

# Nuclear and Subnuclear Physics

30 aprile 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Particella elementare . . . . .	2
1.2	Unità naturali . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Richiami di relatività speciale</b>	<b>6</b>
2.1	Formalismo covariante . . . . .	6
2.2	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	8
2.2.1	Spaziotempo di Minkowski . . . . .	8
2.3	Cinematica relativistica . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Decadimenti</b>	<b>14</b>
3.1	Regola d'oro di Fermi . . . . .	16
3.2	Vita media e rapporto di ramificazione . . . . .	19
3.3	Stati instabili . . . . .	20
3.4	Diffusione – scattering . . . . .	22
3.4.1	Classi di diffusione . . . . .	24
3.5	Diffusione in meccanica quantistica . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Misure in fisica delle particelle</b>	<b>26</b>
4.1	Particelle cariche massive . . . . .	27
4.2	Particelle cariche leggere . . . . .	30
4.3	Scoperta dell'anti-materia . . . . .	31
4.4	Interazione di un fotone con la materia . . . . .	33
4.5	Rivelazione di fotoni . . . . .	35
4.6	Rivelatori di particelle . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Simmetrie</b>	<b>41</b>
5.1	Simmetrie continue . . . . .	43
5.2	Simmetrie discrete . . . . .	44
5.3	Parità . . . . .	46
5.4	C-parità . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Interazione elettromagnetica</b>	<b>52</b>
6.1	Trasformazioni di gauge . . . . .	53
6.2	Elettrodinamica quantistica . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Interazione forte</b>	<b>61</b>
7.1	Cromodinamica quantistica . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Interazione debole</b>	<b>69</b>
8.1	Leggi di conservazione e simmetria . . . . .	70
8.2	Violazione di parità . . . . .	71
8.3	Teoria V-A . . . . .	74

## 9 Interazione elettrodebole

75

## Lezione 1

lun 27 feb  
2023 13:30

## 1 Introduzione

**Introduzione.** La fisica delle particelle si basa sulle teorie quantistiche dei campi che permettono di unificare la relatività speciale e la meccanica quantistica. Tuttavia, queste teorie non sono ancora disponibili. Si tratta la fisica delle particelle tramite la relatività speciale e la meccanica quantistica non relativistica separatamente (sebbene siano presenti delle eccezioni come la nascita dell'anti-materia che proviene dall'unione delle due teorie e come la simmetria CPT).

Si va dalla fisica delle particelle (problema a due corpi) alla fisica nucleare (problema ad  $N$  corpi). Nel corso si studia indistintamente l'aspetto teorico e quello sperimentale.

**L'alba della fisica delle particelle.** La fisica delle particelle elementari è nata quando si è falsificato il modello del mezzo continuo. Cauchy diede la definizione rigorosa di un mezzo continuo. Intuitivamente, un mezzo materiale continuo ha un insieme di proprietà ed esse sono le stesse anche a scale arbitrariamente piccole.

Un mezzo continuo è un insieme di punti  $A \subset \mathbb{R}^3$  tale per cui  $\forall \mathbf{x} \in A$  si può definire una funzione  $\rho(\mathbf{x})$  che determina le proprietà del mezzo continuo. La massa inerziale del mezzo continuo di una regione  $B \subset A$  è

$$m = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x \in \mathbb{R}^+$$

Il mezzo si dice continuo se  $\rho(\mathbf{x})$  è una funzione continua in  $A$ . Questa è la definizione data da Cauchy. Da questa deriva la definizione di limite

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x}' \in U_\delta(\mathbf{x}) \implies |\rho(\mathbf{x}') - \rho(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

dove  $U_\delta$  è un intorno. La fisica delle particelle nasce quando questa definizione è falsificata. Infatti, se  $\delta \sim 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ , la disuguaglianza viene meno. Storicamente, ci si è resi conto che a tali distanze i mezzi non sono più continui e le leggi fisiche macroscopiche non valgono più (ad esempio Maxwell). Inoltre, le particelle sono relativistiche.

## 1.1 Particella elementare

**Fisica classica.** In fisica classica, non esiste la distinzione tra punto materiale e particella elementare. Un punto materiale (che coincide con la particella elementare in questo contesto) è un punto di  $\mathbb{R}^3$  a cui si può associare una massa inerziale  $m \in \mathbb{R}^+$  ed una carica elettrica  $q \in \mathbb{R}$ , la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. La traiettoria è una mappa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{x}(t)$  che mette in corrispondenza la posizione con il tempo.

**Meccanica relativistica.** In meccanica relativistica, la massa inerziale non è un invariante di Lorentz: si vuole caratterizzare il punto materiale con delle proprietà intrinseche. Dunque, in relatività, un punto materiale è un punto nello spazio-tempo di Minkowski  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$  a cui è associata una massa a riposo  $m \in \mathbb{R}^+$  (la massa solidale con il punto) che è un invariante di Lorentz (cioè è identica per qualunque osservatore inerziale) ed associata una carica elettrica  $q \in \mathbb{R}$  che è anch'essa un invariante di Lorentz, la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. La traiettoria è una mappa

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \tau \mapsto x^\mu(\tau)$$

cioè una corrispondenza tra la tetra-posizione in funzione del tempo proprio. Non si può usare la traiettoria classica perché parametrizzata in funzione del tempo. In meccanica relativistica classica, il punto materiale coincide ancora con una particella elementare.

**Meccanica quantistica.** Entrambe le definizioni precedenti non sono compatibili con la meccanica quantistica perché non è più presente il concetto di traiettoria (deterministica). Inoltre, il punto materiale è un punto in senso matematico: non ha estensione spaziale. Facendo una misura, bisogna determinare in modo infinitamente preciso la posizione,  $\Delta z \rightarrow 0$ . Tuttavia, deve valere la relazione di Heisenberg

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Quando si danno le condizioni al contorno di un punto materiale, non si possono più determinare le equazioni del moto. La definizione di punto è incompatibile con la meccanica quantistica. Bisogna cambiare la definizione, ma mantenere la stessa idea: una particella elementare è qualcosa di talmente piccolo che non presenta altri costituenti.

Si separa il concetto di particella elementare da quello di punto materiale. In meccanica quantistica, il punto materiale è l'oggetto che obbedisce l'equazione di Schrödinger per il punto materiale

$$i\hbar \partial_t \psi = \hat{H} \psi, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hat{V}(\mathbf{x})$$

Questa equazione ha un unico parametro intrinseco: la massa del punto materiale. Il potenziale è una caratteristica dello spazio. I sistemi che risolvono tale equazione non sono sistemi che descrivono le particelle elementari. In meccanica quantistica, la particella elementare è un punto materiale le cui soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono esprimibili *esclusivamente* come sovrapposizione di onde piane.

Si consideri un atomo di idrogeno in caduta libera. Esso soddisfa l'equazione sopra, ma non è una particella elementare. Nel riferimento del protone, il moto dell'elettrone è dato da

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{R(r)}{r} Y_l^m$$

che si può traslare per seguire il centro di massa in caduta libera. Tuttavia, questa non è una sovrapposizione di onde piane. Se non esiste alcun altro modo di descrivere un punto materiale (oltre alla sovrapposizione di onde piane), allora si ha una particella elementare. A priori non si può distinguere una particella vista come un punto materiale da un sistema composto.

## 1.2 Unità naturali

In quanto le masse sono piccole, le velocità sono relativistiche. Si utilizzano strumenti adatti alla relatività ristretta ed alla meccanica quantistica. Si vuole avere un formalismo che garantisca a priori che le formule sono compatibili con le due teorie citate.

Il sistema internazionale SI è un sistema metrico: si definiscono le quantità fisiche in termini di quantità fondamentali, come il tempo, lo spazio, la massa e la carica elettrica. Si sceglie un prototipo e si esprimono le quantità in termini di suoi multipli. Un esempio di prototipo utilizzato fino al 2019 è quello del chilogrammo. Modernamente, le quantità fondamentali sono definite in termini di costanti fisiche. Il secondo è dato da un certo numero di periodi di una transizione iperfine del cesio-133. Il metro è una frazione della distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un secondo. Dunque i prototipi sono dati da fenomeni naturali.

Il problema del sistema metrico è l'arbitrarietà del valore dei prototipi. Si consideri la legge di gravitazione universale

$$\mathbf{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}, \quad G = 6.674\,30(15) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Si ha un valore di proporzionalità  $G$  che non ha significato fisico, ma che serve a conciliare diverse grandezze fisiche. Lo stesso vale per la forza di Coulomb e la costante associata.

Per questo si utilizzano sistemi di misura razionalizzati: si utilizzano le leggi fisiche (di cui si è ragionevolmente certi) come vincoli e si eliminano quanti più prototipi possibili. Il primo sistema

razionalizzato è il sistema cgs elettrostatico: si misura lo spazio in centimetri, il tempo in secondi, la massa in grammi, ma la carica non ha prototipo. Si utilizza una legge fisica (quella di Coulomb) e si pone il termine di proporzionalità pari all'unità:

$$F = \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \implies \mathbf{F} = \frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{L}^2} \implies [F] = \text{dyn} \implies [q] = \text{dyn}^{\frac{1}{2}} \text{cm}$$

In fisica delle particelle si usano altre leggi fisiche. La prima è l'energia relativistica

$$E = \gamma mc^2, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

dove  $\gamma$  è il fattore di Lorentz: un numero puro. La costante di proporzionalità è il quadrato della velocità della luce  $c^2$ . Si impone

$$\boxed{c \equiv 1} \implies \mathbf{E} = \mathbf{M}$$

Dalla relazione di moto rettilineo uniforme si ha

$$x = ct \implies \mathbf{L} = \mathbf{T}$$

I prototipi che vengono meno sono quelli della massa e dello spazio. Dunque lo spazio ed il tempo hanno le stesse unità di misura: questo fa comodo oltre a porre sullo stesso piano le due dimensioni. La seconda legge utilizzata è l'energia di un fotone

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Il coefficiente di proporzionalità è la costante di Planck ridotta  $\hbar$  e si pone

$$\boxed{\hbar \equiv 1} \implies \mathbf{E} = \mathbf{T}^{-1}$$

A questo punto, si rimuove anche il prototipo della carica. Dalla legge di Coulomb si ha

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \rightsquigarrow \boxed{k \equiv \frac{1}{4\pi}}$$

da cui, considerando anche la velocità della luce, si ha

$$c = 1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \implies \epsilon_0 = 1 \wedge \mu_0 = 1$$

Questo sistema di scelte costituisce il sistema razionalizzato in uso nella fisica delle particelle elementari. Esso è detto sistema naturale di Heaviside-Lorentz (si noti che esistono diversi sistemi naturali).

Per definire tutte le unità fisiche basta definire l'energia tramite l'elettronvolt. Il tempo e lo spazio hanno dimensioni di reciproco dell'energia. La carica non ha dimensioni. Eliminare i prototipi implica una minore precisione in metrologia. Per ovviare a tale problema, si fanno i conti in unità naturali, ma si convertono i risultati nel sistema internazionale. Un altro problema del sistema naturale è la difficoltà a capire di cosa si stia parlando (energia, massa, momento) qualora manchi un contesto. Per ovviare a tale problema, si esprimono le quantità menzionate tramite notazioni esplicite diverse eV, eV/c<sup>2</sup>, eV/c.

## Lezione 2

Per operazioni semplici conviene sapere i valori delle costanti di proporzionalità

$$\hbar \approx 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s} \approx 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}, \quad \hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

Si noti che dal 2019 il valore della costante di Planck è fisso. Tramite l'analisi dimensionale si può passare dal sistema naturale (NU, natural units) al sistema internazionale e viceversa

$$\alpha_{\text{NU}} = \hbar^a c^b \alpha_{\text{SI}}$$

mar 28 feb  
2023 13:30

**Esempio.** Si converte la massa dell'elettrone

$$m_e = 511 \text{ keV } c^{-2} = \frac{511 \times 10^3 \text{ eV} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

**Esempio.** Si trova la lunghezza Compton del protone e dell'elettrone. Essa è la lunghezza d'onda di un fotone la cui energia coincide con la massa a riposo della particella considerata:

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

Si utilizza l'energia relativistica nel sistema internazionale. La massa a riposo di una particella corrisponde ad un'energia pari a  $E = mc^2$ . Un fotone con momento lineare  $p$  ha energia pari a  $E = pc$ . Unendo le due si ha  $p = mc$ . Dalla lunghezza d'onda di de Broglie si ottiene

$$\lambda = \frac{h}{p} \implies \lambda = \frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 1.32 \text{ fm}$$

In unità naturali si ha

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1 \implies \lambda = \frac{2\pi}{m}$$

Al posto di fare l'analisi dimensionale, si possono usare i valori calcolati in precedenza per convertire rapidamente da lunghezza ad energia:

$$\lambda_{\text{NU}} = \frac{\lambda_{\text{SI}}}{\hbar c} = \frac{1.32 \text{ fm}}{197 \times 10^6 \text{ eV fm}} = 6.7 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-1}$$

**Esempio.** Nel sistema di unità naturali, la massa di Planck è data da

$$M_P = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

La massa di Planck è la massa di una particella elementare il cui campo gravitazionale generato è confrontabile con il campo elettrico generato da una carica pari a 1. Per la massa di Planck, la forza gravitazionale non è più trascurabile rispetto alla forza elettrostatica: bisogna sviluppare una teoria che sia in accordo con la meccanica quantistica e la relatività generale, cosa che non è ancora disponibile. Appena si trattano particelle con massa vicina alla massa di Planck, le teorie moderne vengono meno e non si possono più conoscere le equazioni del moto. Gli effetti di gravità quantistica non sono più trascurabili rispetto agli effetti elettromagnetici. Per convertire la formula nel sistema internazionale si esegue l'analisi dimensionale

$$M_{\text{SI}} = \hbar^a c^b G^{-\frac{1}{2}} \implies M = \left[ \frac{\text{ML}^2}{\text{T}} \right]^a \left[ \frac{\text{L}}{\text{T}} \right]^b \left[ \frac{\text{L}^3}{\text{MT}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = M^{a+\frac{1}{2}} L^{2a+b-\frac{3}{2}} T^{-a-b+1}$$

Da ciò bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2} = 1 \\ 2a + b - \frac{3}{2} = 0 \\ -a - b + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto

$$M_{\text{SI}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 21.7 \text{ } \mu\text{g} \approx 2 \times 10^{23} \text{ eV} = 2 \times 10^{15} \text{ TeV}$$

Questa massa è enorme a livello microscopico. La massima energia a cui si riescono ad accelerare le particelle ad LHC è 14 TeV. Pertanto, per raggiungere energie confrontabili con la massa di Planck bisogna affidarsi a processi naturali come la dinamica dei buchi neri (ad esempio come la radiazione elettromagnetica di Hawking).

Modernamente, si è bloccati sulla conciliazione della meccanica quantistica con la relatività generale. Utilizzare le teorie quantistiche dei campi in relatività generale porta a delle incoerenze, la teoria non è rinormalizzabile. Ci sono due possibilità. La prima è costruire una teoria alternativa su base empirica; si è tentato di trovare fenomeni naturali che siano vicini alla scala di Planck, ma i risultati sono stati modesti; due esempi sono la radiazione di Hawking e l'inflazione nei primi istanti dell'universo che non rientra nel Modello Standard (magari indice di gravità quantistica). L'altra possibilità è stipulare la simultanea validità degli assiomi della relatività generale e della meccanica quantistica relativistica pensando che, probabilità, la somma dei due insiemi di assiomi riduce le teorie candidate al punto che l'unica rimasta è la teoria quantistica della gravitazione. Questo procedimento ha dato origine alle teorie di stringhe e di membrana. Si è in una fase di stallo perché l'insieme di assiomi fornisce un numero di vincoli insufficiente: la classe di teorie compatibili è enorme. Secondo (un teorema? di) Witten, le classi di teorie sono solo cinque, ma danno vita ad un grande numero di teorie concrete. La situazione sta progredendo grazie a nuovi dati sulla cosmologia primordiale  $\Lambda$ CDM.

## 2 Richiami di relatività speciale

### 2.1 Formalismo covariante

Il formalismo covariante permette di scrivere le leggi fisiche in modo che siano già compatibili con la relatività speciale (e generale, ma in questo corso si tratta solo la prima). I vettori devono rimanere fissi nello spazio per qualsiasi cambio di base e devono essere descritti tramite le regole di trasformazione delle loro componenti da un sistema di coordinate (una base) ad un altro. Cambiando la base, cambiano le componenti: per un vettore fisico classico, le coordinate variano in maniera opposta (contro-variano) rispetto i versori della base. Un vettore è una ennupla di coordinate che contro-variano rispetto un cambio di base.

In uno spazio  $\mathbb{R}^n$ , un vettore è la combinazione lineare

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \hat{e}_i = v^i \hat{e}_i$$

dove  $\{\hat{e}_i\}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ . Si utilizza la notazione di Einstein per la somma implicita: indici covarianti e contro-varianti ripetuti si intendono sommati. Dopo un cambio di base, i versori della nuova base sono dati da

$$\hat{e}'_j = F^i_j \hat{e}_i$$

Dunque, il vettore è

$$\mathbf{v} = v^i \hat{e}_i = v'^j \hat{e}'_j = v'^j F^i_j \hat{e}_i \implies v^i = F^i_j v'^j \implies v'^j = (F^{-1})^j_i v^i = B^j_i v^i$$

dove si pone  $F^{-1} \equiv B$ . Tali lettere, che indicano le trasformazioni, sono le iniziali di “forward” e “backward” (transformation). Quando si sostituisce  $\hat{e}'_j$  si utilizza ancora l'indice muto  $i$  per convenienza, ma l'implicazione successiva deriva dal fatto che due vettori coincidono quando hanno le stesse componenti. In forma matriciale si ha

$$[\hat{e}_1 \quad \cdots \quad \hat{e}_n] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = [\hat{e}_1 \quad \cdots \quad \hat{e}_n] F \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} = F^{-1} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

Questa scrittura è comoda perché negli spazi affini, in particolare negli spazi euclidei, le matrici del cambio di base sono invertibili.

I versori (le basi) di uno spazio vettoriale (uno spazio affine) si trasformano in modo covariante per cambi di base, cioè secondo  $F = B^{-1}$ . Le coordinate di un vettore si trasformano in modo contro-variante per cambi di base, cioè secondo  $F^{-1} = B$ . Un indice basso descrive

delle componenti covarianti. Un indice alto descrive quantità contro-varianti. Un vettore è la somma

$$\mathbf{v} = v^i \hat{e}_i$$

Le trasformazioni di Galileo e di Lorentz sono entrambe cambi di base.

**Classificazione.** Si possono classificare gli oggetti contro-covarianti:

- Gli scalari corrispondono alle quantità fisiche che non variano per un cambio di base. Talvolta vengono detti invarianti. Si noti che gli invarianti sono definiti a seconda delle trasformazioni: il tempo è uno scalare in fisica classica, ma non in fisica relativistica. Alcuni esempi sono la massa a riposo e la carica. La temperatura è data dalla velocità media delle particelle rispetto al centro di massa del corpo, dunque è prescritta nel riferimento solidale.
- Un vettore (contro-variante) è una ennupla reale che trasforma in modo contro-variante. Le coordinate di un vettore trasformano come

$$x'^i = B^i_j x^j$$

- Un tensore di rango  $(2, 0)$  è un insieme di  $n^2$  numeri reali che, per un cambio di base, trasforma come

$$T'^{kl} = B^k_i B^l_j T^{ij}$$

Un tensore di questo tipo si può rappresentare con una matrice (ma non è una matrice!).

In modo astratto, un tensore è un insieme di vettori e covettori legati dal prodotto tensoriale. Un vettore è un tensore di rango  $(1, 0)$ . Uno scalare è un tensore di rango  $(0, 0)$ .

**Oggetti covarianti.** Ci si chiede se esistono quantità fisiche che trasformano in modo covariante. Le nuove coordinate di un vettore sono combinazioni lineari delle vecchie coordinate

$$\mathbf{x}' = B\mathbf{x} \implies x'^j = B^j_i x^i$$

Per trovare i coefficienti che legano le due coordinate si utilizzano le derivate

$$B^j_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Le coordinate di un oggetto contro-variante si trasformano come

$$x'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i, \quad T'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} T^{ij}$$

Tutte le derivate di ordine dispari di un oggetto contro-variante trasformano in maniera covariante. L'esempio più importante è il gradiente  $\nabla f(\mathbf{x})$ . Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = F^i_j \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Un vettore covariante (covettore) è una ennupla reale che, per un cambio di base, trasforma come

$$a'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a_i$$

cioè come la base, in modo covariante. Un tensore di rango  $(0, 2)$  è un insieme di  $n^2$  numeri reali che trasforma come

$$T_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} T_{ij}$$

## Lezione 3

mer 01 mar  
2023 13:30

Il formalismo covariante è utile per cambi di base che dipendono dal tempo e dallo spazio che appaiono in relatività generale. In questo caso essi ne sono indipendenti quando si studia la relatività speciale.

### 2.2 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono cambi di base in uno spazio  $\mathbb{R}^4$  alle volte scritto  $\mathbb{R}^{3+1}$  per distinguere le dimensioni spaziali da quella temporale. Le coordinate di un punto sono

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

Si utilizzano le unità naturali. La più semplice trasformazione di Lorentz è un boost in direzione  $x$ . Vale  $x \equiv x'$ . Inoltre  $y \parallel y'$  e  $z \parallel z'$ . Le relazioni che legano le coordinate nei due riferimenti sono

$$x'^0 = t' = \gamma t - \gamma\beta x, \quad x'^1 = x' = \gamma x - \gamma\beta t, \quad x'^2 = y' = y, \quad x'^3 = z' = z$$

La forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Si evitano le notazioni matriciali perché complicano i calcoli rispetto la convenzione di Einstein

$$x'^\mu = A^\mu{}_\nu x^\nu$$

Per convenzione, in relatività speciale le lettere greche indicano indici tetra-dimensionali, le lettere latine indicano le tre componenti spaziali. La scrittura precedente descrive come un vettore che descrive la tetra-posizione sia un vettore contro-variante cioè trasforma opponendosi alla trasformazione delle basi.

Le trasformazioni di Lorentz coinvolgono boost, rotazioni e traslazioni. Esse costituiscono il gruppo di Poincaré. Si noti che un boost in direzione arbitraria è definito mantenendo gli assi equiversi, questo perché più boost successivi ruotano il sistema finale rispetto a quello iniziale. Il boost in direzione generica è

$$t' = \gamma t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}_\perp + \gamma(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{v}t), \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità relativa tra i due riferimenti. Bisogna porre attenzione perché questa scrittura mischia la notazione dello spazio di Minkowski (la scrittura della trasformazione di Lorentz) con la notazione dello spazio euclideo ( $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{x}_\perp$ ,  $\mathbf{x}_\parallel$ ). Le componenti parallele alla direzione del moto si mescolano con il tempo, mentre quelle perpendicolari rimangono inalterate: sono invarianti di Lorentz.

#### 2.2.1 Spaziotempo di Minkowski

Lo spaziotempo di Minkowski  $\mathcal{M}$  è lo spazio dei vettori applicati su  $\mathbb{R}^4$  in cui i cambi di base sono definiti dalle trasformazioni di Lorentz. I punti di  $\mathcal{M}$  sono gli eventi e i punti materiali hanno traiettorie funzioni del tempo proprio  $\tau$  cioè il tempo misurato dall'osservatore solidale al punto materiale. Questo spazio è analogo allo spazio euclideo.

**Teorema.** Nello spazio  $\mathcal{M}$  è possibile definire un tensore metrico

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



tale per cui la norma di un quadrivettore

$$\|a\|^2 = (a^\mu)^2 = a^\mu a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$$

risulta essere un invariante di Lorentz.

Si consideri il tetravettore dello spostamento infinitesimo di un punto materiale  $ds = dx^\mu$ . La sua norma è

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Un punto che si muove alla velocità della luce implica  $(ds)^2 = 0$ , ma da questo deriva che la velocità della luce è un invariante perché  $(ds)^2$  è uno scalare. Lo spostamento infinitesimo  $ds$  permette di calcolare la distanza. Il motivo dell'utilizzo dello spazio di Minkowski è l'automatica compatibilità con la teoria della relatività.

**Norma pseudo-euclidea di Minkowski.** Formalmente, la distanza è definita positiva. La norma di Minkowski non induce una tale distanza, per questo è detta norma pseudo-euclidea: la proprietà di definita positività è sostituita con la non degenerazione (le altre due proprietà sono la linearità della prima entrata e la simmetria, che danno vita ad una forma bilineare), questo distingue uno pseudo-prodotto interno dal prodotto interno vero e proprio. La norma di Minkowski può assumere valori positivi (eventi di tipo tempo, time-like), negativi (tipo spazio, space-like) e nulli (tipo luce, light-like). Eventi di tipo tempo e tipo luce possono essere connessi causalmente. Eventi di tipo spazio non possono essere connessi causalmente.

Il fatto che il tensore metrico sia diagonale rende semplice passare da un vettore ad un covettore. La metrica permette di alzare ed abbassare gli indici.

**Teorema.** Se  $a^\nu$  è un vettore contro-variante, allora il corrispondente vettore covariante ha componenti

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu = (a^0 \quad -a^1 \quad -a^2 \quad -a^3)$$

Questo non si può fare in relatività generale, non esiste una relazione globale, ma bisogna utilizzare il trasporto parallelo.

Lo spazio di Minkowski si può vedere come analogo dello spazio euclideo. Sebbene lo spazio di Minkowski non sia uno spazio metrico (la metrica, la distanza di Minkowski non è propriamente una metrica, ma una forma bilineare indefinita e non degenere), esso contiene sotto-varietà con metriche di Riemann che forniscono la geometria iperbolica. Nello spazio euclideo si ha un prodotto scalare che induce una norma che induce una distanza

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

Nello spazio di Minkowski si ha

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \|x^\mu\|^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)$$

**Postulati della relatività speciale.** Si utilizza il formalismo covariante per scrivere leggi fisiche automaticamente in accordo con la relatività speciale. La relatività speciale ha due postulati:

- Le leggi della fisica hanno la stessa forma funzionale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale.

Si vuole costruire un formalismo che soddisfi questi due postulati. Il secondo si è già risolto perché si è affermato che tutti i sistemi fisici evolvono nello spazio di Minkowski: sopra (quando si parla dello spostamento infinitesimo  $ds$ ) si è dimostrato che qualunque coppia di eventi è costruita in

maniera tale che la misura della velocità sia sempre minore di  $c$  e, se i due punti si muovono alla velocità della luce, allora tutti gli osservatori inerziali concordano sulla loro velocità. Lo spaziotempo di Minkowski verifica il secondo postulato. Formalmente bisognerebbe introdurre altre ipotesi come l'omogeneità, l'isotropia e la mancanza di memoria (memorylessness) dello spazio.

Il primo postulato equivale ad affermare che tutte le leggi fisiche devono essere relazioni tra tensori. In tale modo, la forma delle leggi rimane identica in ogni riferimento

$$f(s, x^\mu, T^{\mu\nu}) = 0 \iff f(s, x'^\mu, T'^{\mu\nu}) = 0$$

Una relazione tra tensori si può esprimere come un nuovo tensore. Da questo si nota

$$S^{\mu\nu\cdots} = 0 \implies S'^{\lambda\rho\cdots} A^\mu_\lambda A^\nu_\rho \cdots = 0 \implies S'^{\lambda\rho\cdots} = 0$$

Ad esempio, la forza di Lorentz si può scrivere come

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \implies f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

da cui si può vedere la validità del primo postulato osservando

$$S^\mu = f^\mu - qF^{\mu\nu}u_\nu = 0$$

### 2.3 Cinematica relativistica

Si costruiscono la cinematica e la dinamica relativistiche in maniera analoga alla fisica classica. Lo spostamento infinitesimo classico è

$$d\mathbf{x} = (dx, dy, dz)$$

Similmente, il quadri-spostamento è

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

In fisica classica, le traiettorie sono parametrizzate dal tempo perché universale. In relatività speciale, esse sono parametrizzate dal tempo proprio, cioè il tempo misurato nel riferimento solidale al punto materiale. Il tempo proprio è un invariante di Lorentz. Infatti, ponendosi nel riferimento solidale si ha

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (d\tau)^2 - 0 - 0 - 0 = (d\tau)^2$$

Fisicamente, il tempo proprio è il tempo misurato da qualsiasi osservatore solidale con il punto materiale. La definizione stessa prescinde dall'osservatore perché lo costringe ad essere solidale al punto.

## Lezione 4

**Velocità.** Definiti l'analogo della posizione e l'analogo del tempo, si può introdurre l'analogo della velocità classica  $\mathbf{v} = d_t\mathbf{x}$  tramite il concetto di quadri-velocità

$$u^\mu \equiv d_\tau x^\mu$$

Il formalismo covariante permette di sapere già che tale quantità è un vettore contro-variante perché si ha un quadrivettore contro-variante  $dx^\mu$  moltiplicato per un invariante di Lorentz  $d\tau^{-1}$ .

Si vede il significato fisico della quadri-velocità e la sua relazione con la velocità spaziale. Si consideri un boost lungo l'asse  $x$ . Dalle leggi di trasformazione dal riferimento solidale a qualsiasi altro, si ottiene

$$d_\tau t = \gamma(v) \implies \boxed{dt = \gamma(v) d\tau}$$

Questo è il teorema della dilatazione dei tempi. Esso permette di collegare la velocità spaziale con la quadri-velocità

$$d_\tau x^1 = d_t x^1 d_\tau t = \gamma(v) d_t x^1 = \gamma(v) v_x \implies u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$$

La quadri-velocità è il vettore tangente alla traiettoria nello spazio di Minkowski.

lun 06 mar  
2023 13:30

**Accelerazione.** In analogia con quanto fatto, si definisce la quadri-accelerazione

$$\mathbf{a} = d_t \mathbf{v} \implies a^\mu = d_\tau u^\mu = d_\tau^2 x^\mu$$

L'accelerazione causa una variazione del moto. La relazione tra l'accelerazione spaziale e la quadri-accelerazione è

$$a^\mu = \gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a})$$

Rispetto alla fisica classica, compare l'addendo  $\dot{\gamma} \mathbf{v}$ . Fornendo un'accelerazione, non solo si perturba il moto generando una velocità (in direzione diversa da quella già presente) tramite l'addendo  $\gamma \mathbf{a}$ , ma si aumenta il fattore di Lorentz, la velocità già presente tramite l'addendo  $\dot{\gamma} \mathbf{v}$ , aumentando così anche l'energia cinetica in direzione della velocità originaria.

**Quantità di moto.** Si definisce la prima quantità derivata. In fisica classica, la quantità di moto (o momento lineare) è  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . In relatività speciale si definisce il quadri-momento

$$\boxed{p^\mu = mu^\mu} = \gamma m(1, \mathbf{v})$$

dove  $m$  è la massa a riposo: affinché  $p^\mu$  sia un quadri-vettore, il fattore  $m$  dev'essere un'invariante di Lorentz.

**Forza.** La definizione classica di forza è  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Contro-intuitivamente, la generalizzazione relativistica non è  $f^\mu = ma^\mu$ . Infatti, la quadri-accelerazione  $a^\mu$  ha due addendi che contribuiscono ai modi con cui si trasferisce energia. Tali modi sono in numero maggiore rispetto alla fisica classica. Dato che in quest'ultima,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  descrive il modo in cui si trasferisce l'energia, sorge una incompatibilità tra le modalità di scambio dell'energia in fisica classica ed in relatività speciale. La corretta definizione di forza utilizza il teorema dell'impulso

$$\mathbf{F} = d_t \mathbf{p} \implies f^\mu = K^\mu = d_\tau p^\mu$$

La relazione tra la forza classica e quella relativistica è

$$f^\mu = d_\tau p^\mu = d_\tau t d_t p^\mu = \gamma d_t(\gamma m, \gamma m \mathbf{v})$$

**Principi della dinamica.** I primi due principi della dinamica newtoniana sono validi anche in meccanica relativistica. Il primo principio afferma che esiste una classe privilegiata di sistemi di riferimento (detti inerziali) che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Questo tipo di riferimento è stato inventato per offrire un ambiente in cui l'assenza di forze corrisponde all'assenza di perturbazione. Si ritrova questa stessa presupposizione in relatività speciale, ma non in relatività generale in cui si mette in discussione il concetto di sistema inerziale. In relatività speciale, il secondo principio va sostituito con una legge più generale tramite il teorema dell'impulso.

**Terzo principio della dinamica – conservazione del momento.** In relatività non vale il principio di azione, reazione. In fisica classica esso è equivalente alla conservazione del momento lineare. Tuttavia, la formulazione del terzo principio come azione-reazione non è compatibile con la relatività speciale: un corpo rigido non può *istantaneamente* generare una forza uguale e contraria a quella applicata. L'informazione ha una velocità massima di propagazione: in relatività non esistono corpi rigidi, cioè un insieme di punti per il quale, muovendone uno, si muovono tutti gli altri istantaneamente. Microscopicamente, in un corpo rigido le perturbazioni si propagano localmente come interazioni elettromagnetiche fino all'altra estremità del corpo generando un effetto complessivo di movimento. La conservazione della quantità di moto vale anche in relatività speciale senza dover utilizzare il corpo rigido. In fisica classica, la conservazione del momento si esprime come

$$p^{\text{tot}} = \sum_i p_i^{\text{in}} = \sum_i p_i^{\text{fin}}$$

cioè il momento totale è una costante del moto. Il fatto che questo sia equivalente al principio di azione, reazione lo si dimostra attraverso il corpo rigido. In relatività, non si può utilizzare il corpo rigido, pertanto si utilizza il principio di conservazione del quadri-momento. In un sistema di  $n$  particelle interagenti vale

$$\sum_{i=1}^n p_i^{\mu, \text{in}} = \sum_{i=1}^m p_i^{\mu, \text{fin}}$$

dove non è necessario che  $n = m$ . Il principio di conservazione del momento non è un assioma in meccanica classica, relativistica o quantistica, ma deriva dalla simmetria della situazione fisica. Noether dimostra che se una teoria fisica ammette rappresentazione lagrangiana e la teoria è invariante per traslazione, allora si ha conservazione del momento e dell'energia. Visto che tale proprietà vale in meccanica classica, meccanica quantistica non relativistica e meccanica relativistica, allora si è giustificati nello scrivere il principio di conservazione del quadri-momento.

