

Theoretical Physics I

13 ottobre 2023

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Problemi della meccanica quantistica con la relatività	4
1.2	Infiniti gradi di libertà	7
1.3	Formalismo covariante	8
1.4	Equazioni di Maxwell	12
2	Equazioni d'onda relativistiche	16
2.1	Equazione di Dirac	18
2.2	Limite non relativistico	20
2.3	Covarianza	25

Lezione 1

lun 02 ott
2023 10:30

1 Introduzione

Il corso di fisica teorica è un corso di introduzione alle teorie quantistiche relativistiche dei campi. La relatività generale è la prima teoria relativistica di una interazione fondamentale, ma non è stata ancora quantizzata. Le altre tre forze fondamentali — elettromagnetica, forte e debole — sono descritte da un'unica teoria relativistica e quantistica. Si vuole capire come quantizzare i campi unendo la relatività, la meccanica quantistica e la teoria dei campi.

Le motivazioni per costruire teorie relativistiche dei campi sono radicate nella storia delle teorie ad inizio XX secolo: dal problema del corpo nero alla relatività speciale ed alla meccanica quantistica. Come scrisse Kuhn, si ebbe un cambiamento di paradigma e le certezze della fisica classica scomparvero: il tempo assoluto ed il determinismo vennero meno. La relatività e la meccanica quantistica non vennero subito accettate. Una prima prova della relatività generale provenne dall'esperimento di Eddington in cui egli osservò la luce provenire da stelle dietro al sole durante un'eclissi. La meccanica quantistica, nata qualche anno dopo, non era relativistica: l'equazione di Schrödinger è la trascrizione operatoriale della formula classica per l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p^\mu \rightarrow \begin{pmatrix} i\hbar \partial_t \\ -i\hbar \nabla \end{pmatrix}$$

Le correzioni finì all'atomo di idrogeno contengono la correzione relativistica che funziona sebbene l'elettrone sia in regime non relativistico: l'energia dell'elettrone è molto più piccola dell'energia a riposo, per questo si può fare lo sviluppo perturbativo. L'ordine di grandezza dell'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno è degli elettronvolt, mentre la massa dell'elettrone è $511 \text{ keV } c^{-2}$.

La meccanica quantistica non relativistica fornisce dei dati in grande accordo con quelli sperimentali, tuttavia si sono fatte delle scelte insolite e ad hoc: l'aggiunta dello spin, l'introduzione del fattore giromagnetico nel termine di spin-orbita, il principio di Pauli. Unificare la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, mantenendo i principi di entrambe, non è possibile: si arriva a varie incongruenze che si vedono in seguito.

Bisogna cambiare ancora il paradigma adottando la seconda quantizzazione. Dirac creò la meccanica quantistica relativistica tramite la sua equazione, ma il tutto funziona per energie minori dell'energia a riposo dell'elettrone.

Tutte queste discussioni provengono sempre dal campo elettromagnetico. La velocità della luce nel vuoto è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Einstein aggiunge al principio di relatività anche la costanza della velocità della luce in ogni sistema di riferimento.

Nel corso si vede una evoluzione della fisica teorica a partire da Dirac passando per le teorie dei campi. Si studia cosa significare utilizzare una teoria quantistica relativistica e come spesso le cose non sono semplici. Uno dei problemi è quello delle divergenze: lo sviluppo perturbativo porta con sé delle divergenze che vanno interpretate. Ironicamente, la meccanica quantistica è nata per risolvere la divergenza UV dello spettro del corpo nero.

L'auto-energia dell'elettrone è infinita a causa del termine r^{-1} del campo elettrico. Porre un raggio finito all'elettrone risolve il problema, ma non ha potere predittivo. Le divergenze sono ricorrenti, ma la rinormalizzazione permette di ridefinire le divergenze inserendole nella relazione tra la carica nuda di una particella — che non corrisponde alla carica misurata — e la carica misurata stessa.

Inizialmente, la presenza di anti-materia fu un problema. Per la relatività, la massa è equivalente all'energia $E = mc^2$: l'una si trasforma nell'altra e viceversa. Può capitare che una radiazione diventi una coppia particella-antiparticella. Tuttavia, la meccanica quantistica non relativistica tratta una sola particella

$$\int d^3x |\psi|^2 = 1$$

La probabilità di trovare (esattamente) una particella in tutto lo spazio è unitaria, quindi la creazione e annichilazione di particelle non sono compatibili con tale teoria.

Dalla meccanica razionale — con le variabili canoniche, il formalismo di Lagrange, le equazioni di Hamilton–Jacobi, le parentesi di Poisson — le variabili canoniche diventano equivalenti operatoriali hermitiani nella meccanica quantistica. La funzione d'onda è interpretata come ampiezza di probabilità. Ora, la qualità di operatore è assunta dalla funzione d'onda che crea e distrugge particelle, ed in un certo senso si riprendono le variabili canoniche della meccanica classica. Le variabili canoniche classiche sono discrete, ma la funzione d'onda è continua: si passa ad infiniti gradi di libertà, il campo.

Si conoscono già vari campi: il campo elettrico, magnetico, la temperatura, la pressione, etc. Essi presentano tutti uno stato fondamentale. Per quantizzare un campo, ci si pone attorno allo stato fondamentale e si osservano le piccole fluttuazioni — un oscillatore armonico quantistico — attorno al minimo.

Uno dei punti fondamentali in fisica teorica è spiegare un fenomeno, ma anche predire. Un modello spiega un fenomeno, una teoria si basa su un principio fondamentale ed è caratterizzata da una predittività. Il modello di Glashow–Weinberg–Salam nacque come modello, ma con la teoria elettrodebole ed il meccanismo di Higgs divenne una teoria, cioè il Modello Standard. Esso possiede un enorme accordo tra teoria ed esperimenti. Ad esempio, il fattore giromagnetico del muone misurato¹ porta ad un momento di dipolo magnetico anomalo pari a

$$a_\mu = \frac{g-2}{2} = 0.001\,165\,920\,59(22)$$

La discrepanza con il valore teorico² è

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$$

Le interazioni elettromagnetica, forte e debole sono correttamente descritte dal Modello Standard alle energie investigate. Esso è una teoria quantistica relativistica dei campi e per questo si pensa essere la teoria corretta. Tuttavia, si pensa anche che il Modello Standard sia una teoria a basse energie, limite di una teoria più grande, poiché non spiega, tra le altre cose, la materia e l'energia oscure.

Il corso è una introduzione alla teoria dei campi. La parte avanzata, tra cui il metodo funzionale, si vede al corso di Teoria Quantistica dei Campi I e II, e pure in Laboratorio di Fisica Computazionale con lo studio delle interazioni forti su reticolo.

¹Si veda <https://arxiv.org/abs/2308.06230>.

²Si veda <https://physics.aps.org/articles/v16/139>.

Unità di misura. Si utilizza il sistema MKS. Le costanti fisiche di interesse sono

$$c = 299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}, \quad \hbar \approx 6.582 \times 10^{-16}\,\text{eV s}$$

Si pone $c = 1$: lunghezza e tempo sono la stessa dimensione. Per ragioni storiche, si elimina il tempo, sebbene sia più preciso da misurare. Come conseguenza, dalla relazione di Einstein

$$E = mc^2$$

la massa ha le dimensioni dell'energia. Altre scale di lunghezza interessanti sono l'ångström (o angstrom) ed il fermi

$$1\,\text{\AA} = 10^{-10}\,\text{m}, \quad 1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m}$$

corrispondenti alle scale atomiche e scale nucleari.

Si pone $\hbar c = 1$, che nel Sistema Internazionale vale $\hbar c \approx 197\,\text{MeV fm}$. Si introduce la lunghezza Compton (ridotta)

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2}$$

Per l'elettrone vale $\lambda \approx 3.86 \times 10^{-13}\,\text{m}$, mentre per un nucleone è $\lambda \approx 0.21\,\text{fm}$. Dalla lunghezza Compton si ottiene una relazione tra lunghezza e massa. La massa di un nucleone è data da $m = 5\,\text{fm}^{-1}$.

In generale, le particelle elementari sono instabili. Si consideri una vita media

$$\tau = 10^{-23}\,\text{s} \implies \frac{\tau c}{\hbar c} \approx \frac{3}{200}\,\text{MeV}^{-1}$$

Si passa da un tempo ad una energia: dalla vita media all'indeterminazione sul valore dell'energia e quindi della massa. La relazione

$$\Delta t \Delta E \sim 1$$

non è un principio di indeterminazione perché il tempo non è un operatore e le misurazioni sono fatte a tempi diversi. Essa lega l'incertezza sulla misura dell'energia data la differenza temporale tra due misure. La vita media di una particella permette di ottenere l'indeterminazione sulla sua massa. Tornando alla lunghezza Compton, si ha

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} \implies \lambda mc \sim \hbar \rightsquigarrow \Delta x \Delta p \sim \hbar$$

L'ultima relazione è un principio di indeterminazione. Dalle relazioni sopra si nota che risolvere la posizione di una particella su una lunghezza inferiore alla sua lunghezza Compton significa fornire un'energia dell'ordine della sua massa a riposo e quindi aprire la strada alla creazione di coppia. Confinare una particella porta alla creazione di altre particelle.

Riassumendo, le dimensioni seguono le relazioni

$$E = L^{-1} = T^{-1} = M$$

Si può costruire un analogo della lunghezza Compton anche per la massa, cioè la massa di Planck. Non si considera la gravità perché è molto più debole delle altre forze fondamentali

$$E_{\text{grav}} = G \frac{m_e M_N}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-41}}{r_{\text{Bohr}}}, \quad E_{\text{elet}} = \frac{\alpha}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-2}}{r_{\text{Bohr}}}$$

Scale di energia. L'energia di un fascio del Large Hadron Collider fu 6.5 TeV per la scoperta del bosone di Higgs. Per il LEP fu 100 GeV. Per il SPS fu 300 GeV per la scoperta dei bosoni W^\pm e Z . L'energia necessaria ad ottenere tali fasci è $600\,\text{GWh yr}^{-1}$ solo per LHC. Questo perché particelle che accelerano irradiano energia per bremsstrahlung. Tutto il CERN consuma $1.3\,\text{TWh yr}^{-1}$, mentre il mondo produce circa $20\,000\,\text{TWh yr}^{-1}$.

