

# Theoretical Physics II

Maso\*

3 dicembre 2023

## Indice

<b>I</b>	<b>Correzioni radiative</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Scattering con un campo esterno</b>	<b>1</b>
1.1	Bremsstrahlung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Divergenza ultravioletta</b>	<b>7</b>
2.1	Correzioni radiative . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Spin dei campi</b>	<b>12</b>
3.1	Fermioni . . . . .	12
3.2	Fotoni . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Correzioni</b>	<b>16</b>
4.1	Polarizzazione del vuoto . . . . .	16
4.2	Auto-energia dell'elettrone . . . . .	18
4.3	Vertice elettromagnetico . . . . .	20
4.4	Applicazione . . . . .	21
4.5	Identità di Ward . . . . .	22
4.6	Linee esterne . . . . .	23

## Lezione 1

[r] cambiare carica  $q$  con  $Q$

mer 22 nov  
2023 10:30

## Parte I

# Correzioni radiative

## 1 Scattering con un campo esterno

Si studia lo scattering con un campo esterno, cioè un campo statico. Si considera un campo generato da una sorgente massiva che non è influenzata dallo scattering. Infatti, per il principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta v \sim \frac{1}{M}$$

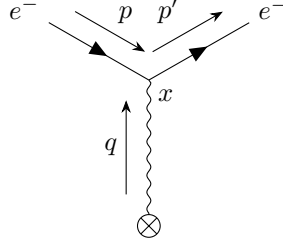
se la sorgente ha una grande massa, allora il suo spostamento è nullo. Sperimentalmente, tale situazione corrisponde allo scattering elettrone-nucleo. Il campo del fotone si può scomporre in una parte trasversa (cioè i fotoni reali) ed una parte statica

$$A^\mu(x) = A_{\text{quant.}}^\mu(x) + A_{\text{clas.}}^\mu(x)$$

---

\*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

La sorgente statica si rappresenta con una croce



Questo diagramma al primo ordine è permesso, a differenza di quelli incontrati in precedenza. Infatti, per questi non si può conservare il quadri-momento perché il fotone considerato è reale, on-shell con  $k^\mu k_\mu = 0$ . In questo caso, il fotone è off-shell e non rispetta la legge di dispersione di Einstein. Esso ha un momento che la sorgente statica può assorbire o fornire senza muoversi. Questo implica che la sorgente è indipendente dal tempo e viene a mancare l'invarianza per traslazione perché la sorgente ha posizione fissa.

Nel diagramma sopra si ha solamente la parte classica del campo elettromagnetico poiché non sono presenti fotoni reali, trasversi. Pertanto, il prim'ordine della matrice di scattering è

$$S^{(1)} = -iq \int d^4x \bar{\psi}^{(-)}(x) A_{\text{cl}}^\mu(x) \psi^{(+)}(x), \quad A_{\text{cl}}^\mu(x) = \left( \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0} \right)$$

cioè il campo elettrostatico di Coulomb, con  $e > 0$  carica elementare. Si comprende già che l'energia è conservata, ma non il momento. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= \langle 0 | c(\mathbf{p}') (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) : c^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) e^{-i(p-p')_\mu x^\mu} \\ &= 2\pi \left[ \frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{q}) \delta(E - E') \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ . In assenza della sorgente statica, i propagatori sono tutti invarianti per traslazioni spaziali e temporali, ma ora il campo del fotone dipende dalla posizione. Alla seconda riga la parte temporale fornisce la conservazione dell'energia tramite una delta, mentre la parte spaziale dà la trasformata di Fourier del campo. Non si ha più l'invarianza per traslazione spaziale perché si è fissata la sorgente. Il momento non si conserva: la sorgente assorbe momento senza muoversi, una particella che fa scattering cambia direzione. Il modulo del momento, cioè l'energia, è ancora conservata poiché si ha invarianza per traslazione temporale.

Si aggiunge un'altra regola di Feynman. Ogni volta che appare uno scattering con un campo esterno statico si ha un termine

$$A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{q}) \quad \alpha \quad \overleftarrow{q} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \otimes$$

mentre nell'elemento di matrice si sostituisce

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \rightarrow (2\pi) \delta(E_f - E_i)$$

**Sezione d'urto.** La sezione d'urto nell'angolo di scattering dell'elettrone uscente è la formula di scattering di Mott:

$$\begin{aligned}
 d_{\Omega'} \sigma &= \frac{1}{2} m^2 \frac{(2\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \sum_{rs} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \frac{(\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr}[(\mathbf{p}' + m) \gamma^0 (\mathbf{p} + m) \gamma_0] \\
 &= \frac{2(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \\
 &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta + m^2) = \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [2m^2 + |\mathbf{p}|^2 (1 + \cos \theta)] \\
 &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 2m^2 + 2|\mathbf{p}|^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ E^2 - |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 &= \frac{(\alpha Z)^2 E^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 \beta^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E}
 \end{aligned}$$

Si noti che la sezione d'urto include il numero atomico dell'atomo considerato. Poiché si utilizza la teoria delle perturbazioni, per elementi pesanti bisogna porre attenzione al prodotto  $\alpha Z$ . Alla seconda riga si è applicato

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma}]$$

alla terza riga si è applicato

$$E = E' \implies |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Il primo addendo della sezione d'urto è pari alla sezione d'urto Rutherford: lo scattering di particelle alfa su atomi di oro. Il termine ulteriore compare perché si è calcolato lo scattering per fermioni e deriva dall'effetto dello spin. Nel limite non relativistico  $\beta \rightarrow 0$  si ottiene Rutherford, tuttavia si è utilizzata la teoria delle perturbazioni per ottenere il risultato. Se il numero atomico  $Z$  è grande, lo sviluppo perturbativo può essere inaffidabile. Infatti, la formula di Mott non è sperimentalmente affidabile per  $Z \gtrsim 40$ . Ciononostante, il problema a due corpi si risolve analiticamente e la sezione d'urto esatta corrisponde a quella trovata con lo sviluppo perturbativo. Per il problema Coulombiano, nel limite non relativistico, tutti gli ordini superiori si riducono ad una fase<sup>1</sup>. Pertanto, l'ordine  $\alpha^2$  è esatto.

La formula sopra si può ritrovare anche in astrodinamica con il problema Kepleriano a due corpi: questo è il caso delle orbite iperboliche.

Per studiare una zona di dimensione spaziale  $\Delta x$ , il momento necessario è  $(\Delta x)^{-1}$ . Quando il parametro di impatto è grande, il momento trasferito è piccolo, e viceversa. Infatti, il seno al denominatore deriva dal momento trasferito  $|\mathbf{q}|$  cioè il denominatore del campo di Coulomb pari alla trasformata di Fourier di  $r^{-1}$ .

Per angoli piccoli, la sezione d'urto diverge a causa del seno. Infatti

$$\sigma = \int d(\cos \theta) d\varphi d_{\Omega} \sigma \sim \int \theta d\theta d_{\Omega} \sigma = \int \frac{d\theta^2}{\theta^4} \rightarrow \infty$$

Tuttavia, si dev'essere commesso un errore: l'esperimento di Rutherford vide una distribuzione ragionevole di atomi di elio, senza evidenze di una divergenza della sezione d'urto. Lo scattering di una particella su un nucleo è definito dal parametro  $b$  di impatto cioè quanto la traiettoria dista dal nucleo (cioè la distanza dal nucleo nel piano perpendicolare alla direzione del moto). Il campo di Coulomb è un campo a lungo raggio, va come  $\frac{1}{r}$ : non si annulla abbastanza rapidamente ad infinito. Questo è uno dei problemi da cui deriva la patologia del campo elettromagnetico. Il nucleo causa scattering per un parametro di impatto pari circa al raggio di Bohr. Per grandi parametri di impatto, il nucleo viene schermato dagli elettroni, cosa che non si è considerata nel calcolo precedente. Si è commesso un errore fondamentale: ipotizzare l'esistenza di una sorgente senza nulla intorno. Questo è analogo a quanto si è già accennato trattando dell'elettrone bare.

