

# Theoretical Physics II

Maso\*

26 novembre 2023

## Indice

<b>I</b>	<b>Correzioni radiative</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Scattering con un campo esterno</b>	<b>1</b>
1.1	Bremsstrahlung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Divergenza ultravioletta</b>	<b>6</b>
2.1	Campo esterno . . . . .	7

## Lezione 1

[r] cambiare carica  $q$  con  $Q$

mer 22 nov  
2023 10:30

## Parte I

# Correzioni radiative

## 1 Scattering con un campo esterno

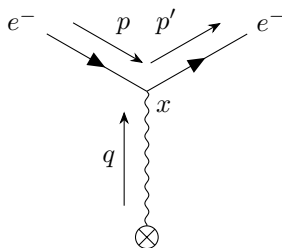
Si studia lo scattering con un campo esterno, cioè un campo statico. Si considera un campo generato da una sorgente massiva che non è influenzata dallo scattering. Infatti, per il principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta v \sim \frac{1}{M}$$

se la sorgente ha una grande massa, allora il suo spostamento è nullo. Sperimentalmente, tale situazione corrisponde allo scattering elettrone-nucleo. Il campo del fotone si può scomporre in una parte trasversa (cioè i fotoni reali) ed una parte statica

$$A^\mu(x) = A_{\text{quant.}}^\mu(x) + A_{\text{clas.}}^\mu(x)$$

La sorgente statica si rappresenta con una croce



---

\*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

Questo diagramma al primo ordine è permesso, a differenza di quelli incontrati in precedenza. Infatti, per questi non si può conservare il quadri-momento perché il fotone considerato è reale, on-shell con  $k^\mu k_\mu = 0$ . In questo caso, il fotone è off-shell e non rispetta la legge di dispersione di Einstein. Esso ha un momento che la sorgente statica può assorbire o fornire senza muoversi. Questo implica che la sorgente è indipendente dal tempo e viene a mancare l'invarianza per traslazione perché la sorgente ha posizione fissa.

Nel diagramma sopra si ha solamente la parte classica del campo elettromagnetico poiché non sono presenti fotoni reali, trasversi. Pertanto, il prim'ordine della matrice di scattering è

$$S^{(1)} = -iq \int d^4x \bar{\psi}^{(-)}(x) A_{\text{cl}}(x) \psi^{(+)}(x), \quad A_{\text{cl}}^\mu(x) = \left( \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0} \right)$$

cioè il campo elettrostatico di Coulomb, con  $e > 0$  carica elementare. Si comprende già che l'energia è conservata, ma non il momento. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= \langle 0 | c(\mathbf{p}') (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) : c^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) e^{-i(p-p')_\mu x^\mu} \\ &= 2\pi \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{q}) \delta(E - E') \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ . In assenza della sorgente statica, i propagatori sono tutti invarianti per traslazioni spaziali e temporali, ma ora il campo del fotone dipende dalla posizione. Alla seconda riga la parte temporale fornisce la conservazione dell'energia tramite una delta, mentre la parte spaziale dà la trasformata di Fourier del campo. Non si ha più l'invarianza per traslazione spaziale perché si è fissata la sorgente. Il momento non si conserva: la sorgente assorbe momento senza muoversi, una particella che fa scattering cambia direzione. Il modulo del momento, cioè l'energia, è ancora conservata poiché si ha invarianza per traslazione temporale.

