

# Mathematical Physics

14 maggio 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Equazioni lineari alle derivate parziali . . . . .	3
1.1.1	Equazione di continuità . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Equazione delle onde</b>	<b>5</b>
2.1	Equazione del trasporto . . . . .	5
2.1.1	Metodo analitico . . . . .	6
2.1.2	Metodo geometrico . . . . .	7
2.2	Equazione del trasporto con sorgente . . . . .	8
2.3	Equazione delle onde – derivazione dalla fisica . . . . .	10
2.3.1	Derivazione di d'Alembert . . . . .	10
2.3.2	Deduzione di Lagrange . . . . .	11
2.3.3	Deduzione fluidodinamica . . . . .	12
2.4	Simmetrie . . . . .	13
2.5	Quantità conservate . . . . .	14
2.6	Soluzione in una dimensione . . . . .	16
2.7	Unicità . . . . .	19
2.8	Stabilità ai dati iniziali . . . . .	20
2.9	Equazione delle onde sulla semiretta . . . . .	21
2.10	Equazione delle onde sull'intervallo . . . . .	23
2.11	Equazione delle onde con sorgente . . . . .	28
2.12	Equazione delle onde in tre dimensioni . . . . .	30
2.13	Equazione delle onde in due dimensioni . . . . .	34
2.14	Soluzioni radiali all'equazione delle onde . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Equazione del calore o di diffusione</b>	<b>37</b>
3.1	Principio del massimo debole . . . . .	39
3.2	Unicità . . . . .	41
3.3	Stabilità . . . . .	42
3.4	Unicità e stabilità $L^\infty$ tramite il massimo debole . . . . .	42
3.5	Soluzione dell'equazione del calore monodimensionale . . . . .	44
3.6	Soluzioni particolari: soluzioni auto-similari . . . . .	44
3.7	Equazione del calore con diffusione negativa . . . . .	50
3.8	Equazione del calore sulla semiretta . . . . .	51
3.9	Equazione del calore sull'intervallo . . . . .	53
3.10	Equazione del calore monodimensionale con sorgente . . . . .	56
3.11	Equazione del calore in $N$ dimensioni . . . . .	57
3.12	Analogie e differenze con l'equazione delle onde . . . . .	60

<b>4</b>	<b>Equazione di Laplace</b>	<b>61</b>
4.1	Caso monodimensionale . . . . .	62
4.2	Caso bidimensionale – monodimensionale complesso . . . . .	62
4.3	Caso generale . . . . .	63
4.4	Unicità con Dirichlet o Neumann . . . . .	65
4.5	Comportamento della soluzione all'interno del dominio . . . . .	67
4.6	Unicità e stabilità per Dirichlet . . . . .	69
4.7	Identità di rappresentazione e soluzione all'equazione di Laplace e Poisson . . . .	73
4.7.1	Funzioni di Green in un dominio $D$ . . . . .	75
4.7.2	Soluzione all'equazione di Laplace con dati al bordo di Dirichlet . . . . .	76
4.7.3	Soluzione all'equazione di Poisson con dati al bordo di Dirichlet . . . . .	77
4.7.4	Soluzione all'equazione di Laplace e Poisson con dati al bordo di Neumann . . . .	77
4.7.5	Proprietà delle funzioni di Green . . . . .	78
4.8	Calcolo delle funzioni di Green . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Distribuzioni</b>	<b>82</b>
5.1	Distribuzioni regolari . . . . .	83
5.2	Distribuzioni singolari . . . . .	83
5.3	Derivata . . . . .	83
5.4	Supporto . . . . .	85
5.5	Convergenza debole . . . . .	85
5.6	Propagatore del calore . . . . .	86
5.7	Soluzione debole . . . . .	87
5.8	Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Equazione del trasporto non lineare</b>	<b>90</b>
6.1	Sorgente non lineare . . . . .	90
6.2	Velocità dipendente dalla soluzione . . . . .	91
6.3	Tempo di catastrofe . . . . .	93
6.4	Soluzione dopo la catastrofe . . . . .	95

## Lezione 1

La fisica matematica è la branca della matematica che studia con particolare attenzione le strutture matematiche ricorrenti in diversi modelli fisici.

Il corso ha quattro capitoli: onde, calore, funzioni armoniche e non-linearità.

## 1 Introduzione

Si consideri l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

$$d_t^2 x + \omega^2 x = 0, \quad x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto x(t)$$

con le condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ ,  $d_t x(0) = v_0$  e  $\omega^2 > 0$ . La soluzione è

$$x(t) = A(x_0, v_0) \cos(\omega t + q(x_0, v_0))$$

Si supponga che l'oscillatore dipenda anche da una variabile  $s$ :

$$x : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, s) \mapsto x(t, s)$$

Formalmente, si ha la stessa equazione differenziale

$$\partial_t^2 x + \omega^2 x = 0$$

La dipendenza da  $s$  interessa per capire quanti dati iniziali bisogna fornire per ottenere una soluzione unica. L'equazione differenziale è parametrizzata da  $s$  che non viene coinvolta nell'equazione. Le condizioni iniziali devono essere funzioni di  $s$ . La soluzione diventa

$$x(s, t) = A(x_0(s), v_0(s)) \cos(\omega t + q(x_0(s), v_0(s)))$$

dove  $x(0, s) \equiv x_0(s)$  e  $\partial_t x(0, s) \equiv v_0(s)$ . Per ottenere l'unicità, bisogna fissare  $s$ .

### 1.1 Equazioni lineari alle derivate parziali

**Definizione.** Un operatore  $L$  che agisce su funzioni è detto lineare se per ogni funzione  $u_1$  e  $u_2$  in un opportuno spazio vale

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dal punto di vista modellistico, per un operatore lineare, la somma di soluzioni è ancora soluzione.

**Definizione.** Una equazione differenziale alle derivate parziali ("PDE", partial differential equation) è lineare omogenea se è data dal kernel (nucleo) di un operatore lineare  $L$ :

$$L(u) = 0$$

Se si vuole invertire l'operatore per trovare la soluzione

$$L(u) = f \implies u = L^{-1}(f)$$

si dice PDE con sorgente (cioè PDE non omogenea). Per sorgenti, la somma di soluzioni non è soluzione.

**Esempio.** Un esempio di operatore lineare è il laplaciano

$$L = \nabla^2 \equiv \sum_i \partial_{x_i}^2$$

Ciò si dimostra notando che la derivata (e la somma) è un operatore lineare a sua volta.

**Nota.** La derivata parziale si può anche indicare come  $\partial_x u \equiv u_x$ . Invece, la derivata totale viene scritta per esteso.

**Esempio.** Si consideri

$$\nabla^2 u = 0$$

La somma di soluzioni è ancora soluzione. Viceversa, considerato

$$\nabla^2 u = 1$$

la somma di soluzioni non è più soluzione. Infatti, si considerino  $u_1$  e  $u_2$  soluzioni; allora

$$\nabla^2(u_1 + u_2) = \nabla^2 u_1 + \nabla^2 u_2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

**Esempio.** Si risolve l'equazione

$$\partial_x^2 u(x, y) = 0$$

Segue

$$\partial_x(\partial_x u(x, y)) = 0 \implies \partial_x u(x, y) = f(y)$$

e similmente

$$u(x, y) = f(y)x + g(y)$$

**Equazioni di Maxwell.** Si sono già viste delle PDE, cioè le equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \end{cases}$$

Esse non sono equazioni chiuse perché bisogna aggiungere come la materia interagisce con il campo elettromagnetico, cioè la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Da queste equazioni si può ritrovare l'equazione delle onde. Ricordando

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

(dimostrare questa relazione per esercizio) da cui

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{1}{c} \partial_t (\nabla \times \vec{B}) \\ \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right) \\ 4\pi \nabla \rho - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{4\pi}{c^2} \partial_t \vec{J} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \\ \partial_t^2 \vec{E} - c^2 \nabla^2 \vec{E} &= -4\pi \partial_t \vec{J} - 4\pi c^2 \nabla \rho \end{aligned}$$

dove il primo membro è l'operatore delle onde  $\square \vec{E}$ , il d'Alembertiano, detto anche quadratello; il secondo membro identifica le sorgenti. Il conto è analogo per il campo magnetico.

**Equazione di Poisson.** Si può anche ricavare l'equazione di Poisson. Per soluzioni statiche si ha

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Dato  $E = \nabla \phi$  si ha

$$4\pi\rho = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

Nel vuoto, il campo elettrostatico è una funzione armonica (cioè soddisfa l'equazione di Laplace). Invece, in presenza di materia non è più così.

**Equazione di continuità.** Si ricava l'equazione di continuità

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) \\ 0 &= \frac{1}{c} \partial_t \nabla \cdot \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \vec{J} \\ 0 &= \frac{1}{c} \partial_t (4\pi\rho) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \vec{J} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned}$$

Essa è un caso generale dell'equazione del trasporto.

A seconda dei particolari contesti, si ottengono delle equazioni che si ritrovano nel corso. Si studia una struttura matematica che si applica a differenti parti della fisica.

### 1.1.1 Equazione di continuità

L'equazione di continuità compare in contesti generali. Si consideri una funzione  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Quando non ne si specificano proprietà, si sottintendono le condizioni minimali affinché quanto scritto abbia senso. Si supponga che la variazione temporale della quantità

$$\int_V \rho \, d^n x$$

sia dovuta solo al flusso di un certo campo vettoriale  $\vec{J}$  attraverso il bordo  $\partial V$  del dominio  $V$ , cioè

$$\phi(\vec{J}) = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \hat{n} \, d^{n-1} x$$

dove  $\hat{n}$  è il vettore normale uscente dalla superficie. Con questa notazione si intende la misura euclidea sullo spazio considerato. Dunque

$$d_t \int_V \rho \, d^n x = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \hat{n} \, d^{n-1} x$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned} d_t \int_V \rho \, d^n x &= - \int_V \nabla \cdot \vec{J} \cdot \hat{n} \, d^n x \\ \int_V \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} \, d^n x &= 0 \end{aligned}$$

supponendo che entrambi gli integrali siano convergenti e che si possa invertire l'ordine di derivata ed integrale. L'equazione di continuità equivale ad un oggetto che varia solamente in virtù del fatto che qualcosa entra od esce da un certo dominio fisico. Dato che l'equazione precedente vale per ogni dominio  $V$  si ottiene l'equazione di continuità

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

## 2 Equazione delle onde

L'equazione delle onde è una rappresentante della famiglia delle equazioni differenziali di tipo iperbolico.

### 2.1 Equazione del trasporto

L'equazione del trasporto è simile all'equazione delle onde, ma più semplice:

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

dove

$$U : C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto u(x, t)$$

quando la classe della funzione non è specificata, si intende  $C^\infty$ .

Essa è la versione più semplice dell'equazione differenziale che si può immaginare. Si è già risolta un'equazione con derivata seconda rispetto un unico parametro. In questo caso, la derivata rispetto ad una variabile è proporzionale alla derivata rispetto all'altra variabile. Questa variazione viene studiata perché è l'esempio più semplice in cui si manifestano le caratteristiche dei metodi risolutivi particolari per le equazioni delle onde. Un oggetto importante, importante quando il teorema, è il più semplice esempio in cui si presentano già tutte le difficoltà del problema.

Il segno del tempo, dello spazio e di  $c$  possono bilanciarsi a piacere, dunque il segno di somma, in questo caso, non è particolare.

Note le simmetrie, si trova la soluzione: si studia l'esistenza, l'unicità e la stabilità delle condizioni iniziali. Alla domanda dell'esistenza, si risponde in modo costruttivo. Si mostra come costruire la soluzione. Si risolve l'equazione in modi diversi così che successivamente li si potranno applicare ad altre equazioni. In questo caso si vedono due metodi: metodo analitico e metodo geometrico.

### 2.1.1 Metodo analitico

Si cerca un cambio di variabile che semplifica l'equazione. Fare un cambio di variabile per  $u$  non aiuta, infatti una generica funzione (sempre ricordando le ipotesi minimali sottintese) di  $u$  soddisfa essa stessa tale equazione:

$$\partial_t f(u) + c \partial_x f(u) = \partial_u f(u) \partial_t u + c \partial_u f(u) \partial_x u = \partial_u f(u) (\partial_t u + c \partial_x u) = 0$$

Si opera un cambio di variabili per  $x$  e  $t$ :

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto (\xi, \eta)$$

Il cambio di variabili è ben definito se esiste la matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

quindi il cambio dev'essere non singolare e quindi il determinante non dev'essere nullo. Se la trasformazione inversa non fosse definita ovunque, non si sarebbe certi di poter ritornare alle variabili iniziali per risolvere l'equazione originaria.

A questo punto si ha

$$\begin{cases} \partial_t = \xi_t \partial_\xi + \eta_t \partial_\eta = \beta \partial_\xi + \delta \partial_\eta \\ \partial_x = \xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta = \alpha \partial_\xi + \gamma \partial_\eta \end{cases}$$

Da cui si ottiene

$$u_t + cu_x = \beta u_\xi + \delta u_\eta + \alpha cu_\xi + \gamma cu_\eta$$

Scegliendo  $\alpha c + \beta \neq 0$  e  $\gamma c + \delta = 0$  si semplifica l'equazione:

$$(\alpha c + \beta) u_\xi = 0 \implies u = u(\eta) = u(\gamma x + \delta t)$$

sempre rispettando la condizione sul determinante.

## Lezione 2

L'equazione del trasporto è chiamata così per il comportamento della soluzione.

Dato che  $\delta = -c\gamma$  si ha

$$\gamma x + \delta t = \gamma(x - ct)$$

Allora la generica soluzione è

$$u = \varphi(x - ct)$$

dove  $\varphi$  è una qualunque funzione di  $x - ct$ .

**Osservazione.** Spesso si utilizza un abuso di notazione. Propriamente,  $u = u(x, t)$  e con  $u(\xi, \eta)$  si intende  $u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ .

La soluzione trovata esiste. Ora si studia l'unicità. In particolare, si osserva il significato di  $\varphi$ :

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) \implies u(x, 0) = \varphi(x)$$

cioè  $\varphi$  è il dato iniziale. In questo caso, scegliere il dato iniziale in un punto  $x_0$  per tutti i tempi non cambia la situazione perché  $x$  e  $t$  sono essenzialmente lo stesso oggetto nell'equazione (a meno che  $c$  non sia degenere). Tuttavia, per l'equazione delle onde le cose sono diverse. Risulta importante pensare ad un dato iniziale come una delle due coordinate che, per comodità, è detta tempo. Tutte le funzioni che si devono assegnare per le equazioni iperboliche sono dette dati iniziali.

Pertanto

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \implies u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

L'equazione si chiama del trasporto perché la soluzione trasporta il dato iniziale. La stabilità è banale. Una norma, come quella uniforme, della differenza di due soluzioni è invariante nel tempo, è dominata ai dati iniziali nel senso che è quella del dato iniziale. Poiché l'equazione è lineare, la differenza di due soluzioni molto vicine è ancora soluzione ed ha due dati iniziali con norme uniformi vicine, quindi la norma uniforme della differenza è molto piccola e non cambia nel tempo.

La soluzione non vale per ogni funzione. Bensì, per ora, per quelle almeno di classe  $C^1$  in entrambe le variabili. Successivamente, si può rilassare tale condizione alle funzioni solo continue in entrambe le variabili: si utilizzano le distribuzioni.

### 2.1.2 Metodo geometrico

Si risolve il problema da un altro punto di vista, un'altra conferma per cui l'equazione è detta del trasporto. Essa trasporta il dato iniziale con velocità  $c$ . L'equazione è mono-direzionale perché o trasporta a destra o trasporta a sinistra: non c'è modo di ottenere l'altro comportamento girando l'asse  $x$ , ma si dovrebbe invertire il tempo.

Ogni punto del dato iniziale è trasportato con una velocità costante, si comporta come una particella libera. La soluzione dell'equazione non è costante perché dipende dal tempo. Ci si chiede se esistono delle curve

$$\Gamma : s \mapsto (x(s), t(s))$$

tali per cui la soluzione valutata su ogni punto della curva  $u(x(s), t(s))$  è costante. Si fa uso anche del piano delle caratteristiche  $(x, t)$ : una particella ferma è una retta verticale. In verità è un semi-piano perché è definito solo per tempi positivi. Non per tutte le equazioni evolutive è semplice estendere la soluzione da un semi-piano a tutto lo spazio.

Si consideri il vettore ed il gradiente seguenti

$$\vec{n} = (c, 1), \quad \nabla = (\partial_x, \partial_t)$$

L'equazione del trasporto si può scrivere come

$$u_t + cu_x = 0 \iff \vec{n} \cdot \nabla u = 0$$

cioè la derivata direzionale di  $u$  in  $(x, t)$  lungo il vettore  $(c, 1)$  è nulla. Tutte le curve con  $(c, 1)$  loro vettore tangente sono curve lungo le quali  $u$  è costante. Si cercano tali curve. Le curve che hanno un vettore costante come tangente in ogni punto sono delle rette. Si trova la curva  $\Gamma$  per cui

$$0 = d_s u|_{\Gamma} = \partial_x u d_s x + \partial_t u d_s t = u_x d_s x + u_t d_s t$$

Posto  $d_s t \equiv 1$  e  $d_s x \equiv c$  si ottiene l'equazione del trasporto. Si pongono i dati iniziali:  $t(0) = 0$  e  $x(0) = x_0$  rispettivamente. Dalla prima segue  $t = s$ . Dalla seconda si ha una retta  $x = cs + x_0$ . Pertanto

$$t = \frac{x - x_0}{c}$$

Lungo curve di questo tipo, cioè delle rette, la soluzione  $u$  è costante. Il coefficiente angolare è lo stesso, ma l'intercetta varia da una retta all'altra. La  $u$  è costante su tali rette e ha lo stesso valore che ha a  $t = 0$ :

$$u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = \varphi(x_0)$$

dove la funzione  $\varphi$  è il dato iniziale. Inoltre, dall'equazione di una retta si ottiene  $x_0 = x - ct$  per cui

$$\varphi(x_0) = \varphi(x - ct)$$

cioè il risultato ottenuto anche per il metodo analitico. Questo metodo è più costruttivo, si sono osservate le proprietà dell'equazione.

Il metodo è affascinante, tuttavia ci si chiede cosa succede se per un punto non passa una caratteristica (cioè la curva  $\Gamma$ ) oppure ne passa più di una. Qualora fosse così, il metodo non si può più applicare, ma nemmeno quello analitico si può applicare. Infatti, sta avvenendo qualcosa di particolare nella equazione. Ad esempio, l'intersezione tra due caratteristiche è l'argomento finale del corso. Dal momento che si ha la prima intersezione, il metodo indica che qualcosa viene meno, la soluzione non ha più senso.

## 2.2 Equazione del trasporto con sorgente

Si considera il caso della sorgente

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Si utilizza ancora lo stesso metodo delle caratteristiche:  $t(s) = s$  e  $x(s) = cs + x_0$ . Dunque

$$\begin{cases} d_s u(x(s), t(s)) = u_t + cu_x = f(x(s), t(s)) \\ u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

La prima condizione è mascherata nel caso precedente dove si ha  $d_s u = 0$ . Il sistema sopra è una equazione differenziale ordinaria perché dipende solamente da  $s$ . Pertanto sulla caratteristica si ha

$$\begin{aligned} u(x(t), t) &= u(x(0), t(0)) + \int_0^t f(x(s), t(s)) ds \\ u(x_0 + ct, t) &= \varphi(x_0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s) ds \end{aligned}$$

Si ha la soluzione in ogni punto dello spazio-tempo. La si rende un po' più comoda. Posto  $\bar{x} \equiv x_0 + ct$  e  $\bar{t} \equiv t$  si ottiene

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi(\bar{x} - c\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} f(\bar{x} - c(\bar{t} - s), s) ds$$

Su di una caratteristica, si sceglie un punto e si torna indietro fino al punto  $x_0$  corrispondente. Ad un punto generico su tale caratteristica, la soluzione  $u$  vale quanto vale all'inizio (in  $x_0$ ) più un termine correttivo dato dall'integrale. Al tempo zero,  $u \equiv \varphi$ , cioè la condizione iniziale.

**Equazione del trasporto con sorgente proporzionale alla soluzione.** Si consideri

$$\begin{cases} u_t + cu_x = \alpha u, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x), & t > 0 \end{cases}$$

e si considerino le stesse caratteristiche. Come prima si ha

$$\begin{cases} d_s u(x(s), t(s)) = \alpha u(x(s), t(s)) \\ u(x(0), t(0)) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

Essa ha per soluzione

$$u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0)) e^{\alpha s} \iff u(x_0 + cs, s) = \varphi(x_0) e^{\alpha s}$$

Tornando alle variabili iniziali si ha

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) e^{\alpha t}$$

Se  $\alpha < 0$  si ha uno smorzamento.



**Equazione del trasporto con velocità dipendente dallo spazio e dal tempo.** Si consideri

$$\begin{cases} u_t + c(x, t)u_x = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x), & t > 0 \end{cases}$$

Si potrebbe anche pensare una velocità che dipende da  $u$ , ma l'equazione non sarebbe più lineare: questo è uno degli ultimi argomenti dal corso. Ci si pone ancora la domanda riguardo le curve dello spazio tempo su cui la soluzione  $u$  è costante. Si deve riscrivere la condizione originale del metodo geometrico:

$$0 = d_s u|_{\Gamma} = \partial_x u d_s x + \partial_t u d_s t = u_x d_s x + u_t d_s t$$

con  $d_s t = 1$  e  $d_s x = c(x, t)$  le cui condizioni iniziali sono  $t(0) = 0$  (cioè  $t = s$ ) e  $x(0) = x_0$ . Pertanto, il sistema è

$$\begin{cases} d_t x = c(x, t), & x(0) = x_0 \\ d_t u(x(t), t) = 0, & u(x(0), 0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

La seconda equazione descrive l'assenza di una sorgente. Qualora ci fosse, basta sostituire  $f(x, t)u + g(x, t)$  al posto di zero. La prima equazione descrive le caratteristiche, le curve lungo  $u(x(t), t)$  è costante.

**Esempio.** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \frac{t}{x}u_x = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

Esso è definito ovunque tranne che a  $x = 0$ . (Ci sono delle regolarizzazioni semplici di tale equazione, tipo  $xu_t + tu_x = 0$  però l'equazione sarebbe degenerata in qualche senso: a  $t = 0$ , il primo membro sarebbe zero (?) e si può scegliere il dato iniziale arbitrariamente; se  $t \neq 0$ , allora  $u_x = 0$  a tempo  $t = 0$  (?) e questo sembra prescrivere qualcosa al dato iniziale.)

Si risolve il problema tramite il metodo delle caratteristiche. Si deve risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} d_t x = \frac{t}{x}, & x(0) = x_0 \\ d_t u(x(t), t) = 0, & u(x(0), 0) = e^{-x_0^2} \end{cases}$$

Si parametrizza la curva con il tempo perché il coefficiente davanti a  $t$  (magari  $u_t$ ?) è 1. La seconda equazione presuppone che la soluzione esista, venga valutata sull'incognita, cioè la caratteristica, e dunque si ha un'equazione differenziale ordinaria con dei parametri iniziali. La prima equazione è sempre isolata rispetto all'altra perché  $u$  non può comparire dato che l'equazione del trasporto deve rimanere lineare.

La prima si risolve per separazione di variabili

$$d_t x = \frac{t}{x} \implies \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}t^2$$

La seconda afferma che  $u$  è costante per ogni caratteristica

$$\begin{cases} u(x(t), t) = u(x_0, 0) = e^{-x_0^2} \\ x_0^2 = x^2 - t^2 \end{cases}$$

Pertanto

$$u(x, t) = e^{t^2 - x^2}$$

Potrebbe non essere facile ricavare esplicitamente  $x_0$ , quindi si può anche mantenere una soluzione parametrizzata.

**Esercizio.** Trovare le caratteristiche di

$$u_t + (1 + x^2)u_x = 0$$

**Esercizio.** Strauss, pagina 9.

### Lezione 3

L'equazione del trasporto non trasporta più una quantità (il dato iniziale) senza variarla dal momento in cui la velocità dipende dai punti dello spazio-tempo.

## 2.3 Equazione delle onde – derivazione dalla fisica

L'equazione delle onde elementare in una dimensione si può intendere come un'equazione del trasporto bidirezionale. La contro-nominale è l'equazione del trasporto è un'equazione delle onde mono-direzionale.

Si studiano delle derivazioni meccaniche dell'equazione per capire come, in contesti differenti, essa abbia origini e come possa avere senso studiare un'equazione e pensare cosa significhi quanto trovato dal punto di vista modellistico.

### 2.3.1 Derivazione di d'Alembert

d'Alembert è anche colui che dà la soluzione generale all'equazione delle onde. Si consideri una corda in un piano  $xz$ . Tale corda si muove in un modo descritto da una funzione (quindi ad ogni  $x$  è associata una ed una sola  $z$ ). Sia  $z = u(x, t)$  la posizione della corda. Le ipotesi sono:

- Si considerano accelerazioni della corda solo trasversali (cioè in direzione  $z$ ):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{tt} \end{pmatrix} = u_{tt}\hat{k}, \quad u_{tt} = \ddot{z}$$

- La tensione  $\tau$  è diretta tangenzialmente alla curva.
- Piccole oscillazioni:  $\|u_x\| \ll 1$ .

Sia  $\hat{h}$  il versore tangente. Allora  $\vec{\tau} = \tau\hat{h}$ . Si calcola il versore tangente. La curva ha coordinate

$$\vec{x} = (x, z) = (x, u(x, t))$$

dove si usa  $x$  come parametro della curva (risulta tipico chiamare il vettore con il nome della prima componente). Il vettore tangente è

$$\vec{h} = \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix}$$

da cui

$$\hat{h} = \frac{\vec{x}'}{\|\vec{x}'\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}}\hat{i} + \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}}\hat{k}$$

Il versore tangente cambia nel tempo perché  $u_x$  varia nel tempo. Dunque, la tensione è

$$\vec{\tau} = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2}}\hat{i} + \frac{u_x\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2}}\hat{k} = \tau(x, t)\hat{h}$$

quando si fa la derivata della tensione, bisogna derivare sia il modulo che del vettore tangente. La forza agente su di un tratto  $ds$  è la somma vettoriale tra la tensione a  $(x, t)$  e la tensione a  $(x + \Delta x, t)$ :

$$\vec{F} = \vec{\tau}(x + \Delta x, t) - \vec{\tau}(x, t) = \partial_x \vec{\tau}(x, t) \Delta x + o(\Delta x)$$

il segno meno deriva dal fatto che le due tensioni tirano il tratto in direzioni diverse. La forza per unità di lunghezza è

$$\vec{F}_x = \rho \vec{a}$$

Da cui

$$\vec{\tau}_x = \rho u_{tt} \hat{k} \iff \partial_x(\tau \hat{h}) = \rho u_{tt} \hat{k} \iff \left( \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x \hat{i} + \left( \frac{u_x \tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x \hat{k} = \rho u_{tt} \hat{k}$$

Questa è l'equazione (vettoriale, cioè 2 equazioni scalari) della corda vibrante con le approssimazioni (le ipotesi) fatte. Le incognite sono  $u(x, t)$ , che descrive come si muove la corda, e la tensione  $\tau(x, t)$ .

Si utilizza la terza ipotesi. In fisica e matematica, “piccolo” e “grande” sono relativi. Se si ha una quantità dimensionata bisogna dire rispetto a cosa. Altrimenti bisogna introdurre un parametro adimensionale. Si hanno piccole oscillazioni: l'ampiezza dell'oscillazione è piccola rispetto alla lunghezza d'onda caratteristica. Questo corrisponde a  $\|u_x\|_\infty \ll 1$  ( $u_x$  dev'essere molto minore di 1 per ogni punto e la norma uniforme garantisce proprio questo).

$$\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \hat{i} + \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \hat{k} = \left( 1 + \frac{1}{2} u_x^2 + \dots \right) \hat{i} + u_x \left( 1 + \frac{1}{2} u_x^2 + \dots \right) \hat{k} = \hat{i} + u_x \hat{k} + o(\|u_x\|)$$

si suppone che  $\hat{h}$  sia analitica così che si possa sviluppare in ogni punto. Pertanto, si ottiene

$$\rho u_{tt} \hat{k} = \left( \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x \hat{i} + \left( \frac{u_x \tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x \hat{k} = \tau_x \hat{i} + (u_x \tau)_x \hat{k} + o(\|u_x\|)$$

Da cui segue, componente per componente:

$$\begin{cases} \tau_x = 0 \\ \rho u_{tt} = (\tau u_x)_x \end{cases} \implies \begin{cases} \tau = \text{cost.} \\ u_{tt} - \frac{\tau}{\rho} u_{xx} = 0 \end{cases}$$

Le equazioni del primo sistema non sono disaccoppiate, ma sono triangolari (una compare nell'altra, ma l'altra non compare nell'una). La seconda equazione è l'equazione delle onde. Il coefficiente ha le dimensioni di una velocità al quadrato: si combinano in modo semplice le due grandezze (che sono costanti) presenti e rilevanti del modello.

**Osservazione.** Il coefficiente è una velocità al quadrato, ma non esiste una trasformazione elementare per cambiare il segno negativo che compare nell'equazione:  $\tau$  è il modulo di una tensione e  $\rho$  è una densità che è definita positiva. Inoltre, non si può cambiare il segno nemmeno con trasformazioni reali di  $x$  e  $t$ .

Questa resistenza al cambiamento del segno è qualcosa di molto profondo: la caratterizza profondamente. Se si cambiasse proditoriamente il segno, allora si otterrebbe l'equazione di Laplace: si avrebbe una funzione armonica. Le onde e le funzioni armoniche (tipo il potenziale scalare) hanno proprietà ben diverse.

Tale resistenza matematica ha una controparte qualitativa di com'è fatta la soluzione, oltre alle tecniche di risoluzione.

### 2.3.2 Deduzione di Lagrange

Infinite ODE diventano una PDE. [immaginare] Si considerino  $N + 2$  palline in successione da molle. Si fissano gli esterni così che si abbiano  $N$  palline in movimento. La massa di ogni pallina è identica

$$m = \frac{M}{N + 2}$$

Le molle hanno costante elastica  $k$  identica. La distanza orizzontale tra due palline è

$$a = \frac{l}{N + 1}$$

dove  $l$  è la distanza (orizzontale) tra gli estremi. Si vedono le ipotesi:

- Vale  $u_0 = u_{N+1} = 0$ , dove  $u$  è la posizione verticale di una pallina.
- La velocità  $\dot{u}_i$  è solo verticale.
- La distanza orizzontale tra le masse è  $a$ .
- Le grandezze  $m$ ,  $k$  ed  $a$  sono le stesse per ogni pallina.

Si rimanda a quanto si è visto nel continuo. Il sistema è lagrangiano. L'energia cinetica è

$$K = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2$$

L'energia potenziale è

$$U = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{1}{2} k r_i^2 = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} k (a^2 + (u_{i+1} - u_i)^2) \rightsquigarrow U = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} k (u_{i+1} - u_i)^2$$

dove si ricorda che l'energia potenziale è scritta a meno di costanti ed  $r_i$  è la distanza tra due palline. Quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = K - U = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2} k (u_{i+1} - u_i)^2$$

Si trovano le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} d_t \partial_{\dot{u}_n} \mathcal{L} &= \partial_{u_n} \mathcal{L} \\ \sum_i m \ddot{u}_i \delta_{in} &= \sum_i -k (u_{i+1} - u_i) (\delta_{i+1,n} - \delta_{in}) \\ m \ddot{u}_n &= -k (u_n - u_{n-1}) + k (u_{n+1} - u_n) \\ m \ddot{u}_n &= k (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) \end{aligned}$$

Si nota che si ha ancora la differenza di due forze. Definendo  $\rho \equiv \frac{m}{a}$ , segue

$$\rho \ddot{u}_n = k a \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{a^2}$$

dove il numeratore della frazione ricorda una derivata seconda discreta. Infatti si ha

$$\rho \ddot{u}_n = \tau \frac{\frac{u_{n+1} - u_n}{a} - \frac{u_n - u_{n-1}}{a}}{a}, \quad n = 1, \dots, N-1$$

La frazione a destra è il rapporto incrementale di rapporti incrementali, cioè una derivata seconda discreta. Si passa al continuo con  $a \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow \infty$  facendo in modo che  $\rho$  e  $\tau$  rimangano finiti. Pertanto  $m \sim \frac{1}{N}$  e  $k \sim \frac{1}{a}$ . Così si ottiene

$$\rho u_{tt} = \tau u_{xx}$$

### 2.3.3 Deduzione fluidodinamica

Si considerino le equazioni di Eulero

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 & \text{Newton} \\ \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 & \text{Conservazione della massa} \\ p = p(\rho) & \text{Relazione termodinamica, entropia costante} \end{cases}$$

dove  $\rho$  è la densità,  $\vec{u}$  è la velocità e  $p$  è la pressione. Le equazioni di Eulero descrivono un fluido senza dissipazione. Esse sono un'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes.

In generale, la pressione dipende dal volume e dall'entropia. Il volume specifico è il reciproco della densità. In questo caso, la pressione dipende solamente dalla densità.

Nella prima equazione, i due primi addendi costituiscono la derivata sostanziale (derivata materiale). L'ultimo addendo è il gradiente di pressione non più statico.

In questo caso si hanno tre equazioni e tre incognite:  $u$ ,  $\rho$  e  $p$ . Si linearizza il sistema:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots, \quad \vec{u} = \varepsilon \vec{u}_1 + \dots$$

Il termine correttivo della densità è piccolo rispetto ad una densità costante  $\rho_0$  di riferimento. Questo è uno sviluppo in piccoli parametri:  $\rho_1$  può avere norma comparabile a  $\rho_0$ , ma viene reso piccolo insieme a  $\varepsilon$ . Inoltre, si ipotizza che la serie di funzioni  $\rho_i$  converga. Si sviluppa attorno ad un fluido fermo e omogeneo.

Da ciò si ha

$$p = p_0 + \varepsilon d_\rho p(\rho_0) \rho_1 + \dots$$

Pertanto, sviluppando al prim'ordine si ha

$$\begin{cases} \rho_0 \vec{u}_{1t} + \nabla p_1 = 0 \\ \rho_{1t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \rho \vec{u}_{1t} + d_\rho p(\rho_0) \nabla \rho_1 = 0 \\ \rho_{1t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases}$$

Sono equazioni accoppiate. Si vuole ottenere una sola equazione. Si nota che derivate temporali e gradienti (o divergenza) sono scambiati nella prima e nella seconda. Dunque si può scegliere a quale delle due applicare il gradiente, e quindi all'altra applicare la derivata temporale, per cancellare dei termini. Si applica la divergenza alla prima equazione e la derivata temporale alla seconda ottenendo

$$\begin{cases} \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_{1t} + d_\rho p(\rho_0) \nabla^2 \rho_1 = 0 \\ \rho_{1tt} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_{1t} = 0 \end{cases} \implies \rho_{1tt} - d_\rho p(\rho_0) \nabla^2 \rho_1 = 0$$

Questa è l'equazione delle onde in tre dimensioni. Dal punto di vista termodinamico, la grandezza a coefficiente è una grandezza definita positiva: per gas normali si ha, per definizione, un aumento di pressione a seguito di un aumento di densità (perché si diminuisce il volume specifico). La dimensione di tale grandezza è una velocità al quadrato detta velocità del suono:  $d_\rho p(\rho_0) = c^2 > 0$ . Bisogna pensare di avere un fluido comprimibile: la sua densità per ogni particella di volume che evolve, può variare. Non solo la densità, ma anche la pressione segue l'equazione delle onde. Per le onde sonore, non si ha dispersione, cioè la velocità delle onde non dipende dalla loro frequenza. Questo è dovuto al principio di Huygens, valido in tre dimensioni. Quando si ha un fronte d'onda viaggiante, si può costruire il fronte al tempo  $t + \varepsilon$  prendendo il fronte al tempo  $t$  e considerando che ogni punto del solo fronte è un generatore di onde, e poi si prende l'involuppo del nuovo fronte.