<sup>1</sup>Si veda Dalitz Richard Henry. 1951. On higher Born approximations in potential scattering. *Proc. R. Soc. Lond. A* **206**:509–520. <http://doi.org/10.1098/rspa.1951.0085>.

Per risolvere il problema, si utilizza il (energia) potenziale di Yukawa, cioè un campo smorzato

$$V_Y = -\frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x}|}e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a_0}}$$

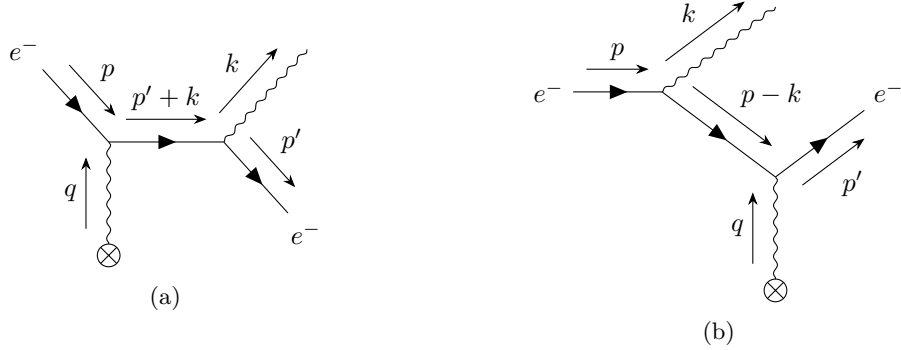
dove  $a_0$  è il raggio di Bohr. La divergenza trovata è causata da una cattiva definizione del problema.

### 1.1 Bremsstrahlung

Si studia la radiazione emessa a causa della decelerazione di una particella carica. Si aggiunge un fotone reale allo scattering con un campo esterno

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma$$

I diagrammi corrispondenti sono dati da



dove  $q = p' + k - p$ . Nel primo diagramma il propagatore del fermione porta momento  $p' + k$ , mentre nel secondo diagramma porta  $p - k$ . In questo caso si hanno entrambi i contributi della parte trasversa e della parte classica del campo del fotone. Il second'ordine della matrice di scattering è

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-iq)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \gamma^\mu (A_\mu^T + A_\mu^{cl}) \psi :_x : \bar{\psi} \gamma^\nu (A_\nu^T + A_\nu^{cl}) \psi :_y \} \\ &= (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^T)^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^{cl})^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \\ &\quad + (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^{cl})^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^T)^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \end{aligned}$$

La seconda riga corrisponde al primo diagramma, mentre la terza riga al secondo diagramma. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (2\pi) \delta(E' + \omega - E) \prod_i N_i \left[ \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{i}{\not{p}' + \not{k} - m} (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

La sezione d'urto esatta è quella di Bethe-Heitler (v. Itzykson e Zuber, p. 240).

**Fotone soffice.** Si opera l'approssimazione di fotone soffice, cioè l'energia del fotone è molto minore di quella dell'elettrone che l'ha emesso

$$\mathbf{k} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}', \quad \omega \ll E, E', \quad |\mathbf{p}| \approx |\mathbf{p}'|$$

L'ultima relazione porta allo scattering elastico. Infatti, lo scattering sopra è detto anelastico. Dunque, il termine del primo diagramma diventa

$$\begin{aligned} I &= \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \\ &\approx \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Nel limite di  $k$  piccolo, la frazione porta ad una divergenza infrarossa, diversa da quelle sospettate per l'auto-energia e la polarizzazione del vuoto (cioè divergenze ultraviolette). Applicando l'anti-commutatore delle matrici di Dirac

$$\not{\epsilon}(\not{p}' + m) = (-\not{p}' + m)\not{\epsilon} + 2\varepsilon^\mu p'_\mu$$

e noto che  $\bar{u}$  soddisfa l'equazione di Dirac poiché riguarda una particella reale, si ottiene

$$I = \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{p'_\nu k^\nu} \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p})$$

cioè un termine proporzionale a quello dello scattering elastico precedente.

Le ampiezze di Feynman per i due diagrammi sono

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{k^\nu p'_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \\ \mathcal{M}_b &= -i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p_\mu}{k^\nu p_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

Nella parentesi è presente l'ampiezza dello scattering elastico. Questo è un primo esempio di fattorizzazione: lo scattering elastico viene fattorizzato. Il tasso di transizione è il tasso dello scattering elastico per il tasso di emettere un fotone.

L'elemento di matrice di transizione è

$$S_{fi} = (2\pi) \delta(E' - E) \frac{m}{EV} (-iq^2) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]$$

Sommando sulle polarizzazioni finali del fotone, la sezione d'urto è

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elastico}} \frac{q^2}{2\omega V} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V \\ &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elas}} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \sum_{\text{pol}} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{\omega} \end{aligned}$$

si nota che l'ampiezza in parentesi è invariante di gauge: infatti basta sostituire  $\varepsilon' = \varepsilon - ikf$  e ricordare che  $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$ . Anche la sezione d'urto esatta è invariante di gauge. La probabilità di bremsstrahlung è il prodotto della probabilità di scattering elastico e della probabilità di emettere un fotone.

Il termine in parentesi si può riscrivere come

$$\left[ \frac{\varepsilon_r^\mu p'_\mu}{kp'} - \frac{\varepsilon_r^\mu p_\mu}{kp} \right] \left[ \frac{\varepsilon_s^\nu p'_\nu}{kp'} - \frac{\varepsilon_s^\nu p_\nu}{kp} \right] = \varepsilon_r^\mu \varepsilon_s^\nu \left[ \frac{p'_\mu p'_\nu}{(kp')^2} - \frac{p'_\mu p_\nu}{(kp')(kp)} - \frac{p_\mu p'_\nu}{(kp)(kp')} + \frac{p_\mu p_\nu}{(kp)^2} \right]$$

Ricordando che

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_\mu^r \varepsilon_\nu^r = -\eta_{\mu\nu}$$

la somma sulle polarizzazioni è

$$\sum_{rs} \left[ \frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 = -\frac{p'^2}{(kp)^2} + \frac{2pp'}{(kp)(kp')} - \frac{p^2}{(kp)^2} = -\left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{kp} \right]^2$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale di Bethe-Heitler nel limite di fotone soffice è

$$\begin{aligned} d_{\Omega}\sigma &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-q^2}{2\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk'} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \left[ \frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk'} \right]^2 = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} dP \end{aligned}$$

La parentesi diverge nell'infrarosso cioè per  $k$  piccolo.

## Lezione 2

**Divergenza infrarossa.** La sezione d'urto elastica è di ordine  $\alpha^2$  (si noti che un ordine  $\alpha$  deriva da  $A_{cl}$ ) quindi la sezione d'urto anelastica è di ordine  $\alpha^3$ . Si studia il comportamento, in particolare

gio 23 nov  
2023 10:30

$$dP \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0$$

Questa divergenza è diversa da quella trovata per lo scattering Rutherford. In quel caso, essa è causata da una cattiva definizione del processo che avviene. In questo caso, chiedersi quanti fotoni sono emessi ad energia sempre più piccola è lecito. Bisogna capire la natura di tale divergenza. Inoltre, nell'esperimento di Rutherford non si osserva una crescita a grande parametro di impatto, mentre nella bremsstrahlung si osserva sperimentalmente che i fotoni emessi aumentano al diminuire della loro energia.