Si aggiunge un'altra regola di Feynman. Ogni volta che appare uno scattering con un campo esterno statico si ha un termine

$$A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{q}) \quad \alpha \quad \leftarrow q$$

mentre nell'elemento di matrice si sostituisce

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \rightarrow (2\pi) \delta(E_f - E_i)$$

**Sezione d'urto.** La sezione d'urto nell'angolo di scattering dell'elettrone uscente è la formula di scattering di Mott:

$$\begin{aligned} d\Omega' \sigma &= \frac{1}{2} m^2 \frac{(2\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \sum_{rs} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \frac{(\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr}[(\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma_0] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta + m^2) = \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [2m^2 + |\mathbf{p}|^2 (1 + \cos \theta)] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 2m^2 + 2|\mathbf{p}|^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ E^2 - |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \frac{(\alpha Z)^2 E^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 \beta^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} \end{aligned}$$

Si noti che la sezione d'urto include il numero atomico dell'atomo considerato. Poiché si utilizza la teoria delle perturbazioni, per elementi pesanti bisogna porre attenzione al prodotto  $\alpha Z$ . Alla seconda riga si è applicato

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma}]$$

alla terza riga si è applicato

$$E = E' \implies |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Il primo addendo della sezione d'urto è pari alla sezione d'urto Rutherford: lo scattering di particelle alfa su atomi di oro. Il termine ulteriore compare perché si è calcolato lo scattering per fermioni e deriva dall'effetto dello spin. Nel limite non relativistico  $\beta \rightarrow 0$  si ottiene Rutherford, tuttavia si è utilizzata la teoria delle perturbazioni per ottenere il risultato. Se il numero atomico  $Z$  è grande, lo sviluppo perturbativo può essere inaffidabile. Infatti, la formula di Mott non è sperimentalmente affidabile per  $Z \gtrsim 40$ . Ciononostante, il problema a due corpi si risolve analiticamente e la sezione d'urto esatta corrisponde a quella trovata con lo sviluppo perturbativo. Per il problema Coulombiano, nel limite non relativistico, tutti gli ordini superiori si riducono ad una fase<sup>1</sup>. Pertanto, l'ordine  $\alpha^2$  è esatto.

La formula sopra si può ritrovare anche in astrodinamica con il problema Kepleriano a due corpi: questo è il caso delle orbite iperboliche.

Per studiare una zona di dimensione spaziale  $\Delta x$ , il momento necessario è  $(\Delta x)^{-1}$ . Quando il parametro di impatto è grande, il momento trasferito è piccolo, e viceversa. Infatti, il seno al denominatore deriva dal momento trasferito  $|\mathbf{q}|$  cioè il denominatore del campo di Coulomb pari alla trasformata di Fourier di  $r^{-1}$ .

Per angoli piccoli, la sezione d'urto diverge a causa del seno. Infatti

$$\sigma = \int d(\cos \theta) d\varphi d\Omega \sigma \sim \int \theta d\theta d\Omega \sigma = \int \frac{d\theta^2}{\theta^4} \rightarrow \infty$$

Tuttavia, si dev'essere commesso un errore: l'esperimento di Rutherford vide una distribuzione ragionevole di atomi di elio, senza evidenze di una divergenza della sezione d'urto. Lo scattering di una particella su un nucleo è definito dal parametro  $b$  di impatto cioè quanto la traiettoria dista dal nucleo (cioè la distanza dal nucleo nel piano perpendicolare alla direzione del moto). Il campo di Coulomb è un campo a lungo raggio, va come  $\frac{1}{r}$ : non si annulla abbastanza rapidamente ad infinito. Questo è uno dei problemi da cui deriva la patologia del campo elettromagnetico. Il nucleo causa scattering per un parametro di impatto pari circa al raggio di Bohr. Per grandi parametri di impatto, il nucleo viene schermato dagli elettroni, cosa che non si è considerata nel calcolo precedente. Si è commesso un errore fondamentale: ipotizzare l'esistenza di una sorgente senza nulla intorno. Questo è analogo a quanto si è già accennato trattando dell'elettrone bare.

Per risolvere il problema, si utilizza il (energia) potenziale di Yukawa, cioè un campo smorzato

$$V_Y = -\frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a_0}}$$

dove  $a_0$  è il raggio di Bohr. La divergenza trovata è causata da una cattiva definizione del problema.