Lezione 2

mar 03 ott
2023 10:30

Diagramma di Minkowski. In un diagramma xt di Minkowski, la bisettrice dei quadranti indica oggetti che si muovono alla velocità della luce (ricordando $c = 1$). Si costituisce un cono luce. Al di sopra e al di sotto dell'origine O si hanno eventi che possono essere causalmente connessi con l'origine: in particolare, per eventi al di sopra, l'origine O può avere un effetto causale, si ha il futuro; gli eventi al di sotto hanno potuto influenzare causalmente l'origine, si ha il passato. Ai lati, gli eventi non possono essere causalmente connessi con l'origine perché bisogna superare la velocità della luce.

La metrica nello spazio di Minkowski non è definita positiva: l'intervallo spazio-temporale può cambiare segno. Gli eventi con $t = 0$ sono contemporanei all'origine. In base al segno — positivo, nullo e negativo — si ha vettori di tipo tempo, luce e spazio. Ai lati del cono sono presenti vettori di tipo spazio, sopra e sotto si hanno vettori di tipo tempo. Lungo le bisettrici si hanno vettori di tipo luce.

1.1 Problemi della meccanica quantistica con la relatività

Si vedono alcuni problemi nel conciliare la meccanica quantistica con la relatività.

Problema primo. Si svolge un esercizio preso dalle Coleman's Lectures, p. 12. Si considera una particella localizzata nell'origine $|\mathbf{x} = 0\rangle \equiv |0\rangle$. Per ottenere uno stato ad un tempo successivo a $t = 0$ si applica l'operatore di evoluzione temporale. Ricordando varie relazioni, tra cui la completezza nello spazio dei momenti,

$$I = \int d^3k |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|, \quad H|\mathbf{k}\rangle = E_k|\mathbf{k}\rangle, \quad E_k^2 = k^2 + m^2$$

così come

$$\langle\mathbf{k}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle^*$$

Si ottiene

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle = \int d^3k \langle\mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle \langle\mathbf{k}|e^{-iHt}|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_k t}$$

dove si applica l'esponenziale a $\langle\mathbf{k}|$ facendo l'espansione in serie di Taylor. Passando in coordinate polari r e θ , si ha

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle &= \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos\theta} e^{-iE_k t} = \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} e^{-iE_k t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} e^{-iE_k t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dk k e^{ikr} e^{-iE_k t} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}} dk k e^{ikr} e^{-it\sqrt{k^2+m^2}} \end{aligned}$$

Si passa nel piano complesso. La radice è una funzione polidroma: si pone il branch cut da $-\infty$ a $-im$ e da im a ∞ . Il cammino di integrazione è una semicirconferenza con base l'asse reale e che evita il branch cut, percorsa in senso anti-orario. La funzione integranda è analitica all'interno del cammino, pertanto l'integrale è nullo. Vicino al taglio si ha

$$E_k = -i\sqrt{(\text{Im } k)^2 - m^2}, \quad E_k = i\sqrt{(\text{Im } k)^2 - m^2}$$

a sinistra e destra. Si studia il limite in cui il raggio della semicirconferenza tende ad infinito. L'esponenziale sul segmento discendente a sinistra tende a zero, ma non a destra. Supponendo che la particella viaggi più veloce della luce $r > t$, allora anche tale termine si annulla all'infinito. Inoltre, gli archi non contribuiscono all'integrale. Sia $k = iz$, così $k dk = iz d(iz)$. Pertanto, solamente i segmenti verticali contribuiscono con termini non nulli:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle &= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^\infty d(iz) (iz) e^{-zr} [e^{t\sqrt{z^2-m^2}} - e^{-t\sqrt{z^2-m^2}}] \\ &= \frac{i}{2\pi^2 r} \int_m^\infty dz z e^{-zr} \sinh(t\sqrt{z^2-m^2}) > 0 \end{aligned}$$

Da questo risultato si nota che, a partire da una particella è localizzata nell'origine, ad un tempo infinitesimo successivo, la funzione d'onda è non nulla ovunque: si potrebbe trovare al di fuori del cono luce. Non si è coerenti con la relatività speciale. Si ha violazione di causalità nel momento in cui si localizza una particella. La localizzazione diventa un concetto che non si riesce più a mantenere, come già visto discutendo della lunghezza Compton.

L'integrale non presenta una soluzione esplicita in forma chiusa, ma si può trovare un limite superiore all'ampiezza di probabilità

$$\psi(x, t) < \frac{i}{2\pi^2 r} \int_m^\infty dz z e^{-z(r-t)} = \frac{i}{2\pi^2 r} e^{-m(r-t)} \left[\frac{m}{r-t} + \frac{1}{(r-t)^2} \right]$$

Si noti il campo complesso \mathbb{C} non è un campo totalmente ordinato, quindi la relazione di disuguaglianza è valida in senso lessicografico. Fuori dal cono di luce, l'ampiezza di probabilità è esponenzialmente piccola, ma comunque non nulla. In generale, una simmetria semplifica il problema, ma la simmetria di Lorentz rovina la meccanica quantistica. In natura deve esistere qualcosa che cancella la violazione di causalità: le anti-particelle forniscono contributi che cancellano la violazione. La scala che descrive quanto scende la probabilità è data dalla massa m . La lunghezza Compton associata ad una particella è il reciproco della massa: cercando di confinare una particella in una regione più piccola della lunghezza Compton — il problema visto considera la particella in un punto infinitesimo, l'origine — si ottiene una violazione della causalità.

Problema secondo. Seguendo Bohr, si consideri una particella in una scatola perfettamente riflettente: la particella rimbalza continuamente. Il lato superiore della scatola è un pistone che si può muovere per diminuire lo spazio all'interno della scatola. Ricordando la relazione di Einstein, per il principio di indeterminazione

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar$$

la particella acquista abbastanza energia da irraggiare qualsiasi cosa e creare tutte le particelle compatibili con il principio di conservazione dell'energia.

Relazione di Einstein. Le difficoltà sorgono dalla relazione di Einstein $E = mc^2$. Si tenta dare un senso a tale formula. Si consideri una scatola. Si emette della radiazione dal lato sinistro della scatola con energia E . Per una radiazione, il momento portato è $p = \frac{E}{c}$. Per conservazione del momento $p = 0$, la scatola si sposta verso sinistra con momento $p = -\frac{E}{c}$. La scatola si sposta fino a quando la radiazione incide sull'altro lato. La velocità con cui si muove la scatola è $v = -\frac{E}{Mc}$. La distanza percorsa è

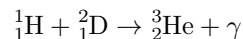
$$\Delta x = -\frac{E}{Mc} \frac{L}{c} = -\frac{EL}{Mc^2}$$

corrispondente al tempo di viaggio della radiazione. La scatola è un sistema isolato, ma si è spostato: il baricentro deve restare fermo. Per Einstein, la radiazione porta con sé della massa, infatti dall'equazione del baricentro si ottiene

$$mL + M\Delta x = 0 \implies mL - M\frac{EL}{Mc^2} = 0 \implies E = mc^2$$

Si ricordi che non si può considerare la scatola come un corpo rigido giacché si sta trattando la Relatività Speciale. Tuttavia, il problema di considerare il corpo rigido o meno non si pone poiché le conclusioni sono le medesime.

Si vede un esempio in cui si trova la relazione di Einstein. Le stelle sono sorrette dalla fusione nucleare



La massa iniziale combinata del protone e del deutrone è $m = 5.01624 \times 10^{-27}$ kg, mentre il nucleo di elio ha massa $m = 5.008234 \times 10^{-27}$ kg. L'eccesso di massa che si trasforma in energia è $\Delta m \approx 7.97 \times 10^{-30}$ kg. Con questa reazione, insieme a delle altre, il Sole perde una quantità di massa pari a

$$\Delta M_\odot \approx 4.5 \times 10^9 \text{ kg s}^{-1} \approx 10^{-14} M_\odot \text{ yr}^{-1}$$

dove M_\odot è una massa solare.

Esperimento di Nichols e Hull. Nichols e Hull si posero la questione di misurare il momento portato dalla luce. I due costruirono una bilancia di torsione con due specchi rivolti nella stessa direzione. L'esperimento rivelò

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Problema terzo. Quando un commutatore tra due operatori è nullo, si possono misurare le quantità associate in modo indipendente (l'ordine non è importante). Nella rappresentazione di Heisenberg, gli operatori dipendono solo dal tempo. Rispetto ad una misura fatta all'origine del diagramma di Minkowski, nella regione sopra e sotto del cono di luce, il commutatore con un'altra misura è diverso da zero perché le due misure si possono influenzare, mentre ai lati il commutatore deve essere nullo perché i sistemi non si possono influenzare. Dunque i commutatori devono dipendere anche dalla posizione delle misure.

Problema quarto. Si veda Cohen E_{II}. Si considerino due operatori tali per cui

$$[q, p] = i\hbar, \quad [q, q] = [p, p] = 0$$

Dal primo commutatore segue

$$qp - pq = i\hbar \implies qp^2 - pqp = i\hbar p \implies qp^2 - p^2q - i\hbar p = i\hbar p$$

In generale si ottiene

$$[q, p^n] = ni\hbar p^{n-1}, \quad [p, q^n] = -in\hbar q^{n-1}$$

cioè relazioni simili a quelle delle derivate. Si consideri una generica funzione dei momenti e delle coordinate:

$$[q, G(p)] = i\hbar \partial_p G(p), \quad [p, F(q)] = -i\hbar \partial_q F(q)$$

Si consideri l'operatore di traslazione in una dimensione

$$T(a) = e^{-ia\frac{p}{\hbar}}$$

dove a è una coordinata. Dal primo dei due commutatori sopra segue

$$qT(a) = T(a)q + i\hbar \partial_p T = T(a)q + aT(a) = T(a)(q + a)$$

L'operatore di posizione agisce sugli autostati della posizione come

$$\hat{q} |q'\rangle = q' |q'\rangle$$

Applicando prima l'operatore di traslazione, si ottiene

$$\hat{q}T(a) |q'\rangle = (q' + a)T(a) |q'\rangle$$

Il vettore $T(a) |q'\rangle$ è ancora autovettore della posizione ed ha autovalore $q' + a$. Il parametro a è un numero reale arbitrario. Se lo spettro di un operatore che ha commutatore $i\hbar$ con un altro è continuo e illimitato (superiormente o inferiormente), allora pure lo spettro dell'altro operatore è continuo e illimitato. In questo caso lo spettro dell'operatore di traslazione $T(a)$ è continuo e illimitato, pertanto lo è pure quello della posizione \hat{q} .