**Energia.** La prima componente del quadri-momento è l'energia relativistica

$$p^0 = E = \gamma m$$

Il principio di conservazione del quadri-momento vale componente per componente. Per questo, la conservazione del momento nella prima componente è la conservazione dell'energia. Avendo delle interazioni tra delle particelle, pur senza sapere risolvere la dinamica di un sistema, si possono porre dei vincoli sulle quantità cinematiche imponendo la conservazione del momento.

**Singola particella.** Si studia la cinematica di una singola particella. Essa può evolvere in due modi: la particella si muove nello spazio-tempo oppure la particella decade in altre particelle. Si consideri il primo caso. L'energia relativistica e l'energia cinetica classica sono

$$E = p^0, \quad E = \frac{1}{2}mv^2$$

Si noti che queste sono le uniche quantità fisiche nella relatività e fisica classica rispettivamente. L'energia (relativistica e cinetica rispettivamente) è una proprietà che dipende dal moto della particella, ma è intrinseca ad essa: basta sapere la massa e la velocità. L'energia potenziale descrive potenzialmente quanta energia cinetica può ottenere una particella in virtù della sua posizione in una regione in cui sono presenti dei campi. Tramite il teorema di Poynting, il campo elettromagnetico cede energia ad una particella carica sotto forma di energia cinetica. Affinché si possa descrivere correttamente l'interazione di una particella con un campo, bisogna risolvere simultaneamente l'equazione della particella e l'equazione del campo.

La norma del quadri-momento è

$$p_\mu p^\mu = p^0 p_0 + p^i p_i = (p^0)^2 - (p^i)^2$$

Sapendo che essa è un invariante di Lorentz, si utilizza il riferimento più comodo: quello solidale. Pertanto

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 = m^2$$

Dunque, in ogni riferimento inerziale vale

$$\boxed{p_\mu p^\mu = m^2}$$

Dalle relazioni sopra si ottiene

$$m^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2 \implies E^2 = m^2 + p^2$$

Si consideri una particella con una velocità  $\mathbf{v}$ . Si trova la relazione tra la trasformazione di Lorentz per arrivare nel riferimento solidale con la particella e la velocità della particella. Si ha

$$p = \gamma m v \implies \boxed{v = \frac{p}{\gamma m} = \frac{p}{E}}$$

Inoltre, dalla prima componente del momento si ha

$$E = \gamma m \implies \boxed{\gamma = \frac{E}{m}}$$

Da queste formule si hanno due importanti risultati che evidenziano il ruolo privilegiato della luce. Per particelle massive,  $m \neq 0$ , si ha

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) = (\sqrt{m^2 + p^2}, \mathbf{p}), \quad v = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} < 1$$

In relatività, esistono anche le particelle massless,  $m = 0$ , per cui si ha

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) = (p, \mathbf{p}), \quad v = 1$$

Esse si muovono alla velocità della luce. Risulta essere fortuito avere messo la luce in una posizione di preminenza. Questo è legato al fatto che nel 1905 l'unica particella massless nota era il fotone. Modernamente, le particelle massless conosciute sono le otto varietà di gluoni, il fotone e le perturbazioni dello spazio-tempo cioè un oggetto classico con una dubbia struttura quantistica un tempo detto gravitone.

## Lezione 5

mar 07 mar  
2023 13:30

In fisica classica, le particelle massless non esistono perché non potrebbero perturbare il mondo né essere perturbate dal mondo. Dalla seconda legge di Newton, qualunque forza esercitata su di una particella massless non è in grado di generare un'accelerazione e quindi un moto. Tale moto non è osservabile perché non si può perturbare. Per il rasoio di Occam, se un ente non ha possibilità di essere osservato né di perturbare il mondo, si presuppone che tale oggetto non esiste.

Ci si chiede se una particella massiva può diventare massless e viceversa. Il fatto che esiste una corrispondenza tra massa ed energia e che l'una si tramuti nell'altra non è una conseguenza della relatività. Infatti, una particella ha una massa a riposo con dimensioni di energia, ma non si può trasformare in energia: essa è un nucleo intoccabile che preserva l'identità della particella. Si può definire l'energia cinetica della particella come

$$K = E - m = m(\gamma - 1)$$

Nel 1905 non si conoscevano le particelle ultra-relativistiche. Gli unici tipi di particelle note erano quelle per cui  $v \ll 1$ . Sviluppando l'energia cinetica in serie di Taylor si ottiene

$$K \approx m + \frac{1}{2}mv^2 + o(v^2) - m = \frac{1}{2}mv^2 + o(v^2)$$

La minima energia di una particella è la propria massa a riposo: una particella è inviolabile per quanto concerne la propria massa a riposo. Tuttavia, Einstein intuisce che una frazione della massa intoccabile che preserva l'identità della particella può essere convertita in energia cinetica. Una dimostrazione della violazione dell'identità di una particella è il decadimento del pione neutro  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Il pione ha massa a riposo  $m \approx 139 \text{ MeV } c^{-2}$ . La massa del pione si trasforma completamente in energia, onde elettromagnetiche. Da questo si capisce che una particella massiva si può trasformare in almeno due particelle massless. Per la conservazione della quantità di moto, una particella massiva non si può trasformare in una sola particella massless. Infatti, si consideri il riferimento solidale al pione. In esso si ha la quantità di moto pari a

$$p_\pi^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

Per conservazione, le componenti spaziali del fotone sono nulle. Dato che la massa del fotone è nulla, allora l'energia è

$$E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + p_\gamma^2 = 0$$

Per la conservazione della prima componente, cioè dell'energia, si ottiene  $m = 0$ , ma questo non è possibile perché  $m > 0$ . Pertanto, non esistono decadimenti ad un corpo così come una particella isolata non può cambiare massa.

### 3 Decadimenti

Si consideri uno stato iniziale in cui si ha una particella con momento  $p^\mu$ . La situazione finale presenta  $N$  particelle con momenti  $p_i^\mu$ . La quantità da utilizzare è il quadri-momento totale

$$p_{\text{tot}}^\mu = \sum_{i=1}^N p_i^\mu \quad (= p^\mu)$$

Per studiare i decadimenti si utilizza l'invariante dato dalla norma del quadri-momento totale

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - p^2 = \left[ \sum_{i=1}^N E_i \right]^2 - \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right|^2$$

La quantità invariante che si usa più frequentemente in fisica delle particelle è la prima variabile di Mandelstam, detta anche massa invariante:

$$s = (p_{\text{tot}})_\mu (p_{\text{tot}})^\mu = p_\mu p^\mu$$

Si dice massa invariante perché nella sintesi di una particella da due altre particelle, può capitare che la massa finale sia la somma delle masse iniziali. La prima variabile di Mandelstam coincide con la massa a riposo della particella finale. Essendo la massa a riposo un invariante, allora si dice che la prima variabile di Mandelstam è la massa invariante. In generale tale sintesi non avviene, ma si ha scattering o generazione di altre particelle.

**Decadimento a due corpi.** La prima variabile di Mandelstam si può utilizzare per studiare i decadimenti a due corpi. Il decadimento a due corpi ha la forma  $a \rightarrow b + c$ . La conservazione del momento è

$$p_a^\mu = p_b^\mu + p_c^\mu$$

Si hanno quattro vincoli dati dalle componenti del quadri-momento. Per determinare tutte le energie e tutte le quantità di moto delle particelle finali, sapendo già di quali particelle si tratta (cioè la massa), si ha bisogno di tre incognite per particella (cioè le componenti del momento spaziale perché l'energia è nota da  $E^2 = m^2 + p^2$ ). Per un decadimento a due corpi, si hanno sei incognite (tre per particella) e quattro equazioni (la conservazione del quadri-momento).

Si consideri il decadimento  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  ed il riferimento solidale al pione. Il momento totale è quello del pione

$$p_\pi^\mu = (M_\pi, 0, 0, 0)$$

Per conservazione del quadri-momento si ha

$$p_\pi^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \implies p_2^\mu = p_\pi^\mu - p_1^\mu$$

dove  $p_1^\mu$  è il momento del muone e  $p_2^\mu$  è il momento dell'anti-neutrino muonico. La norma della relazione precedente è

$$\begin{aligned} m_2^2 = \|p_2^\mu\|^2 &= \|p_\pi^\mu - p_1^\mu\|^2 = \|p_\pi^\mu\|^2 - 2(p_\pi)_\mu p_1^\mu + \|p_1^\mu\|^2 \\ &= M_\pi^2 - 2(p_\pi)_\mu p_1^\mu + m_1^2 = M_\pi^2 - 2M_\pi E_1 + m_1^2 \end{aligned}$$

da ciò si ricava l'energia del muone e del neutrino

$$E_1 = \frac{M_\pi^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M_\pi}, \quad E_2 = \frac{M_\pi^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M_\pi}$$

Si riesce a determinare univocamente l'energia perché si conoscono le particelle dello stato finale. Ci si chiede quale sia la massa massima delle particelle finali affinché la particella iniziale vi possa decadere. Un decadimento può avvenire qualora

$$m_a \geq m_b + m_c$$

Infatti, la minima configurazione energetica è quella per la quale le particelle prodotte si trovano a riposo nel riferimento della particella iniziale:

$$p_a^0 = p_b^0 + p_c^0 \implies m_a = m_b + m_c$$

Si calcolano le energie e le quantità di moto in un generico sistema di riferimento. Si pone l'asse  $z$  lungo il moto della particella iniziale. Bisogna utilizzare le trasformazioni di Lorentz. Si ricorda

$$\gamma = \frac{E_\pi}{M_\pi}, \quad v = \frac{p_\pi}{M_\pi}$$

Nel riferimento solidale (rest frame, RF,  $S'$ ) al pione, si definisce l'angolo  $\theta'$  del muone rispetto all'asse  $z' = z$ . Dunque, in componenti si ha

$$p'_1 \sin \theta' = p_1^1, \quad p'_1 \cos \theta' = p_1^3$$

Nel riferimento  $S$  del laboratorio si ottiene

$$p_1^1 = p_1'^1, \quad p_1^3 = \gamma(p_1'^3 + vE'), \quad E_1'^2 = m_1^2 + p_1'^2$$

Per grandi velocità, l'angolo misurato nel laboratorio diventa sempre minore. Infatti, la tangente è

$$\tan \theta = \frac{p_1^1}{p_1^3} = \frac{p_1'^1}{\gamma(p_1'^3 + vE')} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 1$$

Delle sei incognite, le variabili che si sanno determinare sono le due energie e i due (moduli dei) momenti, rimangono ignoti gli angoli di decadimento  $\theta$  e  $\varphi$ .

**Decadimento a tre corpi.** Il decadimento schematico è  $a \rightarrow b + c + d$ . Gli esempi tipici sono

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Le variabili non determinabili sono cinque (tre variabili per ogni particella finale, nove totali, meno quattro equazioni dalla conservazione). Per un decadimento a tre corpi, è facile calcolare l'energia minima e massima di una determinata particella nel riferimento solidale. La configurazione di minima energia di tale particella è quella in cui la particella è ferma, mentre le altre due particelle conservano il quadri-momento. La configurazione di massima energia è quella per la quale la particella è in moto in direzione opposta alle altre due particelle (che hanno traiettorie parallele). Questa configurazione si può immaginare come un decadimento a due corpi: la particella considerata e una particella somma delle due rimanenti. Per l'esempio del decadimento muonico si ha

$$E_{e^-}^{\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2^2 + m_3^2)}{2M} \approx \frac{1}{2}M$$

dove  $M$  è la massa del muone,  $m_2$  ed  $m_3$  sono le masse dei neutrini. Si noti che i decadimenti sono processi di meccanica quantistica e pertanto non sono deterministici. Gli angoli di decadimento sono descritti tramite una distribuzione di probabilità.

**Decadimenti.** I decadimenti sono una transizione spontanea da un corpo (una particella) ad  $N$  corpi

$$a \rightarrow b + c + d + \dots$$

In meccanica quantistica (classica e relativistica), si calcolano le probabilità di transizione. Le tecniche imparate in Meccanica Quantistica sono le stesse utilizzate in fisica delle particelle elementari. Si consideri un atomo di idrogeno in cui l'elettrone si trova nello stato  $2p$ . L'elettrone in tale stato può transire allo stato fondamentale  $1s$ . Tale decadimento è veloce (avviene in 1.6 ns) perché soddisfa le regole di selezione di dipolo elettrico

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta s = 0, \quad \Delta j = 0, \pm 1, \quad j = 0 \not\rightarrow 0$$

Il decadimento  $2s \rightarrow 1s + \gamma\gamma$  non può avvenire all'ordine più basso in teoria perturbativa perché non rispetta le regole di selezione. Tuttavia, questo non significa che è di certo impossibile, ma che è molto soppresso. Infatti, esso ha una vita media di 0.125 s con emissione di due fotoni a 243 nm. Una particella può decadere in particelle arbitrarie (rispettando i vincoli cinematici) a meno che sia presente una regola di selezione che lo impedisce. Tuttavia anche se essa fosse presente, il decadimento potrebbe avvenire comunque, ma con una lunga vita media. Ad esempio, il decadimento

$$\mu^- \rightarrow \pi^- + \nu_\mu$$

non può avvenire perché la massa dei prodotti è superiore alla massa della particella iniziale. Il decadimento più frequente è

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \tau = 2.8 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Inoltre, i seguenti decadimenti non possono avvenire

$$\pi^- \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$$

per violazione della carica elettrica e la legge di conservazione del numero elettronico rispettivamente. In base a come decadono le particelle, si possono dedurre le leggi di conservazione da cui si è introdotto il Modello Standard cioè quel sistema di simmetrie e leggi di conservazione che determinano le interazioni fondamentali.

**Ampiezza di decadimento e vita media.** La quantità caratteristica di un decadimento è l'ampiezza di decadimento  $\Gamma$ . Essa è la probabilità per unità di tempo che una particella decada. La vita media è il reciproco dell'ampiezza di decadimento

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

### 3.1 Regola d'oro di Fermi

La probabilità di decadimento è data dalla regola d'oro di Fermi. Essa fornisce l'ampiezza di transizione (in questo caso di decadimento) in funzione dell'hamiltoniana del sistema. La probabilità che un sistema fisico transisca da uno stato iniziale ad uno stato finale è

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \rho(E)$$

dove  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$  è l'elemento di matrice che collega lo stato finale e lo stato iniziale perturbato

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle f | \psi(t) \rangle = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle$$

mentre  $\rho(E)$  è la densità degli stati finali.

## Lezione 6

La regola d'oro di Fermi è stata dedotta per processi di emissione di fotoni da parte di elettroni in stati eccitati. In meccanica quantistica non relativistica, il processo di emissione

$$H^* \rightarrow H + \gamma$$

risulta difficile da trattare. La fisica delle particelle vede il processo di emissione come un decadimento a due corpi. Ma nella disciplina di cui sopra, il fotone si deve trattare come un'onda elettromagnetica, non esiste il fotone come particella: bisogna introdurre un termine perturbativo nell'hamiltoniana, con un andamento periodico. Il fenomeno è spiegato tramite l'interazione di un campo classico elettromagnetico con un atomo di idrogeno descritto quantisticamente.

Nella densità di stati sono presenti tutte le configurazioni cinematiche (dei prodotti) tranne

mer 08 mar  
2023 13:22



quelle che violano il principio conservazione dell'energia e del momento. Conviene riscrivere la regola d'oro come

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \int \prod_a \frac{V d^3 p_a}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left[ E_f + \sum_{k=1}^{N_f} E_k - E_i \right] \delta^3 \left[ \mathbf{p}_f + \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_i \right]$$

dove l'integrale (e la delta spaziale) è lo spazio-fase relativistico. Se esiste uno stato finale che viola la conservazione del momento o dell'energia, allora l'integrale è nullo. Il termine  $V$  è il volume su cui si normalizza la funzione d'onda della (sola) particella finale (non di quella iniziale). La scelta di tale volume è arbitraria e tipicamente si vuole che esso sia  $\mathbb{R}^3$ . Per ogni particella finale si ha un termine  $V$  a numeratore. Tuttavia, in quanto termine di normalizzazione, la funzione d'onda di una qualunque particella è

$$\psi \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$$

mentre l'elemento della matrice (che non è relativistica) di transizione è

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle f | \psi(t) \rangle = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle$$

Sebbene ogni particella finale presenti un fattore  $V$ , l'elemento di matrice è proporzionale a  $\frac{1}{\sqrt{V}}$ , dunque nella regola d'oro di Fermi, il volume si semplifica: si può scegliere arbitrariamente e per questo si può utilizzare  $\mathbb{R}^3$ .

Questa formula è incompatibile con la relatività speciale. La formula d'oro venne scoperta da Dirac sia in forma classica che relativistica. Fermi intuì la sua ampia validità: si può applicare a tutti i sistemi fisici che subiscono delle transizioni.

Si vede il problema che sorge nell'applicare la regola d'oro di Fermi alla relatività speciale. Secondo l'interpretazione Copenhagen (anche detta statistica generalizzata), la funzione d'onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  è legata alla probabilità  $P_V$  di trovare la particella in una regione dello spazio  $V$  tramite

$$P_V = \int_V |\psi|^2 d^3x$$

Si vuole che tale probabilità sia un invariante di Lorentz. Ad esempio, si vuole sapere la probabilità che una particella scompaia (come in un decadimento). Tuttavia, il volume  $V$  non è un invariante di Lorentz. Infatti, si consideri il volume proprio infinitesimo  $dV = dx dy dz$ . Per un boost lungo  $z$ , il volume in un riferimento non solidale  $S'$  è

$$d^3x' = dx dy \frac{dz}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} d^3x$$

In quanto il fattore di Lorentz che permette un boost al riferimento della particella è

$$\gamma = \frac{E}{m} \propto E$$

si ridefinisce la funzione d'onda in modo tale che, quando si calcola la probabilità, il fattore di Lorentz del volume si semplifica con il fattore della funzione d'onda: in questo modo la probabilità di transizione diventa un invariante. Dalla funzione d'onda classica  $\psi$  con normalizzazione

$$\int_V |\psi|^2 d^3x = 1$$

si introduce la funzione d'onda relativistica  $\tilde{\psi}$  secondo la normalizzazione

$$\int_V |\tilde{\psi}|^2 d^3x = 2E \implies \tilde{\psi} = \sqrt{2E} \psi$$

dove  $d^3x$  è calcolato nel riferimento solidale alla particella, mentre  $\tilde{\psi}$  e  $E$  sono la funzione d'onda e l'energia calcolate in un riferimento arbitrario. Si utilizzano le energie con un fattore 2 poiché esso si semplifica nelle formule di sezione d'urto. A questo punto si ha

$$\begin{aligned}\gamma' > 1, \quad P' &= \int_V |\tilde{\psi}'|^2 d^3x' = \int_V |\tilde{\psi}'|^2 \frac{d^3x}{\gamma'} = \frac{2E'}{\gamma'} \\ &= 2m = 2E = \int_V |\tilde{\psi}|^2 d^3x = P, \quad \gamma = 1\end{aligned}$$

dove  $\gamma'$  è rispetto al riferimento solidale alla particella. Si sfrutta tale proprietà per generalizzare la regola d'oro di Fermi. Si consideri l'elemento di matrice non relativistico (NR)

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{\text{NR}} = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle = \langle \psi_1 \cdots \psi_n | \hat{H}_1 | \psi_a \rangle, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

dove  $\psi_a$  è la funzione d'onda della particella iniziale e  $\psi_n$  sono le funzioni d'onda delle particelle finali. L'elemento di matrice compatibile con la relatività speciale diventa

$$\mathcal{M} = \sqrt{2E_a} \prod_{i=1}^{N_f} \sqrt{2E_i} \mathcal{M}^{\text{NR}}$$

Si dimostra che questo rende invariante la probabilità di transizione. Si parte dallo spazio delle fasi. Noto

$$d^3p' = \gamma dp_x dp_y dp_z \propto E d^3p$$

Si definisce un nuovo elemento dello spazio-fasi

$$\frac{d^3p}{h^3} \rightarrow \frac{d^3p}{2E\hbar(2\pi)^3} = \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}$$

La regola di Fermi non relativistica

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \int \prod_{i=1}^{N_f} \frac{V d^3p_i}{(2\pi\hbar)^3} |\mathcal{M}^{\text{NR}}|^2 \delta \left[ E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right] \delta^3 \left[ \mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{p}_i \right]$$

diventa la regola d'oro di Fermi relativistica

$$\Gamma = \frac{1}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 (2\pi)^4 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \delta \left[ E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right] \delta^3 \left[ \mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{p}_i \right]$$

Si può porre

$$\delta \left[ E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right] \delta^3 \left[ \mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{p}_i \right] \equiv \delta^4 \left[ p_a^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right]$$

La regola d'oro si utilizza per i calcoli dei decadimenti e delle sezioni d'urto. Si noti che nella formula, il numero di  $2\pi$  a numeratore corrisponde al numero di  $\delta$  e il numero di  $2\pi$  a denominatore corrisponde a quello di  $dp$ . La formula fornisce il tasso di probabilità di transizione  $R_{i \rightarrow f}$ . Per una singola particella che decade, tale tasso è detto ampiezza di decadimento  $\Gamma$ .

La regola d'oro non è invariante. L'elemento di matrice è Lorentz invariante perché costruito apposta. Lo stesso vale per lo spazio delle fasi. Pure la delta quadri-dimensionale è invariante. Lo si può vedere esplicitamente utilizzando le proprietà della delta  $\delta(f(x))$  oppure, seguire un ragionamento intuitivo. L'espressione della delta quadri-dimensionale afferma che un decadimento avviene solamente quando si ha conservazione di quadri-momento: questa è una prescrizione universale e quindi invariante. Tuttavia, il fattore  $2E_a$  non è un invariante. Pertanto, l'ampiezza di transizione non è un invariante giacché dipende dall'energia della

particella iniziale. Questo risultato è atteso. Infatti, l'ampiezza di decadimento  $\Gamma$  è la probabilità per unità di tempo (il tasso) che una particella decada. La vita media  $\tau$  è il tempo di sopravvivenza di una particella:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \propto 2E_a$$

La regola d'oro di Fermi è una prescrizione per il calcolo della vita media. Essa è un tempo e quindi non è invariante. La vita media in un riferimento generico è

$$\tau = \gamma\tau_0, \quad \gamma = \frac{E}{m} \propto E \implies \tau \propto E\tau_0$$

dove  $\tau_0$  è il tempo proprio. Il fattore  $(2E_a)^{-1}$  risulta essere il fattore  $\gamma$  che deriva da considerare un tempo generico e non il solo tempo proprio. La vita media  $\tau$  (lifetime) è la vita media calcolata nel riferimento solidale alla particella.

### 3.2 Vita media e rapporto di ramificazione

**Regola di Rutherford-Soddy.** La regola d'oro di Fermi permette di spiegare la regola di Rutherford e Soddy per i decadimenti nucleari. I primi decadimenti osservati sono stati quelli di nuclei radioattivi. La formula empirica del decadimento di una quantità di materiale radioattivo è data dalla formula del decadimento radioattivo (di Rutherford-Soddy)

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Tale formula è la manifestazione di una proprietà della meccanica quantistica, cioè la manifestazione che il decadimento è un fenomeno quantistico.

Si considerino varie particelle identiche tra loro. Esse hanno un'ampiezza di decadimento finita cioè che ogni particella abbia probabilità finita di decadere in  $N$  particelle. Si consideri il riferimento solidale con le particelle. L'ampiezza di decadimento  $\Gamma = \tau^{-1}$  è il tasso di probabilità che avvenga una transizione. La probabilità che una singola particella cessi di esistere all'istante  $t + dt$  rispetto all'istante iniziale è

$$P(dt) = \Gamma dt$$

Il numero di particelle che sopravvivono ad un istante è minore del numero di particelle presenti all'istante precedente. Pertanto

$$N(t + dt) - N(t) = -N(t)\Gamma dt \implies dN = -N(t)\Gamma dt \implies N = N_0 e^{-\Gamma t}$$

Senza conoscere i processi di decadimento, cioè l'elemento di matrice  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ , si deduce che il decadimento segue una legge esponenziale descritta dall'ampiezza di decadimento. La regola di Rutherford-Soddy è una manifestazione della meccanica quantistica, in particolare essa è una proprietà specifica del fatto che la meccanica quantistica è una teoria Markoviana.

**Rapporto di ramificazione – branching ratio.** Si calcolano i decadimenti di una particella  $a$  in  $N$  particelle. Una particella può decadere in vari modi, distinti dalla probabilità di avvenimento. Ad esempio, in ordine decrescente di probabilità

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \gamma, \quad \dots$$

dove la prima ha probabilità di avvenimento pari a 99.987%. Un esempio di decadimenti più equi è

$$k^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad k^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \quad \dots$$

dove la prima avviene con probabilità 63% mentre la seconda 21%. In principio, una particella può decadere in tanti modi diversi. Si studia la relazione tra la vita media e le varie ampiezze che

descrivono i decadimenti. Dalla regola d'oro di Fermi, l'ampiezza totale è la somma di ampiezze parziali

$$\Gamma = \Gamma_{a \rightarrow 1} + \Gamma_{a \rightarrow 2} + \Gamma_{a \rightarrow 3}$$

Si introduce la larghezza parziale  $\Gamma_{i \rightarrow f_j}$  (decay fraction) per cui la larghezza totale è

$$\Gamma = \sum_j \Gamma_{f_j}$$

Il rapporto di ramificazione (branching ratio, BR) è la probabilità che un decadimento avvenga

$$\text{BR} \equiv \frac{\Gamma_{i \rightarrow f_j}}{\Gamma}$$

La vita media di una particella è il reciproco della larghezza totale

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\sum_j \Gamma_j} \neq \sum_j \frac{1}{\Gamma_j}$$

La vita media totale *non* è la somma delle vite medie parziali  $\tau_j = \Gamma_j^{-1}$ .

### 3.3 Stati instabili

In meccanica quantistica, una particella che si propaga, soggetta eventualmente a delle interazioni, soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}\psi = i\hbar \partial_t \psi, \quad \psi(\mathbf{x}, t)$$

La sua soluzione è un'ampiezza di probabilità di trovare la particella in una certa posizione ad un determinato istante. In meccanica quantistica non relativistica, le particelle non scompaiono (cioè non sono sottoposte a decadimenti) e la probabilità di trovare la particella nello spazio è sempre unitaria

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 d^3x = 1$$

Tuttavia, in fisica delle particelle ed in meccanica quantistica relativistica, le particelle possono decadere e scomparire. Si può gestire questa situazione in due modi. Il modo corretto è costruire una teoria in cui sono presenti degli operatori che creano e distruggono le particelle. Le teorie quantistiche dei campi sono state proprio create per permettere la distruzione e la creazione delle particelle. D'altra parte, in meccanica quantistica non relativistica, si può comunque introdurre la distruzione delle particelle: si introduce un termine di smorzamento sulla funzione d'onda. Le particelle instabili sono tutte le soluzioni dell'equazione di Schrödinger tali che

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Questo è un artificio: non si fornisce una motivazione della dissipazione, sebbene esso descriva correttamente il moto. Inoltre, si introduce una nuova funzione d'onda. Si considera una particella stabile risolvendo la corrispondente equazione di Schrödinger

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

Similmente, la funzione d'onda di una particella instabile è

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

Una particella stabile è uno stato stazionario con una fase temporale. La particella instabile è costituita dalla stessa fase, ma presenta un termine che non è più uno stato stazionario perché svanisce. L'energia ed il tempo devono sottostare al principio di indeterminazione di Heisenberg. Si consideri una particella di cui si misura in modo preciso l'energia. La durata della misura deve

essere grande affinché si possa vedere la particella: l'incertezza sul tempo è grande. Se si vuole misurare l'energia in modo arbitrariamente preciso, allora bisogna osservare la particella per un tempo infinitamente lungo. Se la particella è instabile, questo diventa un problema. Se la vita media è  $\tau$ , la misura si può fare in un tempo di tale ordine. Per una particella instabile non si può fare una misura di energia arbitrariamente precisa

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2} \implies \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{1}{2}\Gamma$$

Per una particella instabile, qualunque sia la precisione dell'apparato sperimentale, l'incertezza sull'energia è sempre dell'ordine della larghezza totale  $\Gamma$ .

## Lezione 7

lun 13 mar  
2023 13:30

Questa non è una limitazione: si possono osservare indirettamente energie maggiori di quelle che si possono produrre in un acceleratore.

**Acceleratore LEP, esperimento DELPHI e bosone  $Z^0$ .** L'acceleratore LEP era in grado di accelerare elettroni e positroni fino a 45 GeV. Si voleva osservare il bosone  $Z^0$  mediatore dell'interazione debole con massa  $m \approx 91$  GeV. Data la grande massa, tale bosone può avere vari decadimenti

$$Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-, \quad Z^0 \rightarrow e^+ e^-, \quad Z^0 \rightarrow q \bar{q}, \quad Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu}, \quad Z^0 \rightarrow \tau^+ \tau^-, \quad \dots$$

con branching ratios di 3.4%, 3.4%, 69.2%, 20.5% e 3.4% rispettivamente. Nell'acceleratore si fanno scontrare elettroni e positroni con energia sufficiente da creare un bosone  $Z^0$  che poi decade in altri prodotti. Ci si aspetta che il numero di bosoni osservati abbia un picco attorno all'energia equivalente alla massa del bosone. Il picco non è una delta, ma una distribuzione Breit-Wigner (o Lorentziana per gli atomisti) più ampia con picco a  $m_Z \approx 91.1876(21)$  GeV ed una FWHM pari a  $\Gamma = 2.50$  GeV.

Si studia la comparsa di una distribuzione Breit-Wigner rispetto ad una delta e come si può trovare la sua espressione analitica. Il bosone  $Z^0$  ha una massa enorme e quindi ha la possibilità di decadere in un grande numero di particelle. Questo vale a dire che lo spazio fase è vasto: si hanno tante possibili configurazioni di particelle in stato finale le cui energie sommate forniscono la massa del bosone. Pertanto, la probabilità di decadimento  $\Gamma$  (della regola d'oro) è grande e quindi la vita media è piccola. Per il bosone  $Z^0$ , la vita media è pari a

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = 2.63 \times 10^{-25} \text{ s}$$

Anche producendo tale bosone a velocità relativistiche, esso decade praticamente immediatamente. Per una vita media così piccola, è normale che l'incertezza sull'energia sia grande. Questa non è una evidenza di violazione della conservazione dell'energia: se l'energia combinata dei fasci iniziali è 88 GeV allora l'energia dello stato finale è 88 GeV. Tuttavia, in un intervallo temporale breve, si genera una particella che dovrebbe avere una massa di 90 GeV, ma ha una massa misurata di 88 GeV: questa è l'incertezza intrinseca con cui si è in grado di determinare la massa quando si osserva un singolo bosone  $Z^0$ . Il principio di indeterminazione di Heisenberg permette di osservare particelle anche al di sotto dell'energia pari alla loro massa, cioè della soglia cinetica, a patto che decadano velocemente.

Si determina la forma analitica della distribuzione del numero di conteggi del bosone. Si esprime la funzione d'onda non più in funzione del tempo, ma in termini dell'energia, sua variabile coniugata: si utilizza la trasformata di Fourier. Data la funzione d'onda

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-iEt} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

la trasformata è

$$\int_0^\infty \psi(\mathbf{x}, t) e^{iEt} dt = \int_0^\infty \psi(\mathbf{x}) e^{-i\tilde{E}t} e^{-\frac{\Gamma t}{2}} e^{iEt} dt = \psi(\mathbf{x}) \int_0^\infty e^{i[E - \tilde{E} + i\frac{\Gamma}{2}]t} dt = \frac{i\psi(\mathbf{x})}{E - \tilde{E} + \frac{1}{2}i\Gamma}$$

In questo modo si esprime la funzione d'onda non più nello spazio del tempo, ma nello spazio dell'energia. La probabilità di osservare una particella con larghezza di decadimento  $\Gamma$  ad una energia  $E$  è

$$P(E) = \left| \frac{i}{E - \tilde{E} + \frac{1}{2}i\Gamma} \right|^2 = \frac{1}{(E - \tilde{E})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

Questa è la distribuzione Breit-Wigner. Poiché si conosce la distribuzione, si possono interpolare i dati sperimentali per ottenere l'energia  $\tilde{E}$ , quindi la massa, del bosone  $Z^0$ .

Nell'acceleratore LEP si osservano i prodotti del decadimento del bosone  $Z^0$ . Le particelle possono decadere in modi che non si possono osservare. Ad esempio, il bosone  $Z^0$  può decadere in una coppia neutrino, anti-neutrino con branching ratio del 20.5%. Tuttavia, la sezione d'urto dei neutrini è minuscola: essi interagiscono debolmente con la materia e quindi effettivamente l'interazione con il rivelatore è trascurabile. Per decadimenti simili non si può efficacemente osservare la distribuzione di conteggi. Tuttavia, la forma della distribuzione è la stessa a prescindere da quale decadimento si osserva. Questo perché  $\Gamma$  è il reciproco della vita media che è indipendente da come la particella decade. Infatti, la vita media è la probabilità di sopravvivenza della particella.