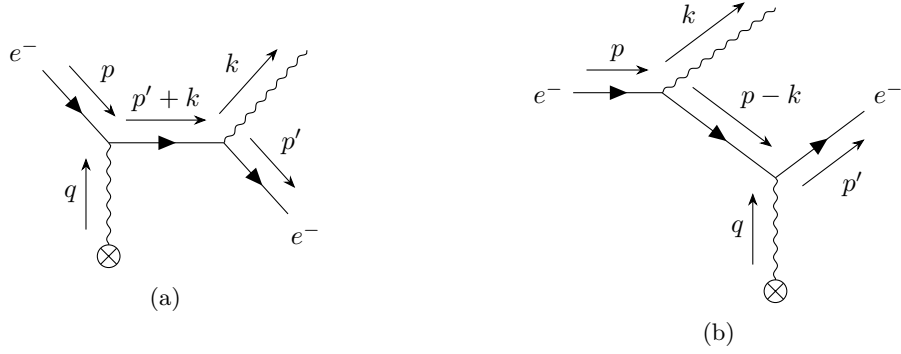
## 1.1 Bremsstrahlung

Si studia la radiazione emessa a causa della decelerazione di una particella carica. Si aggiunge un fotone reale allo scattering con un campo esterno

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma$$

I diagrammi corrispondenti sono dati da

<sup>1</sup>Si veda Dalitz Richard Henry. 1951. On higher Born approximations in potential scattering. *Proc. R. Soc. Lond. A* **206**:509–520. <http://doi.org/10.1098/rspa.1951.0085>.



dove  $q = p' + k - p$ . Nel primo diagramma il propagatore del fermione porta momento  $p' + k$ , mentre nel secondo diagramma porta  $p - k$ . In questo caso si hanno entrambi i contributi della parte trasversa e della parte classica del campo del fotone. Il second'ordine della matrice di scattering è

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-iq)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \gamma^\mu (A_\mu^T + A_\mu^{cl}) \psi :_x : \bar{\psi} \gamma^\nu (A_\nu^T + A_\nu^{cl}) \psi :_y \} \\ &= (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^T)^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^{cl})^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \\ &\quad + (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^{cl})^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^T)^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \end{aligned}$$

La seconda riga corrisponde al primo diagramma, mentre la terza riga al secondo diagramma. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (2\pi) \delta(E' + \omega - E) \prod_i N_i \left[ \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{i}{\not{p}' + \not{k} - m} (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

La sezione d'urto esatta è quella di Bethe-Heitler (v. Itzykson e Zuber, p. 240).

**Fotone soffice.** Si opera l'approssimazione di fotone soffice, cioè l'energia del fotone è molto minore di quella dell'elettrone che l'ha emesso

$$\mathbf{k} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}', \quad \omega \ll E, E', \quad |\mathbf{p}| \approx |\mathbf{p}'|$$

L'ultima relazione porta allo scattering elastico. Infatti, lo scattering sopra è detto anelastico. Dunque, il termine del primo diagramma diventa

$$\begin{aligned} I &= \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2(p'k)} A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \\ &\approx \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + m}{2(p'k)} A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Nel limite di  $k$  piccolo, la frazione porta ad una divergenza infrarossa, diversa da quelle sospettate per l'auto-energia e la polarizzazione del vuoto (cioè divergenze ultraviolette). Applicando l'anti-commutatore delle matrici di Dirac

$$\not{\epsilon}(\not{p}' + m) = (-\not{p}' + m) \not{\epsilon} + 2\varepsilon^\mu p'_\mu$$

e noto che  $\bar{u}$  soddisfa l'equazione di Dirac poiché riguarda una particella reale, si ottiene

$$I = \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{p'_\nu k^\nu} \bar{u}(\mathbf{p}') A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p})$$

cioè un termine proporzionale a quello dello scattering elastico precedente.