Ne si vede la motivazione. Se due operatori sono finiti e discreti, allora — sapendo $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ —

$$0 = \text{Tr}[A, B] = \text{Tr } i\hbar = Ni\hbar$$

che è una contraddizione. Pertanto, operatori che non commutano, non possono essere finiti, in modo che la traccia non sia definita.

Seguendo Pauli, per rendere coerenti la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, bisogna aggiungere alle regole di commutazione ordinarie — come $[x, p] = i\hbar$ —, tutte le altre regole di commutazione:

$$[t, H] = -i\hbar, \quad [x, H] = 0, \quad [t, p] = 0$$

Per la prima regola di commutazione, supponendo di avere un operatore tempo, poiché t è illimitato, allora pure l'hamiltoniana H deve avere spettro illimitato (in particolare illimitato

inferiormente): ciò non è possibile perché non ci sarebbe uno stato fondamentale stabile ed i sistemi non sarebbero quantizzabili. La seconda regola di commutazione afferma che la posizione è conservata e misurabile in modo indipendente dall'energia. Similmente per la terza regola. Pertanto, la possibilità di trovare regole di commutazione compatibili con la regola tra posizione e momento, generalizzate ai quadrivettori posizione e momento, porta ad un assurdo.

Lezione 3

mer 04 ott
2023 10:30

1.2 Infiniti gradi di libertà

Per passare ad una teoria dei campi, bisogna passare ad infiniti gradi di libertà. Si vede un esempio in meccanica classica. Si consideri una corda vibrante in una dimensione: si hanno n masse m alternate a delle molle di costante k . Nello stato a minima energia, tutte le masse hanno una distanza pari al passo reticolare a . La lagrangiana del sistema è data da

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La corda ha una dimensione finita e bisogna scegliere le condizioni al contorno: si possono fissare gli estremi $q_1(t) = q_n(t) = 0$ oppure imporre delle condizioni periodiche $q_i(t) = q_{i+n}(t)$. Quest'ultima condizione permette di passare ad un numero infinito di particella. L'hamiltoniana è data da

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La densità di massa e la tensione della corda sono

$$\rho = \frac{m}{a}, \quad \sigma = ka$$

Nel limite di $a \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$ si ha

$$\frac{q_{j+1} - q_j}{a} \rightarrow \partial_x \phi(x, t), \quad \sum_j \rightarrow \frac{1}{a} \int dx$$

dove ϕ è il campo spostamento di ogni massa dalla propria posizione di equilibrio. La lagrangiana diventa una funzione del campo e, passando in tre dimensioni, si ha

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

L'hamiltoniana è data da

$$H(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

Si introducono le densità di lagrangiana e di hamiltoniana

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}$$

I momenti coniugati sono

$$\pi = \partial_{\dot{\phi}} \mathcal{L}, \quad \mathcal{H} = \pi \cdot \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

Le equazioni del moto sono

$$\partial_{\phi} \mathcal{L} - \partial_{\mu} \partial_{\mu} \phi \mathcal{L} = 0$$

In generale, si utilizzano le condizioni periodiche perché le teorie trattate sono locali. Il campo elettromagnetico è un campo a lungo raggio, ma si può considerare locale perché la materia è complessivamente neutra: oltre una certa distanza, il campo non ha più effetto.

Utilizzare un campo porta una difficoltà. Si è riusciti a scrivere l'energia relativistica, ma non si riesce a scrivere in modo relativisticamente corretto un potenziale. Infatti, un potenziale descrive un'interazione istantanea. Bisogna utilizzare qualcos'altro: uno scambio di particelle, i mediatori delle interazioni fondamentali. Il potenziale in quanto tale non può più esistere.

1.3 Formalismo covariante

Si veda Landau vol. 2 per una trattazione completa. Si studia il formalismo covariante nella relatività speciale. Le trasformazioni di Galileo sono equivalenti alle trasformazioni di Lorentz nel limite di piccole velocità.

Si considerino due sistemi di riferimento S ed S' equiversi. Il secondo si muove lungo l'asse z del primo. Le trasformazioni di Lorentz sono

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 1$$

Queste configurazione e trasformazione sono usate anche successivamente come prototipi. Interessa capire come una certa quantità si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. Queste esistono anche in termini di funzioni iperboliche secondo la rapidità.

L'intervallo spazio-temporale è una quantità costante, un invariante

$$x^\mu x_\mu = s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Dei sistemi di riferimento tipicamente usati sono:

- il target system, cioè il sistema del laboratorio solidale con una particella su cui impatta un'altra particella;
- il riferimento del centro di massa.

Qualunque evento è caratterizzato da un punto (t, x, y, z) nello spazio di Minkowski. Si introduce il quadrivettore posizione

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

Le sue componenti sono coordinate contravarianti perché controvariano rispetto le trasformazioni dei cambi di base cioè le trasformazioni di Lorentz. Il moto di una particella è una curva, una linea di universo, $x^\mu = x^\mu(\tau)$ che descrive come essa si muove nello spazio-tempo. Le trasformazioni nello spazio di Minkowski sono trasformazioni lineari e corrispondono alle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Nel formalismo covariante bisogna fare attenzione alla posizione degli indici: scritture del tipo $x^\mu x^\mu$ sono legittime e perfettamente definite, ma non sono quantità invarianti per trasformazioni di Lorentz. Queste hanno caratteristiche particolari che determinano la forma delle matrici associate. Per i due sistemi di riferimento S ed S' sopra, si ottiene

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Il tensore metrico è definito secondo la convenzione timelike

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Pertanto, il quadrivettore posizione covariante è dato da

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

In questo modo si passa da componenti contravarianti a covarianti e viceversa. Si può definire la norma

$$\|x\|^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

Proprietà delle trasformazioni di Lorentz. Le matrici delle trasformazioni hanno 16 componenti. Le trasformazioni che si vogliono applicare ad un quadrivettore sono le rotazioni ed i boost, cioè sei totali: bisogna limitare le componenti indipendenti. Dato

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

si calcola l'invariante spazio-temporale nel riferimento S' che deve essere identico all'invariante calcolato nel riferimento S :

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = \eta_{\mu\rho} x'^{\mu} x'^{\rho} = \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Lambda^{\rho}_{\sigma} x^{\sigma} \equiv \eta_{\alpha\theta} x^{\alpha} x^{\theta}$$

Poiché si considera lo stesso vettore, allora l'identità vale per componenti. Quindi si hanno delle relazioni tra gli elementi di matrice delle trasformazioni di Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma}$$

Sommando su ρ si ottiene $\Lambda_{\mu\sigma}$ da cui segue

$$\eta_{\nu\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu\sigma} = (\Lambda^{\top})^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu\sigma}$$

Alzando l'indice ν tramite la metrica si ottiene

$$\delta^{\nu}_{\sigma} = (\Lambda^{\top})^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\nu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = (\eta \Lambda \eta^{-1})^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = [(\eta \Lambda \eta^{-1})^{\top}]^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma}$$

che in forma matriciale risulta essere

$$I = (\eta \Lambda \eta^{-1})^{\top} \Lambda \iff \eta = \Lambda^{\top} \eta \Lambda \iff \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^{\top} \eta = \eta \Lambda \eta^{-1}$$

Per passare alla notazione matriciale bisogna porre attenzione alla posizione degli indici. La matrice trasposta di Λ^{μ}_{σ} non ha gli indici posti come $(\Lambda^{\top})^{\nu}_{\mu}$, bensì come $(\Lambda^{\top})_{\nu}^{\mu}$. Infatti vale³

$$\Lambda = \Lambda^{\mu}_{\nu}, \quad \Lambda^{\top} = (\Lambda^{\top})_{\mu}^{\nu}, \quad \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$$

così come

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = (\Lambda^{\top})_{\nu}^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$$

La derivazione può seguire anche un altro modo. Si può introdurre direttamente la matrice trasposta

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma} \implies (\Lambda^{\top})_{\nu}^{\mu} \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma} \implies \Lambda^{\top} \eta \Lambda = \eta$$

La scrittura tramite matrici permette di capire che il tensore metrico è lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale. Le matrici delle trasformazioni di Lorentz sono definite dall'equazione derivata sopra. Le equazioni indipendenti che caratterizzano le matrici sono $2^{-1}n(n+1)$ cioè dieci in quattro dimensioni. I gradi di libertà risultano essere sei: i tre angoli di Eulero e le tre componenti della velocità.

Infine, il determinante è dato da

$$\det(\Lambda^{\top} \eta \Lambda) = \det \eta \implies (\det \Lambda)^2 = 1$$

Il volume quadridimensionale è preservato nelle trasformazioni.

Elementi di teoria dei gruppi. Le trasformazioni di Lorentz costituiscono il gruppo di Lorentz $O(1,3)$. Un gruppo è un insieme G in cui esiste una regola di composizione tale per cui vale:

- chiusura: $g_i \circ g_k = g_j \in G$;
- associatività: $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$;
- elemento identità: $\exists g_0$ tale per cui $g_0 \circ g_i = g_i \circ g_0 = g_i$ per ogni $g \in G$;
- elemento inverso: $\forall g_i \in G, \exists g_s \in G$ tale per cui $g_s \circ g_i = g_i \circ g_s = g_0$.

³Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/567237> e <https://physics.stackexchange.com/q/456640>.

Il gruppo di Lorentz è continuo. Si verificano queste proprietà. La composizione di più trasformazioni di Lorentz fornisce

$$x''^\mu = (\Lambda')^\mu{}_\nu x'^\nu = (\Lambda')^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \implies x'' = \Lambda' \Lambda x$$

Sfruttando il determinante si ha

$$\det \eta = \det((\Lambda' \Lambda)^\top \eta \Lambda' \Lambda) \implies 1 = [\det(\Lambda' \Lambda)]^2$$

L'associatività è data dalla linearità delle trasformazioni di Lorentz. L'identità è I , mentre l'inversa è $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta$.

