  e per ogni  $t \in I$  vale  $P'(t) \neq \underline{0}$ .

Si dice regolare a tratti se è regolare tranne in un numero finito di punti, nei quali esistono e coincidono i limiti sinistro e destro, ma entrambi diversi da  $\underline{0}$ ; e  $P$  sia continua. Dunque, si può suddividere  $I$  in un numero finito di intervalli in cui la curva sia regolare ed esiste il limite sinistro e destro etc.

lun 15 nov  
2021 14:30

**Notazione.** Alcune notazioni sono  $P(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\underline{x}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ :

**Esempio.** Sia  $P(t) = (2, 0) + (\cos t, \sin t) = (2 + \cos t, \sin t)$ . Essa è la parametrizzazione di una circonferenza centrata in  $(2, 0)$  con raggio unitario.

**Esempio.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione  $C^1$ , allora il suo grafico

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

è parametrizzato da  $P(t) = (t, f(t))$ . Si controlla che sia regolare: basta osservare la derivata. Infatti

$$P'(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix} \neq \underline{0}.$$

Si è definita la derivata come:

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Pertanto

$$P'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}.$$

Il vettore  $P(t) - P(t_0)$  è il vettore posizione; quando è diviso per il tempo allora si ottiene la velocità.

**Equazione della retta tangente** a  $P(t)$  in  $P(t_0)$ . Il vettore tangente è  $P'(t_0)$  che è la velocità istantanea.

La retta che passa per il punto  $A$  ed ha direzione  $\underline{v}$  è  $P = A + t\underline{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Pertanto

$$P = P(t_0) + tP'(t_0) = \underline{x}.$$

Se  $t = t_0$  sulla retta si ottiene il punto  $P(t_0) + t_0P'(t_0)$ , dunque si riscrive

$$P = P(t_0) + (t - t_0)P'(t_0) = \underline{x}.$$

Si sono trovate due parametrizzazioni distinte della stessa curva.

**Definizione.** Il sostegno (o traccia) di una curva parametrica  $P(t)$  è l'insieme

$$\{P(t) \mid t \in I \subset \mathbb{R}^n\}.$$

**Esempio.** Sia

$$\begin{aligned} P(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [0, \pi] \\ Q(t) &= (t, \sqrt{1 - t^2}), & t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Il sostegno di  $P$  e  $Q$  è la semicirconferenza sul semipiano delle  $y$  positive.

**Definizione.** Siano  $P$  e  $Q$  due curve regolari. Sia  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $Q : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tali due curve sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo (cioè un isomorfismo ma per definizioni differenziabili)  $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  (che è biunivoca, di classe  $C^1$ , ed ha inversa  $C^1$ ) tale che:

$$P(t) = Q(f(t)) = Q(\tau), \quad t \in [a, b], \quad f(t) \equiv \tau \in [\alpha, \beta].$$

Un diffeomorfismo può invertire gli estremi, cioè non conserva l'orientazione (o verso di percorrenza ed ha orientazione  $-$ ).

**Teorema.** Per ogni verso di percorrenza esiste un unico versore tangente alla curva parametrica  $P(t)$  regolare, a meno di equivalenze. Cioè, dato  $P(t_0) = Q(\tau_0)$  segue

$$\frac{P'(t_0)}{\|P'(t_0)\|} = \frac{Q'(\tau_0)}{\|Q'(\tau_0)\|}.$$

Infatti,

$$\frac{dQ(\tau_0)}{dt} = \frac{dQ(\tau(t_0))}{dt} = \frac{dQ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \implies P' = Q' \frac{d\tau}{dt}.$$

Se  $\tau' > 0$  allora si conserva l'orientazione, se  $\tau' < 0$  allora non si conserva l'orientazione. Infatti

$$\frac{P'}{\|P'\|} = \frac{Q' \frac{d\tau}{dt}}{\|Q' \frac{d\tau}{dt}\|} = \frac{Q'}{\|Q'\|} \underbrace{\frac{\frac{d\tau}{dt}}{|\frac{d\tau}{dt}|}}_{\pm 1}.$$

**Lunghezza di una curva.** Sia  $P(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva parametrica. Considerando

$$ds = \|P(t_0 + dt) - P(t_0)\| = \|dP\| = \|P'(t_0) dt\| = \|P'(t_0)\| dt \implies \frac{ds}{dt} = \|P'(t_0)\|.$$

Tuttavia, portare sopra e sotto i differenziali come fossero differenza finite non è tecnicamente corretto; la dimostrazione richiede il teorema di Lagrange.

Quindi la lunghezza della curva è

$$\int_a^b \|P'(t)\| dt.$$

**Teorema.** Siano  $P(t)$  e  $Q(t)$  due curve parametriche equivalenti. Allora esse hanno la stessa lunghezza.

Infatti, se  $P(t) = Q(t)$  allora

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}.$$

Si supponga che il diffeomorfismo conservi l'orientazione,  $\frac{d\tau}{dt} > 0$ . Allora

$$\int_a^b \|P'(t)\| dt = \int_a^b \|Q'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \left\| \frac{dQ(\tau(t))}{d\tau} \right\| \frac{d\tau}{dt} dt = \int_a^b \left\| \frac{dP}{dt} \right\| dt = \int_a^b \|P'(t)\| dt.$$

[rivedi]

**Teorema.** La lunghezza di una curva  $P(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  è sempre maggiore o uguale di  $\|P(t_1) - P(t_0)\|$  ed il minimo si ottiene nel segmento da  $P(t_0)$  a  $P(t_1)$ .

**Esempio.** Sia  $P(t) = (t, f(t))$ ,  $P'(t) = (1, f'(t))$ . Dunque la lunghezza del grafico è

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

**Definizione.** Si consideri una parametrizzazione

$$s = \int_{t_0}^t \|P'(\tau)\| d\tau.$$

essa è la lunghezza della curva (detta anche lunghezza d'arco) tra  $P(t_0)$  e  $P(t)$  ed è detta ascissa curvilinea (o detta anche parametro naturale perché non dipende dalla parametrizzazione particolare).

**Definizione.** Sia  $\gamma$  una curva di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Allora l'integrale curvilineo o di linea di  $f$  è

$$\int_{\gamma} f(P) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(P(t)) \|P'(t)\| dt.$$

## 9.2 Superfici

Table 1: caption		
	curva	superficie
definizione	$P(t)$	$P(u, v)$
regolare	$P'(t) \neq 0$	$P_u, P_v$ lin. indep.
tangente	retta	piano
misura	lunghezza	area
integrale	di linea	di superficie
bordo	$\{P(t_0), P(t_1)\}$	

**Definizione.** Superficie parametrica. Sia  $P(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzione di classe  $C^1$ , con  $U$  aperto e regolare cioè  $\dim(\text{span}(P_u, P_v)) = 2$  equivalentemente  $P_u$  e  $P_v$  linearmente indipendenti, con  $\partial_u P \equiv P_u$  e  $\partial_v P \equiv P_v$  (pertanto generano il piano tangente).

### Lecture 20

Data una superficie  $P : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , il differenziale è

$$dP = \begin{bmatrix} \partial_u P_1 & \partial_v P_1 \\ \vdots & \vdots \\ \partial_u P_n & \partial_v P_n \end{bmatrix} = [P_u \quad P_v].$$

**Osservazione.** Si consideri  $S$  la superficie di  $\mathbb{R}^3$  della sfera: essa è un luogo geometrico, una traccia. L'idea è quella di trovare una parametrizzazione  $P$  tale per cui  $(u, v) \in U \mapsto \text{sfera}$ . Considerato un punto  $Q$  sulla superficie, esso è immagine di qualche valore di  $u$  e  $v$ :  $Q = P(u, v)$  e quindi si dice che  $u$  e  $v$  sono le coordinate locali di  $Q$ . In analisi matematica queste parametrizzazioni si chiamano mappe, proprio dalla cartografia.

**Esempio.** Grafico di  $f(x, y)$ . Se una superficie è un grafico di una funzione allora le coordinate locali più utili sono  $x = u$ ,  $y = v$  e  $z = f(x, y)$  per cui

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$P_u = \partial_u P = \partial_u \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{bmatrix}$$

$$P_v = \partial_v P = \partial_v \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{bmatrix}.$$

Il differenziale è

$$dP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_u f & \partial_v f \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2. Esiste anche un altro modo. In  $\mathbb{R}^3$ , siano  $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$  due vettori. Allora  $\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}$  ha rango 2 se e solo se  $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{0}$  (scritto anche come prodotto esterno  $\underline{a} \wedge \underline{b} \neq \underline{0}$ ). Il prodotto triplo  $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$  è il volume ed è il determinante. Quindi il prodotto scalare è l'elemento d'area il cui vettore ha direzione normale.

**Esempio.** Si consideri la sfera unitaria  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$  definita da  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Si trovano le coordinate che descrivono i punti:

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}.$$

Si verifica essere la parametrizzazione di una superficie regolare. Risulta semplice dimostrare che si tratta di una sfera

$$P(u, v) \in S^2 \iff (\sin u \cos v)^2 + (\sin u \sin v)^2 + \cos^2 u = 1 \iff \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u = 1 \iff \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

Ponendo  $v = 0$  si ha una curva

$$\begin{bmatrix} \sin u \\ 0 \\ \cos u \end{bmatrix}.$$

Si ha la circonferenza goniometrica sul piano  $xz$ .

Per  $v \neq 0$  si ruota la circonferenza tramite la matrice di rotazione.

**Matrice di rotazione.** La matrice di rotazione di un angolo  $\theta$  è

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Per ottenere una rotazione attorno all'asse  $z$  si ha

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque ruotando la circonferenza si ha

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin u \\ 0 \\ \cos u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin u \\ \sin \theta \sin u \\ \cos u \end{bmatrix}.$$

Per ottenere la matrice iniziale si pone  $\theta \equiv v$ . Dunque si scelgono  $u \in [0, \pi]$  e  $v \in [0, 2\pi]$ .

Si verificano le due derivate parziali:

$$P_u = \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ -\sin u \end{bmatrix}.$$

Bisogna vedere che tali due vettori siano linearmente indipendenti (tramite il fatto che l'unica combinazione lineare che dia il vettore nullo ha tutti coefficienti nulli, oppure tramite prodotto scalare diverso dal vettore nullo).

**Esempio.** Superficie di rotazione. Si considera una curva qualsiasi del tipo

$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \\ g(u) \end{bmatrix}.$$

Tramite il prodotto vettoriale si controlla che siano linearmente indipendenti.

$$P_u \times P_v = f(u) \begin{bmatrix} -g'(u) \cos v \\ -g'(u) \sin v \\ f'(u) \end{bmatrix}.$$

Si suppone che la curva sia regolare, dunque  $f', g' \neq 0$ . Dunque, il prodotto scalare è nullo solo per  $f(u) = 0$  cioè il polo nord ed il polo sud e non si ha la regolarità della funzione. Quindi si impone  $f(u) > 0$ .

**Esempio.** Considerando una retta che ruota mentre si muove di moto rettilineo uniforme, entrambe le cose rispetto la direzione perpendicolare alla retta stessa. Si ha un elicoide. Confronta esempio sulle note.

## Lecture 21

**Piano tangente.** [immagine] Si consideri una parametrizzazione regolare  $P(u, v)$ . I vettori delle derivate parziali generano un piano in  $\mathbb{R}^n$  passante per  $P(u_0, v_0)$ , cioè

$$\underline{x} = P(u_0, v_0) + sP_u(u_0, v_0) + tP_v(u_0, v_0), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

In  $\mathbb{R}^3$  si ha

$$\begin{cases} x = x_0 + s\partial_u x(u_0, v_0) + t\partial_v x(u_0, v_0) \\ y = y_0 + s\partial_u y(u_0, v_0) + t\partial_v y(u_0, v_0) \\ z = z_0 + s\partial_u z(u_0, v_0) + t\partial_v z(u_0, v_0) \end{cases}.$$

con

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tuttavia, esiste anche un altro modo per scrivere i piani: l'equazione cartesiana di un piano. Infatti, si ha

$$\{P \in \mathbb{R}^n \mid \underline{N} \cdot (P - P_0) = 0\}.$$

Per una superficie generica si ha  $P_0 = P(u_0, v_0)$  ed il piano tangente è generato dai vettori delle derivate parziali. Per trovare il versore normale si utilizza il prodotto vettoriale

$$\underline{N} = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|}.$$

**Definizione.** Si consideri una superficie parametrizzata. Allora esiste un campo di vettori normali alla superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Se esso è continuo su tutta la superficie  $S$  allora  $S$  è orientabile. Altrimenti è non-orientabile.

**Esempio.** Si consideri la sfera unitaria. Si hanno due direzioni normali, quella interna ed esterna, il campo dei vettori normali è continuo dunque la superficie della sfera è orientabile. D'altra parte, il nastro di Möbius non è orientabile. Un universo con una forma non-orientabile allora facendo un cammino chiuso si ha una diversa orientazione da quella di partenza.

**Area.** L'elemento d'area è

$$dA = \|P_u \times P_v\| du dv = \|(P_u du) \times (P_v dv)\|.$$

Dove  $P_{[\cdot]} d[\cdot]$  sono vettori infinitesimi. Il loro prodotto scalare equivale all'area del parallelogramma da loro generato. Pertanto, l'area della superficie  $P(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  è

$$\int_U \|P_u \times P_v\| du dv.$$

**Proposizione.** L'area di una superficie non dipende dalla parametrizzazione.

**Esempio.** Si consideri la parametrizzazione del grafico della funzione  $f$

$$P(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Dunque

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_u = (1, 0, \partial_u f) \\ P_v = (0, 1, \partial_v f) \end{cases} &\implies P_u \times P_v = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{bmatrix} = -f_u \hat{i} - f_v \hat{j} + \hat{k} \\ &\implies \|P_u \times P_v\|^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2 = 1 + \|\nabla f\|^2. \end{aligned}$$

Da cui l'area è

$$A = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy.$$

**Esempio.** Si consideri una superficie di rotazione. Allora la sua area è

$$A = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

**Teorema.** di Pappo-Guldino. Considerando una curva di lunghezza  $L$  fatta ruotare di un angolo  $\theta \in [0, \pi]$  attorno all'asse  $z$ , risulta che l'area è

$$A = \theta L d_B.$$

Dove  $d_B$  è la distanza tra il baricentro della curva e l'asse di rotazione. Tale definizione equivale al prodotto tra la distanza percorsa dal baricentro della curva ed  $L$ .

**Integrale di superficie.** L'integrale di superficie è

$$\int_U f(P) dA = \int_U f(P) \|P_u \times P_v\| du dv.$$

ed esso non dipende dalla parametrizzazione.

**Teorema.** della funzione implicita. Si consideri una funzione di classe  $C^1(A)$ , con  $A \subset \mathbb{R}^2$  aperto e  $(x_0, y_0) \in A$ , per cui  $F(x_0, y_0) = 0$ . Se  $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$  (cioè  $\nabla F$  non è parallelo all'asse delle  $x$ ) allora localmente  $F(x, y) = 0$  è il grafico di una funzione  $y = f(x)$  di classe  $C^1$  e  $f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$ . (Il pedice indica "derivata rispetto a").

Il teorema afferma che esiste un modo per isolare la variabile, ma non è detto che ciò sia semplice.

**Osservazione.** La scrittura  $(x, f(x))$  è la parametrizzazione della curva  $F(x, y) = 0$  intorno a  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 = f(x_0)$ . Quindi, vale  $F(x, f(x)) = 0$  ed costante, perciò

$$d_x F(x, f(x)) = 0 \implies F_x(x, f(x)) \cdot 1 + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$



**Corollario.** Nelle ipotesi sopra, localmente  $F(x, y) = 0$  è una curva regolare (grafico di una funzione  $f$ ) che ha tangente perpendicolare a  $\nabla F$ , cioè  $\nabla F$  è ortogonale alla curva di livello  $F(x, y) = 0$ .

**Dimostrazione.** La parametrizzazione è  $(x, f(x))$  e la sua tangente è  $(1, f') = (1, -\frac{F_x}{F_y})$ . Quindi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{F_x}{F_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = 0.$$

pertanto è ortogonale.

**Superficie in  $\mathbb{R}^3$ .** Si ha  $F(x, y, z) = 0$ ,  $\partial_z F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Allora  $z = f(x, y)$  localmente.

**Corollario.** Per  $\nabla F \neq \underline{0}$ , con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  risulta

$$\nabla F \perp F(x, y, z) = k.$$

Per ogni superficie di livello  $F(x, y, z)$ .

**Esempio.** Per un circonferenza  $F = x^2 + y^2 - 1$  non si può scrivere una funzione  $f(x)$  tale per cui il gradiente è orizzontale (cioè  $\partial_y F = 0$ ). Tuttavia, negli altri punti si ha  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

### 9.3 Massimi e minimi vincolati.

**Teorema.** Si consideri una curva/superficie  $S \subset \mathbb{R}^i$ ,  $i = 2, 3$ , con  $f : U \subset \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $x_0 \in S$  è di massimo (minimo) per  $f|_S$  (cioè per la restrizione di  $f$  su  $S$ , anche detta vincolo) allora  $\nabla f \perp S$  in  $x_0$ .

**Dimostrazione.** Sia  $P(t)$  una curva e  $x_0 = P(t_0)$  tale per cui  $f(P(t))$  ha massimo (minimo) in  $t_0$ . Dunque

$$d_t(f(P(t_0))) = 0 \iff \nabla f(\underline{x}_0) \cdot P'(t_0) = 0.$$

Dunque il gradiente è normale alla curva  $S$ . La dimostrazione è analoga per dimensione 3.