Per risolvere il problema, bisogna definire operativamente lo scattering elastico ed anelastico: il primo è uno scattering in cui non si misura alcun fotone emesso. Bisogna porre attenzione al fatto che gli apparati sperimentali hanno una sensibilità limitata. Si deve ridefinire il concetto di scattering elastico tenendo conto di tale sensibilità. Alla probabilità dello scattering elastico

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z$$

bisogna aggiungere anche la probabilità di bremsstrahlung con energia minore di quella minima rivelabile

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega < \omega_{\min}$$

Pertanto lo scattering anelastico è quello per cui il fotone ha un'energia maggiore di quella minima

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega \geq \omega_{\min}$$

Con questa ridefinizione, l'integrale dello scattering anelastico non diverge più

$$dP \sim \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega^3} < \infty$$

Il problema è stato spostato nello scattering elastico. Il punto cruciale è la sensibilità dell'apparato di misura: al di sotto di una certa energia, l'apparato è cieco alla distinzione tra elastico ed anelastico. La divergenza è causata dalla massa nulla del fotone. Considerando una piccola massa  $\lambda$  del fotone, la sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d_{\Omega}\sigma|_{\text{el. sp.}} = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elas}} \left[ 1 + \alpha \ln \frac{\omega_{\min}}{\lambda} \right]$$

Questa regolarizzazione viene spesso utilizzata. Si può modificare una teoria per ottenerne un'altra e può accadere che unendo correttamente i contributi, i termini proporzionali al parametro aggiunto si semplificano. Pertanto, la teoria nel limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  è perfettamente definita. Lo stesso si può fare per una divergenza ultravioletta.

Modificare l'elettrodinamica quantistica porta ad una teoria che viola l'invarianza di gauge, ma in cui la massa del fotone si semplifica e si può fare il limite di massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$  per ottenere l'elettrodinamica non modificata.

Inoltre, poiché l'ordine dello scattering anelastico è  $\alpha^3$  bisogna considerare tutti i termini di tale ordine, non solamente alcuni: mancano i termini di interferenza (i prodotti misti) provenienti dagli ordini superiori. Per aggiungere un ordine  $\alpha$  bisogna anche considerare i diagrammi dello

scattering elastico con tre vertici: quando si calcola il modulo quadro della somma delle ampiezze di Feynman del diagramma ad un vertice e dei diagrammi a tre vertici, compaiono i termini misti di ordine  $\alpha^3$  (e termini di ordine superiore trascurabili). In questo modo, al grafico dello scattering elastico si aggiungono le correzioni virtuali derivanti dalle particelle virtuali. Le correzioni virtuali cancellano la divergenza infrarossa parametrizzata dalla piccola massa del fotone. In questo modo si può fare il limite per massa nulla  $\lambda \rightarrow 0$ . In particolare, il teorema di Bloch–Nordsieck afferma che, per tutti i processi in elettrodinamica quantistica, le divergenze infrarosse si cancellano esattamente ad ogni ordine perturbativo, lasciando solamente le correzioni radiative finite di ordine  $\alpha$  (rispetto all'ordine minore).

La divergenza infrarossa deriva dal fatto che, nel limite  $k \rightarrow 0$ , il propagatore

$$\frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \approx \frac{\not{p}' + m}{2kp'}, \quad k \ll p$$

diverge poiché propaga un fermione con momento di un fermione reale. Aggiungendo una massa  $\Lambda$  si mantiene la particella virtuale lontano dal mass shell.

## 2 Divergenza ultravioletta

Finora si sono studiati i diagrammi albero cioè diagramma in cui non appaiono loop. Le correzioni radiative appaiono sempre ad ordini superiori dello sviluppo perturbativo. Si noti che le discussioni valgono a stati iniziale e finale fissati. Come prototipi si utilizzano i diagrammi di scattering con un campo esterno e di scattering Compton.

Nella lagrangiana del campo di Dirac in interazione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - q_0\bar{\psi}\not{A}\psi$$

sono presenti i parametri bare  $m_0$  ed  $q_0$ . Le misure sperimentali riguardano la massa  $m$  e la carica  $q$  fisiche, in particolare la carica bare più tutte le auto-interazioni. La carica bare non si può misurare. La relazione tra i parametri effettivi ed i parametri bare non si può misurare perché bisogna sempre considerare il campo elettromagnetico. Questa discussione è simile a trattare il campo elettrico nei materiali  $\mathbf{D}$  aggiungendo la polarizzazione  $\mathbf{P}$  al campo elettrico nel vuoto  $\mathbf{E}$ . In un materiale, si misura il campo elettrico  $\mathbf{D}$ . La relazione tra i due campi è una costante di proporzionalità. In teoria dei campi, la differenza tra la carica bare e quella fisica è infinita. Passare dalla teoria libera alla teoria in interazione ridefinisce i parametri introdotti nella lagrangiana libera e si studia tale ridefinizione.

I diagrammi divergenti nell'ultravioletto sono l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Il procedimento da seguire è

- isolare gli infiniti modificando la teoria tramite la regolarizzazione, se ne esiste un numero infinito, la teoria ha un utilizzo limitato;
- calcolare le relazioni tra parametri bare e fisici;
- ritornare alla teoria originaria, ma ora senza infiniti.

La procedura, se possibile, implica che la teoria è rinormalizzabile. Una teoria non rinormalizzabile può essere una teoria efficace, cioè corretta fino ad un certo ordine, agli ordini superiori compare sempre un nuovo infinito e si ha bisogno di una nuova costante di rinormalizzazione.

Il Modello Standard è un'unica teoria rinormalizzabile tramite il metodo funzionale (che è diverso dal modo perturbativo presentato), ma è comunque incompleto.

### 2.1 Correzioni radiative

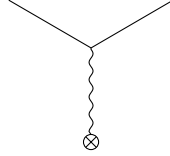
L'ampiezza di Feynman associata al diagramma di scattering con un campo esterno è

$$\mathcal{M}' = -iq_0\bar{u}(\mathbf{p}')\not{A}_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})u(\mathbf{p})$$

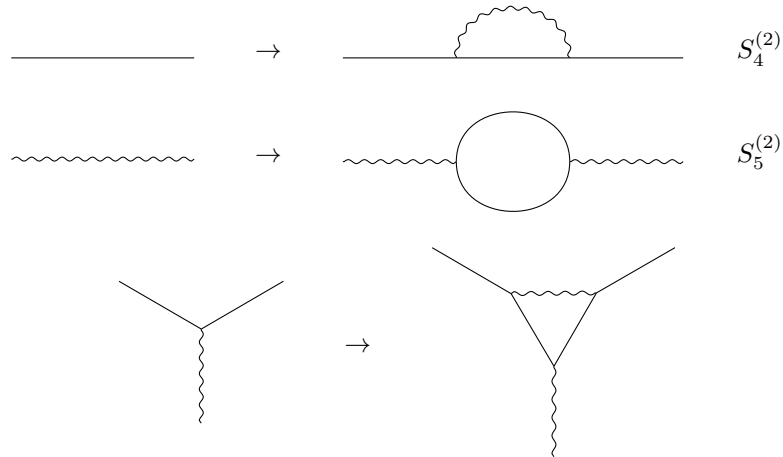
dove si considerano i parametri bare  $q_0$  ed  $m_0$ . Non si considera la parte quantizzata del campo del fotone poiché non sono presenti fotoni negli stati iniziale e finale. La matrice di scattering è

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iq_0)^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} A_{\text{cl}} \psi :_{x_1} : \bar{\psi} A \psi :_{x_2} \cdots : \bar{\psi} A \psi :_{x_n} \}$$

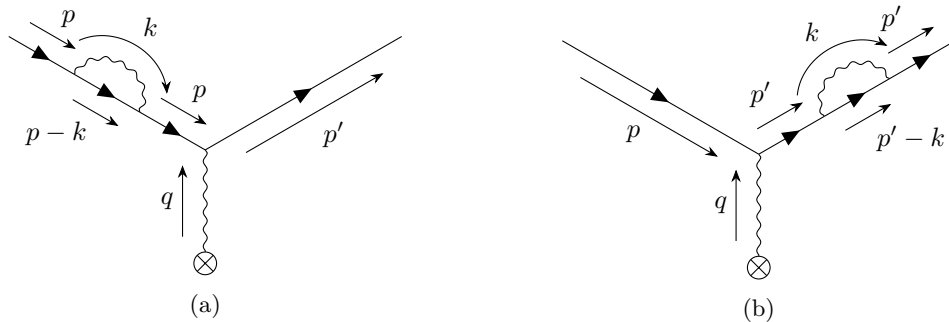
dove il campo senza pedice è il solo campo quantizzato  $A \equiv A^T \equiv A_{\text{quant}}$ . Si considera un solo campo classico perché si ipotizza essere debole e dunque soppresso agli ordini superiori. Si vedono i diagrammi dello sviluppo. Al prim'ordine  $n = 1$  è presente solo il campo classico



