

# Theoretical Physics II

Maso\*

6 aprile 2024

## Indice

<b>I</b>	<b>Correzioni radiative</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Scattering con un campo esterno . . . . .	2
1.2	Bremsstrahlung . . . . .	4
1.3	Correzioni e divergenza ultravioletta . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Spin dei campi</b>	<b>12</b>
2.1	Fermioni . . . . .	13
2.2	Fotoni . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Correzioni al secondo ordine</b>	<b>16</b>
3.1	Polarizzazione del vuoto . . . . .	16
3.2	Auto-energia dell'elettrone . . . . .	18
3.3	Vertice elettromagnetico . . . . .	20
3.4	Applicazione . . . . .	21
3.5	Identità di Ward . . . . .	22
3.6	Linee esterne . . . . .	24
3.6.1	Fermioni . . . . .	24
3.6.2	Fotoni . . . . .	26
3.7	Riepilogo . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Ordini superiori</b>	<b>28</b>
4.1	Diagrammi one-particle reducible . . . . .	28
4.2	Diagrammi primitivamente divergenti . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Divergenza infrarossa</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>Teorema di Furry</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Regolarizzazione dimensionale</b>	<b>38</b>
<b>II</b>	<b>Interazione debole</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>Teoria di Fermi</b>	<b>44</b>
8.1	Decadimento del muone . . . . .	44
8.2	Inverse muon decay . . . . .	51
8.3	Ordini superiori . . . . .	53
<b>9</b>	<b>Teoria di Proca–Yukawa</b>	<b>55</b>

---

\*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

<b>10 Modello di Glashow</b>	<b>59</b>
10.1 Interazione . . . . .	61
<b>11 Rottura spontanea di simmetria</b>	<b>66</b>
11.1 Modello di Goldstone . . . . .	67
11.2 Meccanismo di Higgs . . . . .	68
11.3 Modello di Glashow–Weinberg–Salam . . . . .	70
<b>III Addenda</b>	<b>75</b>
<b>12 Introduzione alla cromodinamica quantistica</b>	<b>75</b>
<b>13 Quantizzazione covariante del campo elettromagnetico</b>	<b>77</b>
<b>14 Lamb shift</b>	<b>81</b>
<b>15 Decadimento del positronio</b>	<b>86</b>

## Lezione 1

[r] cambiare carica  $q$  con  $Q$

mer 22 nov  
2023 10:30

## Parte I

# Correzioni radiative

## 1 Introduzione

### 1.1 Scattering con un campo esterno

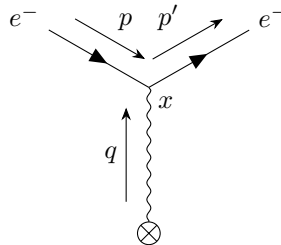
Si studia lo scattering con un campo esterno, cioè un campo statico. Si considera un campo generato da una sorgente massiva che non è influenzata dallo scattering. Infatti, per il principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta v \sim \frac{1}{M}$$

se la sorgente ha una grande massa, allora il suo spostamento è nullo. Sperimentalmente, tale situazione corrisponde allo scattering elettrone-nucleo. Il campo del fotone si può scomporre in una parte trasversa (cioè i fotoni reali) ed una parte statica

$$A^\mu(x) = A_{\text{quant.}}^\mu(x) + A_{\text{clas.}}^\mu(x)$$

La sorgente statica si rappresenta con una croce



Questo diagramma al primo ordine è permesso, a differenza di quelli incontrati in precedenza. Infatti, per questi non si può conservare il quadri-momento perché il fotone considerato è reale, on-shell con  $k^\mu k_\mu = 0$ . In questo caso, il fotone è off-shell e non rispetta la legge di dispersione di Einstein. Esso ha un momento che la sorgente statica può assorbire o fornire senza muoversi. Questo implica che la sorgente è indipendente dal tempo e viene a mancare l'invarianza per traslazione perché la sorgente ha posizione fissa.

Nel diagramma sopra si ha solamente la parte classica del campo elettromagnetico poiché non sono presenti fotoni reali, trasversi. Pertanto, il prim'ordine della matrice di scattering è

$$S^{(1)} = -iq \int d^4x \bar{\psi}^{(-)}(x) A_{cl}(x) \psi^{(+)}(x), \quad A_{cl}^\mu(x) = \left( \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0} \right)$$

cioè il campo elettrostatico di Coulomb, con  $e > 0$  carica elementare. Si comprende già che l'energia è conservata, ma non il momento. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= \langle 0 | c(\mathbf{p}')(-iq) \int d^4x A_{cl}^\mu(\mathbf{x}) : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) : c^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) \int d^4x A_{cl}^\mu(\mathbf{x}) e^{-i(p-p')_\mu x^\mu} \\ &= 2\pi \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) A_{cl}^\mu(\mathbf{q}) \delta(E - E') \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ . In assenza della sorgente statica, i propagatori sono tutti invarianti per traslazioni spaziali e temporali, ma ora il campo del fotone dipende dalla posizione. Alla seconda riga la parte temporale fornisce la conservazione dell'energia tramite una delta, mentre la parte spaziale dà la trasformata di Fourier del campo. Non si ha più l'invarianza per traslazione spaziale perché si è fissata la sorgente. Il momento non si conserva: la sorgente assorbe momento senza muoversi, una particella che fa scattering cambia direzione. Il modulo del momento, cioè l'energia, è ancora conservata poiché si ha invarianza per traslazione temporale.

Si aggiunge un'altra regola di Feynman. Ogni volta che appare uno scattering con un campo esterno statico si ha un termine

$$A_{cl}^\mu(\mathbf{q}) \quad \alpha \quad \leftarrow \quad \overline{\text{---}} \quad \otimes$$

mentre nell'elemento di matrice si sostituisce

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \rightarrow (2\pi) \delta(E_f - E_i)$$

**Sezione d'urto.** La sezione d'urto nell'angolo di scattering dell'elettrone uscente è la formula di scattering di Mott:

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= \frac{1}{2} m^2 \frac{(2\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \sum_{rs} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \frac{(\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr}[(\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma_0] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta + m^2) = \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [2m^2 + |\mathbf{p}|^2 (1 + \cos \theta)] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 2m^2 + 2|\mathbf{p}|^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ E^2 - |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \frac{(\alpha Z)^2 E^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 \beta^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} \end{aligned}$$

Si noti che la sezione d'urto include il numero atomico dell'atomo considerato. Poiché si utilizza la teoria delle perturbazioni, per elementi pesanti bisogna porre attenzione al prodotto  $\alpha Z$ . Alla seconda riga si è applicato

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma}]$$

alla terza riga si è applicato

$$E = E' \implies |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Il primo addendo della sezione d'urto è pari alla sezione d'urto Rutherford: lo scattering di particelle alfa su atomi di oro. Il termine ulteriore compare perché si è calcolato lo scattering per fermioni e deriva dall'effetto dello spin. Nel limite non relativistico  $\beta \rightarrow 0$  si ottiene Rutherford, tuttavia si è utilizzata la teoria delle perturbazioni per ottenere il risultato. Se il numero atomico  $Z$  è grande, lo sviluppo perturbativo può essere inaffidabile. Infatti, la formula di Mott non è sperimentalmente affidabile per  $Z \gtrsim 40$ . Ciononostante, il problema a due corpi si risolve analiticamente e la sezione d'urto esatta corrisponde a quella trovata con lo sviluppo perturbativo. Per il problema Coulombiano, nel limite non relativistico, tutti gli ordini superiori si riducono ad una fase<sup>1</sup>. Pertanto, l'ordine  $\alpha^2$  è esatto.

La formula sopra si può ritrovare anche in astrodinamica con il problema Kepleriano a due corpi: questo è il caso delle orbite iperboliche.

Per studiare una zona di dimensione spaziale  $\Delta x$ , il momento necessario è  $(\Delta x)^{-1}$ . Quando il parametro di impatto è grande, il momento trasferito è piccolo, e viceversa. Infatti, il seno a denominatore deriva dal momento trasferito  $|\mathbf{q}|$  cioè il denominatore del campo di Coulomb pari alla trasformata di Fourier di  $r^{-1}$ .

Per angoli piccoli, la sezione d'urto diverge a causa del seno. Infatti

$$\sigma = \int d(\cos \theta) d\varphi d\Omega \sigma \sim \int \theta d\theta d\Omega \sigma = \int \frac{d\theta^2}{\theta^4} \rightarrow \infty$$

Tuttavia, si dev'essere commesso un errore: l'esperimento di Rutherford vide una distribuzione ragionevole di atomi di elio, senza evidenze di una divergenza della sezione d'urto. Lo scattering di una particella su un nucleo è definito dal parametro  $b$  di impatto cioè quanto la traiettoria dista dal nucleo (cioè la distanza dal nucleo nel piano perpendicolare alla direzione del moto). Il campo di Coulomb è un campo a lungo raggio, va come  $\frac{1}{r}$ : non si annulla abbastanza rapidamente ad infinito. Questo è uno dei problemi da cui deriva la patologia del campo elettromagnetico. Il nucleo causa scattering per un parametro di impatto pari circa al raggio di Bohr. Per grandi parametri di impatto, il nucleo viene schermato dagli elettroni, cosa che non si è considerata nel calcolo precedente. Si è commesso un errore fondamentale: ipotizzare l'esistenza di una sorgente senza nulla intorno. Questo è analogo a quanto si è già accennato trattando dell'elettrone bare.

Per risolvere il problema, si utilizza il (energia) potenziale di Yukawa, cioè un campo smorzato

$$V_Y = -\frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a_0}}$$

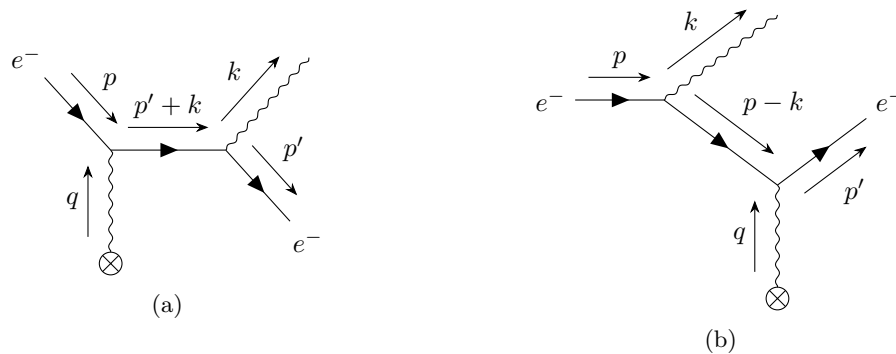
dove  $a_0$  è il raggio di Bohr. La divergenza trovata è causata da una cattiva definizione del problema.

## 1.2 Bremsstrahlung

Si studia la radiazione emessa a causa della decelerazione di una particella carica. Si aggiunge un fotone reale allo scattering con un campo esterno

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma$$

I diagrammi corrispondenti sono dati da



<sup>1</sup>Si veda Dalitz Richard Henry. 1951. On higher Born approximations in potential scattering. *Proc. R. Soc. Lond. A* **206**:509–520. <http://doi.org/10.1098/rspa.1951.0085>.

dove  $q = p' + k - p$ . Nel primo diagramma il propagatore del fermione porta momento  $p' + k$ , mentre nel secondo diagramma porta  $p - k$ . In questo caso si hanno entrambi i contributi della parte trasversa e della parte classica del campo del fotone. Il second'ordine della matrice di scattering è

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-iq)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \gamma^\mu (A_\mu^T + A_\mu^{\text{cl}}) \psi :_x : \bar{\psi} \gamma^\nu (A_\nu^T + A_\nu^{\text{cl}}) \psi :_y \} \\ &= (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^T)^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \gamma^\nu (A_\nu^{\text{cl}})^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \\ &\quad + (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^{\text{cl}})^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \gamma^\nu (A_\nu^T)^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \end{aligned}$$

La seconda riga corrisponde al primo diagramma, mentre la terza riga al secondo diagramma. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (2\pi) \delta(E' + \omega - E) \prod_i N_i \left[ \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{i}{\not{p}' + \not{k} - m} (-iq) A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

La sezione d'urto esatta è quella di Bethe-Heitler (v. Itzykson e Zuber, p. 240).

**Fotone soffice.** Si opera l'approssimazione di fotone soffice, cioè l'energia del fotone è molto minore di quella dell'elettrone che l'ha emesso

$$\mathbf{k} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}', \quad \omega \ll E, E', \quad |\mathbf{p}| \approx |\mathbf{p}'|$$

L'ultima relazione porta allo scattering elastico. Infatti, lo scattering sopra è detto anelastico. Dunque, il termine del primo diagramma diventa

$$\begin{aligned} \text{I} &= \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \\ &\approx \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Nel limite di  $k$  piccolo, la frazione porta ad una divergenza infrarossa, diversa da quelle sospettate per l'auto-energia e la polarizzazione del vuoto (cioè divergenze ultraviolette). Applicando l'anti-commutatore delle matrici di Dirac

$$\not{\epsilon}(\not{p}' + m) = (-\not{p}' + m) \not{\epsilon} + 2\varepsilon^\mu p'_\mu$$

e noto che  $\bar{u}$  soddisfa l'equazione di Dirac poiché riguarda una particella reale, si ottiene

$$\text{I} = \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{p'_\nu k^\nu} \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p})$$

cioè un termine proporzionale a quello dello scattering elastico precedente.

Le ampiezze di Feynman per i due diagrammi sono

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{k^\nu p'_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \\ \mathcal{M}_b &= -i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p_\mu}{k^\nu p_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

Nella parentesi è presente l'ampiezza dello scattering elastico. Questo è un primo esempio di fattorizzazione: lo scattering elastico viene fattorizzato. Il tasso di transizione è il tasso dello scattering elastico per il tasso di emettere un fotone.

L'elemento di matrice di transizione è

$$S_{fi} = (2\pi) \delta(E' - E) \frac{m}{EV} (-iq^2) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]$$

Sommando sulle polarizzazioni finali del fotone, la sezione d'urto è

$$\begin{aligned} d_{\Omega'}\sigma &= d_{\Omega'}\sigma|_{\text{elastico}} \frac{q^2}{2\omega V} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \\ &= d_{\Omega'}\sigma|_{\text{elas}} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3k}{\omega} \end{aligned}$$

si nota che l'ampiezza in parentesi è invariante di gauge: infatti basta sostituire  $\varepsilon' = \varepsilon - ikf$  e ricordare che  $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$ . Anche la sezione d'urto esatta è invariante di gauge. La probabilità di bremsstrahlung è il prodotto della probabilità di scattering elastico e della probabilità di emettere un fotone.

Il termine in parentesi si può riscrivere come

$$\left[ \frac{\varepsilon_r^\mu p'_\mu}{kp'} - \frac{\varepsilon_r^\mu p_\mu}{kp} \right] \left[ \frac{\varepsilon_s^\nu p'_\nu}{kp'} - \frac{\varepsilon_s^\nu p_\nu}{kp} \right] = \varepsilon_r^\mu \varepsilon_s^\nu \left[ \frac{p'_\mu p'_\nu}{(kp')^2} - \frac{p'_\mu p_\nu}{(kp')(kp)} - \frac{p_\mu p'_\nu}{(kp)(kp')} + \frac{p_\mu p_\nu}{(kp)^2} \right]$$

Ricordando che

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_\mu^r \varepsilon_\nu^r = -\eta_{\mu\nu}$$

la somma sulle polarizzazioni è

$$\sum_{rs} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 = -\frac{p'^2}{(kp)^2} + \frac{2pp'}{(kp)(kp')} - \frac{p^2}{(kp)^2} = -\left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{kp} \right]^2$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale di Bethe-Heitler nel limite di fotone soffice è

$$\begin{aligned} d_{\Omega}\sigma &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-q^2}{2\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk} \right]^2 = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} dP \end{aligned}$$

La parentesi diverge nell'infrarosso cioè per  $k$  piccolo.

## Lezione 2

**Divergenza infrarossa.** La sezione d'urto elastica è di ordine  $\alpha^2$  (si noti che un ordine  $\alpha$  deriva da  $A_{cl}$ ) quindi la sezione d'urto anelastica è di ordine  $\alpha^3$ . Si studia il comportamento, in particolare

$$dP \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0$$

Questa divergenza è diversa da quella trovata per lo scattering Rutherford. In quel caso, essa è causata da una cattiva definizione del processo che avviene. In questo caso, chiedersi quanti fotoni sono emessi ad energia sempre più piccola è lecito. Bisogna capire la natura di tale divergenza. Inoltre, nell'esperimento di Rutherford non si osserva una crescita a grande parametro di impatto, mentre nella bremsstrahlung si osserva sperimentalmente che i fotoni emessi aumentano al diminuire della loro energia.

Per risolvere il problema, bisogna definire operativamente lo scattering elastico ed anelastico: il primo è uno scattering in cui non si misura alcun fotone emesso. Bisogna porre attenzione al fatto che gli apparati sperimentali hanno una sensibilità limitata. Si deve ridefinire il concetto di scattering elastico tenendo conto di tale sensibilità. Alla probabilità dello scattering elastico

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z$$

bisogna aggiungere anche la probabilità di bremsstrahlung con energia minore di quella minima rivelabile

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega < \omega_{\min}$$

gio 23 nov  
2023 10:30

Pertanto lo scattering anelastico è quello per cui il fotone ha un'energia maggiore di quella minima

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega \geq \omega_{\min}$$

Con questa ridefinizione, l'integrale dello scattering anelastico non diverge più

$$dP \sim \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega^3} < \infty$$

Il problema è stato spostato nello scattering elastico. Il punto cruciale è la sensibilità dell'apparato di misura: al di sotto di una certa energia, l'apparato è cieco alla distinzione tra elastico ed anelastico. La divergenza è causata dalla massa nulla del fotone. Considerando una piccola massa  $\lambda$  del fotone, la sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d\Omega\sigma|_{\text{el. sp.}} = d\Omega\sigma|_{\text{elas}} \left[ 1 + \alpha \ln \frac{\omega_{\min}}{\lambda} \right]$$

Questa regolarizzazione viene spesso utilizzata. Si può modificare una teoria per ottenerne un'altra e può accadere che unendo correttamente i contributi, i termini proporzionali al parametro aggiunto si semplificano. Pertanto, la teoria nel limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  è perfettamente definita. Lo stesso si può fare per una divergenza ultravioletta.

Modificare l'elettrodinamica quantistica porta ad una teoria che viola l'invarianza di gauge, ma in cui la massa del fotone si semplifica e si può fare il limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  per ottenere l'elettrodinamica non modificata.

Inoltre, poiché l'ordine dello scattering anelastico è  $\alpha^3$  bisogna considerare tutti i termini di tale ordine, non solamente alcuni: mancano i termini di interferenza (i prodotti misti) provenienti dagli ordini superiori. Per aggiungere un ordine  $\alpha$  bisogna anche considerare i diagrammi dello scattering elastico con tre vertici: quando si calcola il modulo quadro della somma delle ampiezze di Feynman del diagramma ad un vertice e dei diagrammi a tre vertici, compaiono i termini misti di ordine  $\alpha^3$  (e termini di ordine superiore trascurabili). In questo modo, al grafico dello scattering elastico si aggiungono le correzioni virtuali derivanti dalle particelle virtuali. Le correzioni virtuali cancellano la divergenza infrarossa parametrizzata dalla piccola massa del fotone. In questo modo si può fare il limite per massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$ . In particolare, il teorema di Bloch–Nordsieck afferma che, per tutti i processi in elettrodinamica quantistica, le divergenze infrarosse si cancellano esattamente ad ogni ordine perturbativo, lasciando solamente le correzioni radiative finite di ordine  $\alpha$  (rispetto all'ordine minore).

La divergenza infrarossa deriva dal fatto che, nel limite  $k \rightarrow 0$ , il propagatore

$$\frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \approx \frac{\not{p}' + m}{2kp'}, \quad k \ll p$$

diverge poiché propaga un fermione con momento di un fermione reale. Aggiungendo una massa  $\Lambda$  si mantiene la particella virtuale lontano dal mass shell.

### 1.3 Correzioni e divergenza ultravioletta

Finora si sono studiati i diagrammi albero cioè diagramma in cui non appaiono loop. Le correzioni radiative appaiono sempre ad ordini superiori dello sviluppo perturbativo. Si noti che le discussioni valgono a stati iniziale e finale fissati. Come prototipi si utilizzano i diagrammi di scattering con un campo esterno e di scattering Compton.

Nella lagrangiana del campo di Dirac in interazione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - q_0\bar{\psi}\not{A}\psi$$

sono presenti i parametri bare  $m_0$  ed  $q_0$ . Le misure sperimentali riguardano la massa  $m$  e la carica  $q$  fisiche, in particolare la carica bare più tutte le auto-interazioni. La carica bare non si può misurare. La relazione tra i parametri effettivi ed i parametri bare non si può misurare perché bisogna sempre considerare il campo elettromagnetico. Questa discussione è simile a trattare il campo elettrico nei materiali  $\mathbf{D}$  aggiungendo la polarizzazione  $\mathbf{P}$  al campo elettrico nel vuoto  $\mathbf{E}$ . In un materiale, si misura il campo elettrico  $\mathbf{D}$ . La relazione tra i due campi è una

costante di proporzionalità. In teoria dei campi, la differenza tra la carica bare e quella fisica è infinita. Passare dalla teoria libera alla teoria in interazione ridefinisce i parametri introdotti nella lagrangiana libera e si studia tale ridefinizione.

I diagrammi divergenti nell'ultravioletto sono l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Il procedimento da seguire è

- isolare gli infiniti modificando la teoria tramite la regolarizzazione, se ne esiste un numero infinito, la teoria ha un utilizzo limitato;
- calcolare le relazioni tra parametri bare e fisici;
- ritornare alla teoria originaria, ma ora senza infiniti.

La procedura, se possibile, implica che la teoria è rinormalizzabile. Una teoria non rinormalizzabile può essere una teoria efficace, cioè corretta fino ad un certo ordine, agli ordini superiori compare sempre un nuovo infinito e si ha bisogno di una nuova costante di rinormalizzazione.

Il Modello Standard è un'unica teoria rinormalizzabile tramite il metodo funzionale (che è diverso dal modo perturbativo presentato), ma è comunque incompleto.

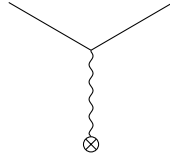
**Correzioni radiative.** L'ampiezza di Feynman associata al diagramma di scattering con un campo esterno è

$$\mathcal{M}' = -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{A}_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})$$

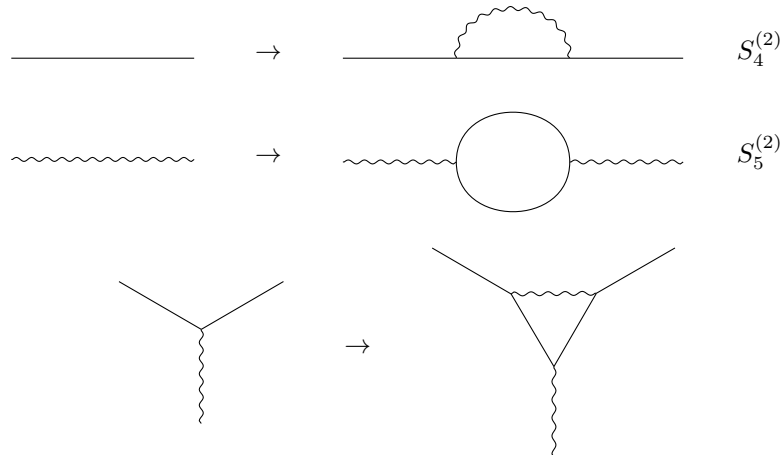
dove si considerano i parametri bare  $q_0$  ed  $m_0$ . Non si considera la parte quantizzata del campo del fotone poiché non sono presenti fotoni negli stati iniziale e finale. La matrice di scattering è

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iq_0)^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \not{A}_{cl} \psi :_{x_1} : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_2} \cdots : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_n} \}$$

dove il campo senza pedice è il solo campo quantizzato  $A \equiv A^T \equiv A_{quant}$ . Si considera un solo campo classico perché si ipotizza essere debole e dunque soppresso agli ordini superiori. Si vedono i diagrammi dello sviluppo. Al prim'ordine  $n = 1$  è presente solo il campo classico

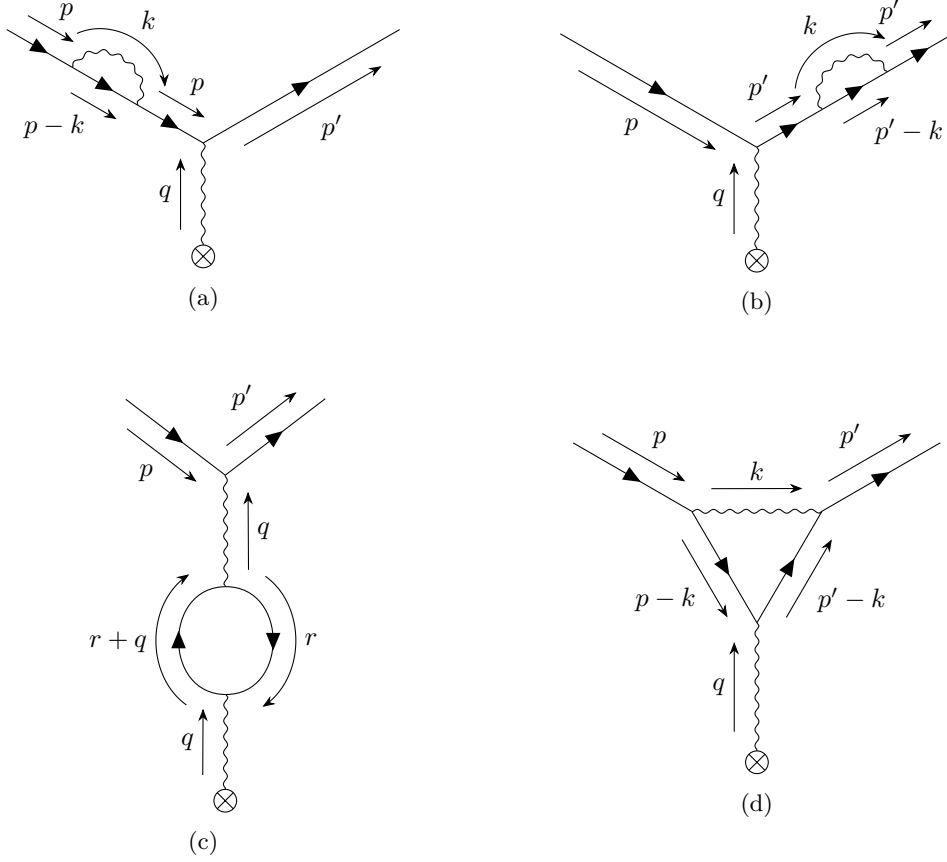


Al second'ordine  $n = 2$  si ha la bremsstrahlung: il campo  $A$  ha anche la parte quantizzata che descrive i fotoni reali. Al terzo ordine  $n = 3$  ci sono le correzioni radiative: l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Per ottenere i grafici corrispondenti, bisogna operare le sostituzioni seguenti





Pertanto si ha



dove  $q = p' - p$ . Questi sono gli unici diagrammi possibili al terzo ordine. In tutti è presente un integrale che potrebbe divergere. Le ampiezze di Feynman corrispondenti sono

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu] u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_b &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\nu] iS_F(p') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_c &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) iD_F^{\mu\nu}(q) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r [\gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r)] A_{cl}^p(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_d &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [\gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)] u(\mathbf{p}) A_{cl}^p(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\end{aligned}$$

dove si pone

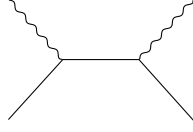
$$\begin{aligned}iq_0^2 \Sigma(p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu \\ iq_0^2 \Pi_{\nu\rho}(q) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r \gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r) \\ q_0^2 \Lambda_\rho(p', p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)\end{aligned}$$

cioè le funzioni di auto-energia, di polarizzazione del vuoto e di correzione al vertice. Si studia il limite ultravioletto, cioè  $k \rightarrow \infty$ . I termini sopra vanno come

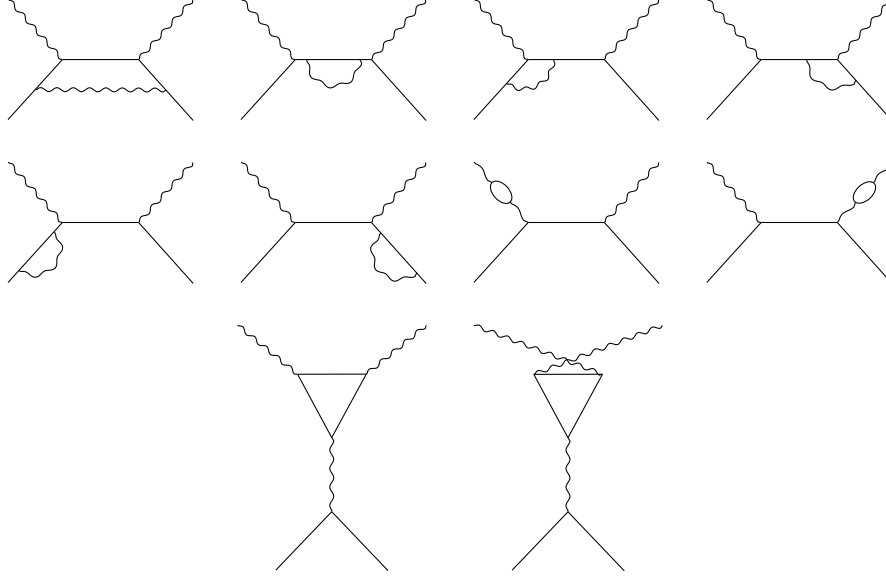
$$\Sigma \sim \int dk, \quad \Pi \sim \int dr r, \quad \Lambda \sim \ln k$$

I propagatori sono fattori di convergenza, ma non ne sono presenti abbastanza. In elettrodinamica quantistica, questi sono i soli diagrammi divergenti.

**Classificazione dei diagrammi.** Capiti i diagrammi con loop, si studiano i diagrammi in modo dettagliato con l'aggiunta delle correzioni radiative nel caso dello scattering Compton. Al diagramma albero



si aggiungono le correzioni sopra per ottenere parte dei seguenti diagrammi:



Si noti che il primo diagramma e gli ultimi due non si possono ottenere aggiungendo le correzioni.

Nel primo diagramma, l'elettrone entrante interagisce con quello finale tramite un fotone virtuale. Gli ultimi due diagrammi si possono trattare tramite il teorema di Furry: tutti i diagrammi che contengono un loop fermionico con un numero dispari di vertici si sommano a zero. Intuitivamente, l'ultimo diagramma, tramite la simmetria di crossing della matrice di scattering, si può far diventare il penultimo, ma con un segno negativo e dunque i due si cancellano.

Si vogliono studiare le classi di diagrammi. Evitando di considerare gli ultimi due diagrammi, il primo diagramma è diverso da tutti gli altri poiché è one-particle irreducible (1PI), mentre gli altri sono one-particle reducible (1PR). Per ottenere un tale diagramma si può usare un diagramma di ordine inferiore e aggiungere una delle tre correzioni sopra. I diagrammi one-particle reducible sono utili perché dal diagramma albero si possono ottenere le correzioni all'ordine superiore. I diagrammi nella seconda riga correggono le particelle fisiche che, in termini della meccanica quantistica ordinaria, significa rinormalizzare la funzione d'onda.

**Correzioni.** Il propagatore del fermione si corregge aggiungendo l'auto-energia

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

le cui linee corrispondenti sono



Si vuole costruire un diagramma scheletro. Si inserisce un rettangolo che indica il propagatore corretto fino ad un ordine stabilito. Si modifica la teoria ed un propagatore, come quello del fotone

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = -\frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \sim -\frac{\Lambda^2}{k^4}, \quad k \rightarrow \infty$$

Si introduce un cut-off. Nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  compare nuovamente la divergenza dell'integrale. In questo modo si è aumentata la potenza al denominatore di modo che l'integrale sia convergente. Secondo la regolarizzazione di Pauli-Villars, il propagatore corretto si può intendere come una particella con massa  $\Lambda$ , sebbene abbia un segno negativo. In questo modo l'integrale converge e se il risultato non dipende dal cut-off  $\Lambda$  allora nel limite ultravioletto si ottiene la teoria originaria. Questa regolarizzazione si può fare per l'elettrodinamica quantistica, ma per altre teorie non è possibile.

Il grado di divergenza degli integrali nei diagrammi di Feynman è

$$D = 4 - I_F - 2I_B$$

dove  $I_j$  indica il numero di propagatori di fermioni F e di bosoni B, cioè i fattori convergenza. Se il grado di divergenza superficiale è  $D < 0$  allora l'integrale converge, se  $D > 0$  allora diverge. Se  $D = 0$ , allora diverge logicamente. Questo grado di divergenza è superficiale perché si basa sul power-counting. Altre condizioni, come le simmetrie e cancellazioni, possono cambiare il grado di divergenza superficiale. In particolare si vede che i diagrammi sopra hanno solo divergenza logica.

Il cut-off rompe l'invarianza di gauge, cioè il gruppo di simmetria locale U(1), e questo complica un poco la teoria. Per il Modello Standard, la teoria si complica molto di più e bisogna utilizzare la regolarizzazione dimensionale passando a  $4 - \varepsilon$  dimensioni ottenendo integrali convergenti. Infatti, il caso peggiore  $D = 0$  diventa negativo di poco e si prolungano analiticamente gli integrali in un numero reale di dimensioni, cioè  $4 - \varepsilon$ . Le singolarità vanno come  $\varepsilon^{-1}$ , si rinormalizza la teoria, i termini dipendenti da  $\varepsilon$  si semplificano e si può ritornare alla teoria originaria. La regolarizzazione dimensionale non rompe l'invarianza di gauge.

### Lezione 3

lun 27 nov  
2023 10:30

Si possono utilizzare vari metodi per la rinormalizzazione.

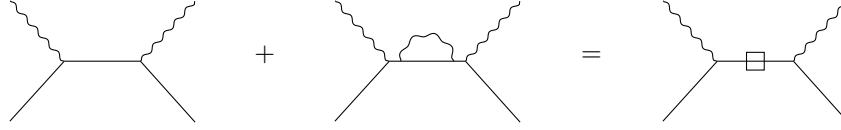
- La regolarizzazione permette di isolare gli infiniti. Si rinormalizza la teoria capendo se gli infiniti si possono assorbire in una ridefinizione della massa e della costante di accoppiamento liberi di modo che nessuna osservabile dipenda dalla regolarizzazione utilizzata. In tal caso, il limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  del cut-off ultravioletto è ben definito.
- La regolarizzazione dimensionale considera  $4 - \varepsilon$  dimensioni e si procede come detto sopra.
- Un altro metodo utilizza l'integrale sui cammini (path integral) di Feynman. In meccanica classica, due punti sono connessi da traiettorie e le equazioni del moto corrispondono alla traiettoria che minimizza l'azione  $S$ . Con l'integrale dei cammini, ad ogni traiettoria viene dato un peso  $e^{-\frac{i}{\hbar}S}$  e la traiettoria delle equazioni del moto è data dalla somma di tutte le possibili traiettorie (v. Feynman e Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals). L'integrale sui cammini permette utilizzare le tecniche numeriche. Infatti, per definire una teoria di campo si è partiti da un volume finito  $V$  ed un passo reticolare  $a$  in modo che i gradi di libertà siano un numero finito e numerabile (si ha invarianza di gauge, ma non più simmetria continua di traslazione e rotazione). Nel limite di volume infinito e passo infinitesimo si ottiene la teoria del continuo. Questo metodo non è perturbativo, quindi considera ogni diagramma, e si può utilizzare un calcolatore. La formulazione con l'integrale dei cammini è equivalente alla meccanica quantistica di Schrödinger. Questo metodo si può usare anche per le interazioni forti per cui lo sviluppo perturbativo non funziona sempre. Tuttavia, il limite al continuo  $a \rightarrow 0$  può essere complicato.

Non tutti i metodi di regolarizzazione sono coerenti con le simmetrie del sistema, come il taglio ultravioletto o la massa del fotone che rompe la simmetria di gauge.

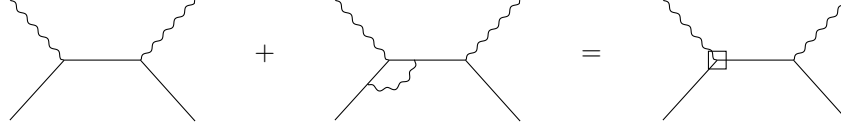
Osservando che ad un certo ordine si può aggiungere qualsiasi ordine superiore perché tanto viene tralasciato, si possono riscrivere le somme dei diagrammi in modo accorto. I diagrammi one-particle reducible sono divergenti e la loro somma si può scrivere come

$$q^2(1 + a + b + c + d + e + f + g) + o(q^4) = q^2(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e)(1 + f)(1 + g)$$

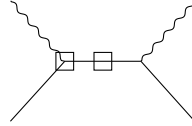
dove l'unità indica il diagramma Compton senza correzioni e le lettere sono le correzioni di ordine  $q^2$  aggiunte al diagramma albero. Il propagatore bare del fermione diventa il propagatore corretto  $iS_F^{\text{cor}}$  all'ordine  $q^4$ . Quindi il fattore  $(1 + a)$  è dato dal diagramma



Si conserva la struttura del diagramma originario: nel propagatore intermedio è presente la versione corretta. Al vertice elettromagnetico viene inserita la correzione al vertice  $(1 + b)$ :



Il vertice bare diventa il vertice corretto  $-iq(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu$ . Unendo le due correzioni sopra si ha

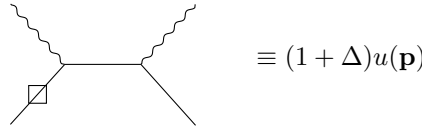


per cui si ottiene

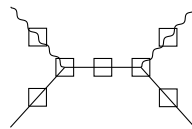
$$i(S_F + \Delta S_F)(-iq)(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu = iS_F(-iq)\gamma_\mu + i\Delta S_F(-iq)\gamma_\mu + iS_F(-iq)\Lambda_\mu + o(q^4)$$

L'addendo dato dal prodotto delle due correzioni è di ordine  $q^6$ .