**Moltiplicatore di Lagrange.** Si consideri una curva implicita

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}.$$

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Allora i massimi (minimi) di  $f$  vincolata a  $S$  sono i punti critici della funzione  $H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ , dove  $\lambda$  è detto moltiplicatore di Lagrange. Infatti

$$\nabla f \perp S \iff \nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f = -\lambda \nabla g.$$

Inoltre i punti critici di  $H$  si hanno per

$$\partial_\lambda H = g = 0, \quad \partial_x H = f_x + \lambda g_x = 0, \quad \partial_y H = f_y + \lambda g_y = 0.$$

Da cui risulta  $g = 0$  e  $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ .

## Lecture 22

lun 22 nov  
2021 14:30

### 10 Forme differenziali

#### 10.1 Lavoro, circuizione, forme differenziali

Si studia l'integrale di linea su di un campo vettoriale.

Si consideri una curva parametrica  $P(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , e si consideri un campo vettoriale  $\underline{F}$ . Dunque, l'integrale di linea è

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \underline{F}, dP \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \underline{F}, P' \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle \underline{F}(P(t)), P'(t) \rangle dt.$$

**Esempio.** Si consideri un campo vettoriale

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

ed una curva

$$\gamma(t) = P(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = P(t) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{bmatrix}, \quad P'(t) = \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{bmatrix}.$$

[immagine] Quindi

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{bmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{bmatrix} dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

Inoltre, considerato

$$\langle \underline{F}, dP \rangle = \langle \underline{F}, P' \rangle dt.$$

se

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad P'(t) = \begin{bmatrix} d_t x \\ d_t y \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\langle \underline{F}, P' \rangle dt = (p(x, y) d_t x + q(x, y) d_t y) dt = p dx + q dy.$$

Se  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\underline{F}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $P(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^\top$  allora

$$\langle \underline{F}, P' \rangle dt = (F_1 d_t x_1 + F_2 d_t x_2 + F_3 d_t x_3) dt = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3.$$

**Esempio.** Sia  $df$  il differenziale di  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dunque

$$\underline{F} = \nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix}.$$

Da cui risulta

$$\langle \nabla f, P' \rangle dt = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_t x \\ d_t y \end{bmatrix} dt = \partial_x f dx + \partial_y f dy \equiv df.$$

Cioè il differenziale di  $f$ .

**Definizione.** Forma differenziale. Sia  $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$ .

Una forma differenziale è un'espressione simbolica in  $\mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j.$$

dove  $a_j \in C^k(\mathbb{R}^n)$  per qualche  $k$  sono le componenti della forma differenziale.

Le forme differenziali sono gli oggetti integrabili sui cammini.

**Definizione.** Integrale lungo un cammino. Si consideri un cammino come una curva regolare (o regolare a tratti)  $\gamma(t) = \underline{x}(t)$ , con  $t \in [t_0, t_1]$  (con  $\underline{x}(t)$  parametrizzazione). Dunque, l'integrale di cammino è

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n a_j(\underline{x}) dx_j = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n a_j(\underline{x}(t)) d_t x_j(t) dt.$$

Dato che si è preso  $\underline{x}(t)$  regolare allora si vogliono le  $a_j$  almeno continue a tratti.

**Osservazione.** Non dipende dalla parametrizzazione di  $\gamma$ . Infatti, considerato  $t \in [t_0, t_1]$ , e  $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$  due parametrizzazioni diverse

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(\tau) \quad (\iff \underline{x}(t) = P(t) = Q(\tau)).$$

ripreso più avanti?

**Esempio.** Sia  $\omega = df$  forma differenziale di una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dunque

$$\omega = df = \partial_x f dx + \partial_y f dy.$$

Ponendo  $t \in [t_0, t_1]$ , l'integrale lungo un cammino  $\gamma$  da  $t_0$  a  $t_1$  è

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{t_0}^{t_1} (\partial_x f dx + \partial_y f dy) dt = \int_{t_0}^{t_1} d_t(f(x(t), y(t))) dt \\ &= [f(x(t), y(t))]_{t_0}^{t_1} = f(P_1) - f(P_0). \end{aligned}$$

dove si è posto

$$P_1 = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix}.$$

e l'integrale non dipende dal cammino  $\gamma$ .

Si dà una motivazione matematica per i campi irrotazionali e per i campi conservativi. Il simbolo di circuitazione è  $\oint_{\gamma}$ .

**Esempio.** Si consideri l'integrale di linea sul cammino  $\gamma = (\cos t, \sin t)$  per  $t \in [0, \pi]$ :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} x dy = \int_0^{\pi} \overbrace{(\cos t)}^x \cdot \overbrace{(-\sin t)}^{d_t y} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Considerando un'altra parametrizzazione  $(x, \sqrt{1-x^2})$ ,  $x \in [-1, 1]$  si ha

$$\int_{-1}^1 x dx \left( \sqrt{1-x^2} \right) dx = \dots = -\frac{\pi}{2}.$$

**Osservazione.** Si consideri una parametrizzazione  $P(t)$ , con  $t \in [0, 1]$ . Posto il senso di percorrenza  $P(0) = P_0 \rightarrow P(1) = P_1$ . Allora la parametrizzazione nel senso opposto è

$$\gamma(t) = P(1-t), \quad t=0 \implies P(1) = P_1, \quad t=1 \implies P(0) = P_0.$$

Pertanto, integrando la forma differenziale si ha

$$\int_0^1 \omega = \int_0^1 p dx + q dy = \int_0^1 (p d_t x + q d_t y) dt.$$

Per la seconda parametrizzazione si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 [p d_t(x(1-t)) + q d_t(y(1-t))] dt = - \int_0^1 (p d_t x + q d_t y) dt.$$

**Teorema.** Se  $\gamma$  e  $\eta$  sono due curve equivalenti, e  $\omega$  è una forma differenziale (detta anche 1-forma) allora

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\eta} \omega.$$

e il segno dipende dal fatto che le due parametrizzazioni  $\gamma$  ed  $\eta$  siano concordi o discordi.

**Dimostrazione.** Sia  $t \in [a, b]$ ,  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , per cui  $\gamma = \gamma(t)$  e  $\eta = \eta(\tau)$ . Sia  $\sigma$  un diffeomorfismo tale per cui  $\tau = \sigma(t)$  e  $t = \sigma^{-1}(\tau)$ . Dunque si sa che

$$d_t \gamma = d_t(\eta(\sigma(t))) = d_t(\eta(\tau)) = d_{\tau} \eta d_t \tau = d_{\tau} \eta \sigma'.$$

Quindi l'integrale lungo il cammino è

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{t=a}^b \omega(\gamma(t)) [\gamma'(t)] dt = \int_a^b \omega(\eta(\tau)) [d_{\tau} \eta \overbrace{d_t \tau}^{d\tau}] dt = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\eta(\tau)) d_{\tau} \eta d\tau = \pm \int_{\eta} \omega.$$

**Lineari: vettori e forme.** I vettori  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  sono elementi di  $\mathbb{R}^n$ , la base canonica è  $\{\underline{e}_j\}$  e sono scritti come colonna.

Le 1-forme (dette anche covettori) sono le funzioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ , cioè il duale di  $\mathbb{R}^n$ :  $(\mathbb{R}^n)^*$ . La cui base canonica è  $\hat{e}_h$  e sono scritti come riga. Inoltre,  $\hat{e}_j(\underline{e}_k) = 1$  se  $j = k$ , e zero altrimenti.

La derivata direzionale è una forma lineare, un vettore riga. Dunque  $df = [\partial_x f \quad \partial_y f]$ .

**Cambio di coordinate.** Sia  $\underline{x} = (x, y)$  e  $\underline{X} = (X, Y)$  sistemi di coordinate nel piano. Si consideri una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ed una funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{X} \mapsto F(\underline{X}) = \underline{x}$ . Quindi  $df = [\partial_x f \quad \partial_y f]$ . Dunque

$$\begin{aligned} F(\underline{X}) = f(x(\underline{X})) &\implies dF = [\partial_X F \quad \partial_Y F] = [\partial_x f \partial_X x + \partial_y f \partial_X y \quad \partial_x f \partial_Y x + \partial_y f \partial_Y y] \\ &= [\partial_x f \quad \partial_y f] \begin{bmatrix} \partial_X x & \partial_Y x \\ \partial_X y & \partial_Y y \end{bmatrix} = [\partial_x f \quad \partial_y f] d\underline{X} \underline{x}. \end{aligned}$$

La seconda matrice è la matrice jacobiana della trasformazione. Si moltiplica da destra il differenziale.

Considerando il vettore tangente si ha  $\underline{x}(t) \approx \underline{X}(t)$  nello stesso punto. Quindi

$$\underline{x}' = d_t(\underline{x}(X(t))) = d_{\underline{X}} \underline{x} \cdot \underline{X}'.$$

Si ha moltiplicazione da sinistra.

## 10.2 Forme esatte

**Definizione.** Sia  $\omega$  una 1-forma differenziale definita su un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Essa è esatta se  $\exists f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(A)$  tale che  $\omega = df$ . Cioè

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j(\underline{x}) dx_j, \quad \text{con } a_j(\underline{x}) = \partial_{x_j} f(\underline{x}).$$

Si consideri un campo  $\underline{V}$  di vettori in un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , cioè una funzione che associa ad ogni punto del dominio un vettore di  $\mathbb{R}^n$ . Allora, una forma differenziale è  $\omega = \langle \underline{V}, - \rangle$ .

Il campo vettoriale è conservativo se esiste una funzione scalare  $f$  tale che  $\nabla f = \underline{V}$  cioè se  $\omega = \langle \underline{V}, - \rangle$  è esatta. Inoltre, se il differenziale è esatto, allora l'integrale di linea non dipende dal percorso. (Vale anche il viceversa, ma potrebbe non essere immediato dimostrarlo; in fisica si è anche definito un campo vettoriale conservativo come un campo vettoriale tale per cui l'integrale di linea non dipende dal percorso particolare).

## Lecture 23

mar 23 nov  
2021 17:30

**Proposizione.** Se  $\omega$  è una forma esatta allora  $\int_{\gamma} \omega$  dipende solo dagli estremi  $\gamma(t_0)$  e  $\gamma(t_1)$  e non dal cammino particolare.

Se  $\gamma$  è una curva chiusa allora  $\oint_{\gamma} \omega = 0$ .

**Dimostrazione.** Infatti, posti  $P_i = \gamma(t_i)$ , si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = f(P_1) - f(P_0) = \int_{\eta} df.$$

e se  $P_0 = P_1$  allora  $\int_{\gamma} \omega = 0$ .

**Teorema.** Si consideri un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$  connesso e  $\omega$  una 1-forma con coefficienti integrabili. Si supponga che per ogni  $P_0, P_1 \in A$  e per ogni  $\gamma, \eta$  curve da  $P_0$  a  $P_1$ , se

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega.$$

allora  $\omega$  è esatta.

**Dimostrazione.** Fissato  $P_0$ , in quanto  $A$  è connesso risulta che  $\forall \underline{x}, \exists \gamma \mid \gamma(0) = P_0, \gamma(1) = \underline{x}$ . Si definisce

$$f(\underline{x}) = \int_{\gamma} \omega.$$

essa è ben definita perché non dipende da  $\gamma$ . Inoltre, si ha

$$df = \omega \iff \partial_{x_j} f = \omega_j.$$

in quanto

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j.$$

dunque

$$\partial_{x_j} \int_{\gamma} \omega = \omega_j.$$

si vede più avanti.

**Osservazione.** Equivalentemente, si può richiedere che  $\gamma$  sia regolare a tratti (e quindi anche continua). Un altro modo equivalente è

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

per ogni curva chiusa  $\gamma$ .

**Definizione.** Sia  $\omega$  una forma differenziale

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j.$$

definita su di un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Allora tale forma differenziale è chiusa se

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \partial_{x_i} \omega_j = \partial_{x_j} \omega_i.$$

Il vettore corrispondente  $\underline{V}$  si dice irrotazionale (cioè ha rotore nullo) quando la forma differenziale è chiusa.

**Teorema.** Sia  $\omega$  una forma differenziale di classe  $C^1(A)$  definita su di un aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\omega$  è esatta in  $A$  allora è chiusa.

**Dimostrazione.** Dato che  $\omega$  è esatta vale  $\omega = df$  con  $f \in C^2(A)$ . Dunque,

$$\partial_{x_i}\omega_j = \partial_{x_i}(\partial_{x_j}f) = \partial_{x_i x_j}f, \quad \partial_{x_j}\omega_i = \partial_{x_j}(\partial_{x_i}f) = \partial_{x_j x_i}f.$$

che sono uguali e quindi  $\omega$  è chiusa.

**Osservazione.** L'analogo del prodotto vettoriale è il prodotto esterno (exterior product) che si definisce per le 1-forme. Il prodotto esterno tra due 1-forme è un 2-forma.

(Il prodotto vettoriale non è un vettore, ma è un bivettore).

Infatti

$$\left(\sum_{j=1}^n \omega_j dx_j\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^n \eta_k dx_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_j \eta_k dx_j \wedge dx_k = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\omega_j \eta_k - \omega_k \eta_j) dx_j \wedge dx_k.$$

I termini dell'ultima sommatoria sono i termini del prodotto vettoriale.

L'operatore  $d(f) = df$  associa ad una funzione la forma differenziale. Ora si vede cosa succede ad applicare tale operatore ad una forma:

$$\begin{aligned} d(\omega) &= d\left(\sum_{j=1}^n \omega_j dx_j\right) = \sum_{j=1}^n (d\omega_j) \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} \omega_j dx_k\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\partial_{x_k} \omega_j - \partial_{x_j} \omega_k) dx_k \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Le forme chiuse sono quelle che hanno il differenziale nullo perché le derivate parziali si elidono.

**Rotore e divergenza.** in  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vettoriale. La divergenza di  $\underline{F}$  è

$$\operatorname{div}(\underline{F}) = \nabla \cdot \underline{F}.$$

mentre il rotore è

$$\operatorname{rot}(\underline{F}) = \operatorname{curl}(\underline{F}) = \nabla \times \underline{F}.$$

In due coordinate, l'operatore nabla è

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{bmatrix} \quad \nabla \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \partial_x p + \partial_y q.$$

Mentre il prodotto vettoriale necessita di tre dimensioni:

$$\nabla \times \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ p & q & 0 \end{bmatrix} = (\partial_x q - \partial_y p) \hat{k}.$$

che è il determinante della matrice  $2 \times 2$  trovato prima riguardo i termini del prodotto vettoriale.

## Lecture 24

Il rotore è nullo se e solo se la forma associata è chiusa.

ven 26 nov  
2021 13:30

**Teorema.** di Gauss-Green. Si consideri una 1-forma differenziale  $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$  con  $p, q \in C^1(A)$  dove  $A$  è una regione del piano di  $\mathbb{R}^2$  costituita dall'interno di un cammino chiuso  $\gamma$  (cioè l'interno di un sottoinsieme che ha per bordo il cammino chiuso  $\gamma$ ) percorso in senso antiorario. Allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_A (\partial_x q - \partial_y p) dx dy.$$

**Osservazione.** Si nota che  $\partial_x q - \partial_y p$  è una componente del rotore associato a tale forma.

**Teorema.** Come sopra, in più si supponga che  $A$  ha per bordo  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  curve regolari a tratti percorse in modo tale che la regione  $A$  sia alla sinistra del verso di percorrenza. Allora

$$\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \omega = \int_A (\partial_x q - \partial_y p) dx dy.$$

(Risulta che i cammini all'esterno sono percorsi in senso antiorario ed i cammini interni sono percorsi in senso orario).

I due teoremi sono equivalenti.

**Esempio.** Si considerino due cammini circolari concentrici. Si vuole calcolare l'area della corona circolare. Si parte dal primo teorema. Tagliando la regione in un segmento tra il percorso esterno ed interno si fa in modo di unire i due bordi. Facendo un taglio di spessore  $\varepsilon$ , allora esso si può andare a zero così da avere l'integrale di partenza

$$\int_{\hat{A}} (\partial_x q - \partial_y p) dx dy \approx \int_A (\partial_x q - \partial_y p) dx dy.$$

In cui risulta

$$\int_{\hat{A}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\text{destra}} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\text{sinistra}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

**Osservazione.** Sia la 1-forma  $\omega$  chiusa (e quindi irrotazionale). Allora per Gauss-Green si ha che  $\int_{\gamma} \omega = 0$  per ogni  $\gamma$  bordo di una regione  $A$  su cui  $\omega$  è definita e chiusa.

Il campo  $V$  corrispondente ha circuitazione nulla lungo  $\gamma$  per tutte le  $\gamma$  bordo di una regione  $A$ . Questo implica che la forma è esatta?

**Teorema.** della divergenza. Si consideri un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\text{div } \underline{F} = \nabla \cdot \underline{F}$ . Segue che

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \implies \text{div } \underline{F} = \partial_x p + \partial_y q.$$

Allora

$$\int_A \text{div } \underline{F} dx dy = \int_{\partial A} \underline{F} \cdot \underline{n} ds.$$

con  $\underline{n}$  versore normale esterno a  $\gamma = \partial A$  e  $ds$  (per cui  $d_t s = \|P'\|$ ) parametro naturale della curva  $\gamma$ . Infatti, percorrendo la curva  $\gamma$ , la regione si trova alla sinistra e il vettore normale della regione è perpendicolare al vettore che determina il verso di percorrenza (il vettore velocità). Il secondo integrale è il flusso di  $\underline{F}$  attraverso il bordo di  $A$ . L'integrale della divergenza misura il flusso del campo verso l'esterno.

**Osservazione.** Si consideri una regione circolare  $A$  piccola e la si mandi ad un infinitesimo. Si divide l'integrale della divergenza per l'area

$$\frac{1}{A} \int_A \text{div } \underline{F} = \frac{1}{A} \int_{\partial A} \underline{F} \cdot \underline{n} ds.$$

Il primo integrale tende al valore della divergenza nel centro della regione. Il secondo integrale è il flusso limite per tale punto.