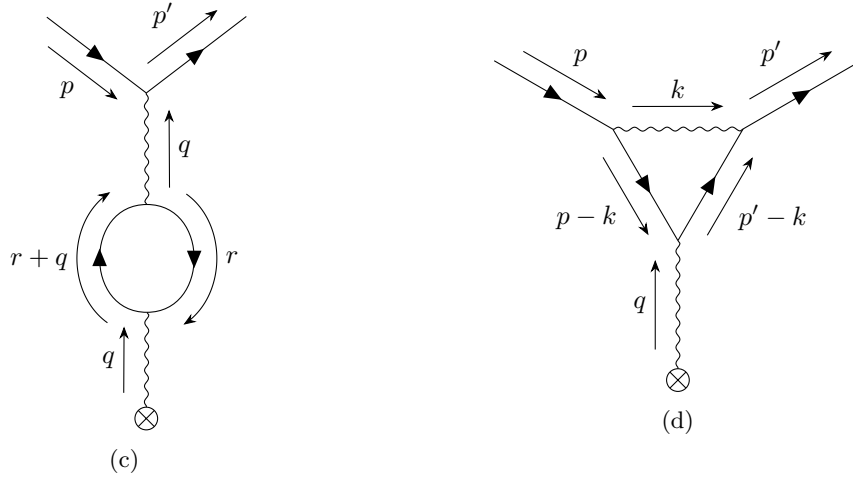
Al second'ordine  $n = 2$  si ha la bremsstrahlung: il campo  $A$  ha anche la parte quantizzata che descrive i fotoni reali. Al terzo ordine  $n = 3$  ci sono le correzioni radiative: l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Per ottenere i grafici corrispondenti, bisogna operare le sostituzioni seguenti



Pertanto si ha







dove  $q = p' - p$ . Questi sono gli unici diagrammi possibili al terzo ordine. In tutti è presente un integrale che potrebbe divergere. Le ampiezze di Feynman corrispondenti sono

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu] u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_b &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\nu] iS_F(p') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_c &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) iD_F^{\mu\nu}(q) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r [\gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r)] A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_d &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [\gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)] u(\mathbf{p}) A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\end{aligned}$$

dove si pone

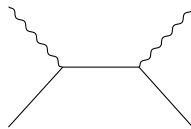
$$\begin{aligned}iq_0^2 \Sigma(p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu \\ iq_0^2 \Pi_{\nu\rho}(q) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r \gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r) \\ q_0^2 \Lambda_\rho(p', p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)\end{aligned}$$

cioè le funzioni di auto-energia, di polarizzazione del vuoto e di correzione al vertice. Si studia il limite ultravioletto, cioè  $k \rightarrow \infty$ . I termini sopra vanno come

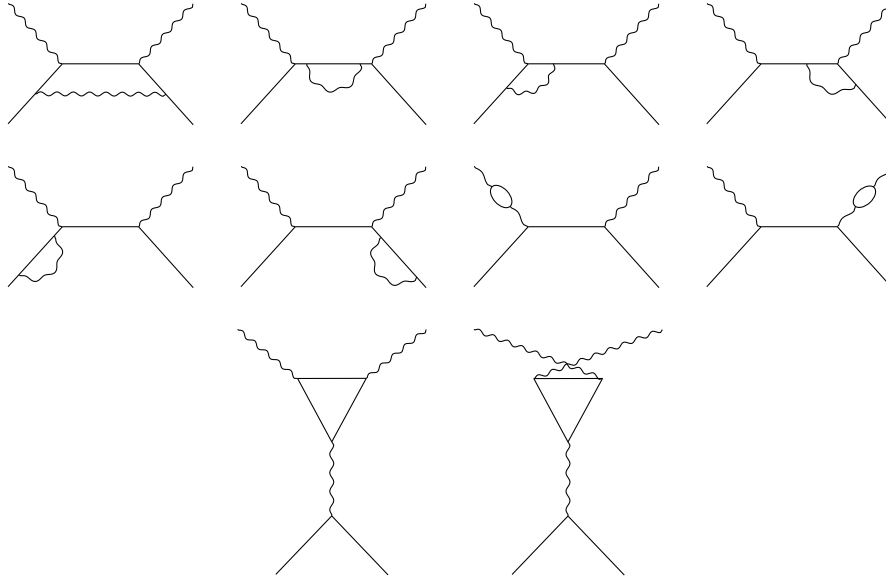
$$\Sigma \sim \int dk, \quad \Pi \sim \int dr r, \quad \Lambda \sim \ln k$$

I propagatori sono fattori di convergenza, ma non ne sono presenti abbastanza. In elettrodinamica quantistica, questi sono i soli diagrammi divergenti.

**Classificazione dei diagrammi.** Capiti i diagrammi con loop, si studiano i diagrammi in modo dettagliato con l'aggiunta delle correzioni radiative nel caso dello scattering Compton. Al diagramma albero



si aggiungono le correzioni sopra per ottenere parte dei seguenti diagrammi:



Si noti che il primo diagramma e gli ultimi due non si possono ottenere aggiungendo le correzioni.

Nel primo diagramma, l'elettrone entrante interagisce con quello finale tramite un fotone virtuale. Gli ultimi due diagrammi si possono trattare tramite il teorema di Furry: tutti i diagrammi che contengono un loop fermionico con un numero dispari di vertici si sommano a zero. Intuitivamente, l'ultimo diagramma, tramite la simmetria di crossing della matrice di scattering, si può far diventare il penultimo, ma con un segno negativo e dunque i due si cancellano.

Si vogliono studiare le classi di diagrammi. Evitando di considerare gli ultimi due diagrammi, il primo diagramma è diverso da tutti gli altri poiché è one-particle irreducible (1PI), mentre gli altri sono one-particle reducible (1PR). Per ottenere un tale diagramma si può usare un diagramma di ordine inferiore e aggiungere una delle tre correzioni sopra. I diagrammi one-particle reducible sono utili perché dal diagramma albero si possono ottenere le correzioni all'ordine superiore. I diagrammi nella seconda riga correggono le particelle fisiche e questo significa rinormalizzare la funzione d'onda.

**Correzioni.** Il propagatore del fermione si corregge aggiungendo l'auto-energia

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

le cui linee corrispondenti sono



Si vuole costruire un diagramma scheletro. Si inserisce un rettangolo che indica il propagatore corretto fino ad un ordine stabilito. Si modifica la teoria ed un propagatore, come quello del fotone

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = -\frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \sim -\frac{\Lambda^2}{k^4}, \quad k \rightarrow \infty$$

Si introduce un cut-off. Nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  compare nuovamente la divergenza dell'integrale. In questo modo si è aumentata la potenza a denominatore di modo che l'integrale sia convergente. Secondo la regolarizzazione di Pauli-Villars, il propagatore corretto si può intendere come una particella con massa  $\Lambda$ , sebbene abbia un segno negativo. In questo modo l'integrale converge e se il risultato non dipende dal cut-off  $\Lambda$  allora nel limite ultravioletto si ottiene la teoria originaria. Questa regolarizzazione si può fare per l'elettrodinamica quantistica, ma per altre teorie non è possibile.