Anche le particelle fisiche sentono il proprio campo elettromagnetico, pertanto



dove  $\Delta u(\mathbf{p})$  è una certa variazione. In conclusione, dal diagramma albero iniziale, si sommano tutti i diagrammi one-particle reducible ottenendo il diagramma scheletro



Si conserva la struttura del diagramma ricordando che in ogni quadrato è presente la correzione radiativa all'ordine desiderato. Si calcolano tutte le correzioni e si vede che in ognuna si sostituiscono i parametri bare con quelli sperimentalmente misurati e la tecnica di regolarizzazione non appare più.

Rimane ancora un diagramma one-particle irreducible, ma il suo integrale è convergente  $D = -1$ . Il diagramma scheletro si calcola dai diagrammi one-particle reducible, ma il calcolo dell'ampiezza di Feynman è fatto con tutti i diagrammi. La procedura è la seguente: i diagrammi one-particle reducible si sommano nel diagramma scheletro, si sostituiscono i parametri liberi con quelli fisici (ad esempio presi dalle tavole di Rosenfeld) e si aggiungono i diagrammi one-particle irreducible che sono convergenti. Questo vale in elettrodinamica quantistica, solo i diagrammi one-particle reducible divergono. Lo stesso non si può dire per la teoria dell'interazione debole di Fermi.

## 2 Spin dei campi

Si studia in modo rigoroso lo spin di un fermione di Dirac e di un fotone tramite il tensore momento angolare.

## 2.1 Fermioni

Il campo di Dirac si trasforma in modo infinitesimo come

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \psi(x) - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} (\Delta\omega)_{\mu\nu} \psi(x) \\ \psi'_\alpha(x') &= \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\Delta\omega)_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \right] \psi_\beta(x), \quad S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

dove  $\mu\nu$  sono gli indici spazio-temporale, mentre  $\alpha\beta$  sono gli indici spinoriali. Le quantità  $(\Delta\omega)_{\mu\nu}$  e  $S^{\mu\nu}$  sono anti-simmetriche. Studiando l'invarianza della densità di lagrangiana per rotazioni (v. Fisica Teorica I, §Teorema di Noether) si ha la conservazione del tensore momento angolare

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu} = \int d^3x [(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) + \pi_r S_r^{\mu\nu} \psi_s]$$

dove  $T$  è il tensore energia-impulso. Ricordando che

$$\pi_r = \partial_{\psi_r} \mathcal{L} = i\hbar \psi_r^\dagger$$

il tensore energia-impulso è dato da

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \psi_r} \mathcal{L} \partial^\nu \psi_r - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad T^{0i} = i\hbar \psi^\dagger \partial^i \psi$$

Si considerano le componenti spaziali del tensore momento angolare

$$\mathbf{M} = \int d^3x \psi^\dagger [\mathbf{x} \times (-i\hbar \nabla)] \psi + i\hbar \psi^\dagger \left[ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right] \psi$$

La prima parentesi si può identificare con il momento angolare orbitale, mentre il secondo addendo si identifica con lo spin poiché è indipendente dalle coordinate. L'operatore spin non è conservato perché  $\boldsymbol{\sigma}$  non commuta con l'hamiltoniana. La quantità conservata è l'elicità

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p})$$

Si calcola l'operatore di spin longitudinale, cioè l'operatore di elicità per uno spinore

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{p}} &= \frac{\hbar}{2} \int d^3x : \psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi : = \text{Fourier} \\ &= \frac{\hbar}{2} \int d^3p [c_1^\dagger(\mathbf{p}) c_1(\mathbf{p}) - c_2^\dagger(\mathbf{p}) c_2(\mathbf{p}) - d_1^\dagger(\mathbf{p}) d_1(\mathbf{p}) + d_2^\dagger(\mathbf{p}) d_2(\mathbf{p})]\end{aligned}$$

[r] Dunque

$$S_{\mathbf{p}} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Un fermione è auto-stato dell'operatore di elicità con spin up  $r = 1$  e spin down  $r = 2$ . Similmente, l'anti-fermione corrispondente è auto-stato dell'operatore di elicità.

## 2.2 Fotoni

Si veda Jackson, §11.7 e Maggiore, "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", §§2.3, 4.3.1.

**Generatori del gruppo di Lorentz.** Si considerino le trasformazioni di Lorentz  $\Lambda$  definite da

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

La trasformazione infinitesima è

$$\Lambda_\varepsilon = \eta + \varepsilon L \implies \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta + \varepsilon L)^n = e^{\omega L}, \quad \omega = n\varepsilon$$

Inoltre

$$(\eta L)^\top = -\eta L \implies L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

La prima riga e la prima colonna sono boost, mentre la sotto-matrice  $3 \times 3$  descrive le rotazioni. Si introducono i generatori delle rotazioni

$$J_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

così come i generatori dei boost

$$K_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I loro commutatori sono

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Le trasformazioni di Lorentz finite derivano dall'esponenziale delle matrici sopra. Si raggruppano i generatori del gruppo di Lorentz all'interno di un tensore anti-simmetrico  $J^{\mu\nu}$

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}, \quad J^{0i} = K^i, \quad J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k$$

per ottenere

$$\Lambda = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]$$

Un insieme di  $n$  campi  $\phi^i$  si trasforma nella rappresentazione di dimensione  $n$  del gruppo di Lorentz se

$$\phi'^i = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]^i_j \phi^j$$

## Lezione 4

Si studia come si trasforma un quadri-vettore

mar 28 nov  
2023 10:30

$$\delta v^\mu = \varepsilon^\mu_\nu v^\nu, \quad \delta v^\rho = -\frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma v^\sigma$$

dove  $\rho\sigma$  sono gli indici che mescolano le componenti dei quadri-vettori. Per confronto con i singoli generatori si ha

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)$$

Si vede il caso particolare di una rotazione  $\delta\theta$  attorno all'asse  $z$

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= -\frac{i}{2}[(\delta\omega)_{12}J^{12} + (\delta\omega)_{21}J^{21}]^\mu_\nu x^\nu = -i\delta\theta(J^{12})^\mu_\nu x^\nu = \delta\theta(\eta^{1\mu}\delta^2_\nu - \eta^{2\mu}\delta^1_\nu)x^\nu \\ &= \delta\theta(\eta^{1\mu}x^2 - \eta^{2\mu}x^1) \end{aligned}$$

dove  $J^{12} = J^3$  e alla seconda uguaglianza si ricorda che sia il parametro infinitesimo  $\delta\omega$  che i generatori  $J$  sono anti-simmetrici. Pertanto

$$\delta x^1 = -x^2 \delta\theta, \quad \delta x^2 = x^1 \delta\theta, \quad \delta x^3 = \delta x^0 = 0$$

cioè quanto atteso. Un altro caso è il boost  $\delta\beta$  lungo  $x$  per cui si applica  $J^{10}$  e  $J^{01} = K^1$ .

**Spin.** Si ritorna al campo del fotone  $\phi_s = A_\mu$ . Il tensore momento angolare è

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x [(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}) + \pi_r S_r^{\alpha\beta} \phi_s]$$

Si studia il secondo addendo e si specializzano gli indici alle componenti di un quadri-vettore. Conoscendo che la trasformazione di un campo generico e di un quadri-vettore, si ha

$$\delta v^\rho = \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} v_\sigma \implies S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} = -i(J_{\alpha\beta})^{\rho\sigma} = \eta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \eta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma$$

Pertanto

$$\pi_\mu S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} A_\nu = (\eta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \eta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \pi_\mu A_\nu = \pi_\alpha A_\beta - \pi_\beta A_\alpha = (\partial_0 A_\beta) A_\alpha - (\partial_0 A_\alpha) A_\beta$$

dove si utilizza la lagrangiana del campo elettromagnetico libero fissando il gauge di Coulomb e considerando il vuoto  $A_0 = 0$  (v. Maggiore, §3.5.2):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \implies \pi_\mu = \partial_{\partial^0 A^\mu} \mathcal{L} = -\partial_0 A_\mu$$

L'operatore di spin ha solo indici spaziali e presenta tre componenti spaziali poiché è anti-simmetrico. Inserendo lo sviluppo in serie di Fourier del campo del fotone quantizzato in modo non covariante, si ha

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int d^3x : (\partial^0 A^i) A^j - (\partial^0 A^j) A^i : = \text{Fourier} \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\varepsilon_s^i(\mathbf{k}) \varepsilon_r^j(\mathbf{k}) - \varepsilon_r^i(\mathbf{k}) \varepsilon_s^j(\mathbf{k})] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

dove si ripetono i passaggi visti per la quantizzazione dei campi.

Si considera lo spin lungo l'asse  $z$

$$S_{12} = S_3 = S_z = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\delta_s^1 \delta_r^2 - \delta_s^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})$$

con

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

Dunque, applicato ad un fotone si ha

$$S_z a_t^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i \sum_{r=1}^2 [\delta_t^1 \delta_r^2 - \delta_t^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

dove si è utilizzato il commutatore per ottenere la delta che risolve l'integrale e la somma in  $s$ . Pertanto

$$S_3 a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle, \quad S_3 a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = -i a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

Gli stati con polarizzazione lineare non sono auto-stati dello spin. Si considerano gli stati con polarizzazione circolare

$$a_{(\pm)}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^\dagger(\mathbf{q}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{q})]$$

per cui

$$\begin{aligned} S_3 a_{(+)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) + i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = a_{(+)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \\ S_3 a_{(-)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) - i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = -a_{(-)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

cioè essi sono auto-stati. Il fotone ha solo due polarizzazioni possibili  $s = \pm\hbar$ . Una terza polarizzazione non è presente. Questo è coerente con il fatto che il fotone ha massa nulla e la terza possibilità di spin, ortogonale all'asse di quantizzazione, non esiste (conseguenza dell'algebra di Poincaré).

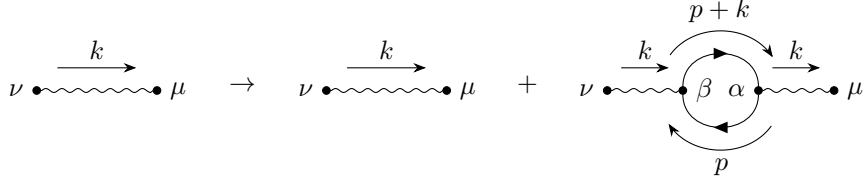
### 3 Correzioni al secondo ordine

#### 3.1 Polarizzazione del vuoto

Si parte dal propagatore imperturbato e si studia la correzione derivante dalla polarizzazione del vuoto

$$iD_F^{\mu\nu}(k) \rightarrow iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F^{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi_{\alpha\beta}(k) iD_F^{\beta\nu}(k)$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



dove si ha

$$i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \equiv \frac{(-i q_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4 p \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_0}$$

Tramite la divergenza superficiale, l'integrale è divergente al più quadraticamente. Non si calcola esplicitamente il diagramma, ma si immagina di aver già regolarizzato l'integrale al fine di cercare quali sono le divergenze e dove si trovano per poterle riassorbire all'interno di una relazione tra i parametri bare ed i parametri fisici. Si isolano le divergenze, ma non si svolge alcun calcolo.

La teoria è invariante di gauge e si deve avere  $k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} k_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(k) &\propto \int d^4 p \text{Tr} \left[ k_\alpha \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] = \int d^4 p \text{Tr} \left[ \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} (\not{p} - m_0 - \not{p} + m_0 + \not{k}) \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} [(\not{p} + \not{k} - m_0) - (\not{p} - m_0)] \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} [f(\not{p}) \gamma^\beta - f(\not{p} + \not{k}) \gamma^\beta] \end{aligned}$$

alla seconda riga si è utilizzata la ciclicità della traccia, alla terza riga si aggiunge e sottrae uno stesso termine, all'ultima riga  $f$  indica una funzione generica. Traslare  $p$  di una quantità  $k$  all'interno dell'integrale permette di semplificare i due addendi. Se ciò è possibile, allora la regolarizzazione rispetta l'invarianza di gauge. Viceversa, nel caso di un cut-off, l'integrale ha dei limiti di integrazione finiti e la traslazione non permette di ottenere termini identici. Dunque, si immagina che gli integrali siano regolarizzati in modo gauge invariante.

Ci si concentra solamente sulla funzione di polarizzazione del vuoto  $\Pi^{\alpha\beta}$ . Si ipotizza di averlo regolarizzato in modo gauge invariante. Poiché esso è un tensore di tipo 2, si può riscrivere come

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2)$$

dove  $A$  e  $B$  sono due funzioni che divergono quadraticamente in senso superficiale (prima della regolarizzazione, dopo sono quantità finite). Dall'invarianza di gauge segue

$$0 = k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = -k^\beta A(k^2) + k^2 k^\beta B(k^2) \implies A(k^2) = k^2 B(k^2) \implies A(0) = 0$$

Quando la funzione  $\Pi^{\alpha\beta}$  incontra una corrente, ogni termine proporzionale al momento del fotone  $k^\mu$  si semplifica perché accoppiato con la corrente  $J_\mu$ : il termine  $B$  si può ignorare. Lo sviluppo in potenze di  $A$  in termini di  $k^2$  è

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) + o(k^4), \quad A'(0) = A'(k^2 = 0) = \partial_{k^2} A(k^2)|_{k^2=0}$$



dove  $\Pi_c(k^2)$  tende a zero linearmente in  $k^2$  per  $k^2 \rightarrow 0$ . Esprimendo la derivata in termini di  $k$  si ha

$$A' \sim \frac{1}{k} \partial_k \Pi \sim \frac{1}{p^2} \Pi \sim \frac{d^4 p}{p^4}$$

cioè una divergenza logaritmica. L'invarianza di gauge permette di ridurre il grado della divergenza superficiale (questo è dato dal fatto che  $A(0) = 0$ ). Il secondo addendo è una derivata seconda e l'integrale associato è convergente e non dipende dal regolatore

$$\Pi_c(k^2) = k^2 \partial_{k^2}^2 \Pi(0)$$

anche se il power-counting fornisce una divergenza logaritmica? [r].

Sostituendo l'espressione della funzione di polarizzazione del vuoto

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

all'interno del propagatore del fotone si ottiene il propagatore corretto

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \left[ 1 - q_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2} \right] = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)} + o(q_0^2)$$

La costante di accoppiamento  $q_0^2 \ll 1$  è piccola e dunque si aggiungono ordini superiori per scrivere l'espressione in modo più comodo sfruttando l'espansione in serie di Taylor. Il propagatore non corretto ha un polo a  $k^2 = 0$  che corrisponde ad una massa nulla per il fotone. Poiché  $A(0) = 0$ , il polo del fotone corretto è ancora  $k^2 = 0$  e la massa del fotone non subisce correzioni. La massa del fotone non si rinormalizza ad ogni ordine: questa protezione deriva ancora dall'invarianza di gauge. Il termine  $A(k^2)$  non posta il polo del propagatore.

A questo punto si trova una ridefinizione della relazione tra parametri bare e parametri fisici. Si ha

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} [1 - q_0^2 A'(k^2) - q_0^2 \Pi_c(k^2)]$$

Il propagatore si accoppia sempre con la corrente elettromagnetica da entrambi gli estremi, pertanto compaiono le cariche dei fermioni

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 \rightarrow \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^4 \Pi_c(k^2) + o(q^4)$$

La parentesi quadra — che è un termine divergente prima della regolarizzazione — è una correzione alla carica elettrica al secondo ordine dello sviluppo perturbativo in  $\alpha$  e viene detta costante di rinormalizzazione

$$q_0^2 \rightarrow q^2 \equiv q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_3, \quad Z_3 \equiv 1 - q_0^2 A'(0) + o(q_0^2)$$

Il secondo addendo è una correzione finita di cui bisogna tenere conto all'ordine  $\alpha^2$ . Si è trovata la ridefinizione della relazione tra parametro bare e fisico. Pertanto

$$q = Z_3^{\frac{1}{2}} q_0 = q_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) + o(q_0^2) \right]$$

La legge di Coulomb diventa

$$\frac{q_0^2}{r^2} \rightarrow \frac{q_0^2 Z_3}{r^2} = \frac{q^2}{r^2}$$

Inoltre, il propagatore rinormalizzato è

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}(k) \rightarrow iq^2 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu} q^2}{k^2} + \frac{i\eta_{\mu\nu} q^4}{k^2} \Pi_c(k^2) + o(q_0^4) = iq^2 D_{\mu\nu}(k) [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] + o(q_0^4)$$

Questa espressione è quella che corrisponde al diagramma scheletro: si mantiene la struttura, ma con i parametri fisici. Si noti che al secondo addendo, cioè la correzione finita, si può scambiare  $q_0$  con  $q$  perché la differenza è di ordine  $q_0^2$  e dunque rientra negli ordini superiori.

## Lezione 5

 mer 29 nov  
2023 10:30

**Ordini di grandezza.** Regularizzando la teoria tramite un cut-off si ottiene una costante di rinormalizzazione pari a [r] fonte?

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

In questa regularizzazione non si ha più l'invarianza di gauge

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) \neq 0$$

La divergenza logaritmica è una divergenza lenta. Cercando un valore della costante  $Z_3$  apprezzabilmente maggiore di 1 si ha

$$Z_3 = 2 \implies \Lambda \sim e^{\frac{3\pi}{2\alpha}} m \sim 10^{280} m$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg, la lunghezza associata a tale momento è pari a

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \implies \Delta x \sim 10^{-293} \text{ cm}$$

Ad una tale scala non è garantito che la teoria funzioni e che non bisogna tenere conto delle altre interazioni fondamentali.

Ciononostante, rimane il fatto che in una teoria rinormalizzabile, i diagrammi divergenti sono in numero finito e vengono riassorbiti all'interno delle costanti di rinormalizzazione dei parametri. In una teoria non rinormalizzabile, questo non è possibile.

**Massa sperimentale del fotone.** La massa del fotone è legata al campo magnetico di un corpo celeste. Sulla superficie terrestre, il campo magnetico è dell'ordine del gauss. Secondo i geologi, l'origine del campo magnetico è il nucleo della Terra. Come il potenziale di Coulomb cambia aggiungendo una massa al fotone è stato studiato da Fischbach et al.<sup>2</sup>:

$$V = \frac{q}{r} e^{-\mu r}$$

cioè il potenziale di Yukawa. Visto che il campo magnetico sulla superficie non è nullo, la scala di massa è

$$\mu < \frac{\hbar c}{R}, \quad \mu \lesssim \frac{200 \text{ MeV fm}}{10^9 \text{ cm}} \sim \frac{2 \times 10^8 \text{ eV} \cdot 10^{-13} \text{ cm}}{1 \text{ cm}} 10^{-9} \sim 10^{-14} \text{ eV}$$

dove  $R$  è il raggio terrestre. Dunque, la massa del fotone ha un limite superiore. Considerando lo stesso argomento per Giove si ha  $\mu \lesssim 10^{-19} \text{ eV}$ . Anche dal punto di vista sperimentale si ha una conferma che il fotone abbia massa nulla.

## 3.2 Auto-energia dell'elettrone

Esistono altre due rinormalizzazioni della carica oltre  $Z_3$ .

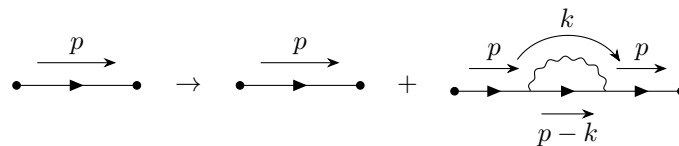
Partendo dal propagatore bare del fermione si passa al propagatore corretto

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

dove

$$i q_0^2 \Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i q_0) \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_0} (-i q_0) \gamma_\nu \frac{-i \eta^{\mu\nu}}{k^2}$$

I cui diagrammi corrispondenti sono



<sup>2</sup>Si veda Fischbach, E., et al. "New geomagnetic limits on the photon mass and on long-range forces coexisting with electromagnetism", in Phys. Rev. Lett., vol. 73, pp. 514-517, 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.514>.

L'integrale diverge nell'infrarosso e nell'ultravioletto. Si considera l'integrale già regolarizzato ad esempio tramite una massa del fotone ed un cut-off. Si isolano le divergenze per capire se è possibile riassorbirle. Il propagatore corretto è

$$iS^{\text{cor}}(p) = i \left[ \frac{1}{\not{p} - m_0} - \frac{1}{\not{p} - m_0} q_0^2 \Sigma(p) \frac{1}{\not{p} - m_0} + o(q_0^2) \right] = \frac{i}{\not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q_0^2)$$

si noti il segno negativo provenire dalla moltiplicazione di due unità immaginarie  $i$ . Si è utilizzata la relazione per due operatori non commutanti

$$(A + B)^{-1} = \left[ A \left( 1 + \frac{1}{A} B \right) \right]^{-1} = \left( 1 + \frac{1}{A} B \right)^{-1} A^{-1} = \left[ 1 - \frac{1}{A} B + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B + \dots \right] \frac{1}{A}$$

dove all'ultima uguaglianza si usa la serie geometrica

$$\frac{1}{1 + M} = 1 - M + M^2 - M^3 + o(M^3)$$

Il propagatore bare ha il polo in  $m_0$ . In precedenza, per l'auto-energia del fotone, l'invarianza di gauge  $A(0) = 0$  protegge dalla rinormalizzazione additiva della massa. In questo caso non si ha alcuna protezione poiché  $\Sigma(0) \neq 0$ . La massa fisica, cioè il polo del propagatore corretto, è

$$m = m_0 + \delta m = m_0 - q_0^2 \Sigma|_{\not{p}=m_0}$$

dove per  $\not{p} = m_0$  si intende  $\not{p}^2 = m_0^2$ , cioè il polo. Al secondo ordine si trova la correzione additiva per la massa.

La funzione di auto-energia  $\Sigma$  opera su uno spazio spinoriale e dunque contiene le matrici di Dirac. Sapendo che

$$(\not{p})^{2n} = p^{2n}, \quad (\not{p})^{2n+1} = \not{p} p^{2n}$$

si sviluppa la funzione in serie di potenze in termini di  $\not{p} - m_0$  per avere

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0) B + (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)$$

Il secondo addendo è la derivata  $B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0)$ . I primi due addendi sono costanti e indipendenti da  $p$ , mentre  $\Sigma_c$  ne dipende, ma converge in quanto dipende da derivate di ordine superiori. Tale addendo dipende da  $\not{p}$ , si azzera in  $\not{p} = m$  (poiché un fattore  $\not{p} - m$  proviene dallo sviluppo di Taylor) e non dipende dal regolatore perché finito.

Inserendo la forma trovata della funzione  $\Sigma$  all'interno del propagatore corretto, il denominatore è

$$\begin{aligned} \not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p) &= \not{p} - [(m_0 + \delta m) - q_0^2 (\not{p} - m_0) B - q_0^2 (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)] \\ &= (\not{p} - m) [1 + q_0^2 B + q_0^2 \Sigma_c(p)] \end{aligned}$$

dove si ha  $\delta m \propto \Sigma(\not{p} = m_0)$  e si sostituisce  $m = m_0 + \delta m$  a tutti gli ordini poiché agli ordini superiori si commette un errore di ordine  $q_0^2$  che è trascurabile all'ordine desiderato. Pertanto si ottiene

$$iS^{\text{cor}} = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2) = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B] [1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2)$$

dove si utilizza il fatto che  $q_0$  è piccolo e dunque si espande in serie di Taylor. La seconda parentesi è zero quando  $\not{p} = m_0$ , mentre la prima è un termine divergente logicamente (prima della regolarizzazione) che si accoppia con due fotoni fornendo una correzione alla carica elettrica che propaga.

Dunque, finora si è trovato

$$\delta m = -q_0^2 \Sigma(\not{p} = m_0)$$

che diverge logicamente. Inoltre

$$B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0) \sim \int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \ln k, \quad \Sigma_c \sim \partial^2 \Sigma(\not{p} = m_0) < \infty$$

Pertanto, la massa fisica è

$$m = m_0 + \delta m < \infty$$

che è finita ed indipendente dal regolatore.

Nei diagrammi compare il propagatore rinormalizzato

$$iq^2 S^R(p) = q_0^2 iS_F(p)[1 - q_0^2 B][1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq^2 S_F(p)[1 - iq^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4)$$

dove la carica fisica è

$$q^2 = q_0^2[1 - q_0^2 B] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_2, \quad Z_2 = 1 - q_0^2 B + o(q_0^2)$$

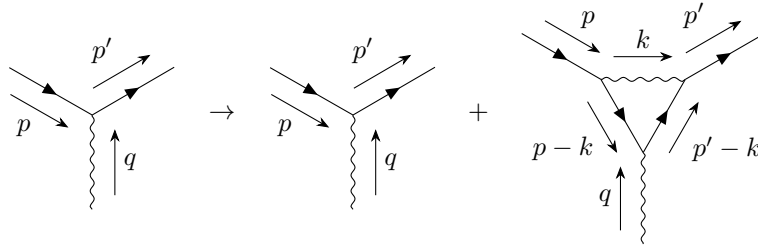
A questo punto si utilizzano i propagatori corretti inserendo le costanti fisiche, ma bisogna calcolare la correzione radiativa finita  $\Sigma_c$ .

### 3.3 Vertice elettromagnetico

Il vertice elettromagnetico diventa

$$-iq_0 \gamma_\mu \rightarrow -iq_0 \gamma_\mu - iq_0^3 \Lambda_\mu(p', p)$$

i cui diagrammi sono



dove  $q = p' - p$  e

$$-iq_0^3 \Lambda^\mu(p', p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iq_0) \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\beta \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

Esso è logaritmicamente divergente sia nell'infrarosso che nell'ultravioletto. Ancora una volta si considera l'integrale normalizzato.

Nella funzione di auto-energia, un primo termine divergente è dato da  $\Sigma(\not{p} = m)$  cioè la funzione di auto-energia per una particella libera. Similmente, ci si aspetta che il primo termine divergente per la funzione di correzione al vertice  $\Lambda^\mu$  sia quello della particella libera. Si considerino due momenti  $P$  di una particella sul mass shell. Si riscrive

$$p' = P + (p' - P), \quad p = P + (p - P)$$

come pure

$$\Lambda^\mu(p', p) = \Lambda^\mu(P, P) + [\Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(P, P)] \equiv \Lambda^\mu(P, P) + \Lambda_c^\mu(p', p)$$

Il secondo addendo calcolato in  $P$  è nullo  $\Lambda_c^\mu(P, P) = 0$ . La funzione di correzione al vertice appare sempre tra spinori. Si studia il termine di particella libera, la cui forma più generale è

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) = \bar{u}(\mathbf{P}) \left[ a \frac{P^\mu}{m} + b \gamma^\mu \right] u(\mathbf{P})$$

Si utilizza l'identità di Gordon. Sapendo che gli spinori sono on-shell e soddisfano l'equazione di Dirac, si ha

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \implies \not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p} = m\bar{u}(\mathbf{p})$$

moltiplicando per le matrici di Dirac da sinistra e da destra, si ha

$$\gamma^\mu \not{p}u(\mathbf{p}) = m\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu$$

moltiplicando per  $\bar{u}(\mathbf{p})$  e  $\bar{u}(\mathbf{p})$  da sinistra e da destra, si ottiene

$$\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu \not{p} u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

Sommando le due si ha

$$\bar{u}(\mathbf{p})\{\gamma^\mu, \not{p}\}u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}) \implies 2\bar{u}(\mathbf{p})\eta^{\mu\nu}p_\nu u(\mathbf{p}) = 2\bar{u}(\mathbf{p})p^\mu u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

L'identità di Gordon per due momenti diversi è

$$2m\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u(\mathbf{p})$$

Il primo membro è (proporzionale a) la corrente di Dirac, il secondo membro è la somma di una corrente classica e di una corrente di spin. Notando che gli spinori di particella libera  $u$  e  $\bar{u}$  soddisfano l'equazione di Dirac, si può applicare l'identità di Gordon. Da essa segue che i termini  $P^\mu$  e  $\gamma^\mu$  nella decomposizione della funzione  $\Lambda^\mu(P, P)$  sono dipendenti.

## Lezione 6

Pertanto, il termine di particella libera è

gio 30 nov  
2023 10:30

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

dove  $L$  è una costante scalare divergente che dipende dal regolatore. Dunque la funzione di correzione del vertice è

$$\Lambda(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p), \quad \bar{u}(\mathbf{P})\Lambda_c u(\mathbf{P}) = 0$$

Si vuole studiare il suo comportamento. Si introducono due variabili

$$\Delta \equiv \not{p} - \not{k} - m, \quad q = p - P, \quad q' = p' - P$$

Pertanto, isolando i termini divergenti, si ha

$$\Lambda \sim \frac{1}{\not{p}' - \not{k} + m}\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} = \frac{1}{\Delta + \not{q}'}\gamma^\mu \frac{1}{\Delta + \not{q}} = \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}'\frac{1}{\Delta} + \dots \right] \gamma^\mu \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}\frac{1}{\Delta} + \dots \right]$$

alla seconda uguaglianza si utilizza l'identità per  $(A+B)^{-1}$ . Il termine che diverge più velocemente è il primo addendo del prodotto ed esso corrisponde a  $\Lambda^\mu(P, P)$ , gli altri hanno termini  $\Delta^{-1}$  in più che sono fattori di convergenza. I termini successivi di ordine più basso sono convergenti e corrispondono a  $\Lambda_c^\mu(p', p)$ .

Il vertice corretto è dato da

$$-iq_0\Gamma_{\text{cor}}^\mu(p', p) = -iq_0[\gamma^\mu(1 + q_0^2 L) + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] + o(q_0^3)$$

La parentesi tonda è la terza rinormalizzazione della carica elettrica

$$q = q_0(1 + q_0^2 L) + o(q_0^3) = \frac{q_0}{Z_1}$$

## 3.4 Applicazione

A questo punto manca la rinormalizzazione delle linee esterne (detta anche rinormalizzazione della funzione d'onda). Prima si vede come applicare quanto sviluppato.

**Riepilogo.** La funzione di auto-energia è

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m) + (\not{p} - m)\partial \not{p}\Sigma(\not{p} = m) + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)$$

da cui

$$iq_0^2 S^{\text{cor}}(p) = \frac{iq_0^2 Z_2}{\not{p} - m}[1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq_0^2 Z_2 S^{\text{R}}(p)$$

Il propagatore rinormalizzato contiene quantità fisiche.

La funzione di polarizzazione del vuoto è

$$\Pi(q^2) = A'(0) + \Pi_c(q^2)$$

dove il primo addendo diverge logaritmicamente, il secondo è finito. Non si ha rinormalizzazione della massa a qualsiasi ordine. Pertanto

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}^{\text{cor}}(q) = iq_0^2 Z_3 \frac{-\eta_{\mu\nu}}{q^2} [1 - q_0^2 \Pi_c(q^2)] + o(q_0^4) = iq_0^2 Z_3 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(q)$$

Per il vertice elettromagnetico si ha

$$-iq_0 \Gamma_\mu^{\text{cor}}(p', p) = -\frac{iq}{Z_1} [\gamma_\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] + o(q_0^3) = -\frac{iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^{\text{R}}(p', p)$$

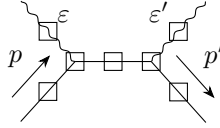
Per le linee esterne fermioniche si ha

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

Mentre per le linee fotoniche esterne si ottiene

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon_\mu$$

**Diagramma scheletro.** Prendendo come prototipo l'effetto Compton, ovunque sono presenti diagrammi one-particle reducible si inserisce il quadrato



L'elemento di matrice corrispondente è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}') \sqrt{Z_2} \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_2} \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\nu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \sqrt{Z_3} \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Gamma_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Gamma_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu (-iq) \Gamma_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) (-iq) \Gamma_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \end{aligned}$$

La costante di accoppiamento misurata, cioè la carica, ha sempre la forma

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0$$

poiché ogni vertice è sempre costituito da due linee fermioniche ed una fotonica. Nel diagramma scheletro non sono più presenti termini divergenti, né parametri non misurabili, bare. Tale ampiezza ha una forma simile all'ampiezza di Feynman che si scriverebbe per il diagramma albero con i parametri bare. In questo caso, l'ampiezza è corretta all'ordine  $q_0^2$  e contiene tutti i diagrammi one-particle reducible. Si ricordi che dentro ogni termine rinormalizzato compare un fattore convergente da calcolare.

Quanto fatto vale per il secondo ordine e non si sa ancora nulla sugli ordini successivi. Inoltre, il diagramma one-particle irreducible dev'essere considerato e aggiunto all'ampiezza.

### 3.5 Identità di Ward

Un importante risultato è l'identità di Ward. Notando

$$0 = \partial_{p_\mu} 1 = \partial_{p_\mu} \left[ \frac{1}{\not{p} - m} (\not{p} - m) \right] = \left[ \partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} \right] (\not{p} - m) + \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu$$

la derivata rispetto  $p_\mu$  del propagatore del fermione è

$$\partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} = - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m}$$

da cui l'identità di Ward

$$\Sigma(p) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma(p)$$

essa è vera ad ogni ordine. Il termine  $\Lambda^\mu(p, p)$  corrisponde ad un fotone con  $q = 0$ . Pertanto, si può ottenere il diagramma della correzione al vertice a partire da quello dell'auto-energia inserendo un fotone ad energia nulla nel propagatore del fermione



Si vede un'altra dimostrazione. Si consideri

$$\begin{aligned} (p' - p)_\mu i\Lambda^\mu(p', p) &= (p' - p)_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\beta \frac{\eta_{\alpha\beta}}{k^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} (\not{p}' - \not{p}) \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} - \not{k} - m} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} [(\not{p}' - \not{k} - m) - (\not{p} - \not{k} - m)] \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} - \not{k} - m} \\ &= i[\Sigma(p') - \Sigma(p)] \end{aligned}$$

Dunque

$$q_0^2 (p' - p)_\mu \Lambda^\mu(p', p) = q_0^2 [\Sigma(p') - \Sigma(p)] \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma, \quad p' \rightarrow p$$

Si studia una conseguenza per le costanti di rinormalizzazione  $Z$ . Si consideri l'identità di Ward posta tra due spinori

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \partial_{p_\mu} \Sigma u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) L \gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

ricordando che  $\Lambda_c$  è nullo tra spinori. Tenendo presente la struttura della funzione di auto-energia

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0)B + (\not{p} - m_0)\Sigma_c(p)$$

si ottiene

$$\partial_{p_\mu} \Sigma = B \gamma^\mu$$

Confrontando questa espressione con quella dall'identità di Ward si ha

$$B = L, \quad Z_2 = (1 - q_0^2 B) + o(q_0^2), \quad Z_1 = \frac{1}{1 + q_0^2 L} + o(q_0^{-2}) = 1 - q_0^2 L + o(q_0^2) \implies Z_1 = Z_2$$

questo vale a tutti gli ordini. Pertanto, la carica si normalizza solamente con

$$q = \sqrt{Z_3} q_0$$

**Naturalzza.** Si considerino i tre diagrammi divergenti. Nel loop virtuale della polarizzazione del vuoto, non si creano solo fermioni, ma qualsiasi particella che interagisce con il campo elettromagnetico. A differenza di questo diagramma, le costanti di rinormalizzazione per l'auto-energia e la correzione al vertice contengono le masse delle particelle iniziale e finale. La differenza tra la carica del protone e dell'elettrone è al più<sup>3</sup>

$$\frac{\Delta q}{q_e} \sim 10^{-21}$$

<sup>3</sup>Si veda <https://arxiv.org/abs/1102.2766>.

Questo vale per ogni particella. Infatti, l'auto-energia e la correzione al vertice si rinormalizzano con  $Z$  diverse in base alla particella, ma solamente per la polarizzazione del vuoto la rinormalizzazione è universale. Se  $Z_1 \neq Z_2$ , diversi parametri iniziali nelle lagrangiane di partenza dovrebbero arrivare a medesimi risultati tramite costanti di rinormalizzazione diverse. Questa cosa è ritenuta innaturale. Tuttavia, il problema non si pone in questo caso, poiché la carica si rinormalizza solamente con  $Z_3$ . A questo fatto si collega la naturalezza di una teoria o di un modello: risulta innaturale avere una teoria che prevede l'aggiustamento fine di tanti parametri per ottenere un risultato sperimentale cercato.

