

# Computational Physics Laboratory

Maso\*

13 aprile 2024

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>I</b>	<b>Integrazione numerica elementare</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formule di Newton–Cotes</b>	<b>3</b>
2.1	Integrazione secondo quadrature numeriche . . . . .	5
2.1.1	Regola trapezoidale . . . . .	6
2.1.2	Regola di Simpson . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Quadrature gaussiane</b>	<b>8</b>
3.1	Polinomi ortogonali . . . . .	8
3.2	Quadrature gaussiane . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Integrazione numerica composta</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Integrali multidimensionali</b>	<b>10</b>
<b>II</b>	<b>Metodi Monte Carlo</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Teorema del limite centrale</b>	<b>11</b>
6.1	Polinomi ortogonali di Hermite . . . . .	11
6.2	Trasformata di Fourier . . . . .	12
6.3	Trasformata di una convoluzione . . . . .	12
6.4	Variabile aleatoria e distribuzione di probabilità . . . . .	13
6.5	Funzione generatrice . . . . .	13
6.6	Variabile standardizzata . . . . .	14
6.7	Proprietà dei cumulanti . . . . .	14
6.8	Teorema del limite centrale . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Metodi Monte Carlo</b>	<b>16</b>
7.1	Serie di Edgeworth . . . . .	16
7.2	Metodo Monte Carlo . . . . .	17
7.2.1	Integrali multidimensionali . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Campionamento di importanza</b>	<b>19</b>
8.1	Metodo del cambio di variabili . . . . .	20
8.1.1	Cambio multidimensionale . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>22</b>

---

\*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

<b>III</b>	<b>Integrale sui cammini in meccanica quantistica</b>	<b>22</b>
<b>10</b>	<b>Integrale sui cammini di Feynman</b>	<b>22</b>
10.1	Propagatore ritardato . . . . .	23
10.2	Operatore di trasferimento . . . . .	25
10.2.1	Operatore di trasferimento euclideo . . . . .	26
<b>11</b>	<b>Funzioni di correlazione</b>	<b>30</b>
11.1	Prodotto ordinato temporale di operatori . . . . .	30
11.2	Funzioni di correlazione . . . . .	31
<b>12</b>	<b>Oscillatore armonico</b>	<b>33</b>
12.1	Integrale sui cammini . . . . .	34
<b>IV</b>	<b>Catene di Markov e teorema ergodico</b>	<b>38</b>
<b>13</b>	<b>Catene di Markov</b>	<b>38</b>
13.1	Matrice di probabilità di transizione . . . . .	39
13.2	Probabilità di transizione dopo un numero arbitrario di passi . . . . .	40
13.2.1	Esempio — parte prima . . . . .	40
13.3	Classificazione degli insiemi di stati . . . . .	41
13.4	Classificazione degli stati . . . . .	42
13.4.1	Esempio — parte seconda . . . . .	45
13.5	Distribuzioni all'equilibrio . . . . .	46
13.6	Distribuzione invariante per un insieme di stati ergodici . . . . .	47
13.7	Riassunto sulle catene . . . . .	49
13.8	Bilancio dettagliato . . . . .	49
<b>14</b>	<b>Algoritmo di Metropolis</b>	<b>50</b>
<b>V</b>	<b>Simulazioni numeriche</b>	<b>51</b>
<b>15</b>	<b>Riassunto delle formule teoriche</b>	<b>51</b>
15.1	Monte Carlo standard per l'oscillatore armonico . . . . .	53
15.2	Autocorrelazione . . . . .	55
15.3	Analisi jackknife . . . . .	56
<b>16</b>	<b>Formule teoriche oscillatore armonico</b>	<b>59</b>
<b>VI</b>	<b>Lattice QCD</b>	<b>61</b>
<b>17</b>	<b>Introduzione</b>	<b>61</b>
17.1	Azione di QCD . . . . .	62
17.2	Prove sperimentali . . . . .	64
17.3	Lattice QCD . . . . .	65
<b>18</b>	<b>Elettrodinamica quantistica</b>	<b>65</b>
<b>19</b>	<b>Teorie di Yang–Mills</b>	<b>66</b>
19.1	Campo di gauge . . . . .	66
19.2	Azione gauge-invariante . . . . .	67
<b>20</b>	<b>Quantum chromodynamics</b>	<b>67</b>

<b>21 Lattice gauge theory</b>	<b>68</b>
21.1 Wilson gluonic action . . . . .	69
21.2 Limite al continuo classico . . . . .	69
21.3 Azione fermionica . . . . .	71

## Lezione 1

ven 06 ott  
2023 14:30

**Esame.** Orale di teoria, discussione relazione (circa 10, 15 ore per scrivere cosa fatto durante tutto l'anno) e correttezza programmi. Orale prevede interrogazione su teoremi e dimostrazioni. Simulazione QCD si analizzano dati (si può fare in python), ma il programma è dato dal prof.

## 1 Introduzione

L'utilizzo della computazione per la fisica teorica permette di risolvere problemi prima inattaccabili. Ad esempio, la cromodinamica quantistica (QCD) è una teoria non perturbativa alle basse energie: calcolare le masse di varie particelle non si può fare analiticamente, ma bisogna affidarsi ad un calcolatore. Inoltre, la maggioranza dei problemi interessanti della fisica vengono risolti numericamente perché le equazioni di tali problemi sono così complesse da rendere difficile trovare una soluzione analitica. Il corso tratta i metodi per calcolare integrali sui cammini.

I metodi numerici permettono di formulare teoremi proprio come con i metodi analitici. L'analisi numerica studia i metodi numerici sviluppandoli in modo da sapere l'errore associato ad un metodo ed il significato di tale errore. Una differenza con i metodi analitici è data dai parametri: nei metodi numerici non si ottengono funzioni di parametri, ma si ottengono numeri perché bisogna specificare il valore dei parametri.

## Parte I

# Integrazione numerica elementare

Si studiano i metodi di integrazione deterministici.

## 2 Formule di Newton–Cotes

Si consideri una funzione di una variabile

$$y = f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

**Definizione 2.1.** Sia  $P_n$  l'insieme di tutti i polinomi di grado minore o uguale a  $n$ .

**Definizione 2.2.** Dati dei punti  $x_0, \dots, x_n$  distinti in un intervallo  $[a, b]$ , un polinomio  $p(x) \in P_n$  interpola  $f(x)$  in ognuno dei punti se

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

**Definizione 2.3.** Dati dei punti  $x_0, \dots, x_n$  distinti, il  $j$ -esimo polinomio di Lagrange (detto anche funzione cardinale) di grado  $n$  è

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

[r] mettere  $i = 0$  sotto o sopra  $i \neq j$ .

**Proposizione 2.4.** Questi polinomi hanno la seguente proprietà:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

I polinomi di Lagrange formano una base dell'insieme  $P_n$ : i polinomi sono non nulli solamente nei punti in cui  $i = j$ .

**Teorema 2.5.** Dati dei punti  $x_0, \dots, x_n$  distinti in un intervallo  $[a, b]$  e dato un insieme  $y_0, \dots, y_n$  di numeri reali, esiste ed è unico il polinomio  $p(x) \in P_n$  tale che

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, n$$

*Dimostrazione.* L'unicità è data dal teorema fondamentale dell'algebra. Si dimostra l'esistenza. Si consideri

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

Il suo valore in  $x_j$  risulta essere

$$p(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ij} = y_j$$

□

**Osservazione 2.6.** L'unicità deriva dal fatto che i polinomi di Lagrange  $l_i$  sono una base dello spazio vettoriale  $P_n$ .

**Osservazione 2.7.** Se una funzione  $f(x)$  è tale per cui  $f(x_i) = y_i$ , allora  $p(x) \in P_n$  è il polinomio interpolante di tale funzione  $f(x)$  nei punti  $x_i$ . Pertanto

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

**Teorema 2.8.** Data una funzione  $f \in C^{n+1}[a, b]$  e dato il polinomio  $p \in P_n$  che interpola la funzione  $f(x)$  in  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ , in ogni punto dell'intervallo vale

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Ad ogni punto  $x \in [a, b]$  corrisponde un punto  $\xi \in (a, b)$  tale che la formula è versa. La scrittura  $f^{(r)}$  indica la derivata  $r$ -esima.

**Osservazione 2.9.** Il polinomio  $p(x)$  è generico (non è detto nella base di Lagrange) e  $x_0, \dots, x_i$  non devono essere distinti come nell'altro caso. La dimostrazione seguente non assume mai che i punti siano distinti. [r]

*Dimostrazione.* Si consideri una funzione

$$g(z) = f(z) - p(z) - Q(z) \frac{f(x) - p(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \equiv \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

dove  $x$  è da intendersi come parametro. Essa ha  $n+2$  zeri nell'intervallo  $[a, b]$ : i primi  $n+1$  dati quando  $z = x_i$  e l'ultimo per  $z = x$ . Per il teorema di Rolle, la derivata  $g'(z)$  ha  $n+1$  zeri. Similmente, la derivata  $g^{(n+1)}(z)$  ha almeno uno zero in un punto  $\xi \in (a, b)$ . Dunque

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(\xi) = 0 &\implies 0 = f^{(n+1)}(\xi(x)) - (n+1)! \frac{f(x) - p(x)}{Q(x)} \\ &\implies f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \end{aligned}$$

La funzione  $g$  introdotta contiene la funzione resto cioè la frazione. □

**Osservazione 2.10.** Si noti che la dimostrazione non fa uso dell'ipotesi di punti  $x_j$  distinti.

**Osservazione 2.11.** In questo modo si può porre un limite superiore all'errore derivante dall'interpolazione polinomiale: il limite è dato dal massimo della derivata moltiplicata per i coefficienti della formula sopra.

## 2.1 Integrazione secondo quadrature numeriche

Una volta imparato ad approssimare le funzioni, si passa ad approssimare gli integrali.

**Definizione 2.12** (quadratura numerica). Si consideri una funzione reale, l'integrale in un intervallo si può stimare come

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

**Proposizione 2.13.** Si vuole calcolare l'integrale mediante il calcolo di un numero finito di volte della funzione  $f$ . [r]

**Proposizione 2.14.** Si possono scegliere i pesi  $w_i$  ed i punti  $x_i$  in modo da avere la migliore approssimazione possibile.

**Osservazione 2.15.** Un metodo naturale è utilizzare la formula di Lagrange di interpolazione polinomiale (Theorem 2.8):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

Il primo integrale è l'approssimazione tramite quadrature numeriche, il secondo addendo è l'errore associato. Poiché non si conosce  $\xi$  per ogni punto  $x$ , bisogna utilizzare i metodi numerici per il calcolo dell'integrale.

**Definizione 2.16.** Si definiscono i pesi della quadratura come

$$w_i \equiv \int_a^b l_i^n(x) dx$$

L'indice  $n$  specifica il grado del polinomio  $l_i$  di Lagrange e non è da intendersi come potenza. Segue

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

**Definizione 2.17.** Rimane ancora un grado di libertà dato dalla scelta dei punti  $x_i$ . Esistono vari metodi più o meno complessi per la scelta di tali punti (ad esempio i nodi di Chebyshev). Il metodo più semplice è considerare dei sotto-intervalli: [r]

$$x_i = a + ih, \quad h \equiv \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n$$

**Proposizione 2.18.** Utilizzare questo metodo permette di calcolare i pesi  $w_i$  indipendentemente dall'intervallo. Infatti

$$z \equiv \frac{x-a}{h} \implies w_j = h \int_0^n l_j(a+zh) dz = h \int_0^n \prod_{i \neq j} \frac{z-i}{j-i} dz$$

La forma dei pesi è data da

$$w_j = h \gamma_j, \quad \gamma_j = \int_0^n \prod_{i \neq j} \frac{z-i}{j-i} dz$$

[r] specificare limiti della produttoria, da  $i = 0$  a  $n$ ?

Si noti che la somma dei  $\gamma_i$  è  $n$ , per vederlo si può calcolare  $\int_a^b dx$

### 2.1.1 Regola trapezoidale

Si definisce un metodo a intervalli costanti con  $n = 1$  che viene detto trapezoidale perché si interpola la funzione con una retta: l'area di integrazione è un trapezio. Si consideri un intervallo  $[a, b]$  e siano gli estremi i punti in cui la funzione  $f(x)$  coincide con il polinomio  $p(x)$ :

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad h = b - a$$

I pesi sono proporzionali a

$$\gamma_0 = \int_0^1 \frac{z-1}{0-1} dz = \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \int_0^1 \frac{z}{1-0} dz = \frac{1}{2}$$

Pertanto

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] + E_1(f)$$

dove l'errore è dato da

$$E_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b) dx$$

Il prodotto degli ultimi due fattori è sempre non positivo.

**Teorema 2.19** (media pesata). Si consideri una funzione  $f \in C^2[a, b]$ . Se  $g$  è integrabile su  $(a, b)$  [r] chiuso o aperto?, e ivi non negativa (o non positiva), allora esiste un valore  $c \in (a, b)$  tale per cui

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

*Dimostrazione.* Vedere appunti di Analisi I. [r] Mettere dim?

□

Applicando il teorema, si ottiene un errore pari a

$$E_1(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(x-b) dx, \quad \xi \in (a, b)$$

Usando il precedente cambio di variabili

$$z = \frac{x-a}{h}, \quad dx = h dz$$

si ha

$$E_1(f) = \frac{h^3}{2} f''(\xi) \int_0^1 z(z-1) dz = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

Quindi il risultato delle formule per la regola trapezoidale è

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad h = b - a, \quad \xi \in (a, b)$$

Il secondo addendo non si sa calcolare, tuttavia sapendo che  $\xi$  fa parte dell'intervallo, si stima l'errore come il valore massimo di tale addendo.

**Osservazione 2.20.** La regola trapezoidale è esatta per polinomi di grado minore o uguale di 1.

**Definizione 2.21.** Si dice che la formula è esatta all'ordine 1.

Nelle integrazioni numeriche si riformula il problema in modo che sia più facilmente risolvibile dal calcolatore.

### 2.1.2 Regola di Simpson

Si consideri l'intervallo  $[a, b]$  e tre punti equispaziati:

$$n = 2, \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

I pesi sono proporzionali a

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \int_0^2 \frac{(z-1)(z-2)}{(0-1)(0-2)} dz = \frac{1}{3}, \\ \gamma_1 &= \int_0^2 \frac{(z-0)(z-2)}{(1-0)(1-2)} dz = \frac{4}{3}, \\ \gamma_2 &= \int_0^2 \frac{(z-0)(z-1)}{(2-0)(2-1)} dz = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + E_2(f)$$

L'errore è dato da

$$E_2(f) = \frac{1}{6} \int_a^b f^{(3)}(\xi(x))(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b) dx$$

Non si può più applicare il teorema della media pesata poiché un fattore cambia segno al centro dell'intervallo.

**Proposizione 2.22.** Il prodotto degli ultimi tre fattori

$$Q_2(x) \equiv (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)$$

risulta essere una funzione antisimmetrica rispetto il centro dell'intervallo  $[a, b]$ :

$$\int_a^b Q_2(x) dx = 0$$

Aggiungendo il polinomio  $Q_2(x)$  alla base  $l_i(x)$  interpolante (cioè al polinomio  $p(x)$ , la base non è ortogonale), il suo contributo all'integrale della funzione  $f(x)$  è nullo (cfr. Definizione 2.16). In questo modo si considerano anche i polinomi di terzo grado. Questo equivale ad aggiungere un punto interpolante arbitrario. Tale punto non cambia la formula.

Aggiungendo il punto

$$x_3 = x - \frac{a+b}{2} = x_1$$

e ripetendo il procedimento sopra per quattro punti, si ha

$$E_2(f) = E_3(f) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi) \int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b) dx$$

dove si è applicato il teorema della media pesata poiché il prodotto nell'integrale è negativo. Tramite il cambio di variabile

$$z = \frac{x-a}{h} \implies \int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b) dx = h^5 \int_0^2 z(z-1)^2(z-2) dz = -\frac{4}{15} h^5$$

si ottiene

$$E_2(f) = E_3(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Nonostante la regola di Simpson si calcola per tre punti, l'errore è uguale a utilizzare l'ordine successivo con quattro punti. Questo fenomeno si ripete spesso. A questo punto, l'integrale della funzione è dato da

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Questa formula è esatta fino al terzo ordine perché la derivata quarta è nulla. Come per il metodo precedente, l'errore tra il valore vero e quello calcolato è al più pari al massimo del secondo addendo della formula sopra.

**Osservazione 2.23.** Si vuole una grandezza del passo  $h$  piccola: di solito, utilizzare ordini maggiori permette di ridurre l'errore. Questo non vale in tutti i casi, ma dipende dalla funzione  $f(x)$  e dalle sue derivate. Se si ha un intervallo  $[a, b]$  grande, basta dividerlo in sotto-intervalli di modo che  $h$  diventi piccolo.

**Osservazione 2.24.** Rispetto al metodo dei trapezi, questo metodo utilizza più risorse perché valuta la funzione tre volte.

## Lezione 2

ven 13 set  
2023 14:30

### 3 Quadrature gaussiane

Oltre a scegliere i pesi  $w_i$  per diminuire l'errore, si possono scegliere anche i punti  $x_i$  a tal fine.

#### 3.1 Polinomi ortogonali

Vedere Abramowitz.

**Definizione 3.1.** Dato un intervallo  $[a, b]$  e ivi una funzione peso  $w(x) \geq 0$ , un insieme di polinomi  $p_n$  è ortogonale rispetto alla funzione peso (detta anche funzione di misura) se

$$\int_a^b w(x) p_n(x) p_m(x) dx = c_m \delta_{mn}$$

Risulta possibile normalizzare ogni polinomio in modo da ottenere una base ortonormale.

**Esempio 3.2.** Esempi di sistemi di polinomi ortogonali sono:

Nome	$p_n(x)$	$a$	$b$	$w(x)$
Legendre	$P_n(x)$	-1	1	1
Laguerre	$L_n(x)$	0	$+\infty$	$e^{-x}$
Hermite	$He_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$
Chebyshev	$T_n(x)$	-1	1	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}$	-1	1	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$

con  $\alpha, \beta > -1$ . I polinomi di Hermite si utilizzano nei metodi Monte Carlo.

**Teorema 3.3.** Un polinomio ortogonale di grado  $n$  ha  $n$  zeri (radici) reali nell'intervallo  $[a, b]$ .

#### 3.2 Quadrature gaussiane

Si scelgono i punti  $x_i$  pari alle radici di polinomi ortogonali in modo da ridurre l'errore. Si vuole approssimare numericamente l'integrale

$$\int_a^b w(x) f(x) dx$$

dove  $w(x) \geq 0$  in  $[a, b]$ .

**Osservazione 3.4.** L'uso dei pesi  $w(x)$  altrove permette di rimuovere eventuali complessità.

**Teorema 3.5.** Date le radici  $x_0, \dots, x_{n-1}$  del polinomio ortogonale di ordine  $n$  associato alla misura  $w(x)$  in  $[a, b]$ , se  $p(x)$  è un polinomio di grado minore di  $2n$  allora

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} w_i p(x_i)$$



dove

$$w_i \equiv \int_a^b w(x) l_i^{n-1}(x) dx$$

con  $l_i^{n-1}$  polinomio  $i$ -esimo di Lagrange di grado  $n-1$ .

*Dimostrazione.* Si dimostra prima che l'integrazione è esatta per polinomi  $p(x)$  di grado minore di  $n$ . Tale polinomio coincide con il proprio polinomio interpolante e per la Osservazione 2.7 con  $f(x) \equiv p(x)$  si ottiene

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p(x_i) l_i^{n-1}(x)$$

Moltiplicando per  $w(x)$  e integrando, segue

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} w_i p(x_i), \quad w_i = \int_a^b w(x) l_i^{n-1}(x) dx$$

Per la Definizione 2.16, l'integrale è esatto. Si dimostra che vale anche per un polinomio  $p(x)$  di grado minore di  $2n$ . Tale polinomio si può sempre scrivere come

$$p(x) = Q(x) p_n(x) + R(x)$$

dove  $Q(x)$  e  $R(x)$  sono polinomi di grado minore di  $n$ . Insieme, questi due polinomi hanno al più  $[r]$   $2n$  gradi di libertà, cioè i gradi di libertà di un polinomio di grado massimo  $2n-1$ . Pertanto

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \int_a^b w(x) Q(x) p_n(x) dx + \int_a^b w(x) R(x) dx$$

Poiché  $Q(x)$  ha grado minore di  $n$ , si può riscrivere in termini dei polinomi ortogonali  $p_n(x)$  fino al grado  $n-1$ . Per ortogonalità con  $p_n(x)$  si ha

$$\int_a^b w(x) Q(x) p_n(x) dx = 0 \implies \int_a^b w(x) p(x) dx = \int_a^b w(x) R(x) dx$$

Nei punti  $x_0, \dots, x_{n-1}$ , cioè gli zeri del polinomio  $p_n(x)$ , si ha  $p(x_i) = R(x_i)$ . Utilizzando la relazione precedente e applicando quanto dimostrato sopra per polinomi di grado massimo  $n-1$ , si ha

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \int_a^b w(x) R(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} w_i R(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i p(x_i)$$

□

**Osservazione 3.6.** Rispetto ai metodi precedenti (cfr. Definizione 2.16), la formula sopra è esatta, senza errore fino a polinomi con grado  $2n-1$ , sebbene si utilizzino solo  $n$  punti interpolanti. Tuttavia, bisogna calcolare gli zeri dei polinomi ortogonali  $p_n(x)$  di grado  $n$ .

**Osservazione 3.7.** Per una funzione generica si ha

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) + E_n(f)$$

con

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p_n^2(x) dx, \quad p_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Per integrare una funzione generica si sceglie  $w(x) = 1$  e si utilizzano i polinomi di Legendre.

*Dimostrazione.* Generalizzando quanto visto per la regola di Simpson, ogni volta che l'approssimazione vale per l'ordine successivo, si può scegliere un altro punto e renderlo coincidente con un punto già presente. In questo modo, si passa dal grado massimo  $n-1$  del polinomio integrabile a  $2n-1$  duplicando tutti gli  $n$  punti. Pertanto si ha

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)^2 dx$$

□

## 4 Integrazione numerica composta

L'integrazione numerica composta viene anche detta integrazione tramite formule estese. Per ottenere un passo  $h$  piccolo, si può dividere un grande intervallo in  $m$  sotto-intervalli e applicare a ciascuno un metodo visto in precedenza. Si pone

$$a_i = a + i \frac{b-a}{m}$$

e si riscrive

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$$

**Formula estesa trapezoidale.** Si valuta la funzione  $m+1$  volte

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f(a_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(a_i) + \frac{1}{2} f(a_m) \right] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^m f''(\xi_i), \quad h = \frac{b-a}{m}$$

L'assenza del fattore  $\frac{1}{2}$  dagli estremi dei sotto-intervalli interni deriva dal fatto che ogni estremo appartiene a due sotto-intervalli. Per calcolare l'errore si può prendere il massimo della derivata seconda in ogni intervallo, oppure, poiché interessa l'ordine di grandezza dell'errore, si può utilizzare la seguente formula

$$E = -\frac{h^3}{12} m f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi) \sim m^{-2}$$

Da questa si nota che l'errore si riduce secondo  $m^2$ .

**Formula estesa di Simpson.** Si hanno  $m$  intervalli e si calcola la funzione  $2m+1$  volte

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m}) \right] - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{2m} f^{(4)}(\xi_i), \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

Come sopra, l'errore può essere stimato come

$$E = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{2880} \frac{(b-a)^5}{m^4} f^{(4)}(\xi) \sim m^{-4}$$

## 5 Integrali multidimensionali

I metodi visti finora valgono per una variabile. Per simulare una teoria quantistica relativistica, in generale una teoria di campo con integrali sui cammini, si ha bisogno di gestire miliardi di variabili reali, cioè le componenti di un campo in vari punti. La dimensione dell'integrale in una teoria dei campi tende all'infinito. Per definire una teoria dei campi in modo non perturbativo si discretizza lo spazio-tempo quadridimensionale su di un reticolo con passo  $a$ . Per simulare una teoria di campo, ad esempio  $\lambda\phi^4$ , si considera un volume finito ed un passo finito, da cui si ottiene un reticolo finito; ponendo un campo scalare in ogni punto, si ha un numero finito di gradi di libertà. Utilizzando reticoli da 128 punti in ogni dimensione spazio-temporale e considerando ogni componente del campo, il numero di gradi di libertà, e quindi di variabili da utilizzare, risulta essere importante. Della simulazione si vuole studiare il limite per volume infinito e passo reticolare infinitesimo: il numero di punti cresce.

Si consideri un integrale in  $d$  variabili, cioè in  $d$  gradi di libertà,

$$I = \int dx_1 \cdots dx_d f(x_1, \dots, x_d)$$

Si calcola il suo valore applicando ripetutamente una delle regole precedenti. Ad esempio, per la regola trapezoidale estesa si ha

$$I = \sum_{j_1=0}^n \cdots \sum_{j_d=0}^n w_{j_1} \cdots w_{j_d} f\left(\frac{j_1}{n}, \dots, \frac{j_d}{n}\right) + O(n^{-2})$$

La funzione viene valutata  $N = (n+1)^d$  volte. L'errore è dato da

$$E \sim \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{N^{\frac{2}{d}}}$$

ma per un numero enorme di dimensioni  $d$  dell'integrale, l'errore è confrontabile con il valore numerico dell'integrale stesso. I metodi visti non sono adatti ad integrare molte variabili. L'errore nel metodo di Simpson va come

$$E \sim \frac{1}{N^{\frac{4}{d}}}$$

## Parte II

# Metodi Monte Carlo

Il primo metodo Monte Carlo fu l'ago di Buffon. Successivamente ci fu l'algoritmo di Metropolis. Per una dimensionalità  $d$  molto grande, i metodi sopra sono inapplicabili. Il metodo Monte Carlo permette di avere un errore che va come

$$E \sim \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$$

indipendente dalla dimensionalità dell'integrale. Tuttavia, si vede poi che anch'esso fallisce con il path integral e bisogna aggiungere le catene di Markov.

## 6 Teorema del limite centrale

Si studiano le fondamenta su cui si basa il metodo Monte Carlo. Si vedono alcuni prerequisiti teorici.

### 6.1 Polinomi ortogonali di Hermite

Un polinomio di Hermite di grado  $n$  è indicato come  $He_n(x)$  ed ha peso  $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . L'intervallo di integrazione è l'asse reale. I polinomi sono ortogonali rispetto al peso

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) He_m(x) = \sqrt{2\pi} n! \delta_{nm} \quad n, m \in \mathbb{N}_0$$

I polinomi si ottengono dalla formula di Rodrigues:

$$d_x^n e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n He_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

I primi polinomi sono

$$\begin{aligned} He_0 &= 1 \\ He_1 &= x \\ He_2 &= x^2 - 1 \\ He_3 &= x^3 - 3x \\ He_4 &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ He_5 &= x^5 - 10x^3 + 15x \\ He_6 &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 \end{aligned}$$

I polinomi di Hermite sono utili poiché la loro trasformata di Fourier, insieme alla misura, è un monomio.

## 6.2 Trasformata di Fourier

**Definizione 6.1.** La trasformata di Fourier è definita come

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{-ikx}, \quad \tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) e^{ikx}$$

**Osservazione 6.2.** La trasformata di Fourier è in corrispondenza biunivoca con la funzione che viene trasformata (sempre che le funzioni siano regolari). Ad ogni funzione corrisponde una sola trasformata e ad ogni trasformata corrisponde una sola funzione.

**Definizione 6.3.** La funzione delta di Dirac è definita come

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx}, \quad \int \delta(x) dx = 1$$

**Trasformata di una gaussiana.** Si utilizza ampiamente la trasformata di una gaussiana. In un certo senso, essa corrisponde al principio di indeterminazione in meccanica quantistica non relativistica. Si consideri la funzione gaussiana normalizzata

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

L'integrale ed il secondo momento sono

$$\int_{\mathbb{R}} P(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 P(x) dx = \sigma^2$$

La sua trasformata è data da

$$\int_{\mathbb{R}} P(x) e^{ikx} dx = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

Una gaussiana localizzata nello spazio delle posizioni, corrisponde ad una gaussiana estesa nello spazio dei momenti e viceversa. La varianza passa da denominatore a numeratore dell'esponente.