Muovendosi allo stesso modo tramite Gauss-Green si ha

$$\frac{1}{A} \int_A \operatorname{curl} \underline{V} \, dx \, dy = \frac{1}{A} \int_{\partial A} \underline{V} \cdot \underline{P}' \, dt.$$

Mandando  $A$  ad un punto, l'integrale di sinistra tende al valore del rotore in tale punto; mentre l'integrale di destra è la circuitazione limite.

**Esempio.** Si consideri  $A \subset \mathbb{R}^2$  un'area del piano. Sia  $\omega = y \, dx$  (oppure  $\omega = x \, dy$ ). Integrando tale forma lungo  $\gamma = \partial A$  si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} y \, dx = (\text{G.G.}) \int_A (\partial_x q - \partial_y p) \, dx \, dy = \int_A 0 - 1 \, dx \, dy = -A.$$

Dato che  $\omega = p \, dx + q \, dy$  allora  $p = y$  e  $q = 0$ . Utilizzando l'altra 1-forma si ha

$$\int_{\gamma} x \, dy = \int_A (1 - 0) \, dx \, dy = A.$$

in quanto  $p = 0$  e  $q = x$ .

**Esempio.** Si consideri una 1-forma

$$\omega = p \, dx + q \, dy = \frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy.$$

esso definisce un campo circolare in senso antiorario:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \|\underline{V}\| = \frac{1}{\|(x, y)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Se  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  allora  $\|\underline{V}\| \rightarrow \infty$ : si ha un polo nell'origine. Si determina se la 1-forma è chiusa

$$\begin{aligned} \partial_y p &= \partial_y \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x q &= \partial_x \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Essa è chiusa dunque il campo è irrotazionale. Si consideri un cammino circolare in senso antiorario

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Allora la circuitazione è

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} (p(\gamma) \, d_t x + q(\gamma) \, d_t y) \, dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \, d_t x + \frac{x}{x^2 + y^2} \, d_t y \right) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Il campo è irrotazionale, ma se valesse Gauss-Green in tutta la regione allora l'integrale sarebbe zero. Tuttavia, il campo al centro della regione non è definito, dunque Gauss-Green non vale. Però, integrando su di un percorso che contiene una corona circolare segue che si ottiene zero perché tale regione non contiene il centro.



**Osservazione.** Si nota che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega = \text{winding number di } \gamma.$$

Cioè il numero di giri attorno al polo (integrali usati nelle teorie di campo topologiche?).

Questo è un controesempio: la forma chiusa non è esatta, dunque non ha primitive.

### 10.2.1 Rotore e divergenza in $\mathbb{R}^3$

Si consideri un campo vettoriale  $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Allora

- la divergenza è  $\nabla \cdot \underline{F}$
- il rotore è  $\nabla \times \underline{F}$

Per il rotore si ha

$$\text{curl } \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}.$$

Si vedono gli analoghi dei teoremi precedenti.

**Teorema.** della divergenza. Sia  $U \subset \mathbb{R}^3$  una regione con bordo (che è una superficie) regolare tranne in "qualcosa di dimensione più bassa";  $\underline{F}$  campo vettoriale;  $\underline{n}$  vettore normale esterno a  $U$  in  $\partial U$ . Allora

$$\int_U \text{div } \underline{F} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial U} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dA.$$

dove  $dA$  è l'elemento d'area della superficie ( $\|P_u \times P_v\| \, du \, dv$ ).

**Esempio.** Si consideri il campo vettoriale identità

$$\underline{F} = \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies \text{div } \underline{F} = 3.$$

Allora tre volte il volume della regione è pari a

$$\int_{\partial U} \underline{x} \cdot \underline{n} \, dA.$$

Se  $U$  è una sfera di raggio  $r$  allora il suo volume è  $\frac{4}{3}\pi r^3$  e

$$\underline{n} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \implies \int_U \underline{x} \cdot \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \, dA = r \int_U dA.$$

Qualora non si sapesse quanto sia la superficie della sfera si può avere

$$3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = rS \iff S = 4\pi r^2.$$

**Teorema.** di Stokes. Sia  $S$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , con bordo  $\partial S = \gamma$  curva chiusa regolare a tratti (non si definisce formalmente il bordo, lo si fa per intuizione). Sia  $\underline{F}$  un campo vettoriale definito in un aperto che contiene  $S$  e  $\partial S$ . Se  $S$  è orientabile (cioè si può prendere un versore normale che dipende con continuità dal punto della superficie e definitovi globalmente); sia  $\underline{n}$  il campo di vettori (versori) ortogonali a  $S$  e sia  $\gamma$  percorsa in modo da mantenere la superficie  $S$  a sinistra (considerando  $\underline{n}$  come l'alto rispetto a cui si prende la sinistra). Allora

$$\int_S (\text{curl } \underline{F}) \cdot \underline{n} \, dA = \int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\gamma.$$

Il primo è un integrale di superficie, il secondo è la circuitazione di  $\underline{F}$  su  $\gamma$ .

**Esercizio.** Mostrare che tale teorema implica il teorema di Gauss-Green. Prendere una superficie piana.

## Lecture 25

lun 29 nov  
2021 14:30

## 11 Equazioni differenziali

**Esempio primo.** Primitiva: trovare  $F(x)$  tale che  $d_x F(x) = f(x)$ . La soluzione è  $F(x) = \int f(x)$  tuttavia, non sempre si può scrivere  $F(x)$  in forma analitica. Se  $f(x)$  è continua e si considera la funzione integrale  $\int_{x_0}^x f(t) dt \equiv F(x)$  allora  $d_x F = f(x)$ . Le soluzioni sono una quantità  $\infty^1$ .

**Esempio secondo.** Sia  $u'(t) = f(t, u(t))$ , si vuole trovare  $u(t)$  che soddisfa tale equazione differenziale. (Si possono usare anche altre coordinate  $x'(t) = f(t, x(t))$  oppure  $y'(x) = f(x, y(x))$ ).

**Esempio terzo.** A variabili separabili. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)f(u(t)).$$

Se  $f(u) = 0$  allora  $u$  costante è una soluzione. Si ha un campo vettoriale nel piano  $t, u$  secondo  $\underline{V} = (1, u') = (1, f(t, u))$ . Per le variabili separabili si ha  $\hat{f}(t, u) = a(t)f(u)$ . La retta  $u = \text{cost.}$  separa le curve in due regioni.

Se  $f(u) \neq 0$  si ha

$$\frac{d_t u}{f(u)} = a(t) \implies \int \frac{du}{f(u)} = \int a(t) dt.$$

**Esempio quarto.** Decadimento. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = -ky(x) \iff d_x y = -ky \iff \frac{dy}{y} = -k dx \quad y \neq 0 \implies \int \frac{dy}{y} = -k \int dx.$$

queste sono due classi di equivalenza delle primitive, perché esse sono univoche a meno di una costante. Nel caso in cui  $y = 0$  si ha una soluzione costante.

Si supponga  $y > 0$  si ha

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y = -kx + C \implies y = y_0 e^{-kx}.$$

Con  $y_0 = e^C = y(0)$ . Considerando l'emivita  $\lambda$  di un isotopo radioattivo si può trovare la costante

$$y_0 e^{-k\lambda} = \frac{y_0}{2} \iff e^{k\lambda} = 2 \iff k = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

**Esempio quinto.** Si consideri l'equazione differenziale

$$u' = au + b.$$

con  $u(t)$  funzione incognita e  $a(t)$ ,  $b(t)$  coefficienti non costanti dell'equazione lineare del primo ordine. Lineare perché  $u$  compare con grado massimo di uno. Del primo ordine perché l'ordine di derivazione più alto è l'uno.

Si utilizza il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Si considera solo l'equazione omogenea associata

$$u' = au \iff d_t u = au \iff \frac{du}{u} = a dt \implies \ln u = \int a dt.$$

essa è a variabili separabili con  $a(t)$ ,  $f(u) = u$ , supponendo  $u > 0$ . Pertanto

$$u(t) = e^{\int a(t) dt} = C e^{A(t)}.$$

dove  $C$  è la costante arbitraria. La soluzione dell'equazione originale è nella forma

$$u(t) = C(t) e^{A(t)}.$$

Si pone  $V(t) = C(t) e^{A(t)}$ . Essa è soluzione quando

$$\begin{aligned} V' &= C' e^{A(t)} + C A' e^{A(t)} \equiv a(t) C(t) e^{A(t)} + b(t) \\ \iff (C' + C A' - a C) e^{A(t)} &= b(t) \iff C' e^{A(t)} = b(t) \\ \iff C' &= \frac{b(t)}{e^{A(t)}} \implies C = \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}} dt. \end{aligned}$$

ricordando che  $A' = a$ .

**Esempio.** Si consideri

$$u'(t) = \frac{u}{t} + t + 1.$$

dove si ha  $u' = au + b$  con  $a(t) = \frac{1}{t} \implies A(t) = \ln t$  e  $b(t) = t + 1$ . Quindi

$$u(t) = C(t) e^{A(t)}, \quad C' = \frac{b}{e^A} = \frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t} \implies C = t + \ln t + c_1.$$

Dunque

$$u(t) = (t + \ln t + c_1)t = t^2 + t \ln t + c_1 t.$$

**Esempio sesto.** Si vede l'equazione logistica. Essa descriva una popolazione con risorse limitate:

$$p' = kp - hp^2.$$

con condizione iniziale  $p(0) = p_0$ . L'equazione omogenea associata è a variabili separabili

$$p' = kp \iff \frac{dp}{kp - hp^2} = dt.$$

che si risolve con la scomposizione alle frazioni parziali.

**Esempio settimo.** Si considerino le equazioni differenziali del sistema dinamico di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = ax - bxy = x(a - by) \\ y' = cy + dxy = y(dx - c) \end{cases}.$$

con  $x, y > 0$  e  $a, b, c, d > 0$ .

**Esempio ottavo.** L'oscillatore armonico (con o senza forzante):

$$mx'' = -kx - \gamma x'.$$

con coefficienti costanti; se si ha una forzante allora si aggiunge una funzione  $f(t)$ .

**Definizione.** Si consideri una funzione  $\underline{F}(t, \underline{x}) : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita sull'aperto  $A$ . Allora

$$d_t \underline{x} = \underline{F}(t, \underline{x}(t)).$$

è un'equazione differenziale del prim'ordine in forma normale nell'incognita  $\underline{x}(t)$  (definita in un certo intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ ). Forma normale significa che l'equazione è scritta esplicitamente nella derivata di  $\underline{x}$ .

Un'equazione dell'ordine  $k$ -esimo in forma normale è

$$d_t^k \underline{x} = \underline{F}(t, \underline{x}(t), d_t \underline{x}, \dots, d_t^{k-1} \underline{x}).$$

Per esempio, si consideri  $k = 2$ . Allora l'equazione è

$$d_t^2 \underline{x} = \underline{F}(t, \underline{x}, d_t \underline{x}).$$

facendo un cambio di coordinate

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = d_t \underline{x} \\ \underline{u}_0 = \underline{x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} d_t \underline{u}_0 = \underline{u}_1 \\ d_t \underline{u}_1 = d_t^2 \underline{x} = \underline{F}(t, \underline{u}_0, \underline{u}_1) \end{cases}.$$

si è trasformato l'equazione del secondo ordine in un sistema di equazioni del prim'ordine. Esso è un problema del prim'ordine in  $(\underline{u}_0, \underline{u}_1) \in \mathbb{R}^{n+n}$ .

## 11.1 Problema ai valori iniziali

Abbreviato in IVP (initial value problem) e detto anche problema di Cauchy. Si ha

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

dove  $f(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$  sono dati. Il problema consiste nel trovare  $y(x)$  che soddisfa l'equazione iniziale ed il dato iniziale contemporaneamente.

Si vuole dare un criterio affinché sia possibile trovare tale soluzione.

**Definizione.** Si consideri una funzione definita su di un rettangolo  $f : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$I = [x_0 - r, x_0 + r] \quad J = [y_0 - s, y_0 + s].$$

Essa è lipschitziana in  $y$  (uniformemente in  $x$ ) se

$$\exists L \mid \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in J \implies |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

**Definizione.** Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita sull'aperto  $A$  è localmente lipschitziana in  $y$  (uniformemente in  $x$ ) se

$$\forall (x_0, y_0) \in A, \exists r, s > 0 \mid I = [x_0 - r, x_0 + r] \wedge J = [y_0 - s, y_0 + s].$$

allora  $f$  è lipschitziana in  $y$  (uniformemente in  $x$ ) su  $I \times J$ .

**Proposizione.** Si considerino  $I$  e  $J$  come sopra. Se  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e derivabile in  $y$  con  $f_y$  continua su  $I \times J$ , allora  $f$  è lipschitziana rispetto a  $y$ .

**Teorema.** di esistenza e unicità locale. Si consideri il problema di Cauchy precedente:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Si supponga di porsi in un rettangolo  $I \times J$  e  $f$  sia lipschitziana rispetto a  $y$  (uniformemente in  $x$ ) e continua in  $I \times J$ . Allora  $\exists \delta > 0 \mid$  IVP ha una sola soluzione in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

**Corollario.** Linee di flusso. I grafici di due soluzioni di un'equazione differenziale con  $f$  che soddisfa le ipotesi del teorema precedente, non si intersecano.  
Una soluzione funziona sempre da separatrice.

**Corollario.** Variabili separabili. Si consideri

$$y' = a(t)f(y).$$

Se  $f(y) = 0$  allora si hanno soluzioni costanti. Per il corollario precedente, una volta studiato il caso per  $f(y) \neq 0$  risulta giustificato supporre che  $f(y) \neq 0$ , perché se non è nullo in un istante, allora non è mai nullo.

**Esempio.** Si consideri IVP:

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

detto pennello di Peano. La derivata è

$$d_y \sqrt[3]{y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}.$$

Se  $y(x) \equiv 0$  allora  $y' = 0$  è una soluzione. Si consideri  $y(x) = (x - x_0)^{\frac{3}{2}}$ , allora

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x - x_0} = \frac{3}{2} \left( (x - x_0)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y(x)}.$$

Se  $x_0 = 0$  segue  $y(0) = 0$ . Le soluzioni sono infinite, scegliendo  $x_0$  si ha una biforcazione (?): la soluzione a tratti parte da zero, è costante fino a  $x_0$  e poi segue  $y(x)$ .

## Lecture 26

uniformemente in  $x$  = vale per tutte le  $x$

mar 30 nov  
2021 17:30

**Teorema.** Si consideri un IVP

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{F}(t, \underline{x}) & \text{eq. diff} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Sia  $\underline{F}(t, \underline{x}) : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  definita in un aperto  $A$ , continua e lipschitziana rispetto  $\underline{x}$  in un rettangolo  $I \times J$ , con  $I = [t_0 - r, t_0 + r]$  e  $J = B_s(\underline{x}_0)$  cioè

$$\|F(t, \underline{x}_2) - F(t, \underline{x}_1)\| \leq L \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|.$$

Allora

$$\exists \delta > 0, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I.$$

tale che esiste ed è unica la soluzione del IVP.

**Corollario.** Si consideri un IVP scalare del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'_0 = u_1 \\ u'_1 = f(x, u_0, u_1) = f(x, \underline{u}) \\ u_0(x_0) = \text{dato iniziale} \\ u_1(x_0) = \text{dato iniziale} \end{cases}.$$

Si può sempre ricondurre ad un sistema di equazioni differenziali vettoriali del prim'ordine. Per il teorema esiste un'unica soluzione con tali condizioni iniziali, se  $f$  è continua e lipschitziana in  $y$  e  $y'$ .

**Osservazione.** Regolarità. Si consideri un IVP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

per il teorema esiste un'unica soluzione locale. Dato che  $f$  è continua, allora la soluzione  $y(x)$  è di classe  $C^1$  perché la sua derivata (cioè  $f(x, y)$ ) è continua. Se  $f$  è di classe  $C^k$  allora la soluzione è di classe  $C^{k+1}$ .

## 11.2 Prolungamenti.

Si vede la costanza e l'unicità globale.

Si vedono soluzioni definite globalmente. Il teorema visto implica solamente l'esistenza locale della soluzione, ma potrebbe darsi che la soluzione sia valida anche oltre un intervallo locale. Si cerca qual è l'intervallo di esistenza massimale, cioè si prolunga la soluzione.

**Incollamento di due soluzioni locali.** Si prendono le soluzioni locali. Si possono unire quando l'intersezione degli intervalli delle soluzioni coincidono in un punto. Sia il primo intervallo  $(a_0, a_1)$  ed il secondo intervallo  $(b_0, b_1)$ . Si supponga che  $(a_0, a_1) \cap (b_0, b_1) \neq \emptyset$ . Se  $y_1$  è la soluzione definita in  $(a_0, a_1)$  e  $y_2$  è la soluzione definita in  $(b_0, b_1)$ . Allora

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a_0, a_1) \\ y_2(x), & x \in (b_0, b_1) \end{cases}.$$

Se  $x \in (a_0, a_1) \cap (b_0, b_1)$  allora  $y_1(x) = y_2(x)$ . Le soluzioni coincidono in tutti i punti dell'intersezione per il teorema di esistenza e unicità: le due soluzioni non si possono intersecare. Localmente la soluzione è unica. Le due soluzioni non possono biforcarsi perché altrimenti non si ha più unicità.

Si prolunga il grafico fin dove si riesce.

**Teorema.** Ogni soluzione dell'equazione differenziale  $y' = f(x, y)$  con  $f$  continua e localmente lipschitziana in  $y$  ha un intervallo di esistenza massimale. (Tuttavia, non è saputo a priori quanto grande sia l'intervallo).

**Esempio.** Si consideri  $y' = 1 + y^2$ . Si ha

$$d_x y = 1 + y^2 \iff \frac{dy}{1 + y^2} = dx \implies \arctan(y) = x + C \iff y = \tan(x + C).$$

**Teorema.** di esistenza globale. Si consideri l'equazione differenziale  $y' = f(x, y)$ . Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo (non necessariamente limitato);  $f$  definita in  $I \times \mathbb{R}$ , continua, localmente lipschitziana in  $y$  e esista  $k$  costante tale che

$$|f(x, y)| \leq k(1 + |y|).$$

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale è definita in  $I$ .

