

# Laboratory 2

May 20, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Probabilità condizionata . . . . .	3
1.2	Variabili aleatorie discrete e continue . . . . .	4
1.3	Distribuzioni di probabilità . . . . .	4
1.3.1	Distribuzioni notevoli . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Teorema centrale del limite e trasformazioni di variabili</b>	<b>7</b>
2.1	Teorema centrale del limite. . . . .	7
2.2	Cambio di variabile. . . . .	8
2.3	Random variables discrete . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Poisson e <math>pdf</math> multidimensionali</b>	<b>11</b>
3.1	Distribuzione di Poisson . . . . .	11
3.2	Distribuzione esponenziale . . . . .	13
3.3	$pdf$ $n$ dimensioni . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Cambio di variabile in <math>n</math> dimensioni, <math>pdf</math> formale multivariata, propagazione degli errori</b>	<b>15</b>
4.1	Cambio di variabile . . . . .	15
4.2	$pdf$ formale multivariata . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Propagazione degli errori (statistici)</b>	<b>18</b>
5.1	Caso analitico . . . . .	18
5.2	Caso approssimato . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Random walk in due dimensioni</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Statistica</b>	<b>22</b>
7.1	Independent Identically Distributed . . . . .	22
7.2	Distribuzione chi-quadro . . . . .	27
7.3	Likelihood . . . . .	28
7.3.1	Extended Maximum Likelihood . . . . .	34
7.4	Minimi quadrati . . . . .	34
7.5	Test del chi quadro . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Esperienze laboratorio</b>	<b>40</b>
8.1	Ottica 1 . . . . .	40
8.1.1	Riflessione e rifrazione . . . . .	40
8.1.2	Specchi e lenti . . . . .	42
8.2	Circuiti 1 . . . . .	43
8.3	Ottica 2 . . . . .	48
8.4	Circuiti 2 . . . . .	51
8.4.1	Tensione ad onda quadra . . . . .	52

8.4.2	Corrente alternata . . . . .	56
8.5	Ottica 3 . . . . .	57
8.5.1	Esperienze . . . . .	58
8.6	Circuiti 3 . . . . .	59
8.6.1	Funzione di trasferimento . . . . .	61
8.6.2	Corrente impulsata. . . . .	62

## Lecture 1: Introduzione

gio 07 ott  
2021 13:30

### 1 Introduzione

La statistica utilizza la probabilità, ma non ha a disposizione tutte le informazioni: prende un campione ed inferisce delle informazioni.

**Definizione.** Un evento casuale è il risultato di un esperimento o di un'osservazione che non può essere previsto con certezza.

Esso è la base della probabilità in quanto:

- dev'essere ripetibile (cioè osservare l'avvenimento più volte);
- deve presentare delle modalità mutualmente esclusive;
- deve essere singolarmente non prevedibile.

**Definizione.** Lo spazio campionario (sample place, spazio delle fasi in alcuni contesti) è un insieme  $\Omega$  di tutte le possibili modalità con cui l'evento può accadere.

**Definizione.** La popolazione è l'insieme di tutti i possibili eventi.

**Definizione.** Un campione è l'insieme degli eventi casuali raccolti.

Gli insiemi degli eventi si possono rappresentare tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

**Definizione.** assiomatica di probabilità. Si dà una definizione assiomatica della probabilità attraverso gli assiomi di Kolmogorov La probabilità è una funzione  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$  che rispetta le seguenti proprietà:

- $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$ ;
- $P(\Omega) = 1$ ;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  quando  $A \cap B = \emptyset$ .

**Conseguenze.**

- $P(A) = 1 - P(A^c)$ :  
 $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$
- $P(A) \leq 1$  :  
 $P(A^c) \geq 0 \implies P(A) = 1 - P(A^c) \leq 1.$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

dimostra.

**Definizione.** classica di probabilità. La probabilità di un evento  $A$  è definita come il rapporto tra i casi favorevoli ed i casi totali.

**Definizione.** frequentista di probabilità. In un campione di  $N$  eventi, la probabilità associata all'evento di tipo  $A$  è la frazione di casi per cui  $A$  avviene calcolata per  $N \rightarrow \infty$ :

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{N}.$$

La definizione di limite in statistica è diversa da quella dell'analisi matematica.

### Osservazioni.

- Per  $N \rightarrow \infty$  il campione tende alla popolazione.
- La probabilità così definita soddisfa gli assiomi di Kolmogorov.
- Se si parte dalla definizione classica allora la definizione frequentista è il teorema di Bernoulli o legge dei grandi numeri.

[rivedi] La definizione frequentista di probabilità è la statistica frequentista, ma è limitante: spesso si desidera associare una probabilità non all'accadere di un evento, ma alla veridicità di una affermazione (come "domani piove").

L'altro approccio è quello Bayesiano. [rivedi] Tuttavia, nella formulazione della statistica come estensione della logica matematica, si introduce la plausibilità di una teoria. È possibile introdurre in modo rigoroso l'utilizzo delle conoscenze a priori che si hanno riguardo il fenomeno che si sta studiando.

## 1.1 Probabilità condizionata

Si consideri una funzione di probabilità  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ . Si  $A, B$  due eventi in  $\Omega$  non disgiunti. Allora la probabilità condizionata è

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Si normalizza la probabilità dell'intersezione sulla probabilità di  $A$ : si riduce il sample space. Inoltre

- $P(X)$  possiede  $X$  come variabile indipendente.
- $P(X|A)$  è una nuova funzione con  $X$  variabile indipendente e  $A$  come parametro.
- $P(\dots|A)$  soddisfa gli assiomi.

**Proposizione.** Due eventi sono indipendenti se e solo se  $P(B|A)$  è la stessa per ogni  $A$ :  $P(B|A) = P(B|\Omega) = P(B)$ .

Due eventi sono indipendenti se e solo se  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

**Teorema di Bayes.** Si consideri

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dato che  $A \cap B = B \cap A$  risulta

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B) \implies P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Il teorema di Bayes applicato alla fisica assume la forma

$$P(\text{teoria}|\text{risultato}) = \frac{P(\text{risultato}|\text{teoria})}{P(\text{risultato})} P(\text{teoria}).$$

## 1.2 Variabili aleatorie discrete e continue

In fisica, l'evento casuale è identificato con una random variable. Essa può essere discreta oppure continua.

**Random variable discreta.** Si ha

- $\Omega \subset \mathbb{N}$
- $P(k)$ , probabilità dell'evento  $k$
- $P : \Omega \subset \mathbb{N} \rightarrow [0, 1], P(k) > 0, \forall k$

[rivedi]

**Random variable continua.** Si ha

- $\Omega \subset \mathbb{R}$
- $P(a < x < b)$ , probabilità di trovarsi entro un certo intervallo
- Si definisce una densità di probabilità, pdf, tale per cui  $P(a < x < b) = \int pdf(x) dx$

## Lecture 2

### 1.3 Distribuzioni di probabilità

gio 14 ott  
2021 13:30

Se l'evento casuale è descritto con un numero reale  $x$  si ha una random variable per cui vale

- $\Omega \subset \mathbb{R}$ ;
- $P(x)$  è un infinitesimo in quanto  $\Omega$  ha una quantità infinita di eventi;
- La probabilità associata ad un intervallo è  $P(a < x < b) \geq 0$ .

**Esempio.** La temperatura  $T$  è un numero reale espresso da un numero limitato di cifre significative dettato dalla sensibilità dello strumento.

Ripetendo  $N$  volte le misure si ha:

- I valori sono registrati attorno ad un valor medio (questo vale supponendo che le fluttuazioni siano confrontabili con la sensibilità dello strumento).
- Si hanno delle classi di frequenza: si conta il numero di misure in un certo intervallo,  $f = \frac{n}{N}$ .
- Si ottiene un istogramma che ha area unitaria per costruzione.

Nell'istogramma, l'area di un bin è la probabilità che una misura cada in tale bin. La lunghezza di un intervallo può essere ridotta (magari aumentando di pari passo la sensibilità dello strumento). Aumentando la quantità di misure e diminuendo la larghezza dei bin si ottiene una curva continua la cui area è unitaria: si ottiene una funzione di densità di probabilità (*pdf*, probability density function).

Per una random variable continua si definisce *pdf* una funzione:

$$pdf : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Mediante la quale si calcola la probabilità:

- $P(x < RV < x + dx) = pdf \cdot dx$
- $P(a < x < b) = \int_a^b pdf(x) \cdot dx \leq 1$

Per essere una *pdf* bisogna soddisfare gli assiomi di Kolmogorov:

- $pdf(x) > 0, \forall x$ ;
- $\int_{\Omega} pdf(x) dx = 1$ ;
- $P(a < x < b) = \int_a^b pdf(x) dx$ .

Si definisce la funzione cumulativa di densità (cdf, cumulative density function) come

$$cdf(x) = \int_a^x pdf(x) dx.$$

Di solito  $a \rightarrow -\infty$ . La *cdf* è la primitiva della *pdf* e restituisce una probabilità

$$pdf(x) = \frac{d}{dx}cdf(x) \iff cdf(x) = \int_a^x pdf(x) dx.$$

Alcuni parametri caratteristici sono:

- Valor medio,
- moda,
- mediana,
- varianza,
- skewness (obliquità),
- kurtosis (gobba).

Conoscere solo l'espressione di una *pdf* non è significativo. Quando si costruiscono modelli complicati è spesso impossibile trovare una forma analitica; dunque si utilizzano tali parametri.

Sia  $u(x)$  una funzione con random variable indipendente  $x$ . Il valore atteso di  $u(x)$  è

$$E[u(x)] = \int_{\Omega} u(x) pdf(x) dx.$$

Essa è una media pesata sulla *pdf*. L'operatore del valor atteso è lineare:

- $E[u(x) + v(x)] = E[u(x)] + E[v(x)]$ ;
- $E[ku(x)] = kE[u(x)]$ .

**Media.** La media  $\mu$  è il valore atteso di  $x$  :

$$E[x] = \int_{\Omega} x pdf(x) dx = \mu.$$

Essa equivale alla media aritmetica di  $x$  ottenuta considerando l'intera popolazione. La media non va confusa con la media campionaria.

**Varianza.** La varianza  $\sigma^2$  è

$$E[(x - \mu)^2] = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 pdf(x) dx = \sigma^2.$$

La varianza è anche detta scarto quadratico medio. La deviazione standard  $\sigma$  è legata alla larghezza della *pdf*. Inoltre vale

$$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2.$$

**Moda e mediana.** La moda è il massimo della *pdf*. Mentre la mediana divide a metà la *pdf*. La moda può avere più di un valore: si parla di distribuzioni multimodali (bi-, tri-, ...).

La media è adatta a manipolazioni matematiche; tuttavia, essa è influenzata da valori estremi. La mediana è l'opposto.

**Momento.** Il momento di ordine  $m$  è

$$E[x^m] = \int_{\Omega} x^m \text{pdf}(x) \, dx.$$

Il momento di ordine 1 è la media. I momenti centrali sono

$$E[(x - \mu)^m] = \int_{\Omega} (x - \mu)^m \text{pdf}(x) \, dx.$$

Il momento centrale di ordine

- 1 è sempre nullo;
- 2 è la varianza, legata alla larghezza;
- 3 è la skewness  $\gamma_1 = \frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3}$ , legata all'asimmetria;
- 4 è la kurtosis  $\gamma_2 = \frac{E[(x-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3$ , legata al picco e si prende come riferimento la gaussiana.

Se esistono i momenti centrali allora questi identificano univocamente la *pdf* e ciò è importante quando la *pdf* non è analitica, ma si ha una stima dei momenti centrali.

**Riproduttività.** Si considerino  $x, y$  random variable con medesima *pdf*, ma diversi parametri. Se  $z = x + y$  ha la stessa *pdf* allora la *pdf* gode della proprietà di riproduttività.

### 1.3.1 Distribuzioni notevoli

La modellizzazione di specifici processi aleatori porta a costruire specifiche *pdf* che li descrivono. La *pdf*( $x; \alpha, \dots$ ) è caratterizzata da

- una forma funzionale;
- parametri, spesso espressi in termini dei momenti.

**Uniforme.** La distribuzione uniforme descrive una random variable con stessa densità di probabilità per ogni elemento di  $\Omega$ . I PRNGs (pseudo-random number generators) hanno distribuzioni quasi uniformi. Si vede successivamente come a partire da una distribuzione uniforme si può ricavare una distribuzione arbitraria.

Sia  $\Omega = [a, b]$ ,  $\text{pdf}(x) = k, \forall x \in \Omega$ . Dalla condizione di normalizzazione segue

$$\int_{\Omega} \text{pdf}(x) \, dx = \int_a^b k \, dx = 1 \iff k = \frac{1}{b-a}.$$

Dunque si dice distribuzione uniforme

$$U(x; a, b) = \frac{1}{b-a}.$$

I parametri sono gli estremi dell'intervallo. Inoltre

$$E[x] = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}[x] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Gode della proprietà di riproduttività e

$$\text{cdf}(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}(x-a).$$

**Esempio.** Si supponga di misurare una temperatura con un termometro con una bassa sensibilità. Le fluttuazioni del campione sono molto piccole. Dunque, il risultato ripetutamente misurato è sempre lo stesso. La misura di  $x_0$  è di sicuro tra  $x_0 - 0.5$  e  $x_0 + 0.5$ . Ma questa considerazione è diversa dall'incertezza casuale perché la distribuzione è uniforme. Il valore reale è qualsiasi tra  $[x_0 - 0.5, x_0 + 0.5]$ . Dunque, se si volesse confrontare tale valore con uno casuale bisogna usare la deviazione standard. Inoltre, la probabilità entro  $1\sigma$  non è sempre 68%, ma è comunque prossima a tale valore.

**Gaussiana.** Se le barre di errore fissano la sensibilità allora un fit deve passare per tutte le barre di errore perché si ha la certezza che la misura sia all'interno dell'intervallo di incertezza. Per errori statistici è insolito che il fit passi per tutte le barre; qualora sia il caso, si potrebbe aver sovrastimato l'errore.

Inoltre

$$E[x] = \mu, \quad \text{Var}[x] = \sigma, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Per la distribuzione gaussiana si ha un valore di Full Width at Half-Maximum (FWHM) di  $2\sqrt{2\ln 2}$ . Essa è anche riproduttiva.

Si definisce la distribuzione gaussiana standardizzata:  $\mu = 0, \sigma = 1$ . Una qualsiasi gaussiana può essere riportata ad una gaussiana standard.

Inoltre

$$\text{cdf}(x) = \int_{-\infty}^x G(x) dx = \text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**Breit-Wigner o lorentziana.** Si ha

$$BW(x; \alpha, M) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(x-M)^2}{\alpha^2}}.$$

Non ha media né momenti. Essa è la distribuzione da considerare per particelle ed è simmetrica rispetto ad  $M$ .

## Lecture 3

## 2 Teorema centrale del limite e trasformazioni di variabili

gio 21 ott  
2021 13:30

Campionamento.

Si consideri una popolazione di eventi che si possono classificare in un sample space. Campionare significa estrarre casualmente dalla popolazione così da costituire un campione. Molte volte la popolazione è infinita, quindi è utile utilizzare una distribuzione. Bisogna trovare un algoritmo che campioni rispettando la distribuzione della popolazione. Si definisce il campionamento di una *pdf* dove la random variable  $x$  è un numero reale.

### 2.1 Teorema centrale del limite.

La funzione di una random variable è anch'essa una random variable. Il teorema centrale del limite studia la *pdf* di una random variable funzione di random variables. Si considerino  $N$  distribuzioni con  $\mu, \sigma^2$  finite; si estragga un campione da ciascuna, allora

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

è una random variable. In particolare,  $\bar{x}$  è distribuita in modo gaussiano per  $N \rightarrow +\infty$  con media pari alla somma delle medie e varianza pari alla somma delle varianze.

La media e la varianza di  $\bar{x}$  si possono calcolare senza conoscere la *pdf* e anche per  $N$  finito (si considera che medie e varianze siano indipendenti):

- Media  $\mathbb{E}[\bar{x}] = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \mu_i}{N}$  detta valor di aspettazione.
- Varianza  $\text{Var}[\bar{x}] = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum \sigma_i^2}{N^2}$ .

Per dimostrare tale fatto si utilizza la linearità dell'operatore di aspettazione quando gli eventi sono indipendenti  $\mathbb{E}[x_1 + x_2] = \mathbb{E}[x_1] + \mathbb{E}[x_2]$ . Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x_1 + x_2] &= \int (x_1 + x_2) \text{pdf}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int x_1 \text{pdf}_1 dx_1 \int \text{pdf}_2 dx_2 + \int x_2 \text{pdf}_2 dx_2 \int \text{pdf}_1 dx_1 = \mathbb{E}[x_1] \cdot 1 + \mathbb{E}[x_2] \cdot 1.\end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbb{E}[\bar{x}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum x_i}{N}\right] = \frac{\sum \mathbb{E}[x_i]}{N} = \frac{\sum \mu_i}{N}.$$

ed in modo analogo per la varianza. Per il TCL, per  $N \rightarrow +\infty$  si ottiene una gaussiana

$$\text{pdf}(\bar{x}) = \text{pdf}\left(\frac{\sum x_i}{N}\right) \rightarrow G(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}).$$

Bisogna notare che il TCL non afferma che la somma di  $N$  distribuzioni tenda ad una gaussiana.

**Applicazioni del TCL.** La grandezza fisica è affetta da un errore casuale. In altri casi, la lettura è sempre la stessa, si ha comunque l'errore dovuto alla sensibilità. Si consideri  $x_0$  il vero valore;  $x$  il risultato di una misura;  $\varepsilon$  l'errore associato a tale misura che è la somma di tanti  $\varepsilon_i$  errori casuali con  $\text{pdf}$  e dunque  $\varepsilon$  è una variabile aleatoria. La variabile  $x = x_0 + \varepsilon$  è aleatoria con una  $\text{pdf}$  associata.

Ripetere la misura significa campionare la  $\text{pdf}(x)$  che dipende  $\text{pdf}(\varepsilon)$ . Se  $\varepsilon$  è la somma di errori casuali, ciascuno con una  $\text{pdf}$ , allora il TCL afferma che  $\text{pdf}(\varepsilon)$  è gaussiana. La  $\text{pdf}(\varepsilon)$  è centrata in zero, altrimenti si ha un errore sistematico. La media della  $\text{pdf}(x)$  è il valore vero.

Un'altra applicazione del TCL è la generazione di numeri casuali. Tramite una  $\text{pdf}$  uniforme si può passare ad una  $\text{pdf}$  gaussiana sommando i valori campionati dalla  $\text{pdf}$  di partenza.

Da una random variable  $x$  descritta da una  $\text{pdf}_1(x)$  si vuole ricavare  $\text{pdf}_2(y)$  associata ad una random variable ottenuta mediante la trasformazione  $x \mapsto y(x)$ . Possono sorgere due problemi:

- calcolare  $\text{pdf}_2(y)$  analiticamente;
- determinare  $\mu_y$  e  $\sigma_y$ , cioè propagare gli errori.

**Esempio.** Dalla  $\text{pdf}(x)$  uniforme si vuole passare ad una  $\text{pdf}(y)$  tale che  $y = \cos x$  sull'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Si campiona  $\text{pdf}(x)$  e si osserva  $y = \cos x$ . I punti di  $\text{pdf}(y)$  si aggregano vicino a 1 quindi l'asse  $y$  non è distribuito uniformemente.

## 2.2 Cambio di variabile.

Si studia il cambio di variabile in una dimensione. Sia  $x$  una random variable descritta da una  $\text{pdf}_1$ . Sia  $y = y(x)$  una funzione biunivoca (quindi monotona) e derivabile. Allora  $y$  è una random variable distribuita con  $\text{pdf}_2(y)$  data da

$$\text{pdf}_2(y) = |x'(x)| \text{pdf}_1(x).$$

**Dimostrazione.** Si consideri un intervallo infinitesimo  $dx$  e sia  $dy$  l'intervallo trasformato. Ai due intervalli si associa la stessa probabilità:

$$\text{pdf}_1(x) dx = \text{pdf}_2(y) dy \iff \text{pdf}_2(y) = \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| \text{pdf}_1(x) = |x'(y)| \text{pdf}_1(x) = \left| \frac{1}{y'(x)} \right| \text{pdf}_1(x).$$



**Esempio.** Sia  $x$  uniforme in  $[0, \pi]$ , con  $pdf = \frac{1}{\pi}$ ; sia  $y = \cos x$ . Allora

$$pdf(y) = \frac{1}{x} \left| \frac{d}{dy} \arccos y \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

**Esempio.** Si vede la distribuzione normale. Sia  $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ,  $x = \sigma y + \mu$ ,  $x' = \sigma$  allora:

$$G(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \implies pdf(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

**Esempio.** Si vede la distribuzione log-normale. Sia  $x$  un random variable con distribuzione gaussiana. Sia  $y = e^x$ ,  $x = \ln y$ ,  $x' = \frac{1}{y}$ . Allora

$$pdf(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Con momenti

$$\mathbb{E}[y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad \text{Var}[y] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Nel caso in cui si voglia ottenere solamente  $\mu_y$  e  $\sigma_y^2$  si propagano gli errori.

**Trasformazioni lineari.** Sia  $v = \frac{L}{t}$  la velocità con il tempo  $t$  misura e la lunghezza  $L$  fissa. Sia  $y(x)$  una funzione lineare in  $x$ ,  $y = ax + b$ , si usa la linearità dell'operatore di aspettazione:

$$\begin{aligned} \mu_y = \mathbb{E}[y] &= \int y pdf(y) dy = \int y(x) pdf(x) dx \\ &= \int ax + b pdf(x) dx = a\mathbb{E}[x] + b = a\mu_x + b = y(\mu_x) \end{aligned}$$

Similmente  $\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$ .

**Trasformazioni non lineari.** Per mezzo di Taylor risulta

$$y(x) = y(\mu_x) + \frac{dy(\mu_x)}{dx} (x - \mu_x) + o(x).$$

Dunque la media risulta essere

$$\begin{aligned} \mu_y = \mathbb{E}[y] &= \int y pdf(y) dy = \int y(x) pdf(x) dx \approx \int y(\mu_x) pdf(x) + \frac{dy(\mu_x)}{dx} (x - \mu_x) pdf(x) dx \\ &= y(\mu_x) + \frac{dy(\mu_x)}{dx} \int (x - \mu_x) pdf(x) dx = y(\mu_x). \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è nullo perché esso è il momento centrale del primo ordine. Tuttavia, al secondo ordine i termini non si annullano:

$$\begin{aligned} \mu_y &\approx y(\mu_x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 y(\mu_x)}{dx^2} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 &= \mathbb{E}[y^2] - \mu_y^2 \approx \left( \frac{dy(\mu_x)}{dx} \right)^2 \sigma_x^2. \end{aligned}$$

Tuttavia, la  $pdf$  dev'essere piccata nella regione in cui si ha lo sviluppo di Taylor perché altrimenti l'approssimazione non risulta essere buona.

