

# Theoretical Physics II

Maso\*

10 dicembre 2023

## Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>I</b> | <b>Correzioni radiative</b>                   | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>Scattering con un campo esterno</b>        | <b>2</b>  |
| 1.1      | Bremsstrahlung . . . . .                      | 4         |
| <b>2</b> | <b>Divergenza ultravioletta</b>               | <b>7</b>  |
| 2.1      | Correzioni radiative . . . . .                | 8         |
| <b>3</b> | <b>Spin dei campi</b>                         | <b>12</b> |
| 3.1      | Fermioni . . . . .                            | 12        |
| 3.2      | Fotoni . . . . .                              | 13        |
| <b>4</b> | <b>Correzioni al secondo ordine</b>           | <b>16</b> |
| 4.1      | Polarizzazione del vuoto . . . . .            | 16        |
| 4.2      | Auto-energia dell'elettrone . . . . .         | 18        |
| 4.3      | Vertice elettromagnetico . . . . .            | 20        |
| 4.4      | Applicazione . . . . .                        | 21        |
| 4.5      | Identità di Ward . . . . .                    | 22        |
| 4.6      | Linee esterne . . . . .                       | 24        |
| 4.6.1    | Fermioni . . . . .                            | 24        |
| 4.6.2    | Fotoni . . . . .                              | 26        |
| 4.7      | Riepilogo . . . . .                           | 27        |
| <b>5</b> | <b>Ordini superiori</b>                       | <b>28</b> |
| 5.1      | Diagrammi one-particle reducible . . . . .    | 28        |
| 5.2      | Diagrammi primitivamente divergenti . . . . . | 29        |
| <b>6</b> | <b>Divergenza infrarossa</b>                  | <b>32</b> |

## Lezione 1

[r] cambiare carica  $q$  con  $Q$

mer 22 nov  
2023 10:30

---

\*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

## Parte I

# Correzioni radiative

## 1 Scattering con un campo esterno

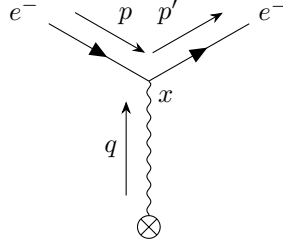
Si studia lo scattering con un campo esterno, cioè un campo statico. Si considera un campo generato da una sorgente massiva che non è influenzata dallo scattering. Infatti, per il principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta v \sim \frac{1}{M}$$

se la sorgente ha una grande massa, allora il suo spostamento è nullo. Sperimentalmente, tale situazione corrisponde allo scattering elettrone-nucleo. Il campo del fotone si può scomporre in una parte trasversa (cioè i fotoni reali) ed una parte statica

$$A^\mu(x) = A_{\text{quant.}}^\mu(x) + A_{\text{clas.}}^\mu(x)$$

La sorgente statica si rappresenta con una croce



Questo diagramma al primo ordine è permesso, a differenza di quelli incontrati in precedenza. Infatti, per questi non si può conservare il quadri-momento perché il fotone considerato è reale, on-shell con  $k^\mu k_\mu = 0$ . In questo caso, il fotone è off-shell e non rispetta la legge di dispersione di Einstein. Esso ha un momento che la sorgente statica può assorbire o fornire senza muoversi. Questo implica che la sorgente è indipendente dal tempo e viene a mancare l'invarianza per traslazione perché la sorgente ha posizione fissa.

Nel diagramma sopra si ha solamente la parte classica del campo elettromagnetico poiché non sono presenti fotoni reali, trasversi. Pertanto, il prim'ordine della matrice di scattering è

$$S^{(1)} = -iq \int d^4x \bar{\psi}^{(-)}(x) A_{\text{cl}}^\mu(x) \psi^{(+)}(x), \quad A_{\text{cl}}^\mu(x) = \left( \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0} \right)$$

cioè il campo elettrostatico di Coulomb, con  $e > 0$  carica elementare. Si comprende già che l'energia è conservata, ma non il momento. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= \langle 0 | c(\mathbf{p}') (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) : c^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) e^{-i(p-p')_\mu x^\mu} \\ &= 2\pi \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{q}) \delta(E - E') \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ . In assenza della sorgente statica, i propagatori sono tutti invarianti per traslazioni spaziali e temporali, ma ora il campo del fotone dipende dalla posizione. Alla seconda riga la parte temporale fornisce la conservazione dell'energia tramite una delta, mentre la parte spaziale dà la trasformata di Fourier del campo. Non si ha più l'invarianza per traslazione spaziale perché si è fissata la sorgente. Il momento non si conserva: la sorgente assorbe momento senza muoversi, una particella che fa scattering cambia direzione. Il modulo del momento, cioè l'energia, è ancora conservata poiché si ha invarianza per traslazione temporale.

Si aggiunge un'altra regola di Feynman. Ogni volta che appare uno scattering con un campo esterno statico si ha un termine

$$A_{cl}^\mu(\mathbf{q}) \quad \alpha \quad \overleftarrow{q} \quad \otimes$$

mentre nell'elemento di matrice si sostituisce

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \rightarrow (2\pi) \delta(E_f - E_i)$$

**Sezione d'urto.** La sezione d'urto nell'angolo di scattering dell'elettrone uscente è la formula di scattering di Mott:

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= \frac{1}{2} m^2 \frac{(2\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \sum_{rs} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \frac{(\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr}[(\not{\mathbf{p}}' + m) \gamma^0 (\not{\mathbf{p}} + m) \gamma_0] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta + m^2) = \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [2m^2 + |\mathbf{p}|^2 (1 + \cos \theta)] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 2m^2 + 2|\mathbf{p}|^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ E^2 - |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \frac{(\alpha Z)^2 E^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 \beta^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} \end{aligned}$$

Si noti che la sezione d'urto include il numero atomico dell'atomo considerato. Poiché si utilizza la teoria delle perturbazioni, per elementi pesanti bisogna porre attenzione al prodotto  $\alpha Z$ . Alla seconda riga si è applicato

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma}]$$

alla terza riga si è applicato

$$E = E' \implies |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Il primo addendo della sezione d'urto è pari alla sezione d'urto Rutherford: lo scattering di particelle alfa su atomi di oro. Il termine ulteriore compare perché si è calcolato lo scattering per fermioni e deriva dall'effetto dello spin. Nel limite non relativistico  $\beta \rightarrow 0$  si ottiene Rutherford, tuttavia si è utilizzata la teoria delle perturbazioni per ottenere il risultato. Se il numero atomico  $Z$  è grande, lo sviluppo perturbativo può essere inaffidabile. Infatti, la formula di Mott non è sperimentalmente affidabile per  $Z \gtrsim 40$ . Ciononostante, il problema a due corpi si risolve analiticamente e la sezione d'urto esatta corrisponde a quella trovata con lo sviluppo perturbativo. Per il problema Coulombiano, nel limite non relativistico, tutti gli ordini superiori si riducono ad una fase<sup>1</sup>. Pertanto, l'ordine  $\alpha^2$  è esatto.

La formula sopra si può ritrovare anche in astrodinamica con il problema Kepleriano a due corpi: questo è il caso delle orbite iperboliche.

Per studiare una zona di dimensione spaziale  $\Delta x$ , il momento necessario è  $(\Delta x)^{-1}$ . Quando il parametro di impatto è grande, il momento trasferito è piccolo, e viceversa. Infatti, il seno al denominatore deriva dal momento trasferito  $|\mathbf{q}|$  cioè il denominatore del campo di Coulomb pari alla trasformata di Fourier di  $r^{-1}$ .

Per angoli piccoli, la sezione d'urto diverge a causa del seno. Infatti

$$\sigma = \int d(\cos \theta) d\varphi d\Omega \sigma \sim \int \theta d\theta d\Omega \sigma = \int \frac{d\theta^2}{\theta^4} \rightarrow \infty$$

<sup>1</sup>Si veda Dalitz Richard Henry. 1951. On higher Born approximations in potential scattering. *Proc. R. Soc. Lond. A* **206**:509–520. <http://doi.org/10.1098/rspa.1951.0085>.

Tuttavia, si dev'essere commesso un errore: l'esperimento di Rutherford vide una distribuzione ragionevole di atomi di elio, senza evidenze di una divergenza della sezione d'urto. Lo scattering di una particella su un nucleo è definito dal parametro  $b$  di impatto cioè quanto la traiettoria dista dal nucleo (cioè la distanza dal nucleo nel piano perpendicolare alla direzione del moto). Il campo di Coulomb è un campo a lungo raggio, va come  $\frac{1}{r}$ : non si annulla abbastanza rapidamente ad infinito. Questo è uno dei problemi da cui deriva la patologia del campo elettromagnetico. Il nucleo causa scattering per un parametro di impatto pari circa al raggio di Bohr. Per grandi parametri di impatto, il nucleo viene schermato dagli elettroni, cosa che non si è considerata nel calcolo precedente. Si è commesso un errore fondamentale: ipotizzare l'esistenza di una sorgente senza nulla intorno. Questo è analogo a quanto si è già accennato trattando dell'elettrone bare.

Per risolvere il problema, si utilizza il (energia) potenziale di Yukawa, cioè un campo smorzato

$$V_Y = -\frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x}|}e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a_0}}$$

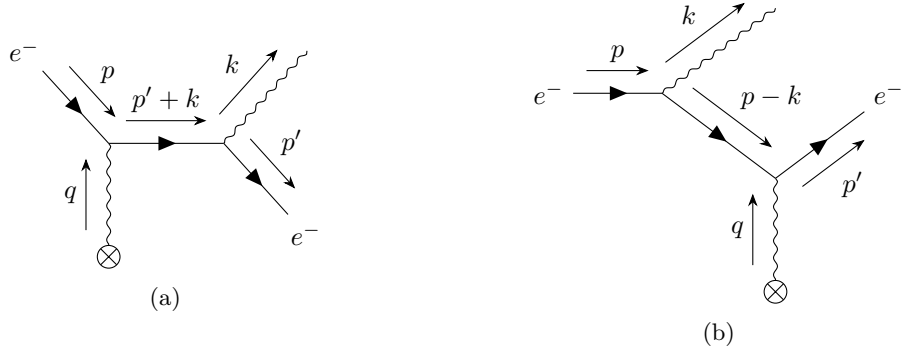
dove  $a_0$  è il raggio di Bohr. La divergenza trovata è causata da una cattiva definizione del problema.

### 1.1 Bremsstrahlung

Si studia la radiazione emessa a causa della decelerazione di una particella carica. Si aggiunge un fotone reale allo scattering con un campo esterno

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma$$

I diagrammi corrispondenti sono dati da



dove  $q = p' + k - p$ . Nel primo diagramma il propagatore del fermione porta momento  $p' + k$ , mentre nel secondo diagramma porta  $p - k$ . In questo caso si hanno entrambi i contributi della parte trasversa e della parte classica del campo del fotone. Il second'ordine della matrice di scattering è

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-iq)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{T} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (A_\mu^T + A_\mu^{cl}) \psi :_x : \bar{\psi} \gamma^\nu (A_\nu^T + A_\nu^{cl}) \psi :_y \} \\ &= (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^T)^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^{cl})^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \\ &\quad + (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^{cl})^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^T)^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \end{aligned}$$

La seconda riga corrisponde al primo diagramma, mentre la terza riga al secondo diagramma. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (2\pi) \delta(E' + \omega - E) \prod_i N_i \left[ \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{i}{\not{p}' + \not{k} - m} (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

La sezione d'urto esatta è quella di Bethe-Heitler (v. Itzykson e Zuber, p. 240).

**Fotone soffice.** Si opera l'approssimazione di fotone soffice, cioè l'energia del fotone è molto minore di quella dell'elettrone che l'ha emesso

$$\mathbf{k} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}', \quad \omega \ll E, E', \quad |\mathbf{p}| \approx |\mathbf{p}'|$$

L'ultima relazione porta allo scattering elastico. Infatti, lo scattering sopra è detto anelastico. Dunque, il termine del primo diagramma diventa

$$\begin{aligned} I &= \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \\ &\approx \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Nel limite di  $k$  piccolo, la frazione porta ad una divergenza infrarossa, diversa da quelle sospettate per l'auto-energia e la polarizzazione del vuoto (cioè divergenze ultraviolette). Applicando l'anti-commutatore delle matrici di Dirac

$$\not{\epsilon}(\not{p}' + m) = (-\not{p}' + m)\not{\epsilon} + 2\varepsilon^\mu p'_\mu$$

e noto che  $\bar{u}$  soddisfa l'equazione di Dirac poiché riguarda una particella reale, si ottiene

$$I = \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{p'_\nu k^\nu} \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p})$$

cioè un termine proporzionale a quello dello scattering elastico precedente.

Le ampiezze di Feynman per i due diagrammi sono

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{k^\nu p'_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \\ \mathcal{M}_b &= -i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p_\mu}{k^\nu p_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

Nella parentesi è presente l'ampiezza dello scattering elastico. Questo è un primo esempio di fattorizzazione: lo scattering elastico viene fattorizzato. Il tasso di transizione è il tasso dello scattering elastico per il tasso di emettere un fotone.