Le ampiezze di Feynman per i due diagrammi sono

$$\mathcal{M}_a = i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{k^\nu p'_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})]$$

$$\mathcal{M}_b = -i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p_\mu}{k^\nu p_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})]$$

Nella parentesi è presente l'ampiezza dello scattering elastico. Questo è un primo esempio di fattorizzazione: lo scattering elastico viene fattorizzato. Il tasso di transizione è il tasso dello scattering elastico per il tasso di emettere un fotone.

L'elemento di matrice di transizione è

$$S_{fi} = (2\pi) \delta(E' - E) \frac{m}{EV} (-iq^2) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]$$

Sommando sulle polarizzazioni finali del fotone, la sezione d'urto è

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elastico}} \frac{q^2}{2\omega V} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V \\ &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elas}} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{\omega} \end{aligned}$$

si nota che l'ampiezza in parentesi è invariante di gauge: infatti basta sostituire  $\varepsilon' = \varepsilon - ikf$  e ricordare che  $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$ . Anche la sezione d'urto esatta è invariante di gauge. La probabilità di bremsstrahlung è il prodotto della probabilità di scattering elastico e della probabilità di emettere un fotone.

Il termine in parentesi si può riscrivere come

$$\left[ \frac{\varepsilon_r^\mu p'_\mu}{kp'} - \frac{\varepsilon_r^\mu p_\mu}{kp} \right] \left[ \frac{\varepsilon_s^\nu p'_\nu}{kp'} - \frac{\varepsilon_s^\nu p_\nu}{kp} \right] = \varepsilon_r^\mu \varepsilon_s^\nu \left[ \frac{p'_\mu p'_\nu}{(kp')^2} - \frac{p'_\mu p_\nu}{(kp')(kp)} - \frac{p_\mu p'_\nu}{(kp)(kp')} + \frac{p_\mu p_\nu}{(kp)^2} \right]$$

Ricordando che

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_\mu^r \varepsilon_\nu^r = -\eta_{\mu\nu}$$

la somma sulle polarizzazioni è

$$\sum_{rs} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 = -\frac{p'^2}{(kp)^2} + \frac{2pp'}{(kp)(kp')} - \frac{p^2}{(kp)^2} = -\left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{kp} \right]^2$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale di Bethe-Heitler nel limite di fotone soffice è

$$\begin{aligned} d_{\Omega} \sigma &= d_{\Omega} \sigma|_{\text{elast}} \frac{-q^2}{2\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk'} \right]^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\ &= d_{\Omega} \sigma|_{\text{elast}} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3 k}{\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk'} \right]^2 = d_{\Omega} \sigma|_{\text{elast}} dP \end{aligned}$$

La parentesi diverge nell'infrarosso cioè per  $k$  piccolo.

## Lezione 2

**Divergenza infrarossa.** La sezione d'urto elastica è di ordine  $\alpha^2$  (si noti che un ordine  $\alpha$  deriva da  $A_{\text{cl}}$ ) quindi la sezione d'urto anelastica è di ordine  $\alpha^3$ . Si studia il comportamento, in particolare

$$dP \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0$$

Questa divergenza è diversa da quella trovata per lo scattering Rutherford. In quel caso, essa è causata da una cattiva definizione del processo che avviene. In questo caso, chiedersi quanti fotoni

gio 23 nov  
2023 10:30

sono emessi ad energia sempre più piccola è lecito. Bisogna capire la natura di tale divergenza. Inoltre, nell'esperimento di Rutherford non si osserva una crescita a grande parametro di impatto, mentre nella bremsstrahlung si osserva sperimentalmente che i fotoni emessi aumentano al diminuire della loro energia.