Il grado di divergenza degli integrali nei diagrammi di Feynman è

$$D = 4 - I_F - 2I_B$$

dove  $I_j$  indica il numero di propagatori di fermioni F e di bosoni B, cioè i fattori convergenza. Se il grado di divergenza superficiale è  $D < 0$  allora l'integrale converge, se  $D > 0$  allora diverge. Se  $D = 0$ , allora diverge logicamente. Questo grado di divergenza è superficiale perché si basa sul power-counting. Altre condizioni, come le simmetrie e cancellazioni, possono cambiare il grado di divergenza superficiale. In particolare si vede che i diagrammi sopra hanno solo divergenza logaritmica.

Il cut-off rompe l'invarianza di gauge, cioè il gruppo di simmetria locale  $U(1)$ , e questo complica un poco la teoria. Per il Modello Standard, la teoria si complica molto di più e bisogna utilizzare la regolarizzazione dimensionale passando a  $4 - \varepsilon$  dimensioni ottenendo integrali convergenti. Infatti, il caso peggiore  $D = 0$  diventa negativo di poco e si prolungano analiticamente gli integrali in un numero reale di dimensioni, cioè  $4 - \varepsilon$ . Le singolarità vanno come  $\varepsilon^{-1}$ , si rinormalizza la teoria, i termini dipendenti da  $\varepsilon$  si semplificano e si può ritornare alla teoria originaria. La regolarizzazione dimensionale non rompe l'invarianza di gauge.

### Lezione 3

lun 27 nov  
2023 10:30

Si possono utilizzare vari metodi per la rinormalizzazione.

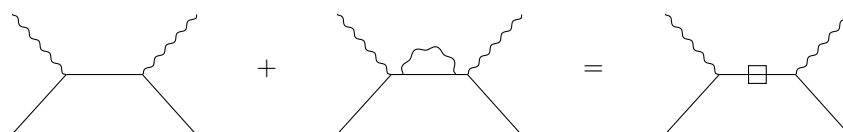
- La regolarizzazione permette di isolare gli infiniti. Si rinormalizza la teoria capendo se gli infiniti si possono assorbire in una ridefinizione della massa e della costante di accoppiamento liberi di modo che nessuna osservabile dipenda dalla regolarizzazione utilizzata. In tal caso, il limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  del cut-off ultravioletto è ben definito.
- La regolarizzazione dimensionale considera  $4 - \varepsilon$  dimensioni e si procede come detto sopra.
- Un altro metodo utilizza l'integrale sui cammini (path integral) di Feynman. In meccanica classica, due punti sono connessi da traiettorie e le equazioni del moto corrispondono alla traiettoria che minimizza l'azione  $S$ . Con l'integrale dei cammini, ad ogni traiettoria viene dato un peso  $e^{-\frac{i}{\hbar}S}$  e la traiettoria delle equazioni del moto è data dalla somma di tutte le possibili traiettorie (v. Feynman e Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals). L'integrale sui cammini permette utilizzare le tecniche numeriche. Infatti, per definire una teoria di campo si è partiti da un volume finito  $V$  ed un passo reticolare  $a$  in modo che i gradi di libertà siano un numero finito e numerabile (si ha invarianza di gauge, ma non più simmetria continua di traslazione e rotazione). Nel limite di volume infinito e passo infinitesimo si ottiene la teoria del continuo. Questo metodo non è perturbativo, quindi considera ogni diagramma, e si può utilizzare un calcolatore. La formulazione con l'integrale dei cammini è equivalente alla meccanica quantistica di Schrödinger. Questo metodo si può usare anche per le interazioni forti per cui lo sviluppo perturbativo non funziona sempre. Tuttavia, il limite al continuo  $a \rightarrow 0$  può essere complicato.

Non tutti i metodi di regolarizzazione sono coerenti con le simmetrie del sistema, come il taglio ultravioletto o la massa del fotone che rompe la simmetria di gauge.

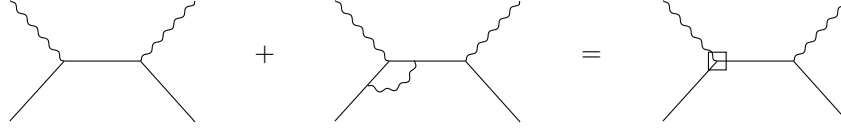
Osservando che ad un certo ordine si può aggiungere qualsiasi ordine superiore perché tanto viene tralasciato, si possono riscrivere le somme dei diagrammi in modo accorto. I diagrammi one-particle reducible sono divergenti e la loro somma si può scrivere come

$$q^2(1 + a + b + c + d + e + f + g) + o(q^4) = q^2(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e)(1 + f)(1 + g)$$

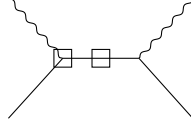
dove l'unità indica il diagramma Compton senza correzioni e le lettere sono le correzioni di ordine  $q^2$  aggiunte al diagramma albero. Il propagatore bare del fermione diventa il propagatore corretto  $iS_F^{\text{cor}}$  all'ordine  $q^4$ . Quindi il fattore  $(1 + a)$  è dato dal diagramma



Si conserva la struttura del diagramma originario: nel propagatore intermedio è presente la versione corretta. Al vertice elettromagnetico viene inserita la correzione al vertice  $(1 + b)$ :



Il vertice bare diventa il vertice corretto  $-iq(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu$ . Unendo le due correzioni sopra si ha

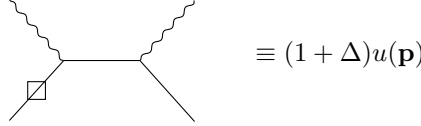


per cui si ottiene

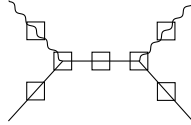
$$i(S_F + \Delta S_F)(-iq)(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu = iS_F(-iq)\gamma_\mu + i\Delta S_F(-iq)\gamma_\mu + iS_F(-iq)\Lambda_\mu + o(q^4)$$

L'addendo dato dal prodotto delle due correzioni è di ordine  $q^6$ .

Anche le particelle fisiche sentono il proprio campo elettromagnetico, pertanto



In conclusione, dal diagramma albero iniziale, si sommano tutti i diagrammi one-particle reducible ottenendo il diagramma scheletro



Si conserva la struttura del diagramma ricordando che in ogni quadrato è presente la correzione radiativa all'ordine desiderato. Si calcolano tutte le correzioni e si vede che in ognuna si sostituiscono i parametri bare con quelli sperimentalmente misurati e la tecnica di regolarizzazione non appare più.

Rimane ancora un diagramma one-particle irreducible, ma il suo integrale è convergente  $D = -1$ . Il diagramma scheletro si calcola dai diagrammi one-particle reducible, ma il calcolo dell'ampiezza di Feynman è fatto con tutti i diagrammi. La procedura è la seguente: i diagrammi one-particle reducible si sommano nel diagramma scheletro, si sostituiscono i parametri liberi con quelli fisici (ad esempio presi dalle tavole di Rosenfeld) e si aggiungono i diagrammi one-particle irreducible che sono convergenti. Questo vale in elettrodinamica quantistica, solo i diagrammi one-particle reducible divergono. Lo stesso non si può dire per la teoria dell'interazione debole di Fermi.

### 3 Spin dei campi

Si studia in modo rigoroso lo spin di un fermione di Dirac e di un fotone tramite il tensore momento angolare.

