

# Special Relativity

26 novembre 2022

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Principi di Newton e sistemi di riferimento inerziali . . . . .	2
1.2	Equazioni di Maxwell . . . . .	4
1.3	Relatività speciale . . . . .	9
1.4	Coordinate, distanze e trasformazioni di Lorentz . . . . .	10
1.4.1	Diagrammi di Minkowski e cono di luce . . . . .	16
1.4.2	Simultaneità . . . . .	16
1.5	Paradossi apparenti . . . . .	17
1.6	Verifiche sperimentali . . . . .	19
1.7	Indici, vettori e operatori differenziali . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Equazioni di Maxwell</b>	<b>24</b>
2.1	Invarianza in forma delle leggi fisiche . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Elementi di algebra e calcolo tensoriali</b>	<b>29</b>
3.1	Tensore della metrica . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Cinematica in relatività speciale</b>	<b>36</b>
4.1	Gruppo di Lorentz . . . . .	37
4.2	Quadri-velocità e quadri-accelerazione . . . . .	43
4.3	Quadri-vettore energia-impulso – quadri-impulso . . . . .	45
4.3.1	Leggi di conservazione . . . . .	47
4.3.2	Effetto Doppler relativistico longitudinale . . . . .	49
4.3.3	Esempi . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Equazioni di Maxwell in forma tensoriale</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>Leggi di trasformazione del campo elettromagnetico</b>	<b>54</b>
<b>7</b>	<b>Dinamica relativistica</b>	<b>56</b>
7.1	Interazione elettromagnetica . . . . .	58
7.2	Casi notevoli . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Lagrangiana, Hamiltoniana e principio di azione</b>	<b>62</b>
8.1	Particella libera . . . . .	63
8.2	Particella carica in un campo elettromagnetico . . . . .	65
<b>9</b>	<b>Precessione di Thomas</b>	<b>67</b>
9.1	Boost in direzioni diverse . . . . .	67
9.2	Moto di una particella . . . . .	69
9.3	Precessione . . . . .	70
9.4	Formalismo tensoriale . . . . .	73

<b>10 Teoria classica dei campi</b>	<b>75</b>
10.1 Azione e lagrangiana . . . . .	76
10.2 Equazioni di Maxwell . . . . .	77
10.3 Tensore energia-impulso e leggi di conservazione . . . . .	80
10.3.1 Tensore energia-impulso per campo elettromagnetico libero . . . . .	81
10.3.2 Tensore energia-impulso in presenza di sorgenti . . . . .	83
<b>11 Campi scalari reali</b>	<b>85</b>

## Lezione 1

Il corso è strutturato nel seguente modo:

- Introduzione: trasformazioni di Lorentz e loro conseguenze; cinematica relativistica; quadri-vettori, tensori.
- Dinamica di una particella e delle sue interazioni con il campo magnetico; equazioni di Maxwell in forma covariante.
- Formulazione lagrangiana dei punti precedenti che porta a campi scalari e vettoriali in contesto classico (cioè non quantistico): unendo la meccanica quantistica e la relatività speciale si ottiene la teoria quantistica dei campi (“quantum field theory”, QFT) che è il linguaggio e formalismo con cui si descrivono le interazioni tra particelle elementari; tensore energia impulso; teorema di Noether.

## 1 Introduzione

La relatività speciale è un’analisi “critica” delle nozioni di spazio e tempo resa necessaria dal comportamento apparentemente “paradossale” (quando analizzato con il paradigma della fisica classica) di segnali luminosi nel vuoto che si propagano, quando osservati da sistemi di riferimento inerziali, con velocità costante  $c$  ed indipendente dalla velocità della sorgente.

Si rivede la fisica classica: la meccanica e l’elettromagnetismo. Essa viene resa compatibile con i concetti di “spazio e tempo relativistici”. La conseguenza più importante è la mancata assolutezza dello spazio e del tempo.

Nel limite in cui  $v \ll c$  si recupera la meccanica classica.

### 1.1 Principi di Newton e sistemi di riferimento inerziali

Si rivedono alcuni concetti di base della meccanica classica e si trovano i problemi che portano alla formulazione della relatività speciale.

**Riassunto della meccanica classica.** La meccanica classica si può riassumere in tre principi:

- In sistemi di riferimento inerziali, un corpo libero permane in stato di quiete o moto rettilineo uniforme.
- Vale  $\vec{F} = d_t \vec{p}$ .
- Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: principio di azione, reazione.

Si osservano alcune cose. Un sistema di riferimento è una terna di assi cartesiani a cui si associa un concetto di tempo: per descrivere un evento si devono specificare le coordinate spaziali ed il tempo. Bisogna immaginare che esistano ovunque degli orologi sincronizzati.

Il corpo libero è una particella di prova con massa talmente piccola che non perturba gli strumenti con cui si discute, per esempio, la seconda legge.

Da un sistema di riferimento inerziale (SRI) ne si possono definire altri tramite delle trasformazioni:

- traslazione;
- rotazione;
- boost (trasformazioni di Galileo).

L'insieme di tale tipo di trasformazioni è detto gruppo di Galileo.

La trasformazione di traslazione è  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{d}$  con  $\vec{d}$  costante. Di fatto, il tempo non si potrebbe

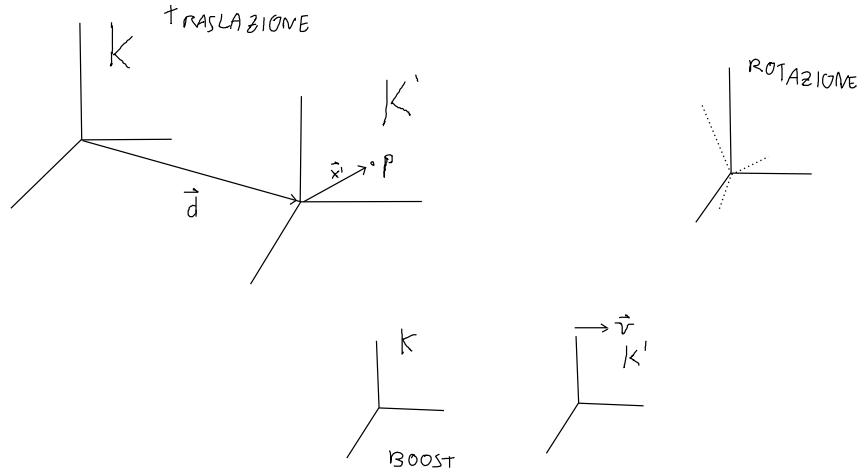


Figura 1: fig1

trascurare. La traslazione temporale  $t' = t - t_0$  è lecita (con  $t_0$  costante).

Una rotazione è  $\vec{x}' = R\vec{x}$  dove  $R^T R = I_{3 \times 3}$ , cioè  $R$  è una matrice ortogonale. Infine, una trasformazione di Galileo è del tipo  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$ .

Le tre trasformazioni costituiscono un gruppo in senso algebrico.

**Definizione.** Un gruppo  $(G, \circ)$  è un insieme  $G$  dotato di operazione  $\circ$  di composizione con le seguenti proprietà:

- $g_1, g_2 \in G \implies g_1 \circ g_2 \in G$
- $g_1, g_2, g_3 \in G \implies g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$
- Esiste l'elemento identità  $e$  tale che  $g \circ e = e \circ g = g$
- Esiste l'elemento inverso  $g^{-1}$ , per ogni  $g \in G$  esiste  $g^{-1}$  tale che  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Nella seconda proprietà si nota che bisogna preservare l'ordine degli indici: la commutazione rende un gruppo abeliano.

**Caso particolare.** Si è detto che tali trasformazioni permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Ciò si può dimostrare osservando che sotto una tale trasformazione, il secondo principio è invariante, cioè vale in entrambi i sistemi di riferimento. Si consideri una particella in un sistema  $K$  descritta da  $\vec{x}_1(t)$ . Si arriva in  $K'$  tramite la trasformazione

$$\vec{x}' = R\vec{x} - \vec{v}t - \vec{d}$$

(anche se tale trasformazione non è proprio quella generale). Si dimostra che le leggi della meccanica classica sono invarianti per trasformazioni del gruppo di Galileo per un caso particolare. Si considerino  $N$  particelle massive. In  $K$  si ha

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = G \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}$$

Differenziando  $\vec{x}'$  in  $dt' = dt$  si ha

$$d_t^2 \vec{x}' = d_t^2 \vec{x} = R \ddot{\vec{x}}$$

si ricorda che né  $\vec{v}$  né  $\vec{d}$  sono funzione del tempo. Si vuole ottenere una espressione simile a quanto trovato per  $m_i \ddot{\vec{x}}_i$ , ma con il segno di primato ovunque. Così si dimostra che il secondo principio è invariante per la trasformazione studiata. Dunque

$$m_i d_t^2 \vec{x}' = m_i R \ddot{\vec{x}}_i = G \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{R(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} = G \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{\vec{x}'_j - \vec{x}'_i}{|\vec{x}'_j - \vec{x}'_i|^3}$$

si ricorda che la distanza euclidea (cioè ciò che si trova nel modulo) è invariante per rotazione.

**Caso generale.** Bisogna fare l'analogo di quanto visto considerando che  $\vec{F} = m\vec{a} = -\vec{\nabla}V$  dove il potenziale  $V$  è una funzione della posizione  $\vec{x}$ . Bisogna tener conto che al gradiente sono associati dei versori e bisogna considerare come cambiano le derivate di  $x_i$  quando sono scritte come derivate di  $x'_i$ .

**Principio di relatività.** Questo illustra il principio di relatività: in sistemi di riferimento inerziali, le leggi della fisica sono invarianti in forma. Questo principio vien detto considerando l'affermazione che lo spazio è omogeneo ed isotropo: è uguale in ogni direzione. Sotto una legge fisica invariante c'è un concetto di trasformazione di simmetria.

**Osservazione.** Nelle trasformazioni di Galileo si ipotizza la sincronia dei tempi (tempo assoluto). Questo non è più vero in relatività speciale.

Da ciò vengono a mancare anche le lunghezze e distanze assolute.

Inoltre, iterando più volte un boost si può continuare ad "aggiungere" velocità: non si ha una velocità limite.

Tramite un esperimento, un osservatore in un sistema di riferimento inerziale non può distinguere il proprio moto dalla quiete perché in entrambi i casi si misurerebbe una medesima accelerazione. Ciò che permette di distinguere la descrizione di un certo fenomeno fisico è la variazione di accelerazione perché sarebbe presente una forza in più, una forza apparente che permette di capire di non essere in quiete o moto rettilineo uniforme rispetto all'esperienza condotta.

## 1.2 Equazioni di Maxwell

In relatività speciale si mantiene il principio di relatività, ma si cambiano i boost secondo Galileo con quelli tramite il fattore di Lorentz. I problemi sorgono quando si studia l'elettromagnetismo e le equazioni di Maxwell. Esse, in unità gaussiane, sono:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

I fattori  $4\pi$  derivano da come si definisce la forza di Coulomb. Inoltre vale

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

si ha una costante che ha le dimensioni di una velocità. Questo è diverso dalla meccanica classica in cui si può fare una quantità di boost a piacere. Inoltre, tale velocità corrisponde anche alla

velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche.

Inoltre, si ha anche la forza di Lorentz su di una carica  $q$  in moto  $\vec{x}(t)$ :

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Si ha un'equazione della forza e si procede allo stesso ragionamento visto nel caso particolare dell'invarianza dei principi di Newton. Tale forza rimane invariante tra sistemi di riferimento.

**Non invarianza per gruppo di Galileo.** Si ipotizza che il gruppo di Galileo funziona per l'elettromagnetismo, si ricavano le trasformazioni dei campi e si studia se esse mantengono la forma delle leggi. Si vede un caso. Una volta conosciuta la notazione di Lorentz, si può svolgere tutto in modo più semplice; per ora si utilizzano ancora i vettori. Si vuole mantenere invariata la legge di forza,  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Si consideri un boost  $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t$  dove  $\vec{v}$  è la velocità di  $K'$  rispetto  $K$ . Dunque, in  $K$  si ha

$$m\ddot{\vec{x}} = q \left( \vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Si ipotizza che tale equazione sia invariante in forma per la trasformazione suddetta. Dunque, sostituendovi l'espressione di  $\vec{x}$  si ottiene

$$m\ddot{\vec{x}}' = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} (\dot{\vec{x}}' + \vec{v}) \times \vec{B} \right) \equiv \left( \vec{E}' + \frac{\dot{\vec{x}}'}{c} \times \vec{B}' \right)$$

Il segno di equivalenza deriva dal fatto che le leggi devono essere invarianti in forma. Si ipotizza anche che la carica sia invariante. Questo fatto è confermato da evidenze sperimentali: si consideri un pezzo di metallo elettricamente neutro e lo si riscalda; l'agitazione termica porta gli elettroni a muoversi più velocemente dei protoni a causa della differenza di massa; se la carica variasse in funzione della velocità, allora si avrebbe una variazione diversa di carica tra elettroni e protoni e pertanto si avrebbe una carica netta del metallo, ma nella realtà non è così. Si estraggono le leggi di trasformazione dei campi

$$\begin{cases} \vec{B}' = \vec{B} \\ \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \end{cases}$$

Con questa trasformazione, l'equazione di Gauss non è più invariante in forma.

## Lezione 2

Le equazioni di Maxwell in unità gaussiane si possono ottenere tramite un'opportuna scelta delle costanti di proporzionalità della forza di Coulomb

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

e della legge di Ampère

$$d_l F = 2k_2 \frac{I_1 I_2}{d}$$

Nel sistema internazionale

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad k_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

In unità gaussiane si ha

$$k_1 = k_2 = 1$$

ricordando  $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ . La costante  $c$  è anche la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Si possono trovare altri dettagli in un'appendice del Jackson. In unità gaussiane, la forza di Lorentz si scrive come

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Scrivendo le cose in questo modo, solo  $c$  compare nelle equazioni, le dimensioni del campo  $\vec{E}$  e del campo  $\vec{B}$  sono identiche. In relatività si vogliono descrivere tempo e spazio sullo stesso livello. Inoltre, le equazioni scritte in questo modo si semplificano utilizzando le unità naturali,  $c = 1$ .

Si riprende il discorso della lezione precedente. Note le trasformazioni dei campi, supponendo vere le trasformazioni di Galileo, si studia se le equazioni di Maxwell sono invarianti per tali trasformazioni. Dunque, da come trasformano le coordinate, si ha

$$\partial_{x_i} = \partial_{x'_i} \implies \nabla|_K = \nabla|_{K'}$$

Dato che  $\vec{B} = \vec{B}'$  segue che la legge di Gauss per il campo magnetico

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

è invariante. Tuttavia, la legge di Gauss (per il campo elettrico) non è invariante. Prima bisogna capire come trasformano le sorgenti  $\rho$  e  $\vec{J}$ :

$$\rho dV = \sum_{dV} q_i = \sum_{dV'} q_i = \rho' dV$$

dove  $q_i$  sono le cariche contenute nel volume  $dV$ , la seconda uguaglianza deriva dal fatto che non ci sono contrazioni di lunghezze. Per la corrente si ha

$$\vec{J} dV = \sum_{dV} q_i \dot{\vec{x}}_i$$

e si ha

$$\vec{J}' dV = \vec{J}' dV' = \sum_{dV} q_i \dot{\vec{x}}'_i = \sum_{dV} q_i (\dot{\vec{x}}_i - \vec{v}) = \vec{J} dV - \vec{v} \sum_{dV} q_i = (\vec{J} - \vec{v} \rho) dV$$

Quindi, la legge di trasformazione della corrente è

$$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{v}$$

**Esercizio.** L'equazione di continuità della carica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$$

è invariante, cioè vale

$$\nabla' \cdot \vec{J}' + \partial_{t'} \rho' = 0$$

Bisogna pensare come varia la derivata temporale

$$\partial_{t'} = \alpha \partial_x + \beta \partial_t$$

**Simbolo di Levi-Civita.** Si introduce il simbolo di Levi-Civita,  $\varepsilon_{ijk}$ . Esso è utile per il prodotto scalare:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

dove si utilizza la convenzione di Einstein: indici ripetuti solo da un lato dell'equazione si intendono sommati. Il simbolo si può definire nel seguente modo

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = 1 \\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \end{cases}$$

Questo implica che  $\varepsilon_{iik} = 0$  e  $\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{123} = -1$ . In tre dimensioni, cioè con tre indici, il simbolo vale 1 se gli indici sono una rotazione di 123, mentre  $-1$  se essi sono una rotazione di 321; negli altri casi si ha zero.

Per esempio

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = (\vec{A} \times \vec{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

**Non invarianza dell'equazione di Gauss rispetto alle trasformate di Galileo.** Si ritorna allo studio dell'invarianza della legge di Gauss. Dunque

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \vec{E}' &= \partial_{x'_i} E'_i = \partial'_i E'_i = \partial_i \left( E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} v_j B_k \right) \\ &= 4\pi\rho + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \partial_i (v_j B_k) = 4\pi\rho + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} v_j \partial_i B_k = 4\pi\rho' + \dots \end{aligned}$$

Il secondo addendo è diverso da zero.

**Esercizio.** Verificare che lo stesso avviene per le equazioni con i rotori: una è invariante, l'altra no.

**Equazione delle onde.** Si studia cosa succede all'equazione delle onde. In  $K$  si ha

$$\left( -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \psi = 0, \quad \psi(t, \vec{x})$$

con  $\psi$  componente generica di  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$ . In  $K'$  ci si chiede se l'equazione è invariante: essa non lo è per trasformazioni di Galileo. Infatti

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2 - (\nabla^2)' \right) \psi' = \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \dots \right) \psi'$$

Affinché la legge di propagazione delle onde sia invariante in forma per trasformazioni di Galileo bisognerebbe imporre delle leggi di trasformazione ad hoc per i campi in modo da eliminare l'operatore in più (denotato dai punti di sospensione).

**Soluzione al problema.** Si discute come uscire da questa situazione. Si osserva che nelle equazioni di Maxwell compare una costante con dimensioni di una velocità. Se si considerano le trasformazioni di Galileo allora esisterebbe un sistema preferenziale nel quale la velocità di propagazione delle onde è  $c$ , mentre in altri sistemi non è più  $c$  e quindi i sistemi inerziali non sarebbero tutti equivalenti per quanto riguarda le leggi dell'elettromagnetismo.

Inoltre, si ipotizza che esista un mezzo in cui si propagano le onde elettromagnetiche, detto etere luminifero. Pertanto, esisterebbe un riferimento privilegiato: quello solidale con l'etere. I fisici della seconda metà dell'ottocento tentano di studiare sperimentalmente l'esistenza di tale mezzo. Si studia l'aberrazione della luce stellare. Si consideri una stella lontana osservata durante tutta un'orbita terrestre. Si punta il telescopio verso la sorgente. Se l'osservatore si muove rispetto alla sorgente, si necessita una inclinazione  $\alpha$  del telescopio rispetto alla direzione di propagazione del

raggio luminoso: mentre la luce si avvicina alla lente di uno spazio  $c\Delta t$ , il telescopio si muove di  $v\Delta t$ . Si ottiene un angolo

$$\alpha \approx \frac{v}{c}$$

Osservando la posizione di una stella durante il corso di un anno, si arriva in un punto in cui la velocità è in verso opposto e la posizione apparente della stella percorre un piccolo ellisse durante l'anno. Questo fenomeno è verificato sperimentalmente che nega l'ipotesi che l'etere sia trascinato dalla Terra perché, altrimenti, il raggio luminoso è trascinato insieme alla terra e ne sarebbe solidale almeno orizzontalmente, così non si dovrebbe inclinare il telescopio.

Un altro esperimento che confuta l'ipotesi dell'etere è l'esperimento di Michelson e Morley (1887). Essi cercano l'evidenza sperimentale tramite un interferometro. Essi ipotizzano

- $c$  è la velocità della luce nell'etere;
- la Terra si muove rispetto al riferimento solidale all'etere.

L'interferometro è costituito da un raggio luminoso che viene diviso per mezzo di uno specchio semi-riflettente in due bracci. All'estremo di tali bracci si hanno degli specchi che riflettono i raggi fino a ricongiungerli. Lo specchio semi-riflettente dirige il raggio finale su di un bersaglio. Si consideri  $w$  la velocità della Terra rispetto l'etere, parallela ad uno dei due bracci. Si calcola il cammino ottico. Il tempo di percorrenza nel braccio parallelo è

$$\tau_1 = \frac{l_1}{c-w} + \frac{l_1}{c+w} = \frac{2c}{c^2-w^2}l_1$$

Nel riferimento solidale con l'etere, il raggio luminoso nel braccio perpendicolare percorre un triangolo, proprio perché l'apparato si muove rispetto all'etere. [immagine] Applicando Pitagora, si ottiene

$$\tau_2 = 2l_2 \frac{1}{\sqrt{c^2-w^2}}$$

Se  $w \ll c$  allora

$$\tau_1 \approx \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right), \quad \tau_2 \approx \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{w^2}{c^2}\right)$$

Da cui la differenza di cammino ottico è

$$\Delta L = c(\tau_1 - \tau_2) = 2 \left[ l_1 \left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right) - l_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{w^2}{c^2}\right) \right]$$

Ruotando l'apparato di  $90^\circ$  si ottiene

$$\Delta L' = 2 \left[ l_2 \left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right) - l_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{w^2}{c^2}\right) \right]$$

Quindi

$$\Delta L - \Delta L' \neq 0$$

Questo significa che ruotando l'interferometro cambiano le linee di interferenza perché si ha una differenza nel cammino ottico. Questa differenza non è osservata. Questo implica che la velocità della luce è identica in ogni direzione dell'apparato. L'etere dovrebbe essere perfettamente trascinato dalla Terra. Questa conclusione è in disaccordo con quanto trovato prima per l'aberrazione stellare.

Un modo ad hoc di spiegare il problema, come fa Lorentz, è di affermare che durante il tragitto nel braccio parallelo si contrae. Quindi si avrebbe

$$l_1 \rightarrow l_1 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$$

che spiegherebbe la mancanza di variazione di cammino ottico.



**Esperimento di Fizeau.** L'esperimento di Fizeau permette di studiare la possibilità dell'etere di essere trascinato dalla Terra e di studiare che tipo di conseguenze si presentano ai fenomeni di propagazioni della luce. Si ipotizza che l'acqua sposta l'etere e quindi è lecito sommare le velocità dell'acqua e dell'etere. [immagine] Un raggio luminoso viene diviso da uno specchio semi-riflettente in due raggi. Ognuno di essi attraversa un tubo lungo  $l$  pieno d'acqua corrente. L'acqua nei due tubi scorre in senso opposto con velocità  $\pm \vec{w}$ . I raggi sono riflessi da uno specchio e passano attraverso il tubo in cui, precedentemente, è passato l'altro raggio. I due attraversano lo specchio semi-riflettente e vengono misurati dall'osservatore.

Un raggio luminoso si propaga in senso concorde alla velocità  $\vec{w}$  dell'acqua, mentre l'altro in senso opposto. Sia  $v$  la velocità della luce nell'acqua e sia  $w$  la velocità del flusso di acqua. Si supponga valida la somma delle velocità in senso classico. La differenza di cammino ottico è per il raggio concorde è

$$\Delta L = v(\tau_1 - \tau_2) = v \left( \frac{2l}{v+w} - \frac{2l}{v-w} \right) = \frac{4l}{v^2} \frac{1}{1 - \frac{w^2}{v^2}}$$

Ci si aspetta che al variare di  $w$  si vede una variazione del cammino ottico e quindi una variazione delle righe di interferenza osservate. Tuttavia, questo non è il caso e sommare le velocità in tal modo non funziona. Inoltre, quanto trovato è una evidenza che l'etere non è trascinato dalla Terra, in contrapposizione alla conclusione dell'esperimento di Michelson e Morley che osserva la necessità di un trascinamento completo.

### 1.3 Relatività speciale

Verso la fine dell'ottocento, Lorentz e Poincaré già comprendono matematicamente le leggi di trasformazione sotto cui le leggi di Maxwell sono invarianti in forma. Le trasformazioni di Lorentz sono note già prima di derivarle dai postulati della relatività speciale. L'insieme delle evidenze sperimentali portano Einstein a formulare la relatività speciale nel 1905.

**Postulati.** I postulati della relatività generale sono:

- la velocità  $c$  della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale, quindi non dipende dal moto della sorgente;
- tutte le leggi della natura sono invarianti (cioè le stesse) in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Non esiste un sistema di riferimento inerziale privilegiato.

Il secondo postulato è già presente concettualmente nella meccanica classica newtoniana. Inoltre, la trasformazione che definisce come si passa da un sistema di riferimento inerziale all'altro non è un boost di Galileo, ma un boost di Lorentz. Questo garantisce che le equazioni dell'elettromagnetismo sono invarianti, ma si hanno delle conseguenze sui fenomeni della meccanica classica quando i corpi si muovono a velocità prossime a quella luce e anche conseguenze concettuali su come si considera e si comprende la struttura dello spazio e del tempo. Inoltre, la velocità della luce è la velocità massima.

## Lezione 3

Si sono visti vari esperimenti ed osservazioni. L'aberrazione cromatica della luce stellare implica che l'etere non è trascinato dalla Terra. Nell'esperimento di Fizeau si ipotizza che l'acqua possa trascinare l'etere e quindi si sommano le velocità; l'interferenza trovata variando  $w$  implica che la luce è "trascinata" dall'acqua, ma meno del previsto. Si può far sopravvivere l'ipotesi dell'etere, ma dev'essere più dettagliata: dei corpi "piccoli" trascinano l'etere solo in parte. Inoltre, segue che per velocità prossime a quella della luce, l'addizione classica delle velocità non funziona più. Infine, l'obiettivo dell'esperimento di Michelson e Morley è quello di studiare il moto della Terra rispetto all'etere; il risultato è che l'etere deve essere completamente trascinato dalla Terra. Ci sono delle evidenti contraddizioni.

Inoltre, con Michelson e Morley si osserva anche che la velocità della luce è uguale in tutte le direzioni perché la situazione non cambia se si ruota l'interferometro. Tuttavia, in quanto tale esperimento non si è svolto su tempi lunghi, tecnicamente non si può concludere che la velocità della luce sia costante. L'esperimento di Kennedy e Thorndike (1937) conclude che, sperimentalmente, la velocità  $c$  della luce è costante.

## 1.4 Coordinate, distanze e trasformazioni di Lorentz

Si definisce il concetto di evento. In relatività speciale bisogna essere precisi nel definire un evento. Esso è qualcosa che si identifica con una posizione ed un tempo. Si necessita di un sistema di riferimento di assi cartesiani ed in ogni punto  $\vec{x}$ , ci si immagina un orologio di cui si conosce esattamente la posizione (?).

**Sincronizzazione degli orologi.** Si definisce operativamente come si sincronizzano gli orologi posti in ogni punto dello spazio. Si consideri un sistema di riferimento ed un punto  $A$ . A tempo nullo,  $t = 0$ , dall'origine si emette un impulso luminoso. Quando la luce raggiunge il punto  $A$  è trascorso un tempo

$$t = \frac{l}{c}$$

dove  $l$  è la distanza di  $A$  dall'origine. Questa procedura è valida per ogni sistema di riferimento inerziale in quanto  $c$  è costante.

Le coordinate di un evento sono  $(t, \vec{x})$ . Un'osservazione di un fenomeno è una collezione di eventi.

**Osservazione.** Si considerino due sistemi di riferimento inerziali  $K$  e  $K'$ , dove il secondo ha velocità  $\vec{v}$  rispetto al primo.

- I due sistemi riferimento sono “intercambiabili” in quanto nessuno dei due è privilegiato.
- Si possono sincronizzare separatamente gli orologi in  $K$  e  $K'$ .
- Quando i due sistemi sono coincidenti  $O = O'$ , si può fare una sincronizzazione locale di un sistema sull'altro:  $t' = t = 0$ ,  $x'_i = x_i = 0$  con  $i = 1, 2, 3$  per  $x, y, z$ .

**Trasformazioni di Lorentz.** Si studiano le conseguenze che derivano dai postulati. Si considera un caso particolare, ma senza perdita di generalità. Si considerino due sistemi di riferimento equivalenti di cui il secondo, quello primato, con velocità  $\vec{v}$  parallela agli assi  $x$  e  $x'$ . Si cercano trasformazioni del tipo

$$t' = g(t, x), \quad x' = f(t, x), \quad y' = \dots, \quad z' = \dots$$

Il principio di inerzia deve valere in entrambi i riferimenti per i postulati. Quindi, le funzioni  $f$  e  $g$ , etc, devono essere lineari. Infatti, l'accelerazione di un punto dev'essere identica,  $\vec{a} = \vec{a}'$ , nei due sistemi proprio perché inerziali. Ricordando il principio di inerzia, un corpo non soggetto a forze ha accelerazione nulla ed essa è nulla in entrambi i riferimenti. L'accelerazione è la derivata seconda della posizione ed essendo nulla, segue che le funzioni  $f$  e  $g$  sono lineari nella posizione (e nel tempo).

Si può fare anche un discorso geometrico. Un corpo puntiforme non soggetto a forze, in un piano  $(t, x)$ , è descritto da una retta. Per il principio di inerzia, si ha una retta anche in  $(t', x')$ . Dunque, la mappa  $(t, x) \mapsto (t', x')$  deve trasformare rette in rette, cioè dev'essere una mappa lineare.

Si hanno quattro trasformazioni lineari, una per coordinata. In generale, si possono scrivere

come

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t\end{aligned}$$

Punto primo. Si nota che gli assi  $x$  e  $x'$  scivolano l'uno sull'altro. Quindi, l'equazione dell'asse  $x$  è preservata, cioè  $y = z = 0$  implica che  $y' = z' = 0$ . Da ciò segue che

$$a_{21} = a_{24} = 0, \quad a_{31} = a_{34} = 0$$

Punto secondo. L'origine  $O'$  di coordinate  $(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$  deve soddisfare  $x = vt$  in  $K$ . Pertanto

$$x' = a_{11}(x - vt) + a_{12}y + a_{13}z$$

Per  $t = 0$ , le condizioni iniziali sono: se  $x = 0$ , allora  $x' = 0$ . Dunque

$$a_{12} = a_{13} = 0$$

Punto terzo. Il piano  $(x, y)$  coincide con il piano  $(x', y')$ . Similmente per  $(x, z)$  e  $(x', z')$ . Da ciò segue

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$a_{23} = a_{32} = 0$$

In generale, i coefficienti  $a_{ij}$  possono dipendere dalla velocità. Dunque

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}(v) \cdot (x - vt) \\y' &= a_{22}(v) \cdot y \\z' &= a_{33}(v) \cdot z \\t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t\end{aligned}$$

Punto quarto. Si esegue l'operazione  $x \rightarrow -x$  e  $x' \rightarrow -x'$ . Si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}(v) \cdot (x + vt) \\y' &= a_{22}(v) \cdot y \\z' &= a_{33}(v) \cdot z\end{aligned}$$

Invece, eseguendo  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$  si ottiene

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}(-v) \cdot (x + vt) \\y' &= a_{22}(-v) \cdot y \\z' &= a_{33}(-v) \cdot z\end{aligned}$$

Le due situazioni sono identiche (mantenendo gli assi orientati sempre nello stesso modo). Pertanto

$$a_{ii}(v) = a_{ii}(-v)$$

Punto quinto. Si supponga che  $K$  si muova con velocità  $-\vec{v}$  rispetto a  $K'$ . Si ha

$$\begin{aligned}x &= a_{11}(-v) \cdot (x' + vt') \\y &= a_{22}(-v) \cdot y' \\z &= a_{33}(-v) \cdot z'\end{aligned}$$

Questa situazione è identica alla situazione di partenza:  $K'$  si muove con velocità  $\vec{v}$  rispetto  $K$ . Segue

$$y = a_{22}(-v) \cdot y' = a_{22}(-v) \cdot a_{22}(v) \cdot y = a_{22}^2(v) \cdot y \implies a_{22} = \pm 1$$

e identico per  $z$ . Se non si opera una riflessione, che è il caso da cui si è partiti, allora i coefficienti devono essere 1.