### 2.3 Random variables discrete

Si definisce discreta una random variabile per cui l'evento casuale è identificabile con un numero intero  $k$ :

- il sample space  $\Omega \subset \mathbb{N}$ ;
- $P(k)$  è la probabilità che la random variable assuma il valore  $k$ ;
- $P : (\Omega \subset \mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$ .

Gli assiomi di Kolmogorov diventano

- $P(k) > 0, \forall k$ ;
- $\sum P(k) = 1$ ;
- $P(k \vee h) = P(k) + P(h)$ , per  $h, k \in \Omega, h \neq k$ .

**Bernoulli trials.** Il caso più semplice di probabilità discreta è quello in cui sono possibili solo due eventi (uno complementare dell'altro):

- Il successo ha probabilità  $p$ ;
- l'insuccesso ha probabilità  $q = 1 - p$ ;
- il sample space  $\Omega = \{0, 1\}$ .

**Distribuzione binomiale.** La distribuzione binomiale descrive la probabilità di  $k$  successi in  $N$  prove:

$$B(k; N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Le prove singole sono dette Bernoulli trials. Il sample space è un intervallo di interi finito  $\Omega = [0, N] \subset \mathbb{N}$ .

**Dimostrazione.** A grandi linee, le prove (Bernoulli trials) sono tutte indipendenti tra di loro e ciascuna ha la stessa probabilità di successo  $p$  e di insuccesso  $(1-p)$ . L'espressione per la distribuzione binomiale si ricava contando la frazione di successi in tutti i casi possibili.

Per  $N \rightarrow +\infty$ , la distribuzione binomiale tende alla gaussiana. La media e la varianza sono

$$\mu = \sum_{k=0}^N k \cdot B = Np, \quad \sigma^2 = Np(1-p).$$

Mentre la skewness e la kurtosis sono

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{Np(1-p)}}, \quad \gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{Np(1-p)}.$$

Inoltre, gode della proprietà di riproducibilità e per  $N \rightarrow +\infty$  si ha  $\gamma_{1,2} \rightarrow 0$ .

## Lecture 4

gio 28 ott  
2021 13:303 Poisson e *pdf* multidimensionali

La distribuzione binomiale descrive la probabilità di  $k$  successi in  $N$  prove

$$B(k, N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Dove  $k$  varia da zero fino ad  $N$  cioè il sample space è limitato. Il successo (numero 1) ha probabilità  $p$  e l'insuccesso (numero 0) ha probabilità  $1-p$ . Dunque  $k$  è la somma dei punteggi ottenuti in  $N$  prove.

I Bernoulli trials hanno due valori nel sample space e per ogni valore di  $k$  si associa una probabilità così che quella totale rappresenta la normalizzazione della probabilità.

Si estrae da una *pdf* che è dei Bernoulli trials e si sommano, così per il TCL si ottiene una distribuzione gaussiana. La distribuzione di  $k$  per  $N$  finito è la distribuzione binomiale. Per  $N \rightarrow +\infty$  la binomiale è asintotica ad una Gaussiana perché  $k$  è la somma di tante variabili estratte dalla *pdf* dei Bernoulli trials che ha media e varianza finite, e le estrazioni sono indipendenti tra loro. La gaussiana ottenuta dalla binomiale  $B(k; N, p)$  è  $G(k; \mu, \sqrt{\mu})$ , con  $\mu = Np$ ; quindi fissato  $\mu$  si conosce sia la media che la varianza della gaussiana. Inoltre  $k$  passa da essere una variabile discreta ad una variabile continua. Ma per  $N \rightarrow +\infty$  la discretizzazione tende alla continuità.

È importante studiare l'asintoticità di una *pdf* perché è più facile lavorare sulla gaussiana che la binomiale perché è difficile gestire dei fattoriali con il calcolo numerico.

L'altra proprietà di asintoticità della binomiale è la Poissoniana. Per  $p \rightarrow 0$  e  $Np$  finito, la binomiale è asintotica alla distribuzione di Poisson:  $P(k; \lambda)$ , con  $\lambda = Np$ . La dimostrazione di tale fatto è per induzione.

## 3.1 Distribuzione di Poisson

Essa descrive la probabilità di contare  $k$  eventi un intervallo  $\Delta x$  unitario nel caso di un processo per cui la frequenza media è costante e pari a  $\lambda$  e l'accadere di un evento è indipendente dall'accadere dell'evento in un istante successivo:

$$P(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}.$$

Il parametro  $\lambda$  che è la media della *pdf* è definito come il numero medio di conteggi registrati in un  $\Delta x = 1$

$$\lambda = \frac{E[k]}{\Delta x}.$$

[rivedi]

La distribuzione di Poisson si applica ad una grande varietà di casi:

- raggi cosmici che attraversano un volume nell'unità di tempo
- bombe cadute per unità di superficie su Londra durante la seconda guerra mondiale
- errori tipografici
- persone con una malattia rara all'interno di un gruppo

Il modello su cui si basa la distribuzione di Poisson è

- 1 la probabilità che un evento avvenga in un intervallo  $dx$  è proporzionale all'ampiezza dell'intervallo  $p dx$ ; dove  $p$  è una costante indipendente da  $x$  (questo è quanto si intende dicendo che è un processo in cui la frequenza media è costante);

2 dalla proposizione precedente deriva anche che la probabilità di avere più di un evento nell'intervallo  $dx$  è nulla (per questo si parla spesso di eventi rari).

3 gli eventi sono indipendenti tra loro  
il fatto che un evento sia avvenuto al momento  $x$  non influisce sulla probabilità che un nuovo evento avvenga o sia avvenuto prima o dopo il momento  $x$ .

Un modo per costruire la distribuzione di Poisson è il seguente

- ipotesi 1, la probabilità di 1 evento in  $dx$  è  $p dx$
- ipotesi 1 e 2, la probabilità di zero eventi in  $dx$  è  $1 - p dx$
- si definisce la probabilità di zero eventi in  $[0, x]$  come  $q(x)$
- dall'ipotesi 3, la probabilità di zero eventi in  $[0, x + dx]$  è  $q(0, x + dx)$  cioè il prodotto di due probabilità (eventi indipendenti):

$$q(x + dx) = q(x) \cdot (1 - p dx) \implies \frac{q(x + dx) - q(x)}{dx} = -pq(x).$$

Che ha soluzione  $q(x) = q(0)e^{-px}$ . Inoltre  $q(0)$  si ricava imponendo che  $q(x)$  sia una probabilità ed imponendo che  $\int_{\Omega} q(x) = 1$ . Dunque la distribuzione è perfettamente definita e continua. Questa è la distribuzione esponenziale che è strettamente legata alla distribuzione di Poisson. Per eventi che occorrono in modo Poissoniano, la probabilità di non avere eventi un intervallo  $[0, x]$  è data da un esponenziale.

Si completa la dimostrazione che porta alla distribuzione di Poisson. Trovata l'espressione per  $q(x)$  si passa a ricavare

- la probabilità di avere: 0 eventi in  $[0, x_1]$  e 1 evento in  $x_1, x_1 + dx_1]$  che è  $e^{-px_1}(p dx_1)$
- la probabilità di avere  $k$  eventi in  $[0, t]$  è  $e^{-px} \frac{(px)^k}{k!}$ .

Solitamente si sceglie di definire  $\lambda = px$  ottenendo quindi l'espressione della Poissoniana.

Bisogna ricordarsi bene le ipotesi da quali si parte e da tutto questo discende che la probabilità di non avere eventi è una distribuzione esponenziale. La distribuzione della distanza tra due eventi Poissoniani è esponenziale.

La probabilità di non avere enti in un intervallo  $[0, x]$  segue una distribuzione esponenziale. La probabilità di avere  $k$  eventi in un intervallo  $[0, k]$  segue a distribuzione di Poisson.

### Momenti.

- media  $\lambda$
- varianza  $\lambda = \mu$
- skewness  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
- kurtosis  $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$
- riproduttività

La distribuzione di Poisson è asintotica alla distribuzione di Gauss per  $\lambda$  grande:  $G(k; \lambda, \sqrt{\lambda})$ , con  $\mu = \lambda$  e  $\sigma^2 = \lambda$ . Si passa da una random variable intera ad una continua.

Esiste un comportamento asintotico che porta la binomiale a somigliare alla Poissoniana. Per la binomiale  $k$  è minore strettamente di  $N$ , per la binomiale  $k$  può anche essere maggiore.

### 3.2 Distribuzione esponenziale

La distribuzione esponenziale si scrive spesso nella forma

$$pdf(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Essa misura la probabilità di non avere eventi in un intervallo  $[0, t]$  quando la probabilità con cui un evento avviene in un intervallo  $dt$  è  $p = \frac{1}{\tau}$ . La media è  $\tau$  e la varianza è  $\tau^2$ .

Il decadimento di un nucleo è di per sé probabilistico. La vita media di un nucleo è il reciproco della probabilità. Tali distribuzioni sono utilizzate sia per fenomeni di meccanica quantistica, ma anche perché la binomiale descrive gli istogrammi.

### 3.3 pdf n dimensioni

Il sample space è multidimensionale. Una funzione generica che sia una *pdf* è scritta come  $pdf(x)$ . Se si cambia l'argomento, cambia anche la forma funzionale:  $pdf(x) = f(x)$  e  $pdf(y) = g(y)$  ma  $f(z) \neq g(z)$ .

Quando un evento è identificato da un vettore, invece che da una variabile monodimensionale, si parla di *pdf* multidimensionali. Devono valere gli assiomi di Kolmogorov. Nel caso continuo:

$$pdf(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

La  $cdf(\vec{x})$  ed i momenti sono definiti per estensione di quanto fatto nel caso monodimensionale:

$$cdf(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\vec{x}} pdf(\vec{x}) d\vec{x}.$$

La media della *pdf* è un vettore  $\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad E[\vec{x}] = \int \vec{x} pdf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} E[x_1] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{pmatrix}.$$

dove  $i$  è definito il valore di aspettazione per una singola componente  $x_i$  del vettore  $\vec{\mu}$  come

$$E[x_i] = \int x_i pdf(\vec{x}) d\vec{x}.$$

La varianza è sostituita da una matrice  $n \times n$  simmetrica, chiamata matrice di covarianza:

$$\sigma_{ij}^2 = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)].$$

I termini sulla diagonale sono l'equivalente della varianza.

**Caso bidimensionale.** Spesso, si parla di una *pdf* congiunta (joint *pdf*) per le random variables  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . L'evento è identificato da  $n$  variabili random monodimensionali. Nel seguito si considera il caso bidimensionale  $pdf(x, y)$ .

**Probabilità congiunta.** Nel caso bidimensionale la probabilità congiunta è una superficie in uno spazio tridimensionale:

$$pdf(x, y) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

**Probabilità marginale.** La  $pdf_M(x)$  è la  $pdf$  per  $x$ , indipendente dai valori assunti da  $y$ , è ottenuta integrando su una delle due variabili

$$pdf_{M_x}(x) = \int pdf(x, y) dy.$$

**Probabilità condizionata.** La  $pdf(x|y = y_0)$  è la  $pdf$  associata ad  $x$  quando  $y$  assume uno specifico valore  $y_0$  (cioè è unione della sola  $x$ ):

$$pdf(x|y = y_0) = \frac{pdf(x, y_0)}{pdf_{M_y}(y_0)} = \frac{pdf(x, y_0)}{\int pdf(x, y_0) dx}.$$

Si divide per la probabilità marginale così da normalizzare.

**Relazione con la rappresentazione di Eulero.** Le definizioni ora date sono solo un caso particolare di quelle discusse nella prima lezione quando si sono considerate

- una probabilità  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$
- due eventi  $A$  e  $B$  in  $\Omega$  non disgiunti

Si è parlato di

- $P(A \cap B)$  joint  $pdf$
- $P(A)$  marginal  $pdf$
- $P(A|B)$  conditional  $pdf$

Si ipotizzi che gli eventi in  $\Omega$  siano associati a due random variables differenti,  $x$  ed  $y$  descritte da joint  $pdf$ :

- l'evento  $A$  corrisponde a  $x \in [x_0, x_0 + dx]$  con  $y$  qualsiasi
- l'evento  $B$  corrisponde a  $y \in [y_0, y_0 + dy]$  con  $x$  qualsiasi

Le probabilità associate sono

$$P(A) = P(x \in [x_0, x_0 + dx]) = pdf_{M_x}(x = x_0) dx$$

$$P(B) = P(y \in [y_0, y_0 + dy]) = pdf_{M_y}(y = y_0) dy$$

[rivedi]

**Indipendenza.** In questo caso si parla di indipendenza tra le due random variables che vale se e solo se si può scrivere

$$pdf(x, y) = pdf_{M_x}(x) \cdot pdf_{M_y}(y).$$

Il valore di aspettazione per una funzione  $u(x, y)$  è

$$E[u(x, y)] = \iint u(x, y) pdf(x, y) dx dy.$$

Per media e varianza delle due variables

$$\mu_x = E[x] = \iint x pdf(x, y) dx dy$$

$$\text{Var}[x] = E[(x - \mu_x)^2] = \sigma_x^2$$

Similmente per la  $y$ .

**Covarianza.** Si definisce la covarianza

$$\text{Cov}[x, y] = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[x \cdot y] - \mu_x \mu_y.$$

Alcune proprietà

- se  $x$  e  $y$  sono indipendenti allora  $\text{Cov}[x, y] = 0$ ;
- se  $x$  e  $y$  sono legati linearmente allora  $\text{Cov}[x, y] = 0$ ;
- se  $\text{Cov}[x, y] = 0$  non implica che  $x$  e  $y$  sono indipendenti.

La matrice di covarianza si traduce in

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \text{Cov}[x, y] \\ \text{Cov}[x, y] & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

**Correlazione.** Il coefficiente di correlazione è

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}[x, y]}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Alcune sue proprietà sono

- $\rho^2 \leq 1$
- se  $x$  e  $y$  sono legati linearmente allora  $\rho^2 = 0$
- è sempre possibile operare un cambio di variabili che renda nulla la covarianza: si possono avere variabili non correlate ma che non sono indipendenti.

Due variabili non sono correlate quando la loro covarianza è nulla. Esse sono indipendenti quando  $pdf(x, y) = pdf(x) \cdot pdf(y)$  che implica  $\text{Cov}[x, y] = 0$ . La covarianza è una misura della dipendenza *lineare* delle variabili.

Le stime di parametri sono a loro volta random variables correlate tra loro, descritte da *pdf* congiunte.

## Lecture 5

mar 02 nov  
2021 13:30

# 4 Cambio di variabile in $n$ dimensioni, *pdf* formale multivariata, propagazione degli errori

## 4.1 Cambio di variabile

Si studia come cambia una *pdf* quando si opera una trasformazione di variabili

$$pdf_x(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Si effettua un cambio di variabile  $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ . Si calcola l'espressione analitica della nuova *pdf*:  $pdf_x(\vec{x}) \rightarrow pdf_y(\vec{y})$ .

**Caso monodimensionale** Si è già vista la soluzione nel caso di una random variabile monodimensionale:  $pdf_x(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . La funzione che descrive il cambio di variabile deve essere monotona, biunivoca e derivabile

$$x \rightarrow y = f(x) \quad \text{con inversa } g(y) = x.$$

L'espressione analitica della nuova *pdf* è

$$pdf_y(y) = pdf_x(x) \cdot |g'(y)| = pdf_x(x) \frac{1}{|f'(x)|}.$$

**Caso bidimensionale.** Siano  $x_1$  e  $x_2$  due random variables descritte con una *pdf* congiunta  $pdf_x(x_1, x_2)$ . Si applica una trasformazione di variabile (con funzioni monotone, biunivoche e derivabili):

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow y_1 = u_1(x_1, x_2) \\ x_2 \rightarrow y_2 = v_2(x_1, x_2) \end{cases}.$$

Si cerca di capire qual è la relazione tra la joint *pdf* di partenza,  $pdf_x(x_1, x_2)$ , e quella di arrivo  $pdf_y(y_1, y_2)$ . Per analogia con quanto fatto nel caso monodimensionale, la  $pdf_y(y_1, y_2)$  deve soddisfare la relazione:

$$pdf_y(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = pdf_x(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Scrivendo le funzioni inverse

$$\begin{cases} x_1 = w_1(y_1, y_2) \\ x_2 = w_2(y_1, y_2) \end{cases}.$$

Si ricava

$$pdf_y(y_1, y_2) = pdf_x(x_1, x_2) \cdot |J|.$$

La matrice  $J$  è la Jacobiana della trasformazione

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \partial_{y_1} w_1 & \partial_{y_2} w_1 \\ \partial_{y_1} w_2 & \partial_{y_2} w_2 \end{bmatrix}.$$

La relazione si può scrivere come

$$pdf_y(y_1, y_2) = pdf_x(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)) \cdot |J|.$$

La trasformazione di variabili si usa per:

- ridefinire le variabili in modo che abbiano  $\text{Cov}[x_i, x_j] = 0$ ;
- la generazione di numeri casuali, come per esempio la trasformazione di Box-Muller: è un modo efficiente per generare numeri casuali con *pdf* normale partendo da `rand()`;
- ricavare la relazione di propagazione degli errori (visto successivamente).

## 4.2 *pdf* formale multivariata

Si è visto che quando un evento aleatorio è identificato da un vettore  $\vec{x}$ , si ha a che fare con *pdf* multidimensionali, si parla anche di distribuzioni di probabilità multivariate. Con riferimento ad una variabile continua si può scrivere:

$$pdf(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

oppure, con notazione del tutto equivalente:

$$pdf(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

nell'ultimo caso è più frequente parlare di joint *pdf* delle  $n$  variabili. Per le *pdf* multivariate:

- il concetto di media della random variable monodimensionale è esteso ad una random variabile  $n$ -dimensionale in modo ovvio

$$\mathbb{E}[\vec{x}] = \vec{\mu} = \int \vec{x} \cdot pdf(\vec{x}) d\vec{x}.$$

- il concetto di varianza si estende introducendo una matrice di covarianza  $\Sigma$  definita da

$$\Sigma = \text{Cov}[x_i, x_j] = \sigma_{ij}^2 = \mathbb{E}[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)].$$



Una distribuzione notevole è la distribuzione normale multivariata. Questa è un'estensione ad  $n$ -dimensioni della distribuzione gaussiana (o normale). Esattamente come la gaussiana monodimensionale, anche la gaussiana multivariata può essere parametrizzata in termini della propria media  $\vec{\mu}$  e della propria matrice di covarianza  $\Sigma$ :

$$N(\vec{x}; \vec{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^\top \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\vec{x}-\vec{\mu})}.$$

In due dimensioni  $\vec{x} = (x, y)$  si esplicitano le varianze e per la covarianza si utilizzano i coefficienti di correlazione:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}.$$

Dunque segue

$$N(\vec{x}; \vec{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) \left( \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right) + \left( \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right]}.$$

il termine dell'esponente può essere studiato per definire la forma delle curve di equiprobabilità. Dimostrazione negli appunti.

Per capire come sia fatta questa curva bidimensionale si possono determinare le curve di equiprobabilità che corrisponde alla richiesta che il termine all'esponente sia costante,  $K$ . Per semplificare l'espressione si può partire dalla gaussiana standard. Questa è detta distribuzione binormale standardizzata. Il massimo della funzione si ha quando  $K = 0$ , cioè all'origine. Quindi media e moda coincidono. Quindi

$$K = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} [x^2 - 2\rho xy + y^2].$$

Si ha un caso particolare per cui l'esponente vale  $K = -\frac{1}{2}$  ed è il valore per cui si riduce la densità di probabilità di un fattore  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  rispetto al massimo (che corrisponde a  $K = 0$  e  $\vec{\mu} = (0, 0)$ ). Nel caso monodimensionale la riduzione di un fattore  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  è quella che corrisponde all'intervallo  $\mu \pm \sigma$  e che coincide con circa il 68% della probabilità. Nel caso bidimensionale questo intervallo è sostituito dall'ellissi degli errori. L'integrale della *pdf* su tale ellissi corrisponde ad una probabilità del 39%. L'ellissi degli errori è inscritto nel rettangolo definito dagli intervalli  $\mu_x \pm \sigma_x$  e  $\mu_y \pm \sigma_y$ . L'integrale della binormale sia sull'ellissi (0.39) che sul rettangolo (0.47) restituisce una probabilità inferiore a quella a cui si fa riferimento per la gaussiana monodimensionale.

**Diagonalizzazione di  $\Sigma$ .** Un'importante proprietà della matrice di covarianza è il fatto che sia simmetrica. Infatti, le matrici simmetriche sono sempre diagonalizzabili mediante rotazione. La matrice che diagonalizza  $\Sigma$  definisce una trasformazione di variabili che consente di passare da variabili correlate a variabili non più correlate. Una rotazione di un angolo  $\phi$  trasforma le coordinate secondo

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi \end{aligned}$$

E trasforma la matrice di covarianza secondo

$$\Sigma' = U \Sigma U^\top.$$

Se  $U$  è scelta in modo da essere la matrice che diagonalizza  $\Sigma$ , allora la rotazione fa in modo che le due variabili trasformate,  $x'$  e  $y'$ , abbiano  $\text{Cov}[x', y'] = 0$ . Dunque la *pdf* risultante è

$$pdf(x', y') = pdf(x, y) \cdot \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x', y')} \right|.$$

dove le funzioni  $w$  sono quelle che descrivono il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} x = w_1(x', y') \\ y = w_2(x', y') \end{cases}.$$

L'ultimo fattore è il determinante della matrice jacobiana

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \partial_{x'} w_1 & \partial_{y'} w_1 \\ \partial_{x'} w_2 & \partial_{y'} w_2 \end{bmatrix}.$$

Nel caso considerato, il determinante della jacobiana è costante, dunque la  $pdf$  mantiene la stessa forma. Nel caso della binormale, la matrice di rotazione  $U$  che diagonalizza  $\Sigma$  è descritta da un angolo di rotazione  $\phi$ :

$$\tan 2\phi = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}.$$

Il nuovo coefficiente di correlazione è  $\rho' = 0$ . Dunque

$$N(\vec{x}'; \vec{\mu}', \Sigma') = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x' - \mu'_x}{\sigma'_x} \right)^2 + \left( \frac{y' - \mu'_y}{\sigma'_y} \right)^2 \right]}}{2\pi\sigma'_x\sigma'_y}.$$

Nelle variabili trasformate, la covarianza è nulla e  $pdf(x', y') = pdf(x') \cdot pdf(y')$  cioè che le variabili sono indipendenti. Questa proprietà è solo della binormale.