L'elemento di matrice di transizione è

$$S_{fi} = (2\pi) \delta(E' - E) \frac{m}{EV} (-iq^2) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]$$

Sommando sulle polarizzazioni finali del fotone, la sezione d'urto è

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elastico}} \frac{q^2}{2\omega V} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V \\ &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elas}} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{\omega} \end{aligned}$$

si nota che l'ampiezza in parentesi è invariante di gauge: infatti basta sostituire  $\varepsilon' = \varepsilon - ikf$  e ricordare che  $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$ . Anche la sezione d'urto esatta è invariante di gauge. La probabilità di bremsstrahlung è il prodotto della probabilità di scattering elastico e della probabilità di emettere un fotone.

Il termine in parentesi si può riscrivere come

$$\left[ \frac{\varepsilon_r^\mu p'_\mu}{kp'} - \frac{\varepsilon_r^\mu p_\mu}{kp} \right] \left[ \frac{\varepsilon_s^\nu p'_\nu}{kp'} - \frac{\varepsilon_s^\nu p_\nu}{kp} \right] = \varepsilon_r^\mu \varepsilon_s^\nu \left[ \frac{p'_\mu p'_\nu}{(kp')^2} - \frac{p'_\mu p_\nu}{(kp')(kp)} - \frac{p_\mu p'_\nu}{(kp)(kp')} + \frac{p_\mu p_\nu}{(kp)^2} \right]$$

Ricordando che

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_\mu^r \varepsilon_\nu^r = -\eta_{\mu\nu}$$

la somma sulle polarizzazioni è

$$\sum_{rs} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 = -\frac{p'^2}{(kp)^2} + \frac{2pp'}{(kp)(kp')} - \frac{p^2}{(kp)^2} = -\left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{kp} \right]^2$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale di Bethe-Heitler nel limite di fotone soffice è

$$\begin{aligned} d_{\Omega}\sigma &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-q^2}{2\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk} \right]^2 = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} dP \end{aligned}$$

La parentesi diverge nell'infrarosso cioè per  $k$  piccolo.

## Lezione 2

**Divergenza infrarossa.** La sezione d'urto elastica è di ordine  $\alpha^2$  (si noti che un ordine  $\alpha$  deriva da  $A_{cl}$ ) quindi la sezione d'urto anelastica è di ordine  $\alpha^3$ . Si studia il comportamento, in particolare

$$dP \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0$$

Questa divergenza è diversa da quella trovata per lo scattering Rutherford. In quel caso, essa è causata da una cattiva definizione del processo che avviene. In questo caso, chiedersi quanti fotoni sono emessi ad energia sempre più piccola è lecito. Bisogna capire la natura di tale divergenza. Inoltre, nell'esperimento di Rutherford non si osserva una crescita a grande parametro di impatto, mentre nella bremsstrahlung si osserva sperimentalmente che i fotoni emessi aumentano al diminuire della loro energia.

Per risolvere il problema, bisogna definire operativamente lo scattering elastico ed anelastico: il primo è uno scattering in cui non si misura alcun fotone emesso. Bisogna porre attenzione al fatto che gli apparati sperimentali hanno una sensibilità limitata. Si deve ridefinire il concetto di scattering elastico tenendo conto di tale sensibilità. Alla probabilità dello scattering elastico

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z$$

bisogna aggiungere anche la probabilità di bremsstrahlung con energia minore di quella minima rivelabile

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega < \omega_{\min}$$

Pertanto lo scattering anelastico è quello per cui il fotone ha un'energia maggiore di quella minima

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega \geq \omega_{\min}$$

Con questa ridefinizione, l'integrale dello scattering anelastico non diverge più

$$dP \sim \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega^3} < \infty$$

Il problema è stato spostato nello scattering elastico. Il punto cruciale è la sensibilità dell'apparato di misura: al di sotto di una certa energia, l'apparato è cieco alla distinzione tra elastico ed anelastico. La divergenza è causata dalla massa nulla del fotone. Considerando una piccola massa  $\lambda$  del fotone, la sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d_{\Omega}\sigma|_{\text{el. sp.}} = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elas}} \left[ 1 + \alpha \ln \frac{\omega_{\min}}{\lambda} \right]$$

Questa regolarizzazione viene spesso utilizzata. Si può modificare una teoria per ottenerne un'altra e può accadere che unendo correttamente i contributi, i termini proporzionali al parametro aggiunto si semplificano. Pertanto, la teoria nel limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  è perfettamente definita. Lo stesso si può fare per una divergenza ultravioletta.

gio 23 nov  
2023 10:30

Modificare l'elettrodinamica quantistica porta ad una teoria che viola l'invarianza di gauge, ma in cui la massa del fotone si semplifica e si può fare il limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  per ottenere l'elettrodinamica non modificata.

Inoltre, poiché l'ordine dello scattering anelastico è  $\alpha^3$  bisogna considerare tutti i termini di tale ordine, non solamente alcuni: mancano i termini di interferenza (i prodotti misti) provenienti dagli ordini superiori. Per aggiungere un ordine  $\alpha$  bisogna anche considerare i diagrammi dello scattering elastico con tre vertici: quando si calcola il modulo quadro della somma delle ampiezze di Feynman del diagramma ad un vertice e dei diagrammi a tre vertici, compaiono i termini misti di ordine  $\alpha^3$  (e termini di ordine superiore trascurabili). In questo modo, al grafico dello scattering elastico si aggiungono le correzioni virtuali derivanti dalle particelle virtuali. Le correzioni virtuali cancellano la divergenza infrarossa parametrizzata dalla piccola massa del fotone. In questo modo si può fare il limite per massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$ . In particolare, il teorema di Bloch–Nordsieck afferma che, per tutti i processi in elettrodinamica quantistica, le divergenze infrarosse si cancellano esattamente ad ogni ordine perturbativo, lasciando solamente le correzioni radiative finite di ordine  $\alpha$  (rispetto all'ordine minore).

La divergenza infrarossa deriva dal fatto che, nel limite  $k \rightarrow 0$ , il propagatore

$$\frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \approx \frac{\not{p}' + m}{2kp'}, \quad k \ll p$$

diverge poiché propaga un fermione con momento di un fermione reale. Aggiungendo una massa  $\Lambda$  si mantiene la particella virtuale lontano dal mass shell.

## 2 Divergenza ultravioletta

Finora si sono studiati i diagrammi albero cioè diagramma in cui non appaiono loop. Le correzioni radiative appaiono sempre ad ordini superiori dello sviluppo perturbativo. Si noti che le discussioni valgono a stati iniziale e finale fissati. Come prototipi si utilizzano i diagrammi di scattering con un campo esterno e di scattering Compton.

Nella lagrangiana del campo di Dirac in interazione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - q_0\bar{\psi}\not{A}\psi$$

sono presenti i parametri bare  $m_0$  ed  $q_0$ . Le misure sperimentali riguardano la massa  $m$  e la carica  $q$  fisiche, in particolare la carica bare più tutte le auto-interazioni. La carica bare non si può misurare. La relazione tra i parametri effettivi ed i parametri bare non si può misurare perché bisogna sempre considerare il campo elettromagnetico. Questa discussione è simile a trattare il campo elettrico nei materiali  $\mathbf{D}$  aggiungendo la polarizzazione  $\mathbf{P}$  al campo elettrico nel vuoto  $\mathbf{E}$ . In un materiale, si misura il campo elettrico  $\mathbf{D}$ . La relazione tra i due campi è una costante di proporzionalità. In teoria dei campi, la differenza tra la carica bare e quella fisica è infinita. Passare dalla teoria libera alla teoria in interazione ridefinisce i parametri introdotti nella lagrangiana libera e si studia tale ridefinizione.

I diagrammi divergenti nell'ultravioletto sono l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Il procedimento da seguire è

- isolare gli infiniti modificando la teoria tramite la regolarizzazione, se ne esiste un numero infinito, la teoria ha un utilizzo limitato;
- calcolare le relazioni tra parametri bare e fisici;
- ritornare alla teoria originaria, ma ora senza infiniti.

La procedura, se possibile, implica che la teoria è rinormalizzabile. Una teoria non rinormalizzabile può essere una teoria efficace, cioè corretta fino ad un certo ordine, agli ordini superiori compare sempre un nuovo infinito e si ha bisogno di una nuova costante di rinormalizzazione.

Il Modello Standard è un'unica teoria rinormalizzabile tramite il metodo funzionale (che è diverso dal modo perturbativo presentato), ma è comunque incompleto.

## 2.1 Correzioni radiative

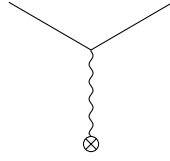
L'ampiezza di Feynman associata al diagramma di scattering con un campo esterno è

$$\mathcal{M}' = -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{A}_{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})$$

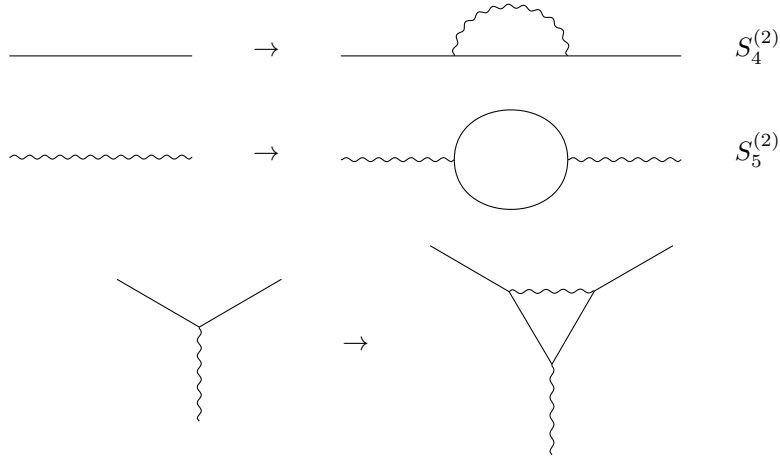
dove si considerano i parametri bare  $q_0$  ed  $m_0$ . Non si considera la parte quantizzata del campo del fotone poiché non sono presenti fotoni negli stati iniziale e finale. La matrice di scattering è

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iq_0)^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \not{A}_{\text{cl}} \psi :_{x_1} : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_2} \cdots : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_n} \}$$

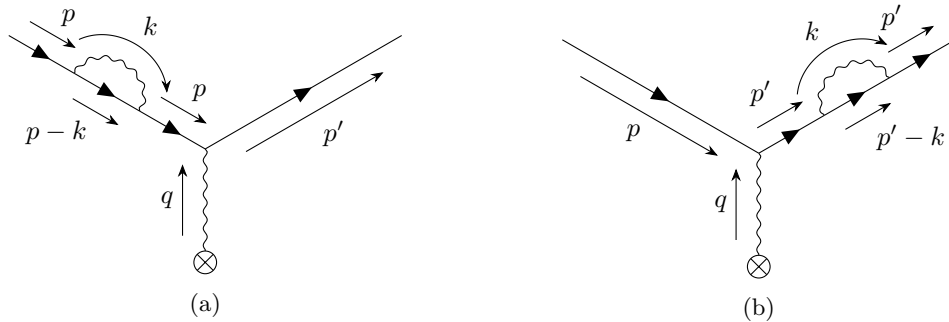
dove il campo senza pedice è il solo campo quantizzato  $A \equiv A^T \equiv A_{\text{quant}}$ . Si considera un solo campo classico perché si ipotizza essere debole e dunque soppresso agli ordini superiori. Si vedono i diagrammi dello sviluppo. Al prim'ordine  $n = 1$  è presente solo il campo classico



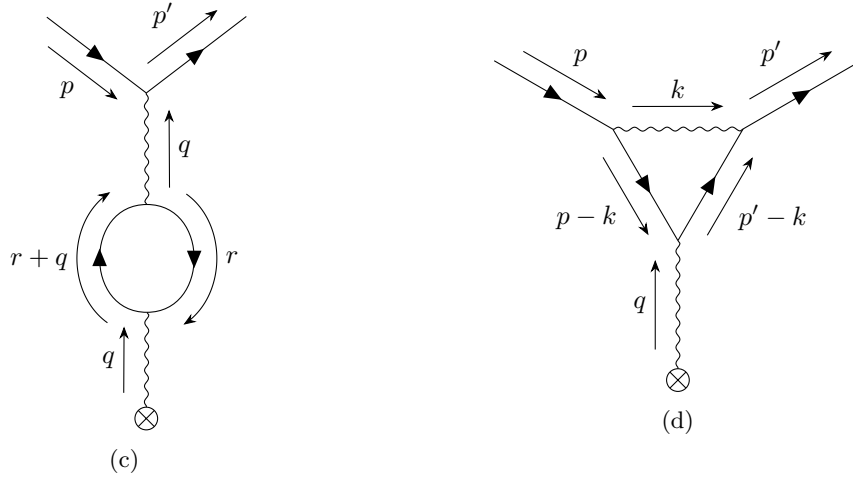
Al second'ordine  $n = 2$  si ha la bremsstrahlung: il campo  $A$  ha anche la parte quantizzata che descrive i fotoni reali. Al terzo ordine  $n = 3$  ci sono le correzioni radiative: l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Per ottenere i grafici corrispondenti, bisogna operare le sostituzioni seguenti



Pertanto si ha







dove  $q = p' - p$ . Questi sono gli unici diagrammi possibili al terzo ordine. In tutti è presente un integrale che potrebbe divergere. Le ampiezze di Feynman corrispondenti sono