## 2.4 Simmetrie

L'equazione delle onde è invariante per traslazioni rigide e dilatazioni  $t \rightarrow at$  e  $\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$ . Ci si chiede se esistono altre trasformazioni invarianti del tipo

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Sia  $s \equiv ct$ , segue

$$u_{ss} - u_{xx} = 0$$

Gli operatori di derivata sono

$$\begin{cases} \partial_s = x'_s \partial_{x'} + s'_s \partial_{s'} = \gamma \partial_{x'} + \alpha \partial_{s'} \\ \partial_x = x'_x \partial_{x'} + s'_x \partial_{s'} = \delta \partial_{x'} + \beta \partial_{s'} \end{cases}$$

Si nota che  $\partial_{ss} = \partial_s \circ \partial_s = (\partial_s)^2$  la composizione dà il quadrato dell'operatore perché le lettere greche sono costanti (e lo stesso vale per le derivate di  $x'$  ed  $s'$ ). Fare attenzione alla notazione,  $(\partial_s f(s))^2$  implica moltiplicazione, mentre  $(\partial_s)^2$  implica composizione  $\partial_s \partial_s = \partial_{ss}$ . Pertanto

$$\begin{cases} \partial_s^2 = \gamma^2 \partial_{x'}^2 + \alpha^2 \partial_{s'}^2 + 2\alpha\gamma \partial_{x'} \partial_{s'} \\ \partial_x^2 = \delta^2 \partial_{x'}^2 + \beta^2 \partial_{s'}^2 + 2\beta\delta \partial_{x'} \partial_{s'} \end{cases}$$

Dunque, l'equazione delle onde diventa

$$(\alpha^2 - \beta^2)u_{s's'} - (\delta^2 - \gamma^2)u_{x'x'} + 2(\alpha\gamma - \beta\delta)u_{x's'} = 0 \quad (\star)$$

Si vuole che sia invariante in forma e questo implica

$$\begin{cases} \alpha\gamma - \beta\delta = 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 = \delta^2 - \gamma^2 \equiv k^2 \end{cases}$$

dove  $k$  è una costante. Si nota che la prima equazione non è il determinante, perché altrimenti il cambio di variabile non è ben definito. Siano

$$\alpha = k \cosh \mu, \quad \beta = -k \sinh \mu, \quad \gamma = -k \sinh \nu, \quad \delta = k \cosh \nu, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\alpha\gamma - \beta\delta = -k^2 [\cosh \mu \sinh \nu - \cosh \nu \sinh \mu] = -k^2 \sinh(\mu - \nu) = 0 \implies \mu = \nu$$

Dunque, la generica trasformazione invariante di dilatazione è

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cosh \mu & -\sinh \mu \\ -\sinh \mu & \cosh \mu \end{pmatrix}$$

cioè le trasformazioni di Lorentz.

Quando si cambia il segno all'equazione delle onde, anche queste trasformazioni subiscono un cambiamento di segno. Infatti, se l'equazione delle onde presenta il più al posto del meno, compare un più anche nella scrittura con le lettere greche ( $\star$ ) e bisogna parametrizzarle con le funzioni trigonometriche non iperboliche.

L'equazione delle onde è invariante per trasformazioni di Lorentz. L'equazione è mappata in se stessa per questo tipo di cambi di coordinate.

## 2.5 Quantità conservate

**Definizione.** Una quantità conservata per una PDE evolutiva è una grandezza

$$F(t) = \int_{\Omega} f[u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots] dx$$

tale per cui  $d_t F(t) = 0$ . Dove  $\Omega$  è il dominio di  $u$ .

La funzione integranda  $f$  è la densità conservata (non necessariamente conservata essa stessa). Si supponga che  $f$  ammetta primitiva. Per il teorema del calcolo integrale, si può ricondurre  $F$  ai dati al bordo per la primitiva. Il fatto che la funzione  $f$  possa generare una quantità conservata, dipende dai dati al bordo del sistema.

**Esempio.** Ad esempio, in una dimensione si consideri

$$d_t F(t) = \int_a^b f_t dx = 0, \quad \forall u$$

con  $a$  e  $b$  fissati. Questo vale se la derivata totale si può scambiare con il segno di integrale. In tal caso, essa diventa una derivata parziale all'interno dell'integrale. Se  $f$  soddisfa

$$f_t + J_x = 0$$

per un'opportuna  $J = J[u, u_x, u_t, \dots]$ , allora si richiede che

$$d_t F = - \int_a^b J_x dx = -J|_a^b = 0$$

l'ultimo uguale dipende dalle condizioni al bordo affinché  $F$  sia una quantità conservata.

**Definizione.** Una densità conservata per l'equazione delle onde (ma, in realtà, è una definizione generale) è una funzione  $f = f[u, u_x, u_t, \dots]$  tale per cui esista  $J$  che soddisfa

$$f_t + J_x = 0$$

## Lezione 4

Le quantità conservate sono caratterizzanti delle proprietà delle soluzioni di un sistema.

L'equazione delle onde si può riscrivere come

$$\begin{cases} u_t = cv_x \\ v_t = cu_x \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione delle onde si utilizza una condizione di compatibilità: le derivate spaziali e temporali devono commutare sui campi in oggetto. Ci si chiede quando  $f(u, v)$  sia una densità conservata. Deve esistere una funzione  $J$  tale per cui  $f_t + J_x = 0$ . Infatti

$$f_t(u, v) = f_u u_t + f_v v_t = cf_u v_x + cf_v u_x \equiv -J_u u_x - J_v v_x = -J_x$$

Questo implica che

$$J_u \equiv -cf_v, \quad J_v \equiv -cf_u$$

Per la condizione di compatibilità si ha

$$J_{uv} = J_{vu} \implies (cf_v)_v = (cf_u)_u \implies f_{vv} = f_{uu}$$

cioè l'equazione delle onde. Una funzione  $f$  è una densità conservata per l'equazione delle onde quando essa stessa soddisfa l'equazione delle onde (rispetto a  $v$  e  $u$ , non più  $x$  e  $t$ ) con velocità pari all'unità.

In generale, le quantità conservate possono dipendere anche dalle derivate successive. In questo esempio semplice si è richiesta una struttura forte per le quantità conservate: devono dipendere da  $u$ , ma non dalle sue derivate, e possono dipendere dalla variabile  $v$  introdotta dallo spezzamento dell'equazione delle onde. Su questo discorso non si progredisce oltre perché si è in grado di risolvere l'equazione delle onde: da qua si riesce a dare una forte caratterizzazione.

**Energia.** Esistono importanti quantità conservate per l'equazione delle onde. Esse servono per dimostrare teoremi di unicità e stabilità. Si introduce la quantità conservata dell'energia. Si chiama energia perché è l'analogo discreto dell'energia del sistema nella derivazione lagrangiana dell'equazione delle onde: è l'integrale di Jacobi.

Un numero  $N + 2$  di particelle ha lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{u}_i^2 - k(u_i - u_{i-1})^2 = \frac{1}{2} a \sum_i \rho \dot{u}_i^2 - \tau \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right)^2$$

ricordando che  $m = \rho a$  e  $\tau = ka$ . Pertanto, l'energia meccanica, l'integrale di Jacobi è

$$E = a \sum_i \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right)^2$$

Si ha una lagrangiana meccanica perché il potenziale dipende solamente da  $x$  e per questo quando si passa all'energia si può semplicemente cambiare il segno al potenziale. L'energia presenta una derivata temporale (valutata nella posizione  $x_i$ ) dal primo addendo ed una derivata spaziale (discreta) dal secondo addendo. Ci si chiede se l'analogo continuo sia una quantità conservata. Dunque, si mantengono  $\rho$  e  $\tau$  finiti per ottenere

$$E = \int_l \frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} \tau u_x^2 dx$$

Si studia se tale oggetto è davvero una quantità conservata per l'equazione delle onde. Poiché tutto dipende dalle condizioni al bordo, il primo passo è studiare se la funzione integranda è una potenziale densità conservata con opportuni dati al bordo, cioè se la sua derivata temporale è la divergenza di qualcosa:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \iff u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0 \iff \left( \frac{1}{2} u_t^2 \right)_t - c^2 (u_x u_t)_{xt} + c^2 (u_x u_{tx}) = 0$$

dove  $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$  ed il secondo addendo è una derivata totale e il terzo addendo è il resto: si è usata una sorta di integrazione per parti. Ci si chiede se il terzo addendo sia una derivata totale esso stesso. Infatti si ottiene

$$\left( \frac{1}{2} u_t^2 \right)_t - c^2 (u_x u_t)_{xt} + c^2 \left( \frac{1}{2} u_x^2 \right)_t = 0 \iff \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 u_x^2 \right)_t + (-c^2 u_x u_t)_x = 0$$

Dove il primo addendo è la derivata temporale della funzione integranda dell'energia. Tale funzione è una densità conservata  $\mathcal{E}$ . L'altro addendo è la corrente associata.

Ci si chiede quali siano i dati al bordo tali per cui l'energia  $E = \int_l \mathcal{E} dx$  sia una quantità conservata, cioè  $\dot{E} = 0$ :

$$d_t E = \int_a^b \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 u_x^2 \right)_t dx = - \int_a^b c^2 u_x u_t dx = -c^2 u_x u_t \Big|_a^b \equiv 0$$

Questo implica

$$u_x u_t \Big|_{x=a} = u_x u_t \Big|_{x=b}$$

Esempi di dati al bordo per cui l'energia  $E$  sia conservata sono: Dirichlet, Neumann e periodici. Le condizioni al bordo di Dirichlet sono nulle (in verità dei numeri assegnati): in questo caso la derivata temporale è nulla perché al bordo le condizioni non variano. Neumann è identico, ma per le derivate: prendendo  $u_x = 0$ , entrambi i termini si annullano. Per le condizioni periodiche sia la  $u$  che la sua derivata prima sono identiche.

## 2.6 Soluzione in una dimensione

Si formula il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \rightarrow u(x, t)$$

La funzione  $u$  è sufficientemente buona perché la si vuole derivare almeno due volte. Nel problema di Cauchy, non si assegna la derivata seconda temporale perché si potrebbero avere problemi di compatibilità con l'equazione differenziale stessa: si sta già selezionando la soluzione; oppure non si hanno nuove informazioni, lasciando altre libertà.



**Soluzione.** Si vede come risolvere l'equazione delle onde tramite un metodo analitico analogo a quello dell'equazione del trasporto. L'operatore che agisce su  $u$  per dare l'equazione delle onde ha coefficienti costanti:

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x)$$

Si hanno due operatori dell'equazione del trasporto con il segno positivo ed il segno negativo, come già si è detto in precedenza. Tutti gli elementi del kernel di uno dei due operatori dell'equazione del trasporto sono anche nel kernel della loro composizione, quindi bisogna calcolare il kernel di tali due operatori. Il modo più diretto è fare un cambio di variabili

$$\xi \equiv x - ct, \quad \eta \equiv x + ct$$

da cui

$$\partial_t = c(\partial_\xi - \partial_\eta), \quad \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta$$

Pertanto

$$\partial_t + c \partial_x = c \partial_\xi - c \partial_\eta + c(\partial_\xi + \partial_\eta) = 2c \partial_\xi, \quad \partial_t - c \partial_x = -2c \partial_\eta$$

Dunque

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = -4c^2 \partial_\xi \partial_\eta$$

Le soluzioni sono la somma degli elementi del kernel di un operatore e gli elementi del kernel dell'altro. Tutti gli elementi del kernel dell'operatore dell'equazione delle onde sono tutti e soli gli elementi del kernel di uno o l'altro operatore dell'equazione del trasporto. Quindi

$$\square u = u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta} = -4c^2 \partial_\eta \partial_\xi u = 0$$

In quanto il risultato dev'essere nullo, la derivata di  $u$  rispetto a  $\xi$  non è funzione di  $\eta$ :

$$\partial_\xi u \equiv f'(\xi) \implies u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

La soluzione è la somma degli elementi del kernel dei due operatori del trasporto.

La soluzione è costruita sulle proprietà analitiche dell'equazione.

**Derivazione geometrica.** Si generalizza alle funzioni vettoriali la nozione di caratteristica. Si consideri la scrittura dell'equazione delle onde:

$$\begin{cases} u_t = cv_x \\ v_t = cu_x \end{cases}$$

dove la funzione  $v$  è accessoria per scrivere dell'equazione delle onde con problema di compatibilità anche se si scrive tramite un'integrazione in  $u$ . Si riscrive l'equazione delle onde come

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

dove la matrice è la matrice delle velocità caratteristiche  $V$ . Se essa fosse diagonale, allora il sistema è disaccoppiato e si avrebbe due volte l'equazione del trasporto. Inoltre, il sistema è costituito da due leggi di conservazione: una densità conservata  $u$  con corrente  $-cv$ , e viceversa, ricordando  $u_t + J_x = 0$ ,  $J_x \equiv -cv_x$ .

Si cerca un cambio di variabili per cui si diagonalizza tale matrice, cambiando la base di  $u$  e  $v$ . Gli autovalori della matrice sono  $\pm c$  e gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$V = ADA \iff \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dove  $A$  è la matrice del cambio di base costituita dagli autovettori. Si nota che  $A^{-1} = A^T = A$  ed essa è una matrice costante, non dipende da  $u$  né  $v$ . Quindi

$$\vec{u}_t = ADA\vec{u}_x \iff (A\vec{u})_t = D(A\vec{u})_x$$

segue

$$\begin{cases} (u+v)_t - c(u+v)_x = 0 \\ (u-v)_t + c(u-v)_x = 0 \end{cases}$$

Si è disaccoppiato il sistema in due equazioni del trasporto che vanno in direzioni diverse. Sapendo risolvere l'equazione del trasporto, si è giunti al termine. In questo caso, la somma e la differenza si sarebbe potuta trovare ad occhio, ma almeno così si è visto il procedimento generale.

Nelle due equazioni si trasporta il profilo del dato iniziale  $u+v$  e  $u-v$  rispettivamente. Nel primo caso, supponendo  $c > 0$ , è verso sinistra e nel secondo è a destra. Per l'equazione delle onde non viene trasportato il dato iniziale, ma gli invarianti di Riemann del sistema,  $u \pm v$ .

Nel piano delle caratteristiche  $(x, t)$  si hanno due equazioni del trasporto disaccoppiate. [immagine] Si hanno delle caratteristiche per  $u \pm v$  che vanno in direzioni diverse. Queste caratteristiche si intersecano, ma non ci se ne preoccupa perché riguardano equazioni disaccoppiate e diverse. Fissato un punto, si torna indietro al tempo zero per ciascuna delle due caratteristiche e sommando i valori a  $t = 0$  degli invarianti di Riemann fornisce il valore di  $u$  al punto scelto.

Questo metodo può essere usato anche in contesti più generali. Con questo metodo si costruiscono quantità a partire dalla soluzione che vengono trasportate lungo le curve dello spazio-tempo.

**Dati iniziali.** La soluzione al problema di Cauchy è più delicata rispetto all'equazione delle onde. Infatti

$$\begin{cases} \varphi(x) = u(x, 0) = f(x) + g(x) \\ \psi(x) = u_t(x, 0) = cf'(x) - cg'(x) \end{cases}$$

Si è ridotto il problema alla risoluzione di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Bisogna invertire il sistema per isolare le funzioni  $f'$  e  $g'$ . La situazione è delicata: le incognite sono  $f$  e  $g$ , mentre le funzioni assegnate sono  $\varphi$  e  $\psi$ . Si vuole risolvere  $f$  e  $g$  trovando una formula generale che le legghi a  $\varphi$  e  $\psi$ . Quindi

$$f' + g' = \varphi', \quad f' - g' = \frac{\psi}{c}$$

da cui

$$f' = \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2c}\psi, \quad g' = \frac{1}{2}\varphi' - \frac{1}{2c}\psi$$

Pertanto

$$f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tilde{s}) d\tilde{s} + A, \quad g(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tilde{s}) d\tilde{s} + B$$

Ora il problema rimane nel fissare le costanti. Si ha

$$f + g = \varphi \implies A + B = 0$$

Pertanto

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

Si è già visto in corsi precedenti la scrittura della soluzione come somma di due funzioni, tuttavia mancava il punto cruciale: legare tali funzioni ai dati iniziali. Tale problema è più

semplice nell'equazione del trasporto.

Si nota che se  $\psi(x) \equiv 0$ , allora il comportamento è uguale a quello dell'equazione del trasporto. Il dato iniziale è traslato una volta a destra e una volta a sinistra. Se il supporto di  $\varphi$  è compatto (o almeno localizzato), allora, dopo tempi lunghi, le due copie del dato iniziale sarebbero disaccoppiate e totalmente indistinguibili da due soluzioni dell'equazione del trasporto indipendenti. Se il supporto è a decrescenza rapida, le due interagiscono in maniera poco rilevante. Ciò che permette di interagire anche a tempi più lunghi è l'integrale di  $\psi$ , cioè l'integrale della velocità iniziale.

Si osserva che l'integrale di  $\psi$  ha un supporto particolare: gli unici contributi di  $\psi$  sono un intervallo lungo  $2ct$ . Per ricostruire la soluzione nel punto  $(x, t)$  dello spazio-tempo serve il dato iniziale  $\varphi$  partente da  $x$  che poi viene traslato di  $\pm ct$ ; ma si hanno anche tutti i valori (cioè l'integrale) compresi in un cono (in una dimensione è un intervallo). In analogia con la relatività speciale, l'informazione (non nel senso preciso matematico) del dato iniziale  $\psi$  viaggia con una velocità finita perché può influenzare i punti che sono al più all'interno dell'intervallo  $[x - ct, x + ct]$ . Questa è una caratteristica cruciale delle equazioni iperboliche di cui l'equazione delle onde è quasi (?) l'unico rappresentante che si vede in questo corso.

**Principio di causalità.** Si arriva al principio di causalità. [immagine] Si consideri il piano delle caratteristiche  $(x, t)$  e l'intervallo  $[x - ct, x + ct]$  sull'asse  $x$ . Tale piano ricorda un diagramma di Minkowski. Fissato un punto  $(x, t)$ , si può tracciare il cono di luce e dunque l'intervallo ad esso corrispondente seguendo le caratteristiche. Si è notato che tali caratteristiche trasportano dei valori che hanno una primitiva: esse trasportano il valore  $v$  che è una primitiva di  $u_t$  rispetto a  $x$  con un certo coefficiente. Questo implica che se si vuole conoscere il campo in  $(x, t)$ , cioè si vuole costruire l'informazione a partire dai dati iniziali, allora bisogna conoscere tutti i punti dell'intervallo. Mentre se si conosce  $u \pm v$ , basta conoscere il valore agli estremi dell'intervallo. Difatti, si vuole sapere come si comportano i dati iniziali in tale intervallo. Una volta noto il dato iniziale in tale intervallo, si può dire come si comporta la soluzione all'interno della zona del cono precedente il punto  $(x, t)$ . Se si volesse andare al di fuori del cono, non si avrebbe un nesso causale solamente con i dati iniziali provvisti. Come in relatività speciale, questo è il cono luce, costituito dal cono del passato e dal cono del futuro.

Similmente, considerando un dato iniziale, ci si può chiedere quali punti dello spazio-tempo possono essere influenzati anche (e non "solo") dal dato iniziale scelto. Bisogna tracciare le caratteristiche che partono dal tale dato iniziale e osservare la regione compresa tra di esse.

## Lezione 5

### 2.7 Unicità

Si è dimostrata l'esistenza costruendo la soluzione. Si studia l'unicità. Il procedimento è come segue. Da uno stesso problema di Cauchy, si suppone esistano due soluzioni. Si studia come si comporta la loro differenza. Poiché i sistemi che si osservano in questo corso sono lineari, la differenza è ancora soluzione: si riduce il sistema a dimostra che l'unica soluzione accettabile per la differenza è zero.

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

con  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . Ci si pone dei dubbi sulla struttura della soluzione. Ad esempio, si può pensare che le soluzioni siano di classe  $C^\infty$  a decrescenza rapida. Si supponga che il problema precedente ammetta due soluzioni  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$ . Sia  $w \equiv u_2 - u_1$ . Essa è ancora soluzione per linearità

dell'equazione differenziale:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

La funzione  $w(x, 0) = w(x, t) \equiv 0$  è soluzione del problema. Si studia se essa sia l'unica soluzione. Quanto fatto finora si può applicare allo studio dell'unicità di equazioni differenziali lineari in modo generale. Successivamente, si particolareggia la dimostrazione.

Non si fa la dimostrazione prendendo la forma esplicita della soluzione per i dati al bordo nulli. Ma si sfruttano le proprietà dell'equazione differenziale. Si vuole scollegare l'unicità dall'esistenza, sebbene sia sensato dimostra la seconda e poi la prima. In particolare, oltre al problema di Cauchy si aggiunge l'ipotesi della decrescenza rapida della soluzione  $u$  che impone delle condizioni all'infinito, delle nuove condizioni al bordo. Questa particolarità si è già dovuta specificare quando si sono trattate le quantità conservate. L'utilità di tale ipotesi si comprende quando si utilizza la quantità conservata del sistema nella dimostrazione.

Da questo punto si rende specifica la dimostrazione a sistemi che presentano quantità conservate. Per l'equazione delle onde si utilizza l'energia. Essa è una quantità conservata perché si fa uso della decrescenza rapida: il flusso della corrente  $(-c^2 w_x w_t)$  associata a  $w$  all'infinito si annulla. Si potrebbero anche usare ipotesi di dati al bordo periodici o di tipo Neumann. Quindi

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} c^2 w_x^2 \, dx = E(0)$$

ricordando che  $d_t E = 0$ . Dai dati iniziali si ha  $w_t(x, 0) = 0$  e

$$w(x, 0) = 0 \implies w_x(x, 0) = 0$$

si noti che questo non implichi necessariamente  $w_t(x, 0) = 0$ , ma implica solo che la derivata spaziale sia nulla. Dunque, al tempo zero l'integrando è nullo perché entrambe le derivate che compaiono sono nulle:

$$E(t) = E(0) = 0$$

Poiché l'energia è zero per ogni tempo e  $\mathcal{E}$  è non negativa, allora ad ogni tempo (non solo a zero):

$$E(t) = 0 \implies \mathcal{E} = 0$$

Dato che  $\mathcal{E}$  è la somma di quadrati, allora  $w_t = w_x = 0, \forall t, x$ . Noto  $w(x, 0) = 0$  segue dalle uguaglianze precedenti

$$w(x, t) \equiv 0 \implies u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

cioè la tesi.

Questa dimostrazione è valida per funzioni di decrescenza rapida. Seguendo esattamente la stessa struttura si potrebbe dimostrare lo stesso per dati al bordo periodici e di tipo Neumann.

## 2.8 Stabilità ai dati iniziali

Si studia l'ultima richiesta di buona positura: la stabilità ai dati iniziali. Questa richiesta è "quasi" sperimentale: si studiano le piccole variazioni, cioè l'effetto di un errore rispetto un dato iniziale fissato.

Partendo da due dati iniziali vicini, si studia qualora si riesca a dominare un'opportuna norma della differenza delle soluzioni con la (stessa) norma dei dati iniziali.

Si estende la norma uniforme (norma infinito) anche a funzioni che dipendono dal tempo. Si consideri una funzione generica  $w(x, t)$  dove si intende  $t$  come un parametro. Dunque,  $w$  è una famiglia di funzioni ad un parametro  $t$ . Per ogni valore del parametro, si può definire una norma  $L^\infty$ :

$$\|w(x, 0)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x, 0)|$$

e si definisce

$$\|w(x, t)\|_{\infty, T} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t < T}} |w(x, t)|$$

Si vede una prima caratteristica. Il parametro  $t$  appartiene ad un segmento e non tutto  $\mathbb{R}^+$ . Si ha

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{\infty, T} &= \left\| \frac{1}{2} \varphi(x + ct) + \frac{1}{2} \varphi(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \right\|_{\infty, T} \\ &\leq \|\varphi(x)\|_{\infty} + \frac{1}{2c} \|\psi(x)\|_{\infty} 2c \sup t \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi + T \sup_{x \in \mathbb{R}} \psi \end{aligned}$$

La norma di  $\varphi(x \pm ct)$  è uguale alla norma del dato iniziale  $\varphi(x)$ . Mentre l'integrale è stimato con un rettangolo. L'importanza di limitare il dominio di  $t$  risiede nel poter stimare il secondo addendo.

Si considerano due soluzioni e si stima la differenza. Si sfrutta la linearità dell'equazione. Si considerino due problemi di Cauchy differenti

$$\begin{cases} u_{i,tt} - c^2 u_{i,xx} = 0, & i = 1, 2 \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_{i,t}(x, 0) = \psi_i(x), & 0 < t < T \end{cases}$$

La differenza cruciale è che  $t < T$ . La tesi è stimare  $\|u_2 - u_1\|_{\infty, T}$ : essa è maggiorata dalle norme delle differenze dei dati iniziali.

Infatti, dato che l'equazione è lineare, allora  $u_2 - u_1$  è soluzione del problema di Cauchy che abbia per dati iniziali, la differenza dei dati iniziali. Dunque

$$\|u_2 - u_1\|_{\infty, T} \leq \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{\infty, T} + T \|\psi_2 - \psi_1\|_{\infty, T}$$

Sia  $\delta \equiv \max(\|\varphi_2 - \varphi_1\|_{\infty, T}, \|\psi_2 - \psi_1\|_{\infty, T})$ , segue

$$\|u_2 - u_1\|_{\infty, T} \leq \delta(1 + T)$$

Questa scrittura non è totalmente corretta dimensionalmente: la si intende adimensionalizzando le quantità. Questa stima cresce linearmente in  $t$ : per questo si fissa un tempo massimo di osservazione.

## 2.9 Equazione delle onde sulla semiretta

La soluzione dell'equazione delle onde ha un problema sostanziale. Tale problema è già presente per l'equazione del trasporto: finché si vive su tutto  $\mathbb{R}$ , si può tranquillamente trasportare la soluzione; il problema compare quando non è più così.

Si studia come l'equazione si comporta in una semiretta. La parte della soluzione che viaggia verso l'estremo della semiretta, in qualche senso intuitivo, deve rimbalzare e tornare indietro. Si formalizza tale "rimbalzo".

**Riflessione di un'onda.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x), & (x, t) \mapsto u(x, t) \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Il dominio non è più un semipiano (anche se molte volte si può estendere) del piano delle caratteristiche, ma solamente un quadrante (il primo). Bisogna dare i dati al bordo: dire come

si comporta la soluzione ai bordi del sistema. Questa volta i bordi sono 0 (o ovunque parta la semiretta). Bisogna dire come si comporta la soluzione in zero per ogni tempo. Questa richiesta sul bordo è analoga a quanto visto per le quantità conservate.

Si vede la strategia per risolvere il problema. Si consideri di conoscere l'evoluzione del sistema ad ogni tempo. Si estende spazialmente la soluzione in modo antisimmetrico (in modo dispari, essa è anche una simmetria discreta). La parte aggiunta non ha senso fisicamente, serve ad estendere la soluzione a tutto  $\mathbb{R}$ . Se una funzione antisimmetrica sia in  $\varphi$  che  $\psi$  mantenesse la propria antisimmetria per ogni tempo allora si ha concluso: si risolve il problema esteso e lo si proietta, per antisimmetria, su  $\mathbb{R}^+$ .

Il primo passo per la costruzione della soluzione sulla semiretta è dimostrare la conservazione della simmetria discreta dei dati iniziali.

Le ipotesi sono le antisimmetrie:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

La tesi è

$$u(x, t) = -u(-x, t), \quad t > 0$$

Si vede la dimostrazione. Infatti

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(-x + ct) + \varphi(-x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-x-ct}^{-x+ct} \psi(y) dy \\ &= \frac{1}{2} [-\varphi(x - ct) - \varphi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x+ct}^{x-ct} \psi(z) dz, \quad z = -y \\ &= -\frac{1}{2} [\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)] - \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(z) dz \\ &= -u(x, t) \end{aligned}$$

cioè la tesi. Dati iniziali antisimmetrici implicano che la soluzione sia antisimmetrica per ogni tempo (con dati al bordo di Dirichlet).

Il problema è risolto, ma non si ha una scrittura esplicita della soluzione perché bisogna risolvere il problema esteso e poi proiettare. Per scrivere una soluzione che coinvolge solo termini con  $x$  positivi, bisogna fare un altro passo. Se non si vuole estendere e poi proiettare, si può fare una considerazione riguardante le caratteristiche.

Se il punto  $(x, t)$  nel piano delle caratteristiche è sufficientemente vicino a  $x = 0$ , allora una delle due caratteristiche dovrebbe partire nella regione che non esiste. Si nota che si può ricostruire il dato partendo dalla caratteristica riflessa utilizzando l'antisimmetria. Si costruiscono metà delle caratteristiche riflettendole e facendole arrivare in un valore che è speculare a quello nel problema esteso.

Se il punto  $(x, t)$  è tale per cui  $0 < x < ct$  allora una caratteristica deve venir riflessa. Altrimenti per  $x > ct$ , entrambe le caratteristiche ricadono nel quadrante giusto. Il punto  $(0, 0)$  fa parte del dato iniziale ed ha un cono di influenza: a sinistra non si ha nulla perché si sta resolvendo il problema in  $\mathbb{R}^+$ , ma si ha solo il cono di influenza di destra sopra la caratteristica  $x = ct$ , cioè per  $0 < x < ct$ . Dunque, si hanno due regioni, una di influenza e l'altra non è influenzata dal dato iniziale. Per ogni  $x$  fissato, dopo un tempo sufficiente, si sente l'effetto del muro.

Si è trattato lo zero prima come dato un elemento del dato iniziale (il punto ha un cono di luce, etc) e poi come dato al bordo (oltre  $x = 0$  non si può andare). Poiché le condizioni tra dato iniziale e dato al bordo sono separate, esse potrebbero non essere compatibili. Dunque, le informazioni fornite dal dato iniziale e dal dato al bordo sono le stesse per  $x = 0$  e  $t = 0$ . Si dice compatibilità dei dati iniziali il fatto che, in effetti, le due informazioni siano identiche in  $(0, 0)$ . Nella regione  $x > ct$ , cioè quando entrambe le caratteristiche ricadono nel quadrante giusto, la soluzione è quella già vista. Nella regione  $0 < x < ct$ , bisogna riflettere una caratteristica. Siano  $\varphi_{\text{odd}}$  e  $\psi_{\text{odd}}$  le estensioni antisimmetriche di  $\varphi$  e  $\psi$ . Dunque

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi_{\text{odd}}(x - ct) + \varphi_{\text{odd}}(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(s) ds \Big|_{x>0}$$

Noto

$$\varphi_{\text{odd}}(x - ct) = -\varphi_{\text{odd}}(ct - x) = -\varphi(ct - x)$$

e simile per  $\psi$ . Pertanto

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [-\varphi(ct - x) + \varphi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 \psi_{\text{odd}}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [-\varphi(ct - x) + \varphi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^0 \psi(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [-\varphi(ct - x) + \varphi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds \end{aligned}$$

ricordando che  $\psi_{\text{odd}}(s) = -\psi(-s)$  per  $s < 0$ , cioè  $x - ct < 0$ .

Quando si introduce il “muro” di Dirichlet su cui si riflette la soluzione, non si ha più un modo univoco di scrivere la soluzione, ma dipende dal punto dello spazio-tempo: si distingue se esso sia nella regione di influenza causale del dato al bordo o meno.

Il dominio di integrazione di  $\psi$  è  $[ct - x, x + ct]$ , [immagine]. All'interno della zona definita dalle caratteristiche e l'asse  $x$ , bisogna considerare che il dominio di integrazione potrebbe variare: considerando ivi un punto, una sua caratteristica cade di sicuro all'interno, mentre l'altra potrebbe cadere all'esterno. Non tutti i punti hanno necessità solo dei valori in  $[ct - x, x + ct]$ . Se si vuole parlare del cono di luce come il luogo per cui tutti i punti al proprio interno sono influenzati dallo stesso intervallo aperto dei dati iniziali, allora bisogna considerare tutta la regione al di sotto delle caratteristiche partendo da  $x = 0$  [immagine].

## 2.10 Equazione delle onde sull'intervallo

Si sono sempre distinte le caratteristiche con pendenza positiva e negativa. Inoltre, si è posta attenzione a controllare se due caratteristiche si incontrino. Bisogna avere cautela nel caso di un bordo, perché esso cambia la natura delle caratteristiche: una caratteristica (con pendenza) negativa diventa positiva. Introducendo un altro punto con un altro bordo, si divide lo spazio in infinite regioni. Il metodo delle caratteristiche diventa complicato da seguire. Si considerino due “muri”: si ha un intervallo  $[a, b]$  in cui vive il sistema. La caratteristica partente da  $a$  arriva al muro in  $b$  e si riflette, poi ritorna in  $a$  e si riflette nuovamente, e così via ad infinitum. Bisogna porre attenzione a scrivere in maniera differente la soluzione tutte le volte che la caratteristica si riflette, cioè cambia natura. [immagine] Si può estendere la soluzione in maniera periodica e antisimmetrica, tuttavia si avrebbero comunque infinite soluzioni, anche se non è difficile trovare una relazione di ricorrenza. Pertanto, si può provare un approccio differente.

**Metodo di Fourier.** Il metodo è simile al problema della corda vibrante con gli estremi fissati (o la radiazione di corpo nero): solamente alcuni modi di oscillazione sono permessi. Si consideri il seguente problema di Cauchy per due muri di Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Si noti l'ultima condizione: la condizione di compatibilità. Si risolve il problema in modo simile a come si risolve il problema di Schrödinger per un certo potenziale monodimensionale.

Si consideri una soluzione del tipo  $u(x, t) = S(x)Q(t)$ , simile a come si è fatto in meccanica classica per Hamilton-Jacobi, sebbene fosse una soluzione additiva e non moltiplicativa. Questo non implica che la soluzione generale sia moltiplicativa. Si prende questa particolare struttura perché si può ricostruire all'interno di certe condizioni la soluzione generale partendo da questo

tipo di soluzione.

L'equazione delle onde diventa

$$\ddot{Q}S - c^2 S''Q = 0$$

dove  $\dot{f} \equiv d_t f$  e  $f' \equiv d_x f$ . Pertanto

$$\frac{\ddot{Q}}{Q} = c^2 \frac{S''}{S} \equiv \alpha c^2$$

Il primo termine dipende solo dal tempo, il secondo solo dallo spazio. L'unica speranza è che tali quantità siano delle costanti affinché siano uguali. Quindi

$$\begin{cases} \ddot{Q} = \alpha c^2 Q \\ S'' = \alpha S \end{cases}$$

Si risolve la parte spaziale. I dati al bordo sono tali per cui la soluzione dev'essere nulla. Tale scelta è utile perché permette di sfruttare la linearità. Pertanto, bisogna trovare tutte le soluzioni di  $S'' = \alpha S$  con dati al bordo nulli. Le soluzioni dipendono dal segno di  $\alpha$ .

Per  $\alpha > 0$  si ha

$$S(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

e dalle condizioni al bordo segue

$$S(0) = A + B = 0, \quad S(L) = Ae^{\sqrt{\alpha}L} + Be^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \implies A = B = 0$$

Dunque,  $\alpha$  non può essere positivo perché si avrebbero solamente soluzioni banali.

Per  $\alpha = 0$  si ha

$$S(x) = A + Bx$$

con condizioni al bordo

$$S(0) = A = 0, \quad S(L) = A + BL = 0 \implies A = B = 0$$

ed allora  $\alpha$  non può essere nullo.

Dunque, tale parametro non può che essere negativo. Per  $\alpha = -k^2 < 0$  si ha

$$S(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Non si ha sempre soluzione, ma i dati al bordo discretizzano i valori ammissibili di  $\alpha$ . Pertanto

$$S(0) = A = 0, \quad S(L) = A \cos(kL) + B \sin(kL) = 0 \implies S(L) = B \sin(kL) = 0$$

Dunque, o  $B = 0$ , ma si esclude, oppure

$$\sin(kL) = 0 \implies k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Per comodità, sia la famiglia di soluzione come segue

$$S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

per cui

$$\|S_n\|_2^2 \equiv \int_0^L S_n^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1$$

cioè sono normalizzati in  $L^2$ .