Trasformazioni di tensori. Un quadrivettore è un insieme di quattro componenti che si trasformano come le coordinate. Essi si rappresentano come vettori colonna e sono detti semplicemente vettori. Per la velocità si ha

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$$

Un tensore di tipo $(2, 0)$ è un oggetto di sedici componenti per cui ogni indice si trasforma come le coordinate

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}$$

Un quadrivettore covariante si trasforma come

$$v'_\mu = \eta_{\mu\nu} v'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho v^\rho = \Lambda_\mu{}^\nu v_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu v_\nu \implies v' = v \Lambda^{-1}$$

Essi si rappresentano come vettori riga e sono detti covettori: sono i duali dei vettori. La derivata rispetto un quadrivettore covariante si può scrivere come

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Sapendo $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $x' = \Lambda x$ e moltiplicando da sinistra per Λ^{-1} , si ha

$$\Lambda^{-1} x' = x \implies \eta^{-1} \Lambda^\top \eta x' = x \implies x^\nu = (\Lambda^\top)^\nu{}_\mu x'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu$$

oppure in modo più diretto

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \implies (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \delta^\rho{}_\nu x^\nu = x^\rho$$

Dunque si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \iff \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

La derivata di un quadrivettore rispetto alle componenti contravarianti $\partial_\mu v^\mu$ è un invariante. Il d'Alembertiano $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ è anch'esso invariante. Data un'equazione nel formalismo covariante, la sua forma è identica in ogni sistema di riferimento inerziale. Ad esempio

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \square A^\mu = v^\mu$$

Lezione 4

L'equazione di Schrödinger non è un invariante relativistico e nemmeno invariante galileiano. Basta considerare $x' = x + vt$. Bisogna ridefinire la funzione d'onda con un fattore di fase di un argomento che è funzione della velocità, dell'energia e della massa: l'equazione non è invariante, ma le osservabili non cambiano perché compare solo un fattore di fase.

gio 05 ott
2023 10:30

Altre proprietà delle trasformazioni di Lorentz. Un tensore di tipo (p, q) si trasforma con p componenti contravarianti e q componenti covarianti. Le trasformazioni di Lorentz contengono sei parametri: gli angoli di Eulero e le componenti della velocità, corrispondenti alle rotazioni ed ai boost. Si può considerare una trasformazione più generale che include anche una traslazione ottenendo il gruppo di Poincaré

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \delta^\mu$$

con δ^μ costante.

Il determinante è una funzione continua degli elementi di matrice, pertanto non può passare tra due valori discontinui, 1 e -1 . Esistono quattro settori disconnessi del gruppo di Lorentz. Si consideri

$$\eta_{\sigma\rho} = \Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho$$

Scegliendo $\rho = \sigma = 0$ si ha

$$1 = \Lambda^\mu_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \implies \Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2}$$

Insieme al determinante, si hanno quattro settori non legati tra loro: non si può passare da un settore all'altro. Tali settori sono:

- trasformazioni ortocrone proprie: $\Lambda^0_0 \geq 1$, $\det \Lambda = 1$. Esse sono le trasformazioni infinitesime che si possono infinitamente risommare a partire dall'unità; esse formano un gruppo. Un esempio di trasformazione è l'identità.
- trasformazioni ortocrone improprie: $\Lambda^0_0 \geq 1$, $\det \Lambda = -1$. Un esempio di trasformazione è la parità $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- trasformazioni anticrone improprie: $\Lambda^0_0 \leq -1$, $\det \Lambda = -1$. Un esempio di trasformazione è l'inversione temporale $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- trasformazioni anticrone proprie: $\Lambda^0_0 \leq -1$, $\det \Lambda = 1$. Un esempio di trasformazione è la combinazione delle precedenti $PT = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$.

Questi settori sono disgiunti perché non esiste una trasformazione infinitesima che permette di passare dall'unità ad un settore diverso dal primo: bisogna utilizzare delle trasformazioni discrete.

Teorema 1.1. Le trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono non cambiano il segno della componente temporale di un vettore di tipo tempo.

Dimostrazione. Si consideri

$$\Lambda^0_0 = \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2} = \sqrt{1 + |\mathbf{\Lambda}|^2} > |\mathbf{\Lambda}|$$

Un vettore di tipo tempo è caratterizzato da

$$v_\mu v^\mu = (v^0)^2 - |\mathbf{v}|^2 > 0 \implies (v^0)^2 > |\mathbf{v}|^2$$

Si consideri $v^0 > |\mathbf{v}|$ e $v^0 > 0$. Applicando una trasformazione di Lorentz si ottiene

$$v'^0 = \Lambda^0_0 v^0 + \Lambda^0_i v^i = \Lambda^0_0 v^0 + |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{v}| \cos \theta \geq \Lambda^0_0 v^0 - |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{v}| > \Lambda^0_0 v^0 - \Lambda^0_0 |\mathbf{v}| > 0$$

Dunque la trasformazione mantiene la qualità di tipo tempo del vettore. La dimostrazione è analoga per $v^0 < 0$. \square

Questo teorema si può vedere in modo geometrico. Un evento nell'origine non può influenzare un altro che si trova al di là della bisettrice del diagramma di Minkowski. La componente temporale di un quadrivettore è la distanza temporale rispetto l'origine. Operando una trasformazione di Lorentz, l'evento può avvenire prima o dopo l'origine, in base al sistema di riferimento considerato: non c'è causalità.

Si consideri un vettore di tipo tempo con norma $k^2 > 0$. Essa è la stessa per ogni riferimento inerziale. Pertanto

$$t^2 - x^2 = k^2 \implies t = \pm \sqrt{k^2 + x^2}$$

cioè un iperboloide nello spazio di Minkowski che si trova nella zona sopra e sotto all'origine, ma le due zone sono disconnesse e la componente di tipo tempo non cambia. D'altra parte, per un vettore di tipo spazio, la norma è $-k^2$ con $k^2 > 0$, da cui

$$x^2 - t^2 = k^2$$

cioè ancora un iperboloide, ma al di fuori dal cono di luce, ai lati dell'origine. Una trasformazione di Lorentz cambia il segno della componente tempo e per questo non si può avere una relazione di causalità.

1.4 Equazioni di Maxwell

Vedere Landau, vol. 2, cap. 4, p. 70.

Leggi di Maxwell. Le equazioni di Maxwell sono quattro equazioni, due scalari e due vettoriali, per un totale di otto equazioni scalari:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

I gradi di libertà non sembrano essere corretti. Sei gradi di libertà fisici (le componenti dei campi), ma otto equazioni: alcune di queste sono ridondanti. In fisica classica, la conservazione della carica è aggiunta manualmente alla legge di Ampère e non si può dedurre dalle equazioni di Maxwell (dell'elettrostatica):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Non è evidente che le equazioni di Maxwell siano invarianti relativistici. In forma integrale, la legge di Gauss è

$$\int_V \rho d^3x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato il teorema della divergenza (o teorema di Gauss). Per la seconda equazione, la legge di Ampère–Maxwell, si ha

$$\partial_t \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato il teorema di Stokes. La terza, la legge di Gauss per il magnetismo, è analoga alla prima ed afferma l'inesistenza del monopolo magnetico:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La quarta equazione, la legge di Faraday, è analoga alla seconda

$$-\partial_t \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Formalismo covariante. Si introducono dei quadri vettori utili per lo studio dell'elettrodinamica:

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\nabla), \quad J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$$

Il secondo si può motivare nel seguente modo. La carica infinitesima $\rho dV = dq$ è un invariante relativistico. Operando una trasformazione di Lorentz, la misura diventa

$$d^4x' = dt' dx' dy' dz' = \left| \frac{\partial(t', x', y', z')}{\partial(t, x, y, z)} \right| d^4x = \det \Lambda d^4x = d^4x$$

cioè è un invariante. Poiché ρdV è un invariante e dV si trasforma come le componenti spaziali di un quadrivettore, allora ρ si deve trasformare come la componente temporale. Pertanto, l'equazione di continuità è data da

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

che è chiaramente un invariante relativistico.

Si consideri la legge di Gauss per il magnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

dove \mathbf{A} è il potenziale vettore. Si dimostra l'implicazione sopra tramite il simbolo di Levi-Civita

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

L'uguaglianza è nulla poiché ε_{ijk} è completamente anti-simmetrico (in particolare la coppia ij), mentre la derivata $\partial_i \partial_j$ è simmetrica. Inserendo il potenziale vettore nella legge di Faraday, si ha

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \implies \nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0$$

Il vettore tra parentesi è irrotazionale:

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} \equiv -\nabla \phi \implies \mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$$

dove ϕ è il potenziale scalare. Dalla legge di Gauss si ottiene

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) = \rho \implies -\nabla^2 \phi - \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \rho$$

Aggiungendo e rimuovendo $\partial_t \phi$ all'interno della derivata temporale, segue

$$\rho = \square \phi - \partial_t (\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A}) = \square \phi - \partial_t \partial_\mu A^\mu$$

dove si definisce il quadri-potenziale $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Si consideri la legge di Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \mathbf{A}$$

Ricordando

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mathbf{J} - \partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \mathbf{A} \\ \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi) &= \mathbf{J} \\ \square \mathbf{A} + \nabla(\partial_\mu A^\mu) &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

Le due equazioni trovate si possono riassumere come

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Da questa scrittura risulta evidente che le leggi di Maxwell sono covarianti. Il numero di gradi di libertà sembra essere quattro, poi si scoprono essere tre e infine due. Il campo elettromagnetico è estremamente patologico. Questo è legato al fatto che, quando si quantizza il campo, la particella che media le interazioni ha massa nulla.

Si può riscrivere l'equazione per ottenere

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu \implies \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\mu$$

Il termine tra parentesi è un tensore di tipo (2,0) totalmente anti-simmetrico detto tensore di campo (o di Faraday) per cui le equazioni di Maxwell si possono scrivere come

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Le componenti indipendenti del tensore di campo sono solo sei e corrispondono alle componenti del campo elettromagnetico. Considerando la derivata si ottiene la conservazione della corrente

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu$$

La conservazione della carica è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Si studiano le componenti del tensore di campo

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_t A^i + \nabla \phi = -E^i$$

mentre le altre sono

$$F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Le componenti del tensore hanno perso il proprio senso assoluto: il campo elettrico diventa il campo magnetico e viceversa.