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu] u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_b &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\nu] iS_F(p') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_c &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) iD_F^{\mu\nu}(q) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r [\gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r)] A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_d &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [\gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)] u(\mathbf{p}) A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\end{aligned}$$

dove si pone

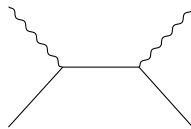
$$\begin{aligned}iq_0^2 \Sigma(p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu \\ iq_0^2 \Pi_{\nu\rho}(q) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r \gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r) \\ q_0^2 \Lambda_\rho(p', p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)\end{aligned}$$

cioè le funzioni di auto-energia, di polarizzazione del vuoto e di correzione al vertice. Si studia il limite ultravioletto, cioè  $k \rightarrow \infty$ . I termini sopra vanno come

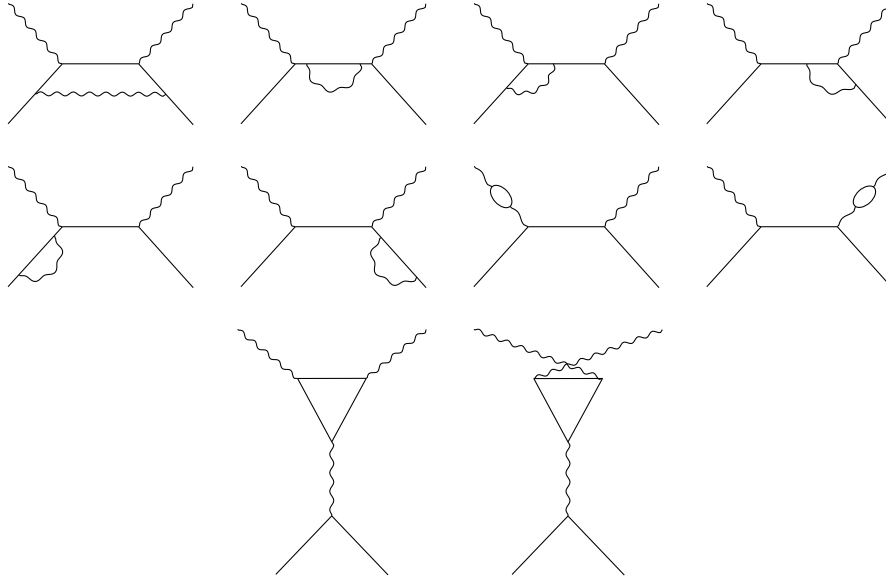
$$\Sigma \sim \int dk, \quad \Pi \sim \int dr r, \quad \Lambda \sim \ln k$$

I propagatori sono fattori di convergenza, ma non ne sono presenti abbastanza. In elettrodinamica quantistica, questi sono i soli diagrammi divergenti.

**Classificazione dei diagrammi.** Capiti i diagrammi con loop, si studiano i diagrammi in modo dettagliato con l'aggiunta delle correzioni radiative nel caso dello scattering Compton. Al diagramma albero



si aggiungono le correzioni sopra per ottenere parte dei seguenti diagrammi:



Si noti che il primo diagramma e gli ultimi due non si possono ottenere aggiungendo le correzioni.

Nel primo diagramma, l'elettrone entrante interagisce con quello finale tramite un fotone virtuale. Gli ultimi due diagrammi si possono trattare tramite il teorema di Furry: tutti i diagrammi che contengono un loop fermionico con un numero dispari di vertici si sommano a zero. Intuitivamente, l'ultimo diagramma, tramite la simmetria di crossing della matrice di scattering, si può far diventare il penultimo, ma con un segno negativo e dunque i due si cancellano.

Si vogliono studiare le classi di diagrammi. Evitando di considerare gli ultimi due diagrammi, il primo diagramma è diverso da tutti gli altri poiché è one-particle irreducible (1PI), mentre gli altri sono one-particle reducible (1PR). Per ottenere un tale diagramma si può usare un diagramma di ordine inferiore e aggiungere una delle tre correzioni sopra. I diagrammi one-particle reducible sono utili perché dal diagramma albero si possono ottenere le correzioni all'ordine superiore. I diagrammi nella seconda riga correggono le particelle fisiche e questo significa rinormalizzare la funzione d'onda.

**Correzioni.** Il propagatore del fermione si corregge aggiungendo l'auto-energia

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

le cui linee corrispondenti sono



Si vuole costruire un diagramma scheletro. Si inserisce un rettangolo che indica il propagatore corretto fino ad un ordine stabilito. Si modifica la teoria ed un propagatore, come quello del fotone

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = -\frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \sim -\frac{\Lambda^2}{k^4}, \quad k \rightarrow \infty$$

Si introduce un cut-off. Nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  compare nuovamente la divergenza dell'integrale. In questo modo si è aumentata la potenza a denominatore di modo che l'integrale sia convergente. Secondo la regolarizzazione di Pauli-Villars, il propagatore corretto si può intendere come una particella con massa  $\Lambda$ , sebbene abbia un segno negativo. In questo modo l'integrale converge e se il risultato non dipende dal cut-off  $\Lambda$  allora nel limite ultravioletto si ottiene la teoria originaria. Questa regolarizzazione si può fare per l'elettrodinamica quantistica, ma per altre teorie non è possibile.

Il grado di divergenza degli integrali nei diagrammi di Feynman è

$$D = 4 - I_F - 2I_B$$

dove  $I_j$  indica il numero di propagatori di fermioni F e di bosoni B, cioè i fattori convergenza. Se il grado di divergenza superficiale è  $D < 0$  allora l'integrale converge, se  $D > 0$  allora diverge. Se  $D = 0$ , allora diverge logicamente. Questo grado di divergenza è superficiale perché si basa sul power-counting. Altre condizioni, come le simmetrie e cancellazioni, possono cambiare il grado di divergenza superficiale. In particolare si vede che i diagrammi sopra hanno solo divergenza logica.

Il cut-off rompe l'invarianza di gauge, cioè il gruppo di simmetria locale  $U(1)$ , e questo complica un po' la teoria. Per il Modello Standard, la teoria si complica molto di più e bisogna utilizzare la regolarizzazione dimensionale passando a  $4 - \varepsilon$  dimensioni ottenendo integrali convergenti. Infatti, il caso peggiore  $D = 0$  diventa negativo di poco e si prolungano analiticamente gli integrali in un numero reale di dimensioni, cioè  $4 - \varepsilon$ . Le singolarità vanno come  $\varepsilon^{-1}$ , si rinormalizza la teoria, i termini dipendenti da  $\varepsilon$  si semplificano e si può ritornare alla teoria originaria. La regolarizzazione dimensionale non rompe l'invarianza di gauge.

### Lezione 3

lun 27 nov  
2023 10:30

Si possono utilizzare vari metodi per la rinormalizzazione.

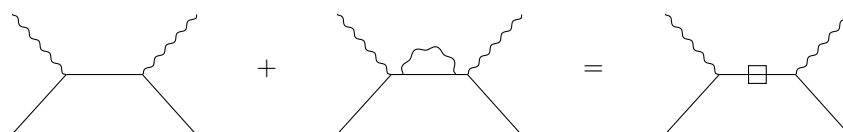
- La regolarizzazione permette di isolare gli infiniti. Si rinormalizza la teoria capendo se gli infiniti si possono assorbire in una ridefinizione della massa e della costante di accoppiamento liberi di modo che nessuna osservabile dipenda dalla regolarizzazione utilizzata. In tal caso, il limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  del cut-off ultravioletto è ben definito.
- La regolarizzazione dimensionale considera  $4 - \varepsilon$  dimensioni e si procede come detto sopra.
- Un altro metodo utilizza l'integrale sui cammini (path integral) di Feynman. In meccanica classica, due punti sono connessi da traiettorie e le equazioni del moto corrispondono alla traiettoria che minimizza l'azione  $S$ . Con l'integrale dei cammini, ad ogni traiettoria viene dato un peso  $e^{-\frac{i}{\hbar}S}$  e la traiettoria delle equazioni del moto è data dalla somma di tutte le possibili traiettorie (v. Feynman e Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals). L'integrale sui cammini permette utilizzare le tecniche numeriche. Infatti, per definire una teoria di campo si è partiti da un volume finito  $V$  ed un passo reticolare  $a$  in modo che i gradi di libertà siano un numero finito e numerabile (si ha invarianza di gauge, ma non più simmetria continua di traslazione e rotazione). Nel limite di volume infinito e passo infinitesimo si ottiene la teoria del continuo. Questo metodo non è perturbativo, quindi considera ogni diagramma, e si può utilizzare un calcolatore. La formulazione con l'integrale dei cammini è equivalente alla meccanica quantistica di Schrödinger. Questo metodo si può usare anche per le interazioni forti per cui lo sviluppo perturbativo non funziona sempre. Tuttavia, il limite al continuo  $a \rightarrow 0$  può essere complicato.

Non tutti i metodi di regolarizzazione sono coerenti con le simmetrie del sistema, come il taglio ultravioletto o la massa del fotone che rompe la simmetria di gauge.

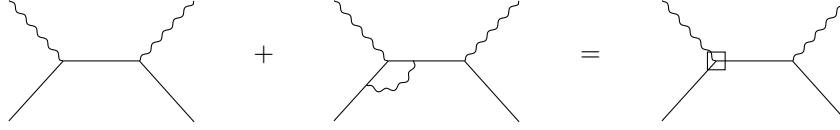
Osservando che ad un certo ordine si può aggiungere qualsiasi ordine superiore perché tanto viene tralasciato, si possono riscrivere le somme dei diagrammi in modo accorto. I diagrammi one-particle reducible sono divergenti e la loro somma si può scrivere come

$$q^2(1 + a + b + c + d + e + f + g) + o(q^4) = q^2(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e)(1 + f)(1 + g)$$

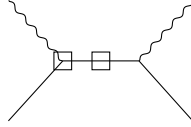
dove l'unità indica il diagramma Compton senza correzioni e le lettere sono le correzioni di ordine  $q^2$  aggiunte al diagramma albero. Il propagatore bare del fermione diventa il propagatore corretto  $iS_F^{\text{cor}}$  all'ordine  $q^4$ . Quindi il fattore  $(1 + a)$  è dato dal diagramma



Si conserva la struttura del diagramma originario: nel propagatore intermedio è presente la versione corretta. Al vertice elettromagnetico viene inserita la correzione al vertice (1 + b):



Il vertice bare diventa il vertice corretto  $-iq(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu$ . Unendo le due correzioni sopra si ha

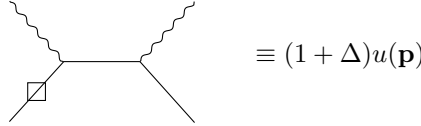


per cui si ottiene

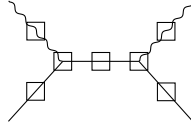
$$i(S_F + \Delta S_F)(-iq)(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu = iS_F(-iq)\gamma_\mu + i\Delta S_F(-iq)\gamma_\mu + iS_F(-iq)\Lambda_\mu + o(q^4)$$

L'addendo dato dal prodotto delle due correzioni è di ordine  $q^6$ .

Anche le particelle fisiche sentono il proprio campo elettromagnetico, pertanto



dove  $\Delta u(\mathbf{p})$  è una certa variazione. In conclusione, dal diagramma albero iniziale, si sommano tutti i diagrammi one-particle reducible ottenendo il diagramma scheletro



Si conserva la struttura del diagramma ricordando che in ogni quadrato è presente la correzione radiativa all'ordine desiderato. Si calcolano tutte le correzioni e si vede che in ognuna si sostituiscono i parametri bare con quelli sperimentalmente misurati e la tecnica di regolarizzazione non appare più.

Rimane ancora un diagramma one-particle irreducible, ma il suo integrale è convergente  $D = -1$ . Il diagramma scheletro si calcola dai diagrammi one-particle reducible, ma il calcolo dell'ampiezza di Feynman è fatto con tutti i diagrammi. La procedura è la seguente: i diagrammi one-particle reducible si sommano nel diagramma scheletro, si sostituiscono i parametri liberi con quelli fisici (ad esempio presi dalle tavole di Rosenfeld) e si aggiungono i diagrammi one-particle irreducible che sono convergenti. Questo vale in elettrodinamica quantistica, solo i diagrammi one-particle reducible divergono. Lo stesso non si può dire per la teoria dell'interazione debole di Fermi.

### 3 Spin dei campi

Si studia in modo rigoroso lo spin di un fermione di Dirac e di un fotone tramite il tensore momento angolare.