Si risolve la parte temporale con quanto noto dalla parte spaziale. Dunque

$$\ddot{Q} + k^2 c^2 Q = 0 \iff \ddot{Q} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c^2 Q = 0$$



si pone

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c^2, \quad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

da cui si ottiene la legge di dispersione per l'equazione delle onde

$$\omega_n^2 = c^2 k_n^2$$

La legge dispersione per un'equazione lineare è semplice. Si osserva se tale equazione supporta delle soluzioni di tipo disaccoppiato (tipo parte temporale e parte spaziale separate), in qual caso si vede come viene legato il coefficiente davanti alla parte temporale con il coefficiente davanti alla parte spaziale. In generale, la funzione  $e^{i(kx - \omega t)}$  non è soluzione dell'equazione delle onde a meno che  $k$  ed  $\omega$  siano legate dalla legge di dispersione.

Dunque, la soluzione della parte temporale è

$$Q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

La soluzione generale dell'equazione delle onde è data da

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N Q_n S_n$$

Inoltre,  $S_n$  non dipende da alcun valore arbitrario, mentre  $Q_n$  dipende da due famiglie di numeri reali  $a_n$  e  $b_n$ . La funzione  $u$  è ancora soluzione perché è somma di soluzioni di un'equazione lineare con dati al bordo nulli. Si considerano un numero  $N$  finito di termini. Tutto quanto viene trattato successivamente si può estendere nel limite  $N \rightarrow \infty$ , ma non è banale (cfr. Matematica per la Fisica o Analisi III).

Si considerano qualche proprietà di  $S_n$ . Si definisce il prodotto scalare tra funzioni in  $L^2[0, L]$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f g \, dx$$

**Esercizio.** Vale

$$\langle S_n, S_m \rangle = \delta_{nm}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle S_n, S_m \rangle &= \delta_{nm} = \int_0^L S_n S_m \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \, dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi}{L}x\right) \, dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi}{L}x\right) \, dx = \delta_{nm} \quad n, m > 0 \end{aligned}$$

**Teorema.** Ogni funzione  $f \in L^2[0, L]$  con  $f(0) = f(L) = 0$  si può scrivere come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n(x)$$

dove si ha

$$c_n = \langle f, S_n \rangle$$

## Lezione 6

L'insieme delle soluzioni  $S_n$  costituisce una base ortonormale per  $L^2[0, L]$ .

**Dimostrazione.** Si ha

$$\langle f, S_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n, S_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle S_n, S_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

La seconda uguaglianza non è scontata perché si inverte una serie infinita con un integrale.

La soluzione generale  $u(x, t)$  dipende da  $Q_n$  che a sua volta dipende da due successioni,  $a_n$  e  $b_n$ , di costanti arbitrarie. In esse è codificato il dato iniziale. Il fatto di avere due successioni è legato alla presenza di due dati iniziali. Si è appena visto come legare una funzione  $L^2$  ad una successione. Pertanto, si scompongono i dati iniziali sulla base ortonormale  $S_n$ :

$$u(x, 0) = \varphi = \sum_n c_n S_n, \quad u_t(x, 0) = \psi = \sum_n d_n S_n$$

Si consideri la soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) S_n$$

Segue

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n S_n(x) = \psi(x)$$

Si confrontano i dati iniziali termine a termine:

$$a_n = c_n = \langle \varphi, S_n \rangle, \quad b_n \omega_n = d_n = \langle \psi, S_n \rangle$$

Si è ricostruita la soluzione a partire dai dati iniziali per una certa loro classe.

L'equazione di Schrödinger per una particella libera in una dimensione ha anch'essa una derivata seconda, ma con una derivata temporale moltiplicata per l'unità immaginaria:

$$i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} \Psi$$

In qualche modo, ripercorrendo le stesse operazioni viste, cambia solamente la parte temporale. Sebbene, la derivata temporale sia del prim'ordine, si hanno comunque due successioni di costanti arbitrarie perché la funzione è complessa. La relazione di dispersione per tale equazione è<sup>1</sup>

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2$$

La dispersione non è più lineare: il pacchetto d'onda tende a separarsi.

**Dati al bordo di Neumann.** Il problema di Cauchy è:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Si impongono ancora la condizione di compatibilità (l'ultima equazione). Per le funzioni armoniche, la compatibilità di Neumann è qualcosa di stringente. Si fa esattamente quanto fatto prima. Si consideri una soluzione del tipo

$$u(x, t) = Q(t)S(x)$$

<sup>1</sup><http://www.physics.usu.edu/riffe/3750/Lecture%2026.pdf>

Dunque

$$\ddot{Q} = \alpha c^2 Q, \quad S'' = \alpha S, \quad S_x(0) = S_x(L) = 0$$

Si studia la parte spaziale. Per  $\alpha > 0$  si ha

$$S(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Le condizioni al bordo implicano

$$A\sqrt{\alpha} - B\sqrt{\alpha} = 0, \quad \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}L} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \implies A = B = 0$$

Per  $\alpha = 0$  si ha

$$S(x) = Ax + B$$

per le condizioni al bordo si ha

$$S'(0) = A = 0, \quad S'(L) = A = 0 \implies S_0 = B$$

si ha una novità rispetto alle condizioni di Dirichlet. Per  $\alpha = -k^2 < 0$  si ha

$$S(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad S_x(x) = -kA \sin(kx) + kB \cos(kx)$$

dove per le condizioni al bordo segue

$$S_x(0) = 0 \implies B = 0$$

così come

$$S_x(L) = 0 \implies \sin(kL) = 0 \implies k = \frac{n\pi}{L}$$

Pertanto

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

La differenza con Dirichlet è l'utilizzo della funzione trigonometrica utilizzata.

Si studia la parte temporale. Per i modi strettamente negativi, la discretizzazione è identica. In più si ha anche un modo nullo  $\alpha = 0$ :

$$Q_0 = a_0 t + b_0$$

Mentre per  $\alpha = -k_n^2 < 0$  si ha

$$Q_n = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

con la stessa legge di dispersione

$$\omega_n = ck_n = \frac{n\pi}{L}c$$

Pertanto, la soluzione è

$$u(x, t) = a_0 t + b_0 + \sum_{n=1} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n x)$$

(non manca un  $S_0 = B$ ?). I dati iniziali compatibili con le condizioni al bordo sono:

$$\begin{cases} \varphi = b_0 + \sum_{n=1} a_n \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n x) = u(x, 0) \\ \psi = a_0 + \sum_{n=1} b_n \omega_n \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n x) = u_t(x, 0) \end{cases}$$

Quindi bisogna ripetere tutto quanto fatto in precedenza.

**Esercizio.** Si studino i dati al bordo periodici:

$$u(0, t) = u(L, t), \quad u_x(0, t) = u_x(L, t)$$

Si ha la struttura

$$S_0 = a_0, \quad S_n = a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

con relazione di dispersione pari a

$$\omega_n = ck_n = 2\frac{n\pi}{L}c$$

Il punto cruciale di tutto quanto visto è l'identificazione degli  $S_n$ . La cui struttura dipende dalle condizioni al bordo.

## 2.11 Equazione delle onde con sorgente

Si prosegue in analogia con quanto fatto per l'equazione del trasporto. Essa prevede due aspetti: la velocità dipende dallo spazio e dal tempo, e sorgenti dipendenti dalla soluzione. Questi aspetti non si vedono per le onde. Il primo è un argomento delicato, mentre il secondo, qualora la sorgente sia lineare nella soluzione, rimanda all'equazione di Klein-Gordon. Ci si limita ad un caso particolare che sottolinea l'importanza delle caratteristiche.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) & u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

dove  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione assegnata.

**Teorema.** di Green. Si consideri una mappa

$$(Q, P) : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

con  $Q$  e  $P$  funzioni di classe  $C^1$ , dove  $\Delta$  è un insieme aperto (Delta per Dominio). Vale

$$\int_{\Delta} (P_x - Q_t) dx dt = \oint_{\partial\Delta} P dt + Q dx = \oint_{\partial\Delta} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \cdot \hat{t} ds$$

dove  $\hat{t}$  è il vettore tangente a  $\partial\Delta$ .

Questo teorema è la versione bidimensionale del teorema di Stokes.

Le caratteristiche svolgono un ruolo cruciale. [immaginare] Si consideri un punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  nel piano delle caratteristiche e si consideri come dominio  $\Delta$  la regione compresa tra le due caratteristiche del punto e l'asse  $x$ . Si immagina che la soluzione sia data da due contributi in analogia con il teorema che afferma che la soluzione è data dalla soluzione omogenea più una soluzione particolare. Se la sorgente fosse assente, allora il valore della soluzione in  $(\bar{x}, \bar{t})$  sarebbe dato solamente dall'intervallo  $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$ .

In qualche modo, si sa che esiste qualcosa che influenza la soluzione e che dipende dai punti dello spazio. Ci si aspetta che gli unici punti d'interesse siano dentro il cono del passato: questo lo si conferma a posteriori. Si integra il quadratello di  $u$  su tutto il cono del passato:

$$\int_{\Delta} u_{tt} - c^2 u_{xx} dx dt = \int_{\Delta} f(x, t) dx dt$$

In questa dimostrazione non si usa il fatto che  $f$  sia non nulla. Di fatto si ritrova, come caso particolare, la soluzione dell'equazione delle onde (senza sorgenti). Tuttavia, la si trova con una metodologia differente: si integra su tutto il cono del passato del punto dello spazio tempo

in cui si vuole calcolare la soluzione. Lascia insoddisfatti la scelta dell'integrale come punto di partenza: perché mai bisognerebbe partire da tale integrale. Capire il motivo è un livello ulteriore di comprensione della dimostrazione. Con questa introduzione, si spera di convincersi del perché sia ragionevole osservare cosa succede nell'integrale sul cono del passato  $\Delta$ .

Dunque, facendo uso del teorema di Green, si ha

$$\int_{\Delta} u_{tt} - c^2 u_{xx} \, dx \, dt = \int_{\Delta} (-c^2 u_x)_x - (-u_t)_t \, dx \, dt = \int_{\partial\Delta} \begin{pmatrix} -u_t \\ -c^2 u_x \end{pmatrix} \cdot \hat{t} \, ds = \int_{\partial\Delta} -c^2 u_x \, dt - u_t \, dx$$

Nella prima uguaglianza, si abbandona già l'idea che  $c$  possa dipendere dallo spazio tempo. Si calcola il versore tangente sui tre segmenti del dominio. Sia  $L_0$  il segmento sull'asse  $x$  ed  $L_1$  ( $x = -ct + \bar{x} + c\bar{t}$ ) e  $L_2$  ( $x = ct + \bar{x} - c\bar{t}$ ) le caratteristiche in senso antiorario, senso anche di percorrenza della frontiera  $\partial\Delta$ .

In  $L_0$  si ha

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{t} \, ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dx$$

dove  $s$  è la parametrizzazione della curva. Per  $L_1$  si ha

$$\hat{t} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{c} \end{pmatrix}, \quad \hat{t} \, ds = -\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{c} \end{pmatrix} \, dx$$

Dato che  $ds$  è la lunghezza d'arco, basta usare il teorema di Pitagora, ricordando (informalmente) che  $dx = c \, dt$ :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dt)^2} = \sqrt{1 + (t'(x))^2} \, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \, dx$$

In  $L_2$  si ha

$$\hat{t} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}, \quad \hat{t} \, ds = -\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} \, dx$$

Si separa l'integrale sulla frontiera in tre integrali: uno per ogni segmento.

$$\oint_{\partial\Delta} = \int_{L_0} + \int_{L_1} + \int_{L_2}$$

Per  $L_0$  si ha

$$\int_{L_0} \begin{pmatrix} -u_t \\ -c^2 u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dx = -\int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} u_t(x, 0) \, dt = -\int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} \psi(x) \, dt$$

con  $t = 0$  perché  $L_0$  risiede sull'asse  $x$ . Si ritrova l'integrale in  $\psi$  che è l'integrale presente nella soluzione per  $f(x, t) \equiv 0$ .

Per  $L_1$  si ha

$$\begin{aligned} -\int_{L_1} \begin{pmatrix} -u_t \\ -c^2 u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{c} \end{pmatrix} \, dx &= \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+c\bar{t}} u_t - cu_x \, dx = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+c\bar{t}} u_t \, dx - c \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+c\bar{t}} u_x \, dx \\ &= c \int_{\bar{x}+c\bar{t}}^{\bar{x}} u_t \, dt + u_x \, dx = c \int_{\bar{x}+c\bar{t}}^{\bar{x}} du = cu(\bar{x}, \bar{t}) - cu(\bar{x} + c\bar{t}, 0) \\ &= cu(\bar{x}, \bar{t}) - c\varphi(\bar{x} + c\bar{t}) \end{aligned}$$

ricordando che  $u = u(x, t(x))$  e  $dx = -c \, dt$ .

Per  $L_2$  si ha

$$\begin{aligned} -\int_{L_2} \begin{pmatrix} -u_t \\ -c^2 u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} \, dx &= \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}} u_t + cu_x \, dx = \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}} u_t \, dx + c \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}} u_x \, dx \\ &= -c \int_{\bar{x}}^{\bar{x}-c\bar{t}} u_t \, dt + u_x \, dx = -c \int_{\bar{x}}^{\bar{x}-c\bar{t}} du = cu(\bar{x}, \bar{t}) - cu(\bar{x} - c\bar{t}, 0) \\ &= cu(\bar{x}, \bar{t}) - c\varphi(\bar{x} - c\bar{t}) \end{aligned}$$

ricordando che  $dx = c dt$ .  
Sommando quanto trovato si ha

$$\int_{\Delta} f(x, t) dx dt = 2cu(\bar{x}, \bar{t}) - c [\varphi(\bar{x} + c\bar{t}) + \varphi(\bar{x} - c\bar{t})] - \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} \psi(x) dx$$

da cui si ricava

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2} [\varphi(\bar{x} + c\bar{t}) + \varphi(\bar{x} - c\bar{t})] + \frac{1}{2c} \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} \psi(x) dx + \frac{1}{2c} \int_{\Delta} f(x, t) dx$$

Quando si ha una sorgente, bisogna sommare il suo contributo su tutto il cono del passato del punto, alla soluzione omogenea.

**Buona positura.** Questo metodo costruttivo garantisce l'esistenza e l'unicità. Per la stabilità si nota

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{\infty, T} &\leq \|\varphi\|_{\infty} + T\|\psi\|_{\infty} + \frac{1}{2c} \sup_{(x, t) \in \Delta} [f(x, t) \text{Area}(\Delta)] \\ &= \|\varphi\|_{\infty} + T\|\psi\|_{\infty} + \frac{1}{2} T^2 \|f\|_{\infty, T} \end{aligned}$$

dove l'area di  $\Delta$  scala come  $tx \propto ct^2$  ed l'integrale è approssimato con un rettangolo.

## Lezione 7

### 2.12 Equazione delle onde in tre dimensioni

L'equazione delle onde risente qualitativamente del numero di dimensioni: si vedono fenomeni diversi per numeri di dimensioni diversi. In particolare, la distinzione è tra una dimensione, numero pari di dimensioni e numero dispari di dimensioni.

**Principio di Huygens.** In tre dimensioni vale il principio di Huygens. Ad esempio, esso, per il suono, equivale ad affermare che il tempo di percezione è identico al tempo di emissione. Si consideri una sorgente di un fenomeno ondulatorio (luce, suono, etc.). Osservando il sistema ad un certo tempo fissato, si vuole costruire la soluzione al tempo  $t + \varepsilon$ . Si può considerare che ogni punto di un fronte d'onda sia esso stesso localmente una sorgente. Quindi la soluzione a  $t + \varepsilon$  è l'involuppo di tutti i fronti generati dalle nuove sorgenti. In questo, è insoddisfacente l'utilizzo di concetti (come il "fronte") non matematicamente definiti, ma che derivano dall'esperienza sensibile. Si studia com'è fatta la soluzione (esplicita) dell'equazione delle onde in tre dimensioni.

**Teorema di Kirchhoff.** La soluzione dell'equazione delle onde in tre dimensioni è detta teorema di Kirchhoff. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0 & u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}) & (\vec{x}, t) \mapsto u(\vec{x}, t) \\ u_t(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}) \end{cases}$$

La sua soluzione è

$$u(\vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi c^2 t_0} \int_{\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = ct_0} \psi(\vec{x}) d\sigma + \frac{\partial}{\partial t_0} \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t_0} \int_{\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = ct_0} \varphi(\vec{x}) d\sigma \right]$$

La soluzione presenta due parti differenti, le stesse parti nell'equazione monodimensionale: una parte legata al dato iniziale in  $u_t(x, 0)$  ed una legata al dato iniziale  $u(x, 0)$ . In una dimensione, si ha una parte di valutazione del dato iniziale ed una parte di integrazione. In questo caso si

hanno integrali di superficie che, in una dimensione, corrispondono a valutazioni in punti. Se questo valesse sempre, in  $n$  dimensioni si avrebbero integrali al più in  $n - 1$  dimensioni, ma già in una dimensione (e neanche due) funziona. Qua si già inizia a capire cosa significa “fronte”.

Nella soluzione monodimensionale, la misura dell’intervallo su cui si integra è retta da  $ct$ . Per tre dimensioni, si integra su di una sfera con raggio  $ct$ , cioè il fronte. Si nota anche un altro fenomeno: per costruire la soluzione in un certo punto  $(\vec{x}_0, t_0)$  bisogna conoscere il valore dei dati iniziali solamente sulla superficie di una sfera con un raggio  $ct_0$  centrata in  $\vec{x}_0$ . In questo senso, questo integrale è simile alla prima parte della soluzione monodimensionale, cioè la valutazione dei dati iniziali a distanza  $ct$  dal punto interessato. In tre dimensioni è tutto simile a tale prima parte.

Si nota che la scrittura della soluzione presuppone un  $t_0$  arbitrario: si può svolgere la derivata e poi scegliere il valore particolare di  $t_0$  in cui calcolare la soluzione.

Si è definito il fronte. L’idea del principio di Huygens è prendere un  $t_0$  che dista poco dal fronte e lo si ricostruisce con quella parte di fronte che dista esattamente  $\varepsilon$ .

**Dimostrazione.** Si vede il metodo delle medie spaziali. Esso non è il più semplice, ma è generale e quindi lo si può incontrare anche in altri contesti. Si utilizza nella teoria dei campi. Spesso non si conosce la soluzione generale, pertanto si osserva il comportamento di certe grandezze costruite a partire dai campi (in senso fisico, non matematico) presenti. Le quantità più semplici sono quelle conservate. Un aspetto cruciale è lo studio di quantità la cui evoluzione non è semplice come quella delle quantità conservate. Un esempio sono le medie spaziali. Ad esempio, per un fluido su di un piano orizzontale si può calcolare la velocità orizzontale media di una colonna di fluido ad una certa posizione. Se si riesce a trovare un’equazione differenziale per la media, allora ci si può aspettare che essa sia più semplice da risolvere dell’equazione di partenza e quindi si possono estrapolare delle informazioni.

Si fa una media spaziale

$$\bar{u}(r, t) \equiv \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x|=r} u(x, t) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(\vec{x}, t) \sin \theta d\varphi d\theta$$

con  $\theta \in [0, \pi)$  colatitudine e  $\varphi \in [0, 2\pi)$  longitudine. Si passa da tre dimensioni spaziali a solamente una. Si media il valore della funzione su ogni sfera di raggio  $r$  centrata in zero. Si può estendere la costruzione ad altri centri perché l’equazione delle onde è invariante per traslazioni rigide.

Si scrive il laplaciano in coordinate sferiche per mezzo del cambio di coordinate

$$\nabla^2 \equiv \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$$

Si scrive l’equazione per la media  $\bar{u}$ . Si fa la media dell’equazione delle onde

$$\overline{u_{tt} - c^2 \nabla^2 u} = 0$$

Si ha un problema nel secondo addendo. Si vuole scrivere un’equazione che ha  $\bar{u}$  come incognita. Inoltre, non è detto che  $\bar{u}$  soddisfi l’equazione delle onde (in una dimensione). Fatto salvo di poter invertire tutti gli operatori possibili, il problema risiede nello scambiare la derivata spaziale con l’integrazione spaziale (per la derivata temporale si può fare senza problemi). Infatti, non è garantito che i due operatori commutino.

Per la derivata temporale si ha

$$\overline{\partial_t^2 u} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x|=r} u_{tt}(\vec{x}, t) d\sigma = \partial_t^2 \left[ \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x|=r} u(\vec{x}, t) d\sigma \right] = \partial_t^2 \bar{u}$$

Per la derivata spaziale si ha

$$\begin{aligned}\overline{\nabla^2 u} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \, d\varphi \, d\theta \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u_\theta) \, d\varphi \, d\theta \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} \frac{u_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \, d\varphi \, d\theta\end{aligned}$$

La prima riga non dà problemi, per lo stesso argomento precedente. Si calcola la seconda riga:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \partial_\theta (\sin \theta u_\theta) \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} (\sin \theta u_\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \, d\varphi = 0$$

Questa dimostrazione, sostanzialmente, funziona analogamente per le dimensioni dispari. Si ottiene zero, tra l'altro, perché si stanno cercando soluzioni regolari, well-behaved.

Si calcola la terza riga:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{u_{\varphi\varphi}}{\sin \theta} \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, d\theta = 0$$

Il punto a  $\varphi = 0$  ed il punto  $\varphi = 2\pi$  sono il medesimo. Si sta imponendo la continuità della funzione.

Si calcola il primo termine

$$\overline{\nabla^2 u} = \frac{1}{4\pi} = \partial_r^2 \bar{u} + \frac{2}{r} \partial_r \bar{u}$$

Pertanto, l'equazione delle onde media diventa l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux:

$$\overline{u_{tt} - c^2 \nabla^2 u} = 0 \iff \bar{u}_{tt} - c^2 \left( \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right) = 0$$

cioè è l'equazione delle onde con un termine aggiuntivo. Non si è più in tre dimensioni, ma in una temporale ed una spaziale, con una asimmetria: si forniscono i dati iniziali solamente per  $t = 0$ .

Ci si riconduce ad un caso noto. Risulta cruciale il legame tra il coefficiente, qua rappresentato da 2, ed il numero di dimensioni spaziali: in generale tale coefficiente è  $n - 1$  grazie alle coordinate polari.

Si introduce una variabile che non porta con sé singolarità:

$$\nu(r, t) = r \bar{u}(r, t)$$

Non si fa nulla di grave per l'introduzione di singolarità. Tuttavia, la soluzione per  $\nu$  non deve divergere in alcun punto. La media dà una buona approssimazione di quanto vale la funzione nel punto quando il raggio della sfera è piccolo. Le soluzioni per  $\nu$ , in  $r = 0$ , deve valere annullarsi per poter ricostruire la  $\bar{u}$ . Il sistema diventa

$$\begin{cases} \nu_{tt} - c^2 \nu_{rr} = 0 & \nu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \nu(0, t) = 0 & r > 0 \\ \nu(r, 0) = \overline{ru(\vec{x}, 0)} = r \bar{u}(r, 0) = r \bar{\varphi}(r) \\ \nu_t(r, 0) = r \bar{\psi}(r, 0) \end{cases}$$

La seconda riga è l'ipotesi di regolarità di  $\nu$  in  $r = 0$ . Non si può risolvere l'equazione e poi imporre tale proprietà. Questa equazione delle onde è definita in una semiretta: ha un bordo perché il raggio è solo positivo. Pertanto, bisogna dire quanto vale la soluzione sul bordo.

Si risolve l'equazione. La variabile  $\nu$  è legata alla media della funzione su una sfera di raggio  $r$  centrata in zero. Si ricorda che la soluzione all'equazione delle onde su di una semiretta si scrive



un due modi diversi, in base a dove si trova il punto. Si vuole approssimare al meglio possibile la soluzione. Si può far ciò quando il raggio è piccolo rispetto  $ct$ . Si considera solamente questa parte di soluzione perché l'approssimazione della media è buona nel limite  $r \rightarrow 0$ . Quindi, la soluzione per  $r < ct$  è

$$\nu(r, t) = \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{\psi}(s) ds + \frac{1}{2} [(ct+r)\bar{\varphi}(ct+r) - (ct-r)\bar{\varphi}(ct-r)]$$

Si riorganizzano i termini

$$\nu(r, t) = \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{\psi}(s) ds + \frac{1}{2c} \partial_t \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{\varphi}(s) ds$$

Per controllare il secondo termine, basta risolvere l'integrale per parti.

Si fa il limite per  $r \rightarrow 0$ . Se è tutto regolare, allora la media su una sfera di raggio  $r$  tende al valore della funzione al centro della sfera, per continuità. Il problema è che  $\nu$  ed  $r$  sono nulli esattamente nell'origine. Bisogna risolvere tale indeterminazione. Dunque

$$\bar{u}(r, t) = \frac{\nu(r, t)}{r} = \frac{\nu(r, t) - \nu(0, t)}{r}$$

dove  $\nu(0, t) = 0$  per ipotesi. Si fissa il tempo e si fissa il punto in cui si valuta  $\bar{u}$ . Quando si fa il limite, si ottiene il valore di  $\bar{u}$  in  $r = 0$ . Per continuità di  $\bar{u}$  si ha

$$u(0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(r, t) - \nu(0, t)}{r} = \nu_r(0, t)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \nu_r(r, t)|_{r=0} &= \partial_r \left[ \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{\psi}(s) ds + \frac{1}{2c} \partial_t \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{\varphi}(s) ds \right]_{r=0} \\ &= \frac{1}{2c} [(ct+r)\bar{\psi}(ct+r) + (ct-r)\bar{\psi}(ct-r)]_{r=0} \\ &\quad + \frac{1}{2c} \partial_t [(ct+r)\bar{\varphi}(ct+r) + (ct-r)\bar{\varphi}(ct-r)]_{r=0} \\ &= t\bar{\psi}(ct) + \partial_t(t\bar{\varphi}(ct)) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|\vec{x}\|=ct} \psi(\vec{x}) d\sigma + \partial_t \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|\vec{x}\|=ct} \varphi(\vec{x}) d\sigma \right] = u(\vec{0}, t) \end{aligned}$$

Per ottenere la tesi basta traslare rigidamente l'origine. Per un punto qualunque, la funzione

$$w(\vec{x}, t) \equiv u(\vec{x} + \vec{x}_0, t)$$

è ancora soluzione con dati al bordo  $\varphi(\vec{x} + \vec{x}_0)$  e  $\psi(\vec{x} + \vec{x}_0)$ . Pertanto

$$\begin{aligned} u(\vec{x}_0, t) = w(\vec{0}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|\vec{x}\|=ct} \psi(\vec{x} + \vec{x}_0) d\sigma + \partial_t \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|\vec{x}\|=ct} \varphi(\vec{x} + \vec{x}_0) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|=ct} \psi(\vec{x}) d\sigma + \partial_t \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|=ct} \varphi(\vec{x}) d\sigma \right] \end{aligned}$$

Si riassume quanto visto. Non si sa risolvere una PDE. Si cercano delle grandezze che, in qualche modo, siano costruite a partire dalla soluzione. In questo caso, la grandezza utilizzata è la media. Si cerca l'equazione differenziale soddisfatta da tale media. Tale equazione non è l'equazione delle onde monodimensionale. Si risolve l'equazione passando all'equazione delle onde sulla semiretta. La regolarità impone delle condizioni di Dirichlet all'origine. Si correggono i dati iniziali e si ricava l'evoluzione della media su di una sfera. Si cercano soluzioni regolari.

La media sulle sfere deve tendere al valore della funzione all'origine della sfera quando il suo raggio tende a zero. Si fa l'operazione di limite e si nota che non solo  $\bar{u}$  è legato a  $\nu$ , ma il valore di  $u$  nell'origine è legato alla derivata  $\nu_r$ . Da ciò si arriva alla soluzione.

Le idee sono due: si prende la media e si nota che la derivata della funzione costruita dalla media restituisce il valore della soluzione in zero.

Capito quanto fatto, si ritorna al principio di Huygens. Poiché interessa solo integrare su di una superficie, per avere il valore in un punto al tempo  $t$ , serve conoscere il valore dei dati iniziali su di una sfera centrata nel punto con raggio  $ct$ . Si consideri un tempo  $\tau$  tra  $t = 0$  e  $t$ . Per ricostruire il dato nel punto, si ha bisogno di tutti e soli i dati presenti su di una sfera più piccola (corrispondente a  $\tau$ ) di quella precedente ottenuti dalla sfera più grande (corrispondente a  $t = 0$ ) facendo evolvere il dato iniziale fino al tempo  $\tau$ . Se non si volesse ricostruire tutto il fronte, ma solamente un suo punto basta considerare una sfera che, ovviamente, è tangente alla sfera dei dati iniziali. Facendo così per ogni punto del fronte, allora il dato iniziale è l'involuppo delle sfere dei punti del fronte. La sfera più grande è ciò che ha influenzato quanto avviene nel punto (il tempo scorre verso il punto). Viceversa, se il punto fosse una sorgente, allora la sfera grande è ciò che è influenzato (il tempo scorre dal punto). Per capir bene questa parte, si suggerisce di utilizzare l'immagine a fine della trattazione della soluzione per due dimensioni, in particolare di analizzare per analogia il caso monodimensionale.

Un ipercono che passa attraverso lo spazio tridimensionale, dalla punta alla base, è visto come una sfera che si espande, cioè la sfera dei dati iniziali cresce sempre più perché sempre più punti dello spazio possono influenzare il punto fissato.

### 2.13 Equazione delle onde in due dimensioni

Le semplificazioni viste nella dimostrazione valgono per un numero dispari di dimensioni. Per le dimensioni pari si utilizza il metodo di riduzione. Si prende il risultato delle tre dimensioni e si applica una procedura di riduzione a due dimensioni. Tale procedura è standard per passare da  $2n + 1$  dimensioni a  $2n$  dimensioni con  $n > 0$ .

Si nota un fatto non banale. Si consideri una soluzione tridimensionale. Si supponga che essa non dipenda da una coordinata spaziale. Se  $u(x, y, z; t) = w(x, y; t)$  allora

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \nabla^2 u &= 0 \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} - c^2 u_{yy} - c^2 u_{zz} &= 0 \\ w_{tt} - c^2 w_{xx} - c^2 w_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

cioè  $w$  soddisfa l'equazione delle onde in due dimensioni. D'altra parte, una soluzione all'equazione delle onde che non dipende dal tempo, ma solamente dalle coordinate spaziali è soluzione dell'equazione di Laplace, cioè è una funzione armonica. Si ottiene un'altra equazione. Dunque, questo tipo di riduzioni richiedono una certa accortezza.

Se  $w$  soddisfa l'equazione delle onde in tre dimensioni, allora soddisfa l'equazione in due dimensioni. Si parte con il processo di riduzione. Si prende la soluzione per le tre dimensioni e la si riscrive nel caso in cui la soluzione non dipende da una delle coordinate. Il tecnicismo che risulta noioso è l'integrazione sferica contrapposta all'utilizzo di coordinate cartesiane. La riduzione funziona bene in coordinate cartesiane, non in coordinate sferiche o polari. Infatti, eliminando una coordinata in tali sistemi di coordinate non fornisce l'equazione delle onde in due dimensioni.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0 & u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(\vec{x}, 0) = \varphi(x, y) \\ u_t(\vec{x}, 0) = \psi(x, y) \end{cases}$$

Affinché una soluzione dipenda solamente da due coordinate, è necessario che pure i dati iniziali ne dipendano unicamente. Pertanto, considerata la superficie  $\Sigma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = c^2 t^2$

si ha

$$u(x_0, y_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\Sigma} \psi(x, y) d\sigma + \partial_t \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\Sigma} \varphi(x, y) d\sigma \right]$$

Oltre al punto di vista puramente matematico di fare i calcoli in una dimensione maggiore ed operare una proiezione, questa scrittura è insoddisfacente perché gli estremi di integrazioni vivono in uno spazio più grande di quello in cui si sta sviluppando la propria teoria e risulta complicato dare una interpretazione modellistica a tali oggetti. Pertanto, si elimina la coordinata  $z$  proiettando la soluzione in uno spazio bidimensionale studiando quali sono gli unici  $x$  ed  $y$  che contano.

Si osserva la geometria del conto

$$\int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2=c^2t^2} d\sigma = \int_{z=\pm\sqrt{c^2t^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} d\sigma = 2 \int_{z=\sqrt{c^2t^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} d\sigma$$

Le due calotte devono dare lo stesso contributo perché indipendenti da  $z$ . Si studia la jacobiana della trasformazione da coordinate sferica a coordinate cartesiane

$$d\sigma = \|t_1 \wedge t_2\| dx dy = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y z \end{pmatrix} \right\| dx dy$$

## Lezione 8

con

$$\partial_x z = \frac{x_0 - x}{z}, \quad \partial_y z = \frac{y_0 - y}{z}$$

Segue

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left\| \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{bmatrix} \right\| dx dy = \left\| \begin{bmatrix} z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} \right\| dx dy = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2}} dx dy = \sqrt{\frac{c^2 t^2}{z^2}} dx dy \\ &= \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} dx dy \end{aligned}$$

Dunque, la soluzione viene integrata sulla regione di piano  $\Sigma_1: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < c^2 t^2$ . Pertanto

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t) &= \frac{1}{2\pi c} \int_{\Sigma_1} \psi(x, y) \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c} \partial_t \int_{\Sigma_1} \varphi(x, y) \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} dx dy \end{aligned}$$

Si nota che sia gli estremi di integrazione che la funzione integranda dipendono dal tempo.

Si sottolinea la differenza tra le tre e le due dimensioni. In entrambi i casi si integra su di una superficie. In tre dimensioni, per dare il valore della funzione in un punto interessa un insieme di punti di misura nulla in  $\mathbb{R}^3$  dei dati iniziali. In due dimensioni, avviene lo stesso fenomeno di una sola dimensione: bisogna integrare su di un insieme aperto, qualcosa che ha dimensione non nulla in  $\mathbb{R}^2$  dei dati iniziali.

Pertanto, tutta la costruzione dei fronti d'onda a partire dal principio di Huygens non ha più senso. Non si può più fare il passo cruciale: prendendo due fronti vicini (dove un fronte è la frontiera del disco su cui si integra), non si possono più considerare dei dischi e dire che conta solamente la frontiera, non si può ricostruire l'involuppo; per ricostruire la funzione in un punto si ha bisogno di tutto il contenuto del disco. [immagine]

## 2.14 Soluzioni radiali all'equazione delle onde

Si cercano soluzioni radiali  $u(r, t)$  all'equazione delle onde. Per operare la riduzione, si cerca una soluzione che dipenda solamente dal raggio. Di fatto, l'equazione per  $\bar{u}$  trovata non dipende dagli angoli, però non è l'equazione delle onde.

In coordinate polari (due dimensioni), il laplaciano è

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \dots$$

Si nota che il coefficiente di  $r^{-1}$  è 1 e non 2 come il caso tridimensionale. L'equazione delle onde è

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = u_{tt} - c^2 \left( u_{rr} + \frac{u_r}{r} \right) = 0$$

Avendo già svolto i calcoli, il fatto di aver considerato  $\nu = ru$  come mappa per ridursi all'equazione delle onde in una dimensione è legato al fatto che compaia il coefficiente 2. Pertanto, non ci si può banalmente ridurre all'equazione delle onde. In questo caso, il modo e l'ansatz per procedere è considerare soluzioni disaccoppiate

$$u(r, t) = w(r) \cos(\lambda ct)$$

Si intravede qualcosa di simile alla soluzione per l'equazione delle onde sull'intervallo. In quel caso, le soluzioni  $S_n$  sono elementi costitutivi di soluzioni più generali. Adesso, però, non si fa nuovamente tutta la costruzione. Si studia cosa succederebbe facendo la stessa cosa, almeno per trovare l'ipotetico (e così rimane nel corso) elemento costitutivo. Dunque, il coseno non crea problemi fin tanto che vale l'equazione di Bessel di ordine 0

$$w_{rr} + \frac{w_r}{r} + \lambda^2 w = 0 \iff (\lambda r)^2 d_{\lambda r}^2 w + \lambda r d_{\lambda r} w + ((\lambda r)^2 - \alpha^2) w = 0$$

dove  $\alpha = 0$  è l'ordine. La soluzione è la funzione di Bessel del primo tipo

$$w = AJ_0(\lambda r), \quad A \in \mathbb{R}$$

Dunque la soluzione sferica è

$$u(r, t) = AJ_0(\lambda r) \cos(\lambda ct)$$

In coordinate sferiche (tre dimensioni), il laplaciano è

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \dots$$

Si usa quanto fatto precedentemente per la soluzione generale

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = u_{tt} - c^2 \left( u_{rr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) \\ &= ru_{tt} - c^2 (ru_{rr} + 2u_r) = ru_{tt} - c^2 (ur)_{rr} \\ &= (ur)_{tt} - c^2 (ur)_{rr} \end{aligned}$$

Cioè si ha l'equazione delle onde per  $ru(r, t)$ . La cui soluzione:

$$u(r, t) = \frac{1}{r} F(r - ct) + \frac{1}{r} G(r + ct)$$

non considerando i problemi di bordo, cioè localmente e sufficientemente distanti dal bordo. Per legare i dati iniziali bisogna risolvere il problema di Cauchy completamente, come si è già visto. Tuttavia, questa scrittura è interessante perché si individuano due parti: outgoing ed ingoing rispettivamente.