Lezione 5

Il tensore di campo soddisfa l'identità di Bianchi

$$\partial^{[\alpha} F^{\mu\nu]} = 0 \implies \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

Si consideri $\alpha = 2, \mu = 3$ e $\nu = 0$. Si ha

$$-\partial_y E_z + \partial_z E_y - \partial_t B_x = 0 \implies (\nabla \times \mathbf{E})_x = -\partial_t B_x$$

Considerando le altre componenti, si ottengono le due leggi omogenee di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

Da questo si capisce che le otto equazioni scalari di Maxwell sono ridondanti perché le quattro sopra sono dipendenti da quelle con le sorgenti.

Trasformazioni delle componenti del tensore. Si studia come trasforma il tensore di campo. Si consideri la trasformazione prototipo lungo l'asse z :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Il tensore di campo nel sistema di riferimento S' è

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho F^{\sigma\rho}$$

Si studiano le componenti

$$F'^{01} = -E'_x = \Lambda^0{}_\sigma \Lambda^1{}_\rho F^{\sigma\rho} = \Lambda^0{}_\sigma F^{\sigma 1} = -\gamma(E_x - vB_y)$$

I due campi si mescolano. Le trasformazioni delle tre componenti del campo elettrico sono

$$E'_x = \gamma(E_x - vB_y), \quad E'_y = \gamma(E_y + vB_x), \quad E'_z = E_z$$

Per trasformazioni più generali si veda Landau, vol. 2, oppure Fisica II o Relatività.

Invarianza di gauge. Si trattano le trasformazioni di gauge globali. Si consideri il potenziale vettore \mathbf{A} . I campi sono:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$$

Noto $\nabla \times (\nabla f) = 0$, si ha

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$$

dove f è una funzione arbitraria. Dunque, il campo magnetico è invariante per la trasformazione

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

Affinché pure il campo elettrico rimanga invariato, si pone

$$\phi' = \phi - \partial_t f \implies E' = -\nabla \phi + \nabla(\partial_t f) - \partial_t \mathbf{A} - \nabla(\partial_t f) = E$$

lun 09 ott
2023 10:30

Unendo le due trasformazioni nel quadri-potenziale, una trasformazione di gauge di prima specie è data da

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

Nell'equazione di campo si ha

$$\square A'^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A'^\nu) = \square A^\mu - \square \partial^\mu f - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) + \square \partial^\mu f = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Si ha una libertà ulteriore sulla scelta del potenziale vettore: le quantità indipendenti sono tre al posto di quattro. Ci sono varie scelte di gauge accorte. In particolare il gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

così come il gauge di Coulomb o di radiazione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

comoda in assenza di cariche. Tuttavia, questa non è covariante.

Le equazioni di campo sono invarianti di gauge e così pure il tensore di campo: esso contiene i campi che sono invarianti di gauge.

Si studia l'origine della scelta di gauge di Lorenz. Si consideri un quadri-potenziale A^μ che non si trovi in gauge di Lorenz e un altro quadri-potenziale A'^μ che si trovi nel gauge. Poiché vale

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu A'^\mu &= \partial_t \phi' + \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi + \nabla^2 f - \partial_t^2 f \\ \nabla^2 f - \partial_t^2 f &= -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi) \end{aligned}$$

Questa è un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali: ammette sempre soluzione e così si può sempre trovare una trasformazione per porsi nel gauge di Lorenz.

Tensore di Levi-Civita. Il tensore metrico è invariante per trasformazioni di Lorentz

$$\eta'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}$$

Similmente il delta di Kronecker

$$\delta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu}$$

Si introduce il tensore di Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ permutazione pari di } 0123 \\ -1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ permutazione dispari di } 0123 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Alcune identità sono

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

La prima deriva dal fatto che tutti i diversi prodotti dei tensori metrici η portano un segno negativo, mentre la seconda è data dal numero di permutazioni di quattro indici ed il segno negativo è portato dai prodotti con i tensori metrici. La regola del determinante con il simbolo di Levi-Civita per una matrice 2×2 è

$$\varepsilon_{\alpha\beta} M^{\alpha\eta} \varepsilon_{\eta\theta} M^{\beta\theta} = 2 \det M$$

In n dimensioni, la relazione è analoga:

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} M^{\alpha_1 \beta_1} \dots M^{\alpha_n \beta_n} = n! \det M, \quad \alpha_i, \beta_j = 0, \dots, n-1$$

Si consideri una matrice di Lorentz

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} \Lambda_{\gamma\rho} \Lambda_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 24 \det \Lambda_{\iota\kappa}$$

Gli indici $\iota\kappa$ sono posti solo per indicare che la matrice di cui si calcola il determinante ha entrambi gli indici covarianti. Confrontando questa equazione con l'identità di contrazione degli

indici nel tensore di Levi-Civita — in particolare, moltiplicando quest'ultima per $-\det \Lambda_{\ell\kappa}$ —, si ha

$$\Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\beta\nu}\Lambda_{\gamma\rho}\Lambda_{\delta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\det \Lambda_{\ell\kappa}$$

Alzando il primo indice di ogni matrice Λ e del tensore di Kronecker, si ha

$$\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu\Lambda^\gamma{}_\rho\Lambda^\delta{}_\sigma\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\det \Lambda^\ell{}_\kappa$$

notando che $\det \Lambda_{\ell\kappa} = \det(\eta_{\ell\xi}\Lambda^\xi{}_\kappa) = -1\det \Lambda^\xi{}_\kappa$. Pertanto, il tensore di Levi-Civita è uno pseudo-tensore

$$\varepsilon' = (\det \Lambda)\varepsilon$$

Per trasformazioni improprie compare un segno negativo. Uno pseudo-tensore è una generalizzazione dei vettori assiali detti anche pseudo-vettori, come il momento angolare ed il campo magnetico.

Tensore duale. Il tensore duale di un tensore è dato da

$$\tilde{A}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}$$

Solamente i tensori anti-simmetrici possono avere duale poiché il tensore di Levi-Civita ε è anti-simmetrico. Contrarre un duale con sé stesso fornisce uno scalare

$$\tilde{A}^{\mu\nu}\tilde{A}_{\mu\nu} = k$$

Mentre la contrazione di un tensore con il proprio duale fornisce uno pseudo-scalare

$$(\tilde{A}^{\mu\nu}A_{\mu\nu})' = \det \Lambda (\tilde{A}^{\mu\nu}A_{\mu\nu})$$

Invarianti del campo elettromagnetico. Si consideri lo scalare del tensore di campo

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) = \tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

L'unico altro scalare che si può costruire è quello con il proprio duale

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Essi sono entrambi invarianti, ma quest'ultimo è uno pseudo-scalare.

Se i campi sono ortogonali in un riferimento, allora lo sono in tutti. Se i moduli dei campi sono uguali in un riferimento, allora lo sono in tutti. A seconda del segno del primo invariante, se i due campi sono ortogonali, allora esiste un riferimento in cui un campo è nullo e l'altro non nullo.

2 Equazioni d'onda relativistiche

Si veda Bjorken e Drell “Relativistic quantum mechanics”, capp. 1 e 2.

Si vuole ricavare un'equazione d'onda simile a quella di Schrödinger, ma che soddisfi i postulati della meccanica quantistica e della meccanica relativistica. Il problema non è banale. L'equazione di Schrödinger utilizza la traslazione operatoriale $p^\mu \rightarrow i\hbar\partial^\mu$, ma considera delle derivate con ordini diversi

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

Risulta evidente che per trasformazioni di Lorentz, l'equazione non è più identica in forma.

Primo tentativo. Si consideri l'hamiltoniana relativistica

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \implies i\hbar\partial_t\psi = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\psi$$

L'azione di traslazione operatoriale è lecita, tuttavia il ruolo delle derivate è altamente asimmetrico a causa della radice. Essa è definita in termini dell'espansione in serie di potenze: appaiono tutte le potenze della derivata e quindi si hanno infinite derivate, infinite condizioni al contorno e il valore della funzione in un punto dipende da tutti gli altri punti, anche quelli al di fuori del cono di luce. Non si ha località né causalità.

In tutte le teorie che si studiano, avere derivate di ordine maggiore del primo porta a teorie patologiche.

Secondo tentativo. In generale, un'equazione operatoriale

$$A\psi = B\psi$$

si può iterare o quadrare solamente se i due operatori commutano. Infatti, applicando B da sinistra

$$BA\psi = B^2\psi = AB\psi = A^2\psi$$

Gli operatori di derivata temporale ∂_t e spaziale ∇^2 commutano. Si può quadrare:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi$$

Tuttavia, in questo modo si ammettono anche energie negative illimitate inferiormente e quindi non c'è stato fondamentale stabile. Infatti, si consideri una soluzione ad onde piane

$$\psi = \exp\left[-\frac{Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{i\hbar}\right] \implies E^2 = p^2 + m^2$$

Ignorando tale problematica, si prosegue. In forma compatta, l'equazione d'onda sopra diventa l'equazione di Klein-Gordon

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0$$

cioè un'equazione scalare con legge di dispersione data dalla relazione di Einstein. Si noti una certa somiglianza con l'equazione per il potenziale vettore nel gauge di Lorenz a meno del termine di massa. Essa è un invariante relativistico. Come per l'equazione di Schrödinger, si ricava la corrente di probabilità. Si moltiplica per ψ^* e ψ da sinistra e si fa la differenza:

$$\begin{aligned} \psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* &= 0 \\ \partial^\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) &= 0 \\ \partial_\mu J^\mu &= 0 \\ \partial_t (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) &= 0 \end{aligned}$$

Nel caso di Schrödinger, la prima parentesi è la densità di probabilità $\psi^* \psi$, ma in questo caso la parentesi non è definita positiva e non può rappresentare una densità di probabilità. Questo è un altro problema. Integrando l'equazione di continuità si ottiene la conservazione di una probabilità non definita positiva

$$\partial_t \int d^3x (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = 0$$

Partendo da un pacchetto di onde a sole energie positive, l'operatore di evoluzione temporale porta subito le energie negative.