#### 3.1 Fermioni

Il campo di Dirac si trasforma in modo infinitesimo come

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \psi(x) - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}(\Delta\omega)_{\mu\nu}\psi(x) \\ \psi'_\alpha(x') &= \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\Delta\omega)_{\mu\nu}S^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\right]\psi_\beta(x), \quad S^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

dove  $\mu\nu$  sono gli indici spazio-temporale, mentre  $\alpha\beta$  sono gli indici spinoriali. Le quantità  $(\Delta\omega)_{\mu\nu}$  e  $S^{\mu\nu}$  sono anti-simmetriche. Studiando l'invarianza della densità di lagrangiana per rotazioni (v. Fisica Teorica I, §Teorema di Noether) si ha la conservazione del tensore momento angolare

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu} = \int d^3x [(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) + \pi_r S_r^{\mu\nu} \psi_s]$$

dove  $T$  è il tensore energia-impulso. Ricordando che

$$\pi_r = \partial_{\dot{\psi}_r} \mathcal{L} = i\hbar \psi_r^\dagger$$

il tensore energia-impulso è dato da

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \psi_r} \mathcal{L} \partial^\nu \psi_r - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad T^{0i} = i\hbar \psi^\dagger \partial^i \psi$$

Si considerano le componenti spaziali del tensore momento angolare

$$\mathbf{M} = \int d^3x \psi^\dagger [\mathbf{x} \times (-i\hbar \nabla)] \psi + i\hbar \psi^\dagger \left[ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right] \psi$$

La prima parentesi si può identificare con il momento angolare orbitale, mentre il secondo addendo si identifica con lo spin poiché è indipendente dalle coordinate. L'operatore spin non è conservato perché  $\boldsymbol{\sigma}$  non commuta con l'hamiltoniana. La quantità conservata è l'elicità

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p})$$

Si calcola l'operatore di spin longitudinale, cioè l'operatore di elicità per uno spinore

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}} &= \frac{\hbar}{2} \int d^3x : \psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi : = \text{Fourier} \\ &= \frac{\hbar}{2} \int d^3p [c_1^\dagger(\mathbf{p}) c_1(\mathbf{p}) - c_2^\dagger(\mathbf{p}) c_2(\mathbf{p}) - d_1^\dagger(\mathbf{p}) d_1(\mathbf{p}) + d_2^\dagger(\mathbf{p}) d_2(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

[r] Dunque

$$S_{\mathbf{p}} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Un fermione è auto-stato dell'operatore di elicità con spin up  $r = 1$  e spin down  $r = 2$ . Similmente, l'anti-fermione corrispondente è auto-stato dell'operatore di elicità.

### 3.2 Fotoni

Si veda Jackson, §11.7 e Maggiore, "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", §§2.3, 4.3.1.

**Generatori del gruppo di Lorentz.** Si considerino le trasformazioni di Lorentz  $\Lambda$  definite da

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

La trasformazione infinitesima è

$$\Lambda_\varepsilon = \eta + \varepsilon L \implies \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta + \varepsilon L)^n = e^{\omega L}, \quad \omega = n\varepsilon$$

Inoltre

$$(\eta L)^\top = -\eta L \implies L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

La prima riga e la prima colonna sono boost, mentre la sotto-matrice  $3 \times 3$  descrive le rotazioni. Si introducono i generatori delle rotazioni

$$J_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

così come i generatori dei boost

$$K_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I loro commutatori sono

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Le trasformazioni di Lorentz finite derivano dall'esponenziale delle matrici sopra. Si raggruppano i generatori del gruppo di Lorentz all'interno di un tensore anti-simmetrico  $J^{\mu\nu}$

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}, \quad J^{0i} = K^i, \quad J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k$$

per ottenere

$$\Lambda = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]$$

Un insieme di  $n$  campi  $\phi^i$  si trasforma nella rappresentazione di dimensione  $n$  del gruppo di Lorentz se

$$\phi'^i = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]^i_j \phi^j$$

## Lezione 4

Si studia come si trasforma un quadri-vettore

mar 28 nov  
2023 10:30

$$\delta v^\mu = \varepsilon^\mu_\nu v^\nu, \quad \delta v^\rho = -\frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma v^\sigma$$

dove  $\rho\sigma$  sono gli indici che mescolano le componenti dei quadri-vettori. Per confronto con i singoli generatori si ha

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)$$

Si vede il caso particolare di una rotazione  $\delta\theta$  attorno all'asse  $z$

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= -\frac{i}{2}[(\delta\omega)_{12}J^{12} + (\delta\omega)_{21}J^{21}]^\mu_\nu x^\nu = -i\delta\theta(J^{12})^\mu_\nu x^\nu = \delta\theta(\eta^{1\mu}\delta^2_\nu - \eta^{2\mu}\delta^1_\nu)x^\nu \\ &= \delta\theta(\eta^{1\mu}x^2 - \eta^{2\mu}x^1) \end{aligned}$$

dove  $J^{12} = J^3$  e alla seconda uguaglianza si ricorda che sia il parametro infinitesimo  $\delta\omega$  che i generatori  $J$  sono anti-simmetrici. Pertanto

$$\delta x^1 = -x^2 \delta\theta, \quad \delta x^2 = x^1 \delta\theta, \quad \delta x^3 = \delta x^0 = 0$$

cioè quanto atteso. Un altro caso è il boost  $\delta\beta$  lungo  $x$  per cui si applica  $J^{10}$  e  $J^{01} = K^1$ .

**Spin.** Si ritorna al campo del fotone  $\phi_s = A_\mu$ . Il tensore momento angolare è

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x [(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}) + \pi_r S_r^{\alpha\beta} \phi_s]$$

Si studia il secondo addendo e si specializzano gli indici alle componenti di un quadri-vettore. Conoscendo che la trasformazione di un campo generico e di un quadri-vettore, si ha

$$\delta v^\rho = \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} v_\sigma \implies S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} = -i(J_{\alpha\beta})^{\rho\sigma} = \eta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \eta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma$$

Pertanto

$$\pi_\mu S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} A_\nu = (\eta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \eta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha) \pi_\mu A_\nu = \pi_\alpha A_\beta - \pi_\beta A_\alpha = (\partial_0 A_\beta) A_\alpha - (\partial_0 A_\alpha) A_\beta$$

dove si utilizza la lagrangiana del campo elettromagnetico libero fissando il gauge di Coulomb e considerando il vuoto  $A_0 = 0$  (v. Maggiore, §3.5.2):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \implies \pi_\mu = \partial_{\partial^0 A^\mu} \mathcal{L} = -\partial_0 A_\mu$$

L'operatore di spin ha solo indici spaziali e presenta tre componenti spaziali poiché è anti-simmetrico. Inserendo lo sviluppo in serie di Fourier del campo del fotone quantizzato in modo non covariante, si ha

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int d^3x : (\partial^0 A^i) A^j - (\partial^0 A^j) A^i : = \text{Fourier} \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\varepsilon_s^i(\mathbf{k}) \varepsilon_r^j(\mathbf{k}) - \varepsilon_r^i(\mathbf{k}) \varepsilon_s^j(\mathbf{k})] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

dove si ripetono i passaggi visti per la quantizzazione dei campi.

Si considera lo spin lungo l'asse  $z$

$$S_{12} = S_3 = S_z = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\delta_s^1 \delta_r^2 - \delta_s^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})$$

con

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

Dunque, applicato ad un fotone si ha

$$S_z a_t^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i \sum_{r=1}^2 [\delta_t^1 \delta_r^2 - \delta_t^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

dove si è utilizzato il commutatore per ottenere la delta che risolve l'integrale e la somma in  $s$ . Pertanto

$$S_3 a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle, \quad S_3 a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = -i a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

Gli stati con polarizzazione lineare non sono auto-stati dello spin. Si considerano gli stati con polarizzazione circolare

$$a_{(\pm)}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^\dagger(\mathbf{q}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{q})]$$

per cui

$$\begin{aligned} S_3 a_{(+)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) + i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = a_{(+)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \\ S_3 a_{(-)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) - i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = -a_{(-)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

cioè essi sono auto-stati. Il fotone ha solo due polarizzazioni possibili  $s = \pm\hbar$ . Una terza polarizzazione non è presente. Questo è coerente con il fatto che il fotone ha massa nulla e la terza possibilità di spin, ortogonale all'asse di quantizzazione, non esiste (conseguenza dell'algebra di Poincaré).

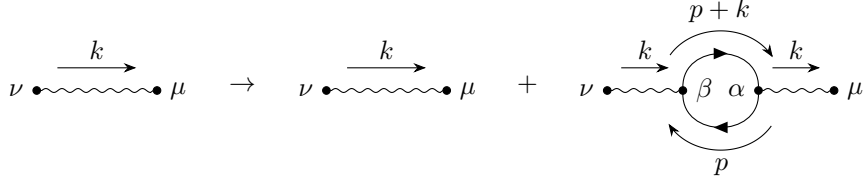
## 4 Correzioni al secondo ordine

### 4.1 Polarizzazione del vuoto

Si parte dal propagatore imperturbato e si studia la correzione derivante dalla polarizzazione del vuoto

$$iD_F^{\mu\nu}(k) \rightarrow iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F^{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi_{\alpha\beta}(k) iD_F^{\beta\nu}(k)$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



dove si ha

$$i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \equiv \frac{(-i q_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4 p \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_0}$$

Tramite la divergenza superficiale, l'integrale è divergente al più quadraticamente. Non si calcola esplicitamente il diagramma, ma si immagina di aver già regolarizzato l'integrale al fine di cercare quali sono le divergenze e dove si trovano per poterle riassorbire all'interno di una relazione tra i parametri bare ed i parametri fisici. Si isolano le divergenze, ma non si svolge alcun calcolo.

La teoria è invariante di gauge e si deve avere  $k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} k_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(k) &\propto \int d^4 p \text{Tr} \left[ k_\alpha \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] = \int d^4 p \text{Tr} \left[ \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} (\not{p} - m_0 - \not{p} + m_0 + \not{k}) \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} [(\not{p} + \not{k} - m_0) - (\not{p} - m_0)] \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} [f(\not{p}) \gamma^\beta - f(\not{p} + \not{k}) \gamma^\beta] \end{aligned}$$

alla seconda riga si è utilizzata la ciclicità della traccia, alla terza riga si aggiunge e sottrae uno stesso termine, all'ultima riga  $f$  indica una funzione generica. Traslare  $p$  di una quantità  $k$  all'interno dell'integrale permette di semplificare i due addendi. Se ciò è possibile, allora la regolarizzazione rispetta l'invarianza di gauge. Viceversa, nel caso di un cut-off, l'integrale ha dei limiti di integrazione finiti e la traslazione non permette di ottenere termini identici. Dunque, si immagina che gli integrali siano regolarizzati in modo gauge invariante.

Ci si concentra solamente sulla funzione di polarizzazione del vuoto  $\Pi^{\alpha\beta}$ . Si ipotizza di averlo regolarizzato in modo gauge invariante. Poiché esso è un tensore di tipo 2, si può riscrivere come

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2)$$

dove  $A$  e  $B$  sono due funzioni che divergono quadraticamente in senso superficiale (prima della regolarizzazione, dopo sono quantità finite). Dall'invarianza di gauge segue

$$0 = k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = -k^\beta A(k^2) + k^2 k^\beta B(k^2) \implies A(k^2) = k^2 B(k^2) \implies A(0) = 0$$

Quando la funzione  $\Pi^{\alpha\beta}$  incontra una corrente, ogni termine proporzionale al momento del fotone  $k^\mu$  si semplifica perché accoppiato con la corrente  $J_\mu$ : il termine  $B$  si può ignorare. Lo sviluppo in potenze di  $A$  in termini di  $k^2$  è

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) + o(k^4), \quad A'(0) = A'(k^2 = 0) = \partial_{k^2} A(k^2)|_{k^2=0}$$



dove  $\Pi_c(k^2)$  tende a zero linearmente in  $k^2$  per  $k^2 \rightarrow 0$ . Esprimendo la derivata in termini di  $k$  si ha

$$A' \sim \frac{1}{k} \partial_k \Pi \sim \frac{1}{p^2} \Pi \sim \frac{d^4 p}{p^4}$$

cioè una divergenza logaritmica. L'invarianza di gauge permette di ridurre il grado della divergenza superficiale (questo è dato dal fatto che  $A(0) = 0$ ). Il secondo addendo è una derivata seconda e l'integrale associato è convergente e non dipende dal regolatore

$$\Pi_c(k^2) = k^2 \partial_{k^2}^2 \Pi(0)$$

anche se il power-counting fornisce una divergenza logaritmica? [r].

Sostituendo l'espressione della funzione di polarizzazione del vuoto

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

all'interno del propagatore del fotone si ottiene il propagatore corretto

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \left[ 1 - q_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2} \right] = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)} + o(q_0^2)$$

La costante di accoppiamento  $q_0^2 \ll 1$  è piccola e dunque si aggiungono ordini superiori per scrivere l'espressione in modo più comodo sfruttando l'espansione in serie di Taylor. Il propagatore non corretto ha un polo a  $k^2 = 0$  che corrisponde ad una massa nulla per il fotone. Poiché  $A(0) = 0$ , il polo del fotone corretto è ancora  $k^2 = 0$  e la massa del fotone non subisce correzioni. La massa del fotone non si rinormalizza ad ogni ordine: questa protezione deriva ancora dall'invarianza di gauge. Il termine  $A(k^2)$  non posta il polo del propagatore.

A questo punto si trova una ridefinizione della relazione tra parametri bare e parametri fisici. Si ha

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} [1 - q_0^2 A'(k^2) - q_0^2 \Pi_c(k^2)]$$

Il propagatore si accoppia sempre con la corrente elettromagnetica da entrambi gli estremi, pertanto compaiono le cariche dei fermioni

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 \rightarrow \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^4 \Pi_c(k^2) + o(q^4)$$

La parentesi quadra — che è un termine divergente prima della regolarizzazione — è una correzione alla carica elettrica al secondo ordine dello sviluppo perturbativo in  $\alpha$  e viene detta costante di rinormalizzazione

$$q_0^2 \rightarrow q^2 \equiv q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_3, \quad Z_3 \equiv 1 - q_0^2 A'(0) + o(q_0^2)$$

Il secondo addendo è una correzione finita di cui bisogna tenere conto all'ordine  $\alpha^2$ . Si è trovata la ridefinizione della relazione tra parametro bare e fisico. Pertanto

$$q = Z_3^{\frac{1}{2}} q_0 = q_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) + o(q_0^2) \right]$$

La legge di Coulomb diventa

$$\frac{q_0^2}{r^2} \rightarrow \frac{q_0^2 Z_3}{r^2} = \frac{q^2}{r^2}$$

Inoltre, il propagatore rinormalizzato è

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}(k) \rightarrow iq^2 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu} q^2}{k^2} + \frac{i\eta_{\mu\nu} q^4}{k^2} \Pi_c(k^2) + o(q_0^4) = iq^2 D_{\mu\nu}(k) [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] + o(q_0^4)$$

Questa espressione è quella che corrisponde al diagramma scheletro: si mantiene la struttura, ma con i parametri fisici. Si noti che al secondo addendo, cioè la correzione finita, si può scambiare  $q_0$  con  $q$  perché la differenza è di ordine  $q_0^2$  e dunque rientra negli ordini superiori.