## 5 Propagazione degli errori (statistici)

Si consideri il problema più generale possibile: determinare una grandezza fisica  $Y$  con misure indirette, sapendo che

$$Y = f(X_1, \dots, X_n).$$

La procedura di misura è

- si misura  $X_1, \dots, X_n$  ottenendo i valori  $x_1, \dots, x_n$
- le quantità misurate sono descritte da una joint  $pdf$ :  $pdf(x_1, \dots, x_n)$
- per ogni set di dati  $x_1, \dots, x_n$  si ricava  $y = f(x_1, \dots, x_n)$
- la quantità  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  è una random variable con  $pdf(y)$  ignota.

Il problema da risolvere è di determinare  $\mathbb{E}[y]$  e  $\text{Var}[y]$  che sono le stime per  $Y$  ed il suo errore. Come visto nel caso monodimensionale,  $Y = f(X)$ , il problema si può risolvere con due approcci:

- si determina per via analitica la  $pdf(y)$
- si usa uno sviluppo di Taylor per calcolare  $\mathbb{E}[y]$  e  $\text{Var}(y)$  in modo approssimato.

### 5.1 Caso analitico

Il problema da risolvere è quello di trovare  $pdf(y)$  conoscendo la relazione tra le grandezze misurate direttamente e la grandezza indiretta a cui si è interessati. Il caso può apparire differente da quello risolto nel caso del cambiamento di variabile: si parte da  $pdf(x_1, \dots, x_n)$  e si deve arrivare a  $pdf(y)$ , cioè passare da  $n$  random variables ad una singola random variable. Si opera un cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow y = f(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ \vdots \\ x_n \rightarrow x_n \end{cases}.$$

A questo punto usando la regola della jacobiana si ricava la  $pdf$  espressa sulle nuove variabili  $pdf'(y, x_2, \dots, x_n)$  che poi si marginalizza (cioè si integra) su tutte le variabili che non interessano (cioè  $x_2, \dots, x_n$ ) ricavando  $pdf(y)$ :

$$pdf(y) = \int pdf(y, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

Da cui si ricava il valore di aspettazione e la sua varianza.

## 5.2 Caso approssimato

Si estende quando fatto per una dimensione. Se  $y = ax + b$  allora si usano le proprietà di linearità dell'operatore del valore di aspettazione dimostrando quanto segue

$$\begin{aligned}\mu_y &= \mathbb{E}[y] = a\mathbb{E}[x] + b = a\mu_x + b \\ \sigma_y^2 &= \mathbb{E}[y^2] - \mu_y^2 = a^2\sigma_x^2\end{aligned}$$

Se  $y = y(x)$  è una funzione non lineare in  $x$  si può usare lo sviluppo di Taylor della funzione intorno a  $\mu_x$ . Dunque risulta

$$\begin{aligned}\mu_y &\approx y(\mu_x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 y(\mu_x)}{dx^2} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 &\approx \left( \frac{dy(\mu_x)}{dx} \right)^2 \sigma_x^2\end{aligned}$$

L'ipotesi è di avere

- $n$  variabili aleatorie  $[x_1, \dots, x_n]$  che possono essere rappresentate con un vettore  $\vec{x}$
- una joint  $pdf$  che descrive le variabili che ha media  $\vec{\mu}$  e matrice di covarianza con elementi  $\sigma_{ij}^2$
- una variabile  $y$  che è una funzione delle  $n$  variabili:  $y(\vec{x})$

La media risulta essere [rivedi] copiare

$$\mu_y = \int y(\vec{x}) pdf(\vec{x}) d\vec{x} = \dots \approx y(\vec{\mu}).$$

In modo analogo la varianza sviluppata al primo ordine è

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} y(\mu_x) \partial_{x_j} y(\mu_x) \sigma_{ij}^2.$$

Se le variabili  $x_i$  hanno correlazione nulla (quindi sicuramente quando esse sono indipendenti l'una dall'altra) allora la matrice di covarianza è diagonale e la regola di propagazione degli errori si riduce a

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} y(\mu_x))^2 \sigma_{ij}^2.$$

Risulta essere utile cosa succede nei casi semplici. Da queste formule discendono le due semplici regole per cui nella somma di variabili gli errori si propagano gli errori sommandoli in quadratura; mentre nei prodotti si sommano in quadratura gli errori relativi.

## Lecture 6

gio 11 nov  
2021 13:30

## 6 Random walk in due dimensioni

Si consideri una particella che si muove in un piano incontrando ostacoli che ne modificano il moto in modo non deterministico. Si consideri un caso semplice, che ha soluzione analitica:

- la particella compie passi di lunghezza fissa  $L = 1$
- dopo ciascun passo, la particella si muove in una nuova direzione descritta da un angolo  $\theta$  con  $pdf(\theta)$  uniforme.

Si vuole sapere dove si trova la particella dopo  $N$  passi e in particolare con che probabilità essa si trovi in un punto  $(x, y)$  del piano.

**Parte 1.** Si vuole capire cosa succede al primo passo. Si suppone che la particella parta dall'origine del sistema di coordinate. Ci si chiede qual è la distribuzione di probabilità della particella dopo il primo passo.

La particella vive nel piano  $xy$ . Parte dall'origine e compie un passo di lunghezza unitaria con un angolo  $\theta$ . La distribuzione degli angoli è uniforme:  $pdf(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ . Si possono anche utilizzare le coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}.$$

Esse sono due random variables perché funzioni di una random variable. Dunque, esiste

$$pdf(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 \neq 1 \\ \text{cost.}, & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Tale costante si calcola in modo che l'integrale sul sample space sia 1. Dunque, la costante vale  $\frac{1}{2\pi}$ . Tuttavia, si vorrebbe calcolare la  $pdf(x)$ ; per ottenerla si può immaginare di fare una trasformazione di variabili:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ pdf(\theta) = \frac{1}{2\pi} \end{cases}.$$

Si può calcolare la  $pdf$  marginale, tuttavia è più semplice utilizzare un cambio di coordinate. Dunque

$$pdf(x) dx = pdf(\theta) d\theta \implies pdf(x) = |\partial_x \theta| pdf(\theta).$$

Le funzioni per il cambio di variable non sono strettamente monotone sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , questo perché la regola della trasformazione richiede che siano monotone. Tuttavia, basta fare il conto per tratti.

A questo punto

$$\begin{cases} \theta = \arccos x \\ \theta = \arcsin y \end{cases}.$$

Pertanto

$$pdf_M(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La distribuzione per  $y$  è identica. Si vogliono trovare i momenti. Non si fanno gli integrali su  $x$ , ma si ritorna a  $\theta$ . Infatti

$$\mathbb{E}[u(\theta)] = \int pdf(\theta) u(\theta) d\theta.$$

Dunque, posto  $x = \cos \theta$  si ha

$$\mathbb{E}[x] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos \theta d\theta = 0.$$

Allo stesso modo

$$\mathbb{E}[x^2] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2}.$$

Da cui la varianza risulta essere

$$\text{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \frac{1}{2}.$$

Per la variabile  $y$  è identico. Per la  $pdf$  congiunta

$$E[x] = \int x \, pdf(x, y) \, dx \, dy = \int x \, dx \underbrace{\int pdf(x, y) \, dy}_{pdf_M(x)} = \int x \, pdf_M(x) \, dx.$$

che risulta essere quanto visto fin'ora. [rivedi] Quindi  $E[x] = E[y] = 0$ . La matrice di covarianza risulta essere

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}[x] & \text{Cov}[xy] \\ \text{Cov}[yx] & \text{Var}[y] \end{bmatrix}.$$

La covarianza è  $E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \text{Cov}[xy] = E[xy] = 0$  questo perché la distribuzione è un cerchio che è una figura per cui la covarianza è nulla. Infatti, tali due variabili non sono linearmente correlate tra loro, tuttavia non sono indipendenti perché entrambe dipendono da  $\theta$ . Quindi

$$\text{Cov}[xy] = E[xy] = \int xy \, pdf(x, y) \, dx \, dy = \int r \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta?.$$

[rivedi] Dopo  $N$  passi si ha

$$\begin{cases} x_N = \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \\ y_N = \sum_{i=1}^N \sin \theta_i \end{cases}.$$

Dunque

$$E[x_N] = E\left[\sum x_i\right] = \sum E[x_i] = 0.$$

Mentre

$$E[x_N^2] = \frac{N}{2}, \quad \text{Var}[x] = \frac{N}{2}.$$

Pertanto

$$pdf(x_N) = .$$

[rivedi] Tuttavia, il comportamento asintotico è una gaussiana per il teorema centrale del limite perché  $x_N$  è una variabile casuale somma di variabili casuali:

$$G(x; \mu, \sigma), \quad \mu = 0, \quad \sigma = \frac{N}{2}.$$

[rivedi] Si dimostra che  $\text{Cov}[x_N y_N] = 0$ , dunque anche dopo  $N$  passi le variabili non sono correlate linearmente. Inoltre, la distribuzione per  $N \rightarrow \infty$  è una binormale. Essa ha una particolarità: cioè la covarianza è nulla. Questo significa che le due variabili sono indipendenti e

$$pdf(x_N, y_N) = pdf(x_N) pdf(y_N) = \frac{1}{2\pi\sigma_N} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_N}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_N}}.$$

Può essere utile passare alle coordinate polari per cui si ottiene

$$pdf(x_N, y_N) = |J| pdf(\rho, \varphi).$$

Ci si aspetta che la  $pdf$  dipenda solamente da  $\rho$  perché il problema è simmetrico in  $\varphi$  e si arriva a

$$pdf(\rho) = k\rho e^{-\frac{\rho}{2\sigma_N}}.$$

Che non è una gaussiana a causa del fattore  $\rho$ .

## Lecture 7

gio 18 nov  
2021 13:30

## 7 Statistica

La probabilità è un'aleatoria matematica che regola il comportamento di una variabile aleatoria (r.v.). Le basi sono

- gli assiomi di Kolmogorov e la definizione di *pdf*
- il concetto di popolazione, campione e campionamento
- i parametri descritti [rivedi]

In fisica le random variables sono usate per la descrizione dei fenomeni:

- intrinsecamente non deterministici, perché regolati dalla meccanica quantistica
- troppo complessi per poter essere descritti in modo deterministico

La statistica è la teoria che studia il problema inverso della probabilità: dato un campione (i dati sperimentali) si vuole inferire le proprietà ed i parametri (inclusa la *pdf*) che descrivono la popolazione dalla quale il campione è estratto.

- Si inferisce il valore di un parametro (detto stimatore).
- Verificare o confutare la validità di un modello (cioè il test di ipotesi).

## 7.1 Independent Identically Distributed

Dati indipendenti ed identicamente distribuiti. Si dice che  $N$  campionamenti sono IID quando sono

- indipendenti — l'esito di un campionamento non è influenzato da nessuno degli altri
- identicamente distribuiti — quindi estratti dalla stessa  $pdf_x(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

La joint *pdf* di  $N$  campionamenti IID è il prodotto delle singole probabilità in ragione dell'indipendenza:

$$pdf_{\text{set}}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N pdf_x(x_i, \theta).$$

Il parametro  $\theta$  è l'insieme dei parametri che descrivono la *pdf*. Pertanto la *pdf* set misura la probabilità di estrarre un particolare set di dati ed è una funzione definita su uno spazio  $N$ -dimensionale.

**Statistica.** Si definisce statistica una funzione di  $N$  campionamenti IID che contenga solo parametri noti.

Una statistica è una variabile aleatoria. Quindi ha una sua *pdf<sub>f</sub>* derivabile dalla joint *pdf* dei campionamenti e dalla forma della funzione  $f$ . Si hanno 3 *pdf*:

- la  $pdf_x$  che si campiona IID
- $pdf_{\text{set}}$  dei campionamenti (che è multidimensionale)
- la  $pdf_f$  della statistica dei campionamenti

**Parametri da stimare.** Quando non si conoscono i parametri che descrivono una  $pdf_x$ , la procedura che si può adottare è di usare  $N$  campionamenti IID per estrarre le informazioni desiderate. Essendo basate su di un campione, queste informazioni non sono esatte, ma sono delle stime, provviste di una loro incertezza. Si può voler stimare

- la media  $\mu = E[x]$  e la varianza  $\sigma^2 = \text{Var}[x]$  della  $pdf_x$
- in generale, i parametri che descrivono la distribuzione  $pdf_x(x, f)$

**Stimatori.** Uno stimatore è una statistica opportunamente scelta in modo da poter usare  $N$  campionamenti IID per stimare il valore di uno più parametri descrittivi della  $pdf_x$ .

**Notazione.** Si vedono alcune notazioni

- la  $pdf$  il cui parametro  $\theta$  va stimato (spesso chiamato  $\theta_V$  valore vero del parametro) è  $pdf_x(x, \theta)$
- i campionamenti IID della  $pdf_x$  sono  $\{x_1, \dots, x_N\}$
- la statistica che definisce lo stimatore è  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_N)$
- la  $pdf$  della random variable stimatore è  $pdf_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$
- il valore dello stimatore ottenuto per uno specifico campionamento è  $\hat{\theta}^*$

**Consistenza.** Lo stimatore è detto consistente se per  $N \rightarrow \infty$  lo stimatore restituisce il valore vero del parametro. Quando il campione si avvicina all'intera popolazione lo stimatore deve essere esatto.

**Valore di aspettazione di uno stimatore.** Uno stimatore, in quanto random variable, è caratterizzato da una  $pdf_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$  e quindi ha un valore medio ed una varianza.

$$E[\hat{\theta}] = \int \hat{\theta} pdf_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) d\hat{\theta} = \int \dots \in \hat{\theta}(x_1, \dots, x_N) pdf_x(x_1) \dots pdf_x(x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

Le relazioni precedenti sfruttano due proprietà viste:

- la conservazione della probabilità in un cambiamento di variabile  $y = y(x) : pdf(x) dx = pdf(y) dy$
- la regola per la riduzione del numero di variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_N \rightarrow \theta$  in cui la  $pdf(\theta)$  si ottiene cambiando le variabili e marginalizzando

Le qualità dello stimatore possono essere definite per confronto tra questi due parametri ed il valore vero. Lo stimatore è tanto più accurato (o non-distorto, unbiased) quanto più vicino è il suo valore medio  $E[\hat{\theta}]$  al valore vero. Lo stimatore è tanto più efficiente quanto minore è la sua varianza  $\text{Var}[\hat{\theta}]$  (partendo da set di campionamenti differenti si desiderano avere stime simili).

Le proprietà di uno stimatore sono

- la consistenza; se  $N \rightarrow \infty$  allora  $\hat{\theta}_N \rightarrow \theta_{\text{vero}}$
- il bias,  $b_N = E[\hat{\theta}_N] - \theta_{\text{vero}}$ ; se  $b_N = 0$  si dice che lo stimatore è unbiased o non distorto. Questo si traduce nell'accuratezza della misura.
- l'efficienza, misurata da  $\text{Var}[\hat{\theta}_N]$  ha un valore minimo fissato  $N$  che è definito dal teorema di Rao-Kramer. Questo si traduce nella precisione della misura.

Esistono tecniche di costruzione di stimatori che permette di sapere a priori che lo stimatore è privo di bias.

Nella realtà, molte volte la misura vera non è nota, dunque non risulta immediato capire se esiste un bias o meno.

Per uno stesso parametro si possono definire tanti stimatori, ma non tutti hanno le proprietà desiderate. Va anche notato che non è detto che esista (o si sappia trovare) uno stimatore che soddisfi contemporaneamente tutte le richieste.

**Stima della media e della varianza.** La procedura di stima coinvolge

- trovare uno stimatore  $\hat{\theta}$
- valutare la consistenza, il bias e la varianza
- se possibile calcolare la sua  $pdf_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$

**Media campionaria.** Lo stimatore per  $\mu$  che meglio soddisfa i requisiti ideali è la media campionaria (sample mean) spesso indicata con  $\bar{x}$

$$\hat{\mu}_N = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_i.$$

Si vede che

- è unbiased,  $E[\bar{x}] = \mu$
- è efficiente, con una varianza che decresce all'aumentare del numero di campionamenti:  
 $\text{Var}[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{N}$
- è consistente se la  $pdf_x(x)$  soddisfa le ipotesi del teorema centrale del limite
- la  $pdf_{\bar{x}}(\bar{x})$  è gaussiana per  $N \rightarrow \infty$  se la  $pdf_x(x)$  soddisfa le ipotesi del teorema centrale del limite.

Si dimostra che

$$E[\bar{x}] = \int \bar{x} pdf_{\bar{x}}(\bar{x}) d\bar{x} = \mu$$

$$\text{Var}[\bar{x}] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Var}[x_i] = \frac{\sigma^2}{N}$$

Quindi lo stimatore è unbiased e all'aumentare del numero di campionamenti la sua varianza si riduce. Questo garantisce che per un alto numero di campionamenti, le stime ottenute con diversi set di dati sono vicine tra loro. Inoltre, essendo vicine alla media dello stimatore, che è unbiased, ne discende che le stime sono vicine al vero  $\mu$ .

**Distribuzione e consistenza.** Valgono le seguenti proprietà

- se  $pdf_x(x)$  è gaussiana allora anche  $pdf_{\bar{x}}(\bar{x})$  lo è in quanto  $\bar{x}$  è somma di random variables gaussiane e per la gaussiana vale la proprietà di riproducibilità.
- se la  $pdf_x(x)$  non è gaussiana, ma soddisfa le ipotesi del teorema centrale del limite, allora  $pdf_{\bar{x}}(\bar{x}) \rightarrow \text{Gaussiana}$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

In entrambi i casi

$$\text{Gauss}\left(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right).$$

e lo stimatore è consistente.



**Stimatore per la varianza.** Lo stimatore per la varianza che meglio soddisfa i requisiti ideali è la varianza campionaria (sample variance). Sono possibili due definizioni

- lo scarto quadratico medio rispetto alla media della popolazione  $\mu$  nota a priori

$$s_{\mu}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_i - \mu)^2.$$

molte volte  $\mu$  non è noto e pertanto bisogna usare la definizione seguente.

- lo scarto quadratico medio rispetto alla media del campione  $\bar{x}$

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Si dimostra che

- il bias di  $s_{\mu}^2$  è nullo:  $b_N = E[s_{\mu}^2] - \sigma^2 = 0$
- il bias di  $s_{\bar{x}}^2$  è diverso da zero

$$b_N = E[s_{\bar{x}}^2] - \sigma^2 = \left( \frac{N-1}{N} \sigma^2 \right) - \sigma^2.$$

Risulta chiaro che il primo stimatore, pure essendo unbiased, è poco utile perché è raro che si conosca  $\mu$ , ma non  $\sigma^2$ . Il secondo stimatore è quello normalmente adottato, è però distorto anche se asintoticamente è unbiased.

Si può definire un terzo stimatore che introduca una correzione a  $s_{\bar{x}}^2$  tale da cancella il bias. La correzione del bias è applicabile tutte le volte in cui il bias sia precisamente noto. Il nuovo stimatore della varianza è

$$s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Tale stimatore è privo di bias:  $E[s^2] = \sigma^2$  e la varianza non può essere determinata per il caso generale

$$\text{Var}[s^2] = \text{Var} \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right] = \frac{1}{(N-1)^2} \text{Var} \left[ \sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right].$$

mentre è possibile farlo per il caso particolare in cui  $pdf_x(x)$  sia una gaussiana. Se si riscrive la random variable che definisce la varianza campionaria in questo modo

$$s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}.$$

si può introdurre una random variable ausiliare chiamato  $\chi^2$

$$s^2 \equiv \frac{\sigma^2}{N-1} \chi^2.$$

Inoltre,  $\text{Var}[s^2]$  è legata a  $\text{Var}[\chi^2]$ .

Nell'ipotesi in cui si stia campionando una  $pdf_x$  gaussiana, segue che la variabile  $\chi^2$  ha una  $pdf$  nota che si chiama distribuzione chi-quadro e la sua random variable è  $\chi^2$ . La  $pdf$  chi-quadro è descritta da un solo parametro chiamato gradi di libertà. Nel caso ora analizzato il parametro vale  $N-1$ . Quindi

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{N-1} \chi_{N-1}^2.$$

Si possono sfruttare le proprietà note della distribuzione chi-quadro:

$$E[\chi_N^2] = N \implies E[s^2] = \frac{\sigma^2}{N-1} E[\chi_{N-1}^2] = \frac{\sigma^2}{N-1} (N-1) = \sigma^2$$

$$\text{Var}[\chi_N^2] = 2N \implies \text{Var}[s^2] = \frac{\sigma^4}{(N-1)^2} \text{Var}[\chi_{N-1}^2] = \frac{\sigma^4}{(N-1)^2} 2(N-1) = \frac{2\sigma^4}{(N-1)}$$

## Lecture 8

gio 25 nov  
2021 13:30

La domanda tipica dell'esame è discutere il problema della stima, spiegando cos'è uno stimatore, le sue proprietà [rivedi] Bisogna introdurre il contesto in cui si pone il problema: si vuole misurare una grandezza, ma i dati sono campionamenti  $\{x_1, \dots, x_n\}$  di una *pdf* e la grandezza che si vuole misurare è uno dei parametri descrittivi della *pdf*.

Questo può succedere quando:

- la misura è affetta da errori casuali. Quando si misura, si campiona una gaussiana con media sul valore vero e sigma che dipende dagli strumenti di misura. Quindi si ha una distribuzione  $pdf\left(x, \vec{\theta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}\right)$ .
- si misura un fenomeno intrinsecamente aleatorio; cioè tutte le volte in cui la descrizione di quanto si vuole misurato è definito dalla meccanica quantistica. La grandezza non è definita da un valore, ma da una distribuzione di probabilità dei valori. Le righe di spettro di emissione ha una distribuzione  $pdf(x, \vec{\theta})$  con  $\vec{\theta}$  composto dai valori  $\lambda_i$  e  $\sigma_i$  per  $i$  indice che identifica una linea di spettro. I parametri della *pdf* non sono direttamente i singoli  $\lambda$  e  $\sigma$  anche se ad essi sono legati.