**Trasformata di Fourier dei polinomi di Hermite.** La trasformata di Fourier considerando anche la misura è

$$\widetilde{He}_n(k) = \sqrt{2\pi} (ik)^n e^{-\frac{k^2}{2}}$$

*Dimostrazione.* Segue

$$\begin{aligned} \widetilde{He}_n(k) &= \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) e^{ikx} = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \left[ d_x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \right] e^{ikx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} [d_x^n e^{ikx}] dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} (ik)^n e^{ikx} dx \\ &= \sqrt{2\pi} (ik)^n e^{-\frac{k^2}{2}} \end{aligned}$$

Alla prima riga si utilizza la formula di Rodrigues prima moltiplicando per  $(-1)^{2n}$ . Alla seconda riga si è integrato per parti  $n$  volte. All'ultima riga si è utilizzata la trasformata di Fourier della gaussiana con  $\sigma = 1$ .  $\square$

## 6.3 Trasformata di una convoluzione

**Definizione 6.4.** La convoluzione di due funzioni è definita come

$$g(x) \equiv [f_1 * f_2](x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x - y) dy$$

**Proposizione 6.5.** La trasformata di Fourier di una convoluzione è data da

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \int_{\mathbb{R}} dx e^{ikx} \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(y) e^{iky} f_2(x - y) e^{ik(x-y)} dx dy, \quad z \equiv x - y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_1(y) e^{iky} f_2(z) e^{ikz} dy dz = \tilde{f}_1(k) \tilde{f}_2(k) \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier.

## 6.4 Variabile aleatoria e distribuzione di probabilità

Si utilizzano ampiamente le variabili aleatorie. Si indica il valore  $x$  della variabile aleatoria  $\hat{x}$  rimuovendo il cappuccio. Una variabile aleatoria  $\hat{x}$  è una variabile reale che assume i valori  $x$  a cui è associato un valore della distribuzione di probabilità  $P(x)$ . Da queste definizioni segue

$$-\infty < x < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} P(x) dx = 1, \quad P(x) \geq 0$$

La funzione  $P(x)$  si può interpretare come la densità di probabilità che la variabile aleatoria  $\hat{x}$  abbia valore  $x$ .

**Osservazione 6.6.** Di seguito si presume che i momenti della distribuzione esistano

$$\langle x^n \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} P(x) x^n dx$$

## 6.5 Funzione generatrice

Si consideri una variabile aleatoria  $\hat{x}$  ed una distribuzione di probabilità  $P(x)$ . Si vuole trasformata di Fourier della distribuzione  $P(x)$  ed il logaritmo di tale trasformazione.

La funzione generatrice  $F(k)$  dei cumulanti di una distribuzione è data da

$$e^{-F(k)} = z(k) \equiv \int_{\mathbb{R}} P(x) e^{ikx} dx$$

In teoria dei campi  $F(k)$  è la free-energy, mentre  $z(k)$  è la funzione di partizione. Sviluppando la funzione generatrice intorno a  $k = 0$ , si ottiene

$$F(k) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} c_n, \quad c_n = -\frac{1}{i^n} d_k^n F(0)$$

dove  $c_n$  sono i cumulanti della distribuzione. Si noti che  $c_0 = 0$  poiché  $P(x)$  è normalizzata, per questo si parte da  $n = 1$ .

Notando  $F(k) = -\ln z(k)$ , le espressioni dei primi cumulanti sono

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle x \rangle \\ c_2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ c_3 &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 \\ c_4 &= \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4 \end{aligned}$$

**Proposizione 6.7.** Sotto alcune ipotesi di regolarità della distribuzione di probabilità, i cumulanti sono unicamente definiti dalla funzione di distribuzione di probabilità. Vale anche il viceversa: dati tutti i cumulanti, la distribuzione di probabilità è univocamente determinata.

Come funzioni con la stessa trasformata di Fourier sono la stessa funzione, così distribuzioni con gli stessi cumulanti sono la stessa distribuzione. I cumulanti caratterizzano le distribuzioni.

**Esempio 6.8.** Si vede l'esempio di una gaussiana centrata in  $x_0$ :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

La sua trasformata è

$$e^{-F(k)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ikx} dx = e^{ikx_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ik(x-x_0)} dx = e^{ikx_0} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

da cui si ottiene

$$F(k) = -ikx_0 + \frac{k^2\sigma^2}{2}$$

I cumulanti della gaussiana sono tutti nulli tranne i primi due pari al valor medio e la varianza:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \sigma^2$$

**Osservazione 6.9.** Per altre distribuzioni si definiscono la skewness (indice di asimmetria, obliquità) e la kurtosis (curtosi, gobba) come

$$\frac{c_3}{c_2^{3/2}}, \quad \frac{c_4}{c_2^2}$$

La skewness descrive il grado di asimmetria di una distribuzione rispetto al proprio valor medio. La kurtosis descrive quanto la distribuzione sia piccata rispetto ad una gaussiana con stessa varianza.

## 6.6 Variabile standardizzata

**Definizione 6.10.** La variabile standardizzata di una distribuzione è una variabile che non dipende dalle proprietà principali della distribuzione. Per una distribuzione di valor medio  $x_0$  e varianza  $\sigma^2$ , la variabile standardizzata è definita come

$$\hat{z} = \frac{\hat{x} - x_0}{\sigma}, \quad z = \frac{x - x_0}{\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{c_2}$$

La variabile standardizzata ha una propria distribuzione

$$P_s(z) = \int_{\mathbb{R}} P(x) \delta\left(\frac{x-x_0}{\sigma} - z\right) dx$$

La densità di probabilità corrispondente ad un particolare  $z$  è data dalla somma di densità di probabilità quando il valore di  $\frac{x-x_0}{\sigma}$  corrisponde al valore di cui si vuole conoscere la densità. Per alcune distribuzioni la corrispondenza è biunivoca, come per la gaussiana:

$$P_s(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

ma altre distribuzioni possono avere più contributi.

**Funzionale generatore.** Il funzionale generatore per la variabile standardizzata di una gaussiana è una parabola:

$$e^{-\Phi(k)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{ikz} dz = e^{-\frac{k^2}{2}} \implies \Phi(k) = \frac{1}{2}k^2$$

## 6.7 Proprietà dei cumulanti

Si vede la proprietà di cumulo dei cumulanti. Date due variabili aleatorie

$$\hat{x}_1, x_1, P_1(x_1); \quad \hat{x}_2, x_2, P_2(x_2)$$

si vuole ricavare la distribuzione della variabile somma

$$\hat{y} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \quad y = x_1 + x_2, \quad P(y) = \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 P_1(x_1) P_2(x_2) \delta(y - x_1 - x_2)$$

Si considera la somma perché essa compare quando si calcola il valor medio di tante misure in un esperimento. Pertanto, riscrivendo la funzione delta come trasformata di Fourier, si ha

$$P(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} \int_{\mathbb{R}} dx_1 dx_2 P_1(x_1) P_2(x_2) e^{ikx_1} e^{ikx_2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} \tilde{P}_1(k) \tilde{P}_2(k)$$

Per l'unicità della trasformata di Fourier, segue

$$\tilde{P}(k) = \tilde{P}_1(k) \tilde{P}_2(k) \implies F(k) = F_1(k) + F_2(k) \implies c_n = c_n^1 + c_n^2$$

dove  $\tilde{P}(k)$  è la trasformata di Fourier di  $P(y)$ . I cumulanti della distribuzione di probabilità della variabile somma sono uguali alla somma dei cumulanti delle singole distribuzioni: i cumulanti cumulano. I cumulanti caratterizzano in modo più semplice la distribuzione di probabilità di quanto faccia la distribuzione stessa.

### Lezione 3

ven 27 ott  
2023 14:30

#### 6.8 Teorema del limite centrale

**Teorema 6.11** (Lindeberg–Feller CLT). Date  $n$  variabili aleatorie  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$  indipendenti con distribuzioni di probabilità  $P_1(x_1), \dots, P_n(x_n)$  arbitrarie (che però soddisfano condizioni piuttosto generali), per un numero di variabili  $n$  arbitrariamente grande, la variabile somma

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i$$

ha una distribuzione di probabilità gaussiana definita da

$$\langle \hat{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \hat{x}_i \rangle, \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

In termini di misure, bisogna interpretare il teorema come una misura di  $n$  variabili aleatorie e non  $n$  misure di una variabile aleatoria.

*Dimostrazione.* Si dimostra il caso di distribuzioni identiche

$$\hat{x}_1, x_1, p(x_1); \quad \dots; \quad \hat{x}_n, x_n, p(x_n)$$

La variabile somma è definita come

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^n x_i, \quad P(y) = \int dx_1 \cdots dx_n p(x_1) \cdots p(x_n) \delta(y - \sum_{i=1}^n x_i)$$

La proprietà di cumulo dei cumulanti implica

$$\langle y \rangle = n \langle x \rangle, \quad \sigma_y^2 = n \sigma_x^2, \quad c_{y,m} = n c_{x,m}, \quad m \geq 3$$

Per capire com'è fatta la distribuzione si utilizza la variabile standardizzata

$$\hat{z} = \frac{\hat{y} - \langle y \rangle}{\sigma_y}$$

Considerato

$$P(y) = \int \frac{dk}{2\pi} [p(k)]^n e^{-iky}$$

la distribuzione della variabile standardizzata è data da

$$\pi(z) = \int dy P(y) \delta(z - \frac{y - \langle y \rangle}{\sigma_y}) = \int \frac{dk}{2\pi} [p(k)]^n \int dy e^{-iky} \delta(z - \frac{y - \langle y \rangle}{\sigma_y})$$

Notando

$$\delta(z - \frac{y - \langle y \rangle}{\sigma_y}) = \sigma_y \delta(\sigma_y z - y + \langle y \rangle)$$

si ottiene

$$\pi(z) = \int \frac{dk}{2\pi} [p(k)]^n e^{-ik(\sigma_y z + \langle y \rangle)} \sigma_y$$

Ricordando

$$p(k) = e^{-F_x(k)} = \exp \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} c_{x,m} \right]$$

segue

$$\pi(z) = \sigma_y \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikz\sigma_y} \exp \left[ n \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} c_{x,m} \right] = \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z} \exp \left[ n \sum_{m=2}^{\infty} \left( \frac{ik'}{\sigma_y} \right)^m \frac{c_{x,m}}{m!} \right]$$

dove  $k' = k\sigma_y$ . Ricordando  $\sigma_y^2 = n\sigma_x^2 = nc_{x,2}$  si ha

$$\pi(z) = \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z} e^{-\Phi(k')}, \quad \Phi(k') = \frac{(k')^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{c_{x,m}}{m!} \frac{1}{n^{\frac{m-3}{2}}} \left( \frac{ik'}{\sigma_x} \right)^m$$

Il secondo addendo nel generatore dei cumulanti si annulla nel limite  $n \rightarrow \infty$ . I cumulanti di ordine maggiore di due si annullano in tale limite e quindi la distribuzione tende ad una gaussiana.  $\square$

**Osservazione 6.12.** Nel caso di una media per variabili identicamente distribuite

$$\langle \hat{y} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \hat{x}_i \rangle$$

quando si calcola la varianza si ottiene

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

## 7 Metodi Monte Carlo

### 7.1 Serie di Edgeworth

Si studia come la distribuzione  $\pi(z)$  della somma tende ad una gaussiana.

**Definizione 7.1.** La serie di Edgeworth è l'espansione in potenze di  $n^{-\frac{1}{2}}$  della funzione

$$e^{\frac{1}{2}k^2} e^{-\Phi(k)}$$

ossia l'espansione della correzione rispetto alla gaussiana della trasformata di Fourier della distribuzione. L'espansione è diversa da quella precedente poiché essa è in  $k$ .

Ricordando che l'espansione in serie di potenze dell'esponenziale è

$$e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$$

si ha

$$e^{\frac{1}{2}k^2} e^{-\Phi(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left[ \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{c_{x,m}}{m!} \frac{1}{n^{\frac{m-3}{2}}} \left( \frac{ik}{\sigma_x} \right)^m \right]^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ik)^{2l}}{l!} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{(m+2)!} \frac{c_{x,m+2}}{n^{\frac{m}{2}} \sigma_x^{m+2}} \right]^l$$

Da questo si capisce che la distribuzione gaussiana è la distribuzione attorno alla quale si studiano tutte le altre: il termine gaussiano è trattato esattamente, mentre il resto viene visto come correzioni. I primi due termini sono

- primo termine:  $l = 1, m = 1, O(n^{-\frac{1}{2}})$ ,
- secondo termine:  $l = 1, m = 2, O(n^{-1})$  e  $l = 2, m = 1, O(n^{-1})$ .

Quindi

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}k^2 - \Phi(k)} &= 1 + (ik)^2 \left[ \frac{ik}{6} \frac{c_{x,3}}{n^{\frac{1}{2}} \sigma_x^3} + \frac{(ik)^2}{24} \frac{c_{x,4}}{n \sigma_x^4} \right] + \frac{(ik)^4}{2} \left[ \frac{ik}{6} \frac{c_{x,3}}{n^{\frac{1}{2}} \sigma_x^3} \right]^2 + o(n^{-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{c_{x,3}}{6 \sigma_x^3} (ik)^3 + \frac{1}{n} \left[ \frac{c_{x,4}}{24 \sigma_x^4} (ik)^4 + \frac{(ik)^6}{72} \frac{c_{x,3}^2}{\sigma_x^6} \right] + o(n^{-1}) \end{aligned}$$

Ricordando che la trasformata di Fourier dei polinomi di Hermite è

$$\widetilde{He}_n = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) e^{ikx} = \sqrt{2\pi} (ik)^n e^{-\frac{k^2}{2}}$$

la distribuzione della variabile standardizzata è data dalla trasformata di Fourier inversa

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikz} e^{-\Phi(k)} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikz} e^{-\frac{1}{2}k^2} \left[ 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{c_{x,3}}{3! \sigma_x^3} (ik)^3 + \frac{1}{n} \frac{c_{x,4}}{4! \sigma_x^4} (ik)^4 + \frac{1}{n} \frac{10c_{x,3}^2}{6! \sigma_x^6} (ik)^6 + o(n^{-1}) \right] \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{c_{x,3}}{3! \sigma_x^3} He_3(z) + \frac{1}{n} \frac{c_{x,4}}{4! \sigma_x^4} He_4(z) + \frac{1}{n} \frac{10c_{x,3}^2}{6! \sigma_x^6} He_6(z) + o(n^{-1}) \right] \end{aligned}$$



**Osservazione 7.2.** Risulta chiaro che nel limite  $n \rightarrow \infty$ , la distribuzione  $\pi(z)$  tende ad una gaussiana.

**Corollario 7.3.** La media aritmetica

$$\hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i$$

è distribuita, per valori asintotici di  $n$ , in modo gaussiano con

$$\langle y \rangle = \langle x \rangle, \quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

Questa è la conclusione più importante per quanto riguarda i metodi Monte Carlo.

**Esercizio.** Rifare la dimostrazione del teorema del limite centrale per la variabile media al posto della variabile standardizzata. Basti notare che si può porre

$$z = \frac{\sum_i x_i - n\langle x \rangle}{\sqrt{n}\sigma_x} = \frac{\frac{1}{n} \sum_i x_i - \langle x \rangle}{\sigma_x / \sqrt{n}}$$

nella variabile standardizzata.

## 7.2 Metodo Monte Carlo

Si vuole trovare un metodo per calcolare degli integrali. Si vede un esempio.

**Esempio 7.4** (Integrale Monte Carlo). Estrahendo  $n$  variabili aleatorie con stessa distribuzione, la media è

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{x} = \langle x \rangle = \int_a^b P(x) x \, dx$$

dove  $\langle x \rangle$  indica il valore di aspettazione di una variabile aleatoria. L'uguaglianza  $\bar{x} = \langle x \rangle$  vale per il teorema del limite centrale  $n \rightarrow \infty$ . In questo modo si può calcolare un integrale.

Si consideri la variabile media e l'integrale [r]

$$\hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i, \quad I = \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x P(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx, \quad P(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con variabili  $\hat{x}_i$  distribuite uniformemente in  $[0, 1]$ . La stima Monte Carlo dell'integrale è data da

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Per una funzione generica si ha

$$I = \langle f(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) P(x) \, dx, \quad \bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

che si può calcolare dal caso elementare precedente. Infatti, si può definire una nuova variabile aleatoria

$$y = f(x), \quad P(y) = \int P(x) \delta(y - f(x)) \, dx$$

Si ha

$$\int y P(y) \, dy = \int dx \, dy \, y P(x) \delta(y - f(x)) = \int dx \, P(x) f(x) = I$$

da cui

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

cioè la stima sopra.

Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

Si può ricondurre l'integrale in un intervallo arbitrario a quello sopra tramite il cambio di variabile

$$z = \frac{x-a}{b-a}$$

**Definizione 7.5.** Si supponga di avere un generatore di numeri casuali distribuiti in maniera uniforme nell'intervallo  $[0, 1)$ .

**Teorema 7.6.** Se  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$  sono  $n$  variabili aleatorie indipendenti, allora le variabili

$$\hat{f}_i = f(\hat{x}_i)$$

sono  $n$  variabili aleatorie indipendenti tutte con valore di aspettazione  $I$ .

Si definisce la variabile aleatoria

$$y = f(x), \quad P(y) = \int dx_i P(x_i) \delta(y - f(x_i))$$

il cui valor medio è

$$\langle y \rangle = \int y P(y) dy = \int dy dx_i P(x_i) \delta(y - f(x_i)) y = \int dx_i P(x_i) f(x_i)$$

**Corollario 7.7.** Il teorema precedente insieme al teorema del limite centrale implica che la variabile aleatoria

$$\hat{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i)$$

ha come valor medio

$$\langle \hat{f} \rangle = I$$

e come varianza

$$\frac{1}{n} \int_0^1 [f(x) - I]^2 dx = \frac{1}{n} \langle f^2(x) \rangle - \langle f(x) \rangle^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} = \sigma^2$$

Estraendo  $n$  numeri casuali  $x_1, \dots, x_n$  distribuiti uniformemente in  $[0, 1]$ , si approssima l'integrale con

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

**Osservazione 7.8.** L'errore nella procedura Monte Carlo ha un significato statistico e non deterministico. La stima è distribuita in modo gaussiano con varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$  e pertanto si può fornire la probabilità con cui il risultato differisca dal valore vero, ma non è possibile dare delle stime o limiti deterministici dell'errore.

Il limite centrale fornisce una interpretazione dell'errore. Poiché la variabile somma o media è distribuita come una gaussiana, i valori all'interno di  $1\sigma$  sono il 68% dei casi. L'errore nel metodo Monte Carlo ha un significato diverso rispetto ai metodi deterministici.

**Osservazione 7.9.** L'errore Monte Carlo decresce come  $n^{-\frac{1}{2}}$  con  $n$  numero di volte che si estraggono numeri casuali e si valuta la funzione.

### 7.2.1 Integrali multidimensionali

Risulta ovvio che nel caso monodimensionale, il metodo Monte Carlo non è il più efficace. Si passa a  $d$  variabili di integrazione

$$dx \rightarrow d^d x, \quad x \rightarrow \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\}, \quad I = \int d^d x f(\mathbf{x})$$

La stima Monte Carlo è data da

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_1^i, \dots, x_d^i) + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

Ogni componente va estratta  $n$  volte.

**Osservazione 7.10.** L'errore decresce come  $n^{-\frac{1}{2}}$  indipendentemente dal numero di dimensioni  $d$ . Il metodo Monte Carlo è il metodo da usare per integrali con un grande numero di dimensioni.

**Osservazione 7.11.** Dato un integrale, l'obiettivo è descrivere una procedura Monte Carlo che con il minimo tempo di calcolo si parte dell'errore desiderato. Nella maggior parte dei casi, questo significa ridurre la varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$  ottimizzando la procedura Monte Carlo al problema dato.

La varianza si può ridurre inserendo informazioni riguardo il sistema fisico. Ad esempio, in QCD agli algoritmi si può insegnare la presenza di rottura spontanea e la libertà asintotica.

**Osservazione 7.12.** Estrarre i numeri non deve diventare molti più costoso, altrimenti si calcola meno volte la funzione [r]

## 8 Campionamento di importanza

Il metodo visto è elementare, semplice ma inefficiente. Per funzioni piccate, il metodo estrae con probabilità uniforme in tutto l'intervallo: molti valori sono lontani dal picco. Questo si manifesta in una grande varianza. Per risolvere questo problema si utilizza il campionamento di importanza: si fornisce al calcolatore una informazione (più o meno approssimata) di com'è fatta la funzione. L'informazione è costituita da una funzione che si sa integrare analiticamente vicina alla funzione da integrare.

Dato l'integrale

$$I = \int f(x) dx$$

si supponga di conoscere una funzione  $g(x)$  tale che

$$g(x) \geq 0, \quad \int_0^1 g(x) dx = 1$$

Allora vale

$$I = \int \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx$$

Se  $x$  è estratto secondo la distribuzione  $g(x)$ , allora

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{g(x_i)}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 \left[ \frac{f(x)}{g(x)} - I \right]^2 g(x) dx$$

Per vedere ciò basta ricondursi al caso precedente con

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad P(x) = g(x)$$

Nel limite in cui  $f(x) = g(x)$ , cioè si sa integrare la funzione, allora la varianza è nulla.

**Osservazione 8.1.** Risulta chiaro che più  $f(x)$  è vicina a  $kg(x)$  più la varianza è piccola.

**Osservazione 8.2.** In una teoria dei campi, la distribuzione delle variabili di campo va come il peso di Boltzmann  $e^{-S}$  dove l'azione  $S$  è una variabile estensiva ed è proporzionale al volume  $V$ : la probabilità va come  $e^{-V}$ . L'espressione per l'integrale sui cammini è

$$\langle O \rangle = \frac{\int \pi dx_i e^{-S} v(x) \dots}{\int \pi dx_i e^{-S}}$$

in cui si pone

$$g(x) = \frac{e^{-S}}{\int \pi dx_i e^{-S}}, \quad f(x) = v(x) \dots$$

Poiché il volume è dell'ordine dei miliardi di punti, le funzioni sono molto piccate. Senza il campionamento d'importanza, il metodo Monte Carlo non funzionerebbe.

**Osservazione 8.3.** Questo [r]

**Osservazione 8.4.** Per applicare il campionamento di importanza bisogna essere in grado di estrarre numeri casuali con la distribuzione  $g(x)$ .

## 8.1 Metodo del cambio di variabili

Si vede il caso in basso numero di dimensioni. Si supponga di avere un generatore di numeri casuali che generi numeri  $x$  secondo una distribuzione  $p(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$$

Si supponga di calcolare  $g(x)$  [r] Sia  $y = f(x)$  dove  $f$  è una funzione che lega le due variabili casuali  $x$  ed  $y$ . Dunque

$$|p(y) dy| = |p(x) dx| \implies p(y) = p(x) |dy/dx|$$

[r]

**Esempio 8.5** (Esponenziale). Si consideri

$$p(y) = e^{-y}, \quad p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \int_0^1 p(x) dx = 1$$

Si utilizza il cambio di variabile

$$y = -\ln(1-x) \implies p(y) = e^{-y}, \quad \int_0^\infty p(y) dy = 1$$

La procedura da seguire è

- estrarre  $x$  in modo uniforme in  $[0, 1)$ ,
- calcolare  $y(x)$  che è distribuita secondo  $p(y) = e^{-y}$  in  $[0, \infty)$ .

### 8.1.1 Cambio multidimensionale

Si supponga di estrarre  $d$  variabili casuali  $x_1, \dots, x_d$  con probabilità

$$p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

allora le variabili

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_d), \quad \dots, \quad y_d = f_d(x_1, \dots, x_d)$$

sono distribuite come

$$p_y(y_1, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_d = p_x(x_1, \dots, x_d) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} \right| dy_1 \dots dy_d$$

dove compare il jacobiano del cambio di variabili.

**Esempio 8.6** (Guassiana, Box–Muller). Il metodo di Box–Muller permette di estrarre numeri distribuiti in modo gaussiano. Dati due numeri casuali  $x_1, x_2$  uniformi in  $[0, 1)$ , si definisce

$$y_1^2 = -\ln(1-x_2) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_1\right), \quad y_2^2 = -\ln(1-x_2) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)$$

Pertanto vale

$$e^{-(y_1^2+y_2^2)} = 1 - x_2, \quad \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^2 = \tan^2 \left( \frac{\pi}{2} x_1 \right)$$

da cui

$$x_1 = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{y_1}{y_2}, \quad x_2 = 1 - e^{-(y_1^2+y_2^2)}$$

La jacobiana ed il jacobiano sono

$$J = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} x_1 & \partial_{y_2} x_1 \\ \partial_{y_1} x_2 & \partial_{y_2} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2} & -\frac{2}{\pi} \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2} \\ 2y_1 e^{-(y_1^2+y_2^2)} & 2y_2 e^{-(y_1^2+y_2^2)} \end{bmatrix}, \quad \det J = \frac{4}{\pi} e^{-(y_1^2+y_2^2)}$$

Pertanto, le variabili  $y$  sono distribuite secondo

$$P(y_1, y_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y_1^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y_2^2}$$

[r]

**Osservazione 8.7.** Estrahendo due numeri in modo uniforme, il cambio di variabili porta a due numeri distribuiti in modo gaussiano.

**Osservazione 8.8.** Si noti che il metodo più veloce per ottenere tanti numeri casuali distribuiti in modo gaussiano è utilizzare l'algoritmo zigurat.

**Esempio 8.9.** Si vuole generare una variabile distribuita secondo

$$p(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{y} e^{-y}$$

Unendo gli esempi precedenti, si estraggono due variabili distribuite come

$$p(x_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2}, \quad p(x_2) = e^{-x_2}$$

Si definisce

$$y = x_1^2 + x_2, \quad y_1 = y, \quad y_2 = x_2$$

La jacobiana ed il jacobiano sono

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} y_1 & \partial_{x_2} y_1 \\ \partial_{x_1} y_2 & \partial_{x_2} y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det J = \frac{1}{\det J^{-1}} = \frac{1}{2x_1} = \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2}}$$

Quindi

$$p(y_1, y_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y_1}}{2\sqrt{y_1 - y_2}}$$

I domini delle variabili trasformate sono

$$y_2 : [0, \infty), \quad y_1 : [y_2, \infty)$$

La regione del piano di tali due variabili si può anche riscrivere come

$$y_1 : [0, \infty), \quad y_2 : [0, y_1)$$

La variabile  $y_2$  non è di interesse, cioè importa il valore di  $y_1$  a prescindere da  $y_2$ , pertanto si integra (e si rinomina  $y_1$  a  $y$ ):

$$\begin{aligned} p(y) dy &= \int_0^y dy_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y - y_2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \int_0^y dy_2 \frac{1}{\sqrt{y - y_2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y} (-\sqrt{y - y_2})_0^y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{y} e^{-y} \end{aligned}$$

Questo esempio, insieme al primo, è utile per le teorie di gauge.

**Osservazione 8.10.** L'azione dell'oscillatore armonico è

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right)$$

dove non si utilizza il tempo euclideo. Si ha un numero infinito di variabili  $x(t)$ , ma non si sa fare un integrale di una produttoria, cioè l'esponenziale  $e^{-S}$ . Invece, si discretizza la derivata temporale e l'integrale. Si integra su tutti i tempi e su tutte le variabili  $x$ :

$$S = a \sum_i \frac{m}{2} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{a} - \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2$$

**Osservazione 8.11.** Il metodo del cambio di variabili funziona per un basso numero di dimensioni. Quanto visto è utile avere variabili distribuite secondo una funzione arbitraria. Se si vuole simulare una teoria in un grande numero di dimensioni e  $g(x)$  non fattorizzabile, il metodo del cambio di variabili non si sa fare. Bisogna trovare una strategia che faccia in modo automatico il cambio di variabili: le catene di Markov. Una catena di Markov è un processo iterativo che permette di arrivare ad un generatore che distribuisce i numeri casuali con un cambio di variabili arbitrario, senza sapere la formula analitica che connette le due variabili.

## 9 Conclusioni

Se la varianza di della distribuzione di  $\hat{f}(x_i)$  è finita, la stima Monte Carlo  $[r]$  al valore vero dell'integrale per  $[r]$  il numero di configurazioni  $N_{\text{conf.}}$ . In seguito, il numero di estrazioni è indicato come numero di configurazioni.