Punto sesto. Sia  $a_{11} \equiv \gamma$ . Quindi

$$x' = \gamma(v) \cdot (x - vt), \quad x = \gamma(v) \cdot (x' + vt')$$

Pertanto

$$t' = \frac{x - \gamma x'}{\gamma v} = \frac{1}{\gamma v} [x - \gamma^2 (x - vt)] = \nu x + \gamma t, \quad \nu \equiv \frac{1}{v} \left( \frac{1}{\gamma} - v\gamma^2 \right)$$

Punto settimo. La velocità della luce  $c$  è costante in  $K$  e  $K'$ . A tempo zero si emette un impulso luminoso nell'origine. A tempo  $t$ , il fronte d'onda soddisfa

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

Dato che i due sistemi hanno origine coincidente a  $t = 0$ , allora per per i postulati, lo stesso deve valere in  $K'$ :

$$(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = 0$$

Utilizzando le espressioni di  $x'$  e  $t'$  si ottiene

$$\begin{aligned} (ct')^2 &= c^2(\nu^2 x^2 + \gamma^2 t^2 + 2\gamma \nu x t) \\ (x')^2 &= \gamma^2(x^2 + (vt)^2 + 2xvt) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} &(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 \\ &= x^2(c^2\nu^2 - \gamma^2) + t^2(c^2\gamma^2 - \gamma^2v^2) + xt(c^22\nu\gamma + 2\gamma^2v) - y^2 - z^2 \\ &\equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

Dunque segue

$$c^2\gamma^2 - \gamma^2v^2 = c^2 \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Inoltre

$$c^2\nu^2 - \gamma^2 = -1 \implies \nu^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{1}{c^2}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

cioè

$$\nu = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{c} = \pm \gamma \frac{\beta}{c}$$

Rimane un'ambiguità di segno. Si risolve osservando il coefficiente al termine  $xt$ . Il primo addendo del coefficiente dev'essere negativo. Quindi

$$\nu = -\gamma \frac{\beta}{c}$$

A questo punto, le trasformazioni sono

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

e valgono per un boost di velocità  $\vec{v}$  parallelo all'asse  $x$ . Le trasformazioni si possono riscrivere in modo comodo e simmetrico come

$$x' = \gamma x - \gamma \beta ct, \quad ct' = \gamma ct - \gamma \beta x$$

Le coordinate che hanno trasformazione banale (cioè l'identità) vengono omesse e sottintese. Si definiscono delle coordinate

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z$$

dove gli apici non sono esponenti, ma indicano le componenti controvarianti che costituiscono un vettore nel senso di algebra tensoriale (contrapposte alle componenti covarianti dei covettori che utilizzano i pedici). Quindi si ottiene

$$(x^0)' = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (x^1)' = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad (x^2)' = x^2, \quad (x^3)' = x^3$$

Le trasformazioni di Lorentz sono rotazioni nello spazio iperbolico. Ponendo  $\beta \equiv \tanh \varphi$ , dove  $\varphi$  è la "rapidità" si ha

$$\cosh \varphi = \gamma, \quad \sinh \varphi = \beta \gamma$$

da cui le trasformazioni diventano

$$\begin{aligned} ct' &= \cosh \varphi ct - \sinh \varphi x \\ x' &= -\sinh \varphi ct + \cosh \varphi x \end{aligned}$$

che ricordano la matrice di rotazione nello spazio euclideo. Le funzioni iperboliche sono giustificate dal fatto di utilizzare delle forme quadratiche con un segno positivo e tre negativi, infatti vale la relazione

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$

**Osservazione.** Dal punto settimo segue che la quantità

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, cioè non dipende dal sistema di riferimento. In questo caso, invariante significa che il valore numerico di  $(\Delta s)^2$  è il medesimo.

**Definizione.** Si definisce la distanza tra due eventi (non necessariamente legati a propagazione di luce) come

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

come nella geometria euclidea, la distanza è invariante per rotazioni, traslazioni e boost. La distanza infinitesima è

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

I segni hanno una convenzione. Quella usata in questo caso  $(+ - - -)$  è tipica della fisica delle alte energie. Nei corsi di relatività generale e di cosmologia, la segnatura è del tipo  $(- + + +)$ .

L'espressione della distanza non è definita positiva. Pertanto, si hanno tre casi in cui si può avere causalità o meno.

Si studia il caso  $(\Delta s)^2 < 0$ : due eventi accadono allo stesso tempo. La distanza è di tipo spazio (space-like). Per  $(\Delta s)^2 > 0$ , cioè per due eventi nello stesso luogo in momenti diversi, la distanza è di tipo tempo (time-like). Per  $(\Delta s)^2 = 0$ , la distanza è di tipo luce (light-like), c'è emissione ed assorbimento di segnali luminosi.

**Osservazione.** Si sono ricavate le trasformazioni di Lorentz seguendo una certa logica. Come fa Landau, si può postulare che  $(ds)^2$  sia invariante sulla base del postulato della costanza di  $c$ . Da ciò si possono ricavare le trasformazioni.

## Lezione 4

Si vedono alcune conseguenze, si introduce il piano di Minkowski.

Le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Per due sistemi di riferimento  $K$  e  $K'$  equiversi con  $K'$  che si sposta lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ .

**Osservazione.** Il limite classico  $v \ll c$  è rispettato:

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$

**Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz.** Punto primo. Dato che

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tutto quello trattato ha senso qualora non compaiano numeri complessi, cioè  $v \leq c$ . Dunque, la velocità limite è  $c$ .

Punto secondo. Si ha una dilatazione dei tempi. Si considerino i due soliti riferimenti  $K$  e  $K'$  e due eventi che avvengono nello stesso luogo in  $K'$  (dunque  $K'$  è il riferimento solidale):

$$E'_1 = (t'_1, \bar{x}'), \quad E'_2 = (t'_2, \bar{x}')$$

Si studiano le coordinate di tali due eventi nel sistema di riferimento  $K$ . Noto

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

si ha

$$E_1 = \left( \gamma \left( t'_1 + \frac{v}{c^2} \bar{x}' \right), \gamma(\bar{x}' + vt'_1) \right), \quad E_2 = \left( \gamma \left( t'_2 + \frac{v}{c^2} \bar{x}' \right), \gamma(\bar{x}' + vt'_2) \right)$$

Si calcola la distanza temporale in  $K$ :

$$\tau = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

Si confronta un orologio in  $K'$  con due orologi in  $K$ . Esiste un modo privilegiato di misurare i tempi: misurare i tempi per eventi che accadono nello stesso luogo. Dunque, un osservatore non solidale  $K$  ai due eventi misura un tempo dilatato rispetto al tempo nel riferimento solidale,  $K'$ .

**Definizione.** Si definisce il concetto di tempo proprio,  $\tau_0$ , tra due eventi. Esso è l'intervallo di tempo misurato in un sistema di riferimento solidale ai due eventi ( $K'$  nella discussione).

In ogni altro sistema di riferimento inerziale si ha

$$\tau = \gamma\tau_0 \implies \tau > \tau_0$$

Si ha una dilatazione dei tempi. Un intervallo temporale misurato da un osservatore in moto rispetto a due eventi è maggiore rispetto al tempo proprio.

**Osservazione.** Il quadrato dell'intervallo di tempo proprio  $\tau_0^2$  coincide con l'invariante relativistico

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\tau_0)^2$$

Dunque, il tempo proprio è una quantità invariante.

Punto terzo. Si ha una contrazione delle lunghezze. Si definisce cosa s'intende per misurare una lunghezza. Considerando sempre i due riferimenti  $K$  e  $K'$ , si pone un'asta solidale ad  $K'$  di lunghezza

$$L_0 = L' = x'_2 - x'_1, \quad x'_2 > x'_1$$

Per misurare una lunghezza bisogna misurare la distanza spaziale tra le posizioni degli estremi dell'asta a tempo fissato. Noto

$$x'_i = \gamma(x_i - vt), \quad i = 1, 2$$

nel sistema  $K$ , gli eventi (cioè gli estremi) avvengono (cioè la distanza spaziale è misurata) allo stesso tempo. Dunque

$$L = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = \frac{L'}{\gamma}$$

La lunghezza è contratta. Questo risultato si è già trovato per spiegare le osservazioni dall'esperimento di Michelson e Morley.

**Trasformazioni di Lorentz per la velocità.** Si studia come cambiano le velocità. Si considerino i soliti due riferimenti  $K$  e  $K'$ , con  $K'$  in moto lungo  $x$  con velocità  $v$ . Si consideri una particella in movimento con velocità:

$$\vec{u} = (d_t x, d_t y, d_t z), \quad \vec{u}' = (d_{t'} x', d_{t'} y', d_{t'} z')$$

Si trova la relazione tra le velocità nei due sistemi di riferimento. Nella meccanica classica le velocità si sommano:  $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$ . Nella relatività speciale non è più così. Si utilizzano le unità naturali,  $c = 1$ . Si vede poi come reintrodurre  $c$ . Le trasformazioni di Lorentz diventano

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx)$$

Si calcola la componente  $u_x$ :

$$dx = \gamma(dx' + v dt') = \gamma dt'(v + d_{t'} x) = \gamma(v + u'_x) dt' = \gamma(v + u'_x) \gamma(1 - vu_x) dt$$

dove  $dt' = \gamma(1 - vu_x) dt$  deriva dalle trasformazioni di Lorentz. Pertanto

$$u_x = d_t x = \gamma^2(v + u'_x)(1 - vu_x) \implies u_x = \frac{v + u'_x}{1 + vu'_x}$$

Per reintrodurre la velocità della luce si esegue un'analisi dimensionale e si trova

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Si analizza la componente perpendicolare alla velocità (cioè  $y$  e  $z$ , si studia solo  $y$  perché per  $z$  è identico):

$$dy = dy' = d_{t'} y' dt' = u'_y \gamma(1 - vu_x) dt$$

Dunque

$$u_y = d_t y = \gamma u'_y (1 - vu_x) = \frac{u'_y}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{u'_y}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Non solo per la componente parallela alla velocità  $\vec{v}$  si ha un risultato non classico, ma anche per le componenti perpendicolari. Nel limite classico  $v \ll c$  si ottiene quanto già noto. Inoltre, se  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  sono parallele (e parallele all'asse  $x$ ) si trova

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Si vuole verificare se la velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento. Sia  $u' \equiv c$ . Quindi

$$u = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{v + c}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

#### 1.4.1 Diagrammi di Minkowski e cono di luce

Si consideri un evento  $E_1$  nell'origine e a  $t = 0$ . Ci si chiede quale regione dello spazio-tempo può influenzare (od essere influenzata) causalmente da tale evento. Si consideri un diagramma di Minkowski, cioè un piano cartesiano  $(x, ct)$ . Le regioni che possono essere influenzate da  $E_1$  sono l'insieme di tutti i punti dello spazio-tempo che possono essere raggiunti da un raggio luminoso in partenza da  $E_1$ . Tali regioni si trovano nel semi-piano superiore, al di sopra delle bisettrici  $ct = \pm x$ . Questa regione è causalmente connessa con  $E_1$  perché  $|\vec{v}| \leq c$ , cioè  $|d_x(ct)| \geq 1$ . Similmente, le regioni del passato che possono aver influenzato  $E_1$  sono quelle del piano inferiore, al di sotto delle bisettrici.

Per ogni punto in queste regioni, la distanza di Minkowski con  $E_1$  è di tipo tempo. I bordi di tali regioni (cioè  $x = ct$ ) forma un cono, per questo si parla di cono luce. Punti al di fuori del cono luce hanno una distanza da  $E_1$  di tipo spazio e non sono causalmente connessi con l'evento  $E_1$ . Infine, una traiettoria nel piano di Minkowski  $(x, ct)$  si dice "world line" (linea di universo). Una particella che si muove di moto rettilineo uniforme a velocità  $u$  si può rappresentare in un diagramma di Minkowski come una retta con angolo  $\beta$  rispetto la verticale per cui vale

$$\tan \theta = \beta$$

Le bisettrici descrivono particelle con velocità  $c$ .

**Boost.** Il solito riferimento  $K'$  che si muove lungo  $x$  rispetto a  $K$  è descritto in  $K$  da assi cartesiani  $(x', ct')$  non più perpendicolari, ma inclinati di un angolo verso una bisettrice. Infatti, la forma quadratica  $(ct)^2 = x^2$  è invariante. Pertanto, vale  $(ct')^2 = (x')^2$ . Si rappresenta l'asse  $ct'$  nel piano  $(x, ct)$ . L'equazione di tale asse è

$$x' = 0 \iff \gamma(x - \beta ct) = 0 \iff ct = \frac{x}{\beta}$$

cioè una retta nel piano  $(x, ct)$  con coefficiente angolare maggiore dell'unità. Similmente, per l'asse  $x'$  si ha

$$ct' = 0 \iff \gamma(ct - \beta x) = 0 \iff ct = \beta x$$

cioè una retta con coefficiente angolare minore dell'unità. [immagine]

#### 1.4.2 Simultaneità

Si consideri un diagramma di Minkowski con i due soliti riferimenti  $K$  e  $K'$ . Si considerino due eventi simultanei in  $K$  nel futuro all'interno del cono di luce. Per  $K'$ , i due eventi non sono simultanei in quanto le linee di simultaneità sono parallele all'asse  $x'$ , ma esso è inclinato rispetto a  $x$  e dunque i due punti appartengono a linee di simultaneità diverse in  $K'$ . [immagine]

Per eventi con distanza di tipo tempo, tutti i sistemi di riferimento sono in accordo all'ordine di causalità degli eventi. Viceversa per punti con distanza di tipo spazio. Infatti, eventi con distanza di tipo spazio non sono univocamente identificabili come presente e passato.

Si consideri un punto nell'origine di  $K$  ed un altro evento  $P$  nel futuro, ma con distanza space-like tra i due. Affinché i due eventi siano simultanei, l'asse  $x'$  deve passare per  $O$  e  $P$ , in questo



modo  $t' = 0$  ed i due eventi risultano proprio simultanei. Nel caso in cui  $x'$  sia al di sopra di  $P$ , allora tale evento è avvenuto prima di quello in  $O$  e questo implica che i due eventi non sono causalmente connessi.

D'altra parte, per eventi causalmente connessi, cioè all'interno del cono di luce, l'asse  $x'$  non può mai varcare la bisettrice affinché sia al di sopra di  $P$  così che esso avvenga prima di  $O$  in  $K'$ .

Il discorso è sempre fatto prendendo un punto nell'origine, tuttavia prendendo in un certo istante due punti che si trovino nella regione time-like, non è detto che la loro distanza sia time-like: bisogna osservare il cono di luce relativo di un evento rispetto all'altro.

## Lezione 5

### 1.5 Paradossi apparenti

**Simultaneità.** La simultaneità diventa un concetto relativo.

Punto primo. Se due eventi avvengono nello stesso istante e nello stesso punto in un sistema di riferimento inerziale, allora sono simultanei in ogni sistema di riferimento inerziale:

$$(c\Delta t')^2 = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = 0 \iff \Delta t = 0, \quad \Delta x = 0$$

Punto secondo. Due eventi simultanei ma in punti diversi in un sistema, non sono simultanei in altri sistemi di riferimento inerziali.

**Segnali superluminali.** Si considerino i due soliti riferimenti  $K$  e  $K'$ . In  $K$ , si supponga che l'evento  $A$  causa l'evento  $B$  tramite un segnale con velocità  $u > c$ . Dunque, per la causalità si ha  $t_B > t_A$ . In  $K'$  si ha

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma \left( t_B - t_A - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \right) = \gamma \Delta t \left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \gamma \Delta t \left( 1 - \frac{v}{c^2} u \right)$$

Fissata  $v$ , esiste un valore di  $u > c$  tale per cui  $\Delta t' < 0$ . Il che è assurdo perché viene invertita la causalità quando si è all'interno del cono di luce.

**Treno di Einstein.** Si consideri  $K'$  la stazione dei treni. [immagine] Un treno si muove di velocità  $v'$  in direzione  $x'$  positiva. Un vagone è lungo  $L$  ed ha riferimento  $K$  a metà. Quando le origini dei riferimenti coincidono, dei segnali luminosi emessi (in precedenza?) dagli estremi del vagone raggiungono  $O$  nello stesso istante:

$$\Delta t'_{\text{ricezione}} = \Delta t_{\text{ricezione}} = 0$$

dove i due eventi sono la ricezione dei segnali dai due estremi. Essi hanno distanza spaziale

$$\Delta x'_{\text{ricezione}} = \Delta x_{\text{ricezione}} = 0$$

Per il treno  $K$ , la coordinate temporale dell'emissione dei due raggi è identica

$$t_{B,\text{emissione}} = t_{A,\text{emissione}}$$

Per la stazione  $K'$ , le cose sono diverse perché non è solidale: il segnale da  $A$  è emesso prima del segnale emesso da  $B$  perché deve percorrere più strada affinché entrambi arrivino allo stesso istante in  $O'$ , dunque

$$t'_{A,\text{emissione}} < t'_{B,\text{emissione}}$$

Potrebbe sembrare che ci sia un disaccordo sulla simultaneità. Non c'è alcuno paradosso. Per  $K$  si ha

$$\Delta t_{\text{emissione}} = 0, \quad \Delta x_{\text{emissione}} = L$$

Per  $K'$  si utilizzano le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta t'_{\text{emis}} = \gamma \left( c\Delta t_{\text{emis}} - \frac{v'}{c} \Delta x_{\text{emis}} \right) = \gamma \beta L > 0 \implies t'_{B,\text{emis}} > t'_{A,\text{emis}}$$

dove  $v' = -v$ . La simultaneità non è più assoluta.

**Pole in the barn – asta nel granaio.** Si consideri un granaio  $K$  di lunghezza propria  $l_0$  con estremi  $A$  e  $B$ , ed un'asta  $K'$  con lunghezza propria  $L_0$  ed estremi  $P$  e  $Q$ . L'asta si muove di velocità  $v$ . Sia  $l_0 < L_0$ . Per  $K$ , l'asta in movimento è contratta e dunque può essere contenuta tutta in uno stesso istante nel granaio. Viceversa, per  $K'$ , il granaio è in movimento e dunque si contrae; pertanto, se la velocità è abbastanza alta, allora l'asta non può essere contenuta tutta in uno stesso istante. Ancora una volta si evidenzia la natura relativa della simultaneità. Sia  $L_0 = \gamma l_0$  e sia l'evento  $E_0$  tale per cui  $Q$  transita per  $A$ . Vale  $t_0 = 0$ . Quindi, in  $K$  si ha per Lorentz

$$\Delta x_{QP} = \frac{1}{\gamma} L_0 = l_0, \quad \Delta x_{AB} = l_0$$

Le world lines di  $A$  e  $B$  sono puramente verticali perché tali punti sono immobili in  $K$  [immagine]. Sia  $E_1$  l'evento corrispondente a  $Q$  passante da  $B$  e sia  $E_2$  l'evento corrispondente a  $P$  passante da  $A$ . Per le condizioni su  $L_0$ , gli eventi  $E_1$  ed  $E_2$  sono simultanei. Quindi

$$t_1 = \frac{\Delta x_{QP}}{v} = \frac{1}{\gamma v} L_0 = t_2$$

Si consideri  $K'$ . [immagine] Le world lines di  $P$  e  $Q$  sono verticali. Per l'evento  $E'_0$  si ha ancora  $t'_0 = 0$ . Inoltre

$$\Delta x'_{QP} = L_0, \quad \Delta x'_{AB} = \frac{1}{\gamma} l_0$$

Per  $E'_1$  si ha

$$t'_1 = \frac{\Delta x'_{AB}}{v} = \frac{1}{\gamma v} l_0$$

Mentre per  $E'_2$  si ha

$$t'_2 = \frac{\Delta x'_{QP}}{v} = \frac{1}{v} L_0 = \frac{\gamma}{v} l_0$$

Pertanto

$$t'_2 = \gamma^2 t'_1 \implies t'_2 > t'_1$$

Anche dal diagramma di Minkowski si nota che  $E'_1$  avviene prima di  $E'_2$ . Bisogna stare attenti a cosa si intende quando si dice che l'asta entra ed è entrata nel granaio. Un osservatore in  $P$  che varca  $A$  è sicuro che l'asta sia entrata nel granaio se non ha ancora ricevuto un segnale luminoso corrispondente a  $Q$  passato da  $B$  (evento  $E'_1$ ). Pertanto, l'asta entra nel granaio se

$$t'_2 - t'_1 \leq \frac{L_0}{c}$$

Si vedono alcune considerazioni. I corpi rigidi non possono veramente essere tali perché due punti non sanno istantaneamente dove si trova l'uno rispetto all'altro. Inoltre, nella meccanica classica, la propagazione (tipo di una forza associata ad un campo conservativo) è istantanea: considerando come esempio la forza di attrazione gravitazionale, le forze su di un punto dipendono dalle distanze con altri corpi e nella meccanica classica non si tiene conto del tempo necessario all'informazione per andare dal corpo al punto. Tuttavia, non si può avere un segnale più veloce di  $c$ . Infatti, quando si combina la meccanica quantistica e la relatività speciale (QFT), questo concetto è incorporato nelle particelle portatrici di forze (force carriers): fotoni, gravitoni, gluoni e bosoni vettoriali.

**Paradosso dei gemelli.** Si considerino due gemelli. Uno comincia un viaggio spaziale su di una navicella,  $K'$ , e poi torna. L'altro rimane sulla Terra,  $K$ . Per entrambi, guardando all'altro, si può applicare la dilatazione dei tempi. Tuttavia, la situazione non è simmetrica.

Se per  $K'$  scorre un tempo  $\Delta\tau_0$ , allora per  $K$  passa un tempo  $\gamma\Delta\tau_0$ , dove  $\Delta\tau_0$  è il tempo di andata e ritorno del viaggio. Dunque, il gemello sulla Terra dovrebbe essere più vecchio al ritorno. Viceversa, si ha la stessa situazione, ma con  $\gamma$  in  $K'$ .

La simmetria è rotta nel momento in cui un gemello deve tornare: si ha un'inversione del moto,

cioè un'accelerazione (in questo esempio anche alla partenza ed al ritorno perché il gemello viaggiante deve accelerare e decelerare). La presenza di un'accelerazione implica che il moto non sia più rettilineo uniforme.

Si studia il paradosso. Si supponga che, nel punto di inversione del moto, il tempo di decelerazione e accelerazione sia piccolo rispetto al tempo totale del viaggio. Si mostra che si ha comunque una asimmetria anche se il tempo in cui si ha accelerazione è piccolo. Sia  $E_A$  l'evento di partenza del gemello. Sia  $E_B$  l'evento di inversione della navicella. Sia  $d_{AB}$  la distanza tra i due eventi nel riferimento della Terra  $K$ . Sia  $K'$  il riferimento della navicella in andata e  $K''$  il riferimento della navicella al ritorno. [immagine] Si utilizza ancora un diagramma di Minkowski. Per  $K$ , il punto di inversione non si sposta: la world line è verticale. Si conosce la velocità  $v$  e la distanza  $d_{AB} = \Delta x_{AB}$ . Quindi

$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta x_{AB}}{v}$$

Per  $K'$  si ha il tempo proprio, perché gli eventi accadono nello stesso punto:

$$\Delta t'_{AB} = \frac{\Delta t_{AB}}{\gamma}$$

Similmente, il tempo proprio in  $K''$  per tornare è

$$\Delta t''_{AB} = \frac{\Delta t_{AB}}{\gamma} = \Delta t'_{AB}$$

Si studia secondo  $K'$  quanto tempo è passato in  $K$  tra gli eventi  $E_A$  e  $E_B$ . Si disegna il riferimento  $K'$  nel diagramma di Minkowski di  $K$ . Le linee di simultaneità per  $K'$  sono le rette parallele all'asse  $x'$ . La retta di simultaneità passante per  $E_B$  è:

$$ct' = \text{cost} = \gamma(ct - \beta x) \implies ct = \beta x + k'$$

dove  $k'$  è una costante che si può trovare conoscendo le coordinate di  $E_B$  in  $K$ . Inoltre,  $k'$  è la distanza (temporale, in termini di  $ct$ ) tra l'evento  $E_A$  e  $E_B$  in  $K$  studiato secondo  $K'$ .

Facendo lo stesso ragionamento per  $K''$  si a

$$ct'' = \text{cost} = \gamma(ct + \beta x) \implies ct = -\beta x + k''$$

dove  $k'' > k'$  e come prima è ancora la distanza temporale tra l'evento  $E_A$  e  $E_B$  in  $K$  studiato secondo  $K''$ .

L'intervallo di tempo di decelerazione ed accelerazione misurato sulla navicella, che è arbitrariamente piccolo, corrisponde alla differenza temporale associata a  $k'' - k'$  in  $K$ . Secondo il gemello sulla navicella, il tempo proprio di viaggio è

$$T'_{\text{tot}} = 2\Delta t'_{AB}$$

Secondo il gemello sulla Terra, il tempo di viaggio è

$$T_{\text{tot}} = 2\Delta t_{AB} = 2\gamma\Delta t'_{AB}$$

Dunque, egli è invecchiato di più.

## Lezione 6

### 1.6 Verifiche sperimentali

**Muoni atmosferici.** I muoni  $\mu$  sono delle particelle elementari con massa

$$m_\mu \approx 205m_e$$

Essi sono particelle instabili e quindi hanno un tempo di decadimento. I raggi cosmici colpiscono gli strati alti dell'atmosfera e creano sciami di muoni. L'altezza di produzione dei muoni è circa

$L = 60$  km e la loro velocità è  $v_\mu = 0.9995c$ . Nei laboratori Black Mesa, il tempo di dimezzamento (half-life) è

$$T_{\frac{1}{2}} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Dopo un tempo  $T_{\frac{1}{2}}$ , una quantità iniziale  $N_0$  di muoni è

$$N(T_{\frac{1}{2}}) = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} N_0 \implies T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} \ln 2, \quad \tau \equiv \frac{1}{\lambda}$$

Si discute classicamente la situazione. Il tempo di un muone per raggiungere il suolo è

$$\Delta t = \frac{L}{v} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ s}$$

In tale tempo si ha un numero di dimezzamenti pari a

$$N_{\text{dimez}} = \frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}} \approx 133$$

da cui la frazione di muoni al suolo è

$$\frac{1}{2^{133}} \approx 10^{-40}$$

Realisticamente non si dovrebbe rilevare alcun muone. Tuttavia, i muoni vengono osservati al suolo.

Si utilizza la relatività speciale. Nel riferimento del muone  $K'$ , la Terra  $K$  si muove. La distanza percorsa dal muone è

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

da cui il tempo di viaggio è

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 6.3 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Il numero di dimezzamenti è

$$N_{\text{dimez}} = \frac{\Delta t'}{T_{\frac{1}{2}}} \approx 4.21$$

Per cui la frazione di muoni al suolo è

$$\frac{1}{2^{4.21}} \approx 0.054$$

**Esperimento di Hafele-Keating.** Si vede una situazione con oggetti macroscopici per cui gli effetti sono piccoli: bisogna misurare con precisione gli intervalli di tempo e per questo si utilizzano orologi al cesio-133. Si osservi la Terra guardando il polo nord. Sulla circonferenza maggiore visibile, si sincronizzano tre orologi. Due sono posti su aerei di linea, uno viaggia verso est e l'altro verso ovest. Quando i due aerei tornano al punto iniziale, si confrontano gli intervalli di tempo misurati dai tre orologi.

L'aereo in viaggio verso est ha velocità  $v$ , mentre quello in viaggio verso ovest ha velocità  $-v$ . Il punto sulla circonferenza maggiore in cui si sincronizzano gli orologi non è fermo. Si prosegue la discussione prendendo come riferimento fisso il polo nord  $N$  (che visto da sopra, ruota "in place", cioè non si sposta). Il tempo misurato dal polo nord è

$$\tau_{\text{ref}} = \gamma \tau_0$$

dove  $\tau_0$  è il tempo misurato dall'orologio rimasto a terra. La velocità di tale punto è  $v_0 = \omega R \approx 1700 \text{ km h}^{-1} \approx 2v$ . Pertanto

$$\tau_{\text{ref}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2}} \approx \tau_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 \right]$$

La velocità degli osservatori sugli aerei è

$$v_E = \omega R + v, \quad v_W = \omega R - v$$

dunque

$$\tau_{\text{ref}} \approx \tau_E \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R + v}{c} \right)^2 \right] \approx \tau_W \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R - v}{c} \right)^2 \right]$$

Bisognerebbe anche considerare l'altitudine  $h$  di crociera degli aerei, ma essa è piccola rispetto ad  $R$ .

Si confrontano i tempi

$$\tau_{\text{ref}} \approx \tau_{E/W} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R \pm v}{c} \right)^2 \right] \approx \tau_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R}{c} \right)^2 \right]$$

Per l'aereo in direzione est si ha

$$\frac{\tau_E}{\tau_0} = \frac{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R}{c} \right)^2}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R + v}{c} \right)^2} < 1 \implies \tau_E < \tau_0$$

Per l'aereo in direzione ovest si ha

$$\frac{\tau_W}{\tau_0} = \frac{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R}{c} \right)^2}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega R - v}{c} \right)^2} > 1 \implies \tau_W > \tau_0$$

ricordando  $\omega R \approx 2v$  e  $\omega R > v$ , da cui  $\omega R > \omega R - v > 0$ .