Si studia cos'è la stima tramite l'esempio primo. Si supponga di fare una misura  $x$ , allora si riporta come  $\theta^* = x \pm \sigma$ . La stima di  $\mu$  è legata a quanto misurato  $x$  e ad una incertezza  $\sigma$  legata alla gaussiana, associata ad un confidence level: esso è la probabilità che il valore vero sia all'interno dell'intervallo  $[x - \sigma, x + \sigma]$ .

Ci si aspetta che la stima si possa scrivere come  $\theta^* \pm \delta\theta^*$ . Inoltre, si vuole sapere quanto questo intervallo sia vicino al vero  $\theta_V$ ; si vuole sapere quant'è grande l'errore; ed in generale sapere com'è fatta la distribuzione di probabilità che definisce  $\theta^*$ .

La soluzione del problema è legata all'utilizzo dei campionamenti. Si costruisce una funzione dei campionamenti  $f(x_1, \dots, x_n)$  e tale si è chiamata statistica. Si vuole la statistica (anch'essa random variable) che determina il parametro  $\theta$  della *pdf* e la si chiama  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ . Di questa random variable [rivedi] La random variable ha una distribuzione  $pdf(\hat{\theta}, \theta)$ . [rivedi]

Quando si ha  $\hat{\theta}^*$  si ha un singolo campionamento della *pdf*.

Si vuole capire quanto la stima sia vicina al valore vero. [rivedi]

Si vuole sapere se  $E[\hat{\theta}] = \theta_V$  e questo è ciò che si è chiamato bias (accuratezza). Inoltre, si vuole sapere  $\text{Var}[\hat{\theta}]$  (precisione). La stima è un singolo campionamento della *pdf*. Si vuole trovare una statistica che definisca la stima con una varianza piccola.

Due osservazioni. Si consideri di usare sempre la stessa procedura di campionamento e lo stesso stimatore. Ogni volta si ha una stima diversa, ma con la stessa incertezza. Si consideri di operare una misura con una tecnica diversa: essa potrebbe essere più precisa ma avere un bias. Questo succede quando si confrontano misure ottenute con metodi diversi. Tali valori potrebbero essere tra loro compatibili o meno. Bisogna dedurre che una delle due tecniche possiede un bias. Si hanno tre casi:

- non si sta misurando la stessa cosa (il modello è sbagliato)
- in un esperimento si è sottostimato l'errore

- una delle due tecniche ha un bias

Precedentemente si è analizzato un caso semplice di costruzione di uno stimatore: stimare la media di una *pdf*. Lo stimatore della media è

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}.$$

e si è dimostrato  $E[\bar{x}] = \mu$ , quindi non ha bias. Similmente  $\text{Var} \left[ \frac{\sigma^2}{N} \right]$

Si hanno campioni  $\{x_1, \dots, x_n\}$  con *pdf*( $x, \vec{\theta}$ ) e  $E[x] = \mu$ ,  $\text{Var}[x] = \sigma$ . [rivedi]

Se la distribuzione dello stimatore soddisfa le ipotesi del teorema centrale del limite allora per  $N \rightarrow \infty$  la distribuzione è una gaussiana centrata in  $\mu$  di varianza  $\frac{\sigma^2}{N}$ . All'infinito la gaussiana collassa nella delta di Dirac centrata in  $\mu$ . La condizione all'infinito è considerare tutta la popolazione: la proprietà per la quale all'infinito lo stimatore restituisce il valore vero è detta consistenza.

Quindi la stima è

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

dato che si ritorna ad una gaussiana, segue che l'intervallo è al 68%. Tuttavia,  $\sigma$  potrebbe non essere noto. Dunque, si costruisce uno stimatore anche per la varianza.

Stimatore varianza:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}.$$

essa è la varianza campionaria con correzione di Bessel. Si è visto che  $E[s^2] = \sigma^2$  e non ha bias. Se la *pdf* è una gaussiana allora segue che

$$\text{Var}[s^2] = \frac{2\sigma^2}{N - 1}.$$

dato che, se si considera la distribuzione originale una gaussiana, allora la *pdf* di  $s^2$  è una distribuzione chi-quadro con  $N - 1$  gradi di libertà, per cui si sa calcolare la varianza.

Per lo stimatore della varianza, senza Bessel, si avrebbe ottenuta una distribuzione con bias. Applicando Bessel, si rimuove il bias, e nelle ipotesi della gaussiana si può calcolare la varianza. Così si sa sia la varianza che la forma della distribuzione.

Il problema non è del tutto risolto. Se si pone la stima come  $\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$  si hanno due variabili descritte da due *pdf*. [rivedi]

Il problema degli stimatori si riassume nel definire un intervallo e sapere quale probabilità tale intervallo contiene il valore vero: questa è la costruzione degli intervalli di confidenza. Mettendo  $s$  al posto di  $\sigma$  si ottiene la distribuzione di Student. [rivedi]

Si analizza il problema generico di capire come si trova uno stimatore  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ , trovare i suoi valori medio, varianza e *pdf* dove possibile. Si vede il metodo del maximum likelihood.

## 7.2 Distribuzione chi-quadro

La distribuzione  $\chi^2$  permette di costruire il test di ipotesi. Si costruisce una random variable  $\chi^2$  estraendo  $N$  valore IID, ciascuno da una *pdf* <sub>$i$</sub>  gaussiana di media  $\mu_i$  e varianza  $\sigma_i^2$  con

$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}.$$

dove  $N$  è detto numero di gradi di libertà ed è l'unico parametro che determina la forma della *pdf* del  $\chi^2$ .

La joint-*pdf* dei campionamenti è una *pdf* normale multivariata in uno spazio  $N$ -dimensionale (con matrice di covarianza  $\Sigma$  diagonale per l'ipotesi IID). Si può pensare al set di campionamenti

come un singolo campionamento (vettoriale) di una distribuzione normale  $N$ -dimensionale. Se esistono  $n$  relazioni che legano tra loro le  $x_i$  allora si sta campionando una normale multivariata che ha matrice di covarianza non diagonale. Il numero di gradi di libertà da associare alla random variable  $\chi^2$  è in questo caso  $N - n$ . Questo è il caso considerato per la variabile  $s^2$  (la varianza campionaria) in cui si campiona una stessa  $pdf_x$  gaussiana. La variabile  $\chi^2$  è definita come

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}.$$

ha  $N - 1$  gradi di libertà perché esiste una relazione che lega gli  $x_i$  tra loro:  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x}$ . La  $pdf$  random variable  $\chi_N^2$  dipende da un solo parametro  $N$  ed è chiamata distribuzione del chi-quadro ad  $N$  gradi di libertà. La sua forma analitica è

$$pdf(\chi_N^2) = (\chi^2)^{\frac{N}{2}-1} \frac{e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} 2^{\frac{N}{2}}.$$

dove  $\Gamma$  è la funzione gamma. La media è  $E[k] = N$ , la varianza  $\text{Var}[k] = 2N$ , vale la riproduttività, la moda è  $N - 2$  (e vale 0 per  $N = 2$ ). Per  $N > 2$  la  $pdf$  è mono-modale e si sposta verso destra più gradi di libertà si hanno; inoltre, diventa sempre più simmetrica.

Inoltre, si spesso definisce il  $\chi^2$  ridotto che è il rapporto  $\frac{\chi_N^2}{N}$  la cui media è 1.

Nel caso particolare in cui le  $pdf(x_i)$  sono gaussiane che derivano da distribuzioni binomiali o poissoniane, quindi descritte da un solo parametro  $\mu_i$  (essendo  $\sigma_i^2 = \mu_i$ ). La variabile  $\chi_N^2$  assume la forma

$$\chi_N^2 = \sum_i^N \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\mu_i}.$$

Ponendo  $\mu_i = E_i$  e  $x_i = O_i$  allora si ha

$$\chi_N^2 = \sum_i^N \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

Questo vale solo per eventi di conteggio.

### 7.3 Likelihood

La funzione di verosimiglianza  $\mathcal{L}$  è definita come la probabilità di osservare il campione di dati IID,  $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ , condizionata al valore assunto dal parametro  $\theta$  oggetto di stima. Il funzionale  $\mathcal{L}(\vec{x}, \theta)$  si può scrivere solo se è nota la forma analitica della  $pdf_x(\vec{x}, \theta)$ :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \theta) = \prod pdf_x(x_i, \theta).$$

la variabile indipendente è  $\theta$ .

**Utilizzi.** La likelihood può essere utilizzata in diversi modi:

- per misurare l'informazione che i campionamenti contengono relativamente al parametro. Questo consente di studiare tecniche ottimali per la riduzione dei dati senza perdita di informazioni.
- per valutare la minima varianza raggiungibile da uno stimatore: dati i campionamenti, e quindi la loro likelihood, esiste un limite inferiore alla varianza di qualsiasi stimatore, oltre quel limite non è possibile andare.
- per definire un metodo con cui costruire uno stimatore.

**Disuguaglianza di Rao-Cramer.** Detta anche minimum variance bound (MVB). Si dimostra che esiste la seguente relazione tra la varianza di un qualsiasi stimatore  $\hat{\theta}$  e la funzione di likelihood  $\mathcal{L}(\vec{x}; \theta)$ :

$$\text{Var} [\hat{\theta}] \geq \frac{[1 + \partial_{\theta} b_n]}{E [-\partial_{\theta}^2 \ln \mathcal{L}(\vec{x}; \theta)]}.$$

dove  $b_N$  è il bias dello stimatore considerato. Si vede che il termine al denominatore fornisce una misura dell'informazione. Allora il MVB afferma che la varianza dello stimatore non può andare oltre un valore che è inversamente proporzionale all'informazione contenuta nel campione di dati. Uno stimatore è efficiente se vale il segno di uguaglianza, se tale stimatore esiste.

**Maximum likelihood.** la tecnica della massima verosimiglianza identifica lo stimatore per il parametro  $\theta$  come il valore  $\hat{\theta}_{\text{ML}}$  in corrispondenza del quale la probabilità associata al campionamento  $\mathcal{L}(\vec{x}, \theta)$  è quella maggiore possibile.

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod pdf_x(x_i, \theta).$$

lo stimatore  $\hat{\theta}_{\text{ML}}$  della maximum likelihood è quello per cui  $\mathcal{L}(\theta)$  raggiunge il suo massimo assoluto.

Poiché  $\mathcal{L}$  è un prodotto di  $N$  fattori segue che è pratico considerare il suo logaritmo che diventa una sommatoria di  $N$  termini ed è detta log-likelihood:

$$\ln \mathcal{L}(\vec{x}, \theta) = \sum \ln pdf_x(x_i, \theta).$$

In quanto il logaritmo è una funzione monotona, il massimo di  $\mathcal{L}(\theta)$  è anche

- il massimo di  $\ln \mathcal{L}(\theta)$
- il minimo di  $-\ln \mathcal{L}(\theta)$

Nel caso di un parametro monodimensionale, lo stimatore ML è tale che

$$\partial_{\theta} \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\text{ML}}) = 0.$$

condizione a cui va aggiunto che l'estremante trovato sia massimo assoluto. In modo analogo, per il caso di un parametro pluridimensionale  $\vec{\theta}$  lo stimatore della ML è il valore per cui si annullano tutte le derivate parziali.

**Proprietà.** Lo stimatore della ML può essere distorto (cioè bias diverso da zero) anche se è possibile dimostrare che, sotto ipotesi molto generiche, è asintoticamente unbiased quando il numero di campionamenti tende ad infinito. Similmente, si dimostra che gli stimatori ML sono asintoticamente efficienti. Inoltre, si verifica che se esiste uno stimatore efficiente, allora lo stimatore ML lo è a sua volta.

## Lecture 9

[r] tutto, cfr slide

Si sono fatte delle misure  $\{x_1, \dots, x_N\}$ . Si vuole stimare il parametro  $\theta$  al meglio. Si costruisce uno stimatore senza bias, con varianza piccola e con consistenza (cioè che quando la stima è fatta su tutta la popolazione, allora lo stimatore restituisce il valore vero).

Si parte dall'unica cosa si può scrivere relativamente ai campionamenti IID. Si definisce la joint-*pdf* chiamata likelihood e dato che sono indipendenti, essa si può calcolare come

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_N; \theta) = \prod_{i=1}^N pdf(x; \theta).$$

gio 02 dic  
2021 13:30

Se  $\theta$  è variabile, allora si ha una probabilità condizionata. Essa dice quant'è la probabilità di ottenere un set di campionamenti se  $\theta$  ha un determinato valore. Ci si aspetta che se  $\theta$  è il valor vero allora la probabilità è massima. Definendo la likelihood come funzione di  $\theta$ , allora il massimo si presente nel valore vero.

Inoltre, si definisce l'informazione. Fissati i campionamenti, si ha un limite a quanto bello sia il parametro. La qualità dello stimatore è legata ai campionamenti tramite l'informazione.

Costruendo stimatori differenti con uno stesso set di dati, si arriva allo stimatore migliore quando la disuguaglianza di Rao-Cramer diventa un'identità, cioè la MVB è minima.

Costruendo la *pdf* dello stimatore, il bias misura il valore di aspettazione dello stimatore. Uno stimatore è una funzione delle misure; esso è una random variable, dunque si può disegnare una *pdf*.

La likelihood in funzione delle  $x$  è una joint-*pdf*. La sua derivata calcolata sui valori campionati è un numero. Essa è una funzione del parametro. Infatti, per una sola random variable  $x$ , descritta da una *pdf*( $x$ ) si ha

$$E[\mu(x)] = \int_{\Omega} \mu(x) pdf(x) dx.$$

tuttavia, ora si hanno  $N$  variabili casuali, con una joint-*pdf* corrispondente alla likelihood, dunque si calcolare il valore aspettazione di  $\mu(\dots) = \partial_{\theta}^2 \mathcal{L}$ . La derivata seconda è la misura della concavità. La varianza dello stimatore è un numero, quindi pure il numeratore e denominatore in Rao-Cramer. Dunque, il valore di aspettazione della derivata seconda della likelihood dev'essere il valore vero ed esso è detto informazione.?

Il modo in cui si formalizza il passaggio dalla likelihood a Rao-Cramer è tramite la definizione dell'informazione  $I(\theta)$ .

Dato un certo numero di campionamenti IID  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , si misura l'informazione contenuta in tali campionamenti. In generale, per un'informazione si vuole che il suo valore sia nullo se i dati sono irrilevanti per la stima del parametro; si vuole che cresca all'aumentare del numero di dati rilevanti; si vuole avere una relazione tra  $I(\theta)$  e  $\text{Var}[\hat{\theta}]$ .

Si vuole separare il modo in cui si costruisce lo stimatore dalla varianza. Il modo in cui si costruisce l'informazione di Fischer parte dalla likelihood. Si parte da un singolo campionamento.

**Score per un campionamento.** Si consideri un unico campionamento per la *pdf*( $x; \theta$ ). Si consideri che la *pdf* è gaussiana ed abbia  $\sigma$  noto e  $\mu$  ignoto. Dato che non si conosce  $\mu$  si può pensare alla distribuzione come una distribuzione condizionata. Si ha

$$\Delta p = \partial_{\theta} pdf(x, \theta) \Delta \theta.$$

Siccome la stessa variazione di probabilità ha un differente impatto a seconda che per quel valore di  $\theta$  la probabilità sia lata o sia bassa. Si passa a considerare la variazione relativa della probabilità:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{pdf_x(x; \theta)} \partial_{\theta} pdf_x(x; \theta) \frac{\Delta \theta}{\theta}.$$

il fattore moltiplicativo di  $\frac{\Delta \theta}{\theta}$  è detto Score  $S(x; \theta)$ .

Lo score misura come varia la probabilità associata al campionamento quando varia il parametro  $\theta$ . Risulta comodo riscrivere lo score come

$$S(x, \theta) = \partial_{\theta} \ln [pdf_x(x; \theta)].$$

Lo score è una funzione della random variable  $x$ , quindi il suo valore fluttua statisticamente e il singolo valore non è particolarmente significativo mentre lo sono  $E[S(x; \theta)]$  e  $E[S^2(x; \theta)]$  che non dipendono da  $x$  ma solo da  $\theta$ .

I valori di aspettazione sono definita da

$$E[S(x; \theta)] = \int S(x; \theta) pdf_x(x; \theta) dx = f(\theta)$$

$$E[S^2(x; \theta)] = \int S(x; \theta)^2 pdf_x(x; \theta) dx = g(\theta)$$

Se vale

- l'intervallo di integrazione (il sample space  $\Omega$  su cui è definita la  $pdf$ ), non dipende da  $\theta$ ;
- la  $pdf_x$  è una funzione regolare;

allora si dimostra che  $E[S(x; \theta)] = 0$ , cioè il valor medio dello score è nullo, che è il motivo per cui si fa riferimento al valore quadratico medio.

**Score per  $N$  campionamenti.** Per un set di campionamenti IID  $\{x_1, \dots, x_N\}$  di una  $pdf_x(x; \theta)$  si definisce lo score come somma degli score dei singoli campionamenti:

$$\begin{aligned} S(\vec{x}; \theta) &= \sum_{i=1}^N S(x_i; \theta) = \sum_{i=1}^N \partial_\theta \ln [pdf_x(x_i; \theta)] = \partial_\theta \sum_{i=1}^N \ln [pdf_x(x_i; \theta)] \\ &= \partial_\theta \ln \left[ \prod_{i=1}^N pdf_x(x_i; \theta) \right] = \partial_\theta \ln \mathcal{L}(\vec{x}; \theta). \end{aligned}$$

questa è la relazione tra la likelihood e lo score. Tale relazione soddisfa le condizioni precedenti.

**Informazione di Fischer.** Si definisce l'informazione contenuta nel set IID  $\{x_1, \dots, x_N\}$  e relativa al parametro  $\theta$  il valore quadratico medio dello score:

$$I_{\vec{x}}(\theta) = E[S(\vec{x}; \theta)^2].$$

quando valgono le condizioni precedenti (e quindi il valore medio dello score è nullo) si può scrivere:

$$I_{\vec{x}}(\theta) = E[-\partial_\theta^2 \ln \mathcal{L}(\vec{x}; \theta)] = E[-\partial_\theta S(\vec{x}; \theta)].$$

L'informazione è un numero, quindi le espressioni precedenti sono da valutare in corrispondenza del valore vero del parametro.

Si dimostra che  $I_{\vec{x}}(\theta)$  soddisfa i requisiti che si sono posti per una metrica che misuri l'informazione contenuta nei dati campionati e relativa ad un parametro. Rao-Cramer lega l'informazione alla varianza dello stimatore:

$$\text{Var} [\hat{\theta}] \geq \frac{(1 + \partial_\theta b_N[\hat{\theta}])^2}{E[I_{\vec{x}}(\theta)|_{\theta=\theta_v}]} = \frac{(1 + \partial_\theta b_N[\hat{\theta}])^2}{E[-\partial_\theta^2 \ln \mathcal{L}(\vec{x}; \theta)|_{\theta=\theta_v}]}.$$

e quindi spiega come maggiore è l'informazione contenuta nei dati e minore è la varianza dello stimatore. Lo stimatore è efficiente se vale il segno di uguale.

Per riassumere:

- la likelihood è la joint- $pdf$  dei campionamenti. Questa è una funzione dei parametri incogniti quando si fissa l'insieme dei dati.
- L'informazione di Fischer è il valore medio della derivata seconda della likelihood; se la likelihood è una campana, allora l'informazione dipende da quanto tale campana è stretta.
- Si è introdotto un metodo per costruire uno stimatore usando la likelihood: la maximum likelihood.

**Metodo della massima verosimiglianza.** La likelihood può essere usata per costruire uno stimatore del parametro  $\theta$  secondo la procedura che segue:

- si studia la likelihood come funzione di  $\theta$ .
- si cerca il valore per cui  $\mathcal{L}(\theta)$  oppure  $\ln \mathcal{L}(\theta)$  assume un massimo assoluto (sul dominio in cui è definita). Tale massimo è  $\hat{\theta}_{ML}$ .

**Invarianza per trasformazione.** Si consideri una  $pdf(x; \theta)$  e la likelihood  $\mathcal{L}(\vec{x}; \theta)$  corrispondente ad  $N$  campionamenti. La trasformazione  $\lambda = \lambda(\theta)$  porta a  $pdf(x; \lambda(\theta))$  e quindi ad una  $\mathcal{L}(\vec{x}; \lambda(\theta))$ . Poiché vale la relazione

$$\partial_{\theta} \mathcal{L}(\vec{x}; \lambda(\theta)) = \partial_{\lambda} \mathcal{L}(\vec{x}; \lambda(\theta)) \partial_{\theta} \lambda.$$

si ricava la relazione tra gli stimatore di ML per  $\lambda$  e  $\theta$ :

$$\hat{\lambda}_{ML} = \lambda(\hat{\theta}_{ML}).$$

Lo stimatore della ML può avere bias non nullo anche se è possibile dimostrare che, sotto ipotesi molto generiche, è asintoticamente unbiased. Similmente si dimostra che gli stimatori ML sono asintoticamente efficienti. Inoltre, si dimostra che se esiste uno stimatore efficiente, allora lo stimatore ML è tale. L'invarianza per trasformazioni preserva il punto di massimo, sia l'ordinata che l'ascissa; però non preserva le stesse proprietà dello stimatore.

**Stimatori della maximum likelihood.** Per  $N \rightarrow \infty$  si ha

- $\hat{\theta}_{ML}$  è unbiased ed efficiente
- $I(\theta) = I(\hat{\theta}_{ML})$
- il MVB si traduce in

$$\sigma_{\hat{\theta}_{ML}}^2 = \text{Var} [\hat{\theta}_{ML}] = \frac{1}{\sigma^2}.$$

- l'espressione analitica della likelihood è quella di una gaussiana, quindi  $\ln \mathcal{L}$  è una parabola

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_{\max} e^{-\frac{(\theta - \hat{\theta}_{ML})^2}{2I(\hat{\theta}_{ML})}}.$$

In generale si afferma che

- le proprietà elencate sono spesso valide anche nel caso di  $N$  piccolo, se lo stimatore è unbiased ed efficiente
- se esiste uno stimatore efficiente allora  $\hat{\theta}_{ML}$  lo è
- vale la proprietà di invarianza per trasformazione del parametro, se  $\alpha = \alpha(\theta)$ :

$$\hat{\alpha}_{ML} = \alpha(\hat{\theta}_{ML}) \implies \mathcal{L}_{\max} = \mathcal{L}(\hat{\alpha}_{ML}) = \mathcal{L}(\hat{\theta}_{ML}).$$

## Lecture 10

Si discutono i metodi di stima della varianza. Lo stimatore della maximum likelihood è una funzione dei campionamenti. La funzione likelihood risulta essere

gio 16 dic  
2021 13:30

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_N; \theta) = \prod_{i=1}^N pdf(x; \theta).$$

lo stimatore è quello per cui  $\mathcal{L}$  ammette un massimo assoluto. Facendo una stima si vuole stabilire la bontà di uno stimatore.