#### 3.1 Fermioni

Il campo di Dirac si trasforma in modo infinitesimo come

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \psi(x) - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}(\Delta\omega)_{\mu\nu}\psi(x) \\ \psi'_\alpha(x') &= \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\Delta\omega)_{\mu\nu}S^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\right]\psi_\beta(x), \quad S^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

dove  $\mu\nu$  sono gli indici spazio-temporale, mentre  $\alpha\beta$  sono gli indici spinoriali. Le quantità  $(\Delta\omega)_{\mu\nu}$  e  $S^{\mu\nu}$  sono anti-simmetriche. Studiando l'invarianza della densità di lagrangiana per rotazioni (v. Fisica Teorica I, §Teorema di Noether) si ha la conservazione del tensore momento angolare

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu} = \int d^3x [(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) + \pi_r S_r^{\mu\nu} \psi_s]$$

dove  $T$  è il tensore energia-impulso. Ricordando che

$$\pi_r = \partial_{\dot{\psi}_r} \mathcal{L} = i\hbar \psi_r^\dagger$$

il tensore energia-impulso è dato da

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \psi_r} \mathcal{L} \partial^\nu \psi_r - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad T^{0i} = i\hbar \psi^\dagger \partial^i \psi$$

Si considerano le componenti spaziali del tensore momento angolare

$$\mathbf{M} = \int d^3x \psi^\dagger [\mathbf{x} \times (-i\hbar \nabla)] \psi + i\hbar \psi^\dagger \left[ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right] \psi$$

La prima parentesi si può identificare con il momento angolare orbitale, mentre il secondo addendo si identifica con lo spin poiché è indipendente dalle coordinate. L'operatore spin non è conservato perché  $\boldsymbol{\sigma}$  non commuta con l'hamiltoniana. La quantità conservata è l'elicità

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p})$$

Si calcola l'operatore di spin longitudinale, cioè l'operatore di elicità per uno spinore

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}} &= \frac{\hbar}{2} \int d^3x : \psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi : = \text{Fourier} \\ &= \frac{\hbar}{2} \int d^3p [c_1^\dagger(\mathbf{p}) c_1(\mathbf{p}) - c_2^\dagger(\mathbf{p}) c_2(\mathbf{p}) - d_1^\dagger(\mathbf{p}) d_1(\mathbf{p}) + d_2^\dagger(\mathbf{p}) d_2(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

[r] Dunque

$$S_{\mathbf{p}} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Un fermione è auto-stato dell'operatore di elicità con spin up  $r = 1$  e spin down  $r = 2$ . Similmente, l'anti-fermione corrispondente è auto-stato dell'operatore di elicità.

### 3.2 Fotoni

Si veda Jackson, §11.7 e Maggiore, "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", §§2.3, 4.3.1.

**Generatori del gruppo di Lorentz.** Si considerino le trasformazioni di Lorentz  $\Lambda$  definite da

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

La trasformazione infinitesima è

$$\Lambda_\varepsilon = \eta + \varepsilon L \implies \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta + \varepsilon L)^n = e^{\omega L}, \quad \omega = n\varepsilon$$

Inoltre

$$(\eta L)^\top = -\eta L \implies L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

La prima riga e la prima colonna sono boost, mentre la sotto-matrice  $3 \times 3$  descrive le rotazioni. Si introducono i generatori delle rotazioni

$$J_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

così come i generatori dei boost

$$K_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I loro commutatori sono

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Le trasformazioni di Lorentz finite derivano dall'esponenziale delle matrici sopra. Si raggruppano i generatori del gruppo di Lorentz all'interno di un tensore anti-simmetrico  $J^{\mu\nu}$

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}, \quad J^{0i} = K^i, \quad J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k$$

per ottenere

$$\Lambda = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]$$

Un insieme di  $n$  campi  $\phi^i$  si trasforma nella rappresentazione di dimensione  $n$  del gruppo di Lorentz se

$$\phi'^i = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]^i_j \phi^j$$

## Lezione 4

Si studia come si trasforma un quadri-vettore

mar 28 nov  
2023 10:30

$$\delta v^\mu = \varepsilon^\mu_\nu v^\nu, \quad \delta v^\rho = -\frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma v^\sigma$$

dove  $\rho\sigma$  sono gli indici che mescolano le componenti dei quadri-vettori. Per confronto con i singoli generatori si ha

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)$$

Si vede il caso particolare di una rotazione  $\delta\theta$  attorno all'asse  $z$

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= -\frac{i}{2}[(\delta\omega)_{12}J^{12} + (\delta\omega)_{21}J^{21}]^\mu_\nu x^\nu = -i\delta\theta(J^{12})^\mu_\nu x^\nu = \delta\theta(\eta^{1\mu}\delta^2_\nu - \eta^{2\mu}\delta^1_\nu)x^\nu \\ &= \delta\theta(\eta^{1\mu}x^2 - \eta^{2\mu}x^1) \end{aligned}$$

dove  $J^{12} = J^3$  e alla seconda uguaglianza si ricorda che sia il parametro infinitesimo  $\delta\omega$  che i generatori  $J$  sono anti-simmetrici. Pertanto

$$\delta x^1 = -x^2 \delta\theta, \quad \delta x^2 = x^1 \delta\theta, \quad \delta x^3 = \delta x^0 = 0$$

cioè quanto atteso. Un altro caso è il boost  $\delta\beta$  lungo  $x$  per cui si applica  $J^{10}$  e  $J^{01} = K^1$ .

**Spin.** Si ritorna al campo del fotone  $\phi_s = A_\mu$ . Il tensore momento angolare è

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x [(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}) + \pi_r S_r^{\alpha\beta} \phi_s]$$

Si studia il secondo addendo e si specializzano gli indici alle componenti di un quadri-vettore. Conoscendo che la trasformazione di un campo generico e di un quadri-vettore, si ha

$$\delta v^\rho = \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} v_\sigma \implies S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} = -i(J_{\alpha\beta})^{\rho\sigma} = \eta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \eta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma$$

Pertanto

$$\pi_\mu S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} A_\nu = (\eta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \eta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \pi_\mu A_\nu = \pi_\alpha A_\beta - \pi_\beta A_\alpha = (\partial_0 A_\beta) A_\alpha - (\partial_0 A_\alpha) A_\beta$$

dove si utilizza la lagrangiana del campo elettromagnetico libero fissando il gauge di Coulomb e considerando il vuoto  $A_0 = 0$  (v. Maggiore, §3.5.2):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \implies \pi_\mu = \partial_{\partial^0 A^\mu} \mathcal{L} = -\partial_0 A_\mu$$

L'operatore di spin ha solo indici spaziali e presenta tre componenti spaziali poiché è anti-simmetrico. Inserendo lo sviluppo in serie di Fourier del campo del fotone quantizzato in modo non covariante, si ha

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int d^3x : (\partial^0 A^i) A^j - (\partial^0 A^j) A^i : = \text{Fourier} \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\varepsilon_s^i(\mathbf{k}) \varepsilon_r^j(\mathbf{k}) - \varepsilon_r^i(\mathbf{k}) \varepsilon_s^j(\mathbf{k})] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

dove si ripetono i passaggi visti per la quantizzazione dei campi.

Si considera lo spin lungo l'asse  $z$

$$S_{12} = S_3 = S_z = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\delta_s^1 \delta_r^2 - \delta_s^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})$$

con

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

Dunque, applicato ad un fotone si ha

$$S_z a_t^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i \sum_{r=1}^2 [\delta_t^1 \delta_r^2 - \delta_t^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

dove si è utilizzato il commutatore per ottenere la delta che risolve l'integrale e la somma in  $s$ . Pertanto

$$S_3 a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle, \quad S_3 a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = -i a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

Gli stati con polarizzazione lineare non sono auto-stati dello spin. Si considerano gli stati con polarizzazione circolare

$$a_{(\pm)}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^\dagger(\mathbf{q}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{q})]$$

per cui

$$\begin{aligned} S_3 a_{(+)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) + i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = a_{(+)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \\ S_3 a_{(-)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) - i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = -a_{(-)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

cioè essi sono auto-stati. Il fotone ha solo due polarizzazioni possibili  $s = \pm\hbar$ . Una terza polarizzazione non è presente. Questo è coerente con il fatto che il fotone ha massa nulla e la terza possibilità di spin, ortogonale all'asse di quantizzazione, non esiste (conseguenza dell'algebra di Poincaré).