La stima Monte Carlo è unbiased per tutti i valori del numero di configurazione, il valore di aspettazione della stima Monte Carlo è il valore vero dell'integrale.

La stima Monte Carlo è distribuita in modo gaussiano per valori del numero di configurazione asintotici.

La deviazione standard della stima Monte Carlo è data da

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var } f}{N_{\text{conf}}}}$$

dove  $\text{Var } f$  è la varianza teorica della funzione  $f$ .  $[r]$

## Lezione 4

ven 03 nov  
2023 14:30

## Parte III

# Integrale sui cammini in meccanica quantistica

## 10 Integrale sui cammini di Feynman

L'integrale sui cammini (path integral) fornisce un'altra interpretazione della meccanica quantistica (non relativistica) e della sua relazione con la meccanica classica.

La formulazione di Dirac-Feynman delle teorie quantistiche permette di definire non perturbativamente le teorie di campo utili in fisica (QED, QCD, etc.) che altrimenti si definirebbero solo come sviluppi perturbativi attorno alla teorie libere.

Si deriva l'integrale sui cammini di Feynman per il propagatore ritardato per un sistema quantistico monodimensionale. L'estensione a più dimensioni è immediata e non pone particolari problemi concettuali.

Per teorie di campo scalari, la formulazione è stata trovata da Kohrut? mentre per campi fermionici è stata trovata da Kusher.  $[r]$

**Notazione.** Si utilizza

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad \hbar = 1, \quad \hat{p} = -i\partial_x, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i$$

così come

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx}, \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x-x'), \quad \langle p|q\rangle = \delta(p-q)$$

**Descrizione di Schrödinger e di Heisenberg.** Nella descrizione di Schrödinger della meccanica quantistica, gli operatori, le osservabili non dipendono dal tempo, mentre lo stato del sistema si evolve secondo

$$i\partial_t|\alpha, t\rangle_S = \hat{H}|\alpha, t\rangle_S \implies |\alpha, t\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\alpha, 0\rangle, \quad t \geq 0$$

Mentre nella descrizione di Heisenberg, lo stato è costante e gli operatori si evolvono secondo

$$i\partial_t\hat{O}_H = [\hat{O}_H, \hat{H}] \implies \hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{O}_H(0)e^{-i\hat{H}t}, \quad t \geq 0$$

I due formalismi sono equivalenti

$$|\alpha\rangle_H = |\alpha, 0\rangle_S, \quad \hat{O}_H(0) = \hat{O}_S \implies {}_S\langle\alpha', t|\hat{O}_S|\alpha, t\rangle_S = {}_H\langle\alpha'|\hat{O}_H|\alpha\rangle_H$$

In teoria dei campi si utilizza la descrizione di Heisenberg, mentre la descrizione di Schrödinger è utilizzata nella meccanica quantistica non relativistica.

Da questo punto bisogna costruire l'integrale sui cammini e verificare che sia equivalente a quanto già noto dall'equazione di Schrödinger, in particolare per quanto riguarda la teoria delle perturbazioni. In teoria dei campi si ha solamente l'integrale sui cammini come formulazione della meccanica quantistica.

## 10.1 Propagatore ritardato

Indipendentemente dal formalismo utilizzato, la dinamica è codificata nel propagatore ritardato. Si utilizzano gli stati nella descrizione di Schrödinger, ma per gli operatori nella descrizione di Heisenberg è analogo. Si parte dalla soluzione formale di uno stato ad un tempo  $t$

$$|\alpha, t\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\alpha, 0\rangle$$

e si definisce il propagatore ritardato:

$$\hat{G}(t, t_0) \equiv \theta(t - t_0)e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$$

dove si ha la funzione  $\theta$  di Heaviside. Tale operatore soddisfa un'equazione differenziale al prim'ordine con una condizione al contorno

$$i\partial_t\hat{G}(t, t_0) = \hat{H}\hat{G}(t, t_0) + i\delta(t - t_0)\hat{I}, \quad \hat{G}(t_0, t_0) = \hat{I}$$

Poiché tale operatore risolve la dinamica del sistema, allora deve contenere tutte le informazioni della dinamica: gli autostati e gli autovalori dell'hamiltoniana. Essi si possono trovare in due modi, uno dei quali consiste nel diagonalizzare l'hamiltoniana. Dati gli autovalori e autostati dell'hamiltoniana

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle, \quad u_n(x) = \langle x|E_n\rangle$$

dove  $u_n(x)$  sono gli autostati nella base della posizione. [r] Ci si pone nella base di autostati dell'hamiltoniana

$$\hat{G}(t, t_0) = \theta(t - t_0) \sum_n e^{-iE_n(t-t_0)} |E_n\rangle\langle E_n|$$

La trasformata di Fourier nel tempo è [r]

$$\hat{\tilde{G}}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izt} \hat{G}(t) dt = \int_0^\infty e^{izt} e^{-i\hat{H}t} dt, \quad t_0 = 0$$

L'integrale non è ben definito per  $z$  reale. Si considera una continuazione analitica di tale parametro in modo da calcolare l'integrale e poi applicarlo a  $z$  reale. Per  $\text{Im } z > 0$ , l'integrale è convergente

$$\hat{G}(z) = \frac{i}{z - \hat{H}} = i \sum_n \frac{1}{z - E_n} |E_n\rangle\langle E_n|$$

Nel resto del piano complesso, si continua analiticamente la funzione tramite l'espressione sopra. [r]

**Elementi di matrice.** Risulta interessante calcolare gli elementi di matrice del propagatore e della sua trasformata

$$G(x, t, x_0, t_0) = \langle x | \hat{G}(t, t_0) | x_0 \rangle = \theta(t - t_0) \sum_n e^{-iE_n(t-t_0)} u_n(x) u_n^*(x_0)$$

$$\tilde{G}(x, x_0, z) = i \sum_n \frac{1}{z - E_n} u_n(x) u_n^*(x_0)$$

Gli elementi di matrice sono l'ampiezza di probabilità di una particella di passare dall'evento  $(t_0, x_0)$  all'evento  $(t, x)$ . Gli elementi di matrice della trasformata sono funzione della variabile  $z$  coniugata del tempo, mentre la posizione di partenza  $x_0$  e arrivo  $x$  sono parametri. Dalle relazioni sopra è chiaro che il propagatore  $\hat{G}$  contiene tutte le informazioni della dinamica: l'hamiltoniana ha autovalori reali e dunque il propagatore  $\hat{G}$  ha singolarità sull'asse reale.

Per gli stati legati, cioè stati ad energia negativa, la funzione gli elementi di matrice della trasformata ha dei poli in corrispondenza degli autovalori, cioè per  $\text{Re } z < 0$ ,  $\text{Im } z = 0$ . Per autovalori continui, cioè  $\text{Re } z > 0$ ,  $\text{Im } z = 0$ , la funzione ha un taglio. Per i poli, i residui sono proporzionali alla funzione d'onda degli stati legati: il residuo al polo, come funzione di  $x$  (quindi  $x_0$  è fisso) fornisce l'autofunzione associata all'autovalore del polo; per il taglio è il coefficiente al variare di  $z$ .

Le proprietà di analiticità della trasformata di Fourier del propagatore ritardato sono molto generali. La posizione dei poli e dei tagli permette di ricavare gli autovalori e autofunzioni dell'hamiltoniana del sistema in esame. Conoscere il propagatore è equivalente ad aver risolto la dinamica.

Quando si generalizza ad una teoria dei campi non perturbativa, non si sa definire bene un'hamiltoniana né risolvere l'equazione di Schrödinger, ma si possono trovare i poli ed i tagli della trasformata del propagatore. Tuttavia, tali poli e tagli non si sanno ricavare analiticamente, pertanto bisogna sviluppare delle tecniche numeriche.

**Interpretazione.** Gli elementi di matrice del propagatore sono l'ampiezza di probabilità che il sistema si trovi al punto  $x$  nell'istante  $t$  (quando venga misurato) se nell'istante  $t_0$  si trovava nel punto  $x_0$ . Ossia, all'istante  $t_0$  la coordinata viene misurata e vale  $x_0$  cioè è un autostato  $|x_0\rangle$ .

**Proprietà di convoluzione.** Per  $t_0 < t_1 < t$  si ha

$$G(x, t, x_0, t_0) = \langle x | \hat{G}(t, t_0) | x_0 \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | x_0 \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t_1)} e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} | x_0 \rangle$$

Inserendo l'identità [r]

$$\hat{I} = \int dx_1 |x_1\rangle\langle x_1|$$

si ottiene

$$G(x, t, x_0, t_0) = \int dx_1 \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t_1)} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} | x_0 \rangle$$

$$= \int dx_1 G(x, t, x_1, t_1) G(x_1, t_1, x_0, t_0)$$

cioè andare da  $(x_0, t_0)$  a  $(x, t)$  equivale ad andare prima da  $(x_0, t_0)$  a  $(x_1, t_1)$  e poi in  $(x, t)$ . Questa formula di convoluzione è detta formula di Chapman-Kolmogorov. L'ampiezza di probabilità è



la somma di tutti i possibili prodotti di ampiezze di probabilità (cioè tutte le posizione  $x_1$ ). Si noti che questa discussione non è relativistica. Vale anche per [r]

$$\theta(t - t_0) = \theta(t - t_1)\theta(t_1 - t_0), \quad t_0 < t_1 < t$$

Al fine di costruire l'integrale sui cammini si ripete questo passaggio un numero  $N$  di volte arbitrariamente grande con intervallo temporale  $\delta t \equiv t_{i+1} - t_i$  infinitesimo. Bisogna prima dimostrare alcune formule.

**Teorema 10.1** (Formula di Trotter). Dati due operatori  $A$  e  $B$  ragionevoli (ossia  $[A, B]$  non diverge), vale

$$e^{A+B} = \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^N$$

Questo teorema viene successivamente applicato all'hamiltoniana poiché somma dell'operatore cinetico e dell'operatore potenziale che non commutano tra loro.

*Dimostrazione.* Considerando l'espansione in serie di potenze dell'esponenziale di una matrice (oppure usando la formula di Zassenhaus derivata da quella di Baker–Campbell–Hausdorff), vale

$$e^{\frac{A+B}{N}} = e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}} + o(N^{-1})$$

dove nel secondo addendo sono presenti i termini con i commutatori. Dunque

$$\begin{aligned} e^{A+B} - (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^N &= (e^{\frac{A+B}{N}})^N - (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^N \\ &= e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-1} - e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}} e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-2} \\ &\quad + e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}} e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-3} - (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^2 e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-4} \\ &\quad + (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^2 e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-5} + \dots - (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^{N-1} e^{\frac{A+B}{N}} \\ &\quad + (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^{N-1} e^{\frac{A+B}{N}} - (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^N \\ &= [e^{\frac{A+B}{N}} - e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}}] e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-1} \\ &\quad + e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}} [e^{\frac{A+B}{N}} - e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}}] e^{\frac{A+B}{N}} (e^{\frac{A+B}{N}})^{N-2} + \dots \\ &\quad + (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^{N-1} [e^{\frac{A+B}{N}} - (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})] \\ &= o(N^{-1}) \end{aligned}$$

Alla prima riga, si noti che  $A + B$  si può considerare come un singolo operatore, dunque

$$\frac{A+B}{N} N = A+B$$

Alla terza uguaglianza, le parentesi quadre sono tutte  $o(N^{-1})$  e i termini non si sommano ad annullarsi, perciò rimane almeno un termine di ordine  $O(N^{-2})$ . Infatti, sebbene in questo caso non succeda, gli  $N$  termini potrebbero dare un termine di ordine  $O(N^{-1})$  e non  $O(N^{-2})$ .

In teorie fermioniche tali termini si accumulano e si ha un termine di ordine  $N^{-1}$ .  $\square$

## 10.2 Operatore di trasferimento

Si introducono delle modifiche alla definizione degli elementi di matrice del propagatore ritardato per ottenere una definizione rigorosa dell'integrale dei cammini. Si ipotizzi di discretizzare il tempo in modo che un intervallo venga diviso in  $N$  sotto-intervalli

$$T = t - t_0 = aN$$

con  $a$  passo reticolare (temporale). Si può scrivere il propagatore ritardato come

$$\hat{G}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} = e^{-iaN\hat{H}} = \exp\left[-iaN\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})\right)\right]$$

Utilizzando la formula di Trotter si ha

$$\begin{aligned}\hat{G}(t, t_0) &= \exp \left[ -iaN \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) \right] \approx \left[ e^{-ia\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-iaV(\hat{x})} \right]^N \\ &= e^{i\frac{a}{2}V(\hat{x})} \left[ e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-ia\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})} \right]^N e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})}\end{aligned}$$

Dalla prima riga si nota che l'operatore che propaga una particella da  $t_0$  a  $t_1$  è dato da  $e^{-ia\hat{H}}$  a meno di un termine  $o(a)$  (applicando l'identità utilizzata nella dimostrazione). Nel limite continuo

$$a \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad aN = \text{cost.}$$

gli errori spariscono. Per vedere che la seconda riga è vera, l'esponente  $N$  equivale a ripetere la base  $N$  volte e si moltiplica all'inizio per

$$1 = e^{i\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})}$$

mentre tra gli  $N$  termini si divide l'esponentiale del potenziale. Si definisce l'operatore di trasferimento come

$$\hat{\tau}_a \equiv e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-ia\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})}$$

Nel limite continuo, l'operatore sopra evolve il sistema da un istante a quello successivo (senza errori). Quindi

$$\hat{G}(t, t_0) = e^{i\frac{a}{2}V(\hat{x})} \hat{\tau}_a^N e^{-i\frac{a}{2}V(\hat{x})}$$

Per costruzione, vale

$$\hat{\tau}_a \hat{\tau}_a^\dagger = \hat{\tau}_a^\dagger \hat{\tau}_a = \hat{I}$$

dunque si può definire un operatore hermitiano  $\hat{\hat{H}}$  tale che

$$\hat{\tau}_a = e^{-ia\hat{\hat{H}}}, \quad \hat{\hat{H}} = \hat{\hat{H}}^\dagger$$

dove  $\hat{\hat{H}} \neq \hat{H}$  per  $N$  finito.

**Osservazione 10.2.** L'operatore di trasferimento  $\hat{\tau}_a$  è l'operatore che propaga uno stato generico nel tempo  $\Delta t = a$  a meno di un errore  $o(a)$ .

### 10.2.1 Operatore di trasferimento euclideo

**Tempo euclideo.** Si prolunga analiticamente il propagatore ritardato nella variabile  $t$  e si definisce il propagatore euclideo come

$$\hat{G}_E(t, t_0) = \hat{G}(-it, -it_0) = \theta(t - t_0) e^{-\hat{H}(t-t_0)}, \quad t \rightarrow -it$$

che corrisponde esplicitamente a

$$\hat{G}_E(t_E, t_{0,E}) = \hat{G}(-it_E, -it_{0,E}), \quad t_E = it$$

In questo modo, per autovalori grandi, l'esponentiale tende a zero. In teoria dei campi, la metrica di Minkowski diventa la metrica euclidea quanto si considera il tempo euclideo.

**Osservazione 10.3.** Il tempo euclideo  $t_E$  è una variabile reale che corrisponde alla parte immaginaria del tempo  $t$  prolungato analiticamente e preso sull'asse complesso.

**Osservazione 10.4.** Successivamente si potrebbe omettere la distinzione tra tempo euclideo e tempo di Minkowski, ma si dovrebbe capire dal contesto.

**Osservazione 10.5.** Risulta ovvio che nel tempo euclideo, il propagatore  $\hat{G}_E(t_E)$  contiene tutta l'informazione sulla dinamica del sistema. Infatti, si può fare il prolungamento analitico, tornare al tempo di Minkowski e utilizzare le formule precedenti. Oppure si modificano direttamente le formule.

**Operatore di trasferimento euclideo.** Il passo reticolare diventa  $a_M \rightarrow -ia_E$  da cui

$$\hat{T}_a \equiv e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-\frac{\hat{p}^2}{2m}a} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})}$$

A questo punto si può inserire l'identità

$$\hat{I} = \int dx |x\rangle\langle x|$$

tra 0 e  $T$  per  $N - 1$  volte.

**Osservazione 10.6.** Per costruzione si ha

$$\hat{T}_a = e^{-a\hat{H}} = e^{-a\hat{H}} + o(a), \quad \hat{T}_a |\mathcal{E}_n\rangle = e^{-a\mathcal{E}_n} |\mathcal{E}_n\rangle, \quad \mathcal{E}_n = E_n + o(a)$$

**Elementi di matrice di trasferimento nella base delle coordinate.** Si utilizza il tempo euclideo. Si calcola

$$\langle x_i | \hat{T}_a | x_j \rangle = \langle x_i | e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-\frac{\hat{p}^2}{2m}a} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} | x_j \rangle$$

Per definizione si ha

$$e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} | x_i \rangle = e^{-\frac{a}{2}V(x_i)} | x_i \rangle$$

poiché il potenziale è un operatore diagonale nella base delle coordinate. Inserendo l'identità di autostati del momento nel termine cinetico si ha

$$\begin{aligned} \langle x_i | e^{-\frac{\hat{p}^2}{2m}a} | x_j \rangle &= \int dq_i dq_j \langle x_i | q_i \rangle \langle q_i | e^{-\frac{\hat{p}^2}{2m}a} | q_j \rangle \langle q_j | x_j \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dq_i dq_j e^{iq_i x_i} e^{-\frac{q_i^2}{2m}a} \delta(q_i - q_j) e^{-iq_j x_j} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dq e^{-\frac{q^2}{2m}a} e^{iq(x_i - x_j)} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x_i - x_j)^2 m}{2a}} \end{aligned}$$

alla quarta riga si è applicato

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}} e^{iqx} dq = e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}$$

Si utilizza il tempo euclideo perché così si può svolgere l'integrale di una gaussiana e si può trovare il termine cinetico. Unendo quanto trovato si ha

$$\langle x_i | \hat{T}_a | x_j \rangle = \left( \frac{m}{2\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -a \left( \frac{m}{2} \left( \frac{x_i - x_j}{a} \right)^2 + \frac{1}{2}V(x_i) + \frac{1}{2}V(x_j) \right) \right]$$

**Propagatore euclideo come integrale sui cammini.** Dato il propagatore euclideo nella base delle coordinate

$$G_E(x_N, T, x_0, 0) = \langle x_N | \hat{G}_E(T, 0) | x_0 \rangle$$

si inserisce l'identità  $N - 1$  volte

$$\begin{aligned} G_E(x_N, T, x_0, 0) &= \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i e^{\frac{a}{2}V(x_N)} \left[ \prod_{i=0}^{N-1} \langle x_{i+1} | \hat{T}_a | x_i \rangle \right] e^{-\frac{a}{2}V(x_0)} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi a} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \prod_{i=0}^{N-1} \exp \left[ -a \left( \frac{m}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{a} \right)^2 + V(x_i) \right) \right] \end{aligned}$$

Il propagatore ritardato è ora scritto come un integrale multidimensionale. Inoltre, si nota che

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{a} \rightarrow \dot{x}, \quad a \rightarrow 0$$

cioè si ottiene la velocità classica. Si noti il segno positivo al potenziale a causa del tempo euclideo. La densità di lagrangiana euclidea e l'azione sono definite come

$$\mathcal{L}_E(x_{i+1}, x_i) \equiv \frac{1}{2}m \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{a} \right)^2 + V(x_i), \quad S_E = a \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}_E(x_{i+1}, x_i)$$

pertanto

$$G_E(x_N, T, x_0, 0) = \left( \frac{m}{2\pi a} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i e^{-S_E}$$

con  $x_0$  e  $x_N$  fissati. Questa è la forma standard per il propagatore ritardato espresso come integrale sui cammini di un sistema quantistico nel tempo euclideo. Una volta discretizzato il tempo, un cammino di Feynman corrisponde ad una  $n$ -pla di coordinate. Nel limite continuo, l'ampiezza di probabilità è data dalla somma su tutti i cammini pesati con l'esponenziale dell'azione classica.

**Propagatore Minkowskiano come integrale sui cammini.** Per tornare al tempo fisico di Minkowski si sostituisce  $a_E \rightarrow ia_M$ . La lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_E(x_{i+1}, x_i) = \frac{m}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{a_M} \right)^2 - V(x_i), \quad S = a \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}(x_{i+1}, x_i)$$

Dunque

$$G(x_N, t, x_0, 0) = \left( \frac{m}{2\pi ia} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i e^{iS}$$

con  $x_0$  e  $x_N$  fissati. L'integrale scritto in questo modo non ha senso, è solo un'operazione formale. Esso ha senso solo se inteso come un modo conciso per indicare la procedura usata sopra: il prolungamento analitico del propagatore ritardato al tempo euclideo.

**Limite al continuo.** Si fa prima il limite al continuo e poi l'integrale. Visto che la simbologia è formale, si presume che il limite possa passare all'interno dell'integrale. Si definisce

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \quad S = \int dt \mathcal{L}(t)$$

così come

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{2\pi ia}{m} \right)^{\frac{N}{2}} G(x_N, t, x_0, 0) = \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i e^{iS}$$

con  $x_0$  e  $x_N$  fissati. L'azione  $S$  è l'azione classica del sistema. Il fattore davanti al propagatore è una costante di rinormalizzazione irrilevante che viene ignorata.

L'equazione sopra è un'equazione formale. Scritta in tale modo non è definita matematicamente. Per darle un senso bisogna

- considerare  $a \neq 0$ ,
- calcolare il prolungamento analitico del propagatore  $G$  mediante l'integrale sui cammini,
- ritornare al tempo fisico,
- fare il limite per  $a \rightarrow 0$ .

Questo è il significato di tale espressione formale.

**Interpretazione fisica dell'integrale sui cammini.** Nella meccanica classica, un punto materiale si muove lungo una traiettoria  $x(t)$ . Essa estremizza l'azione

$$S = \int_0^t \mathcal{L} dt, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

Le equazioni del moto di Eulero–Lagrange si ottengono variando ed estremizzando l'azione rispetto  $\delta x(t)$  mantenendo fissi gli estremi

$$\delta x(0) = \delta x(t) = 0$$

da cui

$$d_t \partial_{\dot{x}} \mathcal{L} - \partial_x \mathcal{L} = 0$$

Questo implica che, in meccanica classica, il moto è determinato dalla forma dell'azione attorno al proprio estremo.

In meccanica quantistica, tutte le possibili traiettorie del punto materiale contribuiscono. L'ampiezza di probabilità è data da

$$\int \prod_i dx_i e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

A causa della presenza della costante ridotta di Planck  $\hbar$ , non solo la forma dell'azione  $S$  è rilevante, ma anche il suo valore. Esso definisce il peso delle vere traiettorie.

**Limite classico.** Per un sistema classico si ha  $|S| \gg \hbar$  e quindi, in generale, le fasi sono molto diverse per due traiettorie vicine: i contributi di diverse traiettorie, come funzioni di  $x_i$ , si cancellano tra loro e non contribuiscono. Equivalentemente, nel formalismo euclideo, le traiettorie che sono lontane dal minimo non contribuiscono poiché l'esponenziale è piccolo.

Scegliendo delle traiettorie vicino a quella classica si ha  $\delta S = 0$  e quindi tali traiettorie hanno la stessa fase: la cancellazione non avviene. Nel formalismo euclideo, l'azione di tali cammini sono vicini al minimo e contribuiscono tutte le traiettorie? [r] con  $\delta S = \hbar$  vicino al minimo.

Per un sistema classico contribuiscono solo i termini vicini all'estremo, vicini nel senso  $\delta S \sim \hbar$ . Con strumenti di misura macroscopici non ci si accorge di tali termini e dunque si misura una traiettoria deterministica.

Misurare la traiettoria con precisioni di  $\hbar$  su  $\delta S$  allora ci si accorge che la traiettoria non è più unica.

Per sistemi atomici si ha  $|S| \sim \hbar$  e quindi tutti gli integrali sui cammini contribuiscono, non solo quelli vicini alla traiettoria classica. In questo caso, nessuna traiettoria è significativamente più importante di ogni altra.

La fenditura e la doppia fenditura si può fare bene con il path integral (v. Gasiorowicz).

**Funzione di partizione di un sistema quantistico.** Tipicamente non si considera l'ampiezza di probabilità  $G(x, t, x_0, t_0)$ , ma si calcola

$$\int dx_0 G(x_N, T, x_0, 0), \quad x_N = x_0$$

cioè la traccia del propagatore ritardato con condizioni periodiche

$$Z_a(T) = \text{Tr} [\hat{T}_a^N] = \int dx_0 G(x_N, T, x_0, 0), \quad t > t_0, \quad T = t - t_0, \quad x_N = x_0$$

La sua espressione integrale è

$$Z_a(T) = \left( \frac{m}{2\pi a} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S_E}, \quad x_N = x_0$$

Il fattore di normalizzazione è spesso ignorato. Per i sistemi con azione  $S$  reale, l'integrale è identico alla funzione di partizione con fattore di Boltzmann  $e^{-S}$ . Inoltre risulta chiaro che si possono usare le tecniche di risoluzione sviluppate in meccanica statistica per calcolare l'integrale

sopra. In particolare, i metodi Monte Carlo possono essere utilizzati per calcolare le sue funzioni di correlazione.

Inoltre, vale

$$Z_a(T) = \sum_n e^{-\mathcal{E}_n T}, \quad T > 0$$

Come per il propagatore ritardato, si può studiare la dipendenza di  $T_0$  facendo la trasformata di Fourier ed è possibile calcolare tutti gli autovalori  $\mathcal{E}_n$ .

Se si potesse calcolare, si va a  $T$  grande, si estrae l'esponenziale dominante, cioè quello con autovalore minore, lo si sottrae alla funzione, poi si va a  $T$  grande, si estrae l'esponenziale dominante, cioè il secondo autovalore minore, lo si sottrae e così via.

Si fa l'oscillatore armonico per imparare le tecniche (e visto che c'è la soluzione analitica si confronta). Poi si può usare un potenziale anarmonico.

## Lezione 5

ven 10 nov  
2023 14:30

### 11 Funzioni di correlazione

Gli integrali sopra non si sanno risolvere tramite il metodo Monte Carlo. Inoltre si calcolano solamente gli autovalori. Si è interessati agli elementi di matrice di osservabili su stati fisici.

#### 11.1 Prodotto ordinato temporale di operatori

In generale, in meccanica quantistica si è interessati al calcolo di elementi di matrice di operatori. In particolare di elementi tra autostati dell'hamiltoniana, cioè particelle. Per esempio dagli elementi di matrice di  $\hat{x}$ ,  $\hat{x}^2$ ,  $\hat{x}^3$ , etc, si può ricostruire la funzione d'onda

$$u_n(x) = \langle x | E_n \rangle$$

Si vede come estrarre gli elementi di matrice nel formalismo dell'integrale sui cammini. Si definisce il prodotto ordinato temporale (T-prodotto o tempo-ordinato) degli operatori  $\hat{O}_1(t_1)$  e  $\hat{O}_2(t_2)$  (in rappresentazione di Heisenberg) come

$$\langle E_0 | \mathcal{T} \{ \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \} | E_0 \rangle \equiv \theta(t_1 - t_2) \langle E_0 | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) | E_0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle E_0 | \hat{O}_2(t_2) \hat{O}_1(t_1) | E_0 \rangle$$

dove  $|E_0\rangle$  è lo stato di vuoto (la cui energia è tipicamente posta a zero o ad una fase banale). Se  $\hat{O}_i$  è lo stesso campo, allora essa viene detta funzione di correlazione a due punti. Da essa, segue

$$\begin{aligned} \langle E_0 | \mathcal{T} \{ \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \} | E_0 \rangle &= \theta(t_1 - t_2) \langle E_0 | e^{i\hat{H}t_1} \hat{O}_1(0) e^{-i\hat{H}(t_1-t_2)} \hat{O}_2(0) e^{-i\hat{H}t_2} | 0 \rangle \\ &+ \theta(t_2 - t_1) \langle E_0 | e^{i\hat{H}t_2} \hat{O}_2(0) e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} \hat{O}_1(0) e^{-i\hat{H}t_1} | E_0 \rangle \end{aligned}$$

L'esponenziale nel mezzo è il propagatore ritardato  $\hat{G}$  che determina l'evoluzione temporale anche dei prodotti ordinati temporali.