Si potrebbe affermare che le soluzioni ad energia negativa non siano fisiche e quindi non vadano considerate. Questo non si può fare perché, in meccanica quantistica, lo spazio funzionale è ortonormale e completo. Le soluzioni all'equazione di Klein-Gordon sono complete solo considerando anche le soluzioni ad energia negativa. Successivamente, queste si interpretano come le anti-particelle.

Si definisce la densità di probabilità dell'equazione di Klein-Gordon come

$$\rho \equiv \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$$

Nel coefficiente, la velocità della luce c^2 deriva dal d'Alembertiano, l'unità immaginaria rende l'espressione reale ed il fattore restante permette di ottenere un'espressione della corrente di probabilità identica a quella dell'equazione di Schrödinger.

Nel limite di $v \rightarrow 0$, si deve ottenere la meccanica quantistica classica. Nell'espressione della densità si sostituisce l'equazione di Schrödinger e si ottiene

$$\rho = \frac{E}{2mc^2} (\psi^* \psi + \psi \psi^*) = \frac{E}{mc^2} \psi^* \psi \sim \psi^* \psi$$

L'equazione di Klein-Gordon è un'equazione relativistica, ma con due problemi: l'energia negativa e la probabilità non definita positiva.

2.1 Equazione di Dirac

Si veda anche Dirac, “Principi della meccanica quantistica”, cap. “Teoria relativistica dell’elettrone”.

L’espressione della densità di probabilità, che presenta delle derivate temporali, è dovuta al fatto che l’equazione di Klein–Gordon è di secondo ordine. Dirac si rese conto che per ottenere una densità definita positiva bisogna passare ad un’equazione del prim’ordine.

Lezione 6

Dirac si concentrò sull’equazione al prim’ordine più generale

mar 10 ott
2023 10:30

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{\hbar c}{i} (\alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y + \alpha_3 \partial_z) \psi + \beta mc^2 \psi = H \psi$$

Il primo membro è la trascrizione operatoriale dell’energia, il secondo membro è il termine di massa insieme ad una generica somma delle derivate spaziali. Le derivate spazio-temporali devono apparire nella stessa forma affinché l’equazione sia relativisticamente corretta. Dirac si rese conto che i coefficienti α_i non possono essere numeri perché le derivate costituiscono il gradiente ed esso si trasforma come le componenti di un vettore. Tali coefficienti sono matrici. Similmente, la funzione d’onda non è scalare poiché la densità di probabilità $\rho = \psi^* \psi$ è la componente tempo di un quadri-vettore conservato (e quindi si deve trasformare come una componente temporale, ma gli scalari sono invarianti).

Indicando con ψ^\dagger la versione riga della funzione d’onda ψ , deve sempre valere

$$\rho = \psi^\dagger \psi$$

cioè ρ dev’essere una densità di probabilità: la funzione d’onda ψ si deve trasformare in modo che la densità di probabilità si trasformi come una componente temporale. Seguendo un’interpretazione probabilistica, l’integrale della densità

$$\int d^3x \rho$$

dev’essere invariante e, seguendo lo stesso discorso fatto per la carica elettrica, la misura d^3x si trasforma come un volume, perciò la densità ρ deve trasformarsi come una componente temporale. Pertanto, la funzione d’onda dev’essere un vettore colonna

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad \psi^\dagger = [\psi_1^* \quad \cdots \quad \psi_n^*]$$

Inoltre, dev’essere sempre verificata l’equazione di Klein–Gordon perché contiene ed è la trascrizione della relazione di dispersione di Einstein. Ogni componente della funzione d’onda deve soddisfare tale equazione

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi_i = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi_i$$

Si itera l’equazione lineare considerata da Dirac:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \partial_t^2 \psi_i &= \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha_i \partial_i + \beta mc^2 \right) \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha_j \partial_j + \beta mc^2 \right) \psi_i \\ &= \left[-\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j + \beta^2 m^2 c^4 + \frac{\hbar mc^3}{i} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i \right] \psi \end{aligned}$$

Si noti che gli indici ij non indicano componenti spaziali, ma si usano per abbreviare la scrittura; inoltre $\partial_i = \partial/\partial x_i$ con $x_i = x, y, z$. La derivata seconda è simmetrica per scambio degli indici. Il termine $\alpha_i \alpha_j$ si può scrivere in termini di una parte simmetrica ed una anti-simmetrica

$$\alpha_i \alpha_j = \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i \alpha_j - \alpha_j \alpha_i}{2}$$

La parte anti-simmetrica si annulla quando moltiplicata per la derivata seconda. L'equazione sopra dev'essere uguale a quella di Klein-Gordon per ogni componente. In quest'ultima non compare alcuna derivata mista, ma solamente il laplaciano, pertanto

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \implies \alpha_i^2 = I$$

Inoltre, non sono presenti derivate del prim'ordine:

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

Infine, per confronto si ottiene $\beta^2 = I$. Nell'equazione lineare considerata da Dirac, il secondo membro è l'operatore hermitiano. Da ciò segue la condizione di auto-aggiunzione dei coefficienti:

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta$$

Si consideri la traccia dei coefficienti

$$\text{Tr} \alpha_i = \text{Tr}(1\alpha_i) = \text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \beta \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr} \alpha_i \implies \text{Tr} \alpha_i = 0$$

dove alla quarta uguaglianza si è usata la proprietà di ciclicità della traccia

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$$

mentre alla quinta uguaglianza si è usata la relazione di anti-commutazione tra α_i e β . Le matrici α_i hanno traccia nulla e così β . Dalle relazioni dei quadrati delle matrici, segue che i loro autovalori sono ± 1 . Poiché la traccia è nulla (ed è la somma degli autovalori), allora le matrici hanno dimensione N pari. Le regole di commutazione corrispondono alle stesse delle matrici di Pauli, ma tali matrici sono solo tre. In quattro dimensioni $N = 4$ si ha

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

La funzione d'onda è un vettore di quattro componenti. L'equazione di Dirac è

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{\hbar c}{i} \alpha_i \partial_i \psi + \beta mc^2 \psi$$

Si consideri la corrente conservata ottenuta tramite l'equazione complessa coniugata

$$-i\hbar \partial_t \psi^\dagger = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_i \psi^\dagger) \alpha_i + mc^2 \psi^\dagger \beta$$

Moltiplicando per la funzione d'onda e sottraendo l'equazione dalla coniugata, si ottiene

$$i\hbar \partial_t (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \partial_i (\psi^\dagger \alpha_i \psi) \implies \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Essendo un'equazione del prim'ordine, la quantità temporale è definita positiva. Si ha

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \psi_i^* \psi_i, \quad J^i = c \psi^\dagger \alpha^i \psi$$

Per ora non si è ancora dimostrato che le due quantità sopra costituiscono un quadri-vettore, né si è dimostrata l'invarianza relativistica della funzione d'onda, ma si è solo ricavata una sua corretta interpretazione probabilistica. Bisogna anche capire cosa sia la funzione d'onda.

Significato fisico delle soluzioni. Si studia il caso più semplice. L'operatore derivativo è l'operatore di momento. Ci si pone nel riferimento solidale alla funzione d'onda:

$$i\hbar \partial_t \psi = \beta mc^2 \psi$$

La soluzione di onda piana fornisce

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \psi^2 &= \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \psi^3 &= \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \psi^4 &= \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le prime due corrispondono ad energia positiva, le altre due ad energia negativa.

2.2 Limite non relativistico

Si veda Landau, vol. 2, par. 16. Si considera una soluzione ad energia positiva ed un campo esterno $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$.

Accoppiamento minimale. Si trova il termine di interazione minimale tra una carica ed il campo esterno. L'azione è il più generale invariante di Lorentz

$$S = \int_a^b \left(-mc \, ds - \frac{e}{c} A_\mu \, dx^\mu \right)$$

dove $ds = c \, dt \sqrt{1 - \beta^2}$ è invariante ed e è la carica. Il secondo addendo è pari a

$$-\frac{e}{c} A_\mu \, dx^\mu = \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - e\phi \, dt, \quad \mathbf{v} = d_t \mathbf{x}$$

Dunque

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

Il momento generalizzato (o coniugato, canonico) è

$$\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{v}} L = \gamma m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

dove \mathbf{p} è il momento meccanico (o cinetico). L'hamiltoniana è data da

$$H = \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{v}} L - L = \gamma mc^2 + e\phi = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\phi$$

Questa è l'interazione minimale.

Introducendo il campo esterno, il momento diventa

$$p^i = P^i \rightarrow p^i = P^i - \frac{e}{c} A^i$$

Nella quantizzazione canonica, la traslazione operatoriale $-i\hbar \nabla$ è fatta sul momento coniugato, non sul momento meccanico. Dunque, l'equazione di Dirac per una particella carica in un campo elettromagnetico esterno

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[c \boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi$$

La funzione d'onda è una struttura a quattro componenti su cui operano le matrici α_i . La funzione d'onda è un bispinore che si può scrivere come un vettore di spinori

$$\psi = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Dato l'operatore del momento meccanico $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, l'equazione di Dirac diventa

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Si faccia attenzione alle dimensioni degli operatori: le matrici di Pauli sono bidimensionali e ognuna agisce solo su uno spinore, cioè una componente del bispinore intero.

Ordine zero nell'energia. Si studia il limite non relativistico: l'energia cinetica è molto minore dell'energia a riposo della particella. Il campo esterno dev'essere debole. In questa situazione il termine dominante che si trova nella soluzione ad onde piane è l'energia a riposo mc^2 . Si scrive la funzione d'onda separando il contributo rapidamente variabile — perché dipende da mc^2 — da quello lentamente variabile — la cui energia proviene dal campo esterno:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Inserendo questa espressione nell'equazione di Dirac, si ottiene

$$\begin{aligned} i\hbar \left(-i \frac{mc^2}{\hbar} \right) e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + i\hbar e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \left(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \varphi \\ -\chi \end{bmatrix} \right) \\ i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si hanno due equazioni in termini degli spinori φ e χ . Si consideri la seconda equazione. L'energia residua $i\hbar \partial_t \chi$ dovuta al campo esterno, cui si è già tolto il termine fortemente oscillante, è molta più piccola dell'energia di riposo mc^2 . Per questo, il primo membro — la derivata temporale — ed il secondo addendo del secondo membro — il termine con il potenziale scalare esterno debole — sono trascurabili rispetto all'ultimo termine. Dunque rimane

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} \approx 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \implies \chi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc} \varphi$$

Il secondo spinore è più piccolo rispetto al primo

$$\chi \sim \frac{v}{c} \varphi$$

Nel limite non relativistico, le componenti inferiori del bispinore sono superflue. Nella struttura fine dell'atomo di idrogeno, come si vede successivamente, si possono prendere anche ordini superiori nella velocità v/c .