Rimane il problema della singolarità in zero e il comportamento nel tentativo di andare nella zona  $r < 0$ . Bisogna risolvere completamente l'equazione, come fatto prima.

### 3 Equazione del calore o di diffusione

La stessa equazione descrive sia il calore che la diffusione. Si vede una derivazione legata al calore ed un'altra legata alla diffusione.

**Derivazione dalla legge di Fourier.** Si vede dal punto di vista fenomenologico perché richiede varie nozioni di meccanica dei mezzi continui. L'ambito è la termodinamica: si considera il calore specifico  $c$ , la densità costante  $\rho$ , la temperatura locale  $T$  e la quantità di calore  $H$ . Vale

$$d_t H \propto (\hat{n} \cdot \nabla T) \text{Area}$$

dove  $\hat{n}$  è la normale uscente dal corpo. La temperatura è mediata su di un certo numero di elementi del sistema. Essa ha una scala minima naturale su cui dev'essere definita. L'equazione del calore è (fondamentalmente) insensibile alle dimensioni del sistema, quindi si svolge tutto in una dimensione. Dunque

$$H(t) = \int_D c\rho T(\vec{x}, t) d^3x$$

dove  $D$  è il volume del corpo. Da cui

$$d_t H = \int_D c\rho T_t d^3x = \int_{\partial D} k\hat{n} \cdot \nabla T d^3x = \int_D \nabla \cdot (k \nabla T) d^3x$$

dove  $k$  è una costante. Nella terza uguaglianza si utilizza il teorema della divergenza. Pertanto

$$T_t = \nabla \cdot (k \nabla T) = k \nabla^2 T$$

qualora  $k$  sia costante, vale l'ultima uguaglianza. I membri agli estremi costituiscono l'equazione del calore.

Tipicamente, la grandezza  $k$  è fisicamente positiva. Questo perché la temperatura evolve proporzionalmente al gradiente ed evolve in modo da livellare la temperatura del corpo.

**Derivazione dalla legge di Fick – soluto, solvente.** Si consideri un soluto ed un solvente. Il soluto ha densità  $\rho$ . Esso si sposta verso zone a concentrazione minore per diffusione. Osservando l'equazione di continuità, la variazione di densità deve avvenire contro gradiente: bisogna far diminuire il gradiente spaziale. Dunque, la corrente è

$$\vec{J} = -D \nabla \rho$$

Il soluto tende ad uscire dalle regioni con densità maggiore.

A partire da questo, è intuitivo capire che  $D$  ha segno definito positivo perché la diffusione dev'essere contro gradiente. Si nota che un coefficiente negativo andrebbe a concentrare delle densità. Questo rende chiaro perché l'equazione è anche detta di diffusione.

**Derivazione probabilistico-discreta.** Questa derivazione è fornita da Einstein. Essa è di natura probabilistica ed ha permesso di legare i fenomeni microscopici al coefficiente di diffusione  $D$ .

Si considerino infinite scatole numerate equidistanti  $a$ . Ogni scatola contiene un certo numero di palline. Si discretizza anche il tempo. Ad ogni passo temporale  $\Delta t$ , si ha una probabilità che le palline transigono dalla scatola  $j$  a quelle prossime  $j \pm 1$ , oppure di rimanervi: si hanno tre probabilità. Oltre l'approssimazione della transizione solamente ai siti prossimi, si considerano anche le probabilità di transizione,  $L$  ed  $R$ , costanti nel tempo.

Si considera il caso generale in cui le probabilità di transizione a destra  $R$  e sinistra  $L$  siano differenti. Inoltre, esiste una probabilità di non transizione,  $L + R < 1$ . Sia  $N$  il numero di particelle. Il numero di particelle nella scatola  $j$ -esima al passo temporale  $t + \Delta t$  è

$$N_j(t + \Delta t) = N_j(t) + N_{j-1}(t)R + N_{j+1}(t)L - (L + R)N_j(t)$$

Pertanto

$$N_j(t + \Delta t) - N_j(t) = R[N_{j+1}(t) - 2N_j(t) + N_{j-1}(t)] + (L - R)[N_{j+1}(t) - N_j(t)]$$

da cui si ricava

$$\frac{N_j(t + \Delta t) - N_j(t)}{\Delta t} = \frac{a^2 R}{\Delta t} \frac{N_{j+1}(t) - 2N_j(t) + N_{j-1}(t)}{a^2} + a \frac{L - R}{\Delta t} \frac{N_{j+1}(t) - N_j(t)}{a}$$

Si noti la presenza di derivate discrete. Si passa al continuo per  $a \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ . Tuttavia, il discorso è delicato perché  $a$  dev'essere asintotico a  $\Delta t$  oppure  $\sqrt{\Delta t}$ , non può esserlo ad entrambi. Bisogna anche coinvolgere le probabilità di salto. Per adesso, si mette da parte questo aspetto del limite. Si afferma che quanto scritto è una versione discreta dell'equazione

$$N_t(x) = DN_{xx}(x, t) + CN_x(x, t)$$

Se  $L = R$  allora  $C = 0$  e si ottiene l'equazione del calore

$$N_t(x, t) = DN_{xx}(x, t), \quad D > 0$$

## Lezione 9

Delle probabilità asimmetriche di salto producono un fenomeno di drift, una correzione lineare nella derivata  $N_x$ . Tale addendo è un'equazione del trasporto, per questo “drift”. L'altro termine è l'equazione di diffusione. Si ha la sovrapposizione di due fenomeni differenti. Il coefficiente  $D$  è importante che sia positivo, mentre il segno di  $C$  indica solamente la predilezione della destra o della sinistra. Non si tratta l'equazione con la sovrapposizione dei due fenomeni.

**Derivazione probabilistica – versione continua.** Divagazione storica. Si vede come Einstein arriva a questo risultato. Uno degli articoli nell'annus mirabilis tratta proprio il ragionamento appena fatto riguardo l'equazione del trasporto al continuo. Egli utilizza la probabilità  $\Phi$  che una particella salti di una distanza  $y$  al tempo  $\tau$ . Tale probabilità è indipendente dalla posizione. Si ipotizza probabilità di salto a destra e sinistra pari:

$$\Phi(-y, \tau) = \Phi(y, \tau)$$

Questo implica

$$\bar{y} = \int_{\mathbb{R}} y \Phi(y, \tau) dy = 0, \quad \sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 \Phi(y, \tau) dy$$

Fissato un sito, si ipotizza che la probabilità di saltare via sia identica a quella di saltare verso tale sito. La densità in un certo punto  $x$  è

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x - y, t) \Phi(y, \tau) dy$$

cioè l'integrale di tutti i possibili salti. Il fatto che i primi vicini contino più dei lontani dipende da quanto rapidamente  $\Phi$  vada a zero.

La prima ipotesi equivale ad  $R = L$ . La seconda descrive la stessa struttura  $N_j(t + \Delta t) - N_j(t)$ . Si sviluppa in serie di Taylor la densità per tempi piccoli e l'integrale per  $y$  piccolo si ha

$$\begin{aligned} \rho(x, t) + \tau \rho_t(x, t) + \dots &= \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) \Phi(y, \tau) dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} y \rho_x(x, t) \Phi(y, \tau) dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} y^2 \rho_{xx}(x, t) \Phi(y, \tau) dy + \dots \end{aligned}$$

Lo sviluppo per  $y$  piccolo è legata al fatto che il fenomeno predominante è dato da  $y$  piccolo, cioè solo i contributi dei primi vicini contano. Il secondo addendo del secondo membro è nullo per la prima ipotesi. Segue

$$\rho_t(x, t) = \frac{\sigma^2}{2\tau} \rho_{xx}(x, t)$$

Anche in questa derivazione (informale), è modellisticamente fondamentale che il coefficiente di diffusione sia positivo.

Il fatto che il coefficiente di diffusione sia positivo risulta importante anche dal punto di vista matematico. Cambiare il suo segno equivale ad invertire la direzione del tempo e risulta evidente che il fenomeno di diffusione che si evolve in tal modo sembra portare ad una singolarità.

### 3.1 Principio del massimo debole

Si ricorda che il problema è (essenzialmente) insensibile al numero di dimensioni, pertanto si prosegue la trattazione in una dimensione. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \end{cases}$$

Si cercano delle densità conservate del problema. In questo caso,  $u$  stessa è una densità conservata la cui corrente associata è  $-u_x$ . Tuttavia, esistono infinite densità conservate che si costruiscono osservando l'equazione stessa: tutte le derivate spaziali di  $u$  sono densità conservate. Si nota che tutte queste densità conservate risolvono esse stesse l'equazione. La stessa cosa si può fare per l'equazione del trasporto e l'equazione delle onde. In questi due casi, esistono già quantità conservate più interessanti dal punto di vista fisico e di dimostrazione. Per l'equazione delle onde si sono trovate delle quantità conservate  $u \pm v$ . Per l'equazione del calore, non si sono trovate quantità conservate similmente interessanti a quanto già visto. Tuttavia, è vero che  $u$  e le sue derivate sono densità conservate, però, ad esempio, integrando  $u_x$  sullo spazio si ottiene qualcosa che non dipende dal tempo, ma non dipende nemmeno dai dati iniziali. Infatti, affinché l'integrale sia finito e non dipenda dal tempo, la funzione integranda deve tendere a zero agli estremi. Dunque, l'integrale su  $\mathbb{R}$  è nullo indipendentemente dai dati iniziali. Pertanto,  $u_x$  non è una quantità conservata rilevante perché non dipende dai dati iniziali. Essa è una quantità (quasi?) geometrica perché dipende solamente dalla struttura dell'equazione.

Le quantità conservate non sono utili allo studio di questa equazione. Tuttavia, si nota che l'equazione impone proprietà stringenti sulla struttura della soluzione. Si fanno queste considerazioni prima di ricavare la soluzione da cui tutto ciò che consegue è tramite essa stessa dimostrabile. Risulta importante notare che quanto si studia è legato alla struttura dell'equazione stessa indipendentemente dalla capacità di trovare una soluzione esplicita. Infatti, generalmente non si può trovare una soluzione esplicita.

**Principio del massimo debole.** Si cerca la più semplice soluzione polinomiale sia in  $t$  che in  $x$  dell'equazione del calore; più semplice con presente  $t$ , s'intende. A meno di funzioni armoniche, le soluzioni più semplici sono

$$\pm u = Dt + \frac{1}{2}x^2$$

cioè due parabole. Per una, il punto di minimo sale e per l'altra, il punto di massimo scende. In questa classe non si hanno minimi che scendono o massimi che salgono. Ci si chiede se, prendendo una soluzione sviluppabile in serie di Taylor sia in  $t$  che  $x$ , quanto visto sia un comportamento generale di ciò che può accadere.

**Teorema.** Si vede il principio del massimo debole. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \end{cases}$$

Il massimo (in  $t$  e  $x$ ) della soluzione  $u(x, t)$  può essere in  $x = 0$ ,  $x = L$  oppure  $t = 0$ . Non esistono massimi altrove.

Si consideri ancora il piano delle caratteristiche  $(x, t)$ . Delle caratteristiche si discute in seguito, per ora non le si considerano. [immagine] Il dominio  $\Delta = [0, L] \times [0, T]$  è un rettangolo. La soluzione deve appartenere alla frontiera del dominio, in particolare alla parte della frontiera

$$\widetilde{\partial\Delta} = L_0 + L_1 + L_2$$

cioè il bordo senza il lato del tempo  $t = T$ . Il massimo si trova su di uno di questi tre lati.

**Osservazione.** Si considerino massimi non degeneri,  $u_{xx} \neq 0$ . La dimostrazione è l'analogo dell'esempio con la soluzione polinomiale. Preso un punto in cui  $u_x = 0$  e  $u_{xx} < 0$  dall'equazione del calore segue che pure  $u_t < 0$ , grazie anche a  $D > 0$ . Questo implica che il punto non ha gradiente nullo. Allora  $u(x, t)$  non potrebbe essere un massimo in  $(x, t)$ . Ma in generale  $u_{xx}$  può essere nullo.

**Dimostrazione.** Sia  $M$  il massimo di  $u$  in  $\widetilde{\partial\Delta}$ . Si mostra che  $u(x, t) \leq M$  in  $\Delta$ . Per ovviare alla derivata seconda nulla, si modifica la soluzione di una quantità arbitrariamente piccola

$$v = u + \varepsilon x^2, \quad \varepsilon > 0$$

Essa non soddisfa l'equazione del calore, ma soddisfa la disuguaglianza del calore

$$v_t - Dv_{xx} = u_t - D(u_{xx} + 2\varepsilon) = -2\varepsilon D \leq 0$$

Pertanto

$$\max_{x, t \in \widetilde{\partial\Delta}} v = \max_{x, t \in \widetilde{\partial\Delta}} (u + \varepsilon x^2) \leq M + \varepsilon L^2$$

Si dimostra che  $v \leq M + \varepsilon L^2$  in  $\Delta$ . Se  $v$  ha massimo in

$$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Delta \setminus \partial\Delta$$

allora

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$$

e segue

$$v_t - Dv_{xx} \geq 0$$

Il segno  $\geq$  o  $\leq$  invece della variante stretta è motivato dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$ : se si ha zero, basta spostare di un poco e si ha nuovamente la relazione d'ordine stretta.

Quanto trovato è assurdo e quindi  $v$  non ha massimo nell'interno di  $\Delta$  (implicazione vera, ma proposizione implicata falsa, implica proposizione implicante falsa).

Se  $v$  ha massimo in  $(\bar{x}, \bar{t})$  con  $\bar{t} = T$ ,  $x \neq 0$  e  $x \neq L$ , allora, in quanto massimo, si ha

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0, \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$$

Si noti che la derivata temporale può solamente essere non negativa in quanto si procede verso un massimo. [immagine] Questo implica ancora

$$v_t - Dv_{xx} \geq 0$$

che è impossibile. Allora il massimo di  $v$  appartiene a  $\widetilde{\partial\Delta}$  e quindi  $v \leq M + \varepsilon L^2$  in tutto  $\Delta$ . Se  $v \leq M + \varepsilon L^2$  in  $\Delta$  allora  $u \leq M + \varepsilon(L^2 - x^2)$  in  $\Delta$ . Per arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue  $u \leq M$  in  $\Delta$ .



Il diverso peso del tempo e dello spazio nell'equazione del calore è fondamentale per dimostrare la presenza di un massimo solo su di un sottoinsieme della frontiera. L'equazione del calore per  $v$  è un'equazione con sorgente. Per la perturbazione vale questo principio del massimo debole (cioè il massimo può essere solo in  $\partial\Delta$ ), ma dato che la perturbazione è arbitrariamente piccola, allora esso vale anche per l'equazione del calore.

Esiste anche un principio del minimo. Esso si ricava dal principio del massimo (e viceversa) cambiando segno all'equazione del calore in quanto lineare.

**Corollario.** Si vede il principio del minimo debole. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \end{cases}$$

Il minimo (in  $t$  e  $x$ ) della soluzione  $u(x, t)$  può essere in  $x = 0$ ,  $x = L$  oppure  $t = 0$ . Non esistono minimi altrove.

**Dimostrazione.** Se  $u$  è soluzione, allora lo è pure  $-u$  per linearità. Allora il minimo di  $u$  è il massimo di  $-u$  e si applica il principio del massimo debole.

**Osservazione.** Esiste anche il principio del massimo forte: se  $u$  ha massimo in  $\Delta \setminus \partial\Delta$  allora  $u$  è costante. Questo principio si dimostra per le funzioni armoniche.

C'è una lenta transizione da equazioni invertibili temporalmente, che richiedono dati iniziali, che non hanno grossi problemi, i cui effetti delle perturbazioni sono locali, ad equazioni ancora con dati iniziali, però si hanno comportamenti simili ad equazioni non evolutive (equazione di Laplace, funzioni armoniche) e si ha il principio del massimo. In qualche modo, le equazioni iperboliche (trasporto, onde) perdono proprietà fino ad arrivare alle equazioni paraboliche (equazione del calore). Si perdono alcune proprietà, mentre altre proprietà dell'equazione del calore rimangono nelle equazioni ellittiche (funzioni armoniche). La migrazione delle proprietà è piuttosto interessante.

In una diffusione, ad esempio, il principio del massimo implica l'assenza di massimi di concentrazione locali che non siano il dato iniziale o nel bordo.

### 3.2 Unicità

Si studia quanto possibile riguardo la soluzione prima di trovare l'espressione esplicita. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che la soluzione è unica.

**Dimostrazione.** Finora si sono utilizzate le quantità conservate, ma in questo caso esse non sono d'aiuto. Esattamente nella modalità di modifica dell'equazione interessata tramite una disuguaglianza, si procede. Si indeboliscono le proprietà della quantità conservata e si osserva se bastano. Dunque

$$0 = u_t - Du_{xx} \implies uu_t - Duu_{xx} = 0 \iff \frac{1}{2}(u^2)_t - D(uu_x)_x = -D(u_x)^2$$

In questo caso,  $u^2$  non è una quantità conservata, tuttavia l'ultimo termine ha segno definito, costante. Si noti che questo vale grazie al segno di  $D$ . Allora, la quantità (l'energia)

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx \implies d_t E \leq 0$$

non può crescere. Si ha un comportamento dissipativo. Infatti

$$d_t E = D \int_0^L (u u_x)_x dx - D \int_0^L (u_x)^2 dx = -D \int_0^L (u_x)^2 dx \leq 0$$

Grazie alle condizioni al bordo (di Dirichlet), il primo termine del primo membro è nullo. Pertanto

$$E[w(t)] \leq E[w(0)], \quad \forall t > 0$$

Si considerino due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  al problema di Cauchy. Sia  $w \equiv u_2 - u_1$ . Dunque

$$\begin{cases} w_t = D w_{xx} \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases}$$

Dato che  $E[w(t)] \geq 0$  per definizione e, per dissipazione, si ha

$$E[w(t)] \leq E[w(0)] = 0$$

segue

$$E[w(t)] = 0$$

Pertanto

$$0 = E[w(t)] = \frac{1}{2} \int_0^L w^2(x, t) dx \implies w(x, t) = 0$$

Da cui la soluzione è unica

$$u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

### 3.3 Stabilità

Si considerino i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{i,t} = D u_{i,xx} & u_i : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x) & i = 1, 2 \\ u_i(0, t) = u_i(L, t) = 0 \end{cases}$$

Sia  $w \equiv u_2 - u_1$ . Segue

$$\begin{cases} w_t = D w_{xx} \\ w(x, 0) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases}$$

Da

$$E[w(t)] \leq E[w(0)]$$

segue

$$\begin{aligned} \int_0^L [u_2(x, t) - u_1(x, t)]^2 dx &\leq \int_0^L [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]^2 dx \\ \|u_2(x, t) - u_1(x, t)\|_2 &\leq \|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\|_2 \end{aligned}$$

Le soluzioni sono stabili in norma  $L^2$ .

### 3.4 Unicità e stabilità $L^\infty$ tramite il massimo debole

Le dimostrazioni precedenti sono legate ad un modo di pensare all'equazione delle onde. La dimostrazione seguente è un modo di pensare che si vede per le funzioni armoniche. Coesistono le proprietà dei due contesti differenti.

**Unicità.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

La soluzione è unica.

**Dimostrazione.** Si considerino due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  al problema di Cauchy. Sia  $w \equiv u_2 - u_1$ . Dunque

$$\begin{cases} w_t = Dw_{xx} \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases}$$

Per il principio del massimo debole (e quello del minimo) gli estremi di  $w$  si trovano in  $t = 0$  o  $x = 0$  oppure  $x = L$ , cioè nella seconda equazione e nella terza del problema di Cauchy sopra riportato. Dunque, gli estremi di  $w$  sono zero. Questo implica che  $w = 0$  su tutto  $\Delta$ . Pertanto  $u_1 = u_2$ .

**Stabilità  $L^\infty$ .** La norma  $L^2$  non fornisce molte informazioni sul comportamento locale. Puntualmente ci possono essere differenze sostanziali nella forma della funzione, mentre la norma non diverge. La norma uniforme descrive meglio cosa può avvenire. Si considerino i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{i,t} = Du_{i,xx} & u_i : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x) & i = 1, 2 \\ u_i(0, t) = u_i(L, t) = 0 \end{cases}$$

Sia  $w \equiv u_2 - u_1$ . Segue

$$\begin{cases} w_t = Dw_{xx} \\ w(x, 0) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases}$$

Si riscrivono i dati noti nel grafico delle spazio-tempo  $(x, t)$ : i dati al bordo sono nulli, i dati iniziali sono  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Pertanto, per il principio del massimo debole e del minimo debole vale

$$-\max |\varphi_2 - \varphi_1| \leq w(x, t) \leq \max |\varphi_2 - \varphi_1|$$

Pertanto

$$\max_{(x,t) \in \Delta} |u_2(x, t) - u_1(x, t)| \leq \max_{(x,t) \in \Delta} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|$$

oppure minore (o uguale) di zero, però così seguirebbe  $\varphi_1 = \varphi_2$ . L'unica cosa che può contribuire è  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Pertanto

$$\|u_2(x, t) - u_1(x, t)\|_{\infty, T} \leq \|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\|_{\infty}$$

Si ha una differenza fondamentale con l'equazione delle onde: qua la stima non dipende dal tempo.

**Esercizio.** Dimostrare che l'equazione delle onde non soddisfa il principio del massimo debole.

### 3.5 Soluzione dell'equazione del calore monodimensionale

**Simmetrie.** Le simmetrie sono

- Riflessione spaziale,  $x \rightarrow -x$ . Non vale la riflessione temporale e così si cambia il segno al coefficiente di diffusione. Questo cambiamento è sfavorevole: dal punto di vista modellistico, le concentrazioni in un punto aumentano; dal punto di vista matematico, molte dimostrazioni non valgono più; non si ha più né la dissipazione dell'energia né il principio del massimo debole.
- Traslazione rigida. Se  $u(x, t)$  è soluzione allora  $u(x+a, t+b)$  è ancora soluzione con  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- Invariante solo per alcune dilatazioni. Sia  $u(x, t)$  soluzione. Si trovano i termini  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  che rendono invariante l'equazione del calore:

$$u^*(x, t) = cu(ax, bt), \quad u_t^*(x, t) = bcu_\tau(\xi, \tau), \quad u_{xx}^*(x, t) = a^2cu_{\xi\xi}(\xi, \tau)$$

dove  $ax \equiv \xi$  e  $bt \equiv \tau$ . Dunque

$$bcu_\tau(\xi, \tau) - Da^2cu_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0$$

è soluzione per

$$(a, b, c) = (a, a^2, c)$$

cioè la dilatazione temporale scala quadraticamente con la dilatazione spaziale. Come nell'equazione delle onde, una velocità, come rapporto di una lunghezza e di un tempo, è fondamentale, allo stesso modo nell'equazione del calore, è importante il coefficiente di diffusione come area su tempo.

**Quantità conservate e simmetrie.** Si utilizza l'unica quantità conservata incontrata, cioè  $u$  stessa. Si considerino soluzioni in cui si fissa la quantità conservata

$$Q = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$$

Ad esempio, soluzioni che asintoticamente si annullano su  $\mathbb{R}$ . Si studiano quali dilatazioni invarianti lasciano  $Q$  inalterato:

$$\int_{\mathbb{R}} cu(ax, a^2t) dx = \frac{c}{a}Q \implies c = a$$

Allora si trova una terna  $(a, a^2, a)$  che mappa soluzioni con  $Q$  assegnato in soluzioni con lo stesso  $Q$ . In particolare, nel sistema compare una grandezza adimensionale

$$\frac{x}{\sqrt{Dt}}$$

Si hanno informazioni che compaiono quasi solo dalla struttura dimensionale del problema.

### Lezione 10

La discussione iniziata nella lezione precedente è utile a capire come si può arrivare alle ipotesi di un teorema.

### 3.6 Soluzioni particolari: soluzioni auto-similari

Le soluzioni auto-similari del primo tipo sono soluzioni che dipendono solo da grandezze adimensionali che si possono costruire dai coefficienti dimensionati del sistema.

In generale, una soluzione auto-similare (generalizzata) di una PDE è una soluzione

$$u(x, t) = (Dt)^\alpha \mu(\xi), \quad \xi = x(Dt)^\lambda$$

dove  $\xi$  è l'oggetto adimensionale trovato (in questo caso, in generale non è ancora adimensionale). Essa è proporzionale ad una funzione di  $\xi$ . Si cercano soluzioni che dipendono da questo particolare coefficiente (coordinata) adimensionale  $\xi$ , e la cui evoluzione è una dilatazione  $(Dt)^\alpha$ . Si scrive  $\xi$  in tal modo perché si vuole vedere quanto si riesce a ottenere senza considerare tutta la discussione precedente. Si ha una dipendenza funzionale da  $\mu$  e due parametri reali  $\alpha$  e  $\lambda$ .

Si calcolano le derivate dell'equazione del calore

$$u_t = D\alpha(Dt)^{\alpha-1}\mu + D\lambda x(Dt)^{\alpha+\lambda-1}\mu', \quad u_{xx} = (Dt)^{2\lambda+\alpha}\mu''$$

L'equazione del calore diventa

$$u_t = Du_{xx} \implies D(\alpha t^{\alpha-1}\mu + \lambda \xi t^{\alpha-1}\mu') = D^{2\lambda+2}t^{2\lambda+\alpha}\mu''$$

Si vuole eliminare la dipendenza dal tempo:

$$\alpha - 1 = \alpha + 2\lambda \implies \lambda = -\frac{1}{2}$$

così si ha un'equazione solo per  $\mu$ . Le uniche soluzioni possibili sono quelle adimensionali. Segue

$$\alpha\mu - \frac{1}{2}\xi\mu' = \mu''$$

Per ogni  $\alpha$ , ci si aspetta di avere una soluzione auto-similare differente. La soluzione è tale per cui dilatando le  $x$ , si dilata anche la soluzione secondo una funzione del tempo  $(Dt)^\alpha$ . Dunque, le soluzioni auto-similari sono

$$u(x, t) = (Dt)^\alpha \mu\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

L'argomento di  $\mu$  si è già trovato dall'analisi dimensionale della PDE.

Si trovano le soluzioni per casi particolari, semplici, e sono utili perché esse sono direttamente coinvolte nella soluzione del problema.

**Primo caso.** Sia  $\alpha = 0$ . Si ha

$$\mu'' + \frac{1}{2}\xi\mu' = 0 \implies \frac{\mu''}{\mu'} = -\frac{1}{2}\xi \implies \ln \mu' = -\frac{1}{4}\xi^2 + \kappa$$

Da cui la soluzione è

$$\mu = A \int_0^\xi e^{-\frac{1}{4}\tilde{\xi}^2} d\tilde{\xi} + B$$

La soluzione auto-similare è

$$u(x, t) = \mu\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) = A \int_0^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + B = 2A \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds + B$$

con  $\xi = 2s$ . L'integrale è la funzione degli errori erf. Per un'utilità futura, si fissano le costanti di modo che

$$u(\infty, t) = 1, \quad u(-\infty, t) = 0$$

Pertanto

$$\begin{aligned} u(-\infty, t) &= 2A \int_0^{-\infty} e^{-s^2} ds + B = -\sqrt{\pi}A + B = 0 \\ u(\infty, t) &= 2A \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds + B = \sqrt{\pi}A + B = 1 \end{aligned}$$

Da cui si ottiene

$$B = \frac{1}{2}, \quad A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Pertanto

$$H_D(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

All'aumentare del tempo, la varianza (sigma) associata ad un'ipotetica funzione gaussiana nella funzione degli errori aumenta e quindi il passaggio da 0 ad 1 della soluzione è più dolce. La derivata in  $x = 0$  della soluzione diminuisce all'aumentare della varianza. Pertanto, in tempi finiti con verso avanti del tempo, non si ha alcuna singolarità. Tornare indietro nel tempo, equivalente a  $D$  negativo, in tempi finiti ( $t = 0$ ) si ha una singolarità ed oltre non si può passare.

Si è trovata una soluzione che ha un comportamento peculiare: essa è ben definita, tuttavia, poiché la dipendenza temporale è solo presente al denominatore dell'argomento, si manifesta una singolarità a tempi finiti. Questo è il primo esempio concreto dove invertire la direzione del tempo causa comportamenti patologici.

Per ogni  $x$  fissato, si valuta  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)$ . Dunque

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds = 1, \quad x > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-s^2} ds = 0, \quad x < 0 \end{aligned}$$

Tranne in  $x = 0$ , in tempi finiti, si ha una funzione con discontinuità. Si è partiti da una funzione  $C^\infty$  e per di più analitica, e si è arrivati ad una singolarità: in tempi finiti si perdono infinite derivabilità. Questo sempre in dietro nel tempo. Avanti nel tempo non si ha alcun problema: si può partire dal dato iniziale discontinuo ed, in qualche senso, una sua regolarizzazione per tempi  $0^+$  è una funzione analitica. Con questi esempi ci si fa già l'idea che l'equazione del calore ha una forza regolarizzante dei dati iniziali.

Ad  $x$  fissato, il limite della soluzione per  $t \rightarrow 0^+$  è la funzione di Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Questa è una interessante caratterizzazione di una soluzione auto-simile dell'equazione del calore.

**Esercizio.** La derivata di una soluzione è ancora soluzione per l'equazione del calore. Si studi il comportamento di  $H_D$  quando derivata rispetto  $x$ . La derivata mappa soluzioni auto-simili in soluzioni auto-simili? Che struttura hanno?

Se  $u(x, t)$  è soluzione, allora lo è anche  $\partial_x^n u(x, t)$ . Infatti

$$\partial_x^n (u_t) = \partial_x^n (D u_{xx}) \implies (\partial_x^n u)_t = (D \partial_x^n u)_{xx}$$

ricordando  $u_{xt} = u_{tx}$ .

**Funzioni auto-simili che conservano la massa.** Finora si è utilizzato il rapporto tra spazio e tempo che fornisce  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Ci si chiede se esiste una soluzione che, nell'evoluzione temporale, conserva tutta la massa  $Q$ :

$$Q = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = (Dt)^\alpha \int_{\mathbb{R}} \mu\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) dx = (Dt)^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mu(s) ds$$

Questa quantità non dipende dal tempo qualora  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Si cerca se la soluzione esiste:

$$-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\xi\mu' = u'' \implies \left(\mu' + \frac{1}{2}\xi\mu\right)' = 0 \implies u' + \frac{1}{2}\xi\mu = C$$

La massa  $Q$  dev'essere finita, allora  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0$  indipendentemente da  $t$ . Questo implica che  $C = 0$ :

$$u' + \frac{1}{2}\xi\mu = 0 \implies (\ln \mu)' = -\frac{1}{2}\xi \implies \mu = Ae^{-\frac{1}{4}\xi^2}$$

Dunque la soluzione è

$$u(x, t) = A(Dt)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Si sceglie una  $Q = 1$  a piacere per fissare la costante

$$1 = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \sqrt{4Dt} \sqrt{\pi} \implies A = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

La soluzione ottenuta è il propagatore (o nucleo) del calore

$$\Gamma_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Esso ha la dimensione del reciproco di una lunghezza, è una soluzione auto-similare ed il suo integrale in  $\mathbb{R}$  è unitario per ogni tempo.

Si è vista l'importanza delle soluzioni auto-similari. Trovare soluzioni auto-similari, anche esplicite, per PDE è un modo con cui si caratterizzano certe classi di comportamento delle equazioni. Inoltre, nel caso dell'equazione del calore, la soluzione  $\Gamma_D$  è rilevante nella costruzione della soluzione generale al problema.

L'area della soluzione è costante. La funzione è definita positiva. Il tempo compare in due punti: nell'esponente come varianza e coefficiente di dilatazione dell'equazione. Restringendo sigma, il massimo aumenta per conservare la massa. L'evoluzione temporale corrisponde alla diminuzione del massimo ed all'allargamento della campana.

Il limite  $t \rightarrow 0^+$  di  $H_D$  esiste quasi ovunque. Qua la situazione è diversa: per  $t \rightarrow 0^+$  il massimo tende ad infinito e altrove è identicamente nulla. L'oggetto matematico che dà senso al limite  $t \rightarrow 0^+$  è la delta di Dirac che preserva anche la nozione di  $Q$  costante. Essa è una distribuzione, un funzionale, e non una funzione.

Si cerca di capire perché  $\Gamma_D$  possa codificare la soluzione generale del problema. Tutte le ipotesi necessarie, come la regolarità e la convergenza di integrali, sono ancora sottintese. Per l'equazione del calore, la somma di soluzioni è ancora soluzione. In particolare, anche traslazioni spaziali sono ancora soluzioni. Allora anche  $u(x, t) + u(x + 1, t)$  è soluzione. Si rende continuo tale ragionamento considerando anche una funzione peso  $\varphi$ . Se  $g(x, t)$  è una soluzione regolare dell'equazione del calore, allora lo è pure la sua convoluzione con  $\varphi$  sufficientemente buona

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(x - y, t) \varphi(y) dy$$

Infatti

$$u_t - Du_{xx} = \int_{\mathbb{R}} [g_t(x - y, t) - Dg_{xx}(x - y, t)] \varphi(y) dy = 0$$

perché il termine tra parentesi è nullo per ipotesi. Da ciò si congettura che la soluzione dell'equazione del calore è

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) \varphi(y) dy$$

per ogni  $\varphi$  sufficientemente buona. La famiglia di soluzioni è ampia perché dipende da un parametro funzionale. Si fa questa congettura perché si sa che la soluzione dell'equazione del calore deve dipendere funzionalmente da una sola funzione: il dato iniziale. Tuttavia, non si sa ancora se questa sia la soluzione generale. Inoltre, a tempo nullo, essa non è definita.

## Lezione 11

Come nell'equazione delle onde, manca di legare i dati iniziali alla forma della soluzione trovata. Si ha una soluzione generale e le si vogliono legare i dati iniziali. Si vede come arrivare ad una

soluzione del problema.

Si nota che  $\Gamma_D = \partial_x H_D(x, t)$ . Dunque

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x H_D(x - y, t) \varphi(y) dy = - \int_{\mathbb{R}} \partial_y H_D(x - y, t) \varphi(y) dy \\ &= -H_D(x - y, t) \varphi(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} + \int_{\mathbb{R}} H_D(x - y, t) \varphi'(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_D(x - y, t) \varphi'(y) dy \end{aligned}$$

dove tra la seconda e la terza riga si suppone che  $\varphi$  si annulla ad infinito. A questo punto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0^+} H_D(x - y, t) \varphi'(y) dy = \int_{\mathbb{R}} H(x - y) \varphi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \varphi'(y) dy = \varphi(x) \end{aligned}$$

Si ha la seconda parte della congettura: la funzione  $\varphi$  è il dato iniziale. Finora non si sta dimostrando, ma si studia dove si può arrivare facendo tutte le operazioni intraprese (scambio di operatori,  $\varphi$  derivabile e si annulla agli estremi, etc). Dunque, la congettura completa è che  $u(x, t)$ , con  $\varphi(x)$  dato iniziale, sia la soluzione generale all'equazione del calore.