L'evidenza sperimentale dà

$$\tau_E - \tau_0 = (-59 \pm 10) \text{ ns}, \quad \tau_W - \tau_0 = (273 \pm 7) \text{ ns},$$

Mentre dalla relatività speciale si predice

$$\tau_E - \tau_0 = -184 \text{ ns}, \quad \tau_W - \tau_0 = 96 \text{ ns},$$

I segni sono in accordo, però c'è un problema. L'esperimento è stato fatto nel 1971 quando si era già convinti della relatività speciale. L'esperimento è una verifica anche della relatività generale. SI ha una dilatazione temporale dovuta ad effetti gravitazionali: più vicino a corpi massimi, il tempo scorre più lentamente. Infatti si avrebbe

$$\tau_{\text{aereo}} = \left( 1 + \frac{gh}{c^2} \right) \tau_0$$

nel limite di campi gravitazionali deboli. Per gli effetti cinematici, l'altitudine di crociera degli aerei è irrilevante, ma essa compare negli effetti gravitazionali. Il contributo predetto della relatività generale è

$$\tau_E - \tau_0 = 144 \text{ ns}, \quad \tau_W - \tau_0 = 179 \text{ ns},$$

Da cui il risultato teorico dei due effetti è

$$\tau_E - \tau_0 = -40 \text{ ns}, \quad \tau_W - \tau_0 = 275 \text{ ns},$$

**Aberrazione della luce stellare.** Tramite la legge di composizione delle velocità, si ricava la relazione esatta tra l'angolo visto da un osservatore solidale con la sorgente luminosa ed un osservatore in moto. Si considerino i soliti riferimenti  $K$  e  $K'$ . Si consideri un punto materiale con velocità  $\vec{u}$  in  $K$ . Si definisce  $\theta$  l'angolo tra l'asse  $x$  e la velocità  $\vec{u}$ . Si discute la relazione degli angoli nei due riferimenti.

Si trovano le componenti del vettore  $\vec{u}$ . In  $K$  si ha

$$u_x = u \cos \theta, \quad u_y = u \sin \theta$$

ed in  $K'$  si ha

$$u'_x = u' \cos \theta', \quad u'_y = u' \sin \theta'$$

Per la legge di composizione delle velocità si ha

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

cioè

$$u \cos \theta = \frac{u' \cos \theta' + v}{1 + \frac{u' \cos \theta' v}{c^2}}, \quad u \sin \theta = \frac{u' \sin \theta'}{1 + \frac{u' \cos \theta' v}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Da cui la tangente è

$$\tan \theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v}$$

Quindi gli angoli non sono uguali nei due riferimenti. Per segnali luminosi si ha

$$u = u' = c \implies \tan \theta = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + \beta}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

il cui limite classico è  $\tan \theta = \frac{v}{c}$ .

**Effetto doppler relativistico.** Si considerino i due soliti riferimenti  $K$  e  $K'$ . All'origine  $O$  è presente una sorgente luminosa con lunghezza d'onda  $\lambda_{\text{sorg}} = \frac{c}{\nu_{\text{sorg}}}$ . Si vuole studiare la frequenza osservata in  $K'$ . Classicamente si ha già un effetto doppler

$$\nu_{\text{ricev}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu_{\text{sorg}}$$

In relatività speciale si ha

$$\nu_{\text{ricev}} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_{\text{sorg}}$$

Dimostrazione per esercizio.

**Altri fenomeni.** Altri fenomeni dell'applicazione della relatività speciale sono: il razzo di Bell (Bell's spaceship paradox) e l'effetto di Terrell-Penrose.

## 1.7 Indici, vettori e operatori differenziali

La notazione ed il formalismo tensoriale permettono di semplificare la trattazione della relatività. Per una introduzione più o meno formale all'algebra ed al calcolo tensoriali, si rimanda alle serie di "eigenchris" su YouTube: "Tensors for Beginners" e "Tensor Calculus".

**Convenzione di Einstein.** Gli indici ripetuti e che compaiono solo da uno stesso lato di una formula sono implicitamente sommati:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \equiv v^i \vec{e}_i$$

dove l'indice  $i$  non è un esponente. Per una scrittura in tre dimensioni vale  $v^i = v_i$ .

**Lettere latine e greche.** Si utilizzano indici con lettere latine  $i, j, k, \dots$  per coordinate spaziali. Si utilizzano indici con lettere greche  $\mu, \nu, \rho, \dots$  per coordinate spatio-temporali.

**Simbolo di Levi-Civita.** Si introduce il simbolo di Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$ , che si può interpretare come pseudo-tensore (detto anche densità tensoriale):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ è una permutazione pari di } 123 \\ -1, & ijk \text{ è una permutazione dispari di } 123 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa definizione generalizza anche a più dimensioni.

**Delta di Kronecker.** Il delta di Kronecker è

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Si vedono alcune conseguenze.

**Determinante di una matrice.** Si consideri una matrice  $A = (a_{ij}) = (a_j^i)$  di dimensione  $3 \times 3$ . Vale

$$\det A = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \varepsilon^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3$$

**Contracted epsilon identity.** Vale

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \iff \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_l^j \delta_m^k - \delta_m^j \delta_l^k$$

**Definizione.** Un tensore  $A$  è anti-simmetrico rispetto ad una coppia di indici  $i, j$  sse

$$A^{\dots i \dots j \dots} \equiv -A^{\dots j \dots i \dots}$$

dove i puntini di sospensione indicano la presenza di altri indici non meglio specificati. Un tensore  $S$  è simmetrico rispetto ad una coppia di indici  $i, j$  sse

$$S^{\dots i \dots j \dots} \equiv S^{\dots j \dots i \dots}$$

**Proposizione.** La contrazione sugli indici del prodotto  $AS$  è nulla

$$\sum_{ij} A^{\dots i \dots j \dots} S^{\dots i \dots j \dots} = \sum_{ji} A^{\dots j \dots i \dots} S^{\dots j \dots i \dots} = - \sum_{ij} A^{\dots i \dots j \dots} S^{\dots i \dots j \dots}$$

cioè

$$AS = -AS \implies AS = 0$$

**Prodotto vettoriale.** Un prodotto vettoriale  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  si può scrivere come

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \iff (\vec{a} \wedge \vec{b})^i = \varepsilon_{jk}^i a^j b^k$$

**Prodotto scalare.** Il prodotto scalare è

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_i b_i = a_i b^i = a^i b_i$$

**Proposizione.** Il triplo prodotto vettoriale è

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left[ \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \wedge \vec{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = b_i (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

**Rotore.** Vale

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_{x_j} V_k$$

**Esercizio.** Vale

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}, \quad \vec{V} = \vec{V}(x)$$

## Lezione 7

**Definizione.** Il gradiente è un operatore differenziale da applicare ad un campo scalare  $\varphi(t, \vec{x})$ . Il gradiente di tale campo è un campo vettoriale

$$(\vec{\nabla} \varphi)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \iff (\vec{\nabla} \varphi)^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi \equiv \partial_i \varphi, \quad i = 1, 2, 3$$

La divergenza opera su di un campo vettoriale  $\vec{V}(t, \vec{x})$  e restituisce un campo scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_i V_i = \partial_i V^i$$

Il rotore opera su di un campo vettoriale  $\vec{V}(t, \vec{x})$  restituendo un campo vettoriale (pseudo-vettoriale?)

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j V_k \iff (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^i = \varepsilon_k^{ij} \partial_j V^k$$

**Proposizione.** Vale

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0, \quad \forall \vec{V}$$

Infatti

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j V_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j V_k = 0$$

Il simbolo di Levi-Civita è antisimmetrico per uno scambio tra  $i$  e  $j$ , mentre l'operatore differenziale  $\partial_i \partial_j$  è simmetrico per tale scambio. Per quanto detto in precedenza, la somma dei prodotti tra tali due oggetti è nulla.

## 2 Equazioni di Maxwell

Finora non si sono mescolate le componenti temporali e spaziali, e quindi non si ha avuto il bisogno di sottolineare la differenza tra componenti contro-varianti  $v^i$  e componenti covarianti  $v_i$ . Ora bisogna essere accorti.

Le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

dove si pone  $c = 1$  e si ricorda valere  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ . La forza di Lorentz in unità gaussiane è

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

che assume la stessa forma di quella in unità del sistema internazionale qualora  $c = 1$ . Si veda Wikipedia<sup>1</sup> per passare da un sistema all'altro.

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian\\_units](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_units)



Queste equazioni si possono riscrivere come

$$\begin{cases} \partial_i E_i = 4\pi\rho \\ \partial_i B_i = 0 \\ \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k + \partial_t B_i = 0_i \\ \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k - \partial_t E_i = 4\pi J_i \end{cases}$$

In totale si hanno otto equazioni.

Si trova l'equazione di continuità utilizzando la notazione ad indici. Si fa la divergenza dell'ultima

$$\begin{aligned} \partial_i(\varepsilon_{ijk} \partial_j B_k - \partial_t E_i) &= \partial_i(4\pi J_i) \\ 0 - \partial_t \partial_i E_i &= 4\pi \partial_i J_i \\ -\partial_t(4\pi\rho) &= 4\pi \partial_i J_i \\ \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione di continuità esprime la conservazione della carica: la variazione della carica nel tempo all'interno di un volume chiuso è uguale al flusso della densità di corrente preso rispetto alla superficie limite del volume. Se non c'è flusso netto, allora la carica è conservata nel tempo. Nella scrittura iniziale delle equazioni di Maxwell si ha una certa ridondanza in quanto le incognite sono sei, cioè le componenti dei campi che però sono legate tra loro. Considerato  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$ , allora la seconda equazione è sempre soddisfatta qualora si introduce un potenziale vettore (detto anche potenziale magnetico)  $\vec{A}(t, \vec{x})$  tale per cui  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  cioè

$$B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

Considerato  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = 0$  allora la terza equazione è soddisfatta qualora si introduce un potenziale scalare (detto potenziale elettrico)  $\varphi$  tale per cui

$$\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A} \iff E_i = -\partial_i \varphi - \partial_t A_i$$

Si sono introdotti dei potenziali e si sono eliminate quattro equazioni, sebbene rimangano quattro incognite. Le rimanenti sono

$$\begin{cases} \partial_i E_i = 4\pi\rho \\ \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k - \partial_t E_i = 4\pi J_i \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} E_i = -\partial_i \varphi - \partial_t A_i \\ B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \end{cases}$$

Si introducono i potenziali per semplificare le equazioni e trovarne di nuove solo per essi. Risolvendole, si possono poi trovare i campi, che sono gli oggetti fisici effettivi. Le equazioni per i potenziali sono

$$\begin{cases} \partial_i (-\partial_i \varphi - \partial_t A_i) = 4\pi\rho \\ \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) - \partial_t (-\partial_i \varphi - \partial_t A_i) = 4\pi J_i \end{cases}$$

Dalla seconda si ha

$$\begin{aligned} 4\pi J_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) - \partial_t (-\partial_i \varphi - \partial_t A_i) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{lj}) (\partial_j \partial_l A_m) + \partial_t \partial_i \varphi + \partial_t^2 A_i \\ &= \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_k^2 A_i + \partial_t^2 A_i + \partial_t \partial_i \varphi \\ &= \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_i + \partial_t^2 A_i + \partial_t \partial_i \varphi \end{aligned}$$

dove si utilizza la contracted epsilon identity e vale  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ . Pertanto, le due equazioni diventano

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho \\ \nabla^2 A_i - \partial_t^2 A_i = -4\pi J_i + \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \varphi) \end{cases}$$

Le sorgenti sono legate ai potenziali. Si hanno quattro equazioni in quattro incognite, cioè i potenziali, da cui si possono ricavare i campi.

**Invarianza di gauge.** Le equazioni dei campi sono invarianti per trasformazione di gauge:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi, \quad \varphi' = \varphi - \partial_t\psi$$

dove  $\psi(t, \vec{x})$  è una funzione scalare arbitraria.

Si vede per il campo magnetico:

$$B'_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A'_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (A_k + \partial_k \psi) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + 0 = B_i$$

**Esercizio.** Verificare l'invarianza per il campo elettrico.

Non solo si ha una sovra-determinazione e ridondanza nelle equazioni di Maxwell per i campi, ma anche in quelle per i potenziali a causa dell'invarianza di gauge. Dunque, esistono delle scelte opportune di  $\psi$  che semplificano i conti. Si sceglie il gauge (gauge-fixing). Esistono quattro possibilità:

- Gauge di Coulomb:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .
- Gauge assiale: si introduce una direzione arbitraria  $\hat{n}$  ortogonale al potenziale vettore  $\vec{A} \cdot \hat{n} = 0$ .
- Gauge temporale:  $\varphi = 0$ .
- Gauge di Lorentz:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \varphi = 0$ .

Da quattro equazioni (una scalare e una vettoriale) ne si elimina una tramite la scelta di gauge. Infatti, per ogni scelta precedente, si ha una sola equazione scalare. La presenza di una ridondanza implica che i gradi di libertà fisici all'interno delle equazioni di Maxwell sono meno di otto o sei, cioè sono solamente due: le polarizzazioni di un fotone.

**Gauge di Lorentz.** Utilizzando il gauge di Lorentz, la prima equazione per i potenziali diventa

$$-4\pi\rho = \nabla^2\varphi + \partial_t(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \nabla^2\varphi + \partial_t(-\partial_t\varphi)$$

da cui si ottiene

$$\boxed{\square\varphi = \partial_t^2\varphi - \nabla^2\varphi = 4\pi\rho}$$

La seconda equazione per i potenziali diventa

$$\boxed{\square A_i = \partial_t^2 A_i - \nabla^2 A_i = 4\pi J_i}$$

Si sono ricavate delle equazioni delle onde per i potenziali.

**Operatore delle onde.** Il simbolo del quadratello è l'operatore d'Alembertiano:

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Esplicitando  $c$  si ha

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Pertanto, le equazioni dei potenziali diventano

$$\begin{cases} \square\varphi = 4\pi\rho \\ \square A_i = 4\pi J_i \end{cases} \quad \begin{cases} \square\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square A_i = \mu_0 J_i \end{cases}$$

In generale, le soluzioni sono i potenziali ritardati:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int_V \frac{\rho(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \int_V \frac{\vec{J}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

sempre in unità gaussiane e con  $c = 1$ . Dove  $\vec{x}'$  è il vettore posizione che identifica la sorgente. I valori dei campi ad un punto  $(t, \vec{x})$  dipendono dalle sorgenti ad un tempo precedente. Una sorgente influenza il valore dei campi in un punto dello spazio con una propagazione del segnale non istantanea. Questo fatto è diverso da come si pensa alla meccanica classica.

**Relatività dei campi elettrico e magnetico.** Si vede come si mescolano i campi in base all'osservatore. Nella forza di Lorentz compare la velocità, essa dovrebbe cambiare da un riferimento all'altro, ma l'accelerazione non cambia. Si studia la situazione.

I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  non possono essere completamente distinti. Infatti, si consideri una carica solidale a  $K$ : è presente un campo elettrostatico  $\vec{E}$ . In  $K'$ , la stessa carica è in moto e dunque c'è una corrente da cui si ha un campo magnetico  $\vec{B}$ . Tuttavia, la situazione fisica è la stessa. Si vede che si ottengono risultanti coerenti.

Si consideri una carica  $q$  in moto in  $K$  con velocità  $\vec{v}$ . [immagine] Si consideri un conduttore cilindrico infinito (indefinito) in cui le cariche positive si muovono con velocità  $\vec{v}_+$  concorde a  $\vec{v}$ , mentre le cariche negative si muovono con velocità  $\vec{v}_-$  discorde a  $\vec{v}$ . Si consideri un riferimento  $K'$  solidale a  $q$ . Tale riferimento vede le cariche positive spostarsi con velocità minore, mentre le cariche negative si spostano con velocità maggiore. In  $K$  si considera  $|\vec{v}_+| = |\vec{v}_-| = v_0$ .

Punto primo. Si trovano le velocità in  $K'$ . Dunque

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - vv_0}, \quad v'_- = \frac{-v_0 - v}{1 + vv_0}$$

scritte con segno rispetto a  $\hat{x}'$ . Se  $v_0 > v$  allora  $v'_+ > 0$  e  $v'_- < 0$ .

Punto secondo. Si consideri una situazione generale. Si calcola la densità di carica. Si ipotizza che una fila di cariche sia ferma. La loro densità di carica è

$$\rho_0 = \frac{Q}{AL_0}$$

Siano le cariche in moto con velocità non nulla (cioè si è in moto rispetto al caso precedente). La carica  $Q$  e l'area di base sono invarianti, mentre  $L_0$  è contratta. Dunque, la densità di carica è

$$\rho = \frac{Q}{A \frac{L_0}{\gamma}} = \gamma \rho_0, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Punto terzo. Si trovano le densità di carica nei riferimenti considerati. In  $K$  si ha

$$\rho_{\pm} = \frac{\pm \rho_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} \implies \rho_{\text{tot}} = \rho_+ + \rho_- = 0$$

cioè il filo è neutro.

Punto quarto. Le densità di carica in  $K'$  sono

$$\rho'_{\pm} = \frac{\pm \rho_0}{\sqrt{1 - (v'_{\pm})^2}} \implies \rho'_{\text{tot}} = \rho'_+ + \rho'_-$$

Noto

$$(v'_{\pm})^2 = \frac{(v_0 \mp v)^2}{(1 \mp vv_0)^2}$$

si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v'_+)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v'_-)^2}} = -\frac{2vv_0}{\sqrt{1 - v_0^2}\sqrt{1 - v^2}}$$

Pertanto, la densità di carica totale è

$$\rho'_{\text{tot}} = -\frac{2vv_0\rho_0}{\sqrt{1-v_0^2}\sqrt{1-v^2}} = -\frac{2vv_0\rho_+}{\sqrt{1-v^2}} \neq 0$$

Dunque, in  $K'$  il filo non è neutro.

Punto quinto. Si ricavano i valori dei campi. In  $K$ , la forza che agisce sulla carica in moto è

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

dato che  $\rho_{\text{tot}} = 0$  si ha  $\vec{E} = 0$ . Agisce solamente un campo magnetico. Applicando la legge di Ampère, espressa nel sistema internazionale, per un circuito circolare attorno al conduttore si ha

$$2\pi r B = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r}$$

## Lezione 8

Il sistema della corrente positiva e della corrente negativa è equivalente ad una corrente negativa di intensità (o velocità) doppia. La corrente positiva è

$$I_+ = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\rho_+ A dl}{dt} = \rho_+ av_0$$

dove  $dl$  è la lunghezza elementare del conduttore cilindrico. La corrente negativa è

$$I_- = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\rho_- A dl}{dt} = -\rho_- av_0 = \rho_+ av_0$$

Pertanto, l'intensità del campo magnetico è

$$|\vec{B}| = \frac{1}{\pi\epsilon_0 c^2} A \frac{\rho_+ v_0}{r}$$

La forza sulla carica è radiale interna

$$|\vec{F}| = qvB = \frac{A}{\pi\epsilon_0} q \frac{vv_0}{r} \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$$

Punto sesto. In  $K'$  è presente un campo magnetico anch'esso circolare. Tuttavia, esso non ha importanza perché la velocità della carica è nulla. Dunque, la forza su di essa è

$$\vec{F}' = q\vec{E}'$$

Utilizzando il teorema di Gauss per una superficie attorno al conduttore si ha

$$2\pi r l E'_r = \frac{\rho' l A}{\epsilon_0} \implies E'_r = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{2vv_0\rho_0}{\sqrt{1-v_0^2}\sqrt{1-v^2}} \frac{A}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

La forza è radiale ed ha modulo

$$|\vec{F}'| = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} |\vec{F}| = \gamma |\vec{F}|$$

La differente scrittura della forza (radiale o trasversale in generale) lo si può evidenziare osservando come cambia la quantità di moto. In  $K$  si ha

$$dp_{\perp} = F_{\perp} dt$$

In  $K'$  si ha

$$dp'_{\perp} = F'_{\perp} dt' = \gamma F_{\perp} \frac{dt}{\gamma} = F_{\perp} dt$$

in quanto  $dt'$  è il tempo proprio della carica. La variazione di velocità trasversa è la stessa, come ci si aspetta.

**Osservazione.** Si osserva

- Il campo elettrico ed il campo magnetico mutano l'uno nell'altro in base al riferimento. Infatti, si dice campo elettromagnetico.
- L'effetto finale è lo stesso sebbene in un caso si presenta un campo magnetico, mentre nell'altro si ha sia campo elettrico che magnetico.

Bisogna trovare un modo di formalizzare queste osservazioni.

## 2.1 Invarianza in forma delle leggi fisiche

Si vedono alcune considerazioni sul principio di relatività e sull'invarianza delle leggi fisiche. Si discute il formalismo adeguato alla relatività speciale.

In meccanica classica, una legge fisica si esprime con un'equazione del tipo

$$F(A, B, C, \dots) = 0$$

dove  $A, B, C, \dots$  sono grandezze fisiche come la velocità, accelerazione, momento angolare, forza, etc. Le quantità fisiche sono funzioni del tempo e dello spazio  $(t, \vec{x})$ . Dunque, la relazione precedente sottintende l'utilizzo di un sistema di riferimento scelto  $K$ . Si può passare ad un altro riferimento  $K'$  tramite la trasformazione di coordinate

$$\vec{x}' = \vec{x}'(t, \vec{x}), \quad t' = t'(t, \vec{x}), \quad A' = A'(t', \vec{x}'), \dots$$

Dunque, a priori la legge diventa

$$F'(A', B', C', \dots) = 0$$

Ma la forma funzionale che lega le quantità non primarie sia la stessa che lega quelle primarie. In generale, per un cambio di coordinate si ha  $F \neq F'$ .

Per principio di relatività, in due sistemi di riferimento inerziali, le leggi sono invarianti in forma  $F = F'$ . In relatività speciale, uno dei postulati equivale al principio di relatività di Galileo, però il cambio di coordinate è una trasformazione di Lorentz. Si formalizza tale postulato tramite l'algebra ed il calcolo tensoriali.

Risulta utile avere un formalismo che renda trasparente il principio di relatività e le trasformazioni di Lorentz. Tale formalismo permette di essere sicuri che, una volta scritte le leggi in una certa forma, esse siano invarianti.

## 3 Elementi di algebra e calcolo tensoriali

Lo spazio degli eventi è lo spazio di Minkowski  $(ct, \vec{x})$ . Questo è uno spazio quadri-dimensionale la cui metrica è

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

identificato con la scrittura  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Esso è uno spazio pseudo-euclideo: ha un concetto di distanza diversa, non è definita positiva.

Le componenti di un punto in tale spazio sono

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Una trasformazione di Lorentz è una mappa

$$x^\mu \rightarrow (x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

dove  $\Lambda$  è una matrice  $4 \times 4$ . Per un boost lungo l'asse  $x$  essa assume la forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La norma di un vettore (utilizzando la metrica di Minkowski) è la stessa in ogni riferimento per costruzione: si è utilizzato l'invariante  $(ds)^2$ . La norma è

$$\|\vec{v}\|^2 = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = v_\nu v^\nu, \quad v_\nu \equiv \eta_{\mu\nu} v^\mu$$

Per metriche arbitrarie, si utilizza il simbolo  $g_{\mu\nu}$ .

**Elementi.** Si consideri una superficie  $\Sigma$  in tre dimensioni. Tale superficie (detta varietà o manifold) si può descrivere con tre funzioni a due coordinate libere

$$x = x(q^1, q^2), \quad y = y(q^1, q^2), \quad z = z(q^1, q^2), \quad (q^1, q^2) \rightarrow \text{punto in } \Sigma$$

Si esprime uno spostamento infinitesimo sulla superficie:

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} = (\partial_{q^1} x dq^1 + \partial_{q^2} x dq^2) \hat{i} + (\dots) \hat{j} + (\dots) \hat{k} \\ &= dq^1 (\partial_{q^1} x \hat{i} + \partial_{q^1} y \hat{j} + \partial_{q^1} z \hat{k}) + dq^2 (\dots) = dq^1 \vec{e}_1 + dq^2 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

La prima scrittura di  $ds$  è estrinseca, cioè la superficie è immersa in uno spazio di dimensione maggiore. L'ultima scrittura è intrinseca, formalmente non si ha traccia dello spazio maggiore. Tale espressione è quella di un vettore tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P$  in cui si calcola  $ds$ . Pertanto,  $\vec{e}_i$  costituiscono una base nello spazio tangente  $T_P(\Sigma)$  a  $\Sigma$  in  $P$ . Pertanto,

$$\vec{u} \in T_P(\Sigma) \implies \vec{u} = u^a \vec{e}_a$$

Quanto fatto presuppone aver scelto una parametrizzazione. La scelta non è univoca. Dunque si può operare un cambio di coordinate:

$$(q^a)' = (q^a)'(q^1, q^2)$$

Pertanto, il vettore  $\vec{u}$  ha coordinate diverse, ma anche la base è diversa. Il vettore come entità è invariante:

$$\vec{u} = u^a \vec{e}_a = (u^b)' \vec{e}_b'$$

Si discute come cambiano i differenziali  $dq^i$  e gli elementi della base  $\vec{e}_i$  in un cambio di coordinate. Quindi

$$ds = dq^a \vec{e}_a \equiv d(q^b)' \vec{e}_b'$$

Si calcola la legge di trasformazione. Svolgendo il differenziale totale si ha

$$d(q^a)' = \partial_{q^b} (q^a)' dq^b$$

Si ricorda sempre la convenzione di Einstein per indici ripetuti. Lo spostamento infinitesimo è

$$d\vec{s} = dq^b \vec{e}_b \equiv d(q^a)' \vec{e}_a' = dq^b \partial_{q^b} (q^a)' \vec{e}_a'$$

Da ciò si ricava la legge di trasformazione dei vettori della base

$$\vec{e}_b = \partial_{q^b} (q^a)' \vec{e}_a'$$

$$\partial_{(q^c)'} q^b \vec{e}_b = \partial_{(q^c)'} q^b \partial_{q^b} (q^a)' \vec{e}_a' = \partial_{(q^c)'} (q^a)' \vec{e}_a' = \delta_c^a \vec{e}_a'$$

$$\vec{e}_c' = \partial_{(q^c)'} q^b \vec{e}_b$$

$$\boxed{\vec{e}_a' = \partial_{(q^a)'} q^b \vec{e}_b}$$

Dove il primato indica il riferimento di arrivo. Un oggetto che, per cambio di coordinate, trasforma in questo modo è detto covariante.

Ora si studia come variano le componenti di un vettore. Quindi

$$(u^b)' \vec{e}_b \equiv u^a \vec{e}_a = u^a \partial_{q^a} (q^b)' \vec{e}_b$$

Si ottiene

$$(u^b)' = \partial_{q^a} (q^b)' u^a$$

Tale legge trasforma in modo contro-variante. Si noti le due trasformazioni sono uno l'inverso dell'altra. Per semplicità si può ricordare la covarianza e la contro-varianza come

$$F_a^b = \partial_{(q^a)'} q^b, \quad B_a^b = \partial_{q^a} (q^b)'$$

Vale

$$F_a^b B_b^c = \delta_a^c$$

dove  $F$  sta per “forward” (transformation) e  $B$  per “backward”.

**Definizione.** Se la dimensione della superficie  $M$  (manifold) è  $n$  allora si definisce un vettore tangente a  $M$  in un punto  $P$  la ennupla

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \in T_P(M)$$

che si trasforma in modo contro-variante. Alle volte si indica anche  $u \in T(P)$ . Si definisce una base dello spazio tangente  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . Essa trasforma in modo covariante.

Si specifica a quale punto  $P$  della varietà, lo spazio  $T_P(M)$  è tangente perché non è ovvio come confrontare vettori appartenenti a spazi tangenti diversi.

Si definiscono degli oggetti, elementi dello spazio tangente ad una varietà, tramite le loro leggi di trasformazione rispetto ad un cambio di coordinate della superficie. Gli indici trasformano in modo contro-variante, i pedici trasformano in modo covariante.

## Lezione 9

Si introducono nuovi concetti pensando sempre ad una varietà immersa in uno spazio di dimensione maggiore e poi si generalizzano tali concetti: non si considera più lo spazio di dimensione maggiore e la dimensione della varietà diventa arbitrario.

Alcune proprietà sono usate senza preoccuparsi dello spazio in cui è immersa la varietà. Finora si sono usate le coordinate libere  $q^i$  per riferirsi alla varietà. D'ora in poi si utilizza  $x^i$  per descrivere la parametrizzazione di una varietà.

**Definizione.** (non detta). Un tensore è una collezione di vettori (elementi dello spazio tangente) e covettori (elementi dello spazio cotangente, duale) combinati tramite il prodotto tensoriale.

Conoscendo le leggi di trasformazione delle componenti dei vettori e dei covettori, si possono ricavare le leggi di trasformazione delle componenti di un tensore di qualunque tipo. Attenzione che un tensore, come entità, è lo stesso in ogni riferimento, ma le sue componenti cambiano a seconda del sistema di riferimento scelto.

**Definizione.** Si considerino due vettori  $u, v \in T(P)$ . Essi possono definire le componenti di un tensore  $T = T^{ab}\vec{e}_a\vec{e}_b$  di rango (ordine?, tipo?)  $(2,0)$  come

$$T^{ab} = u^a v^b, \quad T \in T(P) \otimes T(P)$$

Il simbolo  $\otimes$  (otimes) indica il prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Tale simbolo è anche usato per il prodotto di Kronecker e il prodotto tensoriale di tensori. In quest'ultimo caso viene talvolta omissso.

La legge di trasformazione è

$$(T^{ab})' = (u^a)'(v^b)' = B_c^a u^c B_d^b v^d = B_c^a B_d^b T^{cd}$$

per cambio di coordinate  $x \rightarrow x'(x)$ .

**Osservazione.** Si osserva

- Il tensore (ricavato da)  $T^{ab}$  è elemento di  $T(P) \otimes T(P)$ .
- Il suo tipo (rango?) è  $(2,0)$ .
- Lo spazio prodotto tensoriale di spazi vettoriali è ancora uno spazio vettoriale, pertanto sono definite le operazioni tra gli elementi. La somma tra tensori di uno tipo, ne mantiene il tipo medesimo.
- Il prodotto tra tensori di tipo  $(p,0)$  e  $(u,0)$  è un tensore di tipo  $(p+u,0)$ :

$$T^{a_1, \dots, a_p} T^{b_1, \dots, b_u} = T^{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_u}$$

- Un tensore  $T^{ab}$  è simmetrico sse  $T^{ab} = T^{ba}$ . La simmetria è preservata per trasformazioni di coordinate.

**Definizione.** Per un vettore  $u \in T(P)$ , si definisce l'azione di un funzionale lineare come

$$a : T(P) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u) = a_b u^b$$

Il funzionale  $a$  è elemento dello spazio cotangente  $\bar{T}_P(M)$ , oppure  $\bar{T}(P)$ , alla varietà  $M$  nel punto  $P$ . Tale spazio è il duale di  $T(P)$ .

Si impone che l'azione di  $a$  su  $u$  sia indipendente dalle coordinate:

$$a(u) \equiv a'(u')$$

Da qua si ricavano le leggi di trasformazione

$$a_b u^b \equiv a'_c (u^c)' = a'_c B_b^c u^b \implies a'_c = F_b^c a_b$$

ricordando che  $FB = \delta$ . La trasformazione è di tipo covariante. Tali funzionali lineari sono detti covettori, elementi dello spazio cotangente.