Si sostituisce l'andamento sopra dello spinore χ nell'equazione di Dirac lentamente variabile:

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m} + e\phi \right] \varphi$$

Si consideri il termine di prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \pi_i \pi_j &= [\delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k] \pi_i \pi_j = [\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k] \left(P - \frac{e}{c} A \right)_i \left(P - \frac{e}{c} A \right)_j \\ &= \pi^2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \left[P_i P_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i P_j - \frac{e}{c} P_i A_j \right] \\ &= \pi^2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \left[P_i P_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i P_j - \frac{e}{c} A_j P_i - \frac{e}{c} (P_i A_j) \right] \\ &= \pi^2 - i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} (P_i A_j) = \pi^2 - \varepsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} \hbar (\partial_i A_j), \quad \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j = (\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k \\ &= \pi^2 - \frac{e}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Alla prima riga si utilizzano le regole di commutazione ed anti-commutazione delle matrici di Pauli:

$$2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k + 2\delta_{ij} I = [\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\sigma_i \sigma_j$$

Alla seconda riga, nell'ultimo addendo, bisogna ricordare che il momento coniugato è un operatore derivativo e la scrittura dell'addendo significa $P_i(A_j \varphi)$. Pertanto

$$-\frac{e}{c} P_i A_j = -\frac{e}{c} A_j P_i - \frac{e}{c} (P_i A_j)$$

L'ultimo addendo deriva solamente A_i e non la funzione d'onda. Alla terza riga il prodotto $A_i P_j$ è simmetrico per scambio degli indici e, sommato con il tensore di Levi-Civita, si ha zero. Lo stesso vale per $P_i P_j$ e $A_i A_j$.

Dunque, nel limite non relativistico, l'equazione di Dirac è

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\phi \right] \varphi$$

Questa è un'equazione di Pauli per una particella di carica e in un campo esterno. Il primo addendo è il termine cinetico, ma è comparso in modo naturale un termine di interazione con il campo magnetico.

Lezione 7

mer 11 ott
2023 10:30

La definizione dell'operatore di momento di spin

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$$

viene in modo naturale. Esso è un momento angolare intrinseco, separato dal momento angolare corrispondente ai gradi di libertà spaziali.

L'equazione di Dirac descrive fermioni a spin $\frac{1}{2}$, mentre l'equazione di Klein–Gordon tratta bosoni scalari.

Fattore giromagnetico. Si consideri il caso particolare di un debole campo magnetico costante e uniforme. Il potenziale vettore di un campo magnetico costante è dato da

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x}$$

Sapendo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

il campo magnetico è

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{x} \\ &= \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{x} = \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B} = \mathbf{B} \end{aligned}$$

Nel secondo addendo della prima riga, l'operatore differenziale si applica sia al campo magnetico che alla posizione. L'espressione $\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z$ è detta operatore di avvezione (advection operator).

La scrittura sopra è fuorviante. Un modo più semplice per verificarla è

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l x_m) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \partial_j (B_l x_m) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (B_l x_m) \\ &= \frac{1}{2} [x_j \partial_j B_i + B_i \partial_j x_j - x_i \partial_j B_j - B_j \partial_j x_i] = \frac{1}{2} [0 + 3B_i - 0 - B_j \delta_{ij}] = B_i \end{aligned}$$

Il primo zero deriva dal fatto che \mathbf{B} è costante, mentre il secondo deriva dalla legge di Gauss per il magnetismo.

Si consideri l'equazione di Pauli sopra. Il quadrato del momento meccanico è

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \left(P - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)_i \left(P - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)_i = P_i P_i - \frac{e^2}{c^2} A_i A_i - \frac{e}{c} A_i P_i - \frac{e}{c} P_i A_i \\ &\sim P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i - i \frac{e}{c} \hbar (\partial_i A_i) = P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i - i \frac{e}{2c} \hbar \partial_i [\varepsilon_{ijk} B_j x_k] \\ &= P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i = P^2 - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = P^2 - \frac{e}{c} \varepsilon_{ijk} B_j x_k P_i = P^2 - \frac{e}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

Alla seconda riga, si considera solamente il prim'ordine in \mathbf{A} . Inoltre, poiché \mathbf{B} è uniforme, vale

$$\partial_i [\varepsilon_{ijk} B_j x_k] = \varepsilon_{ijk} B_j \delta_{ik} = 0$$

giacché il delta di Kronecker è simmetrico e il tensore di Levi–Civita è anti-simmetrico.

Unendo quanto trovato si ha

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{P^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \right] \varphi$$

da cui si può trovare il fattore giromagnetico $g = 2$. Questo è tutto quanto si può trovare al prim'ordine nella velocità v/c .

Prim'ordine nell'energia. Si veda Sakurai, Meccanica quantistica avanzata, p. 86, posto $c = \hbar = 1$. Si consideri l'equazione di Dirac di partenza:

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Si esplicita la dipendenza temporale della funzione d'onda:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Gli spinori a destra sono indipendenti dal tempo. Si vuole scoprire la struttura fine dell'atomo di idrogeno. Il potenziale è dato da

$$\phi = -\frac{Ze}{4\pi r}$$

da cui il momento meccanico diventa $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}$. Si riscrive l'equazione in modo diverso

$$(E - mc^2 - e\phi)\varphi = -i\hbar c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\chi, \quad (E + mc^2 - e\phi)\chi = -i\hbar c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\varphi$$

Si espande la relazione tra χ e φ fino al secondo ordine nella velocità v/c . Dalla seconda equazione si ha

$$\chi = -\frac{i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{E + mc^2 - e\phi} \varphi$$

Si ipotizza il limite non relativistico:

$$E \approx mc^2, \quad |e\phi| \ll mc^2$$

Posta l'energia non relativistica pari a $E^{\text{NR}} = E - mc^2 \ll mc^2$, il termine a denominatore si riscrive come

$$(E + mc^2 - e\phi)^{-1} = (E^{\text{NR}} + 2mc^2 - e\phi)^{-1} = \frac{1}{2mc^2} \left(1 + \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{2mc^2} \left(1 - \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right)$$

Quindi

$$\chi \approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi$$

La procedura segue lo stesso metodo al prim'ordine, tuttavia il calcolo è più complicato. Sorge anche un problema. Infatti, al prim'ordine si è passati da un bispinore all'equazione di Pauli cioè l'equazione per uno spinore. La normalizzazione non è stato un problema. [r] Si deve conservare

$$\int d^3x \varphi_{\text{spinore}} = \int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = 1$$

La relazione ha un termine di ordine β ed un termine di ordine β^2 rispettivamente. Bisogna essere accorti alla normalizzazione identificando correttamente lo spinore di Schrödinger. Evitando tale passaggio, porta ad un'hamiltoniana non hermitiana. Dunque

$$\int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = \int d^3x \left[|\varphi|^2 - \frac{1}{4m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi)^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi) \right]$$

Si ha

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\partial_i\partial_j = \nabla^2$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) &= \int d^3x \left[|\varphi|^2 - \frac{1}{4m^2} \varphi^* \nabla^2 \varphi \right] = \int d^3x \left[|\varphi|^2 + \frac{p^2}{4m^2} |\varphi|^2 \right] \\ &= \int d^3x \varphi^* \left(1 + \frac{p^2}{4m^2} \right) \varphi \end{aligned}$$

In questo modo si ridefinisce il primo spinore di modo che sia il corretto spinore di Schrödinger. Pertanto

$$\varphi_{\text{spinore}} = \left[1 + \frac{p^2}{4m^2} + o\left(\frac{p^4}{m^4}\right) \right] \varphi \iff \varphi = \left[1 - \frac{p^2}{4m^2} + o\left(\frac{p^4}{m^4}\right) \right] \varphi_{\text{spinore}}$$

Questo implica anche

$$\begin{aligned} \chi &\sim \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{E - m - e\phi}{2m} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \left(1 - \frac{p^2}{4m^2} \right) \varphi_{\text{spinore}} \\ &\sim \frac{1}{2m} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \left(1 - \frac{p^2}{4m^2} \right) \frac{E - m - e\phi}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right] \varphi_{\text{spinore}} \end{aligned}$$

[r] L'equazione per questi spinori è data da

$$(E - m)\varphi_{\text{spinore}} = \left[\frac{p^2}{2m} + e\phi - \frac{p^4}{8m^3} - \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{e}{8m^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] \varphi_{\text{spinore}}$$

Questa equazione è esatta al secondo ordine in β . Si ritrova la correzione relativistica [r], l'interazione spin-orbita

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) + o(\beta^2)$$

ma l'argomentazione originale di utilizzare le trasformazioni di Lorentz è errato, perché l'elettrone ha un riferimento non inerziale; inoltre, manca la precessione di Thomas. Inoltre, il fattore 2 viene già naturalmente. Per un potenziale centrale si ha

$$e\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{r} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \partial_r V \right)$$

Dunque

$$\frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) = \frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} d_r V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} d_r V \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

La struttura fine segue automaticamente dall'equazione di Dirac al secondo ordine in β .

Ultimo addendo è il termine di Darwin. Esso non ha alcun equivalente classico. In una teoria relativistica, la localizzazione di una particella non ha senso. Non ha senso dire che un elettrone risente del campo elettrico del protone in un punto \mathbf{r} . [r] L'elettrone è delocalizzato su una scala data dalla propria lunghezza Compton. La densità di carica è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \delta^3(r)e$$

Il termine di Darwin è data da

$$H_D = \frac{e^2 \hbar^2}{8m^2 c^2} \delta^3(r)$$

Solamente gli stati in onda s hanno probabilità non nulla nell'origine: il termine di Darwin ha contributi solamente per gli stati s . Se non si può localizzare un elettrone meglio della sua lunghezza Compton, allora $V(r)$ non ha senso, ma bisogna mediarlo in uno spazio di ordine della lunghezza Compton. Dunque

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \approx V(r) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla V + \frac{1}{2} \delta x_i \delta x_j \partial_{x_i x_j}^2 V$$

[r] isotropo Quindi

$$\langle \Delta V \rangle \sim \frac{1}{6} \nabla^2 V \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2$$

I fattori lineari si mediano a zero, mentre quelli quadratici forniscono contributi (ma non quelli misti). Questo è il contributo all'energia dovuto al fatto che l'elettrone è delocalizzato in un volume isotropo. In modo approssimato, si ha

$$\langle \Delta V \rangle \sim \tilde{H}_D = \frac{e}{6} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \delta^3(\mathbf{r})$$

Il calcolo approssimato fornisce la stessa formula del calcolo esatto, tranne per il fattore numerico.