### 3.4 Diffusione – scattering

Si può calcolare l'ampiezza di decadimento tramite la regola d'oro di Fermi. Si estende quest'ultima per includere la diffusione. Lo scattering è il fenomeno in cui una particella che subisce una perturbazione del proprio moto a causa di un centro diffusore, un oggetto che genera un potenziale che cambia la dinamica del sistema. Una particella con moto  $p$  viene deflessa da un centro diffusore con angolo  $\Omega$  rispetto la direzione del moto originale e passando ad un momento finale  $p'$ .

La quantità principale che descrive lo scattering è la sezione d'urto. La sezione d'urto differenziale  $d_\Omega\sigma$  è il rapporto tra il numero di particelle diffuse per unità di tempo nell'angolo solido  $\Omega$ , e il numero totale di particelle incidenti

$$d_\Omega\sigma \equiv \frac{d_\Omega N}{F}$$

dove  $F$  è il flusso cioè il numero di particelle incidenti per unità di tempo e unità di superficie. Esso ha dimensioni

$$\dim F = \text{T}^{-1}\text{L}^{-2}$$

mentre il numero di particelle per angolo solido ha dimensioni

$$\dim d_\Omega N = \text{T}^{-1} \implies \dim d_\Omega\sigma = \text{L}^2$$

La sezione d'urto totale è

$$\sigma = \int d_\Omega\sigma d\Omega$$

Si vede il motivo fisico per cui si può immaginare che la sezione d'urto sia una superficie. Il modo più semplice per comprenderlo è studiare lo scattering in fisica classica. Si consideri una particella avvicinarsi nella direzione generale di un centro diffusore con cui interagisce. Il parametro di impatto  $b$  è la distanza tra la traiettoria della particella e la traiettoria parallela che passa per il centro diffusore [immaginare]. In fisica classica, il processo è deterministico. L'equazione del moto della particella permette di trovare una relazione analitica tra l'angolo di diffusione e il parametro di impatto. Per un potenziale centrale, si ha

$$\theta = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{2V(r)}{mv_\infty^2}}}$$

Si può estendere il discorso in tre dimensioni. Si considera un intorno  $[b, b + db] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$  della particella considerata. In quanto  $\theta(b)$  è una funzione continua, l'intervallo precedente viene

mappato in un intervallo di angoli solidi  $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ . Tutte le particelle nell'intorno del parametro di impatto  $(b, \varphi)$  sono diffuse deterministicamente in un intorno dell'angolo  $\theta$ . La superficie  $db \cdot b d\varphi$  è la sezione d'urto classica cioè la superficie ortogonale al piano del moto tracciata dal parametro d'impatto nel corrispondente angolo di diffusione  $\Omega$ .

**Esempio.** Si vede un esempio classico. Si calcola la sezione d'urto di un punto materiale (una particella) con un parametro di impatto  $b$  su di una sfera massiva e indeformabile (rigida ed incompressibile). [immagine] Il punto materiale rimbalza sulla sfera che non si muove. Per conservazione della quantità di moto, l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione. Si vuole determinare l'angolo di diffusione  $\theta$  cioè l'angolo che descrive il moto finale della particella rispetto al moto iniziale. Poiché si tratta la fisica classica, la funzione  $\theta(b)$  deve esistere, essere unica e di classe  $C^\infty$ . Dal diagramma si nota

$$\theta + 2\alpha = \pi$$

Quindi

$$b = R \sin \alpha = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$$

La sezione d'urto infinitesima è la superficie infinitesima nell'intorno del parametro di impatto:

$$d\sigma = b db d\varphi, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale (a meno del segno) è

$$d_\Omega \sigma = \left| \frac{b db d\varphi}{\sin \theta d\theta d\varphi} \right| = \left| \frac{R \cos \frac{\theta}{2} d(R \cos \frac{\theta}{2})}{\sin \theta d\theta} \right| = \frac{R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{1}{4} R^2$$

le apparenti semplificazioni dei differenziali sono giustificate dalla classe  $C^\infty$  di differenziabilità della funzione. La sezione d'urto totale risulta essere

$$\sigma = \int d_\Omega \sigma d\Omega = \frac{1}{4} R^2 4\pi = \pi R^2$$

cioè la superficie della sfera proiettata nel piano ortogonale al moto (quindi l'area di un cerchio). Se il punto materiale è distante dalla sfera,  $b > R$ , allora la propria traiettoria è imperturbata. Viceversa, se il pnto è vicino alla sfera,  $b < R$ , allora la particella viene deflessa. Risulta normale che la sezione d'urto totale sia la proiezione della superficie della sfera sul piano ortogonale al moto. La sezione d'urto totale, che in ultima analisi è la probabilità che la particella interagisca con la sfera, dipende dal parametro di impatto in maniera banale: se il parametro di impatto è all'interno del disco (cioè la proiezione della sfera) interagisce e viceversa. Intuitivamente, la sezione d'urto descrive le condizioni affinché una particella abbia una probabilità non nulla di interagire.

**Sezione d'urto quantistica.** Una particella quantistica è un pacchetto d'onda con una incertezza associata. Dato un centro diffusore generatore di potenziale, non si ha più una relazione deterministica tra il parametro di impatto e l'angolo di diffusione. Infatti, il parametro di impatto non è univocamente determinato in quanto la particella ha un'incertezza intrinseca e in quanto le probabilità di transizione non sono deterministiche. Ad esempio, si ha una probabilità finita di osservare la particella oltre il diffusore: la particella non è un punto materiale, ma un'onda, si ha diffrazione.

**Unità di misura.** La sezione d'urto ha dimensioni  $L^2 = E^{-2}$ . Si usa l'unità di misura del barn

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 1 \text{ fm}^2$$

Per convertire dal sistema internazionale a quello naturale conviene sapere

$$1 \text{ GeV}^{-1} \approx 0.39 \text{ mb}$$

### 3.4.1 Classi di diffusione

In fisica delle particelle esistono due classi di scattering rilevanti: diffusione a targhetta (bersaglio) fissa e diffusione frontale.

**Diffusione a targhetta fissa – fixed-target experiment.** Si trova la relazione tra la sezione d'urto e le dimensioni del muro. Si consideri un flusso di particelle diretto verso un bersaglio. Si studia il numero di centri diffusori coinvolti nello scattering. Tale numero corrisponde all'intersezione della superficie del fascio diretta verso il bersaglio e la superficie del bersaglio stesso. Quindi, la superficie efficace, che contiene tutti i centri diffusori coinvolti nello scattering, è il minimo tra la superficie del bersaglio e la superficie del fascio di particelle. Il numero di particelle diffuse per unità di tempo in un angolo solido  $d\Omega$  risulta essere

$$d_\Omega N = F A \tilde{N} dx d_\Omega \sigma$$

dove  $A$  è la superficie efficace,  $\tilde{N}$  è la densità di centri diffusori,  $dx$  è lo spessore del bersaglio. Inoltre,  $FA$  è il numero di particelle per unità di tempo,  $\tilde{N} dx$  è il numero di centri diffusori (per unità di area, sezione d'urto).

**Diffusione frontale – head-on, collider scattering.** Due particelle si scontrano frontalmente. Lo scattering frontale trasferisce la maggiore quantità di moto e la maggiore energia. Per particelle con stessa velocità e massa, il sistema di riferimento del centro di massa coincide con quello del laboratorio.

La diffusione frontale presenta una differenza importante con la diffusione a targhetta fissa. In quest'ultima, fin tanto che una particella è all'interno della superficie efficace, la particella interagisce con almeno un nucleo diffusore. Tuttavia, per due fasci di particelle che si scontrano, questo non è detto. La definizione precedente di flusso non tiene conto del fatto che le particelle devono essere bene allineate. Infatti, il flusso è il numero di particelle incidenti per unità di tempo per unità di superficie. Bisogna definire un nuovo tipo di flusso che descriva realisticamente le interazioni. Questo flusso generalizzato viene detto luminosità istantanea  $\mathcal{L}(t)$ . Essa è il coefficiente di proporzionalità nella relazione

$$d_\Omega N = \mathcal{L}(t) d_\Omega \sigma$$

Nella realtà, la luminosità dipende dal numero di particelle per bunch e dalla sezione d'urto del bunch.

## Lezione 8

La luminosità integrata è data dalla relazione

$$\mathcal{L} = \int \mathcal{L}(t) dt$$

La luminosità istantanea varia nel tempo perché dopo ogni collisione le particelle diminuiscono; alcune collisioni si possono verificare con atomi erranti nell'acceleratore in quanto non si ha il vuoto perfetto. La luminosità istantanea ha le stesse dimensioni del flusso cioè numero di particelle per unità di tempo e di superficie. La luminosità integrata ha dimensioni di numero di particelle per unità di superficie  $\dim \mathcal{L}_{\text{int}} = \text{L}^{-2}$ . Sapendo che la sezione d'urto è una superficie, allora si può esprimere la luminosità integrata con il reciproco del barn. Le condizioni per scoprire una nuova particella sono: una energia sufficiente dei fasci per produrre la particella e una grande luminosità rispetto la sezione d'urto della particella. Infatti, se la sezione d'urto è 1 b, allora per osservare almeno un evento si ha bisogno di una luminosità di  $1 \text{ b}^{-1}$ . Se la sezione d'urto è 1 nb, allora bisogna accumulare nel tempo una luminosità integrata pari a  $1 \text{ nb}^{-1}$ . Si noti che una luminosità elevata corrisponde ad un prefisso SI piccolo in quanto è presente il reciproco.

mar 14 mar  
2023 13:30



**Diffusione a targhetta fissa – spessore finito.** Si è detto che il numero di particelle che si diffondono in un bersaglio fisso è proporzionale alla sezione d'urto. Si è utilizzato uno spessore infinitesimo per semplificare i conti. La generalizzazione ad uno spessore macroscopico è immediata. Si consideri un fascio di particelle che interagisce con il bersaglio. Al passare del tempo, la quantità di particelle nel fascio diminuisce: il fascio entra nel bersaglio e molte particelle interagiscono con gli atomi del muro. Per un muro denso, la quantità di particelle persa è elevata grazie all'alta densità di centri diffusori. Questo è utile per calcolare la profondità del bersaglio affinché passi una frazione trascurabile di particelle. Per uno spessore infinitesimo, si ha una perdita infinitesima causata dall'interazione. La perdita aumenta con la sezione d'urto ed il flusso. Il numero di particelle che raggiungono un centro diffusore a profondità  $x$  risulta essere

$$N(x) = FA$$

Il numero di particelle rimanenti oltre tale profondità è

$$N(x + dx) = N(x) - \sigma N(x) dx \tilde{N} \equiv N(x) + (d_x N) dx \implies \frac{dN}{N} = -\sigma \tilde{N} dx$$

Dunque

$$N(x) = N(0)e^{-\sigma \tilde{N} x}$$

Si definiscono il coefficiente di attenuazione e la lunghezza omonima come

$$\mu \equiv \sigma \tilde{N}, \quad \lambda \equiv \mu^{-1} = \frac{1}{\sigma \tilde{N}}$$

### 3.5 Diffusione in meccanica quantistica

Tramite la regola d'oro di Fermi si ha un modo per calcolare la probabilità di decadimento. A questo punto si vuole calcolare la probabilità che due particelle interagiscano tra loro cioè calcolare la sezione d'urto d'interazione della particella. Un decadimento è una transizione spontanea di una particella in  $N$  particelle. D'altra parte, uno scattering si può interpretare come un decadimento catalizzato: in molti casi, la particella iniziale non ha abbastanza energia per produrre nuove particelle (perché è troppo leggera), ma ha bisogno di un'altra particella che le fornisca l'energia mancante. Secondo questa visione, si può utilizzare la regola d'oro di Fermi con due particelle in stato iniziale al posto di una sola.

Bisogna definire cosa sia un decadimento catalizzato. Innanzitutto, il flusso è il numero di particelle che raggiungono il centro diffusore per unità di tempo ed energia. In fluido-dinamica, il flusso di un mezzo materiale in una direzione è dato da  $\rho(\mathbf{x}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , dove  $\rho$  è la densità,  $\mathbf{v}$  la velocità del fluido,  $\mathbf{n}$  la normale alla superficie attraverso cui si vuole misurare il flusso. Similmente, il flusso di una particella su tanti centri diffusori è  $\tilde{N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , dove  $\tilde{N}$  è la loro densità. Il numero di centri diffusori attraversati da una particella in una regione dello spazio è  $\tilde{N} v \Delta t A$ , dove  $A$  è la superficie ortogonale alla direzione della particella. Il flusso risulta essere il numero di centri diffusori (numeratore) per unità di tempo e superficie (denominatore): ([r] fino a prima di Similmente, anno scorso)

$$F = \frac{\tilde{N} v \Delta t A}{\Delta t A} = \tilde{N} v = \frac{v}{V}$$

si noti che per un singolo centro di diffusione, la densità è  $\tilde{N} = \frac{1}{V}$ . Questo calcolo prevede l'approssimazione che il centro diffusore sia fermo, mentre la particella si muove. A parità di tempo, se il centro diffusore si avvicina verso la particella, allora il numero di particelle che attraversa il centro è maggiore (mentre è minore se si allontana). Per un centro diffusore con un moto generico rispetto alla particella incidente, il flusso nella direzione del moto della particella iniziale  $a$  è

$$F = \tilde{N} |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| = \frac{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|}{V}$$

Nella regola d'oro di Fermi relativistica, l'elemento di matrice relativistico è

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \left| \langle \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n | \hat{H}_1(t) | \psi_a \rangle \right|^2$$

Si modifica tale formula affinché descriva uno scattering, cioè tenga conto di due particelle iniziali:

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \left| \langle \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n | \hat{H}_1(t) | \psi_a \psi_b \rangle \right|^2$$

Inoltre, la relazione tra la sezione d'urto e l'ampiezza di decadimento è

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{\Gamma_{i \rightarrow f}}{F} = \Gamma_{i \rightarrow f} \frac{V}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|}$$

Pertanto, la regola d'oro di Fermi relativistica per lo scattering vale

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2E_a} \frac{1}{2E_b} \frac{1}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left[ p_a^\mu + p_b^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right]$$

Si noti che il coefficiente dell'integrale non è Lorentz invariante. Risulta normale che una sezione d'urto non sia invariante: essa si può interpretare come una superficie (che non è invariante in generale). Tuttavia, la sezione è invariante per tutti quegli osservatori che si muovono perpendicolarmente alla sezione d'urto stessa. Per questo, si dice sezione d'urto invariante quella sezione d'urto misurata dagli osservatori in moto ortogonale ad essa (cioè parallela al moto della particella). Quando si calcola la sezione d'urto invariante si scrive la formula che equivale a misurare la sezione per un osservatore che si trova nella stessa direzione del moto della particella. Si dimostra che la sezione d'urto non è invariante in generale, ma che la corrispondente quantità, misurata dalla particolare classe di osservatori citata, risulta essere Lorentz invariante. Si introduce il fattore di flusso (flux factor) di Møller

$$F = 4E_a E_b |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|$$

che non è invariante in generale.

**Teorema.** Definendo il fattore di flusso Lorentz invariante (Lorentz-invariant flux factor) come

$$F = 4[(p_a^\mu p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}}$$

allora vale

$$F = 4[(p_a^\mu p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}} = 4E_a E_b |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|$$

per tutti gli osservatori, non solo quelli che si muovono lungo la direzione del moto della particella  $a$ . Infatti, calcolare  $F$  in un riferimento in moto nella direzione della particella fornisce il fattore di Møller; dato che  $F$  è invariante, allora tutti gli osservatori ottengono tale fattore.

In virtù del teorema precedente, la sezione d'urto invariante risulta essere

$$\sigma = \frac{1}{4[(p_a^\mu p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}}} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left[ p_a^\mu + p_b^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right]$$

Essa è la sezione d'urto che si misura lungo il moto della particella.

## 4 Misure in fisica delle particelle

Le particelle hanno quattro tipi di interazioni (forte, elettromagnetica, debole, gravitazione). Il tipo utilizzato per la rivelazione è l'interazione elettromagnetica perché ha raggio infinito ed è intensa. Per rivelare le particelle si utilizza un processo che trasforma le particelle in particelle cariche.

## 4.1 Particelle cariche massive

Una particella pesante ha una massa molto maggiore di quella dell'elettrone  $M \gg m_e$ . Questo si applica al muone, al pione, al protone, al neutrone, ma non va bene per l'elettrone, il fotone e tutte le particelle neutre. Una particella pesante che attraversa un mezzo materiale (un aggregato di atomi che sono per lo più spazio vuoto e la loro massa è concentrata nel nucleo) risente di una forza elettromagnetica dal nucleo e un'altra dagli elettroni di ogni atomo.

Si consideri l'interazione con un elettrone: se la particella colpisce un elettrone allora lo espelle dall'atomo. In prima approssimazione, la particella mantiene una traiettoria imperturbata, mentre gli elettroni incontrati vengono espulsi. Risulta chiaro che la particella perde energia se interagisce con tanti elettroni, ma con pochi si può ipotizzare che la traiettoria sia a tutti gli effetti imperturbata. Se la particella interagisce con il nucleo allora viene diffuso dal nucleo stesso perché più pesante.

Il processo di scattering con un elettrone sottrae energia al protone. Il processo di scattering con il nucleo modifica la traiettoria della particella senza perdite di energia. In questo corso si fa solo il primo processo perché permette trasferire energia dalla particella ad un rivelatore (cioè il mezzo materiale).

Si calcola la quantità di energia persa da una particella carica massiva quando questa attraversa un mezzo materiale colpendo gli elettroni presenti. Questo calcolo sfrutta l'elettrodinamica relativistica con correzioni quantistiche. Tuttavia, esiste un modo più semplice il cui risultato è la formula classica di Bohr. Il metodo basa su tre ipotesi:

- la particella incidente è pesante  $M \gg m_e$ ,
- l'energia ceduta in un urto è molto minore della massa dell'elettrone cioè l'urto non è relativistico,
- l'elettrone è in quiete durante lo scattering con la particella pesante.

L'ultima approssimazione si traduce nel fatto che prima passa il protone (quindi l'elettrone è statico), poi l'elettrone viene diffuso. Questo permette di utilizzare l'elettrostatica al posto dell'elettrodinamica. Si procede ad una derivazione semplificata che necessita di correzioni.

Si consideri una particella pesante, di massa  $M$  e carica  $\pm ze$ , in movimento lungo l'asse  $x$  che passa nelle vicinanze di un elettrone posto sull'asse  $y$  [immaginate]. La minima distanza della particella dall'elettrone è il parametro di impatto  $d$ . La forza  $\mathbf{F}$  sentita dall'elettrone è la forza di Coulomb. Se l'urto non è relativistico, allora si può applicare il teorema dell'impulso

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{fin}} - \mathbf{p}_{\text{in}}$$

poiché l'elettrone è in quiete, si ha  $\mathbf{p}_{\text{in}} = 0$ . Per simmetria di traslazione del moto, l'impulso ha componente solo lungo  $y$  cioè la direzione perpendicolare al moto

$$\mathbf{I} = I_y \hat{j} = I \hat{j} = I_{\perp} \hat{j}$$

Quindi, l'impulso è pari a

$$I = I_{\perp} = \int \mathbf{F} dt = \int eE_{\perp} dt = e \int E_{\perp} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

Sfruttando la velocità non relativistica, l'energia ceduta ad un singolo elettrone è piccola e la velocità con cui si muove la particella è praticamente invariata (per un singolo urto):

$$I \approx \frac{e}{v} \int E_{\perp} dx$$

Si utilizza la terza ipotesi: il problema elettrodinamico diventa elettrostatico e vale la legge di Coulomb. Il flusso del campo elettrico generato dalla particella che attraversa la superficie laterale del cilindro di raggio pari al parametro di impatto  $b$  e asse lungo il moto della particella è

$$\Phi = \int 2\pi b E_{\perp} dx = \frac{ze}{\varepsilon_0} \implies \int E_{\perp} dx = \frac{ze}{2\pi\varepsilon_0 b} \implies I_{\perp} = \frac{ze^2}{2\pi\varepsilon_0 bv} = p_f$$

L'energia acquisita dall'elettrone a causa del passaggio della particella è data da

$$\Delta E(b) = \frac{|\mathbf{p}_f|^2}{2m_e} = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{z^2 e^4}{8m_e (\pi \varepsilon_0 b v)^2}$$

Essa è l'energia ceduta dalla particella ad un singolo elettrone. L'energia acquisita dagli elettroni che si trovano ad un parametro di impatto  $b$  è pari a

$$d^2 E = \Delta E(b) N_e dV = \Delta E(b) N_e 2\pi b db dx = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi \varepsilon_0^2 v^2 m_e} \frac{db}{b} dx$$

dove  $N_e$  è la densità degli elettroni. La perdita di energia per unità di lunghezza integrata su tutti i parametri di impatto è

$$d_x E = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi \varepsilon_0^2 v^2 m_e} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

I valori estremi del parametro di impatto sono dati da due limiti fisici.

## Lezione 9

mer 15 mar  
2023 13:30

Prima di derivare i due parametri di impatto, si osservano alcune particolarità. Dalla formula si nota che più lenta è la particella, maggiore energia si perde: se la particella passa lentamente accanto l'elettrone, allora i due trascorrono tanto tempo vicini e possono scambiare una grande quantità di energia perché l'impulso è proporzionale al tempo di interazione (si veda come si definisce l'impulso). La formula conferma l'aspettativa che una maggiore densità di elettroni porti ad una maggiore perdita di energia. La densità di elettroni non è la densità del mezzo. Essa si può ricavare come

$$N_e = Z \frac{\rho}{A} N_A$$

dove  $Z$  è il numero atomico del materiale,  $A$  è la massa molare<sup>1</sup> e  $N_A$  è la costante di Avogadro (con dimensioni del reciproco di quantità di sostanza  $\text{N}^{-1}$ ). In generale, la perdita di energia di una particella è

$$d_x E \propto \rho(x) \frac{Z}{A}$$

il valore numerico della frazione risulta essere circa  $\frac{1}{2}$  per tutti gli elementi. Di solito, si esprime la perdita di energia con dimensioni  $\text{EL}^{-1}$  e unità  $\text{MeV cm}^{-1}$ . Tuttavia, si può utilizzare la mass thickness

$$\tilde{x} = \rho x, \quad \dim \tilde{x} = \text{ML}^{-2}$$

da cui si definisce la perdita di energia normalizzata per la densità del mezzo con dimensioni e unità

$$\dim(d_{\tilde{x}} E) = \text{EL}^2 \text{M}^{-1}, \quad \text{MeV cm}^2 \text{g}^{-1}$$

Tipicamente si utilizza questa quantità perché così si ha una perdita di energia che prescinde dal materiale. Per  $v \rightarrow 0$  si ha una divergenza oppure per  $b_{\max} \rightarrow \infty$ . Questo perché si sono operate delle approssimazioni: in particolare, particella massiva  $M \gg m_e$  ed urto non relativistico  $\Delta E(b) \ll m_e$ . Quest'ultima approssimazione porta ad una contraddizione: non tenendo conto che in un urto reale esiste una massima energia che si può trasferire, allora per  $v \rightarrow 0$  si ha una divergenza. In fisica classica, la massima energia che si può trasferire corrisponde a due volte il momento:

$$K = \frac{1}{2} m (2v)^2$$

<sup>1</sup>La notazione è confusa. Propriamente, la massa molare  $M$  è il prodotto della massa atomica relativa  $A_r$  (relative atomic mass, adimensionale) e la costante di massa molare  $M_u$  (molar mass constant), con dimensioni di massa su quantità di sostanza  $\text{MN}^{-1}$ , cioè unità di misura  $\text{g mol}^{-1}$ . Tipicamente, il simbolo  $A$  denota il numero di massa, cioè il numero di nucleoni di un atomo.

La stessa cosa vale per la relatività:  $2\gamma^2 mv^2$ . Un valore massimo di energia trasferibile implica un valore minimo al parametro di impatto. Tale valore, che non contraddice la conservazione del quadri-momento, è dato da

$$\Delta E(b_{\min}) = E_{\max} = 2\gamma^2 mv^2 = \frac{z^2 e^4}{8m(\pi\epsilon_0 b_{\min} v)^2} \implies b_{\min} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m v^2}$$

Si calcola il parametro d'impatto massimo. Per un parametro di impatto delle dimensioni atomiche, la regione che contribuisce all'energia è un intorno dell'elettrone, allontanandosi la forza diminuisce come  $r^{-2}$ . Per un parametro di impatto arbitrariamente grande, lungo un segmento notevole di traiettoria, la distanza tra l'elettrone e la particella è circa la distanza minima tra i due: la regione che contribuisce allo scattering è molto più ampia del caso precedente. In un mezzo materiale, quando una considerevole parte della traiettoria della particella è soggetta all'influenza dell'elettrone, cioè l'interazione avviene su tempi lunghi, l'approssimazione che l'elettrone sia in quiete viene meno. Per grandi valori del parametro di impatto, il passaggio della particella trasferisce energia all'elettrone quando quest'ultimo compie una o più orbite attorno all'atomo associato: bisogna correggere i calcoli svolti tenendo conto del fatto che l'elettrone cambia continuamente posizione. Tramite l'approssimazione adiabatica, si dimostra che se il tempo dell'interazione è dell'ordine del tempo di orbita dell'elettrone attorno all'atomo, allora l'energia trasferita è trascurabile  $\Delta E(b) = 0$ . Questa condizione fissa il parametro d'urto massimo. La particella produce un campo elettromagnetico variabile nella posizione dell'atomo. Nel riferimento della particella, la durata per cui il campo è apprezzabile risulta essere  $t \approx \frac{b}{v}$ . Nel riferimento del laboratorio (quello dell'elettrone) si ottiene

$$b_{\max} = \gamma \tau v = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}}, \quad \tau = \frac{b}{\gamma v}$$

dove  $\bar{\nu}$  è la frequenza media di orbita dell'elettrone. La formula classica di Bohr risulta essere

$$d_x E = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m v^2} \ln \frac{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 m v^3}{ze^2 \bar{\nu}}$$

La formula di Bethe(-Bloch) migliora la formula classica di Bohr utilizzando l'elettrodinamica quantistica. Nelle unità del sistema internazionale essa è

$$d_x E = (0.15 \text{ MeV cm}^2 \text{ mol}^{-1}) \cdot \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \ln \frac{2m\gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 - \delta(\gamma) - \frac{2C(\beta\gamma, I)}{Z} \right]$$

dove il coefficiente numerico è dato da

$$\frac{1}{2} \frac{e^4 N_A}{4\pi\epsilon_0^2 m c^2} = 0.15 \text{ MeV cm}^2 \text{ mol}^{-1}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Il termine  $W_{\max}$  è la massima energia cinetica trasferibile in un singolo urto

$$W_{\max} = 2\gamma^2 m_e v^2, \quad M \gg m_e$$

Il fattore  $I$  è l'energia media di ionizzazione che corrisponde a  $\hbar\bar{\nu}$  nel modello classico di Bohr. Gli ultimi tre addendi sono delle correzioni relativistiche:  $\delta(\gamma)$  è la density correction,  $\frac{2C(\beta\gamma, I)}{Z}$  è la shell correction e  $2\beta^2$  è la relativistic rise.

Il grafico di  $d_x E$  andando da  $v = 0$  a  $v = 1$  scende da infinito (come  $v^{-2}$ ) fino ad un minimo globale positivo a  $v = 0.94$  e poi risale appiattendosi. Dal grafico si nota che una particella non relativistica scambia una grande energia all'elettrone perché passa tanto tempo in sua prossimità. Aumentando la velocità, l'energia scambiata diminuisce come  $v^{-2}$  fino ad un minimo per poi risalire. Il minimo si trova a tra  $1 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$  e  $2 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$ , mentre la risalita si appiattisce tra  $13 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$  e  $25 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$ : la risalita non è drammatica. Essa è detta relativistic rise perché è effetto puramente relativistico: a velocità relativistiche, il

campo elettrico perpendicolare al movimento della particella (cioè quello che contribuisce all'interazione particella-elettrone) diventa più intenso e da ciò l'energia scambiata aumenta. Il fatto che la componente perpendicolare del campo elettromagnetico sia quella che si trasforma secondo Lorentz (quindi non è invariante) è una dimostrazione del motivo per cui le onde elettromagnetiche sono onde trasverse: per  $v \rightarrow 1$ , le linee di campo sono perpendicolari alla direzione del moto.

Si vede il significato degli altri termini. Per quanto detto, la perdita di energia per una particella prossima alla velocità della luce dovrebbe essere infinita perché il campo elettrico nel riferimento dell'elettrone è  $E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}$ . Nella realtà non succede, per questo viene aggiunto il termine  $\delta(\gamma)$  che sopprime la divergenza. Infatti, nel riferimento della particella in movimento, gli elettroni generano campi elettrici intensi. In quanto gli elettroni fanno parte di un mezzo materiale, i campi elettrici producono una polarizzazione del materiale stesso che attenua il campo elettrico della particella: in questo modo si compensa la divergenza. La correzione si chiama density correction perché essa è data dal trovarsi in un mezzo materiale.

Infine, anche la shell correction è una correzione empirica. Serve per descrivere velocità classiche  $v \rightarrow 0$ . La divergenza in tale limite diventa un picco che ricurva verso zero. Si vede il significato fisico: un protone praticamente stazionario sottrae un elettrone al mezzo materiale trasformandosi in un atomo di idrogeno cioè uno stato stabile. L'atomo di idrogeno è neutro e dunque non può più perdere energia nell'interazione. Se la particella è carica negativamente, allora viene catturata da un atomo andando a costituire un sistema neutro.

Una particella con la minima perdita di energia viene detta minimum ionizing particle (MIP). Quando essa rallenta, la perdita di energia aumenta, quindi rallenta ancora perdendo più energia: si crea una retroazione positiva fino a quando si ferma. La particella si muove di moto rettilineo uniforme e poi si ferma bruscamente. La massima energia depositata avviene alla fine della traiettoria in modo localizzato: si ha il picco di Bragg. Il range  $R$  di una particella è il percorso fatto da tale particella pesante pari a

$$R = \int_{K_{in}}^0 dx dE = \int_{K_{in}}^0 (d_x E)^{-1} dE$$

Il picco di Bragg è utile nell'adroterapia.

## 4.2 Particelle cariche leggere

Si studia il comportamento di un elettrone. In questo caso, non si può più utilizzare l'ipotesi di particella massiva per presupporre una traiettoria rettilinea durante l'interazione con un elettrone. Pertanto, il range di un elettrone è molto maggiore della profondità  $x$  raggiungibile. Finora si è considerato un unico modo di perdita di energia. Tuttavia, le particelle cariche perdono energia anche per radiazione, per bremsstrahlung. La formula di Larmor-Liénard descrive la potenza perduta in un moto accelerato. Tale fenomeno è più intenso per particelle leggere in quanto la potenza emessa dipende da  $\gamma^4$  e  $\gamma^6$ : dato che  $E = \gamma m$ , a parità di energia, particelle più leggere, irradiano di più. La seconda particella elementare carica più leggera è il muone con duecento volte la massa dell'elettrone: la perdita di energia per radiazione è un fenomeno caratteristico e dominante per gli elettroni (ed i positroni) perché leggeri.

L'energia critica  $E_c$  è l'energia alla quale la perdita di energia per la formula di Bethe diventa circa uguale alla perdita di energia per radiazione. Risulta tipico nominare la perdita di energia per la formula di Bethe come perdita di energia per ionizzazione: l'interazione con un elettrone conferisce a questi dell'energia ed esso si separa dall'atomo ionizzandolo. Una frazione di energia ceduta per la formula di Bethe può essere utilizzata per produrre ioni.

Quando una particella ha raggiunto l'energia critica, allora

$$(d_x E)_{totale} = (d_x E)_{Bethe} + (d_x E)_{rad}, \quad (d_x E)_{Bethe} = (d_x E)_{rad}$$

Una formula semi-empirica per i materiali a stato solido che fornisce l'energia critica è

$$E_c \approx \frac{610 \text{ MeV}}{Z + 1.24}$$

Ad esempio, il piombo ha un'energia critica di 7.4 MeV. L'aria ha un'energia critica di 84 MeV. L'atomo di piombo è più pesante degli atomi dei composti dell'aria, pertanto un elettrone riceve un'accelerazione maggiore. Infine, l'acqua ha energia critica pari a 78 MeV.

Sebbene la perdita di energia per radiazione sia un fenomeno complesso (utilizzando il potenziale Liénard-Wiechert) e tenendo conto degli effetti quantistici, la formula empirica della perdita di energia è semplice. La perdita di energia di una particella in un mezzo è

$$E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}, \quad X_0 \approx \frac{716 \text{ g cm}^{-2}}{\rho(Z+1) \ln \frac{287}{\sqrt{Z}}} \frac{A}{Z} \propto \frac{1}{\rho} \frac{1}{Z+1}$$

dove  $X_0$  è la lunghezza di radiazione e  $A$  è il numero di massa. Si possono classificare i mezzi in base alla loro lunghezza di radiazione. Dopo una profondità  $X_0$ , l'energia rimanente è pari a circa un terzo dell'energia iniziale. Usando queste formule si dimostra l'esistenza dell'anti-materia.