Si inserisce l'identità

$$I = \sum_n |E_n\rangle \langle E_n|$$

tra i due operatori per ottenere

$$\begin{aligned} \langle E_0 | \mathcal{T} \{ \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \} | E_0 \rangle &= \theta(t_1 - t_2) \sum_n \langle E_0 | \hat{O}_1(0) | E_n \rangle \langle E_n | \hat{O}_2(0) | E_0 \rangle e^{-i(E_n - E_0)(t_1 - t_2)} \\ &+ \theta(t_2 - t_1) \sum_n \langle E_0 | \hat{O}_2(0) | E_n \rangle \langle E_n | \hat{O}_1(0) | E_0 \rangle e^{-i(E_n - E_0)(t_2 - t_1)} \end{aligned}$$

Risulta chiaro che dalla dipendenza temporale della funzione di correlazione a due punti si possono estrarre gli autovalori e gli elementi di matrice.

**Esempio.** Per esempio, come il propagatore ritardato, si consideri la trasformazione di Fourier con  $\text{Im } z > 0$ :

$$\int_0^\infty dt e^{izt} \langle E_0 | \mathcal{T} \{ \hat{O}_1(t) \hat{O}_2(0) \} | E_0 \rangle = i \sum_n \frac{1}{z - (E_n - E_0)} \langle E_0 | \hat{O}_1 | E_n \rangle \langle E_n | \hat{O}_2 | E_0 \rangle$$

dove  $t = t_1 - t_2$ . Scegliendo  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ , dai poli o dai tagli della funzione si possono estrarre gli autovalori  $E_n$  e la densità di probabilità

$$|\langle E_0 | \hat{O}_1(0) | E_n \rangle|^2$$

Risulta ovvio come generalizzare il prodotto ordinato temporale per una funzione a tre operatori (dunque tre punti). Dalla funzione a tre punti si può estrarre l'elemento di matrice tra due stati generici, e così via.

**Conclusione.** Per determinare gli elementi di matrice (equivalenti alla funzione d'onda) si può studiare l'andamento temporale (o la loro trasformata di Laplace) del prodotto ordinato temporale di operatori. Dall'andamento temporale (o trasformata di Laplace) si possono estrarre anche gli autovalori dell'energia.

## 11.2 Funzioni di correlazione

La funzione di partizione è un integrale di funzioni numeriche. I prodotti ordinati temporali sono lo strumento per studiare non perturbativamente una teoria. I valori di aspettative dei prodotti ordinati temporali sono in relazione biunivoca con le funzioni di correlazione del sistema statistico associato.

Si utilizza il formalismo euclideo con le condizioni al bordo periodiche  $x_N = x_0$ . Si definisce

$$t_1 = i_1 a, \quad t_2 = i_2 a, \quad T = Na, \quad i_j \in \mathbb{N}$$

dove  $i$  è l'indice che identifica il passo temporale discretizzato. Successivamente, si potrebbe confondere con  $t$  [r]. Si aggiunge un'ipotesi semplificativa. Senza perdita di generalità, si considerano solo operatori diagonali nella base delle coordiante

$$\hat{O}_1 |x\rangle = O_1(x) |x\rangle, \quad \hat{O}_2 |x\rangle = O_2(x) |x\rangle$$

In meccanica statistica, la funzione di correlazione tra  $O_1(x)$  e  $O_2(x)$  è definita come

$$C(t_1, t_2) = \frac{\int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i O_1(x_{i_1}) O_2(x_{i_2}) e^{-S}}{\int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S}}$$

In teoria dei campi, gli autovalori degli operatori sono i campi. Nel formalismo operatoriale, essa corrisponde a

$$C(t_1, t_2) = \frac{1}{Z_a(T)} \left[ \theta(t_2 - t_1) \text{Tr} \left( \hat{T}_a^{N-|i_2-i_1|} \hat{O}_2 \hat{T}_a^{|i_1-i_2|} \hat{O}_1 \right) + \theta(t_1 - t_2) \text{Tr} \left( \hat{T}_a^{N-|i_1-i_2|} \hat{O}_1 \hat{T}_a^{|i_1-i_2|} \hat{O}_2 \right) \right]$$

il sistema si evolve poi subisce l'operatore  $\hat{O}_1$  poi si evolve con  $\hat{T}_a$ , poi agisce l'operatore  $\hat{O}_2$  e poi si evolve. Si noti che per la proprietà di ciclicità, si portano i primi operatori di evoluzione alla fine.

Utilizzare l'identità

$$\hat{I} = \int dx_i |x_i\rangle \langle x_i|$$

inserita a destra degli operatori  $\hat{O}_i$ , come fatto per il propagatore ritardato, permette di ottenere la definizione della meccanica statistica (perché gli operatori sono diagonali, dunque si possono sostituire con i propri autovalori, cioè numeri).

**Relazione con prodotti ordinati temporali.** Inserendo una volta l'identità

$$\hat{I} = \sum_n |\mathcal{E}_n\rangle\langle\mathcal{E}_n|$$

il denominatore diventa

$$Z_a(T) = \sum_n e^{-\mathcal{E}_n T}$$

mentre al numeratore, l'identità si pone prima del primo operatore  $\hat{O}_i$  a sinistra

$$\begin{aligned} Z_a(T)C(t_1, t_2) &= \theta(t_2 - t_1) \sum_n e^{-\mathcal{E}_n(T-|t_1-t_2|)} \langle\mathcal{E}_n| \hat{O}_2 \hat{T}_a^{|t_1-t_2|} \hat{O}_1 |\mathcal{E}_n\rangle \\ &+ \theta(t_1 - t_2) \sum_n e^{-\mathcal{E}_n(T-|t_1-t_2|)} \langle\mathcal{E}_n| \hat{O}_1 \hat{T}_a^{|t_1-t_2|} \hat{O}_2 |\mathcal{E}_n\rangle \end{aligned}$$

Ipotizzando per convenienza che  $\mathcal{E}_n > 0$ , nel limite  $T \rightarrow \infty$  (cioè il reticolo tende all'infinito) e  $a$  costante si ha

$$N \rightarrow \infty \implies Z_a(T) = e^{-\mathcal{E}_0 T}$$

cioè si ha un contributo solamente dall'autovalore più piccolo. Similmente a numeratore rimane solo  $n = 0$  della somma: si ha il solo contributo del vuoto. Ricordando che nel formalismo euclideo gli operatori in descrizione di Heisenberg si evolvono come

$$\hat{O}(t) = \hat{T}^{-\frac{t}{a}} \hat{O} \hat{T}^{\frac{t}{a}}$$

allora, semplificando  $Z_a(T)$ , riportando l'esponenziale nell'elemento di matrice e riscrivendolo in termini di  $\hat{T}_a$ , si ha

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ a = \text{cost}}} C(t_1, t_2) &= \theta(t_2 - t_1) \langle E_0 | \hat{O}_2(t_2) \hat{O}_1(t_1) | E_0 \rangle \\ &+ \theta(t_1 - t_2) \langle E_0 | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) | E_0 \rangle \end{aligned}$$

Nel formalismo euclideo, il contributo del vuoto nel numeratore e denominatore richiede soltanto il limite per  $T \rightarrow \infty$ .

**Elementi di matrice dalla funzione a due punti.** Si consideri la funzione di correlazione nel formalismo operatoriale nel limite  $T \rightarrow \infty$ . Si inserisce un'altra identità per ottenere

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= \sum_m e^{-\mathcal{E}_m |t_2-t_1|} [\theta(t_2 - t_1) \langle\mathcal{E}_0| \hat{O}_2 |\mathcal{E}_m\rangle \langle\mathcal{E}_m| \hat{O}_1 |\mathcal{E}_0\rangle \\ &+ \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_1) \langle\mathcal{E}_0| \hat{O}_1 |\mathcal{E}_m\rangle \langle\mathcal{E}_m| \hat{O}_2 |\mathcal{E}_0\rangle] \end{aligned}$$

vera perché  $T$  è grande. Facendo anche il limite della distanza temporale tra i due operatori  $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$  si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{|t_1-t_2| \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} C(t_1, t_2) &= e^{-\bar{\mathcal{E}}|t_2-t_1|} [\theta(t_2 - t_1) \langle\mathcal{E}_0| \hat{O}_2 |\bar{\mathcal{E}}\rangle \langle\bar{\mathcal{E}}| \hat{O}_1 |\mathcal{E}_0\rangle \\ &+ \theta(t_1 - t_2) \langle\mathcal{E}_0| \hat{O}_1 |\bar{\mathcal{E}}\rangle \langle\bar{\mathcal{E}}| \hat{O}_2 |\mathcal{E}_0\rangle] \end{aligned}$$

dove  $|\bar{\mathcal{E}}\rangle$  è il primo stato (il più libero) per il quale la combinazione di elementi di matrice è diversa da zero (il motivo per cui rimane è analogo a sopra). Questo è valido per ogni coppia di operatori  $\hat{O}_1$  e  $\hat{O}_2$  e quindi si ha accesso a tutte le informazioni dinamica del sistema.

Non si usa direttamente il vuoto perché il valore di aspettazione potrebbe essere nullo.

Questa espressione è quella che si usa per calcolare la massa di un nucleo a partire dall'azione della cromodinamica quantistica.

**Esempio 11.1.** Si consideri un sistema invariante per trasformazione di parità. Gli stati si possono classificare in base alla parità

$$\mathcal{P} |\mathcal{E}_0\rangle = |\mathcal{E}_0\rangle, \quad \mathcal{P} |\mathcal{E}_1\rangle = -|\mathcal{E}_1\rangle$$



ad esempio un oscillatore armonico. Ricordando che

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P}|x\rangle = \mathcal{P}\hat{x}|-x\rangle = -x\mathcal{P}|-x\rangle = -\hat{x}|x\rangle \implies \mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x}$$

da cui

$$\langle \mathcal{E}_0 | \hat{x} | \mathcal{E}_0 \rangle = \langle \mathcal{E}_0 | \mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} | \mathcal{E}_0 \rangle = -\langle \mathcal{E}_0 | \hat{x} | \mathcal{E}_0 \rangle \implies \langle \mathcal{E}_0 | \hat{x} | \mathcal{E}_0 \rangle = 0$$

Il vuoto non contribuisce, dunque il correlatore  $\hat{x}\hat{x}$  è

$$\lim_{\substack{|t_1-t_2| \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} C_{xx}(t_1, t_2) = e^{-\mathcal{E}_1|t_2-t_1|} |\langle \mathcal{E}_0 | \hat{x} | \mathcal{E}_1 \rangle|^2$$

Studiando il correlatore a grandi distanze si estrae l'autovalore e l'elemento di matrice. Mentre il correlatore  $\hat{x}^2\hat{x}^2$  è

$$\lim_{\substack{|t_1-t_2| \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} C_{x^2x^2}(t_1, t_2) = e^{-\mathcal{E}_0|t_2-t_1|} |\langle \mathcal{E}_0 | \hat{x}^2 | \mathcal{E}_0 \rangle|^2$$

I polinomi di Hermite si accoppiano con stati  $|\mathcal{E}_i\rangle$  con indice  $i$  maggiore. Per altri stati si può studiare la funzione a tre punti oppure estrarre l'esponentiale sub-leading (cioè dell'ordine successivo a quello dominante) in quello a due punti.

Studiando l'andamento temporale dei correlatori si possono estrarre gli autovalori e gli elementi di matrice.

Per calcolare i correlatori si utilizza il campionamento di importanza in cui le variabili  $x$  sono estratte con probabilità  $e^{-S}$  e dove le osservabili sono  $O_1(x_{i_1})O_2(x_{i_2})$ .

**Osservazione 11.2.** Le teorie quantistiche relativistiche interessanti per la fisica, ossia le teorie quantistiche dei campi, si sanno definire in modo non perturbativo soltanto mediante l'integrale sui cammini. Per risolvere non perturbativamente teorie interessanti come la cromodinamica quantistica, si usano metodi Monte Carlo. La massa del protone, o del neutrone, si calcola da principi primi utilizzando tali metodi.

**Osservazione 11.3.** In meccanica quantistica, per quantizzare una teoria si scrive l'hamiltoniana ed i commutatori tra gli operatori. Lo stesso avviene in teoria dei campi. In questo caso, la quantizzazione è più semplice e data da

$$Z = \int \prod_i dx_i e^{-S}$$

dove  $S$  è l'azione classica. Ad esempio, per la teoria scalare  $\lambda\varphi^4$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}m\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

Allora la quantizzazione della teoria di campo è la formula sopra integrando nelle coordinate fondamentali (cioè il campo).

## 12 Oscillatore armonico

La soluzione dell'oscillatore armonico è analitica e si trova la versione discreta, diversa da quella analitica. La soluzione discreta va confrontata con il calcolo numerico.

**Integrale gaussiano multidimensionale.** L'integrale gaussiano multidimensionale è dato da

$$I(A, b) = \int \prod_{i=1}^n dx_i \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right]$$

dove  $A$  è una matrice simmetrica reale con autovalori  $\lambda_i > 0$  positivi. Definendo

$$x_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} b_j + y_i \implies \prod_i dx_i = \prod_i dy_i, \quad x = A^{-1}b + y$$

e, notando che l'inversa di una matrice simmetrica è ancora una matrice simmetrica, si ottiene

$$\sum_{ij} x_i A_{ij} x_j = x^\top A x = (y^\top + b^\top A^{-1}) A (A^{-1} b + y) = y^\top A y + b^\top A^{-1} b + y^\top b + b^\top y$$

così come

$$\sum_i b_i x_i = b^\top x = b^\top A^{-1} b + b^\top y$$

Pertanto

$$\begin{aligned} I(A, b) &= \int \prod_i dy_i \exp \left[ -\frac{1}{2} (y^\top A y + b^\top A^{-1} b + y^\top b + b^\top y) + b^\top A^{-1} b + b^\top y \right] \\ &= e^{\frac{1}{2} b^\top A^{-1} b} \int \prod_i dy_i e^{-\frac{1}{2} y^\top A y} \end{aligned}$$

Operando un cambio di variabile che diagonalizza la matrice (che si può fare poiché la matrice è simmetrica)

$$z = Ry, \quad R^\top R = I, \quad \det R = 1 = \det J \implies z^\top R^\top A R z = \sum_i \lambda_i z_i^2$$

si ha

$$I(A, b) = e^{\frac{1}{2} b^\top A^{-1} b} \int \prod_i dz_i e^{-\frac{1}{2} \sum_i z_i^2 \lambda_i} = e^{\frac{1}{2} b^\top A^{-1} b} \prod_i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} b^\top A^{-1} b}$$

## 12.1 Integrale sui cammini

Considerando condizioni al bordo periodiche, sia

$$T = aN$$

La funzione di partizione è

$$Z_a(T) = \left( \frac{m}{2\pi a} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S}, \quad x_N = x_0$$

L'azione è data da

$$S = a \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2 \right]$$

Visto che l'integrale è quadratico allora si può svolgere. Si potrebbe fare l'integrale quadratico calcolando autovalori ed autovettori della matrice. Invece si segue una procedura ad hoc<sup>1</sup>. Si definisce

$$\xi = 1 + \frac{1}{2} a^2 \omega^2, \quad y_i = \sqrt{\frac{m}{a}} x_i$$

da cui l'azione è

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \xi y_i^2 - \sum_{i=0}^{N-1} y_{i+1} y_i$$

[r] manca 1/2? Si considerano come variabili di integrazione tutte tranne  $y_0$  e  $y_N$  (che sono anche identiche). Definendo la matrice  $(N-1) \times (N-1)$

$$Q = \begin{bmatrix} 2\xi & -1 & 0 & & \\ -1 & 2\xi & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2\xi & -1 & 0 \\ & 0 & -1 & 2\xi & -1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

<sup>1</sup>Si veda Rothe, "Lattice Gauge Theories", §Test of the Energy Sum Rule. The Harmonic Oscillator.

si ha

$$y^\top \equiv (y_1, \dots, y_{N-1}), \quad b^\top = (y_0, 0, 0, \dots, 0, 0, y_0)$$

per cui l'azione risulta essere

$$S = \frac{1}{2} y^\top Q y + \xi y_0^2 - y_0(y_1 + y_{N-1}) = \frac{1}{2} y^\top Q y + \frac{1}{2} \xi b^\top b - y^\top b$$

Quindi l'integrale sui cammini si scrive come

$$Z_a(T) = \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{a}{m}\right)^{\frac{N}{a}} \int dy_0 \int \prod_{i=1}^{N-1} dy_i \exp \left[ - \left( \frac{1}{2} y^\top Q y + \frac{1}{2} \xi b^\top b - y^\top b \right) \right]$$

Sia l'ultimo integrale nominato  $I$ . Utilizzando il risultato dell'integrale gaussiano si ha

$$I(Q, b) = \int \prod_{i=1}^{N-1} dy_i \exp \left[ - \frac{1}{2} y^\top Q y + y^\top b \right] = (2\pi)^{\frac{N-1}{2}} (\det Q)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} b^\top Q^{-1} b}$$

pertanto

$$Z_a(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \int dy_0 \exp \left[ - \frac{1}{2} b^\top (\xi - Q^{-1}) b \right]$$

Bisogna calcolare il determinante ed il termine  $Q^{-1}b$ .

**Determinante.** Si calcola il determinante tramite ricorsione. Si definisce

$$D_n \equiv \det Q$$

dove  $Q$  è la matrice sopra con dimensione  $n \times n$ . Dunque

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 2\xi, \quad D_2 = (2\xi)^2 - 1 = 2\xi D_1 - D_0, \quad D_3 = (2\xi)^3 - 4\xi = 2\xi D_2 - D_1$$

La regola di ricorsione è

$$D_{n+1} = 2\xi D_n - D_{n-1}$$

cioè un'equazione differenziale discretizzata al secondo ordine nella variabile  $n$ . Definendo

$$\xi \equiv \cosh(a\tilde{\omega}) \implies a\tilde{\omega} = \ln \left( 1 + a\bar{\omega} + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \right), \quad \bar{\omega}^2 \equiv \omega^2 \left( 1 + \frac{1}{4} a^2 \omega^2 \right)$$

Le omega sono tutte uguali nel limite del continuo, le differenze sono dovute alla formula di Trotter cioè all'errore di discretizzazione. Si dimostra la relazione sopra cioè la soluzione all'equazione differenziale

$$2 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \right) = e^{a\bar{\omega}} + e^{-a\bar{\omega}} \iff 2 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \right) = x + \frac{1}{x}, \quad x = e^{a\bar{\omega}}$$

da cui si ottiene

$$x = 1 + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \pm a\bar{\omega} \implies a\bar{\omega} = \ln \left( 1 + a\bar{\omega} + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \right)$$

dove si è presa la soluzione maggiore.

Quindi l'equazione ricorsiva si può scrivere come

$$D_{n+1} = [e^{a\bar{\omega}} + e^{-a\bar{\omega}}] D_n - D_{n-1}$$

La cui soluzione è

$$D_n = c e^{na\bar{\omega}} + d e^{-na\bar{\omega}}, \quad c = \frac{e^{a\bar{\omega}}}{2 \sinh(a\bar{\omega})}, \quad d = -\frac{e^{a\bar{\omega}}}{2 \sinh(a\bar{\omega})}$$

Pertanto

$$D_n = \frac{\sinh[(n+1)a\bar{\omega}]}{\sinh(a\bar{\omega})}$$

Si verifica la correttezza

$$D_0 \equiv 1, \quad D_1 = \frac{\sinh(2a\tilde{\omega})}{\sinh(a\tilde{\omega})} = 2 \cosh(a\tilde{\omega}) = 2\xi$$

Eliminando il denominatore, per ricorsione si ha

$$\sinh[(n+2)a\tilde{\omega}] = 2 \cosh(a\tilde{\omega}) \sinh[(n+1)a\tilde{\omega}] - \sinh(na\tilde{\omega})$$

che è vera utilizzando le formule di somma delle funzioni iperboliche.

Quindi il determinante è

$$\det Q = \frac{\sinh[Na\tilde{\omega}]}{\sinh(a\tilde{\omega})}$$

**Osservazione 12.1.** Successivamente si vede che gli autovalori dell'oscillatore armonico nel continuo e nel discreto sono

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \mathcal{E}_n = \tilde{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

**Secondo termine.** Definendo

$$a = Q^{-1}b \implies Qa = b$$

si può risolvere per  $a$  il sistema di equazioni lineari. La matrice  $Q$  è sparsa (sparse matrix). Dato

$$a = (a_1, \dots, a_{N-1})$$

si ha

$$Qa = b \implies 2\xi a_1 - a_2 = y_0, \quad -a_{n+2} + 2\xi a_{n+1} - a_n = 0, \quad -a_{N-2} + 2\xi a_{N-1} = y_0$$

con  $n = 1, \dots, N-3$ . L'equazione di mezzo è uguale a quella per il determinante. Le altre fissano le costanti  $c$  e  $d$ . Allora

$$a_n = ce^{na\tilde{\omega}} + de^{-na\tilde{\omega}}, \quad c = \frac{y_0}{2 \sinh(Na\tilde{\omega})} [1 - e^{-Na\tilde{\omega}}], \quad d = -\frac{y_0}{2 \sinh(Na\tilde{\omega})} [1 - e^{Na\tilde{\omega}}]$$

da cui

$$a_n = \frac{y_0}{\sinh(Na\tilde{\omega})} [\sinh(na\tilde{\omega}) + \sinh((N-n)a\tilde{\omega})]$$

Pertanto, ricordando la forma di  $b^\top$ , si ha

$$b^\top Q^{-1}b = b^\top a = \frac{2y_0^2}{\sinh(Na\tilde{\omega})} [\sinh(a\tilde{\omega}) + \sinh((N-1)a\tilde{\omega})]$$

da cui

$$\begin{aligned} b^\top (\xi - Q^{-1})b &= \xi b^\top b - b^\top a \\ &= \frac{2y_0^2}{\sinh(Na\tilde{\omega})} [-\sinh(a\tilde{\omega}) - \sinh((N-1)a\tilde{\omega}) + \cosh(a\tilde{\omega}) \sinh(Na\tilde{\omega})] \\ &= 2y_0^2 \frac{\sinh(a\tilde{\omega})}{\sinh(Na\tilde{\omega})} [\cosh(Na\tilde{\omega}) - 1] \end{aligned}$$

Alla terza riga si sono manipolati gli ultimi due termini.

**Funzione di partizione.** Quindi l'integrale cercato per la funzione di partizione è un integrale gaussiano con una complicata espressione per la varianza

$$\int dy_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} b^\top (\xi - Q^{-1}) b \right] = \left[ \frac{2\pi \sinh(Na\tilde{\omega})}{2 \sinh(a\tilde{\omega}) [\cosh(Na\tilde{\omega}) - 1]} \right]^{\frac{1}{2}}$$

dove la varianza è

$$\sigma^{-2} = 2 \frac{\sinh(a\tilde{\omega})}{\sinh(Na\tilde{\omega})} [\cosh(Na\tilde{\omega}) - 1]$$

Quindi la funzione di partizione è data da

$$\begin{aligned} Z_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sinh(a\tilde{\omega})}{\sinh[Na\tilde{\omega}]} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2\pi \sinh(Na\tilde{\omega})}{2 \sinh(a\tilde{\omega}) [\cosh(Na\tilde{\omega}) - 1]} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2[\cosh(Na\tilde{\omega}) - 1]}} = [e^{Na\tilde{\omega}} + e^{-Na\tilde{\omega}} - 2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= [e^{\frac{a}{2}N\tilde{\omega}} - e^{-\frac{a}{2}N\tilde{\omega}}]^{-1} = \frac{e^{-\frac{a}{2}N\tilde{\omega}}}{1 - e^{-aNa\tilde{\omega}}} \end{aligned}$$

**Osservazione 12.2.** Nel limite del passo reticolare infinitesimo  $a \rightarrow 0$ , e fissando  $m$  e  $\omega$ , si ha

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \bar{\omega} = \omega$$

Gli autostati dell'energia e gli elementi di matrice hanno come limite le espressioni del continuo.

**Osservazione 12.3.** A parte l'energia del vuoto, la funzione di partizione sopra corrisponde alla funzione di partizione per un fotone. Essa è legata alla radiazione di corpo nero con lunghezza temporale  $T = (k_B \Theta)^{-1}$  dove  $\Theta$  è la temperatura. Per  $a \rightarrow 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} Z_a(T) = \frac{e^{-\frac{\omega T}{2}}}{1 - e^{-\omega T}}, \quad T = \frac{1}{k_B \Theta}$$

Per i sistemi quantistici, la funzione di partizione corrisponde alla funzione dei sistemi statistici con temperatura data dall'espressione sopra. Il vuoto termico di una teoria è

$$\text{Tr} [e^{-\frac{\hat{H}}{k_B \Theta}}]$$

[r]

**Osservazione 12.4.** Gli errori di discretizzazione nei livelli energetici sono determinati da  $\tilde{\omega}$ , mentre quelli negli elementi di matrice degli operatori da  $\bar{\omega}$ . Essi sono solitamente diversi.

**Osservazione 12.5.** Dallo stesso calcolo per la funzione di correlazione, si nota che le posizioni dei poli sono gli autovalori  $E_n$ , mentre i residui sono i prodotti degli elementi di matrice degli operatori.

**Osservazione 12.6.** Partendo dall'espressione della funzione di partizione

$$Z_a(T) = \sum_n e^{-\mathcal{E}_n T}$$

si ottiene

$$Z_a(T) = e^{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}T} \sum_n (e^{-\tilde{\omega}T})^n = \sum_n e^{-T\tilde{\omega}^2(n+\frac{1}{2})}$$

Si estrapolano (non interpolano) vari valori per ottenere  $\omega$  al continuo in un grafico  $(a^2, Z)$  [r]  
In QCD definita opportunamente, il termine leading va come  $a^2$ . [r]

**Formalismo Minkowskiano.** Una volta risolto l'integrale sui cammini, si può tornare al tempo di Minkowski sviluppando in serie

$$Z_a^M(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iaN\tilde{\omega}(n+\frac{1}{2})}$$

Nel limite al continuo con fissando  $T = aN$ ,  $m$  e  $\omega$  si ha

$$a \rightarrow 0, \quad \tilde{\omega} \rightarrow \omega, \quad Z_a^M(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iT\omega(n+\frac{1}{2})}$$

Si applica la trasformata di Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{izt} Z_a^M(t) dt$$

la cui posizione è

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

## Lezione 6

ven 17 nov  
2023 14:30

## Parte IV

# Catene di Markov e teorema ergodico

Si veda Feller e Parisi. Al fine di calcolare le funzioni di correlazione

$$\langle O_1(t_1) O_2(t_2) \rangle = \frac{\int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S} O_1(t_1) O_2(t_2)}{\int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S}}$$

bisogna trovare un metodo per campionare secondo una distribuzione

$$P(x) = \frac{e^{-S}}{\int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S}}$$

in modo automatico.

In precedenza ci si è occupate dell'estrazione di valori di  $\hat{x}$  indipendenti tra loro, cioè la probabilità di ottenere la sequenza

$$x_1, \dots, x_n, \quad P(x_1 \cdots x_n) = P_1 P_2 \cdots P_n$$

Ogni estrazione dipende dalla probabilità dello stato finale del sistema, ma mai dallo stato iniziale. Nelle catene di Markov, si considera la più semplice tra le generalizzazioni, ossia la probabilità in ogni estrazione dipende dallo stato in cui si trova il sistema e dallo stato finale  $P_{1,2}$

$$P\{(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_n})\} = a_{j_0} P_{j_0 j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{n-1} j_n}$$

dove  $P_{ij}$  è la probabilità condizionata. La distribuzione di probabilità cercata si ottiene dopo  $n$  passaggi.

## 13 Catene di Markov

**Notazione.** Il simbolo  $E_k$  indica i risultati definiti ed i possibili stati del sistema (l'indice  $k$  indica quante estrazioni sono state fatte). Ad esempio, per l'oscillatore armonico, ogni  $E_k$  è una ennupla  $(x_1, \dots, x_N)$  (ogni ennupla può avere elementi diversi). Esso può indicare molte variabili, mai solo una come in precedenza. Il simbolo  $P_{jk}$  è la probabilità di ottenere una transizione dallo stato  $E_j$  allo stato  $E_k$ . Infine, il simbolo  $a_k$  è la probabilità di ottenere lo stato  $E_k$  nell'estrazione iniziale.