Asintoticamente lo stimatore ha tutte le caratteristiche desiderate:

- 1 unbiased
- 2 efficiente
- 3 l'informazione rispetto al parametro si può stimare con l'informazione per  $\theta_V \approx \hat{\theta}_M L$



4 il MVB risulta essere

$$\text{Var} [\hat{\theta}_{\text{ML}}] = \frac{1}{I(\hat{\theta}_{\text{ML}})}.$$

5 se  $\lambda$  è un nuovo modo per definire il parametro  $\theta$ :  $\lambda = \lambda(\theta)$  si ha invarianza per trasformazione dei parametri:

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \lambda(\hat{\theta}_{\text{ML}}).$$

6 assume la forma di una gaussiana con parametri  $\sigma^2$  da Rao-Cramer e  $\mu = \hat{\theta}_{\text{ML}}$ . Tuttavia, la gaussiana è una pdf, mentre la likelihood, nell'approccio bayesiano, è la distribuzione di probabilità di  $\theta$  (cioè la probabilità di arrivare vicino al valore vero); ma ciò non è vero per l'approccio frequentista. Con bayes si associa [r]

ad esempio  $\text{pdf}(x; \theta) = K e^{-\frac{x}{\theta}} = H e^{-\lambda x}$ , dove  $K$  e  $H$  dipendono dal fatto che l'integrale sul dominio dev'essere uno; si è posto  $\lambda = \lambda(\theta) = \frac{1}{\theta}$ . Infatti,  $\partial_\lambda \mathcal{L} = \partial_\theta \mathcal{L} \partial_\lambda \theta$ .

Idealmente si può arrivare a tali condizioni soddisfatte, ma nei casi concreti non lo sono necessariamente.

Spesso, per  $N$  grande, si può assumere di lavorare in tali condizioni: in particolare che lo stimatore sia privo di bias ed efficiente per cui vale Rao-Cramer per determinare la sua varianza. Se esiste uno stimatore efficiente, allora quello della likelihood è efficiente.

La tecnica di cercare il massimo della likelihood non dice come trovare la varianza dello stimatore. Si hanno tre metodi:

- diretto, fa uso della quarta proprietà, si assume che valga Rao-Cramer, che lo stimatore sia unbiased ed efficiente. Da cui segue

$$\text{Var} [\hat{\theta}_{\text{ML}}] = \frac{1}{I[\hat{\theta}_{\text{ML}}]} = \frac{1}{-\partial_\theta \ln \mathcal{L}|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{ML}}}}.$$

[r] Generalmente, esso non è utilizzato.

- grafico; questo metodo, come il successivo, si può applicare anche quando lo stimatore non è unbiased ed efficiente. Spesso tali due tecniche si usano simultaneamente e consentono anche di esplorare un particolare bias.
- Monte Carlo;

**Metodo grafico.** Si consideri il logaritmo della likelihood che è funzione solo del parametro quando si fissano i campionamenti. Si isola una funzione vicino al massimo:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \ln \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\text{ML}}) + \partial_\theta \mathcal{L}(\theta - \hat{\theta}_{\text{ML}}) + \frac{1}{2} \partial_\theta^2 \mathcal{L}(\theta - \hat{\theta}_{\text{ML}})^2.$$

uno sviluppo al secondo ordine consiste in approssimare con una parabola. Il punto  $\hat{\theta}_{\text{ML}}$  è un massimo, dunque la derivata prima è nulla. Mentre

$$\partial_\theta^2 \mathcal{L} = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

vale la seconda uguaglianza quando si suppone l'uguale in Rao-Cramer e non ci sia bias. Pertanto

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \ln \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\text{ML}}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} (\theta - \hat{\theta}_{\text{ML}})^2.$$

ponendo  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ML}} \pm \sigma$  si ha

$$\ln \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\text{ML}} \pm \sigma) = \ln \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\text{ML}}) - \frac{1}{2}.$$

questo vale per uno stimatore efficiente e privo di bias; ma si ha solamente in un caso asintotico. Tuttavia, la relazione 5 afferma che

Sebbene una likelihood finita non sia una likelihood asintotica, comunque dato che gli intervalli della varianza si corrispondono, allora si può mantenere lo stesso concetto di varianza anche per una likelihood finita.

Più una likelihood assomiglia una parabola, segue che l'approssimazione tramite il metodo grafico risulta essere migliore.

**Toy Monte Carlo.** Questo metodo è spesso utilizzato in concomitanza al metodo grafico. Tramite una simulazione numerica si ripete più volte un esperimento. Si assume di conoscere la *pdf* che descrive la misura; bisogna capire la sua forma in base alle misure stesse. Una volta ottenuta la *pdf* si possono simulare i campionamenti a cui si applica la stessa tecnica di analisi utilizzata per i dati veri, originali. Da ogni set di dati si estrae un  $\hat{\theta}_{ML}$  e pure la varianza tramite il metodo grafico. Con abbastanza toy esperimenti si può anche rappresentare la distribuzione dello stimatore.

Per fare le simulazioni bisogna fissare il valore del parametro. Ci si aspetta che la media sia pari al valore del parametro. Qualora non fosse così, si conclude che la tecnica adottata è una procedura che induce un bias. Potrebbe anche darsi che la *pdf* scelta non è quella che rappresenta l'esperimento.

A tal punto la larghezza della curva dà informazioni sulla varianza. Se tale curva è una gaussiana, si può eseguire un fit, tramite cui si può stabilire un intervallo di confidenza  $[\hat{\theta}_{ML} \pm \sigma^{toy}]$  del 68%. Essendo frequentista, si afferma di avere una probabilità del 68% che l'intervallo contenga il valor vero (e non il viceversa, proprio perché si è frequentisti).

Nella fisica delle particelle, quando si dichiara una scoperta, bisogna che l'evento inatteso dev'essere a più di  $5\sigma$ ; cioè avere una discrepanza maggiore di  $5\sigma$  dal valor atteso. A  $3\sigma$  si ha un'indicazione.

[r] Si supponga di compiere una misura di una variabile  $y = d \sin \theta$ , con  $\theta_1, \dots, \theta_N$ ,  $d = 10 \pm 3$  misurato una singola volta. Per ogni  $\theta$  si propaga l'errore su  $y$  sia da  $\theta$  che da  $d$ . Tuttavia, l'errore di  $d$  non è una fluttuazione statistica perché si è misurato una singola volta. La procedura corretta è calcolare  $\langle \theta \rangle$  [r]

### 7.3.1 Extended Maximum Likelihood

Il numero di campionamenti  $N$  può essere ignoto. Il caso è tipico di fisica delle particelle. Pertanto, si aggiunge un fattore correttivo alla maximum likelihood:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_N; \theta) = \frac{e^{-\nu} \nu^N}{N!} \prod pdf(x_i; \theta).$$

## 7.4 Minimi quadrati

Il metodo dei minimi quadrati è utile per stimare i valori dei parametri a partire da dati sperimentali. Esso può anche rendersi utile per capire quale sia il modello migliore che descriva tali dati.

Si supponga che i dati di una variabile abbiano incertezza trascurabile rispetto quella dell'altra variabile. Ci sono casi in cui l'incertezza è nulla ed altri in cui l'incertezza è da stimare. [r]

la miglior stima dei parametri risulta essere

$$Q^2 = \sum \frac{(y - f(x; \theta))^2}{\sigma^2}.$$

si scelgono i parametri tali per cui  $Q$  sia minimo. Questo si può fare anche se i dati non sono distribuiti in modo gaussiano. [r]

## Lecture 11

gio 23 dic  
2021 13:30

Si considera un problema più generale di quello affrontato con la maximum likelihood: si ha un modello che definisce la relazione tra due grandezze fisiche  $X$  e  $Y$  che dipendono da  $k$  parametri:

$$Y = f(\vec{\theta}, X), \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$$

Si stimano i valori dei parametri a partire da dati sperimentali:  $N$  misura  $y_i$  del valore della grandezza  $Y$  effettuate in corrispondenza di un valore  $x_i$  della grandezza  $X$ .

Le coppie  $(x_i, y_i)$  sono estrazioni da una *pdf* e vi si associano le rispettive deviazioni standard  $\sigma_{x_i}$  e  $\sigma_{y_i}$ . I dati sono tipicamente rappresentati in un grafico con barre di errore pari alle larghezze delle *pdf*. Si trova un metodo generale per stimare i parametri  $\theta_1, \dots, \theta_k$  a partire dai dati. Si parla di interpolazione o fit dei dati.

Il metodo dei Mini Quadrati è quello di scegliere come stima di  $\vec{\theta}$  il valore per cui il seguente funzionale è minimo

$$Q^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - f(\vec{\theta}, x_i)]^2}{\sigma_i^2}$$

tale funzionale è la somma dei quadrati delle distanze tra i punti campionati e la funzione  $Y = f(\vec{\theta}, X)$ . Ciascuna distanza è normalizzata alla larghezza della *pdf* ( $y_i$ ) e quindi tiene conto delle fluttuazioni statistiche caratteristiche del campionamento. Si cerca il valore di  $\vec{\theta}$  per cui  $Q^2$  ammette minimo assoluto nello spazio dei parametri:

$$\partial_{\theta_j} Q^2 = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

Si cerca il modello sia il più vicino ai dati. Per errori distribuiti in modo gaussiano, i minimi quadrati coincidono con la maximum likelihood.

**Osservazione.** Sebbene pure le  $x_i$  hanno varianza, [r] si può ricondursi alla situazione in cui solamente le  $y_i$  hanno varianza. Infatti, basta propagare l'errore di  $x_i$  su  $f(x, \vec{\theta})$  e quindi su  $y_i - f(x, \vec{\theta})$ . [r] riportare sulle  $y$  la grandezza che presenta gli errori maggiori.

**Osservazione.** La posizione del minimo non dipende dai  $\sigma_i$  perché infatti si può scrivere

$$Q^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum \frac{(y_i - f(x, \vec{\theta}))^2}{\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}}$$

dove  $\sigma^2$  è la media delle varianze. Dunque, quanto importa sono le incertezze relative come suggerito dal denominatore. Quindi il valore del minimo non dipende dall'incertezza [r] che invece influenza le incertezze dei parametri.

**Caso gaussiano.** Se la *pdf* è gaussiana allora gli stimatori coincidono. Se  $\theta_{LS}$  è unbiased ed efficiente allora MVB garantisce che

$$\text{Var}[\theta_{LS}] = \text{Var}[\theta_{ML}] = -\frac{1}{E[\partial_{\vec{\theta}}^2 \mathcal{L}]_{\theta=\theta_{LS}}}$$

Si consideri il caso con  $x_i$  senza errore, mentre  $y_i$  hanno  $\sigma_i$  come incertezza. La distribuzione di ciascun  $y_i$  è gaussiana:

$$pdf(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

il modello dei minimi quadrati afferma che  $\mu_i = f(x_i, \vec{\theta})$ . Per la likelihood si hanno variabili IID. Si consideri la variabile ausiliaria, intesa come trasformazione

$$z_i = \frac{y_i - f(x_i, \vec{\theta})}{\sigma_i}$$

il valore  $x_i$  non è una variabile casuale, l'unica che lo è risulta essere  $y_i$ . Questa variabile è distribuita secondo una gaussiana standard. [r] La likelihood è il prodotto delle *pdf*

$$\mathcal{L}(y_1, \dots, y_N) = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(\dots)^2}{2\sigma_i^2}} \implies \ln \mathcal{L} = \ln \text{cost.} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum \frac{(y_i - f(x_i, \vec{\theta}))^2}{\sigma_i^2}}_{Q^2}$$

Quando si cerca il massimo della likelihood, le derivate si annullano nello stesso punto. Si calcola l'incertezza associata ai parametri. Si è già visto lo sviluppo attorno al massimo della likelihood:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \ln \mathcal{L}(\theta_{\text{ML}}) - \frac{1}{2} \frac{(\theta - \theta_{\text{ML}})^2}{\sigma^2}$$

per i minimi quadrati, lo sviluppo diventa

$$Q^2(\theta) = Q^2(\theta_{\text{LS}}) + \frac{(\theta - \theta_{\text{LS}})^2}{\sigma^2}$$

[r] dunque si sale di una quantità pari ad uno sul grafico e si ottiene la larghezza della distribuzione dei parametri.

## 7.5 Test del chi quadro

Si introduce un test di ipotesi per misurare quanto il modello sia compatibile con i dati raccolti. [r] Nel metodo dei minimi quadrati si ha

$$f(x, \vec{\theta}_V) = E[y_i] = \mu_i, \quad f(x, \vec{\theta}_{\text{LS}}) \approx E[y_i]$$

dunque risulta

$$Q^2 = \sum \frac{(y_i - f(x, \vec{\theta}))^2}{\sigma_i^2} = \sum \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

inoltre

$$Q^2(\theta_V) = \sum \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \equiv \chi^2$$

è una variabile casuale perché somma di variabili casuali. Tale chi quadro ha  $N - k$  gradi di libertà, dove  $k$  è il numero di parametri che si determinano dai dati. Pertanto

$$Q^2(\theta_{\text{LS}}) \approx \chi^2$$

il valore assunto sul minimo di  $Q^2$  è  $\chi^2$  che a sua volta è una variabile casuale che segue la distribuzione omonima. Il valore di aspettazione è  $N - k$  cioè i gradi di libertà. Per ogni insieme di misure con cui si fa un fit, si ha un  $\chi^2$  diverso.

Da un solo insieme di misure si possono dedurre varie implicazioni. La prima è quella di aspettarsi un chi quadro ridotto prossimo ad uno. Risulta evidente che una misura del  $\chi^2$  nelle due code è un risultato improbabile ed esso non è un valore bello. Si potrebbe aver sbagliato a raccogliere i dati. Oppure il chi quadro porta un messaggio differente.

Un valore prossimo allo zero riflette il fatto che il modello passa molto vicino ai dati. Questo può succedere quando si sbaglia a valutare l'errore oppure si abbiano tanti parametri liberi quanti sono i punti raccolti. Si ha un grande raccordo con il modello.

Per valori molto maggiori del valore di aspettazione indica che gli scarti dal modello sono molto grandi. Questo può succedere quando il modello con cui si vuole descrivere i dati potrebbe non essere quello corretto. Si ha un piccolo raccordo con il modello.

La scelta delle regioni è arbitraria, tipicamente si utilizza una  $p$ -value di 5%:

$$p = \int_{+\infty}^{\chi_{\text{misur}}^2} pdf(\chi^2)$$

se  $p$  è sopra il 5% allora si è nell'area accettabile.

Si sta facendo un test di ipotesi che testa se i dati sono statisticamente compatibili; non si confrontano modelli. Se il risultato sotto il 5% si è dimostrato che il modello non vale. Se il risultato sta sopra, non si è dimostrato che vale, ma solo che potrebbe valere. Potrebbero esistere modelli più compatibili con i dati. Confronta Popper e la falsificabilità. [r]

Tipicamente si costruisce una statistica  $t$  e si osserva la sua distribuzione in base a quale modello si sceglie. In base a dove si misura il valore della statistica, segue che si può escludere un modello o l'altro. Tuttavia, il problema si presenta quanto la misura di  $t$  cade in una regione comune ad entrambe le distribuzioni: bisogna scegliere un compromesso con cui accettare un certo numero di falsi negativi e falsi positivi.

Il caso del  $\chi^2$  è speciale perché non si confrontano ipotesi e si ha una sola regione di disaccordo con il modello. Esso, come molti test di ipotesi, dà un risultato sull'insieme di tutti i dati che si sono raccolti e ciò non è ideale, perché potrebbe non evidenziare problemi che si trovano nei dati.

Un modo utile per studiare quando un modello è buono è quello di rappresentare i residui normalizzati detti pull:

$$\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i}$$

ci si aspetta che siano distribuiti in modo casuale attorno allo zero. Con tanti dati ci si aspetta una distribuzione gaussiana standard. Se la distribuzione non appare casuale, allora significa che il modello può (anche in parte) non descrivere bene i dati. Se si ha una residua dipendenza allora c'è un problema nel modello. Tale metodo risulta molto potente ed è sempre disponibile. Dunque, bisogna capire se cambiare modello, se il modello ha dei limiti di validità, etc.

Bisogna stare attenti alla sovra-correlazione tra i parametri:  $y = ab + cx$  ha infinite soluzioni per  $a$  e  $b$ , tutte quelle che hanno lo stesso prodotto. Bisogna guardare attentamente la matrice di covarianza.

**Interpolazione ed estrapolazione.** Spesso si desidera valutare il modello in un punto differente da quelli sperimentalmente misurati. Il valore medio si trova per sostituzione. Tuttavia, per calcolare l'incertezza bisogna considerare la matrice di covarianza. Si deve propagare l'incertezza e la covarianza.

Inoltre, più ci si allontana dai dati più l'incertezza dell'estrapolazione è maggiore.

**Teorema di Gauss-Markov.** Per un modello lineare nei parametri, la soluzione dei minimi quadrati si trova per via analitica; sia del minimo che per la varianza. In ROOT è TLinearFitter. Vale il teorema di Gauss-Markov: se il modello è lineare nei parametri, allora lo stimatore dei minimi quadrati è privo di bias e tra tutti i possibili stimatori lineari nei parametri, quello dei minimi quadrati è quello con varianza minore.

## Lecture 12

La soluzione analitica è utile per il valore d'aspettazione del parametro ed in particolare per l'errore. Inoltre, quando l'errore sui punti è identico per tutti i punti, allora il valore della stima non dipende da tale errore; questo perché il minimo non dipende più dal denominatore. Questo consente di fare il boost? [r] del chi quadro.

**Stima.** Si hanno  $N$  misure con errori solamente sulle  $y$ . Si assume esistere un modello tale per cui  $Y = f(x; \theta)$ . Si è visto che il metodo del chi quadro è basato sulla minimizzazione dello scarto normalizzato rispetto i parametri:

$$Q^2 = \sum \frac{[y_i - f(x_i; \theta)]^2}{\sigma_i^2}$$

gio 13 gen  
2022 13:30

quando le  $y_i$  hanno una distribuzione gaussiana, allora  $Q^2(\theta = \theta_{\min}) = \chi^2_{N-k}$  [r] dove  $k$  è la dimensione del vettore  $\theta$ , cioè il numero di parametri. Per la variabile  $\chi^2$  ci si aspetta che segue la distribuzione omonima, con valore di aspettazione  $N - k$ . Ci si aspetta che il numero ottenuto dopo il fit sia nella regione di maggiore probabilità della distribuzione. Si escludono le code perché per eventi nella coda verso sinistra si ha un valore  $\chi^2$  poco probabile, ma al contempo si discosta poco dai dati: la ragione potrebbe essere avere sovrastimato gli errori. D'altra parte, per valori nella coda di destra, anche con il parametro migliore, il modello è mediamente lontano dai dati, molto più di quanto lo siano gli errori; questo potrebbe implicare che si sia sbagliato il modello, oppure ancora una volta l'incertezza potrebbero essere sbagliati. Andando a guardare la distribuzione dei residui  $y_i - f(x_i; \theta)$  si possono estrapolare altre informazioni riguardo cos'è sbagliato.

Se si è sicuri che il modello sia corretto e  $\sigma = \sigma_i \forall i$ , ma comunque si ha un valore  $\chi^2$  che differisce tanto da  $N - k$ ; dato che  $Q^2$  non dipende dall'incertezza (perché tutte uguali ora), allora anche se si fosse sbagliato a valutare l'incertezza, non si sarebbe influenzata la posizione del minimo di  $Q^2$ , ma si sarebbe influenzato il suo valore.

A questo punto si va a stabilire che il  $\chi^2$  dev'essere  $N - k$  e si va a trovare l'errore che porta il  $\chi^2$  a tale valore; così si considera  $\sigma' = \alpha\sigma$ :

$$Q^2 = \sum \frac{[y_i - f(x_i; \theta = \theta_{\min})]^2}{\sigma_i^2} = \chi^2 \implies \frac{Q^2}{\alpha^2} = \chi'^2 \equiv N - k \implies \alpha^2 = \frac{\chi^2}{N - k}$$

tale tecnica è utile per capire dove sta lo sbaglio, ma ciò presuppone che si sia certi che il modello sia corretto. Trovato il fattore di correzione, bisogna tornare indietro e capire da dove potrebbe essersi generato la sovra/sotto-stima.

**Test di ipotesi chi quadro.** Ci si pone il problema di come fare una stima di parametri quando si ha una distribuzione in istogramma.

Data una random variable  $x$  con distribuzione  $pdf(x; \theta)$ , può risultare comodo raggruppare le misure in vari bin per costituire un istogramma. Questo si fa per due motivi: ridurre il numero di dati e, se i dati non fossero binnati, allora si avrebbe una sola tecnica per ottenere i parametri, cioè la maximum likelihood. Ma questa seconda tecnica non si può fare con il chi quadro perché non si ha una variabile continua. [r]

Dato l'istogramma, ci si aspetta che la distribuzione si sovrapponga alle barre; oppure si può confrontare l'istogramma con una distribuzione  $PDF$  (probability distribution function) binnata (che non è più una densità di probabilità, ma è una distribuzione di probabilità). Di questa, prendendo un bin, la probabilità ad esso associata risulta essere  $P_i = \int_{i-1}^i pdf(x; \theta) dx$  (si utilizza il teorema della media integrale). Il valore di aspettazione di un bin risulta essere

$$E[n_i] = Np_i$$

dove  $N$  è il numero di prove fatte e  $p_i$  è la probabilità che una misura cada in tale bin.