## Lezione 10

lun 20 mar  
2023 13:30

### 4.3 Scoperta dell'anti-materia

L'anti-materia venne scoperta tramite l'esperimento di Anderson del 1932. L'esperimento è costituito da una camera a nebbia cioè una camera in cui è presente dell'aria umida al punto di condensazione dell'acqua. Nel mezzo della camera è presente una barriera di 6 mm di piombo e si ha un campo magnetico parallelo ad essa (ed entrante). La camera è collegata ad un pistone che, sollevato, causa un'espansione adiabatica: la temperatura scende e l'acqua condensa. Il passaggio di una particella carica provoca una ionizzazione dell'aria ed il vapore acqueo si condensa prima in tale zona: si osserva una traiettoria. Questo è lo stesso fenomeno di formazione delle nuvole. Tuttavia, la formazione è un processo alquanto complicato. Le nuvole si formano in atmosfera perché sono presenti delle impurezze oltre all'acqua.

Anderson ripete l'esperimento e osserva una particella carica che attraversa la lastra di piombo curvando in senso anti-orario e fermandosi dopo 50 mm dalla lastra. Tramite la traiettoria si può dedurre il momento ed il segno della particella senza conoscerne la massa. Esiste una relazione tra il momento  $p$  e il raggio di curvatura  $R$  dovuto alla presenza di un campo magnetico  $B$ :

$$p \approx (0.3 \text{ GeV T}^{-1} \text{ m}^{-1}) BR$$

Si vede come ricavare questa formula. Una particella carica in un campo magnetico subisce l'effetto della forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

Si ricordi che essa è compatibile con la relatività speciale. Si tratta una caso semplice: la traiettoria particella giace su un piano ortogonale al campo magnetico. Dalla definizione di forza si ha

$$\mathbf{F} = d_t \mathbf{p} = \gamma m d_t \mathbf{v} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \implies d_t \mathbf{v} = \frac{q}{\gamma m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Poiché il campo magnetico non compie lavoro sulla particella, allora il modulo della velocità non cambia e così il fattore  $\gamma$  di Lorentz. Si introduce la frequenza di precessione

$$\omega_B = \frac{q\mathbf{B}}{\gamma m} = \frac{qB}{E}$$

da cui si ottiene l'equazione di un moto circolare uniforme

$$\boxed{d_t \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \omega_B} \implies v_x = v_{x_0} \sin \omega_B t, \quad v_y = v_{y_0} \cos \omega_B t$$

Si calcola il raggio di curvatura dell'orbita circolare. Si sfrutta la relazione tra la velocità angolare e la velocità tangenziale. Nel caso in esame si ha

$$d_t p = p \omega_B$$

da cui

$$\frac{v}{R} = \omega_B = \frac{1}{p} d_t p = \frac{1}{p} q v B \implies \boxed{p = q R B}$$

Questa formula prescinde dalla massa della particella. La relazione sopra coincide con quella vista ad inizio sezione quando si esprime il momento in  $\text{GeV } c^{-1}$  e si considera la carica  $q = e$  elementare: bisogna dividere per il valore numerico di  $e$  e moltiplicare per  $c$ .

Nell'esperimento di Anderson, il momento della particella osservato prima della barriera fu  $p_{\text{in}} = 63 \text{ MeV}$ , mentre dopo la barriera fu  $p_{\text{fin}} = 23 \text{ MeV}$ . All'epoca l'unica particella nota con carica positiva era il protone. Esso ha una massa pari a  $m_p \approx 938 \text{ MeV}$  per cui l'energia della particella sarebbe

$$E_{\text{in}} = \sqrt{m_p^2 + p_{\text{in}}^2} \approx m_p \implies v = \frac{p}{m} = \frac{63 \text{ MeV}}{938 \text{ MeV}} \approx 0.07$$

Secondo la formula di Bethe, se la particella fosse un protone, allora a tale velocità perderebbe molta energia ed avrebbe un range di  $R \approx 1 \text{ mm}$ : non è compatibile con le osservazioni di  $50 \text{ mm}$ . Bensì, le osservazioni sono spiegate da una particella con carica del protone, ma con massa dell'elettrone, cioè il positrone  $e^+$ . Infatti, si ha

$$E_{\text{in}} = \sqrt{m_e^2 + p_{\text{in}}^2} \approx p_{\text{in}} = 63 \text{ MeV}, \quad E_{\text{fin}} \approx 23 \text{ MeV}$$

La velocità della particella risulta essere prossima a quella della luce. Una particella leggera di questo tipo perde la maggiore energia per radiazione. L'energia della particella dopo aver attraversato il piombo risulta essere

$$E = E_0 e^{-\frac{6 \text{ mm}}{X_0}}, \quad X_0(\text{Pb}) \approx 5 \text{ mm}$$

Infatti,  $23 \text{ MeV}$  è circa un terzo dell'energia iniziale  $63 \text{ MeV}$ . Calcolando il range in aria, si ottiene un risultato pari a quanto osservato.

**Anti-particelle.** Negli anni successivi all'esperimento si sono scoperte le controparti anti-materiali delle altre particelle note. Le anti-particelle risultano essere una proprietà generale della meccanica quantistica. Infatti, si definisce l'operatore di C-parità che cambia il segno della carica di uno stato quantistico

$$C |\mathbf{p}, \mathbf{S}, m, q\rangle = |\mathbf{p}, \mathbf{S}, m, -q\rangle$$

Le particelle cariche e le loro anti-particelle decadono in modi diversi, grazie al segno diverso della carica. Tuttavia, per le particelle neutre si hanno due possibilità: l'anti-particella è distinta dalla particella oppure le due coincidono. Ad esempio, il neutrone e l'anti-neutrone sono particelle distinte e decadono in modi diversi

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e, \quad \bar{n} \rightarrow \bar{p} e^+ \nu_e$$

Però altre particelle coincidono con le proprie anti-particelle, come il pione  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  ed il fotone. Ciò che determina la coincidenza con la propria particella è la composizione: tranne il fotone, le particelle citate non sono elementari, ma sono stati legati di quark. Un protone è costituito da due quark up ed uno down, l'anti-protone ha due anti-up e due anti-down. Il neutrone ha un up e due down, l'anti-neutrone un anti-up e due anti-down. Il pione è la combinazione

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \implies C\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) = \pi^0$$

Modernamente, solo del neutrino non si sa se coincide con la propria anti-particella.



**Teorema CPT.** Il teorema CPT, dimostrato da Pauli e Lüders nel 1954, fornisce la motivazione moderna dell'esistenza dell'anti-materia. Il teorema afferma che qualunque teoria compatibile con gli assiomi della relatività speciale e della meccanica quantistica, con hamiltoniana hermitiana e locale, gode della simmetria per cambio simultaneo del segno della carica, parità e direzione temporale. La funzione d'onda soluzione dell'equazione del moto (Schrödinger o Dirac) cambiata di carica, parità e direzione temporale è ancora soluzione dell'equazione del moto con le stesse probabilità di transizione. Qualunque sistema fisico dev'essere invariante per simmetria di CPT, cioè la combinazione di C-parità, parità e T-parità. Un corollario di questo teorema è l'esistenza dell'anti-materia. Un elettrone che si muove in una direzione ha la stessa probabilità di un positrone che si muove nella stessa direzione. La dimostrazione di questo teorema sfrutta la teoria dei gruppi, in particolare la rappresentazione del gruppo di Poincaré.

#### 4.4 Interazione di un fotone con la materia

La scoperta dell'anti-materia permette considerare nuovi decadimenti: la produzione di coppia e l'annichilazione elettrone-positrone. Queste due reazioni non possono avvenire nel vuoto per conservazione del quadri-momento.

**Produzione di coppia – pair production – nel vuoto.** Nel vuoto, un fotone non si può trasformare in una coppia di elettrone-positrone [immagine]. Si consideri il momento del fotone nel laboratorio

$$p_\gamma^\mu = (p, 0, 0, p)$$

Le traiettoria dell'elettrone e del positrone individuano un piano, pertanto si può porre il riferimento tale che i momenti dell'elettrone e del positrone sono rispettivamente

$$p_-^\mu = (E_-, p_-^1, 0, p_-^3), \quad p_+^\mu = (E_+, p_+^1, 0, p_+^3)$$

Per conservazione del momento nella prima e nella terza componente, si ha

$$0 = p_-^1 + p_+^1, \quad p = p_-^3 + p_+^3$$

Per conservazione dell'energia si ottiene

$$\begin{aligned} p &= E_- + E_+ = \sqrt{m_e^2 + (p_-^1)^2} + \sqrt{m_e^2 + (p_+^1)^2} \\ &= \sqrt{m_e^2 + (p_-^1)^2 + (p_-^3)^2} + \sqrt{m_e^2 + (p_+^1)^2 + (p_+^3)^2} > p_-^3 + p_+^3 = p \end{aligned}$$

cioè una contraddizione (l'ultima uguaglianza deriva dalla conservazione della terza componente del momento). Infatti, se la produzione di coppia fosse possibile nel vuoto, allora l'osservatore solidale al centro di massa della coppia elettrone-positrone deve vedere il fotone fermo per conservazione della quantità di moto, ma ciò non è possibile.

#### Lezione 11

Si studiano le modalità di interazione di un fotone con la materia tramite le quali caratterizzare i rivelatori di particelle. Ci si concentra sui fotoni ad alta energia cioè nell'intervallo da 10 keV a 100 GeV.

mar 21 mar  
2023 13:30

**Effetto fotoelettrico.** L'effetto fotoelettrico è la modalità più utile nell'osservazione dei fotoni e nella misura della loro energia. Tale effetto è dominante nell'intervallo di energie da 10 keV a 5 MeV. L'effetto fotoelettrico si verifica quando un fotone incide su di un atomo rimuovendo un suo elettrone così ionizzandolo. Questo è un modo semplice per trasformare una particella neutra in una carica.

La definizione data di effetto fotoelettrico è generale. Tipicamente lo si introduce come prima

evidenza di quantizzazione del campo elettromagnetico. La sua scoperta è stata nei metalli che è un caso particolare. In un metallo, l'energia dell'elettrone risulta essere

$$E_e = h\nu - \phi_{\text{work function}}$$

dove  $\phi_{\text{w.f.}}$  è l'energia necessaria per lasciare la struttura cristallina del metallo. In generale, l'energia di un elettrone è

$$E_e = h\nu - E_{\text{legame}}$$

Il vantaggio dell'effetto fotoelettrico è di convertire l'energia del fotone in energie di un elettrone, seppur con una perdita. Lo svantaggio è l'andamento funzionale della sezione d'urto. Questa, cioè la probabilità che un fotone venga assorbito da un atomo, in funzione dell'energia decresce all'aumentare dell'energia stessa

$$\sigma \propto \frac{Z^5}{E^{\frac{7}{2}}}$$

Ad energie superiori a 1 MeV la sezione d'urto è trascurabile. Nel grafico si hanno dei piccoli picchi (K-edge, L-edge, etc) causati dall'assorbimento risonante dei fotoni che portano gli elettroni al continuo. I picchi corrispondono ad elettroni negli stati  $n = 1$ ,  $n = 2$ , etc, rispettivamente.

**Effetto Compton.** L'effetto Compton è l'effetto che si cerca di eliminare il più possibile al fine di rivelare fotoni. Questo effetto è la falsificazione diretta delle equazioni di Maxwell. Un fotone incide su di un elettrone stazionario mettendolo in moto. Il fotone uscente ha una frequenza (quindi energia) minore di quello incidente secondo la formula di Compton

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m}(1 - \cos \theta)}$$

Questo processo è terribile per la rivelazione di fotoni: si ha un trasferimento parziale dell'energia che impedisce di ricostruire l'energia iniziale. Infatti, l'energia cinetica dell'elettrone dopo la collisione è

$$K_e = h(\nu - \nu') = \frac{(h\nu)^2(1 - \cos \theta)}{m + h\nu(1 - \cos \theta)}$$

Per conoscere l'energia del fotone iniziale sapendo l'energia dell'elettrone, bisogna misurare anche l'angolo di scattering  $\theta$  del fotone uscente. Gli elettroni perdono energia per radiazione Bethe e nei mezzi materiali si fermano quasi subito: risulta difficile ricostruire la traiettoria dell'elettrone, ma si misura solamente l'energia depositata. L'effetto Compton impedisce di conoscere l'energia di un singolo fotone, ma per più fotoni identici (ad esempio generati da fonti radioattive), si possono osservare i conteggi degli elettroni in funzione della loro energia ottenendo un grafico detto Compton edge. Tale grafico si interrompe bruscamente in corrispondenza della massima energia cinetica dell'elettrone

$$K_e = \frac{2(h\nu)^2}{m + 2h\nu}, \quad \theta = \pi$$

L'effetto fotoelettrico si trova ad energia maggiore del Compton edge manifestandosi come un picco detto photopeak. La differenza tra il centro del picco e la fine del Compton edge è

$$\Delta = E_\gamma - K_{\text{max}} = \frac{E}{1 + \frac{2E}{m}}$$

Se il fotone è sufficientemente energetico, allora il delta è circa la metà della massa dell'elettrone. Nei rivelatori, si vuole sopprimere l'effetto Compton. La sezione d'urto aiuta in tale intento

$$\sigma \propto \frac{Z}{E}$$

diminuisce con l'energia e dipende linearmente dal numero atomico. Essa risulta importante nell'intervallo da 100 keV a 10 MeV. Dunque, per rivelare fotoni, bisogna usare dei mezzi con numero atomico grande di modo che l'effetto fotoelettrico sovrasta di gran lunga l'effetto Compton:  $Z^5$  contro  $Z$ .

**Produzione di coppia.** Per energie  $E \gtrsim 10 \text{ MeV}$  si ha la produzione di coppia. Nella materia, un fotone interagisce con un atomo e produce una coppia elettrone-positrone, eventualmente trasferendo energia all'atomo colpito. A differenza del caso nel vuoto, si utilizza il riferimento solidale all'atomo.

Si ricava l'energia minima affinché un fotone possa produrre una coppia in un mezzo materiale. La configurazione di minima energia corrisponde a tutte le particelle finali a riposo. Questo non può avvenire nel riferimento del laboratorio (per conservazione del momento), bensì può avvenire nel riferimento solidale al centro di massa (cioè quello dell'atomo). Si utilizza un invariante di Lorentz: la prima variabile di Mandelstam

$$s = p_{\text{tot}}^\mu (p_{\text{tot}})_\mu$$

Nel riferimento del laboratorio, lo stato iniziale delle particelle è

$$p_\gamma^\mu = (p, 0, 0, p), \quad p_N^\mu = (M, 0, 0, 0), \quad p_{\text{tot}}^\mu = p_\gamma^\mu + p_N^\mu = (p + M, 0, 0, p)$$

La prima variabile di Mandelstam risulta essere

$$s_i = (p + M)^2 - p^2 = 2Mp + M^2 = M(2p + M)$$

si noti che il valore numerico è un invariante, non l'espressione particolare ricavata (perché  $p$  cambia in base al riferimento). Nel riferimento solidale al centro di massa, lo stato finale è

$$p_-^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad p_+^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad p_N^\mu = (M, 0, 0, 0), \quad p_{\text{tot}}^\mu = (2m + M, 0, 0, 0)$$

La prima variabile di Mandelstam è

$$s_f = (2m + M)^2$$

Per conservazione del quadri-momento, la prima variabile di Mandelstam è conservata

$$s_i = s_f \implies p = 2m \frac{m + M}{M}$$

L'energia del fotone dev'essere superiore a questa quantità per produrre una coppia. Se il fotone incide sul nucleo  $M$ , che è massivo rispetto all'elettrone  $m$  ed al positrone  $m$ , allora  $p \approx 2m$ . Se il fotone urta un elettrone  $M = m$ , allora  $p = 4m$ . La sezione d'urto di un fotone contro un atomo è dominata dall'interazione con il nucleo, quindi  $p \gtrsim 2m = 1 \text{ MeV}$ . Per qualche MeV, la sezione d'urto è ancora piccola, ma il processo domina per energie  $E \gtrsim 10 \text{ MeV}$ . Se l'energia del fotone è molto maggiore di  $2m_e$ , allora le sezioni d'urto dell'effetto fotoelettrico e dell'effetto Compton svaniscono.

## 4.5 Rivelazione di fotoni

Visto prima come un elettrone interagisce nella materia e poi come interagisce un fotone, si studia come interagisce un positrone con la materia. Essendo una particella carica, un positrone perde energia per Bethe e per radiazione. Il suo comportamento differisce dall'elettrone quando rallenta: il positrone si ferma vicino ad un elettrone con cui interagisce e i due producono due fotoni (due perché il momento dev'essere conservato).

Si vede precisamente il processo di interazione di un positrone con la materia. Il positrone viaggia perdendo energia per Bethe e radiazione. Poi rallenta fino a costituire uno stato legato con un elettrone detto positronio. Esso è instabile: i due costituenti si annichiliscono. L'energia dei fotoni prodotti è pari alle masse dei costituenti meno l'energia di legame che è trascurabile (l'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno è appena  $13.6 \text{ eV}$ ).

Un positrone che interagisce con la materia si comporta come un elettrone fino a quando non si ferma, poi crea uno stato legato e produce due fotoni. L'annichilazione è insidiosa: una parte dell'energia del fotone va a costituire l'elettrone che è facile da rivelare, ma l'altra parte costituisce il positrone che si annichilisce produce altri fotoni che non si possono rivelare direttamente.

Bisogna sperare che i fotoni siano sottoposti ad effetto fotoelettrico (caso migliore, l'energia del fotone iniziale è tutta trasformata in particelle cariche), scattering Compton (caso peggiore) oppure produrre un'altra coppia, tutto questo prima di fuggire dal rivelatore, altrimenti l'energia misurata è minore (first e second escapes, in base a quanti fotoni fuggono, pari all'energia del fotone meno una o due volte la massa dell'elettrone). Nella realtà, il grafico dei conteggi è la sovrapposizione degli effetti citati.

**Fotoni ad alta energia.** Per alte energie non si ha effetto fotoelettrico né effetto Compton. Si ha solamente produzione di coppia. Per un fotone a 1 GeV, l'elettrone ed il positrone prodotti hanno entrambi 500 MeV e perdono energia principalmente per radiazione (perché la formula di Bethe è limitata ad alte energie). Quindi per radiazione, le due particelle emettono fotoni, in questo esempio da 250 MeV. Tali fotoni producono altre coppie e così via. Si ha una cascata di particelle, uno sciame elettromagnetico (electromagnetic shower). Tali sciame (insieme a quelli adronici) hanno permesso la scoperta di nuove particelle.

Si può calcolare quante particelle sono prodotte in uno sciame e quanto lo sciame si estende nella materia tramite l'approssimazione di Rossi. In media, per energie molto maggiori di 10 MeV, un elettrone ed un positrone emettono un fotone ciascuno ogni lunghezza di radiazione. L'energia di tale fotone è la metà dell'energia della particella prima dell'emissione. Analogamente, ad energie molto maggiori di 10 MeV, in media un fotone produce una coppia elettrone-positrone ogni lunghezza di radiazione. L'energia di ciascuna particella è circa la metà dell'energia del fotone. Sia  $t$  il numero di lunghezze di radiazione  $X_0$  attraversate dallo sciame. Il numero totale di particelle prodotte nello sciame è  $N_{\text{tot}} = 2^t$ . L'energia minima delle particelle prodotte si trova in corrisponde del numero massimo di lunghezze di radiazione percorse

$$E_{\min} = \frac{E_{\text{in}}}{2^t} = E(t_{\max}) = \frac{E_{\text{in}}}{2^{t_{\max}}} = E_c$$

Lo sciame non si ferma quando l'energia è nulla, ma quando è ancora positiva, inferiore all'energia critica (cioè quando per energia principalmente per Bethe). Il numero di lunghezze di radiazione percorse è

$$t_{\max} = \log_2 \frac{E_{\text{in}}}{E_c}$$

La profondità scala logaritmicamente con l'energia. Senza questo fenomeno, per fermare una particella servirebbero lunghezze di chilometri.

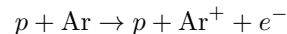
## Lezione 12

### 4.6 Rivelatori di particelle

mer 22 mar  
2023 13:30

I rivelatori di particelle si classificano in base all'evento elementare cioè il fenomeno che genera quantità osservabili a causa di una perdita di energia  $\Delta E$  di una particella.

**I - rivelatori a ionizzazione.** Una particella carica attraversa un gas nobile (tipicamente l'argon). Se la particella cede dell'energia ad un elettrone, questi può abbandonare l'atomo così ionizzandolo



L'energia ceduta per ionizzare l'argon non è pari all'energia di prima ionizzazione, ma dev'essere maggiore perché nell'urto tra una particella ed un atomo di argon, in alcuni casi l'atomo viene eccitato e poi esso ritorna nello stato fondamentale producendo al massimo un fotone. Per questo tipo di rivelatori l'evento elementare è la ionizzazione e l'energia  $w$  dell'evento elementare è maggiore dell'energia di prima ionizzazione. Per l'argon si ha  $w \approx 26 \text{ eV}$ .

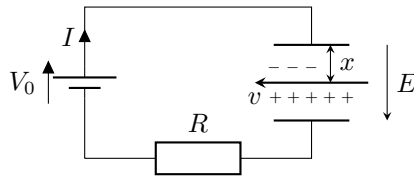
I rivelatori a ionizzazione sono quasi sempre costituiti da gas nobili. Questi sono gli elementi meno reattivi: l'elettrone prodotto per ionizzazione può viaggiare nel rivelatore senza essere catturato da un altro atomo.

**II - rivelatori a semiconduttore.** I semiconduttori sono materiali cristallini in cui la banda di conduzione è poco separata dalla banda di valenza con una differenza da 1 eV a 3 eV. L'agitazione termica non è in grado di condurre, ma bisogna fornire una piccola quantità di energia. Così un elettrone salta in banda di conduzione e si forma una buca nella banda di valenza. Applicando un piccolo campo elettrico la buca si sposta e si registra una corrente. Si può utilizzare la coppia elettrone-buca come evento elementare con energia  $w \approx 2 \text{ eV}$ .

**III - bolometri, rivelatori termici.** Si può scegliere come evento elementare il riscaldamento di un dielettrico: quando si scarica energia su di un mezzo continuo, esso si riscalda. Il riscaldamento di un dielettrico corrisponde all'eccitazione dei moti vibrazionali quantizzati in fononi. Quindi l'evento elementare è la produzione di fononi con energia  $w \approx 10 \text{ } \mu\text{eV}$ . Questi rivelatori sono detti bolometri o rivelatori termici. Il riscaldamento indotto da una particella elementare è piccolo, pertanto bisogna utilizzare termometri precisi e basse temperature  $T \approx 10 \text{ mK}$  per attenuare l'agitazione termica.

**IV - scintillatori.** L'estremo opposto dei bolometri utilizza eventi elementari facili da osservare, ma con energia  $w$  grande: gli scintillatori. Si consideri un isolante contaminato con livelli energetici posizionati poco al di sotto della banda di conduzione. Una particella cede energia ad un elettrone facendolo passare alla banda di conduzione. Da qua, l'elettrone che salta alla banda di valenza può passare prima per il livello energetico aggiunto. Il fotone prodotto dal salto dal livello alla banda di valenza non ha energia sufficiente per eccitare un altro elettrone alla banda di conduzione: in questo modo il fotone arriva al rivelatore (un fotomoltiplicatore). I fotomoltiplicatori possono osservare un singolo fotone con un'alta efficienza. Sebbene i fotoni si possano facilmente osservare, l'energia richiesta per passare alla banda di conduzione è grande  $w \approx 100 \text{ eV}$  perché si utilizza un isolante.

**Rivelatore semplice – camera a ionizzazione.** Si studia il più semplice rivelatore di particelle elementari. Una camera a ionizzazione è un condensatore piano con un dielettrico gassoso, tipicamente argon.



Sia  $d$  la distanza tra le armature del condensatore e sia  $x$  la distanza della particella dall'armatura positiva (l'anodo). Una particella che passa nel condensatore perde energia per Bethe e ionizza il gas: gli anioni si muovono verso l'armatura positiva con velocità  $v_-$  ed i cationi si muovono verso l'altra armatura con velocità  $v_+$ . Si noti che le due velocità sono costanti: quando sono presenti campi elettrici intensi in un mezzo materiale, gli elettroni hanno una velocità massima, detta di saturazione. Si vuole calcolare la tensione ai capi della resistenza che, nella realtà, è ciò che si osserva in un oscilloscopio. Il modo più semplice per rivelare le particelle è costruire il circuito di modo che si abbia

$$\tau = RC \gg t$$

dove  $t$  è il tempo necessario agli ioni per raggiungere le armature. Per campi elettrici di centinaia di volt, un elettrone ha velocità tipica di  $1 \text{ cm } \mu\text{s}^{-1}$  ed un catione ha velocità di  $1 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$ , quindi si trattano tempi di qualche microsecondo. Nella condizione sopra, gli ioni prodotti si muovono ed inducono una carica sulle armature che cambia il loro potenziale. La batteria genera una tensione costante, ma la resistenza ritarda il ripristino della tensione di un tempo pari al tempo caratteristico  $\tau$ . Se il tempo in cui gli ioni si muovono è molto minore del tempo caratteristico, allora il circuito non ripristina abbastanza velocemente la tensione costante  $V_0$ . Tale situazione equivale a considerare spento il generatore di tensione: vale la conservazione dell'energia perché il sistema è elettrostatico. Così si può calcolare la differenza di potenziale ai capi della resistenza.

Si consideri il momento subito successivo al passaggio della particella, quando il generatore non ha ancora cominciato a ripristinare il potenziale. L'energia del condensatore con generatore spento (quindi circuito aperto) è

$$E = \frac{1}{2}CV_0^2$$

Dopo qualche istante, gli ioni si muovono a causa del campo elettrico. L'energia acquisita dagli ioni deriva dall'energia del condensatore

$$\frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}CV_f^2 + n(-q)(-E_x)v_-t + nqE_xv_+t = \frac{1}{2}CV_f^2 + nqE_x(v_- + v_+)t, \quad q > 0$$

dove  $n$  è il numero di elettroni, che è pari al numero di cationi, prodotti dalla particella. I due addendi sono l'energia ceduta dal campo elettrico agli ioni. Dunque

$$\frac{1}{2}C(V_0^2 - V_f^2) = nqE_x(v_- + v_+)t$$

Sia  $\Delta V \equiv V_0 - V_f$  la tensione ai capi della resistenza. Inoltre, vale  $V_f \approx V_0$  poiché gli ioni prodotti dal passaggio di una particella sono dell'ordine di  $10^3$ , quindi la carica generata è dell'ordine del femtoCoulomb, ben minore della quantità di carica tipica dei condensatori. Quindi

$$\frac{1}{2}C(V_0 - V_f)(V_0 + V_f) \approx \frac{1}{2}C\Delta V 2V_0 = C\Delta V V_0 \approx nqE_x(v_- + v_+)t$$

Il campo elettrico in un condensatore piano risulta essere

$$E_x = \frac{V_0}{d} \approx \frac{V_f}{d}$$

Pertanto

$$CV_0\Delta V = nq\frac{V_0}{d}(v_- + v_+)t \implies \Delta V = \frac{nq}{dC}(v_- + v_+)t$$

La tensione ai capi della resistenza aumenta linearmente nel tempo. Gli elettroni sono più leggeri dei cationi e quindi si muovono più velocemente. Una volta che arrivano all'armatura, il campo elettrico non può più compiere lavoro su di essi. Quindi, l'andamento della tensione diventa

$$\Delta V = \frac{nq}{dC}(x + v_+t)$$

Per un tempo  $t$  maggiore al tempo necessario agli elettroni per raggiungere l'armatura, l'andamento rettilineo ha un coefficiente angolare minore. Quando anche i cationi raggiungono l'armatura, la differenza di potenziale diventa

$$\Delta V = \frac{nq}{dC}[x + (d - x)] = \frac{nq}{C} \propto n$$

cioè una potenziale costante. Tale potenziale è un conteggio di eventi elementari e quindi fornisce l'energia della particella. Per tempi lunghi, il generatore ripristina la differenza di potenziale iniziale ed il rivelatore ritorna nella condizione di partenza, così che possa passare un'altra particella.

Una camera a ionizzazione è un rivelatore semplice, tuttavia quando una particella passa nel condensatore, il numero di eventi elementari prodotti, cioè le coppie di ioni, è piccolo: si hanno pochi eventi osservabili. Infatti, la perdita di energia per Bethe di una MIP in una camera a ionizzazione di lunghezza  $L = 1 \text{ cm}$  è

$$\Delta E = d_x E L = d_{\tilde{x}} E \rho L \approx (1.5 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1})(10^{-3} \text{ g cm}^{-3})(1 \text{ cm}) \approx 1.5 \text{ keV}$$

da cui il numero di eventi è

$$n = \frac{d_x E}{w} = \frac{1.5 \text{ keV}}{26 \text{ eV}} \approx 58$$

Per misurare così pochi eventi serve una capacità piccola. Tuttavia, essa dipende dalla geometria del condensatore

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

ma se il condensatore è troppo piccolo, allora non si vede alcuna particella. Bisogna costruire un oggetto macroscopico facendo attenzione che la tensione  $\Delta V$  rivelata è inversamente proporzionale alla capacità. La camera a ionizzazione non è efficace nel rivelare una singola particella, ma il suo scopo è rivelare un gran numero di particelle (ad esempio da una sorgente radioattiva).

**Contatore proporzionale.** Per ovviare al poco numero di eventi elementari della camera a ionizzazione si utilizza il contatore proporzionale. L'idea è di costruire un rivelatore in cui il campo elettrico sia così intenso da fornire abbastanza energia ad un elettrone affinché esso possa ionizzare altri atomi. Un contatore proporzionale è un dispositivo in cui l'energia ceduta ad un elettrone in un libero cammino medio è maggiore dell'energia  $w$  dell'evento elementare. In un libero cammino medio, un elettrone raggiunge un'energia sufficiente a ionizzare un altro atomo: si ottiene un nuovo elettrone che ripete lo stesso processo e così via assieme all'elettrone già presente. In questo modo si può generare una valanga di Townsend ovvero una cascata esponenziale di elettroni e cationi. Il numero di elettroni prodotti in una valanga è

$$G = e^{\alpha x}$$

dove  $G$  sta per gain,  $x$  è la lunghezza della valanga e  $\alpha$  è il primo coefficiente di Townsend. Il campo elettrico non può essere arbitrariamente intenso perché un dielettrico presenta un limite di rottura (breakdown limit) oltre il quale inizia a condurre. Per ovviare a questo problema si utilizza un condensatore il cui campo elettrico presenta una singolarità.

Un contatore proporzionale è una camera a ionizzazione basata su di un condensatore cilindrico (raggio interno  $a$ , raggio esterno  $b$ ). Il campo elettrico di un condensatore cilindrico è

$$E(r) = \frac{CV_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L} \frac{1}{r}, \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln \frac{b}{a}}, \quad \varphi(r) = -\frac{CV_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L} \ln \frac{r}{a}$$

dove  $r$  è la distanza dal centro e  $L$  è la lunghezza del condensatore. Si costruisce il condensatore con un raggio interno piccolo di modo che il campo elettrico diverga. Quando l'elettrone si trova vicino al raggio interno dà origine ad una valanga di Townsend. Tipicamente il raggio interno è costituito da un filo al berillio con spessore dell'ordine di 250  $\mu\text{m}$ .

Si utilizza un circuito come nel caso precedente e si misura la caduta di potenziale sulla resistenza. Si costruisce il circuito di modo tale che il tempo caratteristico  $RC$  sia molto maggiore del tempo di raccolta degli elettroni e dei cationi, e che l'armatura positiva (anodo) sia quella interna. Si consideri una particella che passi parallela alle pareti del condensatore. Gli elettroni sono attirati dall'armatura interna e si hanno delle valanghe di Townsend. Intanto i cationi, che si muovono più lentamente, si spostano verso l'armatura esterna. Come precedentemente, l'energia iniziale del condensatore è

$$W = \frac{1}{2} CV_i^2$$

L'energia infinitesima acquisita da un elettrone a causa di uno spostamento infinitesimo è

$$dW = CV_i dV \equiv q d\varphi = q dr \varphi dr, \quad q > 0$$

La tensione ai capi della resistenza è

$$dV = \frac{q}{CV_i} dr \varphi dr$$

Un elettrone trasforma la propria energia potenziale in energia cinetica cioè cambia il proprio potenziale. L'energia potenziale delle cariche corrisponde all'energia contenuta nel condensatore: una variazione del potenziale dell'elettrone corrisponde ad una variazione della

tensione del condensatore. Tale variazione si può misurare ai capi della resistenza. Quindi la differenza di potenziale causata dal moto di un elettrone è

$$V_- = -\frac{q}{CV_i} \int_{a+r'}^a d_r \varphi dr = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln \frac{a+r'}{a}$$

dove  $r'$  è la distanza della particella con l'armatura interna. Per un catione si ha

$$V_+ = \frac{q}{CV_i} \int_{a+r'}^b d_r \varphi dr = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln \frac{b}{a+r'}$$

La differenza di potenziale totale è  $\Delta V = NV_- + NV_+$ . Poiché la maggior parte delle coppie elettroni-cationi si genera vicino al filo  $r' \approx 0$ , allora

$$\frac{V_-}{V_+} \approx 0$$

Il comportamento del contatore è determinato dai cationi. La tensione  $\Delta V$  sale piano all'inizio, poi esponenzialmente fino a tendere a

$$\Delta V = -\frac{Nq}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \left[ \ln \frac{a+r'}{a} + \ln \frac{b}{a+r'} \right] = -\frac{Nq}{C} = -\frac{nGq}{C}$$

All'inizio si vede l'effetto degli ioni generati dal passaggio della particella, poi si osserva la valanga di Townsend.