## Lezione 5

mer 29 nov  
2023 10:30

**Ordini di grandezza.** Regularizzando la teoria tramite un cut-off si ottiene una costante di rinormalizzazione pari a [r] fonte?

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

In questa regularizzazione non si ha più l'invarianza di gauge

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) \neq 0$$

La divergenza logaritmica è una divergenza lenta. Cercando un valore della costante  $Z_3$  apprezzabilmente maggiore di 1 si ha

$$Z_3 = 2 \implies \Lambda \sim e^{\frac{3\pi}{2\alpha}} m \sim 10^{280} m$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg, la lunghezza associata a tale momento è pari a

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \implies \Delta x \sim 10^{-293} \text{ cm}$$

Ad una tale scala non è garantito che la teoria funzioni e che non bisogna tenere conto delle altre interazioni fondamentali.

Ciononostante, rimane il fatto che in una teoria rinormalizzabile, i diagrammi divergenti sono in numero finito e vengono riassorbiti all'interno delle costanti di rinormalizzazione dei parametri. In una teoria non rinormalizzabile, questo non è possibile.

**Massa sperimentale del fotone.** La massa del fotone è legata al campo magnetico di un corpo celeste. Sulla superficie terrestre, il campo magnetico è dell'ordine del gauss. Secondo i geologi, l'origine del campo magnetico è il nucleo della Terra. Come il potenziale di Coulomb cambia aggiungendo una massa al fotone è stato studiato da Fischbach et al.<sup>2</sup>:

$$V = \frac{q}{r} e^{-\mu r}$$

cioè il potenziale di Yukawa. Visto che il campo magnetico sulla superficie non è nullo, la scala di massa è

$$\mu < \frac{\hbar c}{R}, \quad \mu \lesssim \frac{200 \text{ MeV fm}}{10^9 \text{ cm}} \sim \frac{2 \times 10^8 \text{ eV} \cdot 10^{-13} \text{ cm}}{1 \text{ cm}} 10^{-9} \sim 10^{-14} \text{ eV}$$

dove  $R$  è il raggio terrestre. Dunque, la massa del fotone ha un limite superiore. Considerando lo stesso argomento per Giove si ha  $\mu \lesssim 10^{-19} \text{ eV}$ . Anche dal punto di vista sperimentale si ha una conferma che il fotone abbia massa nulla.

## 4.2 Auto-energia dell'elettrone

Esistono altre due rinormalizzazioni della carica oltre  $Z_3$ .

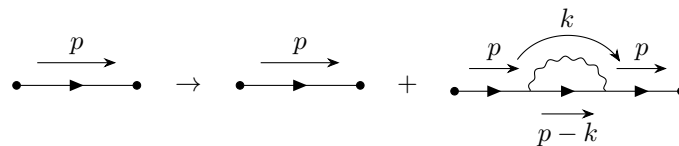
Partendo dal propagatore bare del fermione si passa al propagatore corretto

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

dove

$$i q_0^2 \Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i q_0) \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_0} (-i q_0) \gamma_\nu \frac{-i \eta^{\mu\nu}}{k^2}$$

I cui diagrammi corrispondenti sono



<sup>2</sup>Si veda Fischbach, E., et al. "New geomagnetic limits on the photon mass and on long-range forces coexisting with electromagnetism," in Phys. Rev. Lett., vol. 73, pp. 514-517, 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.514>.

L'integrale diverge nell'infrarosso e nell'ultravioletto. Si considera l'integrale già regolarizzato ad esempio tramite una massa del fotone ed un cut-off. Si isolano le divergenze per capire se è possibile riassorbirle. Il propagatore corretto è

$$iS^{\text{cor}}(p) = i \left[ \frac{1}{\not{p} - m_0} - \frac{1}{\not{p} - m_0} q_0^2 \Sigma(p) \frac{1}{\not{p} - m_0} + o(q_0^2) \right] = \frac{i}{\not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q_0^2)$$

si noti il segno negativo provenire dalla moltiplicazione di due unità immaginarie  $i$ . Si è utilizzata la relazione per due operatori non commutanti

$$(A + B)^{-1} = \left[ A \left( 1 + \frac{1}{A} B \right) \right]^{-1} = \left( 1 + \frac{1}{A} B \right)^{-1} A^{-1} = \left[ 1 - \frac{1}{A} B + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B + \dots \right] \frac{1}{A}$$

dove all'ultima uguaglianza si usa la serie geometrica

$$\frac{1}{1 + M} = 1 - M + M^2 - M^3 + o(M^3)$$

Il propagatore bare ha il polo in  $m_0$ . In precedenza, per l'auto-energia del fotone, l'invarianza di gauge  $A(0) = 0$  protegge dalla rinormalizzazione additiva della massa. In questo caso non si ha alcuna protezione poiché  $\Sigma(0) \neq 0$ . La massa fisica, cioè il polo del propagatore corretto, è

$$m = m_0 + \delta m = m_0 - q_0^2 \Sigma|_{\not{p}=m_0}$$

dove per  $\not{p} = m_0$  si intende  $\not{p}^2 = m_0^2$ , cioè il polo. Al secondo ordine si trova la correzione additiva per la massa.

La funzione di auto-energia  $\Sigma$  opera su uno spazio spinoriale e dunque contiene le matrici di Dirac. Sapendo che

$$(\not{p})^{2n} = p^{2n}, \quad (\not{p})^{2n+1} = \not{p} p^{2n}$$

si sviluppa la funzione in serie di potenze in termini di  $\not{p} - m_0$  per avere

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0) B + (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)$$

Il secondo addendo è la derivata  $B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0)$ . I primi due addendi sono costanti e indipendenti da  $p$ , mentre  $\Sigma_c$  ne dipende, ma converge in quanto dipende da derivate di ordine superiori. Tale addendo dipende da  $\not{p}$ , si azzera in  $\not{p} = m$  (poiché un fattore  $\not{p} - m$  proviene dallo sviluppo di Taylor) e non dipende dal regolatore perché finito.

Inserendo la forma trovata della funzione  $\Sigma$  all'interno del propagatore corretto, il denominatore è

$$\begin{aligned} \not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p) &= \not{p} - [(m_0 + \delta m) - q_0^2 (\not{p} - m_0) B - q_0^2 (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)] \\ &= (\not{p} - m) [1 + q_0^2 B + q_0^2 \Sigma_c(p)] \end{aligned}$$

dove si ha  $\delta m \propto \Sigma(\not{p} = m_0)$  e si sostituisce  $m = m_0 + \delta m$  a tutti gli ordini poiché agli ordini superiori si commette un errore di ordine  $q_0^2$  che è trascurabile all'ordine desiderato. Pertanto si ottiene

$$iS^{\text{cor}} = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2) = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B] [1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2)$$

dove si utilizza il fatto che  $q_0$  è piccolo e dunque si espande in serie di Taylor. La seconda parentesi è zero quando  $\not{p} = m_0$ , mentre la prima è un termine divergente logicamente (prima della regolarizzazione) che si accoppia con due fotoni fornendo una correzione alla carica elettrica che propaga.

Dunque, finora si è trovato

$$\delta m = -q_0^2 \Sigma(\not{p} = m_0)$$

che diverge logicamente. Inoltre

$$B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0) \sim \int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \ln k, \quad \Sigma_c \sim \partial^2 \Sigma(\not{p} = m_0) < \infty$$

Pertanto, la massa fisica è

$$m = m_0 + \delta m < \infty$$

che è finita ed indipendente dal regolatore.

Nei diagrammi compare il propagatore rinormalizzato

$$iq^2 S^R(p) = q_0^2 iS_F(p)[1 - q_0^2 B][1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq^2 S_F(p)[1 - iq^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4)$$

dove la carica fisica è

$$q^2 = q_0^2[1 - q_0^2 B] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_2, \quad Z_2 = 1 - q_0^2 B + o(q_0^2)$$

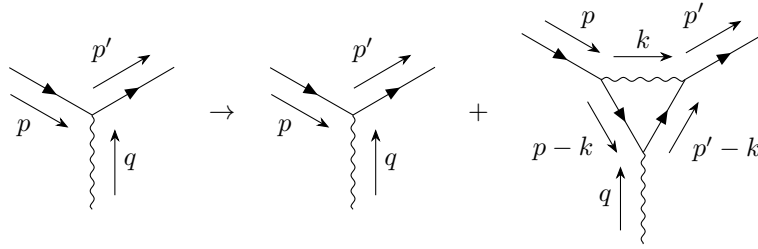
A questo punto si utilizzano i propagatori corretti inserendo le costanti fisiche, ma bisogna calcolare la correzione radiativa finita  $\Sigma_c$ .

### 4.3 Vertice elettromagnetico

Il vertice elettromagnetico diventa

$$-iq_0 \gamma_\mu \rightarrow -iq_0 \gamma_\mu - iq_0^3 \Lambda_\mu(p', p)$$

i cui diagrammi sono



dove  $q = p' - p$  e

$$-iq_0^3 \Lambda^\mu(p, p') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iq_0) \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\beta \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

Esso è logaritmicamente divergente sia nell'infrarosso che nell'ultravioletto. Ancora una volta si considera l'integrale normalizzato.

Nella funzione di auto-energia, un primo termine divergente è dato da  $\Sigma(\not{p} = m)$  cioè la funzione di auto-energia per una particella libera. Similmente, ci si aspetta che il primo termine divergente per la funzione di correzione al vertice  $\Lambda^\mu$  sia quello della particella libera. Si considerino due momenti  $P$  di una particella sul mass shell. Si riscrive

$$p' = P + (p' - P), \quad p = P + (p - P)$$

come pure

$$\Lambda^\mu(p', p) = \Lambda^\mu(P, P) + [\Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(P, P)] \equiv \Lambda^\mu(P, P) + \Lambda_c^\mu(p', p)$$

Il secondo addendo calcolato in  $P$  è nullo  $\Lambda_c^\mu(P, P) = 0$ . La funzione di correzione al vertice appare sempre tra spinori. Si studia il termine di particella libera, la cui forma più generale è

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) = \bar{u}(\mathbf{P}) \left[ a \frac{P^\mu}{m} + b \gamma^\mu \right] u(\mathbf{P})$$

Si utilizza l'identità di Gordon. Sapendo che gli spinori sono on-shell e soddisfano l'equazione di Dirac, si ha

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \implies \not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p} = m\bar{u}(\mathbf{p})$$

moltiplicando per le matrici di Dirac da sinistra e da destra, si ha

$$\gamma^\mu \not{p}u(\mathbf{p}) = m\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu$$

moltiplicando per  $\bar{u}(\mathbf{p})$  e  $\bar{u}(\mathbf{p})$  da sinistra e da destra, si ottiene

$$\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu \not{p} u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

Sommando le due si ha

$$\bar{u}(\mathbf{p})\{\gamma^\mu, \not{p}\}u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}) \implies 2\bar{u}(\mathbf{p})\eta^{\mu\nu}p_\nu u(\mathbf{p}) = 2\bar{u}(\mathbf{p})p^\mu u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

L'identità di Gordon per due momenti diversi è

$$2m\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u(\mathbf{p})$$

Il primo membro è (proporzionale a) la corrente di Dirac, il secondo membro è la somma di una corrente classica e di una corrente di spin. Notando che gli spinori di particella libera  $u$  e  $\bar{u}$  soddisfano l'equazione di Dirac, si può applicare l'identità di Gordon. Da essa segue che i termini  $P^\mu$  e  $\gamma^\mu$  nella decomposizione della funzione  $\Lambda^\mu(P, P)$  sono dipendenti.

## Lezione 6

Pertanto, il termine di particella libera è

gio 30 nov  
2023 10:30

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

dove  $L$  è una costante scalare divergente che dipende dal regolatore. Dunque la funzione di correzione del vertice è

$$\Lambda(p, p') = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p, p'), \quad \bar{u}(\mathbf{P})\Lambda_c u(\mathbf{P}) = 0$$

Si vuole studiare il suo comportamento. Si introducono due variabili

$$\Delta \equiv \not{p} - \not{k} - m, \quad q = p - P, \quad q' = p' - P$$

Pertanto, isolando i termini divergenti, si ha

$$\Lambda \sim \frac{1}{\not{p}' - \not{k} + m}\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} = \frac{1}{\Delta + \not{q}'}\gamma^\mu \frac{1}{\Delta + \not{q}} = \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}'\frac{1}{\Delta} + \dots \right] \gamma^\mu \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}\frac{1}{\Delta} + \dots \right]$$

alla seconda uguaglianza si utilizza l'identità per  $(A+B)^{-1}$ . Il termine che diverge più velocemente è il primo addendo del prodotto ed esso corrisponde a  $\Lambda^\mu(P, P)$ , gli altri hanno termini  $\Delta^{-1}$  in più che sono fattori di convergenza. I termini successivi di ordine più basso sono convergenti e corrispondono a  $\Lambda_c^\mu(p', p)$ .