Il numero di conteggi in un bin è una distribuzione multinomiale, ogni evento può o non può cadere nel bin, si ha successo o insuccesso; la probabilità di cadere nel primo bin segue una binomiale perché successo e insuccesso. Dunque, con più bin si ha una distribuzione multinomiale la cui varianza è

$$\text{Var}[n_i] = Np_i(1 - p_i), \text{Cov}[n_i, n_j] = p_i p_j$$

[r]

Se si riuscisse a valutare l'errore sugli eventi in ciascun bin, allora si avrebbe un problema molto simile a quello del  $\chi^2$ .

L'area della distribuzione dipende anche dal parametro e quindi pure la distribuzione binnata ne dipende. Si calcola il valore di  $\theta$  migliore tale che i dati misurati vengano descritti dalla distribuzione binnata.

[r] Se  $p_i$  è piccola, allora la multinomiale è approssimabile ad un prodotto di tante binomiali e la covarianza è circa nulla  $\text{Cov} \approx 0$  e la varianza è  $\text{Var}[n_i] \approx Np_i$ . Dunque, si può assumere che

ogni bin sia indipendente da ogni altro. Pertanto, si può scrivere il funzionale  $\chi^2$ :

$$Q^2 = \sum \frac{[n_i - Np_i(\theta)]^2}{Np_i(\theta)}$$

dove il valore atteso di misure è  $Np_i$ , il valore misurato risulta essere  $n_i$ . Se  $Np_i$  è grande allora  $Q^2 \rightarrow \chi^2$  e questo si chiama chi quadro di Pearson.

Tuttavia, si hanno due problemi:

- gli errori dipendono dai parametri; questo vuol dire che non vale il teorema di Gauss-Markov perché una delle ipotesi è che gli errori non devono dipendere dai parametri.
- difficoltà di calcolo; si deve fare una minimizzazione in cui il parametro compare sia al numeratore che al denominatore.

Dunque il chi quadro di Pearson non è utilizzato per la minimizzazione. Quindi, quello che si fa è assumere che  $\text{Var}[n_i] = Np_i = E[n_i] = n_i$ . Si sostituisce al valore teorico di  $Np_i$  il valore misurato  $n_i$ . Dunque il chi quadro risulta essere

$$Q^2 = \sum \frac{[n_i - Np_i(\theta)]^2}{n_i} = \sum \frac{[O_i - E_i]^2}{O_i}$$

e questo è il chi quadro di Neymann. Il valore  $n_i$  non è un buon stimatore per la varianza quando è piccolo, quando la distribuzione binomiale è molto diversa dalla gaussiana. Dunque, tale distribuzione si può fare solo se la binomiale è circa gaussiana; questo è legato agli intervalli di confidenza che sono un modo per misurare l'errore. La scelta della grandezza di  $n_i$  è arbitraria, di solito si sceglie 10 conteggi.

Si ricapitolano le ipotesi:

- la probabilità che la misura cada in ogni singolo bin è piccola
- per passare al chi quadro di Neymann, il valore  $n_i$  dev'essere abbastanza grande

nella seconda scrittura del chi quadro di Neymann, si intende che  $E_i$  ed  $O_i$  siano dei conteggi, perché  $Q^2$  è adimensionale e altrimenti le unità non avrebbero senso. [r]

Quando  $p_i$  è piccolo, e dunque  $n_i$ , non si può usare un chi quadro perché il risultato sarebbe sbagliato anche se non di tanto. Allora bisogna tornare al caso in cui non si fanno assunzioni e si utilizza la likelihood.

Per ciascun bin,  $n_i$  è il valore di conteggi misurati, mentre  $Np_i$  è quello atteso. La distribuzione binomiale associata a ciascun bin risulta essere  $B(n_i; Np_i)$ . Quando  $p_i$  è piccolo, al posto della binomiale si può utilizzare una Poissoniana  $P(n; \lambda)$  con  $\lambda = Np$ . Si scrive la likelihood binnata per poi massimizzarla

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^n B/P(n_i; Np_i)$$

a livello pratico, è meno dispendioso calcolare la poissoniana invece che la binomiale. Inoltre, spesso i fenomeni derivano proprio da una distribuzione poissoniana.

In particolare in ROOT, prima di eseguire un fit, bisogna sempre chiedersi se si può stimare il chi quadro. Ad esempio, bin vuoti o un numero basso di conteggi non permettono di utilizzare la statistica del chi quadro. Molte volte, la coda di una distribuzione va a zero e quello che si può fare è: fittare solamente sull'intervallo in cui si sono raccolti dati; oppure creare un bin infinito che copra tutta la coda della distribuzione.

**Intervalli di confidenza.** Tipicamente, ad una misura  $\theta \pm \delta_\theta$  si associa una probabilità. Questa probabilità è la probabilità che l'intervallo  $[\theta \pm \delta_\theta]$  contenga il valore vero. [r] Facendo tante misure, ci si aspetta che  $x\%$  delle volte l'intervallo contenga il valore vero.

Il problema si sviscerisce quando si ha a che fare con la distribuzione gaussiana.

- Si considera il caso Poissoniano. Si consideri di campionare una poissoniana  $P(n; \mu) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$ , con  $E[n] = \text{Var}[n] = \mu$ . Facendo una singola misura  $n^*$  allora si ha solamente quel valore per compiere la stima. [r] Si ha l'intervallo di confidenza  $n^* \pm \sqrt{n^*}$  al 68% se la poissoniana tende alla gaussiana. Tuttavia, se la poissoniana non è vicina ad una gaussiana allora non si può descrivere l'intervallo di confidenza in modo così semplice. Si consideri di misurare raggi cosmici su di un'area  $e$ , con una singola misura, non si rileva nessun raggio. Dunque, la stima di  $\mu$  è 0 senza nemmeno errore e ciò non ha senso quando  $\mu$  è molto grande (anche se ha senso quando è piccolo). Inoltre, si nota anche che l'intervallo di confidenza è simmetrico, ma per  $\mu$  piccoli, la poissoniana è altamente asimmetrica per  $\mu$  piccoli.

Esiste la costruzione di Neymann che permette di costruire gli intervalli di confidenza. Si supponga che  $\mu = 1$ . Si può tentare di individuare un intervallo di confidenza al 90% [r] e si ha che l'intervallo risulta essere  $[0, 2]$ . Se il valor vero fosse 2, allora l'intervallo sarebbe  $[0, 3]$ ; per 3 si ha  $[1, 4]$ ; per 4 si ha  $[1, 5]$  [r]

Se la misura è zero, come nell'esempio, si è all'interno dell'intervallo con  $\mu \in (1, 2)$ ; se la misura è 3 allora si ha  $\mu \in (2, 7)$  e similmente per altre misure. Questo risulta essere l'intervallo di confidenza. ? [r] Per valori grandi, l'intervallo è bene approssimato da  $n^* \pm \sqrt{n^*}$ . Infatti, si consideri una distribuzione gaussiana. Ogni intervallo risulta essere  $\mu \pm \sigma$ . L'intervallo di confidenza risulta sempre essere lo stesso perché la larghezza è sempre data da  $\sigma$ . [r] [immaginare]

- Infatti, passando alla gaussiana standard, si ha che l'intervallo di confidenza non dipende più dai parametri perché si ha sempre  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ .
- Si consideri una variabile distribuita in modo gaussiano  $G(x; \mu, \sigma)$ . Trasformando alla gaussiana standard, si ha sempre lo stesso intervallo di confidenza. Tuttavia, considerando la media di più campionamenti estratti in modo gaussiano (che segue una distribuzione gaussiana a sua volta  $G(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}})$ ). La trasformazione alla gaussiana normale si può fare sia per  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$ , ma si può ottenere la distribuzione di Student tramite la trasformazione  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{N}}}$  [r] ed anche tale distribuzione ottenuta non dipende dai parametri.

[r] Nei casi in cui la distribuzione è nota, allora si può risolvere il problema; per la gaussiana si passa alla distribuzione normale o a quella di Student; per la poissoniana bisogna operare la costruzione di Neymann. [r]

## Lecture 13

mer 02 mar  
2022 10:30

## 8 Esperienze laboratorio

### 8.1 Ottica 1

#### 8.1.1 Riflessione e rifrazione

L'ottica geometrica è un'approssimazione valida per dimensioni macroscopiche rispetto alla lunghezza d'onda della luce; ciò non è sempre vero, ma lo si vedrà più avanti.

L'ottica geometrica assume che la luce si propaghi in modo rettilineo, tali raggi sono rappresentati tramite delle frecce. Si hanno sorgenti puntiformi e sorgenti estese.

**Riflessione e rifrazione.** Le leggi base sono quella della riflessione e della rifrazione. Un raggio che incide un'interfaccia tra due mezzi viene in parte riflesso ed in parte rifratto. Gli angoli vengono misurati a partire dalla normale dell'interfaccia. Nella riflessione, l'angolo di attacco e di uscita rimane identico rispetto alla normale. Mentre per la rifrazione, l'angolo cambia in base alle caratteristiche dei materiali.



In laboratorio si verifica il caso della riflessione per onde elettromagnetiche non ottiche, in particolare con microonde.

Vengono proposte delle misure per cui almeno la fisica di base è nota, ma l'interpretazione va costruita, come la parte di allestimento sperimentale. Si indaga un fenomeno particolarmente complesso e si vuole capire quale sia il modello giusto. Si studia se la legge di rifrazione è valida per ogni angolo di incidenza. Poi si interpreta se il modello è veritiero tramite un modello un po' più generico. Più complesso è il modello e più i parametri sono e quindi si rendono necessari più dati.

Per la riflessione si ha una legge del tipo

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

i parametri  $n_i$  variano in base al materiale che si studia.

I due fenomeni hanno una chiara spiegazione tramite la teoria ondulatoria: essi sono legati alle equazioni di continuità dei campi all'interfaccia tra due materiali. Esiste una relazione che lega la velocità di propagazione della luce e le caratteristiche del mezzo:

$$w = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \implies n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Tali leggi hanno un'immediata motivazione teorica quando si passa all'ottica ondulatoria. L'indice di rifrazione caratterizza la velocità dell'onda elettromagnetica nel mezzo. Il fatto che cambia la velocità, implica che cambia pure la lunghezza d'onda.

Si ha un altro aspetto importante che è la dispersione dell'indice di rifrazione. Il comportamento di un raggio luminoso nell'attraversare un'interfaccia cambia in base alla sua lunghezza d'onda. Il modo in cui cambia dipende dalle caratteristiche del materiale. A livello fenomenologico si descrive la variazione tramite l'equazione di Cauchy:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

l'indice di rifrazione è, tipicamente, un numero complesso che descrive sia la rifrazione che la dispersione.

Nella pratica, risulta importante costruire lenti tramite materiali acromatici così da limitare al minimo l'aberrazione cromatica.

**Riflessione totale.** La riflessione totale appare quando si ha un angolo di rifrazione maggiore ai  $90^\circ$  mentre si passa da un materiale ad un altro con indice di rifrazione decrescente,  $n_2 < n_1$ . L'angolo limite è dato da

$$\theta = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

La riflessione totale spiega i miraggi ed è utilizzata nella fibra ottica.

**Riflessione, trasmissione ed assorbimento.** A livello macroscopico si fa riferimento ai coefficienti di riflessione e di rifrazione. Essi dipendono dalle caratteristiche del mezzo e dallo stato di polarizzazione. Inoltre, la luce è soggetta anche all'assorbimento.

L'ottica geometrica fa uso del principio di Fermat: la luce segue il percorso più veloce. Data una distanza  $d$ , il tempo di percorrenza è

$$t = \frac{d}{w} = \frac{d \cdot n}{c} = \frac{\Delta}{c}$$

Invece di parlare di tempo di percorrenza, si fa uso del cammino ottico  $\Delta = ct = dn$ . Dal principio di Fermat discendono le altre leggi.

### 8.1.2 Specchi e lenti

Uno strumento ottico è un dispositivo che, per effetto di riflessione o rifrazione, genera un'immagine di uno oggetto luminoso o illuminato.

**Specchio.** Un raggio viene riflesso e, prolungando idealmente le traiettorie oltre lo specchio, si ha un'immagine virtuale.

L'asse ottico è l'asse perpendicolare allo specchio, passante per il centro della sfera di cui lo specchio ne è parte.

**Lente.** Una lente è un sistema ottico che rende equivalenti i cammini ottici di raggi incidenti in direzioni differenti.

L'asse ottico è l'asse passante per il centro delle due sfere utilizzate per creare la lente.

Specchi e lenti costruiti in questo modo sono detti stigmatici perché creano un'immagine nitida. Si fa sempre riferimento a lenti sottili.

Il fuoco è il punto in cui convergono tutti i raggi paralleli all'asse ottico. Gli specchi ne presentano uno, mentre le lenti due simmetrici. Per principio di inversione dei cammini ottici, ponendo una sorgente nel fuoco, si hanno dei raggi riflessi paralleli tra loro. Questo processo è detto collimazione (mentre la coerenza è una proprietà delle sorgenti luminose).

La tecnica più semplice per ottenere la collimazione di raggi luminosi è l'utilizzo di un cilindro che seleziona raggi tra loro più o meno paralleli.

In laboratorio non si usano gli specchi sferici, ma solo le lenti convergenti le quali possono essere usate per ottenere un fascio divergente: basta osservare oltre il punto di fuoco.

**Lente convergente sottile.** Per trovare l'immagine ottenuta attraverso una lente si utilizzano raggi notevoli:

- raggi paralleli all'asse ottiche che convergono nel fuoco
- raggi uscenti dal fuoco che diventano paralleli all'asse ottico

Si indica con  $p$  la distanza tra l'oggetto e la lente; mentre con  $q$  la distanza tra la lente e l'immagine. Così si può scrivere la legge dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

dove  $f$  è la distanza focale, cioè la distanza tra il fuoco e la lente. Si applicano alcune convenzioni:

- $q > 0$  se l'immagine è reale e  $q < 0$  se l'immagine è virtuale.
- $f > 0$  se raggi paralleli che passano nella lente vi convergono e  $f < 0$  si trova dallo stesso lato da cui provengono i raggi.

Si può anche utilizzare l'ingrandimento delle dimensioni trasversali rispetto alla lente ed esso è pari a

$$G = \frac{q}{p}$$

**Occhio.** L'occhio presenta una lente convergente a lunghezza focale variabile. Le dimensioni dell'immagine di un oggetto sulla retina sono proporzionali al diametro angolare.

**Lente di ingrandimento.** La lente di ingrandimento si utilizza per mettere a fuoco ed ingrandire un oggetto posto ad una distanza minore di quella del fuoco. L'immagine prodotta dalla lente è virtuale.

**Microscopio.** Esso è costituito da due gruppi ottici:

- l'obiettivo crea un'immagine reale ingrandita di un oggetto vicino
- l'oculare fa da lente di ingrandimento

**Cannocchiale.** Si hanno ancora due gruppi

- l'obiettivo forma un'immagine reale di un oggetto lontano
- l'oculare risulta essere la lente d'ingrandimento

**Spettrometro.** Esso è uno strumento ottico che permette di misurare lo spettro di una radiazione elettromagnetica. Nel corso si utilizza lo spettroscopio che è uno spettrometro ottico (contrapposto allo spettrometro di massa).

Lo strumento collima dei raggi da una sorgente luminosa. Essi colpiscono un reticolo di diffrazione (oppure un prisma) e in base a dove si posiziona il telescopio, si può osservare una diversa lunghezza d'onda rifratta.

## Lecture 14

### 8.2 Circuiti 1

gio 03 mar  
2022 10:30

In queste note sono usati simboli circuitali in stile internazionale IEC, le note del professore potrebbero fare uso anche dei simboli statunitensi.

In queste ore si vedono

- leggi di Kirchhoff;
- resistore;
- generatori di tensione e di corrente;
- misuratori di tensione e di corrente;
- teorema di Thevenin e teorema di Norton, utili per semplificare le reti circuitali;
- condensatore e induttore, in serie e parallelo;
- circuiti RL, RC, RLC, in un regime di corrente impulsata, cioè la sollecitazione del circuito è data da un'onda quadra;
- circuiti RL, RC, RLC, in regime sinusoidale, cioè sollecitati da una tensione e corrente sinusoidali;
- analisi armonica; utile per risolvere in maniera più semplice i circuiti rispetto alle equazioni differenziali; si introduce l'impedenza,  $Z$ , e le funzioni di trasferimento,  $H$ .

**Leggi di Kirchhoff.** Le equazioni di Maxwell, nel caso dei circuiti, si semplificano nelle leggi di Kirchhoff (in molti casi). Le ipotesi per la semplificazione sono

- $\partial_t \Phi = 0$ , la variazione temporale del flusso magnetico nelle maglie è nullo;
- $\partial_t Q = 0$  non si hanno accumuli di carica sui conduttori del circuito;

**Prima legge.** La prima legge, detta “legge ai nodi”, afferma che la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla  $\sum_i I_i = 0$ . Un nodo è un punto del circuito dove si incontrano due o più conduttori.

Si dimostra tale legge. Considerata l’equazione di continuità

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho$$

che garantisce la conservazione della carica, e per la seconda ipotesi si ha

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} d\nu = -\partial_t Q \equiv 0$$

e per il teorema della divergenza vale

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} d\nu = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{n} d\sigma = 0$$

che in forma discreta equivale a  $\sum_i I_i = 0$ . Si nota che  $\partial V = \Sigma$ .

**Seconda legge.** La seconda legge, detta “legge alle maglie”, afferma che la somma algebrica delle tensioni in una maglia è nulla. Una maglia è qualunque percorso chiuso del circuito. Si dimostra tale legge. Considerato

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \implies \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} d\Sigma = -\partial_t \Phi = 0$$

e per il teorema di Stokes si ha

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} d\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

dove si ha  $\partial \Sigma = \Gamma$ .

**Dipoli.** Si è soliti rappresentare il verso della corrente e l’aumento di potenziale. Un dipolo è interamente caratterizzato dalla sua legge tensione, corrente. Il dipolo più semplice è quello la cui legge è la legge di Ohm.

$$V = IR$$

Essi si rappresentano come resistori. La resistenza si esprime in ohm,  $\Omega$ . Inoltre, la potenza su di un dipolo è

$$P = VI$$

che ha unità di watt, W. Questa formula vale in generale, ma per le resistenze si può scrivere anche come

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

tramite Ohm.

**Resistori in serie.** La caduta di potenziale su ciascun resistore risulta essere

$$V_i = R_i I$$

perché la corrente è comune a tutte le resistenze e la caduta totale è

$$V = \sum V_i = \sum R_i I$$

per cui si può considerare la resistenza totale come

$$R = \sum R_i$$

**Resistori in parallelo.** In questo caso è la tensione ad essere comune alle resistenze. Dunque  $V = R_i I_i$  e per la legge di Kirchhoff ai nodi si ha che la corrente entrante deve essere identica alla corrente uscente. Pertanto

$$I_T = \sum I_i = V \sum \frac{1}{R_i} \Rightarrow \frac{I_T}{V} = \frac{1}{R_T} = \sum \frac{1}{R_i}$$

**Generatore di tensione.** I generatori permettono di generare una tensione arbitraria. Si vede la divisione tra generatori reali ed ideali.

Per un generatore ideale:

- fornisce una tensione  $V$  arbitraria;
- a seconda del carico, il generatore può fornire qualsiasi corrente;
- il generatore spento equivale ad un corto-circuito (cioè equivale ad un filo).

Per un generatore reale:

- fornisce una  $V$  impostata;
- esiste una corrente  $I$  massima che può fornire; dunque, fissato il carico resistivo, pure la tensione è limitata ed è minore di quella richiesta;
- il generatore spento equivale ad una resistenza finita,  $R_g$ ; si perturba la parte ideale aggiungendo una resistenza; tipicamente  $R_g \approx 50 \Omega$ . Si vuole una resistenza piccola perché, inserendo un carico, la tensione impostata viene ripartita tra le due resistenze, ma si vuole che la tensione sia tutta e sola sul carico.

**Generatore di corrente.** Esso fornisce una corrente impostata. Si distingue tra reali e ideali.

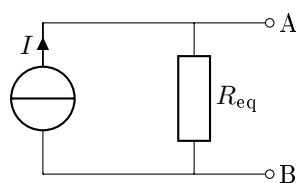
Per un generatore ideale:

- produce una corrente  $I$  impostata;
- si ha una tensione  $V$  arbitraria;
- il generatore spento equivale ad un circuito aperto.

Per un generatore reale:

- produce una corrente  $I$  impostata;
- esiste una tensione massima e pertanto, fissata la resistenza, si ha una corrente massima minore di quella richiesta;
- il generatore spento equivale ad una resistenza,  $R_g$  e dato che si deve comportare come un circuito aperto, tale resistenza è dell'ordine dei mega-ohm,  $M\Omega$ . In questo modo, la corrente scorre solo sul carico impostato perché ha (presumibilmente) una resistenza minore.

**Teorema di Norton.** Considerata una rete circuitale arbitrariamente complessa composta da generatori e resistenze, vista da due terminali  $A$  e  $B$ , essa può essere resa equivalente al circuito di Norton che presenta una sola resistenza ed un solo generatore di corrente (detti resistenza e generatore equivalenti) in parallelo, sempre tra i due terminali  $A$  e  $B$ .

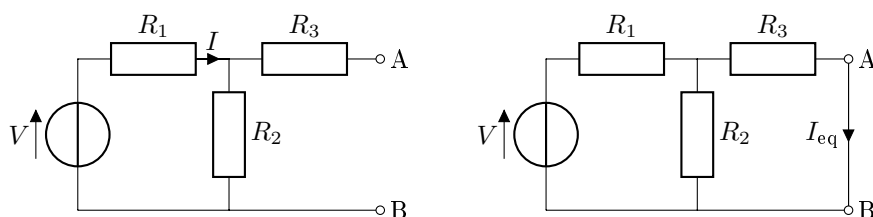


La dimostrazione del teorema è costruttiva:

- Si spengono i generatori per cui si hanno corto-circuiti al posto dei generatori di tensione e circuiti aperti al posto dei generatori di corrente, dunque si calcola la resistenza equivalente tra  $A$  e  $B$ .
- Si corto-circuita il collegamento tra  $A$  e  $B$ , e si misura la corrente (equivalente) che fluisce tra i due terminali.

Pertanto, i due circuiti sono equivalenti appunto per costruzione (quando sono visti nello specifico dai terminali  $A$  e  $B$ ).