La funzione  $y$  deve crescere al massimo linearmente.

**Teorema.** di esistenza globale. Versione vettoriale. Si consideri l'equazione differenziale  $\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$ . Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo (non necessariamente limitato);  $\underline{f}$  definita in  $I \times \mathbb{R}$ , continua, localmente lipschitziana in  $\underline{y}$  e esista  $k$  costante tale che

$$\|\underline{f}(x, \underline{y})\| \leq k(1 + \|\underline{y}\|).$$

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale è definita in  $I$ .

**Esempio.** Si consideri  $y' = ay + b$ , con  $a(x)$  e  $b(x)$  continue. Allora pure  $f(x, y)$  è continua. Essa è lipschitziana (uniformemente in  $x$ ) se

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \iff |a(x)y_1 + b(x) - (a(x)y_2 + b(x))| = |a(x)||y_1 - y_2| \leq \max_x |a(x)| \cdot |y_1 - y_2|.$$

il massimo esiste perché l'intervallo è compatto.

**Esercizio.** Mostrare che se vale tale forma di linearità allora vale l'esistenza e unicità globale.

## Lecture 27

### 11.3 Equazioni differenziali lineari

ven 03 dic  
2021 13:30

Si consideri un'equazione differenziale vettoriale del primo ordine

$$\underline{x}' = A(\underline{x}, t) = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t).$$

con  $A$  matrice  $n \times n$  e  $\underline{b}$  un vettore con dimensione  $n$ .

Si consideri un'equazione del secondo ordine

$$y'' = f(x, y, y').$$

essa è lineare quando negli argomenti. Si ricorda che una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è lineare (in analisi, questa è detta pure omogenea) se  $f : \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ , con  $A$  matrice  $m \times n$ . La funzione lineare non omogenea è  $f : \underline{x} \mapsto A\underline{x} + \underline{b}$ , con  $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ . Dunque, l'equazione precedente diventa

$$y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x).$$

Un altro modo di ottenere le equazioni differenziali omogenee è farle assomigliare a dei polinomi. Un polinomio di secondo grado è detto monico quando il coefficiente di  $x^2$  è uno. Si scrive il polinomio associato all'equazione differenziale dove il grado di derivazione corrisponde al grado del polinomio:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

il primo membro è la parte omogenea, mentre il secondo membro è il termine noto. In generale, la forma di un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  è

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x).$$

se  $b(x) = 0$  allora è l'equazione differenziale omogenea associata. Un'equazione scalare lineare di ordine  $n$  allora si può passare ad un'equazione vettoriale di ordine uno di dimensione  $n$ .

Per il secondo grado si ha

$$y'' + a_1y' + a_0y = b.$$

Si pone  $u_0 \equiv y$ ,  $u_1 \equiv y'$ ; per cui  $u'_0 = u_1$  e  $u'_1 = y'' = -a_1u_1 - a_0u_0 + b$ . Pertanto

$$\begin{bmatrix} u'_0 \\ u'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = A\underline{u} + \underline{b}.$$

**Teorema.** esistenza e unicità globale. Si consideri un'equazione differenziale lineare. Si considerino  $a_j(x)$  e  $b(x)$  funzioni di classe  $C^0(I)$  in un intervallo  $I$ . Allora ogni IVP ha un'unica soluzione (massimale) in  $I$ .

**Teorema.** Si consideri  $V$  spazio di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata (con le ipotesi del teorema precedente). Allora  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .

**Dimostrazione.** Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea associata

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} = b(x) = 0.$$

Si mostra che la combinazione lineare di due soluzioni è ancora soluzione. Si considerino due soluzioni  $y_1, y_2$ , e due scalari  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Segue

$$\begin{aligned} (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(j)} &= c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) (c_1 y_1^{(j)} + c_2 y_2^{(j)}) \\ &= c_1 y_1^{(n)} + c_1 \sum_{j=0}^{n-1} a_j y_1^{(j)} + c_2 y_2^{(n)} + c_2 \sum_{j=0}^{n-1} a_j y_2^{(j)} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Si mostra che  $\dim V = n$  (scritto nella letteratura più datata come  $V = \infty^n$ , cioè ci sono  $n$  infiniti, uno per ciascuna variabile).

Ogni soluzione ha un certo valore al tempo  $t_0 \in I$ . Dunque l'IVP per l'equazione [r] Dunque

$$y \in V \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)).$$

Per il teorema dell'esistenza e unicità globale, l'esistenza implica che l'applicazione lineare è suriettiva; mentre l'unicità implica l'injectività. Pertanto, essa è biunivoca.

**Corollario.** Si consideri  $y_P$  una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea; e si consideri  $V$  l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea. Allora lo spazio di tutte le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea è

$$y_P + V = \{y_P + y \mid y \in V\}.$$

ricorda gli spazi affini dell'algebra lineare.

**Esempio.** Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Lo spazio  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione due. Dunque, per costruire una base si ha bisogno di due vettori linearmente indipendenti. Si associa un polinomio:

$$\begin{aligned} D^2 y + D y - D^0(2y) = 0 &\iff (D^2 + D - 2)(y) = 0 \iff (D - 1)(D + 2)(y) = 0 \iff \\ D y = y \vee D y = -2y &\iff y = c_1 e^x, c_1 \in \mathbb{R} \vee y = c_2 e^{-2x}, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dove  $D$  è l'operatore differenziale che manda funzioni  $C^n$  in funzioni  $C^{n-1}$ ; si sono usate le sue proprietà formali. Si ha moltiplicazione per uno scalare, la potenza e si possono sommare altri operatori. Tale operatore differenziale è l'analogo delle matrici.

Le due soluzioni trovate sono linearmente indipendenti.

Si generalizza

$$(D - \lambda)(y) = 0 \iff y = c e^{\lambda x}, c \in \mathbb{R}.$$

**Esempio.** Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' - 2y' + y = 0 \iff (D^2 - 2D + 1)(y) = 0 \iff (D - 1)^2(y) = 0.$$

Da cui risulta

$$(D - 1)(y) = 0 \iff y = c_1 e^x.$$



Però bisogna trovare un'altra soluzione, perché lo spazio delle soluzioni ha dimensione pari all'ordine dell'equazione. Infatti, si ponga  $c_1 = x$

$$(D-1)(xe^x) = e^x + xe^x - xe^x = e^x.$$

Inoltre

$$(D-1)^2(xe^x) = (D-1)(e^x) = 0.$$

In generale

$$(D-\lambda)^m(y) = 0.$$

dove  $m$  è detta molteplicità di  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Essa ha  $m$  soluzioni indipendenti:

$$\{f(x) \mid f(x) = c_j x^j e^{\lambda x}, j \in \{0, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}\}.$$

**Esempio.** Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \iff (D^2 - 2D + 2)(y) = 0 \iff Dy = 1 \pm i.$$

Si cercano soluzioni del tipo  $e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\omega)x}$ , cioè con  $\lambda$  complesso. Quindi

$$e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i \sin x), \quad e^{(1-i)x} = e^x(\cos x - i \sin x).$$

Le parti reali di queste soluzioni particolari sono  $e^x \cos x$  e  $e^x \sin x$  che sono soluzioni perché sono combinazioni lineari delle due precedenti. Infatti

$$e^x \cos x = \frac{e^x}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}e^x e^{ix} + \frac{1}{2}e^x e^{-ix}.$$

Tutte le volte che si hanno due radici complesse coniugate  $\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ , cioè  $\alpha + i\omega$  e  $\alpha - i\omega$ , segue che le due soluzioni

$$e^{\alpha x} \cos(\omega x), \quad e^{\alpha x} \sin(\omega x).$$

Se la radice avesse molteplicità  $m \neq 1$ , si hanno come soluzioni (oltre a quelle senza la  $x$ ):

$$xe^{\alpha x} \cos(\omega x), \quad xe^{\alpha x} \sin(\omega x), \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \cos(\omega x), \quad x^{m-1}e^{\alpha x} \sin(\omega x).$$

Si hanno  $2m$  soluzioni che corrispondono a

$$[(D-\lambda)(D-\bar{\lambda})]^m = 0.$$

Questo conclude le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Rimane il problema di fattorizzare polinomi di grado arbitrario.

**Soluzione particolare.** Se il termine noto si può scrivere come

$$b(x) = H(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x) + K(x)e^{\alpha x} \sin(\omega x).$$

con  $H, K$  polinomi in  $x$  e  $\alpha, \omega$  parametri reali. Si cercano  $y(x)$  della forma

$$y(x) = x^j(h(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x) + k(x)e^{\alpha x} \sin(\omega x)).$$

dove  $h, k$  sono polinomi in  $x$  di grado pari al massimo grado tra  $H, K$ ; e  $j$  un intero (vedi note). Si vede un altro modo. Si utilizza la variazione delle costanti arbitrarie. Nel caso delle equazioni del secondo ordine, si scrive

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

la soluzione generale è  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ . Si cerca la forma della soluzione comeo

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = y(x).$$

però bisogna trovare  $c_1$  e  $c_2$ , quindi si aggiunge

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

**Esercizio.** Si riscriva come

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}.$$

e vedere a capire la variazione delle costanti arbitrarie.  
Ma l'abbiamo già fatto ad inizio lezione con  $\underline{u}'$ ???

## Lecture 28

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

ven 10 dic  
2021 13:30

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

**Definizione.** L'equazione differenziale vettoriale associata ha per componenti

$$u_0(x) = y(x), \quad u_1(x) = y'(x).$$

dunque, l'equazione precedente è equivalente a

$$\begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = -a_1 u_1 - a_0 u_0 + b \end{cases}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow d_x \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

in forma compatta si ha

$$d_x \underline{u} = A\underline{u} + \underline{b}.$$

che è un'equazione del prim'ordine in dimensione due  $\underline{u}' = A\underline{u} + \underline{b}$ . Si sa che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è uno spazio vettoriale. In questo caso lo spazio vettoriale ha dimensione due (perché è di dimensione uno per ciascuna delle componenti): la base è composta da due funzioni.

Siano  $y_1, y_2$  funzioni della base scalare e siano  $\underline{u}_1, \underline{u}_2$  funzioni della base vettoriale. Ricordando che

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix}.$$

quindi le soluzioni per l'equazione scalare sono

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

mentre per l'equazione vettoriale si ha

$$c_1 \underline{u}_1(x) + c_2 \underline{u}_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Osservazione.** La scelta della base è arbitraria. La base canonica di  $\mathbb{R}^2$  è

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Si associa la soluzione al dato iniziale e si utilizza il teorema di esistenza e unicità globale delle equazioni lineari per mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca. Sia  $y$  soluzione a cui si associano i dati iniziali  $y(x_0)$  e  $y'(x_0)$ . Si suppone che

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

cioè

$$\underline{u}_1(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_2(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La forma matriciale della soluzione per l'equazione vettoriale è

$$c_1 \underline{u}_1(x) + c_2 \underline{u}_2(x) = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \equiv W \underline{c}.$$

essa è la matrice di Wronski.

Inoltre,

$$c_1 \underline{u}_1(x_0) + c_2 \underline{u}_2(x_0) = W(x_0) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

le soluzioni scelte sono quelle per cui quando si valuta in  $x_0$  si ha il vettore  $\underline{c}$  come dato iniziale della soluzione. Le soluzioni si trovano tutte nel dato iniziale e poi vengono mosse tramite la matrice  $W(x)$  che dipende dal tempo.

Si cerca  $\underline{u}(x) = W(x)\underline{c}(x)$ , tramite la variazione delle costanti arbitrarie, per trovare la soluzione particolare all'equazione non omogenea  $\underline{u}' = A\underline{u} + \underline{b}$ . La matrice  $W$  dà le soluzioni dell'equazione omogenea. Infatti

$$\begin{cases} \underline{u}'_1 = A\underline{u}_1 \\ \underline{u}'_2 = A\underline{u}_2 \end{cases} \implies W' = \begin{bmatrix} \underline{u}'_1 & \underline{u}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\underline{u}_1 & A\underline{u}_2 \end{bmatrix} = AW.$$

si cerca per quale vettore  $\underline{c}$ , la funzione prodotto  $\underline{u} = W(x)\underline{c}(x)$  è una soluzione di  $\underline{u}' = A\underline{u} + \underline{b}$ . Per sostituzione si ha

$$\begin{aligned} d_x(W\underline{c}) &= A(W\underline{c}) + \underline{b} \iff W'\underline{c} + W\underline{c}' = AW\underline{c} + \underline{b} \iff \\ AW\underline{c} + W\underline{c}' &= AW\underline{c} + \underline{b} \iff W\underline{c}' = \underline{b} \implies \underline{c}' = W^{-1}\underline{b}. \end{aligned}$$

la matrice  $W$  è invertibile perché le sue colonne sono linearmente indipendenti perché sono una base dello spazio vettoriale delle soluzioni. Inoltre, in  $x_0$  si ha

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e quindi invertibile. Ma essa è invertibile per ogni  $x$ . Per assurdo, se  $W(x)$  avesse  $\underline{c}$  tale che  $W(x)\underline{c} = 0$ ,  $\underline{c} \neq \underline{0}$ ; allora  $W(x)\underline{c}$  è soluzione che passa per  $\underline{0} \in \mathbb{R}^2$ ; ma si ha già una soluzione che passa per l'origine (cioè  $\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ ) e dunque non varrebbe più il teorema di unicità della soluzione. Se la soluzione è diversa da zero all'inizio, allora lo è sempre.

Quindi basta porre  $\underline{c}' = W^{-1}\underline{b}$ , cioè

$$\underline{c} = \int W^{-1}\underline{b}.$$

Inoltre

$$W\underline{c}' = \underline{b} \iff \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

cioè si cerca la soluzione di

$$\begin{cases} y_1 c'_1 + y_2 c'_2 = 0 \\ y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 = b \end{cases}.$$

si osserva che nella prima equazione è comparsa la relazione tra le derivate delle  $c$  che si ha nella variazione delle costanti arbitrarie. Non si è aggiunto niente, si è solo detto che si prende la funzione vista come variazione delle costanti, si è cercata la soluzione particolare e nel cercarla si ha quest'equazione in più che altrimenti non si presenta nell'equazione scalare del secondo ordine.

**Esempio.** Si consideri l'equazione differenziale lineare scalare del secondo ordine

$$y'' + y = x^2.$$

Si considera l'equazione omogenea associata

$$y'' + y = 0 \iff (D^2 + 1)(y) = 0.$$

il polinomio caratteristico corrispondente è  $t^2 + 1 = 0 \iff t = \pm i$ . Si scrive l'equazione in forma vettoriale

$$\begin{cases} u_0 = y \\ u_2 = y' \end{cases} \implies \begin{cases} u'_0 = u_1 \\ u'_1 = -u_0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} u'_0 \\ u'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \iff \underline{u}' = A\underline{u}.$$

tale matrice rappresenta  $-i$ . Per trovare una soluzione si utilizza il polinomio di Taylor per  $\underline{u}$ :

$$\underline{u} = \sum \underline{u}^n?$$

Si supponga che  $\underline{u}' = A\underline{u}$  sia scalare  $y' = ay$ . Si cercano i coefficienti della serie di potenze

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies ay = \sum_{n=0}^{\infty} a a_n x^n.$$

si supponga che la convergenza uniforme, dunque

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n.$$

pertanto, dalle due sommatorie si ha che per ogni  $n$  deve valere

$$a a_n = a_{n+1} (n+1) \iff a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n = \frac{a}{n+1} \frac{a}{n} a_{n-1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} a_0.$$

L'equazione  $y' = ay$  ha lo spazio delle soluzioni di dimensione uno. Ogni multiplo della soluzione è soluzione a sua volta. Pertanto, la scelta di  $a_0$  è arbitraria e per questo lo si pone identico ad uno.

Pertanto, risulta

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = e^{ax}.$$

Dunque

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)?$$

Si costruisce una serie di potenze di una matrice,  $e^{Ax}$ . Infatti,

$$A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ volte}}, \quad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

si ha l'esponenziale di una matrice. Se la matrice  $A$  dipende da un parametro allora

$$d_x(A^n(x)) = n A^{n-1} A'?$$

perché vale la proprietà del prodotto. Se vale la proprietà della derivata del prodotto allora si ha

$$d_x(AA^{n-1}) = A' A^{n-1} + A d_x A^{n-1}.$$

Per esempio

$$d_x A^3 = d_x(AA^2) = A' A^2 + A d_x A^2 = A' A^2 + A(A' A + A A') = A' A^2 + A A' A + A^2 A \neq 3 A^2 A'.$$

La mancanza della proprietà commutativa del prodotto di matrici ha importanti conseguenze nella meccanica quantistica.

Quindi le formule per la derivata di matrici non sono le stesse che si applicano per i polinomi. Per equazioni differenziali del secondo ordine o equazioni scalari nel piano con coefficienti costanti, si può scrivere la soluzione come esponenziale della matrice. Inoltre, serve calcolare gli autovalori e gli autovettori così da diagonalizzare la matrice perché anche tutte le sue potenze sono diagonali ed esse hanno le potenze sulla diagonale.

Tuttavia, la matrice in questo esempio ha autovalori immaginari e si diagonalizza con i numeri complessi ottenendo  $e^{\pm ix}$ . Tutto questo per dire che le soluzioni trovate in questo metodo corrispondono al seno e coseno.

**Esempio.** Si consideri l'IVP

$$\begin{cases} y' = y - 2e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

che ha soluzione per  $y(x) = e^{-x}$ . Tuttavia, le soluzioni numeriche tendono a divergere dalla soluzione analitica per  $x$  maggiori della decina.