L'unica cosa che manca da giustificare è il principio di Pauli. Si è trovato il fattore giromagnetico, il termine spin-orbita, lo spin.

Lezione 8

gio 12 ott
2023 10:30

2.3 Covarianza

Si veda Bjorken e Drell, Mandl. Nel Bjorken, la matrice della trasformazione di Lorentz è $a^\mu{}_\nu$.

L'elettrone dell'atomo di idrogeno è altamente non relativistico. Per questo si riescono a trovare risultati esatti. Per ora non si sa come trasforma il bispinore, né si è dimostrata la covarianza dell'equazione di Dirac.

Si trattano sempre trasformazioni proprie. Si ricorda

$$a^\mu{}_\nu a^\nu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho$$

Tutte le trasformazioni ortocrone proprie si possono ottenere dall'unità. Si considerino due riferimenti S ed S' . Le matrici α_i e β sono asimmetriche, si introducono le matrici di Dirac

$$\gamma_i = \gamma^0 \alpha_i, \quad \gamma_0 = \beta$$

[r] struttura tensoriale matrici gamma.

L'equazione di Dirac diventa

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Si studiano le regole di commutazione:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

Si inserisce $\beta^2 = 1$ tra le matrici α_i del primo anti-commutatore:

$$\alpha_i\beta\beta\alpha_j + \alpha_j\beta\beta\alpha_i = 2\delta_{ij} \implies \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \implies \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

Le matrici α_i e β sono hermitiane. L'aggiunzione porta a

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i\beta = -\gamma^i, \quad (\gamma_0)^\dagger = \gamma^0$$

La traccia rimane nulla. In forma matriciale si ha

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

Le matrici di Dirac γ^μ non indica che le matrici costituiscono un quadrivettore. Si introduce la notazione di Feynman

$$\not{p} = v_\mu\gamma^\mu = v_0\gamma^0 - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu = \gamma_\nu\partial^\nu = \gamma^0\partial_t + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$$

[r] L'equazione di Dirac diventa

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi = 0 \iff (\not{p} - mc)\psi = 0$$

Si dimostra la covarianza. [r] Si consideri la scrittura in un altro riferimento S'

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0$$

La funzione d'onda si trasforma in modo lineare perché lo sono le trasformazioni di Lorentz e l'equazione di Dirac. Noto $x' = ax$, vale

$$\psi'(x') = \psi'(ax) = S(a)\psi(x) = S(a)\psi(a^{-1}x')$$

La trasformazione S è funzione della trasformazione di Lorentz che mappa gli spinori nei due riferimenti. Dalla prima e la penultima segue

$$\psi(x) = S(a^{-1})\psi'(x') = S^{-1}(a)\psi'(x') = S^{-1}(a)\psi'(ax)$$

Deve esistere la trasformazione inversa di S . Si ottiene

$$S(a^{-1}) = S^{-1}(a)$$

L'equazione di Dirac nel riferimento primato sarebbe

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)S^{-1}(a)\psi'(x') = 0$$

Moltiplicando per $S(a)$ da sinistra si ha

$$(i\hbar S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)\partial_\mu - mc)\psi'(x') = 0$$

La derivata in termini dell'osservatore primato è

$$\partial_\mu = \partial_\mu x'^\nu \partial_{\nu'} = a^\nu{}_\mu \partial_{\nu'}$$

sapendo che $x'^\nu = a^\nu{}_\mu x^\mu$. Inserendo questa espressione nell'equazione di Dirac sopra si ottiene

$$(i\hbar S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)a^\nu{}_\mu \partial_{\nu'} - mc)\psi'(x') = 0$$

Questa è l'equazione di Dirac che scriverebbe il riferimento primato. Se esiste una trasformazione S tale che

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

allora l'osservatore primato scrive la stessa equazione di Dirac dell'osservatore iniziale. Poiché non si sa calcolare la trasformazione, si utilizzano le trasformazioni infinitesime. Una trasformazione di Lorentz infinitesima è data da

$$a^\nu{}_\mu = \eta^\nu{}_\mu + (\Delta\omega)^\nu{}_\mu$$

dove $\Delta\omega$ è un parametro infinitesimo che non è arbitrario: deve conservare la norma. Questo segue considerando $x^\mu x_\mu$ e sostituendo la loro espressione trasformata fino al prim'ordine [r]. Dunque si ottiene

$$(\Delta\omega)_{\mu\nu} = -(\Delta\omega)_{\nu\mu}$$

I termini misti si annullano ed esso ha sei gradi di libertà. Questi sono i generatori del gruppo di Lorentz. Si sta seguendo una procedura opposta: dalla conservazione della norma, si stanno derivando le trasformazioni di Lorentz. Se a è infinitesima, allora si espande in serie di potenze la trasformazione S :

$$S \approx I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}, \quad S^{-1} \approx I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

dove $\sigma_{\mu\nu}$ è un tensore anti-simmetrico. [r] Si moltiplica l'equazione che caratterizza le S per S^{-1} ed S da sinistra e da destra:

$$a^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(a)\gamma^\mu S(a)$$

Si inserisce la trasformazione di Lorentz infinitesima

$$[\eta^\nu{}_\mu + (\Delta\omega)^\nu{}_\mu]\gamma^\mu = \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\rho}(\Delta\omega)^{\mu\rho}\right)\gamma^\nu \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\Delta\omega)^{\alpha\beta}\right)$$

Si considerano tutti i termini al prim'ordine in $\Delta\omega$:

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu \gamma^\mu = -\frac{i}{4}(\Delta\omega)^{\alpha\beta}[-\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu + \gamma^\nu\sigma_{\alpha\beta}]$$

Anti-simmetrizzando il primo addendo si ha

$$(\Delta\omega)^{\alpha\beta}\eta^\nu{}_\alpha\gamma_\beta = \frac{1}{2}(\Delta\omega)^{\alpha\beta}[\eta^\nu{}_\alpha\gamma_\beta - \eta^\nu{}_\beta\gamma_\alpha]$$

[r] L'equazione sopra diventa

$$2i[\eta^\nu{}_\alpha\gamma_\beta - \eta^\nu{}_\beta\gamma_\alpha] = [\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}]$$

Se esistono sei matrici che soddisfano questa equazione, allora vale l'invarianza di Lorentz. Tali matrici sono dati da

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Si calcola la trasformazione S finita. La versione infinitesima è data da

$$S = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu](\Delta\omega)^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

Il parametro infinitesimo è dato da [r]

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu = \Delta\omega(I_n)^\nu{}_\mu$$

dove $\Delta\omega$ è un numero.

Esempio. Si vede un esempio della forma delle matrici I_n . Si consideri la trasformazione prototipo lungo l'asse x . La matrice è data da

$$I^\nu_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il suo quadrato ed il suo cubo sono dati da

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad I^3 = I$$

Ricordando l'espressione delle funzioni iperboliche e la loro espansione in serie di potenze, la trasformazione finita di una coordina si ottiene applicando infinite volte la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x'^\nu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\eta + \frac{\omega}{N} I \right)^\nu_{\alpha_1} (\dots)^{\alpha_1}_{\alpha_2} \dots (\dots)^{\alpha_{N-1}}_{\alpha_N} x^{\alpha_N} = (e^{\omega I})^\nu_\mu x^\mu \\ &= [\cosh(\omega I) + \sinh(\omega I)]^\nu_\mu x^\mu = [1 - I^2 + I^2 \cosh \omega + I \sinh \omega]^\nu_\mu x^\mu = a^\nu_\mu x^\mu \end{aligned}$$

dove $\Delta\omega = \frac{\omega}{N}$. Segue

$$a = \begin{bmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè le trasformazioni di Lorentz in forma iperbolica dove ω è la rapidità.

Trasformazione di un bispinore. La trasformazione del bispinore è data da

$$\psi'(x') = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \sigma_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu} \right]^N \psi(x) = \exp \left[-\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu} \right] \psi(x)$$

[r] Per la trasformazione dell'esempio? si ha

$$\psi'(x') = \exp \left[-\frac{i}{4} 2\omega \sigma_{01} \right] \psi(x)$$

Per una rotazione attorno all'asse z , il generatore è dato da

$$I^\nu_\mu = \begin{bmatrix} & & & \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\psi'(x') = \exp \left[\frac{i}{2} \sigma_{12} \varphi \right] \psi(x)$$

Questo è simile a quanto si aveva per gli spinori non relativistici

$$\psi'(x') = e^{\frac{1}{2} i \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}}$$

Esercizio. Si studi la matrice degli spinori S per rotazione e boost. Capire se sono unitarie o meno.

Densità di probabilità. Si dimostra che la densità di probabilità $\rho = \psi^\dagger \psi$ è la componente temporale di uno quadri-vettore. La corrente di probabilità è data da

$$J^\mu = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$$

Per trasformazioni di Lorentz, solamente gli spinori ψ si trasformano:

$$J'^\mu = c\psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi$$

L'equazione che soddisfano le matrici S è

$$S\gamma^\mu S^{-1} a^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

[r] da cui segue

$$S^{-1} \gamma^\nu S = \gamma^\mu a^\nu_\mu$$

Pertanto

$$J'^\mu = c\gamma^\dagger a^\nu_\mu \gamma^\mu \psi$$

Si introduce lo spinore aggiunto

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 \implies \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}$$

Esercizio. Dimostrare

$$S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0 \iff S^\dagger \gamma_0 S = \gamma_0$$

Si vuole capire quanto visto ha un corrispondente classico. Si scrivono le relazioni di Ehrenfest.