**Esempio.** Si consideri il circuito di sinistra che segue



Per il primo passaggio si spengono i generatori. Il generatore di tensione presente equivale ad un corto-circuito. Si hanno due resistenze in parallelo poi in serie con una terza. Pertanto

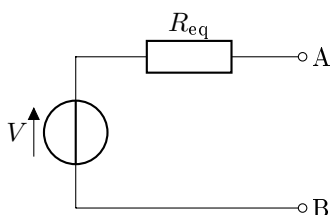
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3$$

Per il secondo passaggio si corto-circuitano i due terminali (circuito di destra). Si calcola la resistenza equivalente

$$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

da cui si ricava la corrente che esce dal generatore  $I = \frac{V}{R}$  e poi si ottiene la corrente che va da  $A$  a  $B$ . Si ha una resistenza in serie con due che sono in parallelo. Superata la prima resistenza, la corrente si divide e quella che passa per  $AB$  è la corrente equivalente.

**Teorema di Thevenin.** Una rete arbitrariamente complessa vista tra i terminali  $A$  e  $B$  è equivalente ad un circuito di Thevenin con un generatore di tensione ed una resistenza in serie.



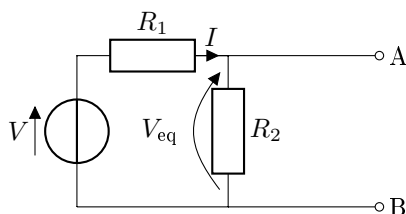
Per costruirlo:

- Si spengono i generatori per cui si hanno corto-circuiti al posto dei generatori di tensione e circuiti aperti al posto dei generatori di corrente, dunque si calcola la resistenza equivalente tra  $A$  e  $B$ .
- Si misura la caduta di tensione tra  $A$  e  $B$  a vuoto, cioè senza collegare alcun carico ai due terminali.

**Esempio.** Si consideri il circuito dell'esempio precedente. Il primo passaggio è identico, dunque la resistenza equivalente è

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3$$

Per il secondo passaggio bisogna misurare la caduta di potenziale tra  $A$  e  $B$  a vuoto. La resistenza vicino ad  $A$  non presenta caduta di potenziale perché non vi scorre corrente. Essa, infatti, si trova solamente sul circuito chiuso dato dal generatore, da  $R_1$  e da  $R_2$ . Pertanto, la caduta di potenziale tra  $A$  e  $B$  equivale alla caduta di potenziale su  $R_2$ .

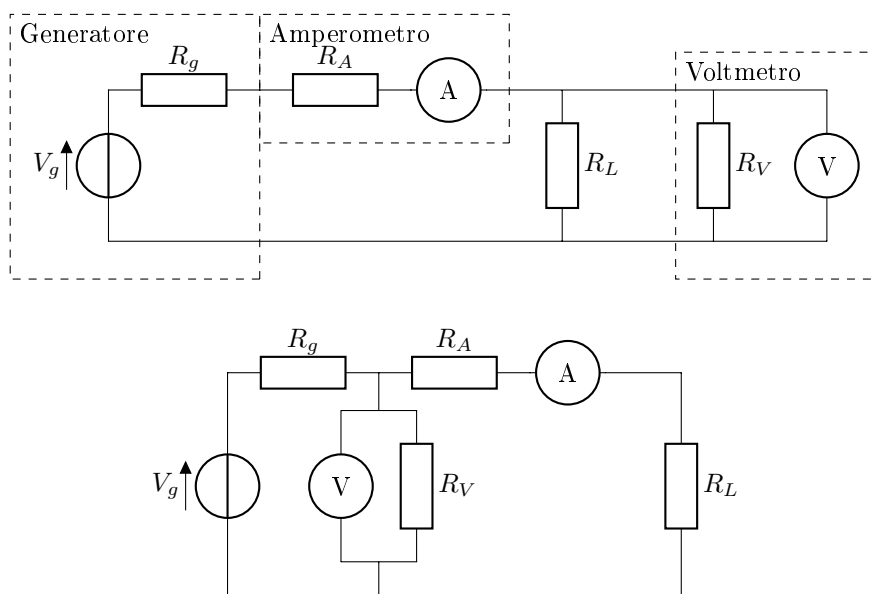


**Misuratore di tensione.** Esso è anche detto voltmetro. Un misuratore deve essere posto in parallelo, così da misurare la caduta di tensione tra i terminali.

L'atto della misura deve perturbare il meno possibile il sistema misurato. Pertanto, il misuratore di tensione ideale non vede perturbare il sistema. La stessa corrente deve scorrere nel circuito quando il misuratore è collegato. Quindi, il voltmetro ideale ha una resistenza interna infinita. Il misuratore reale ha una resistenza finita dell'ordine dei mega-ohm  $M\Omega$ .

**Misuratore di corrente.** Esso è anche detto amperometro. Esso deve inserirsi in serie, così che in esso possa scorrere la corrente. Dato che deve perturbare il meno possibile il circuito, significa che l'amperometro deve comportarsi come un filo conduttore. L'amperometro ideale ha resistenza nulla. Quello reale ha resistenza di qualche ohm.

Si può caratterizzare completamente un dipolo in base alla sua corrente e tensione. Si possono avere due configurazioni per caratterizzare il dipolo. Tali configurazioni differiscono in base a quale misuratore si pone prima.



La prima configurazione è preferibile quando la resistenza  $R_L$  da misurare è molto minore di quella del voltmetro così che la corrente misurata dall'amperometro sia (quasi) tutta quella

che passa per il carico. Conviene usare questa configurazione quando la resistenza del carico è comparabile con la resistenza dell'amperometro.

Nel secondo caso, l'amperometro misura sicuramente la corrente che passa per il carico. Conviene usare questa configurazione quando la resistenza del carico è comparabile con la resistenza del voltmetro.

## Lecture 15

mer 09 mar  
2022 10:30

### 8.3 Ottica 2

Una serie di fenomeni ottici osservati non trova spiegazione nell'ottica geometrica. Tali fenomeni sono l'interferenza e la diffrazione.

Le equazioni di Maxwell prevedono che il campo elettromagnetico si propaga nello spazio secondo l'equazione delle onde. Un'onda ha una direzione ed una legge che esprime l'evoluzione dei campi nel tempo e nello spazio. La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è data da

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

dove  $n$  è l'indice di rifrazione. La soluzione dell'equazione delle onde ha la forma

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x \pm vt)$$

**Onda piana.** Il fronte d'onda è definito come l'insieme dei punti dello spazio in cui i campi, a tempo fissato, assumono lo stesso valore. L'onda piana ha un fronte piano, mentre l'onda sferica ha un fronte d'onda sferico. Il segno individua l'onda progressiva ( $-$ ) e l'onda regressiva ( $+$ ). Quando si discute l'onda elettromagnetica si fa sempre riferimento al campo elettrico perché quello magnetico è univocamente determinato dalle equazioni di Maxwell. Comunemente, la dipendenza del campo elettrico è di tipo sinusoidale

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

Tale espressione è utile perché un'onda elettromagnetica può essere generata accelerando delle cariche in modo sinusoidale. Inoltre, grazie a Fourier, si può decomporre qualsiasi segnale periodico in onde sinusoidali.

**Onda piana sinusoidale.** L'espressione dell'onda piana sinusoidale ha vari parametri:

- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  è il numero d'onda
- $\lambda$  è la lunghezza d'onda, cioè il periodo spaziale
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$  è la pulsazione
- $T$  è il periodo (temporale)
- $\nu = T^{-1}$  è la frequenza

inoltre vale  $v = \lambda\nu$  perché  $v = \frac{\omega}{k}$ . La caratteristica intrinseca di un'onda elettromagnetica è la frequenza. La lunghezza d'onda cambia quando si passa da un mezzo all'altro perché cambia la velocità, ma la frequenza rimane la stessa.

**Polarizzazione.** La radiazione elettromagnetica ha direzione di propagazione perpendicolare ai campi. Se la direzione del campo elettrico è sempre costante (rispetto un sistema di riferimento) allora si ha un'onda polarizzata linearmente.

Quando i campi ruotano attorno la direzione di propagazione si ha una polarizzazione circolare. Si può creare luce polarizzata tramite dei filtri polarizzanti: si fa passare solo la luce in una precisa orientazione.



**Spettro elettromagnetico.** La frequenza di un fotone è legata all'energia trasportata  $E = h\nu$ .

Si vedrà un esperimento con le microonde che permettono di rendersi conto che si sta veramente lavorando con l'elettromagnetismo ed inoltre la dimensione degli ostacoli per creare l'interferenza è ancora macroscopica; sole; decelerazione di elettroni per i raggi X; decadimento radioattivo per raggi gamma.

La radiazione elettromagnetica può essere dovuta a delle cariche elettriche accelerate; a radiazione di corpo nero come filamenti riscaldati; ad una ridistribuzione di atomi e molecole: gli elettroni transigono da stati energetici maggiori a stati con energia minore emettendo una radiazione ad una precisa frequenza.

Si vedranno esperimenti con diodi di onde microonde; lampade che emettono linee spettrali specifiche tramite la ridistribuzione di atomi e molecole; e laser.

**Intensità.** In laboratorio si misura direttamente l'intensità

$$I(\vec{x}, t) = c\varepsilon_0 E^2(\vec{x}, t)$$

Tuttavia, la grandezza di riferimento è l'intensità media su di un periodo.

**Interferenza.** Si considerino due sorgenti luminose puntiformi. Il campo elettrico in un punto è

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}}{r} e^{i(kr - \omega t + \phi)}$$

perché si ha un'onda sferica. Per il principio di sovrapposizione, il campo in un punto è la somma dei campi delle sorgenti presenti e si ha

$$I(P) = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos[(k_A R_A - \omega_A t) - (k_B R_B - \omega_B t + \phi)]$$

dove il terzo addendo è il termine d'interferenza. Tipicamente, il suo integrale sul periodo è nullo. Diventa altrimenti in condizioni particolari

- la frequenza e la lunghezza d'onda delle due sorgenti è uguale
- lo sfasamento tra le due è costante nel tempo  $\phi(t) = \text{cost}$ , si ha coerenza nelle sorgenti

allora si ha

$$I(P) = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos[k(R_A - R_B) - \phi]$$

Si possono avere dei massimi di intensità per

$$k(R_A - R_B) - \phi = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

mentre i minimi si hanno per

$$k(R_A - R_B) - \phi = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Quando le sorgenti sono identiche ed il punto è equidistante allora

$$I(P) = I_0 \cos^2 \left[ \frac{\pi}{\lambda} (R_A - R_B) - \frac{\phi}{2} \right]$$

Per cui il luogo geometrico dei massimi soddisfa

$$R_A - R_B = n\lambda$$

Mentre il luogo dei minimi soddisfa

$$R_A - R_B = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

Per sorgenti puntiformi, tali luoghi sono iperboloidi di rotazione.

**Monocromaticità e coerenza.** Una sorgente monocromatica emette una radiazione luminosa solo di una lunghezza d'onda. Tuttavia, ogni riga di emissione ha una distribuzione intorno il valore della lunghezza d'onda della sorgente dovuta al principio di indeterminazione.

Inoltre, la temperatura causa un effetto doppler termico che espande ancora più la distribuzione. Quando le onde emesse sono in fase tra loro ha un tempo di coerenza del pacchetto d'onda. La lunghezza di coerenza è  $ct$ .

In laboratorio sono presenti lampade al mercurio con lunghezza di coerenza di 50 cm.

**Laser.** Esso è un dispositivo in grado di emettere un fascio di luce coerente, generalmente monocromatica e concentrata in un raggio rettilineo estremamente collimato. La luminosità è elevatissima a paragone delle sorgenti luminose tradizionali.

**Coerenza.** Due sorgenti distinte, pur emettendo la stessa lunghezza d'onda, non sono coerenti tra loro, pertanto non possono essere utilizzate per osservare il fenomeno dell'interferenza. Questo richiede di

- sovrapporre raggi luminosi che provengono dalla stessa sorgente, così da essere coerenti
- far percorrere cammini ottici differenti a tali raggi, che non eccedano la lunghezza di coerenza della sorgente

Si può illuminare una doppia fenditura che si comportano come nuove sorgenti e dunque interferiscono tra loro. Le righe di interferenza hanno tale sagoma perché le fenditure sono rettangolari. Inoltre, ogni fenditura interferisce con se stessa e dà origine alla diffrazione.

Un altro modo per osservare l'interferenza è utilizzare due specchi con angoli diversi così che la situazione è analoga ad avere due sorgenti virtuali. [immagine]

**Interferometro di Fabry-Pérot.** Si utilizza un laser che produce un fascio monocromatico con lunghezza di coerenza considerevole, intenso e collimato. Ha un fronte d'onda piano, cioè i raggi sono paralleli. Il fascio passa tramite una lente che permette di far divergere il fascio. Tale fascio incide su due lamine semi-riflettenti una dopo l'altra. Un raggio passa tutte due le lastre ed una parte si riflette sulla seconda, poi si riflette sulla prima ed infine passa attraverso la seconda ancora. I due raggi sono paralleli, ma avendo tracciato percorsi diversi, essi sono fuori fase. La differenza di cammino ottico è  $\Delta = 2d \cos \theta$  dove  $d$  è la distanza tra le due lamine (tale cavità è detta di Fabry-Pérot) e  $\theta$  è l'angolo di incidenza rispetto la normale. Si ha condizione di interferenza costruttiva quando vale

$$2d \cos \theta = n\lambda$$

I raggi si sfasano di multipli di lunghezze d'onda e quindi massimi e minimi corrispondono.

Ad ogni riflessione, si perde energia e quindi di intensità luminosa. Per due soli raggi, il luogo dei massimi è

$$\theta = \arccos \left( \frac{k\lambda}{2} d \right)$$

Misurando il raggio dei cerchi e l'angolo si può verificare la validità della relazione.

**Figura di interferenza.** Ad ogni passaggio attraverso una lamina, l'energia diminuisce per un fattore di trasmittanza,  $T$ ; mentre quando il raggio si riflette, la sua energia diminuisce di un fattore di riflettanza,  $R$ . Si trascura l'assorbimento dell'energia da parte della lastra. Inoltre vale

$$R + T = 1$$

La qualità della figura di interferenza di Fabry-Pérot dipende dalla finesse,  $F$ . Si tiene anche conto della differenza di fase ogni volta che si ha un passaggio attraverso una lastra

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$$

Svolgendo tutti i conti si ottiene l'intensità

$$I(\theta) = \frac{I_{\text{inc}} T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

dove

$$F = \frac{4R}{(1-r)^2}, \quad \phi = \delta_r + \frac{4\pi}{\lambda} \cos \theta$$

con  $\delta_r$  lo sfasamento indotto dalla riflessione. A questo punto, i massimi di intensità soddisfano

$$2d \cos \theta + \frac{\delta_r \lambda}{2\pi} = k\lambda$$

**Misura della lunghezza d'onda.** Una delle due lastre può essere spostata rispetto l'altra. La figura di interferenza scorre e si vedono le frange luminose sovrapporsi a quelle scure. Perciò si ha

$$2\Delta d \cos \theta = \Delta k \lambda \implies 2\Delta d = \Delta k \lambda, \quad \theta \approx 0$$

Si può misurare la lunghezza d'onda  $\lambda$  in base a quante frange  $k$  scorrono. Oppure, conoscendo la lunghezza d'onda, si può misurare lo spostamento  $\Delta d$ .

L'interferometro di Ligo, sebbene essere un interferometro di Michelson, utilizza delle cavità di Fabry-Pérot per allungare la dimensione di un braccio.

**Misure in configurazione di Fabry-Pérot.** Si vuole verificare la relazione che descrive la posizione dei massimi di interferenza

$$2d \cos \theta + \frac{\delta_r \lambda}{2\pi} = k\lambda$$

Si vuole procedere a calibrare il micrometro usando la lunghezza d'onda del laser.

## Lecture 16

### 8.4 Circuiti 2

gio 10 mar  
2022 10:30

Le leggi di Kirchhoff sono valida per ogni circuito ed in ogni momento. Si introduce la capacità e l'induttanza.

**Capacità.** Dati due conduttori affacciati, la loro differenza di potenziale è proporzionale alla carica depositata sui conduttori:

$$C = \frac{Q}{V} \iff VC = Q \implies \dot{V}C = I$$

L'ultima espressione è un'equazione differenziale necessaria per lo studio dei comportamenti in frequenza. L'unità di misura della capacità è il farad.

**Parallelo.** Le capacità in parallelo sono soggette alla stessa differenza di potenziale. Per la legge ai nodi si ha

$$I = I_1 + I_2 = C_1 \dot{V} + C_2 \dot{V} = (C_1 + C_2) \dot{V}$$

pertanto, la capacità equivalente è

$$C = \sum_i C_i$$

**Serie.** La corrente tra le capacità è la stessa. Quindi

$$I = C_T \dot{V} = C_T(\dot{V}_1 + \dot{V}_2) = C_T \left( \frac{I}{C_1} + \frac{I}{C_2} \right) \iff C_T \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 1$$

pertanto

$$\frac{1}{C_T} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

**Induttanza.** La relazione differenziale di interesse per l'induttanza è

$$L = \frac{\Phi}{I} \implies V = L\dot{I}$$

la cui unità di misura è lo henry.

**Parallelo.** Le componenti hanno la stessa differenza di potenziale, dunque:

$$V = L_T \dot{I} = L_T(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = L_T \left( \frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2} \right) \implies L_T \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = 1$$

quindi

$$\frac{1}{L_T} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

**Serie.** La corrente è la stessa e quindi

$$V_T = V_1 + V_2 = L_1 \dot{I} + L_2 \dot{I} = (L_1 + L_2) \dot{I}$$

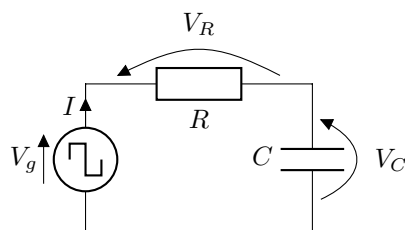
per cui

$$L_T = \sum_i L_i$$

#### 8.4.1 Tensione ad onda quadra

Si considerano circuiti in cui si ha un segnale impulsato, cioè si utilizza un'onda quadra.

**Circuito RC.**



Si applica Kirchhoff:

$$V_g = V_R + V_C = RI + V_C = RC\dot{V}_C + V_C$$

ricordando che  $I = C\dot{V}_C$ . Si ha un'equazione differenziale di prim'ordine a coefficienti costanti non omogenea. Si considera la soluzione per il primo semi periodo dell'onda quadra, in quanto il secondo semi periodo si ha solamente il segno opposto.

Si risolve l'equazione come visto nel corso di Analisi II, tuttavia la risoluzione si può ottenere anche tramite l'analisi armonica. La soluzione generale è

$$V_C = V_{CO} + V_P$$

Si comincia cercando la soluzione dell'equazione omogenea

$$\dot{V}_{CO} = -\frac{1}{RC}V_{CO} \implies V_{CO} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC$$

Si cerca la soluzione particolare. Nel primo semi periodo, dato che  $V_g$  è costante, allora è ragionevole cercare la soluzione particolare come una costante. Si pone  $V_P = k$  e si ha

$$V_g = RC \left[ V_0 \left( -\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + k = k \right]$$

Si determina la costante  $V_0$ . La soluzione che si cerca deve cambiare segno in  $\frac{T}{2}$  ed assume un valore simmetrico rispetto lo zero proprio perché l'onda è quadra:

$$V_C(0) = -V_C\left(\frac{T}{2}\right)$$

La soluzione dell'equazione dev'essere continua perché è una funzione che descrive un sistema fisico. L'argomento è trattato in maniera più rigorosa sugli appunti del professore. Dunque, per la condizione di continuità si ha:

$$V_0 + V_g = -\left(V_g + V_0 e^{-\frac{T}{2\tau}}\right) \implies V_0 = -\frac{2V_g}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

per cui la soluzione finale è

$$V_C(t) = V_g \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

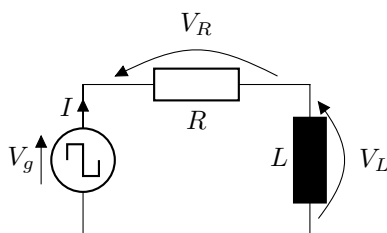
La grandezza  $\tau$  è determinata dal circuito, mentre  $T$  può essere definita in modo arbitrario. In laboratorio, si può scegliere  $T \gg \tau$  di modo che l'esponenziale a denominatore sia prossimo a zero.

Si calcola la corrente

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{V_g - V_C}{R} = \frac{2V_g}{R(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si studia la sensatezza della soluzione. All'inizio si ha una variazione di potenziale. Lontano dall'inizio, il condensatore si comporta come fosse in corrente continua: il condensatore si carica fino ad una tensione  $V_g$ , mentre la corrente diminuisce perché la differenza di tensione con la sorgente è minore.

### Circuito RL.



L'equazione che descrive il sistema è

$$V_g = V_R + V_L = RI + L\dot{I}$$

la soluzione generale è

$$I = I_O + I_P$$

la soluzione omogenea è

$$\dot{I}_O = -\frac{R}{L}I_O \implies I_O = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

quindi

$$V_g = L \left( -\frac{R}{L} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + Rk = Rk$$

pertanto la soluzione è

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_g}{R}$$

si impone la condizione di continuità  $I(0) = -I\left(\frac{T}{2}\right)$ . Pertanto

$$I_0 = -\frac{2V_g}{R(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})}$$

e dunque

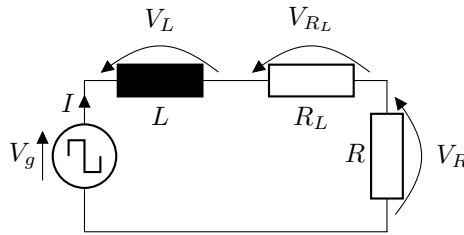
$$I(t) = \frac{V_g}{R} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

ed inoltre

$$V_L = V_g - V_R = V_g - RI = \frac{2V_g}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si interpreta la soluzione. Lontano dal fronte di salita dell'onda quadra (ma prima del fronte di discesa), il circuito si comporta come se fosse in corrente continua. L'induttore si carica e si comporta come un filo, per cui raggiunge la corrente  $\frac{V_g}{R}$  e la sua tensione diminuisce.

### Circuito RL con induttore reale.



Dato che l'induttore è una bobina, esso è costituito da un filo molto lungo che, quindi, presenta una resistenza considerevole delle decine di ohm. La resistenza dell'induttore è in serie con la resistenza del circuito ed esse si possono scrivere come una resistenza unica. Tuttavia, la differenza di potenziale trovata precedentemente

$$V_L = \frac{2V_g}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

risulta essere quella ai capi dell'induttore ideale, ma si vuole ricavare quella sull'induttore reale (che, quindi, considera anche la caduta di potenziale sulla sua resistenza), però non si può misurare la tensione in un punto prima della resistenza dell'induttore  $R_L$ , ma dopo l'induttore stesso, perché la resistenza è intrinseca all'induttore medesimo.