### 3.6 Linee esterne

#### 3.6.1 Fermioni

Quando si è studiata la rinormalizzazione della massa, si è partiti dal parametro bare  $m_0$  e si è calcolata la correzione all'ordine  $q_0^2$ . Per la rinormalizzazione delle linee esterne si utilizza una tecnica diversa, la tecnica dei controtermini di massa. Si pone un problema da risolvere. Si è introdotto lo spegnimento adiabatico perché nella descrizione di interazione, quando l'hamiltoniana di interazione tende ad annullarsi, gli stati tendono ad essere costanti; il limite degli stati all'infinito utilizzato nella matrice  $S$  di scattering è perfettamente definito, ma la particella bare non è misurabile. Nel tragitto dall'infinito al luogo di interazione, la particella bare si riveste ed interagisce brevemente, poi si dirige nuovamente all'infinito ritornando bare. Sono presenti due scale temporali. Questa considerazione è da tenere presente quando si rinormalizzano le linee esterne. La linea entrante (o uscente) nel processo non può essere la particella bare  $u(\mathbf{p}, m_0)$ , ma è la particella fisica  $u(\mathbf{p}, m)$ . Bisogna capire come passare da una all'altra. Si introduce la tecnica dei controtermini.

Si scrive la lagrangiana libera esplicitando la massa fisica

$$\mathcal{L} = : \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi : + \delta m : \bar{\psi}\psi : , \quad m = m_0 + \delta m$$

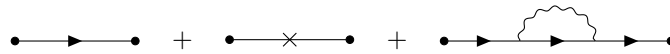
In questo modo, il primo addendo è la lagrangiana libera con la massa fisica, mentre il secondo termine è il contro-termine di massa che viene aggiunto ad un eventuale termine di interazione. Dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = : \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi : + [\delta m : \bar{\psi}\psi : - q_0 : \bar{\psi} A \psi :]$$

Tuttavia, la differenza  $\delta m$  tra la massa bare e fisica è ignota. In questa teoria, il propagatore imperturbato è

$$\frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i \delta m \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m}$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



Si utilizza una croce per il contro-termine di massa poiché il prodotto normale  $: \bar{\psi}\psi :$  distrugge e crea un fermione nello stesso punto. Il contro-termine è di ordine  $q_0^2$ , mentre l'integrazione con il campo elettromagnetico è di ordine  $q_0$ .

In questo modo il parametro bare  $m_0$  non appare.

Dunque, il propagatore imperturbato è

$$\begin{aligned} iS &\rightarrow i \left[ \frac{1}{\not{p} - m} - \frac{1}{\not{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\not{p} - m} \right] = \frac{i}{\not{p} - m} \left[ 1 - (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\not{p} - m} \right] \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \left[ 1 + \frac{\delta m + q_0^2 \Sigma(p)}{\not{p} - m} \right]^{-1} + o(q^2) = \frac{i}{\not{p} - m + \delta m + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q^2) \end{aligned}$$

Visto che  $m$  è già la massa fisica, non dev'essere presente alcuna rinormalizzazione della massa. Pertanto

$$\delta m + q_0^2 \Sigma(p) = 0 \implies \delta m = -q_0^2 \Sigma(p = m)$$

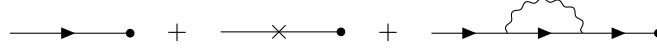
cioè quanto già trovato in precedenza per la rinormalizzazione della massa.



**Linea esterna di un fermione.** Si utilizza la tecnica dei controtermini. La linea esterna (entrante) diventa

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m} i\delta m u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \left[ 1 - \frac{1}{\not{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \right] u(\mathbf{p})$$

i diagrammi corrispondenti sono



Si sviluppa la funzione di auto-energia  $\Sigma$  per avere

$$\frac{q_0^2}{\not{p} - m} \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\not{p} - m} [-\delta m + q_0^2 (\not{p} - m) B + q_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p)] u(\mathbf{p})$$

L'ultimo addendo contiene si annulla quadraticamente in  $\not{p} - m$  per  $\not{p} \rightarrow m$  e visto che  $u(\mathbf{p})$  è un fermione reale, si ha contributo nullo. D'altra parte, nel limite il secondo addendo è indefinito

$$\frac{B}{\not{p} - m} (\not{p} - m) u(\mathbf{p}) \sim \frac{0}{0}$$

poiché  $u(\mathbf{p})$  soddisfa l'equazione di Dirac.

## Lezione 7

lun 04 dic  
2023 10:30

Per risolvere il problema si utilizza l'ipotesi adiabatica: si considerano una scala temporale di rivestimento e una di interazione degli stati iniziale e finale. Si immagina che la carica elettrica sia una funzione del tempo

$$e_0(t) = e_0 f(t)$$

così da ottenere un limite definito

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} S_{fi}$$

Questo è possibile nella descrizione di interazione perché gli stati evolvono con l'hamiltoniana di interazione e all'infinito essa tende a zero. Si sceglie la funzione  $f(t)$  che si annulli all'infinito (e quindi pure l'hamiltoniana di interazione) ed abbia un valore apprezzabilmente vicino a uno in un intervallo  $[-T, T]$ . Ad un certo tempo  $-T$ , la particella bare si riveste e ad un tempo  $T$  ritorna bare. Si ha un'altra scala temporale  $[-t, t]$  con  $t \ll T$  in cui avviene l'interazione.

Risulta utile studiare la trasformata di Fourier  $\tilde{f}(E)$ . Se  $f(t)$  fosse costante, la sua trasformata è una funzione delta di Dirac. La forma della funzione  $f(t)$  è irrilevante, ma importano solo le scale. Si può immaginare che la funzione sia una gaussiana con picco pari ad 1 e la larghezza della sua trasformata sia dell'ordine  $T^{-1}$ . Pertanto

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} dE \tilde{f}(E) e^{-iEt} = \int dE \tilde{f}(E) e^{-iq^\mu x_\mu}$$

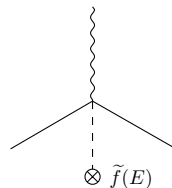
dove si considera un quadri-vettore  $q^\mu = (E, \mathbf{0})$ . Si normalizza la funzione

$$f(0) = \int dE \tilde{f}(E) = 1$$

La parte di lagrangiana di interazione dovuta alla corrente del campo di Dirac è data da

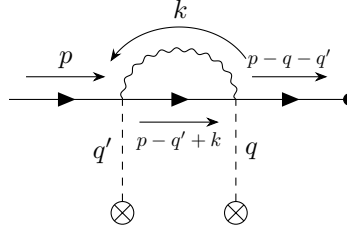
$$: -q_0 f(t) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A^\mu(x) \psi(x) :$$

cioè un vertice elettromagnetico ed una nuova interazione con  $\tilde{f}(E)$



Il quadri-vettore  $q^\mu$  rompe l'invariante di traslazione temporale poiché ha solamente la componente temporale. Questa situazione è simile all'aggiunta di un campo esterno che rompe l'invarianza per traslazione spaziale. Il vertice non conserva l'energia.

Si modifica la teoria sostituendo ogni vertice con quello sopra. Il termine indeterminato corrisponde al diagramma dell'auto-energia



Nel limite in cui  $q, q' \rightarrow 0$  si ottiene il diagramma originario. La prima linea di destra corrisponde al propagatore di un fermione

$$S_F(p - q - q')$$

mentre nella linea centrale si ha la funzione di auto-energia

$$\Sigma(p - q')$$

Unendo tutto quanto, si riscrive la linea esterna come

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}) &\rightarrow \left[ 1 - \int dE dE' \tilde{f}(E) \tilde{f}(E') \frac{q_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m} (\not{p} - \not{q}' - m) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \left[ 1 - \int dE dE' \tilde{f}(E) \tilde{f}(E') \frac{q_0^2 B}{\not{p} - (\not{q}' + \not{q}) - m} \left( (\not{p} - m) - \frac{1}{2}(\not{q}' + \not{q}) \right) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 B \right] u(\mathbf{p}) = \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Alla prima riga l'integrale è simmetrico per scambio  $q \leftrightarrow q'$  tranne per l'ultima parentesi. Si riscrive  $q'$  in parte simmetrica ed anti-simmetrica

$$q' = \frac{q' + q}{2} + \frac{q' - q}{2}$$

Visto che l'integrale è su tutto lo spazio, la parte anti-simmetrica fornisce un contributo nullo. Alla seconda riga, separando  $\not{p} - m$  in due metà, una dà zero con  $u(\mathbf{p})$ , l'altra si somma a  $q' + q$  e semplifica il denominatore. Ricordando la normalizzazione, si ottiene la terza riga.

Non compare più la funzione  $f(t)$  né la sua trasformata  $\tilde{f}(E)$ . Il limite  $q, q' \rightarrow 0$  riporta alla forma corretta dell'elettrodinamica quantistica: non compare più il vertice modificato.

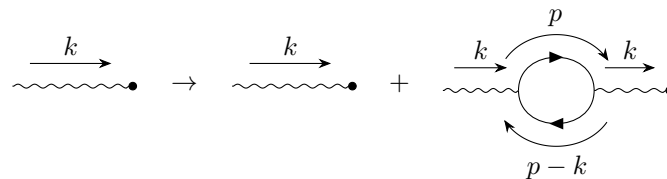
La stessa discussione vale per un fermione che esce.

### 3.6.2 Fotoni

Si consideri un fotone reale di momento  $k$ . La linea esterna diventa

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) + iD_{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \varepsilon_\beta(\mathbf{k})$$

i cui diagrammi sono



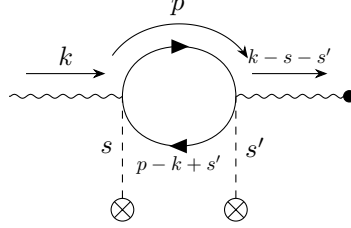
In questo caso non si ha necessità di introdurre il contro-termine di massa poiché l'invarianza di gauge protegge dalla rinormalizzazione. Sapendo che

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

segue

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) &\rightarrow \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{k^2} i q_0^2 [-\eta_{\alpha\beta} A(k^2)] \varepsilon^\beta(\mathbf{k}) \\ &= \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \left[ 1 - \frac{q_0^2 k^2 A'(0)}{k^2} - \frac{q_0^2 k^2 \Pi_c(k^2)}{k^2} \right], \quad \Pi_c(0) = 0\end{aligned}$$

Alla seconda riga si è inserito lo sviluppo di  $A$  in potenze di  $k^2$ . Si introduce una nuova interazione tra il vertice e la corrente elettromagnetica simile a quella precedente



La prima linea di destra è il propagatore  $D_F(k-s-s')$ . La polarizzazione centrale contiene la funzione di polarizzazione  $\Pi(s-k)$ . Pertanto

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \left[ 1 - \int dE dE' f(E) f(E') q_0^2 \frac{A'(0)(s-k)^2}{(k-s-s')^2} \right]$$

dove  $f$  è un'arbitraria funzione che è una nuova costante di accoppiamento dell'interazione. Si vuole fare il limite  $s, s' \rightarrow 0$ . La frazione è pari a

$$\frac{(s-k)^2}{(k-s-s')^2} = \frac{s^2 + k^2 - 2sk}{k^2 + (s+s')^2 - 2k(s+s')} = \frac{k^2 - 2sk + o(s, s')}{k^2 - 2k(s+s') + o(s, s')}$$

Essa è simmetrica per scambio di  $s \leftrightarrow s'$  tranne per l'addendo  $-2sk$ . Dunque si riscrive

$$s = \frac{s+s'}{2} + \frac{s-s'}{2}$$

Come prima il contributo dell'integrale della parte anti-simmetrica è nullo e si ha

$$\frac{(s-k)^2}{(k-s-s')^2} = \frac{k^2 - k(s+s') + o(s, s')}{k^2 - 2k(s+s') + o(s, s')} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k^2 \rightarrow 0$$

si fa il limite  $k^2 \rightarrow 0$  poiché il fotone è reale. A questo punto il limite  $s, s' \rightarrow 0$  è ben definito e si ottiene la teoria originaria. Pertanto, la rinormalizzazione della linea fotonica è

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon^\mu(\mathbf{k})$$

Lo stesso discorso vale per la rinormalizzazione della linea esterna data da un campo esterno.

### 3.7 Riepilogo

Il propagatore del fermione si rinormalizza come

$$i q_0^2 Z_2 S^R = i q_0^2 \sqrt{Z_2} S^R \sqrt{Z_2}$$

Il propagatore del fotone si rinormalizza come

$$i q_0^2 Z_3 D^R = i q_0^2 \sqrt{Z_3} D^R \sqrt{Z_3}$$

Le linee esterne fermioniche

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

mentre le linee fotoniche

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon^\mu$$

Il vertice si rinormalizza come

$$\frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^R$$

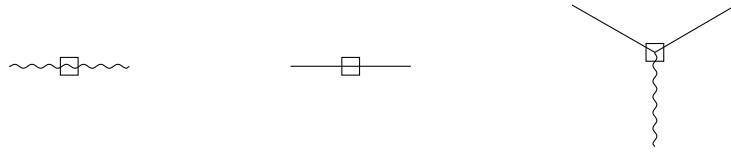
Un vertice elettromagnetico ha sempre due linee fermioniche ed una fotonica. La costante di accoppiamento con tutte le correzioni è

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0 = \sqrt{Z_3} q_0$$

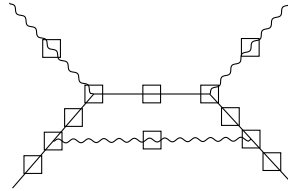
Il fatto che il rapporto è unitario si ricollega alla naturalezza della teoria.

## 4 Ordini superiori

Finora si è definita la somma dei diagrammi one-particle reducible i quali sono stati inseriti in un diagramma scheletro



Le correzioni al secondo ordine  $q_0^2$ , i diagrammi one-particle reducible portano a tre costanti di rinormalizzazione con cui si rinormalizzano la carica e la massa. Non tutte le correzioni sono di questo tipo poiché esistono anche i diagrammi one-particle irreducible. Per lo scattering Compton, l'unico tale diagramma converge. Non è ovvio che un diagramma simile sia convergente ad ogni ordine. Ad esempio, inserendo nel diagramma convergente per l'effetto Compton una polarizzazione del vuoto nel fotone scambiato, si ottiene un diagramma divergente poiché contiene un sotto-diagramma divergente (cioè la polarizzazione). Ci si chiede se il diagramma scheletro del diagramma one-particle irreducible continui a convergere.



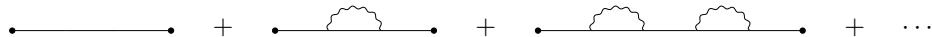
### 4.1 Diagrammi one-particle reducible

Si studiano tutti i diagrammi one-particle reducible.

**Propagatore del fermione.** Si considerino tutti i diagrammi di auto-energia del fermione

$$iS \rightarrow iS + iS i q_0^2 \Sigma(p) iS + iS i q_0^2 \Sigma(p) iS i q_0^2 \Sigma(p) iS + \dots = \frac{i}{(\not{p} - m_0) + q_0^2 \Sigma(p)}$$

dove si è applicata la formula per  $(A + B)^{-1}$ . I diagrammi corrispondenti sono



In questo caso la formula sopra è esatta. Si sono risommati tutti i grafici one-particle reducible che contribuiscono alla rinormalizzazione del propagatore del fermione. Dentro la funzione di auto-energia  $\Sigma$  sono presenti i diagrammi da calcolare (fino ad un certo ordine) con un contributo divergente e ed uno convergente. A questo punto non si sa se esistono nuove divergenze oltre alle tre studiate. Le considerazioni fatte in precedenza sullo sviluppo della funzione di auto-energia  $\Sigma$  valgono ancora.

In precedenza, si è trovato

$$i q_0^2 S \rightarrow \frac{i q_0^2}{(\not{p} - m)(1 + q_0^2 B) + q_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p)}, \quad q = \frac{q_0}{\sqrt{1 + q_0^2 B}} = \sqrt{Z_2} q_0$$

Queste due formule sono esatte e valgono ad ogni ordine. Gli ordini superiori vengono inclusi nel termine  $\Sigma_c$  e per  $\not{p} = m$  si ha zero.

La relazione fondamentale è

$$iq_0^2 S \rightarrow \frac{iq^2}{(\not{p} - m) + q^2(\not{p} - m)\Sigma_c}$$

in cui appare la carica e la massa rinormalizzate, e tutti i diagrammi one-particle irreducible convergenti all'interno di  $\Sigma_c$ .

**Propagatore del fotone.** Si risommano tutti i diagrammi one-particle reducible che correggono il propagatore del fotone

$$\text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

Come prima, le formule trovate al secondo ordine  $q_0^2$ , sono esatte per la somma di tutti gli ordini. Quindi

$$iD_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)}, \quad A(0) = 0$$

Ad ogni ordine non si ha rinormalizzazione additiva della massa del fotone. Inoltre

$$iq_0^2 D_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-iq^2 \eta_{\alpha\beta}}{k^2 + q^2 \Pi_c(k^2)}$$

Anche in questo caso si calcolano tutti i diagrammi nel termine  $\Pi_c$  all'ordine a cui si decide.

**Vertice elettromagnetico.** Per il vertice si aggiungono fotoni nel mezzo e i diagrammi sono one-particle irreducible. In modo esatto vale

$$-iq_0 \gamma^\mu \rightarrow -iq[\gamma^\mu + q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)]$$

Per calcolare un processo all'ordine  $n$  bisogna disegnare tutti i diagrammi scheletro con  $n$  vertici. Ogni diagramma contiene propagatori e linee esterne rinormalizzati all'ordine  $q^{2n}$ . Bisogna capire se tali diagrammi convergono.

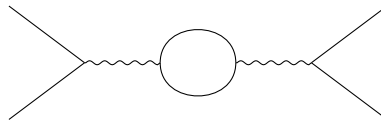
## Lezione 8

### 4.2 Diagrammi primitivamente divergenti

mar 05 dic  
2023 10:30

Si veda Peskin, cap. 10. Si studia la struttura di possibili nuove divergenze che appaiono agli ordini superiori.

Solo all'ordine  $q_0^2$ , la divergenza superficiale è una sovrastima della divergenza di un diagramma. Ad ordini superiori, questo non vale più. Ad esempio, il diagramma seguente ha una divergenza superficiale di  $D = -2$ , ma in verità diverge



In questo caso, il motivo è la presenza di un sotto-diagramma divergente, cioè la polarizzazione del vuoto. Un sotto-diagramma è un qualunque diagramma che si può ottenere da un altro diagramma tagliando un numero arbitrario di linee. Un altro esempio di grafico divergente, ma con grado superficiale negativo è il grafico dell'effetto Compton con la correzione di auto-energia la propagatore del fermione.

La separazione in base alla qualità di particle reducible ha permesso già uno studio della struttura delle divergenze. Si introducono i diagrammi primitivamente divergenti: un tale

diagramma non ha sotto-diagrammi divergenti e, tagliando una linea, diventa convergente. In questo caso, tagliare una linea significa che l'integrale di loop è risolto da una delta che equivale a considerare un momento fissato.

Risulta intuitivo che tutte le divergenze derivino da divergenze primitive. I tre diagrammi divergenti visti finora (polarizzazione, auto-energia e correzione al vertice) sono tutti primitivamente divergenti.

Il grado di divergenza superficiale è la differenza di potenze del momento a numeratore e denominatore

$$\omega = n - m$$

Se è positivo allora diverge, se negativo converge e se nullo diverge logaritmicamente. Si ha sempre un integrale del tipo

$$\int \frac{d^4 p}{I_F - 2I_B}$$

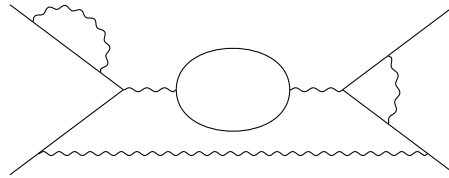
dove  $I$  indica il numero di linee interne che sono fermioniche  $F$  o bosoniche  $B$ . Ogni diagramma è composto da vertici  $V$ , linee interne  $I_F$  e  $I_B$ , linee esterne  $E_F$  e  $E_B$ . Le quantità dimensionali associate alle componenti precedenti non sono indipendenti perché ad ogni vertice si ha la conservazione del quadri-momento. Dunque, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4(I_F + I_B) - 4(V - 1) - I_F - 2I_B$$

Il primo addendo (la parentesi) rispecchia la misura che deriva da ogni integrale dei propagatori. Il secondo addendo corrisponde alla conservazione del quadri-momento ad ogni vertice, mentre il  $-1$  deriva dalla conservazione del momento totale, ma essa fissa linee esterne e non gli integrali. Infine, gli ultimi due addendi sono i denominatori dei propagatori  $(\not{p} - m)^{-1}$  e  $k^{-2}$ . Il numero di quantità dimensionali non fissate dalle delta interne è pari al numero di loop

$$N_L = I_B + I_F - (V - 1)$$

**Esempio.** Si consideri il seguente diagramma



Le linee interne fermioniche sono  $I_F = 8$ , quelle bosoniche sono  $I_B = 5$ . I vertici sono  $V = 10$ . Pertanto i loop sono 4. Si noti che il fotone inferiore è anch'esso parte di un loop.

Il numero di vertici che non emettono fotoni reali è

$$V - E_B = 2I_B$$

poiché essi sono collegati a due a due con linee fotoniche interne. Le linee fermioniche esterne sono pari. Una linea fermionica esterna tocca un solo vertice, mentre una linea fermionica interna tocca due vertici. Quindi

$$E_F = V, \quad 2I_F = V \implies 2I_F + E_F = 2V \implies I_F = V - \frac{1}{2}E_F$$



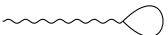


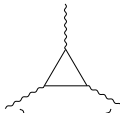
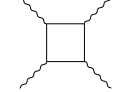
Dunque, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4 \left[ \frac{3}{2}V - \frac{1}{2}E_B - \frac{1}{2}E_F \right] - 4(V - 1) - V + \frac{1}{2}E_F - V + E_B = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F$$

Per i grafici primitivamente divergenti, il grado superficiale non dipende dal numero di vertici né dal numero di linee interne. Inoltre, tutti i diagrammi che rappresentano processi due a due ( $2 \rightarrow 2$ ) sono convergenti  $\omega = -1$ .

Questa topologia vale per l'elettrodinamica quantistica. Per l'elettrodinamica scalare la topologia è diversa poiché un tipo di vertice è il diagramma seagull.

**Riassunto.** I diagrammi primitivamente divergenti sono

$E_B$	$E_F$	$\omega$	Diagramma	$E_B$	$E_F$	$\omega$	Diagramma
0	0	4		0	2	1	
1	0	3		1	2	0	
2	0	2					
3	0	1					
4	0	0					

Il primo diagramma divergente, ma non primitivamente ed è un esempio senza linee esterne: esso fornisce una correzione infinita all'energia del vuoto e non ce ne si occupa. Tale diagramma non si può ignorare in relatività generale poiché una densità di energia infinita del vuoto ha un effetto fondamentale. Il secondo diagramma è il tadpole che è nullo per il teorema di Furry. In ogni caso, per il teorema di Wick tale termine non si può ottenere poiché non si fanno contrazioni all'interno di un prodotto normale. Il quarto diagramma è nullo per il teorema di Furry. Il quinto diagramma è il diagramma luce-luce e la sua divergenza superficiale è logaritmica; successivamente si mostra essere convergente per invarianza di gauge.

Nella seconda tabella, dove si hanno linee esterne fermioniche, aumentando il numero di linee esterne, i diagrammi convergono sempre di più e non si hanno nuove divergenze. I diagrammi sopra sono divergenti ed essi ridefiniscono i parametri bare della lagrangiana libera. Pertanto, il dubbio se agli ordini superiori il diagramma scheletro — che consiste nel porre le correzioni dentro i parametri fisici ed utilizzare i propagatori rinormalizzati con carica e massa fisiche — potesse portare a nuove divergenze è risolto, poiché i diagrammi sopra sono gli unici diagrammi divergenti. Le uniche quantità divergenti sono le costanti di rinormalizzazione  $Z_i$  e la rinormalizzazione additiva della massa  $\delta m$ .

Per la teoria di Fermi la situazione è diversa in quanto il grado di divergenza superficiale contiene anche il numero di linee interne, quindi ad ogni ordine superiore la divergenza peggiora.

Il procedimento da seguire è partire da un diagramma a qualsiasi ordine, rimuovere le correzioni delle due tabelle sopra, cioè i diagrammi primitivamente divergenti. Lo scheletro di tale diagramma può convergere o divergere. Se converge si introducono nuovamente le correzioni senza problemi. Se diverge, allora è primitivamente divergente. Infatti, se così non fosse, allora tagliando le linee si arriva ad un diagramma convergente e il diagramma precedente è primitivamente divergente, ma avendo tolto tutte le correzioni sopra (cioè i diagrammi primitivamente divergenti), questo diagramma non potrebbe essere primitivamente divergente: si è arrivati ad una contraddizione. Pertanto, tutte le divergenze possono solamente provenire dai diagrammi primitivamente divergenti sopra.

La procedura di rinormalizzazione si riduce allo studio del terzo diagramma di sinistra e dei due di destra. Sebbene i diagrammi one-particle irreducible non aggiungano divergenze, bisogna comunque calcolarli ad un dato ordine dello sviluppo.

**Diagramma luce-luce.** Si consideri il diagramma luce-luce. La sua convergenza segue la stessa argomentazione vista per la funzione di polarizzazione del vuoto  $\Pi(k^2)$ . L'elemento di matrice di scattering è

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_i N_i \mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \varepsilon^{\mu_1} \varepsilon^{\mu_2} \varepsilon^{\mu_3} \varepsilon^{\mu_4}$$

La trasformazione di gauge non deve cambiare l'ampiezza di Feynman, altrimenti la sezione d'urto dipenderebbe dalla scelta di gauge. La relazione di invarianza di gauge del primo fotone

svilupata attorno ad un momento piccolo è

$$(k_1)_{\mu_1} \mathcal{M}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = 0$$

e così per gli altri. L'ampiezza di Feynman è data da

$$\mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = A \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} + \dots$$

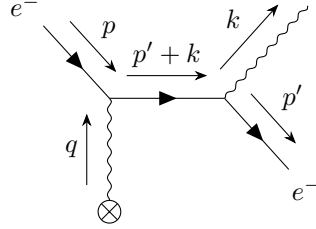
dove  $A$  è una quantità dimensionale ed i puntini indicano tutte le combinazioni possibili della metrica. Applicando l'invarianza di gauge si ha

$$0 = (k_1)_{\mu_1} \mathcal{M}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = A k_1^{\mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} + (\propto k^2) \implies A = 0$$

Il termine  $A$  dev'essere nullo, mentre i termini superiori sono nulli perché si hanno fotoni reali  $k^2 = 0$ . Lo sviluppo dell'ampiezza parte con la derivata prima e così si ha una potenza in più al denominatore: il diagramma converge.

## 5 Divergenza infrarossa

Si è vista una divergenza infrarossa quando si è studiata la bremsstrahlung. Si studiano i grafici da cui può scaturire una divergenza. Si consideri l'emissione di un fotone



La sezione d'urto differenziale nell'approssimazione di fotone soffre è

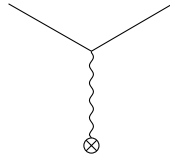
$$d_{\Omega} \sigma = d_{\Omega} \sigma|_{\text{elas}} dP, \quad dP = -\frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3 k}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ \frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \sim \ln \omega$$

Essa diverge nell'infrarosso. Tuttavia, non si stanno considerando tutti i diagrammi dell'ordine di quello sopra, come ad esempio la correzione al vertice. Questi, nel limite in cui il fotone virtuale abbia momento on-shell  $q^2 = 0$ , potrebbe finire sul polo del propagatore del fotone e cancellare la divergenza. La regolarizzazione infrarossa viene fatta dando una piccola massa al fotone

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^2}$$

In precedenza, si è introdotto il concetto di sensibilità dell'apparato di misura dei fotoni. L'urto elastico sperimentale è l'insieme dell'urto elastico e di emissione di un fotone con energia  $\omega < \omega_{\text{riv}}$ . L'urto inelastico sperimentale è l'emissione di un fotone con energia  $\omega \geq \omega_{\text{riv}}$ . In questo caso la divergenza si trova nell'urto elastico sperimentale.

Bisogna considerare tutti i diagrammi che danno contributo ad un certo ordine della teoria delle perturbazioni. Al diagramma elastico



si aggiungono i diagrammi di correzione per ottenere un'ampiezza di Feynman pari a

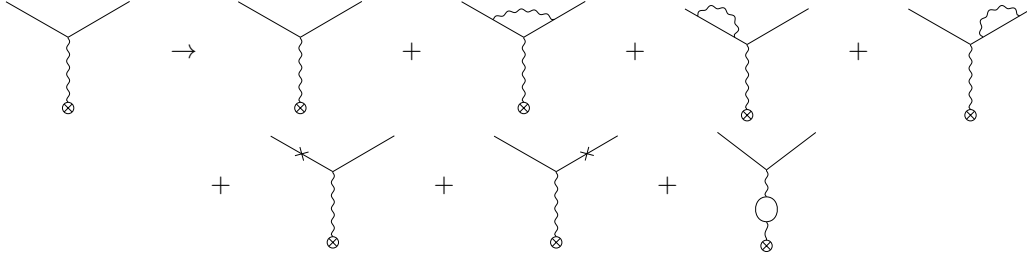
$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{elas}}|^2 (1 + \alpha V)$$

dove  $\alpha$  è una costante, mentre  $V$  è il contributo dei grafici virtuali, cioè non presentano un fotone reale.

Come per la divergenza ultravioletta, si osservano un diagramma isolando i termini divergenti. Si studiano gli stessi diagrammi cercando l'origine della divergenza infrarossa.



**Correzioni virtuali.** Le correzioni virtuali all'interazione con un campo esterno sono



La sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d\Omega\sigma|_{\text{exp}} = d\Omega\sigma|_{\text{elas}}(1 + \alpha B + \beta R)$$

dove  $B$  sono le correzioni reali dovute alla bremsstrahlung con energia minore di quelle del rivelatore, mentre  $R$  sono le correzioni radiative, cioè i diagrammi sopra. Le rinormalizzazioni delle linee esterne (diagramma tre, quattro, cinque e sei) portano solo a correzioni divergenti nell'ultravioletto  $Z_2$  e non hanno correzioni finite (cioè  $\Sigma_c$ ). Pertanto, tali termini non sono i responsabili della divergenza infrarossa. Dunque, bisogna considerare solo due diagrammi (diagramma due e sette): i loro termini finiti (nell'ultravioletto),  $\Lambda_c$  e  $\Pi_c$ , potrebbero avere una divergenza infrarossa.

L'ampiezza di Feynman per tali due correzioni è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + iD_{\mu\nu}(k)iq_0^2\Pi^{\nu\rho}(k)] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + q_0^2 D_{\mu\nu}(k)\eta^{\nu\rho} A(k^2)] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + q_0^2 D_{\mu\nu}(k)\eta^{\nu\rho}(k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2))] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[ \delta_\mu^\rho - q_0^2 \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A'(0) + \Pi_c(k^2) \right) \right] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[ 1 - q_0^2 \left( \frac{1}{2} A'(0) + \Pi_c(k^2) \right) \right] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) \right] [1 - q_0^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} [\gamma^\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] \sqrt{Z_3} [1 - q_0^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) [\gamma^\mu + q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \gamma^\mu A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \gamma^\mu [-q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \\ &\quad + (-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') [q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \end{aligned}$$

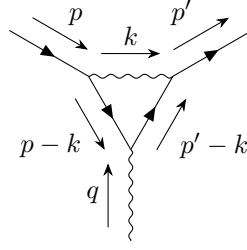
Si noti che l'ampiezza si scrive per un diagramma a cui si aggiunge ogni modifica, e non come somma di tre diagrammi uno con una sola modifica ciascuno. La parentesi quadra deriva dalla polarizzazione del vuoto.

Per trovare una divergenza si rimuovono prima i termini di sicuro convergenti. Dalla polarizzazione del vuoto, si ricorda valere  $\Pi_c(0) = 0$ , pertanto tale termine non può contribuire alla divergenza infrarossa. Rimane solamente il termine  $\Lambda_c^\mu$ : il vertice potrebbe finire sul polo del propagatore del fotone.

## Lezione 9

Si studia il diagramma della correzione al vertice

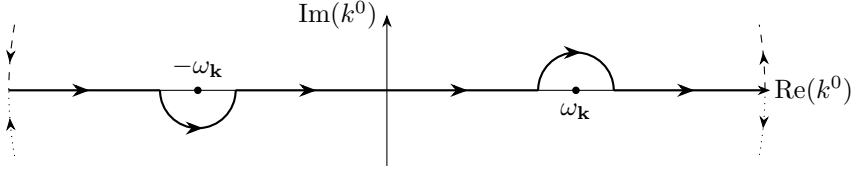
lun 11 dic  
2023 10:30



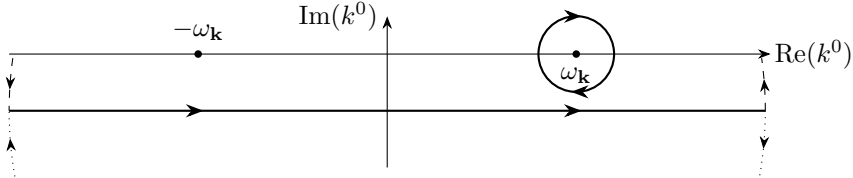
da cui la funzione di correzione al vertice è

$$-iq^3 \Lambda^\mu(p', p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iq) \gamma_\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} (-iq) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \gamma^\alpha \frac{-i}{k^2 - \lambda^2}$$

si utilizza propagatori e vertici rinormalizzati, dunque si utilizzano i parametri fisici  $q$  ed  $m$ . La divergenza deriva dall'ultimo propagatore nel limite  $\lambda \rightarrow 0$  della massa del fotone. Il propagatore utilizza la prescrizione, il cammino di Feynman. Quando si fa un integrale su un certo cammino, si possono avere due tipi di singolarità: end-point e pinch. La prima è una singolarità che si trova all'estremo del cammino di interazione, la seconda considera due poli che si avvicinano e incontrano il cammino. Questo secondo tipo riguarda il caso presente. Infatti, per  $\lambda \rightarrow 0$  si ha  $\omega_{\mathbf{k}} \rightarrow |\mathbf{k}|$  che tende a zero nel limite infrarosso.



Al posto della prescrizione dei Feynman, si può scegliere una qualsiasi prescrizione che fornisca lo stesso propagatore causale. Si considera una retta  $R$  parallela all'asse reale ed un cerchio  $C$  orientato in senso orario attorno al polo  $\omega_{\mathbf{k}}$ .



Si calcola un integrale del tipo

$$D(k) = \int_{\gamma} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\eta}{k^2 - \lambda^2} e^{-ik^\mu x_\mu} = \int_{\gamma} d^4 k f(k)$$

Per  $\text{Im } k_0 > 0$  si chiude la retta  $R$  da sotto. Tale cammino non circonda poli e l'integrale associato  $I_1$  è nullo. Il secondo cammino fornisce

$$I_2 = -2\pi i \text{Res } f(\omega_{\mathbf{k}})$$

Per  $\text{Im } k_0 < 0$  si chiude da sopra e si ha

$$I_1 = 2\pi i [\text{Res } f(\omega_{\mathbf{k}}) + \text{Res } f(-\omega_{\mathbf{k}})], \quad I_2 = -2\pi i \text{Res } f(\omega_{\mathbf{k}})$$

da cui il contributo totale è

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \text{Res } f(-\omega_{\mathbf{k}})$$

Pertanto, questa altra prescrizione è equivalente a quella di Feynman.