Confronta le note per altri esempi per cui è importante fornire analisi qualitative.

## Lecture 29

lun 13 dic  
2021 14:30

## 12 Misura di Lebesgue

Si è già data una definizione di misura come concetto generalizzante la lunghezza, l'area, il volume, tramite la misura di Peano-Jordan e l'integrale di Riemann. Si vuole misurare un sottoinsieme dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

La misura di Peano-Jordan è definita come

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x) dx, \quad \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

L'insieme  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  non è misurabile secondo Peano-Jordan.

Per un numero finito di razionali in  $[0, 1]$  si ha un numero finito di salti, per cui le somme superiori ed inferiori sono entrambe nulle. Pertanto, la misura è nulla. Immaginando una successione di funzioni che hanno misura nulla, esse tendono ad una funzione che non ha misura.

### 12.1 Richiami

**Cardinalità.** La cardinalità di un insieme  $S$  è un numero  $n \in \mathbb{N}$  se esiste una corrispondenza biunivoca  $x$  tra  $S$  e  $\{1, \dots, n\}$ . Allora, l'insieme è  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ , con  $x_j = x(j)$ . L'insieme vuoto ha cardinalità zero. Se  $S \leftrightarrow T$  allora  $S$  e  $T$  hanno la stessa cardinalità (e vale il viceversa). (Il simbolo  $\leftrightarrow$  indica la corrispondenza biunivoca).

- Un insieme  $S$  è finito se ha cardinalità  $n \in \mathbb{N}$ , altrimenti è infinito.
- Un insieme  $S \leftrightarrow \mathbb{N}$  si dice numerabile,  $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ , l'indice può partire da 1 oppure da 0, in base alle convenzioni.

Alcuni insiemi numerabili sono  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$ .

**Proprietà.**

- Se esiste  $f: \mathbb{N} \rightarrow S$  suriettiva, allora  $S$  è finito o numerabile.
- Se  $S$  è un insieme numerabile e  $A \subset S$  è un suo sottoinsieme, allora  $A$  è finito o numerabile.
- Se  $S_1, S_2, \dots$  sono una famiglia numerabile di insiemi numerabili, allora  $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$  è un insieme numerabile a sua volta.
- Se  $S_1, S_2, \dots$  sono una famiglia numerabile di insiemi finiti, allora  $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$  è finita o numerabile.

L'intervallo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  non è numerabile. Da cui deriva che la retta reale  $\mathbb{R}$  non è numerabile a sua volta.

## 12.2 Insiemi di misura nulla.

La misura di un intervallo di  $\mathbb{R}$  è

$$m([a, b]) = b - a.$$

La misura di un'unione disgiunta finita di insiemi è la somma delle misure.

Si vuole definire la misura di modo che la misura di un'unione disgiunta infinita sia la somma delle misure.

**Definizione.** Un insieme  $S \subset \mathbb{R}$  ha misura zero (nulla) se  $\forall \varepsilon > 0, \exists I_1, I_2, \dots$  famiglia finita o numerabile di intervalli tale che

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

**Proposizione.** Sia  $S \subset \mathbb{R}$  un insieme finito o numerabile. Allora  $S$  ha misura nulla.

**Dimostrazione.** Osservato

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Si consideri  $S = \{x_1, x_2, \dots\}$  insieme numerabile. Per ogni punto vale

$$x_j \in (x_j - \varepsilon 2^{-j-1}, x_j + \varepsilon 2^{-j-1}).$$

tale intervallo  $I_j$  ha misura  $\varepsilon 2^{-j}$ . Dunque, risulta evidente che

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \varepsilon.$$

Per  $S$  finito, si ha che la sommatoria finale è minore stretta di 1.

**Osservazione.** Si considerano intervalli di  $\mathbb{R}^d$  invece di  $\mathbb{R}$ . La misura di un intervallo risulta essere

$$m(\text{intervallo}) = \prod_i^d (b_i - a_i).$$

In modo analogo, un insieme  $S \subset \mathbb{R}^d$  ha misura nulla se etc.

**Osservazione.** Si consideri l'insieme  $C \subset [0, 1]$  di tutti i numeri che in codice ternario non contengono mai la cifra 1 (sostituendola con 2 periodico se necessario; questo da intendersi quando sono scritti con la virgola). Questo è l'insieme di Cantor, che presenta alcune proprietà topologiche particolari.

Durante la guerra fredda, i sovietici svilupparono un computer con un codice ternario bilanciato che utilizza bit di valori 0 e  $\pm 1$ .

Tramite la costruzione ricorsiva dell'insieme di Cantor, ad ogni passaggio si hanno  $2^n$  intervalli, ciascuno di ampiezza  $3^{-n}$ . Dunque, al passo  $n$ -esimo, si ha un insieme chiuso di misura  $(\frac{2}{3})^n$ . L'insieme limite è un insieme chiuso di misura nulla. Inoltre, non è numerabile; essi sono in corrispondenza con i numeri scritti in binario.

### 12.3 Misura interna e misura esterna

**Definizione.** Si consideri un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Allora si definisce la sua misura  $\mu(A)$  come l'estremo superiore delle misure delle unioni finite di intervalli (tali unioni sono dette plurintervalli dal Giusti) contenuti in  $A$ .

I plurintervalli compatti sono contenuti in  $A$ . Si approssima l'insieme dall'interno.

Se l'insieme non ha l'estremo superiore allora  $\mu(A) = +\infty$ .

**Definizione.** Si consideri un insieme  $C \subset \mathbb{R}^n$  compatto (cioè chiuso e limitato). Allora  $\mu(C)$  è definito come l'estremo inferiore delle misure dei plurintervalli che contengono  $C$ .

Tale definizione di misure esiste sempre (?). Se, invece di prendere intervalli qualsiasi, si prendono intervalli compatti si ha la stessa definizione di sopra; basta prendere intervalli chiusi poco più piccoli che, quindi, non hanno misura tanto diversa. Pertanto, l'estremo superiore delle unioni di intervalli qualsiasi equivale all'estremo superiore delle unioni di intervalli compatti.

Inoltre, dato che l'insieme è chiuso e limitato segue necessariamente  $\mu(C) < +\infty$ .

I plurintervalli aperti contengono  $C$ . Si approssima dall'esterno.

**Definizione.** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme allora

- la misura esterna di  $X$  è  $\bar{\mu}(X)$ , cioè l'estremo inferiore delle misure degli aperti che lo contengono;
- la misura interna di  $X$  è  $\underline{\mu}(X)$ , cioè l'estremo superiore delle misure dei compatti che sono contenuti.

**Proposizione.** L'insieme  $X$  ha misura nulla se e solo se  $\bar{\mu}(X) = 0$ .

**Dimostrazione.** Se  $X$  ha misura nulla, allora  $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$  cioè è coperto da una famiglia numerabile di intervalli tali che  $\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Si considerino  $I_j$  aperti, allora  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$  è un insieme aperto che contiene  $X$ . Dato che  $I_j$  sono intervalli, vale

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \varepsilon \iff \mu(A) < \varepsilon.$$

da cui si ha  $\bar{\mu}(X) = 0$  per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

La dimostrazione dell'implicazione inversa risulta essere più difficile.

**Proposizione.** Vale  $\underline{\mu}(X) \leq \bar{\mu}(X)$ .

**Definizione.** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  ha misura esterna finita  $\bar{\mu}(X) < \infty$ , allora si dice essere misurabile secondo Lebesgue se e solo se  $\underline{\mu}(X) = \bar{\mu}(X)$  ed il loro valore si scrive  $\mu(X)$ .

**Proposizione.** Insiemi aperti di misura esterna finita, ed insiemi compatti sono misurabili; insiemi di misura zero sono misurabili.

**Confronto con la misura di Peano-Jordan.** Peano-Jordan approssima da dentro e da fuori con plurintervalli e se coincidono, allora tale valori è la misura.

Con Lebesgue di approssima con degli insiemi aperti da fuori ed insiemi compatti da dentro. Si consideri l'insieme dei razionali tra zero ed uno: esso non è misurabile secondo Peano-Jordan. Per Lebesgue, esso è misurabile ed ha misura nulla: infatti, tali insieme è numerabile, quindi ha misura nulla; se ha misura nulla allora la misura esterna è zero e quindi è misurabile. Si mostra che,  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste un insieme aperto  $A$  tale che  $([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \subset A$  e  $\mu(A) < \varepsilon$ . Infatti, si considerino tutti i razionali compresi tra zero ed uno. Si considerino gli intervalli

$$I_n = (x_n - \varepsilon 2^{-n-1}, x_n + \varepsilon 2^{-n-1}) \implies [0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = A_\varepsilon \implies \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

l'unione di intervalli aperti è ancora aperta e la sua misura è minore della somma delle misure dei singoli intervalli.

## Lecture 30

mar 14 dic  
2021 17:30

**Proposizione.** Se  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  sono insiemi misurabili e  $X \cap Y = \emptyset$  allora  $X \cup Y$  è misurabile e vale

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y), \quad X \cap Y = \emptyset.$$

Questa proprietà è detta additività finita.

Se  $X_1, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^n$  insiemi disgiunti a due a due, allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^k X_j\right) = \sum_{j=1}^k \mu(X_j).$$

**Teorema.** Si vede una forma più generale di tale proprietà. Siano  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  insiemi misurabili (non necessariamente disgiunti). Allora la loro unione, intersezione e differenza sono misurabili e risulta

$$\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y) \geq \mu(X \cup Y).$$

**Osservazione.** Si è discusso di insiemi misurabili con misura esterna finita. Se un insieme  $X$  è limitato e misurabile, allora ha misura  $\mu(X)$  finita. Tuttavia, ci sono insiemi misurabili che non sono limitati, come ad esempio  $\mathbb{Q}$ , il quale, dato che è numerabile, ha misura nulla.

## Additività e subadditività numerabile.

**Teorema.** Si consideri  $E_1, E_2, \dots$  una successione di insiemi misurabili, con  $\mu(E_j) < \infty$ . Si consideri l'unione

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Se  $\bar{\mu}(E) < \infty$  allora

- l'insieme  $E$  è misurabile;
- vale  $\mu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ , questa è la subadditività numerabile;
- se  $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$ , allora  $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ , questa è l'additività numerabile;
- se  $E_j \nearrow E_i$  cioè  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ , vale  $\mu(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$ .



**Corollario.** Se  $E_j$  sono misurabili, limitati,  $E_j \searrow G$ , cioè  $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \subset \dots \subset E_2 \subset E_1$ , allora  $G$  è misurabile e  $\mu(G) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$ .

**Definizione.** Una famiglia di sottoinsiemi di un insieme  $X$  si chiama algebra se è chiusa (cioè il risultato dell'operazione rimane interno, elemento alla, della famiglia) rispetto alle operazioni di complemento e unione (questo implica essere chiusa anche rispetto all'intersezione ed alla differenza) e contenere  $\emptyset$  e  $X$ .

**Definizione.** Una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  è una  $\sigma$ -algebra se è chiusa rispetto alle operazioni di complemento e unione numerabile, e contiene  $\emptyset$  e  $X$ .

**Teorema.** Il teorema precedente si può riscrivere nel seguente modo. Si consideri un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  limitato, allora gli insiemi Lebesgue-misurabili in  $X$  (cioè quelli per cui  $\bar{\mu} = \underline{\mu}$ ) sono una  $\sigma$ -algebra.

**Teorema.** Se  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una isometria (cioè una mappa che conserva la distanza, cioè quelli detti movimenti rigidi),  $X \subset \mathbb{R}^n$  misurabile sse  $g(X)$  è misurabile e vale  $\mu(X) = \mu(g(X))$ .

**Esempio.** Un esempio di un insieme illimitato con misura esterna positiva finita è  $[0, 1] \cup \mathbb{Q}$ . Altrimenti, si considerino degli insiemi  $[2^{-k}, 2^{-k+1})$ . Essi hanno misura  $\mu(I_j) = 2^{-j}$  e si ha

$$(0, 1] = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j.$$

l'unione è disgiunta. Inoltre, l'insieme

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} j + I_j.$$

ha misura 1, ma non è limitato. Tale insieme è analogo a quello di prima, solo che ogni intervallo viene spostato.

Intuitivamente tale insieme dovrebbe avere misura esterna uguale ad 1; ma la misura interna pone ancora dei problemi. Bisogna sistemare la definizione di misura.

## Lecture 31

### 12.4 Misura per insiemi qualsiasi

ven 17 dic  
2021 13:30

Si vuole definire la misura di insiemi  $X \subset \mathbb{R}^n$  qualsiasi, anche quelli per cui  $\bar{\mu}(X) = +\infty$ .

**Definizione.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q_k \nearrow \mathbb{R}^n$  una successione monotona crescente di intervalli limitati cioè

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

allora  $X$  è misurabile se lo sono  $X \cap Q_k$ ,  $\forall k$  ed abbia misura

$$\mu(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X \cap Q_k).$$

Risulta chiaro che  $X \cap Q_k \nearrow X$ , inoltre l'intersezione è un insieme misurabile. [r] La successione delle misure risulta essere monotona in  $\mathbb{R}$ , nell'intervallo  $[0, +\infty)$ .

**Osservazione.** La definizione è ben posta. Essa non dipende dalla scelta di  $Q_k$ .

**Teorema.** Si consideri una famiglia di insiemi misurabili  $E_1, E_2, \dots$ . Sia  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  (non si suppone che tale unione sia di misura infinita). Quindi

- l'insieme unione  $E$  è misurabile;
- vale la subaddittività numerabile:  $\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ ;
- vale l'addittività numerabile:  $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$  quando gli  $E_k$  sono a due a due disgiunti; cioè  $i \neq j \implies E_i \cap E_j = \emptyset$ ;
- Considerando una serie monotona  $E_k \nearrow E$ , allora  $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$ . Il limite della misura è la misura del limite?

[r]

**Teorema.** Gli insiemi  $L$ -misurabili (cioè misurabili secondo Lebesgue) costituiscono una  $\sigma$ -algebra. Tale misura ha valori in  $\mu \in [0, +\infty)$  ed un insieme può avere misura infinita.

**Esempio.** Si consideri una successione  $E_k \searrow E$ . Si vuole studiare se  $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$ . Si considera la successione

$$E_k = \mathbb{R} \setminus B_k(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq k\}.$$

per  $k \geq 1$ . La misura risulta essere  $\mu(E_k) = \infty$ . Mentre, l'insieme  $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \emptyset$  e dunque la sua misura è  $\mu(E) = 0$ . Pertanto, risulta chiaro che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \infty \neq 0 = \mu(E).$$

**Definizione.** Misura. Una misura, definita su una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi misurabili di un insieme  $X$ , è una funzione  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  tale che, considerato  $E$  l'unione disgiunta di una successione finita o numerabile di  $E_k \in \mathcal{A}$ , la misura dell'unione risulta essere

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

e  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Corollario.** Si supponga valere l'addittività numerabile:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \implies \mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

allora vale la subaddittività numerabile.

**Corollario.** Si consideri una successione crescente di insiemi  $E_k \nearrow E$ . Se  $E_k \in \mathcal{A}$ ,  $\forall k$ , allora  $E \in \mathcal{A}$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \mu(E)$ .

Qualora si considerasse  $E_k \searrow E$ , mantenendo le stesse ipotesi, allora la tesi vale nel caso in cui  $\mu(E_1) < \infty$ .

**Definizione.** Dicasi trascurabile, negligibile un insieme di misura di misura nulla.

**Osservazione.** Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene gli aperti di  $\mathbb{R}^n$  e gli insiemi trascurabili.

**Definizione.** Una funzione semplice rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di elementi della  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ .

**Definizione.** La locuzione “quasi ovunque” indica ovunque tranne un insieme di misura nulla.

**Definizione.** La step function, funzione a gradini o funzione a scala è la combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli di  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione.** Gli insiemi di Vitali non sono Lebesgue misurabili. L'esistenza di tali insiemi richiede la postulazione dell'assioma della scelta.

**Excursus.** All'inizio del 1900 c'era la convezione di un progresso scientifico indefinito. Tuttavia, due cose hanno frenato tale progresso: le guerre mondiali ed il blocco di questa parte di matematica. Essa non avrebbe mai potuto progredire così velocemente come si pensava. Ciò che crea problemi sono i fondamenti della teoria degli insiemi.

La teoria naive degli insiemi contiene contraddizioni; quindi in che senso sono veri i teoremi?

**Esempio.** Assioma della scelta. Si consideri  $\{B_j\}$  famiglia di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  non vuoti e a due a due disgiunti. Allora esiste un sottoinsieme  $X \subset \mathbb{R}$  tale che  $\forall j, B_j \cap X$  ha un solo elemento. Questo assioma non si deduce da nessun'altra proprietà assiomatica né sistema di assiomi. Pertanto

- Si definisce una relazione di equivalenza  $x \sim y$  in  $\mathbb{R}$  sse  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Sia  $J = \mathbb{R} / \sim$  l'insieme delle classi di equivalenza. Per l'assioma della scelta, esiste un insieme  $X \subset [0, 1]$  tale che per ogni classe di  $J$  ha un unico elemento in  $X$ , cioè  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in X \mid x - y \in \mathbb{Q}$ .
- Sia  $Q = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q| \leq 1\}$ , sia  $S = \bigcup_{q \in Q} (q + X)$  un'unione numerabile, dove  $q + X = \{q + x \mid x \in X\}$ . Per questo insieme vale  $[0, 1] \subset S \subset [-1, 2]$ .  
Quindi, se  $y \in [0, 1]$  allora  $\exists! x \in [0, 1] \mid y - x \in \mathbb{Q}$ , tuttavia  $y - x = q \in [-1, 1]$ , pertanto  $y = x + q$  con  $q \in Q$ , da cui  $y \in S$ . [r]  
Se  $q_1$  e  $q_2$  sono distinti allora  $X + q_1$  e  $X + q_2$  sono disgiunti. Infatti, se  $x_1 + q_1 = x_2 + q_2$  con  $q_1 \neq q_2$  e  $x_1, x_2 \in X$  allora  $x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$  e  $x_1 \sim x_2$  da cui  $x_1 = x_2 \implies q_1 = q_2$ .
- Se  $X$  è misurabile allora  $X \subset [0, 1] \implies 0 \leq \mu(X) \leq 1$ . Pertanto,  $\mu(q + X) = \mu(X)$ ,  $\forall q \in \mathbb{Q}$  (cioè vale l'invarianza per isometria). Dato che  $S$  è l'unione di misurabili, esso dev'essere a sua volta misurabile:

$$\mu(S) = \sum_{q \in Q} \mu(X + q) = \sum_{p \in Q} \mu(X) = \begin{cases} 0, & \mu(X) = 0 \\ \infty, & \mu(X) > 0 \end{cases}.$$

la misura di  $S$  è la somma perché  $Q$  è misurabile. Tuttavia, l'insieme  $S$  è compreso tra altri due insiemi e quindi  $1 \leq \mu(S) \leq 3$ . Si ha una contraddizione.