## Lezione 13

lun 27 mar  
2023 13:30

**Risoluzione energetica.** Tra la camera a ionizzazione e il contatore proporzionale, la prima è il rivelatore con risoluzione energetica migliore, anche se di poco. L'osservabile fisica associata all'energia depositata  $\Delta E$  da una particella è un segnale proporzionale al numero di eventi elementari  $\Delta E = nw$ . L'incertezza assoluta e quella relativa (cioè la risoluzione) sull'energia depositata si possono trovare propagando gli errori. La distribuzione di probabilità associata alla produzione di  $n$  elettroni dovuta al passaggio di una particella carica è la poissoniana

$$P(\mu, n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

Essa è il limite della distribuzione binomiale nel limite di eventi rari con un numero grande di tentativi. La deviazione standard, cioè l'incertezza, è  $\sigma_n = \sqrt{n}$ . La distribuzione di Poisson è adatta a questa descrizione: dalla formula di Bethe, una particella carica trasferisce poca energia a ciascun elettrone, ma nel corso di tanti urti ci sono casi in cui l'energia è sufficiente a portare un elettrone nel continuo.

L'incertezza sull'energia di ionizzazione  $w$  dell'argon è trascurabile rispetto quella del numero di particelle. Pertanto, l'incertezza relativa è

$$\frac{\sigma_E}{\Delta E} = \frac{w\sigma_n}{nw} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Si calcola la risoluzione per il contatore proporzionale. Posto  $n = n_0 G$  si ha

$$\Delta E = nw = Gn_0 w \implies \left[ \frac{\sigma_E}{\Delta E} \right]^2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{n_0}} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma_G}{G} \right]^2 > \left[ \frac{1}{\sqrt{n_0}} \right]^2 \implies \frac{\sigma_E}{\Delta E} > \frac{1}{\sqrt{n_0}}$$

Il contatore proporzionale ha comunque una risoluzione energetica peggiore della camera a ionizzazione. Tuttavia, si conosce in modo preciso il gain, quindi l'incertezza è piccola e la risoluzione dei due rivelatori è identica nella pratica. Si utilizza il contatore proporzionale perché il segnale ai capi della resistenza del rivelatore è più forte di tre ordini di grandezza di quello della camera a ionizzazione: nella realtà bisogna sovrastare le fluttuazioni statistiche degli elettroni ed il rumore elettronico. Intrinsecamente, i due rivelatori sono equivalenti perché il contatore proporzionale non riduce le fluttuazioni statistiche, ma le rende solo più evidenti in termini assoluti poiché amplifica il segnale.



**Contatore di Geiger.** In funzione della tensione del condensatore, il gain parte da zero e aumenta fino a  $G = 1$  dove rimane costante, poi aumenta fino a  $10^3$  oltre cui cresce linearmente fino a  $10^6$ , poi rallenta fino a  $10^8$  e infine diventa costante attorno a  $10^9$ - $10^{10}$ . Si vede la motivazione di una tale forma. Per un campo elettrico poco intenso, gli elettroni non arrivano tutti all'armatura interna (ad esempio perché vengono assorbiti da impurezze elettronegative): il gain è minore di 1. Nella prima regione costante operano le camere a ionizzazione: il campo non è abbastanza intenso da generare cascate di Townsend, ma si misurano tutti e soli gli elettroni prodotti dalla particella carica. Nella zona lineare si ha il contatore proporzionale: il segnale è proporzionale all'energia depositata. Oltre è presente la regione a proporzionalità limitata: un grande quantità di cationi si muove lentamente verso l'armatura esterna e intanto scherma il campo elettrico del condensatore causando un minore effetto valanga per elettroni successivi. Il gain  $G \approx 10^8$  è detto limite di Raether oltre cui si ha un gain costante.

Un contatore Geiger opera oltre il limite di Raether. In tale regime si producono valanghe in continuazione fino ad un massimo di circa venti: a tal punto il condensatore scarica. Le valanghe producono anche fotoni che ionizzano atomi del gas (oppure fanno effetto fotoelettrico con l'armatura del condensatore) rilasciando elettroni i quali producono altre valanghe e così via. Il numero di valanghe è limitato perché i cationi prodotti schermano il campo elettrico fino ad impedire nuove valanghe. Indipendentemente dall'energia depositata dalla particella iniziale, si ha sempre lo stesso gain. Un contatore Geiger produce un segnale costante per ogni particella: si utilizzano per contare le particelle.

**Multiwire proportional chamber – MWPC.** Una multiwire proportional chamber è una generalizzazione del contatore proporzionale che permette di misurare l'energia depositata e di tracciare la traiettoria di una particella. Una MWPC è una camera a ionizzazione in cui sono posti dei cavi paralleli alle armature del condensatore. I cavi hanno un potenziale maggiore alle armature. Una particella passa nella camera generando una coppia elettrone-catione. L'elettrone si muove lungo una linea di campo diretto verso il filo più vicino. Si genera una valanga di Townsend: i cationi prodotti si muovono verso le armature sempre seguendo le linee di campo. Si può leggere il segnale del cavo e della parte di armatura corrispondente. Se non sono presenti segnali negli altri fili, allora si può identificare univocamente il filo più vicino alla particella. Per un catione diretto verso un'armatura, la tensione registrata nel filo più vicino è negativa, mentre nel filo adiacente che si trova nella direzione generale di movimento del catione si registra una piccola tensione positiva. Gli altri fili, che sono più distanti, misurano segnali ancora più piccoli che poi si azzerano. I fili verso cui si muove il catione misurano una tensione positiva, quelli da cui si allontana misurano una tensione negativa: con tanti cationi, l'effetto complessivo è un segnale negativo nel cavo più vicino e segnali positivi nei cavi adiacenti. Creando una griglia di cavi si può identificare la posizione della particella nello spazio.

La MWPC è stata inventata decine di anni dopo il contatore proporzionale. Essa necessita di tanti fili e dunque di elettronica miniaturizzata. Supponendo un solo piano  $xy$  di fili, un modo semplice per misurare la coordinata  $z$  è misurare il tempo che un elettrone prodotto dalla particella impiega per arrivare ad un filo nel piano: conoscendo il tempo e sapendo che la velocità nel gas è costante, si può ottenere la distanza percorsa cioè la componente  $z$ .

## 5 Simmetrie

Le simmetrie sono lo strumento necessario per la comprensione delle interazioni fondamentali. Una simmetria è una trasformazione di un sistema fisico che non ne altera le proprietà. In meccanica quantistica, una simmetria è una trasformazione che non cambia le probabilità di transizione: la funzione d'onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  soluzione dell'equazione di Schrödinger rimane invariata. La probabilità di transizione tra due stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  è proporzionale a  $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2$ . Date le trasformazioni

$$\hat{U}|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}\rangle, \quad \hat{U}|\beta\rangle = |\tilde{\beta}\rangle$$

Affinché si abbia una simmetria, deve valere

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \tilde{\beta} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \beta \hat{U} | \hat{U} \alpha \rangle = \langle \beta | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \alpha \rangle \implies \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

Un operatore con questa proprietà è detto unitario. Un operatore anti-unitario soddisfa la relazione

$$\langle \beta \hat{U} | \hat{U} \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$$

Un esempio di operatore anti-unitario è la  $T$ -parità. Per avere una trasformazione reale, applicare la trasformazione e far evolvere il sistema dev'essere equivalente a far prima evolvere il sistema e poi applicare la trasformazione.

**Teorema di Wigner.** Una trasformazione  $\hat{U}$  su di uno spazio di Hilbert è una simmetria di un sistema fisico se e solo se

- la trasformazione  $\hat{U}$  è un operatore unitario oppure anti-unitario,
- l'hamiltoniana è invariante per la trasformazione  $\hat{U}$ , cioè  $[\hat{U}, \hat{H}] = 0 \iff \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \hat{H}$ .

**Simmetrie e quantità (fisiche) conservate.** Se la trasformazione  $\hat{U}$  è una simmetria del sistema, allora il suo valore di aspettazione  $\langle \hat{U} \rangle$  è una quantità conservata. Infatti

$$\begin{aligned} d_t \langle \hat{U} \rangle &= d_t \int \psi^*(\mathbf{x}, t) \hat{U} \psi(\mathbf{x}, t) d^3x = \int (\partial_t \psi^*) \hat{U} \psi + \psi^* \hat{U} (\partial_t \psi) d^3x \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \psi^* \hat{H} \hat{U} \psi - \psi^* \hat{U} \hat{H} \psi d^3x = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [\hat{H}, \hat{U}] \psi d^3x = 0 \end{aligned}$$

Alla seconda riga si applica l'equazione di Schrödinger. Inoltre, in questo corso si utilizza la rappresentazione di Schrödinger: gli operatori non dipendono dal tempo.

L'operatore unitario  $\hat{U}$  potrebbe non essere hermitiano, dunque il valore di aspettazione non rappresenterebbe un'osservabile fisica: ad ogni simmetria non sempre si ha conservazione di una quantità *fisica*.

**Classi di simmetrie.** Le simmetrie si possono classificare nel modo seguente:

- Le simmetrie continue esterne sono trasformazioni continue che coinvolgono lo spazio o il tempo, funzioni di un numero finito di parametri reali  $a_1, \dots, a_N$ . Le traslazioni e le rotazioni fanno parte di questa categoria di trasformazioni:  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$  e  $\mathbf{x} \mapsto R\mathbf{x}$  con  $R = R^\top$  matrice reale.
- Le simmetrie continue interne sono simmetrie continue che non coinvolgono lo spazio né il tempo. Un esempio è la trasformazione di fase della funzione d'onda  $\psi(\mathbf{x}, t) \mapsto e^{i\alpha} \psi(\mathbf{x}, t)$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tutte le quantità osservabili non dipendono dalla fase globale della funzione d'onda perché le probabilità sono proporzionali a  $|\psi|^2$ . Questa simmetria è comune a tutte le teorie compatibili con gli assiomi della meccanica quantistica. Infatti, lo stato di un sistema fisico è univocamente determinato da un raggio in uno spazio di Hilbert (vedere projective Hilbert space).
- Le simmetrie discrete esterne sono trasformazioni non continue descritte da un numero finito di operatori unitari  $U_i$  che coinvolgono lo spazio o il tempo. Un esempio è la parità  $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ .
- Le simmetrie discrete interne sono trasformazioni non continue descritte da un numero finito di operatori unitari  $U_i$  che non coinvolgono lo spazio né il tempo. Ad esempio, la  $C$ -parità classica  $q \mapsto -q$ .

## Lezione 14

mar 28 mar  
2023 13:30

## 5.1 Simmetrie continue

Ad una simmetria continua si può associare una quantità fisica conservata.

**Teorema.** Un operatore unitario  $\hat{U}$  (o anti-unitario) continuo e differenziabile si può esprimere come esponenziale

$$\hat{U}(a_1, \dots, a_N) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N a_j \hat{T}_j \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N a_j \hat{T}_j \right]^n$$

dove gli operatori  $\hat{T}_j$  sono detti generatori delle trasformazioni descritte dall'operatore  $\hat{U}$ .

Si definisce l'esponenziale di un operatore in modo simile a quello di una matrice, utilizzando l'espansione in serie di potenze di Taylor

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Si può trovare una corrispondenza tra ogni operatore unitario ed un insieme di generatori.

**Teorema.** I generatori  $\hat{T}_j$  di un operatore unitario  $\hat{U}(a_1, \dots, a_N)$  sono hermitiani.

**Dimostrazione.** Si considerino i parametri dell'operatore  $\hat{U}$  nulli tranne il  $j$ -esimo:

$$(a_1, \dots, a_N) = (0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0)$$

Dunque

$$I = \hat{U}^\dagger \hat{U} = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j^\dagger \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j \right] = I - \frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j^\dagger + \frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j + o(a_j)$$

Affinché l'uguaglianza sia valida, gli operatori  $\hat{T}_j$  devono essere hermitiani

$$\hat{T}_j^\dagger = \hat{T}_j, \quad \forall j$$

**Teorema.** Se un operatore  $\hat{U}(a_1, \dots, a_N)$  è una simmetria (unitario e commuta con l'hamiltoniana), allora vale

$$[\hat{H}, \hat{T}_j] = 0$$

Quindi i valori di aspettazione  $\langle \hat{U} \rangle$  e  $\langle \hat{T}_j \rangle$  sono conservati. Il secondo di questi è una quantità fisica conservata.

**Dimostrazione.** Si considerino i parametri dell'operatore  $\hat{U}$  nulli tranne il  $j$ -esimo:

$$(a_1, \dots, a_N) = (0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0)$$

Noto

$$\hat{U} = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j \right]^n = I + \frac{i}{\hbar} a_j \hat{T}_j + o(a_j)$$

se vale  $[\hat{H}, \hat{U}] = 0$  per ogni  $j$ , allora, sostituendo  $\hat{U}$  nel commutatore, deve valere  $[\hat{H}, \hat{T}_j] = 0$  per le proprietà del commutatore.

**Traslazioni.** Le traslazioni sono simmetrie continue esterne  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ . Dal teorema precedente, ci si aspetta di avere tre osservabili conservate: le componenti del momento lineare. Si studia come si trasforma la funzione d'onda  $\psi$  quando si applica la trasformazione data dall'operatore  $\hat{U}$  di traslazione:

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \hat{U}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t)$$

Attenzione a distinguere che l'operatore unitario cambia la funzione d'onda, mentre la trasformazione  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$  cambia lo spazio ed il tempo. Sviluppando l'operatore unitario in serie di potenze, si ha

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}, t) + o(\mathbf{a}) = \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \cdot (-i\hbar \nabla) \right] \psi(\mathbf{x}, t) + o(\mathbf{a})$$

Pertanto, i generatori delle traslazioni  $\hat{U}$  lungo l'asse  $j$  sono  $\hat{p}_j = -i\hbar \partial_j$ . Per il teorema precedente, i valori di aspettazione di  $\hat{p}_j$  sono quantità fisiche conservate. In meccanica quantistica (ma anche più in generale), l'invarianza di un sistema fisico per traslazione implica la conservazione della quantità di moto.

**Teorema di Noether.** In un sistema fisico che ammette rappresentazione lagrangiana (esiste una lagrangiana  $L$  e un'azione  $S = \int L dt$ ) con lagrangiana locale (non ammette azione a distanza), ogni simmetria continua e differenziabile corrisponde ad una quantità fisica conservata.

**Rotazioni.** Le rotazioni sono trasformazioni continue esterne date da  $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$  dove  $R = R^\top$  è una matrice reale. Si noti che la matrice non è l'operatore unitario. Quest'ultimo indica come cambia la funzione d'onda, la prima indica come cambia lo spazio. Il generatore delle rotazioni è il momento angolare orbitale

$$\hat{\mathbf{T}} = -i\hbar \hat{\mathbf{x}} \times \nabla = \hat{\mathbf{L}}$$

Se un sistema è simmetrico per rotazione, allora il momento angolare è conservato.

**Energia.** In fisica classica, relatività speciale e meccanica quantistica, la dimostrazione della conservazione dell'energia è tautologica. Si consideri un sistema simmetrico per traslazioni temporali  $t' = t - a$  con  $a \in \mathbb{R}$ . La funzione d'onda diventa

$$\psi'(t) = \psi(t - a) = \psi(t) - a \partial_t \psi + o(a) = \psi(t) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} a \hat{H} \right] \psi + o(a)$$

Nell'ultima uguaglianza si utilizza l'equazione di Schrödinger in quanto la funzione d'onda è sua soluzione. Da questa scrittura, il generatore delle traslazioni temporali è l'hamiltoniana  $\hat{H}$ . Il suo valore di aspettazione è l'energia ed esso si conserva. Poiché  $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$ , risulta immediato affermare che la traslazione temporale è una simmetria del sistema fisico.

Questa dimostrazione è tautologica perché i sistemi fisici che ammettono rappresentazione lagrangiana sono tutti e soli i sistemi fisici che ammettono forze conservative: la lagrangiana dipende dai potenziali, se è presente una forza non conservativa, allora non si può scrivere il potenziale.

## 5.2 Simmetrie discrete

Le simmetrie discrete sono descritte da un numero finito di operatori  $\hat{U}_i$ . Esse non sempre corrispondono a quantità fisiche conservate.

**Involuzioni (inversioni?).** Un caso particolare di simmetrie discrete sono le involuzioni

$$\hat{U}^2 = I$$

Degli esempi sono le parità (spaziale),  $T$ -parità e  $C$ -parità classiche

$$\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, \quad t \rightarrow -t, \quad q \rightarrow -q$$

Le simmetrie di involuzione ammettono una quantità fisica conservata (come la parità) perché sono hermitiane.

**Teorema.** In un sistema di  $N$  particelle distinte e indipendenti

$$\psi = \psi_1 \cdots \psi_N$$

la quantità conservata di una simmetria continua è additiva. Similmente, la quantità fisica conservata di una simmetria discreta (qualora esista) è moltiplicativa.

**Dimostrazione.** Si dimostra il teorema per le simmetrie continue e per  $N = 2$ , il caso generale segue per induzione. Si consideri la funzione d'onda di due particelle

$$\psi = \psi_1 \psi_2$$

Si consideri la trasformazione continua di traslazione lungo l'asse  $x$  e gli operatori associati  $\hat{p}_1$  e  $\hat{p}_2$ . Quindi, supponendo che le particelle abbiano quantità di moto definita, si ha

$$\begin{aligned} \hat{p}\psi &= -i\hbar \partial_x (\psi_1 \psi_2) = -i\hbar [(\partial_x \psi_1) \psi_2 + \psi_1 \partial_x \psi_2] = (\hat{p}_1 \psi_1) \psi_2 + \psi_1 (\hat{p}_2 \psi_2) \\ &= (p_1 \psi_1) \psi_2 + \psi_1 (p_2 \psi_2) = (p_1 + p_2) \psi_1 \psi_2 \end{aligned}$$

In generale, per un generatore  $\hat{G}$  di simmetrie continue, si ha

$$\hat{G}\psi = \hat{G}(\psi_1 \psi_2) = (\hat{G}\psi_1) \psi_2 + \psi_1 (\hat{G}\psi_2) = (g_1 + g_2) \psi_1 \psi_2 = (g_1 + g_2) \psi$$

Gli autovalori delle simmetrie continue sono additivi.

Si consideri un operatore unitario, hermitiano e di involuzione, corrispondente ad una simmetria discreta con quantità fisica conservata, allora

$$\hat{U}\psi_i = u_i \psi_i \implies \hat{U}\psi = \hat{U}(\psi_1 \psi_2) = (\hat{U}\psi_1)(\hat{U}\psi_2) = u_1 u_2 \psi_1 \psi_2 = u_1 u_2 \psi$$

Gli autovalori sono moltiplicativi.

Il motivo per cui si ha questa asimmetria nelle quantità conservate si può osservare dalla definizione degli operatori di simmetria. Per le trasformazioni continue, il generatore è l'operatore hermitiano, ma per quelle discrete (che ammettono quantità fisica conservata), l'operatore stesso di trasformazione è hermitiano. La differenza tra i due operatori di simmetria è la presenza di un esponenziale: la somma degli autovalori dei generatori  $\hat{G}$  corrisponde al prodotto di quelli di  $\hat{U}$ . Infatti,  $\hat{U} = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$ , da cui le trasformazioni continue sono

$$\hat{U}\psi = (\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2)(\psi_1 \psi_2) = \hat{U}_1 \psi_1 \hat{U}_2 \psi_2 = e^{\frac{i}{\hbar} a \hat{G}_1} \psi_1 e^{\frac{i}{\hbar} a \hat{G}_2} \psi_2 = e^{\frac{i}{\hbar} a g_1} \psi_1 e^{\frac{i}{\hbar} a g_2} \psi_2 = e^{\frac{i}{\hbar} a (g_1 + g_2)} \psi$$

mentre le trasformazioni discrete sono

$$\hat{U}\psi = (\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2)(\psi_1 \psi_2) = \hat{U}_1 \psi_1 \hat{U}_2 \psi_2 = u_1 u_2 \psi_1 \psi_2 = u_1 u_2 \psi$$

[r]

**Teorema.** Gli autovalori di un operatore di involuzione hermitiano sono  $\pm 1$ .

**Dimostrazione.** Infatti

$$\hat{U}^2 = I \implies \hat{U}^2 \psi = \hat{U}(\hat{U}\psi) = \hat{U}(a\psi) = a\hat{U}\psi = a^2 \psi \equiv \psi \implies a^2 = 1$$

### 5.3 Parità

**Parità classica.** La parità classica cambia il segno delle coordinate. Così si cambia anche la quantità di moto (in particolare il segno), ma non il momento angolare orbitale.

**Parità quantistica.** Si studia l'operatore di parità applicato ad una funzione d'onda (diverso dalla trasformazione delle coordinate). Si definisce l'operatore di parità sulle auto-funzioni della posizione come

$$\hat{P}|x\rangle \equiv |-x\rangle$$

Si vuole che esso sia unitario, hermitiano e involutorio. Risulta immediato vedere l'involuzione. L'auto-aggiunzione è soddisfatta poiché

$$\langle x|\hat{P}|x'\rangle = \langle x|-x'\rangle = \delta(x+x') = \langle x'| -x\rangle^* = \langle x'|\hat{P}|x\rangle^* = \langle x|\hat{P}^\dagger|x'\rangle \implies \hat{P} = \hat{P}^\dagger$$

Sebbene l'operatore parità sia definito solamente sugli auto-stati della posizione, qualunque funzione d'onda si può esprimere in termini di auto-stati di un operatore hermitiano cioè della posizione

$$\psi(x) = \int f(x)|x\rangle dx \implies \hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

L'unitarietà segue dalle due condizioni precedenti.

Se la funzione d'onda di un sistema rimane identica (a meno di un segno o fase globale?) per cambio di parità, allora essa è auto-stato della parità. La parità intrinseca di un sistema  $\psi(\mathbf{x}, t)$  è data dall'auto-valore dell'operatore  $\hat{P}$ . La parità intrinseca di una particella è definita dalla funzione d'onda della particella nel riferimento solidale ad essa. Si specifica il riferimento solidale perché si studiano sistemi fisici simmetrici per un cambio particolare di coordinate: si può avere simmetria di parità solo nel riferimento solidale (cambiare la parità di un sistema in movimento pone tale sistema diametralmente opposto all'origine). Ci sono due problemi:

- esistono particelle che non hanno un riferimento solidale (tutte le particelle senza massa);
- esistono particelle che non hanno struttura interna e quindi non hanno parità osservabile: per misurare la parità di una particella si ha bisogno delle interazioni, ma queste possono dare informazioni sui cambiamenti di parità intrinseca, non sul valore assoluto.

### Lezione 15

Si risolvono questi problemi.

mer 29 mar  
2023 13:30

**Parità intrinseca del fotone.** Si determina la parità intrinseca del fotone pur non possedendo l'equazione di Dirac e l'equazione di Klein-Gordon. Si utilizza una tecnica importante per dedurre la parità di alcune particelle: si utilizza una reazione che sfrutta una forza fondamentale che conserva la parità. Si consideri un atomo di idrogeno in uno stato eccitato che passa allo stato fondamentale

$$H^* \rightarrow H + \gamma$$

Nella diseccitazione, l'interazione elettromagnetica conserva la parità. Si ricava la parità intrinseca del fotone imponendo la conservazione di parità nella reazione. L'atomo di idrogeno è l'unico caso interessante poiché si può risolvere analiticamente l'equazione di Schrödinger associata: il potenziale è elettrostatico centrale. La funzione d'onda dell'elettrone è data da

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad Y_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Una particolarità delle armoniche sferiche è la fattorizzazione dei termini dipendenti dagli angoli. Si consideri il sistema di riferimento nel centro di massa (cioè il protone). In coordinate sferiche, il cambio di parità è dato da

$$r \rightarrow r, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \varphi \rightarrow \pi + \varphi$$

pertanto, bisogna studiare il cambio di parità solo per le armoniche sferiche. Quindi

$$\hat{\mathcal{P}}e^{im\varphi} = e^{im\pi}e^{i\varphi} = (-1)^me^{im\varphi}$$

mentre per i polinomi di Legendre si ha

$$\hat{\mathcal{P}}P_l^m(\cos\theta) = (-1)^{l+m}P_l^m(\cos\theta)$$

Dunque, la parità della funzione d'onda totale è

$$\hat{\mathcal{P}}\psi = (-1)^{2m}(-1)^l\psi = (-1)^l\psi$$

Nella diseccitazione sopra, lo stato iniziale  $|\psi_i\rangle = |H^*\rangle$  diventa lo stato finale in cui si presuppone che il fotone si allontana indefinitamente e l'atomo di idrogeno rimane nello stato fondamentale

$$|\psi_f\rangle = |H\rangle \otimes |\gamma\rangle$$

Le regole di selezione che permettono l'emissione di un fotone sono le regole di transizione di un dipolo elettrico

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_s = 0, \quad \Delta m_j = 0, \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1, \quad j = 0 \not\rightarrow 0$$

In particolare, il numero quantico angolare (o orbitale)  $l$  deve cambiare. La diseccitazione dell'elettrone comporta un cambio di parità del sistema idrogenoide (il numero  $l$  da pari diventa dispari e viceversa). Ad esempio, le parità degli stati della reazione possono essere

$$\hat{\mathcal{P}}\psi_i = -\psi_i, \quad \hat{\mathcal{P}}\psi_f = (+1)\psi_H\mathcal{P}_\gamma$$

Queste parità intrinseche devono essere uguali: la parità del fotone  $\mathcal{P}_\gamma = -1$ . Le transizioni di dipolo elettrico sono le transizioni dominanti, ma non sono le uniche: esistono anche le transizioni di dipolo magnetico, quadrupolo elettrico, etc.

**Parità intrinseca dei fermioni elementari.** La parità intrinseca delle particelle elementari non è un'osservabile perché una particella elementare non ha struttura interna. Pertanto, la sua parità intrinseca è arbitraria in quanto non esiste un'osservabile fisica associata. Si utilizza una convenzione per definire le parità intrinseche dei fermioni elementari (i sei leptoni — elettrone, muone, tauone, i loro corrispondenti neutrini — ed i sei quark — up, down, charm, strange, top, bottom): la loro parità è  $+1$ . Le parità intrinseche degli anti-fermioni elementari sono opposte a quelle dei fermioni: questa è una conseguenza dall'equazione di Dirac. Viceversa, la parità intrinseca di un anti-bosone è la stessa del bosone associato. Da questa convenzione si possono ricavare le parità di tutte le particelle composite.

**Parità del protone.** Un protone è lo stato fondamentale dello stato legato di due quark up ed uno down tenuti insieme dai gluoni. Lo stato legato presenta campo e simmetria centrali, pertanto la funzione d'onda dipende dalle armoniche sferiche  $\psi \propto Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Lo stato del protone ha  $l = 0$  e quindi

$$\hat{\mathcal{P}}\psi = (-1)^0\mathcal{P}_u\mathcal{P}_u\mathcal{P}_d\psi = \psi$$

Similmente, il neutrone è lo stato fondamentale dello stato legato di un quark up e due down:

$$\hat{\mathcal{P}}\psi = (-1)^0\mathcal{P}_u\mathcal{P}_d\mathcal{P}_d\psi = \psi$$

Questi due risultati teorici del modello a quark si possono verificare sperimentalmente: se la parità misurata del protone è diversa da quella del neutrone, allora il modello è falsificato.

**Parità del deuterio.** Il deuterio  ${}^2_1\text{H}$  è un isotopo dell'idrogeno che presenta un neutrone. Il nucleo è formato dallo stato legato fondamentale di un neutrone ed un protone. Per calcolare la parità intrinseca bisogna trovare il momento angolare delle due particelle rispetto al centro di massa: calcolare il potenziale centrale, notare che il deuterio è lo stato fondamentale e dimostrare che esso corrisponde a momento angolare orbitale  $l = 0$ . Oppure si può determinare la parità in modo sperimentale, tramite reazioni. La parità intrinseca del deuterio è

$$\mathcal{P} = (-1)^0\mathcal{P}_p\mathcal{P}_n = 1$$

**Parità intrinseca dei bosoni elementari.** I bosoni elementari sono il fotone, le otto varietà di gluoni, i bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$ , e il bosone di Higgs. La parità intrinseca del fotone e dei gluoni è  $-1$ , quella del bosone di Higgs è  $+1$ , mentre le parità dei bosoni delle interazioni nucleari deboli non hanno significato fisico e rimangono indefinite. Le interazioni deboli violano la parità: non si può garantire a priori la conservazione della parità in una reazione.

**Parità intrinseca del pione.** Si vede un esempio di determinazione sperimentale della parità intrinseca di una particella, in particolare del pione  $\pi^-$ . Un fascio di pioni incide su atomi di deuterio. I pioni sono particelle cariche pesanti e perdono energia per formula di Bethe. Un pione rallenta perdendo quantità sempre maggiori di energia. In prossimità di un atomo di deuterio, l'energia persa è sufficiente a rimuovere un elettrone e il pione si sostituisce al suo posto: si costituisce un atomo mesonico (o mesico). Questo atomo presenta lo stesso numero di livelli energetici dell'atomo di idrogeno sebbene con energie diverse. Studiando lo spettro di tale atomo, si nota non avere emissione di fotoni per livelli energetici inferiori o uguali a  $n = 7$ ,  $l = 0$ . A tale livello, la forza forte prevale e l'atomo si decompone producendo due neutroni

$$\pi^- + {}^2\text{H} \rightarrow n + n$$

Il pione ha spin nullo, il deuterio ha spin 1 ed i neutroni hanno spin  $\frac{1}{2}$ . Lo stato in cui avviene tale reazione è  $n = 7$ ,  $l = 0$ . Dunque il momento angolare totale dello stato iniziale è  $j = 1$  e, per conservazione del momento angolare, dev'essere lo stesso anche nello stato finale. Questi è composto da due fermioni identici: la loro funzione d'onda dev'essere totalmente anti-simmetrica. Si studia l'effetto dello scambio sul sistema. La funzione d'onda dello stato finale è

$$\psi_f(1, 2) = \phi(1, 2)\chi(1, 2)$$

dove  $\phi$  è la parte spaziale e  $\chi$  è la parte di spin. Nel riferimento solidale al centro di massa, i due neutroni si allontanano in direzioni opposte. Si applica l'operatore  $\hat{P}$  di scambio. In un sistema a due particelle, l'operatore di scambio coincide l'operatore di parità solo sulla parte spaziale. La funzione d'onda di due particelle di spin  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$  è data dagli stati di singoletto e tripletto:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+-\rangle - |-+\rangle], \quad |11\rangle = |++\rangle, \quad |-1, -1\rangle = |--\rangle, \quad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+-\rangle + |-+\rangle]$$

rispettivamente anti-simmetrico e simmetrici per scambio. Applicando l'operatore di scambio si ha

$$\hat{P}\psi_f = \hat{P}\phi\hat{P}\chi = \hat{P}\phi\hat{P}\chi = (-1)^l\phi(-1)^{s+1}\chi = (-1)^{l+s+1}\psi \equiv -\psi$$

dove  $s = s_1 + s_2$ . La funzione d'onda finale dev'essere totalmente anti-simmetrica in quanto costituita da due fermioni: segue che  $l + s$  è un numero pari. Lo stato finale con  $j = 1$  può essere dato da quattro combinazioni di  $l$  ed  $s$  — cioè  $|ls\rangle = |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  e  $|21\rangle$  —, ma solamente la combinazione di  $l = 1$  e  $s = 1$  soddisfa il principio di esclusione di Pauli cioè l'anti-simmetria della funzione d'onda totale. L'operatore di parità applicato alla funzione d'onda dello stato finale dà

$$\hat{P}\psi_f = \hat{P}(\phi\chi)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = (-1)^l\phi\chi\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = (-1)^1(+1)(+1)\psi_f = -\psi_f$$

La parità applicata alla funzione d'onda iniziale fornisce

$$\hat{P}\psi_i = \hat{P}(\phi\chi)\mathcal{P}_\pi\mathcal{P}_d = (-1)^l\mathcal{P}_\pi\mathcal{P}_d\psi_i = (-1)^0\mathcal{P}_\pi(+1)\psi_i = \mathcal{P}_\pi\psi_i$$

Per conservazione della parità nell'interazione forte, si ottiene la parità del pione  $\pi^-$

$$\mathcal{P}_\pi = -1$$

**Parità per coppie di particelle.** Si consideri il riferimento solidale al centro di massa (si ricordi che la parità intrinseca è definita nel riferimento solidale). Se la funzione d'onda è  $\psi = \phi\chi$ , allora applicando la parità si ha

$$\hat{P}\psi = (-1)^l\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\psi \implies \mathcal{P} = (-1)^l\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$$



Per coppie di particelle distinte con spin zero, ad esempio  $\pi^+\pi^0$ , il momento angolare totale è pari al momento angolare orbitale: si ha una correlazione tra il momento angolare e la parità del sistema. Si consideri l'esempio riportato. La parità della coppia è  $\mathcal{P} = (-1)^l$ . Se  $j = 0$  allora  $l = 0$  e  $\mathcal{P} = 1$ , ma non si può avere  $\mathcal{P} = -1$ . Similmente per  $j = 1$  si ha  $l = 1$  e  $\mathcal{P} = -1$ , ma non  $\mathcal{P} = 1$  e così via.