Si è costruita la tesi del problema osservando le proprietà dell'equazione, le soluzioni auto-similari, la dipendenza di  $\Gamma$  da  $\frac{x^2}{t}$ . Si è motivata la struttura della soluzione. Ora la si dimostra.

Si potrebbero formalizzare i passaggi fatti ottenendo una dimostrazione. Tuttavia, con delle (diverse) ipotesi su  $\varphi$  si ottiene un risultato più forte esposto nel teorema seguente.

**Teorema.** (Hp) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

con  $\varphi$  limitata in  $\mathbb{R}$  e solo di classe  $C(\mathbb{R})$ . (Th) La soluzione è

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) \varphi(y) dy, \quad \Gamma_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

e la soluzione  $u(x, t)$  è di classe  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ .

Il dato iniziale potrebbe non ammettere derivata in un punto. Tuttavia, prendendo  $\varphi$  continuo, può darsi che  $u(x, t)$  sia regolare ammettendo tutte le derivate di cui si ha bisogno. Contrariamente a quanto avvenuto prima, scegliere  $\varphi$  solo continua non pone ostacoli alla scrittura della soluzione.

Infatti, nella tesi si conferma la soluzione congetturata anche nel solo caso in cui  $\varphi$  sia limitata e solo continua. Inoltre, la seconda parte della tesi è fondamentale ed è diversa da quanto ci si aspetta dall'equazione del trasporto e dall'equazione delle onde: l'equazione del calore lascia tutto, cioè rende  $C^\infty$ . Le dissipazioni ingentiliscono le singolarità del sistema. L'equazione del calore, che è il prototipo delle equazioni dissipative, fa sparire una singolarità sulla derivata al tempo  $t = 0^+$  e fa diventare tutto  $C^\infty$ .

Infine, il comportamento visto per la soluzione  $H_D$  è generale per l'equazione del calore.

**Dimostrazione.** Si dimostra la seconda parte utilizzando la prima. Oltre le ipotesi del teorema, sia  $u(x, t)$  soluzione. Si fanno tanti cambi di variabili per dimostrare che  $u$  rimane continua,  $u_x$  continua e limitata,  $u_t$  continua e limitata, etc, per tutte le derivate. Si trova un processo iterativo. Si vuole ottenere un esponente in  $\Gamma_D$  senza  $x$  né  $t$  e che sia dipendente da



una variabile di integrazione. Infatti, se  $\varphi$  è continua e limitata, allora l'integrale non diverge ed è ben definito. Tuttavia, facendo subito tali cambi di variabili, tutto va bene fino tanto che non si devono svolgere derivate perché, spostando  $x$  e  $t$  sulla  $\varphi$ , non si può agire sulle derivate nell'integranda in quanto  $\varphi$  non è derivabile. Quindi bisogna dimostrare la continuità di  $u$ , poi operare opportunamente e dopo si può dimostrare  $u_x$ .

Pertanto

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(z, t) \varphi(x - z) dz, \quad x - y \equiv z \\ &= \sqrt{Dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4}p^2} \varphi(x - p\sqrt{Dt}) dp, \quad p \equiv \frac{z}{\sqrt{Dt}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}p^2} \varphi(x - p\sqrt{Dt}) dp \end{aligned}$$

Si può maggiorare tale soluzione nel modo seguente

$$|u(x, t)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| < +\infty$$

Il massimo del modulo di  $\varphi$  esiste perché è limitata.

Si studia  $u_x$ . Per quanto detto prima, non si può derivare il cambio di variabile in  $p$ , ma bisogna fare un passo indietro. Infatti

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x \Gamma_D(x - y, t) \varphi(y) dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x - y}{2Dt} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \varphi(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} p e^{-\frac{1}{4}p^2} \varphi(x - p\sqrt{Dt}) dp, \quad p \equiv \frac{x - y}{\sqrt{Dt}} \end{aligned}$$

La derivazione ed il cambio di variabile sono operazioni che non commutano perché quest'ultimo sposta la  $x$  sulla  $\varphi$ , ma la  $\varphi$  non è derivabile. Tuttavia, la funzione  $\Gamma_D$  è talmente regolarizzante che non è un problema derivare prima di fare il cambio di variabile.

Come prima, esso si può maggiorare:

$$|u_x(x, t)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |p| e^{-\frac{1}{4}p^2} dp < +\infty$$

Dunque, il procedimento consiste nell'agire con la derivata su  $\Gamma_D$ , ma la loro unica azione è portare un polinomio davanti all'esponenziale. Questo non cambia la regolarità. Si ricorda che, al momento,  $t$  è strettamente positivo. Non si è ancora dimostrato che il limite per  $t \rightarrow 0^+$  di  $u(x, t)$  sia esattamente  $\varphi$ . Per ora si è detto che per ogni  $t$  positivo,  $u(x, t)$  ha tutte le derivate limitate.

Si dimostra la prima parte, cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) - \varphi(x) = 0$$

Si ha

$$I \equiv u(x, t) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y) [\varphi(y) - \varphi(x)] dy$$

dove si utilizza il fatto che  $\int_{\mathbb{R}} \Gamma_D = 1$ . Operando ancora il cambio di variabile per  $p$  si ottiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}p^2} [\varphi(x - p\sqrt{Dt}) - \varphi(x)] dp$$

Dall'ipotesi  $\varphi(x) \in C(\mathbb{R})$  si ottiene (per definizione di continuità)

$$\forall \varepsilon, \exists \delta \mid \max_{|x-y| < \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

Il parametro  $p$  dipende dal tempo al denominatore e dunque c'è una divergenza per  $t \rightarrow 0^+$ . Si divide l'integrale in un intervallo vicino alla singolarità ed uno lontano:

$$I = \int_{|p| < \frac{\delta}{\sqrt{Dt}}} \dots + \int_{|p| > \frac{\delta}{\sqrt{Dt}}} \dots = A + B$$

Si studia il primo integrale

$$A \leq \max_{|\sqrt{Dt}p| < \delta} \left| \varphi(x - p\sqrt{Dt}) - \varphi(x) \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\frac{\delta}{\sqrt{Dt}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{Dt}}} e^{-\frac{1}{4}p^2} dp \leq \varepsilon \cdot 1$$

L'integrale maggiorante è ben definito per ogni intervallo di integrazione, dunque non crea alcun problema. L'argomento del massimo è lo stesso oggetto del massimo nella definizione di continuità. Si studia l'integrale per ogni tempo. Si noti che, nel limite  $t \rightarrow 0^+$ , l'intervallo diverge.

Per il secondo integrale si ha

$$B \leq 2 \max |\varphi(x)| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|p| > \frac{\delta}{\sqrt{Dt}}} e^{-\frac{1}{4}p^2} dp \leq \varepsilon$$

Non si ha più la scrittura esplicita  $|\varphi(x - p\sqrt{Dt}) - \varphi(x)|$ , ma solamente  $\varphi(x)$ . Si sta studiando l'integrale per  $t \rightarrow 0^+$ . In tale limite, l'integrale contribuisce sempre di meno. Dunque, si recupera una maggiorazione da  $\varepsilon$  tramite la scelta  $t$  sufficientemente piccolo.

Pertanto, per  $t$  arbitrariamente piccolo e positivo si ha

$$u(x, t) - \varphi(x) = I = A + B \leq 2\varepsilon$$

Dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) - \varphi(x) = 0$$

**Osservazione.** Si osserva

- Anche se  $\varphi$  ha degli angoli (la sua derivata non è continua), al tempo  $t = 0^+$  l'equazione del calore li liscia, cioè rende  $C^\infty$ .
- Analoghi teoremi valgono per  $\varphi$  limitata con un punto di discontinuità.

Sono presenti alcune differenze con l'equazione delle onde. La soluzione dell'equazione del calore si è trovata sfruttando le soluzioni auto-similari. Non si sono mai utilizzate le caratteristiche.

Si è ricavata la soluzione da una auto-similare e si è mostrata quale sia la soluzione con un dato iniziale meno regolare della soluzione a tempo fissato. Per l'equazione del trasporto, questo non succede: l'unica soluzione è una traslazione del profilo, così anche nell'equazione delle onde (anche se opportunamente pesata dall'integrale in  $\psi$ ).

Le analogie sono legate alla soluzione di un'equazione evolutiva che dipende da un dato iniziale. La differenza è legata al fatto che la soluzione dell'equazione del calore regolarizza il dato iniziale.

**Esercizio.** Trovare soluzioni auto-similari per l'equazione delle onde.

### 3.7 Equazione del calore con diffusione negativa

Si è utilizzato molto il fatto  $D > 0$ . Ora si considera la diffusione negativa. Questo equivale a considerare  $D > 0$  e tempo che scorre indietro. Nella derivazione del soluto-solvente, questo implica che il soluto si dissolve secondo gradiente: si aggrega.

La soluzione può avere delle singolarità a tempi finiti. Tuttavia, per tempi piccoli si potrebbe

comunque definire l'equazione, almeno fino alla singolarità dove si ha un salto e non si sa procedere. Però non si studia l'equazione con una singolarità a tempi finiti, neanche a tempi piccoli.

Questo problema si può intuire tramite l'entropia nel caso soluto-solvente. Medesimi stati a bassa entropia si possono evolvere nello stesso stato ad alta entropia. Tornando indietro nel tempo, risulta delicato distinguere quale sia lo stato iniziale. Questa difficoltà è l'instabilità del dato iniziale: da due stati simili, tornando indietro nel tempo si arriva a stati molto diversi.

**Stabilità.** Si dimostra che l'equazione di diffusione, per diffusione negativa, non è stabile. Si trova un controesempio alla stabilità. Si consideri la famiglia di funzioni

$$u_n(x, t) = \frac{\sin(nx)}{n} e^{-n^2 D t}$$

Essa soddisfa

$$\begin{cases} (u_n)_t = D(u_n)_{xx} \\ u_n(x, 0) = \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$

Si nota che

$$\frac{\sin(nx)}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Nel limite  $n \rightarrow \infty$ , la soluzione per ogni tempo  $t = \bar{t} > 0$  è

$$u_n(x, t) = \frac{\sin(nx)}{n} e^{-n^2 D \bar{t}} \rightarrow \begin{cases} 0, & D > 0 \\ \infty, & D < 0 \end{cases}$$

Il limite di questa famiglia di soluzioni non coincide con zero. La stabilità è dimostrata quando la convergenza di una successione di dati iniziali implica la convergenza di una successione di soluzioni. In questo caso, per  $D < 0$ , le soluzioni non convergono. (Si ricordi l'equivalenza tra essere arbitrariamente vicini e la convergenza di una successione).

Dunque, la soluzione dell'equazione di diffusione per  $D < 0$  non è ben posta perché non è stabile.

### 3.8 Equazione del calore sulla semiretta

Analogamente all'equazione delle onde, la soluzione si trova conservando nel tempo la simmetria del dato iniziale.

Si consideri il problema di Cauchy con un bordo di Neumann

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

Il dato iniziale viene esteso in modo simmetrico cioè come una funzione pari. Si dimostra che questa simmetria discreta viene preservata per ogni tempo. Il problema esteso diventa (Hp)

$$\begin{cases} u_t^s = D u_{xx}^s & u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u^s(x, 0) = \varphi^s(x) \end{cases}$$

con

$$\varphi^s(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

(Th) Prima si studia se la simmetria è preservata. Poi si scrive la soluzione su tutto l'asse reale. Infine, si effettua la restrizione alla sola parte positiva. Si dimostra che  $u^s$  è pari per ogni tempo cioè

$$u^s(x, t) = u^s(-x, t), \quad \forall t$$

La funzione  $u^s(x, t)$  soddisfa il problema sulla retta. Dunque

$$u^s(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) \varphi^s(y) dy$$

A questo punto si ha

$$\begin{aligned} u^s(-x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(-x - y, t) \varphi^s(y) dy, \quad y = -z \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(-x + z, t) \varphi^s(-z) d(-z) = - \int_{\infty}^{-\infty} \Gamma_D(z - x, t) \varphi^s(-z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - z, t) \varphi^s(z) dz = u^s(x, t) \end{aligned}$$

nella terza riga si ricorda che sia  $\Gamma_D$  che  $\varphi^s$  sono pari nella componente spaziale. Pertanto, la soluzione  $u^s$  è pari per ogni tempo.

Come nell'equazione delle onde, le caratteristiche intersecano il muro di Dirichlet, così ora bisogna capire come, nella restrizione, occorre cambiare il dominio di integrazione della soluzione affinché si integri solamente in  $\mathbb{R}^+$ . Si sfruttano le proprietà di simmetria di  $\Gamma_D$  e  $\varphi$ . In questo caso, la soluzione non si deve scrivere con due differenti settori: non si è mai trattata una velocità di propagazione per l'equazione del calore. Tuttavia, in qualche modo, una nozione di propagazione esiste, sebbene, per ora, matematicamente non sia comparso nulla.

Per passare al solo semiasse positivo si sfruttano le simmetrie:

$$\begin{aligned} u^s(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) \varphi^s(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \Gamma_D(x - y, t) \varphi^s(y) dy + \int_0^{\infty} \Gamma_D(x - y, t) \varphi^s(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \Gamma_D(x - y, t) \varphi^s(-y) dy + \int_0^{\infty} \Gamma_D(x - y, t) \varphi(y) dy \\ &= - \int_{\infty}^0 \Gamma_D(x + y, t) \varphi^s(z) dz + \int_0^{\infty} \Gamma_D(x - y, t) \varphi(y) dy, \quad y = -z \\ &= \int_0^{\infty} [\Gamma_D(x + y, t) + \Gamma_D(x - y, t)] \varphi(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{(x+y)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \right] \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Nella penultima riga, si nota che cambiando il dominio di soluzione, la struttura della soluzione è la stessa: si ha un propagatore che dipende da  $D$  e da come è fatto il dominio. Il propagatore è sempre convoluto con il dato iniziale. Questa struttura è standard per le funzioni armoniche.

Si sarebbe potuta risolvere dall'inizio l'equazione sulla semiretta senza conoscere la soluzione globale. Poi si cercherebbe la soluzione nella forma sopra: un opportuno propagatore applicato a  $\varphi$ . Infine, si studia com'è fatto tale propagatore che dipende solo dall'unica variabile dimensionata del problema,  $D$ , ed in qualche modo dalla geometria dello spazio in cui si risolve la soluzione. Quest'ultima frase è importante per le funzioni armoniche.

Questa soluzione risolve il problema di Cauchy per  $u(x, t)$  all'inizio di questa sezione. Si noti che questo approccio è diverso da quanto fatto precedentemente: sulla retta,  $\Gamma_D$  è soluzione dell'equazione del calore e la convoluzione di essa con qualunque funzione (con opportune ipotesi) dà ancora una soluzione. Ora, invece, si è operata una costruzione a partire da una riduzione. Risulta più delicato dire in che senso la convoluzione nella soluzione trovata è effettivamente una soluzione.

**Esercizio.** Risolvere l'equazione del calore con condizioni di Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

Bisogna fare esattamente quanto visto, ma estendere la soluzione in modo anti-simmetrico, dispari. La soluzione è

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{(x+y)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \right] \varphi(y) dy$$

La soluzione dipende da  $D$ , dalla geometria del dominio e dipende dai dati al bordo.

## Lezione 12

Si è accennata la nozione di propagazione per l'equazione del calore. Non è così semplice definire un fronte, non si ha un cono luce, si sa che il supporto della soluzione a  $0^+$  diventa  $\mathbb{R}$ : istantaneamente, finché si è sull'asse reale, ciò che avviene localmente influenza tutto l'asse. Per questo, si direbbe che la velocità di propagazione è infinita, l'informazione si propaga istantaneamente: anche avendo un dato iniziale localizzato, a  $0^+$  il suo effetto si fa sentire su tutto l'asse reale.

Sebbene sia vero che l'effetto iniziale si percepisce su tutto l'asse, tutto è smorzato dalle code esponenziali di  $\Gamma_D$ , quindi l'effetto lontano è piccolo (rispetto la norma uniforme del dato iniziale).

Si consideri la soluzione fondamentale, il propagatore, a forma di campana. Essa è sostanzialmente a supporto compatto perché le code esponenziali decadono velocemente. Il fronte risulta essere il punto di intersezione tra una quota arbitraria (magari intesa come sensibilità di uno strumento) e le code dell'esponenziale del dato iniziale. Si studia come si muove tale punto di intersezione. Graficamente, si nota che il fronte avanza e poi torna indietro fino a quando tutta la campana è al di sotto della sensibilità. A  $t = 0^+$  la velocità è infinita, ma poi diventa finita. Il fronte ha un comportamento oscillante.

Si studia (graficamente) la soluzione auto-similare  $H_D$  (nella lezione la funzione è riflessa in modo pari). Questo caso è diverso perché la quota a meno infinito è sempre 1. Dunque, il dato iniziale non scende mai (al contempo) al di sotto della quota di riferimento (ad esempio, la situazione equivale ad un bicchiere infinito riempito a metà di soluto e metà di solvente con una transizione centrale). In questo caso, il fronte ha sempre andamento  $\sqrt{Dt}$ . Pertanto, si può iniziare a capire cosa sia tale radice, tale lunghezza: essa è la legge oraria con cui viaggia il fronte verso destra. L'esponente di  $Dt$  non dipende dalla quota di riferimento scelta. Questo è compatibile con il fatto che al tempo  $t = 0^+$  il dato iniziale (anche a supporto compatto) si fa sentire su tutto l'asse reale qualora il fattore di proporzionalità tra  $x$  e  $Dt$  (che dipende dalla quota) diverge per la quota che tende a zero. Per questo, per strumenti infinitamente sensibili, si può dire che il fronte ha velocità infinita. Tuttavia, per ogni valore finito della tolleranza dello strumento, il fronte viaggia in modo indipendente da tale tolleranza. Dal punto di vista matematico, la nozione di fronte è priva di senso perché ha velocità infinita.

## 3.9 Equazione del calore sull'intervallo

L'approccio è analogo a quello dell'equazione delle onde. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x, t) \mapsto u(x, t) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Si separa la soluzione

$$u(x, t) = Q(t)S(x) \implies \dot{Q}S = DQS'' \implies \frac{\dot{Q}}{Q} = D\frac{S''}{S} = D\alpha = \text{cost.}$$

L'equazione per  $S$  è identica al caso delle onde. Mentre per  $Q$  si ha una derivata temporale singola. A seconda dei dati al bordo, la costante  $\alpha$  ha la stessa discretizzazione che si è osservata per l'equazione delle onde. Tuttavia, cambia l'andamento temporale. Dunque

$$\alpha = -k_n^2, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \geq 1, \quad S_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$$

Si ha esattamente lo stesso comportamento per la parte spaziale.

Cambia il legame tra  $\omega_n$  e  $k_n$ , cioè tra la parte temporale e la parte spaziale. Per l'equazione delle onde c'è un legame di proporzionalità tramite la velocità  $c$ . In questo caso si ha

$$\dot{Q} = D\alpha Q = -D \frac{n^2 \pi^2}{L^2} Q \implies Q_n = A_n e^{-D \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Si nota che il fattore del tempo (escludendo il meno) è positivo. Quindi, per ogni tempo,  $Q_n$  è una coda esponenziale. Pertanto, la soluzione è

$$u_n = Q_n S_n = A_n e^{-D \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Ogni modo  $S_n$  si smorza esponenzialmente grazie a  $Q_n$ . La soluzione finale è

$$\begin{cases} u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-D \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \end{cases} \quad A_n = \int_0^L \varphi S_n dx$$

La differenza con l'equazione delle onde riguardo i comportamenti risiede nel diverso legame tra  $\omega_n$  ed il numero d'onda  $k_n$ .

**Osservazione.** In generale, per una PDE lineare evolutiva, la legge di dispersione è il legame tra  $\omega$  e  $k$  per la soluzione dell'onda piana

$$u(x, t) = e^{i(kx + \omega t)}$$

Si studia la legge per alcune equazioni viste:

- Per le onde  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  si ha  $\omega = \pm ck$  reale e lineare, non si ha dispersione.
- Per il calore  $u_t - D u_{xx} = 0$  si ottiene  $\omega = i D k^2$  complessa, quindi il sistema è dissipativo. Nel caso generale in esame, questo equivale a richiedere che la parte temporale sia una coda esponenziale e così si capisce cosa si intende per dissipazione.
- Per l'equazione di Schrödinger  $i u_t + \varepsilon u_{xx} = 0$  si ha  $\omega = \varepsilon k^2$  reale e non lineare, quindi il sistema è dispersivo.

Per sistemi non lineari, si linearizza l'equazione attorno ad una certa soluzione e si studia la legge di dispersione dell'equazione linearizzata.

**Esempio.** La legge di dispersione per l'equazione di Airy (equazione Korteweg-De Vries linearizzata<sup>2</sup>)

$$u_t + a u_{xxx} + b u_{xx} = 0$$

risulta essere

$$\omega = a k^3 - i b k^2$$

<sup>2</sup><https://www.math.univ-toulouse.fr/~slecoz/S10-cours.pdf>

Per l'equazione

$$u_{xxt} + au_x + bu = 0$$

la legge di dispersione è

$$\omega = \frac{ak - ib}{k^2}$$

Pertanto, con derivate di ordine dispari della posizione si hanno sistemi di dispersione reale, mentre con ordine pari si hanno leggi di dispersione immaginarie.

**Osservazione.** Esistono condizioni al bordo che consentono la costruzione di sistemi ortonormali, cioè delle  $S_n$ : Dirichlet, Neumann, periodici. Ci si chiede quando le condizioni al bordo si riflettono in proprietà utili alla costruzione del sistema ortonormale (completo) sull'intervallo. Con “utile” si intende che la famiglia  $S_n$  ha le proprietà necessarie alla costruzione di un sistema ortonormale completo a partire dalle  $S_n$  su  $L^2$  rispetto al prodotto scalare.

Per la ODE

$$S'' = \alpha S, \quad S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Dicasi simmetriche, le condizioni al bordo

$$\begin{cases} A_1 S(a) + A_2 S(b) + A_3 S'(a) + A_4 S'(b) = 0 \\ B_1 S(a) + B_2 S(b) + A_3 S'(a) + B_4 S'(b) = 0 \end{cases}$$

(cioè le ennuple dei coefficienti) tali per cui, per ogni coppia di funzioni  $f$  e  $g$  che le soddisfano, vale

$$f'(b)g(b) - f'(a)g(a) = f(b)g'(b) - f(a)g'(a)$$

Questa richiesta è tecnica e sembra essere calata dal cielo. Nel teorema successivo, si vede da dove compare.

**Osservazione.** Da tali condizioni al bordo generali si ricavano Dirichlet, Neumann e quelle periodiche (anche quelle di Robin):

- Per Dirichlet devono sopravvivere  $A_1$  e  $B_2$ .
- Per Neumann devono sopravvivere  $A_3$  e  $B_4$ .
- Per quelle periodiche devono sopravvivere  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ .

**Teorema.** (Hp) Si considerino  $S_n$  ed  $S_m$  che soddisfano rispettivamente

$$S_n'' = \alpha_n S_n, \quad S_m'' = \alpha_m S_m$$

con dati al bordo simmetrici e  $\alpha_n \neq \alpha_m$ . (Th) Allora

$$\int_a^b S_n S_m \, dx = 0$$

cioè i due hanno prodotto  $L^2$  nullo.

**Dimostrazione.** Infatti

$$\int_a^b S_n'' S_m - S_n S_m'' \, dx = S_n' S_m - S_n S_m' \Big|_a^b = 0$$

grazie al dato al bordo simmetrico. Tuttavia, si ha anche

$$\int_a^b S_n'' S_m - S_n S_m'' \, dx = (\alpha_n - \alpha_m) \int_a^b S_n S_m \, dx$$

Confrontando le due espressioni si ha la tesi.

Si può richiedere che la seconda espressione sia nulla quando la prima espressione è nulla: questa condizione risulta essere i dati al bordo simmetrici.

**Teorema.** (Hp) Sia  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale per cui  $S'' = \alpha S$  con dati al bordo simmetrici. (Th) Allora  $\alpha = \bar{\alpha}$ , cioè  $\alpha \in \mathbb{R}$  (che ricorda l'auto-aggiunzione di un operatore, in questo caso la derivata seconda).

**Dimostrazione.** Infatti

$$\begin{aligned} (\alpha - \bar{\alpha})\|S\|_2^2 &= (\alpha - \bar{\alpha}) \int_a^b S \bar{S} \, dx = \int_a^b \alpha S \bar{S} - S \bar{\alpha} \bar{S} \, dx \\ &= \int_a^b \bar{S} S'' - S \bar{S}'' \, dx = \bar{S} S' - S \bar{S}' \Big|_a^b = 0 \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza si ha ancora per l'ipotesi di dati al bordo simmetrici. Inoltre, il modulo è nullo sse  $S = 0$ , ma un'auto-funzione nulla non ha alcun interesse. Dunque  $\|S\|_2^2 > 0$ . Pertanto  $\alpha = \bar{\alpha}$ , gli autovalori sono reali.

Per l'equazione delle onde, la soluzione stessa è reale. In questo caso,  $S$  è complesso, ma se i dati al bordo sono simmetrici, allora  $\alpha$  è reale.

**Teorema.** (Hp) Sia  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui  $S'' = \alpha S$  con dati al bordo simmetrici

$$S' S \Big|_{x=a}^{x=b} = 0$$

(Th) Allora  $\alpha \leq 0$ .

**Dimostrazione.** Infatti

$$\alpha \int_a^b S^2 \, dx = \int_a^b S S'' \, dx = - \int_a^b (S')^2 \, dx + S S' \Big|_a^b \leq 0$$

dove il secondo addendo è nullo per ipotesi. Se  $S$  è costante allora vale l'uguaglianza.

Questi tre teoremi (l'ortogonalità, la realtà dello spettro e  $\alpha$  non positive) sono forti ed esulano dalla struttura precisa dei dati al bordo. La famiglia di dati al bordo per cui valgono tali proprietà è quella dei dati al bordo simmetrici.

### 3.10 Equazione del calore monodimensionale con sorgente

(Hp) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

(Th) La soluzione è

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) \varphi(y) \, dy + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \Gamma_D(x - y, t - s) f(y, s) \, ds \, dy$$

Essa è la sovrapposizione della soluzione omogenea ed un contributo identico alla convoluzione del primo termine dove si convolve sia la posizione che il tempo. Nel secondo termine, la sorgente compare come se fosse un ulteriore dato iniziale.



**Dimostrazione.** La dimostrazione non è richiesta. Si utilizza il metodo di Duhamel che lega le sorgenti a dati iniziali di problemi omogenei associati. Si verifica che quella sopra sia la soluzione per  $\varphi(x) \equiv 0$ . Dunque

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_t \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \Gamma(x-y, t-s) f(y, s) \, ds \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \Gamma_t(x-y, t-s) f(y, s) \, ds \, dy + \lim_{s \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s) f(y, s) \, dy \\ &= D \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \Gamma_{xx}(x-y, t-s) f(y, s) \, ds \, dy + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, \varepsilon) f(y, t) \, dy \\ &= D \partial_x^2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \Gamma(x-y, t-s) f(y, s) \, ds \, dy + f(x, t) \\ &= Du_{xx} + f(x, t) \end{aligned}$$

Nella seconda riga, si nota che si dovrebbe derivare il limite superiore di integrazione (secondo la regola di integrazione di Leibniz), ma per farlo bisogna valutare  $\Gamma(x-y, t-s)$  in  $s=t$ , però  $\Gamma(x-y, 0)$  non è ben definita per il secondo argomento nullo; pertanto, si fa il limite.

Dalla terza alla quarta riga, il motivo per cui

$$\lim_{s \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s) f(y, s) \, dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, \varepsilon) f(y, t) \, dy = f(x, t)$$

risiede nel metodo di Duhamel (p. 81, Salsa) dove si considera la famiglia di problemi di Cauchy

$$\begin{cases} w_t - Dw_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \\ w(x, s; s) = f(x, s) & t > s \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$w(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y, t-s) f(y, s) \, dy$$

Infatti

$$\lim_{s \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s) f(y, s) \, dy = \lim_{s \rightarrow t} w(x, t; s) = w(x, t; t) = f(x, t)$$

La funzione sopra  $\Gamma$  diventa una delta di Dirac  $\delta(x-y)$  per  $t=s$  e ciò permette di passare da  $f(y, t)$  a  $f(x, t)$ .

Successivamente si vede questa dimostrazione con le distribuzioni.

**Esercizio.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = e^{-ax^2} \end{cases}$$

La soluzione è

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4aDt}} e^{-\frac{ax^2}{1+4aDt}}$$

## Lezione 13

### 3.11 Equazione del calore in $N$ dimensioni

Si percorrono le stesse tappe del caso monodimensionale. Si studiano le simmetrie per l'utilizzo delle soluzioni auto-similari.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = D\nabla^2 u & u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

In più dimensioni, si potrebbe dilatare la soluzione di quantità diverse in direzioni diverse. Tuttavia, come ci si può aspettare, l'unica parte interessante è quella radiale. Si studia il propagatore del calore che dipende solo dalla parte radiale della soluzione. Si cercano soluzioni auto-similari della forma

$$u(r, t) = (Dt)^\alpha \mu(\xi), \quad \xi = r(Dt)^\lambda, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

con coefficiente di auto-similarità  $\xi$ . Pertanto, la derivata temporale è

$$u_t = \alpha D (Dt)^{\alpha-1} \mu(\xi) + D \lambda r (Dt)^{\alpha+\lambda-1} \mu'(\xi) = (Dt)^{\alpha-1} [\alpha \mu + \lambda \xi \mu'] D$$

Mentre il laplaciano è

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot [(Dt)^{\alpha+\lambda} \mu' \nabla r] = (Dt)^{\alpha+2\lambda} \mu'' [\nabla r]^2 + (Dt)^{\alpha+\lambda} \mu' \nabla^2 r$$

Si nota valere

$$(\nabla r)_i = \partial_{x_i} r = \partial_{x_i} \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2} = \frac{\sum_{k=1}^N 2x_k \delta_{ik}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}} = \frac{x_i}{r}$$

così come

$$\nabla^2 r = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_i} r = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \frac{x_i}{r} = \frac{N}{r} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{r^2} \partial_{x_i} r = \frac{N}{r} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{r^2} \frac{x_i}{r} = \frac{N-1}{r}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= (Dt)^{\alpha+2\lambda} \mu'' \frac{\vec{x}}{r} \cdot \frac{\vec{x}}{r} + (Dt)^{\alpha+\lambda} \mu' \frac{N-1}{r} = (Dt)^{\alpha+2\lambda} \mu'' + (Dt)^{\alpha+\lambda} \mu' \frac{N-1}{r} \\ &= (Dt)^{\alpha+2\lambda} \left[ \mu'' + \mu' \frac{N-1}{\xi} \right] \end{aligned}$$

Dall'equazione del calore segue

$$u_t = D \nabla^2 u \iff (Dt)^{\alpha-1} [\alpha \mu + \lambda \xi \mu'] D = (Dt)^{\alpha+2\lambda} \left[ \mu'' + \mu' \frac{N-1}{\xi} \right]$$

Per ridurre il sistema ad una ODE deve seguire

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

Il coefficiente di dilatazione,  $(Dt)^\alpha$ , è lo stesso per il caso monodimensionale ed è fissato:

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{Dt}}$$

L'unica eredità della dimensione è nel fattore  $N-1$ . Dunque

$$\alpha \mu - \frac{1}{2} \xi \mu' = \mu'' + \mu' \frac{N-1}{\xi} \iff \mu'' + \left[ \frac{N-1}{\xi} + \frac{1}{2} \right] \mu' - \alpha \mu = 0$$

Tutte le soluzioni auto-similari dell'equazione del calore hanno una qualunque potenza del tempo,  $(Dt)^\alpha$ , mentre la funzione  $\mu$  è legata al coefficiente di dilatazione perché  $\alpha$  compare esplicitamente nell'equazione precedente. L'equazione differenziale dipende da due soli parametri: la dimensione ed il coefficiente di dilatazione temporale della funzione  $\mu$ .

All'interno della famiglia di propagatori, si sceglie quello che conserva la massa  $Q$ . In una

dimensione, questa condizione fissa  $\alpha$ . Si studia se succede anche in questo caso e se  $\alpha$  dipende dalla dimensione. Quindi

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\mathbb{R}^N} \mu(x, t) d^N x = (Dt)^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \mu\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right) d^N x \\ &= (Dt)^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} (\sqrt{Dt})^N \mu(|y|) d^N y, \quad y_i \equiv \frac{x_i}{\sqrt{Dt}} \\ &= (Dt)^{\alpha + \frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mu(|y|) d^N y \end{aligned}$$

Pertanto

$$d_t Q = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{2}N$$

Pertanto, la soluzione auto-similare è

$$u(x, t) = (Dt)^{-\frac{N}{2}} \mu\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}\right)$$

con

$$\mu'' + \left[ \frac{N-1}{\xi} + \frac{1}{2}\xi \right] \mu' + \frac{1}{2}N\mu = 0$$

Si manipola:

$$\begin{aligned} \xi^{N-1} \left( \mu'' + \left[ \frac{N-1}{\xi} + \frac{1}{2}\xi \right] \mu' + \frac{1}{2}N\mu \right) &= 0 \\ [\xi^{N-1}\mu'' + (N-1)\xi^{N-2}\mu'] + \left[ \frac{1}{2}(\xi^N\mu' + N\xi^{N-1}\mu) \right] &= 0 \\ \left( \xi^{N-1}\mu' + \frac{1}{2}\xi^N\mu \right)' &= 0 \\ \xi^{N-1}\mu' + \frac{1}{2}\xi^N\mu &= C = \text{cost.} \end{aligned}$$

Per trovare la costante si richiede che  $\mu, \mu' \rightarrow 0$  per  $\xi \rightarrow \infty$  più rapidamente di ogni polinomio. Dunque

$$C = 0$$

Si ottiene

$$\mu' + \frac{1}{2}\xi\mu = 0$$

che è la stessa equazione del caso monodimensionale:

$$\mu = Ae^{-\frac{1}{4}\xi^2}$$

per cui la soluzione auto-similare è

$$u(\vec{x}, t) = A(Dt)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{4Dt}\right]$$

L'unica dipendenza dalla dimensione dello spazio è nel coefficiente di dilatazione temporale. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) d^N x \equiv 1 \implies \frac{A}{(Dt)^{\frac{N}{2}}} = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}}$$

Pertanto, il propagatore del calore in  $\mathbb{R}^N$  è

$$\Gamma_D^N(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{4Dt}\right]$$

**Osservazione.** Le sue proprietà analitiche sono analoghe in ogni  $\mathbb{R}^N$ . L'unica differenza si ha per  $N \geq 2$  per cui  $\Gamma_D^N(\vec{x}, t)$  non è integrabile in 0 in  $t$ , mentre in una dimensione lo si può fare.

**Soluzione.** Dunque, dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = D\nabla^2 u & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

la soluzione è

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left[-\frac{|\vec{x} - \vec{y}|^2}{4Dt}\right] \varphi(\vec{y}) d^N y$$

L'insensibilità rispetto alle dimensioni dello spazio è una fondamentale differenza dall'equazione delle onde.

### 3.12 Analogie e differenze con l'equazione delle onde

Nella prossima sezione si abbandonano le equazioni evolutive perché si studiano le equazioni armoniche.

Si confrontano le proprietà:

- Per le onde, le differenze in dimensioni diverse sono profonde (si pensi al principio di Huygens).
- Per le onde, la velocità di propagazione del dato iniziale è  $c$ , mentre per il calore la velocità è infinita a causa della convoluzione con  $\Gamma$ . Si è comunque tentato di reinterpretare in maniera sperimentale una nozione di propagazione di un fronte.
- Per l'equazione del calore si ha il principio del massimo.
- Per entrambe, il problema è ben posto.
- Per le onde si ha stabilità per  $t < 0$ .
- Per le onde, le singolarità sono trasportate (come le discontinuità delle derivate; questo lo si vede quando si studiano le soluzioni deboli, cioè le soluzioni sono distribuzioni e non funzioni), il comportamento locale è trasportato; mentre per il calore, scompaiono subito.
- Per le onde, ogni punto ha due caratteristiche; per il calore, solamente una (e non svolge alcun ruolo).