Nel limite  $\lambda \rightarrow 0$ , i due poli si avvicinano e si ha una singolarità di pinch sul cerchio  $C$ . Per fare l'integrale in  $k_0$  bisogna utilizzare il teorema dei residui con un cammino simile al cammino  $C$ . Dunque, la funzione di correzione al vertice divergente nell'infrarosso è

$$\Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} dk_0 \gamma_\alpha \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{2p'k} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{2pk} \gamma^\alpha \frac{1}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

dove si sono razionalizzati i propagatori dei fermioni — applicando già il limite  $k^2 \rightarrow 0$  poiché il denominatore è regolare e ricordando che  $p^2 = m^2$  è il momento di una particella sul mass shell — e si è riscritto il denominatore del propagatore del fotone come

$$k^2 - \lambda^2 = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - \lambda^2 = k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 = (k_0 + \omega_{\mathbf{k}})(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})$$

Considerando le relazioni

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad p^2 = m^2, \quad k^2, k \rightarrow 0$$

e ricordando che la funzione di correzione al vertice si trova tra due spinori  $\bar{u}(\mathbf{p}')\Lambda_\mu(p', p)u(\mathbf{p})$ , il numeratore del primo propagatore si può riscrivere come

$$\gamma_\alpha(\not{p}' + m) = \gamma_\alpha m + \gamma_\alpha \gamma_\mu p'^\mu = \gamma_\alpha m + 2\eta_{\mu\alpha} p'^\mu - \not{p}' \gamma_\alpha = (-\not{p}' + m)\gamma_\alpha + 2p'_\alpha$$

in modo che, applicando l'equazione di Dirac a  $\bar{u}(\mathbf{p})$ , rimanga solamente  $2p'_\alpha$ . Lo stesso vale per il secondo propagatore con  $u(\mathbf{p})$ . Dunque

$$\Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p) = -i\gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} dk_0 \frac{p'_\alpha p^\alpha}{(p'k)(pk)} \frac{1}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

Integrando attorno al cerchio  $C$  e utilizzando il teorema dei residui, si ha

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})} \right]_{\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \implies I_2 = -\frac{2\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p) &= -i\gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{(-2\pi i)}{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{pp'}{(p'k)(pk)}, \quad \alpha = \frac{q^2}{4\pi} \\ &= -\frac{1}{2q^2} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{2pp'}{(p'k)(pk)} \equiv \frac{1}{q^2} \gamma^\mu A(p', p) \end{aligned}$$

Ricordandosi le manipolazioni della funzione  $\Lambda^\mu$  quando si sono studiate le divergenze ultraviolette, si riscrive

$$q^2 \Lambda_c^\mu(p', p) = q^2 [\Lambda^\mu(p', p) - L\gamma^\mu]$$

La costante  $L$  è divergente nell'ultravioletto e vale

$$L\gamma^\mu = \Lambda^\mu(P, P), \quad P^2 = m^2$$

Scegliendo  $P = p', p$  si ottiene

$$q^2 L_{\text{IR div}}(p', p)\gamma^\mu = \frac{1}{2} q^2 [\Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p') + \Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p, p)] = \frac{1}{2} [A(p', p') + A(p, p)]\gamma^\mu$$

Dunque, la parte finita della funzione  $\Lambda$  divergente nell'infrarosso è

$$\begin{aligned} q^2 \Lambda_{c, \text{IR div}}^\mu &= [A(p', p) - q^2 L_{\text{IR div}}]\gamma^\mu \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\mu [2A(p', p) - A(p, p) - A(p', p')] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ \frac{4pp'}{(p'k)(pk)} - \frac{2p^2}{(pk)^2} - \frac{2(p')^2}{(p'k)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ \frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 = \frac{1}{2} \alpha \gamma^\mu R \end{aligned}$$

Questa è la parte di correzioni radiative. Pertanto, il termine dell'ampiezza di Feynman per l'urto elastico sperimentale divergente nell'infrarosso calcolato all'inizio risulta essere

$$\mathcal{M}_{\text{IR div}} = A_\mu^R \bar{u}(\mathbf{p}')(-iq)\gamma^\mu \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} R \right] u(\mathbf{p})$$

dove

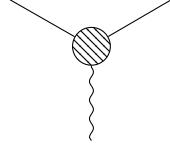
$$A_\mu^R(\mathbf{k}) = [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) + o(q_0^2)$$

La sezione d'urto è proporzionale al modulo quadro

$$|\mathcal{M}_{\text{IR div}}|^2 \propto 1 + \alpha R + o(\alpha)$$

Da questo risulta che  $\int dP = \alpha B = -\alpha R$ : la divergenza infrarossa si cancella. Quando si considerano tutti i termini ad un particolare ordine, il processo non ha divergenze infrarosse.

Per l'elettrodinamica quantistica, il teorema di Bloch–Nordsieck garantisce che le divergenze infrarosse si cancellano a tutti gli ordini. Per qualunque diagramma del tipo



la cancellazione delle divergenze avviene per emissione di un fotone reale da una linea esterna e scambio di un fotone virtuale interno.

Per la divergenza ultravioletta, si può utilizzare l'argomentazione qualitativa di tagliare le linee fino a trovare diagrammi primitivamente divergenti, oppure sapere che i teoremi di Bogoliubov–Parasyuk, Hepp e Zimmermann garantiscono che le divergenze ultraviolette derivano dai tre grafici primitivamente divergenti che si sono studiati (v. Weinberg, vol. 1).

**Conclusioni.** Si è ottenuta ad una teoria quantistica relativistica dei campi per l'interazione elettromagnetica. La teoria è perfettamente definita con una trattazione robusta di regolarizzazione dimensionale che non rompe la simmetria di gauge.

## 6 Teorema di Furry

Per dimostrare il teorema di Furry si utilizza l'operatore di coniugazione di carica per la teoria di Dirac.

**Coniugazione di carica.** Si veda Bjorken, §5.2. Si ritorna all'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico

$$(i\partial - qA - m)\psi = 0$$

L'equazione per l'anti-particella è

$$(i\partial + qA - m)\psi_c = 0$$

dove  $\psi_c$  è la funzione d'onda coniugata di carica. Si studia il suo legame con la funzione d'onda  $\psi$ . Notando

$$(i\partial)^* = -i\partial, \quad A_\mu = A_\mu^*$$

si coniuga l'equazione di Dirac per una particella

$$[(i\partial_\mu + qA_\mu)(\gamma^\mu)^* + m]\psi^* = 0$$

Si cerca un operatore  $C\gamma_0$  tale per cui

$$(C\gamma_0)\gamma_\mu^*(C\gamma_0)^{-1} = -\gamma_\mu$$

così da ottenere l'operatore per la funzione d'onda coniugata. Applicando l'operatore alla sinistra dell'equazione sopra si ottiene

$$C\gamma_0[(i\partial_\mu + qA_\mu)(\gamma^\mu)^* + m](C\gamma_0)^{-1}(C\gamma_0)\psi^* = 0 \implies [i\partial + qA - m]C\gamma_0\psi^* = 0$$

Per confronto, si ha

$$C\gamma_0\psi^* = C\bar{\psi}^\top = \psi_c$$

Ricordando

$$\gamma_0 \gamma_\mu^* \gamma_0 = \gamma_\mu^\top$$

dalla definizione di  $C\gamma_0$  si ottiene

$$-\gamma_\mu = C\gamma_0 \gamma_\mu^* \gamma_0 C^{-1} = C\gamma_\mu^\top C^{-1} \implies C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^\top$$

Sapendo che le matrici di Dirac soddisfano

$$\gamma_{0,2}^\top = \gamma_{0,2}, \quad \gamma_{1,3}^\top = -\gamma_{1,3}$$

dalla relazione sopra l'operatore di coniugazione di carica  $C$  commuta con  $\gamma_{1,3}$  e anti-commuta con  $\gamma_{0,2}$ . Pertanto

$$C = i\gamma_2 \gamma_0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^\top$$

ricordando che la base dello spazio di Dirac sono le sedici matrici indipendenti che costituiscono i covarianti bilineari.

**Esempio.** Si consideri una soluzione ad energia negativa per una particella a riposo con massa  $m$

$$\psi^4 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt}$$

Si applica l'operatore di coniugazione di carica

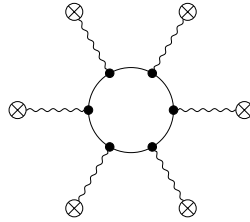
$$\psi_c = C\bar{\psi}^\top = C\gamma_0 \psi^* = i\gamma_2 \psi^* = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-imt} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$

si ottiene una soluzione ad energia positiva.

**Simmetria.** Potendo passare da una funzione d'onda alla sua carica coniugata, implica che la fisica di una particella di carica  $q$  in un campo elettromagnetico  $A_\mu$  è la stessa di quella di una particella di carica  $-q$  in un campo elettromagnetico  $-A_\mu$ . La corrente di Dirac è

$$J_\mu = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

**Teorema di Furry.** Si consideri un diagramma con un loop ad  $n$  lati



Esso vale

$$L = \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \langle 0 | \mathcal{T} \{ J^{\mu_1}(x_1) \cdots J^{\mu_n}(x_n) \} | 0 \rangle A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n)$$

Gli unici termini non nulli sono le contrazioni cioè i propagatori fermionici tra due punti adiacenti. Applicando l'operatore coniugazione di carica  $\mathcal{C}$  per i campi (v. §15.12), la corrente ed il vuoto si comportano come

$$\mathcal{C} J^\mu \mathcal{C}^{-1} = -J^\mu, \quad \mathcal{C} |0\rangle = |0\rangle$$

Si inserisce  $I = \mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}$  tra ogni corrente e, per la relazione sopra, si ottiene  $(-1)^n$ . Per  $n$  dispari il loop è nullo.

## Lezione 10

Da questa lezione in avanti gli appunti sono in ordine diverso rispetto alle lezioni: ho separato le parti dell'elettrodinamica e dell'interazione debole.

mar 12 dic  
2023 10:30

## 7 Regularizzazione dimensionale

Si veda Mandl, §10.3. Si studia la regularizzazione dimensionale visto che gli integrali in un numero minore di 4 dimensioni convergono. Inoltre si calcola analiticamente la parte finita della funzione di polarizzazione del vuoto.

Si consideri l'integrale

$$\pi(s) = \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^n}{s^{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3$$

dove si utilizza la funzione gamma di Eulero (detta anche integrale di Eulero di seconda specie)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$$

Essa soddisfa varie proprietà

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Per altri integrali, si veda Gradshteyn e Ryzhik, e Abramowitz e Stegun. La funzione gamma è singolare all'origine e la sua serie di Laurent<sup>4</sup> è

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma_E + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} + \gamma_E^2 \right) z + o(z)$$

dove  $\gamma_E$  è la costante di Eulero-Mascheroni.

Si consideri una numero di dimensioni  $D$ . L'integrale sopra diventa

$$\pi(s) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - s)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^n}{s^{n-D/2}}, \quad n > \frac{D}{2}$$

Per  $n = \frac{D}{2}$  l'integrale diverge logaritmicamente mentre la funzione gamma è singolare. Per valori non interi di  $D$ , il secondo membro è perfettamente definito ed è finito, pertanto lo si può utilizzare per definire l'integrale a primo membro nel caso di dimensioni non intere, in particolare per  $D = 4 - \varepsilon$ .

Le relazioni delle matrici di Dirac si possono generalizzare

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = D, \quad \gamma^0, \dots, \gamma^{D-1}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = DI, \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -(D-2)\gamma^\alpha$$

Interessa un numero  $D = 4 - \varepsilon$  dimensioni. Nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ritorna alla teoria originaria.

**Esempio.** Si consideri l'integrale

$$\pi(s) = \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s)^2}$$

Nella regularizzazione dimensionale si passa a  $4 - \varepsilon$  dimensioni

$$\pi(s) = \int \frac{d^{4-\varepsilon} k}{(k^2 - s)^2} = i\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{\Gamma(2)} \frac{1}{s^{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

La divergenza nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  proviene dalla funzione gamma a numeratore

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + o(1)$$

<sup>4</sup>Si veda <https://math.stackexchange.com/q/1287555>.

Inoltre, sapendo che

$$s^{\pm \frac{\varepsilon}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon \ln s + o(\varepsilon)$$

si espande l'integrale fino all'ordine  $\varepsilon^0$  per avere

$$\pi(s) = \frac{2i\pi^2}{\varepsilon} - i\pi^2(\gamma_E + \ln s) + o(1)$$

cioè una parte divergente ed una finita. Questo calcolo è simile a quello seguente riguardante la polarizzazione del vuoto.

**Dimensioni di massa.** Bisogna porre attenzione alle dimensioni dei campi. Si calcolano le dimensioni in termini di potenze della massa nelle unità naturali. Per l'azione si ha

$$\dim S = 0, \quad S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} \right) [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$$

pertanto segue

$$D = 4 \implies \dim A^\mu = 1, \quad \dim \psi = \frac{3}{2}, \quad \dim m = 1, \quad \dim q = 0$$

In numero arbitrario di dimensioni, imponendo che l'azione sia uno scalare, si ha

$$\dim A^\mu = \frac{D-2}{2}, \quad \dim \psi = \frac{D-1}{2}, \quad \dim m = 1, \quad \dim q = \frac{4-D}{2}$$

Affinché la carica rimanga adimensionale, si opera la sostituzione

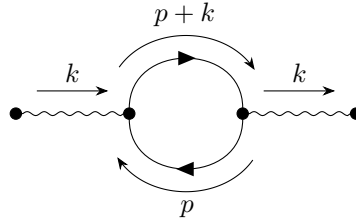
$$q \rightarrow \mu^{\frac{4-D}{2}} q = \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} q$$

dove  $\mu$  è una scala di massa.

**Polarizzazione del vuoto.** Si consideri la funzione di polarizzazione del vuoto

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2][p^2 - m_0^2]}$$

del seguente diagramma



Si ricorda che il prodotto di un numero dispari di matrici di Dirac ha traccia nulla e si utilizzano le seguenti identità

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = D\eta^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = D[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}]$$

Pertanto, il numeratore è

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(p, k) &= \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)] \\ &= D[(p+k)^\mu p^\nu + (p+k)^\nu p^\mu - p_\rho(p+k)^\rho \eta^{\mu\nu} + m_0^2 \eta^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

Si riscrive il denominatore utilizzando l'integrale

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}$$

infatti

$$\xi = (a-b)z + b, \quad d\xi = (a-b) dz \implies \int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{1}{a-b} = - \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \frac{1}{a-b} = \frac{1}{ab}$$

Pertanto

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m_0^2 + (k^2 + 2pk)z]^2}$$

Introducendo la variabile  $q^\mu = p^\mu + zk^\mu$ , si ha

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D q \frac{N^{\mu\nu}(q - kz, k)}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2}$$

Il numeratore diventa

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(q - kz, k) &= D\{[2q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu}] + [m_0^2 - k^2 z(1-z)]\eta^{\mu\nu} \\ &\quad + [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu})] + f(q)\} \end{aligned}$$

dove  $f(q)$  contiene termini lineari in  $q$  il cui integrale è nullo. Dunque, la funzione di polarizzazione del vuoto si scrive come

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} D \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z)$$

Si considerino i seguenti integrali

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(q^2 - s)^n} q^\mu q^\nu &= i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{\eta^{\mu\nu} (-1)^{n+1}}{s^{n-D/2-1}} \\ \int d^D q \frac{q^2}{(q^2 - s)^n} &= i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D(-1)^{n+1}}{s^{n-D/2-1}} \\ \int \frac{d^D q}{(q^2 - s)^n} &= i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^n}{s^{n-D/2}} \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu} &= \int d^D q \frac{2q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu}}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2} = -\frac{i\eta^{\mu\nu} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(1 - D/2)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} \frac{2-D}{2} \\ I_2^{\mu\nu} &= \int d^D q \frac{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]\eta^{\mu\nu}}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} [m_0^2 - k^2 z(1-z)]\eta^{\mu\nu}}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \Gamma(2 - D/2) \\ &= \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - D/2)\eta^{\mu\nu}}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} = \frac{i\eta^{\mu\nu} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(1 - D/2)(1 - D/2)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} = -I_1^{\mu\nu} \\ I_3^{\mu\nu} &= \int d^D q \frac{-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu})}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2} \\ &= -2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu}) \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - D/2)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \end{aligned}$$

Questo è anche in accordo con il fatto che il terzo addendo del numeratore è invariante di gauge: moltiplicando per  $k_\mu$  si ottiene, ma lo stesso non si può dire degli altri due addendi. La funzione di polarizzazione diventa

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu}) \mu^{D-4} \Pi(k^2)$$

dove si ha

$$\Pi(k^2) \equiv \frac{2\mu^{4-D} D \Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}}$$

L'invarianza di gauge è preservata dalla regolarizzazione dimensionale

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$$



Si studia l'origine della divergenza ultravioletta. Sia  $D = 4 - \varepsilon$  e ricordando

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + o(1), \quad 2 - \frac{D}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad s^{\pm \frac{\varepsilon}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon \ln s + o(\varepsilon)$$

si ottiene<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + o(1) \right] \int_0^1 dz z(1-z) \left[ 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \ln \frac{m_0^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} + o(\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right] - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \frac{m_0^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} + o(1) \end{aligned}$$

La divergenza ultravioletta si evidenzia nel primo addendo. Dall'espansione della funzione  $\Pi^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} A(k^2)$  si ha, per confronto con l'espressione sopra,

$$\Pi(k^2) = A'(0) + \Pi_c(k^2), \quad \Pi_c(0) = 0$$

dunque

$$\begin{aligned} \Pi_c(k^2) &= \Pi(k^2) - A'(0) = \Pi(k^2) - \Pi(0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \frac{m_0^2 - k^2 z(1-z)}{m_0^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m_0^2} \right] \end{aligned}$$

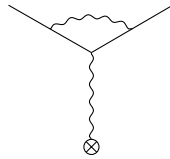
Nel limite di  $k^2 \rightarrow 0$  si ha

$$q_0^2 \Pi_c(k^2) \sim \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z^2(1-z)^2 \frac{k^2}{m_0^2} = \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m_0^2}$$

**Momento di dipolo magnetico anomalo.** Il vertice elettromagnetico fornisce anch'esso una correzione finita, ma è più complicato da calcolare. Esso porta una correzione al momento di dipolo magnetico. La parte finita del vertice corretto fornisce un termine (v. Mandl, §9.6.1)

$$-iq\bar{u}(\mathbf{p}') [q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] u(\mathbf{p}) A_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q}) = -iq\bar{u}(\mathbf{p}') \left[ \frac{i\alpha}{4\pi m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\mathbf{p}) A_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q})$$

dove  $A_\mu^{\text{cl}}$  è il campo esterno e  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{q}$



L'ampiezza di Feynman del vertice elettromagnetico (non corretto) si può riscrivere tramite l'identità di Gordon

$$-iq\bar{u}(\mathbf{p}') A_{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = -\frac{iq}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}') [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(\mathbf{p}) A_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q})$$

Da ciò è evidente che il processo di scattering di una particella su di un campo esterno ha due contributi: il primo è dato dal momento lineare, mentre il secondo coinvolge il commutatore delle matrici di Dirac  $\sigma^{\mu\nu}$ , le sue tre componenti spaziali sono gli operatori di spin  $\Sigma_k$ : si ha l'interazione tra il momento di dipolo magnetico di spin con il campo esterno. Il momento di dipolo magnetico di spin, il rapporto giromagnetico ed il fattore- $g$  sono (v. Peskin, §§6.2, 6.3)

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}, \quad \gamma = \frac{gq}{2m}, \quad g = 2$$

<sup>5</sup>Il risultato avrebbe anche l'addendo  $-\frac{1}{2}$  a seguire  $\ln 4\pi$ , tuttavia le quantità misurabili ne sono indipendenti e pertanto non lo si include. La derivazione corretta considera una funzione  $f(D)$  al posto del fattore  $D$  presente nelle varie relazioni sopra. Tale funzione vale  $f(4) = 4$  e pertanto quando si fa il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si considera  $f(4 - \varepsilon) = 4 - \varepsilon f'(4) + o(\varepsilon)$ . Se  $f(D) = D$  allora si ottiene  $f'(4) = 1$  da cui segue l'addendo precedente non incluso. Tuttavia, visto che  $f$  è arbitraria, la convenzione tipica è considerare  $f'(4) = 0$ .

Tramite la correzione del vertice, si ha

$$\gamma = \frac{q}{2m} \left( 2 + \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

Il momento di dipolo magnetico anomalo è

$$a = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Ad ordini maggiori, non si può considerare solamente l'elettrodinamica quantistica, ma bisogna introdurre anche le altre interazioni. Il reticolo è una regolarizzazione utile per le interazioni forti.

## Lezione 11

mer 13 dic  
2023 10:30

## Parte II

# Interazione debole

L'interazione debole si venne scoperta con il decadimento beta

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^-$$

dove  $A$  è il numero di massa e  $Z$  è il numero atomico, che coinvolge il decadimento del neutrone

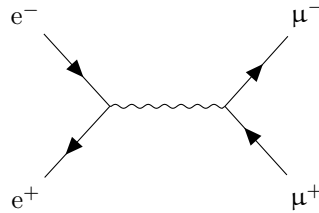
$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

Le particelle sono divise in adroni e leptoni. Gli adroni interagiscono in modo debole, forte ed elettromagnetico; si suddividono in mesoni — numero pari di quark, spin intero, bosoni — e barioni — un numero dispari di quark, spin semi-intero, fermioni. I leptoni sono divisi in tre famiglie: elettronica, muonica e tauonica. Ogni famiglia ha una particella carica ed una neutra cioè il neutrino associato. Le scale di massa sono molto diverse

$$m_e \approx 511 \text{ keV}, \quad m_\mu \approx 107 \text{ MeV}, \quad m_\tau \approx 1.777 \text{ GeV}$$

La stessa classificazione si ha per l'anti-materia. La teoria presenta la conservazione del numero leptonico e la conservazione del numero leptonico per ogni famiglia (conservazione del sapore). Alla materia si assegna un numero, mentre l'anti-materia ha il numero opposto.

La presenza di più famiglie influenza i tipi di diagrammi che si possono disegnare, ad esempio il seguente scattering Bhabha



è un processo a soglia poiché

$$(p_{e^+} + p_{e^-})^2 > 4m_\mu^2$$

Lo stesso vale per i tauoni e per i bosoni vettoriali  $W$ , mentre lo scattering  $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$  può avvenire sempre.

Nel decadimento del neutrone si conserva il numero leptonico  $L_e = 0$ . Tale numero non si conserva per le oscillazioni dei neutrini. Il neutrone libero decade con un tempo di vita medio<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Si noti che esistono due misure discordanti sulla vita media del neutrone:  $877.75^{+0.50}_{-0.44}$  s e  $(879.6 \pm 0.8)$  s.

$\tau \approx 878\text{s}$ , ma i neutroni nei nuclei stabili non decadono. Il decadimento è dato dall'effetto tunnel quando si ha possibilità di superare l'interazione forte.

La conservazione del numero leptonico si osserva nell'assenza di certe transizioni cinematicamente favorite, in particolare il doppio decadimento beta senza neutrini

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-$$

per tale decadimento si avrebbe

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \bar{\nu}_e + n \rightarrow p^+ + e^-$$

Esso sarebbe avvantaggio rispetto all'emissione di neutrini

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$$

ma non conserva il numero leptonico.

Inizialmente la presenza dell'anti-neutrino nel decadimento beta era ignota. Considerando tale decadimento come fosse a due corpi, il protone e l'elettrone si dividono l'energia in eccesso dal neutrone: l'energia dell'elettrone è fissata (v. Fisica Subnucleare). Gli esperimenti mostrano invece una distribuzione di energia nel grafico di Kurie. Da questo si comprese che il decadimento è a tre corpi. Si pensò ad una particella neutra, diversa dalla luce con una frazione della massa del protone: il neutrino.

Fermi propose un'interazione a quattro punti

$$\mathcal{H}_I = \sum_i \bar{\psi}_p \Gamma_i (C_H + C'_H \gamma_5) \gamma_\mu \psi_n \bar{\psi}_e \Gamma_i (B_L + B'_L \gamma_5) \gamma_\mu \psi_{\bar{\nu}}$$

dove H per hadron e L per lepton, mentre le matrici  $\Gamma_i$  sono i covarianti bilineari della teoria di Dirac (si esplicita la matrice  $\gamma_5$ , dunque non bisogna sommare i bilineari che la contengono). I quattro campi  $\psi$  sono calcolati tutti nello stesso punto. Inserire la matrice  $\gamma_5$  porta ad una possibile violazione della parità, visto che tale matrice porta a pseudo-scalari e pseudo-vettori. La verifica sperimentale è in accordo eccellente con questa teoria.

La costante di accoppiamento è la costante di Fermi

$$G_F m_N^2 = 10^{-5}$$

dove N indica un nucleone (protone o neutrone). Visto che la costante è così piccola, nella pratica nulla è misurato con precisione maggiore; tuttavia dal punto di vista teorico ci si pone il problema degli ordini superiori.

L'interazione debole è chiamata così perché meno intensa delle altre interazioni fondamentali. Questo lo si evince dai decadimenti dei pioni

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu, & \pi^\pm &\sim 10^{-8} \text{ s} \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma, & \pi^0 &\sim 10^{-16} \text{ s} \end{aligned}$$

L'elettromagnetismo è molto più forte dell'interazione debole. Questa osservazione è qualitativa: la vita media dipende molto anche dallo spazio delle fasi, oltre che dalla costante di accoppiamento di un'interazione.

Si fissano i parametri. Quelli adronici sono difficili da calcolare perché i nucleoni sono influenzati dalle interazioni forti. Quelli leptonici sono facilmente calcolabili. Molti esperimenti hanno indagato la distribuzione spaziale del protone, dell'elettrone e del neutrino nel decadimento beta. Ogni covariante bilineare fornisce un diverso spettro di Michel. Dagli esperimenti si evince che la parte leptonica ha parametri  $B_L = 1$  e  $B'_L = -1$ .

In questa teoria la parità non è conservata. Il proiettore di spin per fermioni di Dirac è

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Nel limite di massa nulla esso diventa

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

Il segno positivo per elicità positiva ed il segno negativo per elicità negativa. Nella teoria di Fermi, il neutrino non ha massa e dunque la sua elicità coincide con la chiralità e per il segno dei parametri leptonici sopra, può apparire solamente left-handed. L'espressione di quest'ultimo operatore definisce anche l'operatore di proiezione di chiralità<sup>7</sup>.

**Rottura di parità.** Si scoprirono due particelle,  $\theta$  e  $\tau$ , con massa, spin e vita media identici, ma decadono in due canali diversi

$$\theta^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0, \quad \tau \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$$

La parità è data dal momento angolare e dalla parità intrinseca. Per i due decadimenti, le parità sono  $(-1)^l$  e  $(-1)^{l+1}$ . Queste due particelle sono il kaone (o mesone K): il primo decadimento è forte, il secondo è debole e viola la parità.

Tramite l'esperimento di Madame Wu si evidenziò la rottura di parità tramite il decadimento

$$^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$$

in cui si misura lo spettro dell'elettrone. Il cobalto ha spin  $s = 5$  quindi facilmente polarizzabile con un campo magnetico. L'elettrone è espulso e si può rilevare, il neutrino esce, ma non viene rilevato, mentre il neutrone rimane nel nickel. Data un'emissione di un elettrone al di sopra del piano perpendicolare allo spin del cobalto (cioè verso la direzione dello spin), si può associare un evento al di sotto del piano a cui corrisponde tramite trasformazione di parità. Tuttavia, l'esperimento rivela un numero maggiore di eventi sopra il piano. Il numero di eventi elettronici è

$$N_e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}_e$$

dove  $\mathbf{p}_e$  è il momento dell'elettrone e  $\mathbf{B}$  è il campo magnetico che è uno pseudo-vettore: il numero di eventi è uno pseudo-scalare.

Le altre tre interazioni fondamentali conservano tutte la parità.

## 8 Teoria di Fermi

Si studiano le proprietà della teoria dell'interazione debole a quattro punti di Fermi. Diversamente dall'elettrodinamica quantistica, questa teoria non mantiene la parità e non è rinormalizzabile, ma è una teoria efficace.

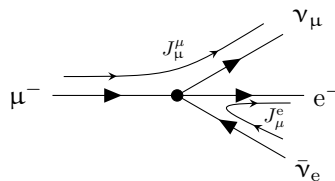
### 8.1 Decadimento del muone

Si veda Mandl, §16.6. Il decadimento del muone è un decadimento leptonico debole. Sebbene sia debole, si possono calcolare anche le correzioni dell'elettrodinamica quantistica poiché il muone è una particella carica.

Si integra la teoria a quattro punti di Fermi con i dati sperimentali riducendo i covarianti bilineari  $\Gamma_i$  solamente a due. Si accetta la violazione di parità. L'hamiltoniana di interazione è

$$H_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\mu] = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x J_\mu^e (J_\mu^\mu)^\dagger$$

Il cui diagramma è



<sup>7</sup>Tale operatore, applicato ad un campo, seleziona le componenti chirali right- e left-handed. Per particelle massive, tale operatore proietta stati che potrebbero non essere auto-stati dell'elicità. La chiralità è invariante di Lorentz, ma non è costante del moto. Viceversa, l'elicità non è invariante di Lorentz, ma è una costante del moto. Per particelle senza massa, chiralità ed elicità coincidono.

Il numero leptonico di ogni famiglia si conserva: numero muonico 1 e numero elettronico 0. Il secondo fattore si può interpretare come una corrente muonica, mentre il primo come una corrente elettronica.

Per calcolare l'ampiezza si utilizzano la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo e la regola d'oro di Fermi. Si scopre che la teoria delle perturbazioni porta ad un numero infinito di divergenze.

Per fermioni di massa nulla, la componente chirale left-handed è data dal proiettore di spin

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

Pertanto, il neutrino elettronico  $\psi_{\nu_e}$  ha chiralità left-handed (e la cui elicità ne è un buon stimatore). L'elettrone ed il muone possono avere qualunque elicità.

L'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned} \langle p_e, p_{\bar{\nu}_e}, p_{\nu_\mu} | H_I(t) | p_\mu \rangle &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \frac{m_e}{E_e} \frac{m_{\bar{\nu}}}{E_{\bar{\nu}}} \frac{m_\nu}{E_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{m_\mu}{E_\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \int d^3x \int dt \exp[-i(p_i - p_f)^\mu x_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}] [\bar{u}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu] \end{aligned}$$

dove  $p_i$  e  $p_f$  indicano i quadri-impulsi totali iniziale e finale. Per il decadimento beta del neutrone si deve sostituire l'ultima parentesi con

$$\bar{u}_p \gamma_\mu \left[ 1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5 \right] u_n$$

dove i parametri  $g_A$  e  $g_V$  sono i parametri  $C_H$  e  $C'_H$  che si ottengono empiricamente. Applicando la regola d'oro di Fermi, l'esponenziale fornisce una delta che, nel limite  $T, V \rightarrow \infty$ , porta ad un termine<sup>8</sup>

$$[\delta_{VT}(p_i - p_f)]^2 = VT(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)$$

nella densità di probabilità di transizione. Il tasso di transizione dalla regola d'oro di Fermi risulta essere

$$w = (2\pi) \delta(E_i - E_f) |\langle f | H_I | i \rangle|^2$$

Pertanto, il tasso di transizione differenziale nello spazio delle fasi è

$$dw = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \left[ \prod_f \frac{2m_f}{2E_f} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \right] \frac{2m_\mu}{2E_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} \frac{G_F^2}{2} |\mathcal{M}|^2$$

dove la somma sugli spin contiene sia gli spin iniziali (cioè quelli del muone che vanno mediati) sia gli spin finali (che sono solo sommati). Il tasso di transizione è il prodotto di vari invarianti relativistici per il rapporto tra la massa del muone e la sua energia. La vita media è

$$\frac{1}{w} = \tau \propto \frac{E_\mu}{m_\mu}$$

tale rapporto è pari al fattore  $\gamma$  di Lorentz.

La vita media del muone nel riferimento solidale è

$$\tau_\mu = 2.2 \mu\text{s}$$

I muoni prodotti dai raggi cosmici sono creati a 10 km di altitudine. Viaggiando vicino alla velocità della luce, un muone percorre 660 m nel proprio riferimento. Tuttavia, i muoni cosmici sono rilevati a terra. Infatti, il tempo di vita medio nel riferimento della Terra è maggiore e così un muone ha abbastanza tempo per arrivare al suolo.

## Lezione 12

 gio 14 dic  
2023 10:30

Si studia lo spettro dell'elettrone perché i neutrini interagiscono poco

$$(2\pi)^3 \frac{2E_e}{2m_e} \frac{dw}{d^3p_e} = \int \frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2E_{\bar{\nu}}(2\pi)^3} \frac{d^3p_{\nu}}{2E_{\nu}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) 2m_{\nu} 2m_{\bar{\nu}} \frac{2m_{\mu}}{2E_{\mu}} \frac{G_F^2}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2$$

dove si integra sulle variabili cinematiche dei neutrini perché non si osservano. Ricordando

$$|\bar{u}(f)\Gamma u(i)|^2 = [\bar{u}(f)\Gamma u(i)][\bar{u}(i)\bar{\Gamma} u(f)], \quad \bar{\Gamma} = \gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = & \sum_{r_1 r_2 r_3 r_4} \{(\bar{u}_e)_{\alpha}^{r_1} [\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\alpha\beta} (v_{\bar{\nu}})_{\beta}^{r_2} (\bar{v}_{\nu})_{\delta}^{r_2} [\gamma_{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\delta\theta} (u_e)_{\theta}^{r_1}\} \\ & \times \{(\bar{u}_{\nu})_{\eta}^{r_3} [\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\eta\sigma} (u_{\mu})_{\sigma}^{r_4} (\bar{u}_{\mu})_{\rho}^{r_4} [\gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\rho\chi} (u_{\nu})_{\chi}^{r_3}\} \end{aligned}$$

dove  $r_i$  sono indici di polarizzazione, mentre gli indici greci sono spinoriali. Nel calcolare il complesso coniugato di ogni fattore, si è fatto uso delle seguenti identità

$$\bar{\gamma}_{\mu} = \gamma_{\mu}, \quad \overline{(i\gamma_5)} = i\gamma_5, \quad \overline{(\gamma_{\mu}\gamma_5)} = \gamma_{\mu}\gamma_5$$

Esplicitati gli indici, si spostano gli spinori per ottenere i proiettori di energia

$$\sum_{r=1}^2 u_{\alpha}^r(\mathbf{p}) \bar{u}_{\beta}^r(\mathbf{p}) = \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta}, \quad \sum_{r=1}^2 v_{\alpha}^r(\mathbf{p}) \bar{v}_{\beta}^r(\mathbf{p}) = \left( \frac{\not{p} - m}{2m} \right)_{\alpha\beta}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = & [(2m_e)(2m_{\bar{\nu}})(2m_{\mu})(2m_{\nu})]^{-1} \{(\not{p}_e + m_e)_{\theta\alpha} [\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\alpha\beta} (\not{p}_{\bar{\nu}} - m_{\bar{\nu}})_{\beta\delta} [\gamma_{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\delta\theta}\} \\ & \times \{(\not{p}_{\nu} + m_{\nu})_{\chi\eta} [\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\eta\sigma} (\not{p}_{\mu} + m_{\mu})_{\sigma\rho} [\gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\rho\chi}\} \end{aligned}$$

I due fattori sono delle tracce. Nello spettro, le masse dei neutrini si semplificano. Si ipotizza

$$m_e = m_{\bar{\nu}} = m_{\nu} = 0, \quad \frac{m_e}{m_{\mu}} \approx \frac{1}{200}, \quad m_{\mu} \equiv m$$

quindi  $2m_e$  (v. definizione di tasso di transizione, Fisica Teorica I, §Sezione d'urto). Successivamente si vede la correzione dovuta alla massa dell'elettrone. Ci si pone nel riferimento solidale al muone: la sua energia è pari alla massa  $E_{\mu} = m_{\mu}$ . Lo spettro dell'elettrone diventa

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \frac{dw}{d^3p_e} = & \frac{G_F^2}{4} \frac{1}{2E_e 2m} \int \frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2E_{\bar{\nu}}} \frac{d^3p_{\nu}}{2E_{\nu}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(Q - p_{\nu} - p_{\bar{\nu}}) \\ & \times \text{Tr}[\not{p}_e \gamma_{\mu}(1 - \gamma_5) \not{p}_{\bar{\nu}} \gamma_{\nu}(1 - \gamma_5)] \text{Tr}[(\not{p}_{\mu} + m) \gamma^{\nu}(1 - \gamma_5) \not{p}_{\nu} \gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)] \end{aligned}$$

dove  $Q = p_{\mu} - p_e$ . Per la prima traccia si ha

$$\begin{aligned} T_1^{\mu\nu} = & \text{Tr}[\not{p}_e \gamma^{\mu}(1 - \gamma_5) \not{p}_{\bar{\nu}} \gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)] = 2 \text{Tr}[\not{p}_e \gamma^{\mu} \not{p}_{\bar{\nu}} \gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)] \\ = & 8[p_e^{\mu} p_{\bar{\nu}}^{\nu} - p_e p_{\bar{\nu}} \eta^{\mu\nu} + p_e^{\nu} p_{\bar{\nu}}^{\mu} + i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} (p_e)_{\alpha} (p_{\bar{\nu}})_{\beta}] = 8[A_1 - A_2 + A_3 + i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} (p_e)_{\alpha} (p_{\bar{\nu}})_{\beta}] \end{aligned}$$

alla seconda uguaglianza della prima riga si applica  $(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)$ , ricordando che la matrice  $\gamma_5$  anti-commuta con le matrici  $\gamma_{\mu}$ . Alla seconda riga si è utilizzato

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu}) &= 4(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}) \\ \text{Tr}(\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu} \gamma_5) &= -4i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Come già visto, il prodotto di due distribuzioni non è ben definito. Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/47934> e <https://mathoverflow.net/q/48067>. Così come Fisica Teorica I, §Processi in elettrodinamica quantistica.

La seconda traccia è

$$\begin{aligned} T_2^{\mu\nu} &= 2 \operatorname{Tr} [(\not{p}_\mu + m) \gamma^\nu \not{p}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] = 2 \operatorname{Tr} [\not{p}_\mu \gamma^\nu \not{p}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] + 2m \operatorname{Tr} [\gamma^\nu \not{p}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] \\ &= 8[p_\mu^\nu p_\nu^\mu - \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (p_\mu)_\alpha (p_\nu)_\beta] = 8[A'_1 - A'_2 + A'_3 + i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (p_\mu)_\alpha (p_\nu)_\beta] \end{aligned}$$

alla prima riga, l'ultimo addendo è nullo perché si ha una traccia di un numero dispari di matrici di Dirac e poiché

$$\operatorname{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^5) = 0$$

Dalle due tracce si può notare la simmetria di crossing? [r]: le due tracce sono identiche per scambio  $\mu \leftrightarrow \nu$  e  $\mathbf{v}_\mu \leftrightarrow \mathbf{v}_\nu$ .