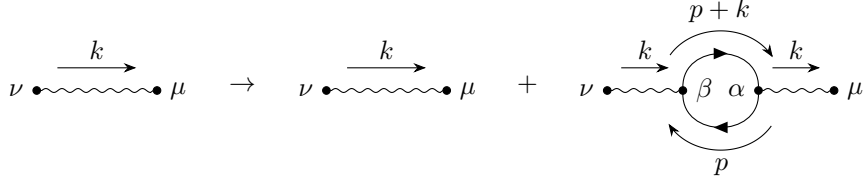
## 4 Correzioni

### 4.1 Polarizzazione del vuoto

Si parte dal propagatore imperturbato e si studia la correzione derivante dalla polarizzazione del vuoto

$$iD_F^{\mu\nu}(k) \rightarrow iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F^{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi_{\alpha\beta}(k) iD_F^{\beta\nu}(k)$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



dove si ha

$$i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \equiv \frac{(-i q_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4 p \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_0}$$

Tramite la divergenza superficiale, l'integrale è divergente al più quadraticamente. Non si calcola esplicitamente il diagramma, ma si immagina di aver già regolarizzato l'integrale al fine di cercare quali sono le divergenze e dove si trovano per poterle riassorbire all'interno di una relazione tra i parametri bare ed i parametri fisici. Si isolano le divergenze, ma non si svolge alcun calcolo.

La teoria è invariante di gauge e si deve avere  $k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} k_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(k) &\propto \int d^4 p \text{Tr} \left[ k_\alpha \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] = \int d^4 p \text{Tr} \left[ \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} (\not{p} - m_0 - \not{p} + m_0 + \not{k}) \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} [(\not{p} + \not{k} - m_0) - (\not{p} - m_0)] \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} [f(\not{p}) \gamma^\beta - f(\not{p} + \not{k}) \gamma^\beta] \end{aligned}$$

alla seconda riga si è utilizzata la ciclicità della traccia, alla terza riga si aggiunge e sottrae uno stesso termine, all'ultima riga  $f$  indica una funzione generica. Traslare  $p$  di una quantità  $k$  all'interno dell'integrale permette di semplificare i due addendi. Se ciò è possibile, allora la regolarizzazione rispetta l'invarianza di gauge. Viceversa, nel caso di un cut-off, l'integrale ha dei limiti di integrazione finiti e la traslazione non permette di ottenere termini identici. Dunque, si immagina che gli integrali siano regolarizzati in modo gauge invariante.

Ci si concentra solamente sulla funzione di polarizzazione del vuoto  $\Pi^{\alpha\beta}$ . Si ipotizza di averlo regolarizzato in modo gauge invariante. Poiché esso è un tensore di tipo 2, si può riscrivere come

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2)$$

dove  $A$  e  $B$  sono due funzioni che divergono quadraticamente in senso superficiale (prima della regolarizzazione, dopo sono quantità finite). Dall'invarianza di gauge segue

$$0 = k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = -k^\beta A(k^2) + k^2 k^\beta B(k^2) \implies A(k^2) = k^2 B(k^2) \implies A(0) = 0$$

Quando la funzione  $\Pi^{\alpha\beta}$  incontra una corrente, ogni termine proporzionale al momento del fotone  $k^\mu$  si semplifica perché accoppiato con la corrente  $J_\mu$ : il termine  $B$  si può ignorare. Lo sviluppo in potenze di  $A$  in termini di  $k^2$  è

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) + o(k^4), \quad A'(0) = A'(k^2 = 0) = \partial_{k^2} A(k^2)|_{k^2=0}$$



dove  $\Pi_c(k^2)$  tende a zero linearmente in  $k^2$  per  $k^2 \rightarrow 0$ . Esprimendo la derivata in termini di  $k$  si ha

$$A' \sim \frac{1}{k} \partial_k \Pi \sim \frac{1}{p^2} \Pi \sim \frac{d^4 p}{p^4}$$

cioè una divergenza logaritmica. L'invarianza di gauge permette di ridurre il grado della divergenza superficiale (questo è dato dal fatto che  $A(0) = 0$ ). Il secondo addendo è una derivata seconda e l'integrale associato è convergente e non dipende dal regolatore

$$\Pi_c(k^2) = k^2 \partial_{k^2}^2 \Pi(0)$$

anche se il power-counting fornisce una divergenza logaritmica? [r].

Sostituendo l'espressione della funzione di polarizzazione del vuoto

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

all'interno del propagatore del fotone si ottiene il propagatore corretto

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \left[ 1 - q_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2} \right] = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)} + o(q_0^2)$$

La costante di accoppiamento  $q_0^2 \ll 1$  è piccola e dunque si aggiungono ordini superiori per scrivere l'espressione in modo più comodo sfruttando l'espansione in serie di Taylor. Il propagatore non corretto ha un polo a  $k^2 = 0$  che corrisponde ad una massa nulla per il fotone. Poiché  $A(0) = 0$ , il polo del fotone corretto è ancora  $k^2 = 0$  e la massa del fotone non subisce correzioni. La massa del fotone non si rinormalizza ad ogni ordine: questa protezione deriva ancora dall'invarianza di gauge. Il termine  $A(k^2)$  non posta il polo del propagatore.

A questo punto si trova una ridefinizione della relazione tra parametri bare e parametri fisici. Si ha

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} [1 - q_0^2 A'(k^2) - q_0^2 \Pi_c(k^2)]$$

Il propagatore si accoppia sempre con la corrente elettromagnetica da entrambi gli estremi, pertanto compaiono le cariche dei fermioni

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 \rightarrow \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^4 \Pi_c(k^2) + o(q^4)$$

La parentesi quadra — che è un termine divergente prima della regolarizzazione — è una correzione alla carica elettrica al secondo ordine dello sviluppo perturbativo in  $\alpha$  e viene detta costante di rinormalizzazione

$$q_0^2 \rightarrow q^2 \equiv q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_3, \quad Z_3 \equiv 1 - q_0^2 A'(0) + o(q_0^2)$$

Il secondo addendo è una correzione finita di cui bisogna tenere conto all'ordine  $\alpha^2$ . Si è trovata la ridefinizione della relazione tra parametro bare e fisico. Pertanto

$$q = Z_3^{\frac{1}{2}} q_0 = q_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) + o(q_0^2) \right]$$

La legge di Coulomb diventa

$$\frac{q_0^2}{r^2} \rightarrow \frac{q_0^2 Z_3}{r^2} = \frac{q^2}{r^2}$$

Inoltre, il propagatore rinormalizzato è

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}(k) \rightarrow iq^2 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu} q^2}{k^2} + \frac{i\eta_{\mu\nu} q^4}{k^2} \Pi_c(k^2) + o(q_0^4) = iq^2 D_{\mu\nu}(k) [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] + o(q_0^4)$$

Questa espressione è quella che corrisponde al diagramma scheletro: si mantiene la struttura, ma con i parametri fisici. Si noti che al secondo addendo, cioè la correzione finita, si può scambiare  $q_0$  con  $q$  perché la differenza è di ordine  $q_0^2$  e dunque rientra negli ordini superiori.

## Lezione 5

 mer 29 nov  
2023 10:30

**Ordini di grandezza.** Regularizzando la teoria tramite un cut-off si ottiene una costante di rinormalizzazione pari a [r] fonte?

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

In questa regularizzazione non si ha più l'invarianza di gauge

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) \neq 0$$

La divergenza logaritmica è una divergenza lenta. Cercando un valore della costante  $Z_3$  apprezzabilmente maggiore di 1 si ha

$$Z_3 = 2 \implies \Lambda \sim e^{\frac{3\pi}{2\alpha}} m \sim 10^{280} m$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg, la lunghezza associata a tale momento è pari a

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \implies \Delta x \sim 10^{-293} \text{ cm}$$

Ad una tale scala non è garantito che la teoria funzioni e che non bisogna tenere conto delle altre interazioni fondamentali.

Ciononostante, rimane il fatto che in una teoria rinormalizzabile, i diagrammi divergenti sono in numero finito e vengono riassorbiti all'interno delle costanti di rinormalizzazione dei parametri. In una teoria non rinormalizzabile, questo non è possibile.