**Caratteristiche per l'equazione del calore.** Come per l'equazione delle onde, si scrivono due equazioni del primo ordine

$$u_t = Du_{xx} \implies \begin{cases} u = v_x \\ \frac{1}{D}v_t = u_x \end{cases}$$

Il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{D} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

Si può interpretare il secondo membro come una sorgente. Per l'equazione delle onde, nel calcolo delle caratteristiche, le sorgenti non svolgono alcun ruolo, ma si calcolano gli autovalori della matrice. In questo caso, essa ha solamente un autovalore:  $\lambda = 0$ . Si è detto che le velocità di propagazione delle informazioni sono gli autovalori della matrice.

Inoltre, ogni caratteristica è

$$d_x t = 0$$

cioè rette orizzontali. Il dato iniziale non viene trasportato da alcuna parte. I dati iniziali non sono connessi a tempi successivi. Si nota che  $d_x t$  è il reciproco di una velocità e dunque la velocità di propagazione è infinita. In questo modo (ingenuo) si può già osservare questo risultato (inutile) per la soluzione dell'equazione.

**Soluzione tipo onda viaggiante per l'equazione del calore.** Nell'equazione delle onde, i dati iniziali vengono trasportati. Si ha la sovrapposizione di due equazioni del trasporto che viaggiano in versi opposti. Questo è riflesso nelle caratteristiche: quando la velocità iniziale è zero ( $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$ ), metà dell'informazione è portata a destra e l'altra metà a sinistra. Però questo non significa che l'equazione del calore non abbia una soluzione di tipo fronte viaggiante. Si cerca una soluzione all'equazione del calore del tipo

$$u = \mu(x - ct)$$

Questa funzione non è una soluzione auto-similare perché non ha invarianza per dilatazione, ma essa ha invarianza per traslazione. Questo tipo di soluzioni sono anch'esse chiamate auto-similari, ma sono di un altro tipo. Dunque, l'equazione del calore diventa

$$u_t = Du_{xx} \implies -c\mu' = D\mu'' \implies \mu'' + \frac{D}{c}\mu' = 0 \implies \mu' + \frac{D}{c}\mu = \text{cost.}$$

Pertanto la soluzione è

$$u(x, t) = k + Ae^{-\frac{D}{c}(x-ct)}, \quad \forall c$$

Questa soluzione particolare diverge per  $x \rightarrow -\infty$ : essa non ha a che vedere con quanto fatto. Esiste una soluzione a fronte viaggiante, ma è molto particolare. Per l'equazione del trasporto, tutte le funzioni del tipo  $u = \mu(x - ct)$  sono soluzioni, però  $c$  è fissata perché compare nell'equazione. Questa soluzione ha un comportamento profondamente diverso rispetto all'equazione del trasporto, o delle onde, in quanto  $c$  non porta alcuna informazione aggiuntiva sull'equazione.

## 4 Equazione di Laplace

Una rappresentante delle equazioni ellittiche è l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 u = 0, \quad u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Le sue soluzioni sono le funzioni armoniche. Questa equazione non è più evolutiva. Non c'è un cambio di variabili reale per passare dall'equazione delle onde all'equazione di Laplace. Infatti, bisogna complessificare il tempo  $t \rightarrow it$  oppure complessificare la velocità  $c \rightarrow ic$ . In particolare in questo secondo caso, utilizzare già quanto noto sull'equazione delle onde rende il procedimento più complicato: tutta la costruzione della soluzione dell'equazione delle onde si basa sulle caratteristiche, delle curve dello spazio tempo la cui pendenza è fissata e reale. Se la velocità è complessa non si sa nemmeno come disegnare le caratteristiche. Si vedono poi delle similitudini con l'equazione del calore.

**Esercizio.** Calcolare le caratteristiche per l'equazione di Laplace utilizzando  $ic$ . Similmente all'equazione delle onde, gli autovalori della matrice dell'equazione sono  $\pm ic$ . Il problema diventa complesso.

L'equazione di Laplace con sorgente, cioè l'equazione di Poisson, è

$$\nabla^2 u = \rho, \quad u, \rho : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

**Esempio.** Alcuni esempi dell'equazione di Laplace sono:

- Potenziale elettrostatico nel vuoto (Laplace) o con materia (Poisson).
- Potenziale gravitazionale.
- Soluzioni indipendenti dal tempo dell'equazione delle onde o del calore.

- Per un fluido incompressibile,  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , e irrotazionale,  $\nabla \times \vec{u} = 0$ , allora, in opportuni domini, vale  $\vec{u} = \nabla \varphi$ . Pertanto, il potenziale  $\varphi$  è una funzione armonica,  $\nabla^2 \varphi = 0$ .
- Per un fluido incompressibile segue  $\nabla \cdot \vec{u}_t = 0$ . Dunque, la divergenza della equazione di Eulero è

$$\nabla \cdot (\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p) = 0 \implies \nabla^2 p = -\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}]$$

**Osservazione.** Per  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si devono porre dei dati iniziali al bordo. Quelli di Dirichlet e Neumann sono rispettivamente

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}), \quad \hat{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega} = \varphi(\vec{x})$$

dove  $\hat{n}$  è la norma uscente alla frontiera di  $\Omega$ . Si nota che già in questi casi semplici, in particolare con Neumann, si potrebbe perdere la buona positura del problema (perché non esiste la soluzione).

#### 4.1 Caso monodimensionale

Si consideri l'equazione di Laplace

$$u_{xx} = 0, \quad u : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le uniche funzioni armoniche in una dimensione sono lineari

$$u = c_1 x + c_2$$

**Proposizione.** Alcune proprietà sono

- Massimo debole: la soluzione  $u$  raggiunge gli estremi solo al bordo.
- Massimo forte: se  $u$  ha un estremo interno a  $(a, b)$  allora  $u$  deve essere una costante.
- Con condizioni di Dirichlet nulle,  $u(a) = u(b) = 0$ , si ha  $u(x) \equiv 0$ .
- Per qualunque dato al bordo di Dirichlet esiste la soluzione. Tuttavia, esistono dati al bordo di Neumann per cui non esiste soluzione: basta considerare  $u_x(a) \neq u_x(b)$ .
- Per dati al bordo di Neumann compatibili,  $u_x(a) = u_x(b)$ , la soluzione è unica a meno di costanti.
- Valor medio:

$$\forall x \in [a, b], \quad u(x) = \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} u(y) dy$$

Tutte queste proprietà valgono in ogni  $\mathbb{R}^n$ , non solo in una dimensione.

#### Lezione 14

Questa parte del corso consiste nella dimostrazione delle proprietà precedenti per più dimensioni.

#### 4.2 Caso bidimensionale – monodimensionale complesso

Le funzioni complesse analitiche sono funzioni  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tali per cui  $\partial_{\bar{z}} u = 0$ . Considerata  $u = u(z) = f(x, y) + ig(x, y)$  dove  $z = x + iy$ . La derivata è

$$\partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} x \partial_x + \partial_{\bar{z}} y \partial_y = \frac{1}{2} \partial_x - \frac{1}{2i} \partial_y$$

La condizione precedente equivale a

$$0 = u_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f + ig)_x - \frac{1}{2i}(f + ig)_y = \frac{1}{2}[(f + ig)_x + (if - g)_y] = \frac{1}{2}[(f_x - g_y) + i(g_x + f_y)]$$

cioè le condizioni di Cauchy-Riemann

$$f_x = g_y, \quad g_x = -f_y$$

Queste equazioni sono analoghe all'equazione delle onde divisa in due equazioni del trasporto accoppiate, a parte il segno meno. Si ottiene un'equazione delle onde ma con segno cambiato, cioè l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} f_{xx} = -f_{yy} \\ g_{xx} = -g_{yy} \end{cases} \implies \begin{cases} \nabla^2 f = 0 \\ \nabla^2 g = 0 \end{cases}$$

Le condizioni di analiticità di una funzione complessa implicano che la sua parte reale e la sua parte immaginaria devono essere funzioni armoniche viste come funzioni reali su  $\mathbb{R}^2$ .

Si nota che la semplicità delle funzioni armoniche dal caso monodimensionale crolla. Si ha un modo per creare funzioni armoniche: si considera una funzione complessa e ne si prende la parte reale (o immaginaria).

Ora, la ovvietà delle proprietà precedenti non è più così apparente, sebbene le funzioni analitiche siano comunque strutture rigide.

### 4.3 Caso generale

Si considera il caso generale in uno spazio di dimensione  $N$ .

**Simmetrie.** Si notano le simmetrie

- Come nel caso delle onde e del calore, il laplaciano

$$\nabla^2 = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} \partial_{x_k}$$

è invariante per traslazioni rigide  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{v}$ .

- Il laplaciano è invariante per rotazioni rigide. Infatti, si consideri una rotazione in  $\mathbb{R}^N$ :  $\vec{x} = B\vec{x}'$  cioè  $x'_i = b_{ij}x_j$  con notazione di Einstein. Inoltre, la matrice di rotazione è ortogonale  $B^\top = B^{-1}$ , cioè  $b_{ji} = (B^{-1})_{ij}$ . Pertanto

$$b_{ij}b_{kj} = \delta_{ik}$$

Si osserva che

$$\partial_{x_i} x'_j = \partial_{x_i} (b_{jk} x_k) = b_{jk} \delta_{ki} = b_{ji}$$

da cui segue

$$\partial_{x_i} = \partial_{x_i} x'_j \partial_{x'_j} = b_{ji} \partial_{x'_j}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}}^2 &= \partial_{x_k} \partial_{x_k} = \delta_{kl} \partial_{x_k} \partial_{x_l} = \delta_{kl} b_{mk} b_{nl} \partial_{x'_m} \partial_{x'_n} = (\delta_{kl} b_{mk} b_{nl}) \partial_{x'_m} \partial_{x'_n} \\ &= b_{mk} b_{nk} \partial_{x'_m} \partial_{x'_n} = \delta_{mn} \partial_{x'_m} \partial_{x'_n} = \partial_{x'_m} \partial_{x'_m} = \nabla_{\vec{x}'}^2 \end{aligned}$$

Questa invarianza per rotazioni è identica all'invarianza di Lorentz (cioè ancora rotazioni) per l'equazione delle onde: le rotazioni in quel caso avvengono rispetto la metrica di Minkowski e non più la matrice identità; si conserva la lunghezza di Minkowski. Dunque, il quadratello è invariante per rotazioni rigide di Minkowski cioè trasformazioni di Lorentz.

**Soluzioni particolari.** Come nell'equazione del calore e vista l'invarianza per rotazione, si cercano soluzioni con la stessa invarianza, cioè soluzioni radiali

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = \mu(r), \quad r = \left[ \sum_{i=1}^N x_i x_i \right]^{\frac{1}{2}}$$

Si noti che per un operatore invariante per rotazione rigide, non tutte le sue soluzioni sono invarianti per rotazioni.

Ricordando

$$\nabla r = \frac{1}{r} \vec{x}, \quad \nabla^2 r = \nabla \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \frac{N-1}{r}$$

si ha

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot (\mu_r \nabla r) = \nabla \cdot \left( \mu_r \frac{1}{r} \vec{x} \right) = u_{rr} \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{r^2} + \mu_r \nabla \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \mu_{rr} + \frac{N-1}{r} \mu_r = 0$$

Rispetto all'equazione del calore, non si ha più nessuna dipendenza temporale.

Per  $N = 1$  si ha  $\mu(r) = Ar + B$ . Per  $N = 2$  si ha

$$\mu_{rr} = -\frac{1}{r} \mu_r \implies (\ln \mu_r)_r = -(\ln r)_r \implies \mu_r = \frac{A}{r} \implies \mu(r) = A \ln r + B$$

Sebbene la soluzione presenta una singolarità in  $r = 0$ , si può comunque integrare  $\mu(r)$ . Per  $N \geq 3$  si ha

$$\mu_{rr} = \frac{1-N}{r} \mu_r \implies (\ln \mu_r)_r = (1-N)(\ln r)_r \implies \mu_r = k r^{1-N} \implies \mu(r) = \frac{A}{r^{N-2}} + B$$

In tre dimensioni, la dipendenza da  $\frac{1}{r}$  si è vista per potenziali gravitazionali ed elettrostatici. Infatti, il potenziale elettrostatico soddisfa l'equazione di Laplace.

**Osservazione.** Si osserva

- Per dimensioni  $N \geq 2$ , le soluzioni sono singolari in  $r = 0$ , ma sono integrabili. Infatti, sia  $\omega(N)$  l'area della superficie della sfera unitaria  $S^{N-1}$  (indicata nell'integrale come  $B(0, 1)$  per "ball"). Si ha

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{r^{N-2}} d^N x = \omega(N) \int_0^1 \frac{1}{r^{N-2}} r^{N-1} dr = \frac{1}{2} \omega(N)$$

- Per  $N \geq 3$ , si impone che  $u(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow +\infty$  per cui si fissa la costante  $B$ . Per ora non si ha alcun buon motivo per fissare la costante  $A$ . Quando si studiano le distribuzioni si capisce in che modo la costante  $A$  normalizza la soluzione.

**Soluzione fondamentale o funzione di Green del laplaciano in  $\mathbb{R}^N$ .** La funzione di Green del laplaciano in  $\mathbb{R}^N$  è

$$G_\infty^N = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln r, & N = 2 \\ -\frac{1}{(N-2)\omega(N)r^{N-2}}, & N \geq 3 \end{cases}$$

Il pedice  $\infty$  indica che non ci sono bordi, cioè la funzione di Green è definita su tutto  $\mathbb{R}^N$  (a parte la singolarità in  $r = 0$ ).

Ricordando le sei proprietà, in particolare la seconda, non stupisce che tale funzione abbia una singolarità perché se fosse regolare, allora si avrebbe un estremo all'interno del dominio e per il principio del massimo forte, essa dovrebbe essere costante, ma non è così.

Come per l'equazione del calore, prima della soluzione generale, si studiano delle soluzioni particolari perché esse svolgono un ruolo cruciale per la soluzione generale alle equazioni di Laplace e Poisson. La funzione di Green ha ruolo analogo al propagatore nell'equazione del calore.



**Prima identità di Green.** (Hp) Si considerino due funzioni  $u, v \in C^2(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^N$ . (Th) Vale

$$\int_D (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) d^N x = \int_{\partial D} u \partial_n v d^{N-1} x$$

dove  $n$  è la direzione normale uscente. Si legano delle quantità all'interno del dominio con delle altre quantità sulla frontiera del dominio.

**Dimostrazione.** Infatti

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v$$

Usando il teorema della divergenza si ha

$$\int_D \nabla \cdot (u \nabla v) d^N x = \int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v) d^N x = \int_{\partial D} \hat{n} \cdot u \nabla v d^{N-1} x = \int_{\partial D} u \partial_n v d^{N-1} x$$

**Seconda identità di Green.** (Hp) Si considerino due funzioni  $u, v \in C^2(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^N$ . (Th) Vale

$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d^N x = \int_{\partial D} (u \partial_n v - v \partial_n u) d^{N-1} x$$

**Dimostrazione.** Infatti, considerando la prima identità di Green si ha

$$\begin{aligned} \int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d^N x &= \int_D (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v - v \nabla^2 u - \nabla v \cdot \nabla u) d^N x \\ &= \int_{\partial D} (u \partial_n v - v \partial_n u) d^{N-1} x \end{aligned}$$

Le funzioni armoniche presentano varie proprietà ed hanno poche possibilità di esibire comportamenti esotici. La condizione di soddisfare l'equazione di Laplace permette di caratterizzare tali funzioni prima di avere a disposizione la soluzione generale.

#### 4.4 Unicità con Dirichlet o Neumann

Non si è ancora parlato di esistenza sebbene si siano già costruite soluzioni per  $N$  dimensioni. Tuttavia, in generale, per un problema di Dirichlet o Neumann, non si conosce l'esistenza.

**Teorema.** Si vede l'unicità per Dirichlet. (Hp) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \\ u(\vec{x})|_{\partial D} = \varphi(\vec{x}) & \varphi : \partial D \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

In questo caso si richiede il dato su tutto il bordo, non solo in una parte come potrebbe essere  $u(x, 0)$  per l'equazione del calore. (Th) La soluzione  $u$  è unica.

**Dimostrazione.** Si considerino due soluzioni al problema precedente  $u_1$  e  $u_2$ . La loro differenza  $w = u_1 - u_2$  soddisfa

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

Dimostrando questo teorema, si dimostra anche la terza proprietà delle funzioni armoniche. Dunque

$$\int_D w \nabla^2 w d^N x = - \int_D |\nabla w|^2 d^N x + \int_{\partial D} w \partial_n w d^{N-1} x$$

L'uguaglianza è data dalla prima identità di Green dove il secondo addendo è nullo per le condizioni al bordo. Inoltre, in quanto  $\nabla^2 w = 0$  si ha

$$\int_D w \nabla^2 w \, d^N x = 0$$

Pertanto risulta

$$\int_D |\nabla w|^2 \, d^N x = 0 \implies \nabla w = 0$$

Dato che  $w|_{\partial D} = 0$ , per la condizione sul gradiente, segue

$$w = u_1 - u_2 \equiv 0$$

cioè la tesi.

**Teorema.** Si vede l'unicità per Neumann. (Hp) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \\ \partial_n u(\vec{x})|_{\partial D} = \psi(\vec{x}) & \psi : \partial D \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

dove  $\hat{n}$  è la direzione normale uscente di  $\partial D$ . (Th) La soluzione  $u$  è unica a meno di costanti. La dipendenza da costanti non crea problemi perché nei casi fisici, le costanti non sono rilevanti per i potenziali.

**Dimostrazione.** Come prima, sia  $w = u_1 - u_2$  tale per cui

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ \partial_n w|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$0 = \int_D w \nabla^2 w \, d^N x = - \int_D |\nabla w|^2 \, d^N x + \int_{\partial D} w \partial_n w \, d^{N-1} x$$

da cui segue  $\nabla w = 0$ . In quanto lungo il bordo vale

$$\partial_n w|_{\partial D} = \hat{n} \cdot \nabla w = 0$$

cioè la derivata lungo il bordo è nulla, e dato che la derivata all'interno è nulla, si ottiene

$$w = u_1 - u_2 = \text{cost.}$$

cioè le due soluzioni differiscono per una costante.

Dunque, se la soluzione esiste, allora è unica.

**Compatibilità di Neumann.** Non tutte le condizioni di Neumann garantiscono l'esistenza della soluzione. Bisogna soddisfare le condizioni di compatibilità di Neumann. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \partial_n u|_{\partial D} = \psi \end{cases}$$

Si nota

$$0 = \int_D \nabla^2 u \, d^N x = \int_D \nabla \cdot (\nabla u) \, d^N x = \int_{\partial D} \hat{n} \cdot \nabla u \, d^{N-1} x = \int_{\partial D} \partial_n u \, d^{N-1} x = \int_{\partial D} \psi \, d^{N-1} x$$

da cui si ha la condizione di compatibilità di Neumann

$$\int_{\partial D} \psi \, d^{N-1} x = 0$$

Se i dati al bordo non soddisfano tale condizione, allora la soluzione non esiste (questa implicazione è magari un sse?). Questa condizione assume un significato fisico.

Ci si chiede se il funzionale

$$E[w] = \int_D |\nabla w|^2 d^N x$$

visto nelle dimostrazioni dell'unicità, caratterizza le funzioni armoniche. Partendo da questo funzionale, si vogliono costruire proprietà delle funzioni armoniche. Si vede il principio di Dirichlet.

**Teorema.** Principio di Dirichlet. (Hp) Si consideri una funzione  $w : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che  $w|_{\partial D} = \varphi$ . Sia  $u$  una funzione armonica in  $D$  per cui  $u|_{\partial D} = \varphi$ . Si consideri il funzionale

$$E[f] \equiv \int_D |\nabla f|^2 d^N x \geq 0$$

(Th) Allora  $u$  minimizza  $E$  tra tutte le funzioni  $w$ :

$$E[u] \leq E[w], \quad \forall w$$

**Dimostrazione.** Sia  $v \equiv w - u$ . In quanto  $u|_{\partial D} = w|_{\partial D} = \varphi$ , si ha  $v|_{\partial D} = 0$ . Si nota che  $v$  non è una funzione armonica in quanto nemmeno  $w$  lo è. Dunque

$$\begin{aligned} E[w] &= \int_D |\nabla w|^2 d^N x = \int_D |\nabla(u+v)|^2 d^N x = \int_D (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla v) d^N x \\ &= E[u] + E[v] + 2 \int_D \nabla u \cdot \nabla v d^N x = E[u] + E[v] - 2 \int_D v \nabla^2 u d^N x + 2 \int_{\partial D} v \partial_n u d^{N-1} x \\ &= E[u] + E[v] \implies E[w] \geq E[u] \end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza della seconda riga si è applicata la prima identità di Green. Nel termine ottenuto, il terzo addendo è nullo perché  $u$  è armonica, mentre il quarto è nullo perché  $v|_{\partial D} = 0$ . Si ricorda che il funzionale è non negativo.

Si nota che il minimo di  $E$  è solamente uno perché la soluzione al problema di Cauchy dell'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet è unica.

Fin'ora si sono dimostrate le proprietà 3 – 5 delle funzioni armoniche.

## Lezione 15

### 4.5 Comportamento della soluzione all'interno del dominio

**Proprietà del valor medio.** (Hp) Dato  $\nabla^2 u = 0$  in un dominio  $D \subset \mathbb{R}^N$ , (Th) per ogni  $B(\vec{x}, R) \subset D$  segue:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \frac{1}{\omega(N)R^{N-1}} \int_{\partial B} u(\vec{y}) d^{N-1} y \\ u(\vec{x}) &= \frac{1}{\alpha(N)R^N} \int_B u(\vec{y}) d^N y \end{aligned}$$

dove  $\omega(N)$  è la misura di  $\partial B(0,1)$ , con  $B(\vec{x}, R)$  intorno circolare di  $\vec{x}$  di raggio  $R$ ; mentre  $\alpha(N) = \frac{\omega(N)}{N}$  è la misura di  $B(0,1)$ .

La soluzione in un punto equivale alla media della soluzione sia sulla superficie di una sfera che nella sfera stessa.

Si studia la relazione tra questa proprietà e la qualità di armonia delle funzioni; inoltre, si studia la possibilità di ricavare particolari proprietà dell'equazione di Laplace a partire da questa proprietà.

**Dimostrazione.** Si dimostra la prima equazione perché la seconda ne è una conseguenza. Si vede il caso  $N = 3$ . Per  $0 < r < R$  si definisce la media di  $u$  come

$$g(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_3(\vec{x}, r)} u(\vec{y}) d^2 y = \frac{r^2}{4\pi r^2} \int_{\partial B_3(\vec{0}, 1)} u(\vec{x} + r\vec{\xi}) d^2 \xi$$

dove si riscrivono i punti della sfera come  $y = \vec{x} + r\vec{\xi}$ , dove  $\xi$  è un versore: indica solo la direzione in quanto il modulo è descritto da  $r$ . Per mostrare che la media non dipende dal raggio, si opera la derivata

$$\begin{aligned} d_r g(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_3(\vec{0}, 1)} \partial_r u(\vec{x} + r\vec{\xi}) d^2 \xi = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_3(\vec{0}, 1)} \vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{x}} u(\vec{x} + r\vec{\xi}) d^2 \xi \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B_3(\vec{0}, 1)} \vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{\xi}} u(\vec{x} + r\vec{\xi}) d^2 \xi = \frac{1}{4\pi r} \int_{B_3(\vec{0}, 1)} \nabla_{\vec{\xi}}^2 u(\vec{x} + r\vec{\xi}) d^3 \xi \\ &= \frac{r^2}{4\pi r} \int_{B_3(\vec{0}, 1)} \nabla_{\vec{x}}^2 u(\vec{x} + r\vec{\xi}) d^3 \xi = 0 \end{aligned}$$

Per capire come si cambia la variabile rispetto a cui si fa il gradiente, basta utilizzare la regola della catena. Nel primo integrale della seconda riga, il versore radiale  $\vec{\xi}$  è perpendicolare alla superficie chiusa (che è una sfera). Il gradiente rispetto  $\vec{\xi}$  coincide con la derivata rispetto alla normale uscente. Quindi si può applicare il teorema della divergenza. L'ultimo integrale è nullo perché  $u$  è armonica.

Dunque  $d_r g = 0$  cioè la media  $g$  non dipende dal raggio. Come nel caso delle onde, quando la funzione è regolare, si può far tendere a zero il dominio su cui si media ottenendo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\vec{x}, r)} u(\vec{y}) d^2 y = u(\vec{x})$$

La media non dipende da  $r$ . In particolare, per regolarità, il limite della media tende alla funzione. Inoltre, questo implica che, ad ogni raggio, il valore della media è sempre  $u(\vec{x})$ .

Si dimostra la seconda equazione. Si integra a strati

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B(\vec{x}, R)} u(\vec{y}) d^3 y &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta u(\vec{y}) d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta u(\vec{y}) d\theta d\varphi = u(\vec{x}) \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è data dalla prima equazione del teorema perché si ha solo un integrale di superficie.

**Teorema.** Proprietà inversa. (Hp) Si consideri una funzione  $u : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $u \in C^2(D)$  e soddisfa la proprietà della media per ogni intorno circolare in  $D$ . (Th) La funzione  $u$  è armonica.

**Dimostrazione.** Si procede per assurdo. Si consideri una funzione non armonica. Se  $\nabla^2 u \neq 0$  allora  $\exists B(\vec{x}, r) \subset D$  in cui  $\nabla^2 u > 0$  (oppure minore), si fa uso della continuità. Segue

$$0 = d_r g(r) \propto \int_{B(\vec{x}, r)} \nabla^2 u(\vec{y}) d^3 y > 0 \quad (\text{oppure minore})$$

ma ciò è assurdo. Dunque,  $u$  è una funzione armonica. (L'uguaglianza con lo zero è data dal fatto che  $u$  soddisfa la proprietà della media per ogni intorno circolare, cioè la media  $g$  non dipende da  $r$ ).

Se una funzione è armonica, allora soddisfa la proprietà della media. Se una funzione  $C^2$  soddisfa la proprietà della media, allora è armonica. Si ha quasi una doppia implicazione. Si è dimostrata la sesta proprietà.

**Principio del massimo forte.** (Hp) Sia  $u$  una funzione armonica in  $D \subset \mathbb{R}^N$  e sia  $M = \max u$  in  $\bar{D}$ . (Th) Allora  $u$  è costante.

Se la funzione non è costante, allora il massimo si deve trovare sulla frontiera (principio del massimo debole).

**Dimostrazione.** Si utilizza la proprietà della media. Si consideri un intorno circolare  $B(\vec{x}_0, r)$ . Sia  $M$  il massimo di  $u$  in  $\bar{D}$ :

$$M = u(\vec{x}_0) = \frac{1}{\alpha(N)r^N} \int_{B(\vec{x}_0, r)} u(x) d^N x = \bar{u}|_{B(\vec{x}_0, r)} \leq M$$

dove  $r < d(\vec{x}_0, \partial D)$ . Se  $M$  è un massimo locale, allora la media (e ogni punto in  $B$ ) non può mai essere maggiore del valore del massimo. Si ha un solo caso in cui vale l'uguaglianza cioè  $u \equiv M$ . Da tale intorno, si costruiscono altri intorni aperti costanti e l'unione di essi si estende a tutto il dominio. Pertanto  $u(\vec{x}) = M, \forall \vec{x} \in D \cup \partial D$ .

La proprietà della media (quasi) implica l'armonia e implica il principio del massimo forte.

**Principio del minimo.** (Hp) Sia  $u$  una funzione armonica in  $D \subset \mathbb{R}^N$  e sia  $m = \min u$  in  $\bar{D}$ . (Th) Allora  $u$  è costante.

**Dimostrazione.** Come nell'equazione del calore, noto che  $\nabla^2 u = 0$  è un'equazione lineare, se  $u$  è soluzione, allora pure  $-u$ . Vale  $\min u = \max -u$ . Quindi si applica il principio del massimo a  $-u$  e si ottiene la tesi.

**Corollario.** Gli estremi (cioè i punti stazionari) di  $u$  si possono trovare solo sulla frontiera  $\partial D$ .

**Osservazione.** La funzione di Green  $G_\infty^N(\vec{x})$  è armonica in  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

## 4.6 Unicità e stabilità per Dirichlet

Come per l'equazione del calore, il principio del massimo debole ha permesso di verificare l'unicità e la stabilità della soluzione.

**Teorema.** (Hp) Si consideri il problema di Cauchy con dati al bordo di Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \\ u|_{\partial D} = \varphi \end{cases}$$

(Th) Allora

- Se la soluzione  $u$  esiste, allora essa è unica.
- Sia  $u_1$  soluzione con dato al bordo  $\varphi_1$  e  $u_2$  soluzione con dato al bordo  $\varphi_2 \neq \varphi_1$ . Se  $\varphi_1 > \varphi_2$  ( $\forall x \in D$ ) allora  $u_1 > u_2$ .
- La soluzione è stabile rispetto la norma uniforme  $L_\infty$ .

**Dimostrazione.** Si dimostrano queste tesi tramite il principio del massimo. Si consideri la prima tesi. Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni con dato al bordo  $\varphi$ . Allora  $w = u_1 - u_2$  è una funzione armonica con  $w|_{\partial D} = 0$ . Per il principio del massimo debole, gli estremi di  $w$  si trovano sulla frontiera  $\partial D$ . Pertanto

$$\max w = \min w = 0 \implies 0 = \min w \leq w \leq \max w = 0$$

cioè

$$w = u_1 - u_2 = 0$$

da cui segue la tesi.

Si dimostra la seconda tesi. Sia  $w = u_1 - u_2$ . Il suo problema di Cauchy è

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{\partial D} = \varphi_1 - \varphi_2 > 0 \end{cases}$$

per il principio del minimo segue

$$u_1 - u_2 = w(x) \geq \min_{x \in \partial D} (\varphi_1 - \varphi_2) > 0 \implies u_1 > u_2, \quad \forall x \in D$$

cioè la tesi.

Si dimostra la terza tesi. Per il principio del massimo ed il principio del minimo si ha

$$w(x) \leq \max_{x \in \partial D} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad -w(x) \leq \max_{x \in \partial D} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Da ciò segue

$$|u_1(x) - u_2(x)| = |w(x)| \leq \max_{x \in \partial D} |\varphi_1 - \varphi_2|, \quad \forall x \in D$$

ricordando

$$|w(x)| = \max(w, -w)$$

**Osservazione.** Come per l'equazione del calore, se  $u$  è soluzione all'equazione di Laplace, allora anche le componenti del suo gradiente sono funzioni armoniche (e questo implica che anche tutte le derivate successive rispetto ad una componente, e anche quelle miste, sono funzioni armoniche, ferma restando l'esistenza di tali derivate).

**Teorema.** di Liouville. (Hp) Sia  $u$  una funzione armonica e limitata in  $\mathbb{R}^N$ . (Th) Allora  $u$  è costante.

**Dimostrazione.** Se  $u$  è armonica, allora pure  $\partial_{x_i} u$ . Per il teorema della media si ha

$$|\partial_{x_i} u(\vec{x})| = \left| \frac{1}{\alpha(N)r^N} \int_{B(\vec{x},r)} \partial_{x_i} u \, d^N y \right| = \left| \frac{1}{\alpha(N)r^N} \int_{\partial B(\vec{x},r)} u \hat{n} \cdot \hat{x}_i \, d^{N-1} y \right|$$

Nell'ultima uguaglianza si è applicato la prima identità di Green con  $u = u$  e  $v = x_i$ :

$$\int_D (u \cancel{\nabla^2 x_i} + \nabla u \cdot \nabla x_i) \, d^N y = \int_{\partial D} u \partial_n x_i \, d^{N-1} y$$

osservando che  $\nabla^2 x_i = 0$  e  $\nabla x_i = \hat{x}_i$ , pure ricordando  $\partial_n x_i = \hat{n} \cdot \nabla x_i$  e notando  $\nabla u \cdot \nabla x_i = \partial_{x_i} u$ . Pertanto

$$|\partial_{x_i} u(\vec{x})| \leq \left| \frac{1}{\alpha(N)r^N} \max |u(\vec{x})| \omega(N)r^{N-1} \right| = \frac{N}{r} \max |u(\vec{x})| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

si maggiora con il massimo dell'integranda per la misura del dominio di integrazione. Si svolge il limite  $r \rightarrow \infty$  in quanto, per la proprietà della media, la media stessa non può dipendere da  $r$ . Il massimo di  $u$  è limitato per ipotesi.

Pertanto, svolgendo il discorso su ogni componente, si ha  $\nabla u = 0$  e dunque  $u$  è costante.

**Teorema.** (Hp) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \\ u|_{\partial D} = \varphi & \varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \in C^0(D) \end{cases}$$

(Th) Allora, la funzione  $u$  è di classe  $C^\infty$ , è liscia.

Questo teorema è analogo a quanto visto per l'equazione del calore: si consideri il dato iniziale continuo, al tempo  $t = 0^+$ , la soluzione  $u$  è  $C^\infty$ . Per Laplace, si ha una proprietà analoga: per un dato al bordo continuo, la funzione armonica è  $C^\infty$ . Si nota che non si hanno analoghi in una dimensione perché non ha senso di parlare di continuità di dato al bordo. Inoltre, l'equazione di Laplace, per questa proprietà, è vicina alle equazioni paraboliche, l'equazione del calore.

**Esercizio.** Considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ u|_{\partial D} = \varphi \end{cases}$$

dove

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} u = 0 & x = 0 \\ u_y + u = 0 & y = 0 \\ u_x = 0 & x = a \\ u = g(x) & y = b \end{cases}$$

Bisogna separare la soluzione

$$u_n = X_n(x)Y_n(y), \quad n \geq 0$$

e risolvere separatamente. Si consiglia di partire dai dati al bordo con  $x$  fissata.

Posto

$$k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}$$

la soluzione è

$$X_n = A_n \sin(k_n x), \quad Y_n = \sinh(k_n y) - k_n \cosh(k_n y)$$

dove i coefficienti  $A_n$  si ottengono tramite

$$\int_0^a g(x) \sin(k_n x) dx = \frac{1}{2} a A_n [\sinh(k_n b) - k_n \cosh(k_n b)]$$

## Lezione 16

**Esempio.** Si vede la formula di Poisson. Si costruisce la funzione armonica all'interno di un disco in  $\mathbb{R}^2$  conoscendo il dato al bordo:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ u|_{\partial D} = \varphi(\theta) & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \end{cases}$$

Si cercano soluzioni regolari, periodiche. Si utilizzano le coordinate polari in cui il laplaciano è

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

Si separa la soluzione  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Dall'equazione di Laplace si ottiene

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \implies \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ r^2 R'' + r R' = \lambda R \end{cases}$$

Per la parte angolare si ottiene

$$\Theta = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

avendo posto  $\lambda > 0$  perché si vuole una soluzione regolare. Richiedendo  $\Theta$  periodico in  $[0, 2\pi)$  (quindi  $u$  regolare) si ha

$$\lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

da cui

$$\Theta_n = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n \geq 0$$

Per la parte radiale si ha

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$$

Per  $n = 0$  si ha

$$R_0 = C + D \ln r$$

la regolarità impone  $D = 0$ . Per  $n \geq 1$  si ha

$$R_n = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}$$

la regolarità implica  $D_n = 0$ . Per trovare questa soluzione, basta considerare che l'equazione differenziale preserva il grado, pertanto si possono cercare soluzioni polinomiali  $r^k$ . La soluzione generale è

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n \Theta_n = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{A}_n \cos(n\theta) + \tilde{B}_n \sin(n\theta)] r^n \tilde{C}_n \\ &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^n \end{aligned}$$

Questa serie è sommabile esplicitamente. Si pone

$$u(a, \theta) = \varphi(\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] a^n$$

Si calcolano i coefficienti  $A_n$ . Infatti

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos(n\theta) d\theta = a^n A_n \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \pi a^n A_n$$

ricordando

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{nm}$$

Dunque

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 2\bar{\varphi} \\ A_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1 \\ B_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$



Pertanto

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \bar{\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) [\cos(\alpha n) \cos(\theta n) + \sin(\alpha n) \sin(\theta n)] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} (e^{in(\theta-\alpha)} + e^{-in(\theta-\alpha)}) \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\alpha)(a^2 - r^2)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha \end{aligned}$$

Si integra sul bordo il prodotto tra una funzione e il dato iniziale. La struttura di questa soluzione è simile a quella dell'equazione del calore in cui si ha una convoluzione sull'asse reale del dato iniziale per il propagatore. In analogia con il propagatore dell'equazione del calore, la funzione che moltiplica  $\varphi(\alpha)$  non dipende dal dato iniziale, ma dalle proprietà geometriche del dominio. [immagine]

Si noti che il denominatore è la legge dei coseni ovvero una norma di una differenza vettoriale. Considerato  $\vec{x}'$  un punto sul bordo (di norma  $a$ ) e  $\vec{x}$  un punto al suo interno (di norma  $r$ ), segue

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{x}'|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha)$$

da cui

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - |\vec{x}|^2}{2\pi} \int_{|\vec{x}'|=a} \frac{\varphi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d\theta = u(\vec{x})$$

Si ha ancora una convoluzione. La soluzione, per come è scritta, è di classe  $C^\infty$  anche solo se  $\varphi \in C^0$ .