Per risolvere il problema, bisogna definire operativamente lo scattering elastico ed anelastico: il primo è uno scattering in cui non si misura alcun fotone emesso. Bisogna porre attenzione al fatto che gli apparati sperimentali hanno una sensibilità limitata. Si deve ridefinire il concetto di scattering elastico tenendo conto di tale sensibilità. Alla probabilità dello scattering elastico

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z$$

bisogna aggiungere anche la probabilità di bremsstrahlung con energia minore di quella minima rivelabile

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega < \omega_{\min}$$

Pertanto lo scattering anelastico è quello per cui il fotone ha un'energia maggiore di quella minima

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega \geq \omega_{\min}$$

Con questa ridefinizione, l'integrale dello scattering anelastico non diverge più

$$dP \sim \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega^3} < \infty$$

Il problema è stato spostato nello scattering elastico. Il punto cruciale è la sensibilità dell'apparato di misura: al di sotto di una certa energia, l'apparato è cieco alla distinzione tra elastico ed anelastico. La divergenza è causata dalla massa nulla del fotone. Considerando una piccola massa  $\lambda$  del fotone, la sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d\Omega\sigma|_{\text{el. sp.}} = d\Omega\sigma|_{\text{elas}} \left[ 1 + \alpha \ln \frac{\omega_{\min}}{\lambda} \right]$$

Questa regolarizzazione viene spesso utilizzata. Si può modificare una teoria per ottenerne un'altra e può accadere che unendo correttamente i contributi, i termini proporzionali al parametro aggiunto si semplificano. Pertanto, la teoria nel limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  è perfettamente definita. Lo stesso si può fare per una divergenza ultravioletta.

Modificare l'elettrodinamica quantistica porta ad una teoria che viola l'invarianza di gauge, ma in cui la massa del fotone si semplifica e si può fare il limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  per ottenere l'elettrodinamica non modificata.

Inoltre, poiché l'ordine dello scattering anelastico è  $\alpha^3$  bisogna considerare tutti i termini di tale ordine, non solamente alcuni: mancano i termini di interferenza (i prodotti misti) provenienti dagli ordini superiori. Per aggiungere un ordine  $\alpha$  bisogna anche considerare i diagrammi dello scattering elastico con tre vertici: quando si calcola il modulo quadro della somma delle ampiezze di Feynman del diagramma ad un vertice e dei diagrammi a tre vertici, compaiono i termini misti di ordine  $\alpha^3$  (e termini di ordine superiore trascurabili). In questo modo, al grafico dello scattering elastico si aggiungono le correzioni virtuali derivanti dalle particelle virtuali. Le correzioni virtuali cancellano la divergenza infrarossa parametrizzata dalla piccola massa del fotone. In questo modo si può fare il limite per massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$ . In particolare, il teorema di Bloch–Nordsieck afferma che, per tutti i processi in elettrodinamica quantistica, le divergenze infrarosse si cancellano esattamente ad ogni ordine perturbativo, lasciando solamente le correzioni radiative finite di ordine  $\alpha$  (rispetto all'ordine minore).

## 2 Divergenza ultravioletta

Finora si sono studiati i diagrammi albero cioè diagramma in cui non appaiono loop. Le correzioni radiative appaiono sempre ad ordini superiori dello sviluppo perturbativo. Si noti che le discussioni valgono a stati iniziale e finale fissati. Come prototipi si utilizzano i diagrammi di scattering con un campo esterno e di scattering Compton.

Nella lagrangiana del campo di Dirac in interazione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - q_0\bar{\psi}\not{A}\psi$$

sono presenti i parametri bare  $m_0$  ed  $q_0$ . Le misure sperimentali riguardano la massa  $m$  e la carica  $q$  fisiche, in particolare la carica bare più tutte le auto-interazioni. La carica bare non si può misurare. La relazione tra i parametri effettivi ed i parametri bare non si può misurare perché bisogna sempre considerare il campo elettromagnetico. Questa discussione è simile a trattare il campo elettrico nei materiali  $\mathbf{D}$  aggiungendo la polarizzazione  $\mathbf{P}$  al campo elettrico nel vuoto  $\mathbf{E}$ . In un materiale, si misura il campo elettrico  $\mathbf{D}$ . La relazione tra i due campi è una costante di proporzionalità. In teoria dei campi, la differenza tra la carica bare e quella fisica è infinita. Passare dalla teoria libera alla teoria in interazione ridefinisce i parametri introdotti nella lagrangiana libera e si studia tale ridefinizione.