Si vuole trovare la corrente che scorre nel circuito, così si trova  $V_{R_L}$  e, sommandola a  $V_L$ , si ottiene la tensione dell'induttore reale.

Considerato

$$\tau = \frac{L}{R_L + R}$$

si ha

$$I = \frac{V_{R_{tot}}}{R_{tot}} = \frac{V_g - V_L}{R_L + R} = \frac{V_g}{R_L + R} \left( 1 - \frac{2e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right)$$

La caduta di potenziale sull'induttore reale è

$$\tilde{V}_L = V_L + V_{R_L} = V_L + R_L I = V_g \left[ \frac{2e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} + \frac{R_L}{R_L + R} \left( 1 - \frac{2e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) \right]$$

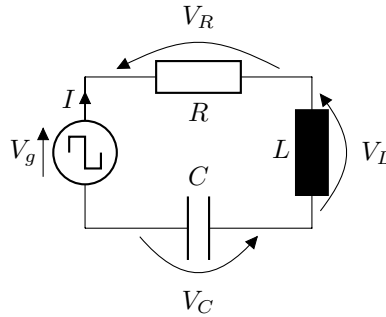
Distanti da un fronte di variazione del segnale impulsato, la corrente tende al valore

$$\frac{V_g}{R_L + R}$$

mentre la tensione sull'induttore reale cade di un valore che tende a  $V_{R_L}$  arrivando ad un valore di

$$\frac{V_g}{R_L + R} R_L$$

### Circuito RLC.



L'equazione che descrive il circuito è

$$V_g = V_R + V_C + V_L = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \implies 0 = RI + L\ddot{I} + \frac{I}{C}$$

che è un'equazione differenziale al secondo ordine omogenea. Si cerca una soluzione del tipo

$$I = Ae^{\lambda t} \implies \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

posto

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

si ha

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

si studiano i diversi regimi in base alla natura del discriminante sotto radice.

**Primo caso.** Si considera il caso per cui  $\gamma < \omega_0$  per cui si ha un regime sotto-smorzato. La soluzione risulta essere

$$I(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\beta t} + A_2 e^{-i\beta t}], \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Posta l'equazione di continuità  $I(0) = -I\left(\frac{T}{2}\right)$ , per  $T \gg \frac{1}{\omega_0}$  si ha un circuito in corrente continua e la capacità si carica fin quando non scorre più circuito:  $I\left(\frac{T}{2}\right) \approx 0$ . Pertanto  $A_1 = -A_2$  e si ha

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\beta t)$$

**Secondo caso.** Si considera  $\gamma > \omega_0$ . Si ha il regime sovra-smorzato. La soluzione è

$$I(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}], \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

seguendo la stessa discussione precedente,  $I\left(\frac{T}{2}\right) = 0$ ,  $A_1 = -A_2$  e dunque

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} [e^{\beta t} - e^{-\beta t}]$$

**Terzo caso.** Si considera  $\gamma = \omega_0$ . Si ha il regime critico. La soluzione è

$$I(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 t e^{-\gamma t}$$

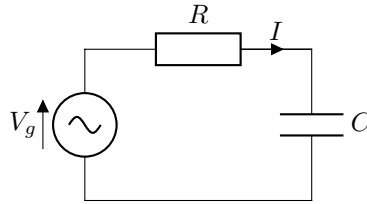
ancora per la medesima discussione,  $I(0) = -I\left(\frac{T}{2}\right) = 0$ ,  $A_1 = 0$  e quindi

$$I(t) = A t e^{-\gamma t}$$

Tuttavia, le induttanze di laboratorio sono induttanze reali e quindi bisogna perturbare il concetto di induttanza ideale di modo da descrivere in modo più accurato la realtà.

#### 8.4.2 Corrente alternata

**Circuito RC** Si consideri un circuito costituito da un generatore a tensione alternata secondo una sinusoide, una resistenza, ed un condensatore:



La tensione del generatore varia come  $V_g = V \cos(\omega t)$ . L'equazione che descrive il sistema è

$$V_g = RC \dot{V}_C + V_C$$

La soluzione dell'omogenea è ancora la stessa

$$V_{CO} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Mentre la soluzione particolare cambia ed è ragionevole cercarla come funzione sinusoidale:

$$V_P = k \cos(\omega t + \phi)$$

Dunque, sostituendo la soluzione particolare all'interno dell'equazione generale si ha

$$\begin{aligned} V_g \cos(\omega t) &= RC \left[ -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} V_0 - k\omega \sin(\omega t + \phi) \right] + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + k \cos(\omega t + \phi) \\ &= k [\cos(\omega t + \phi) - RC\omega \sin(\omega t + \phi)] = k \sqrt{1 + (RC\omega)^2} \cos\left(\omega t + \phi + \theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

pertanto, si determinano le costanti confrontando ad uno ad uno i fattori dei due membri dell'equazione:

$$k = \frac{V_g}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}, \quad \phi + \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \implies \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

la fase  $\theta$  dipende dai coefficienti del seno e del coseno. Dunque, la tensione della capacità è

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_g}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2} \cos\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Si analizza il comportamento del sistema. Per tempi lunghi,  $t \gg \tau$ , il primo addendo trascurabile e quindi la tensione del circuito ha la stessa forma funzionale della forzante, ma cambia il modulo e la fase. Nel caso della forzante quadra, non si ottiene questo fenomeno.

La somiglianza per forma funzionale tra la soluzione e la forzante è una caratteristica intrinseca di tutti i sistemi governati da equazioni differenziali a coefficienti costanti, detti sistemi dinamici tempo-invarianti.

Il fatto che la forzante sia una funzione sinusoidale (e quindi anche la soluzione) implica il fatto che non si ha più bisogno di risolvere le equazioni differenziali che descrivono un sistema perché si sa già qual è la soluzione (che ha, appunto, la stessa natura della forzante). Tuttavia, bisogna essere accorti nel trovare il modulo e la fase della soluzione. Questo metodo costituisce l'analisi armonica.



## Lecture 17

ven 11 mar  
2022 08:30

## 8.5 Ottica 3

**Interferometro di Michelson.** Un laser viene diviso in due fasci perpendicolari tramite uno specchio semi-riflettente. In ogni braccio, il fascio viene riflesso e si ricombinando allo specchio in un unico fascio che è proiettato su di un bersaglio.

Il laser deve prima passare attraverso una lente che apre il fascio. Altrimenti, sullo schermo si nota un punto solamente quando il fascio sia perfettamente perpendicolare agli specchi; se così non fosse, si hanno più punti e bisogna regolare gli specchi. Considerando anche la lente, si vede l'immagine d'interferenza.

Lo specchio semi-riflettente è costituito da un vetro e da una sottile lamina metalli su di una faccia. Si aggiunge una lastra compensatrice su di un braccio per compensare il numero di transizioni attraverso lo specchio semi-riflettente. [r]

La condizione di interferenza costruttiva o distruttiva dipende dalla differenza di cammino ottico. Sull'asse del fascio si ha interferenza costruttiva se le due onde sono in fase; distruttiva se sono in opposizione di fase. Se si varia la distanza tra gli specchi, si osserva l'alternarsi di massimi e minimi. Il numero di frange che si vedono scorrere spostando lo specchio è dato da:

$$\Delta N \lambda = 2 \Delta l$$

Misurando  $\Delta l$  è possibile ricavare il valore della lunghezza d'onda della sorgente utilizzata.

La figura d'interferenza di Michelson è costituita da un passaggio meno marcato tra massimi e minimi, i quali sono più diffusi.

In laboratorio, si pone una cella a vuoto a cui viene immessa dell'aria oppure una lastra di vetro sul percorso di uno dei due raggi. In questo modo, si modifica il cammino ottico nell'interferometro.

**Diffrazione.** Quando su di una fenditura incide un fronte d'onda piano, la fenditura diventa sorgente di onde secondarie di tipo sferico.

**Figura di diffrazione da una fenditura.** Nella configurazione di Fraunhofer si assume che lo schermo sia posto all'infinito: i raggi emessi in una stessa direzione convergono in uno stesso punto  $P$ . Si può immaginare che ci sia una lente che focalizza i raggi paralleli in uno stesso punto. I raggi che emergono dalla fenditura sono tutti in fase tra loro. Se si considerando quelli emessi in una direzione  $\theta$ , questi partono dalla fenditura in fase ed arrivano sul piano  $\pi$  con una differenza di fase dovuta alla differenza di cammino ottico. [immagine]

La differenza di cammino ottico per arrivare sul piano  $\pi$  tra il raggio emesso dal punto superiore della fenditura ed il raggio emesso a distanza  $x$  è

$$\Delta = x \sin \theta$$

Nel punto  $P$  si sommano i campi dovuti ai due raggi

$$\vec{E}(P_1) = \vec{E}_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} + \vec{E}_0 e^{i(kr_2 - \omega t)}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad r_2 - r_1 = \Delta$$

Per angoli piccola l'intensità è

$$I(P) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi x \theta}{2\lambda}$$

Integrando su tutta la fenditura si ha

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

dove  $a$  è l'apertura della fenditura. [r]

Si hanno i minimi per  $\alpha = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; la larghezza del primo massimo è  $\frac{\lambda}{a}$ .

**Figura di diffrazione da due fenditure.** La doppia fenditura è il caso più semplice di reticolo. Ogni fenditura crea una figura d'interferenza. I raggi hanno una differenza di fase  $\delta s$ . [r]

L'intensità diventa

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}$$

quando non si considera la diffrazione di ciascuna fenditura. Si hanno massimi per  $D \sin \theta = n\lambda$ . [r]

Utilizzando più fenditure si ha un reticolo per cui l'intensità luminosa in una direzione  $\theta$  è

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2 \delta} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \quad \delta = \pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{\pi \sin \alpha}{\lambda}$$

dove  $\delta$  è il passo [r].

Il massimo della diffrazione e dell'interferenza coincidono. Si studia il primo massimo di diffrazione che modula l'interferenza. I massimi principali di intensità si hanno per

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$$

[r]

Tuttavia, si può illuminare il reticolo con una luce che non è monocromatica. Considerando un fascio costituito da due fasci monocromatici in uguali proporzioni, allora il massimo centrale è acromatico: si mantiene lo stesso colore del fascio originale; spostandosi sugli altri massimi, le righe sono separate. Maggiore è la lunghezza d'onda e più lontano si è da ogni massimo.

**Potere separatore e potere dissolvante.** Esistono due quantità che caratterizzano un reticolo. Vedi note.

### 8.5.1 Esperienze

**Righello come reticolo.** Il righello può essere usato come un reticolo. I massimi seguono la relazione

$$n\lambda = d(\sin \alpha - \sin \beta)$$

Il laser incide di un angolo  $\alpha$  sul righello ed i raggi vengono riflessi con un angolo di diffrazione di  $\beta_i$ . Si misurano la distanza verticale tra il righello e la posizione dei massimi così da ricavare l'angolo  $\beta_i$ . Tuttavia, bisogna misurare anche l'angolo  $\alpha$ . [r]

Queste misure fanno parte dell'esperienza dell'interferometro insieme a quello di Fabry-Pérot e di Michelson.

**Spettrometro.** Questa è la seconda esperienza. Esso è costituito da un collimatore, un telescopio ed uno strumento analizzatore (prisma o reticolo). Lo spettrometro ottico permette di studiare la radiazione luminosa così da risalire alla composizione di ciò che emette la luce o, analogamente, la composizione di ciò che si trova tra la fonte luminosa e lo strumento.

Prima si caratterizza lo strumento analizzatore, poi si identifica il gas all'interno di lampade confrontando le misure con le tabelle di sostanze note.

Davanti al collimatore si pone la sorgente che si vuole misurare. Il telescopio converge il fascio parallelo dal collimatore nell'occhio. Entrambi i bracci hanno manopole per regolare le lenti. Prima di tutto, si calibra il telescopio puntando un oggetto lontano fin quando esso è a fuoco.

Prima si utilizza il prisma e si studia la legge di Cauchy che descrive l'angolo di minima deviazione. Un prisma devia due volte un raggio e si può definire un angolo  $\theta$  totale di deviazione. Esiste una direzione di incidenza per cui l'angolo di deflessione è minimo: questo l'angolo di minima deviazione,  $\delta_{\min}$ . L'indice di rifrazione risulta essere

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

dove  $\alpha$  è l'angolo al vertice del prisma a base triangolare equilatera. L'angolo di minima deviazione dipende dalla lunghezza d'onda.

In laboratorio:

- si caratterizza il prisma, valutando i coefficienti della legge di Cauchy. Si ruota il prisma e si insegue la riga con il telescopio fino a trovare la condizione di minima deviazione.
- Si utilizzano i coefficienti misurati per identificare il gas contenuto in una lampada. Bisogna misurare tutte le lunghezze d'onda delle righe visibili e quindi confrontarle con i valori tabulati per i diversi elementi.

L'angolo di minima deviazione è quello per cui il fascio all'interno è parallelo ad un lato del triangolo?

La misura per trovare l'angolo di minima deviazione, si cerca una regione possibile in cui si trova il minimo e si misurano piccole deviazioni così da poter interpolare tramite una parabola (con una parabola per Taylor). Il test del  $\chi^2$  non sarà significativo quando l'incertezza sulle misure è data dalla sensibilità dello strumento, mentre il test prevede che le incertezze siano distribuite in modo gaussiano. Pertanto, si può considerare un intervallo (magari coincidenze con la sensibilità) in cui si ha una distribuzione uniforme con propria media e varianza. [r] Bisogna anche capire se l'incertezza è data solamente dalla sensibilità. Conviene confrontare il metodo dell'interpolazione con la ricerca manuale del minimo.

Il reticolo è caratterizzato dal passo. Inoltre, bisogna verificare la perpendicolarità del reticolo rispetto al fascio. Si deve osservare una stessa distanza dal centro dei massimi. Conviene utilizzare i massimi più estremi. [r] correzione della perpendicolarità.

Per ogni esperienze è presente anche una simulazione da guardare.

## Lecture 18

### 8.6 Circuiti 3

mer 13 apr  
2022 10:30

In tutti i sistemi governati da equazioni differenziali coefficienti costanti, le soluzioni armoniche per ogni componente sono inalterate. Infatti, considerato un segnale armonico  $Ae^{i\omega t}$ , la derivata dell'ordine  $n$  è  $A(i\omega)^n e^{i\omega t}$ , cioè la forma funzionale è identica. Ogni grandezza è sempre descritta da un'armonica.

Si rivede lo studio delle componenti viste fin'ora.

**Resistenza.** Imponendo una forzante

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

Si cerca una corrente

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Pertanto

$$V_0 e^{i\omega t} = R I_0 e^{i(\omega t + \phi)} \implies \phi = 0, \quad I_0 = \frac{V_0}{R}$$

**Condensatore.** La relazione differenziale è

$$I = C \dot{V}$$

Si impone

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

Si cerca

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Pertanto

$$I_0 e^{i(\omega t + \phi)} = C(i\omega)V_0 e^{i\omega t} \implies \phi = \frac{\pi}{2}, \quad I_0 = C\omega V_0$$

Lo sfasamento è  $\frac{\pi}{2}$  a causa del fattore  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Pertanto

$$I = i\omega CV, \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{i\omega C} = Z_C$$

Dove  $Z_C$  è l'impedenza caratteristica della capacità.

**Induttore.** La relazione è

$$V = L\dot{I}$$

Si impone

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

Si cerca

$$V = V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Dunque

$$V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = L(i\omega)I_0 e^{i\omega t} \implies \phi = \frac{\pi}{2}, \quad V_0 = V = i\omega LI$$

Da cui l'impedenza è

$$\frac{V}{I} = i\omega L = Z_L$$

Bisogna fare attenzione allo sfasamento di cosa rispetto a cosa. In questo caso è la tensione è avanti di  $\frac{\pi}{2}$ , mentre per il condensatore è indietro di  $\frac{\pi}{2}$  (perché è invece la corrente ad essere avanti di tale quantità). [r]

**Circuito RC.** In elettronica, l'unità immaginaria è  $j$  così da non essere confusa con la corrente. Dunque, l'impedenza è

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Si vuole calcolare la caduta di tensione sul condensatore. Dunque

$$I = \frac{V_g}{Z_{\text{tot}}} = \frac{V_g}{R + Z_C} \implies V_C = IZ_C = V_g \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{V_g}{1 + j\omega RC}$$

Considerando la tensione del generatore nella forma

$$V_g = V_{g0} e^{j\omega t}$$

Si vuole cercare la soluzione reale come

$$V_C(t) = V_{C0} \cos(\omega t + \phi)$$

Allora si ha

$$V_C = V_{g0} \frac{e^{j\omega t}}{1 + j\omega RC} \implies \begin{cases} V_{C0} = \frac{V_{g0}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ \phi = -\arctan(\omega RC) \end{cases}$$

**Circuito RL.** La corrente totale nel circuito e la tensione sull'induttanza sono

$$I = \frac{V_g}{Z_{\text{tot}}}, \quad V_L = I Z_L = V_g \frac{Z_L}{R + Z_L} = \frac{V_g}{1 + \frac{R}{j\omega L}}$$

La soluzione reale è del tipo

$$V_L(t) = V_{L0} \cos(\omega t + \phi)$$

Con forzante del tipo

$$V_g = V_{g0} e^{j\omega t}$$

Dunque

$$V_L = V_{g0} \frac{e^{j\omega t} j\omega L}{j\omega L + R} \Rightarrow \begin{cases} V_{L0} = V_{g0} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \\ \phi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R} \end{cases}$$

[r]

**Circuito RLC.** La corrente è

$$I = \frac{V_g}{Z_{\text{tot}}} = \frac{V_g}{R + Z_C + Z_L} = \frac{V_g}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Quindi la tensione sulla resistenza è

$$V_R = RI = V_g \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Ancora una volta, la forzante è

$$V_g = V_{g0} e^{j\omega t}$$

Quindi il modulo e la fase della soluzione reale sono

$$V_{R0} = V_{g0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \phi = -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

### 8.6.1 Funzione di trasferimento

La tensione su ogni componente è una funzione della tensione del generatore

$$V = V_g \cdot H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\phi(\omega)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

dove  $H(\omega)$  è la funzione di trasferimento (dove  $P$  e  $Q$  sono polinomi). [r] Per caratterizzare a pieno la funzione di trasferimento serve osservare il grafico del modulo ed il grafico della fase.

Per il circuito RLC si ha

$$V_R = V_g \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = V_g \cdot H(\omega)$$

La funzione di trasferimento descrive come l'armonica d'ingresso  $V_g$  cambia a livello di modulo e di fase sulla resistenza.

In laboratorio si deve osservare il modulo di  $H$  e la sua fase in funzione di  $\omega$ . Bisogna sollecitare il circuito con diverse frequenze (e quindi  $\omega$ ). Si misura l'ampiezza dell'armonica in ingresso (quella del generatore) e si misura la tensione in uscita (come quella della resistenza). Le due hanno la stessa frequenza, ma non la stessa ampiezza

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = |H(\omega)|$$

[r] Nemmeno la stessa fase

$$\phi = \phi_{\text{out}} - \phi_{\text{in}}$$

Si misura la distanza temporale  $\Delta t$  da cui si ha

$$\Delta\phi = \Delta t \cdot \omega$$

A tal punto si fitta il grafico con la funzione analitica e si ricavano i parametri di interesse.

**Serie di Fourier.** Ogni segnale armonico si può scomporre in serie di Fourier.

$$SF[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \gamma_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Per un'onda quadra i coefficienti sono

$$\gamma_n = \frac{2V_g}{in\pi}, \quad n \text{ dispari}$$

### 8.6.2 Corrente impulsata.

Si possono reinterpretare i circuiti in corrente impulsata.

**Circuito RC.** La funzione di trasferimento della tensione sul condensatore è [r]

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}, \quad |H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Osservando il grafico, si nota che le frequenze minori sono trasferite da  $V_{in}$  a  $V_{out}$  più facilmente delle frequenze alte. Pertanto, si ha un filtro passa basso.

Si risolve in maniera alternativa il circuito RC in corrente impulsata. Si compone in serie di Fourier il segnale in ingresso e lo si moltiplica per la funzione di trasferimento:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega_0 t} H(n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{in\omega_0 t}, \quad \beta_n = \gamma_n H(n\omega_0)$$

[r] La nuova serie deve corrispondere alla serie di Fourier della soluzione. Questo vale per ogni sistema dinamico tempo-invariante.

Per segnali aperiodici si utilizza la trasformata di Fourier, al posto della sommatoria si ha l'integrale ed il ragionamento è lo stesso.

La tensione sulla resistenza è

$$V_R = V_g \frac{R}{R + Z_C} = V_g \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V_g \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

da cui la funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}, \quad |H| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Si ha un filtro passa alto perché le frequenze alte sono distorte meno rispetto alle basse frequenze.

**Circuito RL.** La tensione sull'induttore e la funzione di trasferimento sono

$$V_L = V_g \frac{j\omega L}{R + j\omega L}, \quad H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Da cui si ha

$$|H| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

[r]

**Circuito RLC.** La funzione di trasferimento sulla resistenza è

$$H_R(\omega) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad |H| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Si nota che quando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

si ha una risonanza: la funzione di trasferimento a tale frequenza è massima, si ha una risonanza.

Si ha un filtro passa banda.

La tensione e la funzione di trasferimento sull'induttore sono

$$V_L = V_g \frac{Z_L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad H_L(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

[r] Da cui si ha

$$|H_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

[r] In condizioni di risonanza, si ha

$$|H_L| = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

che può essere maggiore o minore di uno [r].

Tuttavia, la risonanza si ha ad una precisa frequenza, tuttavia, segnali periodici hanno un numero infinito di armoniche però discrete. Se una di queste ha la frequenza giusta allora si può causa comunque risonanza.

La funzione di trasferimento sul condensatore

$$H_C = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad |H_C| = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

[r]

Nelle misure, in prima approssimazione si ha

$$\frac{\sigma_V}{\sigma_t} = \tan \theta = d_t V \implies \sigma_t = \frac{\sigma_V}{d_t V}$$

Pertanto, per cercare punti omologhi è opportuno utilizzare quei punti con derivata maggiore.

Vedere dispense.