**Definizione.** Le componenti di un tensore covariante  $T = T_{ab}\epsilon^a\epsilon^b$  trasformano come

$$T'_{ab} = F_a^c F_b^d T_{cd}, \quad T \in \bar{T}(P) \otimes \bar{T}(P)$$

per cambio di coordinate  $x \rightarrow x'(x)$ . Esso è un tensore di rango  $(0,2)$ . Le osservazioni viste prima valgono anche per i tensori covarianti.

**Teorema.** Un tensore misto presenta componenti contro-varianti  $p$  e covarianti  $q$ . Il suo tipo generico è  $(p,q)$ .



**Definizione.** L'operazione di contrazione

$$C : (p, q) \rightarrow (p - 1, q - 1)$$

opera su di un tensore tramite somma di un indice covariante ed uno contro-variante:

$$C(T_{b_1, b_2, \dots, b_q}^{a_1, b_2, \dots, a_p}) \equiv T_{c, b_2, \dots, b_q}^{c, a_2, \dots, a_p} = \sum_{c=1}^n T_{c, b_2, \dots, b_q}^{c, a_2, \dots, a_p}$$

con  $n = \dim(M)$ . La posizione di  $c$  come indice contro-variante ed indice covariante non dev'essere la stessa.

**Esempio.** Una contrazione del tensore  $T_{cd}^{ab}$  risulta essere  $T_{ad}^{ab}$ .

**Osservazione.**

- Vettori e covettori sono tensori di tipo (1,0) e (0,1) rispettivamente.
- Contraendo (le componenti di) un tensore (1,1)  $T_b^a = u^a v_b$  si ottiene uno scalare  $T_a^a = u^a v_a$  che è un tensore di tipo (0,0) ed è invariante (in quanto tensore).

**Definizione.** Un invariante scalare, o brevemente scalare, è una quantità invariante rispetto la scelta del sistema di coordinate ed è unicamente espresso da una magnitudine (modulo).

**Definizione.** Un campo tensoriale  $T$  assegna un tensore ad ogni punto di uno spazio matematico.

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \underbrace{T(P) \otimes \dots \otimes T(P)}_p \otimes \underbrace{\bar{T}(P) \otimes \dots \otimes \bar{T}(P)}_q, \quad x \mapsto T_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p}(x)$$

Molte strutture matematiche dette tensori sono in realtà campi tensoriali.

**Esempio.** Un tensore generico

$$(T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p})' = F_{\beta_1}^{\gamma_1} \dots F_{\beta_q}^{\gamma_q} B_{\delta_1}^{\alpha_1} \dots B_{\delta_p}^{\alpha_p} T_{\gamma_1, \dots, \gamma_q}^{\delta_1, \dots, \delta_p}$$

possiede una trasformazione omogenea: si hanno combinazioni lineari delle componenti del tensore nelle vecchie coordinate.

Una legge fisica espressa come

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(x) = 0$$

risulta invariante in forma (supponendo trasformazioni invertibili). Infatti, si consideri

$$T^a = 0$$

in  $K$ . Allora in  $K'$  si ha

$$(T^b)' = B_a^b T^a = B_a^b \cdot 0 = 0$$

La richiesta che la trasformazione sia invertibile equivale a richiedere che  $B_a^b$  non sia nullo, cioè il jacobiano non sia zero.

**Trasformazioni delle derivate.** Si consideri la derivata di uno scalare  $S$ . Vale  $S'(x') = S(x)$ . Si deduce la legge di trasformazione dell'operatore differenziale

$$\partial_{(x^a)'} S' \equiv \partial_{(x^a)'} S(x(x')) = \partial_{x^c} S \partial_{(x^a)'} x^c$$

Da cui la legge è

$$\partial_{(x^a)'} = \partial_{(x^a)'} x^c \partial_{x^c} = F_a^c \partial_{x^c}$$

cioè trasforma in modo covariante.

Si studia la derivata di oggetti più complicati di uno scalare. Si consideri un campo vettoriale  $V^a(x)$ . Dunque

$$(V^a)'(x') = B_b^a V^b(x)$$

Da ciò si ricava

$$\begin{aligned} \partial_{(x^c)'} (V^a)'(x') &\equiv \partial_{(x^c)'} [\partial_{x^b} (x^a)' V^b(x(x'))] \\ &= \partial_{(x^c)'} (\partial_{x^b} (x^a)') V^b + \partial_{x^b} (x^a)' \partial_{(x^c)'} x^d \partial_{x^d} V^b \end{aligned}$$

Dal secondo addendo si vede che l'indice del vettore ha trasformato in modo contro-variante (il primo fattore), mentre la derivata ha trasformato come il caso scalare (i restanti due fattori, meno  $V^b$ ). Tuttavia, si ha un altro addendo. Esso è nullo qualora la trasformazione di coordinate  $x' = x'(x)$  è lineare, perché i termini di derivata seconda sono nulli. Quando questo è il caso si ha

$$\partial_{(x^a)'} = \partial_{(x^a)'} x^b \partial_{x^b} = F_a^b \partial_{x^b}$$

la derivata trasforma in modo covariante.

**Osservazione.** In relatività speciale, la derivata

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$$

è un operatore con legge di trasformazione tensoriale appropriata.

Quando si opera la derivata di un vettore, si sta studiando come cambia un vettore, un campo vettoriale sulla varietà: si confrontano spazi tangenti diversi. Su di una varietà generica, la derivata di un vettore richiede il trasporto parallelo, cioè trasportare un vettore da un punto ad un altro mantenendolo parallelo a se stesso. In un piano cartesiano, questo è banale perché gli spazi tangenti coincidono con la varietà. Se essa non fosse piatta (formalmente, il tensore di Riemann è nullo), trasportare un vettore lungo un percorso chiuso potrebbe non riportarlo all'orientazione originale. Dunque, la derivata diventa un'operazione non banale: bisogna introdurre la derivata covariante (attraverso i simboli di Christoffel). Tuttavia, in relatività ristretta, questo non ha rilevanza perché lo spazio di Minkowski è piatto.

## Lezione 10

In quanto la derivata trasforma in modo covariante, allora si può inglobare il suo indice in quello di un tensore, scrivendo ad esempio

$$\partial_c T_b^a = \tilde{T}_{cb}^a$$

### 3.1 Tensore della metrica

Si consideri una varietà immersa in uno spazio di dimensione maggiore. Un vettore spostamento infinitesimo sulla varietà è

$$d\vec{s} = dq^a \vec{e}_a$$

dove  $\vec{e}_a$  sono i versori associati alle coordinate della varietà. Il suo prodotto scalare è

$$\|d\vec{s}\|^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} = dq^a \vec{e}_a \cdot dq^b \vec{e}_b = (\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b) dq^a dq^b$$

Pensando al prodotto scalare indotto dall'immersione della varietà in uno spazio di dimensione maggiore, si definisce il tensore della metrica

$$g_{ab} \equiv \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$$

Da cui

$$(ds)^2 = g_{ab} dq^a dq^b$$

Il tensore metrico può anche essere un campo tensoriale, cioè dipendere dal punto particolare della varietà.

**Proposizione.**

- Il tensore della metrica si può rappresentare come una matrice. Tuttavia, propriamente una matrice è un tensore (1,1).
- Il tensore della metrica è simmetrico  $g_{ab} = g_{ba}$ . In generale, un tensore (0,2) si può decomporre in una parte simmetrica ed una anti-simmetrica

$$g_{ab} = \frac{1}{2}(g_{ab} + g_{ba}) + \frac{1}{2}(g_{ab} - g_{ba})$$

La norma dello spostamento infinitesimo dev'essere invariante

$$(ds)^2 = g_{ab}^{\text{sim}} dq^a dq^b + \cancel{g_{ab}^{\text{anti-sim}} dq^a dq^b}$$

Il secondo addendo è nullo perché è un prodotto tra un fattore anti-simmetrico ed un fattore simmetrico.

- Il tensore metrico non è singolare:  $\det g \neq 0$ .
- Il tensore metrico è un tensore (0,2).

Si dimostra l'ultima proprietà. Dato che  $(ds)^2$  è invariante, allora

$$(ds)^2 = (ds')^2$$

per un cambio di coordinate  $q \rightarrow q'(q)$ . Dunque

$$(ds')^2 = g'_{ab} (dq^a)' (dq^b)' = g'_{ab} B_c^a B_d^b dq^c dq^d \equiv (ds)^2 = g_{cd} dq^c dq^d$$

da cui

$$g'_{ab} = F_a^c F_b^d g_{cd}$$

cioè il tensore ha due componenti covarianti. Si ricordi che il passaggio sottinteso consiste nel moltiplicare entrambi i lati per  $F$  appropriati, semplificare con il delta di Kronecker e rinominare gli indici.

**Prodotto scalare.** Il prodotto scalare di due vettori  $u$  e  $v$  è

$$u \cdot v \equiv g_{ab} u^a v^b = u_b v^b$$

La norma indotta è

$$\|u\|^2 = g_{ab} u^a u^b = u^a u_a$$

Non è detto che la norma sia definita positiva per una varietà arbitraria.

**Delta di Kronecker.** Il delta di Kronecker è l'elemento identità. Esso è invariante e vale

$$\delta_b^a = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

Il delta è un tensore di tipo (1,1).

**Esercizio.** Trovare il tensore metrico sulla sfera unitaria. Risposta:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

**Osservazione.** Si osserva:

- La metrica permette di misurare distanze ed angoli.
- La simmetria della metrica è intrinseca.
- La non singolarità della metrica è intrinseca. Dunque, non ha autovalori nulli.
- La non singolarità implica l'esistenza della metrica inversa  $g^{ab}$ . Essa è quel tensore per cui

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$$

L'aggettivo "intrinseco" è equivalente ad "invariante" in questo contesto.

**Proposizione.** Vale

- La metrica mappa vettori in covettori e viceversa per la metrica inversa. Ci si riferisce a questo fenomeno dicendo che la metrica alza ed abbassa gli indici:

$$u_b \equiv g_{ab}u^a, \quad u^b \equiv g^{ab}u_a$$

- Il prodotto scalare si può scrivere come

$$u \cdot v = g_{ab}u^a v^b = g^{ab}u_a v_b = u^a v_a = u_a v^a$$

ed è invariante perché è uno scalare.

- La derivata  $\partial_a u^a$  è invariante (perché uno scalare, si ricorda che tale scrittura equivale alla divergenza).

## 4 Cinematica in relatività speciale

Gli indici greci sono spazio-temporali 0 – 3. Gli indici latini sono spaziali 1 – 3. Un invariante della relatività speciale è

$$(ds)^2 = (c dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dove la metrica dello spazio di Minkowski è

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essa è un tensore in senso proprio e non un campo tensoriale: non dipende dalla posizione.

**Esempio.** Si consideri un quadrivettore

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Il covettore associato è

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} x^0 & -\vec{x} \end{pmatrix}$$

## 4.1 Gruppo di Lorentz

**Trasformazioni di Lorentz.** Si cerca la più generale trasformazione di Lorentz. L'ipotesi è che  $(ds)^2$  è invariante per trasformazione non singolare  $x \rightarrow x'(x)$ . Dunque

$$\eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \equiv \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)' (dx^\nu)' = \eta_{\mu\nu} B_\rho^\mu B_\sigma^\nu dx^\rho dx^\sigma$$

Da cui si ha

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} B_\rho^\mu B_\sigma^\nu$$

Si deriva rispetto  $x^\lambda$

$$\partial_\lambda \eta_{\rho\sigma} = \partial_\lambda (\eta_{\mu\nu} B_\rho^\mu B_\sigma^\nu) \iff 0 = \eta_{\mu\nu} [\partial_{\lambda\rho}^2 (x^\mu)' \partial_\sigma (x^\nu)' + \partial_\rho (x^\mu)' \partial_{\lambda\sigma}^2 (x^\nu)'] \quad (I)$$

Si considera un'espressione (II) che è la somma dell'equazione precedente e se stessa, ma scambiando gli indici  $\lambda$  e  $\rho$ . Si considera un'altra equazione (III) che è la somma dell'equazione precedente e se stessa, ma scambiando gli indici  $\lambda$  e  $\sigma$ . Utilizzando la simmetria della metrica e considerando  $I + II - III$  si ha

$$0 = 2\eta_{\mu\nu} [\partial_{\rho\lambda}^2 (x^\mu)' \partial_\sigma (x^{\nu'})']$$

Si ha una combinazione lineare che dà zero. La metrica non è nulla e nemmeno l'ultimo termine è nullo. Dunque

$$\partial_{\rho\lambda}^2 (x^\mu)' = 0$$

cioè la trasformazione dev'essere lineare. (Una somma pari a zero non implica che i termini siano tutti nulli, quindi come si arriva a tale conclusione?? L'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella banale perché linearmente indipendenti?).

**Conseguenze.** La più generale trasformazione lineare è la trasformazione di Poincaré:

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

con  $\Lambda$  matrice costante ed  $a$  vettore costante che descrive le traslazioni rigide. Si noti che  $\Lambda$  non è un tensore e dunque si evidenzia la differenza esplicita nell'ordine da sinistra a destra degli indici: si fa riferimento alla notazione degli indici delle matrici. Ci si concentra su  $a = 0$ , da cui si ha la trasformazione di Lorentz omogenea

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = B_\nu^\mu x^\nu \implies \Lambda^\mu{}_\nu = B_\nu^\mu$$

La matrice corrispondente ad un boost lungo  $\hat{x}$  è

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proprietà generali.** Si studiano le proprietà più generali della matrice di trasformazione. Si utilizza l'invarianza di  $(ds)^2$ . Noto

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} B_\rho^\mu B_\sigma^\nu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho (x^\mu)' \partial_\sigma (x^\nu)'$$

Dalla trasformazione di Lorentz  $(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  si ottiene

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = (\Lambda^\top)_\rho{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \implies \eta = \Lambda^\top \eta \Lambda$$

Si noti che in notazione tensoriale, una matrice e la sua trasposta si scrivono allo stesso modo ( $\Lambda^\mu{}_\rho \leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\sigma$ ), perché la notazione evidenzia solamente le componenti contro-varianti e covarianti, e non le righe e le colonne.

Da ciò deriva

$$\det g = \det g (\det \Lambda)^2 \implies \det \Lambda = \pm 1$$

**Definizione.** Il gruppo di Lorentz è

$$\mathcal{L} = \{\Lambda \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid \eta = \Lambda^\top \eta \Lambda\}$$

Esso è un sottoinsieme del gruppo (cioè un sottogruppo) delle matrici  $4 \times 4$  lineari non singolari  $Q(4, \mathbb{R})$ . L'insieme  $\mathcal{L}$  è un gruppo a sua volta:

- Esiste l'elemento identità in  $\mathcal{L}$ .
- Se  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$  allora  $\Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}$ .
- Esiste l'elemento reciproco:  $\forall \Lambda \in \mathcal{L}, \exists \Lambda^{-1} \in \mathcal{L}$  tale che  $\Lambda \Lambda^{-1} = I$ .

Si mostra l'ultima proprietà. L'esistenza dell'inversa è garantita dal gruppo  $Q(4, \mathbb{R})$ . Si mostra che l'inversa soddisfa la proprietà caratteristica  $\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$ . Infatti

$$(\Lambda^{-1})^\top \eta \Lambda^{-1} = (\Lambda^\top)^{-1} \eta \Lambda^{-1} = (\Lambda^\top)^{-1} \Lambda^\top \eta \Lambda \Lambda^{-1} = \eta$$

## Lezione 11

La trasformazione di Lorentz  $\Lambda^\mu{}_\nu$  vale per ogni campo vettoriale contro-variante  $V^\nu$ .  
Da

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma$$

ponendo  $\rho = \sigma = 0$  si ottiene

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 \\ 1 &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_0 - \Lambda^2{}_0 \Lambda^2{}_0 - \Lambda^3{}_0 \Lambda^3{}_0 \\ (\Lambda^0{}_0)^2 &= 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 \end{aligned}$$

Questo implica

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \vee \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

Tale elemento della matrice, descrive se il tempo nel riferimento di arrivo ha la stessa direzione o meno di quello di partenza.

Le matrici in  $\mathcal{L}$  sono divise in quattro spazi in base alle proprietà dell'elemento  $\Lambda^0{}_0$  e dal determinante di  $\Lambda$  stessa. Le proprietà ed il determinante sono:

- Trasformazioni ortocrone,  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$
- Trasformazioni anticrone,  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$
- Trasformazioni proprie,  $\det \Lambda = 1$
- Trasformazioni improprie,  $\det \Lambda = -1$

Da cui la divisione è

- Proprie ortocrone,  $\mathcal{L}_+^\uparrow$
- Proprie anticrone,  $\mathcal{L}_+^\downarrow$
- Improprie ortocrone,  $\mathcal{L}_-^\uparrow$
- Improprie anticrone,  $\mathcal{L}_-^\downarrow$

e dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$$

Inoltre,  $\mathcal{L}_+$  e  $\mathcal{L}^\uparrow$  sono sottogruppi di  $\mathcal{L}$ .

**Definizione.** Il gruppo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  è il gruppo di Lorentz speciale (o ristretto). Questo è il gruppo che si utilizza nella relatività speciale.

**Rotazioni spaziali.** Le rotazioni sono

$$(x^0)' = x^0, \quad (x^i)' = R^i_j x^j, \quad RR^\top = I, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

La matrice  $\Lambda$  fatta così è elemento di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Infatti soddisfa

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det \Lambda = \det R = 1$$

qualora  $R$  sia una rotazione propria, cioè senza riflessioni.

**Boost.** Un boost lungo  $\hat{x}$  è

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice soddisfa

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det \Lambda = 1$$

dunque  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ .

**Inversione temporale.** La trasformazione di un'inversione temporale è

$$t' = -t, \quad \vec{x}' = \vec{x}, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_t$$

Essa soddisfa

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det \Lambda = -1$$

dunque  $\Lambda \in \mathcal{L}_-^\downarrow$ . Questa è la trasformazione dell'inversione del tempo,  $T$ .

**Inversione spaziale.** La trasformazione di un'inversione spaziale è

$$t' = t, \quad \vec{x}' = -\vec{x}, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_s$$

Essa soddisfa

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det \Lambda = -1$$

dunque  $\Lambda \in \mathcal{L}_-^\uparrow$ . Questa è la trasformazione di parità,  $P$ .

**Riflessione spazio-temporale.** La trasformazione di una riflessione spazio-temporale è

$$t' = -t, \quad \vec{x}' = -\vec{x}, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_{st}$$

Essa soddisfa

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1, \quad \det \Lambda = 1$$

dunque  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\downarrow$ . Questa è la trasformazione  $PT$ .

Queste ultime tre trasformazioni sono operazioni discrete. Partendo dall'identità, non si può mai arrivare a tali trasformazioni tramite rotazioni o boost. Perché i sottoinsiemi di  $\mathcal{L}$  sono disgiunti.

Dunque, il gruppo di Lorentz si può scrivere anche come

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup I_t \mathcal{L}_+^\uparrow \cup I_s \mathcal{L}_+^\uparrow \cup I_{st} \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Per questo si studiano solamente le proprietà di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Una trasformazione in questo insieme ha bisogno di sei parametri: tre per le rotazioni (angoli di Eulero) e tre per i boost (componenti della velocità). Il gruppo di Lorentz (e la sua parte speciale) è uno spazio esadimensionale. Inoltre, il sottogruppo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  è connesso all'identità: ogni elemento di tale insieme si può ottenere tramite trasformazioni infinitesime a partire dall'identità, cioè esiste una funzione parametrizzata in  $t \in [0, 1]$  che mappa in modo continuo l'identità alla trasformazione scelta. Negli altri tre sottogruppi, questo non è possibile, perché, spostandosi poco alla volta dall'identità, non si può arrivare ad una trasformazione discreta.

**Boost in direzione generica.** Si consideri un riferimento solidale  $K$  ad una particella  $P$ . Si cerca una trasformazione che porta ad un riferimento  $K'$  in cui si descrive  $P$  con una velocità  $\vec{v}'$ . Questo sistema si muove di velocità  $\vec{v} = -\vec{v}'$  rispetto  $K$ . Lo spostamento infinitesimo in  $K$  è  $d\vec{x} = 0$ .

Punto primo. Dunque, dalla legge di trasformazione si ha

$$(dx^0)' = \Lambda^0{}_\nu dx^\nu = \Lambda^0{}_0 dx^0 + \Lambda^0{}_i dx^i \xrightarrow{0} \Lambda^0{}_0 dx^0$$

Mentre le componenti spaziali sono

$$(dx^i)' = \Lambda^i{}_\nu dx^\nu = \Lambda^i{}_0 dx^0$$

In  $K'$ , la velocità di  $P$  è

$$(v^i)' = d_{t'}(x^i)' \implies (dx^i)' = (v^i)' dt' = (v^i)' (dx^0)' = (v^i)' \Lambda^0{}_0 dx^0$$

Combinando le due si ha

$$\Lambda^i{}_0 = (v^i)' \Lambda^0{}_0$$

Punto secondo. Nella relazione trovata ad inizio lezione si ha

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = (\Lambda^0{}_0)^2 (1 - (v')^2)$$

dove  $v'$  è il modulo della velocità. Pertanto

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (v')^2}}$$



Nel caso di trasformazioni proprie ortocrone, si considera la soluzione con il segno positivo. Pertanto

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^i_0 = \gamma(v^i)'$$

ricordando sempre  $c = 1$ . Si ricorda che la velocità del riferimento di arrivo è  $\vec{v} = -\vec{v}'$ , dunque ci si aspetta che il secondo termine presenti un segno negativo.

Per ora si sono fissate le componenti della prima colonna. Le componenti restanti descrivono l'orientamento degli assi di un riferimento rispetto all'altro. Infatti, anche partendo da una matrice

$$\Lambda^\mu_\rho R^\rho_\nu$$

dove si ha anche una rotazione  $R$ , il risultato trovato non cambia perché  $dx^i = 0$  comunque. Si fissa la rotazione: si mantengono gli assi paralleli ed equiversi dei due riferimenti.

Un boost di Lorentz da  $K$  in  $K'$  in moto con velocità  $\vec{v}$  è

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma v^i$$

Punto primo. Si scompone il vettore  $\vec{x}$  in una componente parallela a  $\vec{v}$  ed una perpendicolare:

$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp$$

dove si ha

$$\vec{x}_\parallel = (\vec{x} \cdot \hat{u}_v) \hat{u}_v = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v} \frac{\vec{v}}{v}$$

Punto secondo. Dal boost monodimensionale, si ottiene

$$t' = \gamma(t - vx) \implies t' = \gamma(t - |\vec{v}| |\vec{x}_\parallel|) = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x})$$

così come

$$x' = \gamma(x - vt) \implies \vec{x}'_\parallel = \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{v}t)$$

ed similmente

$$y', z' = y, z \implies \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp$$

Punto terzo. Dunque

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x}'_\parallel + \vec{x}'_\perp = \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{v}t) + \vec{x}_\perp = (\gamma - 1)\vec{x}_\parallel - \gamma t\vec{v} + \vec{x} \\ &= \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} - \gamma t\vec{v} = \vec{x} + \left[ \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{x} \cdot \vec{v}) - \gamma t \right] \vec{v} \end{aligned}$$

ricordando  $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel$ .

Punto quarto. Si scrive la forma matriciale. Il tempo  $t$  influenza i termini primati secondo i coefficienti:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma v^i$$

La posizione  $\vec{x}$  influenza secondo i coefficienti:

$$\Lambda^0_i = -\gamma v^i, \quad \Lambda^i_j = \delta_{ij} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^i v^j$$

con abuso di notazione non si sottolinea la natura co(ntro)variante.

**Osservazione.** Si è detto che la posizione covariante è

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0 \quad -\vec{x})$$

Dunque, il prodotto scalare tra quadrivettori è

$$u \cdot v = u^\mu v_\mu = u_\mu v^\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = \eta^{\mu\nu} u_\mu v_\nu = u^0 v^0 - \vec{u} \cdot \vec{v}$$

ed è invariante:  $u' \cdot v' = u \cdot v$ .

## Lezione 12

**Trasformazione di Lorentz inversa.** Il tensore metrico inverso è  $\eta^{\mu\nu}$  e la sua forma matriciale è identica a  $\eta_{\mu\nu}$ , cioè  $\eta^{-1} = \eta$ . Inoltre vale

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$$

Data una trasformazione  $\Lambda^\mu{}_\nu$  di Lorentz, la sua trasformazione inversa è  $\Lambda_\mu{}^\nu$ . Infatti

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu (\eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\tau \eta^{\sigma\tau}) = \eta_{\nu\tau} \eta^{\sigma\tau} = \eta_{\nu\tau} \eta^{\tau\sigma} = \delta_\nu^\sigma$$

Cioè l'una è l'inversa dell'altra. Dunque, vale

$$x^\rho = \Lambda_\mu{}^\rho (x^\mu)'$$

La matrice della trasformazione inversa è

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta \implies \Lambda^\top \eta = \eta \Lambda^{-1} \implies \eta^{-1} \Lambda^\top \eta = \Lambda^{-1} \implies \eta \Lambda^\top \eta = \Lambda^{-1}$$

**Esempio.** Una rotazione di un angolo  $\theta$  attorno  $\hat{z}$  è

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio.** Un boost lungo  $\hat{x}$  è

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Osservazione.** (Non detta). Vale

$$(\Lambda^\top)^\sigma{}_\rho = \Lambda_\rho{}^\sigma = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\rho$$

Interpretando

$$\Lambda \leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu, \quad \Lambda^{-1} \leftrightarrow (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu, \quad \Lambda^\top \leftrightarrow (\Lambda^\top)_\mu{}^\nu$$

**Proprietà generali.** La derivata trasforma in modo covariante per trasformazioni lineari e metrica piana. Si studiano le derivate nello spazio di Minkowski. Dunque

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = (\partial_t \quad \partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z) = (\partial_t \quad \vec{\nabla})$$

Si introduce il concetto di derivata contro-variante:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Così si è definito il quadri-gradiente. Per un campo vettoriale  $V^\mu$  si nota che la quadri-divergenza

$$\partial_\mu V^\mu = \partial_t V^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

è invariante. Questa equazione ricorda l'equazione di continuità. Infatti, successivamente si combina la densità di carica con la densità di corrente in un unico quadri-vettore:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Inoltre, l'operatore di d'Alembert

$$\partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_t^2 - \nabla^2 = \square$$

è invariante (quando applicato ad un campo scalare). Per questo, il formalismo garantisce che l'equazione delle onde è invariante. Come il quadratello è invariante per trasformazioni di Lorentz, cioè per rotazioni iperboliche, così il laplaciano è invariante per rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Similmente per ogni altra quantità invariante sotto trasformazioni di Lorentz.

## 4.2 Quadri-velocità e quadri-accelerazione

In meccanica classica esistono i concetti di posizione  $\vec{x}$  e spostamento infinitesimo  $d\vec{x}$ . Si costruisce la velocità come variazione di posizione nel tempo:

$$\vec{v} = d_t \vec{x}$$

In quanto il tempo è considerato assoluto, la velocità trasforma allo stesso modo di  $d\vec{x}$ . Nella relatività speciale, si vuole trovare qualcosa con proprietà analoghe. Infatti

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \implies dx^\mu = (c dt, d\vec{x})$$

Si introduce una quadri-velocità in analogia con la meccanica classica: bisogna usare un concetto di tempo Lorentz invariante, cioè il tempo proprio  $\tau$ . Infatti, si usa l'invariante fondamentale

$$(ds)^2 = (c dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (c d\tau)^2$$

in quanto ci si pone in un riferimento in cui  $d\vec{x} = 0$ .

**Definizione.** Si definisce la quadri-velocità

$$u^\mu \equiv d_\tau x^\mu = (c d_\tau t, d_\tau x, d_\tau y, d_\tau z)$$

in quanto  $\tau$  è invariante, la quadri-velocità ha le stesse leggi di trasformazione di  $x^\mu$ . Tuttavia, scritta in questo modo, non si sa come è legata con la velocità ordinaria in quanto un vettore velocità in tre dimensioni ha derivata rispetto a  $t$  e non  $\tau$ . Si ricorda valere  $dt = \gamma d\tau$ , infatti

$$(c d\tau)^2 = (ds)^2 = (c dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (c dt)^2 \left[ 1 - \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2} \right] \implies d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

Pertanto

$$u^\mu = \gamma (c, d_t x, d_t y, d_t z) = \gamma (c, \vec{v}) = \gamma (1, \vec{v})$$

la velocità associata a  $\gamma$  è  $\vec{v}$  cioè la velocità dell'oggetto che si muove, non di un eventuale boost.

**Proposizione.** Si calcola la norma della velocità

$$\|u\|^2 = u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \|\vec{v}\|^2) = \gamma^2 c^2 \left[ 1 - \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2} \right] = c^2$$

In unità naturali si ha  $\|u\|^2 = 1$ . La scrittura della quadri-velocità implica che solamente tre componenti sono indipendenti.

La quadri-velocità trasforma come

$$(u^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$$

**Esercizio.** Verificare che, in un boost con velocità  $w$ , la legge di trasformazione precedente descrive la velocità trasformata  $v'$  tramite la legge di composizione delle velocità. Infatti, noto

$$t' = \gamma_w (t - wx), \quad x' = \gamma_w (x - wt)$$

si trova la matrice  $\Lambda$ . Pertanto

$$(u^0)' = \Lambda^0{}_\nu u^\nu, \quad (u^1)' = \Lambda^1{}_\nu u^\nu$$

dove si ha

$$u^\mu = \gamma_v (1, \vec{v}), \quad (u^\mu)' = \gamma_{v'} (1, \vec{v}')$$

**Definizione.** La quadri-accelerazione è

$$a^\mu = d_\tau u^\mu = d_\tau^2 x^\mu$$

**Proposizione.** Uno. Noto

$$\|u\|^2 = u_\mu u^\mu = 1$$

Derivando rispetto al tempo proprio si ha

$$d_\tau u_\mu u^\mu + u_\mu d_\tau u^\mu = 0 \iff 2u_\mu d_\tau u^\mu = 0 \iff a^\mu u_\mu = 0$$

cioè la quadri-accelerazione è perpendicolare alla quadri-velocità.

Due. Si trova l'espressione dell'accelerazione. Noto

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

si ha

$$a^\mu = d_\tau u^\mu = \gamma d_t [\gamma(1, \vec{v})] = (\gamma d_t \gamma, \gamma d_t \gamma \vec{v} + \gamma^2 \vec{a}) = (\gamma \dot{\gamma}, \gamma \dot{\gamma} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a})$$

In quanto  $\gamma$  è funzione di  $\vec{v}$ , cioè la velocità dell'oggetto, essa dipende dal tempo.

Tre. La norma dell'accelerazione è un invariante relativistico

$$\|a\|^2 = a^\mu a_\mu$$

Solamente tre componenti sono indipendenti: le componenti dell'accelerazione  $\vec{a}$ .

**Esempio.** Nel riferimento  $K$  del laboratorio, si descrive il moto di un punto  $P$ . Nel proprio riferimento  $K'$ , esso risente di un'accelerazione costante  $\vec{a}'$ .