I diagrammi divergenti nell'ultravioletto sono l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Il procedimento da seguire è

- isolare gli infiniti modificando la teoria tramite la regolarizzazione, se ne esiste un numero infinito, la teoria ha un utilizzo limitato;
- calcolare le relazioni tra parametri bare e fisici;
- ritornare alla teoria originaria, ma ora senza infiniti.

La procedura, se possibile, implica che la teoria è rinormalizzabile. Una teoria non rinormalizzabile può essere una teoria efficace, cioè corretta fino ad un certo ordine, agli ordini superiori compare sempre un nuovo infinito e si ha bisogno di una nuova costante di rinormalizzazione.

Il Modello Standard è un'unica teoria rinormalizzabile tramite il metodo funzionale (che è diverso dal modo perturbativo presentato), ma è comunque incompleto.

## 2.1 Campo esterno

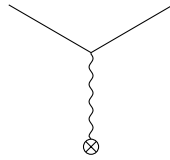
L'ampiezza di Feynman associata al diagramma di scattering con un campo esterno è

$$\mathcal{M}' = -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{A}_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})$$

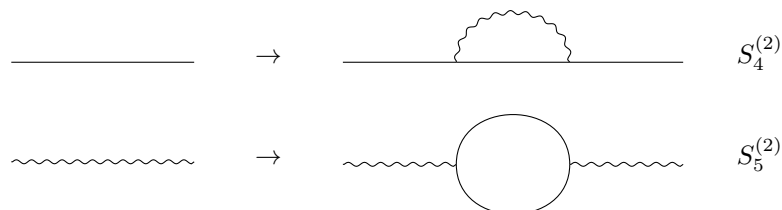
dove si considerano i parametri bare  $q_0$  ed  $m_0$ . Non si considera la parte quantizzata del campo del fotone poiché non sono presenti fotoni negli stati iniziale e finale. La matrice di scattering è

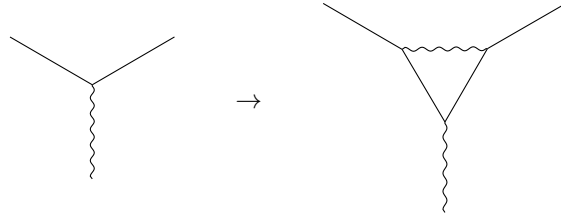
$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iq_0)^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \not{A}_{cl} \psi :_{x_1} : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_2} \cdots : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_n} \}$$

dove il campo senza pedice è il solo campo quantizzato  $A \equiv A^T \equiv A_{quant}$ . Si considera un solo campo classico perché si ipotizza essere debole e dunque soppresso agli ordini superiori. Si vedono i diagrammi dello sviluppo. Al prim'ordine  $n = 1$  è presente solo il campo classico

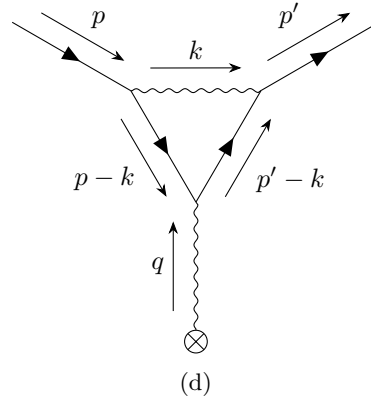
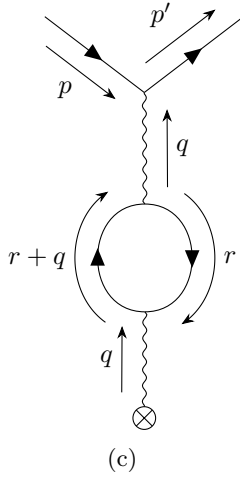
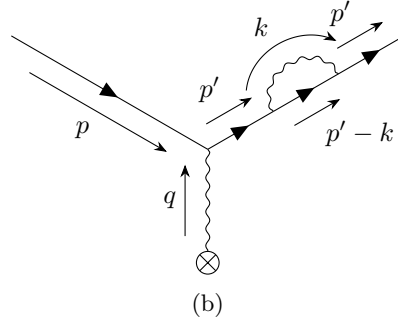
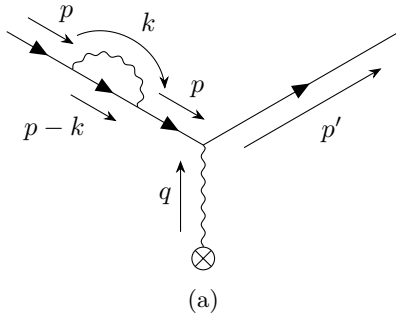