[r]

**Nota.** Paradosso di Banach-Tarski: esistono insiemi che si possono dividere in un numero finito di sottoinsiemi, rimaneggiare tramite isometrie e si ricompongono ottenendo una misura doppia rispetto a quella di partenza.

## 12.5 Esempi ed applicazioni

**Esempio.** Si consideri la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{R}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  di tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  (cioè l'insieme delle parti).

La misura di Dirac è

$$\mu(X) = \begin{cases} 1, & x_0 \in X \\ 0, & x_0 \notin X \end{cases}.$$

per  $x_0 \in \mathbb{R}$  fissato. Essa è definita  $\mu : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty)$  e vale  $\mu(\emptyset) = 0$ . Posto  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \coprod_{j=1}^{\infty} E_j$  (cioè l'unione disgiunta) [r]  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E)$

**Esempio.** Si consideri  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lo spazio dei campioni. Siano gli eventi i sottoinsiemi di  $\Omega$ , cioè elementi di  $2^\Omega$ . Dunque, la probabilità che avvenga un evento è una misura su  $\Omega$  tale che  $\mu(\Omega) = 1$  [r]

Due persone  $A$  e  $B$  si danno appuntamento tra le 10 : 00 e le 11 : 00. Ognuno aspetta 10 minuti per l'altro e poi se ne va se l'altro non è arrivato. La probabilità che si incontrino è ? Lo spazio dei campioni risulta essere

$$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in [10, 11]\}.$$

dove  $a$  è l'arrivo di  $A$  e  $b$  l'arrivo di  $B$ . L'evento in cui si incontrano è  $|a - b| \leq \frac{1}{6}$ . Quindi la probabilità dell'incontro è l'area della zona dell'evento che corrisponde a

$$\mu(\text{incontro}) = \int_0^1 x + \frac{1}{6} dx - \int_0^1 x - \frac{1}{6} dx = \frac{1}{3}.$$

## Lecture 32

[r] quanto fatto precedentemente

lun 20 dic  
2021 14:30

**Esempio.** Si consideri la funzione di Dirichlet

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

la restrizione a  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  non è Riemann-integrabile. Ci si chiede dove sia continua. Per ogni insieme  $(-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$  ci sono sia razionali che irrazionali; intervalli di numeri irrazionali hanno misura non nulla e quindi per il seguente teorema essa non è continua.

**Teorema.** Vitali-Lebesgue. Si consideri la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e continua ovunque in  $[a, b]$  tranne in  $S \subset [a, b]$ . Allora  $f$  è Riemann-integrabile sse  $S$  ha misura nulla.

**Esempio.** Si consideri la funzione di Thomae

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad \text{mcd}(p, q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Si studiano i punti di discontinuità. Prendendo un  $q$ , le frazioni in  $[0, 1]$  sono distanziate di  $\frac{1}{q}$ . Considerando un  $x_0$  irrazionale si ha un intorno in cui tutte le frazioni hanno denominatore maggiore di  $q$  in modo tale che  $f(x) < \frac{1}{q}$ , per ogni  $x$  dell'intorno, ma dato che  $q$  è arbitrario allora  $f$  è continua in  $x_0$ . Invece,  $f$  non è continua sui razionali. Questo perché  $x \in \mathbb{Q} \implies f(x) > 0$ , ma in ogni intorno di  $x$  ci sono irrazionali per cui  $f(x) = 0$  e quindi risulta falso che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Per Vitali-Lebesgue, la funzione  $f$  è Riemann-integrabile. [r] L'albero di Calkin-Wilf è utilizzato per costruire ogni numero razionale senza ripetizioni.

**Esempio.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ . Si ricordi che

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots.$$

Si studia in che senso la serie converge. La matrice si può vedere come un elemento di  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Pertanto si definisce

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2, \quad A = (a_{ij}).$$

questa è la norma di Frobenius. Dunque,

$$\|AB\|^2 = \sum_{j,k=1}^n (\underline{a}_j \cdot \underline{b}_k)^2 \leq \sum_{j,k=1}^n \|\underline{a}_j\|^2 \|\underline{b}_k\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\underline{a}_j\|^2 \sum_{k=1}^n \|\underline{b}_k\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

Inoltre, per induzione

$$\|A^n\| \leq \|A\|^2, \quad \forall n \geq 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad \text{converge.}$$

infatti, la norma della coda della serie è

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} \rightarrow 0.$$

pertanto converge ovunque e si può definire la funzione  $e^A$ , per ogni matrice  $A$ . [r] Considerato  $Ax$  matrice  $n \times n$  con  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ax)^n}{n!}.$$

inoltre si ha

$$\begin{aligned} e^{A(a+b)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{j+k=n} \binom{j+k}{k} a^k b^j \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{A^{j+k}}{(j+k)!} \sum_{j+k=n} \binom{j+k}{k} a^k b^j = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{A^j A^k a^k b^j}{j!k!} = e^{Aa} e^{Ab}. \end{aligned}$$

da questo si ottiene

$$d_x e^{Ax} = A e^{Ax}.$$

che si usa per le equazioni differenziali.

### Lecture 33

Si dimostra la derivata sopra

mar 21 dic  
2021 17:30

$$\begin{aligned} d_x e^{Ax} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ax} e^{Ah} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\ &= e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (I + Ah + o(h) - I) = e^{Ax} A = A e^{Ax}. \end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza vale perché

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A A^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n A x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!} A.$$

Quindi per  $\underline{y}' = A\underline{y}$  che è un'equazione vettoriale in  $\mathbb{R}^n$ , ha soluzione  $\underline{y} = e^{Ax}$  perché infatti

$$d_x e^{Ax} = A e^{Ax} = A \cdot \underline{y}.$$

Tuttavia,  $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$  è un vettore; ma  $e^{Ax}$  è una matrice. Le  $n$  colonne della matrice sono tutte soluzioni indipendenti. Infatti, per  $x = 0$  si ha  $e^{A0} = I$  le cui colonne sono i vettori della base canonica che è anche base dello spazio delle soluzioni. La matrice dà tutte le possibili soluzioni.

**Esempio.** Si consideri l'equazione differenziale lineare di secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' + y = 0.$$

La si fa diventare in forma vettoriale

$$\begin{cases} u_0 = y \\ y_1 = y' \end{cases}, \quad \begin{cases} u'_0 = u_1 \\ u'_1 = -u_0 \end{cases}.$$

in forma matriciale diventa

$$d_x \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Dove la matrice è posta pari ad  $A$ . Si trova

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!}.$$

Per alcuni valori di  $n$  si ha

$$\begin{aligned} n = 0 \mod 4 &\implies A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ n = 1 \mod 4 &\implies A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ n = 2 \mod 4 &\implies A^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ n = 3 \mod 4 &\implies A^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

tali matrici ricordano la matrice di rotazione valutata per  $\theta = 0, -\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$ . [r] Si può spezzare la somma della funzione esponenziale in  $n$  pari ed  $n$  dispari:

$$A^{2k} = (-1)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

per cui la somma dei pari è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} I = \cos x I.$$

per gli  $n$  dispari si ha

$$A^{2k+1} = (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

e la somma dei dispari è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \sin x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

pertanto

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

per controllare si svolge la derivata

$$d_x e^{Ax} \stackrel{?}{=} A e^{Ax}.$$

per il primo termine si ha

$$d_x e^{Ax} = \begin{bmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{bmatrix}.$$

per il secondo termine si ha

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{bmatrix}.$$

questo giustifica il fatto che [r]

In genere, se  $A$  è diagonale, allora

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

per cui

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}.$$

[r] Tali matrici danno informazioni sulla stabilità; se almeno un  $\lambda_i$  è positivo, allora una soluzione cresce esponenzialmente. Se gli autovalori sono negativi, allora perturbando la soluzione si ha un equilibrio stabile perché l'esponente rimane arbitrariamente piccolo.

**Esempio.** Teorema di Gauss-Green. Data una 1-forma  $\omega = p dx + q dy$ , allora il teorema afferma che

$$\int_{\partial A} \omega = \int_A (\partial_x q - \partial_y p) dx dy.$$

dove  $A$  è una regione dello spazio e la sua frontiera è percorsa in senso positivo come definito per la regola della mano destra.

Si vede una intuizione. [immagine] Si suddivide la regione in tanti rettangoli. Si consideri un rettangolo  $Q$  con vertici sulla diagonale  $P_{00} = (x_0, y_0)$  e  $P_{11} = (x_1, y_1)$ . Considerata la frontiera  $\partial Q$  percorsa in senso positivo allora

$$\int_{P_{00} \rightarrow P_{10}} \omega = \int_{P_{00} \rightarrow P_{10}} p dx + q dy = \frac{p(x_0) + p(x_1)}{2} (x_1 - x_0).$$

dato che l'integrale viene fatto su una regione piccola, la funzione è quasi lineare e dunque l'integrale si approssima con la tecnica dei trapezi. Similmente per gli altri tratti

$$\int_{P_{10} \rightarrow P_{11}} \omega = \frac{q(y_0) + q(y_1)}{2} \Delta y, \quad \dots$$

e risulta

$$-p_y \Delta x \Delta y + q_x \Delta x \Delta y.$$

(sono derivate parziali) la formula è “finta” perché vale nell'approssimazione; quando si somma, tutte le componenti sul bordo si eliminano e ciò dà un senso intuitivo al teorema di Gauss-Green. Si ricorda che  $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x$ .

## Lecture 34

### 13 Integrale di Lebesgue

lun 10 gen  
2022 14:30

**Definizione.** Una proprietà vale quasi ovunque (q.o., almost everywhere) in  $X \subset \mathbb{R}^n$  se l'insieme dei punti di  $X$  in cui la proprietà non vale ha misura nulla.

**Esempio.**

- Si consideri la funzione  $\tan x$ . Essa è una funzione continua quasi ovunque in  $\mathbb{R}$ . Essa è discontinua nell'insieme  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  che è numerabile e quindi ha misura nulla.
- La funzione caratteristica dell'insieme di Cantor  $C \subset [0, 1]$  è uguale a zero quasi ovunque (si ricorda che esso non è numerabile).

**Teorema.** di Vitali-Lebesgue-Riemann?. [r] Si consideri una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Essa è Riemann-integrabile sse  $f$  è continua quasi ovunque. Questa è la caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili. L'importante è che la misura dei punti di discontinuità sia nulla, quindi essi possono costituire un insieme numerabile, oppure uno non numerabile ma con misura nulla.

**Definizione.** Si definisce l'insieme  $\mathbb{R}$  esteso come

$$\mathbb{R}^* \equiv \overline{\mathbb{R}} \equiv \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

e la relazione d'ordine  $<$  vale ancora.

**Definizione.** Si consideri un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  dominio misurabile secondo Lebesgue. [r] per proprietà fondamentali.

La funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  si dice misurabile se  $\forall y \in \mathbb{R}^*$ , l'insieme

$$f^{>y} \equiv \{x \in X \mid f(x) > y\}$$

è misurabile.

**Osservazione.** Si enunciano alcune proprietà equivalenti:

- $f^{\geq y}$  è misurabile  $\forall y$ .
- $f^{\leq y}$  è misurabile  $\forall y$ .
- $f^{< y}$  è misurabile  $\forall y$ .
- $f^{-1}(I)$  è misurabile  $\forall I \subset \mathbb{R}^*$ , con  $I$  intervallo.
- $f^{-1}(A)$  è misurabile  $\forall A \subset \mathbb{R}^*$ , con  $A$  insieme aperto.

**Dimostrazione.** Si supponga vera la definizione originale. Allora  $f^{>y}$  è misurabile e pure  $X \setminus f^{>y}$  è misurabile  $\forall y$  perché  $X$  è misurabile; tuttavia, il complementare è  $f^{\leq y}$ . Vale anche il viceversa.

Si vuole scrivere  $f^{\geq y}$  come unione di insiemi  $f^{>y_i}$  cioè

$$f^{\geq y} = \bigcap_{k \geq 1} f^{>y - \frac{1}{k}}$$

Vale  $\xi \in \bigcap_{k \geq 1} (y - \frac{1}{k}, +\infty)$  sse  $\xi \in [y, +\infty)$ . Dato che ogni insieme è misurabile, allora pure l'intersezione è misurabile e quindi vale la prima proprietà equivalente enunciata. Per gli argomenti precedenti vale anche la terza.

Per quanto riguarda la quarta si ha

$$[a, b] \implies f^{-1}([a, b]) = f^{\geq a} \cap f^{\leq b}$$

[r] per l'ultima, gli aperti di  $\mathbb{R}$  sono unioni numerabili di intervalli, quindi se l'intervallo è misurabile allora ciascun elemento dell'unione è misurabile. [r]



**Proposizione.** Valgono alcune proprietà:

- $f$  continua  $\implies f$  misurabile.
- considerate  $f, g$  funzioni misurabili e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $\alpha f + \beta g$  è misurabile
- $f \cdot g$  è misurabile,  $\frac{f}{g}$  è misurabile supponendo  $g \neq 0$ , ma rimarrebbe misurabile anche all'infinito. [r]

**Proposizione.** Si consideri una successione  $y_n \in \mathbb{R}^*$ . Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} y_k = \sup_n \inf_{k \geq n} y_k$$

la successione dell'estremo inferiore è crescente in senso lato in  $n$  e dunque il limite esiste in  $\mathbb{R}^*$ : è limitata oppure è infinito. Analogamente

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} y_k = \inf_n \sup_{k \geq n} y_k$$

la successione dell'estremo superiore è decrescente in senso lato in  $n$  e dunque il limite esiste in  $\mathbb{R}^*$ .

Vale sempre

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

**Proposizione.** Si consideri  $f_n$  una famiglia di funzioni misurabili. Allora

- le funzioni  $\sup_n f_n$  e  $\inf_n f_n$  sono misurabili.
- le funzioni  $\limsup_n f_n$  e  $\liminf_n f_n$  sono misurabili
- se esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  è misurabile

questi tre sono tutti limiti puntuali.

**Proposizione.** Sia  $f$  misurabile. Se  $g = f$  quasi ovunque, allora  $g$  è misurabile.

La qualità di misurabilità vale a meno di insiemi di misura nulla.

### 13.1 Integrale di Lebesgue

Si consideri una funzione  $f : X \rightarrow [m, M] \subset \mathbb{R}$  limitata e misurabile. Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  dominio di misura finita  $\mu(X) < \infty$ .

L'integrale di Riemann si costruisce approssimando l'area tra la curva  $f(x)$  e l'asse  $x$  tramite dei rettangoli che costituiscono le somme inferiori e le somme superiori.

D'altra parte, l'integrale di Lebesgue si costruisce un modo analogo considerando gli intervalli di suddivisione dei rettangoli sull'asse  $y$  per poi considerare la loro controimmagine sull'asse  $x$  e non svolge direttamente la divisione sull'asse  $x$ . Infatti, presi  $m$  minimo e  $M$  massimo, considerati  $N$  punti di divisione  $m = y_0 < \dots < y_N = M$ , si ha che gli intervallini su  $x$  sono  $f^{-1}([y_k, y_{k+1})) = f^{\geq y_k} \cap f^{< y_{k+1}}$ . Dunque le somme inferiori sono e le somme superiori sono

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1}))), \quad \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+1} \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1})))$$

[r] ciò equivale a

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \chi(f^{-1}([y_k, y_{k+1}))) \leq f, \quad \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+1} \chi(f^{-1}([y_k, y_{k+1}))) \geq f$$

Si prende l'estremo superiore al variare delle suddivisioni di  $[m, M]$  delle somme inferiori. Analogamente con l'estremo inferiore e le somme superiori. Se i due estremi coincidono allora il valore comune è l'integrale di Lebesgue.

Per Riemann si suddivide il dominio, per Lebesgue si suddivide il codominio e si considerano le controimmagini.

**Osservazione.** Le definizioni degli integrali si può ricondurre al problema di contare le monete in un mucchio. Si può fare in due modi. Con Riemann, si mettono in fila le monete e ad una ad una si somma il valore di ciascuna. Con Lebesgue, prima si contano quante monete di ciascun valore ci sono e poi il totale è la somma-prodotto. [r]

**Teorema.** Se la funzione  $f$  è integrabile secondo Riemann (e ciò implica che sia limitata) allora  $f$  è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono (si usa anche la stessa notazione). Alle volte, per sottolineare che si utilizza l'integrale di Lebesgue si sostituisce  $dx$  con  $d\mu$  dove  $\mu$  indica la misura.

**Teorema.** Si consideri una funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e a supporto compatto. Essa è integrabile secondo Lebesgue sse  $f$  è misurabile.