Il riferimento  $K'$  non è un sistema di riferimento inerziale e si muove rispetto a  $K$  con una velocità variabile  $\vec{v}(t)$ . Si suppone che  $K'$  si muove lungo  $\hat{x}$  ed ha assi equiversi a quelli di  $K$ . Si studia come la situazione è descritta in  $K$ .

In  $K'$  la quadri-velocità e la quadri-accelerazione sono

$$(u^\mu)' = (1, 0, 0, 0), \quad (a^\mu)' = (0, \|\vec{a}'\|, 0, 0)$$

in quanto il punto  $P$  è a riposo nel proprio riferimento. Si trovano tali due grandezze in  $K$  tramite una trasformazione di Lorentz  $K' \rightarrow K$ : si noti che la velocità del boost è  $\vec{v}' = -\vec{v}$ . Sia  $a' \equiv \|\vec{a}'\|$ . Dunque

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui si ha

$$a^\mu = a' (v\gamma, \gamma, 0, 0)$$

Si confronta questo con l'espressione completa della quadri-accelerazione:

$$\dot{\gamma} = va', \quad \gamma d_t(v\gamma) = \gamma a'$$

Dalla seconda si ottiene

$$d(v\gamma) = a' dt \implies \int_0^v d(v\gamma) = \int_0^t a' dt \implies [v(t)\gamma(t)]_{t=0}^t = a't \implies \frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = a't$$

dove si ha la condizione al contorno  $v\gamma|_{t=0} = 0$ . La velocità diventa

$$v(t) = \frac{a't}{\sqrt{1+(a't)^2}}$$

A tempo infinito, la velocità tende a 1, cioè  $c$ . Si controlla se il limite classico risulta atteso. Si ha

$$v \ll 1 \implies v(t) \approx a't$$

cioè l'equazione di un moto uniformemente accelerato. Si trova l'accelerazione in  $K$

$$a(t) = d_t v = \frac{a'}{[(a't)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}}$$

per cui  $t \rightarrow \infty$  si ha  $a(t) \rightarrow 0$ , cioè la velocità cresce sempre meno perché si avvicina a  $c$ . Si osserva la legge oraria

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \frac{a't}{\sqrt{1 + (a't)^2}} dt = \frac{1}{a'} \left[ \sqrt{1 + (a't)^2} - 1 \right]$$

da cui per  $t \rightarrow \infty$  si ha  $x(t) \asymp t$ , cioè  $x(t) \asymp ct$ . In  $K$  si osserva la particella avvicinarsi a  $c$  in modo simile al moto rettilineo uniforme in accordo con  $a(t) \rightarrow 0$ . Utilizzando il limite classico  $v \approx a't$  si ottiene

$$x(t) \approx \frac{1}{2} a' t^2$$

Infine, si studia lo scorrere del tempo nei due riferimenti. Il tempo proprio è

$$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - v^2(t)} = \frac{dt}{\sqrt{1 + (a't)^2}}$$

Pertanto, integrando entrambi i lati si ha

$$\begin{aligned} \tau = t' &= \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + (a't)^2}} = \frac{1}{a'} \int_0^{a't} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{a'} \operatorname{arcsinh} x \Big|_0^{a't} \\ &= \frac{1}{a'} \left[ \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right]_{x=0}^{x=a't} = \frac{1}{a'} \ln \left( a't + \sqrt{1 + (a't)^2} \right) \end{aligned}$$

Per  $t \rightarrow \infty$  si ha

$$\tau = t' \approx \frac{1}{a'} \ln 2a't \approx \ln t$$

Dunque, il tempo in  $K'$  passa più lentamente di quello in  $K$ . Questo risulta utile nel paradosso dei gemelli: nell'intorno del cambio di rotta della navicella, il tempo passato sulla Terra è amplificato. Il tempo che passa sulla navicella è logicamente più lento di quello sulla Terra.

## Lezione 13

### 4.3 Quadri-vettore energia-impulso – quadri-impulso

**Definizione.** Il quadri-impulso è

$$p^\mu = m u^\mu$$

dove  $u^\mu$  è la quadri-velocità. Le componenti sono

$$p^0 = \gamma mc, \quad p^i = m u^i = \gamma m v^i$$

dove  $\gamma$  è associata a  $v$ .

**Osservazione.** La quantità  $p^0 c$  ha le dimensioni di un'energia. Nel limite classico si ha

$$p^0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + o(\beta^4) \right] \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Il primo addendo è l'energia a riposo. Il secondo addendo è l'energia cinetica classica. In meccanica classica, l'energia si scrive a meno di una costante. In relatività speciale, l'energia

ha il limite inferiore  $mc^2$ .  
Le componenti spaziali sono

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = mv^i \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + o(\beta^4)\right) = mv^i + o(v\beta^2)$$

Si ha la quantità di moto classica.

**Definizione.** L'energia relativistica è  $E = p^0 c = \gamma mc^2$ . L'energia a riposo è  $E_{\text{rest}} = mc^2$ .  
L'energia cinetica relativistica è  $K_{\text{rel}} = T_{\text{rel}} = p^0 c - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$ .

**Osservazione.**

- Il quadri-impulso

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p^i\right) = (E, \vec{p})$$

è un quadri-vettore. Esso trasforma in modo contro-variante. Per un boost lungo  $\hat{x}$  con velocità  $w$  si ha

$$E' = \gamma(E - wp_x), \quad p'_x = \gamma(p_x - wE), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z$$

- Il suo modulo è

$$\|p\|^2 = p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = (mc)^2$$

- Dato che

$$\|p\|^2 = m^2, \quad p^\mu = (E, \vec{p})$$

allora

$$m^2 = E^2 - \|\vec{p}\|^2 \implies E^2 = m^2 + \|\vec{p}\|^2 = (mc^2)^2 + (\|\vec{p}\|c)^2 \implies E = \sqrt{m^2 + \|\vec{p}\|^2}$$

Per ora, non si considera la radice negativa perché non ha ancora senso farlo. Nella teoria dei campi compare il concetto di anti-particella per cui si considera l'energia negativa.

- Si consideri

$$\frac{1}{E}\vec{p} = \frac{1}{\gamma m}\gamma m\vec{v} = \vec{v}$$

Se  $\|\vec{v}\| = 1$  allora

$$E = \|\vec{p}\| \implies m = 0$$

Particelle senza massa si muovono a velocità della luce (e viceversa, particelle che si muovono alla velocità della luce non hanno massa). In quanto non è possibile operare boost con  $v = 1$ , non si può passare ad un riferimento solidale con una particella senza massa.

- Una massa (come una quantità di moto) è misurabile in eV (e unità naturali). La massa di un elettrone è

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 511 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 511 \text{ MeV}$$

### 4.3.1 Leggi di conservazione

Il motivo per cui  $p^\mu$  è il quadri-vettore energia-momento è per la conservazione di tali due quantità (in meccanica classica). Tale quadri-vettore soddisfa delle leggi di conservazione. Queste sono alla base della cinematica relativistica per risolvere problemi di diffusione, scattering.

Si considerino  $N$  particelle di massa  $m_i$  con velocità  $\vec{v}_i$ . L'energia totale ed la quantità di moto risultante sono

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i, \quad \vec{p} = \sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i$$

Queste quantità si conservano (nel tempo, ad esempio prima e dopo un urto). Si consideri uno scattering: da  $r$  momenti iniziali  $p_i^\mu$  si passa ad  $s$  momenti finali  $p_j^\mu$ . I quadri-vettori

$$P_{\text{iniz}}^\mu = \sum_i p_i^\mu, \quad P_{\text{fin}}^\mu = \sum_j p_j^\mu$$

sono uguali  $P_{\text{iniz}}^\mu = P_{\text{fin}}^\mu$  perché conservati. L'uguaglianza vale componente per componente  $\mu = 0 - 3$ .

La conservazione della quantità di moto relativistica è una legge fisica espressa come uguaglianza tra due tensori. Dunque, questa legge è invariante in forma per trasformazione di Lorentz. Infatti, passando ad un riferimento  $K'$  si ha

$$\begin{aligned} (P_{\text{iniz}}^\mu)' &= \sum_i (p_i^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu \sum_i p_i^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu P_{\text{iniz}}^\nu \\ (P_{\text{fin}}^\mu)' &= \sum_j (p_j^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu \sum_j p_j^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu P_{\text{fin}}^\nu \end{aligned}$$

Per cui se  $P_{\text{iniz}}^\mu - P_{\text{fin}}^\mu = 0$  allora  $(P_{\text{iniz}}^\mu)' - (P_{\text{fin}}^\mu)' = 0$ . La forma funzionale della legge rimane invariata per trasformazione di Lorentz.

**Osservazione.** L'uguaglianza per la prima componente è

$$E_{\text{iniz}} = E_{\text{fin}} \implies E'_{\text{iniz}} = E'_{\text{fin}}$$

Tuttavia,  $E_{\text{iniz}} \neq E'_{\text{iniz}}$ .

**Osservazione.** Le quantità  $\vec{p}$  ed  $E$  sono le uniche funzioni di  $v$  la cui conservazione è Lorentz-invariante.

**Osservazione.** In generale si ha energie cinetiche  $K_{\text{iniz}} \neq K_{\text{fin}}$  e masse  $M_{\text{iniz}} \neq M_{\text{fin}}$  non conservate. Se  $p^0$  è conservato, allora

$$E_{\text{iniz}}^{\text{rel}} = E_{\text{fin}}^{\text{rel}} \iff K_{\text{iniz}} + M_{\text{iniz}} = K_{\text{fin}} + M_{\text{fin}}$$

L'energia a riposo può diventare energia cinetica e viceversa.

**Esempio.** Si vuole trovare la massa totale di un sistema costituito da due fotoni  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , in funzione dell'angolo  $\theta$  compreso tra di essi. La massa del sistema si ricava dalla norma della quantità di moto

$$\|p\|^2 = m^2$$

Pertanto, posto  $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$  si ha

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= p^\mu p_\mu = (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu = p_1^\mu (p_1)_\mu + p_2^\mu (p_2)_\mu + 2(p_1)^\mu (p_2)_\mu \\ &= 0 + 0 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Ricordando  $E^2 = \mathcal{M}^2 + \|\vec{p}\|^2$  per un fotone.

La massa invariante di un sistema di due fotoni è nulla solamente quando i due fotoni sono colineari,  $\theta = 0$ .

**Esempio.** Si vede la cinematica dell'effetto Compton. Si ha un urto elastico tra un fotone ed un elettrone stazionario. Si cerca l'energia  $E'_\gamma$  del fotone dopo l'urto in funzione dell'energia del fotone  $E_\gamma$  prima dell'urto e dell'angolo di diffusione, scattering  $\theta$ . [immagine]  
Sia  $k$  la quantità di moto del fotone e  $p$  la quantità di moto dell'elettrone. Sia  $m$  la massa dell'elettrone. Nel riferimento stazionario, prima dell'urto si ha

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad k^\mu = (E, 0, 0, k_z) = (E, 0, 0, E)$$

in quanto deve valere  $\|k\|^2 = 0$ . Nel riferimento dopo l'urto si ha

$$(p^\mu)' = (E'_p, 0, -\|\vec{p}'\| \sin \varphi, \|\vec{p}'\| \cos \varphi), \quad (k^\mu)' = (E', 0, E' \sin \theta, E' \cos \theta)$$

Si sfrutta la conservazione del quadri-impulso

$$p^\mu + k^\mu = (p^\mu)' + (k^\mu)' \implies (p^\mu)' = p^\mu + k^\mu - (k^\mu)'$$

Per cui

$$\begin{aligned} \|p'\|^2 &= (p + k - k')^\mu (p + k - k')_\mu = p^\mu p_\mu + 2p^\mu k_\mu - 2k^\mu (k')_\mu - 2p^\mu (k')_\mu \\ m^2 &= m^2 + 2mE - 2EE'(1 - \cos \theta) - 2mE' \end{aligned}$$

Pertanto

$$2m(E - E') = 2EE'(1 - \cos \theta) \implies E' = \frac{mE}{m + E(1 - \cos \theta)}$$

**Esercizio.** Si consideri un decadimento

$$A \rightarrow B + C$$

con masse  $M \rightarrow m_1 + m_2$ . Trovare le energie  $E_B$  e  $E_C$  nel riferimento del centro di massa.

## Lezione 14

Si risolve l'esercizio. Prima del decadimento, il centro di massa coincide con la particella  $A$ . Nel riferimento del centro di massa, la quantità di moto di  $A$  è

$$p^\mu = (M, 0, 0, 0)$$

Per le altre due particelle si ha

$$p_1^\mu = (E_1, 0, \|\vec{p}_1\| \sin \theta, \|\vec{p}_1\| \cos \theta), \quad p_2^\mu = (E_2, 0, \|\vec{p}_2\| \sin \varphi, \|\vec{p}_2\| \cos \varphi)$$

Inoltre si ha il vincolo

$$E_i^2 - \|\vec{p}_i\|^2 = m_i^2, \quad i = 1, 2$$

Per conservazione della quantità di moto si ha

$$p_{1y} + p_{2y} = 0, \quad p_{1z} + p_{2z} = 0 \implies |p_{1y}| = |p_{2y}|, \quad |p_{1z}| = |p_{2z}|$$

cioè

$$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\|$$

Le componenti spaziali delle particelle prodotte sono uguali e contrarie. Dunque

$$p_2^\mu = (E_2, 0, -\|\vec{p}_1\| \sin \theta, -\|\vec{p}_1\| \cos \theta)$$

Per conservazione dell'energia e dall'uguaglianza della quantità di moto delle particelle prodotte si ha

$$M = E_1 + E_2, \quad E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2$$

Con queste due equazioni si possono ricavare le energie:

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}, \quad E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$



### 4.3.2 Effetto Doppler relativistico longitudinale

Nel riferimento  $K$  si emette un fotone dall'origine lungo l'asse  $\hat{z}$ . Si studia la frequenza del fotone misurata nel riferimento  $K'$  in moto con velocità  $\vec{v}$ . [immagine]

La quantità di moto in  $K$  è

$$p^\mu = (E, 0, 0, E)$$

Mentre nel riferimento  $K'$  è

$$(p^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

La sua componente temporale è

$$E' = \gamma(E - vp_z) = \gamma E(1 - v) = \frac{1 - v}{\sqrt{1 - v}\sqrt{1 + v}} E = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} E$$

Ricordando la relazione di Einstein per i fotoni  $E = h\nu$ , si ha

$$\nu' = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \nu$$

### 4.3.3 Esempi

**Esempio.** Nel riferimento  $K$  si consideri una particella con quantità di moto

$$p^\mu = \mathcal{E}(2, 0, 1, 1)$$

Si trova la massa invariante della particella e si cerca una trasformazione di Lorentz che porta ad un riferimento  $K'$  solidale con tale particella.

La massa invariante di tale particella è

$$\|p\|^2 = p_\mu p^\mu = \mathcal{E}^2(4 - 0 - 1 - 1) = 2\mathcal{E}^2 \implies \|p\| \equiv m = \sqrt{2}\mathcal{E}$$

Nel riferimento solidale, la quantità di moto è

$$(p^\mu)' = (\sqrt{2}\mathcal{E}, 0, 0, 0)$$

In quanto  $p^\mu$  è spazialmente orientato verso  $y$  e  $z$ , si fa prima una rotazione nel piano  $yz$  per allineare un asse e poi si opera un boost. La rotazione è

$$R^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

L'angolo è

$$\theta = \arctan \frac{p_y}{p_z} = \frac{\pi}{4}$$

Dunque, nel riferimento ruotato  $\tilde{K}$  si ha

$$\tilde{p}^\mu = R^\mu{}_\nu p^\nu = \mathcal{E}(2, 0, 0, \sqrt{2})$$

Facendo un boost  $B^\mu{}_\nu$  lungo il nuovo asse  $\tilde{z}$  si ha

$$E' = \gamma(\tilde{E} - v\tilde{p}_z), \quad p'_z = \gamma(\tilde{p}_z - v\tilde{E}) \equiv 0$$

Da ciò la velocità del boost è

$$v = \frac{\tilde{p}_z}{\tilde{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

cioè la velocità della particella. La trasformazione completa è

$$(p^\mu)' = B^\mu{}_\rho R^\rho{}_\nu p^\nu$$

**Esempio.** Si vede la trasformazione di Lorentz per un boost in direzione arbitraria. Questa cosa è utile per la precessione di Thomas: l'ordine delle trasformazioni di Lorentz è importante, esse non commutano (perché sono matrici?).

Si consideri la quantità di moto della particella dell'esempio precedente

$$p^\mu = \mathcal{E}(2, 0, 1, 1)$$

Un boost generico è

$$t' = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x}), \quad \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \gamma \vec{v} t$$

La velocità della particella è

$$\vec{v} = \frac{1}{E} \vec{p} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{2}$$

Posto

$$A \equiv \frac{\gamma - 1}{v^2} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

la matrice di boost lungo  $\vec{v}$  è

$$B^\mu{}_\nu(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & -\gamma v_z \\ -\gamma v_x & 1 + A v_x v_x & A v_x v_y & A v_x v_z \\ -\gamma v_y & A v_y v_x & 1 + A v_y v_y & A v_y v_z \\ -\gamma v_z & A v_z v_x & A v_z v_y & 1 + A v_z v_z \end{pmatrix}$$

Nel caso dell'esempio si ha

$$B^\mu{}_\nu(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}$$

Per cui

$$(p^\mu)' = B^\mu{}_\nu(\vec{v}) p^\nu = (\sqrt{2}\mathcal{E}, 0, 0, 0)$$

Si nota che la matrice qui sopra  $B^\mu{}_\nu(\vec{v})$  è diversa dal prodotto  $B^\mu{}_\rho R^\rho{}_\nu$  dell'esempio precedente, sebbene si arrivi allo stesso risultato.

## 5 Equazioni di Maxwell in forma tensoriale

Si studia come si combinano le densità di carica e le densità di corrente per formare la tetra-corrente  $J^\mu$ .

Si consideri il riferimento  $K$ . Della carica si muove con velocità  $\vec{v}(t, \vec{x})$ . La densità di corrente, la densità di carica e la velocità sono legate da

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

La carica elementare è

$$dq = \rho dV$$

Essa è la stessa in ogni riferimento. Nel riferimento  $K'$  solidale alla carica si ha

$$dq = \rho_0 dV_0$$

Pertanto

$$\rho dV = \rho_0 dV_0 \iff \rho \frac{dV_0}{\gamma} = \rho_0 dV_0 \implies \rho = \gamma \rho_0$$

La densità di corrente è

$$\vec{J} = \gamma \rho_0 \vec{v}$$

Dato che la quadri-velocità associata a  $v$  è  $u^\mu = (\gamma, \gamma \vec{v})$ , le equazioni per  $\rho$  e  $\vec{J}$  implicano

$$\rho = \rho_0 u^0, \quad J^i = \rho_0 u^i$$

**Definizione.** La tetra-corrente è

$$J^\mu = (\rho, J^i) = \rho_0(u^0, u^i)$$

**Osservazione.** Si nota

- La tetra-corrente trasforma in modo contro-variante.
- La derivazione fatta che porta alla definizione è alquanto fisica. Ne esiste una più matematica. Si considerino  $N$  cariche puntiformi  $e_n$  in posizione  $\vec{x}_n(t)$ . La densità di carica è

$$\rho(t, \vec{x}) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

mentre la densità di corrente è

$$J(t, \vec{x}) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) d_t \vec{x}_n(t)$$

dove  $\delta^3(x)$  è la funzione delta di Dirac in tre dimensioni. Si definisce la tetra-corrente come

$$J^\mu(t, \vec{x}) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) d_t (x_n)^\mu$$

Non è evidente che questo trasformi in modo contro-variante. Esso si può riscrivere come

$$J^\mu(x) = \int \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{d(x_n)^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau$$

da cui si nota per  $(x_n)^\mu$  che  $J^\mu$  sia un vettore e non un covettore. Da ciò si possono ricavare le equazioni di Maxwell.

## Lezione 15

La corrente e la carica sono legate dall'equazione di continuità

$$\partial_t \rho(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Questa relazione si può scrivere nel formalismo sviluppato come

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Essa è invariante in forma.

**Proposizione.** In generale, ad una quadri-divergenza nulla è associata una legge di conservazione:

$$Q \equiv \int J^0(t, \vec{x}) d^3x \rightsquigarrow d_t Q = 0$$

Infatti

$$d_t \int J^0(t, \vec{x}) d^3x = \int \partial_t J^0 d^3x = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3x = - \int \vec{J} \cdot \hat{n} d^2x = 0$$

Si integra su tutto lo spazio e su tutta la sua superficie estrema dove la corrente è nulla. Nel caso dell'elettromagnetismo, la carica è conservata. Un'equazione come quella di continuità è conseguenza di una simmetria dell'universo (teorema di Noether).

Introducendo i potenziali elettromagnetici si possono definire i campi come

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Nel gauge di Lorentz, cioè

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \varphi = 0$$

le equazioni di Maxwell diventano

$$\square \vec{A} = 4\pi \vec{J}, \quad \square \varphi = 4\pi \rho$$

Combinando  $\rho$  e  $\vec{J}$  si ottiene un quadri-vettore nel senso della relatività ristretta. Questo suggerisce di combinare anche i potenziali.

**Definizione.** Si definisce il quadri-potenziale

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

Le equazioni di Maxwell per i potenziali diventano

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu \iff \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 4\pi J^\mu$$

**Osservazione.** Si osserva

- L'equazione precedente è un'identità tensoriale e il d'Alembertiano è un invariante di Lorentz. Questo implica che  $A^\mu$  è un quadri-vettore contro-variante.
- L'equazione per il gauge di Lorentz si scrive come

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Essa è un'equazione di continuità.

- Una trasformazione di gauge

$$\varphi' = \varphi - \partial_t \psi(\vec{x}, t), \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)$$

non cambia le equazioni di Maxwell. In forma tensoriale, tale trasformazione è

$$(A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu \psi$$

**Tensore elettromagnetico.** Per studiare le equazioni di Maxwell per i campi, bisogna introdurre il tensore elettromagnetico. Si legano i campi ai potenziali e poi si scrivono le equazioni di Maxwell per i campi. Il tensore elettromagnetico (tensore di Faraday) è un tensore di rango (2,0)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

**Osservazione.** Si osserva

- Esso ha sedici componenti ed è completamente anti-simmetrico:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Esso ha solamente sei componenti indipendenti (cioè i campi). In forma matriciale esso è

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ -F^{01} & 0 & F^{12} & F^{13} \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & F^{23} \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si calcolano le componenti

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \partial_t A_x + \partial_x \varphi = -E_x$$

così le altre

$$F^{0i} = -E^i$$

Inoltre

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_z = -B_z$$

similmente

$$F^{13} = B_y, \quad F^{23} = -B_x, \quad F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$$

Dunque, il tensore elettromagnetico è

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Il tensore covariante (0,2) è

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{0i} = -F^{0i}, \quad F_{jk} = F^{jk}$$

Pertanto

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Si contrae un indice

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - 0 = 4\pi J^\nu$$

Il secondo termine è nullo grazie al gauge di Lorentz. Così si sono legati i campi alle sorgenti tramite quattro equazioni (legge di Gauss e legge di Ampère). Nelle unità del sistema internazionale, l'equazione è

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

Oppure, nelle unità di Lorentz-Heaviside, si ha

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

- Si ricavano alcune delle equazioni di Maxwell. La legge di Gauss è

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi J^0 \iff \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 4\pi \rho \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

La componente  $x$  della legge di Ampère è

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = 4\pi J^1 \iff -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = 4\pi J_x \iff (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_x - \partial_t E_x = 4\pi J_x$$

Aggiungendo anche le altre due componenti si ottiene

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 4\pi \vec{J}$$

- La legge di Gauss per il magnetismo e l'equazione di Faraday si trovano da

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu} = 0$$

dove  $\varepsilon$  è il simbolo di Levi-Civita. In relatività speciale vale

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

si alza un indice spaziale (che mantiene il segno) e tre indici spaziali (che cambiano segno). L'equazione precedente racchiude quattro equazioni in quanto  $\alpha$  è libero. Talvolta essa è scritta come l'identità di Bianchi

$$\partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0 \iff \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

Le parentesi quadre indicano la parte di un tensore resa anti-simmetrica<sup>2</sup>. Gli indici sono tre ed ogni indice assume quattro valori. La quantità di modi con cui si possono prendere i 4 valori di 3 indici senza considerarne l'ordine (in quanto nell'equazione sopra le permutazioni degli indici sono sommate insieme) è

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!} = 4$$

che indica il numero di equazioni indipendenti.

Si dimostra la validità dell'identità di Bianchi:

$$\partial_\rho(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) = 0$$

I termini si semplificano a due a due.

- Quest'equazione è un vincolo che lega i potenziali: la legge di Gauss per il magnetismo e la legge di Faraday sono già soddisfatte una volta scelti i potenziali. Si verifica l'equazione per  $\rho, \mu, \nu = 1, 2, 3$ . Si ha la legge di Gauss per il magnetismo

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \iff \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Dalle altre tre combinazioni di indici si ha la legge di Faraday:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

Pertanto, le leggi di Maxwell in forma tensoriale si esprimono come

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad \partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0$$

dove si ha  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  con gauge di Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

## 6 Leggi di trasformazione del campo elettromagnetico

Il tensore elettromagnetico trasforma come

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Da ciò si ricavano le trasformazioni dei campi. Si consideri un boost lungo  $\hat{x}$ :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La componente  $E_x$ , cioè la componente parallela alla velocità, trasforma come:

$$\begin{aligned} (F^{01})' &= \Lambda^0{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0{}_0 (\Lambda^1{}_\sigma F^{0\sigma}) + \Lambda^0{}_1 (\Lambda^1{}_\sigma F^{1\sigma}) = \gamma(\Lambda^1{}_0 F^{01}) - \beta\gamma(\Lambda^1{}_0 F^{10}) \\ &= \gamma^2 F^{01} + (\beta\gamma)^2 F^{10} = \gamma^2(1 - \beta^2) F^{01} = F^{01} \implies E'_\parallel = E_\parallel \end{aligned}$$

Per la componente  $E_y$ , cioè quella perpendicolare alla velocità, si ha

$$\begin{aligned} (F^{02})' &= \Lambda^0{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0{}_0 (\Lambda^2{}_\sigma F^{0\sigma}) + \Lambda^0{}_1 (\Lambda^2{}_\sigma F^{1\sigma}) = \gamma(\Lambda^2{}_2 F^{02}) - \beta\gamma(\Lambda^2{}_2 F^{12}) \\ &= \gamma F^{02} - \beta\gamma F^{12} \implies E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \end{aligned}$$

I campi elettrico e magnetico trasversali si mischiano.

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ricci\\_calculus#Symmetric\\_and\\_antisymmetric\\_parts](https://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_calculus#Symmetric_and_antisymmetric_parts)

**Caso generale.** Posto  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  si ha

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})_2 \\ E'_3 = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})_3 \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E})_2 \\ B'_3 = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E})_3 \end{cases}$$

Per una velocità  $\vec{v}$  si ha

$$\begin{cases} E'_\parallel = E_\parallel \\ B'_\parallel = B_\parallel \end{cases} \quad \begin{cases} E'_\perp = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})_\perp = \gamma(E_\perp + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ B'_\perp = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E})_\perp = \gamma(B_\perp - \vec{v} \wedge \vec{E}) \end{cases}$$

Si noti che se la particella viaggia lungo  $\hat{x}$  allora  $\vec{E}_\perp = \vec{E}_y + \vec{E}_z$ .

Per una velocità generica si ha

$$\begin{cases} \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\vec{v} \cdot \vec{E})\vec{v} \\ \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\vec{v} \cdot \vec{B})\vec{v} \end{cases}, \quad \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \equiv \frac{\gamma-1}{v^2}$$

## Lezione 16

Le equazioni di Maxwell per i potenziali, nel gauge di Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , sono

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu$$

Si nota che l'identità di Bianchi è automaticamente soddisfatta scegliendo  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ .

**Osservazione.** Il tensore elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$  è invariante per trasformazione di gauge

$$(A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu \psi$$

Questo perché il contenuto del tensore sono i campi, cioè le quantità fisiche, che sono invarianti per trasformazione di gauge che ridefinisce i potenziali.

**Definizione.** Il duale (di Hodge) del tensore elettromagnetico è

$$G^{\mu\nu} = (F^{\mu\nu})^* \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

In componenti

$$(F^{\mu\nu})^* = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & E^z & -E^y \\ B^y & -E^z & 0 & E^x \\ B^z & E^y & -E^x & 0 \end{pmatrix}$$

Esso corrisponde alla trasformazione di dualità

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$$

in  $F^{\mu\nu}$ .

**Proposizione.** L'identità di Bianchi assume la forma

$$\partial_\mu (F^{\mu\nu})^* = 0$$

Essa assomiglia alla prima equazione di Maxwell tensoriale, ma senza sorgenti. I due campi si possono scambiare in assenza di sorgenti (perché non esistono monopoli magnetici).

Nel vuoto, le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazione di dualità.

**Invarianti scalari.** In una teoria fisica, si vogliono trovare degli invarianti tramite cui si possono semplificare i problemi. Si cercano degli scalari:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} = \\ &= -E^i E^i + E^i (-E^i) - (\varepsilon^{ijk} B^k)(-\varepsilon^{ijm} B^m) \\ &= -|\vec{E}|^2 - |\vec{E}|^2 + (\delta^{jj} \delta^{km} - \delta^{jm} \delta^{kj}) B^k B^m \\ &= -2|\vec{E}|^2 + (3\delta^{km} - \delta^{km}) B^k B^m = 2(|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2) \end{aligned}$$

Si fa lo stesso con il duale, ottenendo uno pseudo-scalare

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})^* F_{\mu\nu} &= (F^{0i})^* F_{0i} + (F^{i0})^* F_{i0} + (F^{ij})^* F_{ij} \\ &= -B^i E^i + B^i (-E^i) + (\varepsilon^{ijk} E^k)(-\varepsilon^{ijm} B^m) \\ &= -4\vec{E} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Esso è ancora un invariante.

**Proposizione.** Segue

- Se esiste un riferimento in cui i campi sono ortogonali,  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , allora sono ortogonali in ogni riferimento.
- Se esiste un riferimento in cui  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$  (ricordando le unità naturali), allora l'intensità dei campi sono uguali in ogni riferimento.
- Se i campi sono ortogonali,  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , in un riferimento, allora esiste almeno un riferimento (eventualmente lo stesso) in cui  $\vec{E} = 0$  se  $|\vec{E}| < |\vec{B}|$ ; oppure  $\vec{B} = 0$  se  $|\vec{B}| < |\vec{E}|$ .
- Se esiste un riferimento in cui  $\vec{E} = 0$  (oppure  $\vec{B} = 0$ ) allora  $\vec{E} \perp \vec{B}$  in ogni riferimento.