Al second'ordine  $n = 2$  si ha la bremsstrahlung: il campo  $A$  ha anche la parte quantizzata che descrive i fotoni reali. Al terzo ordine  $n = 3$  ci sono le correzioni radiative: l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Per ottenere i grafici corrispondenti, bisogna operare le sostituzioni seguenti





Pertanto si ha



dove  $q = p' - p$ . Questi sono gli unici diagrammi possibili al terzo ordine. In tutti è presente un integrale che potrebbe divergere. Le ampiezze di Feynman corrispondenti sono

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu] u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_b &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\nu] iS_F(p') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_c &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) iD_F^{\mu\nu}(q) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r [\gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r)] A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_d &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [\gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)] u(\mathbf{p}) A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\end{aligned}$$

dove si pone

$$\begin{aligned}iq_0^2 \Sigma(p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu \\ iq_0^2 \Pi_{\nu\rho}(q) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r \gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r) \\ q_0^2 \Lambda_\rho(p', p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)\end{aligned}$$

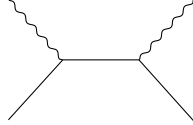


Si studia il limite ultravioletto, cioè  $k \rightarrow \infty$ . I termini sopra vanno come

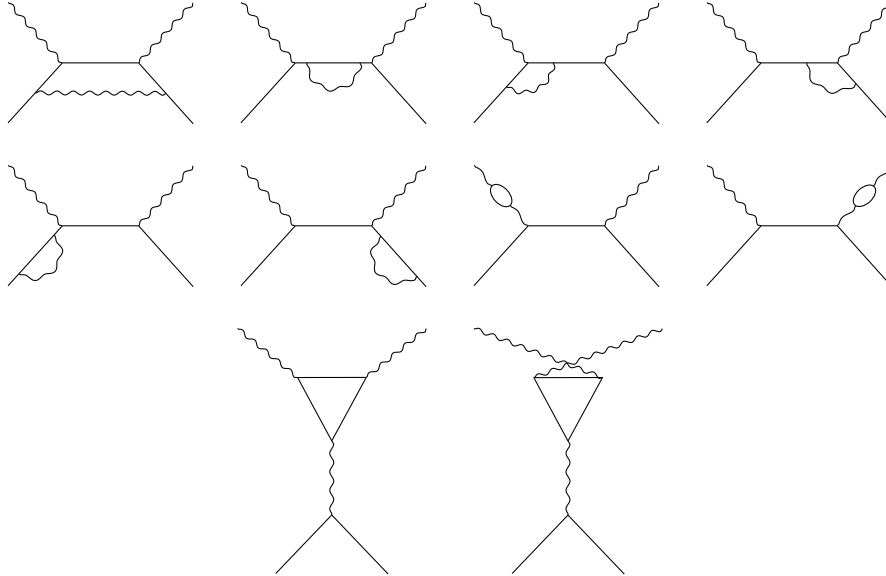
$$\Sigma \sim \int dk, \quad \Pi \sim \int dr r, \quad \Lambda \sim \ln k$$

I propagatori sono fattori di convergenza, ma non ne sono presenti abbastanza. In elettrodinamica quantistica, questi sono i soli diagrammi divergenti.