Si considerino coppie di particelle indistinguibili con spin zero. La funzione d'onda dev'essere totalmente simmetrica. Per scambio si ha

$$\hat{P}\psi = \hat{P}(\phi\chi) = \hat{P}\phi\hat{P}\chi = (-1)^l(-1)^s\psi$$

si noti che per i bosoni la simmetria della parte di spin è data da  $(-1)^s$ , mentre per i fermioni è  $(-1)^{s+1}$ , per vederlo serve osservare i coefficienti di Clebsch-Gordan. Nel caso di particelle con spin zero segue

$$\hat{P}\psi = (-1)^l(-1)^0\psi = (-1)^l\psi \equiv \psi$$

cioè  $l$  pari: si dimezzano le possibili configurazioni del caso precedente.

## Lezione 16

**Parità intrinseca di una coppia fermione, anti-fermione.** Nel riferimento solidale a due particelle, queste si trovano diametralmente opposte. La parità applicata alla funzione d'onda totale è

$$\hat{\mathcal{P}}\psi = \hat{\mathcal{P}}(\phi\chi)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \hat{\mathcal{P}}(\phi)\chi\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = (-1)^l\phi\chi\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = (-1)^{l+1}\phi\chi, \quad \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = -1$$

ricordando che un anti-fermione ha parità intrinseca opposta al fermione corrispondente. Ad esempio, per il positronio si ha

$$\hat{\mathcal{P}}_{e^-e^+} = (-1)^l\mathcal{P}_{e^-}\mathcal{P}_{e^+} = (-1)^{l+1}$$

## 5.4 C-parità

L'operatore di C-parità è definito come

$$\hat{\mathcal{C}}|m, s, \mathbf{p}, q\rangle = |m, s, \mathbf{p}, -q\rangle$$

Esso cambia il segno della carica di una particella che viene essenzialmente trasformata nella sua anti-particella. Finora si è studiata una sola interazione fondamentale, cioè l'interazione elettromagnetica, che avviene grazie alla carica (elettrica) delle particelle: l'operatore di C-parità cambia la modalità con cui una particella carica interagisce con il campo elettromagnetico. Per l'interazione forte e la carica forte si trova lo stesso risultato: l'operatore di parità è definito per tutti i tipi di carica, non solo quelle elettriche.

L'operatore di C-parità è un'involuzione  $\hat{\mathcal{C}}^2 = I$  e può essere definito in modo che sia unitario ed hermitiano: possiede una quantità fisica conservata. Diversamente dalla parità, risulta difficile trovare sistemi fisici che siano auto-stati dell'operatore di C-parità. Ad esempio, per l'elettrone si ha

$$\hat{\mathcal{C}}|e^-\rangle = |e^+\rangle \neq a|e^-\rangle, \quad a \in \mathbb{C}$$

cioè si ha un positrone che è una particella diversa dall'elettrone. Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché un sistema fisico che descrive una singola particella sia auto-stato della C-parità è che la particella sia neutra. Particelle cariche non hanno C-parità intrinseca. Un esempio di particella neutra che non sia auto-stato è il neutrone (e l'anti-neutrone): i quark up e down diventano quark anti-up e anti-down, gli stati legati che costituiscono sono diversi. Viceversa, il fotone (particella elementare) ed il pione neutro  $\pi^0 \propto u\bar{u} + d\bar{d}$  sono auto-stati.

lun 03 apr  
2023 13:30

**C-parità intrinseca del fotone.** La C-parità del fotone presenta lo stesso problema della parità: in meccanica quantistica non relativistica, non esiste il sistema di riferimento solidale al fotone. Si è ricavata la parità tramite i dati sperimentali della diseccitazione di un atomo di idrogeno  $\mathcal{P} = -1$ . Lo stesso risultato trovato, vale per la C-parità intrinseca del fotone

$$\hat{C} |\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$$

In meccanica quantistica non relativistica, non si è mai scritta la funzione d'onda del fotone poiché non si possono mai applicare approssimazioni non relativistiche. Tuttavia, la relazione sopra è facilmente dimostrabile in elettrodinamica classica: la C-parità classica del campo elettromagnetico è pari a  $-1$  (cioè l'angolo classico della proposizione precedente). La C-parità classica cambia il segno della carica di tutte le particelle in un sistema classico.

Si studia il campo elettromagnetico classico quando si cambiano i segni delle cariche presenti. Il campo elettromagnetico classico è descritto dall'unione del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e del campo magnetico  $\mathbf{B}$  legati da dei vincoli (per le onde piane si ha  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  e  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ): questi vincoli permettono di descrivere i campi fisici tramite un potenziale scalare  $V$  ed un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  uniti nel quadri-potenziale  $A^\mu$ .

**Campo elettrostatico.** Si consideri un campo elettrostatico: il campo non dipende dal tempo e tutte le cariche sono in quiete. Il quadrivettore potenziale è pari a

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) = (V, \mathbf{0})$$

L'equazione di Poisson descrive il potenziale elettrostatico in funzione delle cariche presenti

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

La soluzione è data da

$$V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

con densità di carica  $\rho$  sufficientemente regolare cioè continua e decrescente almeno come  $\frac{1}{x}$  all'infinito. I campi sono dati da

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Cambiando i segni delle cariche del sistema fisico  $\rho \rightarrow -\rho$  si ha

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow -V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Nel caso elettrostatico, i campi elettrici cambiano segno.

**Caso generale.** Si consideri il caso generale. Il quadri-potenziale è dato da  $A^\mu = (V, \mathbf{A})$ . Nel gauge di Lorenz, le equazioni del moto sono

$$\square V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

dove l'operatore di d'Alembert è definito come  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = c^{-2} \partial_t^2 - \nabla^2$ . Le soluzioni coinvolgono i potenziali ritardati

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t_R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad t_R(\mathbf{x}', t) = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$$

La forma funzionale è identica a quella del caso elettrostatico. Cambiando i segni delle cariche, si ottiene

$$\rho(\mathbf{x}', t) \rightarrow -\rho(\mathbf{x}', t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \implies V(\mathbf{x}, t) \rightarrow -V(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

La soluzione generale delle equazioni di Maxwell, cioè i campi elettrico e magnetico, è data da

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \implies \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$$

la cui forma esplicita porta alle equazioni di Jefimenko. Da questo si nota che la C-parità classica del campo elettromagnetico è  $-1$ . Pure in meccanica quantistica relativistica si può dimostrare che la C-parità intrinseca del fotone è  $-1$ .

**C-Parità del pione neutro.** La C-parità del pione neutro si può dedurre dalla C-parità del fotone e dalla conservazione di parità dell'interazione elettromagnetica. Il pione decade secondo

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Per conservazione della C-parità si ottiene

$$\hat{C} |\pi^0\rangle = \hat{C} |\gamma\gamma\rangle \implies C_\pi |\pi^0\rangle = C_\gamma C_\gamma |\gamma\gamma\rangle \implies C_\pi = C_\gamma C_\gamma = 1$$

Nel riferimento del pione, questi si trova in quiete nell'origine e decade emettendo due fotoni in direzioni opposte. Il fotone ha spin 1 le cui proiezioni lungo la direzione del moto (dette elicità) sono solo  $\pm 1$ , non c'è proiezione 0. Infatti, le onde elettromagnetiche hanno solo due tipi di polarizzazione: circolare destra  $+1$  e sinistra  $-1$ . Si noti che destra o sinistra è determinato in base alla regola della mano destra, non rispetto al verso di rotazione: si pone il pollice lungo la direzione del moto e le altre dita indicano in quale verso si ha rotazione del campo elettrico come descritto dallo spin (si ricordi che il vettore che denota la rotazione è perpendicolare al piano in cui avviene tale rotazione). In base a quale mano si utilizza, si ottiene il senso della polarizzazione circolare. Tutti gli stati di polarizzazione sono una combinazione lineare dei due tipi descritti. I fotoni emessi dal pione devono avere entrambi la stessa polarizzazione: i loro spin devono essere opposti poiché  $\pi^0$  non ha spin.

**C-parità di una coppia particella, anti-particella con spin nulli.** Un esempio di una coppia di particelle con spin nulli è la coppia dei pioni  $\pi^+\pi^-$ , l'uno l'anti-particella dell'altro. Nel riferimento solidale al centro di massa, i due pioni si allontanano diametralmente opposti. Applicando la C-parità, i due pioni si scambiano le cariche. In questo caso, scambiare le cariche equivale a scambiare le due particelle: la C-parità corrisponde alla parità. In generale, per coppie particella, anti-particella con spin zero, la C-parità coincide con la parità. Ricordando il risultato ricavato per la parità di una coppia di particelle a spin zero, segue

$$\hat{C} |\pi^+\pi^-\rangle = \hat{P} |\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^l \mathcal{P}_{\pi^+} \mathcal{P}_{\pi^-} |\pi^+\pi^-\rangle$$

Sebbene per una particella la C-parità non dipenda dalla posizione o dallo spin, per un insieme di più particelle, essa potrebbe essere equivalente alla parità o all'operatore di scambio. In tal caso, si ereditano tutti i vincoli a cui sono soggetti la parità o l'operatore di scambio (conservazione, Pauli, etc).

**C-parità di una coppia fermione, anti-fermione con spin  $\frac{1}{2}$ .** Per la C-parità vale la stessa conseguenza dell'equazione di Dirac per la parità: la C-parità intrinseca di una coppia fermione, anti-fermione è  $-1$ ; mentre la C-parità intrinseca di una coppia bosone, anti-bosone è  $+1$ . Si noti che si sta trattando una coppia, non una singola particella: un elettrone non ha C-parità intrinseca perché viene trasformato in un positrone, ma il positronio è complessivamente neutro e possiede C-parità intrinseca pari a  $-1$ .

Nel riferimento solidale al positronio, l'elettrone ed il positrone viaggiano in direzioni opposte con spin anti-paralleli. Applicando la C-parità, si cambia solo la carica, ma lo spin dell'elettrone finale non è lo spin dell'elettrone iniziale. Questo sistema non è equivalente ad applicare la parità perché essa cambia la direzione del moto delle due particelle, ma mantiene il verso dello spin. In questo caso, la C-parità è diversa dalla parità, ma coincide con l'operatore di scambio, quindi eredita il principio di esclusione di Pauli se le particelle sono identiche. Per il positronio si ha

$$\hat{C} |e^-e^+\rangle = \hat{P} |e^-e^+\rangle = (-1)^l (-1)^{s+1} \mathcal{C}_{e^-e^+} |e^-e^+\rangle = (-1)^{l+s+2} |e^-e^+\rangle = (-1)^{l+s} |e^-e^+\rangle$$

il termine  $(-1)^l$  compare dalla parte spaziale, mentre  $(-1)^{s+1}$  compare dalla parte di spin (dove  $s$  è lo spin totale della coppia).

**Teorema.** La C-parità di un sistema particella, anti-particella (entrambe fermioni o bosoni) a spin totale  $s$  è  $(-1)^{l+s}$ .

**Dimostrazione.** Si è già visto il caso per due fermioni. Per dei bosoni si ha

$$\hat{C} |b\bar{b}\rangle = (-1)^l (-1)^s \mathcal{C}_{b\bar{b}} |b\bar{b}\rangle = (-1)^{l+s} |b\bar{b}\rangle$$

**Positronio.** Il positronio non può decadere in un singolo fotone in quanto si viola la conservazione del quadri-momento, ma può decadere in qualsiasi numero di fotoni maggiore di uno. Si vede il motivo per cui può decadere in tanti modi. Il positronio ha la stessa soluzione all'equazione di Schrödinger dell'atomo di idrogeno, ma con la massa ridotta  $\mu = \frac{1}{2}m_e$ . I modi di decadimento sono descritti dalla funzione d'onda

$$\psi = \frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

La combinazione degli spin dell'elettrone e del positrone danno stati di singoletto (anti-simmetrico) e di tripletto (simmetrico). Gli stati possibili di decadimento presentano numeri quantici di momento angolare totali  $l \in \mathbb{N}_0$  e  $s = 0, 1$ . Gli stati iniziali di para-positronio  $l = 0, s = 0$  e di orto-positronio  $l = 0, s = 1$  potrebbero avere decadimenti diversi. Dal teorema precedente sulla C-parità, segue che la C-parità del para-positronio è  $(-1)^{l+s} = 1$ . Similmente, la C-parità dell'orto-positronio è  $-1$ . I due stati hanno C-parità diverse. In quanto il fotone ha C-parità  $-1$ , per conservazione della C-parità il para-positronio può decadere solamente in un numero pari di fotoni. Viceversa, l'orto-positronio può decadere solamente in un numero dispari di fotoni.

Entrambi i decadimenti sono possibili. Tramite i diagrammi di Feynman al prim'ordine, il rapporto di decadimento di tre fotoni su due fotoni è circa pari alla costante di struttura fine  $\alpha$ . Sperimentalmente, la vita media del para-positronio è  $\tau = 125 \text{ ps}$ , mentre quella dell'orto-positronio è  $\tau = 142 \text{ ns}$ . Entrambe sono in accordo con l'elettrodinamica quantistica che fornisce

$$\frac{\tau_{\text{par}}}{\tau_{\text{ort}}} = 4 \frac{\pi^2 - 9}{9\pi} \alpha \approx \frac{1}{8} \alpha$$

**Costante di strutture fine.** La costante di struttura fine venne introdotta da Sommerfeld con il modello atomico di Bohr-Sommerfeld (ormai superato). Essa è il rapporto tra la velocità dell'elettrone nella prima orbita dell'atomo di Bohr e la velocità della luce nel vuoto

$$\alpha \equiv \frac{v_1}{c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad c = 1, \quad \hbar = 1, \quad k = \frac{1}{4\pi}, \quad \epsilon_0 = 1$$

In essa compaiono le costanti utilizzate nelle unità naturali. Per questo, a posteriori venne reinterpretata come l'intensità delle interazioni elettromagnetiche.

Il valore della costante di struttura fine prescinde dal sistema di unità di misura utilizzato perché essa è una quantità adimensionale rapporto di due quantità con medesime dimensioni. Nelle unità naturali di Heaviside-Lorentz, questo permette di calcolare la carica dell'elettrone

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \implies e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0.3$$

## Lezione 17

### 6 Interazione elettromagnetica

Si comincia la trattazione delle interazioni fondamentali partendo dall'elettromagnetismo perché è l'unica interazione fondamentale che ammette una rappresentazione classica. L'elettrodinamica classica è descritta dalle equazioni di Maxwell e dalla forza di Lorentz: esse descrivono come cambiano i campi e come essi influenzano le particelle cariche. Gli assiomi dell'elettrodinamica sono i seguenti:

mar 04 apr  
2023 13:30

- le leggi fisiche hanno la stessa forma funzionale in ogni sistema di riferimento inerziale;
- la velocità della luce nel vuoto è pari a  $c$  in ogni sistema di riferimento inerziale;
- ad ogni punto materiale si associa una carica elettrica  $q \in \mathbb{R}$ , invariante di Lorentz, tale per cui la forza tra due punti materiali a riposo in un riferimento inerziale è data dalla legge di Coulomb

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Da questi assiomi, si deduce che i campi elettromagnetici evolvono secondo le leggi di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad \partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

e si può determinare univocamente come i campi influenzano il moto di una particella carica

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Questo è tutto quanto serve per l'elettrodinamica classica. Quando si rendono compatibili tali assiomi con la meccanica quantistica compare un problema. In meccanica quantistica non esistono le forze, non viene introdotto il concetto di forza, ma le equazioni del moto di una particella sono date dall'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}\psi = i\hbar \partial_t \psi$$

La funzione d'onda che risolve la precedente equazione codifica tutte le informazioni del sistema fisico. L'hamiltoniana  $\hat{H}$  è l'hamiltoniana classica che viene resa quantistica tramite la quantizzazione canonica. Il problema risiede nel fatto che l'hamiltoniana è una funzione dell'energia potenziale  $U$  che descrive le forze. I potenziali elettromagnetici non sono univocamente determinabili. Ad esempio, poiché  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , il potenziale elettrostatico è definito a meno di una costante. Tuttavia, in meccanica quantistica, le osservabili fisiche dipendono dal valore assoluto dei potenziali.

Utilizzare la quantizzazione canonica in modo letterale porta anche altri problemi. Ad esempio, l'hamiltoniana classica di interazione di una particella carica con un campo elettromagnetico

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + qV$$

dipende dal valore assoluto dei potenziali e pertanto non può più assumere significato fisico.

Si risolve il problema esposto e in tal modo si può capire l'origine delle interazioni elettromagnetiche.

## 6.1 Trasformazioni di gauge

**Trasformazioni classiche di gauge.** Si definiscono quali sono le più generali trasformazioni dei potenziali che mantengono inalterati i campi fisici elettrico e magnetico, e quindi la dinamica delle particelle. In elettrodinamica classica, i campi sono dati da

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla V(\mathbf{x}, t) - \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

Si consideri una trasformazione di potenziali

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad V' = V + b(\mathbf{x}, t)$$

dove  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  e  $b \in \mathbb{R}$  sono funzioni generiche. Imponendo l'invarianza dei campi fisici, si ha

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{a} \equiv \mathbf{B} \implies \nabla \times \mathbf{a} = 0$$

La funzione  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  dev'essere un campo irrotazionale (si ricordi che un campo è una quantità fisica rappresentata da uno scalare, un vettore od un tensore, che ha un valore in ogni punto dello spazio e del tempo). Se il dominio è semplicemente connesso, allora è anche conservativo:

esiste una funzione  $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  tale per cui  $\mathbf{a} = \nabla \tilde{\alpha}$ . In tre dimensioni, lo spazio si può ragionevolmente supporre semplicemente connesso perché non esistono fili infiniti: è sufficiente richiede che nell'universo non esistano quantità fisiche infinite per garantire la connessione semplice. Dunque, la trasformazione del potenziale vettore è data da

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \tilde{\alpha}$$

Similmente, per il campo elettrico si ha

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \nabla b - \partial_t \mathbf{A} - \partial_t \mathbf{a} \equiv \mathbf{E} \implies \nabla b + \partial_t \mathbf{a} = 0 \implies \nabla(b + \partial_t \tilde{\alpha}) = 0$$

Quindi  $b + \partial_t \tilde{\alpha} = k(t)$  dev'essere una funzione che dipende solamente dal tempo. In quanto  $\tilde{\alpha}$  è arbitraria, si definisce

$$\alpha \equiv \tilde{\alpha} - \int_0^t k(t') dt' \implies b = -\partial_t \alpha$$

Pertanto, i potenziali che mantengono invariati i campi fisici sono

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \alpha(\mathbf{x}, t), \quad V'(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}, t) - \partial_t \alpha(\mathbf{x}, t)$$

Queste sono le trasformazioni classiche di gauge. Il termine gauge (calibro) ha origine storica (eichinvarianz, Weyl) e intuitivamente le trasformazioni sono dette di gauge perché permettono di ricalibrare i potenziali vettori. Ad esempio, per invarianza di gauge si intende che i campi fisici prescindono da come si sceglie il metro di misura, la scala, il calibre dei potenziali, cioè dove si pone lo zero.

**Trasformazioni di gauge in meccanica quantistica.** Si vede come sfruttare la quantizzazione canonica. Sebbene essa non sia più utilizzata in fisica delle particelle, poiché si può applicare solamente se esiste il sistema classico, risulta essere l'unico metodo di quantizzazione visto. La lagrangiana di una particella in un campo elettromagnetico è

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U = \frac{1}{2}mv^2 - q[V(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)]$$

Il momento canonico è dato da

$$\mathbf{p} = \partial_{\dot{\mathbf{x}}} L = \partial_{\mathbf{v}} L = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

Questo momento non è la quantità di moto fisica, sebbene in molti casi i due siano coincidenti. Se l'energia potenziale, quindi la forza, dipende dalla velocità, allora il momento coniugato non coincide con il momento lineare. Non ci si deve aspettare che il momento coniugato sia associato ad un operatore hermitiano. L'hamiltoniana è data dalla trasformata di Legendre della lagrangiana

$$H = [\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L] \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} = \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)]^2 + qV(\mathbf{x}, t)$$

Anch'essa dipende dal valore assoluto dei potenziali e, in questo caso, non coincide con l'energia del punto materiale. La corrispondente quantità fisica associata all'hamiltoniana è l'energia (cinetica) che, nel caso non relativistico, è data da

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m}$$

Questa è la vera osservabile fisica ed è una proprietà intrinseca e locale (non ci sono energie potenziali). Si noti come non dipenda dal gauge.

In meccanica quantistica, si applica la quantizzazione canonica sostituendo le variabili classiche con i rispettivi operatori

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}]^2 + qV$$

L'errore risiede nel porre il momento coniugato pari a

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla$$

ma il secondo membro è una quantità fisica. Condizione sufficiente affinché tutte le osservabili fisiche non dipendano dalla scelta di gauge  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  è che l'hamiltoniana e la funzione d'onda soddisfino l'equazione di Schrödinger a prescindere dalla scelta di gauge

$$\hat{H}\psi = i\hbar\partial_t\psi \implies \hat{H}'\psi' = i\hbar\partial_t\psi'$$

In tal caso, le probabilità di transizione sono le stesse. Per soddisfare tale condizione, si rende necessario avere

$$\psi' = e^{\frac{i}{\hbar}q\alpha(\mathbf{x}, t)}\psi, \quad \hat{U} \equiv e^{\frac{i}{\hbar}q\alpha(\mathbf{x}, t)}$$

In questo modo si correla la funzione d'onda con il gauge del campo elettromagnetico. La trasformazione sopra è detta trasformazione di gauge U(1), oppure anche simmetria di gauge U(1) per motivi storici, sebbene non sia una simmetria in senso quantistico.

**Teorie di gauge.** Affinché ci sia coerenza tra la trasformazione del campo elettromagnetico e quella della funzione d'onda, questa dev'essere soggetta alla trasformazione  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$  che è una simmetria continua interna detta simmetria globale U(1). Essa è una simmetria della meccanica quantistica indipendentemente dalla presenza di un campo elettromagnetico. Il fatto di essere simmetria globale risulta ovvio se  $\alpha$  non dipende dallo spazio né dal tempo.

Il gruppo U( $n$ ) è il gruppo algebrico delle matrici  $n \times n$  unitarie complesse. Il gruppo U(1) corrisponde all'insieme delle fasi complesse  $e^{i\alpha}$ : i cambi di fase sono delle trasformazioni U(1). L'aggettivo globale indica che i parametri delle trasformazioni continue non dipendono dallo spazio né dal tempo. Dunque, la simmetria globale U(1) è una proprietà generale della meccanica quantistica. Imponendo che il parametro  $\alpha$  dipenda dallo spazio e dal tempo, si ottiene la simmetria locale U(1) detta anche simmetria di gauge U(1). Promuovere una simmetria globale a simmetria locale significa imporre una condizione più forte riducendo il numero di sistemi fisici che soddisfano tale proprietà. Se un sistema fisico ha una funzione d'onda che non dipende dalla scelta della fase, allora esso soddisfa la simmetria di gauge U(1) e la corrispondente teoria è detta di gauge U(1).

Riguardo all'interazione elettromagnetica, nel momento in cui si generano i campi, e quindi i potenziali, si vincolano le particelle cariche a cambiare fase nel modo descritto, così che le trasformazioni dei campi e delle cariche si annullino a vicenda, per cui la fase non solo è arbitraria globalmente, ma può essere scelta localmente.

La simmetria di gauge genera l'interazione elettromagnetica. Le particelle cariche sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger. Si introduce un campo elettromagnetico che soddisfa le trasformazioni classiche di gauge. Nel momento in cui le particelle devono esistere coerentemente con i campi, cioè tutte le osservabili fisiche devono essere indipendenti dalla scelta del gauge, allora la funzione d'onda è correlata ai campi (alla scelta di gauge). Il modo in cui cambia la funzione d'onda della particella è univocamente determinato dal modo in cui cambiano i campi e viceversa. Fissando le trasformazioni classiche di gauge, si vincola la trasformazione della funzione d'onda. In teorie quantistiche dei campi, anche le particelle sono intese come campi. Una particella carica è descritta dall'equazione di Dirac, il campo elettromagnetico è descritto dall'equazione di Maxwell. Il campo elettromagnetico cambia secondo le trasformazioni classiche di gauge, mentre il campo della particella cambia secondo una fase  $e^{i\alpha(x^\mu)}$ . Affinché la lagrangiana dei due soddisfi la simmetria di gauge U(1), cioè rimanga invariata, bisogna aggiungere un termine di interazione tra la carica ed il campo elettromagnetico

$$\gamma_\mu \bar{\psi} A^\mu \psi$$

Quanto si introducono i potenziali, si vincola la particella carica generando così il termine di interazione che va aggiunto alla lagrangiana. Le simmetrie di gauge sono l'origine delle interazioni perché una volta scelto il campo e le equazioni del moto, si perde la possibilità di scegliere il modo di interazione in maniera arbitraria, ma si determina univocamente il termine di accoppiamento del campo con la particella.

## 6.2 Elettrodinamica quantistica

Si è utilizzata la simmetria di gauge  $U(1)$  per dimostrare come cambiano le funzioni d'onda delle particelle cariche. Affinché le osservabili siano indipendenti dal gauge, l'hamiltoniana e la funzione d'onda devono essere

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + qV, \quad \psi' = e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi$$

Imporre la coerenza tra le equazioni di Maxwell e l'equazione di Schrödinger implica le due espressioni sopra. Questa tecnica evita la quantizzazione canonica e la conoscenza del sistema classico. In elettrodinamica, la quantizzazione canonica non è un problema, ma lo diventa per l'interazione forte.

**Diagrammi di Feynman.** Per studiare un processo di scattering  $a + b \rightarrow c + d$  bisogna scrivere l'hamiltoniana in due termini, uno dei quali è la perturbazione dipendente dal tempo, e calcolare la probabilità di transizione tramite la regola d'oro di Fermi. Passare dall'hamiltoniana alle probabilità di transizione è un procedimento complicato, ma si può semplificare tramite i diagrammi di Feynman. L'hamiltoniana si può scomporre in due termini: una parte imperturbata e una perturbazione dipendente dal tempo

$$H = H_0 + H_1(t)$$

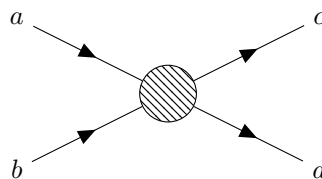
La serie perturbativa in funzione di  $H_1$  che fornisce gli elementi di matrice è

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle cd | H_1(t) | ab \rangle = \alpha A^{(1)} + \alpha^2 A^{(2)} + \alpha^3 A^{(3)} + \dots$$

cioè (si dimostra che) l'elemento di matrice si può scrivere come perturbazione in termini della costante di struttura fine. Da questo, la larghezza di decadimento della regola d'oro di Fermi è

$$\Gamma \propto |\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^2, \quad \sigma \propto |\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^2$$

I diagrammi di Feynman permettono di calcolare velocemente l'ordine di grandezza delle ampiezze di decadimento e delle sezioni d'urto. Essi sono una rappresentazione grafica della serie perturbativa che implementano il principio di indeterminazione di Heisenberg. Si consideri lo scattering tra due particelle



Quanto succede nel mezzo, dev'essere compatibile con il principio di indeterminazione di Heisenberg. Ad esempio, si consideri la transizione

$$e^+e^- \rightarrow (Z^0) \rightarrow \mu^+\mu^-$$

Per il principio di indeterminazione di Heisenberg, anche se le due particelle iniziali non hanno un'energia pari alla massa del bosone  $Z^0$ , questi può comunque essere prodotto poiché la sua vita è piccola e dalla relazione

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

l'incertezza sull'energia è grande. Si vede il significato di tutto questo in teoria perturbativa. Senza il principio di indeterminazione di Heisenberg, l'energia del bosone  $Z^0$  è

$$E^2 = M^2 + p^2$$



dove  $E = M$  nel riferimento solidale. Se si è prodotto il bosone  $Z^0$  con energia minore di quella necessaria, allora la relazione sopra non vale. Feynman introduce il concetto di particelle off-shell cioè particelle prodotte in intervalli di tempo  $\Delta t$  tali per cui vale la relazione di indeterminazione sopra, ma non soddisfano la relazione dell'energia. Queste particelle sono virtuali: misurando la loro quantità di moto e la loro massa si falsificherebbe la relatività. Le particelle off-shell non sono osservabili fisiche, ma sono stati intermedi, vietati, e a vita breve, permessi dal principio di Heisenberg. Le altre particelle sono dette on-shell cioè particelle per cui vale la relazione dell'energia. I diagrammi di Feynman sono combinazioni di particelle on-shell (stati iniziale e finale) e off-shell (regione intermedia).

## Lezione 18

mer 05 apr  
2023 13:30

Non tutto ciò che appare all'interno dei diagrammi di Feynman ha un'interpretazione fisica, ma alcune cose sono strumenti matematici utilizzati per calcolare gli elementi di matrice  $\mathcal{M}$ , ad esempio le particelle off-shell. Per definizione, queste particelle non sono osservabili: dopo una misura, le particelle collassano sul mass shell (cioè lo shell, l'iperboloide dato da  $E^2 = m^2 + p^2$ ), pertanto le particelle off-shell diventano on-shell.

**Regole di Feynman.** Le regole di Feynman permettono di disegnare un diagramma e di calcolare l'elemento della serie perturbativa associato: al disegno è univocamente associato un integrale che fornisce tale elemento. Si introducono delle regole semplificate che permettono di disegnare i diagrammi e di calcolare gli ordini di grandezza delle sezioni d'urto.

L'elemento  $n$ -esimo della serie perturbativa è dato dalla somma di tutti i diagrammi connessi nel piano  $(t, x)$  in uno scattering  $a + b \rightarrow X \rightarrow c + d + \dots$ , dove  $X$  rappresenta delle particelle off-shell. L'elemento è costituito nel seguente modo:

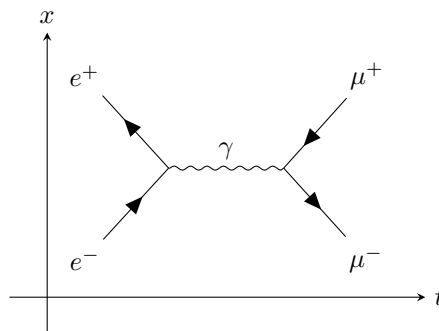
- Le particelle in stato iniziale ed in stato finale sono on-shell.
- Le particelle in stato intermedio sono off-shell.
- Il numero di vertici fotone-fermione è pari a  $2n$ : ogni vertice contribuisce all'elemento della serie perturbativa con  $q\sqrt{\alpha}$ .
- In ogni vertice, la carica ed il quadri-momento si conservano.

Un fermione è rappresentato da un segmento orientato verso il futuro. Un anti-fermione è rappresentato da un segmento orientato verso il passato. Il fotone è una linea ondulata (senza orientazione perché coincide con la propria anti-particella).

**Scattering elettrone-positrone.** Si studia lo scattering elettrone-positrone

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

Si disegna il diagramma corrispondente all'ordine minore della serie perturbativa: dev'essere connesso (se è disconnesso, il contributo alla serie è nullo) ed i vertici devono essere due.



Non bisogna interpretare il diagramma come delle traiettorie: le traiettorie deterministiche non sono possibili in meccanica quantistica, nel vuoto un fotone non può decadere in una coppia  $\mu^\pm$ , e infine il positronio non può decadere in un singolo fotone. Questo diagramma fornisce un'ampiezza di scattering non nulla poiché il fotone è off-shell  $E \neq p$  ed è come se potesse acquisire una massa e decadere in una coppia muone, anti-muone. Si noti che il bosone  $Z^0$  non esiste in elettrodinamica perché mediatore delle interazioni deboli e, ad energie sufficientemente basse, l'unica particella virtuale che si produce è il fotone.

Si calcola l'ordine di grandezza di questo scattering. I due vertici presenti contribuiscono ciascuno con un termine  $q\sqrt{\alpha}$  alla serie perturbativa. L'elemento di matrice al primo ordine è

$$\mathcal{M} \sim \alpha \implies |\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^2$$

La sezione d'urto totale è

$$\sigma \propto \frac{1}{F} |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{\alpha^2}{s}$$

dove  $F$  è il fattore di flusso di Møller che, per energie sufficientemente alte, è pari a  $2s$ . Dai diagrammi di Feynman si può facilmente affermare che la transizione  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  prevale sulle transizioni

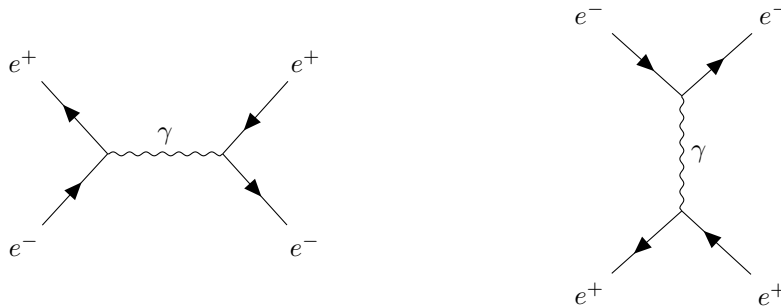
$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma, \quad e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma\gamma$$

perché sono presenti meno vertici. Lo scattering visto è il più semplice perché coinvolge un solo diagramma di Feynman all'ordine minore.