Costruire la funzione che moltiplica  $\varphi$  (cioè la funzione di Green) diventa il nuovo problema. Tuttavia, tale oggetto ha proprietà stringenti che permettono di affermare l'esistenza e la struttura della soluzione indipendentemente dall'abilità di trovare la sua forma esplicita.

## 4.7 Identità di rappresentazione e soluzione all'equazione di Laplace e Poisson

Si ricordi la seconda identità di Green

$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d^N x = \int_{\partial D} (u \partial_n v - v \partial_n u) d^{N-1} x, \quad u, v \in C^2(D)$$

La si vuole scrivere per una funzione  $u \in C^2(D)$  e la funzione di Green  $G_\infty$  con singolarità in  $D$  (dunque, essa è quasi ovunque  $C^2$ ).

**Identità di rappresentazione.** (Hp) Si consideri una funzione  $u \in C^2(D)$  e la funzione di Green

$$G_\infty = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln r, & N = 2 \\ -\frac{1}{\omega(N)(N-2)r^{N-2}}, & N \geq 3 \end{cases}$$

(Th) Vale

$$u(x) = \int_D G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) d^N y + \int_{\partial D} [u(y) \partial_n G_\infty(x-y) - G_\infty(x-y) \partial_n u(y)] d^{N-1} y$$

Si noti che  $x, y \in \mathbb{R}^N$  sono entrambi ennuple e non scalari (o intesi come componenti).

**Dimostrazione.** Si dimostra in tre dimensioni.

Si consideri l'insieme  $D_\varepsilon = D \setminus B(x, \varepsilon)$  con  $x$  singolarità della funzione di Green  $G_\infty(x-y)$  (intesa come funzione di  $y$  e, con abuso di notazione, non si esplicita il modulo  $|x-y|$  nell'argomento) [immagine]. In esso, la funzione di Green è regolare e si può applicare la seconda identità di Green con  $u = u(y)$  e  $v(y) = G_\infty(x-y)$ . Si nota che vale  $\partial D_\varepsilon = \partial B_\varepsilon \cup \partial D$ . Pertanto

$$\begin{aligned} & \int_{D_\varepsilon} [-G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) + u(y) \nabla^2 G_\infty(x-y)] d^N y \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} [u(y) \partial_n G_\infty(x-y) - G_\infty(x-y) \partial_n u(y)] d^{N-1} y \\ &+ \int_{\partial D} [u(y) \partial_n G_\infty(x-y) - G_\infty(x-y) \partial_n u(y)] d^{N-1} y \end{aligned}$$

ricordando che  $G_\infty$  è armonica in  $D_\varepsilon$ . Si nota che l'unica differenza legata al primo addendo della tesi e il primo addendo del primo membro dell'equazione precedente è legata solamente al dominio. Per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la singolarità deve agire di modo che uno dei termini nella relazione sopra deve diventare  $u(x)$ . Dunque, primo addendo del primo membro:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) d^N y = \int_D G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) d^N y$$

questo vale perché  $G_\infty$  è integrabile nella singolarità  $x$ : si ottiene il primo addendo della tesi e si nota che si ha già il secondo addendo.

Secondo addendo dell'integrale del secondo membro:

$$\int_{\partial B_\varepsilon} G_\infty(x-y) \partial_n u(y) d^2 y = \int_{r=\varepsilon} \partial_n u(y) \left( -\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) d^2 y \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} M 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

dove la derivata rispetto la normale di  $u$  porta con sé un segno negativo (perché il versore dev'essere uscente:  $\hat{n}$  punta radialmente interno, ma  $r$  punta radialmente esterno, da cui  $\partial_n = -\partial_r$ ) ed è limitata da un numero  $M$ .

Primo addendo dell'integrale del secondo membro:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial B_\varepsilon} u(y) \partial_n G_\infty(x-y) d^2 y = - \int_{\partial B_\varepsilon} u(y) \frac{x-y}{\varepsilon} \cdot \nabla_y \frac{1}{4\pi|x-y|} d^2 y \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon} u(y) \frac{(x-y)^2}{4\pi\varepsilon^4} d^2 y = - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u(y) d^2 y \end{aligned}$$

dove si è utilizzato

$$\nabla_y \frac{1}{|x-y|} = \nabla_y \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2}} = \frac{x-y}{[(x-y)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-y}{\varepsilon^3}$$

L'ultima espressione ottenuta è la media di  $u$  sull'intorno circolare  $B(x, \varepsilon)$ . In quanto  $u$  è regolare si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u(y) d^2 y = -u(x)$$

Si nota che non si è ipotizzato che  $u$  sia armonica e quindi il limite sopra vale per regolarità, non per il teorema della media.

Componendo tutti i membri si ha

$$- \int_D G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) d^N y = -u(x) + \int_{\partial D} [u(y) \partial_n G_\infty(x-y) - G_\infty(x-y) \partial_n u(y)] d^{N-1} y$$

da cui la tesi.

Si capisce la motivazione delle costanti di normalizzazione della funzione di Green: nella tesi del teorema, tutti i coefficienti correttivi sono l'unità.

#### 4.7.1 Funzioni di Green in un dominio $D$

Si generalizza  $G_\infty$  e si estraggono le proprietà rilevanti all'identità di rappresentazione: abbia una singolarità, che tale singolarità sia integrabile, abbia laplaciano nullo, abbia una particolare struttura ed una particolare dipendenza da  $r$ .

**Definizione.** La funzione di Green del laplaciano  $\nabla^2$  per un dominio  $D \subset \mathbb{R}^N$  è una funzione  $G$  tale che

- vale  $\nabla^2 G = 0$  in  $D \setminus \{x_0\}$  dove  $x_0$  è la singolarità della funzione;
- si ha  $G|_{\partial D} = 0$ ;
- come pure  $G = G_\infty + H$  dove  $H$  è una funzione armonica in  $D$ .

Si nota che  $G$  diverge in  $x_0$  come fa  $G_\infty$ .

Si possono definire funzioni di Green per altri operatori. La terza proprietà è fondamentale per dimostrare un teorema analogo all'identità di rappresentazione sfruttando  $G$ .

**Teorema.** (Hp) Si consideri la funzione di Green  $G$  per il laplaciano come definita sopra. (Th) Essa è unica nel dominio  $D$ .

Si noti che l'unicità della soluzione all'equazione di Laplace con dati al bordo di Dirichlet non vale in questo caso perché la funzione  $G$  non è regolare in  $D$ . Infatti, si assegna una singolarità: essa, non solo deve esistere, ma ne si decide arbitrariamente la posizione e come si comporta. Questo teorema è il passaggio al limite del teorema di unicità in un sottoinsieme di  $D$  che tende a  $D$  stesso, come fatto per l'identità di rappresentazione.

**Dimostrazione.** Fatta salva l'esistenza, si considerino due funzioni di Green  $G_1$  e  $G_2$  in  $D$ . Considerato

$$G_1 - G_\infty = H_1, \quad G_2 - G_\infty = H_2$$

vale

$$H_1|_{\partial D} = H_2|_{\partial D}$$

in quanto sul bordo,  $G_\infty$  ha valore assegnato, mentre  $G_i$  deve valere zero. Le due funzioni,  $H_1$  e  $H_2$ , sono armoniche in  $D$  con medesimo problema di Dirichlet. Per il teorema di unicità, esse sono identiche

$$H_1 \equiv H_2 \implies G_1 \equiv G_2$$

**Corollario.** Si scrive l'identità di rappresentazione con  $u \in C^2(D)$  e la funzione di Green  $G$  associata a  $D$ :

$$u(x) = \int_D G(x-y) \nabla^2 u(y) \, d^N y + \int_{\partial D} [u(y) \partial_n G(x-y) - G(x-y) \partial_n u(y)] \, d^{N-1} y$$

**Dimostrazione.** Si utilizza la dimostrazione per  $G_\infty$  con qualche accortezza. L'equazione è lineare in  $G$ . Si parte dalla relazione in  $G_\infty$  e si sostituisce l'espressione  $G_\infty = G - H$ :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_D G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) \, d^N y + \int_{\partial D} [u(y) \partial_n G_\infty(x-y) - G_\infty(x-y) \partial_n u(y)] \, d^{N-1} y \\
 &= \int_D G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) \, d^N y + \int_{\partial D} [u(y) \partial_n G(x-y) - \cancel{G(x-y)} \partial_n u(y)] \, d^{N-1} y \\
 &\quad - \int_{\partial D} [u(y) \partial_n H(x-y) - H(x-y) \partial_n u(y)] \, d^{N-1} y \\
 &= \int_D G_\infty(x-y) \nabla^2 u(y) \, d^N y + \int_{\partial D} u(y) \partial_n G(x-y) \, d^{N-1} y \\
 &\quad - \int_D [u(y) \cancel{\nabla^2 H(x-y)} - H(x-y) \nabla^2 u(y)] \, d^N y \\
 &= \int_D [G_\infty(x-y) + H(x-y)] \nabla^2 u(y) \, d^N y + \int_{\partial D} u(y) \partial_n G(x-y) \, d^{N-1} y \\
 &= \int_D G(x-y) \nabla^2 u(y) \, d^N y + \int_{\partial D} u(y) \partial_n G(x-y) \, d^{N-1} y
 \end{aligned}$$

nella seconda riga, il termine che scompare è dovuto a  $G|_{\partial D} = 0$ ; nella terza riga si può applicare la seconda identità di Green al terzo integrale perché  $u$  ed  $H$  sono funzioni regolari (e la seconda è armonica).

**Osservazione.** Si nota che si ha un termine in meno rispetto all'identità di rappresentazione: scompare il termine in cui si valuta  $G$  sul bordo in quanto è ivi nullo.

**Osservazione.** Qualora i dati al bordo fossero

$$\partial_n G|_{\partial D} = 0$$

l'unicità si tratta esattamente come si è fatto per l'unicità di Neumann con tutti i medesimi problemi: unicità a meno di costanti e condizioni di compatibilità per l'esistenza.

Tuttavia, operando la dimostrazione precedente, al secondo integrale della seconda riga, si eliminerebbe il primo addendo e non il secondo. Il resto rimarrebbe invariato.

Similmente, definendo i dati al bordo con una funzione assegnata o dati al bordo misti, non cambierebbe nulla. Il punto è che, se si assegnano dei dati al bordo per  $G$ , allora quelli assegnati dal problema devono essere gli stessi per  $u$ . La scelta della funzione di Green opportuna dipende da quali sono le richieste per i dati al bordo per  $u$ . Bisogna costruirla in maniera precisa.

La formula di rappresentazione ottenuta nella dimostrazione lega  $u$  ai suoi dati al bordo oppure al valore del suo laplaciano nel dominio.

#### 4.7.2 Soluzione all'equazione di Laplace con dati al bordo di Dirichlet

**Teorema.** (Hp) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases}$$

(Th) La soluzione è

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \partial_n G(x-y) \, d^{N-1} y$$

cioè una convoluzione.

**Dimostrazione.** La dimostrazione segue immediatamente dall'identità di rappresentazione sopra.

**Osservazione.** Si noti che la formula ottenuta nell'esempio della formula di Poisson ha la stessa scrittura riportata sopra.

#### 4.7.3 Soluzione all'equazione di Poisson con dati al bordo di Dirichlet

**Teorema.** (Hp) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, cioè Laplace con sorgente:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \rho \\ u|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases}$$

(Th) La soluzione è

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \partial_n G(x-y) d^{N-1}y + \int_D G(x-y) \rho(y) d^N y$$

**Dimostrazione.** La dimostrazione segue immediatamente dall'identità di rappresentazione.

**Osservazione.** Assegnando un dominio, la funzione di Green non è nota. Il problema della conoscenza del valore di una funzione armonica in dominio è spostato sulla funzione di Green. Tuttavia, non si è detto come trovarla.

In generale, è complicato trovare soluzioni di funzioni armoniche su domini finiti perché, di fatto, bisogna calcolare la funzione di Green. Anche per l'equazione delle onde e del calore si ha un problema simile su domini finiti che non siano segmenti. Per osservare le proprietà delle funzioni armoniche non ha senso guardare tutto  $\mathbb{R}^N$  perché, se si avessero dati al bordo nulli, si avrebbe una funzione limitata e quindi nulla: si banalizza il problema. Mentre studiare una sola dimensione (sempre con dati al bordo nulli) è comunque banale.

Il problema delle funzioni armoniche è che non esistono esempi semplici che non siano le rette.

### Lezione 17

Si noti che il secondo addendo della soluzione all'equazione di Poisson è l'espressione generale del potenziale elettrostatico vista in Fisica II.

#### 4.7.4 Soluzione all'equazione di Laplace e Poisson con dati al bordo di Neumann

Si definisce la funzione di Green con dati al bordo di Neumann come per Dirichlet, ma cambiando i dati al bordo:

$$\begin{cases} \nabla^2 G^N = 0 & G^N : D \rightarrow \mathbb{R} \\ G^N = G + H & H \text{ regolare} \\ \partial_n G^N|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

Per l'equazione di Poisson si ha

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \rho \\ \partial_n u|_{\partial D} = \psi(x) \end{cases} \quad \psi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$$

la cui soluzione è

$$u(x) = - \int_{\partial D} \psi(y) G^N(x-y) d^{N-1}y + \int_D G^N(x-y) \rho(y) d^N y$$

#### 4.7.5 Proprietà delle funzioni di Green

Le funzioni di Green hanno proprietà utili per operare certi metodi di soluzione dell'equazione di Laplace.

**Simmetria.** (Hp) Si consideri la funzione di Green  $G_{x_0}(x)$  in  $D$  con singolarità in  $x_0$ . (Th) Vale

$$G_{x_0}(x) = G_x(x_0)$$

Quando non specificato, si utilizzano dati al bordo di Dirichlet.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è in tre dimensioni. Si considerino le due funzioni di Green  $G_a(x)$  e  $G_b(x)$  in  $D$ . Si mostra l'uguaglianza

$$G_a(b) = G_b(a)$$

[immagine] Siano

$$u(x) = G_a(x) = -\frac{1}{4\pi|x-a|} + H_a(x), \quad v(x) = G_b(x) = -\frac{1}{4\pi|x-b|} + H_b(x)$$

Sia  $D_\varepsilon = D \setminus (B(a, \varepsilon) \cup B(b, \varepsilon))$ . In tale regione si può applicare la seconda identità di Green in quanto  $u$  e  $v$  sono entrambe regolari. L'identità è

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d^N y &= \int_{\partial D} (u \partial_n v - v \partial_n u) d^{N-1} y \\ &\quad + \int_{|x-a|=\varepsilon} (u \partial_n v - v \partial_n u) d^{N-1} y + \int_{|x-b|=\varepsilon} (u \partial_n v - v \partial_n u) d^{N-1} y \\ 0 &= 0 + A_\varepsilon + B_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \end{aligned}$$

dove si ha  $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \partial B(a, \varepsilon) \cup \partial B(b, \varepsilon)$ . I due termini sulla prima riga sono entrambi nulli: il primo perché  $u$  e  $v$  sono funzioni di Green e quindi armoniche in  $D_\varepsilon$ , il secondo perché sono funzioni di Green con dati al bordo di Dirichlet  $u|_{\partial D} = v|_{\partial D} = 0$ .

In particolare, vale il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon + B_\varepsilon = 0$$

Si calcola solo  $A_\varepsilon$  perché la dimostrazione è simmetrica (a meno di un segno) scambiando  $a$  con  $b$ . Dunque, in  $A_\varepsilon$ , la funzione  $v$  è regolare mentre  $u$  no. Ricordando  $\varepsilon = |x-a|$ ,  $\hat{n} = \frac{a-x}{\varepsilon}$  e l'espressione esplicita di  $u(x)$  si ha

$$A_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon^2 \sin \theta \left[ \left( -\frac{1}{4\pi r} + H(\theta, \varphi) \right) \partial_{\hat{n}} v \Big|_{r=\varepsilon} - v \partial_{\hat{n}} \left( -\frac{1}{4\pi r} + H(\theta, \varphi) \right) \Big|_{r=\varepsilon} \right] d\theta d\varphi$$

Considerando lo jacobiano, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il primo addendo si annulla, mentre nel secondo si annulla la derivata normale di  $H$ . Scambiando  $u$  con  $v$ , cioè nel caso di  $B_\varepsilon$ , rimane il primo addendo e scompare il secondo, analogo a quanto appena detto: si noti il segno meno che compare permettendo l'uguaglianza  $A_\varepsilon + B_\varepsilon = 0$ .

Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon^2 \sin \theta \left[ -v \partial_{\hat{n}} \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) \right]_{r=\varepsilon} d\theta d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v(x) \varepsilon^2 \sin \theta \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} d\theta d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(a, 1)} v(x) d^2 x = v(a) = G_b(a) \end{aligned}$$

nella seconda riga, si noti che  $\partial_n = -\partial_r$  in quanto il versore uscente da  $D_\varepsilon$  è rivolto verso il centro della bolla  $B(a, \varepsilon)$ . Nell'ultima uguaglianza si è usato il teorema del valor medio in quanto  $v$  è armonica in  $A_\varepsilon$ .

Scambiando la  $a$  con la  $b$  e notando il segno negativo derivante, si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = -u(b) = -G_a(b)$$

Dunque, sapendo  $A_\varepsilon + B_\varepsilon = 0$  si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon + B_\varepsilon = 0 \iff G_b(a) = G_a(b)$$

cioè la tesi.

## 4.8 Calcolo delle funzioni di Green

**Metodo della carica immagine.** Si vuole calcolare la funzione di Green  $G$  in un dominio  $D$  con singolarità  $x_0$ . L'unica funzione di Green che si conosce è  $G_\infty$ . Per definizione, la funzione di Green ha struttura

$$G_{x_0}(x) = G_\infty(|x - x_0|) + H(x, x_0)$$

con  $H$  armonica in  $D$ . L'idea del metodo della carica immagine è trovare una combinazione lineare di  $G_\infty$  regolari in  $D$  (cioè con singolarità al di fuori) tale per cui sia pari ad  $H$ :

$$H(x, x_0) = \sum_{i=1}^M q_i(x_0) G_\infty(|x - x_i|) + \text{cost}, \quad x_i \in \mathbb{R}^N \setminus D$$

questo è possibile quando il problema presenta simmetrie geometriche del dominio. I coefficienti  $q_i$  sono scelti in modo tale che

$$G|_{\partial D} = 0$$

**Semipiano.** Si esplicita il segno di vettore per chiarezza. In  $\mathbb{R}^3$  si consideri

$$\begin{cases} \nabla^2 G^s = 0 & G^s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ G^s|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

Si cerca una soluzione con un solo termine

$$H(\vec{x}, \vec{x}_0) = q(\vec{x}_0) G_\infty(|\vec{x} - \vec{x}_0^*(\vec{x}_0)|)$$

dove  $\vec{x}_0^*$  ha componente  $z$  negativa. Dunque

$$G_{\vec{x}_0}^s(\vec{x}) = G_\infty(|\vec{x} - \vec{x}_0|) + q(\vec{x}_0) G_\infty(|\vec{x} - \vec{x}_0^*(\vec{x}_0)|)$$

Si impongono i dati al bordo

$$G_{\vec{x}_0}^s(x, y, 0) = 0$$

Pertanto si ha

$$G_{\vec{x}_0}^s(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{q(\vec{x}_0)}{4\pi} \frac{1}{[(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z_0^*)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

da cui risulta

$$q(\vec{x}_0) = -1, \quad x_0^* = x_0, \quad y_0^* = y_0, \quad z_0^* = -z_0$$

Si sceglie il segno negativo per  $z_0$  perché altrimenti in  $G_{\vec{x}_0}^s$  si sottrae due volte la stessa funzione e non si avrebbe alcuna funzione di Green in quanto non si avrebbe più la singolarità. Pertanto, la funzione di Green del semipiano è

$$G_{\vec{x}_0}^s(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z + z_0)^2]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u|_{z=0} = \varphi(\vec{x}) \end{cases}$$

la sua soluzione è

$$u = - \int_{z=0} \varphi(\vec{y}) \partial_z G^s(\vec{x} - \vec{y}) d^2 y, \quad \partial_n = -\partial_z$$

La derivata è

$$\begin{aligned} \partial_z G^s(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} & \left[ \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. - \frac{z + z_0}{[(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z + z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

Dunque la soluzione è

$$u(\vec{x}_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_{z=0} \frac{\varphi(\vec{x})}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} d^2 x$$

Si noti che questo esempio particolare vale per la situazione in cui è presente un potenziale, ma non ci sono cariche. Per utilizzare questo metodo con una effettiva carica e la sua immagine bisogna utilizzare l'equazione di Poisson dove la distribuzione di carica è una delta di Dirac.

**Guscio sferico.** In  $\mathbb{R}^3$  si consideri

$$\begin{cases} \nabla^2 G^p = 0 & G^p : B(0, R) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ G^p|_{|x|=R} = 0 \end{cases}$$

Come precedentemente, si cerca una soluzione con un solo termine. Si pone  $x_0 \neq 0$ . Se  $x_0 = 0$ , dato che  $G_\infty$  è radiale, allora su di una sfera di raggio costante si ha  $G_\infty = \text{cost}$ . Il valore della funzione di Green di una sfera con singolarità al suo centro si discosta da quello di  $G_\infty$  solo per una costante. Si ha

$$\begin{aligned} G_{x_0}^p &= G_\infty(|x - x_0|) - q(x_0)G_\infty(|x - x_0^*|) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|} + \frac{q(x_0)}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0^*(x_0)|} \end{aligned}$$

Si pongono le condizioni al contorno

$$G|_{|x|=R} = 0 \implies q|x - x_0| = |x - x_0^*|_{|x|=R}$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned} q^2(R^2 + |x_0|^2 - 2x \cdot x_0) &= R^2 + |x_0^*|^2 - 2x \cdot x_0^* \\ (q^2 - 1)R^2 + q^2|x_0|^2 - |x_0^*|^2 &= 2x \cdot (q^2 x_0 - x_0^*) \end{aligned}$$

Si supponga

$$x_0^* = q^2 x_0, \quad q \neq \pm 1$$

Dunque

$$(q^2 - 1)(R^2 - q^2|x_0|^2) = 0 \implies q^2|x_0|^2 = R^2 \implies q = \frac{R}{|x_0|}, \quad x_0^* = \frac{R^2}{|x_0|^2} x_0$$

Pertanto

$$G_{x_0}^p = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|} + \frac{1}{4\pi} \left| \frac{|x_0|}{R} x - \frac{R}{|x_0|} x_0 \right|^{-1}$$



**Osservazione.** In questo caso, considerando lo spazio di  $G^p$  complementare a quello dato, si può utilizzare la simmetria della funzione di Green.

**Esempio.** Si è già vista la funzione di Green  $G^p$  in due dimensioni nella formula di Poisson:

$$u(\vec{x}) = \frac{a^2 - |\vec{x}|^2}{2\pi} \int_{|\vec{x}'|=a} \frac{\varphi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d\theta$$

Si calcola la funzione di Green

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| - \frac{q}{2\pi} \ln |x - x_0^*| + \text{cost} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| - \frac{q}{2\pi} \ln (A|x - x_0^*|) \end{aligned}$$

Sul bordo si ha

$$G_{x_0}(|x| = R) = 0 \iff -\frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| = -\frac{1}{2\pi} \ln [(A|x - x_0^*|)^{-q}]|_{|x|=R}$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= A|x - x_0^*|^{-q} \implies q = -1 \\ R^2 + |x_0|^2 - 2x \cdot x_0 &= A^2(R^2 + |x_0^*|^2 - 2x \cdot x_0^*) \\ (1 - A^2)R^2 + |x_0|^2 - A^2|x_0^*|^2 &= 2x \cdot (x_0 - A^2x_0^*) \implies x_0^* = \frac{x_0}{A^2} \\ (1 - A^2)R^2 + |x_0|^2 \left(1 - \frac{1}{A^2}\right) &= 0 \\ (1 - A^2) \left(R^2 - \frac{|x_0|^2}{A^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Da cui segue

$$A = \frac{|x_0|}{R}, \quad x_0^* = \frac{R^2}{|x_0|^2} x_0$$

cioè quanto si è ottenuto nel caso del guscio sferico. La funzione di Green è

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{|x_0|}{R} x - \frac{R}{|x_0|} x_0 \right|$$

La sua derivata radiale è

$$\frac{(a^2 - r^2)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2}$$

cioè quanto ottenuto nell'esempio della formula di Poisson.

**Osservazione.** Se  $x_0 = 0$  allora

$$G_0^p = -\frac{1}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi R}$$

**Osservazione.** In una dimensione si ha

$$G_\infty^1(|x - x_0|) = \frac{1}{2}|x - x_0|$$

La funzione di Green nell'intervallo  $[a, b]$  è

$$G^1 = G_\infty^1 + H$$

dove

$$H = mx + q$$

le due costanti  $m$  e  $q$  sono fissate dal valore di  $G^1$  in  $a$  e  $b$ .

## 5 Distribuzioni

Si sono terminati i primi tre capitoli del corso: equazioni iperboliche (onde), paraboliche (calore) ed ellittiche (Laplace). Rimangono due capitoli più brevi, ma non meno rilevanti. Le tre equazioni viste sono lineari. Di ciascuna si è vista la soluzione, la buona positura, un modello da cui provengono. Si è osservata una migrazione delle proprietà dalle onde fino a Laplace. Sono presenti tratti comuni alle onde ed al calore, altri sono comuni al calore ed a Laplace. Tra le prime due si ha: equazioni di evoluzione, si risolvono attraverso dati iniziali, hanno caratteristiche (sebbene in un caso sono inutili). Tra le altre due si ha: principio del massimo, regolarizzazione di singolarità presenti dei dati iniziali (per il calore) e nei dati al bordo (in Laplace). Per l'equazione del trasporto (e poi delle onde) rimane ancora il quesito di cosa succede alle singolarità nelle derivate. Per questo si studiano le distribuzioni.

Le distribuzioni sono anche dette funzioni generalizzate o funzionali. Si vuole studiare il rapporto tra i funzionali e le equazioni viste, in particolare con le singolarità. Inoltre, si studia il concetto di soluzione debole, cioè la nozione di soluzione (forte) è estesa alle distribuzioni.

**Definizione.** Una distribuzione  $F$  è

- un funzionale che agisce sulle funzioni lisce a supporto compatto (dette funzioni di prova, di test):

$$F : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle F | \varphi \rangle, \quad C_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

- lineare

$$\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega) \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \langle F | \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle F | \varphi_1 \rangle + \beta \langle F | \varphi_2 \rangle$$

- continuo

$$\varphi_n, \varphi \in C_c^\infty, \{\varphi_n\}_n \rightrightarrows \varphi \implies \langle F | \varphi_n \rangle \rightarrow \langle F | \varphi \rangle$$

### Lezione 18

Lo strumento che permette di trattare le singolarità sono le distribuzioni.

Le equazioni viste finora sono lineari. Successivamente si vuole studiare, sebbene in modo semplice, la non linearità. Rispetto le ODE, non esistono teoremi generali per le PDE che garantiscano l'esistenza della soluzione. Quelli che esistono sono comunque ristretti all'area in esame: equazioni vicine alle iperboliche, alle paraboliche o alle ellittiche.

Si studia la non linearità in un caso semplice riprendendo la prima lezione dell'equazione del trasporto.

**Osservazione.** La convergenza uniforme significa

$$\max_{x \in D} |\varphi_n - \varphi| \rightarrow 0$$

e così per tutte le derivate. Inoltre, significa che esiste un insieme compatto  $K \subset \Omega$  che contenga il supporto di ogni  $\varphi_n$  e di  $\varphi$ .

**Definizione.** Lo spazio delle distribuzioni è  $\mathcal{D}'$ .

**Definizione.** Due distribuzioni sono uguali quando la loro azione su ogni funzione di prova è la stessa:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty, \langle F | \varphi \rangle = \langle G | \varphi \rangle \implies F = G$$

La generalizzazione a più dimensioni è una complicazione tecnica, ma non concettuale; quantitativa, non qualitativa.

La proprietà di continuità è importante per legare due classi di distribuzioni. Un esempio di distribuzione è la delta di Dirac. Si studia come associare un funzionale ad ogni funzione: l'integrale di una funzione integrabile con una qualsiasi funzione di prova definisce una distribuzione.

### 5.1 Distribuzioni regolari

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f \in L^1_{\text{loc}}$  cioè  $L^1$  su ogni insieme compatto. Il funzionale

$$F : C_c^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle F | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \varphi \, dx$$

è una distribuzione. Il fatto che sia un funzionale è chiaro per l'operazione di integrazione definita. La linearità deriva dall'operatore integrale. Rimane da verificare la continuità cioè

$$\left| \int_K f \cdot (\varphi - \varphi_n) \, dx \right| \rightarrow 0$$

dove  $K$  è un insieme compatto che contiene tutti i supporti delle  $\varphi_n$ . Infatti

$$\left| \int_K f \cdot (\varphi - \varphi_n) \, dx \right| \leq \int_K |f \cdot (\varphi - \varphi_n)| \, dx \leq \int_K |f| |\varphi - \varphi_n| \, dx \leq \max_{x \in K} |\varphi - \varphi_n| \int_K |f| \, dx$$

Esso tende a zero perché  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  e l'integrale rimane finito in quanto  $f \in L^1_{\text{loc}}$ .

**Esempio.** Alcuni esempi sono

$$e^{-x^2}, \quad 1, \quad \text{sgn}(x)$$

### 5.2 Distribuzioni singolari

Non tutte le distribuzioni sono regolari. Un esempio è la delta di Dirac:

$$\langle \delta(x - x_0) | \varphi(x) \rangle \equiv \varphi(x_0)$$

Esso è un funzionale lineare. Vale la continuità

$$\langle \delta(x - x_0) | \varphi_n(x) - \varphi(x) \rangle = \varphi_n(x_0) - \varphi(x_0) \leq \max_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$$

Essa è una distribuzione, ma non è regolare perché non esiste una funzione per cui il proprio integrale contro una qualunque funzione di prova restituisce tale funzione di prova valutata in un certo punto.

Esiste anche la notazione

$$\langle \delta(x - x_0) | \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0)$$

Essa è mnemonica perché molte operazioni che si possono fare sulle distribuzioni sono traslazioni di quelle fatte sulle funzioni.

**Osservazione.** La somma di due distribuzioni è

$$\langle F + G | \varphi \rangle \equiv \langle F | \varphi \rangle + \langle G | \varphi \rangle$$

Ma non esiste la nozione di prodotto.

### 5.3 Derivata

Si definisce una nozione in maniera naturale per una distribuzione regolare e poi si estende la definizione a tutti i funzionali verificandone la buona positura.

**Definizione.** La derivata  $F'$  di una distribuzione  $F$  è definita come

$$\langle F' | \varphi \rangle \equiv - \langle F | \varphi' \rangle$$

Essa segue da

$$\langle F' | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f' \varphi \, dx = \cancel{f \varphi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' \, dx = - \langle F | \varphi' \rangle$$

qualora  $f'$  esista.

**Esempio.** Si calcola la derivata di

$$\langle A | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi \, dx$$

Si ha

$$\begin{aligned} \langle A' | \varphi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi' \, dx = - \int_0^{\infty} x \varphi' \, dx + \int_{-\infty}^0 x \varphi' \, dx \\ &= - \cancel{x \varphi} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi \, dx + \cancel{x \varphi} \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \varphi \, dx + \int_{-\infty}^0 (-\varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \varphi \, dx \end{aligned}$$

Pertanto

$$A' = \text{sgn}(x)$$

dove, con abuso di notazione,  $A'$  rappresenta la distribuzione regolare associata alla funzione  $\text{sgn}(x)$  dell'insieme  $L^1_{\text{loc}}$ .

Si noti che, sempre con abuso di notazione, si utilizza lo stesso simbolo per indicare una funzione e indicare la sua distribuzione associata.

**Catena di distribuzioni.** Poiché l'operazione di derivata è chiusa nello spazio delle distribuzioni, si studia una catena di distribuzioni interessante. Si consideri la distribuzione regolare

$$\langle p | \varphi \rangle \equiv \int_0^{\infty} x \varphi \, dx$$

La sua derivata è

$$\langle p' | \varphi \rangle = - \langle p | \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} x \varphi' \, dx = - \cancel{x \varphi} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi \, dx$$

dove si ha la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Pertanto, in senso distribuzionale si ha

$$p'(x) = H(x)$$

La derivata di tale funzione è

$$\langle H' | \varphi \rangle = - \langle H | \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) \, dx = \varphi(0) = \langle \delta(x) | \varphi(x) \rangle \implies H'(x) = \delta(x)$$

Si ottiene una funzione non più regolare. Come nel caso delle funzioni, la derivazione è un'operazione che impoverisce la regolarità di una funzione. Si passa da un funzionale regolare

continuo associato ad una funzione  $L_{\text{loc}}^1$  continua, si arriva ad un funzionale regolare associato ad una funzione  $L_{\text{loc}}^1$  discontinua, e poi si esce dai funzionali regolari. Continuando si ha

$$\langle \delta'(x) | \varphi \rangle = - \langle \delta(x) | \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

così come

$$\langle \delta''(x) | \varphi \rangle = - \langle \delta'(x) | \varphi' \rangle = \varphi''(0)$$

dunque si arriva a

$$\langle \delta^{(n)}(x) | \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

Si studia solamente questa distribuzione. Un'altra catena interessante, che però non si tratta, è il valor principale.

**Osservazione.** Si può costruire la funzione segno tramite una combinazione lineare di funzioni di Heaviside. Dunque, la sua derivata distribuzionale è una combinazione lineare di derivate delle funzioni di Heaviside, ovvero di delta di Dirac.

## 5.4 Supporto

**Definizione.** Sia  $E = \bigcup_i E_i$ , con  $E_i \subset \mathbb{R}$ , l'unione di tutti gli insiemi  $E_i$  dove, in ognuno, una distribuzione  $F$  si annulla cioè

$$\langle F | \varphi \rangle = 0$$

per ogni  $\varphi \in C_c^\infty$  il cui supporto sia contenuto in  $E_i$ . Il supporto di  $F$  è il complementare di  $E$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esempio.** Il supporto di  $\delta(x)$  è un punto:  $x = 0$ .

**Esempio.** Per una distribuzione regolare, il proprio supporto è quello di  $f \in L^1$ , qualora esista finito.

## 5.5 Convergenza debole

Si vuole approssimare una distribuzione singolare con distribuzioni regolari. Lo scopo ultimo è arrivare al nucleo, propagatore del calore e dar senso al limite  $t \rightarrow 0^+$ .

**Definizione.** Si consideri una successione  $\{F_n\}_n$  di distribuzioni. Se

$$\forall \varphi \in C_c^\infty, \quad \langle F_n | \varphi \rangle \rightarrow \langle F | \varphi \rangle$$

allora

$$F_n \rightarrow F$$

debolmente.

**Esempio.** Il propagatore del calore non ha supporto compatto, ma quanto si fa vale anche per le funzioni di prova a decrescenza rapida. Per questo si costruisce un esempio ad hoc in cui il supporto tende a zero, ma l'area si mantiene. Si consideri la famiglia di distribuzioni

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$$

Si nota che si può esprimere come combinazione lineare di funzioni di Heaviside. Tuttavia, si segue un'altra strada, sebbene si sappia cosa aspettare grazie alla considerazione precedente.