## 7 Dinamica relativistica

Si consideri un punto materiale  $P$  ed il riferimento  $K$  inerziale ad esso solidale (istantaneamente) al tempo  $t_0$ . Si supponga che sul punto agisca una forza  $\vec{F}$  (propria). Si ha

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt$$

Al tempo  $t_0 + dt$  ci si pone nel riferimento solidale istantaneamente con  $P$  (si specifica istantaneamente perché  $P$  accelera, dunque questo nuovo riferimento è diverso da  $K$ ). Si procede così per ogni tempo successivo: si opera una infinità di trasformazioni di Lorentz in modo da essere sempre solidale istantaneamente con il punto. Si formalizza questo concetto.

**Definizione.** La funzione di forza relativistica è

$$f^\mu = m a^\mu$$

Si cerca una relazione tra  $f^\mu$  e la forza "newtoniana"  $\vec{F}$ . Si studia l'equazione precedente nel riferimento  $K'$  solidale istantaneamente al punto  $P$ . Vale  $d\tau = dt'$ . Dunque, le componenti di  $(f^\mu)'$  sono

$$m a^0 = m d_\tau^2 t' = 0, \quad m a^i = m d_\tau^2 (x^i)' = m d_{t'}^2 (x^i)'$$

pertanto

$$(f^\mu)' = (0, \vec{F}')$$

dove  $\vec{F}'$  è la forza newtoniana classica nel riferimento  $K'$  solidale a  $P$ . Si trova la forza relativistica in un altro riferimento  $K$  (come quello del laboratorio) tramite Lorentz. Il riferimento  $K'$  si muove con velocità  $\vec{v}(t)$  cioè la velocità della particella nel riferimento  $K$ . Pertanto

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{v}) x^\nu \implies (f^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu f^\nu \implies f^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu (f^\nu)'$$



Si ricorda

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu = \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta$$

Si calcola la componente temporale

$$f^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu (f^\nu)' = \eta_{\nu\alpha} \eta^{0\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta (f^\nu)' = \eta_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_0 (f^\nu)' = \eta_{\nu i} \Lambda^i{}_0 (f^i)'$$

in quanto  $(f^0)' = 0$ . Ricordando l'espressione esplicita della trasformazione di Lorentz per un boost in direzione generica, si ottiene

$$f^0 = \gamma \vec{F}' \cdot \vec{v}(t), \quad \text{con } \gamma(v(t))$$

Si calcolano le componenti spaziali

$$\begin{aligned} f^i &= (\Lambda^{-1})^i{}_\nu (f^\nu)' = \eta_{\nu\alpha} \eta^{i\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta (f^\nu)' = \eta_{k\alpha} \eta^{i\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta (F^k)' = \eta_{kl} \eta^{i\beta} \Lambda^\beta{}_l (F^k)' \\ &= \eta_{kl} \eta^{ij} \Lambda^l{}_j (F^k)' = (-\delta_{kl})(-\delta^{ij}) \Lambda^l{}_j (F^k)' = \Lambda^i{}_k (F^k)' = \left( \delta^i_k + \frac{\gamma-1}{v^2} v^i v_k \right) (F^k)' \end{aligned}$$

(si noti che l'oggetto identificato dalle componenti  $\delta^{ij}$  non è un tensore perché dipende dalla base, non è il delta di Kronecker  $\delta_h^k$ ; si utilizza un abuso di notazione in quanto la metrica in  $\mathbb{R}^3$  è l'identità  $\delta_{ij} = g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$  che non è  $\delta_h^k$ ). Nella terza uguaglianza vale  $(f^0)' = 0$ , mentre nella quarta,  $\alpha$  diventa  $l$  (una lettera latina) perché  $\eta$  è non nullo solo quando  $\alpha$  è spaziale, in particolare quando  $\alpha = k$ . In relazione vettoriale si ha

$$f^0 = \gamma(\vec{F}' \cdot \vec{v}), \quad \vec{f} = \vec{F}' + \frac{\gamma-1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{F}') \vec{v}$$

Dunque

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{F}' \cdot \vec{v} + \frac{\gamma-1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{F}') v^2 = \gamma(\vec{F}' \cdot \vec{v}) = f^0$$

da cui

$$f^\mu = (\vec{f} \cdot \vec{v}, \vec{f})$$

La velocità  $\vec{v}$  è la velocità misurata nel riferimento  $K$ .

**Proposizione.** Vale

$$f^\mu u_\mu = f^0 u^0 - f^i u^i = f^0_{\text{rest}} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

nella seconda uguaglianza, nel riferimento a riposo si ha  $u^\mu = (1, \vec{0})$ . Si ottiene zero perché la velocità  $\vec{v}$  della particella nel riferimento solidale è nulla.

Pertanto,  $f^\mu$  e  $u^\mu$  sono perpendicolari tra loro rispetto la metrica di Minkowski. Questo è atteso perché pure  $a^\mu$  e  $u^\mu$  sono tra loro perpendicolari (ricordando  $f^\mu = m a^\mu$ ).

## Lezione 17

**Proposizione.** Si studia il contenuto fisico di queste equazioni. Vale

$$f^i = m a^i = m d_\tau u^i = \gamma m d_t u^i = \gamma m d_t (\gamma d_t x^i) = \gamma d_t (\gamma m v^i)$$

Per la componente temporale si ha

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = f^0 = m a^0 = \gamma d_t (\gamma m d_t x^0) = \gamma d_t (\gamma m)$$

Si hanno delle equazioni differenziali che legano  $v(t)$  con  $f^\mu$ .

Il termine nella derivata sono le componenti del quadri-impulso: la quantità di moto e l'energia relativistiche. La prima relazione è la generalizzazione della seconda legge di Newton

$$\vec{F} = d_t \vec{p}$$

Mentre la seconda relazione si studia successivamente.

**Definizione.** Sia

$$\vec{F} = \frac{1}{\gamma} \vec{f}$$

la “forza di Newton” relativistica. Le due equazioni precedenti si scrivono come

$$\vec{F} = d_t \vec{p}, \quad \vec{F} \cdot \vec{v} = d_t p^0$$

Esse assomigliano alla controparte classica. La prima è la generalizzazione della seconda legge di Newton. La seconda è la generalizzazione del teorema lavoro-energia.

**Osservazione.** La forza newtoniana relativistica si riduce alla forza classica per  $v \ll 1$ .

**Osservazione.** Si consideri la seconda equazione

$$d_t(\gamma m) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Il lavoro infinitesimo è

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt = dp^0$$

In meccanica classica, il teorema lavoro-energia è

$$\int_{\Gamma} dW = \Delta K$$

In relatività speciale si ha

$$\int_{\Gamma} dW = \Delta p^0$$

**Osservazione.** Non si può portare una particella massiva alla velocità della luce. Ciò si vede anche dall'uguaglianza precedente. Si consideri una particella con velocità iniziale nulla. Si calcola il lavoro per dare una velocità  $\vec{v}$  alla particella:

$$W = \int_0^{\vec{v}} dW = \Delta p^0 = \gamma mc^2 - mc^2 \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow c$$

## 7.1 Interazione elettromagnetica

La forza esercitata su di una particella dal campo elettromagnetico è la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Si costruisce una struttura simile per  $f^\mu$ :

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

**Riferimento solidale alla carica.** Nel riferimento  $K'$  solidale alla carica si ha

$$(u^\nu)' = (1, \vec{0})$$

Si supponga che in  $K'$  sia presente un campo elettromagnetico  $E'$ ,  $B'$ . La forza esercitata sulla particella è

$$\vec{F}' = q\vec{E}' \implies (f^\mu)' = (0, q\vec{E}')$$

Si verifica tale risultato tramite il tensore elettromagnetico

$$(f^\mu)' = q(F^{\mu\nu})'u'_\nu$$

La componente temporale è

$$(f^0)' = q(F^{0\nu})'u'_\nu = 0$$

Le componenti spaziali sono

$$(f^i)' = q(F^{i\nu})'u'_\nu = q(F^{i0})' = q(E^i)'$$

cioè quanto ci si aspetta quando si è solidali con la carica.

**Riferimento generico.** Si studia la forza per un altro riferimento. La quadri-velocità della carica è

$$u^\nu = (\gamma, \gamma \vec{v}) \implies u_\nu = (\gamma, -\gamma \vec{v})$$

Dunque, la componente temporale è

$$f^0 = qF^{0\nu}u_\nu = qF^{0i}u_i = q(-E^i)(-\gamma v^i) = q\gamma E^i v^i = q\gamma \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Le componenti spaziali sono

$$f^i = qF^{i\nu}u_\nu = q(F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j) = q\gamma E^i + q(-\varepsilon^{ijk}B^k)(-\gamma v^j) = q\gamma(\vec{v}) \left[ E^i + (\vec{v} \wedge \vec{B})^i \right]$$

Dunque, si ha la quadri-forza di Lorentz. Ricordando  $f^\mu = ma^\mu = m d_\tau^2 x^\mu$ , si ha

$$d_\tau(\gamma m) = f^0 = q\gamma \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad d_\tau(\gamma m \vec{v}) = \vec{f} = q\gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

cioè

$$\boxed{d_t(\gamma m) = q\vec{E} \cdot \vec{v}, \quad d_t(\gamma m \vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

Si ha la conservazione di energia e la seconda equazione di Newton relativistica. Queste due equazioni differenziali descrivono la dinamica di un punto materiale in un campo elettromagnetico.

## 7.2 Casi notevoli

**Primo caso.** Si consideri  $\vec{E} = 0$  e  $\vec{B} = \text{cost.}$  Dalla prima equazione,  $\gamma = \text{cost}$  cioè  $|\vec{v}| = \text{cost.}$  Dalla seconda equazione si ha

$$d_t(m\vec{v}) = \frac{q}{\gamma} \vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{v} \wedge \vec{\omega}_B$$

questa è la stessa forma di un moto di precessione, con

$$\vec{\omega}_B \equiv \frac{q}{\gamma m} \vec{B} = \frac{q}{\mathcal{E}} \vec{B}$$

dove  $\mathcal{E}$  è l'energia relativistica (successivamente si usa  $\omega = \omega_B$ ). Dunque

$$d_t \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{\omega}$$

Si sceglie un sistema di riferimento per cui  $\vec{B}$  è parallelo a  $z$ . Pertanto si può scomporre  $\vec{v}$  rispetto l'asse  $z$ :

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + v_\parallel \hat{u}_z$$

Si suppone che

$$\vec{v}(t=0) = v_{0x} \hat{u}_x + v_{0z} \hat{u}_z$$

Il bivettore  $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$  è perpendicolare a  $\vec{v}$  e quindi non ha componenti lungo  $z$ . Pertanto

$$(d_t \vec{v})_z = (\vec{v} \wedge \vec{\omega})_z \iff d_t v_\parallel = 0 \implies v_\parallel(t) = \text{cost} = v_{0z}$$

Le componenti trasverse sono

$$d_t \vec{v}_\perp = \vec{v} \wedge \vec{\omega} \implies d_t v_i = \varepsilon_{ijk} v_j \omega_k$$

In quanto solo  $\omega_3 \neq 0$  segue

$$d_t v_1 = v_2 \omega, \quad d_t v_2 = -v_1 \omega$$

con  $\omega = \omega_3$ . Derivando un'altra volta si ha

$$\ddot{v}_1 = -\omega^2 v_1, \quad \ddot{v}_2 = -\omega^2 v_2$$

le cui soluzioni sono

$$v_i(t) = c_i \sin(\omega t) + d_i \cos(\omega t), \quad i = 1, 2$$

Utilizzando le condizioni iniziali

$$v_1(0) = v_{0x}, \quad v_2(0) = 0$$

si ha

$$v_1 = c_1 \sin(\omega t) + v_{0x} \cos(\omega t), \quad v_2 = c_2 \sin(\omega t)$$

Si usano le condizioni sulle derivate

$$\dot{v}_1 = v_2 \omega \implies c_1 = 0, \quad c_2 = -v_{0x}$$

Pertanto

$$v_1(t) = v_{0x} \cos(\omega t), \quad v_2(t) = -v_{0x} \sin(\omega t), \quad v_3(t) = v_{0z}$$

La velocità è

$$\vec{v}(t) = v_1 \hat{u}_x + v_2 \hat{u}_y + v_3 \hat{u}_z$$

Posto  $v_{0x} = a\omega_B$ , dove  $a$  è il raggio di rotazione (radius of gyration?), si ha

$$\vec{x}(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t) \hat{u}_x + \frac{v_{0x}}{\omega} \cos(\omega t) \hat{u}_y + v_{0z} t \hat{u}_z$$

Si ha un moto elicoidale. Si noti che le costanti di integrazioni sono state scelte nulle, però si dovrebbero fissare tramite la posizione iniziale.

La componente trasversa della quantità di moto relativistica è

$$|\vec{p}_\perp| = \gamma m |\vec{v}_\perp| = \gamma m a \omega_B = a q B = \text{cost}$$

Questa quantità è osservata negli esperimenti all'acceleratore di particelle LHC.

Rispetto al caso classico, il raggio dell'elica è dilatato.

**Secondo caso.** Si considera  $\vec{E} = (E, 0, 0) = \text{cost}$  e  $\vec{B} = 0$ . Sia  $v_\parallel(t=0) = 0$  per cui  $\vec{v}(t=0) = (0, v_{0y}, 0)$ . Le equazioni della dinamica sono

$$d_t(\gamma m) = q \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad d_t(\gamma m \vec{v}) = q \vec{E}$$

Si proietta la seconda equazione sugli assi:

$$d_t(\gamma m v_x) = qE, \quad d_t(\gamma m v_y) = 0, \quad d_t(\gamma m v_z) = 0$$

Segue

$$d(\gamma m v_x) = qE dt \implies \int_0^t d(\gamma m v_x) = qEt \implies \gamma m v_x(t) = qEt$$

Dalle altre due si ha

$$\gamma m v_y = \text{cost} = \gamma(t=0) m v_{0y}$$

e anche

$$\gamma m v_z = \text{cost} = \gamma m v_{0z} = 0 \implies v_z(t) \equiv 0$$

Quindi

$$\gamma m v_x = qEt, \quad \gamma m v_y = p_{0y}$$

Il modulo della la quantità di moto è

$$|\vec{p}|^2 = (\gamma m |\vec{v}|)^2 = (\gamma m)^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = (qEt)^2 + p_{0y}^2$$

da cui si ha

$$\gamma^2 v^2 = \frac{k^2}{m^2}, \quad k^2 \equiv (qEt)^2 + p_{0y}^2, \quad v^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

pertanto

$$\gamma^2 = \frac{(qEt)^2 + \mathcal{E}_0^2}{m^2}, \quad \mathcal{E}_0^2 = p_{0y}^2 + m^2$$

## Lezione 18

Si è trovata la dipendenza di  $\gamma$  dal tempo. Si trova  $v_x$  e  $v_y$ . Dunque

$$v_x(t) = \frac{qEt}{\gamma m} = \frac{qEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (qEt)^2}}, \quad v_y(t) = \frac{p_{0y}}{\gamma m} = \frac{p_{0y}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (qEt)^2}}$$

Rispetto al caso classico, compaiono delle radici. Si trova la posizione

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \int_0^t v_x(t) dt = \frac{1}{qE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (qEt)^2} \Big|_0^t = \frac{1}{qE} \left[ \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (qEt)^2} - \mathcal{E}_0 \right] \\ y(t) - y_0 &= \int_0^t v_y(t) dt = \frac{p_{0y}}{qE} \operatorname{arcsinh} \frac{qEt}{\mathcal{E}_0} \Big|_0^t = \frac{p_{0y}}{qE} \operatorname{arcsinh} \frac{qEt}{\mathcal{E}_0} \end{aligned}$$

dove si sono utilizzati

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Si considera  $x_0 = y_0 = 0$  per semplicità. Si scrive la parametrizzazione della traiettoria come funzione. Dalla  $y(t)$  si ha

$$\sinh \frac{qEy}{p_{0y}} = \frac{qEt}{\mathcal{E}_0}$$

dunque

$$x(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \left[ \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{qEy}{p_{0y}}} - 1 \right] = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \left[ \cosh \frac{qEy}{p_{0y}} - 1 \right]$$

La componente  $x$  aumenta esponenzialmente rispetto la componente  $y$ . Nella meccanica classica, la relazione è parabolica: si pensi al moto del proiettile. Infatti

$$\gamma = 1 \implies d_t(mv_x) = qE, \quad d_t(mv_y) = 0$$

da cui si ottiene

$$v_x(t) = \frac{qE}{m} t, \quad v_y(t) = \text{cost} = \frac{p_{0y}}{m}$$

Pertanto

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \quad y(t) - y_0 = \frac{p_{0y}}{m} t \implies x(y) = \frac{1}{2} \frac{qE}{p_{0y}^2} y^2$$

Si studia il modulo della velocità relativistica

$$v^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) = \frac{(qEt)^2 + p_{0y}^2}{\mathcal{E}_0^2 + (qEt)^2} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty$$

Nel limite classico si ha l'andamento lineare.

**Terzo caso.** In  $K$ , si consideri un campo elettrico  $\vec{E} \neq 0$  ed un campo magnetico  $\vec{B} \neq 0$  perpendicolari tra loro. Sia  $|\vec{E}| < |\vec{B}|$ . Grazie all'invarianza di

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0, \quad |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$$

Si cerca un riferimento  $K'$  in cui  $\vec{E} = 0$ . Le trasformazioni per un boost con velocità  $u$  lungo una direzione generica sono

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E \\ B'_{\parallel} = B \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})_{\perp} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \vec{u} \wedge \vec{E})_{\perp} \end{cases}$$

Sia  $\vec{u} \perp \vec{E}$  e  $\vec{u} \perp \vec{B}$ . In questo modo, le componenti parallele sono nulle in entrambi i riferimenti. Si ha

$$\vec{u} = k\vec{E} \wedge \vec{B} \implies |\vec{u}| = kEB$$

Si cerca la costante di proporzionalità affinché

$$\vec{E}'_{\perp} = 0 \implies \gamma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})_{\perp} = 0 \implies \vec{E}_{\perp} = -\vec{u} \wedge \vec{B}$$

Pertanto

$$|\vec{E}| = |\vec{u}||\vec{B}| = kEB^2 \implies k = \frac{1}{B^2} \implies \vec{u} = \frac{1}{B^2} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Si studiano le componenti di  $B'$ . Si sa già  $B'_{\parallel} = 0$ , mentre le componenti trasverse sono

$$\vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} = \gamma_u(\vec{B} - \vec{u} \wedge \vec{E}) = \gamma_u \vec{B} \left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right) = \gamma_u \vec{B} (1 - \vec{u}^2) = \frac{1}{\gamma} \vec{B}$$

noto

$$\vec{u} \wedge \vec{E} = uE \frac{\vec{B}}{B} = \frac{E^2}{B^2} \vec{B}$$

Ci si è ricondotti al primo caso. Rispetto a  $K$ , un punto materiale descritto in  $K'$  si muove con una frequenza dell'elica ed un raggio diversi per un fattore  $\gamma$ . In  $K$ , l'elica è un'ellisse (tipo a forma di goccia) perché si ha un'accelerazione quando la particella è nel verso di  $\vec{E}$  e una decelerazione altrimenti. [immagine] Si ha un moto rettilineo uniforme sia in  $\hat{x}$  che  $\hat{z}$  (sovrapposti all'elica).

## 8 Lagrangiana, Hamiltoniana e principio di azione

**Caso classico – lagrangiana.** L'azione è

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$$

dove  $x(t)$  è la legge oraria quando  $\delta S = 0$  con i vincoli

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

La condizione stazionaria porta alle equazioni di Eulero-Lagrange, del moto

$$d_t \partial_{\dot{x}_j} L - \partial_{x_j} L = 0$$

Per delle coordinate generalizzate  $q^a(t)$ ,  $a = 1, \dots, N$  con  $N$  gradi di libertà, si ha

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^a, \dot{q}^a, t) dt$$

si hanno le stesse equazioni di Eulero-Lagrange

$$d_t \partial_{\dot{q}^a} L - \partial_{q^a} L = 0$$

**Caso classico – hamiltoniana.** Si definiscono i momenti canonici come

$$p^a = \partial_{\dot{q}^a} L$$

Da cui l'hamiltoniana è la trasformata di Legendre della lagrangiana

$$H \equiv [p^a \dot{q}^a - L(q, \dot{q}, t)]_{\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)}$$

Le equazioni di hamilton, del moto sono

$$\begin{cases} \dot{q}^a = \partial_{p^a} H \\ \dot{p}^a = -\partial_{q^a} H \end{cases}$$

## 8.1 Particella libera

L'azione classica è

$$S_{\text{cl}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m v^2 dt$$

Si cerca un oggetto che si riduce al caso classico. Il funzionale  $S$  applicato a  $x(t)$  è uno scalare. Dunque si costruisce uno scalare

$$S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma} dt$$

Con il limite classico si fissa la costante di proporzionalità

$$v \ll 1 \implies S \approx \alpha \int_{t_1}^{t_2} 1 - \frac{1}{2} v^2 dt \implies \alpha = -m$$

Pertanto

$$S = -m \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma} dt = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

La lagrangiana relativistica della particella libera

$$L_0 = L_{\text{rel}} = -\frac{m}{\gamma} = -m \sqrt{1 - v^2}$$

si utilizzano le virgolette perché l'oggetto non è Lorentz-invariante, ma comunque non è da intendersi nel senso classico. Dalla lagrangiana ci si aspetta di ottenere

$$d_\tau^2 x^\mu = 0$$

Quando si ha un campo elettromagnetico ed una carica, ci si aspetta

$$ma^\mu = f^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu \iff m d_\tau^2 x^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

## Lezione 19

Si cerca la traiettoria

$$x^\mu(\tau) = (t(\tau), \vec{x}(\tau))$$

per cui l'azione

$$S[x(\tau)] = \int L_{\text{rel}} dt = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

è stazionaria. Trovata la traiettoria, si studiano le equazioni differenziali soddisfatte da  $x^\mu$ . Il procedimento consiste nel variare la traiettoria  $x(\tau)$  imponendo che la variazione di  $S$  corrispondente sia nulla. Così si ottengono le equazioni del moto. Questo si vede in Meccanica Classica quando si ricavano le leggi di Eulero-Lagrange tramite il principio variazionale. Pertanto, si varia la traiettoria

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu(\tau_1) = \delta x^\mu(\tau_2) = 0$$

I differenziali sono

$$dx^\mu \rightarrow d(x^\mu + \delta x^\mu) = dx^\mu + d(\delta x^\mu)$$

In generale, uno stato finale si può scrivere come la somma dello stato iniziale ed una variazione:

$$dx^\mu \rightarrow dx^\mu + \delta(dx^\mu)$$

Le due variazioni devono essere uguali

$$\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$$

Inoltre, in generale, per una funzione  $f(x^\mu)$  si ha

$$\delta f(x^\mu) = f(x^\mu + \delta x^\mu) - f(x^\mu) = \partial_\mu f \delta x^\mu + o(\delta x^\mu)$$

Si studia anche la variazione di  $d\tau$ :

$$\begin{aligned} \delta(d\tau) &= \delta(\sqrt{dx^\mu dx_\mu}) = \sqrt{d(x^\mu + \delta x^\mu) d(x_\mu + \delta x_\mu)} - \sqrt{dx^\mu dx_\mu} \\ &= \sqrt{dx^\mu dx_\mu + 2dx^\mu d(\delta x_\mu) + O((d(\delta x^\mu))^2)} - \sqrt{dx^\mu dx_\mu} \\ &= \sqrt{(d\tau)^2 (1 + 2d_\tau x^\mu d_\tau(\delta x_\mu)) + O((d(\delta x^\mu))^2)} - \sqrt{(d\tau)^2} \\ &\approx \sqrt{(d\tau)^2} (1 + d_\tau x^\mu d_\tau(\delta x_\mu)) - \sqrt{(d\tau)^2} \\ &= d\tau d_\tau x^\mu d_\tau(\delta x_\mu) \end{aligned}$$

Si calcola  $\delta S$  e poi  $\delta S = 0$ . Dunque

$$\begin{aligned} \delta S &= S[x^\mu + \delta x^\mu] - S[x^\mu] = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta(d\tau) = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d_\tau x^\mu d_\tau(\delta x_\mu) d\tau \\ &= -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} [d_\tau (d_\tau x^\mu \delta x_\mu) - d_\tau^2 x^\mu \delta x_\mu] d\tau = -m \underbrace{[d_\tau x^\mu \delta x_\mu]_{\tau_1}^{\tau_2}}_{=0} + m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d_\tau^2 x^\mu \delta x_\mu d\tau \\ &= m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d_\tau^2 x^\mu \delta x_\mu d\tau \equiv 0, \quad \forall \delta x_\mu \end{aligned}$$

Questo implica che

$$m d_\tau^2 x^\mu = 0 \iff \gamma d_t(\gamma m \vec{v}) = 0$$

cioè quanto aspettato.

**Hamiltoniana.** I momenti coniugati sono

$$p^i = \partial_{v_i} L = -m \partial_{v_i} \sqrt{1 - v^2} = \gamma m v^i$$

cioè la quantità di moto relativistica di una particella libera. Dunque, l'hamiltoniana è

$$H_{\text{rel}} = [p^i v_i - L_{\text{rel}}]_{v^i = v^i(x^i, p^i, t)} = \gamma m v^2 + \frac{m}{\gamma} = \gamma m \left( v^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) = \gamma m = p^0$$

cioè l'energia relativistica di una particella libera. Si deve esprimere l'hamiltoniana solo in termini di  $x^i$  e  $p^i$  in quanto va esplicitata la velocità  $v^i$ :

$$H = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$$

in quanto

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 = (\gamma m \vec{v})^2 + m^2 = m^2(1 + \gamma^2 v^2) = (\gamma m)^2$$



## 8.2 Particella carica in un campo elettromagnetico

Si parte dal caso classico e si costruisce la struttura della lagrangiana relativistica. Nel caso classico si ha

$$m\ddot{\vec{x}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B})$$

che si ottiene dalla lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V, \quad V = q\varphi - q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} = \vec{A}(t, \vec{x}), \quad \varphi = \varphi(t, \vec{x})$$

Nel caso relativistico l'equazione di "Newton" diventa

$$d_t(\gamma m \vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Il secondo membro in entrambi i casi è lo stesso: esso deriva dal potenziale  $V$  nelle equazioni di Eulero-Lagrange. Pertanto, si ipotizza

$$S = \int L_{\text{rel}} dt = \int -\frac{m}{\gamma} - V dt = \int -\frac{m}{\gamma} - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A} dt$$

Si scrive la relazione in modo che sia invariante. Dunque

$$S = \int -m d\tau - \int q A_\mu dx^\mu = \int -m - q A_\mu u^\mu d\tau$$

notando

$$dt(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) = \varphi dt - \vec{A} \cdot d\vec{x} = A^\mu dx_\mu$$

Si calcola  $\delta S$ . Da quanto fatto in precedenza per la particella libera, si conosce già  $\delta(\int -m d\tau)$ . Pertanto (senza scrivere il simbolo di integrale per il secondo addendo)

$$\begin{aligned} \delta \left( \int -q A_\mu dx^\mu \right) &= -q \int \delta A_\mu dx^\mu + A_\mu \delta(dx^\mu) = -q \int (\partial_\nu A_\mu) \delta x^\nu dx^\mu + A_\mu d(\delta x^\mu) \\ &= -q \int (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu + A_\mu d(\delta x^\mu) \\ &= -q \int (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu + d(A_\mu \delta x^\mu) - dA_\mu \delta x^\mu \\ &= -q \int (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu - dA_\mu \delta x^\mu \\ &= -q \int (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu - (\partial_\nu A_\mu) dx^\nu \delta x^\mu = -q \int F_{\mu\nu} dx^\nu \delta x^\mu \\ &= -q \int F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu d\tau \end{aligned}$$

nella prima riga si usa il fatto

$$A_\mu = A_\mu(x^\mu) \implies \delta A_\mu = (\partial_\nu A_\mu) \delta x^\nu$$

tra la terza e la quarta riga si svolge l'integrale del secondo addendo che è nullo perché

$$\int d(A_\mu \delta x^\mu) = A_\mu \delta x^\mu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$$

Pertanto

$$0 \equiv \delta S = \int [m d_\tau^2 x_\mu - q F_{\mu\nu} d_\tau x^\nu] \delta x^\mu d\tau, \quad \forall \delta x^\mu$$

Questo implica

$$m d_\tau^2 x^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

**Hamiltoniana.** La lagrangiana è

$$L^{\text{rel}} = -\frac{m}{\gamma} - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Si calcolano i momenti coniugati

$$P^i = \partial_{v_i} L = \gamma m v^i + q A^i$$

Si nota che la quantità di moto è

$$p^i = P^i - q A^i$$

Utilizzando il fatto che

$$\vec{v} = \frac{\vec{P} - q \vec{A}}{\gamma m}, \quad |\vec{v}|^2 = \frac{(\vec{P} - q \vec{A})^2}{(\gamma m)^2}$$

si ha

$$|\vec{v}|^2 = \frac{(\vec{P} - q \vec{A})^2}{m^2 + (\vec{P} - q \vec{A})^2}, \quad 1 - v^2 = \frac{m^2}{m^2 + (\vec{P} - q \vec{A})^2}$$

L'hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H^{\text{rel}} &= [\vec{v} \cdot \vec{P} - L^{\text{rel}}]_{\vec{v}=\vec{v}(\dots)} = \frac{1}{\gamma m} (\vec{P} - q \vec{A}) \cdot \vec{P} - \left[ -\frac{m}{\gamma} - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma m} [(\vec{P} - q \vec{A}) \cdot (\vec{P} - q \vec{A} + q \vec{A})] + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + (\vec{P} - q \vec{A})^2}} + q\varphi - \frac{q}{\gamma m} (\vec{P} - q \vec{A}) \cdot \vec{A} \\ &= q\varphi + \frac{1}{\sqrt{m^2 + (\vec{P} - q \vec{A})^2}} [m^2 + (\vec{P} - q \vec{A})^2] = q\varphi + \sqrt{m^2 + (\vec{P} - q \vec{A})^2} \end{aligned}$$

In meccanica quantistica, definendo il momento coniugato come quello sopra (e non come quantità di moto), si introduce l'hamiltoniana per una particella carica in un campo elettromagnetico con accoppiamento minimale.

**Osservazione.**

- Nel limite classico si ha

$$L^{\text{rel}} \rightarrow -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A} = L_{\text{cl}}$$

- Il momento coniugato classico è

$$P_{\text{cl}}^i = \partial_{v_i} L_{\text{cl}} = mv^i + qA^i$$

da cui l'hamiltoniana è

$$H_{\text{cl}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi = mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{P}_{\text{cl}} - q\vec{A})^2 + q\varphi$$

cioè l'energia di una particella in un campo elettromagnetico con una energia di riposo.