I primi tre addendi costituiscono un termine simmetrico per lo scambio  $\mu \leftrightarrow \nu$ , dunque il prodotto con il tensore di Levi-Civita è nullo. Si svolgono i prodotti

$$\begin{aligned} (T_1)_{\mu\nu} T_2^{\mu\nu} &= 64\{A_1 A'_1 + A_1 A'_3 - A_1 A'_2 + A_3 A'_3 + A_3 A'_1 - A_2 A'_1 \\ &\quad - (A_2 A'_1 + A_2 A'_3) + A_2 A'_2 - \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\nu\theta\mu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + (p_e p_\mu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - (p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) \\ &\quad + (p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + (p_e p_\mu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - (p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) \\ &\quad - 2(p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) + 4(p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) - \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\nu\theta\mu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\nu\theta\mu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) + \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\eta\theta\mu\nu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - 2(p_e p_\mu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu)\} \\ &= 256(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) \end{aligned}$$

alla penultima riga si è utilizzato

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho)$$

Dunque, lo spettro dell'elettrone è

$$(2\pi)^3 \frac{dw}{d^3 p_e} = \frac{G_F^2}{4} \frac{1}{2E_e 2m} 256(p_e)_\sigma (p_\mu)_\sigma \int \frac{d^3 p_\nu d^3 p_{\bar{\nu}}}{2E_\nu 2E_{\bar{\nu}}} \frac{1}{(2\pi)^2} p_\nu^\rho p_{\bar{\nu}}^\sigma \delta^4(Q - p_\nu - p_{\bar{\nu}})$$

L'integrale è un tensore  $I^{\rho\sigma}$  di tipo 2. L'unica quantità cinematica è il momento  $Q$  perché il resto è integrato. La forma più generale di tale tensore è

$$I_{\mu\nu}(Q^2) = A \eta_{\mu\nu} Q^2 + Q_\mu Q_\nu B$$

dove  $A$  e  $B$  sono due costanti. Vale

$$I_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = I_\mu{}^\mu = (4A + B)Q^2, \quad I_{\mu\nu} Q^\mu Q^\nu = (A + B)Q^4$$

La cinematica del decadimento è

$$Q = p_\mu - p_e = p_\nu + p_{\bar{\nu}}$$

da cui

$$Q^2 = 2p_\nu p_{\bar{\nu}}, \quad p_\nu Q = p_\nu(p_\nu + p_{\bar{\nu}}) = p_\nu p_{\bar{\nu}} = \frac{1}{2}Q^2, \quad p_{\bar{\nu}} Q = \frac{1}{2}Q^2$$

Pertanto, applicando la prima relazione sopra all'espressione integrale, si ha

$$I_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}Q^2 I, \quad I \equiv \int \frac{d^3 p_\nu d^3 p_{\bar{\nu}}}{2E_\nu 2E_{\bar{\nu}}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(Q - p_\nu - p_{\bar{\nu}})$$

applicando le altre due, si ottiene

$$Q_\mu Q_\nu I^{\mu\nu} = \frac{1}{4}Q^4 I$$

Per confronto segue

$$\frac{1}{2}Q^2I = (4A + B)Q^2, \quad \frac{1}{4}Q^4I = (A + B)Q^4 \implies A = \frac{1}{12}I, \quad B = \frac{1}{6}I$$

Ci si pone nel riferimento solidale al centro di massa dei neutrini perché l'integrale è invariante relativistico. Si ha

$$Q = p_\nu + p_{\bar{\nu}} = (Q_0, \mathbf{0}), \quad \mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_{\bar{\nu}}, \quad E_\nu = E_{\bar{\nu}}$$

Dunque, l'integrale è

$$I = \int \frac{d^3p_\nu}{Q_0^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(Q_0 - 2E_\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{Q_0^2} \int 4\pi E_\nu^2 dE_\nu \delta(Q_0 - 2E_\nu) = \frac{4\pi}{(2\pi)^2 Q_0^2} \frac{Q_0^2}{4} \frac{1}{2} = \frac{1}{8\pi}$$

dove si ricorda che

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

con  $x_i$  le  $n$  radici della funzione  $f(x)$ .

### Lezione 13

Lo spettro dell'elettrone diventa

ven 15 dic  
2023 10:30

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \frac{dw}{d^3p_e} &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} (p_e)_\rho (p_\mu)_\sigma \left[ \eta^{\rho\sigma} \frac{Q^2}{2} + Q^\rho Q^\sigma \right] \\ &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} \left[ \frac{1}{2} (p_e p_\mu) (p_\mu - p_e)^2 + p_e^\rho (p_\mu - p_e)_\rho p_\mu^\sigma (p_\mu - p_e)_\sigma \right] \end{aligned}$$

Si introduce una variabile  $x$  tale per cui

$$E_e = \frac{m}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad m = m_\mu$$

cioè la frazione massima di energia che l'elettrone può avere: essa è acquisita quando entrambi i neutrini vanno in verso opposto all'elettrone. La minima energia è l'elettrone a riposo ed i neutrini che escono back-to-back. Ritornando al riferimento solidale al muone, si ha

$$p_e p_\mu = \frac{1}{2}m^2x$$

Pertanto, lo spettro dell'elettrone cioè il tasso di decadimento del muone per l'emissione di elettrone con momento in  $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + d^3p]$  è

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \frac{dw}{d^3p_e} &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} \left[ \frac{1}{2} \frac{m^2}{2} x (m^2 - m^2x) + \frac{m^2}{2} x \left( m^2 - \frac{m^2x}{2} \right) \right] \\ &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} \frac{m^4}{4} x (3 - 2x) = \frac{G_F^2}{12\pi m E_e} m^4 x (3 - 2x) \\ &= \frac{G_F^2}{6\pi} m^2 (3 - 2x) \end{aligned}$$

Si integra lo spettro dell'elettrone per trovare la probabilità di transizione. Sapendo

$$d^3p_e = 4\pi E_e^2 dE = 4\pi \frac{m^2 x^2}{4} \frac{m}{2} dx = \frac{\pi}{2} m^3 x^2 dx$$

si ottiene

$$d_x w = \frac{G_F^2}{6\pi} \frac{1}{8\pi^3} \frac{\pi}{2} m^5 x^2 (3 - 2x) = \frac{G_F^2}{96\pi^3} m^5 x^2 (3 - 2x)$$

dunque, il tasso di decadimento e la vita media (parziale) sono

$$w = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m^5, \quad \tau = \frac{1}{w}, \quad \dim \tau = T$$



Dal decadimento del muone si può ricavare il valore della costante di accoppiamento di Fermi:

$$\tau_\mu = 2.2 \mu\text{s}, \quad m_\mu = 105.7 \text{ MeV} \implies G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Questo risultato non è esatto perché esistono altri canali di decadimento ed sono presenti delle correzioni elettromagnetiche. Si introduce il rapporto di diramazione (branching ratio), cioè il rapporto della probabilità di decadimento in un certo canale rispetto alla probabilità totale di decadimento. Per questo decadimento si ha  $\text{BR} > 98.6\%$ .

**Universalità delle interazioni leptoniche.** Per il tauone, il calcolo è lo stesso, ma il branching ratio è diverso perché il suo spazio delle fasi è enorme: il decadimento leptonic è una frazione dei decadimenti totali (che includono anche decadimenti adronici).

Si consideri il decadimento

$$\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$$

Noto il branching ratio, si può ottenere la vita media a partire da quella parziale tramite

$$\tau_\tau = \text{BR}_{\tau \rightarrow e} \tau_\mu \left( \frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^5, \quad \text{BR} = 0.1782 \pm 0.0004, \quad m_\tau = (1776.86 \pm 0.12) \text{ MeV}$$

La vita media è

$$\tau_\tau^{\text{th}} = (2.920 \pm 0.007) \times 10^{-13} \text{ s}, \quad \tau_\tau^{\text{exp}} = (2.903 \pm 0.005) \times 10^{-13} \text{ s}$$

In questo caso, la teoria di Fermi è in accordo con l'esperimento.

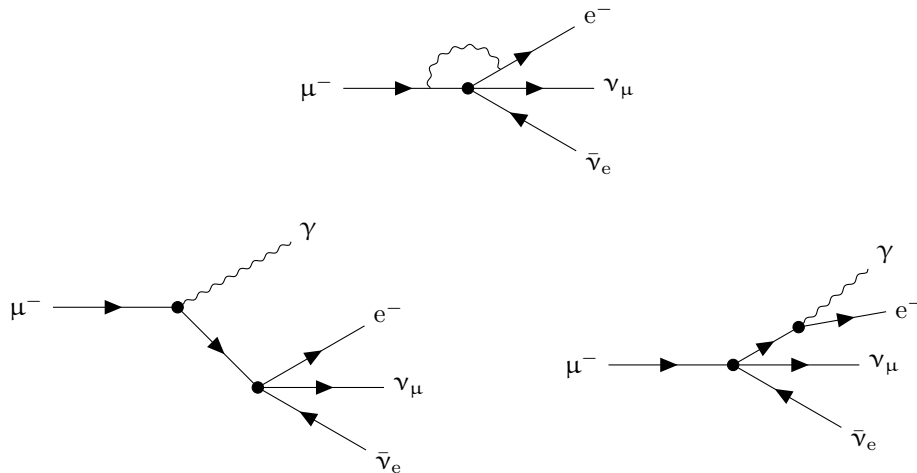
**Correzioni.** Aumentando la precisione degli esperimenti, si vedono anche le correzioni dovute all'elettromagnetismo poiché i leptoni sono particelle cariche. Le correzioni da aggiungere sono:

- massa non nulla dell'elettrone

$$w = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_\mu^5 [1 - 8y - 12y^2 \ln y + 8y^3 - y^4] = w_0 (1 - 1.87 \times 10^{-4}), \quad y = \left( \frac{m_e}{m_\mu} \right)^2$$

Per  $y = 0$  si ottiene il calcolo svolto. Per  $y = 1$  il tasso di transizione è nullo: non si ha spazio delle fasi.

- Le particelle sono cariche e dunque ricevono correzioni dall'elettrodinamica: è presente la correzione al vertice ed due correzioni dalla bremsstrahlung



Bisogna calcolare le correzioni, regolarizzare, rinormalizzare considerando anche le linee esterne. Pertanto si ottiene

$$w = w_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left( \pi^2 - \frac{25}{4} \right) \right] = w_0 \cdot 0.9958$$

[r] fonte?

**Dimensioni.** L'azione della teoria di Fermi è data schematicamente da

$$S \propto \int d^4x G_F (\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi)$$

pertanto, le dimensioni di massa sono

$$\dim A^\mu = 1, \quad \dim \psi = \frac{3}{2}, \quad \dim \varphi = 1$$

dove  $\varphi$  è un campo bosonico. La costante di accoppiamento deve avere dimensioni

$$\dim G_F = -2$$

Il tasso di transizione è l'inverso di un tempo, cioè una massa (in unità naturali). Le variabili dimensionali sono solamente la costante di Fermi ed una massa. Pertanto, l'analisi dimensionale fornisce correttamente

$$w \propto G_F^2 m^5$$

**Spettro dell'elettrone.** Lo spettro dell'elettrone, detto anche spettro di Michel, è ottenuto a partire da un'interazione del tipo  $(V - A)(V - A)$ , cioè vettoriale meno assiale,  $1 - \gamma_5$ . Esso è

$$d_x w \propto x^2 (3 - 2x)$$

Se si considerasse l'interazione  $(V - A)_e (V + A)_\mu$  si avrebbe uno spettro diverso

$$d_x w \propto x^2 (1 - x)$$

Tramite gli esperimenti si sono potuti escludere i vari spettri per arrivare solamente a quello precedente.

**Violazione di parità.** La violazione di parità non si può evincere dallo spettro perché si è mediata la polarizzazione iniziale del muone. Il calcolo per il muone polarizzato contiene un proiettore di spin al posto di quello di energia. Si ha

$$dw \propto x^2 [3 - 2x + \cos \theta (1 - 2x)] dx d(\cos \theta)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra lo spin dell'elettrone  $\mathbf{p}_e$  ed lo spin  $\mathbf{S}$  del muone.

Si considera la configurazione di massima energia dell'elettrone

$$E_e = |\mathbf{p}_e| = \frac{m}{2} \implies x = 1$$

dove  $m$  è la massa del muone, le altre sono nulle. Lo spettro diventa

$$dw \propto (1 - \cos \theta)$$

Nel caso di energia massima, l'elettrone ha un'energia pari a 53 MeV ed esso è ultra-relativistico: l'elicità è un buon stimatore della chiralità. Se  $\theta = 0$ , allora la configurazione è proibita, mentre  $\theta = \pi$  è la configurazione favorita. Questo coincide con i risultati dell'esperimento di Madame Wu. Si noti che il coseno

$$\cos \theta \propto \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{S}$$

è pseudo-scalare perché il momento è uno pseudo-vettore: la probabilità di transizione è proporzionale ad uno pseudo-scalare e da ciò si spiega la violazione di parità.

Nel caso  $\theta = 0$ , lo stato iniziale ha muone con spin up. L'elettrone è emesso in tale direzione. Visto che l'interazione considera particelle left-handed e l'elettrone è ultra-relativistico, allora la sua elicità è negativa. I neutrini sono entrambi emessi in verso opposto all'elettrone (perché la configurazione è quella di massima energia): il neutrino è left-handed con elicità negativa, l'anti-neutrino è right-handed con elicità positiva. Il momento angolare non si conserva:

$$S_f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = S_i$$

Per il caso  $\theta = \pi$ , lo stato finale è sottosopra rispetto al caso precedente ed il momento è conservato:

$$S_f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = S_i$$

**Derivazione del coseno.** Si vede come ottenere il coseno studiando la polarizzazione lungo un certo vettore. Nel riferimento solidale alla particella, si introduce il vettore

$$n^\mu = (0, \hat{n}), \quad n_\mu n^\mu = -1, \quad n^\mu p_\mu = 0$$

Si consideri il proiettore di spin lungo  $z$

$$\frac{1 + \sigma_z}{2}$$

Si ricordi

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{ij} = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k$$

con  $ijk$  ciclici. Pertanto, il proiettore diventa

$$\frac{1 + \sigma^{12}}{2} = \frac{1 - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 n_z}{2} = \frac{1 - \gamma_0 \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 + \gamma_5 \not{n} \gamma_0}{2}, \quad n^\mu = (0, 0, 0, n_z)$$

[r] manca un meno? v. Bjorken p. 34

In questo modo si è scritto un operatore relativisticamente invariante. Sapendo che

$$\gamma^0 w = \pm w$$

con  $w$  un vettore della base degli spinori, si definisce il proiettore di spin in una direzione arbitraria

$$\Pi(S) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{S}}{2}$$

valido in qualsiasi riferimento. Ad esempio, si ottiene

$$\Pi(n_z) w^1(0) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} w_1(0) = \frac{1 + \sigma_z}{2} w_1(0) = w_1(0)$$

alla seconda uguaglianza si è moltiplicato per  $\gamma_0 \gamma_0$ .

L'elemento di matrice per il muone polarizzato contiene

$$\text{Tr}[(\not{p}_\mu + m) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{p}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5)]$$

Questa traccia è il risultato della somma (e media) su tutti gli spin; inserendo il proiettore  $\Pi^+$  all'inizio della traccia, si seleziona la unica direzione di spin che si vuole considerare, da cui si ottiene  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$ .

**Questioni tecniche.** Vale

$$\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u = \frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5)^2 u = \frac{1}{2} \bar{u} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u$$

Dunque  $\bar{u}$  è right-handed e  $u$  è left-handed. Quando le particelle sono ultra-relativistiche, la loro elicità è essenzialmente positiva e negativa rispettivamente.

Ogni spinore si può decomporre in componenti chirali left-handed e right-handed

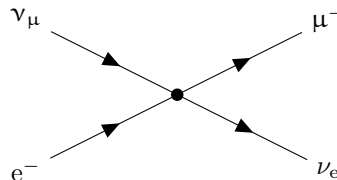
$$\psi = \frac{1}{2}[(1 + \gamma_5)\psi + (1 - \gamma_5)\psi]$$

## 8.2 Inverse muon decay

All'ordine albero, la teoria di Fermi è perfettamente definita. Si vedono le prime problematiche. Si studia l'inverse muon decay

$$e^- \nu_\mu \rightarrow \mu^- \nu_e$$

il cui diagramma corrispondente è



Si calcola la sezione d'urto. Grazie alla simmetria di crossing, l'ampiezza di Feynman è la stessa del decadimento del muone. La sezione d'urto differenziale è

$$d_{\Omega}\sigma = \frac{4}{\pi^2(E_{\nu_{\mu}} + E_e)^2} \frac{|\mathbf{p}_{\nu_e}|}{|\mathbf{p}_{\nu_{\mu}}|} (p_e p_{\nu_{\mu}})(p_{\nu_e} p_{\mu}) \frac{G_F^2}{4}$$

Ponendosi nel centro di massa e considerando i neutrini a massa nulla, si studia la cinematica utilizzando la variabile  $s$  di Mandelstam

$$(E_{\nu_{\mu}} + E_e)^2 = (p_{\nu_{\mu}} + p_e)^2 = s = (p_{\nu_e} + p_{\mu})^2 = (E_{\nu_e} + E_{\mu})^2$$

Dunque

$$s = (E_{\nu_{\mu}} + E_e)^2 = E_{\nu_{\mu}}^2 + 2E_{\nu_{\mu}}E_e + E_e^2$$

da cui si ha

$$s - m_e^2 = E_{\nu_{\mu}}^2 + 2E_{\nu_{\mu}}E_e + (E_e^2 - m_e^2) = 2E_{\nu_{\mu}}(E_{\nu_{\mu}} + E_e)$$

dove alla seconda uguaglianza si utilizza

$$E_e^2 - m_e^2 = p_e^2 = p_{\nu_{\mu}}^2 = E_{\nu_{\mu}}^2$$

Pertanto

$$E_{\nu_{\mu}} = \frac{s - m_e^2}{2(E_{\nu_{\mu}} + E_e)} = \frac{s - m_e^2}{2\sqrt{s}}$$

Similmente

$$s - m_{\mu}^2 = 2E_{\nu_e}(E_{\nu_e} + E_{\mu}) \implies E_{\nu_e} = \frac{s - m_{\mu}^2}{2(E_{\nu_e} + E_{\mu})} = \frac{s - m_{\mu}^2}{2\sqrt{s}}$$

Dalla variabile di Mandelstam si ha

$$s = p_{\nu_{\mu}}^2 + p_e^2 + 2p_e p_{\nu_{\mu}} = m_e^2 + 2p_e p_{\nu_{\mu}} \implies s - m_e^2 = 2p_e p_{\nu_{\mu}}$$

da cui segue

$$E_{\nu_{\mu}} = \frac{p_e p_{\nu_{\mu}}}{\sqrt{s}} = |\mathbf{p}_{\nu_{\mu}}|, \quad E_{\nu_e} = \frac{p_{\mu} p_{\nu_e}}{\sqrt{s}} = |\mathbf{p}_{\nu_e}|$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale è

$$d_{\Omega}\sigma = \frac{4}{\pi^2 s} \frac{p_{\mu} p_{\nu_e}}{p_e p_{\nu_{\mu}}} (p_e p_{\nu_{\mu}})(p_{\mu} p_{\nu_e}) \frac{G_F^2}{4} = \frac{G_F^2}{\pi^2 s} (p_{\mu} p_{\nu_e})^2 = \frac{G_F^2}{\pi^2} E_{\nu_e}^2 = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{(s - m_{\mu}^2)^2}{4s}$$

La sezione d'urto totale è

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4G_F^2}{\pi} E_{\nu_e}^2 = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - m_{\mu}^2)^2}{s}$$

Ad energie abbastanza alte da poter trascurare la massa del muone rispetto all'energia totale del centro di massa, la sezione d'urto diventa

$$\sigma \sim \frac{G_F^2 s}{\pi}$$

L'interazione forte non ancora descritta da una teoria di gauge fu concentrata sull'analiticità della matrice di scattering  $S$ . Esistono dei teoremi che ne garantiscono l'analiticità e l'unitarietà (legata alla conservazione della probabilità). Il teorema di Froissart afferma che se la matrice di scattering analitica ed unitaria, allora la sezione d'urto totale è limitata da<sup>9</sup>

$$\sigma_{\text{tot}} < c \ln^2 s, \quad s \rightarrow \infty$$

La teoria di Fermi non rispetta tale limite nonostante la sezione d'urto sia stata ottenuta per simmetria di crossing da una quantità corretta. Potrebbe darsi che il limite valga solo ad alte energie. Tuttavia, utilizzando lo sviluppo in onde parziali, in onda  $s$  il limite è ancora più stringente

$$\sigma < \frac{\pi}{p^2}$$

[r] fonte? Pertanto

$$s = 4p^2 \implies 4p^2 < \frac{2\pi}{G_F} \implies p < \sqrt{\frac{\pi}{2G_F}} \approx 390 \text{ GeV}$$

<sup>9</sup>Si veda Eden, Landshoff, Olive, Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, fine §1.4.

## Lezione 14

 lun 18 dic  
2023 10:30

**Scale di grandezza.** Si consideri la sezione d'urto totale. Nel riferimento del centro di massa, la prima variabile di Mandelstam è il quadrato dell'energia del centro di massa

$$s = (p_{\nu_\mu} + p_e)^2 = 2m_e E_{\nu_\mu}$$

La sezione d'urto è

$$\sigma \approx \frac{G_F^2}{\pi} 2m_e E_{\nu_\mu} \approx 2 \times 10^{-45} \text{ m}^2 \frac{E_{\nu_\mu}}{\text{GeV}}$$

ricordando che

$$\hbar c = 1.97 \times 10^{-16} \text{ GeV m}, \quad G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

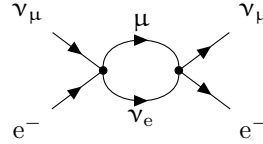
Si consideri la sezione d'urto di Thomson che descrive lo scattering di un fotone con un elettrone

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \approx 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2$$

cioè sedici ordini di grandezza di più grande.

### 8.3 Ordini superiori

Sebbene gli esperimenti non abbiano una risoluzione della costante di accoppiamento di Fermi, dal punto di vista teorico è lecito studiare gli ordini superiori. Un primo grafico all'ordine superiore è, ad esempio, uno scattering elastico



L'integrale nel momento  $k$  del loop diverge. I soli fattori di convergenza sono i propagatori dei fermioni per il muone ed il neutrino. Per questioni dimensionali, la divergenza nel cutoff è dell'ordine  $G_F \Lambda^2$ . Ad ogni ordine superiore, si ha una divergenza sempre maggiore data da  $G^n \Lambda^{2n-1}$  dove  $n$  è il numero di vertici: bisogna sempre introdurre nuovi contro-termini. Superficialmente, la teoria non appare regolarizzabile.

La lagrangiana di Fermi è del tipo

$$\mathcal{L}_F = G_F (\bar{\psi}\psi)^2$$

L'operatore rilevante, il quadrato della parentesi, ha dimensione 6. Per calcolare la divergenza superficiale si studia il vertice di Fermi. Si consideri il precedente diagramma. Ogni linea interna fermionica termina in due vertici

$$V = I_F$$

Il numero di linee fermioniche esterne è

$$E_F = 2V$$

Sommando le due, segue

$$I_F = 2V - \frac{E_F}{2}$$

Pertanto, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4I_F - 4(V - 1) - I_F = 3 \left[ 2V - \frac{E_F}{2} \right] - 4(V - 1) = 4 + 2V - \frac{3}{2}E_F$$

Alla prima uguaglianza, il secondo addendo corrisponde alle delta di conservazione del quadri-momento ad ogni vertice, ricordando che una conserva il quadri-momento totale. A differenza dell'elettrodinamica quantistica, il grado di divergenza superficiale dipende dal numero di vertici. A partire da un grafico iniziale, non si possono aggiungere arbitrariamente dei vertici. Ad ogni ordine bisogna inserire nuovi contro-termini per bilanciare la divergenza. Si sta considerando la divergenza superficiale e potrebbe darsi che esista una ragione per cui le divergenze si bilanciano. Tuttavia, la teoria si rivela non essere rinormalizzabile. L'origine di tale problema risiede nella costante di accoppiamento dimensionata.

**Decadimento del pione.** Si veda Bjorken, §10.14. Si consideri il pione  $\pi$ . Esso è un mesone di spin  $s = 0$  e compare in tre varietà  $\pi^\pm$  e  $\pi^0$ . I primi due decadono debolmente, mentre il terzo decade elettromagneticamente. Il suo decadimento è descritto dalla teoria di Fermi, ma non in modo semplice

$$\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$$


si noti la conservazione del numero leptonico. Compilate un problema. La corrente leptonica è

$$J_\mu = \bar{u}_l \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}_l}$$

Il pione è una particella composita, quindi il vertice non è noto perché una parte deriva dalla struttura del pione: si introduce un fattore di forma  $f_\pi$  (con dimensione di massa) da determinare sperimentalmente. I fatti sperimentali noti sono:

- il muone e l'anti-neutrino hanno elicità positiva, entrambi con chiralità left-handed [r];
- il rapporto tra i decadimenti in elettrone e muone sono

$$R \left( \frac{\pi \rightarrow e \bar{\nu}}{\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}} \right) = 1.3 \times 10^{-4}$$

Si consideri il decadimento elettronico. Visto che l'elettrone è più leggero del muone, ci si aspetterebbe che tale decadimento sia favorito rispetto a quello in muone. Dalla corrente leptonica (con qualche considerazione sull'operatore di chiralità, v. Bjorken p. 34), l'anti-neutrino e l'elettrone sono chirali left-handed. Trascurando la massa dell'elettrone rispetto a quella del pione, le particelle prodotte si dividono la massa del pione: l'elettrone è ultra-relativistico. La sua elicità è un buono stimatore della sua chiralità e dunque è negativa. L'anti-neutrino ha massa nulla e la sua elicità corrisponde all'opposto della chiralità ed è positiva. Lo spin delle due particelle puntano nella stessa direzione e non si sommano a zero: lo spin non si conserva. Per il canale muonico, il muone ha velocità minore dell'elettrone e dunque l'elicità può non coincidere con la chiralità left-handed e pertanto può avere elicità positiva, conservando lo spin.

Si consideri l'elettrone senza massa. L'elettrone ed il neutrino si dividono l'energia del pione. Si ha

$$E_e = \frac{m_\pi}{2} = \gamma m_e \implies 1 - \beta^2 = \left[ \frac{2m_e}{m_\pi} \right]^2 \approx 0 \implies \beta_e \approx 1$$

Si studia il muone. La sua massa non è trascurabile rispetto a quella del pione. Nel riferimento del centro di massa, il momento è

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad \mathbf{p}_{\bar{\nu}_\mu} + \mathbf{p}_\mu = 0, \quad |\mathbf{p}_{\bar{\nu}}| = |\mathbf{p}_\mu|$$

Dalla conservazione di energia si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{|\mathbf{p}_\mu|^2 + m_\mu^2} + |\mathbf{p}_{\bar{\nu}}| &= m_\pi \\ |\mathbf{p}_\mu|^2 + m_\mu^2 &= |\mathbf{p}_\pi|^2 + |\mathbf{p}_\mu|^2 - 2m_\pi |\mathbf{p}_\mu| \\ |\mathbf{p}_\mu| &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \end{aligned}$$

alla seconda equazione si utilizza l'uguaglianza tra i moduli dei momenti. Pertanto, l'energia del muone è

$$E_\mu = \sqrt{\left[ \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \right]^2 + m_\mu^2} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 1.04 m_\mu$$

Tutta l'energia del muone è l'energia di riposo ed esso non è relativistico.

Il tasso di transizione è

$$w = \frac{G_F^2 f_\pi^2}{8\pi} m_\pi^3 \left( \frac{m_l}{m_\pi} \right)^2 \left[ 1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right]^2$$

Il rapporto tra i tassi di transizione dei due decadimenti è

$$R = \left( \frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left[ \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right]^2 \approx (2.34 \times 10^{-5}) \cdot 5.5 \approx 1.23 \times 10^{-4}$$

La seconda parentesi deriva dallo spazio delle fasi che favorisce l'elettrone. La prima parentesi è la differenza in velocità tra l'elettrone ed il muone: il primo è ultra-relativistico e la sua elicità è quasi totalmente negativa.

## 9 Teoria di Proca–Yukawa

La lagrangiana di interazione è del tipo

$$\mathcal{L}_I = J_\mu J^\mu$$

che è simile a quella vista per l'elettrodinamica. A differenza di tale teoria, la corrente è carica e si accoppia con un bosone vettoriale carico. Infatti, se è presente un bosone mediatore  $W$ , allora esso dev'essere vettoriale perché  $J_\mu$  è un vettore cioè ha spin 1. Dato che  $J_\mu$  porta carica, allora pure il bosone  $W$ . Bisogna capire come ottenere un bosone vettoriale tramite una teoria di gauge.

### Lezione 15

La corrente debole di un leptone è

$$J_\mu = \bar{\psi}_l \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}$$

L'hamiltoniana di interazione è data da

$$\mathcal{H}_I = g_W J_\mu^\dagger W^\mu + \text{h.c.}$$

dove  $g_W$  è la costante di accoppiamento e  $W$  è una particella carica (per questo l'hermitiano coniugato) vettoriale massiva.

**Campo bosonico vettoriale.** La lagrangiana più generale per descrivere il bosone è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 W_\mu^\dagger W^\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

Le equazioni del moto di Eulero–Lagrange sono

$$\begin{aligned} \square W^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu W^\nu) + m^2 W^\mu &= 0 \\ \partial_\nu \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu W^\nu) + m^2 W^\mu &= 0 \\ \partial_\nu (\partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu) + m^2 W^\mu &= 0 \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 W^\mu &= 0 \end{aligned}$$

Il tensore di campo  $F^{\mu\nu}$  è invariante per trasformazione di gauge del campo  $W$ . Tuttavia, la lagrangiana e le equazioni del moto non sono invarianti di gauge a causa del termine di massa. In elettrodinamica quantistica, l'invarianza di gauge, massa nulla del fotone e rinormalizzabilità della teoria sono aspetti legati tra loro.

Notando che il tensore  $F^{\mu\nu}$  è anti-simmetrico, si ha

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 \partial_\mu W^\mu = 0 \implies 0 + m^2 \partial_\mu W^\mu = 0 \implies \partial_\mu W^\mu = 0$$

mar 19 dic  
2023 10:30

[r] calcoli

La lagrangiana non contiene la derivata temporale  $\dot{W}_0$ . Infatti

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 W^\mu = 0 \implies \partial_\nu F^{\nu 0} + m^2 W^0 = 0 \implies W^0 = -\frac{1}{m^2} \partial_\nu F^{\nu 0} = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}$$

[r] calcoli

La componente temporale è determinata, ne esistono solo tre indipendenti. Questo è in accordo con il fatto che una particella a spin 1 possa avere tre proiezioni  $\pm 1$  e 0 dello spin. L'espansione in onde parziali è

$$W^\mu = \sum_{k,r} \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} [\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) b_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}], \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$$

dove le polarizzazioni sono  $r = 1, 2, 3$ . Vale la relazione di ortonormalità

$$\varepsilon_r(\mathbf{k}) \varepsilon_s(\mathbf{k}) = -\delta_{rs}$$

Si considera il riferimento per cui  $k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$  e i cui versori sono

$$\varepsilon_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{m}(|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_{\mathbf{k}})$$

La somma sulle polarizzazioni, utile per le ampiezze di Feynman, è

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = ak^\mu k^\nu + b\eta^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k^\mu k^\nu$$

Infatti, noto

$$k_\mu \varepsilon_r^\mu = 0, \quad \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -\delta_{\alpha\beta}$$

si moltiplica una volta per  $k_\mu k_\nu$  ed un'altra per  $\eta_{\mu\nu}$ , così si ottiene

$$ak^4 + bk^2 = 0, \quad ak^2 + 4b = -3 \implies a = \frac{1}{m^2}, \quad b = -1$$

Il propagatore di Feynman è

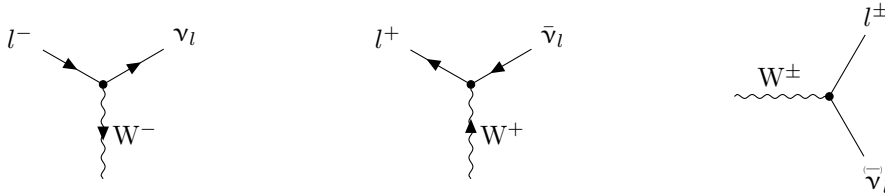
$$iD_{\mu\nu}^F(x-y, m) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ W_\mu(x) W_\nu(y) \} | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[ -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right] \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

La trattazione è identica a quella per il bosone di Klein-Gordon.

**Costante di accoppiamento.** La lagrangiana debole è

$$\mathcal{L}^W = g_W L_\alpha W^\alpha + \text{h.c.}, \quad L_\alpha = \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}$$

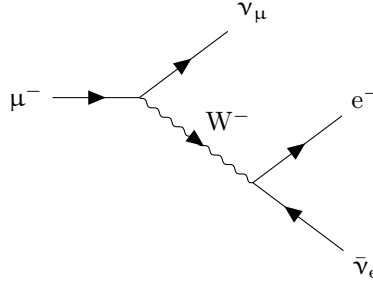
dove  $L$  è la corrente leptonica. La corrente è carica: può distruggere un neutrino e creare un leptone. Dalla lagrangiana si possono ottenere vari vertici



Il terzo diagramma è il decadimento del bosone W (in leptoni). Tramite la simmetria di crossing si possono ottenere vari diagrammi data la lagrangiana sopra.

Si trova il valore della costante di accoppiamento. Il decadimento del muone diventa





L'ampiezza di Feynman corrispondente è

$$\mathcal{M} = -g_W^2 [\bar{u}(\mathbf{p}_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e})] \frac{i[-\eta_{\mu\nu} + m^{-2} k_\mu k_\nu]}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} [\bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(\mathbf{p}_\mu)]$$

Poiché la teoria di Fermi funziona bene, la massa del bosone dev'essere grande. Infatti, l'energia a disposizione del muone nel suo decadimento non è molta, dunque il bosone  $W^-$  è altamente virtuale e si propaga poco. Nel limite  $m^2 \rightarrow \infty$  il propagatore diventa costante e l'ampiezza tende a

$$\mathcal{M} \rightarrow g_W^2 [\bar{u}(\mathbf{p}_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e})] \frac{i\eta_{\mu\nu}}{m^2} [\bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(\mathbf{p}_\mu)]$$

Le due parentesi sono le stesse calcolate nella teoria a quattro punti di Fermi perché le correnti leptoniche sono le medesime. Pertanto si può ottenere la costante di Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{m^2}$$

Nel limite di massa infinita, il propagatore diventa

$$\int d^4k D^{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right] \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \propto \delta(x-y)$$

La distanza spaziale per cui il bosone  $W$  si propaga è dell'ordine di  $m^{-2}$  e nel limite il bosone si propaga su di una scala sempre più piccola: si ottiene l'interazione a quattro punti di Fermi. Da questo si comprende anche come la teoria di Fermi sia una teoria efficace poiché si integra via il bosone vettoriale  $W$ .

**Decadimento in leptoni.** Il bosone  $W$  decade in leptoni ed in adroni (di cui però non si conosce la struttura). Il decadimento in leptoni è il meno probabile. Si calcola il tasso di decadimento in leptoni. L'ampiezza di Feynman è

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k}) \bar{u}_l(\mathbf{q}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(\mathbf{q}')$$

[r] calcoli o fonte  
da cui

$$|\mathcal{M}|^2 = \left[ -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right] \text{Tr}[(\not{\epsilon} + m_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{\epsilon}' \gamma^\nu (1 - \gamma_5)]$$

considerate nulle le masse dei neutrini. Il tasso di decadimento (ampiezza di decadimento) è

$$\Gamma = \frac{g_W^2 m_W}{6\pi} \left[ 1 - \frac{m_l^2}{m_W^2} \right]^2 \left[ 1 + \frac{m_l^2}{2m_W^2} \right]$$

Il leptone più massivo è il tauone, ma il bosone  $W$  è sempre molto maggiore,  $m_W \approx 80.377 \text{ GeV}$ . Ponendo le altre masse a zero, si ha

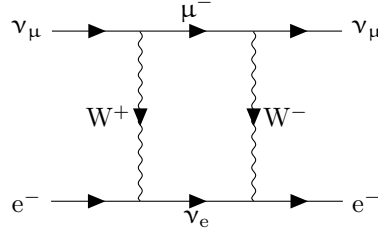
$$\Gamma_l = \frac{g_W^2 m_W}{6\pi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_W^3}{6\pi}$$

L'ampiezza di decadimento va moltiplicata per 3 perché ci sono tre leptoni e bisogna considerare che il branching ratio per ogni leptone è di circa 10.86%. Pertanto, la vita media è

$$\tau_{\text{th}} \approx 3.15 \times 10^{-25} \text{ s}, \quad \tau_{\text{exp}} \approx 3.16 \times 10^{-25} \text{ s}$$

Un tempo così breve non è abbastanza per rivelare il bosone. Sperimentalmente, la sua scoperta venne fatta osservando i prodotti di decadimento, in particolare elettroni ad altissima energia e una parte di energia mancante portata dai neutrini; in tal modo si ricostruisce la massa della particella iniziale.

**Rinormalizzabilità.** L'introduzione del bosone vettoriale  $W$  tenta di risolvere i problemi della teoria di Fermi, in particolare la rinormalizzabilità. Avere un numero finito di diagrammi divergenti è condizione necessaria per la rinormalizzabilità. Si consideri il seguente scattering elastico



In elettrodinamica quantistica, il propagatore del fotone è un fattore di convergenza perché fornisce  $k^{-2}$ . In questo caso, il propagatore del bosone  $W$  tende ad 1 per  $k^2 \rightarrow \infty$ . Il diagramma sopra sarebbe convergente in elettrodinamica quantistica, ma in questo caso diverge.