Il vertice corretto è dato da

$$-iq_0\Gamma_{\text{cor}}^\mu(p', p) = -iq_0[\gamma^\mu(1 + q_0^2 L) + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] + o(q_0^3)$$

La parentesi tonda è la terza rinormalizzazione della carica elettrica

$$q = q_0(1 + q_0^2 L) + o(q_0^3) = \frac{q_0}{Z_1}$$

## 4.4 Applicazione

A questo punto manca la rinormalizzazione delle linee esterne (detta anche rinormalizzazione della funzione d'onda). Prima si vede come applicare quanto sviluppato.

**Riepilogo.** La funzione di auto-energia è

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m) + (\not{p} - m)\partial \not{p}\Sigma(\not{p} = m) + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)$$

da cui

$$iq_0^2 S^{\text{cor}}(p) = \frac{iq_0^2 Z_2}{\not{p} - m}[1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq_0^2 Z_2 S^{\text{R}}(p)$$

Il propagatore rinormalizzato contiene quantità fisiche.

La funzione di polarizzazione del vuoto è

$$\Pi(q^2) = A'(0) + \Pi_c(q^2)$$

dove il primo addendo diverge logaritmicamente, il secondo è finito. Non si ha rinormalizzazione della massa a qualsiasi ordine. Pertanto

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}^{\text{cor}}(q) = iq_0^2 Z_3 \frac{-\eta_{\mu\nu}}{q^2} [1 - q_0^2 \Pi_c(q^2)] + o(q_0^4) = iq_0^2 Z_3 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(q)$$

Per il vertice elettromagnetico si ha

$$-iq_0 \Gamma_\mu^{\text{cor}}(p', p) = -\frac{iq}{Z_1} [\gamma_\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] + o(q_0^3) = -\frac{iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^{\text{R}}(p', p)$$

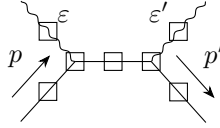
Per le linee esterne fermioniche si ha

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

Mentre per le linee fotoniche esterne si ottiene

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon_\mu$$

**Diagramma scheletro.** Prendendo come prototipo l'effetto Compton, ovunque sono presenti diagrammi one-particle reducible si inserisce il quadrato



L'elemento di matrice corrispondente è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}') \sqrt{Z_2} \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_2} \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\nu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \sqrt{Z_3} \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Gamma_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Gamma_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu (-iq) \Gamma_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) (-iq) \Gamma_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \end{aligned}$$

La costante di accoppiamento misurata, cioè la carica, ha sempre la forma

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0$$

poiché ogni vertice è sempre costituito da due linee fermioniche ed una fotonica. Nel diagramma scheletro non sono più presenti termini divergenti, né parametri non misurabili, bare. Tale ampiezza ha una forma simile all'ampiezza di Feynman che si scriverebbe per il diagramma albero con i parametri bare. In questo caso, l'ampiezza è corretta all'ordine  $q_0^2$  e contiene tutti i diagrammi one-particle reducible. Si ricordi che dentro ogni termine rinormalizzato compare un fattore convergente da calcolare.

Quanto fatto vale per il secondo ordine e non si sa ancora nulla sugli ordini successivi. Inoltre, il diagramma one-particle irreducible dev'essere considerato e aggiunto all'ampiezza.

## 4.5 Identità di Ward

Un importante risultato è l'identità di Ward. Notando

$$0 = \partial_{p_\mu} 1 = \partial_{p_\mu} \left[ \frac{1}{\not{p} - m} (\not{p} - m) \right] = \left[ \partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} \right] (\not{p} - m) + \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu$$

la derivata rispetto  $p_\mu$  del propagatore del fermione è

$$\partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} = - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m}$$

da cui l'identità di Ward

$$\Sigma(p) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma(p)$$

essa è vera ad ogni ordine. Il termine  $\Lambda^\mu(p, p)$  corrisponde ad un fotone con  $q = 0$ . Pertanto, si può ottenere il diagramma della correzione al vertice a partire da quello dell'auto-energia inserendo un fotone ad energia nulla nel propagatore del fermione



Si vede un'altra dimostrazione. Si consideri

$$\begin{aligned} (p' - p)_\mu i\Lambda^\mu(p', p) &= (p' - p)_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\beta \frac{\eta_{\alpha\beta}}{k^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} (\not{p}' - \not{p}) \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} - \not{k} - m} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} [(\not{p}' - \not{k} - m) - (\not{p} - \not{k} - m)] \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} - \not{k} - m} \\ &= i[\Sigma(p') - \Sigma(p)] \end{aligned}$$

Dunque

$$q_0^2 (p' - p)_\mu \Lambda^\mu(p', p) = q_0^2 [\Sigma(p') - \Sigma(p)] \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma, \quad p' \rightarrow p$$

Si studia una conseguenza per le costanti di rinormalizzazione  $Z$ . Si consideri l'identità di Ward posta tra due spinori

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \partial_{p_\mu} \Sigma u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) L \gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

ricordando che  $\Lambda_c$  è nullo tra spinori. Tenendo presente la struttura della funzione di auto-energia

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0)B + (\not{p} - m_0)\Sigma_c(p)$$

si ottiene

$$\partial_{p_\mu} \Sigma = B \gamma^\mu$$

Confrontando questa espressione con quella dall'identità di Ward si ha

$$B = L, \quad Z_2 = (1 - q_0^2 B) + o(q_0^2), \quad Z_1 = \frac{1}{1 + q_0^2 L} + o(q_0^{-2}) = 1 - q_0^2 L + o(q_0^2) \implies Z_1 = Z_2$$

questo vale a tutti gli ordini. Pertanto, la carica si normalizza solamente con

$$q = \sqrt{Z_3} q_0$$

**Naturalzza.** Si considerino i tre diagrammi divergenti. Nel loop virtuale della polarizzazione del vuoto, non si creano solo fermioni, ma qualsiasi particella che interagisce con il campo elettromagnetico. A differenza di questo diagramma, le costanti di rinormalizzazione per l'auto-energia e la correzione al vertice contengono le masse delle particelle iniziale e finale. La differenza tra la carica del protone e dell'elettrone è al più<sup>3</sup>

$$\frac{\Delta q}{q_e} \sim 10^{-21}$$

<sup>3</sup>Si veda <https://arxiv.org/abs/1102.2766>.

Questo vale per ogni particella. Infatti, l'auto-energia e la correzione al vertice si rinormalizzano con  $Z$  diverse in base alla particella, ma solamente per la polarizzazione del vuoto la rinormalizzazione è universale. Se  $Z_1 \neq Z_2$ , diversi parametri iniziali nelle lagrangiane di partenza dovrebbero arrivare a medesimi risultati tramite costanti di rinormalizzazione diverse. Questa cosa è ritenuta innaturale. Tuttavia, il problema non si pone in questo caso, poiché la carica si rinormalizza solamente con  $Z_3$ . A questo fatto si collega la naturalezza di una teoria o di un modello: risulta innaturale avere una teoria che prevede l'aggiustamento fine di tanti parametri per ottenere un risultato sperimentale cercato.

## 4.6 Linee esterne

### 4.6.1 Fermioni

Quando si è studiata la rinormalizzazione della massa, si è partiti dal parametro bare  $m_0$  e si è calcolata la correzione all'ordine  $q_0^2$ . Per la rinormalizzazione delle linee esterne si utilizza una tecnica diversa, la tecnica dei controtermini di massa. Si pone un problema da risolvere. Si è introdotto lo spegnimento adiabatico perché nella descrizione di interazione, quando l'hamiltoniana di interazione tende ad annullarsi, gli stati tendono ad essere costanti; il limite degli stati all'infinito utilizzato nella matrice  $S$  di scattering è perfettamente definito, ma la particella bare non è misurabile. Nel tragitto dall'infinito al luogo di interazione, la particella bare si riveste ed interagisce brevemente, poi si dirige nuovamente all'infinito ritornando bare. Sono presenti due scale temporali. Questa considerazione è da tenere presente quando si rinormalizzano le linee esterne. La linea entrante (o uscente) nel processo non può essere la particella bare  $u(\mathbf{p}, m_0)$ , ma è la particella fisica  $u(\mathbf{p}, m)$ . Bisogna capire come passare da una all'altra. Si introduce la tecnica dei controtermini.

Si scrive la lagrangiana libera esplicitando la massa fisica

$$\mathcal{L} = : \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi : + \delta m : \bar{\psi}\psi : , \quad m = m_0 + \delta m$$

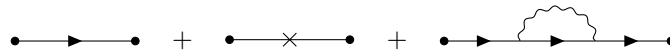
In questo modo, il primo addendo è la lagrangiana libera con la massa fisica, mentre il secondo termine è il contro-termine di massa che viene aggiunto ad un eventuale termine di interazione. Dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = : \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi : + [\delta m : \bar{\psi}\psi : - q_0 : \bar{\psi} A \psi :]$$

Tuttavia, la differenza  $\delta m$  tra la massa bare e fisica è ignota. In questa teoria, il propagatore imperturbato è

$$\frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i \delta m \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m}$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



Si utilizza una croce per il contro-termine di massa poiché il prodotto normale  $: \bar{\psi}\psi :$  distrugge e crea un fermione nello stesso punto. Il contro-termine è di ordine  $q_0^2$ , mentre l'integrazione con il campo elettromagnetico è di ordine  $q_0$ .

In questo modo il parametro bare  $m_0$  non appare.

Dunque, il propagatore imperturbato è

$$\begin{aligned} iS &\rightarrow i \left[ \frac{1}{\not{p} - m} - \frac{1}{\not{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\not{p} - m} \right] = \frac{i}{\not{p} - m} \left[ 1 - (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\not{p} - m} \right] \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \left[ 1 + \frac{\delta m + q_0^2 \Sigma(p)}{\not{p} - m} \right]^{-1} + o(q^2) = \frac{i}{\not{p} - m + \delta m + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q^2) \end{aligned}$$

Visto che  $m$  è già la massa fisica, non dev'essere presente alcuna rinormalizzazione della massa. Pertanto

$$\delta m + q_0^2 \Sigma(p) = 0 \implies \delta m = -q_0^2 \Sigma(p = m)$$

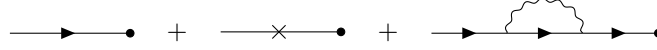
cioè quanto già trovato in precedenza per la rinormalizzazione della massa.



**Linea esterna di un fermione.** Si utilizza la tecnica dei controtermini. La linea esterna (entrante) diventa

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m} i\delta m u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \left[ 1 - \frac{1}{\not{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \right] u(\mathbf{p})$$

i diagrammi corrispondenti sono



Si sviluppa la funzione di auto-energia  $\Sigma$  per avere

$$\frac{q_0^2}{\not{p} - m} \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\not{p} - m} [-\delta m + q_0^2 (\not{p} - m) B + q_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p)] u(\mathbf{p})$$

L'ultimo addendo contiene si annulla quadraticamente in  $\not{p} - m$  per  $\not{p} \rightarrow m$  e visto che  $u(\mathbf{p})$  è un fermione reale, si ha contributo nullo. D'altra parte, nel limite il secondo addendo è indefinito

$$\frac{B}{\not{p} - m} (\not{p} - m) u(\mathbf{p}) \sim \frac{0}{0}$$

poiché  $u(\mathbf{p})$  soddisfa l'equazione di Dirac.

## Lezione 7

lun 04 dic  
2023 10:30

Per risolvere il problema si utilizza l'ipotesi adiabatica: si considerano una scala temporale di rivestimento e una di interazione degli stati iniziale e finale. Si immagina che la carica elettrica sia una funzione del tempo

$$e_0(t) = e_0 f(t)$$

così da ottenere un limite definito

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} S_{fi}$$

Questo è possibile nella descrizione di interazione perché gli stati evolvono con l'hamiltoniana di interazione e all'infinito essa tende a zero. Si sceglie la funzione  $f(t)$  che si annulli all'infinito (e quindi pure l'hamiltoniana di interazione) ed abbia un valore apprezzabilmente vicino a uno in un intervallo  $[-T, T]$ . Ad un certo tempo  $-T$ , la particella bare si riveste e ad un tempo  $T$  ritorna bare. Si ha un'altra scala temporale  $[-t, t]$  con  $t \ll T$  in cui avviene l'interazione.