**Scattering Bhabha.** Lo scattering Bhabha è uno scattering più complesso: lo stato finale coincide con quello iniziale

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$$

I diagrammi di Feynman che contribuiscono sono



Il primo diagramma è detto  $s$ -channel: il quadri-momento trasferito al fotone è proporzionale alla prima variabile di Mandelstam. Il secondo diagramma è detto  $t$ -channel: il quadri-momento trasferito al fotone è proporzionale alla seconda variabile di Mandelstam. Per uno scattering  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , le tre variabili di Mandelstam sono definite come

$$s \equiv (p_1^\mu + p_2^\mu)^2, \quad t \equiv (p_1^\mu - p_3^\mu)^2, \quad u \equiv (p_1^\mu - p_4^\mu)^2$$

**Scattering Møller.** Nello scattering Møller, lo stato finale coincide con quello iniziale e le particelle sono identiche

$$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$$

pertanto bisogna considerare il principio di esclusione di Pauli. I diagrammi sono



Il primo diagramma è il  $t$ -channel, mentre il secondo è il  $u$ -channel. In questo caso non è facile calcolare l'ordine di grandezza della sezione d'urto: i due diagrammi hanno segni opposti perché il secondo diagramma elimina le combinazioni che violano il principio di esclusione. La sezione d'urto va come  $\alpha$ , ma per una stima precisa si ha bisogno della teoria quantistica dei campi.

**Osservazione.** I diagrammi di Feynman sono rappresentazioni pittoriche e pertanto non vanno presi alla lettera. In particolare bisogna porre attenzione alla causalità. Ad esempio, si consideri lo scattering Bhabha. Il primo vertice del  $s$ -channel si può intendere posizionato al momento in cui l'elettrone ed il positrone si annichilano e producono un fotone. Questo vive per un breve periodo e decade in un istante successivo. L'evento della creazione del fotone è causa della creazione delle particelle finali: i due eventi sono time-like. Tuttavia, nel  $t$ -channel l'emissione del fotone avviene nello stesso istante in cui esso viene assorbito: i due eventi non possono essere causalmente connessi perché sono space-like. Prendendo alla lettera i diagrammi di Feynman si arriva a conclusioni in contraddizione con la relatività speciale, pertanto l'ampiezza di scattering dovrebbe essere nulla, il fotone nel  $t$ -channel è off-shell e si può liberamente muovere nello spazio-tempo di Minkowski fornendo contributi non nulli all'ampiezza di scattering.

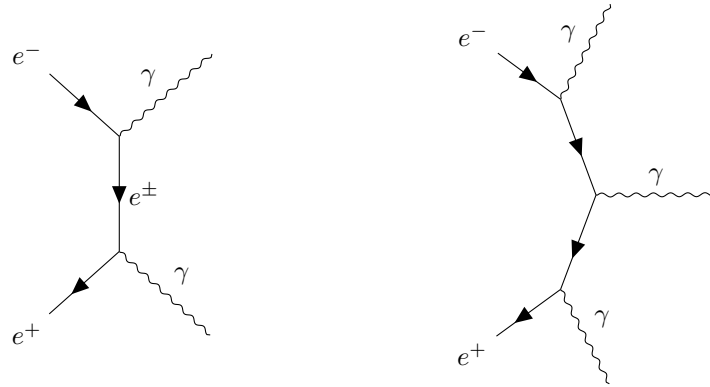
Si noti che tutti gli scattering di Fisica III sono  $t$ -channel: ad esempio, nell'esperimento di Rutherford, a qualunque energia non si osserva mai un fotone mediare l'interazione tra un atomo di oro ed una particella alfa. Il fotone è off-shell, se così non fosse, allora violerebbe la causalità.

**Diagrammi al secondo ordine.** Considerando lo scattering  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , si hanno nove diagrammi al secondo ordine:

- auto-energia (self-energy) in cui il fotone off-shell crea una coppia particella, anti-particella che si annichila in un altro fotone off-shell (un diagramma);
- correzioni di stato iniziale e stato finale in cui un fotone off-shell è emesso e assorbito da una delle particelle nello stato iniziale o finale (quattro diagrammi);
- correzioni di vertice in cui un fotone off-shell è emesso e assorbito da particelle che appartengono allo stesso vertice (due diagrammi);
- scambio a due fotoni in cui un secondo fotone è emesso da una particella iniziale ed assorbito da una particella finale (due diagrammi, uno dei quali considera lo scambio tra i due fotoni).

I diagrammi di auto-energia sono interessanti perché la coppia virtuale prodotta può essere costituita da particelle con massa superiore all'energia fornita. In particolare, si può creare una coppia di particelle non ancora scoperte che contribuiscono alle ampiezze di scattering. Osservando la variazione della sezione d'urto, si può dedurre l'esistenza di nuove particelle che non si possono al momento produrre on-shell.

**Positronio.** I diagrammi di Feynman permettono di capire perché il para-positronio decade più facilmente dell'orto-positronio. Applicando la conservazione della  $C$ -parità si è dimostrato che il para-positronio ( $l = 0, s = 0$ ) decade in (almeno) due fotoni e l'orto-positronio ( $l = 0, s = 1$ ) produce (almeno) tre fotoni.



Il primo è un  $t$ -channel. Si noti che per diagrammi topologicamente equivalenti, si possono avere interpretazioni diverse. Ad esempio, nel caso del para-positronio, l'elettrone emette un fotone e poi si annichila con il positrone oppure il positrone emette un fotone e si annichila con l'elettrone. Tuttavia, l'integrale corrispondente ad un diagramma descrive tutte le possibili traiettorie compatibili con il principio di indeterminazione. Pertanto, l'interpretazione particolare non ha importanza e i diagrammi sono (topologicamente) equivalenti.

Da questi diagrammi si può facilmente osservare perché un decadimento è più probabile dell'altro: ogni vertice di un diagramma contribuisce con  $\sqrt{\alpha}$  alla serie perturbativa. Per il para-positronio si hanno due vertici

$$\mathcal{M} \sim \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^2$$

Per l'orto-positronio si hanno tre vertici

$$\mathcal{M} \sim \alpha^{\frac{3}{2}} \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^3$$

Questo è compatibile con il fatto che la vita media del para-positronio è un decimo di nanosecondo, mentre la vita media dell'orto-positronio è un centinaio di nanosecondi. L'ordine di grandezza del rapporto di uno sull'altro è la costante di struttura fine  $\alpha$ .

**Osservazione.** La serie perturbativa dell'elettrodinamica quantistica è precisa (oggi arrivati fino al sesto ordine) perché la costante in cui si sviluppa è piccola

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

Più piccola è la costante e migliore è l'approssimazione. Per la cromodinamica quantistica questo non è il caso e odiernamente si arriva fino al terzo ordine.

**Sezione d'urto dello scattering elettrone-positrone.** I diagrammi di Feynman permettono di calcolare la grandezza della sezione d'urto del processo  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . All'ordine minore della teoria perturbativa si ha un unico diagramma da cui estrapolare l'ordine di grandezza. L'elemento di matrice è

$$|\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^2 \Rightarrow \sigma = \frac{(2\pi)^4}{F} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_1} \delta^4(p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu) \approx \frac{\alpha^2}{s}$$

Aumentando il flusso  $F$  di Møller, la sezione d'urto diminuisce: se le particelle sono lente, allora possono scambiarsi più energia. In prima approssimazione, l'andamento della sezione d'urto segue  $s^{-1}$ . Osservando attentamente i dettagli, si palesano varie risonanze dovute alla produzione di particelle virtuali nei diagrammi di auto-energia. L'energia della coppia elettrone-positrone è vicina alla massa invariante della coppia virtuale che risulta essere quasi on-shell e compare un picco (una Breit-Wigner) nella sezione d'urto. L'elettrodinamica quantistica è il minimo che ci si aspetta, il resto è costituito da informazioni di particelle che si scoprono progressivamente.

**Confronto tra urto frontale e urto a bersaglio fisso.** Per produrre delle particelle conviene fare un urto frontale rispetto ad un urto a bersaglio fisso. Si studia la differenza. Nella reazione  $a + b \rightarrow M \rightarrow c + d + e$ , la massa invariante di due particelle con stessa massa  $a$  e  $b$  dev'essere circa quella di  $M$ . Si trova l'energia delle particelle iniziali. Posto  $p^\mu = p_a^\mu + p_b^\mu$ , la prima variabile di Mandelstam è

$$\begin{aligned} s &= p^\mu p_\mu = E^2 - p^2 = (E_a + E_b)^2 - (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 \\ &= E_a^2 + E_b^2 + 2E_a E_b - p_a^2 - p_b^2 - 2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b - 2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b \end{aligned}$$

ricordando  $E^2 = m^2 + p^2$ . Questo vale in qualunque riferimento. Se la particella è prodotta on-shell, allora  $s = M^2$  (basti considerare il riferimento solidale). Se l'urto è frontale e le energie sono alte, allora si possono trascurare i termini di massa per avere

$$s \approx 2E_a E_b - 2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b, \quad m_i \ll E_i \approx p_i, \quad i = a, b$$

Il riferimento del centro di massa coincide con il riferimento del laboratorio e le due particelle iniziali hanno la stessa energia:

$$\mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b, \quad E_a = E_b \implies s = 4E_a E_b = 4E_a^2 \equiv M^2 \implies E_a = \frac{1}{2}M$$

D'altra parte, nel caso di un urto a bersaglio fisso si ha

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b \equiv M^2 \implies E_a = \frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \approx \frac{M^2}{2m_b}, \quad M \gg m_a, m_b$$

dove l'approssimazione finale vale se le energie delle particelle sono molto maggiori delle loro masse.

## Lezione 19

mer 12 apr  
2023 13:30

## 7 Interazione forte

Si comincia la trattazione dell'interazione forte, il primo esempio di interazione che non ha rappresentazione classica: non si può più operare la quantizzazione canonica. L'interazione forte è un'interazione tra quark. I quark sono fermioni elementari con spin  $s = \frac{1}{2}$ , carica elettrica frazionaria ed esistono in sei varietà (flavour):

Nome	Simbolo	Carica elettrica $\cdot 3/e$	Massa
up	$u$	2	2.0 MeV
down	$d$	-1	5 MeV
charm	$c$	2	1.2 GeV
strange	$s$	-1	90 MeV
top	$t$	2	173 GeV
bottom	$b$	-1	4.2 GeV

I quark vennero introdotti da Gell-Mann come oggetti matematici costituenti degli adroni atti a classificarli e predire delle loro proprietà. Contemporaneamente, i dati sperimentali suggeriscono che i quark sono particelle elementari tanto quanto gli elettroni ed i muoni.

**Carica dell'interazione forte – carica di colore.** La carica dell'interazione forte ha tre tipi detti colori: rosso  $R$ , verde  $G$  e blu  $B$ . L'analogo della legge di Coulomb è più complicata: bisogna studiare come le varie cariche di colore interagiscono tra loro. Le combinazioni delle possibili cariche (e anti-cariche) sono otto cioè le varietà dei gluoni.

Dal punto di vista formale, la funzione d'onda di una particella  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  viene sostituita con un vettore

$$\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \psi_R(\mathbf{x}, t) \\ \psi_G(\mathbf{x}, t) \\ \psi_B(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}$$

La densità di probabilità che un quark abbia carica colore rossa è data da  $|\psi_R(\mathbf{x}, t)|^2$ . I quark hanno cariche colore definite. Un quark rosso ha cariche

$$Q_R = 1, \quad Q_G = 0, \quad Q_B = 0$$

Analogamente per un quark verde ed un quark blu. Un quark up verde si scrive come  $u_G$ . I quark sono fermioni dotati di massa, quindi soddisfano l'equazione di Dirac: esistono le loro anti-particelle con carica elettrica e colore di segno opposto. Un quark anti-charm blu  $\bar{c}_B$  (detto anche quark anti-charm anti-blu  $\bar{u}_{\bar{B}}$ ) ha cariche

$$Q_R = 0, \quad Q_G = 0, \quad Q_B = -1$$

Gli anti-colori sono talvolta rappresentati dal ciano, magenta e giallo rispettivamente. Si noti la contrapposizione tra i modelli cromatici RGB e CMY.

**Simmetria del colore.** La lagrangiana dell'interazione forte è univocamente determinata dal teorema fondamentale della cromodinamica quantistica: non esiste alcun esperimento in grado di determinare univocamente la carica cromatica di una particella. Come in meccanica quantistica nessun esperimento permette di distinguere due particelle identiche, da cui si ottiene il principio di esclusione di Pauli, così in cromodinamica non esiste alcun esperimento in grado di determinare la carica cromatica di un quark.

Il teorema implica che la definizione di rosso, verde e blu è convenzionale e priva di significato fisico: ridefinendo i colori, le ampiezze di transizione non cambiano. Questo equivale ad applicare una trasformazione che è simmetria del sistema. Nello spazio euclideo, la convenzionalità equivale all'arbitrarietà della scelta di una base ortonormale in  $\mathbb{R}^3$  e le trasformazioni corrispondono alle rotazioni cioè cambi di base ortonormale. Per la descrizione dell'interazione forte bisogna utilizzare uno spazio vettoriale sul campo complesso. La trasformazione  $\hat{U}$  che permette la ridefinizione della carica cromatica è unitaria e continua. Per i teoremi sugli operatori unitari continui, si ha

$$\hat{U} = e^{i \sum_j a_j \hat{T}_j}, \quad \hat{T}_j = \hat{T}_j^\dagger, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

Si vuole che questa trasformazione sia una simmetria dell'hamiltoniana e viene detta simmetria globale SU(3) di colore, dove il gruppo SU(n) è il gruppo unitario speciale. Applicando il principio di gauge si genera la simmetria locale SU(3) di colore: i coefficienti  $a_j$  diventano funzioni dello spazio e del tempo  $a_j(\mathbf{x}, t)$ . Generando la simmetria locale, si determina univocamente l'hamiltoniana dell'interazione forte. Questa interazione è la manifestazione della simmetria di gauge che permette di ridefinire la carica cromatica.

## 7.1 Cromodinamica quantistica

L'elettrodinamica quantistica QED è una teoria di gauge U(1), mentre la cromodinamica quantistica QCD è una teoria di gauge SU(3).

**Gruppo algebrico.** Un gruppo algebrico è una coppia  $(G, \cdot)$  di un insieme ed un'operazione che gode di quattro proprietà:

- chiusura

$$g_1, g_2 \in G \implies g_1 \cdot g_2 \in G$$

- associatività

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$$

- elemento neutro 1

$$\exists 1 \in G \mid g \cdot 1 = 1 \cdot g = g, \quad \forall g \in G$$

- elemento inverso

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G \mid g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$$

Il gruppo unitario  $U(1)$  è l'insieme dei numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$  con l'operazione di moltiplicazione tali per cui  $zz^* = |z|^2 = 1$ . Il gruppo unitario speciale  $SU(3)$  è l'insieme delle matrici  $3 \times 3$  a determinante 1 dotato della moltiplicazione tra matrici. Si dimostra essere un gruppo:

- elemento neutro, la matrice unitaria  $I$  ha determinante 1 pertanto è elemento di  $SU(3)$ . Inoltre, per ogni matrice quadrata vale

$$IA = AI = A$$

Se vale per ogni matrice, allora vale per  $A \in SU(3)$ .

- elemento inverso, se  $A \in SU(3)$  allora  $A$  è una matrice unitaria, quindi vale  $A^\dagger = A^{-1}$ .
- associatività, per ogni matrice quadrata vale

$$(AB)C = A(BC)$$

quindi vale per  $A, B, C \in SU(3)$ .

- chiusura, se  $A, B \in SU(3)$  allora

$$(AB)^\dagger(AB) = B^\dagger A^\dagger AB = B^\dagger IB = I \implies (AB)^{-1} = (AB)^\dagger \implies AB \in U(3)$$

inoltre

$$\det(AB) = \det A \det B = 1 \implies AB \in SU(3)$$

Questa dimostrazione risulta relativamente semplice grazie alle proprietà delle matrici, ma per un gruppo astratto potrebbe essere più complicato.

**Teoria delle rappresentazioni.** La teoria delle rappresentazioni permette di mappare un gruppo astratto in un gruppo di matrici. Una rappresentazione è una mappa  $g \mapsto \hat{U}(g)$  tra gli elementi del gruppo astratto  $g \in G$  e le matrici  $\hat{U} \in M_n(V)$  in un determinato spazio vettoriale  $V$ , che gode delle seguenti proprietà

$$\hat{U}(g_1 \cdot g_2) = \hat{U}(g_1)\hat{U}(g_2), \quad \hat{U}(g^{-1}) = \hat{U}^{-1}(g), \quad \hat{U}(1) = I$$

Se esiste tale mappa, allora il gruppo  $(G, \cdot)$  è detto rappresentabile. Questo permette di applicare i teoremi delle matrici visti in Algebra Lineare e Geometria. Le matrici corrispondono ad operatori lineari in spazi vettoriali mappando vettori in vettori. La dimensione dello spazio vettoriale  $V$  in cui si rappresenta il gruppo è arbitraria. Alcune dimensioni possono essere particolarmente utili.

**Gruppo unitario delle matrici monodimensionali.** Il gruppo unitario  $U(1)$  ammette rappresentazione in qualsiasi dimensione. La rappresentazione monodimensionale di tale gruppo risulta essere  $e^{ia}$ . In due dimensioni, la rappresentazione è data da una matrice  $2 \times 2$

$$\hat{U}\psi = e^{ia}\psi = \begin{pmatrix} e^{ia}\psi_1 \\ e^{ia}\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Questo caso non ha la stessa utilità di quello monodimensionale. Infatti, in due dimensioni la rappresentazione è riducibile: esiste almeno un elemento dello spazio vettoriale che non permette di ricostruire tutto lo spazio quando vi si applica ogni elemento del gruppo, cioè ogni matrice della rappresentazione. In due dimensioni un esempio è il vettore  $(1, 0)^\top$ . Contrariamente, una rappresentazione irriducibile (detta irrep) permette di costruire tutto lo spazio vettoriale partendo da un suo elemento e applicando le matrici della rappresentazione. Per il gruppo  $U(1)$ , la rappresentazione monodimensionale è irriducibile. Quando la dimensione dello spazio vettoriale corrisponde alla dimensione delle matrici del gruppo, allora la rappresentazione è detta fondamentale.

**Rappresentazione irriducibile.** Una rappresentazione di un gruppo  $G$  su di uno spazio vettoriale  $V$  è irriducibile se non esiste alcun sottospazio di  $V$  invariante per applicazione di tutte le matrici  $\hat{U}(g)$  della rappresentazione. Una rappresentazione è irriducibile se e solo se le matrici corrispondenti non sono diagonalizzabili a blocchi.

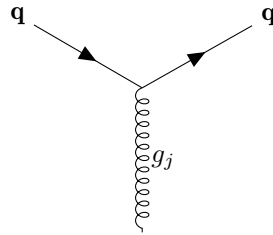
**Gruppo compatto di Lie – gruppo compatto continuo e differenziabile.** Un gruppo di Lie è un gruppo parametrizzato da variabili reali, continue e differenziabili. Esso è rappresentabile da matrici, ma solo i gruppi compatti di Lie si possono rappresentare tramite matrici unitarie di dimensioni finite. I gruppi di interesse  $U(1)$ ,  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  sono gruppi compatti di Lie. Il primo genera l'elettromagnetismo, il secondo genera l'interazione forte, il terzo interessa il modello a quark e la combinazione del primo con il terzo genera l'interazione elettrodebole. Il gruppo  $SU(n)$  di matrici unitarie  $n \times n$  con determinante 1 ammette  $n^2 - 1$  generatori. In particolare, le trasformazioni del gruppo  $SU(3)$  hanno 8 generatori

$$\hat{U} = e^{i \sum_j a_j \hat{T}_j}, \quad j = 1, \dots, 8$$

Il gruppo  $U(1)$  ha un generatore. Il numero di generatori del gruppo di gauge corrisponde al numero di particelle che mediano l'interazione.

**Diagrammi di Feynman.** Sebbene si siano introdotti i quark con l'interazione forte, essi sono particelle elettricamente cariche e quindi soggetti all'interazione elettromagnetica, trascurabile rispetto all'interazione forte. Dunque, per i quark si possono disegnare gli stessi diagrammi di Feynman dell'elettrodinamica visti per l'elettrone. Quando si scambiano fotoni virtuali, il diagramma non dipende dalla carica cromatica del quark.

In cromodinamica, il mediatore dell'interazione forte viene detto gluone ed è rappresentato da una linea elicoidale:



Si ricordi che un quark  $\mathbf{q}$  ha funzione d'onda vettoriale a tre componenti, una per ogni colore. In ogni teoria di gauge  $SU(n)$  (detta teoria di Yang-Mills), un mediatore è una particella priva di massa con spin 1 e presenta tante varietà quanti sono i generatori del gruppo di gauge. Per la simmetria  $SU(3)$ , i generatori sono otto e quindi i gluoni sono divisi in otto varietà  $j = 1, \dots, 8$ . Nella rappresentazione fondamentale del gruppo  $SU(3)$ , ogni gluone del diagramma corrisponde ad una matrice  $3 \times 3$  che descrive le interazioni tra le varie cariche cromatiche. Pertanto, ci sono otto matrici  $3 \times 3$  dette matrici di Gell-Mann.

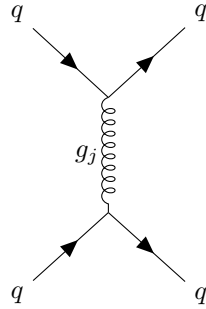
**Matrici di Gell-Mann.** Le matrici sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I gluoni corrispondenti alle prime tre matrici trasformano un quark da rosso a verde e viceversa. La quarta e la quinta descrivono la trasformazione tra rosso e blu. La sesta e la settima trasformano tra verde e blu. L'ultima trasforma un colore in se stesso. La forma delle matrici rende indistinguibile il colore dei quark in uno scattering tra due quark di stesso colore, in accordo con la definizione convenzionale del colore. Ne si vede un esempio.



**Scattering tra due quark di stesso colore.** Si consideri lo scattering tra due quark dello stesso colore



La sezione d'urto è proporzionale al prodotto tra i due vertici. Ogni vertice contribuisce con un termine  $\frac{1}{2}\lambda_j\sqrt{\alpha_s}$ , dove  $\alpha_s$  è la costante di accoppiamento dell'interazione forte detta "alpha strong", mentre il fattore  $\frac{1}{2}$  viene aggiunto per convenzione.

Lo scattering tra due quark blu è mediato solo dal gluone corrispondente a  $\lambda_8$ . Pertanto, solo un diagramma contribuisce alla sezione d'urto. Ciascuno dei due vertici contribuisce con un termine pari a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

L'elemento di matrice nell'espressione della sezione d'urto è

$$\mathcal{M} \sim \left[ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\alpha_s}}{2} \right]^2 = \frac{\alpha_s}{3}$$

Lo scattering tra due quark rossi viene mediato da due gluoni corrispondenti a  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$ : due diagrammi contribuiscono alla sezione d'urto. Per il primo gluone, l'elemento di matrice è 1 e ogni vertice contribuisce con  $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_s}$ . Per il secondo, l'elemento di matrice è  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  e ogni vertice fornisce  $\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\alpha_s}$ . Bisogna sommare i due contributi

$$\mathcal{M} \sim \frac{\alpha_s}{2} + \frac{\alpha_s}{12} = \frac{\alpha_s}{3}$$

Questo è lo stesso valore ottenuto per lo scattering tra due quark blu. Le matrici di Gell-Mann sono i generatori del gruppo SU(3) cioè il gruppo delle trasformazioni che permettono di ridefinire il colore di un quark. Se le trasformazioni sono una simmetria (commutano con l'hamiltoniana), allora la simmetria dev'essere preservata nelle ampiezze di transizione.

## Lezione 20

**Libertà asintotica.** I gluoni sono particelle simili al fotone: senza massa, con spin 1. Risulta sorprendente ottenere una teoria simile all'elettrodinamica, ma che porta a risultati completamente diversi. Successivamente si vede il motivo della divergenza delle due teorie. In particolare si studia perché l'interazione forte è più intensa di quella elettromagnetica, perché non si possono osservare i quark e perché l'interazione agisce solamente nel nucleo.

Si parte dall'elettrodinamica quantistica. I vari diagrammi di Feynman per lo scattering  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  contengono termini di auto-energia in quantità maggiori con l'aumentare dell'ordine delle serie perturbativa. Si studia la sua convergenza. Landau dimostra che la somma dei contributi di auto-energia di tutti gli ordini perturbativi converge ed essa è equivalente a considerare il diagramma di ordine minore sostituendo la costante di struttura fine con la funzione

$$\alpha(s) = \frac{\alpha(s_0)}{1 - \frac{\alpha(s_0)}{3\pi} \ln \frac{s}{m_e^2}}, \quad s_0 = m_e^2$$

gio 13 apr  
2023 13:30

dove  $\alpha(s_0)$  è il valore della costante di struttura fine finora utilizzato cioè a basse energie. Questo risultato implica che i termini di auto-energia, cioè le correzioni dovute al principio di indeterminazione di Heisenberg — dette anche correzioni radiative —, sono equivalenti a considerare la costante di struttura fine come una funzione dell'energia (equivalentemente, della prima variabile di Mandelstam): al variare dell'energia, cambia l'intensità dell'interazione elettromagnetica. In funzione dell'energia, la funzione sopra diverge seppur lentamente. Landau nota che per energie sufficientemente alte, la costante di struttura fine diventa maggiore dell'unità: lo sviluppo in serie perturbativa non è più possibile perché la serie diverge sicuramente, i diagrammi di Feynman non si possono utilizzare. Considerando tutte le particelle del Modello Standard, la costante di struttura fine diventa l'unità ad un'energia di  $E = \sqrt{s} \approx 10^{35}$  GeV che è irrealizzabile sia con sorgenti artificiali che naturali. Pertanto, l'elettrodinamica quantistica è una teoria sicura nell'ultravioletto, cioè per alte energie. Per qualsiasi processo fisico, si possono sempre considerare i diagrammi di Feynman e la serie perturbativa è sempre convergente.

In cromodinamica quantistica, non si conosce il valore della costante di accoppiamento  $\alpha_s$ . Si presuppone esistere almeno un'energia  $\mu$  per cui la costante è sufficientemente piccola  $\alpha_s(\mu^2) < 1$  così da poter considerare valida la serie perturbativa e ripetere lo stesso calcolo di Landau per ottenere la formula di Gross-Politzer-Wilczek:

$$\alpha_s(s) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{11N_e - 2F}{3} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{s}{\mu^2}} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{7}{4\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln \frac{s}{\mu^2}}$$

dove  $N_e = 3$  è il numero di tipi di cariche cromatiche e  $F = 6$  è il numero di varietà di quark. La funzione sopra ha un andamento decrescente. L'interazione forte diventa più debole con l'aumentare dell'energia. Questa proprietà è detta libertà asintotica ed è caratteristica di tutte le teorie di gauge basate su gruppi non abeliani. Per energie arbitrariamente grandi, le interazioni svaniscono e le particelle diventano libere. Il valore della costante di accoppiamento è stato misurato con il collisore LEP

$$\alpha_s(M_{Z^0}^2) = 0.1179(9) \approx \frac{1}{9}$$

Ad energie confrontabili con la massa del bosone  $Z^0$  si possono impiegare i diagrammi di Feynman. La costante diventa pari all'unità all'energia  $E = \Lambda_{\text{QCD}} \approx 300$  MeV. Al di sotto, non si possono più utilizzare i diagrammi e la teoria perturbativa perché l'interazione forte non agisce più debolmente.

**Congettura di confinamento.** Si vede una conseguenza della presenza di un'energia minima per applicare i diagrammi di Feynman. Si consideri una collisione tra protone e anti-protone. Il quark down si può annichilare con il quark anti-down producendo un gluone virtuale. Questi genera un'altra coppia quark, anti-quark. Ad alte energie, confrontabili con  $M_{Z^0}$ , la costante di accoppiamento è grande e così pure la probabilità che uno dei due quark prodotti emetta un gluone (gluon radiation). Esso sottrae energia al quark e la costante di accoppiamento aumenta: la probabilità di emettere un altro gluone aumenta. Si emette un altro gluone e così via: l'energia del quark diminuisce, la probabilità di emissione aumenta. Inoltre, ogni gluone può creare una coppia quark, anti-quark che emette altri gluoni. Dopo la produzione della prima coppia, si ha una cascata di gluoni e quark. Quando un quark ha energia minore di  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , si arriva nella regione di adronizzazione dove l'approccio perturbativo non si può utilizzare. Risulta ragionevole pensare che la cascata non prosegua indefinitamente perché l'energia iniziale è finita, ma quando e come si ferma è ignoto perché questo avviene nella regione di adronizzazione. La situazione più probabile è la formazione di stati legati di quark con cariche cromatiche nulle: gli stati non possono più soggetti all'interazione forte. Questa è la congettura di confinamento: tutti gli stati finali delle interazioni forti sono stati legati di quark e gluoni privi di carica cromatica e invarianti per trasformazione SU(3) di colore. Tali stati sono detti singoletti di colore perché, in analogia con la meccanica quantistica in meccanica quantistica, lo stato di singoletto del momento angolare è sua auto-funzione con autovalore pari ad una fase.

La proposizione è detta congettura perché non si è ancora trovata una soluzione analitica della

regione di adronizzazione: non poter applicare i diagrammi di Feynman impedisce di studiare come le particelle evolvono fino ad arrivare agli stati finali. Il fatto che la libertà asintotica implica il confinamento è detto problema di mass-gap. Trovare la soluzione analitica permetterebbe di studiare le teorie fisiche sia in approccio perturbativo che non perturbativo. Tuttavia, bisogna anche notare che i diagrammi di Feynman non sono l'unico strumento, infatti la simmetria di gauge fornisce l'hamiltoniana da cui l'equazione del moto cioè un integrale: si discretizza il dominio e si risolve l'equazione del moto sommando tutti i contributi e dimostrando che l'integrale converge. Questa tecnica è la cromodinamica quantistica su reticolo (lattice QCD). In questo modo, per lo scattering particolare di un protone, anti-protone, si è numericamente dimostrato che gli stati finali sono tutti singoletti di colore. Ai fini pratici, la congettura è a tutti gli effetti un teorema.

[r] finire lezione

## Lezione 21

lun 17 apr  
2023 13:30

**Simmetria di isospin.** In approssimazione  $m_u \approx m_d \approx 0$  vale la simmetria di flavor  $F = 2$  cioè  $SU(2)$ . Tale simmetria è detta isospin perché il gruppo  $SU(2)$  è localmente isomorfo al gruppo  $SO(3)$  delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  a determinante 1, cioè il gruppo delle rotazioni tridimensionali proprie. La teoria delle rappresentazioni  $SO(3)$  si è studiata in Meccanica Quantistica senza accorgersi: la combinazione di due spin  $\frac{1}{2}$  fornisce uno stato di singoletto  $s = 0$  ed tre di tripletto  $s = 1$ . Classificare come cambiano i sistemi fisici per rotazioni equivale a studiare le rappresentazioni del gruppo  $SO(3)$  [r]. Per scrivere analiticamente le funzioni d'onda si utilizzano i coefficienti di Clebsch-Gordan. Sebbene l'isospin non sia lo spin, matematicamente si utilizzano gli stessi strumenti.

Si identifica il quark up con un oggetto con isospin  $I = \frac{1}{2}$  e proiezione  $I_z = +\frac{1}{2}$ , e il quark down con  $I = \frac{1}{2}$  e  $I_z = -\frac{1}{2}$

$$u \mapsto \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad d \mapsto \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

**Barioni.** Un barione è uno stato legato di tre quark  $q_1 q_2 q_3$ . Si combinano le funzioni d'onda di due quark tramite i coefficienti di Clebsch-Gordan e poi vi si aggiunge il terzo quark. La funzione d'onda totale è [r]

$$\psi = \phi \chi \psi_c \psi_F$$

Si calcolano le possibili forme della funzione d'onda di flavor  $\psi_F$ . L'isospin dei quark è  $\frac{1}{2}$  pertanto

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

La funzione d'onda data dai coefficienti di Clebsch-Gordan è

$$|II_z I_1 I_2\rangle = \sum_{I_1^z I_2^z} |I_1 I_1^z I_2 I_2^z\rangle \langle I_1 I_1^z I_2 I_2^z | II_z I_1 I_2\rangle$$

Omettendo  $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}$  ed esplicitando solo il segno di  $I_z = \pm\frac{1}{2}$ , la forma analitica dello stato di singoletto  $I = 0$  è

$$|II_z I_1 I_2\rangle = |II_z\rangle = |00\rangle = 0|++\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}| - + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}| + - \rangle + 0|--\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+-\rangle - |-+\rangle]$$

Nel primo addendo, il primo quark è up e il secondo è down. Viceversa, nel secondo addendo, il primo quark è down ed il secondo è up. Per gli stati di tripletto si ha

$$|II_z\rangle = |I_1^z I_2^z\rangle, \quad |11\rangle = |++\rangle, \quad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+-\rangle + |-+\rangle], \quad |1-1\rangle = |--\rangle$$

Si aggiunge il terzo quark

$$(0 \oplus 1) \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$$

Per isospin  $I = \frac{3}{2}$ ,  $I_1 = 1$  e  $I_2 = \frac{1}{2}$  si ha

$$\begin{aligned} |II_z I_1 I_2\rangle &= |I_z\rangle = |I_1^z I_2^z\rangle = |I_1 I_1^z I_2 I_2^z\rangle \\ \left|\frac{3}{2}\right\rangle &= \left|1\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{2} \left|0\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1-\frac{1}{2}\right\rangle \right] \\ \left|-\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{2} \left|0-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|-1\frac{1}{2}\right\rangle \right] \\ \left|-\frac{3}{2}\right\rangle &= \left|-1-\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned}$$

[r] Per isospin  $I = \frac{1}{2}$ ,  $I_1 = 1$  e  $I_2 = \frac{1}{2}$  si ha

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{2} \left|1-\frac{1}{2}\right\rangle - \left|0\frac{1}{2}\right\rangle \right] \\ \left|-\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left|0-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{2} \left|-1\frac{1}{2}\right\rangle \right] \end{aligned}$$

[r] Queste ultime due combinazioni non corrispondono ad alcuna particella. Nella simmetria di isospin non esiste alcun modo di distinguere un quark up da uno down, dunque la funzione d'onda totale descrive tre fermioni identici e deve essere totalmente anti-simmetrica per scambio di coppie di quark [r]. Lo stato legato corrisponde ad uno stato energetico. Sei stati corrispondono a sei livelli energetici (eventualmente identici) [r] ciascuno corrispondente alla massa dello stato legato. Nel limite dell'approssimazione di isospin, il protone ed il neutrone (isospin  $I = \frac{1}{2}$  e  $I_z = \pm\frac{1}{2}$ ) hanno stessa energia [r]. Nella realtà, le due masse differiscono di una parte su mille: perché i quark hanno masse diverse e cariche diverse. Per fare il calcolo esatto, bisogna integrare le equazioni del moto dall'hamiltoniana dell'interazione forte.