**Massa del neutrino.** Il decadimento beta del neutrone presenta dei parametri adronici ignoti che dipendono dai dettagli della struttura degli adroni. Lo spettro dell'elettrone nella teoria di Fermi è

$$d_E w = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ 1 - 3 \left( \frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right] p_l E_l (E_0 - E_l)^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2}{(E_0 - E_l)^2}}, \quad E_0 = m_n - m_p$$

[r] fonte?

Si è esplicitata la massa del neutrino elettronico. La curva dello spettro dell'elettrone all'end point cambia in base al valore della massa del neutrino.

**Invarianza di gauge.** L'invarianza di gauge implica che un mediatore è un bosone di massa nulla. Il teorema di Higgs permette di fornire una massa ad alcuni mediatori. Con le teorie di gauge (dette di Yang-Mills) cambia il paradigma: la simmetria diventa centrale nella descrizione della fisica (v. Weyl, *Symmetry*).

**Accoppiamento non minimale.** Alla lagrangiana di Dirac si può aggiungere un termine non minimale invariante di gauge

$$\mathcal{L}_{\text{NM}} = -\frac{q}{4m} \varepsilon \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu}$$

dove  $\varepsilon$  è un parametro. Per capire quali termini siano ammessi o meno si possono cercare conferme empiriche. In particolare si è calcolato il rapporto giromagnetico

$$\gamma = -\frac{q\hbar}{2mc} (1 + \varepsilon)$$

Esso non presenta alcuna evidenza sperimentale.

In precedenza si è studiata la rinormalizzabilità di una teoria. Riscrivendo il termine non minimale come

$$\mathcal{L}_{\text{NM}} = -\frac{q}{2m} \varepsilon \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \partial^\mu A^\nu$$

La modifica al vertice elettromagnetico data da tale termine è

$$-iq\gamma_\mu \rightarrow -iq\gamma_\mu - \varepsilon \sigma_{\mu\nu} k^\nu$$

Diversamente dalla teoria minimale, il vertice fornisce un momento: la divergenza superficiale deve considerare anche i vertici.

## Lezione 16

mer 20 dic  
2023 10:30

Il vertice si accoppia sempre con il campo del fotone. La topologia dei diagrammi non cambia e le relazioni viste in precedenza sono ancora valide

$$\omega = 4(I_B + I_F) - 4(V - 1) - I_F - 2I_B$$

Quando si aggiunge l'interazione minimale, il contributo convergente dall'ultimo addendo non appare. Pertanto, si giunge a

$$\omega = V - \frac{3}{2}E_F - 2E_B + 4$$

Il grado di divergenza superficiale dipende dal numero di vertici, diversamente dall'accoppiamento minimale. Esiste un teorema di non rinormalizzabilità per cui se la costante di accoppiamento ha dimensione negativa di massa, allora la teoria non è rinormalizzabile. Questo si è già visto per la teoria di Fermi.

## 10 Modello di Glashow

Si introducono varie simmetrie che riguardano l'interazione forte e si usano per quella debole. In particolare, Heisenberg introduce la simmetria di isospin o spin isotopico. Si nota che tutti i processi forti che coinvolgono protone e neutrone hanno la stessa sezione d'urto: è presente una simmetria per scambio delle due particelle. Le loro masse sono

$$M_p = 938.272\,088\,16\text{ MeV}, \quad M_n = 939.565\,420\,52\text{ MeV}$$

La simmetria è da intendersi solo per le interazioni forti, infatti la carica elettrica è diversa. Si considera lo spazio astratto SU(2) dell'isospin  $I$  in cui il protone ha terza componente pari a  $I_3 = \frac{1}{2}$  ed il neutrone ha  $I_3 = -\frac{1}{2}$ . L'hamiltoniana di interazione per l'interazione forte può essere solo

$$\mathcal{H}_I \propto \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} + \tau^2$$

[r] ?

dove  $\tau_i$  sono le matrici di Pauli

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k$$

In particolare, la carica elettrica è

$$Q = q \left[ I_3 + \frac{1}{2} \right]$$

Si utilizza questa nomenclatura anche per le interazioni deboli.

**Simmetria globale di isospin debole.** Si vogliono trovare delle trasformazioni globali la cui corrente conservata sia la corrente debole vista in precedenza e che forniscano il bosone vettoriale W con cui si accoppia la corrente. La lagrangiana (leptonica) libera è la lagrangiana leptonica con le masse dei leptoni e dei neutrini nulle

$$\mathcal{L}_0 = i[\bar{\psi}_l(x) \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} \not{\partial} \psi_{\nu_l}]$$

cioè la lagrangiana di Dirac a massa nulla. Si sottintende la somma sui leptoni  $l$ . Si introducono i campi chirali left-handed e chirali right-handed<sup>10</sup>

$$\psi^L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi^R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \psi = \psi^R + \psi^L, \quad \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_L = 0, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$$

<sup>10</sup>La chiralità è una proprietà dei campi, l'elicità è una proprietà delle particelle. Si noti che  $\bar{\psi}_R$  è il Dirac coniugato di  $\psi_R$ , il suo pedice indica la chiralità del campo non coniugato poiché la sua chiralità è left-handed e non right-handed ( $\bar{\psi}_R \equiv \overline{\psi_R}$ ). Infatti, considerando masse nulle,  $\psi_R$  distrugge leptoni con elicità positiva e crea anti-leptoni con elicità negativa, mentre  $\bar{\psi}_R$  crea leptoni con elicità positiva e distrugge anti-leptoni con elicità negativa. Particelle massive hanno una sovrapposizione di elicità.

In questa teoria, le componenti chirali hanno elicità definita. Separando le componenti dei campi, si ha

$$\mathcal{L}_0 = i[\bar{\psi}_l^L \not{\partial} \psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_l}^L \not{\partial} \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R]$$

Si introduce il doppietto di isospin debole

$$\Psi_l^L = \begin{bmatrix} \psi_l^L \\ \psi_{\nu_l}^L \end{bmatrix}, \quad \bar{\Psi}_l^L = [\bar{\psi}_{\nu_l}^L \quad \bar{\psi}_l^L]$$

Si assegna la terza componente dell'isospin in modo arbitrario: il neutrino ha  $I_3 = \frac{1}{2}$  ed il leptone associato ha  $I_3 = -\frac{1}{2}$ . La componente chirale right-handed non si trasforma per isospin debole, ma sono scalari rispetto alle matrici  $\tau$ . La lagrangiana diventa asimmetrica

$$\mathcal{L}_0 = i[\bar{\Psi}_l^L \not{\partial} \Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R]$$

Il doppietto si trasforma secondo

$$U \Psi_l^L(x) = \exp\left[\frac{1}{2}i\alpha_i \tau_i\right] \Psi_l^L(x), \quad \bar{\Psi}_l^L(x) U^\dagger = \bar{\Psi}_l^L(x) \exp\left[-\frac{1}{2}i\alpha_i \tau_i\right]$$

dove  $i$  è un indice di isospin, non spazio-temporale. I generatori sono le matrici di Pauli i cui coefficienti  $\alpha_i$  sono indipendenti dalle coordinate: si ha una trasformazione globale. Queste trasformazioni formano il gruppo non abeliano unitario speciale  $SU(2)$ :

$$\det U = 1, \quad U^\dagger U = 1, \quad U_1 U_2 \neq U_2 U_1$$

Infatti, sapendo che il determinante è il prodotto degli autovalori, si ha

$$\text{Tr}(\tau_i) = 0 \implies \det \exp\left[\frac{1}{2}i\alpha_i \tau_i\right] = \exp\left[\frac{1}{2}i \text{Tr}(\alpha_i \tau_i)\right] = 1$$

Furono presenti vari modelli, uno di questi considera una trasformazione più complicata

$$SU(2)_L \times SU(2)_R$$

ma che non è in accordo con gli esperimenti.

Per trasformazione infinitesima di isospin, il campo diventa

$$\Psi'_{l,L}(x) = \left[1 + \frac{1}{2}i\alpha_i \tau_i\right] \Psi_{l,L}(x), \quad \bar{\Psi}'_{l,L}(x) = \left[1 - \frac{1}{2}i\alpha_i \tau_i\right] \bar{\Psi}_{l,L}(x)$$

mentre le componenti chirali right-handed non si trasformano. Si applica il teorema di Noether per una simmetria interna. Si ha una corrente per ogni generatore della simmetria interna cioè tre:

$$J_i^\mu(x) = -i \partial_{\partial_\mu \Psi_l^L} \mathcal{L} \delta \Psi_l^L = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L(x) \gamma^\mu \alpha_i \tau_i \Psi_l^L(x)$$

Poiché il prodotto della corrente conservata con un fattore è ancora una corrente conservata, allora si riscrive

$$J_i^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu \tau_i \Psi_l^L$$

Le cariche conservate di isospin sono

$$I_i = \int d^3x J_i^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi_{l,L}^\dagger \tau_i \Psi_{l,L}$$

Le prime due correnti sono cariche

$$J_1^\mu = \frac{1}{2} [\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\mu \psi_l^L + \bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L], \quad J_2^\mu = -\frac{i}{2} [\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\mu \psi_l^L - \bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L]$$

La corrente leptonica vista in precedenza si può scrivere come combinazione lineare delle precedenti

$$J^\mu = 2[J_1^\mu - iJ_2^\mu] = 2\bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L = \frac{1}{2} \bar{\psi}_l(1 + \gamma_5) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} = \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}$$

La terza corrente è neutra

$$J_3^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu \tau_3 \Psi_l^L = \frac{1}{2} [\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L - \bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_l^L]$$

Essa connette particelle di stessa carica. Il secondo addendo è proporzionale ad una parte della corrente dell'elettrodinamica.

Il modello considera solo masse nulle. Bisogna ancora trovare i bosoni ed il resto della corrente elettromagnetica.

**Simmetria globale di iperشارica debole.** Si introduce una simmetria globale U(1) detta iperشارica debole  $Y$ . Nelle interazioni forti, l'ipercarica è un numero quantico dato dalla differenza del numero barionico e la stranezza. La stranezza deriva dagli hyperons che hanno una vita di decadimento particolarmente lungo, pertanto detti strani; essi contengono il quark strange. La loro vita media è più lunga perché il loro decadimento è soppresso.

Il campo si trasforma come

$$\psi' = e^{i\beta Y} \psi$$

Si assegna in modo arbitrario l'ipercarica per arrivare alla corrente elettromagnetica

$$\Psi'_{l,L} = e^{-i\frac{\beta}{2}} \Psi_{l,L}, \quad (\psi_l^R)' = e^{-\beta} \psi_l^R, \quad (\psi_{\nu_l}^R)' = \psi_{\nu_l}^R$$

cioè ipercarica  $Y = -\frac{1}{2}, -1, 0$ . La corrente associata all'ipercarica è

$$\begin{aligned} J_Y^\mu &= -\frac{1}{2} \bar{\Psi}^L \gamma^\mu \Psi^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^\mu \psi_l^R = -\frac{1}{2} [\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L + \bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_l^L] - \bar{\psi}_l^R \gamma^\mu \psi_l^R \\ &= -\frac{1}{2} [\bar{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L - \bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_l^L] - \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l = -J_3^\mu - \frac{1}{q} J_{EM}^\mu = \frac{1}{|q|} J_{EM}^\mu - J_3^\mu \end{aligned}$$

alla seconda riga si è aggiunto e sottratto  $\frac{1}{2} \bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_l^L$  e una metà è inserita all'interno del terzo addendo. Questa è una teoria di gauge  $SU(2) \times U(1)$ .

**Catalogo delle particelle.** Si riassumono le scelte dei numeri quantici per i leptoni

	$Q$	$I_3$	$Y$
$l_L^-$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\nu_l^L$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$l_R^-$	-1	0	-1
$\nu_l^R$	0	0	0

Si nota valere

$$Y = -\frac{q}{q_l} - I_3 = \frac{q}{|q|} - I_3 \implies Y = Q - I_3$$

L'ipercarica debole è una quantità conservata perché deriva da una simmetria globale U(1), ma anche perché è conservata la carica elettrica e l'isospin è la quantità conservata associata ad una simmetria globale SU(2).

## 10.1 Interazione

Per studiare l'interazione, bisogna rendere locali le simmetrie.

**Simmetria locale di isospin.** Per il gruppo unitario U(1), l'interazione è già nota dall'elettrodinamica, ma il bosone associato non è il fotone. Per il gruppo speciale unitario SU(2) si hanno tre bosoni vettoriali, ma tutti a bassa nulla.

Si impone l'invarianza della lagrangiana sotto la seconda simmetria: bisogna introdurre la derivata covariante al cui interno compaiono i campi dei bosoni mediatori. Dunque

$$\Psi'_{l,L} = \exp\left[\frac{1}{2}ig\alpha_i(x')\tau_i\right] \Psi_{l,L}, \quad \bar{\Psi}'_{l,L} = \exp\left[-\frac{1}{2}ig\alpha_i(x')\tau_i\right] \bar{\Psi}_{l,L}$$

Le componenti chirali right-handed non si trasformano. La trasformazione infinitesima è

$$\delta \Psi_l^L = \left[ 1 + \frac{1}{2} i g \alpha_i(x) \tau_i \right] \Psi_l^L$$

La lagrangiana libera non è invariante e per trasformazione di gauge del campo leptonico si ha

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} g \bar{\Psi}_l^L \tau_i \not{\partial} \alpha_i(x) \Psi_l^L$$

Si definisce la derivata covariante

$$D^\mu = \left[ \partial^\mu + \frac{1}{2} i g \tau_i W_i^\mu \right]$$

L'interazione è tra il bosone vettoriale introdotto e la corrente globale della simmetria. La lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = i [\bar{\Psi}_l^L \not{D} \Psi_l^L + \bar{\psi}_{\nu_i}^R \not{\partial} \psi_{\nu_i}^R + \bar{\psi}_l^R \not{\partial} \psi_l^R]$$

per le componenti chirali right-handed non si ha alcuna derivata covariante perché non si trasformano.

In precedenza si è notato che la lagrangiana è invariante (anche) perché la derivata covariante applicata al campo leptonico si trasforma come un campo leptonico: si mantiene il termine  $\bar{\psi} \not{D} \psi$  invariante per trasformazione simultanea del campo leptonico  $\psi$  e del campo bosonico  $W$ . Dunque

$$(D_\mu \Psi_l^L)' = \left[ 1 + \frac{1}{2} i g \alpha_i(x) \tau_i \right] D_\mu \Psi_l^L = \left[ 1 + \frac{1}{2} i g \alpha_i(x) \tau_i \right] \left[ \partial_\mu + \frac{1}{2} i g \tau_i W_\mu^i \right] \Psi_l^L$$

Per una trasformazione di entrambi i campi, la derivata del doppietto deve essere

$$D_\mu \Psi_{l,L} \rightarrow D'_\mu \Psi'_{l,L} = \left[ \partial_\mu + \frac{1}{2} i g \tau_i W_\mu^i + \frac{1}{2} i g \tau_i \delta W_\mu^i \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} i g \alpha_i(x) \tau_i \right] \Psi_{l,L}$$

Trasformare il campo leptonico derivato dev'essere uguale a trasformare separatamente la derivata ed il campo

$$(D_\mu \Psi_l^L)' = D'_\mu \Psi'_L$$

## Lezione 17

Si studia il prim'ordine in  $\alpha_i(x)$ . Pertanto

gio 21 dic  
2023 10:30

$$\begin{aligned} \partial^\mu + \frac{1}{2} i g \tau_i W_i^\mu + \frac{1}{2} i g \alpha_i \tau_i \partial^\mu - \frac{1}{4} g^2 \alpha_i \tau_i \tau_j W_j^\mu &= \\ &= \partial^\mu + \frac{1}{2} i g \tau_i \partial^\mu \alpha_i + \frac{1}{2} i g \tau_i W_i^\mu - \frac{1}{4} g^2 \tau_i W_i^\mu \alpha_j \tau_j + \frac{1}{2} i g \tau_i \delta W_i^\mu + o(\alpha_i) \end{aligned}$$

dove si ricorda

$$\partial^\mu \alpha \leftrightarrow (\partial^\mu \alpha \psi) = (\partial^\mu \alpha) \psi + \alpha \partial^\mu \psi$$

I primi tre addendi del primo membro si semplificano con il primo e terzo addendo del secondo membro e con il secondo addendo della derivata. Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i g \tau_i \delta W_i^\mu &= -\frac{1}{2} i g \tau_i (\partial^\mu \alpha_i) + \frac{1}{4} g^2 \tau_i W_i^\mu \alpha_j \tau_j - \frac{1}{4} g^2 \alpha_j \tau_j \tau_i W_i^\mu \\ \tau_i \delta W_i^\mu &= -\tau_i (\partial^\mu \alpha_i) - \frac{1}{2} i g \alpha_j [\tau_i W_i^\mu, \tau_j] \\ \delta W_i^\mu &= -\partial^\mu \alpha_i - g \varepsilon_{ijk} \alpha_j W_k^\mu \end{aligned}$$

Alla prima riga, nell'ultimo addendo del secondo membro si scambiano gli indici  $i$  e  $j$  poiché muti. Alla terza riga si è sostituito il commutatore delle matrici di Pauli, poi si sono scambiati  $i \leftrightarrow k$  e infine solo nel tensore di Levi-Civita si sono scambiato gli indici  $\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}$ .

Se il gruppo fosse abeliano, il secondo addendo sarebbe nullo e si avrebbe la legge di trasformazione del fotone. In questo caso, la variazione del campo dipende dal campo stesso poiché ha carica di isospin debole (diversamente dal fotone che è elettricamente neutro). Dunque

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_i W_i^\mu, \quad W'_{i,\mu} = W_{i,\mu} - \partial_\mu \alpha_i(x) - g\varepsilon_{ijk}\alpha_j(x)W_\mu^k, \quad \alpha_i(x) \ll 1$$

Per la simmetria locale di ipercarica si ha un campo bosonico  $B^\mu$ , ma la trattazione è identica all'elettrodinamica quantistica

$$D^\mu = \partial^\mu + ig'YB^\mu, \quad B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \beta(x)$$

Unendo le due, la derivata covariante è

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_i W_i^\mu + ig'YB^\mu$$

**Lagrangiana.** La lagrangiana invariante per trasformazione  $SU(2) \times U(1)$  simultanea dei campi leptonici e campi bosonici è

$$\mathcal{L} = i[\bar{\Psi}_l^L \not{D}\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R] = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

dove si ha

$$\begin{aligned} D^\mu \Psi_l^L &= \left[ \partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_i W_i^\mu - \frac{1}{2}ig'B^\mu \right] \Psi_l^L, \quad Y = -\frac{1}{2} \\ D^\mu \psi_l^R &= [\partial^\mu - ig'B^\mu] \psi_l^R, \quad Y = -1 \\ D^\mu \psi_{\nu_l}^R &= \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R, \quad Y = 0 \end{aligned}$$

Successivamente bisogna introdurre la lagrangiana per i campi bosonici liberi.

**Lagrangiana di interazione.** Si studia la lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_I = -gJ_i^\mu W_\mu^i - g'J_Y^\mu B_\mu, \quad J_Y^\mu = \frac{1}{|q_l|}J_{EM}^\mu - J_3^\mu, \quad J_i^\mu = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu \tau_i \Psi_l^L$$

I bosoni vettoriali derivanti dalla simmetria locale si accoppiano con la corrente globale. Si introduce il campo bosonico

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1^\mu - iW_2^\mu] \leftrightarrow J_\mu^\dagger, \quad W_\mu^\dagger \leftrightarrow J^\mu$$

corrispondente alle correnti leptoniche cariche

$$J^\mu = 2[J_1^\mu - iJ_2^\mu] = 2\bar{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L = \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}$$

I primi due addendi della lagrangiana d'interazione si riscrivono come

$$-g \sum_{i=1}^2 J_i^\mu W_\mu^i = -\frac{g}{2\sqrt{2}}[J_\mu^\dagger W^\mu + J^\mu W_\mu^\dagger]$$

I due addendi rimanenti si riscrivono come una combinazione lineare di due campi reali

$$\begin{bmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{bmatrix}$$

dove  $\theta_W$  è detto angolo di Weinberg e, come le costanti di accoppiamento  $g$  e  $g'$ , è un parametro libero. Gli ultimi due addendi della lagrangiana di interazione diventano

$$\begin{aligned} -gJ_3^\mu W_\mu^3 - g'J_Y^\mu B_\mu &= -gJ_3^\mu [Z_\mu \cos \theta + A_\mu \sin \theta] - g' \left[ \frac{1}{|q_l|}J_{EM}^\mu - J_3^\mu \right] [-Z_\mu \sin \theta + A^\mu \cos \theta] \\ &= -J_3^\mu [g(Z_\mu \cos \theta + A_\mu \sin \theta) - g'(-Z_\mu \sin \theta + A_\mu \cos \theta)] \\ &\quad - \frac{g'}{|q_l|}J_{EM}^\mu (-Z_\mu \sin \theta + A_\mu \cos \theta) \end{aligned}$$

Si impone che il campo  $A^\mu$  sia il campo elettromagnetico: i coefficienti del termine  $J_3^\mu A_\mu$  devono essere nulli perché il fotone non può interagire con la corrente neutra di isospin, e il termine di interazione dev'essere  $\mathcal{L}_1^{\text{EM}} = -J_{\text{EM}}^\mu A_\mu$ . Pertanto si pone la seguente condizione sui parametri liberi

$$|q_l| = g' \cos \theta = g \sin \theta$$

Dunque, la lagrangiana di interazione è

$$\mathcal{L}_1 = -J_{\text{EM}}^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} [J_\mu^\dagger W^\mu + J^\mu W_\mu^\dagger] - \frac{g}{\cos \theta} \left[ J_3^\mu - \frac{\sin^2 \theta}{|q_l|} J_{\text{EM}}^\mu \right] Z_\mu$$

Il secondo termine si riconosce dalla teoria di Proca–Yukawa con il bosone vettoriale intermedio. Il terzo addendo è l'interazione tra un bosone vettoriale neutro che si accoppia alla corrente neutra ed alla corrente elettromagnetica senza carica elettrica.

L'angolo di weak mixing è

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.23121(4) \iff \theta_W \approx 28.7^\circ$$

I campi bosonici  $W_3$  e  $B$  si mescolano per dare  $Z$  e  $A$ . In assenza di mixing si separa la teoria di isospin e di ipercarica. La teoria delle interazioni debole e la teoria dell'elettrodinamica quantistica sono un'unica teoria.

Le masse del modello sono ancora nulle e non si può aggiungere un termine di massa perché rompe la simmetria di gauge.

**Lagrangiana dei campi bosonici liberi.** Per il campo di ipercarica si ha

$$\mathcal{L}_{0,B} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

Per il campo di isospin, un termine analogo al precedente

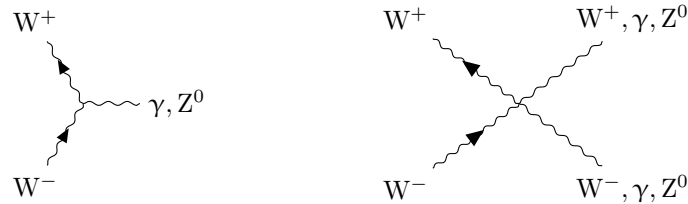
$$\mathcal{L}_{0,W} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i$$

non è invariante di gauge, ma bisogna considerare

$$\mathcal{L}_{0,W} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G_i^{\mu\nu}, \quad G_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu - g \varepsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu$$

Questo tensore non è invariante di gauge, ma mantiene invariante la lagrangiana.

Compaiono nuovi vertici, ad esempio



Il secondo diagramma non è l'interazione a quattro punti di Fermi, ma deriva dalla lagrangiana libera  $G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ .

Si noti che introdurre un termine di massa

$$-m_l \bar{\psi}_l \psi_l = -m_l (\bar{\psi}_l^L \psi_l^R + \bar{\psi}_l^R \psi_l^L)$$

induce una rottura esplicita della simmetria di gauge poiché la componente chirale left-handed si trasforma come un doppietto di isospin, mentre la componente right-handed è uno scalare per tale trasformazione. Un termine simile è vietato anche per i bosoni vettoriali.



**Invarianza della lagrangiana.** Si veda Mandl, §11.4.2. Si studia l'invarianza della lagrangiana libera del campo bosonico  $W$  per una sua trasformazione di gauge. Si consideri la variazione del campo

$$\tau_i \delta W_\mu^i = -\tau_i \partial_\mu \alpha_i - \tau_i g \varepsilon_{ijk} \alpha_j W_\mu^k = -\partial_\mu \alpha + \frac{ig}{2} [\alpha, W^\mu], \quad W_\mu = \tau_i W_\mu^i, \quad \alpha = \alpha_i \tau_i$$

Si riscrive il tensore di campo come

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^i \tau_i = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + \frac{ig}{2} [\tau_j, \tau_k] W_\mu^j W_\nu^k = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + \frac{ig}{2} [W_\mu, W_\nu]$$

La sua variazione per una trasformazione di gauge è

$$\begin{aligned} \delta G_{\mu\nu} &= \partial_\mu (\delta W_\nu) - \partial_\nu (\delta W_\mu) + \frac{ig}{2} [\delta W_\nu, W_\mu] + \frac{ig}{2} [W_\nu, \delta W_\mu] \\ &= \partial_\mu \left\{ -\partial_\nu \alpha + \frac{ig}{2} [\alpha, W_\nu] \right\} - \partial_\nu \left\{ -\partial_\mu \alpha + \frac{ig}{2} [\alpha, W_\mu] \right\} \\ &\quad + \frac{ig}{2} \left[ -\partial_\mu \alpha + \frac{ig}{2} [\alpha, W_\mu], W_\nu \right] + \frac{ig}{2} \left[ W_\mu, -\partial_\nu \alpha + \frac{ig}{2} [\alpha, W_\nu] \right] \\ &= \frac{ig}{2} \partial_\mu [\alpha, W_\nu] - \frac{ig}{2} \partial_\nu [\alpha, W_\mu] - \frac{ig}{2} [\partial_\mu \alpha, W_\nu] - \frac{ig}{2} [W_\mu, \partial_\nu \alpha] \\ &\quad - \frac{g^2}{4} [[\alpha, W_\mu], W_\nu] - \frac{g^2}{4} [W_\mu, [\alpha, W_\nu]] \\ &= \frac{ig}{2} \partial_\mu [\alpha, W_\nu] - \frac{ig}{2} \partial_\nu [\alpha, W_\mu] - \frac{ig}{2} [\partial_\mu \alpha, W_\nu] - \frac{ig}{2} [W_\mu, \partial_\nu \alpha] + \frac{g^2}{4} [[W_\mu, W_\nu], \alpha] \\ &= \frac{ig}{2} [\alpha, \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu] - \frac{g^2}{4} [\alpha, [W_\mu, W_\nu]] \\ &= \frac{ig}{2} [\alpha, \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu] + \frac{(ig)^2}{4} [\alpha, [W_\mu, W_\nu]] \\ &= \frac{ig}{2} [\alpha, G_{\mu\nu}] \end{aligned}$$

Alla quarta uguaglianza si riscrive

$$[W_\mu, [\alpha, W_\nu]] = -[[\alpha, W_\nu], W_\mu] = [[W_\nu, \alpha], W_\mu]$$

e si applica l'identità di Jacobi

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0, \quad A = \alpha, \quad B = W_\mu, \quad C = W_\nu$$

Alla quinta uguaglianza si nota che il primo addendo è

$$\frac{ig}{2} \partial_\mu [\alpha, W_\nu] = \frac{ig}{2} \{ [\partial_\mu \alpha, W_\nu] + [\alpha, \partial_\mu W_\nu] \}$$

Esso semplifica il quarto addendo. Similmente il secondo addendo

$$-\frac{ig}{2} \partial_\nu [\alpha, W_\mu] = -\frac{ig}{2} \{ [\partial_\nu \alpha, W_\mu] + [\alpha, \partial_\nu W_\mu] \}$$

semplifica il terzo.

Si può riscrivere la lagrangiana del campo libero come

$$\mathcal{L}_{0,W} = -\frac{1}{8} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) = -\frac{1}{8} \text{Tr}[(\tau_i G_{\mu\nu}^i)(\tau_j G_j^{\mu\nu})], \quad \text{Tr}(\tau_i \tau_j) = 2\delta_{ij}$$

La sua variazione è

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{0,W} &= -\frac{1}{8} \text{Tr}[\delta G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \delta G^{\mu\nu}] = -\frac{ig}{16} \text{Tr}\{[\alpha, G_{\mu\nu}] G^{\mu\nu} + G^{\mu\nu} [\alpha, G_{\mu\nu}]\} \\ &= -\frac{ig}{16} \text{Tr}[\alpha, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] = 0 \end{aligned}$$

ricordando che la traccia di un commutatore è nulla. Il tensore di campo  $G^{\mu\nu}$  si trasforma, ma la lagrangiana è invariante di gauge.

## Lezione 18

ven 22 dic  
2023 10:30

## 11 Rottura spontanea di simmetria

Il modello di Glashow ha un forte potere descrittivo e predittivo, ma non si ha alcuna possibilità di introdurre le masse delle particelle coinvolte. Infatti l'introduzione di una massa rompe esplicitamente la simmetria del modello: la simmetria della lagrangiana viene meno.

La rottura di simmetria può avvenire in un modo diverso da quello esplicito. Tipicamente si pensa che se un sistema presenti una simmetria, allora tutti gli stati di tale sistema presentano la stessa simmetria e piccole deviazioni riportano il sistema in uno stato simmetrico. Tuttavia, questo pregiudizio si rivela falso. Ad esempio, l'interazione forte nucleare è invariante per rotazione, ma il nucleo può avere spin e dunque presenta una direzione privilegiata; lo stato fondamentale non presenta la simmetria dell'interazione. Un altro esempio è il ferromagnete di Heisenberg la cui hamiltoniana di interazione è a breve raggio e proporzionale a

$$\mathcal{H}_I \propto \sum_{\{ij\}} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

dove si somma su ogni coppia  $ij$ . L'interazione è invariante per rotazioni eppure il sistema può presentare una magnetizzazione

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{S}_i$$

A temperature sufficientemente alte, gli spin sono orientati in modo casuale e la magnetizzazione è nulla. Raffreddando il sistema, si passa al di sotto della temperatura di Curie e compare una magnetizzazione residua nonostante ci sia una simmetria per rotazione dell'hamiltoniana. La magnetizzazione corrisponde ad una direzione privilegiata e quindi rompe la simmetria.

Pertanto, lo stato fondamentale non necessariamente deve avere la stessa simmetria della lagrangiana e non deve nemmeno essere stabile.

Una rottura esplicita prevede la presenza di un termine nella lagrangiana, viceversa una rottura spontanea compare in modo dinamico.

**Esempio classico.** Si veda Landau, vol. 7, §§20, 21. Si studia la stabilità delle barre elastiche. Una barra elastica di lunghezza  $l$  e raggio  $r$  è posta lungo l'asse  $z$  e si può comprimere longitudinalmente. La barra ha simmetria cilindrica. Una forza  $\mathbf{F} = \pm|\mathbf{F}|\hat{z}$  è applicata agli estremi per comprimere la barra. L'equazione differenziale del sistema è

$$EI d_z^4 x + |\mathbf{F}| d_z^2 x = 0, \quad EI d_z^4 y + |\mathbf{F}| d_z^2 y = 0$$

dove si ha il momento di inerzia

$$I = \frac{\pi}{4} r^4$$

mentre  $E$  è il coefficiente di elasticità di Young, una generalizzazione del coefficiente di Hooke. La soluzione parametrica

$$x(z) = y(z) = 0$$

corrisponde ad imprimere una forza sulla barra, ma essa non si muove. Tale soluzione è unica e stabile. Questa soluzione è il pregiudizio dello stato fondamentale simmetrico, stabile ed unico.

Tuttavia, esiste anche una soluzione della forma

$$x(z) = a + bz + c \sin kz + d \cos kz \implies x = c \sin kz, \quad kl = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Essa esiste solo per

$$F > F_c = \frac{\pi^2}{l^2} EI$$

Oltre la forza critica, la barra si piega in una direzione e non è simmetrica. La soluzione originaria simmetrica non è più stabile: una volta che la barra è piegata, essa non torna più nella soluzione simmetrica. La simmetria rimane nel fatto che la direzione in cui la barra si piega è arbitraria: l'energia è la stessa e si ha ancora simmetria per rotazione.

Per il magnete di Heisenberg, la magnetizzazione può essere orientata in qualsiasi direzione dello spazio mantenendo la stessa energia.

## 11.1 Modello di Goldstone

La rottura spontanea di simmetria è il fenomeno per cui esiste un punto critico oltre il quale la soluzione simmetrica diventa instabile e lo stato fondamentale è degenere.

In teoria dei campi, lo stato fondamentale è lo stato di vuoto. La rottura spontanea di simmetria corrisponde all'esistenza di una quantità con valore di aspettazione sul vuoto non nullo. La scelta di uno dei possibili stati di vuoto rompe la simmetria perché tutti gli stati di vuoto hanno la stessa energia, sono degeneri.

Si segue una discussione generale, valida per la teoria dei campi sia quantizzati che classici. Si ipotizza che il campo abbia un valore di aspettazione sul vuoto (VEV, vacuum expectation value) non nullo

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = v \neq 0$$

Solamente un campo scalare può avere un valore di aspettazione non nullo perché altrimenti il vuoto avrebbe una direzione privilegiata e si rompe l'invarianza di Lorentz del vuoto.

**Campo reale.** Si consideri la lagrangiana di un campo reale scalare

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi), \quad \pi = \partial_\phi \mathcal{L} = \dot{\phi}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi)$$

L'energia è minima quando il campo è costante ed il potenziale è minimo: bisogna studiare il potenziale. La forma più semplice è

$$U(\phi) = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$$

Affinché il potenziale sia limitato inferiormente, si pone  $\lambda > 0$ . La simmetria del sistema è una simmetria di parità  $\mathbb{Z}_2$

$$\phi \rightarrow -\phi$$

Si consideri  $\mu^2 > 0$ . Esiste un punto stazionario a  $\phi = 0$  in cui la soluzione è un minimo e stabile. In questo caso si può quantizzare il campo attorno allo stato fondamentale tramite piccole oscillazioni, cioè la seconda quantizzazione. Il parametro  $\mu$  è la massa del bosone associato al campo  $\phi$ .

Sia  $\mu^2 < 0$ . La forma del potenziale è simile ad un sombrero. In questo caso non si può identificare  $\mu$  con la massa. Il punto  $\phi = 0$  è un massimo relativo, instabile: qualunque perturbazione arbitrariamente piccola non permettere di ritornare a tale punto. Si hanno due minimi in  $\phi = \pm a$  la cui posizione rispecchia la simmetria del potenziale. Quando si sceglie uno dei due, la simmetria è rotta spontaneamente. Si sceglie

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = a, \quad a^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} > 0$$

I due vuoti sono degeneri, hanno la stessa energia. Si studia la fisica attorno a tale vuoto ridefinendo il campo

$$\phi' = \phi - a$$

La simmetria  $\mathbb{Z}_2$  scompare quando si passa al campo  $\phi'$  e diventa

$$\phi \rightarrow -\phi \implies \phi' + a \rightarrow -\phi' - a \implies \phi' \rightarrow 2\phi' - 2a$$

La parte cinetica rimane invariata per l'aggiunta di una costante. Il potenziale diventa

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \lambda(\phi^2 - a^2)^2 - \lambda a^4 = \lambda[(\phi' + a)^2 - a^2]^2 - \lambda a^4 = \lambda(\phi'^2 + 2a\phi' + a^2 - a^2)^2 - \lambda a^4 \\ &= \lambda(\phi'^2 + 2a\phi')^2 - \lambda a^4 = \lambda(\phi'^4 + 4a^2\phi'^2 + 4a\phi'^3 - \lambda a^4) \end{aligned}$$

l'ultimo addendo si può trascurare poiché il potenziale è definito a meno di costanti. Il primo addendo è il termine di auto-interazione. Il coefficiente di  $\phi'^2$  è definito positivo e la teoria ha un termine corretto di massa  $m^2 = 4\lambda a^2$ .

La scelta di  $\mu^2 < 0$  nel sistema iniziale simmetrico porta ad un potenziale che rompe la simmetria. Lo stato fondamentale non è simmetrico e non è stabile. Si è scelto un particolare vuoto passando ad una teoria diversa in cui appare un termine cubico, ha un corretto termine di massa, il minimo è stabile ed è possibile operare la quantizzazione.

Non si può risolvere esattamente la teoria con il potenziale originale perché il massimo locale è instabile e non si può applicare la teoria delle perturbazioni.