Risulta utile studiare la trasformata di Fourier  $\tilde{f}(E)$ . Se  $f(t)$  fosse costante, la sua trasformata è una funzione delta di Dirac. La forma della funzione  $f(t)$  è irrilevante, ma importano solo le scale. Si può immaginare che la funzione sia una gaussiana con picco pari ad 1 e la larghezza della sua trasformata sia dell'ordine  $T^{-1}$ . Pertanto

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} dE \tilde{f}(E) e^{-iEt} = \int dE \tilde{f}(E) e^{-iq^\mu x_\mu}$$

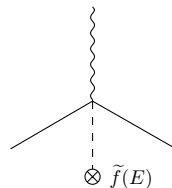
dove si considera un quadri-vettore  $q^\mu = (E, \mathbf{0})$ . Si normalizza la funzione

$$f(0) = \int dE \tilde{f}(E) = 1$$

La parte di lagrangiana di interazione dovuta alla corrente del campo di Dirac è data da

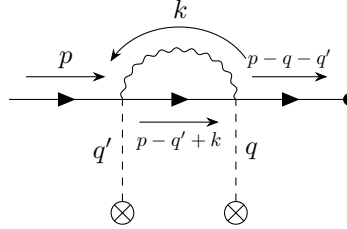
$$: -q_0 f(t) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A^\mu(x) \psi(x) :$$

cioè un vertice elettromagnetico ed una nuova interazione con  $\tilde{f}(E)$



Il quadri-vettore  $q^\mu$  rompe l'invariante di traslazione temporale poiché ha solamente la componente temporale. Questa situazione è simile all'aggiunta di un campo esterno che rompe l'invarianza per traslazione spaziale. Il vertice non conserva l'energia.

Si modifica la teoria sostituendo ogni vertice con quello sopra. Il termine indeterminato corrisponde al diagramma dell'auto-energia



Nel limite in cui  $q, q' \rightarrow 0$  si ottiene il diagramma originario. La prima linea di destra corrisponde al propagatore di un fermione

$$S_F(p - q - q')$$

mentre nella linea centrale si ha la funzione di auto-energia

$$\Sigma(p - q')$$

Unendo tutto quanto, si riscrive la linea esterna come

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}) &\rightarrow \left[ 1 - \int dE dE' \tilde{f}(E) \tilde{f}(E') \frac{q_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m} (\not{p} - \not{q}' - m) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \left[ 1 - \int dE dE' \tilde{f}(E) \tilde{f}(E') \frac{q_0^2 B}{\not{p} - (\not{q}' + \not{q}) - m} \left( (\not{p} - m) - \frac{1}{2}(\not{q}' + \not{q}) \right) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 B \right] u(\mathbf{p}) = \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Alla prima riga l'integrale è simmetrico per scambio  $q \leftrightarrow q'$  tranne per l'ultima parentesi. Si riscrive  $q'$  in parte simmetrica ed anti-simmetrica

$$q' = \frac{q' + q}{2} + \frac{q' - q}{2}$$

Visto che l'integrale è su tutto lo spazio, la parte anti-simmetrica fornisce un contributo nullo. Alla seconda riga, separando  $\not{p} - m$  in due metà, una dà zero con  $u(\mathbf{p})$ , l'altra si somma a  $q' + q$  e semplifica il denominatore. Ricordando la normalizzazione, si ottiene la terza riga.

Non compare più la funzione  $f(t)$  né la sua trasformata  $\tilde{f}(E)$ . Il limite  $q, q' \rightarrow 0$  riporta alla forma corretta dell'elettrodinamica quantistica: non compare più il vertice modificato.

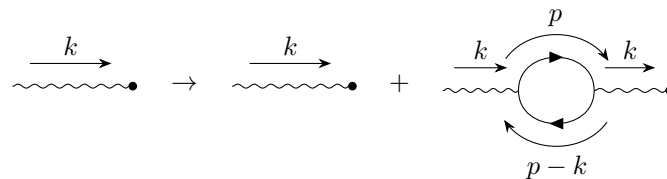
La stessa discussione vale per un fermione che esce.

#### 4.6.2 Fotoni

Si consideri un fotone reale di momento  $k$ . La linea esterna diventa

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) + iD_{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \varepsilon_\beta(\mathbf{k})$$

i cui diagrammi sono



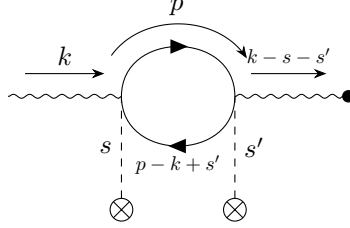
In questo caso non si ha necessità di introdurre il contro-termine di massa poiché l'invarianza di gauge protegge dalla rinormalizzazione. Sapendo che

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

segue

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) &\rightarrow \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{k^2} i q_0^2 [-\eta_{\alpha\beta} A(k^2)] \varepsilon^\beta(\mathbf{k}) \\ &= \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \left[ 1 - \frac{q_0^2 k^2 A'(0)}{k^2} - \frac{q_0^2 k^2 \Pi_c(k^2)}{k^2} \right], \quad \Pi_c(0) = 0\end{aligned}$$

Alla seconda riga si è inserito lo sviluppo di  $A$  in potenze di  $k^2$ . Si introduce una nuova interazione tra il vertice e la corrente elettromagnetica simile a quella precedente



La prima linea di destra è il propagatore  $D_F(k - s - s')$ . La polarizzazione centrale contiene la funzione di polarizzazione  $\Pi(s - k)$ . Pertanto

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \left[ 1 - \int dE dE' f(E) f(E') q_0^2 \frac{A'(0)(s - k)^2}{(k - s - s')^2} \right]$$

dove  $f$  è un'arbitraria funzione che è una nuova costante di accoppiamento dell'interazione. Si vuole fare il limite  $s, s' \rightarrow 0$ . La frazione è pari a

$$\frac{(s - k)^2}{(k - s - s')^2} = \frac{s^2 + k^2 - 2sk}{k^2 + (s + s')^2 - 2k(s + s')} = \frac{k^2 - 2sk + o(s, s')}{k^2 - 2k(s + s') + o(s, s')}$$

Essa è simmetrica per scambio di  $s \leftrightarrow s'$  tranne per l'addendo  $-2sk$ . Dunque si riscrive

$$s = \frac{s + s'}{2} + \frac{s - s'}{2}$$

Come prima il contributo dell'integrale della parte anti-simmetrica è nullo e si ha

$$\frac{(s - k)^2}{(k - s - s')^2} = \frac{k^2 - k(s + s') + o(s, s')}{k^2 - 2k(s + s') + o(s, s')} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k^2 \rightarrow 0$$

si fa il limite  $k^2 \rightarrow 0$  poiché il fotone è reale. A questo punto il limite  $s, s' \rightarrow 0$  è ben definito e si ottiene la teoria originaria. Pertanto, la rinormalizzazione della linea fotonica è

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon^\mu(\mathbf{k})$$

Lo stesso discorso vale per la rinormalizzazione della linea esterna data da un campo esterno.

## 4.7 Riepilogo

Il propagatore del fermione si rinormalizza come

$$i q_0^2 Z_2 S^R = i q_0^2 \sqrt{Z_2} S^R \sqrt{Z_2}$$

Il propagatore del fotone si rinormalizza come

$$i q_0^2 Z_3 D^R = i q_0^2 \sqrt{Z_3} D^R \sqrt{Z_3}$$

Le linee esterne fermioniche

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

mentre le linee fotoniche

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon^\mu$$

Il vertice si rinormalizza come

$$\frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^R$$

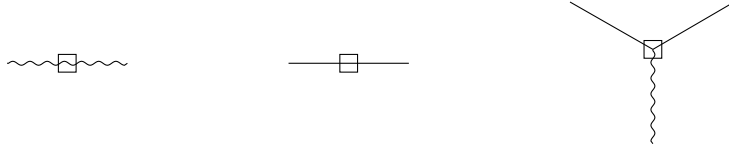
Un vertice elettromagnetico ha sempre due linee fermioniche ed una fotonica. La costante di accoppiamento con tutte le correzioni è

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0 = \sqrt{Z_3} q_0$$

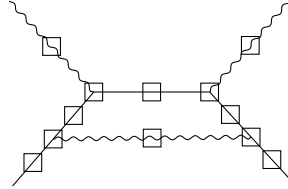
Il fatto che il rapporto è unitario si ricollega alla naturalezza della teoria.

## 5 Ordini superiori

Finora si è definita la somma dei diagrammi one-particle reducible i quali sono stati inseriti in un diagramma scheletro



Le correzioni al secondo ordine  $q_0^2$ , i diagrammi one-particle reducible portano a tre costanti di rinormalizzazione con cui si rinormalizzano la carica e la massa. Non tutte le correzioni sono di questo tipo poiché esistono anche i diagrammi one-particle irreducible. Per lo scattering Compton, l'unico tale diagramma converge. Non è ovvio che un diagramma simile sia convergente ad ogni ordine. Ad esempio, inserendo nel diagramma convergente per l'effetto Compton una polarizzazione del vuoto nel fotone scambiato, si ottiene un diagramma divergente poiché contiene un sotto-diagramma divergente (cioè la polarizzazione). Ci si chiede se il diagramma scheletro del diagramma one-particle irreducible continui a convergere.



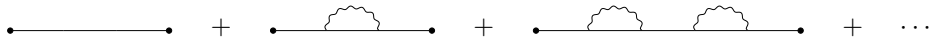
### 5.1 Diagrammi one-particle reducible

Si studiano tutti i diagrammi one-particle reducible.

**Propagatore del fermione.** Si considerino tutti i diagrammi di auto-energia del fermione

$$iS \rightarrow iS + iS i q_0^2 \Sigma(p) iS + iS i q_0^2 \Sigma(p) iS i q_0^2 \Sigma(p) iS + \dots = \frac{i}{(\not{p} - m_0) + q_0^2 \Sigma(p)}$$

dove si è applicata la formula per  $(A + B)^{-1}$ . I diagrammi corrispondenti sono



In questo caso la formula sopra è esatta. Si sono risommati tutti i grafici one-particle reducible che contribuiscono alla rinormalizzazione del propagatore del fermione. Dentro la funzione di auto-energia  $\Sigma$  sono presenti i diagrammi da calcolare (fino ad un certo ordine) con un contributo divergente e ed uno convergente. A questo punto non si sa se esistono nuove divergenze oltre alle tre studiate. Le considerazioni fatte in precedenza sullo sviluppo della funzione di auto-energia  $\Sigma$  valgono ancora.

In precedenza, si è trovato

$$i q_0^2 S \rightarrow \frac{i q_0^2}{(\not{p} - m)(1 + q_0^2 B) + q_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p)}, \quad q = \frac{q_0}{\sqrt{1 + q_0^2 B}} = \sqrt{Z_2} q_0$$

Queste due formule sono esatte e valgono ad ogni ordine. Gli ordini superiori vengono inclusi nel termine  $\Sigma_c$  e per  $\not{p} = m$  si ha zero.

La relazione fondamentale è

$$iq_0^2 S \rightarrow \frac{iq^2}{(\not{p} - m) + q^2(\not{p} - m)\Sigma_c}$$

in cui appare la carica e la massa rinormalizzate, e tutti i diagrammi one-particle irreducible convergenti all'interno di  $\Sigma_c$ .

**Propagatore del fotone.** Si risommano tutti i diagrammi one-particle reducible che correggono il propagatore del fotone

Come prima, le formule trovate al secondo ordine  $q_0^2$ , sono esatte per la somma di tutti gli ordini. Quindi

$$iD_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)}, \quad A(0) = 0$$

Ad ogni ordine non si ha rinormalizzazione additiva della massa del fotone. Inoltre

$$iq_0^2 D_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-iq^2 \eta_{\alpha\beta}}{k^2 + q^2 \Pi_c(k^2)}$$

Anche in questo caso si calcolano tutti i diagrammi nel termine  $\Pi_c$  all'ordine a cui si decide.

**Vertice elettromagnetico.** Per il vertice si aggiungono fotoni nel mezzo e i diagrammi sono one-particle irreducible. In modo esatto vale

$$-iq_0 \gamma^\mu \rightarrow -iq[\gamma^\mu + q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)]$$

Per calcolare un processo all'ordine  $n$  bisogna disegnare tutti i diagrammi scheletro con  $n$  vertici. Ogni diagramma contiene propagatori e linee esterne rinormalizzati all'ordine  $q^{2n}$ . Bisogna capire se tali diagrammi convergono.

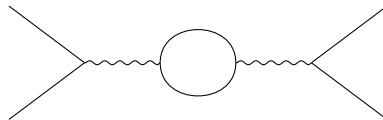
## Lezione 8

### 5.2 Diagrammi primitivamente divergenti

mar 05 dic  
2023 10:30

Si veda Peskin, cap. 10. Si studia la struttura di possibili nuove divergenze che appaiono agli ordini superiori.

Solo all'ordine  $q_0^2$ , la divergenza superficiale è una sovrastima della divergenza di un diagramma. Ad ordini superiori, questo non vale più. Ad esempio, il diagramma seguente ha una divergenza superficiale di  $D = -2$ , ma in verità diverge



In questo caso, il motivo è la presenza di un sotto-diagramma divergente, cioè la polarizzazione del vuoto. Un sotto-diagramma è un qualunque diagramma che si può ottenere da un altro diagramma tagliando un numero arbitrario di linee. Un altro esempio di grafico divergente, ma con grado superficiale negativo è il grafico dell'effetto Compton con la correzione di auto-energia la propagatore del fermione.

La separazione in base alla qualità di particle reducible ha permesso già uno studio della struttura delle divergenze. Si introducono i diagrammi primitivamente divergenti: un tale

diagramma non ha sotto-diagrammi divergenti e, tagliando una linea, diventa convergente. In questo caso, tagliare una linea significa che l'integrale di loop è risolto da una delta che equivale a considerare un momento fissato.

Risulta intuitivo che tutte le divergenze derivino da divergenze primitive. I tre diagrammi divergenti visti finora (polarizzazione, auto-energia e correzione al vertice) sono tutti primitivamente divergenti.