**Osservazione.** Si vede un altro modo per definire l'integrale di Lebesgue. Si copia Riemann. L'estremo superiore degli integrali delle funzioni semplici è  $\leq f$ , mentre l'estremo inferiore è  $\geq f$ , dove le funzioni semplici sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. [r]

**In generale.** Si consideri un insieme  $X$  con misura finita  $\mu(X) < \infty$  ed una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ . La funzione  $f$  si può sempre scrivere come la somma dei valori negativi e dei valori positivi:

$$f = f_+ + f_- = \max(f, 0) + \min(f, 0)$$

in alcuni testi si scrive  $f = f_+ - f_-$  in modo che entrambi siano positive e si capisca chiaramente quale sia quella negativa.

Si consideri una successione  $f_k \nearrow f_+$  dove  $0 \leq f_k = \min(f, k) \leq k$ ; dato che è limitata allora si sa fare l'integrale per funzioni con dominio a misura finita [r]. Inoltre, il limite [r] degli integrali risulta

$$\int_X f_+ dx \equiv \int_X f_k dx \in \mathbb{R}^*$$

Similmente, si consideri  $f_- = \lim \searrow g_k$ , con  $g_k \in [-k, 0]$  e  $g_k \leq \min(f, -k)$ . Si ha

$$\int_X f_- dx \equiv \int_X g_k dx \in \mathbb{R}^*$$

La funzione  $f$  è sommabile (integrabile) se

$$\int_X f_+ dx < +\infty, \quad \int_X f_- dx < +\infty$$

e risulta

$$\int_X f dx = \int_X f_+ dx - \int_X f_- dx$$

**Osservazione.** La funzione  $f$  è integrabile sse  $|f|$  è integrabile.

**Esercizio.** Si consideri  $f(x) = x^2$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . [r]

## Lecture 35

mar 11 gen  
2022 17:30

Si consideri il dominio  $X \subset \mathbb{R}$  insieme misurabile ad esempio  $X = [a, b]$ . L'integrale  $\int_X x^2 dx$  è l'integrale di Riemann, dunque è anche integrabile secondo Lebesgue e dunque misurabile. Infatti

$$f^{>y} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > y\}$$

è misurabile per ogni  $y$ . [r]

La funzione è misurabile con misura infinita.

**Definizione.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  un insieme misurabile. Allora  $L^1(X)$  è lo spazio di tutte le funzioni integrabili (cioè hanno modulo integrabile) con integrale finito. (Alcuni affermano che integrabile include anche integrali infiniti, mentre sommabili denota gli integrali finiti). Cioè

$$\int_X |f| dx < \infty$$

**Osservazione.** In questo spazio (vettoriale) di funzioni è possibile descrivere una norma

$$\|f\|_1 = \int_X |f| dx$$

Tuttavia c'è un problema: si può avere una funzione non (identicamente) nulla per cui l'integrale è nullo. Questo si risolve con le classi di equivalenza: si dice che due funzioni sono equivalenti se differiscono al più per un insieme di misura nulla:  $f \sim g \iff f - g = 0$  quasi ovunque.

**Definizione.** Sottografico. Si consideri una funzione  $f \geq 0$ ,  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Il sottografico è l'insieme

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

cioè i punti tra l'asse delle  $x$  ed il grafico della funzione.

**Teorema.** Si consideri una funzione  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$ , con  $X$  misurabile. La funzione  $f$  è misurabile sse il sottografico  $\Gamma_f$  è misurabile.

La funzione  $f$  è integrabile su  $X$  sse il sottografico  $\Gamma_f$  ha misura finita e

$$\mu(\Gamma_f) = \int_X f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Quando si parla di misura si intende la misura in quello spazio, quindi la misura di una lunghezza in una dimensione, la misura dell'area in due dimensioni, etc; questo perché la misura di un iperpiano (o figure a dimensioni minori) in  $\mathbb{R}^n$  è sempre zero.

**Osservazione.** Al posto del sottografico si può anche considerare l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}$$

ed esso ha la stessa misura  $\int_X f(\underline{x}) d\underline{x}$ .

**Proposizione.** Si vedono alcune proprietà di  $L^1(X)$ :

- $f, g \in L^1(X) \implies \alpha f + \beta g \in L^1(X)$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
- $f \leq g \implies \int_X f \leq \int_X g$ ;
- $|\int_X f dx| \leq \int_X |f| dx$ ;
- Se  $m \leq f(x) \leq M$  e  $\mu(X) < \infty$  allora  $\exists y \in [m, M] \mid \int_X f = \mu(X)y$ ; questo è il teorema della media integrale;

- Se  $X_j$  sono una famiglia di domini disgiunti e  $X = \bigcup_j X_j$  allora

$$\int_X f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} f$$

- Se  $\mu(X) = 0$  allora  $\int_X f = 0$ ;
- Se  $f = g$  quasi ovunque allora  $\int_X f = \int_X g$ ; questo punto fa la differenza tra Riemann e Lebesgue; si pensi alla funzione di Dirichlet, l'integrale su qualsiasi intervallo è zero, perché i punti di discontinuità sono numerabili e quindi di misura nulla;
- Se  $f \geq 0$  e  $\int_X f = 0$  allora  $f = 0$  quasi ovunque in  $X$ .

**Corollario.** Lo spazio  $L^1(X)$  è uno spazio vettoriale.

### 13.2 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

**Teorema.** Convergenza monotona, Beppo Levi. Si consideri una successione monotona di funzioni  $\{f_n\} \nearrow f$ :  $0 \leq f_1 \leq \dots \leq f$ . La funzione  $f$  esiste di sicuro e potrebbe anche essere infinita. Se le  $f_n$  sono L-integrabili allora l'integrale di  $f$  è infinito oppure è integrabile e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Le funzioni sono scalari  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  perché altrimenti non si ha più una relazione d'ordine.

**Corollario.** Si consideri una successione  $a_k: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_k \geq 0$ , con ogni termine L-integrabile. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X a_k = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Questo deriva dal fatto che se  $a_k \geq 0$  allora le somme parziali sono una successione monotona

$$\sum_{k=1}^m a_k = f_m \nearrow \lim_{m \rightarrow \infty} f_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

**Corollario.** Se

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |a_k| < \infty$$

allora

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X a_k$$

[r]

**Esempio.** Si consideri

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{e^x - 1} dx, \quad x \in [0, +\infty)$$

si fa comparire una serie geometrica

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(tx) e^{-kx} dx$$

si può scambiare l'integrale con la serie ? (perché in base al corollario precedente uno dei due termini è finito?).

## Lecture 36

ven 14 gen  
2022 13:30

Il termine nella sommatoria non è sempre positivo per ogni  $x$ , dunque non si può applicare il primo corollario. Bisogna quindi stabilire se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} |\sin(tx)| e^{-kx} dx < +\infty$$

infatti, ricordando che  $k \geq 1$  si ha

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tx)| e^{-kx} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = -\frac{1}{k} e^{-kx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{k}$$

ma si ottiene la serie armonica e non va bene perché non converge ed in particolare è infinita. Un'altra maggiorazione potrebbe essere  $|\sin(tx)| \leq |tx|$ :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tx)| e^{-kx} dx \leq \int_0^{+\infty} |tx| e^{-kx} dx = |t| \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \dots = \frac{1}{k^2}$$

**Teorema.** Convergenza dominata. Si consideri un dominio misurabile  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Siano  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni L-integrabili ed esiste quasi ovunque una funzione  $f$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f$$

Se esiste una funzione  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  che “domina” le funzioni  $f_k$  e  $f$  cioè  $\forall k, |f_k(x)| \leq g(x)$ ; e la funzione  $g$  integrabile con  $\int_X g < +\infty$ ; allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k(x) dx = \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx$$

**Corollario.** Convergenza limitata. Una particolare funzione  $g$  potrebbe essere una funzione costante. Si considerino le ipotesi precedenti. Si supponga che  $X$  sia limitato, le  $f_k$  integrabili e  $f_k \rightarrow f$  quasi ovunque. Se esiste una funzione identicamente costante  $G \in \mathbb{R}$  tale che  $\forall k, \forall x |f_k(x)| \leq G$ ; allora

$$\int_X f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k(x) dx$$

**Corollario.** Scambio di operatore di serie e di integrale. Si consideri una serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  con  $a_k : X \rightarrow \mathbb{R}$  L-integrabili. Si supponga che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = f(x), \quad \text{quasi ovunque}$$

Se le somme parziali sono dominate da  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè  $\forall N, |\sum_{k=1}^N a_k(x)| \leq G(x)$  quasi ovunque, con  $\int_X G dx < +\infty$ ; allora

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X a_k(x) dx$$

**Corollario.** Se

$$\int_X |a_k| dx \leq g_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k \quad \text{e} \quad \sum g_k < \infty$$

allora  $G = \sum g_k$  domina tutte le somme parziali, quindi si può applicare il teorema della convergenza dominata nella versione del corollario della convergenza limitata (cioè il primo corollario). [r] In tale corollario  $f_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x)$  e si può scambiare la sommatoria con l'integrale?

**Lemma.** di Fatou. Si consideri una successione di funzioni  $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  non negative  $f_k \geq 0$  ed integrabili (dunque anche il dominio dev'essere misurabile). Allora

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k \, dx$$

**Esempio.** Si vede un esempio per ricordarsi quale termine è minore uguale dell'altro. Si consideri la funzione

$$f_k(x) = k\chi\left(0, \frac{1}{k}\right), \quad k \geq 1$$

Dunque

$$x \in X = [0, 1] \implies \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$$

a questo punto si ha

$$\int_X f_k(x) \, dx = \frac{1}{k}k = 1, \quad \forall k \implies \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k(x) \, dx = 1$$

**Esempio.** Si consideri

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tx)| e^{-kx} \, dx = \dots = \frac{t}{t^2 + k^2}$$

che, tra l'altro, è la trasformata di Laplace del seno. [r] allora

$$J(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 + k^2} = \dots = \frac{\pi t \coth(\pi t) - 1}{2t}$$

**Esempio.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad \alpha \geq 0, \quad X = [0, 1]$$

il limite della successione è la funzione identicamente nulla  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  e dunque pure l'integrale è nullo. [r]

Si usa il teorema della convergenza dominata. L'integrale di ciascuna  $f_n$  risulta essere

$$n^\alpha \int_0^1 x e^{-nx} \, dx = n^{\alpha-2} [1 - e^{-n}(1+n)] \sim_\infty n^{\alpha-2} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \alpha > 2 \\ 1, & \alpha = 2 \\ 0, & \alpha < 2 \end{cases}$$

Dunque, se  $\alpha \geq 2$  allora non vale l'enunciato del teorema della convergenza dominata.

Se  $0 \leq \alpha < 2$  allora una funzione che domina le  $f_n$  è quella costituita dai massimi che si hanno per  $x = \frac{1}{n}$ :  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}e^{-1}$ . Essa è una successione limitata quando  $\alpha \leq 1$  e vale la convergenza dominata (ma vale già la convergenza uniforme). [r]

Per  $1 \leq \alpha < 2$ , la funzione converge uniformemente, ma è dominata da

$$g(x) = \alpha^\alpha e^{-\alpha} x^{1-\alpha} \geq f_n(x), \quad \forall \alpha$$

che è anche integrabile per  $\alpha \in [1, 2)$  e soddisfa le ipotesi della convergenza dominata.

**Teorema.** Si consideri un insieme misurabile  $E \subset \mathbb{R}^2$ . Si indica  $\mu^2$  la misura intesa in  $\mathbb{R}^2$ . Posto

$$E_{\bar{x}} = \{(x, y) \in E \mid x = \bar{x}\}$$

esso è misurabile per quasi ogni  $x$  e risulta

$$\mu^2(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu^1(E_x) \, dx$$

in più variabili si avrebbe

$$\mu^{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu^k(E_x) \, dx$$

**Teorema.** di Fubini. Si consideri una funzione  $f$  integrabile in  $\mathbb{R}^2$ . Allora

- la funzione ad una variabile  $f(x, -)$  per cui  $y \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $\mathbb{R}$  per quasi ogni  $x$ .
- la funzione  $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$  è integrabile in  $x$ .
- vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx$$

**Osservazione.** Si nota che tutte le formule e teoremi utilizzati con l'integrale di Riemann, valgono anche per Lebesgue.

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Questa funzione non è limitata e quindi non è R-integrabile; inoltre,  $\iint f dx dy \neq \iint f dy dx$  e questo implica che non è integrabile secondo Lebesgue [r].

Si vuole capire quanto vale l'integrale su una circonferenza

$$\int f_+ dx dy = 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^R \frac{\cos(2\theta)}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta) d\theta \int_0^R \frac{d\rho}{\rho}$$

il secondo integrale diverge per ogni raggio. L'integrale della parte negativa è meno infinito. Ma non si possono sommare le infinità di segno diverso e pertanto la funzione non è Lebesgue integrabile.

## Lecture 37

lun 17 gen  
2022 14:30

# 14 Spazi funzionali ed equazioni differenziali

[r]

## 14.1 Spazi metrici

**Definizione.** Una metrica su di uno spazio  $X$  (si dice spazio al posto di insieme proprio perché ha una metrica, ma lo spazio è un insieme) è una funzione distanza  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ , simmetria
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , disuguaglianza triangolare

Nella teoria della relatività, il concetto di metrica è un po' diverso da quanto viene definito qua. Un insieme  $X$  con una funzione metrica è uno spazio metrico.

**Esempio.** Sono spazi metrici

- $\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$ .
- $\mathbb{R}^n$  con la metrica  $L^1$ :  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$ . La sommatoria ricorda  $\int |x - y| dj$  dove  $j$  ha misura discreta, cioè con dimensione zero. L'integrale di una funzione con  $n$  elementi è la sommatoria. Questa è detta anche metrica di Manhattan.

- $\mathbb{R}^n$  con la metrica discreta

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 1, & \underline{x} \neq \underline{y} \\ 0, & \underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

- $\mathbb{R}^n$  con la metrica  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \max_j |x_j - y_j|$ , con  $1 \leq j \leq n$ .

**Esercizio.** Si consideri  $P = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$  e l'origine  $O$ . Si calcola la distanza  $d(O, P)$  tramite le metriche viste:

- $d(O, P) = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$
- $d(O, P) = |0 - 3| + |0 - 2| = 5$
- $d(O, P) = 1$
- $d(O, P) = \max \{|0 - 3|, |0 - 2|\} = 3$

**Esercizio.** Si disegnano gli intorni di raggio 1 e centro 0 in base alle metriche viste. Si ricorda che tale intorno è per definizione

$$B_1(0) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, P) < 1\}$$

- circonferenza  $\pm\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ ;
- quadrato con le diagonali sugli assi perché si ha  $|x| + |y| < 1$ ;
- si ha solamente il centro perché  $d(O, P) < 1$  solo quando  $P = O$ ;
- si ha un quadrato con lati paralleli agli assi.

**Esempio.** Si consideri l'insieme delle funzioni continue  $C^0([a, b]) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora la metrica uniforme (o della norma uniforme) è

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup |f(x) - g(x)|, \quad x \in [a, b]$$

Si ricorda la caratterizzazione della convergenza uniforme. In termini di metrica, si ha convergenza uniforme se la metrica converge a zero.

**Esempio.** Si consideri  $X = C^0([a, b])$ . Allora una metrica è

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

Un'altra è

$$d(f, g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f - g\|_2$$

essa è la norma  $L^2$  e ricorda l'utilizzo del prodotto scalare tra funzioni quando si sono trattate le serie di Fourier (huh?).

Queste norme si applicano a spazi di dimensione infinita. [r]



**Proprietà dello spazio di funzioni continue.** Si possono definire varie proprietà per lo spazio di funzioni  $C^0([a, b])$  analoghe a quelle di  $\mathbb{R}^n$ :

- Insieme aperto;
- insieme chiuso;
- punto di accumulazione;
- frontiera;
- punti interni, punti esterni;
- limiti di successioni:  $x_n \rightarrow \bar{x} \iff d(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$ ;

Per  $\mathbb{R}^n$  si è visto un lemma che afferma la tricotomia di qualsiasi sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  (interno, frontiera, esterno). Si può riformulare tale lemma utilizzando la definizione generale di metrica. Considerata una metrica, si possono costruire gli interni circolari (che non per forza sono  $n$ -sfere) e da ciò si hanno gli insiemi aperti, cioè le unioni di interni circolari  $B_r(x_0)$ .

**Definizione.** Due metriche si dicono equivalenti quando danno luogo alla stessa famiglia di insiemi aperti (cioè se gli interni aperti di una metrica lo sono anche per l'altra).

In  $\mathbb{R}^n$  quasi tutte le metriche sono equivalenti; mentre non è così per gli insiemi di dimensioni infinite.

**Definizione.** La norma di uno spazio vettoriale  $V$  sul campo  $\mathbb{R}$  è una funzione  $N : V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $N(\underline{v}) \geq 0$  e  $N(\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$ ;
- $N(\lambda \underline{v}) = |\lambda| N(\underline{v})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- $N(\underline{v} + \underline{w}) \leq N(\underline{v}) + N(\underline{w})$ , disuguaglianza triangolare.

**Esempio.** La norma euclidea

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

La norma uniforme

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_j |x_j|, \quad 1 \leq j \leq n$$

La norma  $L^1$

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

Dalla norma  $N$  si definisce la distanza  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = N(\underline{x} - \underline{y})$ .

**Proposizione.** Se  $N$  è una norma, allora

$$d(x, y) = N(x - y)$$

è una metrica.

**Definizione.** Il prodotto scalare in uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{R}$  è una funzione  $S : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v} \cdot \underline{w}$  tale che

- $S(\underline{v}, \underline{v}) = 0$  e  $S(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = 0$ , funzione positiva e non degenera;
- $S(\underline{v}, \underline{w}) = S(\underline{w}, \underline{v})$ , simmetria
- $S(a\underline{u} + b\underline{v}, \underline{w}) = aS(\underline{u}, \underline{w}) + bS(\underline{v}, \underline{w})$ , forma bilineare (la linearità nella seconda entrata discende dalla proprietà precedente).