**Definizione 13.1.** Una sequenza di estrazioni  $E_1, E_2, \dots$  si chiama catena di Markov se la probabilità di estrazione della sequenza è data da

$$P\{(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_n})\} = a_{j_0} P_{j_0 j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{n-1} j_n}$$

dove  $a_{j_0}$  è la distribuzione di probabilità della prima estrazione e  $P_{jk}$  è la probabilità condizionata (fissa nel tempo di Minkowski) di ottenere  $E_k$  partendo da  $E_j$ .

**Proposizione 13.2.** Poiché  $a_k$  e  $P_{jk}$  sono probabilità, vale

$$\begin{aligned} a_k &\geq 0, \quad \forall k; \quad \sum_k a_k = 1 \\ P_{jk} &\geq 0, \quad \forall k, j; \quad \sum_k P_{jk} = 1, \quad \forall j \end{aligned}$$

**Teorema 13.3.** La distribuzione  $P\{(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_n})\} \geq 0$  è una distribuzione di probabilità nello spazio degli stati di  $n + 1$  estrazioni (ossia spazio di  $n + 1$  combinazioni). [r]

*Dimostrazione.* Applicando la proposizione sopra si ha

$$\sum_{j_0 \cdots j_n} a_{j_0} P_{j_0 j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{n-1} j_n} = \sum_{j_0 \cdots j_{n-1}} a_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{n-2} j_{n-1}} = \cdots = 1$$

□

**Teorema 13.4.** La probabilità  $P\{(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_m})\}$  è indipendente dal numero  $n \geq m$  di estrazioni.

### 13.1 Matrice di probabilità di transizione

**Definizione 13.5.** Le probabilità di transizione possono essere rappresentate da una matrice di probabilità di transizione

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Essa è una matrice quadrata, finita o infinita (in base alla catena di Markov studiata).

**Proposizione 13.6.** Per i sistemi con un numero finito di stati, la matrice  $P$  è una matrice stocastica perché è quadrata e vale

$$[P]_{ij} \geq 0, \quad \forall ij, \quad \sum_j [P]_{ij} = 1$$

La matrice stocastica  $P$  e la distribuzione [r] definiscono completamente la catena di Markov con gli stati  $E_0, E_1$ , etc.

**Proposizione 13.7** (non fatta). Dalla proprietà [r]

$$\sum_j [P]_{ij} = 1 \implies P v_I = v_I \implies v_I = (1, 1, 1, \dots)^\top$$

cioè le matrici stocastiche hanno un autovalore 1 ed l'autovettore associato è  $v_1$ .

**Proposizione 13.8.** Definendo la norma di un vettore di stati? [r] come

$$\|v\| \equiv \sum_j |v_j|$$

si ha

$$\|vP\| = \sum_j \left| \sum_i v_i P_{ij} \right| \leq \sum_{ij} |v_i P_{ij}| = \sum_{ij} |v_i| P_{ij} = \|v\|, \quad \forall v$$

dove si applica la disuguaglianza triangolare. Quindi

$$\|vP\| \leq \|v\|, \quad \forall v$$

**Corollario 13.9.** Questo implica che tutti gli autovalori sinistri sono  $\lambda \leq 1$ . Infatti

$$vP = \lambda v \implies \|vP\| = |\lambda| \|v\|$$

quindi la relazione precedente implica

$$|\lambda| \|v\| \leq \|v\| \implies |\lambda| \leq 1$$

### 13.2 Probabilità di transizione dopo un numero arbitrario di passi

**Definizione 13.10.** Si definisce la probabilità  $P_{jk}^{(n)}$  di transizione dallo stato  $E_j$  allo stato  $E_k$  in esattamente  $n$  passi.

**Proposizione 13.11** (Relazione di Chapman–Kolmogorov). Vale

$$P_{jk}^{(1)} = P_{jk}, \quad P_{jk}^{(2)} = \sum_{\nu} P_{j\nu} P_{\nu k}, \quad \dots, \quad P_{jk}^{(n+1)} = \sum_{\nu} P_{j\nu} P_{\nu k}^{(n)}$$

così come

$$P_{jk}^{(n+m)} = \sum_{\nu} P_{j\nu}^{(m)} P_{\nu k}^{(n)}$$

cioè il prodotto righe per colonne. Questa relazione è analoga a quella per il propagatore ritardato dell'oscillatore armonico.

**Definizione 13.12.** Matrice stocastica della probabilità composta è

$$[P^{(n)}]_{jk} \equiv P_{jk}^{(n)}$$

**Proposizione 13.13.** Vale

$$P^{(n)} = P^n, \quad P^{(n+1)} = P P^n, \quad P^{(n+m)} = P^{(m)} P^{(n)}$$

#### 13.2.1 Esempio — parte prima

**Definizione 13.14.** Si definisce una catena di Markov per un sistema con due stati: 0 e 1, falso e vero. La matrice di probabilità di transizione è

$$P \equiv \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0$$

**Rappresentazione spettrale.** Si cercano gli autovalori e gli autovettori della matrice. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{bmatrix} &= (1-\alpha)(1-\beta) - \lambda(2-\alpha-\beta) + \lambda^2 - \alpha\beta \\ &= \lambda^2 - \lambda(2-\alpha-\beta) + (1-\alpha-\beta) = 0 \end{aligned}$$

da cui gli autovalori sono

$$\lambda = \frac{(2-\alpha-\beta) \pm (\alpha+\beta)}{2} \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1-\alpha-\beta$$

**Autovettori.** Gli autovettori associati sono

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Dati gli autovettori, si può costruire la matrice  $Q$  del cambio di base per diagonalizzare la matrice di transizione  $P$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice di transizione diventa

$$P = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix} Q^{-1}$$



**Matrice stocastica della probabilità composta.** La matrice stocastica della probabilità composta è

$$P^n = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha - \beta)^n \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Se il modulo di un autovalore è minore di 1, allora il suo peso viene soppresso per  $n \rightarrow \infty$ . La matrice si può riscrivere come

$$\begin{aligned} P^n &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)^n}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)^n}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Proposizione 13.15.** Nel limite  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 \\ \Pi_0 & \Pi_1 \end{bmatrix}$$

**Proposizione 13.16 (I).** Per costruzione, la matrice sopra è una matrice stocastica  $\Pi_0 + \Pi_1 = 1$ .

**Proposizione 13.17 (II).** Vale

$$\begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 \\ \Pi_0 & \Pi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Proposizione 13.18 (III).** Per costruzione vale

$$\begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 \\ \Pi_0 & \Pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 \\ \Pi_0 & \Pi_1 \end{bmatrix} P \implies (\Pi_0, \Pi_1) = (\Pi_0, \Pi_1) P$$

cioè è autovettore sinistro della matrice i cui elementi sono una distribuzione di probabilità  $[r]$  detta anche distribuzione di probabilità asintotica di  $P$  ed è pari a

$$\Pi = \frac{e^{-S}}{Z}$$

Bisogna definire la matrice  $P$  di modo che la sua distribuzione asintotica sia quella cercata.

**Proposizione 13.19 (IV).** Data una distribuzione iniziale

$$a = [a_0, a_1] \mid a_0 + a_1 = 1$$

segue

$$(a_0, a_1) \begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 \\ \Pi_0 & \Pi_1 \end{bmatrix} = (\Pi_0, \Pi_1)$$

La distribuzione di probabilità dello stato finale (la distribuzione asintotica) è indipendente dalla distribuzione di probabilità dello stato iniziale.

**Osservazione 13.20.** Risulta chiaro che per estrarre eventi con probabilità  $\Pi_i$ , le catene di Markov sono un metodo adatto.

### 13.3 Classificazione degli insiemi di stati

**Definizione 13.21.** Un insieme di stati  $C$  è chiuso se nessuno stato fuori di  $C$  può essere raggiunto da qualunque stato in  $C$  tramite una catena di Markov.

**Definizione 13.22.** Una catena di Markov è irriducibile se l'unico insieme chiuso è quello che contiene ogni stato.

**Proposizione 13.23.** Una catena è irriducibile se e solo se ogni stato può essere raggiunto da ogni altro stato.

**Esempio 13.24.** Si considerino degli stati  $E_1, \dots, E_\rho$  tali che  $E_1, \dots, E_r$  con  $r < \rho$  formino un insieme chiuso. Allora la matrice di transizione è

$$P = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ U & V \end{bmatrix} \implies P^n = \begin{bmatrix} Q^n & 0 \\ U_n & V^n \end{bmatrix}$$

dove  $Q$  è la sottomatrice di transizione  $r \times r$ . Le probabilità di transizione tra stati nell'insieme chiuso si può calcolare solo come somma sugli stati dell'insieme chiuso. Lo stesso vale per  $V$ .

**Osservazione 13.25.** La richiesta che una catena sia irriducibile serve per eliminare la possibilità che la distribuzione asintotica  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  presenti degli zero o [r] due sistemi allo stesso tempo.

### 13.4 Classificazione degli stati

**Definizione 13.26.** Sia  $f_{jk}^{(n)}$  la probabilità che sia presente un processo che parta dallo stato  $E_j$  e arrivi per la prima volta allo stato  $E_k$  in  $n$  passi. Per convenzione si pone  $f_{jk}^{(0)} = 0$ .

**Osservazione 13.27.** Tale probabilità non è la probabilità che di arrivare in  $E_k$  al passo  $n$  poiché tale probabilità è descritta da  $P_{jk}^{(n)}$ , ma è la probabilità di arrivarci per la prima volta al passo  $n$ .

**Definizione 13.28.** La probabilità di partire da  $E_j$  e arrivare a  $E_k$  è

$$f_{jk} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}^{(n)} \leq 1$$

**Definizione 13.29.** Quando  $f_{jk} = 1$ , la probabilità  $f_{jk}^{(n)}$  è una distribuzione di probabilità nella variabile  $n$ , detta distribuzione di primo passaggio. Si può definire il tempo medio di ricorrenza

$$\mu_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

**Relazione tra le due probabilità ad un passo arbitrario.** Utilizzando le definizioni precedenti con le convenzioni

$$P_{kk}^{(0)} = 1 \quad f_{jk}^{(0)} = 0$$

segue

$$\begin{aligned} P_{jk}^{(1)} &= f_{jk}^{(1)} P_{kk}^{(0)} \\ P_{jk}^{(2)} &= f_{jk}^{(2)} P_{kk}^{(0)} + f_{jk}^{(1)} P_{jk}^{(1)} \\ P_{jk}^{(3)} &= f_{jk}^{(3)} P_{kk}^{(0)} + f_{jk}^{(2)} P_{kk}^{(1)} + f_{jk}^{(1)} P_{jk}^{(2)} \\ &\vdots \\ P_{jk}^{(n)} &= \sum_{\nu=1}^n f_{jk}^{(\nu)} P_{kk}^{(n-\nu)}, \quad n > 0 \end{aligned}$$

Questa relazione definisce  $f_{jk}^{(\nu)}$  in modo implicito.

**Classificazione.** Gli stati si possono classificare come

- uno stato  $E_j$  è persistente se  $f_{jj} = 1$ ,
- uno stato  $E_j$  è transiente se  $f_{jj} < 1$ ,
- uno stato persistente  $E_j$  è nullo se il tempo medio di ricorrenza diverge  $\mu_j \rightarrow \infty$ ,
- uno stato  $E_j$  è periodico con periodo  $t > 1$  intero se  $P_{jj}^{(n)} = 0$  tranne per  $n = \nu t$  e  $t$  è l'intero più grande con questa probabilità,

- uno stato  $E_j$  è aperiodico se non è periodico,
- uno stato  $E_j$  è ergodico se è persistente con  $\mu_j < \infty$  e aperiodico.

**Teorema 13.30** (Ergodico). Si veda Parisi, p. 110?.

I. Uno stato  $E_j$  è transiente se e solo se

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$$

In tal caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} < \infty, \quad \forall i$$

II. Uno stato  $E_j$  è uno stato persistente nullo se e solo se

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \rightarrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = 0$$

In tal caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall i$$

III. Uno stato persistente aperiodico è ergodico se e solo se il tempo medio di ricorrenza è finito  $\mu_j < \infty$ . In tal caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = f_{ij} \mu_j^{-1}$$

Si noti che come il tempo medio abbia un solo indice.

*Dimostrazione.* Si definiscono le funzioni generatrici per  $P_{jk}$  ed  $f_{jk}$

$$P_{jk}(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_{jk}^{(n)} s^n, \quad F_{jk}(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_{jk}^{(n)} s^n$$

La relazione di ricorrenza si può trovare come

$$P_{jj}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^n f_{jj}^{(\nu)} P_{jj}^{(n-\nu)} + \delta_{n,0}$$

Risulta chiaro che questa è la convoluzione discreta di  $\nu$  ed  $n$ . Dunque

$$\begin{aligned} P_{jj}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n f_{jj}^{(\nu)} P_{jj}^{(n-\nu)} s^n + 1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} f_{jj}^{(\nu)} P_{jj}^{(n-\nu)} s^n + 1 \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{jj}^{(\nu)} s^\nu + \sum_{n=\nu}^{\infty} P_{jj}^{(n-\nu)} s^{n-\nu} + 1, \quad m \equiv n - \nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{jj}^{(\nu)} s^\nu + \sum_{m=0}^{\infty} P_{jj}^{(m)} s^m + 1 = F_{jj}(s) P_{jj}(s) + 1 \\ &= \frac{1}{1 - F_{jj}(s)} \end{aligned}$$

alla seconda uguaglianza della prima riga si cambiano i limiti di integrazione poiché si mantiene il dominio di somma lo stesso. Ripetendo il calcolo per  $j \neq k$  e ricordando che  $P_{jk}^{(0)} = 0$  in tal caso, si ha

$$P_{jk}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^n f_{jk}^{(\nu)} P_{kk}^{(n-\nu)}$$

da cui

$$P_{jk}(s) = F_{jk}(s) P_{kk}(s) = \frac{F_{jk}(s)}{1 - F_{kk}(s)}$$

I. Per uno stato transiente si ha

$$f_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1 \iff F_{jj}(1) < 1 \iff F_{jj}(1) < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$$

Inoltre

$$P_{jk}(1) = \frac{F_{jk}(1)}{1 - F_{kk}(1)} \implies \sum_{n=0}^{\infty} P_{jk}^{(n)} < \infty, \quad \forall j$$

II. Per uno stato persistente nullo si ha

$$f_{jj} = 1 \iff F_{jj}(1) = 1 \iff P_{jj}(1) \rightarrow \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \rightarrow \infty$$

così come

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jk}^{(n)} \rightarrow \infty$$

Utilizzando il teorema successivo si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)[P_{jj}(s) - 1]$$

mentre dai risultati precedenti segue

$$\begin{aligned} P_{jj}(s)A &= [1 - F_{jj}(1) - F'_{jj}(1)(s-1) - F''_{jj}(1)(s-1)^2 + \dots]^{-1} \\ &= -[F'_{jj}(1)(s-1) + F''_{jj}(1)(s-1)^2 + \dots]^{-1} \end{aligned}$$

sapendo che  $F_{jj}(1) = 1$ . Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{F'_{jj}(1)} = \frac{1}{\mu_j}$$

dove si ha

$$F'_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} s^{n-1} \implies F'_{jj}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \mu_j$$

Ripetendo i calcoli per  $P_{jk}^{(n)}$  e ricordando

$$P_{jk}(s) = \frac{F_{jk}(s)}{1 - F_{kk}(s)}$$

segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)} = \frac{f_{jk}}{\mu_k}$$

Se lo stato è persistente nullo, allora  $\mu_j \rightarrow \infty$  e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)} = 0$$

III. Uno stato è ergodico  $\mu_j < \infty$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)} = \frac{f_{jk}}{\mu_k}$$

Si noti che [r]. □

**Teorema 13.31.** Vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \sum_{k=1}^{\infty} P^{(k)} s^k$$

dove  $P^{(r)}$  è una successione limitata. Più precisamente, vale se esiste il limite da uno dei due lati, allora l'altro limite esiste e sono uguali.

*Dimostrazione.* Si dimostra il teorema in un senso. Si ipotizza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = A$$

e si verifica che l'altro limite esista e sia pari ad  $A$ . Per la dimostrazione del viceversa, vedere Feller. Un teorema generale di analisi afferma che se esiste il limite sopra per  $n > n(\varepsilon)$ , allora

$$|P(n) - A| < \varepsilon$$

Ricordando la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$$

segue

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} s^k - \frac{A}{1-s} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} s^k - \sum_{k=0}^{\infty} A s^k \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (P^{(k)} - A) s^k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n(\varepsilon)} (P^{(k)} - A) s^k \right| + \left| \sum_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} (P^{(k)} - A) s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n(\varepsilon)} |P^{(k)} - A| s^k + \sum_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |P^{(k)} - A| s^k \\ &\leq n(\varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} s^k \leq n(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1-s} \end{aligned}$$

alla quarta riga si è applicato il fatto che  $|P^{(k)} - A| \leq 1$  così come  $A \leq 1$ . Questo implica che

$$\left| (1-s) \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} s^k - A \right| \leq n(\varepsilon)(1-s) + \varepsilon$$

Nel limite  $s \rightarrow 1^-$  si ha

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \left| (1-s) \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} s^k - A \right| \leq \varepsilon$$

cioè la tesi. □

### 13.4.1 Esempio — parte seconda

Ricordando che

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

segue

$$f_{00}^{(n)} = \alpha(1-\beta)^{n-2}\beta, \quad f_{11}^{(n)} = \beta(1-\alpha)^{n-2}\alpha, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

così come

$$f_{01}^{(n)} = (1-\alpha)^{n-1}\alpha, \quad f_{10}^{(n)} = (1-\beta)^{n-1}\beta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi il tempo medio di ricorrenza è dato da

$$\mu_0 = 1 - \alpha - \sum_{n=2}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = 1 - \alpha + \alpha\beta \sum_{n=2}^{\infty} n(1-\beta)^{n-2}$$

Utilizzando la serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

e sostituendo  $m = n - 1$  si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1-\beta)^{n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)(1-\beta)^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m(1-\beta)^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (1-\beta)^m = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}$$

Pertanto

$$\mu_0 = 1 - \alpha + \alpha\beta \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right] = 1 - \alpha + \alpha \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right] = 1 + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\beta}$$

In modo analogo si ha

$$\mu_1 = 1 - \beta + \sum_{n=2}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 - \beta + \alpha\beta \sum_{n=2}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-2} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

Pertanto, la probabilità di partire da  $E_0$  ed arrivare in  $E_0$  è

$$f_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 0 + 1 - \alpha + \alpha\beta \sum_{n=2}^{\infty} (1-\beta)^{n-2} = 1 - \alpha + \alpha\beta \frac{1}{\beta} = 1$$

Similmente per scambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$  si ha

$$f_{11} = 1$$

I termini misti sono

$$f_{01} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^{n-1} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1, \quad f_{10} = 1$$

Unendo quanto trovato si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

così come

$$f_{00} = f_{11} = f_{10} = f_{01} = 1$$

pure

$$\mu_0 = \frac{\alpha + \beta}{\beta}, \quad \mu_1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)} = \frac{f_{jk}}{\mu_k}$$

a conferma della tesi del teorema ergodico.

**Osservazione 13.32.** Gli stati di questa catena di Markov sono tutti ergodici cioè persistenti, aperiodici e con tempo medio finito  $\mu_j < \infty$ . Inoltre,  $f_{ij} = 1$  per ogni  $ij$ .

## Lezione 7

### 13.5 Distribuzioni all'equilibrio

Le catene a cui si è interessati trattano solo stati ergodici.

**Definizione 13.33.** Due stati di una catena sono dello stesso tipo se hanno le stesse caratteristiche definite in precedenza.

**Teorema 13.34.** Tutti gli stati di una catena sono dello stesso tipo.

*Dimostrazione.* Si veda Feller, vol. 1, p. 391. □

**Teorema 13.35.** Per uno stato persistente  $E_j$  esiste un solo insieme chiuso  $C$  irriducibile che contiene tale stato  $E_j$  e tale che

$$\forall E_i, E_k \in C, \quad f_{ik} = f_{ki} = 1, \quad \forall i, k$$

ven 24 nov  
2023 14:30

*Dimostrazione.* Si supponga che  $E_k$  sia uno stato raggiungibile da  $E_j$ . Allora la probabilità di passare da  $E_j$  a  $E_k$  senza ripassare da  $E_j$  è diversa da zero e vale  $\alpha$ . Una volta in  $E_k$ , la probabilità di non tornare più in  $E_j$  è  $1 - f_{kj}$ . Quindi, la probabilità che, partendo da  $E_j$ , non si torni mai in  $E_j$  è almeno

$$\alpha(1 - f_{kj})$$

Per definizione, uno stato persistente ha probabilità di non ritorno pari a zero e quindi  $\alpha \neq 0$ . Dunque  $f_{kj} = 1$ .

Sia  $C$  l'insieme di tutti gli stati che possono essere raggiunti da  $E_j$ . Due stati  $E_i$  ed  $E_k$  in  $C$  possono essere raggiunti l'uno dall'altro tramite  $E_j$  e quindi ogni stato in  $C$  può essere raggiunto da ogni altro stato in  $C$ . Pertanto  $C$  è irriducibile per quanto definito in precedenza. Tutti gli stati sono persistenti e si può applicare la prima parte della dimostrazione ad ogni stato  $E_i$  per cui si ottiene

$$E_{ik} = 1$$

□

### 13.6 Distribuzione invariante per un insieme di stati ergodici

**Teorema 13.36. I.** In una catena irriducibile con soltanto stati ergodici, il limite

$$\Pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)}$$

esiste ed è indipendente dallo stato iniziale  $j$ . Inoltre

$$\sum_k \Pi_k = 1, \quad \Pi_k = \sum_i \Pi_i P_{ik}$$

**II.** Viceversa, se la catena è irriducibile e aperiodica, ed esiste  $\Pi_k$  tale che

$$\sum_k \Pi_k = 1 \quad \Pi_k = \sum_i \Pi_i P_{ik}$$

allora tutti gli stati sono ergodici e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)} = \Pi_k, \quad \Pi_k = \frac{1}{\mu_k}$$

con  $\mu_k$  il tempo medio di ricorrenza.

Il viceversa è più utile perché permette di costruire la matrice di transizione a partire dalla distribuzione asintotica (che nel caso desiderato è  $e^{-S}$ ).

*Dimostrazione. I.* Per i sistemi ergodici vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n)} = \frac{f_{jk}}{\mu_k}$$

e si ricorda la relazione di Chapman–Kolmogorov

$$P_{jk}^{(n+1)} = \sum_{\nu} P_{j\nu}^{(n)} P_{\nu k}$$

Per un numero finito di stati si avrebbe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jk}^{(n+1)} = \Pi_k \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu} P_{j\nu}^{(n)} P_{\nu k} = \sum_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu k}$$

Per un numero infinito di stati si utilizza il lemma seguente per avere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j P_{ij}^{(n)} P_{jk} \geq \sum_j \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} P_{jk} = \sum_j \Pi_j P_{jk}$$

Dunque

$$\Pi_k - \sum_j \Pi_j P_{jk} \geq 0$$

Per ogni  $k$  il membro di sinistra è un numero non negativo. Vale anche

$$\sum_k \Pi_k - \sum_j \Pi_j \sum_k P_{jk} = \sum_k \Pi_k - \sum_j \Pi_j = 0$$

Dato che sono tutti numeri non negativi, allora ogni addendo dev'essere nullo, quindi

$$\Pi_k = \sum_j \Pi_j P_{jk}$$

Inoltre, per ogni  $n$  ed  $i$  si ha

$$\sum_k P_{ik}^{(k+1)} = 1 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \implies \sum_k \Pi_k = 1$$

II. Se

$$\sum \Pi_k = 1, \quad \Pi_k = \sum_i \Pi_i P_{ik}$$

allora vale

$$\Pi_k = \sum_j \Pi_j P_{jk}^{(n)}, \quad \forall n > 1$$

Se gli stati sono transienti o nulli, allora  $P_{jk}^{(n)} \rightarrow 0$  e dunque

$$\Pi_k = 0, \quad \forall k$$

che contraddice  $\sum_k \Pi_k = 1$ . Quindi gli stati sono ergodici. Analogamente a prima, si può fare il limite [r] per avere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_k = \Pi_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j \Pi_j P_{jk}^{(n)} = \sum_j \Pi_j \frac{1}{\mu_k}$$

poiché i  $\Pi_j$  si sommano ad 1 si ha

$$\Pi_k = \frac{1}{\mu_k}$$

Pertanto, si conclude che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \Pi_k, \quad \sum_k \Pi_k = 1, \quad \Pi_k = \sum_j \Pi_j P_{jk}, \quad \Pi_k = \frac{1}{\mu_k}$$

□

**Lemma 13.37.** Date delle quantità  $P^{(n)}$  non negative, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(n)} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)}$$

*Dimostrazione.* Poiché le probabilità  $P_i^{(n)}$  sono definite positive, vale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(n)} &\geq \sum_{i=1}^k P_i^{(n)}, \quad \forall n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(n)} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k P_i^{(n)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(n)} &\geq \sum_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)} \end{aligned}$$

Nel limite  $k \rightarrow \infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(n)} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)}$$

□

**Osservazione 13.38.** Con le catene di Markov si possono generare distribuzioni  $\Pi_k$  indipendentemente dal dato iniziale.



### 13.7 Riassunto sulle catene

**Definizione 13.39.** Uno stato è ergodico se e solo se è persistente, aperiodico e con un tempo medio di ricorrenza finito, ossia

$$f_{jj} = 1, \quad \mu_j = \sum_n n f_{jj}^{(n)} < \infty$$

Un insieme chiuso di stati ergodici di una catena irriducibile è detto ergodico.

**Definizione 13.40.** Una distribuzione di probabilità  $\Pi_k$  che soddisfa

$$\sum_k \Pi_k = 1, \quad \Pi_k = \sum_j \Pi_j P_{jk}, \quad \forall k$$

è detta invariante o stazionaria per una data catena di Markov.

**Teorema 13.41.** Una catena aperiodica e irriducibile ha una distribuzione invariante  $\Pi_k$  se e solo se è ergodica. In questo caso

$$\Pi_k > 0, \quad \forall k$$

La probabilità di transizione tende a  $\Pi_k$  indipendentemente dalla distribuzione iniziale.

### 13.8 Bilancio dettagliato

L'obiettivo è costruire una catena di Markov che sia ergodica e che abbia la distribuzione asintotica  $\Pi_k$  desiderata.

**Teorema 13.42.** Data una distribuzione di probabilità

$$\mathcal{P}_i = \frac{R_i}{\sum_i R_i}, \quad R_i \geq 0, \quad \forall i$$

e data una catena di Markov definita da  $P_{ij}$ , condizione sufficiente affinché la catena sia ergodica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \mathcal{P}_i$$

è che  $P_{ij}$  soddisfi il bilancio dettagliato

$$R_i P_{ij} = R_j P_{ji}$$

La probabilità di andare in una direzione e tornare indietro è la stessa.

*Dimostrazione.* Per definizione

$$\sum_j P_{ij} = 1, \quad \forall i$$

dunque

$$\sum_j R_i P_{ij} = \sum_j R_j P_{ji} \implies R_i = \sum_j R_j P_{ji}$$

dividendo per la somma  $\sum_i R_i$  si ha

$$\mathcal{P}_i = \sum_j \mathcal{P}_j P_{ji}$$

cioè è un autovettore sinistro con autovalore 1. Per una catena di Markov ergodica,  $\Pi_j$  è unico e dunque  $\mathcal{P}_j = \Pi_j$  (si veda definizione e teorema precedenti?) [r].  $\square$

**Osservazione 13.43.** La condizione per il bilancio dettagliato non determina la probabilità  $P_{ij}$  di transizione in modo univoco, quindi si ha la libertà di [r] algoritmi efficienti per il problema particolare che si studia.

## 14 Algoritmo di Metropolis

L'algoritmo di Metropolis si articola in due passaggi:

1. Dato uno stato  $E_j$ , si propone uno stato  $E_k$  con probabilità  $Q_{jk}$  dove  $Q$  soddisfa la condizione di micro-reversibilità [r]

$$Q_{jk} = Q_{kj}$$

2. Per generare eventi con distribuzione

$$\mathcal{P}_i = \frac{R_i}{\sum_i R_i}$$

si accetta la configurazione generata al passo precedente con probabilità  $\min(R_k/R_j, 1)$ :

$$\begin{aligned} \frac{R_k}{R_j} \geq 1 & \quad \text{si accetta con probabilità } 1 \\ \frac{R_k}{R_j} < 1 & \quad \text{si accetta con probabilità } \frac{R_k}{R_j} \end{aligned}$$

Se la configurazione non viene accettata, allora si riparte dallo stato di partenza.