Il grado di divergenza superficiale è la differenza di potenze del momento a numeratore e denominatore

$$\omega = n - m$$

Se è positivo allora diverge, se negativo converge e se nullo diverge logaritmicamente. Si ha sempre un integrale del tipo

$$\int \frac{d^4 p}{I_F - 2I_B}$$

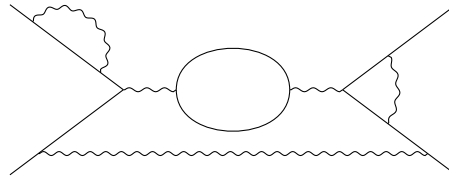
dove  $I$  indica il numero di linee interne che sono fermioniche  $F$  o bosoniche  $B$ . Ogni diagramma è composto da vertici  $V$ , linee interne  $I_F$  e  $I_B$ , linee esterne  $E_F$  e  $E_B$ . Le quantità dimensionali associate alle componenti precedenti non sono indipendenti perché ad ogni vertice si ha la conservazione del quadri-momento. Dunque, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4(I_F + I_B) - 4(V - 1) - I_F - 2I_B$$

Il primo addendo (la parentesi) rispecchia la misura che deriva da ogni integrale dei propagatori. Il secondo addendo corrisponde alla conservazione del quadri-momento ad ogni vertice, mentre il  $-1$  deriva dalla conservazione del momento totale, ma essa fissa linee esterne e non gli integrali. Infine, gli ultimi due addendi sono i denominatori dei propagatori  $(\not{p} - m)^{-1}$  e  $k^{-2}$ . Il numero di quantità dimensionali non fissate dalle delta interne è pari al numero di loop

$$N_L = I_B + I_F - (V - 1)$$

**Esempio.** Si consideri il seguente diagramma



Le linee interne fermioniche sono  $I_F = 8$ , quelle bosoniche sono  $I_B = 5$ . I vertici sono  $V = 10$ . Pertanto i loop sono 4. Si noti che il fotone inferiore è anch'esso parte di un loop.

Il numero di vertici che non emettono fotoni reali è

$$V - E_B = 2I_B$$

poiché essi sono collegati a due a due con linee fotoniche interne. Le linee fermioniche esterne sono pari. Una linea fermionica esterna tocca un solo vertice, mentre una linea fermionica interna tocca due vertici. Quindi

$$E_F = V, \quad 2I_F = V \implies 2I_F + E_F = 2V \implies I_F = V - \frac{1}{2}E_F$$



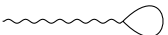


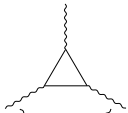
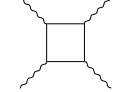
Dunque, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4 \left[ \frac{3}{2}V - \frac{1}{2}E_B - \frac{1}{2}E_F \right] - 4(V - 1) - V + \frac{1}{2}E_F - V + E_B = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F$$

Per i grafici primitivamente divergenti, il grado superficiale non dipende dal numero di vertici né dal numero di linee interne. Inoltre, tutti i diagrammi che rappresentano processi due a due ( $2 \rightarrow 2$ ) sono convergenti  $\omega = -1$ .

Questa topologia vale per l'elettrodinamica quantistica. Per l'elettrodinamica scalare la topologia è diversa poiché un tipo di vertice è il diagramma seagull.

**Riassunto.** I diagrammi primitivamente divergenti sono

| $E_B$ | $E_F$ | $\omega$ | Diagramma   | $E_B$ | $E_F$ | $\omega$ | Diagramma   |
|-------|-------|----------|---|-------|-------|----------|---|
| 0     | 0     | 4        |  | 0     | 2     | 1        |  |
| 1     | 0     | 3        |  | 1     | 2     | 0        |  |
| 2     | 0     | 2        |  |       |       |          |   |
| 3     | 0     | 1        |  |       |       |          |   |
| 4     | 0     | 0        |  |       |       |          |   |

Il primo diagramma divergente, ma non primitivamente ed è un esempio senza linee esterne: esso fornisce una correzione infinita all'energia del vuoto e non ce ne si occupa. Tale diagramma non si può ignorare in relatività generale poiché una densità di energia infinita del vuoto ha un effetto fondamentale. Il secondo diagramma è il tadpole che è nullo per il teorema di Furry. In ogni caso, per il teorema di Wick tale termine non si può ottenere poiché non si fanno contrazioni all'interno di un prodotto normale. Il quarto diagramma è nullo per il teorema di Furry. Il quinto diagramma è il diagramma luce-luce e la sua divergenza superficiale è logaritmica; successivamente si mostra essere convergente per invarianza di gauge.

Nella seconda tabella, dove si hanno linee esterne fermioniche, aumentando il numero di linee esterne, i diagrammi convergono sempre di più e non si hanno nuove divergenze. I diagrammi sopra sono divergenti ed essi ridefiniscono i parametri bare della lagrangiana libera. Pertanto, il dubbio se agli ordini superiori il diagramma scheletro — che consiste nel porre le correzioni dentro i parametri fisici ed utilizzare i propagatori rinormalizzati con carica e massa fisiche — potesse portare a nuove divergenze è risolto, poiché i diagrammi sopra sono gli unici diagrammi divergenti. Le uniche quantità divergenti sono le costanti di rinormalizzazione  $Z_i$  e la rinormalizzazione additiva della massa  $\delta m$ .

Per la teoria di Fermi la situazione è diversa in quanto il grado di divergenza superficiale contiene anche il numero di linee interne, quindi ad ogni ordine superiore la divergenza peggiora.

Il procedimento da seguire è partire da un diagramma a qualsiasi ordine, rimuovere le correzioni delle due tabelle sopra, cioè i diagrammi primitivamente divergenti. Lo scheletro di tale diagramma può convergere o divergere. Se converge si introducono nuovamente le correzioni senza problemi. Se diverge, allora è primitivamente divergente. Infatti, se così non fosse, allora tagliando le linee si arriva ad un diagramma convergente e il diagramma precedente è primitivamente divergente, ma avendo tolto tutte le correzioni sopra (cioè i diagrammi primitivamente divergenti), questo diagramma non potrebbe essere primitivamente divergente: si è arrivati ad una contraddizione. Pertanto, tutte le divergenze possono solamente provenire dai diagrammi primitivamente divergenti sopra.

La procedura di rinormalizzazione si riduce allo studio del terzo diagramma di sinistra e dei due di destra. Sebbene i diagrammi one-particle irreducible non aggiungano divergenze, bisogna comunque calcolarli ad un dato ordine dello sviluppo.

**Diagramma luce-luce.** Si consideri il diagramma luce-luce. La sua convergenza segue la stessa argomentazione vista per la funzione di polarizzazione del vuoto  $\Pi(k^2)$ . L'elemento di matrice di scattering è

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_i N_i \mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \varepsilon^{\mu_1} \varepsilon^{\mu_2} \varepsilon^{\mu_3} \varepsilon^{\mu_4}$$

La trasformazione di gauge non deve cambiare l'ampiezza di Feynman, altrimenti la sezione d'urto dipenderebbe dalla scelta di gauge. La relazione di invarianza di gauge del primo fotone

sviluppata attorno ad un momento piccolo è

$$(k_1)_{\mu_1} \mathcal{M}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = 0$$

e così per gli altri. L'ampiezza di Feynman è data da

$$\mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = A \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} + \dots$$

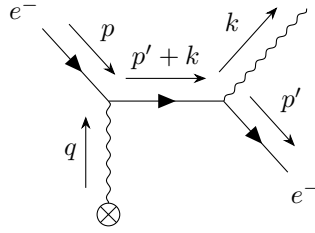
dove  $A$  è una quantità dimensionale ed i puntini indicano tutte le combinazioni possibili della metrica. Applicando l'invarianza di gauge si ha

$$0 = (k_1)_{\mu_1} \mathcal{M}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = A k_1^{\mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} + (\propto k^2) \implies A = 0$$

Il termine  $A$  dev'essere nullo, mentre i termini superiori sono nulli perché si hanno fotoni reali  $k^2 = 0$ . Lo sviluppo dell'ampiezza parte con la derivata prima e così si ha una potenza in più al denominatore: il diagramma converge.

## 6 Divergenza infrarossa

Si è vista una divergenza infrarossa quando si è studiata la bremsstrahlung. Si studiano i grafici da cui può scaturire una divergenza. Si consideri l'emissione di un fotone



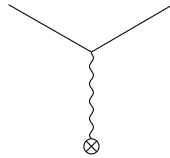
La sezione d'urto differenziale nell'approssimazione di fotone soffic è

$$d_\Omega \sigma = d_\Omega \sigma|_{\text{elas}} dP, \quad dP = -\frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3 k}{\omega} \left[ \frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \sim \ln \omega$$

Essa diverge nell'infrarosso. Tuttavia, non si stanno considerando tutti i diagrammi dell'ordine di quello sopra, come ad esempio la correzione al vertice. Questi, nel limite in cui il fotone virtuale abbia momento on-shell  $q^2 = 0$ , potrebbe finire sul polo del propagatore del fotone e cancellare la divergenza.

In precedenza, si è introdotto il concetto di sensibilità dell'apparato di misura dei fotoni. L'urto elastico sperimentale è l'insieme dell'urto elastico e di emissione di un fotone con energia  $\omega < \omega_{\text{riv}}$ . L'urto inelastico sperimentale è l'emissione di un fotone con energia  $\omega \geq \omega_{\text{riv}}$ . In questo caso la divergenza si trova nell'urto elastico sperimentale.

Bisogna considerare tutti i diagrammi che danno contributo ad un certo ordine della teoria delle perturbazioni. Al diagramma elastico



si aggiungono i diagrammi di correzione per ottenere un'ampiezza di Feynman pari a

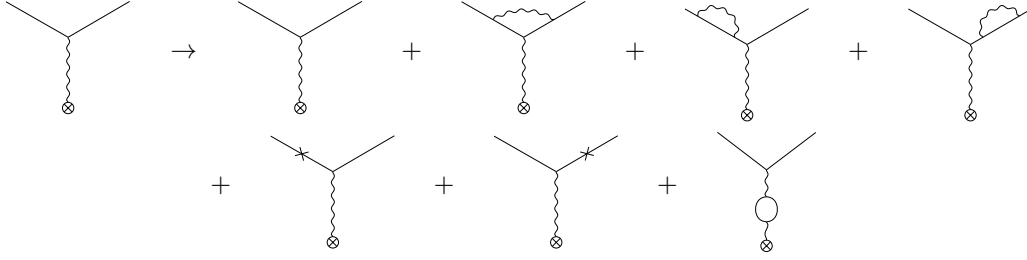
$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{elas}}|^2 (1 + \alpha V)$$

dove  $\alpha$  è una costante, mentre  $V$  è il contributo dei grafici virtuali, cioè non presentano un fotone reale.

Come per la divergenza ultravioletta, si osservano un diagramma isolando i termini divergenti. Si studiano gli stessi diagrammi cercando l'origine della divergenza infrarossa.



**Correzioni virtuali.** Le correzioni virtuali all'interazione con un campo esterno sono



La sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d_{\Omega}\sigma|_{\text{exp}} = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elas}}(1 + \alpha B + \beta R)$$

dove  $B$  sono le correzioni reali dovute alla bremsstrahlung con energia minore di quelle del rivelatore, mentre  $R$  sono le correzioni radiative, cioè i diagrammi sopra. Le rinormalizzazioni delle linee esterne (diagramma tre, quattro, cinque e sei) portano solo a correzioni divergenti nell'ultravioletto  $Z_2$  e non hanno correzioni finite (cioè  $\Sigma_c$ ). Pertanto, tali termini non sono i responsabili della divergenza infrarossa. Dunque, bisogna considerare solo due diagrammi (diagramma due e sette): i loro termini finiti (nell'ultravioletto),  $\Lambda_c$  e  $\Pi_c$ , potrebbero avere una divergenza infrarossa.

L'ampiezza di Feynman per tali due correzioni è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + iD_{\mu\nu}(k)iq_0^2 \Pi^{\nu\rho}(k)] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + q_0^2 D_{\mu\nu}(k) \eta^{\nu\rho} A(k^2)] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + q_0^2 D_{\mu\nu}(k) \eta^{\nu\rho} (k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2))] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[ \delta_\mu^\rho - q_0^2 \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A'(0) + \Pi_c(k^2) \right) \right] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[ 1 - q_0^2 \left( \frac{1}{2} A'(0) + \Pi_c(k^2) \right) \right] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) \right] [1 - q_0^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \sqrt{Z_2} \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} [\gamma^\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] \sqrt{Z_3} [1 - q_0^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) [\gamma^\mu + q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \gamma^\mu A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \gamma^\mu [-q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \\ &\quad + (-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') [q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \end{aligned}$$

Si noti che l'ampiezza si scrive per un diagramma a cui si aggiunge ogni modifica, e non come somma di tre diagrammi uno con una sola modifica ciascuno. La parentesi quadra deriva dalla polarizzazione del vuoto.

Per trovare una divergenza si rimuovono prima i termini di sicuro convergenti. Dalla polarizzazione del vuoto, si ricorda valere  $\Pi_c(0) = 0$ , pertanto tale termine non può contribuire alla divergenza infrarossa. Rimane solamente il termine  $\Lambda_c^\mu$ : il vertice potrebbe finire sul polo del propagatore del fotone.