Dunque

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]} \varphi \, dx &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) \, dx = \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \quad \Phi' = \varphi \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(0)}{\varepsilon} - \frac{\Phi(-\varepsilon) - \Phi(0)}{\varepsilon} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(0)}{\varepsilon} + \frac{\Phi(\tilde{\varepsilon}) - \Phi(0)}{\tilde{\varepsilon}} \right], \quad \tilde{\varepsilon} = -\varepsilon \\
 &\rightarrow \Phi'(0) = \varphi(0) = \langle \delta(x) | \varphi \rangle, \quad \varepsilon \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Pertanto, si ha convergenza debole

$$\delta_{\varepsilon} \rightarrow \delta$$

## 5.6 Propagatore del calore

Il propagatore del calore non ha supporto compatto, ma è una funzione a decrescenza rapida. Esso non si può trattare come una funzione di prova. Tuttavia, esso è localmente integrabile  $L^1_{\text{loc}}$  e vi si può associare una distribuzione. Si consideri il problema del calore con funzioni di prova come dati iniziali

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \in C_c^\infty \end{cases}$$

Il limite della soluzione intesa come famiglia di distribuzioni regolari

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \varphi(y) \, dy = \langle \Gamma_D(x-y, t) | \varphi(y) \rangle$$

risulta essere

$$u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \varphi(y) \, dy = \varphi(x) = \langle \delta(x-y) | \varphi(y) \rangle$$

dove  $x$  è fissato e  $t$  è il parametro della famiglia. Dunque, in senso distribuzionale si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_D(x-y, t) = \delta(x-y)$$

Con abuso di notazione si utilizza lo stesso simbolo per il funzionale associato ad una funzione e la funzione stessa.

Pertanto, le singolarità vengono interpretate in senso distribuzionale, in senso debole.

In qualche modo,  $\Gamma_D$  è una soluzione dell'equazione del calore. Si vuole dar senso a

$$\begin{cases} (\Gamma_D)_t = D(\Gamma_D)_{xx} \\ \Gamma_D(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

La soluzione è una distribuzione. Sebbene  $\Gamma_D$  sia anche soluzione forte dell'equazione, il dato iniziale è una distribuzione.

Si estende la nozione di soluzione di un'equazione differenziale alle distribuzioni: si hanno le soluzioni deboli. Si noti che la qualità di essere debole non è legata al “quasi ovunque”: l'unico senso funzionale della delta di Dirac è zero quasi ovunque. Se il dato iniziale è nullo, allora la soluzione è nulla ad ogni tempo per unicità delle soluzioni forti. Dunque, utilizzare il “quasi ovunque” non funziona. Non si può sperare di ereditare alcuna buona proprietà vista per le soluzioni forti. In generale, le soluzioni deboli non sono uniche. Si vede un caso concreto quando si trattano le equazioni non lineari. Per ripristinare l'unicità bisogna fornire informazioni in più all'equazione: non basta il problema di Cauchy.

**Distribuzioni in più dimensioni.** Quanto fatto finora si può estendere ad  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Si può definire il gradiente come

$$\langle \nabla F | \varphi \rangle = - \langle F | \nabla \varphi \rangle$$

mentre il laplaciano come

$$\langle \nabla^2 F | \varphi \rangle = \langle F | \nabla^2 \varphi \rangle$$

**Distribuzioni temperate.** Per le distribuzioni temperate, le funzioni di prova sono funzioni lisce a decrescenza rapida il cui insieme è  $\mathcal{S}$ . L'insieme di queste distribuzioni è  $\mathcal{S}'$  e sono funzionali lineari continui su  $\mathcal{S}$ .

## 5.7 Soluzione debole

Si consideri un operatore lineare differenziale

$$\hat{O} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \hat{O} = \alpha(x) \partial_x^n$$

Il suo aggiunto formale è

$$\hat{O}^\dagger = (-1)^n \partial_x^n \circ \alpha(x)$$

Una soluzione debole dell'equazione

$$\hat{O}f = 0$$

è una distribuzione  $F$  tale che

$$\langle F | \hat{O}^\dagger \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

**Equazione del calore.** Si consideri

$$\begin{cases} (\Gamma_D)_t - D(\Gamma_D)_{xx} = 0 \\ \Gamma_D(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

La sua soluzione debole è

$$0 = \langle (\Gamma_D)_t - D(\Gamma_D)_{xx} | \varphi \rangle \equiv \langle \Gamma_D | -\varphi_t - D\varphi_{xx} \rangle$$

cioè  $\Gamma_D$  è nulla su ogni funzionale ottenuto da  $-\varphi_t - D\varphi_{xx}$ .

**Equazione di Poisson.** La soluzione di

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \varphi(x) \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

risulta essere

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_D G(x-y) \varphi(y) \, d^N y = \int_D G(x-y) \nabla^2 u(y) \, d^N y \\ &= \langle G(x-y) | \nabla^2 u(y) \rangle = \langle \nabla^2 G(x-y) | u(y) \rangle = u(x) \\ &= \langle \delta(x-y) | u(y) \rangle \implies \nabla^2 G(x) = \delta(x) \end{aligned}$$

l'ultimo integrale nella prima riga si interpreta come una distribuzione regolare associata a  $G$ . Il primo integrale della prima riga è una scrittura lecita solo nel particolare caso in cui  $\varphi$  sia a decrescenza rapida. In questo caso, comunque, interessa solo un dominio finito di  $\mathbb{R}^N$ .

Ora si capisce il motivo dei particolari coefficienti dati alla funzione di Green: in questo modo il laplaciano è proporzionale alla delta con coefficiente unitario.

Il supporto della delta è la singolarità della funzione di Green, l'unico punto ragionevole. Similmente, nell'equazione del calore, la singolarità nel tempo del propagatore del calore finisce nel supporto della delta.

**Equazione del trasporto e caratteristiche.** La soluzione di

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) = |x| \end{cases}$$

in senso debole è

$$u(x, t) = |x - ct|$$

Infatti, in senso distribuzionale

$$\partial_x |x - ct| = \text{sgn}(x - ct), \quad \partial_t |x - ct| = \text{sgn}(x - ct) \cdot (-c)$$

da cui si ha

$$(\partial_t + c \partial_x) |x - ct| = 0$$

Contrariamente a quanto avviene per l'equazione del calore e per l'equazione di Laplace, le caratteristiche trasportano le singolarità  $C^1$ . Questo vale anche per l'equazione delle onde.

Le equazioni iperboliche trasportano le singolarità  $C^1$  lungo le caratteristiche. L'equazione del calore le vanifica al tempo  $t = 0^+$ . In quanto le sue caratteristiche sono orizzontali, in qualche senso la singolarità è trasportata lungo la caratteristica: rimane al tempo iniziale. Similmente per le equazioni ellittiche: le singolarità sul bordo sono vanificate appena si entra nel dominio.

**Equazione delle onde.** Oltre alle caratteristiche, si può usare un propagatore per l'equazione delle onde detto funzione di Riemann

$$\begin{cases} S_{tt} - c^2 S_{xx} = 0 \\ S(x, 0) = 0 \\ S_t(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

Essa è una distribuzione, soluzione debole dei dati iniziali precedenti. Definendo

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} S(x - y, t) \psi(y) dy$$

allora  $u$  soddisfa

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Si risolve solo il problema per un dato iniziale nullo ed una velocità iniziale generica. Si studia la struttura di  $S$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy = \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-ct, x+ct]} \psi(y) dy \\ &= \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} [H(y - (x - ct)) - H(y - (x + ct))] \text{sgn}(t) \psi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2c} H(c^2 t^2 - (y - x)^2) \text{sgn}(t) \psi(y) dy \equiv \int_{\mathbb{R}} S(y - x, t) \psi(y) dy \end{aligned}$$

Pertanto

$$S(x, t) = \frac{1}{2c} H(c^2 t^2 - x^2) \text{sgn}(t)$$

Si chiama propagatore perché ha lo stesso ruolo del propagatore del calore: convoluto con il dato iniziale si ottiene la soluzione.



**Osservazione.** La funzione  $\text{sgn}(t)$  serve per tenere traccia del fatto

$$t > 0 \implies x + ct > x - ct \qquad t < 0 \implies x + ct < x - ct$$

Inoltre, vale

$$\chi_{[a,b]} = H(x-a) - H(x-b) = H(-(x-a)(x-b))$$

**Esempio.** Si trova la funzione di Green del laplaciano con singolarità in  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si cerca una distribuzione tale per cui

$$d_x^2 G(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

Notando

$$\frac{1}{2} d_x |x-x_0| = \frac{1}{2} \text{sgn}(x-x_0) = H(x-x_0) - \frac{1}{2}$$

e ricordando

$$H'(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

si ha

$$d_x^2 \left( \frac{1}{2} |x-x_0| + mx + q \right) = \delta(x-x_0)$$

Pertanto

$$G(x-x_0) = \frac{1}{2} |x-x_0| + mx + q$$

I due parametri  $m$  e  $q$  si fissano con i dati al bordo. Per esempio, si cerca una funzione di Green in un intervallo  $[a, b]$  che sia nulla agli estremi. Dunque

$$\begin{cases} G(a-x_0) = \frac{1}{2} |a-x_0| + ma + q = 0 \\ G(b-x_0) = \frac{1}{2} |b-x_0| + mb + q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m = \frac{|a-x_0| - |b-x_0|}{2(b-a)} \\ q = \frac{b|a-x_0| - a|b-x_0|}{2(b-a)} \end{cases}$$

L'espressione

$$G_\infty(|x-x_0|) = \frac{1}{2} |x-x_0|$$

è proprio quanto visto alla fine della lezione precedente.

Questo metodo si può usare ogni qualvolta compare una funzione di Green e si ottiene quanto si è già studiato.

## Lezione 19

### 5.8 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Nelle ODE lineari a coefficienti costanti si cerca una soluzione esponenziale così che la ODE diventi un'equazione algebrica. Un meccanismo simile per le PDE è ottenuto con la trasformata di Fourier per cui si ricavano delle ODE associate. Essa semplifica i calcoli quando si trattano soluzioni deboli.

La trasformata di Fourier non è un'operazione interna alle funzioni di prova a supporto compatto. Pertanto, la trasformata di Fourier per funzioni  $\varphi \in \mathcal{S}$  è

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \varphi(x) dx$$

e la sua inversa è

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{\varphi}(k) dk$$

**Definizione.** La trasformata di Fourier di una distribuzione temperata  $F$  è

$$\langle \hat{F} | \varphi \rangle = \langle F | \hat{\varphi} \rangle$$

**Esempio.** La trasformata di Fourier è regolarizzante: può mappare una distribuzione singolare in una regolare. La trasformata di Fourier della funzione delta supportata in  $x_0$  è

$$\langle \hat{\delta}_{x_0} | \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0} | \hat{\varphi} \rangle = \left\langle \delta_{x_0} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iks} \varphi(s) ds \right. \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix_0 s} \varphi(s) ds$$

Dalla definizione di distribuzione regolare segue

$$\hat{\delta}_{x_0}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 s}$$

e inoltre

$$\hat{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

**Osservazione.** Vale

$$\hat{f}'(k) = ik \hat{f}(k)$$

**Calcolo di soluzioni deboli – calore.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\Gamma_D)_t - D(\Gamma_D)_{xx} = 0 \\ \Gamma_D(x, 0) = \delta(x) \end{cases} \implies \begin{cases} (\hat{\Gamma}_D)_t + Dk^2 \hat{\Gamma}_D = 0 \\ \hat{\Gamma}_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

La cui soluzione è

$$\hat{\Gamma}_D(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Dk^2 t}$$

da cui

$$\Gamma_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-Dk^2 t} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

**Osservazione.** Grazie alla regolarizzazione della trasformata di Fourier, non solo si passa da cercare soluzioni deboli di una PDE a cercare soluzioni deboli di una ODE, ma altresì a cercare soluzioni forti di una ODE.

## 6 Equazione del trasporto non lineare

Molte delle dimostrazioni viste (unicità e stabilità) non valgono più per il caso non lineare. Si studia una sorgente non lineare e poi una velocità di trasporto anche solo lineare in  $u$ .

### 6.1 Sorgente non lineare

Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione del trasporto con sorgente non lineare

$$\begin{cases} u_t + cu_x = \lambda u^n & u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Le caratteristiche sono le stesse del problema senza sorgente. Non compare un problema di intersezione. Inoltre, in questo caso, tali rette di pendenza costante non mantengono costante  $u$ . Si riscrive l'equazione come

$$\frac{u_t}{u^n} + c \frac{u_x}{u^n} = \lambda$$

Essa viene linearizzata

$$\mu = \frac{1}{1-n} u^{1-n} \implies \mu_t + c\mu_x = \lambda$$

cioè un'equazione del trasporto con sorgente. In questo caso si procede in maniera più semplice

$$\mu = \alpha + \frac{\lambda}{c}x, \quad \mu_t = \alpha_t, \quad \mu_x = \alpha_x + \frac{\lambda}{c}$$

così da ottenere

$$\alpha_t + c\alpha_x = 0$$

con

$$\alpha = \mu - \frac{\lambda}{c}x = \frac{u^{1-n}}{1-n} - \frac{\lambda}{c}x, \quad \alpha(x, 0) = \frac{\varphi(x)^{1-n}}{1-n} - \frac{\lambda}{c}x = a(x)$$

Si introducono delle singolarità nel dato iniziale qualora  $\varphi(x) < 0$  e  $n > 1$ . La soluzione è

$$\alpha(x, t) = a(x - ct) = \frac{\varphi(x - ct)^{1-n}}{1-n} - \frac{\lambda}{c}(x - ct) = \frac{u^{1-n}}{1-n} - \frac{\lambda}{c}x$$

Pertanto

$$u(x, t) = [\varphi(x - ct)^{1-n} + \lambda(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}$$

Si nota che senza sorgente,  $\lambda = 0$ , si ottiene nuovamente l'equazione del fronte viaggiante a velocità costante. Non si introducono fenomeni nuovi.

## 6.2 Velocità dipendente dalla soluzione

L'equazione del trasporto con velocità dipendente in  $u$  è conosciuta come equazione di (tipo) Burgers-Hopf

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

In generale, l'equazione di Burgers ha anche un laplaciano che, con il segno giusto, regolarizza. Si studia il caso più semplice, cioè l'equazione propriamente detta di Burgers-Hopf (in quanto  $c$  dipende linearmente da  $u$ ) con laplaciano nullo

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Questa equazione è il prototipo di un importante fenomeno delle equazioni iperboliche: la catastrofe. Il matematico sovietico-russo Vladimir Arnold chiama tale fenomeno “perestroika” cioè cambiamento.

**Caratteristiche.** Non si hanno sorgenti. Le caratteristiche dipendono da  $u$  stessa. Non si può pensare all'equazione delle caratteristiche come un'equazione differenziale complicata a piacere che lega lo spazio ed il tempo. Non si è più nel caso in cui la velocità dipende dal punto dello spazio-tempo e quindi si ha un'equazione isolata. La pendenza delle caratteristiche dipende dal campo che, a sua volta, dipende da  $x$  e  $t$ .

Dunque, si cercano delle curve dello spazio-tempo lungo le quali una quantità è trasportata. Si studia come evolve la soluzione lungo le caratteristiche che dipendono dalla soluzione stessa. Il problema delle caratteristiche diventa una coppia di equazioni differenziali ordinarie. Nei casi precedenti, si hanno equazioni disaccoppiate: prima si calcolano le caratteristiche, poi si studia come la soluzione varia lungo di esse.

Si cerca di scrivere l'equazione del trasporto come una derivata totale

$$u = u(x(s), t(s)) \implies d_s u = u_x d_s x + u_t d_s t = 0$$

Confrontando termine a termine si ha

$$\begin{cases} d_s x(s) = u(x(s), t(s)) \\ d_s t(s) = 1 \\ d_s u(x(s), t(s)) = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione è la più semplice: la soluzione  $u$  non cambia sulle caratteristiche. I dati iniziali sono

$$x(0) = x_0, \quad t(0) = 0, \quad u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = \varphi(x_0)$$

L'equazione è resa trattabile dall'assenza di una sorgente. Il valore costante assunto sulle caratteristiche cambia in base ad ogni caratteristica in quanto ognuna è identificata dal particolare  $x_0$ . Dunque

$$\begin{cases} d_s t(s) = 1 \\ t(0) = 0 \end{cases} \implies t = s$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} d_t x(t) = u(x(t), t) & x(0) = x_0 \\ d_t u(x(t), t) = 0 & u(x_0, 0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

Segue

$$u(x(t), t) = \text{cost}, \quad u(x_0, 0) = \varphi(x_0) \implies u(x(t), t) = \varphi(x_0)$$

cioè la soluzione è costante lungo le caratteristiche. Si integra la prima ODE

$$\begin{cases} x(t) = u(x(t), t)t + F(u(x(t), t)) \\ x_0 = 0 + F(u(x_0, 0)) = F(\varphi(x_0)) \end{cases}$$

dove  $F$  è una funzione arbitraria (cioè la costante di integrazione) che dipende da una costante come, ad esempio,  $u(x(t), t)$ . Le caratteristiche sono delle rette. Infatti, per  $x_0$  fissato,  $u(x(t), t)$  è una costante, quindi  $x$  è proporzionale a  $t$ . La costante  $F$  è fissata con il dato iniziale.

Dato che la scrittura vale per ogni  $x_0$  allora si ha

$$\begin{cases} x - tu(x, t) = F(u(x, t)) \\ x_0 = F(\varphi(x_0)) \end{cases}$$

cioè la soluzione generica dell'equazione di Burgers-Hopf. Dalla seconda equazione, si può affermare che  $F$  è, localmente, la funzione inversa del dato iniziale  $\varphi$ . Se il dato iniziale non è invertibile, allora lo si divide in insiemi aperti di invertibilità e si scrive il sistema sopra per ogni insieme aperto di invertibilità. Pertanto, applicando la funzione inversa di  $F$  alla prima equazione si ha

$$\varphi(x - ut) = u$$

Essa è identica al caso lineare, ma si definisce  $u$  implicitamente. Tuttavia, questa scrittura va interpretata perché introduce problematiche non banali.

**Esempio.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

La sua soluzione è

$$u(x, t) = e^{-(x-ut)^2}$$

Si osserva il comportamento, in particolare la dipendenza della velocità da  $u$ : quando  $u$  è piccola, la soluzione non evolve, almeno per tempi piccoli, e rimane la parte del dato iniziale piccola in norma  $L^\infty$ , cioè le code. Il dato iniziale non è a supporto compatto. Il luogo dove la

soluzione è sostanzialmente diversa da zero, cioè lontano dalle code, rimane fisso nello spazio. La velocità caratteristica è tanto maggiore quando lo è  $u$  (in modulo). Per grandi valori, il dato iniziale si muove velocemente. Osservando il grafico [immagine], esiste un tempo  $t_c$  oltre il quale la soluzione non è più una funzione (in senso proprio). Esistono dati iniziali per cui la soluzione non esiste oltre un certo tempo. Questo è il fenomeno della catastrofe gradiente: la soluzione rimane finita per ogni tempo, ma la derivata diverge. Sebbene si sia detto che le singolarità vengono trasportate localmente, qua il problema è di tipo globale: la soluzione smette di essere una funzione. Risulta vero che, localmente, ovunque è ancora soluzione, ma non è, globalmente, soluzione a partire dal dato iniziale. Si hanno nuovi fenomeni. La soluzione esiste per tempi finiti fino al tempo di catastrofe  $t_c$ .

La catastrofe è caratterizzata da tre grandezze: il tempo, il luogo e il valore del campo di catastrofe. Queste sono singolarità che vivono all'interno delle non linearità del problema del trasporto. Con una funzione strettamente crescente, valori maggiori di  $u$  sono a destra e viaggiano più rapidamente a destra, dunque non ci si aspetta una catastrofe. Viceversa per una funzione decrescente: a sinistra si hanno valori più alti che a destra e si ha una catastrofe. Pertanto, la catastrofe è legata al dato iniziale crescente o decrescente: ci si aspetta catastrofi nei settori decrescenti.

**Catastrofe dalla prospettiva delle caratteristiche.** Le caratteristiche sono rette la cui pendenza è funzione di  $u$ . Ricordando che nel piano delle caratteristiche la pendenza è  $\frac{1}{c}$  in quanto il tempo  $t$  è l'ordinata, nell'esempio precedente, sulle code si ha pendenza verticale, al massimo di  $u$  si ha un minimo. Si ha un cono di catastrofe: si ha un punto da cui parte un cono in cui le caratteristiche si intersecano. Al di fuori del cono, vale la soluzione forte dello spazio-tempo fino ad un certo tempo  $t_c$ . Dopo tale punto, si ha luogo dello spazio dove non si può definire globalmente la soluzione.

Si assume che la derivata infinita e il cono siano lo stesso fenomeno, cosa che non è banale. Si hanno due definizioni diverse di catastrofe. Si dimostra che i due tempi di catastrofe sono lo stesso tempo. Una derivata verticale equivale al primo punto in cui le caratteristiche si intersecano. Una funzione a più valori significa che si è all'interno del cono di catastrofe.

## Lezione 20

Usando una velocità caratteristica generica  $c(u)$  si ottiene un risultato formalmente identico

$$u = \varphi(x - c(u)t)$$

Le rette delle caratteristiche sono infinitamente vicine con pendenza differente che si incrociano in un punto finito (non zero) del piano delle caratteristiche. Si ha un fenomeno di doppia scala: il punto di intersezione delle due rette con l'asse  $x$  dipende dalla pendenza delle due rette e quindi esse non si intersecano sull'asse  $x$  (cioè  $t = 0$ ), ma ad un tempo finito.

### 6.3 Tempo di catastrofe

Si calcola il tempo di catastrofe e si dimostra che quello calcolato come primo tempo in cui si ha una derivata verticale e quello definito come tempo in cui si incontrano due caratteristiche sono lo stesso tempo.

Si consideri

$$\mathcal{F}(x, t, u) = x - ut - F(u)$$

la soluzione dell'equazione di Burgers-Hopf è

$$\mathcal{F}(x, t, u) = 0$$

La derivata  $u_x$  della funzione implicita è

$$u_x = -\frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{F}_u}\Big|_{\mathcal{F}=0} = \frac{1}{t + F'(u)}$$

Per ottenere il tempo di catastrofe bisogna avere  $u_x \rightarrow \infty$  cioè

$$\mathcal{F}_u = 0 \implies t = -F'(u)$$

La curva di catastrofe è la curva parametrica nel piano delle caratteristiche data da

$$\begin{cases} x = ut + F(u) = F(u) - uF'(u) \\ t = -F'(u) \end{cases}$$

Essa caratterizza tutte le derivate verticali, ma si vuole la prima (in senso temporale) derivata verticale, quella con tempo minimo cioè si cerca, appunto, il minimo della curva parametrica (ogni punto della curva indica la posizione ed il tempo per cui si ha una derivata verticale, ad un tempo fissato  $t > t_c$  corrispondono almeno due punti cioè si hanno due punti della soluzione a tangente verticale).

Il minimo della curva di catastrofe si ha per

$$d_u t = 0, \quad d_u^2 t > 0$$

cioè

$$F_{uu} = 0, \quad F_{uuu} < 0$$

Dunque, le equazioni da considerare sono

$$\begin{cases} x_c = u_c t_c + F(u_c) \\ t_c = -F_u(u_c) \\ F_{uu}(u_c) = 0 \\ F_{uuu}(u_c) < 0 \end{cases}$$

Questo sistema caratterizza una catastrofe generica. Esso è un sistema triangolare, il verso di soluzione è verso l'alto: campo, tempo e poi spazio di catastrofe. Dall'ultima equazione si nota che il valore di catastrofe della soluzione è dato dal flesso della funzione inversa del dato iniziale che corrisponde ad un flesso del dato iniziale. Dunque, un modo per capire se il dato iniziale sviluppa una catastrofe è osservare la presenza di settori monotoni decrescenti e vedere se sono presenti dei flessi.

**Esempio.** Si trova il tempo di catastrofe per

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

La sua soluzione è

$$u = e^{-(x-ut)^2}$$

Si ha

$$x - ut = \pm \sqrt{-\ln u} \implies F(u) = \pm \sqrt{-\ln u}$$

Da cui

$$F_u = \mp \frac{1}{2u\sqrt{-\ln u}}, \quad F_{uu} = \mp \frac{1 + 2 \ln u}{4u^2(-\ln u)^{\frac{3}{2}}}$$

Si risolve il sistema per il segno positivo (cioè il ramo decrescente)

$$\begin{cases} F_{uu}(u_c) = 0 \implies u_c = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ t_c = -F_u(u_c) = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \\ x_c = u_c t_c + F(u_c) = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Inoltre è verificata la condizione

$$F_{uuu} = -\sqrt{2}e^{\frac{3}{2}} < 0$$

**Osservazione.** Si nota che se il dato iniziale  $\varphi(x)$  è limitato, allora per  $u$  i punti estremi (massimo e minimo) rimangono gli stessi ad ogni tempo.

**Caratteristiche.** Si considerino due caratteristiche arbitrariamente vicine. In quanto la pendenza  $u$  varia con continuità, ci si aspetta che le prime caratteristiche che si intersecano sono due caratteristiche infinitamente vicine: tra di esse varia poco il valore di  $u$  trasportato. Dunque

$$\begin{cases} x - ut = F(u) \\ x - (u + \delta u)t = F(u + \delta u) \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione alla seconda si ha

$$-t\delta u = F(u + \delta u) - F(u) \implies \delta u(t + F'(u)) = o(\delta u)$$

In ordine  $\delta u$  si ha

$$\delta u(t + F'(u)) = 0$$

cioè la seconda equazione del sistema, quella per il tempo di catastrofe. Da essa si ricava  $x$  e si ottiene esattamente la stessa curva di catastrofe trovata precedentemente. Pertanto, il tempo di catastrofe come primo tempo di intersezione di due caratteristiche è lo stesso tempo di catastrofe ottenuto come primo istante in cui la derivata di  $u$  diventa verticale.

Oltre il tempo di catastrofe, non si può caratterizzare la soluzione.

## 6.4 Soluzione dopo la catastrofe

Si possono proseguire le soluzioni, ma bisogna utilizzare le soluzioni deboli. Per caratterizzare le soluzioni deboli bisogna fornire le condizioni di Rankine-Hugoniot che non solo caratterizzano l'unicità, ma sono fondamentali alla costruzione della soluzione debole.

L'unicità è un problema delicato, pertanto si inizia osservando l'esistenza. Si studiano le condizioni da imporre affinché esista una soluzione. Tali condizioni nascono in contesti fisici, però si possono matematizzare. Esse sono legate alla scelta di quali proprietà della soluzione forte si vogliono mantenere nella soluzione debole. Ci sono scelte più ragionevoli di altre: si abbandona la continuità. La soluzione è una distribuzione regolare legata ad una funzione discontinua.

Per l'equazione scritta come

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

si ottiene una legge di conservazione. La densità conservata è  $u$  e la corrente conservata è  $\frac{1}{2}u^2$ . Si vuole preservare la densità conservata e, in particolare, quando è definita, si vuole preservare la quantità conservata associata, cioè l'integrale della densità su tutto l'asse reale. Questa è una scelta: tale equazione non ammette una sola densità conservata, ma ogni funzione di  $u$  è una densità conservata. Tra le infinite densità conservate si sceglie  $u$ . In ambito modellistico, tale scelta può essere data dal fatto che, dopo la catastrofe, solamente alcune quantità sono conservate, non tutte.

Si cercano soluzioni deboli

$$S = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u\varphi_t + \frac{1}{2}u^2\varphi_x \, dx \, dt = 0$$

In quegli intervalli in cui la soluzione è una funzione, nella soluzione debole si vuole preservare la soluzione forte. Si vuole costruire una soluzione debole come una distribuzione regolare che coincide con la soluzione forte dove questa ha senso. Dove questo non avviene, per ogni punto bisogna considerare un ramo della soluzione forte e inevitabilmente introdurre una discontinuità di salto. L'arbitrarietà consiste nella posizione della discontinuità. In quanto si vuole conservare l'integrale di  $u$ , cioè l'area, allora le due zone comprese tra il salto e il grafico della soluzione implicita devono avere stessa area [immagine]. Si studia se tale oggetto è una soluzione debole.

Dalla relazione precedente si ottiene la velocità con cui si muove la discontinuità.

Si considerino due soluzioni forti, una definita nella regione  $V_-$  del piano delle caratteristiche e l'altra definita nella regione  $V_+$ . Le due regioni sono separate dalla curva  $\gamma_s : x = s(t)$ . Sia  $u$  una soluzione forte in  $V_+$  e  $V_-$  separatamente con discontinuità lungo  $\gamma_s$ . Tale curva non è una caratteristica.

Dunque

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{s(t)} u \varphi_t + \frac{1}{2} u^2 \varphi_x \, dx \, dt + \int_0^\infty \int_{s(t)}^\infty u \varphi_t + \frac{1}{2} u^2 \varphi_x \, dx \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{s(t)} (u \varphi)_t + \frac{1}{2} (u^2 \varphi)_x \, dx \, dt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{s(t)} \cancel{u_t \varphi + \frac{1}{2} (u^2)_x \varphi} \, dx \, dt \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{s(t)}^\infty (u \varphi)_t + \frac{1}{2} (u^2 \varphi)_x \, dx \, dt - \int_0^\infty \int_{s(t)}^\infty \cancel{u_t \varphi + \frac{1}{2} (u^2)_x \varphi} \, dx \, dt \end{aligned}$$

I due termini svaniscono perché  $u$  è soluzione forte in  $V_+$  e  $V_-$ . Nei termini rimasti si può utilizzare il teorema della divergenza. Infatti, l'integrando è la divergenza del campo vettoriale dato da

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \varphi \\ u \varphi \end{pmatrix}$$

Si definisce  $\hat{n} = (n_x, n_t)^\top$  come il vettore normale a  $\gamma_s$  uscente da  $V_-$ . Dunque

$$\begin{aligned} S &= \int_{s(t)} u_- \varphi n_t + \frac{1}{2} u_-^2 \varphi n_x \, dl + \int_{s(t)} -u_+ \varphi n_t - \frac{1}{2} u_+^2 \varphi n_x \, dl \\ &= - \int_{s(t)} (u_+ - u_-) \varphi n_t + \frac{1}{2} (u_+^2 - u_-^2) \varphi n_x \, dl = 0 \end{aligned}$$

con  $l$  parametro d'arco. In quanto  $\varphi$  è arbitraria, vale

$$(u_+ - u_-) n_t + \frac{1}{2} (u_+^2 - u_-^2) n_x = 0$$

da cui

$$\frac{1}{2} \frac{u_+^2 - u_-^2}{u_+ - u_-} = - \frac{n_t}{n_x} \implies \frac{u_+ + u_-}{2} = - \frac{n_t}{n_x}$$

Il versore tangente a  $\gamma_s$  è

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore normale è

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} \implies \frac{n_t}{n_x} = -\dot{s}$$

Pertanto

$$\dot{s} = \frac{u_+ + u_-}{2}$$

Questa è la velocità dello shock, del salto: lo shock è l'evoluzione della catastrofe. La velocità è data dalle condizioni di Rankine-Hugoniot, essa è la media tra la soluzione  $u_-$  e la soluzione  $u_+$ . La soluzione con la discontinuità è soluzione debole che preserva l'area e, oltre la discontinuità, è soluzione anche in senso forte. In questo modo si possono estendere le soluzioni oltre la catastrofe aumentando lo spazio in cui le si cercano. Si nota che si è perso il legame con le caratteristiche: oltre il tempo di catastrofe, le caratteristiche si intersecano più volte. Le caratteristiche estreme del cono di catastrofe hanno pendenza pari al reciproco di  $u_-$  e  $u_+$ .



**Esempio.** Si consideri il problema con un salto come dato iniziale

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = H(-x) \end{cases}$$

Si trova la sua soluzione debole con il metodo sviluppato. Si ha uno shock compressivo: la funzione con valore 1 è trasportata verso destra con velocità 1, mentre la funzione con valore 0 rimane ferma. Pertanto

$$u_- = 1, \quad u_+ = 0 \implies \dot{s} = \frac{u_+ + u_-}{2} = \frac{1}{2}$$

La soluzione è

$$u(x, t) = H\left(\frac{1}{2}t - x\right)$$

In un senso, si è recuperato il trasporto della discontinuità, ma non si ha trasporto lungo caratteristiche, bensì lungo la curva di shock.

In quanto lo shock è compressivo, le caratteristiche devono intersecarsi.

La condizione di Rankine-Hugoniot salva l'esistenza, ma non l'unicità. Si è detto che i punti di catastrofe compaiono nelle regioni in cui il dato iniziale decresce. Poi si è giunti alla condizione sulla tangente alla curva di shock (la condizione per  $\dot{s}$ ), ma essa è simmetrica. Per un dato iniziale crescente, non si ha una catastrofe e quindi non bisogna regolarizzare il dato. Eppure la condizione è cieca alla monotonia del dato iniziale. Con un esempio, si dimostra che la condizione di Rankine-Hugoniot non definisce soluzioni in maniera unica.

**Teorema.** (Hp) Le soluzioni deboli (Th) non sono uniche.

**Dimostrazione.** Si consideri il controesempio alla unicità

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = H(x) \end{cases}$$

Quando si sono trattate le zone dove avvengono le catastrofi, si sono utilizzate funzioni con un numero sufficiente di derivate: non ci si può appellare a tale ragionamento per questa dimostrazione.

Una soluzione debole è data da

$$H\left(x - \frac{1}{2}t\right)$$

con velocità di shock  $\frac{1}{2}$ . Osservando le caratteristiche [immagine] si ha un cono in cui non ci sono caratteristiche: con la soluzione debole, si stanno ivi costruendo delle caratteristiche che partono da un certo punto dello spazio-tempo senza mai veder  $t = 0$ . Si ha una regione dello spazio-tempo che non si costruisce dal dato iniziale, ma si costruisce in maniera arbitraria, da qualcosa successivo al dato iniziale.

Una seconda soluzione sfrutta la strutture delle caratteristiche forti. Nella regione vuota si copre con una soluzione auto-similare (continua e non derivabile) detta onda di rarefazione

$$u = \frac{x}{t}$$

Bisogna verificare che essa sia soluzione e che le caratteristiche raccordino quelle verticali a sinistra con quelle inclinate a destra

$$d_t x = u = \frac{x}{t} \implies x = At$$

Pertanto, un'altra soluzione debole è

$$u_R = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

Si hanno due punti di discontinuità delle derivate. Per quanto fatto nel caso lineare, ci si aspetta che le discontinuità delle derivate siano trasportate lungo le caratteristiche. I due punti di discontinuità viaggiano sulle caratteristiche estreme.

Dunque, le soluzioni debole non sono uniche.

**Criterio di Lax o criterio di entropia.** Le soluzioni che si vogliono mantenere sono quelle per cui tutto lo spazio-tempo è ricoperto da caratteristiche che partono dal dato iniziale. Vale a dire, soluzioni le cui caratteristiche arrivano sulla curva di shock al posto di partire da essa.

Il criterio di entropia è

$$u_- > \dot{s} > u_+$$

Quando il criterio non vale, si perde l'unicità.

**Osservazione.** Si nota che per l'equazione di Burgers-Hopf studiata, qualunque funzione di  $u$  è, localmente, una densità conservata, in particolare ogni  $u^n$ . Nel caso generico

$$\rho_t(u) + J_x(u) = 0$$

si ottiene

$$\dot{s} = \frac{J(u_+) - J(u_-)}{\rho(u_+) - \rho(u_-)}$$

La relazione risulta ancora simmetrica per  $u^n$ , pertanto si ha ancora bisogno del criterio di entropia.

Qualora non si volesse utilizzare uno shock, si può aggiungere un termine regolarizzante all'equazione di Burgers-Hopf come  $u_{xx}$ . Non si estende lo spazio delle soluzioni, ma si aggiungono termini che regolarizzano l'equazione e questo è qualcosa che deriva dai modelli fisici.