**Campo complesso.** La lagrangiana del campo complesso è

$$\mathcal{L}_1 = (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2$$

La simmetria della lagrangiana è una fase globale  $U(1)$ :

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*(x)$$

L'hamiltoniana è

$$\mathcal{H}_1 = \dot{\phi} \dot{\phi}^* + \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* + \mu^2 \phi \phi^* + \lambda (\phi \phi^*)^2$$

Il potenziale è lo stesso di prima, ma esteso a solido di rotazione (in funzione delle componenti reali del campo). Per  $\mu^2 > 0$  si può quantizzare la teoria. Per  $\mu^2 < 0$  si hanno infiniti minimi degeneri legati dalla trasformazione di simmetria. Si sceglie un minimo

$$\phi(x) = \phi_0(x) = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} e^{i\theta}, \quad \theta = 0$$

Il valore di aspettazione sul vuoto del campo è

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v > 0$$

La ridefinizione del campo prevede l'introduzione di due campi bosonici reali  $\sigma$  ed  $\eta$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \sigma(x) + i\eta(x)]$$

Il potenziale diventa

$$U(\phi) = -\mu^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2 = -\frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \eta^2)^2 - \lambda v^2 \sigma^2 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \eta^2)$$

La lagrangiana è

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \eta^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \eta^2)^2$$

Il terzo addendo è un termine di massa per il campo  $\sigma$ . I primi tre addendi costituiscono la lagrangiana  $\mathcal{L}_{2,0}$  per i campi liberi. Gli ultimi due sono termini di interazione. Questo è il teorema di Goldstone: per ogni generatore di simmetria spontaneamente rotto appare un bosone di massa nulla. Dei due campi con cui si parametrizza il campo  $\phi$ , solamente uno acquisisce massa. Il cerchio dei minimi è equipotenziale, muoversi non cambia l'energia e dunque la massa è nulla. Muoversi in senso trasversale bisogna fornire energia e dunque si acquisisce massa.

Se si potesse risolvere il sistema in modo esatto, si otterrebbe lo stesso risultato. Dopo la trasformazione, la simmetria è meno evidente, ma il problema si può risolvere.

Per il modello di Glashow, la situazione peggiora: la rottura di simmetria fornisce massa, ma compare un bosone di massa nulla (che non è il fotone). Successivamente il meccanismo di Higgs risolve il problema studiando la simmetria locale: i bosoni di Goldstone scompaiono ed appare il bosone di Higgs. Per il Modello Standard bisogna introdurre dei doppietti di Higgs e scegliere la loro interazione con le particelle.

## Lezione 19

### 11.2 Meccanismo di Higgs

lun 08 gen  
2024 10:30

Si è discussa una simmetria globale di parità e di fase. Si studia il caso di simmetria locale che è simile al precedente. Una lagrangiana invariante per una simmetria di gauge  $U(1)$  è

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + [D_\mu \phi]^* [D^\mu \phi] - \mu^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2$$

dove si introduce la derivata covariante ed il termine cinetico del bosone vettoriale (si noti che il tensore di campo  $F^{\mu\nu}$  non è necessariamente quello elettromagnetico del fotone, ma del bosone

della simmetria locale). Si ricordi che l'interpretazione del terzo termine dipende dal segno del coefficiente  $\mu^2$ . Similmente all'elettrodinamica scalare, la trasformazione  $U(1)$  è

$$\phi' = e^{iq\alpha(x)}\phi, \quad (\phi')^* = e^{-iq\alpha(x)}\phi^*, \quad A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\alpha(x), \quad D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$$

Per  $\mu^2 > 0$  si ottiene una teoria bosonica senza rottura spontanea di simmetria che si può quantizzare e trattare in modo perturbativo. Per  $\mu^2 < 0$ , il valore di aspettazione sul vuoto  $v$  del campo è

$$\phi_0 = \left[ -\frac{\mu^2}{2\lambda} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v > 0$$

mentre il valore di aspettazione del campo bosonico, che è vettoriale, è nullo. Si trasla il campo ponendosi attorno ad un particolare vuoto. Si introducono due campi reali  $\sigma$  ed  $\eta$ , e si parametrizza il campo tramite

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma + i\eta)$$

Introducendo la parametrizzazione in  $\mathcal{L}_1$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 \\ & + qvA^\mu \partial_\mu\eta + \text{termini di interazione} \end{aligned}$$

I termini di interazione sono cubici e quadratici nei campi, ed è anche presente un termine costante. Il secondo termine, che rompe la simmetria di gauge se aggiunto esplicitamente ad una lagrangiana con simmetria  $U(1)$ , ora compare a seguito della rottura di simmetria ed è il termine di massa del bosone. Se non ci fosse rottura, allora il valore di aspettazione sarebbe nullo  $v = 0$  e tale termine di massa scomparirebbe.

Questo risultato è ben gradito, ma sorgono due problemi. L'ultimo termine mescola variabili canoniche  $A^\mu$  e  $\partial_\mu\eta$  che si vorrebbero tenere separate: esso non è un termine di interazione perché ha la stessa dimensione dei termini cinetici, ma pone difficoltà nella quantizzazione del campo. Inoltre, la lagrangiana  $\mathcal{L}_1$  presenta un campo complesso  $\phi$  con due gradi di libertà ed un bosone vettoriale  $A^\mu$  a massa nulla con altrettanti gradi di libertà (il terzo grado è eliminato dall'invarianza di gauge): si hanno quattro gradi di libertà. La lagrangiana  $\mathcal{L}_2$  ha due campi reali  $\sigma$  ed  $\eta$  per un grado di libertà ciascuno ed un bosone vettoriale massivo  $A^\mu$  con tre gradi di libertà: si hanno cinque gradi di libertà. In quest'ultima parametrizzazione si sono introdotti dei gradi di libertà spuri poiché ridefinire i campi non può cambiare il numero di gradi di libertà della teoria.

Il termine che mescola i campi proviene dalla parametrizzazione all'interno della derivata covariante

$$[D_\mu\phi]^*[D^\mu\phi] = (\partial_\mu + iqA_\mu)(v + \sigma + i\eta)(\partial^\mu - iqA^\mu)(v + \sigma - i\eta)$$

I termini di interesse per il campo  $\eta$  sono

$$(i\partial_\mu\eta)(-iqA^\mu v) + (iqA_\mu v)(-i\partial^\mu\eta) = 2qvA_\mu \partial^\mu\eta$$

mentre per  $\sigma$  si ha

$$(\partial_\mu\sigma)(-iqA^\mu v) + (iqA_\mu v)(\partial^\mu\sigma) = 0$$

dunque tale campo non si mescola con il bosone  $A^\mu$ .

Bisogna risolvere i problemi accennati. In una teoria con simmetria di gauge, si ha la libertà di scegliere il gauge. Si sceglie il gauge unitario e si parametrizza il campo

$$A^\mu = B^\mu(x) - \frac{1}{v}\partial^\mu\xi(x), \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)]e^{i\frac{\xi(x)}{v}}$$

[r] calcoli per segno derivata

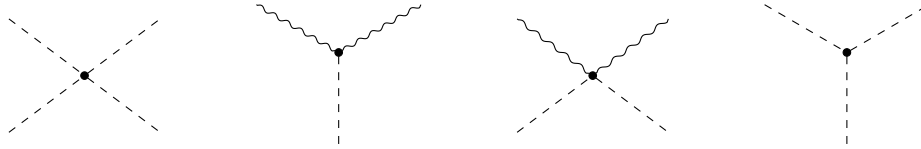
dove si introducono due campi reali  $\rho$  e  $\xi$ . Questa scelta di gauge rimuove il grado di libertà

spurio e mantiene l'unitarietà della teoria. Dalla prima lagrangiana si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\rho^2 \\ & - \frac{1}{4}\lambda\rho^4 + \frac{1}{2}q^2B_\mu B^\mu(2v\rho + \rho^2) - \lambda v\rho^3\end{aligned}$$

dove  $B^{\mu\nu}$  è il tensore di campo del bosone  $B^\mu$ . I termini della prima riga si possono identificare con la lagrangiana libera di un bosone vettoriale  $B^\mu$  di massa  $|qv|$  ed un bosone scalare  $\rho$  di massa  $\sqrt{2\lambda}v^2$  (il bosone di Higgs). Nella seconda riga, non sono più presenti termini misti, ma compaiono termini di auto-interazione cubici e quartici, e termini di interazione tra due bosoni vettoriali e un bosone scalare, oppure due bosoni scalari. Si noti l'assenza del campo  $\xi$  per cui il numero di gradi di libertà ritorna a quattro. Tramite la scelta di gauge unitaria si elimina il grado di libertà spurio.

La teoria è data da un bosone vettoriale  $B^\mu$  massivo e reale (quindi neutro), un bosone scalare  $\rho$  (un campo di Klein-Gordon) massivo e reale, e termini di interazione. I vertici corrispondenti sono



Il fenomeno per cui un bosone vettoriale acquisisce massa senza rompere l'invarianza di gauge della densità di lagrangiana è noto come meccanismo di Higgs. In questo modo il problema del bosone di Goldstone è risolto.

La dinamica prescinde dalla parametrizzazione dei campi. La prima lagrangiana non si può quantizzare dopo la rottura spontanea di simmetria perché si avrebbe una massa immaginaria e non si potrebbe fare la teoria delle perturbazioni. La seconda lagrangiana si può quantizzare ed utilizzare la teoria delle perturbazioni, ma i gradi di libertà non sono corretti e si ha un termine che mescola le variabili canoniche dei campi. La terza lagrangiana si può quantizzare, si può applicare la teoria delle perturbazioni e non presenta gradi di libertà spuri.

**Forma della trasformazione di gauge.** La prima lagrangiana ha una chiara simmetria  $U(1)$  locale, mentre nella seconda lagrangiana questa non è apparente, ma è chiaro lo spettro della teoria. La trasformazione di gauge del campo  $\phi$  è

$$\phi'(x) = \cos[q\alpha(x)]\phi + i\sin[q\alpha(x)]\phi$$

Inserendo la parametrizzazione si ha

$$\begin{aligned}(v + \sigma + i\eta)' &= [v + \sigma + i\eta] \cos \alpha + i[v + \sigma + i\eta] \sin \alpha \\ &= [(v + \sigma) \cos \alpha - \eta \sin \alpha] + i[\eta \cos \alpha + (v + \sigma) \sin \alpha]\end{aligned}$$

Pertanto, la parte reale e la parte immaginaria si trasformano come

$$\sigma' = (v + \sigma) \cos \alpha - \eta \sin \alpha - v, \quad \eta' = \eta \cos \alpha + (v + \sigma) \sin \alpha$$

mentre il campo bosonico si trasforma come

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \alpha$$

La trasformazione di gauge è irriconoscibile, ma si può comprendere facilmente lo spettro e la dinamica della teoria.

## Lezione 20

### 11.3 Modello di Glashow–Weinberg–Salam

Il modello di Glashow non è normalizzabile. Weinberg applicò il meccanismo di Higgs a tale modello per ottenere dei bosoni massivi. Infatti, una teoria di Yang–Mills con rottura spontanea di simmetria è rinormalizzabile ed unitaria.

mar 09 gen  
2024 10:30

**Lagrangiana simmetrica.** La lagrangiana della teoria elettrodebole è invariante per simmetria SU(2) di isospin debole e simmetria U(1) ipercarica debole. La componente leptonica è pari a

$$\mathcal{L}^L = i[\bar{\Psi}^L \not{D}\Psi^L + \bar{\psi}_l^R \not{D}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{D}\psi_{\nu_l}^R]$$

dove l'apice L sulla lagrangiana indica "leptone" e le derivate covarianti sono

$$\begin{aligned} D^\mu \Psi^L &= \left[ \partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_i W_i^\mu - \frac{1}{2}ig' B^\mu \right] \Psi^L \\ D^\mu \psi_l^R &= [\partial^\mu - ig' B^\mu] \psi_l^R \\ D^\mu \psi_{\nu_l}^R &= \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R \end{aligned}$$

Si hanno molti parametri liberi della teoria che si fissano tramite gli esperimenti. I campi dei bosoni vettoriali si trasformano sotto la rispettiva simmetria di gauge locale: i bosoni  $W$  con SU(2) mentre il bosone  $B$  con U(1), e rimangono invariati per l'altra trasformazione.

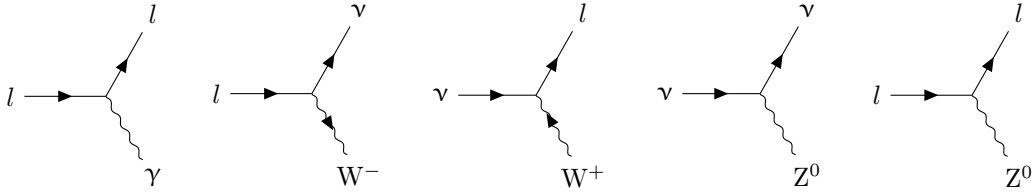
La lagrangiana libera dei campi fermionici è

$$\mathcal{L}_0^L = i[\bar{\Psi}^L \not{\partial}\Psi^L + \bar{\psi}_l^R \not{\partial}\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R \not{\partial}\psi_{\nu_l}^R]$$

La lagrangiana di interazione tra fermioni e bosoni è

$$\mathcal{L}_I^{LB} = -J_{EM}^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}[J_\mu^\dagger W^\mu + J^\mu W_\mu^\dagger] - \frac{g}{\cos\theta} \left[ J_3^\mu - \frac{\sin^2\theta}{|q_l|} J_{EM}^\mu \right] Z_\mu$$

i cui vertici sono



I primi tre diagrammi, cioè i primi due termini di interazione, sono il potere descrittivo del modello di Glashow. L'ultimo termine, pari agli ultimi due diagrammi, è un termine predittivo: la corrente neutra. La lagrangiana dei campi bosonici (sia libera che di interazione bosone-bosone) è

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G_i^{\mu\nu}$$

La parte di questa lagrangiana che descrive i campi liberi si può riscrivere in termini dei campi fisici  $A^\mu$ ,  $W^\mu$ ,  $W_\mu^\dagger$  e  $Z^\mu$  come

$$\mathcal{L}_0^B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)_{\mu\nu}(F_W)^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}$$

dove  $F^{\mu\nu}$  è il tensore di campo del fotone, mentre  $F_W^{\mu\nu}$  e  $Z^{\mu\nu}$  sono i tensori di campo dei bosoni dell'interazione debole  $W^\pm$  e  $Z^0$

$$F_W^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu, \quad Z^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$$

**Rottura di simmetria e massa dei bosoni.** Si vuole rompere solamente la simmetria SU(2) lasciando U(1) intatta e bisogna impostare i parametri liberi affinché il fotone rimanga a massa nulla. Siano  $\mu^2 < 0$  e  $\lambda > 0$  per avere rottura spontanea di simmetria. Alla lagrangiana si aggiunge il termine del campo di Higgs  $\Phi$  e della sua interazione con i bosoni mediatori

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

dove si ha

$$D^\mu \Phi = \left[ \partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_j W_j^\mu + ig'Y B^\mu \right] \Phi$$

Il campo di Higgs è un doppietto di isospin. Il doppietto che minimizza la densità di energia classica soddisfa

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{1}{2}v^2$$

Si sceglie il vuoto più comodo

$$\Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

così da rompere la simmetria SU(2). I bosoni acquistano massa con la rottura spontanea di simmetria, mentre i fermioni, i campi di materia, acquisiscono massa dinamicamente tramite l'interazione di Yukawa inserita ad hoc.

Bisogna scegliere dei parametri che non modifichino il fotone. La relazione che lega la carica elettrica, l'isospin debole e l'ipercarica debole è

$$Y = \frac{Q}{|q_l|} - I_3$$

Il campo di Higgs deve essere invariante per una trasformazione U(1) dell'elettromagnetismo  $e^{iQ\alpha(x)}$  al fine di mantenere nulla la massa del fotone. Pertanto, la rottura di simmetria deve avvenire solamente sulle componenti elettricamente neutre così che si conservi la carica. La componente inferiore  $\phi_b^0$  del doppietto  $\Phi$  ha numero quantico di isospin pari a  $I_3 = -\frac{1}{2}$ , quindi si assegna al doppietto un numero quantico di ipercarica pari a  $Y = \frac{1}{2}$ : in questo modo la componente inferiore è elettricamente neutra.

Applicare il gauge unitario a tre campi risulta più complicato. Dunque, si parametrizza un campo di Higgs arbitrario in termini della sua deviazione dal campo del vuoto

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{bmatrix}$$

I campi  $\eta_i$  sono l'equivalente del campo  $\xi$  nel meccanismo di Higgs e sono campi che scompaiono, mentre  $\sigma$  (che in precedenza è  $\rho$ ) è il bosone di Higgs. In questo modo si fornisce massa ai bosoni W e Z (senza fare il calcolo): i campi spuri (detti ghost) spariscono ed i loro gradi di libertà fluiscono nella massa dei bosoni.

**Interazione di Yukawa e massa dei leptoni.** Per fornire massa ai leptoni si introduce l'interazione di Yukawa: un'interazione tra due fermioni ed un bosone. Si consideri la lagrangiana di interazione leptone-Higgs

$$\mathcal{L}^{LH} = -g_l [\bar{\Psi}_l^L \psi_l^R \Phi + \Phi^\dagger \bar{\psi}_l^R \Psi_l^L] - g_{\nu_l} [\bar{\Psi}_l^L \psi_{\nu_l}^R \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\psi}_{\nu_l}^R \Psi_l^L]$$

Si assegna una massa ai neutrini, però manca un termine che descrive le oscillazioni dei neutrini. Si ha un doppietto, che è una rotazione tramite SU(2), pari a

$$\tilde{\Phi}(x) = -i[\Phi^\dagger(x)\tau_2]^\top = \begin{bmatrix} \phi_b^* \\ -\phi_a^* \end{bmatrix}$$

Si è liberi di introdurre qualsiasi interazione che rispetti la simmetria. Bisogna dimostrare che la lagrangiana sopra sia invariante sotto trasformazione SU(2)  $\times$  U(1). Le regole di trasformazione di isospin ed ipercarica per i campi leptonici sono

$$(\Psi_l^L)' = \exp\left[\frac{1}{2}ig\alpha_i(x)\tau_i\right]\Psi_l^L, \quad (\bar{\Psi}_l^L)' = \bar{\Psi}_l^L \exp\left[-\frac{1}{2}ig\alpha_i(x)\tau_i\right]$$

$$\psi' = \exp[ig'Y\beta(x)]\psi(x), \quad Y = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \Psi_l^L \\ -1, & \psi_l^R \\ 0, & \psi_{\nu_l}^R \end{cases}$$



mentre per il campo di Higgs sono

$$\begin{aligned}\Phi' &= \exp\left[\frac{1}{2}ig\alpha_i(x)\tau_i\right]\Phi, \quad (\Phi^\dagger)' = \Phi^\dagger \exp\left[-\frac{1}{2}ig\alpha_i(x)\tau_i\right] \\ \Phi' &= \exp[ig'Y\beta(x)]\Phi, \quad Y = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La prima parentesi della lagrangiana segue direttamente essere invariante notando che il campo aggiunto ha numeri quantici opposti. Per la seconda parentesi si calcola la trasformazione infinitesima

$$\delta\Phi = \Phi' - \Phi = \frac{1}{2}ig\alpha_i\tau_i\Phi, \quad \delta\Phi^\dagger = -\frac{1}{2}ig\alpha_i\Phi^\dagger\tau_i$$

Pertanto

$$\delta\tilde{\Phi} = -i\left[-\frac{1}{2}ig\alpha_i\Phi^\dagger\tau_i\tau_2\right]^\top = -\frac{1}{2}g\alpha_i[\Phi^\dagger(-\tau_2\tau_i^\top)]^\top = \frac{1}{2}g\alpha_i\tau_i[\Phi^\dagger\tau_2]^\top$$

alla seconda uguaglianza si utilizza

$$\tau_i\tau_2 = -\tau_2\tau_i^\top$$

Quindi il campo  $\tilde{\Phi}$  si trasforma come  $\Phi$ . Dunque pure la seconda parentesi è invariante.

**Lagrangiana elettrodebole.** La lagrangiana elettrodebole completa, prima della rottura di simmetria, è data da

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{LH}$$

Dopo la rottura di simmetria, e dunque in termini del gauge unitario

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{bmatrix}$$

la lagrangiana presenta diciotto termini (v. Mandl, §19.1). Le masse delle particelle dipendono tutte dal valore di aspettazione sul vuoto del campo di Higgs

$$m_W = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W}, \quad m_H = \sqrt{2\lambda}v^2 = \sqrt{-2\mu^2}, \quad m_l = \frac{1}{2}vg_l, \quad m_{\nu_l} = \frac{1}{2}vg_{\nu_l}$$

Il bosone di Higgs si accoppia in modo proporzionale alla massa: per scoprire il bosone bisogna utilizzare particelle pesanti.

Il modello di Glashow–Weinberg–Salam è rinormalizzabile. La dimostrazione di rinormalizzabilità e unitarietà è possibile solo tramite regolarizzazione dimensionale ed il metodo funzionale.

**Problema.** Ad oggi, il Modello Standard è in accordo con ogni esperimento, ma si sa che non è il modello finale, poiché non spiega l'energia e la materia oscura e non include la gravità.

## Lezione 21

**Parametri liberi.** La teoria presenta vari parametri liberi

$$g, \quad g', \quad \mu^2, \quad \lambda, \quad g_l, \quad g_{\nu_l}$$

così come varie relazioni

$$g \sin\theta = g' \cos\theta = |q_l|, \quad g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}, \quad \left[\frac{g_W}{m_W}\right]^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

La seconda relazione deriva dal confronto con l'interazione nella teoria di Proca–Yukawa, mentre la terza relazione si ricava dalla tale teoria nel limite  $M_W \rightarrow \infty$  per ottenere la teoria a quattro punti di Fermi: quando la massa nel propagatore è molto maggiore del momento trasferito, l'interazione diventa a quattro punti.

mer 10 gen  
2024 10:30

La rottura spontanea di simmetria fornisce la massa ai bosoni vettoriali. Le masse dei bosoni vettoriali si possono esprimere in termini di tre costanti ben note sperimentalmente: la costante di struttura fine  $\alpha$ , la costante di Fermi  $G_F$  e l'angolo di Weinberg  $\theta_W$ . Sapendo

$$m_W = \frac{1}{2}vg, \quad v = (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}}, \quad g = \frac{|q_l|}{\sin \theta}$$

si ottiene

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \left[ \frac{g_W}{m_W} \right]^2 = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \frac{1}{m_W} \right]^2 = \left[ \frac{|q_l|}{\sin \theta} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{m_W} \right]^2 = \frac{\alpha\pi}{2m_W^2 \sin^2 \theta}$$

pertanto

$$m_W = \left[ \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta}$$

I parametri  $g$ ,  $g'$ ,  $g_l$  e  $g_{\nu_l}$  si possono ottenere solamente dalle masse misurate. Il parametro  $\lambda$  (e così  $\mu^2$ ) si può ricavare dalla massa del bosone di Higgs

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2}$$

**Vertice debole.** Il modello di Glashow descrive l'interazione elettromagnetica e le correnti cariche, e predice la corrente neutra. Tale modello prevede anche un altro fenomeno.

Si consideri lo scattering di un leptone su di un nucleo. Nella teoria elettrodebole esso può avvenire in due canali: il modo elettromagnetico è già noto e quello predetto è il canale debole mediato dal bosone  $Z^0$ . I due vertici sono

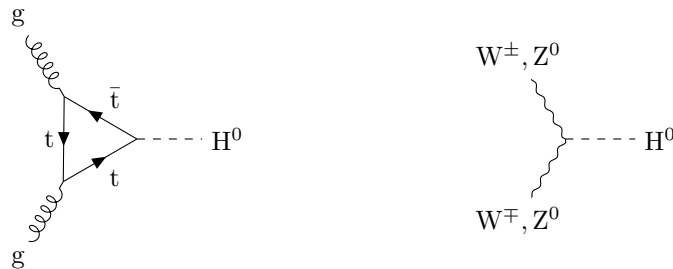
$$-iq_l\gamma^\mu, \quad \frac{-ig\gamma^\mu}{4\cos\theta}[(1-\gamma_5) - 4\sin^2\theta]$$

che corrispondono ai diagrammi



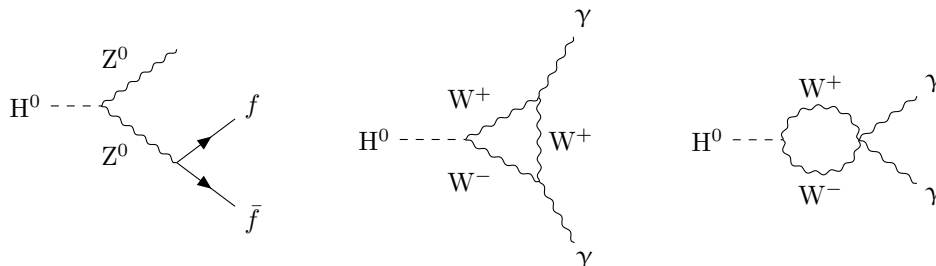
Da questo ci si aspetta che dovrebbero essere presenti più leptoni dati da un campo chirale left-handed in misura dell'ordine di  $10^{-4}$ .

**Osservazione del bosone di Higgs.** Due metodi per produrre il bosone di Higgs sono la fusione di gluoni e la fusione di bosoni vettoriali



Il bosone di Higgs si accoppia con particelle in proporzione alla loro massa, quindi per particelle pesanti la probabilità è maggiore.

Alcuni esempi di decadimenti del bosone di Higgs sono in fermioni ed in fotoni



Osservando i prodotti dei decadimenti si può ricostruire la cinematica così da giungere ad una Breit–Wigner da cui si può estrarre la massa del bosone di Higgs.

### Parte III

## Addenda

### 12 Introduzione alla cromodinamica quantistica

No esame. La classificazione dei leptoni è chiara e semplice

$$\begin{bmatrix} \nu_l \\ l \end{bmatrix}, \quad l = e, \mu, \tau$$

I leptoni sono particelle fondamentali, puntiformi che agiscono solo elettromagnetico e debole. Per gli adroni, la situazione è più complicata. Essi interagiscono anche forte e sono particelle composite. Lo studio delle alte energie cominciò con Ernest Lawrence con il ciclotrone (modernamente si utilizza un sincro-ciclotrone). Si osservarono sempre nuove particelle tutte diverse con qualche regolarità. Si sapeva che il nucleo è composto da protoni e neutroni, e che alcuni nuclei sono instabili. Inoltre era noto che doveva esistere una forza che sovrasta quella elettromagnetica che tiene vicini i nucleoni i quali o sono neutri o positivi. Era noto il decadimento alfa, quello beta (in cui decade il quark d), e quello gamma.

Bjorken pensò che, per studiare il nucleo, lo strumento più semplice da utilizzare è la luce: uno scattering elettromagnetico di un leptone con un nucleo. Un vertice è elettromagnetico che trasporta un momento  $q$ . Aumentando l'energia ed il momento, la scala di grandezza diminuisce  $q^{-1}$ . Si osserva lo scaling di Bjorken: [r] la sezione d'urto con il nucleo può essere parametrizzata tramite dei fattori di forma

$$W_1(q^2 \dots), \quad W_2(q^2 \dots)$$

Quando l'energia aumenta  $q^2 \rightarrow \infty$ , i due fattori di forma diventano solo funzione di una variabile adimensionale  $x$  non cinematica. Questo implica che, ad alte energie, il fotone interagisce con una particella puntiforme perché non si trovano scale sempre più piccole. Feynman introduce i partoni ipotizzando essere i costituenti degli adroni che portano tutto il loro momento. Una teoria di campo prevede che tali particelle puntiformi siano poco interagenti (sempre nel limite di alte energie), cioè praticamente libere. Visto che si fa scattering con un fotone, si può misurare la carica della particella bersaglio: la loro carica è frazionaria  $q = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ . Questi esperimenti riguardano il deep inelastic scattering.

Come Heisenberg introdusse il doppietto di isospin tra protone e neutrone

$$\begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}$$

in quanto la massa è quasi identica e le sezioni d'urto sono le medesime, si propone una simmetria con una particella  $\Lambda$  ulteriore

$$\begin{bmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{bmatrix}$$

Tale particella ha una proprietà di stranezza: il tempo di decadimento è atipicamente lungo. Questa simmetria è rotta perché la particella  $\Lambda$  ha massa molto maggiore del protone e del neutrone. Successivamente, Gell-Mann e Zweig proposero i quark u, d e s con cariche

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}$$

e spin  $\frac{1}{2}$ . In tal modo si può fornire una classificazione delle particelle: i mesoni presentano un quark ed un anti-quark; mentre i barioni presentano tre quark. Il gruppo di simmetria introdotto è SU(3). La teoria è basata sulla teoria dei gruppi. [r] Si considerano le rappresentazioni più basse del gruppo SU(3) del sapore (flavour)

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

cioè un singoletto ed un otteto. Infatti

Quarks	Carica	Stranezza	Particella
$u\bar{d}$	+1	0	$\pi^+$
$\bar{u}d$	-1	0	$\pi^-$
$\frac{u\bar{d}+\bar{u}d}{\sqrt{2}}$	0	0	$\pi^0$
$u\bar{s}$	+1	1	$K^+$
$d\bar{s}$	0	1	$K^0$
$\bar{u}s$	-1	-1	$K^-$
$\bar{d}s$	0	-1	$K$
$\frac{d\bar{d}+u\bar{u}-2s\bar{s}}{\sqrt{3}}$	?	?	$\eta$
$\frac{d\bar{d}+u\bar{u}+s\bar{s}}{\sqrt{3}}$	?	?	$\eta'$

[r] Gell-Mann definì la teoria come *The eightfold way*, ma era statica perché classifica solamente le particelle. Sia per i barioni che per i mesoni, la teoria dei gruppi fornisce molte predizioni teoriche. A meno di rotture di simmetria a causa della massa del quark s, le predizioni furono in accordo con gli esperimenti.

**Quattro quark.** Il modello a quattro quark

$$\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}$$

venne introdotto per cancellare alcune correnti non viste in natura. Il quark c venne scoperto tramite la particelle  $J/\psi$ . I quark sono anch'essi soggetti a mixing

$$d_\theta = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C, \quad s_\theta = s \cos \theta_C - d \sin \theta_C$$

dove  $\theta_C$  è l'angolo di Cabibbo. Il mixing è necessario a descrivere correttamente certe correnti del gruppo di simmetria.

**Simmetria di colore.** Si considerano due particelle

Particella	Spin	Carica	Stranezza
$\Delta^{++}$	$\frac{3}{2}$	2	0
$\Omega^-$	$\frac{3}{2}$	-1	3

La prima particella si può costruire solo come

$$uuu = \Delta^{++}, \quad |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = |\Delta^{++}\rangle$$

Poiché i quark sono anti-simmetrici, essi non possono stare tutti e tre nello stesso stato. Lo stesso problema lo si ha con la seconda particella composta da quark s. Dev'essere presente un'altra proprietà: il colore SU(3). Si anti-simmetrizza in tale numero quantico così da avere una funzione d'onda totale anti-simmetrica:

$$\varepsilon_{ijk} |u_i^j u_j^k u_k^i\rangle$$

[r] La differenza tra i seguenti diagrammi [r] diagr è che è quark non sono osservabili. [r] I quark si rivestono producendo barioni. Il rapporto tra i due diagrammi è il rapporto delle cariche. Tale rapporto è

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow X)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_i q_i^2$$

dove X sono adroni. Il processo è a soglia perché i leptoni devono avere energia sufficiente a produrre un quark ed il suo anti-quark. Il rapporto aumenta a step in base all'energia s del centro di massa. Per i primi tre quark si ha

$$R = (q_u)_k^2 + (q_d)_j^2 + (q_s)_i^2 = \frac{2}{3} \cdot 3$$

Il rapporto è sbagliato di un fattore  $\frac{1}{3}$  perché sono presenti tre colori (per questo si moltiplica per 3). Il numero quantico di colore apre la strada ad una nuova teoria tramite lo scambio dei mediatori del colore cioè la cromodinamica quantistica.

Di seguito si ha il confronto con l'elettrodinamica quantistica

Teoria	QED	QCD
Costante accop.	carica	colore
Mediatore	fotone, $s = 1, m = 0$	gluone, $s = 1, m = 0$
Simmetria	U(1)	SU(3)

Sono presenti solamente otto gluoni perché il singoletto non porta colore.

**Libertà asintotica e confinamento.** La costruzione di una teoria di Yang–Mills per il colore presenta un problema. In generale si utilizza una costante di accoppiamento, ma essa varia con l'energia. Quando si è calcolato il  $[r]$  è presente una parte finita che dipende da  $q^2$ . Si ha il polo di Landau

$$\frac{1}{\alpha_R(q^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \sum_l \ln \frac{q^2}{m_l^2}$$

dove si sommano solamente leptoni. La costante di accoppiamento aumenta arbitrariamente. Se i partoni devono essere liberi, allora alle piccole distanze la teoria dev'essere libera, cioè l'opposto dell'elettrodinamica. Al tempo non erano note tali teorie, ma venne dimostrato che la costante di accoppiamento forte va come

$$\alpha_S(q^2) = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \ln \frac{q^2}{\Lambda^2}}$$

dove  $f$  indica i flavour.  $[r]$  La teoria è libera per grande  $q^2$  cioè piccole dimensioni. A basse energie, la costante di accoppiamento cresce e i quark si accoppiano. La funzione beta della teoria è negativa  $[r]$ .

A grandi distanze tra due quark, l'energia aumenta. Si pensi ad una molla: più si separano gli estremi, più l'energia aumenta e dunque è energeticamente favorita la creazione di una nuova coppia quark–anti-quark.

**Regime non perturbativo.** Discretizzando lo spazio-tempo in un reticolo, la cromodinamica quantistica non presenta divergenze, sebbene il limite  $a \rightarrow 0$  non sia banale. Per calcolare il propagatore bisogna utilizzare l'integrale dei cammini in modo numerico.

L'estrazione degli angoli di mixing necessita delle correzioni forti all'hamiltoniana debole.

## Lezione 22

### 13 Quantizzazione covariante del campo elettromagnetico

gio 11 gen  
2024 10:30

Si veda Mandl, §5. Questa prima parte considera ancora il campo non quantizzato. La lagrangiana del campo elettromagnetico è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

Per la quantizzazione è fondamentale l'invarianza di gauge delle osservabili per la trasformazione di gauge

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

La lagrangiana non è invariante, ma l'azione e le equazioni del moto non cambiano.

Si utilizza il gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

In precedenza si è notato che si può sempre utilizzare il gauge di Lorenz poiché esiste una trasformazione che porta in tale gauge. Tuttavia, il gauge non fissa univocamente il quadri-potenziale perché aggiungere al potenziale una funzione  $g$  tale per cui  $\square g = 0$  soddisfa comunque il gauge.

Si studia l'esistenza della trasformazione. Si consideri

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f \implies \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu - \square f$$

Se esiste una funzione  $f$  tale che

$$\square f = \partial_\mu A^\mu$$

allora  $A'^\mu$  è in gauge di Lorenz. L'esistenza è garantita dai teoremi di esistenza ed unicità delle equazioni differenziali. La forma più generale di tale funzione è

$$f(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y, m=0) \partial_\mu A^\mu + c_+ \Delta^+(x-y, m=0) + c_- \Delta^-(x-y, m=0)$$

Si utilizzano le funzioni di Pauli-Jordan ed il propagatore di Feynman per un campo scalare a massa nulla ricordando che

$$\square \Delta_F(x-y, m=0) = -\delta^4(x-y), \quad \square \Delta^\pm(x-y, m=0) = 0$$

Quindi nello spazio funzionale dei potenziali vettori esistono infiniti gauge di Lorenz che distano tra loro di una funzione con d'Alembertiano nullo. Il gauge di Lorenz fornisce una condizione che permette di passare da quattro gradi di libertà a tre. Nella procedura di quantizzazione si trova un grado di libertà ridondante da interpretare.

**Lagrangiana.** Bisogna passare alla teoria libera per operare la quantizzazione. Non si può svolgere la quantizzazione canonica poiché manca un momento canonico coniugato. La soluzione è data dalla lagrangiana di Fermi

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - J_\mu A^\mu$$

Le equazioni del moto sono

$$\square A^\mu = J^\mu$$

Tale lagrangiana non descrive la teoria di Maxwell poiché le sue equazioni del moto sono

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Affinché la lagrangiana di Fermi descriva l'elettrodinamica classica, bisogna porsi nel gauge di Lorenz. Il vantaggio di questa teoria è dato dai momenti canonici

$$\pi^\nu = \partial_{\dot{A}_\nu} \mathcal{L} = -\dot{A}^\nu$$

che sono tutti diversi da zero. Risulta possibile operare la quantizzazione canonica. La lagrangiana libera proposta da Fermi fu in realtà [r] articolo?

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

ma è equivalente alla parte libera di quella sopra a meno di una divergenza totale.