**Soddisfazione del bilancio dettagliato.** La matrice di transizione della catena di Markov è definita da

$$P_{jk} = \begin{cases} Q_{jk}, & \frac{R_k}{R_j} > 1 \\ Q_{jk} \frac{R_k}{R_j}, & \frac{R_k}{R_j} < 1 \end{cases}$$

Nel primo caso

$$P_{jk} = Q_{jk}, \quad P_{kj} = Q_{kj} \frac{R_j}{R_k} = Q_{jk} \frac{R_j}{R_k}$$

alla seconda uguaglianza si applica la micro-reversibilità. Quindi

$$P_{jk} = Q_{jk} = P_{kj} \frac{R_k}{R_j} \implies R_j P_{jk} = R_k P_{kj}$$

cioè il bilancio dettagliato. Nel secondo caso

$$P_{jk} = Q_{jk} \frac{R_k}{R_j}, \quad R_{kj} = Q_{kj}$$

e [r]

$$R_j P_{jk} = R_k P_{kj}$$

**Osservazione 14.1.** L'algoritmo di Metropolis è efficiente quando l'azione del sistema è locale. Lo si utilizza nell'oscillatore armonico.

**Oscillatore armonico.** Si passa con un for-loop su ogni variabile di [r]  $i = 0, \dots, N-1$ . Per passare da uno stato  $E$  al tempo Markoviano  $k$  allo stato  $E'$  al tempo  $k+1$ , si propone

$$x_i \rightarrow x'_i, \quad x_i - \Delta \leq x'_i < x_i + \Delta$$

con distribuzione uniforme. Pertanto

$$x'_i = x_i + 2\Delta \left( r_1 - \frac{1}{2} \right)$$

dove  $r_1$  è un numero casuale con distribuzione uniforme  $P(r_1)$ . Questa implementa

$$Q_{x_i, x'_i} = \begin{cases} 1, & x_i - \Delta \leq x'_i < x_i + \Delta \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

fatto per una componente alla volta. Il secondo passo dell'algoritmo metropolis considera

$$\frac{R_{x'}}{R_x} = \frac{e^{-S(x')}}{e^{-S(x)}} = e^{-\Delta S}$$

dove  $x'$  è la ennupla che contiene  $x'_i$ . La configurazione è sicuramente accettata se

$$e^{-\Delta S} \geq 1 \implies \Delta S \leq 0$$

Mentre per

$$e^{-\Delta S} < 1 \implies \Delta S > 0$$

essa viene accettata con probabilità data dall'esponenziale. Se questo è il caso, si estrae un altro numero casuale uniforme, e se è minore (o uguale) di tale esponenziale, allora si accetta la configurazione, altrimenti la si rifiuta e non si modifica la posizione  $x_i$  iniziale. Le due condizioni si possono unire e considerare solo l'estrazione del secondo numero casuale e quindi non controllare se l'esponenziale è maggiore dell'unità (questo perché i numeri casuali hanno valore massimo 1, quindi se l'esponenziale è maggiore, allora la configurazione è di sicuro accettata).

Si cambia una coordinata alla volta e il parametro  $\Delta$  dipenda da una scelta non dettata dal teorema. Si cambia una coordinata alla volta perché, altrimenti, cambiandole tutte, la variazione dell'azione è  $\Delta S \sim N$  cioè grande in modulo, dunque la probabilità  $e^{-cN}$  di accettare il passo è quasi nulla: la catena di Markov ci mette tanto a progredire. Una cosa simile succede scegliendo  $\Delta$  grande poiché  $\Delta S \propto \Delta$ . Bisogna cambiare la configurazione abbastanza affinché la catena si muova, ma non troppo poiché si accetterebbe sempre la proposta.

L'azione è locale e si risolve il problema di una piccola variazione dell'azione  $\Delta S$  cambiando una coordinata una volta. Nelle teorie fermioniche, l'azione non è locale e cambiare una coordinata alla volta può implicare una variazione  $\Delta S$  grande. Quello che si fa è cambiare tutte le coordinate in modo correlato (seguendo le equazioni classiche del moto) così che l'azione cambi di poco.

Prima di considerare effettivamente la catena, si termalizza la catena, buttando via i primi  $n$  stati. Per l'oscillatore armonico  $n \sim 100$ .

L'algoritmo di Metropolis non fare cambi espliciti di variabile.

## Lezione 8

ven 01 dic  
2023 14:30

## Parte V

# Simulazioni numeriche

## 15 Riassunto delle formule teoriche

La densità di lagrangiana dell'oscillatore armonico è

$$\mathcal{L}(x_{i+1}, x_i) = \frac{1}{2}m \left[ \frac{x_{i+1} - x_i}{a} \right]^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(x_{i+1}^2 + x_i^2)$$

mentre l'azione è

$$S = a \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}(x_{i+1}, x_i)$$

L'integrale sui cammini è

$$Z(T, a) = \left[ \frac{m}{2\pi a} \right]^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S}, \quad T \equiv aN$$

che è equivalente a

$$Z(T, a) = \text{Tr} [\hat{T}_a^N] \implies Z(T, a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-aN\tilde{E}_n}$$

dove si ha

$$\tilde{E}_n = \tilde{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad a\tilde{\omega} = \ln \left( 1 + a\bar{\omega} + \frac{1}{2}a^2\omega^2 \right), \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2 \left[ 1 + \frac{1}{4}a^2\omega^2 \right]$$

Risulta chiaro che per il passo reticolare  $a$  fisso, nel limite  $N \rightarrow \infty$  l'esponenziale dominante è

$$Z(T, a) = e^{-aN\tilde{E}_0} + \dots$$

**Osservazione 15.1.** Se si potesse calcolare la funzione di partizione  $Z$  non si avrebbe solo l'energia dello stato fondamentale  $\tilde{E}_0$ , ma anche la sua molteplicità. Lo stesso è vero per tutti gli altri stati. Con un calcolo Monte Carlo si può estrarre l'energia e la molteplicità degli autostati dell'hamiltoniana nello spazio di Hilbert.

**Funzione di correlazione a due punti.** La funzione di correlazione a due punti dell'operatore  $[r] \hat{x}$  inserito a distanza temporale  $l$  e  $k$  è dato da

$$\langle x_l x_k \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S} x_l x_k$$

Utilizzando il formalismo della matrice di trasferimento si ha

$$\langle x_l x_k \rangle = \frac{1}{\text{Tr}[\hat{T}^N]} \text{Tr} \left[ \hat{T}^{N-|l-k|} \hat{x} \hat{T}^{|l-k|} \hat{x} \right]$$

Inserendo l'identità tramite la formula di completezza degli autostati dell'operatore di trasferimento  $\hat{T}$  a numeratore si ottiene

$$\text{Tr} \left[ \hat{T}^{N-|l-k|} \hat{x} \hat{T}^{|l-k|} \hat{x} \right] = \sum_{ij} e^{N-|l-k|a\tilde{E}_i} e^{-|l-k|a\tilde{E}_j} \langle \tilde{E}_i | \hat{x} | \tilde{E}_j \rangle \langle \tilde{E}_j | \hat{x} | \tilde{E}_i \rangle$$

Per estrarre l'esponenziale si utilizza il limite  $N \rightarrow \infty$  e  $|l-k| \rightarrow \infty$ . Nel primo esponenziale si fa il limite  $N \rightarrow \infty$  e l'unico termine che rimane contiene l'autovalore  $\tilde{E}_0$ ; per il secondo esponenziale si fa il limite  $|l-k| \rightarrow \infty$  ed il termine che rimane ha l'autovalore  $\tilde{E}_1$  perché per parità vale

$$\langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_0 \rangle = 0$$

Poiché il calcolatore non può considerare il limite  $N$  infinito, allora a causa delle condizioni periodiche si ha  $|l-k| > N - |l-k|$  e i ruoli dei due fattori si scambiano: si aggiunge una seconda riga di esponenziali. Infatti

$$\begin{aligned} \langle x_l x_k \rangle &= \frac{1}{e^{-aN\tilde{E}_0}} [e^{-(N-|l-k|)a\tilde{E}_0} e^{-|l-k|a\tilde{E}_1} + e^{-(N-|l-k|)a\tilde{E}_1} e^{-|l-k|a\tilde{E}_0}] |\langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_1 \rangle|^2 \\ &= 2 |\langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_1 \rangle|^2 e^{-\frac{N}{2}a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)} \cosh \left[ \left( \frac{N}{2} - |l-k| \right) a(\tilde{E}_0 - \tilde{E}_1) \right] + \dots \end{aligned}$$

Nella zona di interesse si ha  $\frac{N}{2} - |l-k| \gg 1$  quindi  $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$ . Pertanto

$$\langle x_l x_k \rangle = |\langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_1 \rangle|^2 e^{-|l-k|a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)}$$

Dall'esponenziale dominante si può estrarre l'elemento di matrice dell'operatore posizione e la differenza di energia tra il primo stato eccitato e lo stato fondamentale.

La funzione di correlazione ha la forma di una catenaria; agli estremi possono contribuire molti esponenziali, ma per l'oscillatore armonico questo non avviene. Se il reticolo fosse infinito, sarebbe presente solamente l'esponenziale di un estremo.

**Funzione di correlazione a due punti del quadrato.** Ripetendo gli stessi passaggi di prima, si applica il formalismo della matrice di trasferimento

$$\langle x_l^2 x_k^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S} x_l^2 x_k^2 = \frac{1}{\text{Tr}[\hat{T}^N]} \text{Tr}[\hat{T}^{N-|l-k|} \hat{x}^2 \hat{T}^{|l-k|} \hat{x}^2]$$

Inserendo l'identità si ha

$$\text{Tr}[\hat{T}^{N-|l-k|} \hat{x}^2 \hat{T}^{|l-k|} \hat{x}^2] = \sum_{ij} e^{N-|l-k|a\tilde{E}_i} e^{-|l-k|a\tilde{E}_j} \langle \tilde{E}_i | \hat{x}^2 | \tilde{E}_j \rangle \langle \tilde{E}_j | \hat{x}^2 | \tilde{E}_i \rangle$$

Nell'isolare l'esponentiale dominante, la parità non elimina il contributo dal vuoto. Dunque

$$\langle x_l^2 x_k^2 \rangle = |\langle \tilde{E}_0 | \hat{x}^2 | \tilde{E}_0 \rangle|^2 + e^{-|l-k|a(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_0)} |\langle \tilde{E}_0 | \hat{x}^2 | \tilde{E}_2 \rangle|^2$$

Si usa la convenzione che l'energia del vuoto sia nulla. Il grafico della funzione di correlazione è una costante, mentre agli estremi non si sa, come sopra. Si veda Creutz per calcolare l'auto-funzione dello stato fondamentale.

## 15.1 Monte Carlo standard per l'oscillatore armonico

In generale, il correlatore a due punti di un'osservabile è

$$\langle O(x_l) O(x_k) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S} O(x_l) O(x_k)$$

Il metodo Monte Carlo per l'oscillatore armonico è dato da

1. Si utilizza il campionamento di importanza.
2. Tramite l'algoritmo di Metropolis si estraggono cammini distribuiti come  $\frac{e^{-S}}{Z}$ .
3. Il valor medio del correlatore è

$$\overline{O(x_l) O(x_k)} = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{conf}}} O(x_{l,m}) O(x_{k,m})$$

Risulta chiaro che

$$\langle O(x_l) O(x_k) \rangle = \lim_{N_{\text{conf}} \rightarrow \infty} \overline{O(x_l) O(x_k)}$$

**Osservazione 15.2.** Per il calcolo del correlatore  $C(l, k) = \langle x_l x_k \rangle$  si nota che esso dipende solo dalla differenza  $|l - k|$  e non dai due numeri singoli. Pertanto si può scrivere

$$\bar{C}(j) = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{conf}}} C^k(j), \quad C^k(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^k x_{i+j}^k$$

Si noti che la forma esplicita di un correlatore  $C^k(j)$  è una convoluzione e pertanto si può calcolare tramite la trasformata di Fourier (che viene implementata tramite la fast Fourier transform, FFT).

**Incertezza Monte Carlo sul correlatore a due punti della posizione.** Bisogna scegliere uno stimatore affinché nel limite  $N_{\text{conf}} \rightarrow \infty$ , si ottenga quanto desiderato. Quindi l'incertezza su di un correlatore è

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_{\text{conf}}} [\langle (x_l x_k)^2 \rangle - \langle x_l x_k \rangle^2]$$

Risulta interessante studiare l'incertezza relativa

$$\frac{\sigma^2}{\langle x_l x_k \rangle^2} = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \left[ \frac{\langle (x_l x_k)^2 \rangle}{\langle x_l x_k \rangle^2} - 1 \right]$$

Le relazioni sopra valgono per grandi  $N_{\text{conf}}$ ,  $N$  e  $|l - k|$ . Il numeratore va costante perché dominato dal vuoto. Al denominatore contribuisce solo il vuoto ed il primo stato, e scende in modo esponenziale. A grandi distanze vale [r] — **fine revisione** —

$$\frac{\sigma^2}{\langle x_l x_k \rangle^2} \approx \frac{1}{N_{\text{conf}}} \frac{|\langle \tilde{E}_0 | \hat{x}^2 | \tilde{E}_0 \rangle|^2}{|\langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_0 \rangle|^4} e^{aN(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)} \cosh^{-2} \dots$$

Nel limite  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2}{\langle x_l x_k \rangle^2} \approx \frac{1}{N_{\text{conf}}} \frac{\left| \langle \tilde{E}_0 | \hat{x}^2 | \tilde{E}_0 \rangle \right|^2}{\left| \langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_0 \rangle \right|^4} e^{2a|l-k|(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)}$$

L'errore relativo aumenta esponenzialmente con la distanza tra gli operatori. L'unico modo per vincere l'esponenziale bisogna usare  $\frac{1}{N_{\text{conf}}}$ , per questo si fanno milioni di sweep. Per l'oscillatore armonico, questo stimatore è semplice, ma cattivo. Questo problema non è ancora risolto in QCD per cui molte cose che si potrebbero calcolare in teoria, in verità non si può fare perché l'errore è troppo grande. Bisogna calcolare la varianza.

**Calcolo da fare.** L'integrando di

$$C(l, k) = \langle x_l x_k \rangle$$

dipende separatamente da  $l$  e  $k$ . Ma visto che l'hamiltoniana è invariante per traslazione del tempo fisico, il correlatore dipende solo dalla distanza  $|l - k|$ . In questo modo si può cambiare stimatore riducendo l'errore

$$C(k - l) = C(j) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle x_m x_{m+j} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_m x_m x_{m+j} \right\rangle, \quad j = k - l$$

Nel calcolatore usare, la seconda espressione dentro la media. Poi mediarla. Fare almeno 50-100 sweep termalizzazione, per questo fare 10k-20k sweep. Il plot in scala logaritmica in funzione di  $j$  è simile ad una parabola.

**Prossima volta.** Una volta calcolata l'osservabile e la funzione di correlazione allo sweep  $k$ -esimo. Esso non è indipendente dal correlazione  $k - 1$ -esimo. La formula della varianza presume che

$$\langle c^k(j) C^{k+1}(j) \rangle = \langle C^k(j) \rangle \langle C^{k+1}(j) \rangle$$

cioè le misure sono indipendenti.

La varianza è

$$(\Delta C)^2 = \frac{1}{N_{\text{sweep}}} [\langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2]$$

Bisogna modificare la formula, secondo la funzione di auto-correlazione

$$\Gamma(t^M) = \frac{\langle C^k C^{k+t_M} \rangle - \langle C^k \rangle^2}{\langle C^k \rangle^2 - \langle C^k \rangle^2}$$

L'auto-correlazione va a zero ad un certo tempo  $t^M$  oltre cui si possono considerare le variabili senza correlazione. [r] Si calcola una funzione di correlazione nel tempo markoviano delle correlazioni nel tempo fisico. Per l'oscillatore armonico, con le estrazioni correlate si possono calcolare le osservabili e mediare, così con quelle successive non correlate. Si dimostra che anche le medie sono decorrelate. Questo non si fa sempre, tipo in QCD misurare le osservabili è costoso, più del Monte Carlo.

## Lezione 9

 ven 15 dic  
2023 14:30

### 15.2 Autocorrelazione

Bisogna capire come calcolare l'errore statistico quando gli eventi sono correlati. Si indica con  $y$  una generica osservabile. Per la correlazione è

$$y_i = C^i(j), \quad C^i(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_l^i x_{l+j}^i$$

Per ogni  $j$  bisogna calcolare la funzione di auto-correlazione. Si usa un indice  $i$  degli sweep. Il valor medio è

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i y_i, \quad \langle \bar{y} \rangle = \langle y \rangle, \quad \sigma_{\bar{y}}^2 = \langle (\bar{y} - \langle y \rangle)^2 \rangle$$

Per variabili  $y_i$  e  $y_j$  indipendenti, si ha

$$\langle \bar{y} \bar{y} \rangle = \dots = \langle y \rangle^2 + \frac{1}{N} (\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2)$$

infatti vale

$$\langle y_i y_j \rangle = \langle y_i \rangle \langle y_j \rangle = \langle y \rangle^2$$

Quindi

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_y^2$$

p.7 Si studia la varianza per due variabili correlate. Infatti, nelle catene di Markov, la probabilità dipende da  $y_i$  e  $y_{i-1}$ . La varianza è

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{y}) &= \dots = \frac{1}{N} (\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2) + \frac{1}{N} (\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2) \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \frac{\langle y_i y_j \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2} \\ &= \frac{\sigma_y^2}{N} \left[ 1 + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \frac{\langle y_i y_j \rangle - \langle y \rangle^2}{\sigma_y^2} \right] = \frac{\sigma_y^2}{N} \left[ 1 + 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\langle y_i y_j \rangle - \langle y \rangle^2}{\sigma_y^2} \right] \\ &= \frac{\sigma_y^2}{N} \left[ 1 + 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{N-i} \frac{\langle y_i y_{i+t} \rangle - \langle y \rangle^2}{\sigma_y^2} \right] \end{aligned}$$

alla terza riga si pone  $t = j - i$ : la catena di Markov è invariante per tempo Markoviano, pertanto la varianza? [r] dipende solo dalla distanza temporale, non dal valore assoluto. Con  $N$  numero di sweep.

Si studia il limite  $N \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{N-i} \frac{\langle y_i y_{i+t} \rangle - \langle y \rangle^2}{\sigma_y^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\langle y_i y_{i+t} \rangle - \langle y \rangle^2}{\sigma_y^2}$$

Visto che la dipendenza è solamente dalla distanza temporale, la sommatoria su  $i$  fornisce  $N$ :

$$\text{var}(\bar{y}) = \frac{\sigma_y^2}{N} \left[ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\langle y_i y_{i+t} \rangle - \langle y \rangle^2}{\sigma_y^2} \right]$$

dove  $i$  è arbitrario. Si definisce la funzione di auto-correlazione

$$\Gamma(t) = \langle y_i y_{i+t} \rangle - \langle y \rangle^2$$

dunque

$$\text{var}(\bar{y}) = \frac{\sigma_y^2}{N} \left[ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} \right]$$

Si definisce

$$\tau_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} \right] \implies \text{var}(\bar{y}) = \frac{2\sigma_y^2}{N} \tau_{\text{int}}$$

**Catene di Markov.** L'auto-correlazione per le catene di Markov decresce come un esponenziale ed oscilla intorno a zero quando l'errore diventa più grande del valore di aspettazione.

$$\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} \propto e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove  $\tau$  è il tempo di auto-correlazione.

Si può usare un altro metodo: negli sweep si misura la variabile (calcolare il correlatore) ogni  $10\tau$ ; calcolando il tempo di auto-correlazione si ottiene zero e dunque si può usare la formula dell'errore standard. Nel caso in cui l'osservabile costa poco, questo non conviene. Prima bisogna stimare  $\tau$ , poi conviene calcolare l'osservabile per ogni sweep e poi definire un'osservabile

$$\tilde{y} = \frac{1}{d_{\text{bin}}} \sum_{j=1}^{d_{\text{bin}}} y_j$$

come media delle misure dell'osservabile all'interno di un bin  $d_{\text{bin}} = 10\tau$ . Pertanto, il numero di bin è  $\text{NSweep}/d_{\text{bin}}$ . Si ricalcola la funzione di autocorrelazione e si ottiene subito zero (dopo 1). Per le medie binnate si può usare la formula semplice per l'errore.

Main program termalizzazione, salvare plot, per relazione  
Main program calcola auto-correlazione per i primi  $10j$ . Il  $\tau$  dipende dal passo reticolare (e altri) dunque nel limite  $a \rightarrow 0$  diventa grande, salvare plot per relazione (con dati dei parametri)  
Misurato il  $\tau$ , esso diventa un parametro mettendolo dentro il global e la dimensione del bin  $d_{\text{bin}}$ .  
Fare main program che calcola le osservabili: calcola correlatore, fare media su ogni bin, e di tali osservabili medie fare l'analisi statistica.

L'osservabile  $y^i = C^i(j)$ , quando si fa il bin bisogna fare

$$\frac{1}{d_{\text{bin}}} \sum_{i=1}^{d_{\text{bin}}} C^i(s)$$

prima calcolare  $C^i(j)$  poi fare la media sul bin. Il bin serve per facilitare l'analisi statistica.

**Prossima volta.** Si fa il valor medio e l'errore sui correlatori. Si usa la formula banale per l'incertezza

$$\sigma^2 = \frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{N}$$

In una catena di Markov, i dati sono correlati nel tempo Markoviano e sono correlati nel tempo fisico. Una volta da  $C(j)$  si calcola il primo autovalore come

$$a\Delta E(j) = \text{arccosh} \frac{C(j+1) + C(j-1)}{2C(j)}, \quad j \neq 0, 1$$

fino dove  $\Delta E$  ha errore di 10% perché cresce esponenzialmente. Il problema è che  $C(j)$  e  $C(j+1)$  sono correlati perché si sono usati gli stessi cammini di Feynman per calcolare. Una funzione di due variabili correlate, la sua varianza è

$$f(a, b) \implies \sigma_f^2 = \partial_a f(\bar{a}, \bar{b})^2 \sigma_a^2 + \partial_b f(\bar{a}, \bar{b})^2 \sigma_b^2 + 2 \partial_a f \partial_b f \text{cov}(a, b)$$

Esiste un meccanismo che manipola i risultati binnati e calcola le derivate automaticamente. automatic derivation?. I dati sono manipolati di modo che la formula sopra equivale a calcolare

$$\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$$

## Lezione 10

### 15.3 Analisi jackknife

Dai dati bisogna estrarre

$$a\Delta E(t) = \text{arccosh} \frac{\bar{C}(t+1) + \bar{C}(t-1)}{2\bar{C}(t)}, \quad t \neq 0, 1$$

ven 12 gen  
2024 14:30



ed una formula analoga per l'elemento di matrice. Per calcolare l'incertezza si può fare la propagazione degli errori, ma bisogna considerare che le migliori stime  $\bar{C}$  sono covarianti: la matrice di covarianza non è diagonale. Questa procedura diventa complicata quando si calcolano altre quantità. Il metodo jackknife propaga l'incertezza in modo automatico. Si studia tale metodo per la stima di una sola variabile aleatoria. Siano

$$a = \bar{C}(t+1), \quad b = \bar{C}(t-1), \quad a_k, \quad k = 1, \dots, N_{\text{bin}}$$

Si consideri

$$P(a), \quad \langle a \rangle \equiv \int P(a) a \, da, \quad \dots$$

La stima e la varianza sono

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_I a_i, \quad \langle \bar{a} \rangle = \langle a \rangle, \quad \text{Var}(\bar{a}) = \langle (\bar{a} - \langle a \rangle)^2 \rangle = \frac{\text{Var}(a)}{N}$$

La stima della varianza è

$$\sigma^2(a) \equiv \frac{1}{N-1} \sum_i (a_i - \langle a \rangle)^2$$

**Formalismo.** Il cluster jackknife  $k$ -esimo è

$$a^k = \frac{1}{N-1} \left[ \sum_{i=1}^N a_i - a_k \right] = \bar{a} - \frac{a_k - \bar{a}}{N-1}$$

cioè la media di tutte le misure fatte, ma tolta una. Il loro valor medio è

$$\bar{a}^{\text{jack}} = \frac{1}{N} \sum_k a^k = \bar{a}, \quad \sigma_{\text{jack}}^2(\bar{a}) \equiv \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^N (a^k - \bar{a})^2 = \sigma^2(\bar{a}) = \frac{\sigma^2(a)}{N}$$

Si supponga che  $a$  abbia una distribuzione gaussiana, in base alla varianza,  $a_k$  può essere molto diverso dalla media  $\bar{a}$ ; d'altra parte  $a^k$  è la loro media ed è vicina alla media. Pertanto

$$\langle a \rangle - a_k = o(1), \quad \langle a \rangle - a^k = o(N^{-\frac{1}{2}})$$

[r] skip p 3

**Funzione di una variabile aleatoria.** Si consideri una variabile secondaria, cioè una funzione valor medio

$$F = f(\langle a \rangle)$$

[r]  $\langle a \rangle$  è il valor medio teorico, mentre  $\bar{a}$  è la stima?

La variabile

$$\bar{F} = f(\bar{a})$$

è una variabile aleatoria. Essa si può riscrivere come

$$\bar{F} = f(\langle a \rangle + (\bar{a} - \langle a \rangle)) = F + \partial_a f(\langle a \rangle) (\bar{a} - \langle a \rangle) + O(N^{-1})$$

La sua varianza è

$$\text{var}(\bar{F}) = \langle (F - \bar{F})^2 \rangle = (\partial_a f)^2 \langle (\bar{a} - \langle a \rangle)^2 \rangle = (\partial_a f)^2 \frac{\text{var}(a)}{N}$$

La migliore stima è

$$\sigma^2(F) = (\partial_a f)^2|_{a=\bar{a}} \frac{\sigma^2(a)}{N}$$

**Calcolo tramite il jackknife classico.** Siano

$$F^k \equiv f(a^k), \quad \bar{F} \equiv f(\bar{a})$$

La stima della varianza è

$$\sigma_{\text{jack}}^2(F) \equiv \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^N (F^k - \bar{F})^2$$

Ricordando che

$$F^k = f(a^k) = f\left(\bar{a} - \frac{a_k - \bar{a}}{N-1}\right) = \bar{F} - \partial_a f|_{\bar{a}} \frac{a_k - \bar{a}}{N-1} + o(N^{-1})$$

si ha

$$\sigma_{\text{jack}}^2(F) \approx \frac{N-1}{N} (\partial_a f)^2|_{\bar{a}} \sum_{k=1}^N \frac{(a_k - \bar{a})^2}{(N-1)^2} = (\partial_a f)^2|_{\bar{a}} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (a_k - \bar{a})^2 = (\partial_a f)^2|_{\bar{a}} \frac{\sigma^2(a)}{N}$$

Si è ottenuta la formula trovata in precedenza, ma non si è fatta alcuna derivata.