**Proposizione.** Se  $S$  è un prodotto scalare. Allora  $N(\underline{v}) = [S(\underline{v}, \underline{v})]^{\frac{1}{2}}$ .  
Pertanto, la catena di definizioni è

$$\text{prodotto scalare} \implies \text{norma} \implies \text{metrica}$$

ma non si possono fare le definizioni nel senso precedente.

Gli spazi dotati di norma sono detti pre-Banach. Gli spazi dotati di prodotto scalare sono detti pre-Hilbert. Il prefisso “pre” si rimuove quando tali spazi sono anche completi (completo nel senso dell’assioma di completezza di Dedekind). [r] online.

## 14.2 Continuità e successioni

Si rivedono le nozioni di  $\mathbb{R}^n$  in termini di una metrica generica.

### 14.2.1 Continuità

**Definizione.** Si considerino due spazi metrici  $X$  e  $Y$  con metriche  $d_X$  e  $d_Y$ . Si consideri la funzione  $f : X \rightarrow Y$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in B_\delta(x_0), x \neq x_0 \implies f(x) \in B_\varepsilon(y_0)$$

dove si ha

$$x \in B_\delta(x_0) \iff 0 < d_X(x, x_0) < \delta, \quad f(x) \in B_\varepsilon(y_0) \iff d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$$

**Definizione.** La funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Proposizione.** La funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua per ogni  $x \in X$  sse  $f^{-1}(A)$  è aperto, per ogni  $A \subset Y$  aperto.

Da questo deriva che la composizione di funzioni continue è continua. [r]

**Definizione.** Una funzione  $f$  è limitata se l’immagine  $f(X) \subset Y$  è un insieme limitato in  $Y$ . Un insieme limitato in uno spazio metrico è un insieme tutto contenuto in un insieme aperto di tale spazio.

**Definizione.** Siano  $X$  e  $Y$  sono spazi metrici. Sia  $B(X, Y)$  l’insieme funzioni limitate  $f : X \rightarrow Y$ , con metrica uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

**Definizione.** Si consideri lo spazio di funzioni continue e limitate  $C(X, Y) \subset B(X, Y)$ . Anche su  $C$  si può definire la metrica uniforme  $d_\infty$ .

**Definizione.** Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è lipschitziana in  $X$  se

$$\exists k \in \mathbb{R} \mid x, y \in X \implies d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$$

**Esempio.** Si consideri l'insieme delle funzioni continue e limitate  $X = Y = C([a, b], \mathbb{R})$  (che coincide con l'insieme delle funzioni continue  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ ). Allora si definisce il funzionale

$$\Phi : C^0([a, b]) \rightarrow C^0([a, b]), \quad f \mapsto \Phi[f](x) = \int_a^x f(t) dt$$

l'integrale è ben definito perché la funzione è continua (e quindi integrabile).

**Esercizio.** Se il funzionale  $\Phi$  è lipschitz allora è continuo.  
Dati  $f, g \in C^0([a, b])$ , bisogna trovare  $k$  tale che

$$d_Y(\Phi[f], \Phi[g]) \leq k d_X(f, g)$$

ricordando che  $d_Y = d_X = d_\infty$  si ha

$$\begin{aligned} d_\infty(\Phi[f], \Phi[g]) &= \sup_{x \in [a, b]} |\Phi[f](x) - \Phi[g](x)| \\ d_\infty(f, g) &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Segue

$$\begin{aligned} d_\infty(\Phi[f], \Phi[g]) &= \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) - g(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \leq (b - a) \|f - g\|_\infty = (b - a) d_\infty(f, g) \end{aligned}$$

si ricorda che l'integrale di un modulo è una funzione crescente (seppur non strettamente). Si pone  $k = b - a$  e dunque  $\Phi$  è lipschitz.

### 14.2.2 Successioni

**Definizione.** La successione  $x_n$  in uno spazio metrico  $X$  converge a  $\bar{x}$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \mid n > N \implies d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

**Definizione.** Una successione è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \mid n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Proposizione.** Vale  $x_n \rightarrow \bar{x} \implies x_n$  è di Cauchy. (e vale il viceversa).

**Teorema.** Si consideri lo spazio di funzioni continue e limitate  $X = C([a, b])$  con la metrica uniforme. Allora  $f_n \rightarrow \bar{f}$  in  $X$  nella metrica uniforme sse  $f_n \rightrightarrows \bar{f}$ .

Dunque si può rivedere il teorema di scambio degli operatori di limite ed integrale. L'integrale è un funzionale  $\int : X \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto I[f] = \int_a^b f(x) dx$ .

Scambiare il limite con l'integrale corrisponde alla nozione che l'integrale è un funzionale continuo:

$$I[\lim f_n] = \lim I[f_n]$$

[r]

## Lecture 38

### 14.3 Completezza

**Definizione.** Uno spazio metrico  $X$  è completo sse ogni successione di Cauchy in  $X$  è convergente in  $X$ .

mar 18 gen  
2022 17:30

**Esempio.** L'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  è completo: è l'unica retta completa. Similmente pure  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma.** Se  $X$  è uno spazio metrico completo e  $C \subset X$  è un sottospazio chiuso, allora  $C$  è completo.

**Dimostrazione.** Infatti, l'insieme  $C$  contiene tutti i propri punti di accumulazione perché è chiuso. Pertanto, se  $c_n \in C$  è di Cauchy, allora è anche una successione di punti di  $X$ . Dato che  $X$  è completo, segue che  $c_n \rightarrow \bar{x} \in X$ . Tuttavia,  $\bar{x}$  è di accumulazione per  $C$ ,  $\bar{x} \in \overline{C} = C$  pertanto  $\bar{x} \in C$ .

**Definizione.** Uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  normato (cioè dotato di norma) e completo.

**Definizione.** Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  con prodotto scalare e completo.

**Osservazione.** Hilbert implica Banach.

**Esempio.** Si vedono alcuni esempi

- Si consideri l'insieme delle funzioni continue  $C^0([a, b])$  con norma  $\|\cdot\|_\infty$  è completo e quindi uno spazio di Banach.
- L'insieme  $C^1([a, b])$  con norma  $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$  è completo e quindi uno spazio di Banach.
- L'insieme  $C^0([a, b])$  con prodotto scalare  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$  è completo e quindi è uno spazio di Hilbert.

**Osservazione.** Si consideri lo spazio  $L^1(X)$  delle funzioni L-integrabili sul dominio  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Il funzionale

$$\|f\|_1 = \int_X |f| dx$$

non è una norma. Infatti, considerato  $f \equiv 0$  quasi ovunque, si ha  $\|f\|_1 = 0$ , ma  $f \neq 0$  pertanto non sono rispettate le proprietà che definiscono la norma.

Pertanto, si può definire lo spazio  $L^1(X)$  tramite le classi di equivalenza in modo che sia uno spazio di Banach.

**Esempio.** Si vedono spazi di Banach, ma non di Hilbert. Si consideri la regola del parallelogramma per l'addizione algebrica di due vettori. Dato il prodotto scalare si può trovare la norma [r]:  $\|\underline{v}\|^2 = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$ . Si consideri

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \implies \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \frac{\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \|\underline{u}\|^2 - \|\underline{v}\|^2}{2}$$

Quindi

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 2(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2)$$

[r] Si consideri la norma  $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ . Essa non soddisfa la regola del parallelogramma in  $\mathbb{R}^2$ . Dunque, essa è una norma che non proviene da un prodotto scalare. (Si possono usare i vettori  $\underline{u} = (1, 1)$  e  $\underline{v} = (1, 0)$ .)

**Esempio.** Si vede uno spazio metrico completo non di Banach. Si consideri la metrica discreta. La successione  $x_n = \frac{1}{n}$  non è successione di Cauchy con tale metrica (si consideri, per esempio,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ).

In tale metrica, una successione è di Cauchy se è definitivamente costante e quindi converge. Pertanto, lo spazio metrico è completo. Per esercizio dimostrare che la metrica non proviene da una norma (cioè non è di Banach) questo perché non rispetta la proprietà  $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \|\underline{v}\|$ .

**Teorema.** Si consideri un insieme  $S$  e  $Y$  uno spazio metrico. Sia  $B(S, Y)$  lo spazio delle funzioni limitate  $f : S \rightarrow Y$  con metrica uniforme  $d_\infty$ . Se  $Y$  è completo allora  $B(S, Y)$  è completo a sua volta.

L'utilità in questo corso è considerare  $Y = \mathbb{R}^n$ .

**Teorema.** Si consideri  $X$  uno spazio metrico ed  $Y$  uno spazio metrico completo. Sia  $C(X, Y) \subset B(X, Y)$  l'insieme delle funzioni continue e limitate con metrica uniforme  $d_\infty$ . Se  $B(X, Y)$  è completo allora  $C(X, Y)$  è completo a sua volta.

## Lecture 39

ven 21 gen  
2022 13:30

### 14.4 Equazioni differenziali, esistenza ed unicità

Si rivede un po' di notazione. La funzione  $\underline{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è la funzione incognita definita su di un intervallo  $I$  che potrebbe essere l'intervallo massimale o meno. Le equazioni differenziali hanno interpretazione di oggetti nel piano (o iperpiano) oppure in senso cinematico come funzioni del tempo:

$$\begin{cases} \underline{x}'(t)A = \underline{F}(t, \underline{x}(t)) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Si considera anche il problema di Cauchy ai valori iniziali. Si dimostra il teorema di esistenza ed unicità locale.

**Osservazione.** Si trasforma il problema in un'equazione integrale. L'IVP precedente diventa

$$\int_{t_0}^t \underline{x}'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) d\tau \iff \underline{x}(t) - \underline{x}(t_0) = \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) d\tau$$

considerando  $\underline{x}'(t)$  continua di modo che valga il teorema fondamentale del calcolo integrale. Dunque, l'equazione integrale diventa

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) d\tau$$

[r] ed è equivalente all'equazione differenziale.

**Dimostrazione.** teorema di esistenza ed unicità locale. Si consideri  $r > 0$  ed un intervallo  $I = [t_0 - r, t_0 + r] \subset \mathbb{R}$ . Sia  $X = C(I, \mathbb{R}^n)$  lo spazio in cui si cercano le possibili soluzioni; esso è l'insieme delle funzioni continue (e dunque limitate perché sono continue su di un intervallo compatto) definite su  $I$ . Tale spazio è uno spazio metrico con norma uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ . Si definisce la funzione  $\Phi : X \rightarrow X$  come

$$\Phi[\underline{x}](t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) d\tau$$

con  $\underline{x}(t) \in X$  che è una possibile soluzione. Si nota che si utilizza il secondo membro dell'equazione integrale dell'osservazione precedente. Dunque, l'equazione integrale diventa

$$\underline{x} = \Phi[\underline{x}]$$

ed  $\underline{x}$  è un punto fisso di  $\Phi$ , cioè  $\underline{x}$  è soluzione dell'equazione integrale, cioè  $\underline{x}$  è soluzione del problema ai valori iniziali.

Si definisce la funzione  $\Phi$ . In realtà  $\underline{F}$  è definita e continua in un intorno di  $(t_0, \underline{x}_0)$ . Tipicamente si lavora in un intorno aperto  $A$  che contenga la soluzione. L'idea è quella di considerare un rettangolo  $I \times B_\delta(\underline{x}_0)$ . Questo vale a dire che  $\exists \delta > 0$  tale che  $I \times \overline{B}_\delta(\underline{x}_0) \subset A$ .

Si definisce  $\tilde{B}_\delta(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in X \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\|_\infty \leq \delta\}$ , cioè è l'insieme di funzioni che sono vicine alla funzione costante  $\underline{x}_0$ . Inoltre, esso è un intorno chiuso in  $X$  di dimensione infinita. Dunque, si consideri  $\Phi : \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0) \subset X \rightarrow X$ .

La funzione  $\Phi$  risulta essere ben definita. Si è fatto fronte al bisogno che  $\underline{F}(t, \underline{x}(t))$  sia ben definita, cioè che  $(t, \underline{x}(t)) \in A$ . La continuità di  $\underline{F}$  è necessaria per definire la funzione  $\Phi$ .

Si affronta ora la condizione di lipschitzianità. Si considerino  $r$  e  $\delta$  come sopra, fissati. Dunque, grazie al fatto che  $\underline{F}$  è lipschitz si ha

$$\exists L \in \mathbb{R} \mid \forall \underline{x}, \underline{y} \in \overline{B}_\delta(\underline{x}_0) \text{ e } t \in I \implies \|F(t, \underline{x}) - F(t, \underline{y})\| \leq L\|\underline{x} - \underline{y}\|$$

la norma considerare è quella euclidea. Negli insiemi di dimensione finita, tutte le norme non patologiche danno origine a topologie identiche. Quindi

$$(\Phi[\underline{x}] - \Phi[\underline{y}])(t) = \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) - \underline{F}(\tau, \underline{y}(\tau)) d\tau$$

La distanza risulta essere

$$\begin{aligned} \|\Phi[\underline{x}] - \Phi[\underline{y}]\|_\infty &= \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) - \underline{F}(\tau, \underline{y}(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t \|\underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) - \underline{F}(\tau, \underline{y}(\tau))\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_0+r} \|\underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) - \underline{F}(\tau, \underline{y}(\tau))\| d\tau \leq rL\|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza si utilizza l'ipotesi che  $\underline{F}$  è lipschitz. Dunque  $\Phi[\underline{x}]$  è lipschitz in  $\underline{x}$  con costante  $rL$ . Questo implica che  $\Phi$  è continua in  $\tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$ .

Quando  $r$  e  $\delta$  diminuiscono, comunque  $L$  non cresce.

Si vedono alcune proposizioni e teoremi prima di completare la dimostrazione.

**Proposizione.** Se  $r$  e  $\delta$  sono abbastanza piccoli, allora  $rL < 1$ . Ciò vale per tutti i valori di  $r$  e  $\delta$  più piccoli.

**Proposizione.** Se  $r$  e  $\delta$  sono abbastanza piccoli, allora

$$\Phi : \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0) \rightarrow \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0) \iff \Phi[\tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)] \subset \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$$

**Dimostrazione.** Si consideri  $\underline{x} \in \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$ . Si mostra che

$$\Phi[\underline{x}] \in \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0) \iff \|\Phi[\underline{x}](t) - \underline{x}_0\| \leq \delta, \quad \forall t$$

Infatti

$$\|\Phi[\underline{x}](t) - \underline{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau))\| d\tau \leq \int_{t_0}^{t_0+r} \|\underline{F}(\tau, \underline{x}(\tau))\|_\infty d\tau \leq rM < \delta, \quad \text{se } r \rightarrow 0$$

Si ricorda che  $\underline{F}$  è continua e su di un compatto la funzione ammette massimo:  $\|\underline{F}\| \leq M$ , con  $M \in \mathbb{R}$  che non può crescere per  $r, \delta \rightarrow 0$ . Si conclude che  $\Phi[\underline{x}] \in \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$ . [r]

**Teorema.** L'insieme  $\tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$  è uno spazio metrico completo.

**Teorema.** Contrazioni. Si consideri  $Y$  uno spazio metrico completo. Sia  $\Phi : Y \rightarrow Y$  tale che  $\exists \alpha \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$  per cui  $\forall x, y$  si ha

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) < \alpha d(x, y)$$

una funzione  $\Phi$  con tale proprietà si chiama contrazione perché le immagini sono ad una distanza minore delle controimmagini.

Inoltre, segue che esiste un unico punto  $x \in Y$  tale che

$$\Phi[x] = x$$

tale punto è detto punto fisso.

**Dimostrazione.** Si dimostra l'esistenza di un punto fisso. Si consideri un punto  $y_0 \in Y$  arbitrario e  $\{y_n\}$  una successione definita per ricorrenza da

$$y_{n+1} = \Phi[y_n], \quad n \geq 0$$

La successione  $\{y_n\}$  in  $Y$  è di Cauchy. Infatti

$$d(y_{k+1}, y_k) \leq \alpha d(y_k, y_{k-1}) \leq \dots \leq \alpha^k d(y_1, y_0)$$

Dunque, considerato  $m > n$  si ha

$$d(y_{m+1}, y_n) \leq \sum_{k=n}^m d(y_{k+1}, y_k) \leq \sum_{k=n}^m \alpha^k d(y_1, y_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(y_1, y_0) \rightarrow 0$$

pertanto  $\{y_n\}$  è di Cauchy.

Dato che  $Y$  è completo si ha

$$\exists \bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \bar{y} \in Y$$

dato che  $\Phi$  è una contrazione ed continua si ha

$$\Phi[\bar{y}] = \Phi[\lim_{n \rightarrow \infty} y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi[y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \bar{y}$$

cioè  $\bar{y}$  è un punto fisso.

Si dimostra l'unicità. Si supponga che esista  $\bar{x} = \Phi[\bar{x}]$  punto fisso. La sua distanza con  $\bar{y}$  è

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\Phi[\bar{x}], \Phi[\bar{y}]) \leq \alpha d(\bar{x}, \bar{y})$$

dato che  $\alpha < 1$ , può solo risultare  $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  e quindi  $\bar{x} = \bar{y}$ .

**Dimostrazione.** Si continua la dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità locale. Si consideri  $\Phi[x] = x$  in  $\tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$ . Considerati  $rL < 1$  si ha che

$$\Phi : \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0) \rightarrow \tilde{B}_\delta(\underline{x}_0)$$

è una contrazione e dunque esiste un unico punto fisso che è la soluzione per IVP.

Il teorema dimostrato nel modo precedente è detto Picard, Lindelöf, Banach, Caccioppoli.

**Osservazione.** Ai teoremi di esistenza ed unicità si affianca il problema della ricerca delle soluzioni. Se si può iterare una funzione, allora si itera la funzione fino a quando si trova la soluzione alla precisione desiderata. [r]

**Osservazione.** Sul Giusti è presente la dimostrazione.