- La formulazione invariante per l'hamiltoniana è

$$H^{\text{rel}} = \gamma m + q\varphi, \quad \vec{P} = \gamma m \vec{v} + q \vec{A}$$

ricordando le espressioni per  $H^{\text{rel}}$  e  $p^i$ . Si nota che  $H^{\text{rel}}$  e  $\vec{P}$  costituiscono un quadrivettore:

$$P^\mu \equiv mu^\mu + qA^\mu$$

Si ottiene un invariante

$$(P^\mu - qA^\mu)(P_\mu - qA_\mu) = m^2 u^\mu u_\mu = m^2$$

Si può definire una hamiltoniana relativistica (propriamente invariante)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (P^\mu - qA^\mu)(P_\mu - qA_\mu) = \frac{1}{2}m$$

essa ricorda

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Le equazioni di Hamilton relativistiche si generalizzano come

$$\begin{cases} d_\tau x^\mu = \partial_{P_\mu} \mathcal{H} \\ d_\tau P^\mu = -\partial_{x_\mu} \mathcal{H} \end{cases}$$

## Lezione 20

### 9 Precessione di Thomas

Si studia come si ricava il termine di interazione spin-orbita nell'hamiltoniana in meccanica quantistica. Si mostra perché, nell'effetto di Zeeman anomalo, cioè nelle correzioni alla struttura fine, compare il fattore  $g - 1$ .

#### 9.1 Boost in direzioni diverse

Prima si vede un caso esplicito. In  $K$ , si consideri una particella con quadri-momento

$$p^\mu = (2, 1, 1, 0)$$

Si vogliono operare dei boost per arrivare nel suo riferimento solidale. La velocità della particella è

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

**Primo metodo.** Si fa un boost  $B_x$  in  $x$  (da  $K$  al riferimento  $\tilde{K}$ ) e poi uno  $B_y$  in  $y$  (da  $\tilde{K}$  al riferimento solidale  $K'$ ) così da annullare le rispettive componenti. Si ha

$$\beta_x = \frac{1}{2}, \quad \gamma_x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

La matrice di boost lungo  $x$  è

$$B_{1,x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\tilde{p} = B_{1,x} p = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \quad \tilde{\beta}_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tilde{\gamma}_y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ora, la matrice di boost lungo  $y$  è

$$B_{1,y} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$p' = B_{1,y}\tilde{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Secondo metodo.** Si scambia l'ordine dei boost. Le due matrici non hanno lo stesso aspetto di quelle precedenti perché la moltiplicazione tra matrici non è commutativo. Si ha

$$B_{2,y} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{p} = B_{2,y}p = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre il boost lungo  $x$  è

$$B_{2,x} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p' = B_{2,x}\tilde{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che, sebbene le entrate non siano le stesse, per questo caso i valori rilevanti delle entrate della prima matrice ( $B_x$  per il primo caso e  $B_y$  per il secondo) sono gli stessi e sono posizionati lungo la coordinata appropriata.

**Terzo metodo.** Si opera un unico boost lungo  $\vec{v}$  utilizzando la formula generale:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - \gamma\vec{v}t, \quad t' = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x})$$

La matrice associata è

$$\Lambda = B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & -\gamma v_z \\ -\gamma v_x & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2}v_x v_x & \frac{\gamma-1}{v^2}v_x v_y & \frac{\gamma-1}{v^2}v_x v_z \\ -\gamma v_y & \frac{\gamma-1}{v^2}v_y v_x & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2}v_y v_y & \frac{\gamma-1}{v^2}v_y v_z \\ -\gamma v_z & \frac{\gamma-1}{v^2}v_z v_x & \frac{\gamma-1}{v^2}v_z v_y & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2}v_z v_z \end{pmatrix}, \quad \gamma = \sqrt{2}$$

Si nota che, per costruzione, questa trasformazione mantiene gli assi di partenza ed arrivo paralleli tra loro. In questo particolare esempio si ha

$$B_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Osservazione.** Le matrici viste in questi esempi sono diverse, sebbene il punto di arrivo sia sempre lo stesso. Si studi per cosa differiscono: l'unica cosa che può cambiare è l'orientamento finale degli assi. I riferimenti differiscono per una rotazione. Per il primo ed il terzo caso si ha

$$B_3 = R_1 B_1, \quad B_1 = B_{1,y} B_{1,x}$$

pertanto

$$R_1 = B_3 B_1^{-1} = B_3 B_{1,x}^{-1} B_{1,y}^{-1}$$

Per il secondo ed il terzo caso si ha

$$R_2 = B_3 B_2^{-1} = B_3 B_{2,y}^{-1} B_{2,x}^{-1}$$

Per  $R_1$  si ottiene

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice ortogonale: rappresenta una rotazione (attorno a  $z$ ) rispetto al boost  $B_3$  che mantiene gli assi paralleli. In meccanica classica, questo non avviene. Tale rotazione è fondamentale alla precessione di Thomas. Due boost consecutivi lungo lo stesso asse commutano. Boost lungo assi diversi non è più così. Le rotazioni del gruppo di Lorentz sono un'operazione chiusa, mentre non vale per i boost, in quanto si ottiene una rotazione.

## 9.2 Moto di una particella

Si consideri una particella in moto generico. In ogni istante, ci si pone nel riferimento inerziale solidale (istantaneamente) con la particella. In tale riferimento si suppone di conoscere le forze per cui si possono calcolare l'accelerazione e la variazione infinitesima di velocità. Si passa all'istante successivo e si ripete il procedimento. Portando avanti questa argomentazione per il caso generale in cui  $\vec{v}$  e  $\vec{v} + \delta\vec{v}$  non hanno stessa direzione, si ottiene il fenomeno precedente di rotazione.

Si considerino tre riferimenti  $K$ ,  $K'$  e  $K''$  equiversi in moto lungo  $x$ . Al tempo  $t$  la particella ha velocità  $\vec{v}$ . Il riferimento  $K'$  è solidale alla particella  $P$ . All'istante successivo  $t + \delta t$ , la particella ha velocità  $\vec{v} + \delta\vec{v}$ . Il riferimento  $K''$  è solidale, ora, alla particella. In  $K$  si ipotizza

$$\vec{v} = (v, 0, 0), \quad \delta\vec{v} = (\delta v_x, \delta v_y, 0)$$

Si pone  $\vec{u} = (v + \delta v_x, \delta v_y, 0)$ . In  $K'$  si ha

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v u_x} = \frac{\delta v_x}{1 - v(v + \delta v_x)} \approx \gamma_v^2 \delta v_x, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v (1 - v u_x)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta v_y}{1 - v(v + \delta v_x)} \approx \gamma_v \delta v_y$$

dunque

$$\vec{u}' = (\gamma^2 \delta v_x, \gamma \delta v_y, 0)$$

Si trova la rotazione dovuta ai molteplici boost rispetto il boost diretto

$$B(\vec{v} + \delta\vec{v}) = R B(\vec{u}') B(\vec{v})$$

da cui

$$R = B(\vec{v} + \delta\vec{v}) B^{-1}(\vec{v}) B^{-1}(\vec{u}') = B(\vec{v} + \delta\vec{v}) B(-\vec{v}) B(-\vec{u}')$$

Noto

$$\gamma_{v+\delta v} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v + \delta v)^2}} = \gamma_v (1 + \gamma_v^2 (\vec{v} \cdot \delta\vec{v}) + \dots) = \gamma_v + \gamma_v^3 (v \delta v_x)$$

si ottiene

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\gamma-1}{v}\delta v_y & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma-1}{v}\delta v_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La componente temporale non cambia. Si ha una rotazione infinitesima lungo  $z$ . Infatti, per una rotazione infinitesima si ha

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha un angolo infinitesimo associato una rotazione degli assi (in senso antiorario perché, viceversa, i vettori ruotano in senso orario) di

$$\delta\theta = \frac{\gamma-1}{v} \delta v_y$$

Questa è la precessione di Thomas.

### 9.3 Precessione

Una rotazione attorno  $\hat{n}$  di un angolo  $\alpha$  è  $\vec{\alpha} = \alpha\hat{n}$ . [immagine] La posizione diventa

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} \cos \alpha + (\hat{n} \wedge \vec{x}) \sin \alpha$$

Per un angolo infinitesimo si ha

$$\vec{x}' = \vec{x} + \alpha(\hat{n} \wedge \vec{x})$$

In questo caso

$$\hat{z} = \hat{n} = \frac{\vec{v} \wedge \delta\vec{v}}{|\vec{v} \wedge \delta\vec{v}|} = \frac{\vec{v} \wedge \delta\vec{v}}{v \delta v_y}$$

A questo punto, la rotazione infinitesima

$$\delta\vec{\theta} = \delta\theta \hat{n} = \frac{\gamma-1}{v} \delta v_y \frac{\vec{v} \wedge \delta\vec{v}}{v \delta v_y} = \frac{\gamma-1}{v^2} (\vec{v} \wedge \delta\vec{v}) = \frac{\gamma^2}{1+\gamma} (\vec{v} \wedge \delta\vec{v})$$

Si è scritta la rotazione in modo generale partendo da un caso particolare.

**Osservazione.** Il sistema di riferimento di una particella con moto vario ruota rispetto ad un riferimento scelto fisso (come il laboratorio). Pertanto, una direzione fissa nel riferimento della particella, ruota, invece, nel riferimento del laboratorio. Una tale direzione fissa è lo spin della particella che, nel laboratorio, precede. Una componente di tale precessione è causata dalla precessione di Thomas e non dall'interazione con campi elettromagnetici esterni. Si ha un effetto puramente cinematico.

Passare da un riferimento al successivo per rimanere solidale con una particella causa una rotazione di  $-\delta\vec{\theta}$  rispetto al laboratorio.

Si passa a grandezze finite. La velocità angolare di Thomas è

$$\vec{\omega}_T = -\delta_t \vec{\theta} = -\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v} \wedge \delta_t \vec{v} = -\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v} \wedge \vec{a} = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{a} \wedge \vec{v}$$

dove  $\vec{a}$  è l'accelerazione misurata dal laboratorio. Il fenomeno è indipendente dalla dinamica, ma è solo una questione di cinematica relativistica. Successivamente si studia l'interazione tra il campo elettromagnetico e il momento magnetico di un elettrone considerando anche l'effetto della precessione di Thomas. L'interazione spin-orbita presenta  $g-1$  al posto di  $g$ .

## Lezione 21

**Momento magnetico.** Si consideri una spira circolare di area  $A$ , raggio  $r$ , in cui fluisce una corrente  $I$ . Essa ha un momento magnetico (in unità gaussiane)

$$\vec{\mu} = \frac{1}{c} AI \hat{n}$$

Si vede il legame con il momento angolare  $\vec{L}$ , lo spin. Si intende la spira come una particella  $q$  che si muove di moto circolare uniforme. La corrente è

$$I = \frac{q}{\Delta T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

con  $v$  velocità tangenziale. Il momento magnetico è

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} r m v \hat{n} = \frac{q}{2mc} \vec{L}$$

Esiste un momento magnetico associato al moto di una particella carica proporzionale al momento angolare.

Le particelle presentano un momento magnetico intrinseco proporzionale allo spin che, in senso operatoriale della meccanica quantistica, soddisfa le regole di commutazione del momento angolare: per questo è detto momento angolare intrinseco. Dato che lo spin è un momento angolare, esso si somma al momento angolare orbitale.

Il momento angolare è intrinseco perché esiste una direzione associata alla particella che prescinde dall'orbita. Il momento magnetico associato allo spin  $\vec{S}$  è

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{S}$$

con  $\frac{q}{2mc}$  rapporto giromagnetico. Una particella a riposo risente degli effetti di un campo magnetico esterno anche in assenza di velocità a causa della presenza del proprio momento magnetico.

**Effetto Zeeman e interazione spin-orbita.** Si studia l'effetto Zeeman, l'effetto Zeeman anomalo e l'interazione spin-orbita tenendo conto della precessione di Thomas.

Sperimentalmente, per l'elettrone si ha  $g = 2$  che spiega l'effetto Zeeman anomalo cioè spiega termini del tipo  $\vec{S} \cdot \vec{B}$  e  $\vec{S} \cdot \vec{L}$  nell'hamiltoniana di interazione. Tuttavia, rimangono effetti di struttura fine che necessitano dell'aggiunta della precessione di Thomas per essere compresi.

Storicamente, il valore  $g = 2$  è predetto dalla teoria di Dirac dell'elettrone. L'equazione di Dirac è la generalizzazione relativistica dell'equazione di Schrödinger per un elettrone.

In verità, il valore di  $g$  è poco di più di due come predetto dall'elettrodinamica quantistica (QED)

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} + o(\alpha)$$

dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine.

**Energia potenziale dell'elettrone con spin.** Si vede la correzione all'hamiltoniana dovuta alla presenza dello spin, cioè l'effetto Zeeman anomalo. L'energia potenziale di un elettrone di un atomo idrogenoide dovuta allo spin è

$$V = -g \frac{q}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{q}{2m^2 c^2} (g-1) \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \partial_r V$$

Il primo termine è l'effetto classico, il secondo addendo è l'interazione spin-orbita con la precessione di Thomas.

Si dimostra tale formula. Si consideri una particella carica con velocità  $\vec{v}$  in un campo

elettromagnetico. Per l'atomo di idrogeno, il protone è la fonte del campo elettrico, mentre il campo magnetico è esterno. Inoltre, si ha una velocità

$$\frac{1}{c} \langle |\vec{v}| \rangle \sim \alpha$$

che non è relativistica, dunque  $\gamma \approx 1$ . Non si considera ancora la precessione di Thomas. Si consideri il riferimento  $K'$  solidale all'elettrone. Il momento magnetico associato allo spin si muove secondo

$$d_t \vec{S} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}' = -g \frac{q}{2mc} \vec{B}' \wedge \vec{S} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{S}, \quad \vec{\omega}_1 \equiv -g \frac{q}{2mc} \vec{B}'$$

Inoltre

$$\vec{B}' = \gamma \left( \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{E} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v} \approx \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

Dunque, l'energia potenziale è

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}' = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{\mu} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{E})$$

Per un campo elettrico centrale, come nel caso di atomi idrogenoidi, si ha

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}V = -\frac{q}{r} \partial_r V \vec{r} \implies \vec{E} = -\frac{1}{r} \partial_r V \vec{r}$$

Pertanto

$$\frac{1}{c} \vec{\mu} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{E}) = \frac{g}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \partial_r V \vec{S} \cdot \vec{L}$$

Dunque si ottiene un potenziale

$$V = -g \frac{q}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{q}{2m^2 c^2} g \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \partial_r V$$

Il termine  $g-1$  si trova dalla precessione di Thomas. Il punto in cui essa influenza la dimostrazione è nel passaggio al riferimento del laboratorio per il calcolo del campo magnetico. Dunque

$$d_t \vec{S}|_{\text{lab}} = d_t \vec{S}|_{\text{rest}} + \vec{\omega}_T \wedge \vec{S}$$

da cui

$$V_T = V + \vec{\omega}_T \cdot \vec{S}$$

La velocità angolare di Thomas è

$$\vec{\omega}_T = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \vec{a} \wedge \vec{v} \approx \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{q}{m} \vec{E} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{q}{m} \frac{1}{r} \partial_r V (\vec{r} \wedge \vec{v})$$

dove, per velocità non relativistiche, si utilizza

$$d_t(\gamma m \vec{v}) = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \implies d_t(m \vec{v}) \approx q \vec{E} \implies \vec{a} \approx \frac{q}{m} \vec{E}$$

Proseguendo si ha

$$\vec{\omega}_T \approx -\frac{q}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \partial_r V \vec{L}$$

da cui

$$V_T = V + \vec{\omega}_T \cdot \vec{S} = -g \frac{q}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{q}{2m^2 c^2} (g-1) \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \partial_r V$$

Finora non si sono menzionati operatori. La derivazione è relativistica, ma classica. La meccanica quantistica spiega come dalla formula sopra si hanno spettri discreti di emissione degli atomi: il momento angolare orbitale  $\vec{L}$  e lo spin  $\vec{S}$  sono operatori con spettro discreto.



## 9.4 Formalismo tensoriale

Si utilizza il formalismo tensoriale per descrivere la dinamica dello spin. Si arriva all'equazione di Bargmann-Michel-Telegdi (BMT). Si vuole ottenere

$$d_t \vec{S} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_T) \wedge \vec{S}$$

in forma tensoriale. In questo modo compare il secondo addendo.

**Definizione.** Nel riferimento solidale  $K'$  ad una particella, il quadri-vettore spin  $S^\mu$  si riduce a

$$s^\mu = (0, \vec{s})$$

Per un riferimento arbitrario, la notazione dello spin presenta la lettera maiuscola  $S^\mu$ . Dunque

$$s^\mu = \Lambda^\mu_\nu S^\nu$$

La prima componente è

$$s^0 = \gamma(S^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{S}) = 0 \implies S^0 = \vec{\beta} \cdot \vec{S}$$

Ricordando la quadri-velocità

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

si ha l'invariante

$$u_\mu S^\mu = 0$$

che è immediato se si utilizzano le componenti del riferimento solidale alla particella. In esso deve valere

$$d_t \vec{s} = g \frac{q}{2mc} \vec{s} \wedge \vec{B}' = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{s}$$

L'equazione è lineare in  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , dunque la formula tensoriale è lineare in  $S^\mu$  e  $F^{\mu\nu}$ . Inoltre, si hanno dei termini proporzionali alla velocità, come la forza di Lorentz: ci si aspetta termini in  $u^\mu$  e  $d_\tau u^\mu$ . Si nota  $t' = \tau$ . A partire da questi oggetti, se ne possono costruire altri

$$F^{\mu\nu} S_\nu, \quad (S_\nu F^{\nu\rho} u_\rho) u^\mu, \quad (S_\nu d_\tau u^\nu) u^\mu$$

Ricordando che

$$u_\nu S^\nu = 0, \quad (F^{\rho\sigma} u_\rho u_\sigma) S^\mu = 0$$

La seconda equazione vale perché il termine tra parentesi è costituito da un tensore anti-simmetrico con un fattore simmetrico. Pertanto, la formula è la combinazione lineare degli oggetti costruiti:

$$d_\tau S^\mu = a_1 F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{a_2}{c^2} (S_\nu F^{\nu\rho} u_\rho) u^\mu + \frac{a_3}{c^2} (S_\nu d_\tau u^\nu) u^\mu$$

## Lezione 22

L'energia potenziale per effetto Zeeman è

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad \vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$$

Il primo addendo nel momento magnetico descrive l'effetto Zeeman (termine  $\vec{B} \cdot \vec{L}$ ), il secondo addendo descrive l'effetto Zeeman anomalo (termini  $\vec{B} \cdot \vec{S}$  e  $\vec{S} \cdot \vec{L}$ ) tramite lo spin.

Si prosegue la derivazione tramite formalismo tensoriale. Dalla relazione

$$u_\mu S^\mu = 0 \implies d_\tau u_\mu S^\mu + u_\mu d_\tau S^\mu = 0$$

segue

$$-d_\tau u_\mu S^\mu = u_\mu d_\tau S^\mu = a_1 u_\mu F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{a_2}{c^2} (S_\nu F^{\nu\rho} u_\rho) + \frac{a_3}{c^2} (S_\nu d_\tau u^\nu)$$

Confrontando il primo e l'ultimo termine si ha

$$a_3 = -1, \quad a_1 = a_2$$

Nel riferimento solidale, la quadri-velocità è

$$u^\mu = (c, \vec{0})$$

Pertanto

$$d_\tau s^i = a_1 F^{i\nu} s_\nu = a_1 F^{ij} s_j = -a_1 \epsilon^{ijk} B^k (-s^j) = a_1 (\vec{s} \wedge \vec{B})^i$$

In tale riferimento vale

$$d_\tau \vec{s} = -\vec{s} \wedge \vec{\omega}_1 = g \frac{q}{2mc} \vec{s} \wedge \vec{B}$$

da cui si ottiene

$$a_1 = g \frac{q}{2mc}$$

Quindi si ha

$$d_\tau S^\mu = \frac{gq}{2mc} \left[ F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} (S_\nu F^{\nu\rho} u_\rho) u^\mu \right] - \frac{1}{c^2} (S_\nu d_\tau u^\nu) u^\mu$$

Utilizzando la forza su di una particella carica in un campo elettromagnetico

$$m d_\tau u^\nu = \frac{q}{c} F^{\nu\rho} u_\rho$$

si ottiene l'equazione di Bargmann-Michel-Telegdi

$$\boxed{d_\tau S^\mu = \frac{q}{mc} \left[ \frac{1}{2} g F^{\mu\nu} S_\nu + \left( \frac{1}{2} g - 1 \right) \frac{1}{c^2} (S_\nu F^{\nu\rho} u_\rho) u^\mu \right]}$$

Si utilizza l'equazione della forza precedente supponendo che la dinamica della particella dipenda solamente dall'interazione mediata dalla forza di Lorentz. Ad esempio, questo non vale nell'esperimento di Stern-Gerlach in cui si ha una forza proporzionale al gradiente del campo magnetico.

Si trova il termine che descrive la precessione di Thomas. Nella scrittura precedente di BMT, ci si aspetta che esso si trovi nel termine

$$\frac{1}{c^2} (S_\nu d_\tau u^\nu) u^\mu$$

dove non compare  $g$ . Sia

$$f^\mu \equiv \frac{gq}{2mc} \left[ F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} (S_\nu F^{\nu\rho} u_\rho) u^\mu \right]$$

Le componenti di BMT sono

$$d_\tau S^0 = f^0 - \frac{1}{c^2} \gamma c S_\nu d_\tau u^\nu, \quad d_\tau \vec{S} = \vec{f} - \frac{1}{c^2} \gamma \vec{v} S_\nu d_\tau u^\nu$$

Quindi

$$S_\nu d_\tau u^\nu = S_0 d_\tau u^0 + S_i d_\tau u^i = 0 + S_i \gamma d_\tau v^i = -\gamma \vec{S} \cdot d_\tau \vec{v}$$

Il primo addendo è nullo in quanto  $|\vec{v}|$  e  $\gamma$  sono costanti. Le componenti diventano

$$d_\tau S^0 = f^0 + \frac{\gamma^2}{c^2} c \vec{S} \cdot d_\tau \vec{v}, \quad d_\tau \vec{S} = \vec{f} + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{v} (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{v})$$

Nel riferimento solidale si ha

$$\vec{s} = \vec{S} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta}$$

derivando rispetto a  $d_\tau$  si ha

$$\begin{aligned} d_t \vec{s} &= d_\tau \vec{S} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ d_\tau (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta} + (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) d_\tau \vec{\beta} \right] \\ &= \vec{f} + \gamma^2 \vec{\beta} (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{\beta}) - \frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \vec{\beta} \cdot \vec{f} + \gamma^2 (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{\beta}) \right] \vec{\beta} - \frac{\gamma}{1+\gamma} d_\tau \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \end{aligned}$$

alla seconda riga si è utilizzato

$$d_\tau (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) = d_\tau \vec{\beta} \cdot \vec{S} + \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{f} + \gamma^2 \vec{\beta} (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{\beta}) \right] = \vec{\beta} \cdot \vec{f} + \gamma^2 (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{\beta})$$

In quanto si vuole osservare solo la precessione di Thomas, si raggruppano in  $A$  tutti i termini dipendenti da  $\vec{f}$ :

$$\begin{aligned} d_\tau \vec{s} &= A + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{\beta}) \vec{\beta} - \frac{\gamma}{1+\gamma} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) d_\tau \vec{\beta} = A + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \left[ \vec{\beta} (\vec{S} \cdot d_\tau \vec{\beta}) - d_\tau \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \right] \\ &= A + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{s} \wedge (\vec{\beta} \wedge d_\tau \vec{\beta}) \implies \gamma d_t \vec{s} = \gamma \left[ \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{s} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{a}) \frac{1}{c^2} \right] \end{aligned}$$

ricordando

$$S^0 = \vec{\beta} \cdot \vec{S} = \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{s} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \right] = \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{s}, \quad \vec{\beta} \cdot d_\tau \vec{\beta} = 0$$

la seconda uguaglianza vale perché  $|\vec{v}|$  è costante. Dunque il termine di Thomas è

$$d_t \vec{s} = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1+\gamma} (\vec{a} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{s} \implies \vec{\omega}_T = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{a} \wedge \vec{v}$$

Pertanto, la precessione di Thomas è contenuta nel formalismo tensoriale sviluppato.

## 10 Teoria classica dei campi

Si è già mostrato come ricavare una lagrangiana per una particella in un campo elettromagnetico secondo una formulazione tensoriale. Tramite il principio variazionale, di minima azione, si sono ottenute le equazioni del moto. Con lo stesso procedimento, si ricavano le equazioni di Maxwell. Si scrive una lagrangiana dove compaiono i campi, e le cui equazioni di Eulero-Lagrange sono proprio le equazioni di Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$$

### Lezione 23

In questo modo, si ottiene una lagrangiana in cui compare un termine di interazione tra il campo elettromagnetico e le cariche (il moto è influenzato dal campo ed è anche sorgente di un altro campo).

La teoria classica dei campi è la base della teoria quantistica dei campi (QFT) alla base del modello standard, che unisce la relatività speciale con la meccanica quantistica. Si formalizza il concetto di campo utilizzando un'analogia con le coordinate canoniche ed i momenti coniugati. Poi si arriva a definire la densità di lagrangiana. Intuitivamente, i campi sono funzioni che associano una certa proprietà ad ogni punto dello spazio-tempo.

**Analogia.** In meccanica classica, un sistema di  $N$  particelle è descritto dalle coordinate  $q^a(t)$  con  $a = 1, \dots, 3N$ . Un campo è una funzione  $\varphi^a(\vec{x}, t)$ . Ad esempio, per il campo elettromagnetico si ha  $a = 1, \dots, 6$ ; per la temperatura si ha un solo indice,  $a = 1$ , in quanto la temperatura è una quantità scalare. Si nota che un campo dipende anche dalla posizione, non solo dal tempo.

I campi vanno intesi come delle funzioni  $q^a(t)$  dove la posizione  $\vec{x}$  è un indice continuo, mentre

$a$  continua a rimanere un indice discreto. Come in meccanica classica, per risolvere un problema bisogna fornire le condizioni iniziali delle funzioni  $q^a(t)$ . L'evoluzione temporale del sistema è data da un'equazione differenziale dove  $q^a(t)$  sono le funzioni da trovare. Nella teoria dei campi, ci sono infiniti gradi di libertà (non numerabili).

Inoltre, in relatività, per costruire una teoria di campo, le funzioni  $\varphi$  non possono dipendere solo dal tempo, perché lo spazio ed il tempo sono della stessa essenza.

Altre analogie

Tabella 1: Analogie.

Quantità	Meccanica classica	Teoria dei campi
Coordinata	$q^a(t)$	$\varphi^a(\vec{x}, t)$
Dipend. tempo	$\checkmark$	$\checkmark$
Indice	$a$	$(a, \vec{x})$
Somma su indici	$\sum_a$	$\sum_a \int d^3x$
Identità	$\delta_{ab}$	$\delta_{ab}$ e $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
Condizioni iniziali	$q^a(t_0), \dot{q}^a(t_0)$	$\varphi^a(\vec{x}, t_0)$

In meccanica quantistica, la posizione diventa un operatore. Nella teoria dei campi, una particella non è più descritta da una posizione  $\vec{x}(t)$ , ma da dei campi che si interpretano, ad esempio, come densità di probabilità di dove si trovi la particella.

## 10.1 Azione e lagrangiana

Nel caso classico, l'azione è

$$S = \int L(q^a, \dot{q}^a, t) dt$$

Nella teoria dei campi si generalizza come

$$S = \iint \mathcal{L}(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^a, x) d^3x dt, \quad L = \int \mathcal{L}(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^a, x) d^3x$$

Per ragioni dimensionali,  $\mathcal{L}$  è una densità lagrangiana.

**Osservazione.** La forma funzionale di  $\mathcal{L}$  si interpreta come le interazioni dei suoi argomenti. Si ipotizza che la densità lagrangiana sia un oggetto locale: i campi e le derivate sono valutati alla stessa posizione  $x$ . Se si avessero termini tipo  $\varphi(x^\mu)\varphi(x^\mu + \Delta^\mu)$  allora si avrebbe un'interazione che dipende da una distanza fissa. A priori, non si mantiene il principio di causalità. Pertanto, si hanno termini con stessa coordinata spaziale,  $\varphi(x)\varphi(x)$ .

Inoltre, si ha l'invariante

$$dt d^3x = d^4x$$

infatti

$$d^4x' = |\det J| d^4x = |\det \Lambda| d^4x = d^4x$$

In quanto  $S$  è invariante, allora anche  $\mathcal{L}$  è invariante (in particolare uno scalare).

**Principio di minima azione.** I valori fisici di un campo sono quelli che rendono l'azione stazionaria. L'azione  $S$  è stazionaria sulla configurazione di campo  $\varphi(x)$  che rappresenta il sistema fisico. Le equazioni del moto soddisfatte dai campi sono analoghe alle equazioni di Eulero-Lagrange. Dunque

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x) d^4x = 0, \quad \forall \delta \varphi|_{\partial\Omega} = 0$$

Bisogna specificare i dati al bordo. L'azione è stazionaria per ogni variazione  $\delta\varphi$  dei campi che si annulla su  $\partial\Omega$ , cioè

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(x) + \delta\varphi(x) \text{ tale che } \delta\varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0$$

Questo equivale a fissare le condizioni al contorno. In teoria dei campi, si considera il dominio  $\Omega$  arbitrariamente grande. Dunque, la condizione sopra implica che i campi, a gradi distanze spaziali e temporali, tendono a zero.

**Equazioni del moto – Eulero-Lagrange.** La variazione della lagrangiana è

$$\delta\mathcal{L} = \delta_\varphi\mathcal{L}\delta\varphi + \delta_{\partial_\mu\varphi}\mathcal{L}\delta(\partial_\mu\varphi)$$

Il simbolo  $\delta_\varphi\mathcal{L}$  è una derivata funzionale di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $\varphi$ . Successivamente si torna ad utilizzare  $\partial$ . Si ha

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu(\varphi + \delta\varphi) - \partial_\mu\varphi = \partial_\mu(\delta\varphi)$$

per cui

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{\Omega} [\partial_\varphi\mathcal{L}\delta\varphi + \delta_{\partial_\mu\varphi}\mathcal{L}\partial_\mu(\delta\varphi)] d^4x \\ &= \int_{\Omega} [\partial_\varphi\mathcal{L}\delta\varphi - \partial_\mu(\partial_{\partial_\mu\varphi}\mathcal{L})\delta\varphi] d^4x + \int_{\Omega} \cancel{\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu\varphi}\mathcal{L})\delta\varphi} d^4x \end{aligned}$$

Al secondo integrale della seconda riga si può applicare il teorema della divergenza e si ottengono dei termini valutati sulla frontiera  $\partial\Omega$  e, per le condizioni al bordo, si ha zero. Dunque, se  $\delta\varphi$  è arbitrario, allora l'integrando è nullo. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu\varphi}\mathcal{L}) - \partial_\varphi\mathcal{L} = 0$$

Per più campi  $\varphi^a(x)$  si ha

$$\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu\varphi^a}\mathcal{L}) - \partial_{\varphi^a}\mathcal{L} = 0$$

## 10.2 Equazioni di Maxwell

Si cerca una lagrangiana tale che le equazioni di Eulero-Lagrange si riducano alle leggi di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad \partial_{[\rho} F_{\nu\sigma]} = 0$$

Il tensore elettromagnetico può essere scritto in funzione del potenziale

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Ricordando il gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

le leggi di Maxwell diventano

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu$$

Il campo naturale da usare è il quadri-potenziale  $A^\mu$ . Si cerca una lagrangiana costruita da esso.