**Classificazione dei diagrammi.** Capiti i diagrammi con loop, si studiano i diagrammi in modo dettagliato con l'aggiunta delle correzioni radiative nel caso dello scattering Compton. Al diagramma albero



si aggiungono le correzioni sopra per ottenere parte dei seguenti diagrammi:



Si noti che il primo diagramma e gli ultimi due non si possono ottenere aggiungendo le correzioni.

Nel primo diagramma, l'elettrone entrante interagisce con quello finale tramite un fotone virtuale. Gli ultimi due diagrammi si possono trattare tramite il teorema di Furry: tutti i diagrammi che contengono un loop fermionico con un numero dispari di vertici si sommano a zero. Intuitivamente, l'ultimo diagramma, tramite la simmetria di crossing della matrice di scattering, si può far diventare il penultimo, ma con un segno negativo e dunque i due si cancellano.

Si vogliono studiare le classi di diagrammi. Evitando di considerare gli ultimi due diagrammi, il primo diagramma è diverso da tutti gli altri poiché è one particle irreducible (1PI), mentre gli altri sono one particle reducible (1PR). Per ottenere un tale diagramma si può usare un diagramma di ordine inferiore e aggiungere una delle tre correzioni sopra. I diagrammi one particle reducible sono utili perché dal diagramma albero si possono ottenere le correzioni all'ordine superiore. I diagrammi nella seconda riga, correggono le particelle fisiche e questo significa rinormalizzare la funzione d'onda.

**Correzioni ai propagatori.** Il propagatore del fermione si corregge aggiungendo l'auto-energia

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

le cui linee corrispondenti sono



Si vuole costruire un diagramma scheletro. Si inserisce un rettangolo che indica il propagatore corretto fino ad un ordine stabilito. Si modifica la teoria ed un propagatore, come quello del fotone

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = -\frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \sim -\frac{\Lambda^2}{k^4}, \quad k \rightarrow \infty$$

Si introduce un cut-off. Nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  compare nuovamente la divergenza dell'integrale. In questo modo si è aumentata la potenza a denominatore di modo che l'integrale sia convergente. Secondo la regolarizzazione di Pauli-Villars, il propagatore corretto si può intendere come una particella con massa  $\Lambda$ , sebbene abbia un segno negativo. In questo modo l'integrale converge e se il risultato non dipende dal cut-off  $\Lambda$  allora nel limite ultravioletto si ottiene la teoria originaria. Questa regolarizzazione si può fare per l'elettrodinamica quantistica, ma per altre teorie non è possibile.

Il grado di divergenza degli integrali nei diagrammi di Feynman è

$$D = 4 - I_F - 2I_B$$

dove  $I_j$  indica il numero di propagatori di fermioni F e di bosoni B, cioè i fattori convergenza. Se il grado di divergenza superficiale è  $D < 0$  allora l'integrale converge, se  $D > 0$  allora diverge. Se  $D = 0$ , allora diverge logicamente. Questo grado di divergenza è superficiale perché si basa sul power-counting. Altre condizioni, come le simmetrie e cancellazioni, possono cambiare il grado di divergenza superficiale. In particolare si vede che i diagrammi sopra hanno solo divergenza logica.

Il cut-off rompe l'invarianza di gauge, cioè il gruppo di simmetria locale U(1), e questo complica un poco la teoria. Per il Modello Standard, la teoria si complica molto di più e bisogna utilizzare la regolarizzazione dimensionale passando a  $4 - \varepsilon$  dimensioni ottenendo integrali convergenti. Infatti, il caso peggiore  $D = 0$  diventa negativo di poco e si prolungano analiticamente gli integrali in un numero reale di dimensioni, cioè  $4 - \varepsilon$ . Le singolarità vanno come  $\varepsilon^{-1}$ , ma i termini si semplificano e si può ritornare alla teoria originaria. La regolarizzazione dimensionale non rompe la teoria di gauge.