**Lab** Dai binatti  $C_k$  calcolare i  $C^k$  e tenersi il valor medio o al fondo array o struttura. skip p 8 pdf

**Variabili aleatorie correlate.** Due variabili  $a$  e  $b$  sono correlate se

$$\langle ab \rangle \neq \langle a \rangle \langle b \rangle$$

[r] la covarianza è la loro differenza. La stima della covarianza è

$$\sigma^2(a, b) \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}), \quad \langle \sigma^2(a, b) \rangle = \text{cov}(a, b), \quad \text{cov}(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\text{cov}(a, b)}{N}$$

**Funzione di due variabili aleatorie correlate.** Considerata una funzione

$$F = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle)$$

si ha

$$\bar{F} = f(\bar{a}, \bar{b}) \implies \bar{F} = F + \partial_a f (\bar{a} - \langle a \rangle) + \partial_b f (\bar{b} - \langle b \rangle) + O(N^{-1})$$

La cui varianza è

$$\text{var}(F) = (\partial_a f)^2 \frac{\text{var}(a)}{N} + (\partial_b f)^2 \frac{\text{var}(b)}{N} + 2 \partial_a f \partial_b f \frac{\text{cov}(a, b)}{N}$$

**Stima dell'errore tramite jackknife.** Siano

$$\bar{F} = f(\bar{a}, \bar{b}), \quad F^k = f(a^k, b^k)$$

quindi

$$\sigma_{\text{jack}}^2(F) = \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^N (F^k - \bar{F})^2 = \dots = (\partial_a f)^2 \frac{\sigma^2(a)}{N} + (\partial_b f)^2 \frac{\sigma^2(b)}{N} + 2 \partial_a f \partial_b f \frac{\sigma^2(a, b)}{N}$$

cioè la stessa formula della propagazione degli errori. arrivato a fine p. 10

**Lab.** Dato

$$C_k(t), \quad k = 1, \dots, N_{\text{bin}}$$

si costruiscono i cluster  $C^k(t)$  e calcolare  $\bar{C}(t)$  per ogni  $t$ . Per l'energia si ha

$$a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0) = \text{arccosh} \frac{C(t+1) + C(t-1)}{2C(t)}$$

Il valor medio è

$$\overline{a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)} = \text{arccosh} \frac{\bar{C}(t+1) + \bar{C}(t-1)}{2\bar{C}(t)}$$

I cluster sono

$$[a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)]^k = \text{arccosh} \frac{C^k(t+1) + C^k(t-1)}{2C^k(t)}$$

La stima della varianza è

$$\sigma^2 = \frac{N-1}{N} \sum_k [a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)^k - \overline{a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)}]^2$$

routine varianza generica. Una volta che si hanno le energie si possono ottenere gli elementi di matrice.

Le stime dei valori medi sono per ogni tempo  $t$  ( $t \geq 2$ ): in funzione del tempo, l'errore aumenta sempre più, considerare solo fino a errore minore del 10%. Per fare la medie delle medie, iterare il jackknife.

## Lezione 11

ven 19 gen  
2024 14:30

## 16 Formule teoriche oscillatore armonico

[r] Il correlatore è

$$C(t) = 2 \left| \langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_1 \rangle \right|^2 e^{-\frac{N}{2} a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0)} \cosh \left[ \left( \frac{N}{2} - t \right) a(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0) \right]$$

mentre la varianza è

$$\sigma^2 \approx \left| \langle \tilde{E}_0 | \hat{x}^2 | \tilde{E}_0 \rangle \right|^2$$

fino p 1

$$\hat{H}u_n(x) = E_n u_n(x), \quad E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

le auto-funzioni sono

$$u_n(x) = \langle x | E_n \rangle = \left( \frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} H_n(x\sqrt{2m\omega})$$

poi p8

**Elementi di matrice.** Si vedono gli elementi di matrice nel continuo. Per parità si ha

$$\langle E_0 | \hat{x} | E_0 \rangle = 0$$

Il quadrato della posizione vale

$$\langle E_0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle = \frac{1}{2m\omega}$$

Infatti

$$\langle E_0 | \hat{x}^2 | E_0 \rangle = \int dx x^2 u_0^2(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int dx x^2 e^{-m\omega x^2}$$

Sapendo che

$$H e_1(x\sqrt{2m\omega}) = \sqrt{2m\omega} x$$

si ridefinisce

$$\xi = x\sqrt{2m\omega}$$

da cui

$$\langle E_0 | \hat{x}^2 | E_0 \rangle = \frac{1}{2m\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\xi \xi^2 e^{-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2m\omega} \int d\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} He_1(\xi) He_1(\xi) = \frac{1}{2m\omega}$$

[r] L'ultimo elemento di matrice è

$$\langle E_0 | \hat{x} | E_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}$$

Infatti [r] dim

**Discretizzazione.** La differenza tra l'energia continua e quella discreta sono errori di discretizzazione. L'operatore di trasferimento è

$$\hat{T} = e^{-a\tilde{H}} = e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} e^{-a\frac{\hat{p}^2}{2m}} e^{-\frac{a}{2}V(\hat{x})} \neq e^{-a\hat{H}}, \quad V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

[r] Si definisce un'hamiltoniana ausiliaria

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2\hat{x}^2, \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2 \left[ 1 + \frac{a^2\omega^2}{4} \right]$$

Le hamiltoniane differiscono solo per errori di discretizzazione.

Se  $[T, \hat{H}] = 0$  allora hanno le medesime auto-funzioni, ma  $\tilde{u}$  sono le auto-funzioni di un oscillatore armonico con pulsazione  $\bar{\omega}$ . Un sistema del continuo con frequenza che tiene conto degli errori di discretizzazione ha operatore di trasferimento che commuta con l'hamiltoniana. [r] Gli elementi di matrice sono dunque

$$\langle \tilde{E}_0 | \hat{x} | \tilde{E}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\bar{\omega}}}, \quad \langle \tilde{E}_0 | \hat{x}^2 | \tilde{E}_0 \rangle = \frac{1}{2m\bar{\omega}}$$

**Osservazione 16.1** (r). dipende dagli errori di discretizzazione. Gli errori di discretizzazione hanno struttura diversa tra gli autovalori e gli elementi di matrice. Rimuoverli negli spettro non necessariamente li rimuove negli elementi di matrice, e viceversa.

**Teorema 16.2.** Vale

$$[T, \hat{\tilde{H}}] = 0$$

*Dimostrazione.* Si ricordi la forma di  $\hat{T}$ . Si ricordi

$$[\hat{x}, \hat{p}^n] = in\hat{p}^{n-1}, \quad [\hat{x}^n, \hat{p}] = in\hat{x}^{n-1}$$

[r] dim formule sopra

Pertanto, per calcolare il commutatore con un esponenziale, si può espandere questi in serie di potenze ed applicare il commutatore sopra a tutti i termini

$$[\hat{x}, e^{-a\frac{\hat{p}^2}{2m}}] = -i\frac{a\hat{p}}{m}e^{-\frac{a}{2}\frac{\hat{p}^2}{m}}, \quad [\hat{p}, e^{-\frac{a}{2}\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2}] = i\frac{am\omega^2}{2}\hat{x}e^{-\frac{a}{2}\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2}$$

Pertanto

$$\hat{x}\hat{T} = \hat{T}\hat{x} + [\hat{x}, \hat{T}] = \dots = \hat{T} \left[ \hat{x} \left( 1 + \frac{a^2\omega^2}{2} \right) - \frac{ia}{\omega}\hat{p} \right]$$

Similmente

$$\hat{p}\hat{T} = \hat{T} \left[ \left( 1 + \frac{a^2\omega^2}{2} \right) \hat{p} + iam\omega^2 \left( 1 + \frac{a^2\omega^2}{4} \right) \hat{x} \right]$$

Iterando si ha

$$\begin{aligned}\hat{x}^2\hat{T} &= \hat{T} \left[ \left(1 + \frac{a^2\omega^2}{2}\right)^2 \hat{x}^2 - \frac{ia}{\omega} \left(1 + \frac{a^2\omega^2}{2}\right) (\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}) - \left(\frac{a}{m}\right)^2 \hat{p}^2 \right] \\ \hat{p}^2\hat{T} &= \hat{T} \left[ -(am)^2\bar{\omega}^4\hat{x}^2 + iam\bar{\omega}^2 \left(1 + \frac{a^2\omega^2}{2}\right) (\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}) + \left(1 + \frac{a^2\omega^2}{2}\right)^2 \hat{p}^2 \right]\end{aligned}$$

Dunque

$$\hat{\hat{H}}\hat{T} = \dots = \hat{T} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2\hat{x}^2 \right] \implies [\hat{\hat{H}}, \hat{T}] = 0$$

□

**Autovalori dell'operatore di trasferimento.** Il teorema precedente implica

$$\hat{T} = f(\bar{H})$$

ricordando  $\tilde{H} \neq \bar{H}$ . Si definiscono gli operatori di creazione e distruzione

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{2}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\bar{\omega}} \right), \quad a = \sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{2}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\bar{\omega}} \right), \quad [a, a^\dagger] = 1$$

[r]

**Teorema 16.3.** Vale

$$a^\dagger\hat{T} = \left(1 + a\bar{\omega} + \frac{a^2\omega^2}{2}\right) \hat{T}a^\dagger$$

Si definisce

$$\hat{T}|\tilde{E}_n\rangle = e^{-a\tilde{E}_n}|\tilde{E}_n\rangle$$

quindi

$$a^\dagger\hat{T}|\tilde{E}_n\rangle = e^{-a\tilde{E}_n}a^\dagger|\tilde{E}_n\rangle, \quad \hat{T}a^\dagger|\tilde{E}_n\rangle = e^{-a\tilde{E}_{n+1}}a^\dagger|\tilde{E}_n\rangle$$

Dunque

$$e^{-a\tilde{E}_n} = \left(1 + a\bar{\omega} + \frac{a^2\omega^2}{2}\right) e^{-a\tilde{E}_{n+1}} \implies a(\tilde{E}_{n+1} - \tilde{E}_n) = \ln \left[1 + a\bar{\omega} + \frac{a^2\omega^2}{2}\right]$$

## Lezione 12

ven 22 mar  
2024 14:30

## Parte VI

# Lattice QCD

## 17 Introduzione

Questa parte è più concentrata sulla fisica che l'aspetto numerico.

La cromodinamica quantistica è la teoria fondamentale dell'interazione forte basata sul gruppo  $SU(3)_c$  di colore. Ci si concentra sull'interazione forte. Questo perché la teoria elettrodebole si può studiare in modo perturbativo ed analitico. Il settore forte la teoria dev'essere trattata in modo non perturbativo: sono presenti importanti fenomeni che non possono essere trattati perturbativamente. Trattare in modo perturbativo significa calcolare il path integral. In teoria dei campi, esistono dei contributi della forma  $e^{\frac{1}{g^2}}$ , ma questa funzione non è analitica? e dunque applicare la teoria delle perturbazioni produce solo termini nulli. Nelle simulazioni si può anche utilizzare la QCD senza fermioni.

La QCD si basa su semplici principi:

- invarianza locale di gauge  $SU(3)_c$ ;
- il contenuto di campi sono i sei quark nella rappresentazione fondamentale, dal punto di vista della QCD essi si comportano tutti nello stesso modo, non li si dividono in famiglie come nel Modello Standard;
- rinormalizzabile (sacrificando un numero finito di parametri della teoria, tutto è calcolabile [r]).

La teoria ha vari parametri liberi: la costante di accoppiamento, la massa dei quark e l'intensità  $\theta$  della carica topologica [r]. Se  $\theta \neq 0$ , allora si ha violazione di CP nelle interazioni forte. Essa è osservata nei processi deboli, ma non nei processi forti; al momento c'è un limite molto piccolo e spesso si pone  $\theta = 0$ . Le masse dei quark sono rilevanti e c'è una grande gerarchia: l'up ha 2 MeV, mentre il top 2 GeV. Ci sono varie teorie, ma nessuna spiegazione è universalmente accettata: questo è il problema del flavour.

Dal punto di vista fenomenologico è interessante conoscere le masse dei quark. Essi si dividono in due categorie: leggeri u, d e s, e pesanti c, b, t.

Il gruppo di gauge non è abeliano e questo comporta una importante differenza con la QED. In Questa teoria si ha un vertice fotone, leptone, anti-leptone. Anche in questo caso si ha un vertice simile. Tuttavia, poiché la teoria non è abeliana, allora i quark interagiscono tra loro: ci sono vertici a tre e quattro gluoni. Questo comportamento rende la teoria completamente diversa dalla QED.

## 17.1 Azione di QCD

L'azione presenta una parte gluonica ed una parte fermionica analoga a quella di QED. Considerando solo tre flavour  $N_F = 3$

$$S = S_G + \int d^4x \bar{\psi} D \psi + \bar{\psi}_R M^\dagger \psi_L + \bar{\psi}_L M \psi_R, \quad M^\dagger = M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s), \quad \theta = 0$$

dove  $\psi$  sono multipletti di flavour. Questa azione definisce una teoria classica perché non si è ancora quantizzato.

L'azione presenta una simmetria  $SU(3)$  di colore. Nel caso in cui la massa è zero, si ha solo il primo termine dell'azione che non dipende dal flavour dei quark. Mentre in QED nella derivata covariante è presente la carica; questo perché il gruppo di gauge è abeliano e ammette rappresentazioni monodimensionali caratterizzate da una carica; tale carica è arbitraria e può essere qualsiasi valore. D'altra parte, i gruppi non abeliani hanno solo alcuni tipi di rappresentazioni. Per esempio,  $SU(3)$  ha rappresentazione fondamentale, anti-fondamentale, aggiunta [r]. Ci sono solo alcune rappresentazioni ed esse non hanno gradi di libertà (tipo la carica). Poiché i quark sono tripletti di colore, allora l'accoppiamento all'interno della derivata covariante è indipendente dal flavour. Inoltre non è presente la costante di accoppiamento davanti al campo  $A$  perché si è rinormalizzato per il regime non perturbativo.

Il primo termine dell'azione è

$$\bar{\psi} D \psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3] I_F \gamma^\mu D_\mu \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \bar{\psi}_1 \gamma^\mu D_\mu \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu D_\mu \psi_2 + \bar{\psi}_3 \gamma^\mu D_\mu \psi_3$$

dove  $I_F$  è l'identità di flavour. Si nota che questo termine ha simmetria di flavour  $SU(3)_F$

$$\psi' = R \psi$$

I campi hanno chiralità left e chiralità right ed essa coincide con l'elicità delle particelle che distruggono. Quindi

$$\bar{\psi} D \psi = \bar{\psi}_1^L \gamma^\mu D_\mu \psi_1^L + \bar{\psi}_1^R \gamma^\mu D_\mu \psi_1^R + \dots$$

Nel limite di massa nulla, si possono mescolare le componenti right e left in modo indipendente tra loro. Quindi, il gruppo di simmetria è in realtà

$$SU(3)_L \times SU(3)_R$$

Tuttavia, la simmetria vera sarebbe  $U(3)_{R,L} = SU(3)_{R,L} \times U(1)_{R,L}$ .

Sempre nel limite di massa nulla, la teoria ha un'altra simmetria. I parametri sono solo  $g$ ,  $m$  e  $\theta$ . In tale limite, i parametri che rimangono sono solo adimensionali: c'è invarianza di scala. [r] simmetria iniziale.

Tuttavia, in natura si osserva solamente la conservazione del numero barionico  $U(1)_B$  e l'isospin  $SU(3)_{L+R}$  (generalizzato). Bisogna capire come passare dalla simmetria dell'azione alla simmetria osservata. Le simmetrie dell'azione classica della QCD (lite (masse dei quark uguale a zero) si rompono nella quantizzazione: la teoria quantistica non ha tutte tali simmetria.

Non perturbativamente, una teoria quantistica dei campi si definisce tramite il path integral. Nel caso della meccanica quantistica basta usare

$$Z = \int \delta A \delta \psi \delta \bar{\psi} e^{-S}$$

[r] Tuttavia, in QFT si rende necessaria anche la procedura di rinormalizzazione. Per definire la funzione di partizione bisogna discretizzare lo spazio ed il tempo introducendo così un cutoff

$$\Lambda \sim \frac{\pi}{a}$$

[r] In QFT, facendo il limite al continuo mantenendo fisse i parametri porta a degli infiniti

$$M_P(g, a) \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow 0$$

Data una teoria in MQ ordinaria, i parametri dell'azione vengono fissati in modo sperimentale? [r]. Tuttavia, i parametri dell'azione non sono i parametri fisici, poiché i parametri fisici sono i poli delle funzioni di correlazioni. Ad esempio, le masse sono i poli di alcuni correlatori. In QFT si fissa un polo tramite il valore fisico [r]

$$M_P(g, a) = M_P^{\text{phys}}$$

In questo modo, quando si fa il limite del continuo, la costante di accoppiamento bare dell'azione deve cambiare in funzione del passo reticolare

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_\Pi(g(a), a) = M_\Pi^{\text{phys}}$$

Si sacrificano tanti parametri quanti sono quelli liberi e così la teoria diventa predittiva. Nel fare questo si rompe l'invarianza di scala. Se si potesse risolvere analiticamente, si avrebbe

$$g(a, M_P^{\text{phys}})$$

Compare un parametro con dimensione di massa non nulla e si rompe l'invarianza di scala. Il primo effetto della quantizzazione è la dimensional transmutation, si rompe l'invarianza di scala. La scala che viene introdotta è la massa del protone, per cui si ha la  $\Lambda_{\text{QCD}}$ .

**Anomalia chirale.** Si ha un altro effetto di quantizzazione. Se [r] anche l'esponentiale dell'azione è invariante. Tuttavia, il path integral presenta anche la misura d'integrazione che pesa i cammini di Feynman. Se l'azione è invariante, ma non la misura, si ha l'anomalia chirale? [r]. A livello perturbativo, l'anomalia si manifesta [r]. Cambiando i gradi di libertà dei gruppi, si può riscrivere

$$U(1)_L \times U(1)_R = U(1)_V \times U(1)_A$$

dove V e A stanno per vettoriale ed assiale. Questo equivale a cambiare parametrizzazione

$$\theta_{L,R} \implies \theta_{V,A} = \frac{\theta_L \pm \theta_R}{2}$$

La misura cambia se si usa la fase di  $L + R$ . [r] secondo gruppo simmetria

**Rottura spontanea di simmetria.** In QCD, uno può scrivere

$$SU(3)_L \times SU(3)_R = SU(3)_V \times \text{generatori extra}$$

Questa simmetria è rotta tramite la rottura spontanea di simmetria: il vuoto della teoria non è invariante sotto tale trasformazione. La simmetria a cui si arriva è l'isospin generalizzato.

**Confinamento.** In natura, i quark liberi che sono triplette di colore non si osservano, ma si osservano solamente singoletti di colore. Questo è il confinamento: quando gli adroni si creano, essi si raggruppano in rappresentazione singoletto di colore. Ad esempio, nel momento in cui un quark ed un anti-quark, la teoria forte crea un'altra coppia di quark-anti-quark che si accoppiano con quelli iniziali per non dare stati asintotici di solo quark.

Nel corso si sa definire l'anomalia chirale e la si può calcolare in modo numerico veloce. Si è detto che in QCD c'è la rottura spontanea. Quando si rompe spontaneamente un generatore ad un parametro continuo, compare un bosone di Goldstone. Per la Lambda QCD, sono presenti otto particelle leggere che sono i tre pioni ed i quattro kaoni. Queste derivano dal fatto che, nel limite in cui  $m \rightarrow 0$ , sono bosoni di Goldstone e quindi

$$m_\pi \propto \sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m}, \quad m_K \propto \sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m}$$

[r] Weinberg utilizzò la stessa argomentazione per la particella  $\eta'$ , ma essa non è una particella leggera. Weinberg ignorò l'anomalia chirale, ma essa contribuisce in modo prevalentemente

$$M_{\eta'} \sim 930 \text{ MeV} \sim \Lambda_{\text{QCD}}$$

Nel corso si calcola questo contributo dell'anomalia chirale. Poter calcolare questo effetto è un test della quantizzazione della teoria: è un effetto quantistico e non perturbativo [r].

## 17.2 Prove sperimentali

**Rottura dell'invarianza di scala.** La rottura di invarianza di scala implica che l'accoppiamento di gluoni, quark e anti-quark dipende dal momento  $\mu$  dei gluoni entranti. In particolare, il gruppo di rinormalizzazione permette di studiare l'andamento

$$\mu d_\mu g = \beta(g)$$

La funzione beta si può solo calcolare numericamente. Essa ha soluzione per

$$\Lambda = \mu \cdots$$

Dare la costante di accoppiamento  $g$  (per studi perturbativi) o la scala di QCD  $\Lambda$  (per studi non perturbativi) è equivalente poiché le due sono legate dall'equazione sopra e la teoria ha un solo parametro libero.

La dipendenza della costante dal momento presenta una libertà asintotica: la funzione beta è negativa e quando due quark si avvicinano, l'interazione è sempre più debole.

La rottura di scala è ben visibile [r].

La rinormalizzazione è parte del processo di quantizzazione e non ci sono infiniti in presenza di parametri fisici. La procedura di rinormalizzazione implica una costante di accoppiamento che cambia.

**Scala dell'interazione.** Ci sono vari adroni con massa pari a circa la scala tipica. In una teoria con simmetria di flavour e massa irrilevante, gli adroni si dispongono in un ottetto e decupletto.

Nel limite chirale, cioè masse dei quark trascurabili, esiste un solo parametro fissato dalla teoria. Il rapporto tra l'ottetto ed il decupletto (detto anche rapporto geometrico) è dato dalla teoria senza parametri liberi.

**Rottura spontanea.** Nel limite di massa nulla, otto generatori corrispondono ad otto bosoni di Goldstone: i tre pioni, i quattro K e la  $\eta$ . Essi sono tutti più leggeri di  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , ma i primi sono molto più leggeri degli altri. Essi dovrebbero essere a massa nulla, ma questo vale assumendo che i quark abbiano massa nulla. Tuttavia, i quark hanno massa, nei primi tre si ha solo u e d; mentre negli altri tre si ha anche s e quindi più pesanti. La  $\eta'$  [r] prende un contributo dall'anomalia chirale.



### 17.3 Lattice QCD

Per partire dai principi primi si può utilizzare il reticolo.

Per l'oscillatore armonico, il path integral è

$$Z = \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j e^{-S(x)}$$

Si è discretizzato il tempo per poter definire il path integral in modo esatto. Una volta discretizzato il tempo, si ha un numero finito di gradi di libertà e dunque l'integrale è ben definito. Poi si è fatto il limite al continuo diminuendo il passo reticolare.

Per la teoria  $\lambda\varphi^4$ , si ha

$$Z = \int \prod_x \delta\varphi(x) e^{-S(\varphi)}$$

Nella misura si integra sul campo: si integra sui valori del campo, non sulla sola posizione. Il campo ha un numero infinito di gradi di libertà perché i punti  $x$  sono infiniti. Per essere ben definito, bisogna discretizzare il tempo e lo spazio: si costruisce un reticolo su cui è definito il campo. Si manda il passo reticolare a zero, si fa il limite del continuo tenendo conto anche della rinormalizzazione.

Inoltre, nell'oscillatore armonico si è anche discretizzata l'azione

$$S = a \sum_j \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_j^2$$

Similmente, bisogna discretizzare l'azione del campo e sostituire la derivata con la derivata discreta. L'azione può anche essere manipolata, ma bisogna imporre che l'azione discreta (anche classica) tenda a quella del continuo. La stessa cosa si può fare con il formalismo della matrice di trasferimento. Bisogna definire l'azione di QCD e discretizzarla.

Ci si pone in un quadri-volume finito e si usa il metodo Monte Carlo. In tal modo si ottiene una predizione esatta.

**Risultati numerici.** Si può definire la costante di accoppiamento in modo non perturbativo. Dall'input sperimentale di una quantità adronica si può calcolare la costante di accoppiamento in funzione della scala di energia.

Anche lo spettro adronico si può calcolare partendo da tre input sperimentali. Alcuni adroni hanno grandi errori perché l'errore cresce in modo esponenziale (come per l'oscillatore armonico).

**Prospettive.** Il calcolo non perturbativo è un insieme di teoria dei campi, algoritmi e calcolatori. Si sfruttano proprietà delle teorie dei campi per sviluppare algoritmi migliori e tali algoritmi migliorano le teorie dei campi. Inoltre tali algoritmi devono essere sviluppati per architetture particolari di calcolatori. Un esempio è inserire negli algoritmi la rottura spontanea e libertà asintotica.

## 18 Elettrodinamica quantistica

L'azione del campo elettromagnetico è invariante per una trasformazione di gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu g(x)$$

L'insieme delle trasformazioni forma un gruppo abeliano. [r]

L'azione di Dirac è invariante per trasformazione di fase

$$\psi'(x) = e^{-iq\theta} \psi(x)$$

Queste trasformazioni costituiscono un gruppo abeliano, dove  $q$  è la carica di rappresentazione.

**Invarianza di gauge.** In origine queste due trasformazioni erano separate, ma in QED le due trasformazioni sono state identificate tramite  $g = \theta$  e ponendo che la teoria sia invariante per trasformazione locale. L'azione fermionica non è invariante per la trasformazione di fase

$$S_F = S'_F + iq \int d^4x \bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \theta \psi'$$

Se il principio di gauge è corretto, allora bisogna aggiungere una parte alla lagrangiana che include l'interazione con il campo di gauge

$$S_I = S'_I - iq \int d^4x \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu \partial_\mu \theta(x) \psi(x)$$

Yang e Mills applicarono lo stesso procedimento per  $U \in \text{SU}(3)$

$$U = e^{i\Lambda^a(x)T^a}, \quad \Lambda^a = \frac{1}{2}\lambda^a, \quad [T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

dove si ha

$$\Lambda = \Lambda^a(x)T_a, \quad \Lambda = \Lambda^\dagger, \quad \text{Tr } \Lambda = 0$$

L'oggetto che compare che dev'essere cancellato è data dai [r]. In QCD, la derivata covariante è

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x), \quad A_\mu = A_\mu^a T_a$$

Quindi ci sono otto gluoni. Per  $\text{SU}(n)$  si hanno  $n^2 - 1$  generatori.

## Lezione 13

ven 05 apr  
2024 14:30

## 19 Teorie di Yang–Mills

Le teorie di Yang–Mills si basano sul gruppo di gauge  $\text{SU}(n)$ . Tale gruppo è il gruppo di matrici unitarie di dimensione  $N$  con determinante 1. La dimensione del gruppo, pari ai parametri liberi delle matrici sono  $N^2 - 1$ .

### Rappresentazione fedele e algebra di Lie. [r]

La dimensione del gruppo di Lie è  $N^2 - 1$ .

**Proprietà dei generatori.** Alcune proprietà sono

$$T^a = (T^a)^\dagger, \quad \text{Tr } T^a = 0, \quad \text{Tr } [T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \quad [T^a, T^b] = \dots$$

Per il gruppo  $\text{SU}(3)$ , i generatori sono le matrici di Gell-Mann [r]

### 19.1 Campo di gauge

In QED, per rendere covariante? [r] la teoria si introduce la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \quad A_\mu = A_\mu^a T_a$$

Le trasformazioni di gauge è data dalla matrice

$$G(x) = e^{i\Lambda_a(x)T^a}$$

Il campo trasformato è

$$A_\mu^G(x) = G(x)A_\mu(x)G^\dagger(x) + iG(x)\partial_\mu G^\dagger(x)$$

Il tensore di campo del campo di gauge è

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$$

Il tensore trasformato è covariante, ma non invariante

$$F_{\mu\nu}^G = G(x)F_{\mu\nu}G^\dagger(x)$$

Questo perché il campo cromodinamico non è osservabile.

**Esercizio 19.1.** Una volta definita la derivata covariante, si può definire il tensore di campo come

$$F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu], \quad D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$$

La derivata covariante permette di ottenere una Lagrangiana invariante per trasformata di gauge. La trasformata di gauge della derivata covariante è

$$D_\mu^G = G(\partial_\mu - iA_\mu)G^\dagger$$

Pertanto

$$F_{\mu\nu}^G = \dots = GF_{\mu\nu}G^\dagger$$

## 19.2 Azione gauge-invariante

La notazione non perturbativa è diversa da quella perturbativa. La costante di accoppiamento  $g$  è posta davanti al termine di pura gauge. Il campo si può sempre riscaldare

$$A_\mu = A_\mu^{\text{perturb.}} g_0$$

Nella QED (senza fermioni) non si usa la notazione non perturbativa perché si può sempre riscaldare il campo e la teoria è invariante perché non è presente il termine non lineare nella trasformazione del tensore di campo (cioè il commutatore che dà vertici a tre e quattro punti).

L'azione di pura gauge, cioè solo gluoni, è

$$S_{GI} = \frac{1}{2g_0^2} \int d^4x \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = \frac{1}{4g_0^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$$

Porre la costante di accoppiamento di fronte all'azione è utile anche per la discretizzazione sul reticolo.

## 20 Quantum chromodynamics

Si vuole costruire un'azione invariante per il gruppo di gauge  $SU(3)$ . I fermioni sono in rappresentazione fondamentale (cioè il tripletto). Affinché la teoria sia rinormalizzabile in  $d = 4$ , i termini dell'azione devono avere dimensione di massa minore o uguale a 4.