.[r] Gli stati

**Esperimento di Anderson-Fermi.** L'esperimento ha mostrato l'esistenza delle particelle  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$  e  $\Delta^-$ . Si contano dei pioni in entrata ed in uscita da una regione di idrogeno liquido. Dalla legge di attenuazione

$$N = N_0 e^{-\lambda x}, \quad \lambda = \frac{1}{\sigma \bar{N}}$$

si può calcolare la sezione d'urto totale  $\sigma$ . In funzione dell'energia dei pioni, si nota un picco nella sezione d'urto dato da

$$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p$$

L'energia cinetica dei protoni è di  $K_p = 450$  MeV e l'energia dei pioni va da 10 MeV ai 200 MeV. In funzione dell'energia dei pioni, si ha un picco Breit-Wigner a 191 MeV. [r] Per un urto a targhetta fissa, l'energia del pione incidente nel riferimento del laboratorio è pari a

$$E_a = \frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}, \quad M^2 = 2m_b E_a + m_a^2 + m_b^2$$

con  $m_b = 938$  MeV,  $m_a = 136$  MeV e  $E_a = 191$  MeV da cui  $M \approx 1232$  MeV. L'ampiezza di scattering [r] è  $\Gamma \approx 110$  MeV da cui  $\tau \approx 10^{-24}$  s. La particella è uno stato legato di quark che decade in altri stati legati. La particella  $\Delta^{++}$  data da  $uuu$  emette un gluone che genera una coppia  $d\bar{d}$  che si lega ai quark prima per dare  $\pi^+ = u\bar{d}$  e  $p = uud$ . In tale regime, la costante di accoppiamento è maggiore di uno: la particella decade istantaneamente.

[r] Si consideri la combinazione di isospin  $0 \otimes \frac{1}{2}$ . [r] Gli stati legati a minima energia hanno  $l = 0$ . La funzione d'onda totale è anti-simmetrica per stati a minimo momento angolare se e solo se  $\chi\psi_F$  è una funzione simmetrica. Combinando tre particelle a spin  $s = \frac{1}{2}$  si ottiene

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

La funzione d'onda corrispondente a (iso)spin  $s = \frac{3}{2}$  è simmetrica per scambio di qualunque coppia di quark. La funzione d'onda corrispondente al primo spin  $s = \frac{1}{2}$  è simmetrica per scambio tra la prima particella con la seconda, mentre la funzione d'onda del secondo spin  $s = \frac{1}{2}$  è simmetrica per scambio tra la seconda particella e la terza [r]. Il prodotto  $\chi\psi_F$  è sicuramente simmetrico per spin ed isospin  $\frac{3}{2}$ . [r]

$$c \left[ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M12} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M12} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M13} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M13} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M23} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M23} \right], \quad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M13} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M12} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{M23}$$

isospin  $I = \frac{1}{2}$ ,  $I_z = \pm \frac{1}{2}$  a spin  $s = \frac{1}{2}$  cioè il protone ed il neutrone. [r]

Per usare la stessa tecnica per studiare gli stati legati di up, down e strange, bisogna considerare che lo strange abbia la stessa massa dell'up e del down. Nel modello a tre quark, aumentano le degenerazioni, ma le particelle sono le stesse. Si può predire lo spin, la parità e la C-parità, ma non le masse. Il modello moderno si basa su cinque quark ed SU(5). Il sesto quark, il top, ha una massa enorme rispetto agli altri che decade talmente velocemente che non costituisce stati legati.

**Mesoni.** I mesoni sono stati legati da un quark ed un anti-quark [r]. La funzione d'onda di un quark trasforma secondo  $e^{i \sum_j a_j \hat{T}_j}$ , mentre quella di un anti-quark secondo  $e^{-i \sum_j a_j \hat{T}_j^*}$ . [r] La forma analitica della funzione di spin è data da

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan. Lo stesso vale per l'isospin. Tutti i possibili prodotti corrispondono a particelle fisiche. Le particelle con isospin  $I = 1$  sono

$$u\bar{d}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}, d\bar{d}), \quad d\bar{u}$$

La particelle con isospin  $I = 0$  è

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

con cariche 1, 0, -1 e 0 rispettivamente. Le particelle a spin 0 corrispondenti sono  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  e  $\eta$  rispettivamente. Le controparti a spin 1 sono  $\rho^+$ ,  $\rho^0$ ,  $\rho^-$  e  $\rho$  [r].

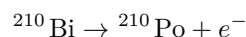
La parità intrinseca e la C-parità intrinseca di una coppia fermione, anti-fermione sono  $(-1)^{l+1}$  e  $(-1)^{l+s}$ . Da questo, i pioni hanno parità intrinseca -1 e C-parità intrinseca +1. Le particelle  $\rho$  hanno C-parità -1. [r]

Si noti che storicamente si sono scoperte le particelle, poi si è costruito il modello.

## Lezione 22

## 8 Interazione debole

[r] L'interazione debole si è scoperta nei decadimenti nucleari. I decadimenti sono classificati in base alla particella emessa: particella  $\alpha$  cioè un nucleo di elio, particella  $\beta$  cioè un elettrone, e particella  $\gamma$  cioè un fotone. Un esempio di decadimento  $\beta$  è



mar 18 apr  
2023 13:30

ma non è un decadimento a due corpi: gli elettroni hanno sempre energia minore di quella attesa [r]. Questa è un'apparente violazione della conservazione dell'energia. Si ipotizza esistere una particella  $\nu$  fantasma che porta energia, momento e spin [r]. Questo spiega la distribuzione non uniforme dell'energia dell'elettrone.

**Neutrino.** Un neutrino è una particella con spin  $\frac{1}{2}$ , carica elettrica 0 e cariche colore nulle. Esistono tre tipi, ognuna con la propria anti-particella: neutrino elettronico, muonico, tauonico. Il Modello Standard predice una massa nulla, ma sperimentalmente hanno massa da 1 meV a 30 meV. I neutrini sono stati scoperti dopo rispetto alle altre particelle a causa della mancanza di carica sia elettrica che di colore: non interagiscono tramite la forza elettromagnetica e la forza forte, quindi la sezione d'urto è piccola. La sezione d'urto di un neutrino elettrico ad energia  $E \approx 1 \text{ GeV}$  è  $\sigma \approx 10^{-38} \text{ cm}^2$  cioè quaranta ordini di grandezza minore del [r]. Per vedere un neutrino bisogna produrre una quantità enorme di neutrini. Questo è stato possibile successivamente alla seconda guerra mondiale grazie ai reattori nucleari. Quando avvenne la conferma sperimentale, si era già sicuri dell'esistenza dei neutrini.

**Leptone.** Un leptone è una particella che non è soggetta all'interazione forte: elettrone, muone, tauone, neutrino elettronico, neutrino muonico, neutrino tauonico, e le loro anti-particelle associate.

**Processo debole leptónico.** Un processo debole leptónico è un processo in cui si ha solamente leptoni nello stato iniziale e nello stato finale. Alcuni esempi sono

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu, \quad \nu_\mu e^- \rightarrow \nu_e \mu^-, \quad \nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$$

[r] Non solo i neutrini sono soggetti alle interazioni deboli, ma tutte le particelle. Ad esempio, nello scattering [r]

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

si ha interazione elettromagnetica ed interazione debole, ma la seconda è trascurabile.

**Processo semi-leptonico.** Un processo semi-leptonico è un processo in cui si hanno leptoni e quark nello stesso stato. Ad esempio

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

che è pure un decadimento debole. Un altro esempio è il decadimento  $\beta^-$

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

così come il  $\beta^+$

$$(Z, A) \rightarrow (Z - 1, A) + e^+ + \nu_e$$

**Processo non leptónico.** Un processo non leptónico non presenta leptoni nello stato iniziale né finale. La particella  $\Lambda$  data dalla combinazione dei quark  $uds$  segue il decadimento

$$\Lambda \rightarrow p^+ \pi^-, \quad uds \rightarrow uud + \bar{d}\bar{u}$$

questa interazione cambia il tipo di quark, in particolare del quark strange. L'interazione debole viola la simmetria di flavor cioè non conservano il flavor delle particelle. Si noti che anche processi che conservano la simmetria possono avere contributi dall'interazione debole.

## 8.1 Leggi di conservazione e simmetria

L'interazione debole viola le conservazioni di flavor, parità, C-parità, T-parità e CP-parità, ma conserva la CPT-parità. Come altre teorie, conserva il quadri-momento (momento lineare ed energia), il momento angolare e la carica elettrica. Le leggi specifiche di conservazione dell'interazione debole sono quelle del numero barionico e del numero leptónico.

**Numero barionico.** Il numero barionico  $B$  è un numero quantico additivo che vale  $\frac{1}{3}$  per i quark,  $-\frac{1}{3}$  per gli anti-quark e 0 per ogni altra particella elementare. Il numero è detto barionico perché i barioni e gli anti-barioni hanno numeri interi, mentre i mesoni hanno numero pari a zero. L'interazione debole mantiene il numero di quark. Similmente, un fotone, od un gluone, può mediare l'interazione di un quark e può generare una coppia quark, anti-quark mantenendo il numero barionico: tutte le interazioni conservano il numero barionico.

**Numero leptonico.** Il numero leptonico  $L$  è un numero quantico che vale 1 per i leptoni,  $-1$  per gli anti-leptoni e 0 per le altre particelle elementari.

**Numero di flavor leptonico.** Il numero di flavor leptonico (lepton family number) è un numero leptonico per una famiglia di leptoni (elettronici, muonici e tauonici). Per i leptoni elettronici si ha  $L_e = 1$  per  $e^-$  e  $\nu_e$ , poi  $L_e = -1$  per le anti-particelle, e  $L_e = 0$  per tutte le altre. Analogo per le altre due famiglie.

La conservazione del numero di flavor leptonico è una simmetria approssimata dell'interazione debole e vale solamente se i neutrini non hanno massa. Essa viene sostituita con una legge più precisa: la conservazione del numero di flavor leptonico è una simmetria esatta solo nell'istante in cui avviene uno scattering. Questo perché si è scoperta l'oscillazione dei neutrini: un neutrino può cambiare tipo. [r]

**Conservazione.** Le sei leggi di conservazione citate permettono di identificare univocamente le particelle che partecipano ad un determinato decadimento. Ad esempio

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

Il decadimento può avvenire anche con emissione di un fotone, ma dai diagrammi di Feynman è facile sapere che la probabilità sarebbe minore a causa della presenza di un vertice in più. Il decadimento

$$\mu^- \rightarrow e^- \gamma$$

non può avvenire per il lepton family number. Esso può avvenire qualora il fotone off-shell crea un neutrino, anti-neutrino che si trasformano [r]. Tale decadimento ha branching ratio di  $10^{-40}$ . Se esistono altre particelle, allora si può aumentare il branching ratio.

**Decadimento del neutrone.** Si possono utilizzare le sei leggi di conservazione per dedurre il decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p^+ e^- \bar{\nu}_e$$

Se esistessero solo le interazioni forti, il neutrone sarebbe stabile.

## Lezione 23

### 8.2 Violazione di parità

L'interazione debole viola la parità. Un cambio di parità equivale a passare da un sistema di riferimento cartesiano destrorso a sinistrorso. La scelta dell'una o dell'altra è convenzionale pertanto dovrebbe esistere una quantità conservata in analogia con il momento lineare. Tuttavia, questo ragionamento è errato. Infatti, si consideri una particella in moto [r] lungo  $z$ . Il momento angolare può essere parallelo (elicità right-handed) oppure anti-parallelo (elicità left-handed). [r] L'elicità è

$$H = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}}{pJ}$$

L'elicità non è un invariante di Lorentz: muovendosi più velocemente della particella, lo spin rimane inalterato, ma la particella viaggia nella direzione opposta dunque cambia l'elicità. Se la particella è priva di massa, l'elicità è un invariante di Lorentz (e coincide con la chiralità). La teoria dell'interazione debole è una teoria chirale cioè una teoria che ammette violazione di

mer 19 apr  
2023 13:30

parità: le particelle senza massa ad elicità left-handed interagiscono con la materia, mentre quelle ad elicità right-handed non interagiscono con la materia (dette sterili). Applicando l'operatore di parità ad una particella senza massa right-handed, quindi sterile, si ottiene una particella left-handed interagente. La parità della teoria è violata. L'errore nel ragionamento precedente risiede nella mancata considerazione dello spin nella relatività speciale.

[r] La teoria dell'interazione debole presentata presuppone che i neutrini non abbiano massa e quindi tutti i neutrini left-handed interagiscono con la materia tramite l'interazione debole, mentre tutti i neutrini right-handed non interagiscono con la materia (detti sterili). Tuttavia, i neutrini hanno masse piccole: la maggior parte dei sistemi di riferimento osservano un neutrino con la stessa elicità. [r]

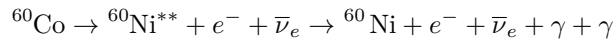
**Operatore di chiralità.** L'operatore di chiralità  $\gamma^5$  cambia la chiralità di una particella. Per auto-stati della chiralità vale

$$\gamma^5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \quad \gamma^5\psi = \pm 1\psi, \quad \lim_{m \rightarrow 0} \gamma^5 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}}{pJ}$$

dove +1 corrisponde a chiralità right-handed e -1 a left-handed. Si dimostra che la probabilità che una particella massiva  $m$  abbia una chiralità discorde dall'elicità è pari a  $1 - \beta$ .

**Teoria V-A.** Le particelle soggette alle interazioni deboli sono tutte e sole le particelle a chiralità left-handed e le anti-particelle a chiralità right-handed.

**Scoperta della violazione.** L'idea è di trovare processi per cui la sezione d'urto sarebbe nulla se la parità venisse conservata, ma non nulla quando si ha violazione [r]. Ad esempio



Si allinea il momento angolare totale  $J$  del nucleo del cobalto lungo una direzione utilizzando un campo magnetico e si misura la direzione dell'elettrone emesso dal decadimento beta

$$N(\theta) = f(\cos \theta), \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}}{pJ}$$

dove  $\mathbf{p}$  è il momento dell'elettrone. Per cambio di parità si ha  $-\cos \theta$ . Se la funzione dipende da potenze dispari del coseno, allora la parità viene violata [r] ad esempio  $f(\cos \theta) = 1 + \cos \theta$ . Per allineare il momento nucleare bisogna utilizzare il magnetone nucleare

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}, \quad \underline{\mu}_N \cdot \mathbf{B}$$

[r] Si dimostra che il numero di nuclei realmente allineati sono

$$P \sim e^{-\frac{\underline{\mu}_B \cdot \mathbf{B}}{k_B T}}$$

dove  $P$  è la polarizzazione. La temperatura necessaria a polarizzare il cobalto è  $T \approx 10 \text{ mK}$  [r]. Contando gli elettroni emessi, si nota avere un numero maggiore di elettroni emessi verso l'alto rispetto a verso il basso. Aumentando la temperatura, i due conteggi convergono. I fotoni sono emessi prevalentemente in direzione ortogonale allo spin: questo permette di verificare la direzione dello spin del cobalto.

Si vede il motivo per cui si emettono più elettroni sotto che sopra. Il cobalto ha spin nucleare  $J = 5$ , mentre il nickel prodotto ha spin  $J = 4$ . Si consideri il neutrino viaggiare verso l'alto: la sua massa è quasi nulla, quindi l'elicità è un buono stimatore della chiralità. Nel laboratorio, la sua chiralità è right-handed: lo spin è parallelo alla direzione del moto. Per conservazione del momento, l'elettrone viene emesso verso il basso e per conservazione dello spin, l'elettrone ha chiralità left-handed perché il suo spin è verso l'alto. Il conteggio degli elettroni è

$$N(\theta) = 1 + aP\beta \cos \theta$$

dove  $P$  è la polarizzazione e  $\beta$  è la velocità dell'elettrone che compare perché si considera l'elicità al posto della chiralità. Il parametro empirico  $a = -1$  è conseguenza della teoria V-A.



**Esperimento di Goldhaber-Grodzisz-Sunyar.** [r] L'esperimento si basa sulla cattura elettronica. Alcuni nuclei sono instabili perché l'elettrone interagisce debolmente con il nucleo secondo

$$(A, Z) + e^- \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e$$

Questo è un decadimento a due corpi: si può stimare l'energia a priori. L'europio  $^{152}\text{Eu}$  con spin nucleare  $J = 0$  diventa samario  $^{152}\text{Sm}^*$  con spin  $J = 1$  emettendo un neutrino ad energia  $E = 911 \text{ keV}$ ; poi si diseccita in  $^{152}\text{Sm}$  con  $J = 0$  emettendo un fotone a  $E = 963 \text{ keV}$ . [r] Si utilizza questo decadimento perché l'energia delle due particelle emesse è simile.

L'emissione di un fotone non può eccitare un atomo nello stato fondamentale perché parte dell'energia della transizione è data come momento lineare al nucleo. Lo stato iniziale del samario eccitato è

$$p_1^\mu = (M, 0, 0, 0)$$

nello stato finale si ha

$$p_2^\mu = (E_f, 0, 0, p_f), \quad k^\mu = (p, 0, 0, p)$$

Per conservazione del quadri-momento si ha

$$p_f = -p, \quad M = E_f + p = \sqrt{M_f^2 + p_f^2} + p = \sqrt{M_f^2 + p^2} + p^2$$

Pertanto

$$M_f^2 + p^2 = M^2 - 2Mp + p^2 \implies p = \frac{M^2 - M_f^2}{2M} = \frac{(M - M_f)(M + M_f)}{2M} \approx M - M_f$$

L'energia cinetica del samario nello stato finale è

$$K_f = \frac{p_f^2}{2M_f} = \frac{p^2}{2M_f} \approx 3 \text{ eV}$$

Questa energia è abbastanza per impedire l'auto-assorbimento anche considerando l'agitazione termica (tradotto in effetto Doppler) ed il principio di indeterminazione. Infatti, la larghezza intrinseca è

$$\tau = 10^{-14} \text{ s}, \quad \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau} \implies \Delta E \approx 10 \text{ meV}$$

mentre per effetto termico si ha

$$\Delta E = \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{M_f}} \approx 0.9 \text{ eV}, \quad T = 300 \text{ K}$$

Questi due effetti diventano irrilevanti nel decadimento dell'europio perché il samario eccitato (lo stato iniziale) non è prodotto a riposo. Infatti, si supponga che il fotone emesso sia parallelo alla direzione del samario: tale fotone è più energetico. L'energia cinetica del samario eccitato è

$$K = \frac{p_\nu^2}{2M} \approx \frac{1}{2} M v^2 \implies \beta = \sqrt{\frac{2K}{M}} \approx 5.8 \times 10^{-6}, \quad p_\nu = 911 \text{ keV}$$

Tramite le trasformazioni di Lorentz si può ricavare la formula per l'effetto Doppler relativistico

$$p' = \gamma(p + \beta E) = \gamma(1 + \beta)p \implies \Delta p = p' - p \approx 5.3 \text{ eV}$$

dove  $p$  è il momento del fotone nel riferimento solidale al samario, mentre  $p'$  è il momento nel riferimento del laboratorio.

Se si osserva l'assorbimento del fotone, allora esso è stato emesso nella direzione di moto del samario. Esiste una correlazione tra l'elicità del neutrino e l'elicità [r] del fotone. Poiché il decadimento è a due corpi, il neutrino viaggia nella direzione opposta a quella del samario. In quanto il neutrino è left-handed, allora lo spin del samario eccitato dev'essere nella direzione opposta a quello del neutrino (così da ottenere  $\frac{1}{2}$  cioè lo spin dell'elettrone), dunque il samario è left-handed. [r] Il fotone più energetico emesso nella stessa direzione è anch'esso left-handed. Viceversa, se il neutrino è right-handed, allora pure il fotone finale.

## Lezione 24

mer 26 apr  
2023 13:30

L'esperimento è costituito da una sorgente di europio posta sopra un blocco di ferro magnetizzato con campo magnetico verso il campione di europio. I fotoni emessi dal samario oltrepassano il ferro fino a raggiungere un cristallo di samario. Esso è in grado di assorbire e riemettere (isotropicamente) solo i fotoni più energetici di cui una parte è rivelata da uno scintillatore. All'energia dei fotoni domina la sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico. In generale, tale effetto non dipende dalla polarizzazione, ma per un materiale magnetizzato — per cui gli elettroni presentano una direzione preferenziale di spin — si ottiene una variazione dell'intensità dell'effetto in base all'elicità del fotone. Infatti, se un fotone ha spin anti-parallelo alla direzione del campo magnetico, e quindi dello spin dell'elettrone, allora induce uno spin-flip quando viene assorbito per conservazione del momento angolare: si riduce la sezione d'urto. Viceversa, se lo spin del fotone è parallelo, la sezione d'urto aumenta.

La configurazione dell'esperimento sopprime i fotoni right-handed, poi si inverte la direzione del campo magnetico per sopprimere i fotoni left-handed. Nel primo caso, lo scintillatore rivela molti più fotoni ed essi sono left-handed. Questo significa che i neutrini prodotti dal decadimento dell'eurobio hanno elicità left-handed. Si noti che per i neutrini, la probabilità che la misura di elicità sia diversa da quella di chiralità è trascurabile grazie alla loro piccola massa.

### 8.3 Teoria V-A

Le particelle che interagiscono per mezzo dell'interazione debole sono tutte e sole le particelle a chiralità left-handed e anti-particelle a chiralità right-handed. La teoria V-A (vettore meno vettore assiale) permette di spiegare alcuni quesiti rimasti. Il primo di questi sono i decadimenti

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad \pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$$

Sebbene il secondo decadimento abbia un enorme spazio fase (il positrone è meno massivo dell'anti-muone) e quindi ci si aspetterebbe un branching ratio maggiore del primo decadimento, in verità esso ha probabilità di  $10^{-4}$ . L'importanza della teoria V-A è stato dimostrare che tale probabilità non è nulla.

Il pione  $\pi^+$  è una particella a spin nullo. Si consideri il primo decadimento. Le due particelle prodotte hanno spin  $\frac{1}{2}$ . Il neutrino ha chiralità left-handed perché prodotto da una interazione debole. Data la piccola massa del neutrino, la sua elicità coincide con la chiralità: lo spin è anti-parallelo alla direzione del moto, pertanto punta verso il pione. Per conservazione del momento angolare, il muone ha elicità left-handed. Sebbene le anti-particelle che interagiscono debolmente hanno chiralità right-handed, la probabilità che l'elicità non coincida con la chiralità è  $1 - \beta$ . Il decadimento avviene se l'elicità è discorde dalla chiralità. Data la grandezza dello spazio fase del secondo decadimento, si ha

$$\beta_\mu < \beta_e \implies 1 - \beta_\mu > 1 - \beta_e$$

La probabilità del primo decadimento è maggiore di quella del secondo. Il rapporto dei branching ratio è

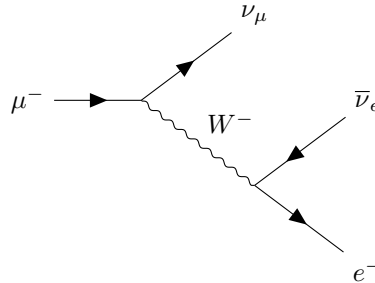
$$\frac{\text{BR}(e)}{\text{BR}(\mu)} \propto \frac{1 - \beta_e}{1 - \beta_\mu} \approx 10^{-4}$$

**Teoria empirica.** Si è detto che le interazioni fondamentali sono la manifestazione delle simmetrie di gauge. Tuttavia, la teoria V-A non è una teoria di gauge, ma è una teoria empirica: non si hanno veri diagrammi di Feynman come in QED e QCD, ma si costruiscono dei surrogati in cui i vertici sono proporzionali alla costante empirica di Fermi  $G_F \approx 1.2 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  (derivante dalla teoria di Fermi per l'interazione debole, si veda la Fermi's interaction). Si determina la costante tramite il decadimento

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

e poi si calcolano gli altri decadimenti. Si noti come la costante di Fermi non può essere una costante di accoppiamento perché dimensionata.

**Teoria elettrodebole.** Per ottenere una teoria di gauge che possa spiegare l'interazione debole bisogna innanzitutto introdurre i mediatori dell'interazione: i bosoni  $W^+$  e  $W^-$  a spin 1, il primo interagisce sulle anti-particelle e il secondo sulle particelle. Il vero diagramma di Feynman del decadimento sopra risulta essere



La teoria V-A descrive solamente l'effetto del bosone  $W^-$  tramite la costante di Fermi, ma all'epoca non si è potuto osservare il mediatore. Se il bosone  $W^-$  fosse un fotone carico, allora si sarebbe potuto osservare, ma non è così perché ha una massa sostanziale  $M \approx 80 \text{ GeV}$  e dunque decade immediatamente. La costante di Fermi è la costante di struttura fine  $g$  dell'interazione debole corretta per la massa del bosone  $W$ :

$$G_F \propto \frac{g}{M_W^2}$$

dove  $g$  è adimensionale. Si evidenziano alcune differenze con le teorie viste:

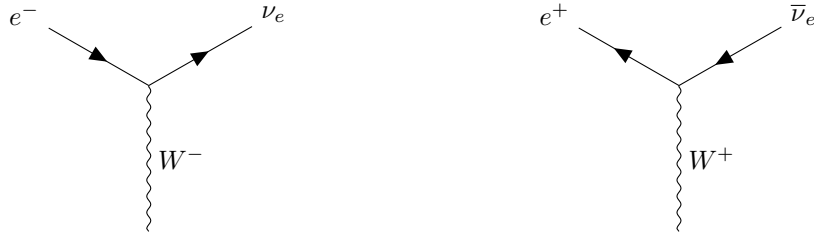
- Nelle teorie di gauge viste, QED e QCD, i mediatori sono particelle senza massa, ma nella teoria dell'interazione debole i mediatori dell'interazione hanno una massa enorme.
- Come detto in precedenza, nello scattering elettromagnetico di due quark, il fotone non è influenzato dalla carica cromatica dei quark, similmente un gluone non è influenzato dalla carica elettrica dei quark: l'interazione forte è separata dall'interazione elettromagnetica. In questa nuova teoria, il bosone  $W$  dipende dalla carica elettrica della particella iniziale e, sebbene essendo mediatore dell'interazione debole, esso stesso è portatore di un'interazione elettromagnetica.

Non si può sperare di costruire una teoria coerente dell'interazione debole che non includa l'elettromagnetismo. Si sviluppa una teoria che unifica l'interazione debole e l'interazione elettromagnetica prendendo il nome di teoria elettrodebole.

## 9 Interazione elettrodebole

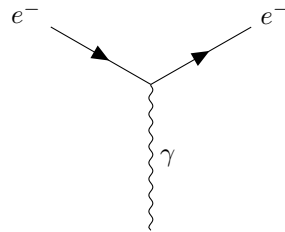
La teoria elettrodebole è la teoria unificata dell'interazione elettromagnetica e dell'interazione debole. Essa è una teoria di gauge basata sul gruppo  $SU(2) \times U(1)$  che ha quattro generatori: tre derivanti dal gruppo  $SU(2)$  e uno dal gruppo  $U(1)$ . Pertanto questa interazione presenta quattro mediatori:  $W^\pm$ ,  $Z^0$  e  $\gamma$ . La teoria elettrodebole necessita di implementare il meccanismo di Higgs per preservare la simmetria di gauge poiché i mediatori sono massivi. Tale meccanismo conferisce massa alle particelle mediatrici delle interazioni.

**Bosoni  $W$ .** I bosoni  $W^+$  e  $W^-$  sono particelle  $M \approx 80 \text{ GeV}$  a spin 1 con carica elettrica, ma non carica cromatica. I diagrammi di Feynman sono del tipo



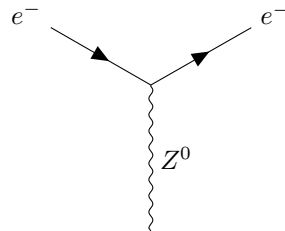
Il vertice è proporzionale a  $gP_L$  dove  $P_L$  è il proiettore left-handed che seleziona la componente chirale left-handed per le particelle e la componente chirale right-handed per le anti-particelle.

**Fotone  $\gamma$ .** Il fotone  $\gamma$  è una particella senza massa a spin 1 che si identifica con il fotone dell'elettrodinamica. I diagrammi di Feynman sono del tipo



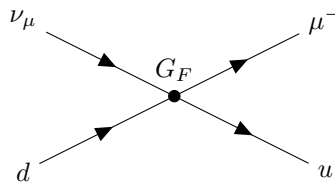
dove il vertice è proporzionale a  $\sqrt{\alpha}$ .

**Bosone  $Z^0$ .** Il bosone  $Z^0$  è un ibrido tra il fotone ed il bosone  $W$ . Essa è una particella  $M \approx 91 \text{ GeV}$  a spin 1 con carica elettrica, ma non carica cromatica. I diagrammi di Feynman sono del tipo

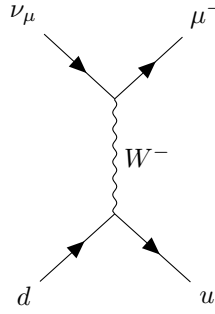


dove il vertice è una combinazione lineare dei proiettori left- e right-handed. Il bosone media l'interazione di particelle left-handed, tipicamente soggette all'interazione debole, e particelle right-handed, soggette a interazione elettromagnetica. Per questo, l'interazione (elettro)debole non avviene solo tra particelle left-handed come si è presupposto.

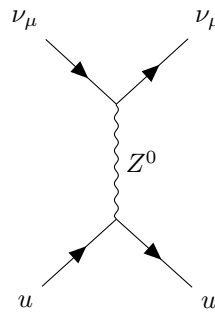
**Scoperta del bosone  $Z^0$ .** Il bosone  $Z^0$  venne scoperto fortuitamente tramite la corrente neutra debole, un fenomeno imputabile solamente alla sua esistenza. Un neutrino può interagire con un protone solo tramite l'interazione debole. Nella teoria V-A, l'unico modo per cui ciò avvenga è dato da



mentre con i soli bosoni  $W$  si ha



Queste interazioni sono dette correnti cariche perché il mediatore è carico. L'elettrodinamica e la teoria V-A non prevedono la corrente neutra



Un neutrino subisce un urto elastico con un protone. L'esperimento che portò alla scoperta del bosone  $Z^0$  è costituito nel modo seguente. Dei protoni (in particolare nel proton synchrotron del CERN) vengono accelerati a 25 GeV in un bersaglio a targhetta fissa fatto di berillio. Quando un protone colpisce un bersaglio, si producono maggiormente pioni perché essi sono i mesoni più leggeri. Tramite un campo magnetico cilindrico, si focalizzano i pioni positivi e si eliminano quelli negativi. Vengono collimati e, tramite il loro decadimento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

si possono ottenere i neutrini muonici. Si filtrano gli anti-muoni tramite un muro, una schermatura in ferro. Oltre, si osservano i neutrini tramite una camera a bolle, l'analogo liquido di una camera a nebbia: sollevando il pistone della camera, un liquido (il freon R-13B1,  $\text{CBrF}_3$ ) vicino al punto di ebollizione cambia fase prima nei luoghi dove sono presenti degli ioni. Nella camera è presente un campo magnetico che devia le particelle cariche la cui traiettoria è rivelata dall'ebollizione del liquido.

Si era interessati a studiare la struttura interna di un protone, per questo i neutrini sono perfetti: non interagiscono elettromagneticamente e possono trasferire momento lineare tramite (come si pensava) i bosoni  $W$ . Nella maggior parte dei casi si sono osservate le correnti cariche, cioè le interazioni tramite i bosoni  $W$

$$\nu_\mu + d \rightarrow \mu^- + u \implies \nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$$

alle volte i neutrini sono così energetici che disintegrano il neutrone nei quark costituenti i quali sono soggetti all'adronizzazione e producono altre particelle. In pochi casi, si osserva un protone emergere dalla nube e talvolta esso viene disintegrato in varie particelle.

Si tentò di spiegare il fenomeno pensando che siano dei neutroni ad interagire: tali neutroni provengono dall'interazione dei neutrini con il muro. Tuttavia, compare un problema: i neutroni sono soggetti all'interazione forte ed hanno una sezione d'urto  $\sigma$ . La probabilità che un neutrone interagisca con il rivelatore è

$$e^{-\lambda x}, \quad \lambda = \frac{1}{\widetilde{N}\sigma}$$

dove  $\tilde{N}$  è la densità di centri diffusori. Quindi essa decade esponenzialmente con la distanza. D'altra parte, la sezione d'urto di un neutrino è così piccola che per le dimensioni del rivelatore, si ha a tutti gli effetti una probabilità costante. L'andamento osservato è stato di un decadimento esponenziale all'inizio e poi di un comportamento costante.