**Osservazione.** Le equazioni di Maxwell sono lineari nella tetra-corrente  $J^\mu$  e sono lineari in  $\partial_\mu A_\nu$ . Non ci sono termini quadratici, bensì derivate seconde  $\partial_\nu\partial^\nu A_\mu$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu A_\nu}\mathcal{L}) - \partial_{A_\nu}\mathcal{L} = 0$$

Per le considerazioni precedenti, osservando il primo termine, la lagrangiana è al massimo quadratica in  $\partial_\mu A_\nu$ . Pertanto

$$\boxed{\mathcal{L} = aF^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + bA_\mu J^\mu}$$

Ricordando che la lagrangiana di una carica in un campo elettromagnetico ha un termine potenziale

$$-qA_\mu u^\mu$$

ci si aspetta che  $b = -1$  sia negativo: la corrente è  $qu^\mu$ .

Si consideri il primo addendo della lagrangiana. Si calcola il primo termine delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned}\partial_{\partial_\rho A_\sigma}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) &= \partial_{\partial_\rho A_\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\partial_{\partial_\rho A_\sigma}F_{\mu\nu} = \partial_{\partial_\rho A_\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\partial_{\partial_\rho A_\sigma}F_{\mu\nu} \\ &= 2F^{\mu\nu}\partial_{\partial_\rho A_\sigma}F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu}\partial_{\partial_\rho A_\sigma}[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] = 2F^{\mu\nu}[\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho\delta_\mu^\sigma] \\ &= 2(F^{\rho\sigma} - F^{\sigma\rho}) = 4F^{\rho\sigma}\end{aligned}$$

Nell'ultima riga si utilizza il fatto che il tensore elettromagnetico è anti-simmetrico. Si calcola il secondo termine

$$\partial_{A_\nu}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \partial_{A_\nu}[F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] = 0$$

questo perché il tensore elettromagnetico dipende dalle derivate di  $A_\nu$ , non da  $A_\nu$  stesso.

Ora si consideri il secondo addendo della lagrangiana. Il primo termine dell'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\partial_{\partial_\rho A_\sigma}(A_\mu J^\mu) = 0$$

il secondo termine è

$$\partial_{A_\sigma}(A_\mu J^\mu) = J^\sigma$$

Dunque, l'equazione di Eulero-Lagrange diventa

$$\partial_\rho(4aF^{\rho\sigma}) - bJ^\sigma = 0 \implies \partial_\rho F^{\rho\sigma} = \frac{b}{4a}J^\sigma$$

Per la scelta delle unità di Gauss, si pone  $b = -1$  e si ha  $a = -\frac{1}{16\pi}$ . Quindi

$$\partial_\rho F^{\rho\sigma} = 4\pi J^\sigma$$

La lagrangiana del campo elettromagnetico è

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$$

dove i tensori sono tutti funzioni della posizione  $x$ . L'azione è

$$S_{\text{em}} = -\int \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu d^4x$$

**Osservazione.** Nelle unità di misura di Lorentz-Heaviside (o razionalizzate) si ha

$$S_{\text{em}} = -\int \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu d^4x$$

## Lezione 24

Le equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 4\pi J^\nu$$

descrivono la dinamica del campo elettromagnetico in funzione di condizioni date da cariche e correnti fisse. In realtà, il campo influenza le cariche e le correnti tramite la forza di Lorentz. Nella lagrangiana calcolata in precedenza

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$$

si descrive come i campi sono influenzati dalle sorgenti. Viceversa, nella lagrangiana di una carica in un campo elettromagnetico

$$L = -m \int d\tau - q \int A^\mu dx_\mu$$

si descrive l'influenza dei campi sulle sorgenti.

Si uniscono le due cose. Una carica in moto è, difatti, una corrente. Pertanto, nel termine  $A_\mu J^\mu$ , la tetra-corrente deve essere legata al moto delle cariche di un sistema. Per un insieme di  $n$  cariche (ognuna  $x_i^\mu(t)$ ) si ha

$$J^\mu(x) = \int \sum_i q_i \delta^{(4)}(x^\mu - \bar{x}_i(\tau)) d\tau \bar{x}_i^\mu$$

dove  $\bar{x}_i^\mu(\tau)$  sono le traiettorie delle cariche. Si ricorda valere  $\rho = q\delta(x-x_0)$  per cariche puntiformi. Il termine  $A_\mu J^\mu$  deve descrivere l'interazione reciproca tra campo e sorgente. Dunque

$$\begin{aligned} - \int A_\mu(x) J^\mu(x) d^4x &= - \iint \delta^{(4)}(x - \bar{x}(\tau)) q d\tau \bar{x}^\mu A_\mu(x) d^4x d\tau \\ &= - \int q A_\mu(\bar{x}(\tau)) \bar{x}^\mu(\tau) d\tau = -q \int A^\mu dx_\mu \end{aligned}$$

cioè quanto si è scritto nella lagrangiana per una particella carica. La descrizione completa tra una campo elettromagnetico ed una carica è data da

$$S = \sum_i \int m_i d\tau - \int A_\mu(x) J^\mu(x) d^4x - \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) d^4x$$

con  $J^\mu(x)$  come sopra. Il primo termine deriva dalla lagrangiana della particella libera. Il terzo addendo deriva dalla lagrangiana del campo elettromagnetico libero. Il secondo termine è di interazione reciproca tra sorgenti e campo elettromagnetico. Nella teoria dei campi, una struttura simile a  $A_\mu J^\mu$ , cioè campo per corrente, corrisponde alle interazioni fondamentali. Senza corrente, si ha la lagrangiana di un campo elettromagnetico libero

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)$$

Finora non si è mai usato il duale di Hodge del tensore elettromagnetico in un'espressione invariante come  $G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ . Questo perché esso non contribuisce. Infatti, ricordando la definizione del duale, si ha

$$G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \implies G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha (A_\beta \partial_\mu A_\nu)$$

Nell'azione si ha

$$\int G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x = 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int \partial_\alpha (A_\beta \partial_\mu A_\nu) d^4x = 0$$

con il teorema della divergenza si ottiene un integrale sul bordo che è nullo per le condizioni al bordo ipotizzate. Tale termine non contribuisce all'azione, pertanto nemmeno alla variazione dell'azione: le equazioni del moto sono le stesse.

**Osservazione.** Si considerino le due lagrangiane

$$\mathcal{L}' = b\mathcal{L}$$

con  $b$  costante. Esse implicano le stesse equazioni del moto. Non risulta difficile intravederne la dimostrazione.

Le lagrangiane

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{F}^\mu(\varphi, x)$$

con  $\partial_\mu \mathcal{F}^\mu$  derivata totale di una funzione arbitraria dei campi, producono le stesse equazioni del moto. Infatti

$$S' = \int \mathcal{L}' d^4x = \int \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{F}^\mu(\varphi, x) d^4x = S + \int_{\partial\Omega} \mathcal{F}^\mu(\varphi, x) d\sigma_\mu = S$$

dove si ha  $d\sigma_\mu = n_\mu d\sigma$  con  $n$  il vettore normale uscente per cui

$$\mathcal{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \mathcal{F}^\mu n_\mu d\sigma = \mathcal{F}^\mu d\sigma_\mu$$

L'integrale è nullo perché i campi tendono a zero ai bordi e dunque pure la variazione si annulla.

### 10.3 Tensore energia-impulso e leggi di conservazione

Il tensore energia-impulso contiene l'energia e la quantità di moto di un campo.

In meccanica classica, per passare dalla lagrangiana all'energia si utilizza l'hamiltoniana

$$H = \sum_a p^a \dot{q}^a - L = \sum_a \partial_{\dot{q}^a} L \dot{q}^a - L$$

Si potrebbe pensare che l'equivalente per un campo sia

$$\partial_{\partial_0 \varphi} \mathcal{L} \partial^0 \varphi - \mathcal{L}$$

ma, in verità, l'equivalente è il tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \varphi} \mathcal{L} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Esso è un tensore di tipo (2,0). Ci aspetta che la componente  $T^{00}$  sia legata alla densità di hamiltoniana, cioè l'energia.

**Proposizione.** Se la lagrangiana  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $x^\mu$  allora

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

per  $\varphi(x)$  soluzioni delle equazioni del moto, cioè vale la relazione lungo il moto. Questa relazione contiene una legge di conservazione. Si ha invarianza per traslazione spazio-temporale (e da Noether si sa che si conserva la quantità di moto e l'energia).

**Dimostrazione.** Per una lagrangiana  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x)$  si ha

$$\begin{aligned} d_{x^\mu} \mathcal{L} &= \partial_\varphi \mathcal{L} \partial_{x^\mu} \varphi + \partial_{\partial_\nu \varphi} \mathcal{L} \partial_\mu (\partial_\nu \varphi) + \partial_{x^\mu} \mathcal{L} = (d_{x^\nu} \partial_{\partial_\nu \varphi} \mathcal{L}) \partial_{x^\mu} \varphi + \partial_{\partial_\nu \varphi} \mathcal{L} \partial_\mu (\partial_\nu \varphi) + \partial_{x^\mu} \mathcal{L} \\ &= d_{x^\nu} (\partial_{\partial_\nu \varphi} \mathcal{L} \partial_{x^\mu} \varphi) + \partial_{x^\mu} \mathcal{L} \end{aligned}$$

Inoltre si sa

$$d_{x^\mu} \mathcal{L} = \delta_\mu^\nu d_{x^\nu} \mathcal{L}$$

Unendo le due si ottiene

$$d_{x^\nu} [\partial_{\partial_\nu \varphi} \mathcal{L} \partial_{x^\mu} \varphi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}] = -\partial_{x^\mu} \mathcal{L}$$

Se il secondo membro è nullo, allora il termine tra parentesi è conservato, cioè  $T_\mu^\nu$  è conservato cioè la tesi. Si noti che il termine tra parentesi ricorda l'integrale di Jacobi.

**Osservazione.** Dalla legge

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

si definiscono le quantità conservate

$$\mathcal{P}^\nu = \int_\Omega T^{0\nu} d^3x$$

infatti

$$d_t \mathcal{P}^\nu = d_t \int T^{0\nu} d^3x = \int \partial_0 T^{0\nu} d^3x = - \int \partial_i T^{i\nu} d^3x = T^{i\nu}|_{\partial\Omega} = 0$$



**Osservazione.** Si vuole rendere simmetrico il tensore energia impulso per ragioni di relatività generale. Si definisce  $T^{\mu\nu}$  in modo che sia simmetrico, ma che abbia le stesse proprietà di quanto definito in precedenza.

### 10.3.1 Tensore energia-impulso per campo elettromagnetico libero

La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \varphi = A^\mu$$

Il tensore energia-impulso è

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\rho} \mathcal{L} \partial^{\nu} A_{\rho} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial^{\nu} A_{\rho} + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

Si scrive il tensore in termini dei campi fisici. Dunque, la componente tempo-tempo è

$$\begin{aligned} T^{00} &= -\frac{1}{4\pi} F^{0\rho} \partial^0 A_{\rho} + \frac{1}{16\pi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{4\pi} F^{0i} \partial^0 A_i + \frac{1}{16\pi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{0i} (\partial^0 A_i - \partial_i A^0 + \partial_i A^0) + \frac{1}{8\pi} (|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{0i} (F^0_i + \partial_i A^0) + \frac{1}{8\pi} (|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} E^i E^i - \frac{1}{4\pi} F^{0i} \partial_i A^0 + \frac{1}{8\pi} (|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2) \\ &= \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \frac{1}{4\pi} E^i \partial_i A^0 \\ &= \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \frac{1}{4\pi} \partial_i (E^i A^0) - \cancel{(\partial_i E^i) A^0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ &= \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \frac{1}{4\pi} \partial_i (E^i A^0) \end{aligned}$$

Il primo termine è la densità volumetrica del campo elettromagnetico. Si vuole ottenere una quantità conservata, come  $\mathcal{P}$ . Dunque, integrando l'equazione su tutto il volume, si applica il teorema della divergenza al secondo termine che si annulla per le condizioni al bordo. Pertanto

$$\mathcal{P}^0 = \int_V T^{00} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) d^3x$$

Il termine  $T^{00}$  è la densità di energia del campo elettromagnetico.

Le componenti tempo-spaziali sono

$$T^{0i} = -\frac{1}{4\pi} F^{0\rho} \partial^i A_{\rho} + \frac{1}{16\pi} \cancel{\eta^{\mu\nu}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B})^i - \frac{1}{4\pi} \partial_j (F^{0j} A^i)$$

Il primo addendo è il vettore di Poynting. Inoltre, il suo integrale è nullo per la legge di conservazione. Si identifica la quantità di moto del campo elettromagnetico e la sua conservazione in assenza di sorgenti.

## Lezione 25

Si calcolano le componenti tempo-spaziali

$$\begin{aligned} T^{0i} &= -\frac{1}{4\pi} F^{0\rho} \partial^i A_{\rho} = -\frac{1}{4\pi} F^{0j} \partial^i A_j = -\frac{1}{4\pi} F^{0j} (\partial^i A_j - \partial_j A^i + \partial_j A^i) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{0j} F^i_j - \frac{1}{4\pi} F^{0j} \partial_j A^i = -\frac{1}{4\pi} F^{0j} F^i_j - \frac{1}{4\pi} \left[ \partial_j (F^{0j} A^i) - \cancel{(\partial_j F^{0j}) A^i} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{0j} F^i_j - \frac{1}{4\pi} \partial_j (F^{0j} A^i) = \frac{1}{4\pi} F^{0j} F^{ij} - \frac{1}{4\pi} \partial_j (F^{0j} A^i) \\ &= \frac{1}{4\pi} (-E^j)(-\varepsilon^{ijk} B^k) - \frac{1}{4\pi} \partial_j (F^{0j} A^i) = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B})^i - \frac{1}{4\pi} \partial_j (F^{0j} A^i) \end{aligned}$$

Dunque, come prima

$$\mathcal{P}^i = \int T^{0i} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E} \wedge \vec{B})^i d^3x$$

Il prodotto vettoriale è il vettore di Poynting che corrisponde alla densità di quantità di moto del campo elettromagnetico.

**Definizione simmetrica.** Il tensore energia-impulso definito presenta delle derivate che scompaiono quando integrate. Si può ridefinire il tensore di modo che tali termini non appaiano, ma mantenendo le stesse proprietà di conservazione e diventando simmetrico. Il tensore usato finora non è simmetrico. Si vedono alcuni problemi. Si può definire l'oggetto

$$M^{\alpha\beta\gamma} \equiv T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta$$

le cui componenti sono legate al momento angolare del campo elettromagnetico. Ad esempio

$$M^{012} = -\frac{1}{4\pi} [\vec{x} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B})]^3$$

Ci si aspetta che il corrispettivo della conservazione del momento angolare sia

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$$

per cui  $M^{0\beta\gamma}$  sono quantità conservate, ad esempio il momento angolare è conservato. Utilizzando il tensore energia-momento si ha

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = (\partial_\alpha T^{\alpha\beta}) x^\gamma + T^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\gamma - (\partial_\alpha T^{\alpha\gamma}) x^\beta - T^{\alpha\gamma} \delta_\alpha^\beta = 0 + T^{\gamma\beta} - 0 - T^{\beta\gamma}$$

Si ottiene l'equazione di continuità ( $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$ ) qualora  $T$  sia simmetrico.

Si nota un altro problema. Per una trasformazione di gauge (trasformazione che non influenza i campi fisici)

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \psi$$

il primo termine del tensore  $T^{\mu\nu}$ , cioè il termine asimmetrico, non è invariante, mentre il secondo sì.

Per questi motivi (ed altri) si vuole simmetrizzare il tensore energia-momento tramite la procedura di Benifante (?). Dunque, si vuole definire un tensore simmetrico

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{asim}}^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\mu\nu}$$

dove  $T_{\text{asim}}$  è il tensore energia-impulso definito in origine, mentre  $\tilde{T}$  è una correzione. Una proprietà da mantenere è

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

e si vuole che gli integrali conservati siano ancora l'energia e la quantità di moto

$$\int T^{0\mu} d^3x = \int T_{\text{asim}}^{0\mu} d^3x$$

Pertanto, per il termine correttivo deve valere

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0, \quad \int \tilde{T}^{0\mu} d^3x = 0$$

Osservando la seconda, si vuole scrivere

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\sigma S^{\mu\nu\sigma}$$

Se

$$S^{\mu\nu\sigma} = -S^{\sigma\nu\mu}$$

allora vale la prima equazione

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial_\sigma S^{\mu\nu\sigma}) = 0$$

in quanto il tensore delle derivate è simmetrico in  $\mu$  e  $\sigma$ , mentre  $S$  ne è anti-simmetrico. Pertanto

$$S_{\sigma\nu\mu} = \frac{1}{4\pi} F_{\sigma\mu} A_\nu$$

da cui

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu)$$

Dunque, il tensore energia-impulso simmetrico è

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi} \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu \\ &= \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho \\ &= \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi} \eta^{\nu\sigma} F_{\sigma\rho} F^{\rho\mu} \\ &= \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

nella seconda riga si ricorda  $\partial_\rho F^{\mu\rho} = -\partial_\rho F^{\rho\mu} = -4\pi J^\mu = 0$  per campo elettromagnetico libero: svolgendo la derivata, rimane solo uno dei due addendi della derivata di un prodotto.

**Proposizione.** Il tensore così definito è simmetrico. Esso ha traccia nulla

$$T^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} F_{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} F_{\mu\rho} = 0$$

L'importanza di una traccia nulla è legata all'invarianza per dilatazioni. Il tensore è anche gauge-invariante perché costituito solamente da tensori gauge-invarianti. Le sue densità volumetriche sono

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{2}, \quad T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B})^i$$

In quanto  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  si ha la conservazione dell'energia e della quantità di moto.

### 10.3.2 Tensore energia-impulso in presenza di sorgenti

La presenza di sorgenti non permette la conservazione dell'energia e del momento del campo elettromagnetico libero perché esso interagisce con le cariche. Dunque, il tensore deve contenere dei termini che descrivono l'energia e la quantità di moto delle sorgenti. Dunque

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\beta} &= \frac{1}{4\pi} \left[ (\partial^\mu F_{\mu\lambda}) F^{\lambda\beta} + F_{\mu\lambda} \partial^\mu F^{\lambda\beta} + \frac{1}{2} F_{\mu\lambda} \partial^\beta F^{\mu\lambda} \right] \\ \partial_\mu T^{\mu\beta} + F^{\beta\lambda} J_\lambda &= \frac{1}{8\pi} F_{\mu\lambda} [\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda}] \\ &= \frac{1}{8\pi} F_{\mu\lambda} [\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda F^{\mu\beta}] = 0 \end{aligned}$$

Si ricorda che  $F$  è anti-simmetrico. Alla seconda riga si utilizza l'equazione di Maxwell (tramite l'identità di Bianchi)

$$\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0 \iff \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

Nella terza riga, le parentesi sono simmetriche per uno scambio di  $\mu$  e  $\lambda$ , mentre il fattore davanti ne è anti-simmetrico.

Pertanto, per un campo elettromagnetico con sorgenti vale

$$\partial_\mu T^{\mu\beta} = -F^{\beta\lambda} J_\lambda$$

Il secondo termine è la derivata di un tensore energia-impulso riferito al campo elettromagnetico nella materia. Da ciò si ha la conservazione dell'energia e del momento sia del campo che delle sorgenti.

## Lezione 26

L'interazione del campo con le sorgenti causa un trasferimento di energia e quantità di moto tra i due. Si costruisce un tensore energia-impulso per le cariche. Sia  $T_{\text{em}}$  il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico libero.

**Tensore energia-impulso per un sistema di particelle.** Il tensore energia-impulso per un sistema di particelle (anche elettricamente neutre) è

$$T_{\text{mat}}^{\mu\nu}(x) = \sum_n p_n^\mu(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \, d_t x_n^\nu$$

dove  $\vec{x}_n(t)$  è la traiettoria della particella  $n$ -esima. Questa definizione è simile alla definizione della quadri-corrente

$$J^\nu(x) = \sum_n q_n \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \, d_t x_n^\nu$$

Il tensore energia-impulso sopra definito è simmetrico. Considerato

$$p_n^\mu = m \, d_\tau x_n^\mu = E_n \, d_t x_n^\mu$$

si ha

$$T_{\text{mat}}^{\mu\nu}(x) = \sum_n \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{E_n} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

Si può verificare l'esistenza di una scrittura del tensore in cui si hanno espressioni con precise regole di trasformazione:

$$T_{\text{mat}}^{\mu\nu}(x) = \int \sum_n p_n^\mu \, d_\tau x_n^\nu \, \delta^{(4)}(x^\mu - x_n^\mu(\tau)) \, d\tau$$

Si è visto il procedimento per arrivare a questa scrittura quando si è espresso  $J^\mu(x)$  in modo tensoriale. Si ricorda che la delta di Dirac in quattro dimensioni è un invariante di Lorentz. Inoltre, si ha

$$\partial_\nu T_{\text{mat}}^{\mu\nu} = \sum_n f_n^\mu(\tau) \, d_t \tau \, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

dove  $f_n$  è la quadri-forza sulla particella  $n$ -esima.

Se le particelle sono delle cariche allora

$$f^\mu = d_\tau p^\mu = q F^{\mu\nu} \, d_\tau x_\nu$$

Pertanto

$$\partial_\nu T_{\text{mat}}^{\nu\mu} = \partial_\nu T_{\text{mat}}^{\mu\nu} = \sum_n q_n F^{\mu\lambda} \, d_\tau (x_n)_\lambda \, d_t \tau \, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = F^{\mu\lambda} J_\lambda$$

ricordando la definizione di  $J$ . Mettendo insieme i tensori del campo elettricamente e delle cariche si ha

$$\partial_\mu T_{\text{em}}^{\mu\nu} = -F^{\nu\lambda} J_\lambda = -\partial_\mu T_{\text{mat}}^{\mu\nu} \implies \partial_\mu T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = 0$$

Si ha la conservazione dell'energia e del momento totale di un sistema costituito dal campo elettromagnetico e da cariche. Dunque, il tensore energia-impulso totale è

$$T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = T_{\text{em}}^{\mu\nu} + T_{\text{mat}}^{\mu\nu}$$

## 11 Campi scalari reali

Si salta l'argomento della soluzione delle equazioni di Maxwell in forma tensoriale. La soluzione coinvolge il propagatore del fotone che si trova dalle funzioni di Green delle equazioni di Maxwell.

Invece, si generalizza l'equazione di Schrödinger utilizzando un formalismo tensoriale: si trova l'equazione di Klein-Gordon. Si riscontrano alcuni problemi che vengono poi risolti nella teoria dei campi quantistici (QFT).

Si consideri un campo scalare  $\varphi(x)$  (pertanto invariante). Si cerca la lagrangiana più semplice per un campo di tale tipo. Si utilizza il principio di semplicità. Si ha

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}k [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + b\varphi^2]$$

Essa è quadratica nelle derivate del campo. La funzione arbitraria che si aggiunge è  $b\varphi^2$ , perché  $b\varphi$  si comporta come costante nelle equazioni di Eulero-Lagrange. I parametri  $k$  e  $b$  sono arbitrari. L'unica scelta rilevante di  $k = \pm 1$  è il segno e sempre il segno è importante per  $b$ .

Il termine quadratico nella derivata è

$$(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) = (\partial_0 \varphi)^2 - (\vec{\nabla} \varphi)^2$$

**Equazioni di Eulero-Lagrange.** Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\partial_\varphi \mathcal{L} - \partial_\mu (\partial_{\partial_\mu \varphi} \mathcal{L}) = 0$$

Il primo termine è

$$\partial_\varphi \mathcal{L} = kb\varphi$$

Il termine all'interno della derivata è

$$\begin{aligned} \partial_{\partial_\mu \varphi} \mathcal{L} &= \partial_{\partial_\mu \varphi} \left[ \frac{1}{2}k\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \varphi)(\partial_\beta \varphi) \right] = \frac{1}{2}k\eta^{\alpha\beta} \left[ \delta_\alpha^\mu (\partial_\beta \varphi) + (\partial_\alpha \varphi) \delta_\beta^\mu \right] \\ &= \frac{1}{2}k [\eta^{\mu\beta}(\partial_\beta \varphi) + \eta^{\alpha\mu}(\partial_\alpha \varphi)] = k \partial^\mu \varphi \end{aligned}$$

Dunque, il secondo addendo è

$$\partial_\mu (k \partial^\mu \varphi) = k \square \varphi$$

Le equazioni del moto sono

$$(\square - b) \varphi = 0$$

Per fissare i segni di  $k$  e  $b$  bisogna costruire un oggetto che abbia significato fisico: si utilizza la densità di energia del sistema (una hamiltoniana) e si impone la sua positività.

Si calcola la densità di momento coniugato

$$\pi^\mu = \partial_{\partial_\mu \varphi} \mathcal{L} = k \partial^\mu \varphi$$

La densità di hamiltoniana (cioè la componente  $T^{00}$  del tensore energia impulso) è

$$\mathcal{H} = \pi^0(\partial_0 \varphi) - \mathcal{L} = k(\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2}k [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + b\varphi^2] = \frac{1}{2}k [(\partial_0 \varphi)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 - b\varphi^2]$$

In quanto essa dev'essere una limitata inferiormente e positiva si ha

$$k = 1, \quad b = -m^2 < 0$$

Pertanto si ha la lagrangiana di Klein-Gordon e l'omonima equazione

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^2], \quad (\square + m^2) \varphi(x) = 0$$

Per un campo scalare, il tensore energia-impulso è già simmetrico:

$$T^{\mu\nu} = (\partial_{\partial_\mu \varphi} \mathcal{L}) \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - \frac{1}{2} [(\partial^\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^2] = \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

L'equazione di Klein-Gordon è l'equazione differenziale soddisfatta da un campo scalare per la lagrangiana più semplice possibile.

**Equazione di Schrödinger relativistica.** Il modo corretto di generalizzare l'equazione di Schrödinger porta all'equazione di Dirac. Si studia il procedimento per la generalizzazione relativistica. L'equazione di Schrödinger è

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \Psi(t, \vec{x}) = i\hbar \partial_t \Psi(t, \vec{x})$$

L'equazione equivale alla relazione classica

$$K + U = E$$

Per ottenere da essa l'equazione di Schrödinger si promuovono la posizione ed il momento ad operatori (indicati dal cappuccio):

$$x \mapsto \hat{x}, \quad \hat{x}\Psi = x\Psi \qquad p \mapsto \hat{p}, \quad \hat{p}\Psi = -i\hbar \partial_x \Psi$$

da cui

$$K = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \mapsto -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \qquad E \mapsto i\hbar \partial_t$$

Si studia un procedimento analogo per l'equazione in relatività speciale. Risulta evidente

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu$$

Un primo modo per il caso di particella libera è

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \implies i\hbar \partial_t \Psi = \sqrt{m^2 - \hbar^2 \nabla^2} \Psi$$

per cui nel limite classico si ha

$$E = m \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}} = m \left[ 1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} + o(|\vec{p}|^2) \right]$$

pertanto

$$i\hbar \partial_t \Psi = [m(1 - \hbar^2 \nabla^2 + \dots)] \Psi$$

Questo non va bene. Un altro modo per vederlo è osservare l'ordine della derivata della posizione e confrontarla con quella del tempo: l'ordine è diverso, ma, in relatività, lo spazio ed il tempo sono equiparati. Quindi, un altro metodo è utilizzare il quadrato

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$$

da cui si ottiene

$$(p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \implies (\hbar^2 \partial_t^2 \Psi - \hbar^2 \nabla^2 + m^2) \Psi = 0$$

cioè l'equazione di Klein-Gordon

$$\left[ \square + \frac{m^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0$$

Questo giustifica anche la scelta  $b = -m^2$  perché  $m$  è proprio la massa della particella. L'equazione di Klein-Gordon è un primo tentativo di generalizzare l'equazione di Schrödinger. Essa si può ricavare sia da una lagrangiana semplice sia promuovendo delle quantità classiche ad operatori.

**Problemi.** Si evidenziano alcuni problemi

- Utilizzando il quadrato dell'energia, il significato dell'energia associata ad una particella che soddisfa l'equazione è ambiguo (a causa della scelta del segno quando si prende la radice quadrata; si nota che energia negativa corrisponde alla predizione di anti-particelle).
- In meccanica quantistica, il quadrato della funzione d'onda è una densità di probabilità. Esiste una equazione di continuità (per la derivata temporale dell'integrale di  $|\Psi|^2$ ). In questo caso non si può costruire una probabilità definita positiva. Si può trovare un'equazione di continuità

$$\partial_\mu(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*) = 0$$

tuttavia, la componente zero della parentesi (cioè della corrente) non è positiva definita

$$j^0 \propto i(\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*)$$

Ma in meccanica quantistica si deve avere

$$\partial_t |\Psi|^2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

**Osservazione.** Il procedimento corretto per generalizzare l'equazione di Schrödinger è tramite l'equazione di Dirac. Tuttavia, l'equazione di Klein-Gordon è comunque utile. Ponendo  $\hbar = 1$ , si ha

$$(\square + m^2) \Psi(t, \vec{x}) = 0$$

scegliendo soluzioni del tipo  $\Psi = e^{\pm i k_\mu x^\mu}$  si ha

$$(-k^2 + m^2) \Psi = 0$$

se  $k^2 = m^2$  allora  $\Psi$  è soluzione. Pertanto, si identifica  $k$  con il momento  $p$  della particella (in quanto la sua norma è sempre  $m$ ). Dunque, la soluzione (che è un campo classico) è

$$\Psi = \int g(\vec{k}) e^{i k x} + g^*(\vec{k}) e^{-i k x} d^3 k$$

In questo modo l'integrando è sempre reale. Inoltre si pone

$$k^0 = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

Quantizzare  $\Psi$  scritto nel modo precedente è il punto di partenza per la teoria dei campi quantistici. La versione quantizzata della soluzione è

$$\hat{\Psi}(t, \vec{x}) = \int a(\vec{k}) e^{i k x} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-i k x} d^3 k$$

dove  $a$  è l'operatore di annichilazione, mentre il suo aggiunto è l'operatore di creazione. In questo modo  $\hat{\Psi}$  è un campo scalare quantizzato costituito da fasi di onde piane i cui coefficienti agiscono su elementi di uno spazio di Hilbert. L'operatore di creazione agisce sul vuoto della teoria di campo creando uno stato di una singola particella libera con momento  $\vec{k}$ :

$$a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle$$

All'interno di  $\hat{\Psi}$  sono contenuti i concetti di particella ed anti-particella.

Il campo di Higgs è un campo scalare che soddisfa l'equazione di Klein-Gordon. Non solo è un campo scalare, ma anche un doppietto. Esso si costruisce con l'equazione di Klein-Gordon.