Il campo fermionico ha dimensione  $\frac{3}{2}$ , mentre il campo dei bosoni vettori è 1. Esempi di termini permessi in QED sono

$$\bar{\psi} \not{D} \psi + m^2 \bar{\psi} \psi + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Un esempio di termine che non è invariante di gauge è  $A^2$ .

[r] Seguire il procedimento sopra in QCD non basta, perché si può aggiungere un termine del tipo

$$\theta \text{Tr} [F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}], \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \propto \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{1234} = 1$$

Il tensore duale  $\tilde{F}$  è uno pseudo-tensore: cambia segno sotto trasformazione di parità. A causa di questo termine si può rompere la parità. Si noti il termine  $\theta$  che va aggiunto anche se gli esperimenti sono compatibili con zero, ma a priori bisogna inserirlo. Per ora non si sa come mai la QCD preservi la simmetria CP.

**Path integral.** [r] La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}^G(x) + \mathcal{L}^F(x) + \mathcal{L}_Q$$

[r] la lagrangiana di gauge-fixing si vede a teoria dei campi

A causa dell'invarianza di gauge, quando si definisce la teoria nel continuo non basta la lagrangiana del bosone vettore e dei fermioni poiché lungo le trasformazioni di gauge non si cambia l'azione e l'integrale sui cammini non è definito. Bisogna rompere l'invarianza di gauge aggiungendo la lagrangiana di gauge-fixing con campi a spin semi-intero ma con statistica bosonica. [r]

Questo problema si può evitare partendo dalla definizione dell'integrale sui cammini direttamente sul reticolo [r].

Per l'oscillatore armonico, si è discretizzato il tempo e la funzione di partizione è

$$Z = \int \prod_{i=0}^{N-1} dx_i e^{-S}, \quad S = a \sum_i \frac{m}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2$$

dove si è discretizzata l'azione. Per una teoria dei campi vale la stessa cosa tramite la matrice di trasferimento. Bisogna utilizzare una forma discretizzata dell'azione classica. Bisogna rendere finito i numeri di gradi di libertà: il tempo e lo spazio. La funzione di partizione è

$$Z = \int \prod_{x^\mu} \delta A_\mu \prod_x \delta \psi \delta \bar{\psi} e^{-S}$$

Basta discretizzare correttamente l'azione classica e calcolando le funzioni di correlazioni, esse sono indipendenti dal modo di discretizzazione nel limite al continuo  $a \rightarrow 0$ . Bisogna trovare un modo per discretizzare le derivate.

## 21 Lattice gauge theory

L'invarianza di gauge è la proprietà fondamentale della teoria perché altrimenti la teoria discreta è radicalmente diversa da quella continua. Fare una discretizzazione banale dell'equazione di Dirac rompe l'invarianza di gauge.

La derivata covariante si può discretizzare in modo simmetrico

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \frac{1}{2a} [\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x - a\hat{\mu})]$$

Il termine di Dirac diventa

$$\bar{\psi} \partial_\mu \psi \rightarrow \frac{1}{2a} [\bar{\psi}(x) \psi(x + a\hat{\mu}) - \bar{\psi}(x) \psi(x - a\hat{\mu})]$$

Questa rompe l'invarianza di gauge perché

$$\bar{\psi}^G(x) = \bar{\psi}(x) G^\dagger(x), \quad \psi^G(x + a\hat{\mu}) = G(x + a\hat{\mu}) \psi(x + a\hat{\mu})$$

L'invarianza di gauge è risolta da Wilson. Non si può usare la derivata covariante per due punti discreti. Si utilizzano gli integrali di linea di Schwinger affinché il prodotto

$$\bar{\psi}(x) \psi(y)$$

con  $y = x + a\hat{\mu}$ , sia invariante di gauge. Nel continuo si definisce la linea di Schwinger

$$U_\mu(x, x + a\hat{\mu}) = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_x^{x+a\hat{\mu}} dz_\mu A_\mu(z) \right] \right\}$$

Si può dimostrare che essa si trasforma in modo covariante

$$U^G = G(x) U(x, x + a\hat{\mu}) G^\dagger(x + a\hat{\mu})$$

Dunque il prodotto seguente è gauge invariante

$$\bar{\psi}(x) U_\mu(x, x + a\hat{\mu}) \psi(x + a\hat{\mu})$$

La linea di Schwinger nel continuo rende gauge invariante il prodotto sopra come la derivata covariante, ma con dei punti separati.

L'equazione di Dirac nel caso libero e nel discreto è

$$\bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{1}{2a} [\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x - a\hat{\mu})]$$

Ogni volta che appare  $\bar{\psi}(x)\psi(x+a\hat{\mu})$  si inserisce una linea di Schwinger, come nel continuo si sostituisce la derivata parziale con la derivata covariante. Pertanto

$$\rightarrow \bar{\psi}(x)[U_\mu(x, x+a\hat{\mu})\psi(x+a\hat{\mu}) - U_\mu(x, x-a\hat{\mu})\psi(x-a\hat{\mu})]$$

[r] Al prim'ordine nello sviluppo in  $a$ , la linea di Schwinger è

$$U_\mu(x, x+a\hat{\mu}) = 1 - iaA_\mu(x + a/2\hat{\mu}) + o(a), \quad U_\mu(x, x-a\hat{\mu}) = 1 + iaA_\mu(x - a/2\hat{\mu}) + o(a)$$

Inserendo queste espressioni sopra si ha

$$\rightarrow \bar{\psi}(x) \left\{ \frac{\psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x-a\hat{\mu})}{2a} - \frac{i}{2} \left[ A_\mu(x + \frac{a}{2}\hat{\mu})\psi(x + \frac{a}{2}\hat{\mu}) + A_\mu(x - \frac{a}{2}\hat{\mu})\psi(x - \frac{a}{2}\hat{\mu}) \right] \right\}$$

cioè le forme discretizzate di

$$\bar{\psi}(x)[\partial_\mu\psi - iA_\mu(x)\psi(x)]$$

La derivata covariante si ottiene dalla linea di Schwinger nel limite  $a \rightarrow 0$ .

Wilson afferma che discretizzando una teoria, i gradi di libertà fondamentali sono le linee di Schwinger tra un sito e l'altro (detti link) e non più il campo di gauge. Una linea di Schwinger vive nel gruppo, non nell'algebra

$$U_\mu(x, x+a\hat{\mu}) = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_x^{x+a\hat{\mu}} dz_\mu A_\mu(z) \right] \right\} = e^{-iaA_\mu(z+a\hat{\mu})}$$

ed essa si trasforma come

$$U^G(x, x+a\hat{\mu}) = G(x)U(x, x+a\hat{\mu})G^\dagger(x+a\hat{\mu})$$

Bisogna costruire un'azione di QCD in cui sono presenti i campi gluonici come link ed i campi fermionici. Questo è possibile grazie al fatto si può discretizzare in modo arbitrario l'azione.

Si deve costruire un reticolo quadri-dimensionale. Ad ogni punti si pongono quattro link ognuno con una matrice di SU(3). In ogni sito è presente un campo fermionico ed anti-fermionico definiti come campi di Grassmann.

## 21.1 Wilson gluonic action

Le line di Schwinger sono

...

che si trasformano come [r]. Una quantità utile da definire è la placchetta la cui traccia è gauge invariante

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$$

dove  $\mu$  e  $\nu$  sono due direzioni. La placchetta segue il percorso più piccolo in senso anti-orario. La sua trasformazione è covariante

$$U_{\mu\nu}^G(x) = G(x)U_{\mu\nu}(x)G^\dagger(x)$$

Bisogna scrivere un'azione che presenta il giusto limite al continuo

$$S_G = \frac{\beta}{2} \sum_x \sum_{\mu\nu} \left[ 1 - \frac{1}{2N_c} \text{Tr}[U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x)] \right], \quad \beta = \frac{2N_c}{g_0^2}$$

## 21.2 Limite al continuo classico

Si utilizza la formula di Campbell–Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$$

Da cui

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) &= \exp \left[ -ia[A_\mu(x) + A_\nu(x + a\hat{\mu}) - i\frac{a}{2}[A_\mu(x), A_\nu(x + a\hat{\mu})] + \dots] \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -ia[A_\mu(x + a\hat{\nu}) + A_\nu(x) + i\frac{a}{2}[A_\mu(x + a\hat{\nu}), A_\nu(x)] + \dots] \right] \\ &= \dots \\ &= \exp \left[ -ia^2(D_\mu A_\nu(x) - D_\nu A_\mu(x) - i[A_\mu(x), A_\nu(x)] + o(a^0)) \right] \end{aligned}$$

[r] applicandolo ancora si ha Si definisce la derivata forward

$$D_\mu f(x) = \frac{f(x + a\hat{\mu}) - f(x)}{a}$$

Si può definire il tensore di campo come

$$F_{\mu\nu}(x) = D_\mu A_\nu(x) - D_\nu A_\mu(x) - i[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

[r] tutto il termine lineare nell'espansione dell'esponenziale si cancella (per questo non viene scritto esplicitamente fino all'ordine necessario) L'azione di pura gauge (cioè solo gluoni) diventa

$$S_G = \frac{1}{2g_0^2} a^4 \sum_x \sum_{\mu\nu} \text{Tr}[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)] + o(a^4)$$

L'integrale sui cammini è

$$Z = \int \delta U e^{-S_G}, \quad \delta U = \prod_{x,\mu} \delta U_\mu(x)$$

L'integrale è ben definito ed è un integrale sul gruppo di SU(3) dove  $\delta U$  è la misura di Harr che è gauge invariante. Alcune proprietà sono: l'azione, la misura sono gauge invariante (non si ha anomalia dovuta alla misura), per definire l'integrale non bisogna operare il gauge-fixing.

Si vede perché non bisogna inserire il gauge-fixing. Si consideri il gruppo U(1) con matrici

$$U = e^{iaA_\mu}, \quad A'_\mu = A_\mu - i\partial_\mu f$$

Se la derivata cambia tanto, nello spazio fase del campo  $A_\mu$  esistono dei valori del campo legati dalla trasformata di gauge che non cambiano l'azione. Su tali orbite di gauge, il campo può diventare infinito. Nel caso formale del continuo, quando si opera l'integrale

$$Z = \int \delta A_\mu e^{-S(A_\mu)}$$

l'azione non cambia, ma il campo diverge e l'integrale non è definito. Nel caso discreto, se il campo diverge, il gruppo è una fase che rimane finita seppur si considerano gli stessi valori tante volte.

A questa teoria di Yang–Mills bisogna aggiungere i fermioni.

## Lezione 14

Nel limite classico, l'azione di Wilson tende all'azione nel continuo per  $a \rightarrow 0$ . Nell scrivere l'integrale sui cammini, la discretizzazione è arbitraria e l'azione di Wilson mantiene l'invarianza di gauge. In questo modo si preserva la normalizzazione e [r].

L'azione classica di QCD ha simmetria

$$SU(3)_C \otimes U(1)_L \otimes U(1)_R \otimes SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes \text{scala}$$

La prima è sistemata tramite l'azione di gauge, mentre l'invarianza di scala è rotta nel momento in cui si usa il reticolo (ed essa sarebbe stata comunque rotta quando si rinormalizza). La prima simmetria è definente. Le altre sono accidentali che derivano dalla scelta del contenuto di campi.

Le simmetrie accidentali diventano

$$U(1)_A \otimes U(1)_V \otimes SU(N_f)_V \otimes \text{generatori chirali?}$$

Le simmetrie accidentali si possono anche non preservare. Wilson non le preserva, ma poi è stato possibile da Luscher e [r].

ven 12 apr  
2024 14:30

### 21.3 Azione fermionica

**Caso ingenuo.** La migliore derivata da scegliere è la derivata simmetrica che non ha termini lineari?

$$\frac{1}{2}(\nabla_\mu + \nabla_\mu^*)\psi(x) = \frac{1}{2a}[\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x - a\hat{\mu})]$$

La discretizzazione ingenua è [r].

Si può considerare la trasformata di Fourier con le seguenti convenzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\text{IBZ}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad \text{IBZ} = \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right] \\ \tilde{f}(k) &= a^4 \sum_x f(x) e^{-ikx} \\ a^4 \sum_x e^{-ix(k_1 - k_2)} &= (2\pi)^4 \delta_p^{(k)}(k_1 - k_2) \end{aligned}$$

Pertanto, l'azione è

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{a^4}{2a} \sum_x \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} e^{-ik_1 x} e^{ik_2 x} [\bar{\psi}(k_1) \gamma_\mu e^{ik_2 a \hat{\mu}} \psi(k_2) - \bar{\psi}(k_1) \gamma_\mu e^{-ik_2 a \hat{\mu}} \psi(k_2) + m \bar{\psi}(k_1) \psi(k_2)] \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(q) \left[ \gamma_\mu \frac{2i}{2a} \sin(q_\mu a) + m \right] \psi(q) \end{aligned}$$

Nel continuo il termine del seno diventa  $\gamma_\mu i q_\mu$ . Definendo

$$\bar{q}_\mu = \frac{1}{a} \sin(q_\mu a), \quad K(q) = i \bar{q}_\mu \gamma_\mu + m$$

Dunque l'azione diventa

$$S_F = \int_{\text{IBZ}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(q) K(q) \psi(q)$$

non c'è  $a^4$ .

Il propagatore della teoria libera è

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(0) \rangle = \int_{\text{IBZ}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-i \gamma_\mu \bar{q}_\mu}{\sum_\mu \bar{q}_\mu^2 + m^2} e^{iqx}$$

In questa espressione è nascosto il fatto che i fermioni portano l'anomalia. Essa compare nell'interazione. In questo caso non si ha interazione perché è il caso libero. Quando si rende la teoria interagente, compare l'anomalia. Infatti, una volta che si utilizza un reticolo, gli integrali sono ben definiti e di dimensioni finite. Nel continuo le definizioni sono solo formali e si possono cambiare a piacere. Osservando i poli del propagatore in una dimensione si ha un polo

$$\frac{1}{\sin(q_\mu a)} \implies \bar{q}_\mu^2 = 0 \iff q_\mu = 0, \pm \frac{\pi}{a}$$

La zona di Brillouin si può traslare a  $[-\frac{\pi}{2a}, \frac{3\pi}{2a}]$ . Gli zeri sono solamente due (nel primo caso infatti un estremo è incluso e l'altro è escluso). Il propagatore dei fermioni sul reticolo rappresenta due fermioni, uno nel primo polo ed uno nel secondo. In una dimensione, una singola azione rappresenta due famiglie fermioniche. In quattro dimensioni si hanno  $2^4 = 16$  combinazioni e dunque sedici particelle di massa identica. Per gli staggered fermions si utilizza questa tecnica per rappresentare diverse particelle. Nel caso presente si devono rappresentare fermioni di masse diverse.

**Chiralità dei doppietti.** Si veda Rothe. Si studia cosa succede vicino ad ogni polo. Sia  $a\tilde{p}_\mu$  la posizione del polo. Ogni direzione è divisa in due blocchi di modo che ogni blocco contenga un solo polo. Dunque, all'interno di ogni blocco, il momento è

$$q_\mu = p_\mu + \tilde{p}_\mu$$

Il propagatore diventa

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(0) \rangle = \sum_{\tilde{p}} e^{i\tilde{p}x} \int_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i \sum_{\mu} \delta_{\tilde{p}\mu} \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + m}{\sum_{\mu} \tilde{p}_{\mu}^2 + m} e^{ipx}, \quad \delta_{\tilde{p}\mu} = e^{i\tilde{p}_{\mu}a} = \pm 1$$

Il propagatore si riscrive come somma di sedici propagatori ciascuno con un polo. Non si ha esattamente l'equazione di Dirac a causa del termine  $\delta$ . Si può dimostrare l'esistenza di una trasformazione di similarità delle matrici  $\gamma$  per cui

$$\tau_{\tilde{p}} \gamma_{\mu} \tau_{\tilde{p}}^{-1} = \delta_{\tilde{p}\mu} \gamma_{\mu}$$

Nei poli non bisogna avere la stessa rappresentazione delle matrici di Dirac. Dunque il propagatore è

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(0) \rangle = \sum_{\tilde{p}} e^{i\tilde{p}x} \tau_{\tilde{p}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i \tilde{p}_{\mu} \gamma_{\mu} + m}{\sum_{\mu} \tilde{p}_{\mu}^2 + m^2} e^{ipx} \tau_{\tilde{p}}^{-1}$$

Discretizzare in modo ingenuo l'equazione di Dirac porta a descrivere sedici fermioni.

Si consideri un solo fermione chirale nel continuo. [r] Ripetendo i passaggi sopra si ottiene

$$\langle \psi_L(x) \bar{\psi}_L(0) \rangle = \sum_{\tilde{p}} e^{i\tilde{p}x} P_L \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tau_{\tilde{p}} \left[ \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu}}{\sum_{\mu} \tilde{p}_{\mu}^2} \right] \tau_{\tilde{p}}^{-1} e^{ipx}$$

Inserendo  $\tau_{\tilde{p}} \tau_{\tilde{p}}^{-1}$  dopo il primo esponenziale. Sapendo

$$\tau_{\tilde{p}}^{-1} P_L \tau_{\tilde{p}} = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{\tilde{p}} \gamma_5), \quad \varepsilon_{\tilde{p}} = \prod_{\mu} \delta_{\tilde{p}\mu}$$

Dunque, un propagatore chirale left è

$$\langle \psi_L(x) \bar{\psi}_L(0) \rangle = \sum_{\tilde{p}} e^{i\tilde{p}x} \tau_{\tilde{p}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{\tilde{p}} \gamma_5) \left[ \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu}}{\sum_{\mu} \tilde{p}_{\mu}^2} e^{ipx} \right] \tau_{\tilde{p}}^{-1}$$

Nella base chirale, partendo da un propagatore left nel continuo, si ottengono otto propagatori left ed otto right nel discreto. Anche i fermioni chirali raddoppiano e si ottengono anche l'altra chiralità.

Dunque questa discretizzazione porta questo problema.

**Teorema di Nielsen-Nimomiya.** Le proprietà desiderate di  $K(q)$  si deve avere:

- l'operatore di Dirac  $D(q)$  sia una funzione liscia in  $q_{\mu}$  con periodo  $\frac{2\pi}{a}$ ;
- per  $q_{\mu} \ll \frac{\pi}{a}$  si ha  $D(q) = i\gamma_{\mu} q_{\mu} + O(aq^2)$ ;
- $D(q)$  sia invertibile per ogni  $q \neq 0$  modulo  $\frac{2\pi}{a}$ ;
- valga

$$\{\gamma_5, D(q)\} = 0$$

Quest'ultima proprietà implica la simmetria chirale dell'azione di QCD. Le trasformazioni vettoriali dei campi fermionici sono

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi$$

allora si avrebbe

$$\bar{\psi} D \psi \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\theta} D e^{i\theta} \psi = \bar{\psi} D \psi$$

Le trasformazioni chirali sono

$$\psi \rightarrow e^{i\varphi \gamma_5} \psi$$

per cui si ha

$$\bar{\psi} D \psi \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\varphi \gamma_5} D e^{i\varphi \gamma_5} \psi = \bar{\psi} D \psi + i\varphi \bar{\psi} [\gamma_5 D + D \gamma_5] \psi$$



dove si considerano trasformazioni infinitesime. L'anti-commutatore è nullo e dunque le componenti chirali possono combinarsi arbitrariamente.

Il teorema di Nielsen–Nimomiya implica che le quattro condizioni sopra non hanno soluzione sul reticolo.

Le prime tre condizioni non si possono rilassare, solo l'ultima si può rilassare. Questo si può fare perché la simmetria chirale è accidentale e non definente. Wilson rimuove la simmetria chirale. Questo teorema implica che ci sia qualche problema con la chiralità.

**Azione di Wilson.** Al kernel si aggiunge

$$\frac{a}{2}\hat{q}^2, \quad \hat{q} = \frac{2}{a} \sin \frac{q_\mu a}{2}$$

Esso è un errore di discretizzazione che si può aggiungere a piacimento. Ai fermioni doppi si è fornisce una massa proporzionale al reciproco del quadrato del passo reticolare. Nel limite del continuo, la massa tende ad infinito. L'unico polo che si ha è quello in  $q = 0$ . Formalmente il  $q^2$  è il laplaciano nella derivata covariante che è un operatore di dimensione 5 (manca una  $a$  davanti, negli appunti). In questo modo la simmetria chirale è rotta.

Bisogna capire il problema. Ad un loop, si rinormalizza la massa dei quark. I diagrammi divergono logicamente. Il power counting fornisce una divergenza additiva lineare. Questo termine non si trova quando l'azione presenta la simmetria chirale. Senza simmetria chirale, non si può semplificare la rinormalizzazione (oltre alla comparsa di altri problemi).

**Soluzione al problema.** La funzione di partizione è

$$Z_{\text{QCD}} = \int \delta U \delta \psi \delta \bar{\psi} e^{-S_G(U)} e^{-S_F(U, \psi, \bar{\psi})}$$

Se l'azione è invariante per una trasformazione, si ha una corrente globale conservata. Per una trasformazione chirale

$$\psi \rightarrow e^{i\varphi\gamma_5} \psi$$

L'azione fermionica ingenua e la misura rimangono invarianti. Le trasformazioni assiali sono una simmetria. Non si ha un'anomalia [r]. L'anomalia è la presenza di una simmetria nell'azione del continuo, ma non nell'azione quantistica. Tuttavia, l'anomalia chirale compare anche perturbativamente; dunque ci deve essere un problema ed infatti viene dal numero in più di fermioni nell'azione. L'assenza dell'anomalia viene dal fatto che i fermioni doubler cancellano l'anomalia dei veri fermioni: la somma delle anomalie è nulla. Wilson risolve il problema inserendo l'azione con il termine in più.

Ginsparg e Wilson impongono

$$\{\gamma_5, D\} = aD\gamma_5D$$

Ipotizzando che sia il modo minimale per rompere la simmetria chirale sia quella sopra. L'inverso dell'operatore di Dirac è il propagatore del quark. Supponendo che l'operatore non presenti zero modi, si può moltiplicare per l'inverso

$$a\gamma_5 = D^{-1}\{\gamma_5, D\}D^{-1} = \gamma_5 D^{-1} + D^{-1}\gamma_5$$

Esplicitamente si ha

$$\gamma_5 D^{-1}(x, y) + D^{-1}(x, y)\gamma_5 = a\gamma\delta_{x, y}$$

[r] Tutte le quantità fisiche sono on-shell e coinvolgono la propagazione da un punto  $x$  ad un altro  $y \neq x$ . Il propagatore soddisfa la simmetria chirale solo dove interessa, ma l'operatore no.

Si è trovato un operatore che soddisfa le prime tre ipotesi di NN e soddisfa l'anti-commutatore sopra. Luscher formalizza la relazione definendo

$$\hat{\gamma}_5 = \gamma_5(1 - aD) \implies \gamma_5 D + D\hat{\gamma}_5 = 0$$

Questa relazione è formalmente identica a quella del continuo. La trasformazione  $U(1)_A$  dà

$$\psi' = \psi + i\varepsilon_A^0 \hat{h}\gamma_5\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} + i\varepsilon_A^0 \bar{\psi}\gamma_5$$

dove  $\varepsilon$  è un parametro. Inserendo la variazione sopra dei campi nell'azione, si ha la variazione dell'azione

$$\delta S = -a^4 i \varepsilon_A^0 \sum_x \bar{\psi}(x) \{ \psi_5 D + D \hat{\gamma}_5 \} \psi(x) = 0$$

Bisogna aggiungere degli errori di discretizzazione alla rappresentazione della simmetria chirale. La nuova matrice  $\hat{\gamma}_5$  dipende dall'operatore di Dirac che a sua volta dipende dal campo di gauge. In base a quale campo di gauge si considera, si ha una trasformazione diversa.

La trasformazione è

$$\psi' = e^{i \varepsilon_A^0 \hat{\gamma}_5} \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i \varepsilon_A^0 \gamma_5}$$

Il determinante è

$$d\bar{\psi}' d\psi' = \frac{1}{\det(e^{i \varepsilon_A^0 \gamma_5})} \frac{1}{\det(e^{i \varepsilon_A^0 \hat{\gamma}_5})} d\bar{\psi} d\psi = e^{-i \varepsilon_A^0 \text{Tr} \hat{\gamma}_5} d\bar{\psi} d\psi$$

Il determinante è al denominatore perché  $\psi$  è considerato come un campo di Grassmann. La traccia della matrice  $\hat{\gamma}_5$  non è nulla e da qua si ha l'anomalia. La traccia è

$$\text{Tr} \hat{\gamma}_5 = \text{Tr}[\gamma_5(1 - aD)] = -\text{Tr}[\gamma_5 aD]$$

L'operatore di Dirac ha  $3 \cdot 4 \cdot L^3 \cdot T$  elementi, cioè numero di colore, di spin, di spazio e di tempo. Considerando la traccia minuscola come traccia solo su colore e spin, si ha

$$-\text{Tr}[\gamma_5 aD] = -a \sum_x \text{tr}[\gamma_5 D(x, x)] \equiv 2a^4 q(x)$$

Nel limite continuo classico si ha

$$q(x) \rightarrow \frac{1}{32\pi^2} \sum_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}[F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x)]$$

L'anomalia è proporzionale all'integrale (sommatoria) sopra.

Riassumendo: si cambia la rappresentazione delle trasformazioni chirali obbligati da NN, si ha un pezzo aggiuntivo, l'azione rimane invariante, ma non la misura dell'integrale sui cammini che riceve una traccia. L'azione può ricevere un contributo

$$S = \bar{\psi} D \psi - i\theta \int d^4x q(x)$$

La teoria è anomala e  $U(1)_A$  è rotta dalla misura. Il secondo addendo è proprio

$$-i\theta \int d^4x q(x) = -i\frac{\theta}{2} \text{Tr} \hat{\gamma}_5$$

A massa nulla, si può avere un termine che rompe CP, ma si può riassorbire dall'anomalia. Se in natura esiste una massa di un quark nulla, allora non si ha rottura di CP forte. [r] Tutti i quark hanno massa diversa da zero e quindi questa non è la spiegazione del perché non ci sia rottura di CP forte in natura.

Il campo di gauge è dato dai link e conserva la simmetria di colore [r].

**Simulazione.** Si simula la teoria Yang–Mills `ym1.c` senza fermioni. Per informazioni leggere sia `README` globale che quello specifico.

Il programma utilizza il protocollo MPI. Modernamente i computer presentano più core, delle unità computazionali. Ogni core può funzionare in modo indipendente. Tutti i programmi di QCD utilizzano la vettorizzazione SIMD, single instruction multiple data. Per ogni struttura parallela si ha il core di rank 0 cioè il master. Il reticolo è diviso in blocchi e per sfruttare la parallelizzazione si mappa ogni blocco ad un core. Nelle equazioni di Dirac e di pura gauge, le placchette di Wilson possono trovarsi nel limite tra un blocco ed il successivo, per questo i core devono passarsi dei messaggi. Ad esempio, il prodotto scalare

$$\sum_x \psi^\dagger(x) \psi(x)$$

Si può parallelizzare in modo banale poiché l'operazione elementare è locale. Una volta fatte le somme locali esse si sommano nel core master.

I link delle placchette sono divise equamente tra un blocco e l'altro. Di solito si copiano i link necessari di calcolare le placchette ricordando che la trasmissione di dati è più costoso delle operazioni [r]. Per calcolare l'azione si calcolano le placchette, ogni nodo calcola le placchette, fa la traccia e si mandano al master che deve fare il Metropolis.

Si simula una teoria su un reticolo di  $6^4 \cdot 6^4$ .

I parametri di input sono in `run_Q/ym1_12.in`. Il parametro

$$\beta = \frac{2N_C}{g^2} = \frac{6}{g^2}$$

fissa il passo reticolare. Le condizioni al bordo sono periodiche.

Nella categoria `MD trajectories` si ha l'analogo degli sweep: si cambia un link alla volta. Si specificano quanti sweep di termalizzazione si fanno `nth`. Il numero di sweep fatti sono `ntr`. Per ogni sweep misurare costa tanto, quindi non si binna: ogni `dtrmssimisura`. Inoltre, ogni `dtr_cnfgs` si salva la configurazione su disco (da intendere come checkpoint in caso di disastri).

La simulazione dev'essere calcolata in un nodo particolare fatto da `run_wilson` che utilizza il file `macchina`. Si fanno tre run, due a 12 e uno a 16.