**Decomposizione in onde piane.** Si decompone il campo in frequenze positive e negative

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \hat{\varepsilon}_r^\mu(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu}]$$

dove  $r = 0, 1, 2, 3$  poiché si quantizzano tutti i gradi di libertà del campo elettromagnetico. I versori di polarizzazione sono

$$\varepsilon_{1,2}^\mu = (0, \hat{\varepsilon}_{1,2}(\mathbf{k})), \quad \varepsilon_3^\mu = (0, \hat{\mathbf{k}}), \quad \varepsilon_0^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$$

cioè due trasversi, uno longitudinale ed uno scalare (o temporale). Secondo questi versori si scompone il potenziale vettore. Si nota valere

$$\hat{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \hat{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad \hat{\varepsilon}_{1,2} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \varepsilon_3^\mu k_\mu = -\|\mathbf{k}\| = -\omega_{\mathbf{k}}, \quad \varepsilon_0^\mu k_\mu = \omega_{\mathbf{k}}$$

dove  $r, s = 1, 2, 3$ . La normalizzazione fornisce

$$\varepsilon_r^\mu \varepsilon_{r\mu} = -1, \quad r = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_0^\mu \varepsilon_{0\mu} = 1$$

L'ortonormalità e la completezza danno

$$\varepsilon_r^\mu \varepsilon_{s\mu} = -\delta_{rs} \zeta_r, \quad \sum_{r=0}^3 \zeta_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu = -\eta^{\mu\nu}, \quad \zeta_r = \begin{cases} -1, & r = 0 \\ 1, & r = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Il gauge di Lorenz implica

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu A^\mu &= \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [-i(k_\mu \varepsilon_r^\mu) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + \text{h.c.}] \\ &= \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [i(a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})) e^{-ik^\mu x_\mu} + \text{h.c.}] \end{aligned}$$

Alla seconda riga si sono applicate le relazioni di ortogonalità sopra. Passati in gauge di Lorenz, i versori trasversi  $a_{1,2}(\mathbf{k})$  sono arbitrari e deve valere

$$a_3(\mathbf{k}) = a_0(\mathbf{k})$$

Il gauge abbassa il numero di gradi di libertà. I fotoni longitudinali e scalari sono legati. La ridondanza rimane nel fatto che il gauge non fissa univocamente il potenziale (pari al fatto che  $a_3 = a_0$  è arbitrario). Per questo si permette l'esistenza della componente longitudinale (o equivalentemente di quella scalare). Tuttavia, tale termine non può contribuire alle osservabili. Si studia l'effetto sulle osservabili, in particolare sul tensore di campo. Esso è

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^T + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [-i(k_\mu \varepsilon_\nu^3 - k_\nu \varepsilon_\mu^3) e^{-ik^\mu x_\mu} a_3 - i(k_\mu \varepsilon_\nu^0 - k_\nu \varepsilon_\mu^0) e^{-ik^\mu x_\mu} a_0 + \text{h.c.}]$$

Si verifica che la sommatoria sia nulla. Noto

$$\omega_{\mathbf{k}} \varepsilon_0^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{0}), \quad \omega_{\mathbf{k}} (\varepsilon_0^\mu + \varepsilon_3^\mu) = k^\mu \implies \varepsilon_3^\mu = \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} k^\mu - \varepsilon_0^\mu$$

si ottiene

$$\begin{aligned} k_\mu \varepsilon_\nu^3 - k_\nu \varepsilon_\mu^3 &= k_\mu \left[ \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} k_\nu - \varepsilon_\nu^0 \right] - k_\nu \left[ \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} k_\mu - \varepsilon_\mu^0 \right] \\ &= \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} [k_\mu k_\nu - k_\nu k_\mu] - [k_\mu \varepsilon_\nu^0 - k_\nu \varepsilon_\mu^0] = 0 - [k_\mu \varepsilon_\nu^0 - k_\nu \varepsilon_\mu^0] \end{aligned}$$

La parentesi cancella il secondo addendo della sommatoria: le osservabili fisiche della teoria libera non dipendono dai gradi di libertà longitudinale e scalare.

**Quantizzazione.** Si applica la procedura di quantizzazione canonica

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = -[A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Il commutatore deve necessariamente avere il tensore metrico al fine di rispettare l'invarianza di Lorenz. Esso porta a vari problemi.

Le regole di commutazione canonica degli operatori sono

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k})] = \delta_{rs} \zeta_r \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

Queste regole non sono esattamente quelle dell'oscillatore armonico poiché per  $r = 0$  si ha  $\zeta_r = -1$ . Ciononostante, esiste uno stato di vuoto

$$a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0$$

che è uno stato fondamentale che limita l'energia. L'hamiltoniana è data da

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} [a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3 - a_0^\dagger a_0] = \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

Nonostante il segno negativo, l'energia è definita positiva. Infatti, l'energia di uno stato di singola particella è

$$\begin{aligned} H a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle &= \sum_{\mathbf{p}, s} \omega_{\mathbf{p}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{p}, s} \omega_{\mathbf{p}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{p}) [a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{p}) + \delta_{rs} \zeta_s \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}}] |0\rangle = \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \end{aligned}$$

Alla seconda uguaglianza della prima riga si applica il commutatore. All'ultima uguaglianza si nota  $\zeta_r^2 = 1$ .

Rimane un problema. Si calcola la norma di uno stato con un singolo fotone scalare

$$\langle 0 | a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [-1 + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k})] | 0 \rangle = -1$$

Questa è una violazione dei postulati della meccanica quantistica perché lo spazio di Hilbert (di singola particella) ha una norma definita positiva (inoltre, si noti che lo spazio di Fock è uno spazio di Hilbert). Nella teoria libera, questi sono stati spettro che non corrispondono a gradi di libertà e stati fisici. Il problema si risolve considerando il gauge di Lorenz poiché la teoria non è ancora equivalente all'elettromagnetismo di Maxwell.

Dal punto di vista operatoriale, il gauge di Lorenz non si può applicare a causa delle regole di commutazione covarianti

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{y}, t')] = i D^{\mu\nu}(x - y), \quad D^{\mu\nu}(x - y) = - \lim_{m \rightarrow 0} \eta^{\mu\nu} \Delta(x - y)$$

dove  $\Delta$  è la funzione di Pauli-Jordan. Applicando la condizione ad uno dei due termini nel commutatore, si avrebbe la derivata del propagatore del fotone, ma essa non è identicamente nulla.

Il problema è risolto da Gupta-Bleuler tramite una condizione più debole che definisce gli stati fisici della teoria tramite l'azione dei soli operatori di distruzione

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\phi\rangle_f = 0, \quad {}_f\langle\phi| \partial^\mu A_\mu^{(-)} = 0$$

da cui

$${}_f\langle\phi| \partial_\mu A^\mu |\phi\rangle_f = {}_f\langle\phi| [\partial^\mu A_\mu^{(-)} + \partial^\mu A_\mu^{(+)}] |\phi\rangle_f = 0$$

Non si potrebbe imporre la condizione

$$\partial^\mu A_\mu |\phi\rangle_f = 0$$

poiché considerando il vuoto, si avrebbe zero, ma gli operatori di creazione forniscono uno stato.

In analogia con il campo non quantizzato vale

$$[a_0(\mathbf{k}) - a_3(\mathbf{k})] |\phi\rangle_f = 0$$

Questa relazione definisce gli stati fisici. Applicando la relazione ad uno stato di un fotone scalare si ha

$$[a_0(\mathbf{k}) - a_3(\mathbf{k})] a_0^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = -|0\rangle \neq 0$$

Dunque l'operatore  $a_0^\dagger$  non crea uno stato fisico perché non rispetta la prescrizione di Gupta-Bleuler. Lo stesso vale per l'operatore  $a_3^\dagger$ . Gli operatori longitudinali e scalari non creano stati fisici.

Gli stati fisici sono

$$|0\rangle, \quad (a_{1,2}^\dagger)^n |0\rangle, \quad [a_0^\dagger - a_3^\dagger]^n |0\rangle$$

Gli stati di mezzo sono quelli che derivano da Maxwell. Gli ultimi derivano dal fatto che

$$[(a_0 - a_3), (a_0^\dagger - a_3^\dagger)](\mathbf{k}) = -1 + 1 = 0$$



L'energia di tali stati è

$$\begin{aligned}\langle 0 | (a_0 - a_3) H (a_0^\dagger - a_3^\dagger) | 0 \rangle &= {}_f \langle \phi | (a_3^\dagger a_3 - a_0^\dagger a_0) | \phi \rangle_f = {}_f \langle \phi | a_3^\dagger (a_3 - a_0) | \phi \rangle_f \\ &= - \langle 0 | (a_0 - a_3) a_3^\dagger (a_0 - a_3) (a_0^\dagger - a_3^\dagger) | 0 \rangle = 0\end{aligned}$$

Alla seconda uguaglianza della prima riga si applica

$$[a_0(\mathbf{k}) - a_3(\mathbf{k})] |\phi\rangle_f = 0$$

per cui si possono sostituire i due operatori l'uno con l'altro. All'ultima uguaglianza si applica il commutatore dell'operatore  $a_0 - a_3$ .

Questi stati fisici non danno contributo alle osservabili fisiche. Questa è una ridefinizione dello stato di vuoto: il nuovo stato di vuoto diventa lo stato di vuoto originario — cioè quello in cui non è presente alcuna particella — più tutti gli stati fisici che non contribuiscono all'energia. La ridefinizione è possibile tramite una trasformazione di gauge residua e deriva dalla libertà di aggiungere al potenziale qualsiasi funzione  $g$  tale per cui  $\square g = 0$ . Altrimenti si possono mantenere gli stati ghost.

I gradi di libertà longitudinali e scalari diventano rilevanti in presenza dell'interazione. Infatti la combinazione degli operatori  $a_0$  e  $a_3$  fornisce la forza tra due particelle cariche che proviene dal propagatore del fotone. Le due cose si conciliano con l'ipotesi adiabatica: lontano dall'interazione il campo è libero e gli stati fantasma non contribuiscono, mentre vicino all'interazione, le combinazioni degli operatori portano all'interazione tramite fotoni virtuali. Le parti fantasma forniscono il campo coulombiano: due particelle cariche si scambiano mediatori virtuali.

**Esercizio.** Date le regole di commutazione canonica del campo

$$[A_\mu, \dot{A}_\nu]$$

derivare le regole di commutazione canonica degli operatori dell'oscillatore armonico

$$[a, a^\dagger]$$

Si utilizzi il fatto che, in termini dei campi, l'operatore di distruzione è

$$a_r(\mathbf{p}) = -\frac{i\zeta_r}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{p}}}} \eta_{\mu\nu} \varepsilon_r^\nu \int d^3x e^{ip^\mu x_\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 A^\mu(x, t)$$

[r] fonte?  
dove si ha

$$\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 = \overset{\rightarrow}{\partial}_0 - \overset{\leftarrow}{\partial}_0$$

## Lezione 23

### 14 Lamb shift

ven 12 gen  
2024 10:30

Le energie dell'atomo di idrogeno sono

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \text{Ry}$$

[r] diagramma

Per  $n = 2$ ,  $l = 0, 1$  e  $s = \frac{1}{2}$  i tre livelli  $p_{\frac{3}{2}}^2$ ,  $p_{\frac{1}{2}}^2$  e  $s_{\frac{1}{2}}^2$  sono degeneri. A questo punto si introduce l'effetto spin-orbita che separa i tre livelli, ma la correzione relativistica unisce due livelli e tornando ad essere degeneri. In Meccanica Quantistica non si può spiegare tale degenerazione, non si conosce alcuna simmetria residua. Nella teoria di Dirac, divisioni simili si ottengono in modo naturale, ma comunque non si ottiene la degenerazione. In verità, i due livelli non sono degeneri, ma presentano il Lamb shift, una differenza di energia pari a

$$\Delta E_L = 1060 \text{ MHz}$$

La spiegazione venne data da Bethe tramite la teoria quantistica dei campi: l'origine della divisione proviene dall'auto-energia dell'elettrone. Ci sono correzioni ancora più piccole che provengono dalla polarizzazione del vuoto. Bethe tratta la rinormalizzazione della massa in modo non relativistico e si dista poco dall'esperimento che invece è perfettamente descritto dalla trattazione relativistica.

**Rinormalizzazione della massa per l'elettrone libero.** Si è studiata la rinormalizzazione della massa per un leptone libero, ma in questo caso si ha un elettrone in interazione. Non si possono sostituire le variabili fisiche e poi rinormalizzare perché in tal modo si considerano dei termini più volte.

Alla rinormalizzazione della massa nello stato legato bisogna sottrarre la rinormalizzazione della particella libera. Tale affermazione è delicata perché si sottraggono quantità divergenti, tuttavia le divergenze sono logaritmiche e la loro differenza è il logaritmo del rapporto (in modo non formale).

Si consideri l'hamiltoniana classica

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) - \frac{q_0}{m_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = H_0 + H_I$$

dove si considera la sostituzione minimale. Visto che non si è in regime relativistico, non si ha lo sviluppo di Dyson, ma si utilizza la teoria delle perturbazioni. Il termine  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  descrive solamente fotoni e dunque non contribuisce alla rinormalizzazione della massa.

Si utilizza la teoria delle perturbazioni. Per l'elettrone libero, si ha

$$\delta E_n = \langle n | H_I | n \rangle - \sum_{\alpha \neq n} \frac{\langle n | H_I | \alpha \rangle \langle \alpha | H_I | 0 \rangle}{E_\alpha - E_n}$$

dove  $|n\rangle$  sono un insieme completo. Il primo termine è nullo poiché si hanno fotoni [r]. Lo stato intermedio  $|\alpha\rangle$  possiede un solo fotone poiché l'hamiltoniana è lineare nel campo  $\mathbf{A}$ . Dunque

$$|\alpha\rangle = |p', 1\gamma\mathbf{k}\rangle = |p'\rangle a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$$

Dunque si ha

$$\delta E_n = -\frac{q_0^2}{m_0^2} \sum_{\mathbf{p}'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \frac{\langle p | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | \alpha \rangle \langle \alpha | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | p \rangle}{\frac{p'^2}{2m_0} + \|\mathbf{k}\|^2 - \frac{p^2}{2m}}$$

Visto che la trattazione è non relativistica, allora  $\|k\|^2 \ll 1$  e quindi  $p' \approx p$ . Il primo elemento di matrice dell'integrando è

$$\begin{aligned} \langle p | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | \alpha \rangle &= \int d^3x \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \langle 0 | \mathbf{A} a_r^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle \cdot \mathbf{p}' \frac{e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \\ &= \frac{1}{V} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3x e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')} e^{-ik^\mu x_\mu} \hat{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k}) e^{i\omega t} \hat{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}' \end{aligned}$$

[r] segni esponenziale

Alla seconda riga si utilizza il gauge di Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  in cui si ha

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{q}, r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{q}}}} [\hat{\epsilon}_r a_r(\mathbf{q}) e^{-iq^\mu x_\mu} + \hat{\epsilon}_r a_r^\dagger(\mathbf{q}) e^{iq^\mu x_\mu}]$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \delta E_n &= -\frac{q_0^2}{m_0^2} \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}^2} \epsilon_{r,i} p_i \epsilon_{r,j} p_j = -\frac{q_0^2}{16\pi^3 m_0^2} \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \sum_r (\epsilon_r^i \epsilon_r^j) p^i p^j \\ &= -\frac{q_0^2}{16\pi^3 m_0^2} \int \frac{d^3k}{\|k\|^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] \|p\|^2 = -\frac{q_0^2}{16\pi^3 m_0^2} \frac{2}{3} \|p\|^2 4\pi \int dk \frac{\|k\|^2}{\|k\|^2} \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\|p\|^2}{m_0^2} \int dk \end{aligned}$$

alla seconda riga si ricorda

$$\sum_r (\varepsilon_r^i \varepsilon_r^j) = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\|k\|^2}$$

e si nota

$$\int k_1^2 f(|k|^2) = \int k_2^2 f(|k|^2) = \int k_3^2 f(|k|^2) = \frac{1}{2} \int \|k\|^2 f(\|k\|^2)$$

La divergenza della rinormalizzazione dell'energia  $\delta E_n$  è lineare [r], come suggerito dalla divergenza superficiale.

L'hamiltoniana è [r]

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) - \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{p^2}{2m} \frac{\delta m}{m} = H_0 + H'_I$$

Si vede da dove arriva l'ultimo termine. La massa bare è  $m_0 = m - \delta m$ , pertanto

$$\frac{p^2}{2(m - \delta m)} = \frac{p^2}{2m \left(1 - \frac{\delta m}{m}\right)} = \frac{p^2}{2m} \left(1 + \frac{\delta m}{m}\right) + o(\delta m)$$

In questo caso, l'elemento di matrice diagonale non è nullo a causa del secondo termine nell'hamiltoniana di interazione. Inoltre si utilizza  $q$  al posto di  $q_0$  poiché si commettono errori di ordine superiore. La rinormalizzazione dell'energia nel caso libero è

$$\begin{aligned} \delta E_n^{\text{lib}} &= \langle p | H'_I | p \rangle - \sum_{\alpha \neq n} \frac{\langle p | H'_I | \alpha \rangle \langle \alpha | H'_I | p \rangle}{E_\alpha - E_n} = \frac{p^2}{2m} \frac{\delta m}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{p^2}{m^2} \int d^3 k \\ &= \frac{p^2}{2m} \left[ \frac{\delta m}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{m} \int dk \right] \end{aligned}$$

Al primo addendo contribuisce solo il secondo addendo dell'hamiltoniana di interazione. Si sceglie una particolare rinormalizzazione e la scala scelta è  $\delta E = 0$ . In questo modo si sceglie anche lo schema di rinormalizzazione della massa per avere

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi} \int dk$$

**Rinormalizzazione della massa per l'elettrone legato.** Si consideri un elettrone nell'atomo. L'insieme degli stati  $|\alpha\rangle$  dev'essere ortonormale e completo. In Meccanica Quantistica le auto-funzioni dello stato legato non sono complete da sole, ma bisogna considerare anche il continuo di stati (in particolari le auto-funzioni radiali).

La correzione all'energia all'interno dell'atomo è

$$\delta E_n = \langle n | \frac{p^2}{2m} \frac{\delta m}{m} | n \rangle - \frac{q^2}{m^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V \sum_\alpha \frac{\langle n | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | m, 1\gamma \mathbf{k} \rangle \langle m, 1\gamma \mathbf{k} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | n \rangle}{E_m + \|k\| - E_n}$$

L'elemento di matrice dell'integrando è

$$\langle n | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | m, 1\gamma \rangle = \langle n | \hat{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t} | m \rangle = \langle n | \hat{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} | m \rangle e^{i\omega t}$$

alla seconda uguaglianza si applica l'approssimazione di dipolo

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sim 1, \quad \frac{1}{k} \sim \lambda \gg r_0$$

La correzione dovuta al termine lineare nel campo è

$$\begin{aligned} \delta E_n^{(A)} &= -\frac{q^2}{m^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V \frac{1}{2V\omega} \sum_{m,r} \frac{\langle n | \varepsilon_i p_i | m \rangle \langle m | \varepsilon_j p_j | n \rangle}{E_m + \|k\| - E_n} \\ &= -\frac{q^2}{m^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{3\|k\|} \sum_m \frac{\langle n | \mathbf{p} | m \rangle \cdot \langle m | \mathbf{p} | n \rangle}{E_m + \|k\| - E_n} \\ &= -\frac{2\alpha}{3\pi m^2} \sum_m \int dk \frac{k}{E_m + k - E_n} |\langle m | \mathbf{p} | n \rangle|^2 \end{aligned}$$

La correzione dell'energia derivante dal termine di correzione di massa è

$$\delta E_n^{(\delta)} = \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{1}{2m^2} \sum_m |\langle m | \mathbf{p} | n \rangle|^2 \int d^3k$$

La somma delle due correzioni è la correzione nell'atomo

$$\delta E_n^{\text{atomo}} = \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{m^2} \sum_m \int dk \frac{E_m - E_n}{E_m + \|k\| - E_n} |\langle m | \mathbf{p} | n \rangle|^2$$

v. Mandl eq (9.82)

Sebbene si consideri la normalizzazione della massa, la quantità diverge logaritmicamente. Si introduce un cut-off  $\Lambda$  sull'energia del fotone. Dunque

$$|E_m - E_n| \ll \Lambda$$

Pertanto

$$\int dk \frac{E_m - E_n}{E_m + \|k\| - E_n} \sim (E_m - E_n) \ln \frac{\Lambda}{|E_m - E_n|}$$

La presenza ancora di una divergenza sebbene si sia normalizzata la massa è dovuta alla trattazione non relativistica: oltre una certa energia la trattazione non relativistica non è applicabile. La scala d'energia a cui porre il cut-off è la massa dell'elettrone.

La correzione nell'atomo è

$$\delta E^{\text{atomo}} = \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{m^2} \sum_m |\langle m | \mathbf{p} | n \rangle|^2 (E_m - E_n) \ln \frac{m}{|E_m - E_n|}$$

Calcolare la differenza di energia si può fare in modo numerico, ma analiticamente si può considerare che il logaritmo varia lentamente. Si utilizza un valor medio

$$\langle E_m - E_n \rangle \approx 17.8 \text{ Ry}, \quad \ln \frac{m}{\langle E_m - E_n \rangle} \approx 7.6$$

Gli stati virtuali che contribuiscono maggiormente sono gli stati del continuo perché quelli legati sono minori di 1 Ry. L'energia è comunque non relativistica e dunque l'approssimazione è corretta.

La somma nella correzione nell'atomo è

$$\begin{aligned} S &= \sum_m (E_m - E_n) \langle n | \mathbf{p} | m \rangle \cdot \langle m | \mathbf{p} | n \rangle \\ &= \sum_m [\langle n | \mathbf{p} H | m \rangle \langle m | \mathbf{p} | n \rangle - \langle n | \mathbf{p} | m \rangle \langle m | \mathbf{p} H | n \rangle] \\ &= \frac{1}{2} \sum_m [\langle n | \mathbf{p} H | m \rangle \langle m | \mathbf{p} | n \rangle - \langle n | \mathbf{p} | m \rangle \langle m | \mathbf{p} H | n \rangle \\ &\quad - \langle n | H \mathbf{p} | m \rangle \langle m | \mathbf{p} | n \rangle + \langle n | \mathbf{p} | m \rangle \langle m | H \mathbf{p} | n \rangle] \\ &= \frac{1}{2} \langle n | ([\mathbf{p}, H] \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot [\mathbf{p}, H]) | n \rangle = -\frac{1}{2} \langle n | [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, H]] | n \rangle \end{aligned}$$

[r] calcoli

Alla seconda uguaglianza della prima riga si nota che

$$H |m\rangle = E_m |m\rangle$$

alla seconda riga si aggiunge  $E_m - E_n$  e poi si divide per 2.

## Lezione 24

Considerato

$$[\mathbf{p}, f(q)] = -i\nabla f(q)$$

si ha

$$[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, f(\mathbf{r})]] = -i[\mathbf{p}, \nabla f(r)] = (-i)^2 \nabla^2 f(\mathbf{r})$$

lun 15 gen  
2024 10:30

Dato

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad V(r) = -q\phi(r), \quad [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, H]] = -\nabla^2 V = q\nabla^2 \phi$$

La legge di Gauss diventa

$$\mathbf{E} = -q\nabla\phi \implies \rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi = Zq\delta^3(\mathbf{x})$$

La somma diventa

$$S = \frac{Zq^2}{2} \int d^3x \psi_n^*(x) \delta^3(\mathbf{x}) \psi_n(x) = \frac{Zq^2}{2} |\psi_n(0)|^2$$

Solamente gli stati in onda s hanno funzione d'onda apprezzabilmente diversa da zero nell'origine. La correzione all'energia è

$$\delta E = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \frac{Zq^2}{2} |\psi_n(0)|^2 \ln \frac{m}{\langle E_m - E_n \rangle}$$

La densità di probabilità è

$$|\psi_{nl}(0)|^2 = \delta_{l0} \frac{1}{\pi n^3 r_0^2}, \quad r_0 = \frac{1}{\alpha m}$$

mentre la correzione all'energia è

$$\Delta E_{nl}^{\text{atomo}} = \frac{4Z\alpha^3}{3\pi n^3} \ln \frac{m}{\langle E_m - E_n \rangle} \frac{\alpha^2 m}{2} \cdot 2 = \frac{8Z\alpha^3}{3\pi n^3} \ln \frac{m}{\langle E_m - E_n \rangle} \text{Ry} \delta_{l0}$$

v. eq. 9.87 Mandl. Solamente i livelli in onda s hanno un contributo: le due linee degeneri si separano. La differenza di energia è

$$\delta E(2s^{1/2}) = \frac{8\alpha^3}{3\pi} \frac{1}{8} \frac{\alpha}{4\pi r_0} \ln \frac{m}{\langle E_m - E_n \rangle} \approx 4.26 \text{ eV}$$

con  $Z = 1$  e  $n = 2$ . Per passare in frequenza si utilizza

$$f = \frac{E}{h} = \frac{Ec}{\hbar 2\pi c} \approx 2.42 \times 10^{14} \text{ Hz MeV}^{-1} E$$

Dunque la differenza di energia è

$$\delta E(2s^{1/2}) - \delta E(2p^{1/2}) = 1030 \text{ MHz}$$

Mentre il valore sperimentale è circa 1058 MHz.

Tale effetto ha impiegato vario tempo per essere notato. La struttura fine è data da

$$\delta E_{\text{FS}} = \frac{1}{4} m Z \alpha^4 \left[ \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right]$$

ma il Lamb shift ha un ordine  $\alpha$  in più.

**Riassunto.** Una particella carica sente il proprio campo, si ha un'auto-interazione. L'energia di un elettrone è

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \rho \phi \rightarrow \infty, \quad \rho = q\delta(0), \quad \phi = \frac{q}{4\pi|r|}$$

[r]  $\phi$

Per l'atomo si introduce la sostituzione minimale nell'hamiltoniana da cui si ottengono due termini

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$$

Si è tralasciato il primo perché descrive interazione fotone-fotone [r]. Si è fatto un calcolo non relativistico: le sole energie a cui si può arrivare sono inferiori alla massa dell'elettrone. [r]

$$\delta E = Cp^2, \quad C = -\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{m^2} \int_0^\Lambda dk$$

Quando si misura l'energia di un elettrone, il termine sopra è intrinseco e non si può separare: esso è la differenza con la massa bare. Pertanto, il termine

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{2m_0} + Cp^2 = \frac{p^2}{2m_0}(1 + 2m_0C) \approx \frac{p^2}{2m_0(1 - 2m_0C)} \implies m \approx m_0(1 - 2m_0C)$$

contiene la massa fisica dell'elettrone ottenuta dall'esperimento che contiene già il  $\delta E$  sopra. Quando si calcola lo shift dell'energia nell'elettrone nell'atomo, il termine  $C$  è già presente e non bisogna aggiungerlo. La differenza di energia osservata è

$$\Delta E_{nl}^{\text{oss}} = \Delta E_{nl}^{\text{th}} - \langle n | \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2m_0} \right] | n \rangle = \Delta E_{nl}^{\text{th}} - C \langle n | p^2 | n \rangle$$

La parentesi è una differenza di quantità divergenti, ma facendo il calcolo risulta che  $\delta m$  non è divergente.

**Polarizzazione del vuoto.** La polarizzazione del vuoto è una delle correzioni viste nello scattering su di un campo esterno: l'elettrone scambia un fotone virtuale con il nucleo. Si considera il risultato ottenuto in teoria quantistica dei campi. Il potenziale viene modificato

$$V' = -\frac{Zq^2C}{m^2}\delta(\mathbf{x})$$

[r]  $q$

dove la costante  $C$ , non è la costante sopra, ma si ricava dalla parte finita della polarizzazione del vuoto. La correzione all'energia è

$$\delta E_{nl} = \langle n | V' | n \rangle = \frac{Zq^2\alpha}{15\pi m^2} |\psi_{nl}(0)|^2 = \frac{Zq^2\alpha}{15\pi m^2} \frac{1}{\pi n^3 r_0^3} \delta_{l0} = -\frac{8Z\alpha^3}{15\pi n^3} \text{Ry} = -27 \text{ MHz}$$

Lo stato in onda  $s$  si abbassa a causa della schermatura degli altri livelli [r]. Questa correzione non ha il logaritmo dovuto al secondo ordine di teoria delle perturbazioni ed ha un fattore 5 a denominatore: complessivamente è 40 volte più piccolo del Lamb shift.

Gli shift misurati sono così spiegati, ce ne sono altri più piccoli.

## 15 Decadimento del positronio

**Teorema di Yang-Landau.** Yang studiò stati di due fotoni nell'articolo "Decadimento di stati in due fotoni". Si studia il decadimento di una particella a riposo con spin generico (in questo caso 0 e 1). Non si dimostra il teorema, ma si provvedono alcune motivazioni generali. Un esempio di uno stato che decade in due fotoni è il positronio: uno stato legato idrogenoide di positrone ed elettrone  $e^+e^-$ . Un altro esempio è il pione neutro  $\pi^0$ . Nel riferimento solidale allo stato legato, i fotoni sono emessi back-to-back, con stesso momento lineare.

Si hanno quattro casi di elicità per i due fotoni emessi:

Diagramma	Fotone 1	Fotone 2	$J_z$
$\leftarrow \rightarrow$	R	R	0
$\rightarrow \rightarrow$	R	L	2
$\leftarrow \leftarrow$	L	R	-2
$\rightarrow \leftarrow$	L	L	0

[r] Si consideri momento angolare totale nullo  $J = 0$ . La funzione d'onda è scalare e del tipo

$$\psi \sim \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 f(k^2)$$

essa è simmetrica per scambio di fotoni poiché essi sono bosoni. Similmente pure lo stato

$$\psi \sim (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2) \cdot \mathbf{k} f(k^2)$$

La presenza di  $\mathbf{k}$  suggerisce una presenza di un'armonica sferica  $Y_1$  con  $l = 1$ .

Per  $J = 1$  la funzione d'onda è vettoriale. I vettori che si possono costruire sono

$$\psi \sim \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2 f(k)$$

ma essa è anti-simmetrica per scambio. Un altro è

$$\psi \sim (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times \mathbf{k} f(k) = 0$$

poiché i fotoni sono trasversi ed i versori sono perpendicolari tra loro

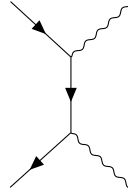
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

Dunque, uno stato con momento  $J = 1$  non può decadere in uno stato a due fotoni.

## Lezione 25

**Decadimento del positronio.** Si veda Sakurai. Il decadimento del positronio è utilizzato nella PET. Essa sfrutta il decadimento  $\beta^+$  in cui si emette un positrone con energia tra 300 keV e 1.2 MeV. Il positrone viaggia un tessuto perdendo energia e incontra un elettrone formando uno stato legato idrogenoide, cioè il positronio  $e^+e^-$ . Il decadimento è dato da

mar 16 gen  
2024 10:30



Nel decadimento si hanno due fotoni emessi back-to-back di energia 511 keV ciascuno poiché il positronio è a riposo.

Il diagramma sopra si può ottenere tramite per simmetria di crossing dallo scattering Compton [r] diagr. Il positronio è uno stato idrogenoide e la massa ridotta è

$$\mu = \frac{1}{2}m_e$$

L'energia dello stato fondamentale è

$$E_0 = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2 \approx -6.8 \text{ eV}, \quad n = 1, \quad l = 0$$

In tale stato, il momento angolare totale corrisponde allo spin totale e può essere  $s = 0, 1$  cioè il singoletto (para-positronio) ed il tripletto (orto-positronio). Per il teorema di Yang, uno stato di momento angolare totale  $j = 1$  non può decadere in due fotoni.

L'elemento di matrice contiene già la somma sulle polarizzazioni del fotone sia di singoletto che di tripletto in parti uguali. [r] Dallo scattering Compton si ha

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4} |\mathcal{M}_{fi}|_{\text{sing}}^2 + \frac{3}{4} |\mathcal{M}_{fi}|_{\text{trip}}^2$$

Gli stati di tripletto sono tre, mentre quelli di singoletto solo uno. Per il decadimento del positronio, il secondo addendo non può contribuire, perciò si elimina. Pertanto, l'elemento di matrice del decadimento si ottiene moltiplicando per 4 quello dello scattering Compton.

Si introduce la velocità del positrone  $v_+$ . Per definizione della sezione d'urto, il tasso di scattering è

$$d\lambda = d\sigma \frac{v_+}{V} = d\sigma v_+ \rho$$

dove il secondo fattore è il flusso e  $\rho$  è la densità di elettroni che si trova un positrone. [r] Si vuole calcolare la vita media. Una volta nello stato legato, l'elettrone si può trovare come

$$\rho = |\psi_{1s}(r=0)|^2 = \frac{1}{\pi(2r_0)^3}$$

L'energia dello stato legato è

$$E_{1s} = \frac{1}{2}\mu\alpha^2 \equiv \frac{1}{2}mv^2 \implies v \sim \alpha$$

Pertanto, le due particelle non sono relativistiche. L'ampiezza di decadimento è

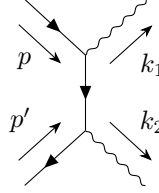
$$\Gamma = \lim_{v_+ \rightarrow 0} 4\sigma_{\text{tot}}^{\text{no pol}} v_+ |\psi_{1s}(0)|^2$$

Il decadimento dell'orto-positronio può avvenire in tre fotoni, ma è soppresso di un fattore  $\alpha$ , dunque la sua vita media è  $\alpha$  volte maggiore del para-positronio.

Si studia come passare all'elemento di matrice non polarizzato di Compton a quello di interesse per il decadimento del positronio. Si consideri lo scattering Compton [r] diagr. Per simmetria di crossing, bisogna avere

$$p = p, \quad k' = k_1, \quad k = -k_2, \quad p' = -p, \quad \varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon_\mu, \quad \bar{u}(\mathbf{p}') \rightarrow \bar{v}(\mathbf{p})$$

corrispondenti a



Quando si è fatta la somma sugli spin si ha

$$\sum_r u(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p}') = \frac{p' + m}{2m} \rightarrow \frac{-p' + m}{2m} = -\frac{p' - m}{2m} = -\sum_r v(\mathbf{p}')\bar{v}(\mathbf{p}')$$

I termini di proiettore sono gli stessi, ma compare un segno negativo. I fotoni rimangono invarianti. Si hanno due elementi di matrice: quello Compton e quello per il decadimento.

**Sezione d'urto.** La sezione d'urto infinitesima è

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^4(p + p' - k_1 - k_2) \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \frac{d^3k_2}{2\omega_2} \frac{m}{E_+} \frac{1}{v_+} X_{\text{decad}}$$

Integrando sull'angolo solido, bisogna stare attenti a considerare configurazioni identiche. Infatti gli angoli di emissione  $\alpha$  e  $\beta$  corrispondono anche a  $\alpha - \pi$  e  $\beta + \pi$ . [r]

Considerato

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_+ - \mathbf{k}_1$$

[r] La sezione d'urto infinitesima è

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(m + E_+ - \omega_1 - \omega_2) \frac{d\Omega_1 \omega_1^2 d\omega_1}{4\omega_1\omega_2} \frac{m}{E_+ v_+} X_{\text{decad}}$$

Integrando sull'energia di un fotone, si ha uno jacobiano pari a

$$|\partial_\omega f| = \frac{m(E_+ + m)}{\omega_1\omega_2}$$

dove  $f$  è l'argomento della delta. La sezione d'urto differenziale è

$$d_\Omega \sigma = X_{\text{decad}} \frac{1}{4\pi^2} \frac{m}{E_+ v_+} \frac{\omega_1^2}{4\omega_1\omega_2} \frac{\omega_1\omega_2}{m(E_+ + m)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\omega_1^2}{E_+ + m} \frac{1}{E_+ v_+} X_{\text{decad}}$$

Integrando sull'angolo solido, la sezione d'urto totale è

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{v_+}{2} \int_\Omega d\Omega d_\Omega \sigma = \frac{1}{2} \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{\omega_1^2}{2m^2} X_{\text{decad}}$$



Il fattore di Compton [r] è

$$X_C = \frac{q^4}{2m^2} \left[ \left( \frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} \right) + 2m^2 \left( \frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right)^2 \right]$$

Considerato

$$k = -k_2, \quad k' = k_1, \quad p = (m, \mathbf{0})$$

si ottiene [r]

$$X_{\text{decad}} = -\frac{q^4}{2m^2} \left[ -\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) - 2m^2 \left( \frac{1}{m\omega_2} + \frac{1}{m\omega_1} \right) + m^2 \left( \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_1} \right)^2 \right] = \frac{q^4}{m^2}$$

Pertanto

$$v_+ \sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\omega_1^2}{2m^4} q^4 \int d\Omega = \frac{\omega_1^2}{32\pi^2} \frac{q^4}{2m^4} 4\pi = \frac{q^4}{16\pi m^2} = \left[ \frac{q^2}{4\pi} \right]^2 \frac{\pi}{m^2} = \frac{\alpha^2 \pi}{m^2} = \pi r_{\text{cl}}^2$$

dove si ha il raggio classico dell'elettrone

$$r_{\text{cl}} = \frac{\alpha}{m} \approx 3 \text{ fm}$$

L'ampiezza di decadimento è

$$\Gamma = \sigma_{\text{tot}} v_+ |\psi_{1s}(0)|^2 = 4\pi r_{\text{cl}}^2 |\psi(0)|^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{1}{\pi} \frac{m^3 \alpha}{8} = \frac{1}{2} m \alpha^5$$

dove si ha

$$\psi_{1s} = -\frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}, \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{2} m \alpha$$

si veda eq. 4.229 Sakurai. Il tempo di vita medio è

$$\tau_{\text{para}} = \frac{2}{m \alpha^5} = \frac{2\hbar}{\alpha^5 m c^2} = \frac{2}{\alpha^5} \frac{\hbar c}{m c^3} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ s}, \quad t_{\text{exp}} \approx 1.27 \times 10^{-10} \text{ s}$$

L'orto-positronio dovrebbe avere una vita media  $\alpha$  volte più lunga del para-positronio, ma questo non è il caso. Infatti, il valore teorico è

$$\tau_{\text{orto}} \approx 10^{-7} \text{ s} \approx 138 \text{ ns}$$