**Massa sperimentale del fotone.** La massa del fotone è legata al campo magnetico di un corpo celeste. Sulla superficie terrestre, il campo magnetico è dell'ordine del gauss. Secondo i geologi, l'origine del campo magnetico è il nucleo della Terra. Come il potenziale di Coulomb cambia aggiungendo una massa al fotone è stato studiato da Fischbach et al.<sup>2</sup>:

$$V = \frac{q}{r} e^{-\mu r}$$

cioè il potenziale di Yukawa. Visto che il campo magnetico sulla superficie non è nullo, la scala di massa è

$$\mu < \frac{\hbar c}{R}, \quad \mu \lesssim \frac{200 \text{ MeV fm}}{10^9 \text{ cm}} \sim \frac{2 \times 10^8 \text{ eV} \cdot 10^{-13} \text{ cm}}{1 \text{ cm}} 10^{-9} \sim 10^{-14} \text{ eV}$$

dove  $R$  è il raggio terrestre. Dunque, la massa del fotone ha un limite superiore. Considerando lo stesso argomento per Giove si ha  $\mu \lesssim 10^{-19} \text{ eV}$ . Anche dal punto di vista sperimentale si ha una conferma che il fotone abbia massa nulla.

## 4.2 Auto-energia dell'elettrone

Esistono altre due rinormalizzazioni della carica oltre  $Z_3$ .

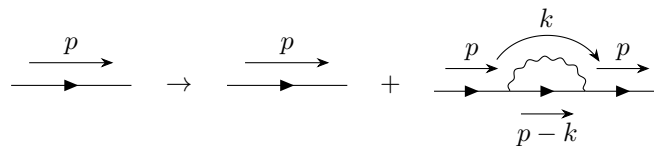
Partendo dal propagatore bare del fermione si passa al propagatore corretto

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

dove

$$i q_0^2 \Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i q_0) \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_0} (-i q_0) \gamma_\nu \frac{-i \eta^{\mu\nu}}{k^2}$$

I cui diagrammi corrispondenti sono



<sup>2</sup>Si veda Fischbach, E., et al. "New geomagnetic limits on the photon mass and on long-range forces coexisting with electromagnetism," in Phys. Rev. Lett., vol. 73, pp. 514-517, 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.514>.

L'integrale diverge nell'infrarosso e nell'ultravioletto. Si considera l'integrale già regolarizzato ad esempio tramite una massa del fotone ed un cut-off. Si isolano le divergenze per capire se è possibile riassorbirle. Il propagatore corretto è

$$iS^{\text{cor}}(p) = i \left[ \frac{1}{\not{p} - m_0} - \frac{1}{\not{p} - m_0} q_0^2 \Sigma(p) \frac{1}{\not{p} - m_0} + o(q_0^2) \right] = \frac{i}{\not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q_0^2)$$

si noti il segno negativo provenire dalla moltiplicazione di due unità immaginarie  $i$ . Si è utilizzata la relazione per due operatori non commutanti

$$(A + B)^{-1} = \left[ A \left( 1 + \frac{1}{A} B \right) \right]^{-1} = \left( 1 + \frac{1}{A} B \right)^{-1} A^{-1} = \left[ 1 - \frac{1}{A} B + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B + \dots \right] \frac{1}{A}$$

dove all'ultima uguaglianza si usa la serie geometrica

$$\frac{1}{1 + M} = 1 - M + M^2 - M^3 + o(M^3)$$

Il propagatore bare ha il polo in  $m_0$ . In precedenza, per l'auto-energia del fotone, l'invarianza di gauge  $A(0) = 0$  protegge dalla rinormalizzazione additiva della massa. In questo caso non si ha alcuna protezione poiché  $\Sigma(0) \neq 0$ . La massa fisica, cioè il polo del propagatore corretto, è

$$m = m_0 + \delta m = m_0 - q_0^2 \Sigma|_{\not{p}=m_0}$$

dove per  $\not{p} = m_0$  si intende  $\not{p}^2 = m_0^2$ , cioè il polo. Al secondo ordine si trova la correzione additiva per la massa.

La funzione di auto-energia  $\Sigma$  opera su uno spazio spinoriale e dunque contiene le matrici di Dirac. Sapendo che

$$(\not{p})^{2n} = p^{2n}, \quad (\not{p})^{2n+1} = \not{p} p^{2n}$$

si sviluppando la funzione in serie di potenze in termini di  $\not{p} - m_0$  per avere

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0) B + (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)$$

Il secondo addendo è la derivata  $B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0)$ . I primi due addendi sono costanti e indipendenti da  $p$ , mentre  $\Sigma_c$  ne dipende, ma converge in quanto dipende da derivate di ordine superiori. Tale addendo dipende da  $\not{p}$ , si azzerà in  $\not{p} = m$  (poiché un fattore  $\not{p} - m$  proviene dallo sviluppo di Taylor) e non dipende dal regolatore perché finito.

Inserendo la forma trovata della funzione  $\Sigma$  all'interno del propagatore corretto, il denominatore è

$$\begin{aligned} \not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p) &= \not{p} - [(m_0 + \delta m) - q_0^2 (\not{p} - m_0) B - q_0^2 (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)] \\ &= (\not{p} - m) [1 + q_0^2 B + q_0^2 \Sigma_c(p)] \end{aligned}$$

dove si ha  $\delta m \propto \Sigma(\not{p} = m_0)$  e si sostituisce  $m = m_0 + \delta m$  a tutti gli ordini poiché agli ordini superiori si commette un errore di ordine  $q_0^2$  che è trascurabile all'ordine desiderato. Pertanto si ottiene

$$iS^{\text{cor}} = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2) = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B] [1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2)$$

dove si utilizza il fatto che  $q_0$  è piccolo e dunque si espande in serie di Taylor. La seconda parentesi è zero quando  $\not{p} = m_0$ , mentre la prima è un termine divergente logicamente (prima della regolarizzazione) che si accoppia con due fotoni fornendo una correzione alla carica elettrica che propaga.

Dunque, finora si è trovato

$$\delta m = -q_0^2 \Sigma(\not{p} = m_0)$$

che diverge logicamente. Inoltre

$$B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0) \sim \int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \ln k, \quad \Sigma_c \sim \partial^2 \Sigma(\not{p} = m_0) < \infty$$

Pertanto, la massa fisica è

$$m = m_0 + \delta m < \infty$$

che è finita ed indipendente dal regolatore.

Nei diagrammi compare il propagatore rinormalizzato

$$iq^2 S^R(p) = q_0^2 iS_F(p)[1 - q_0^2 B][1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq^2 S_F(p)[1 - iq^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4)$$

dove la carica fisica è

$$q^2 = q_0^2[1 - q_0^2 B] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_2, \quad Z_2 = 1 - q_0^2 B + o(q_0^2)$$

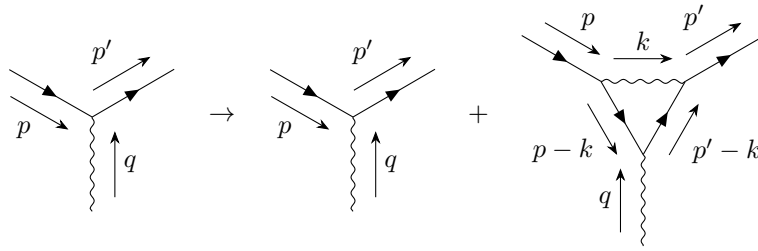
A questo punto si utilizzano i propagatori corretti inserendo le costanti fisiche, ma bisogna calcolare la correzione radiativa finita  $\Sigma_c$ .

### 4.3 Vertice elettromagnetico

Il vertice elettromagnetico diventa

$$-iq_0 \gamma_\mu \rightarrow -iq_0 \gamma_\mu - iq_0^3 \Lambda_\mu(p', p)$$

i cui diagrammi sono



dove  $q = p' - p$  e

$$-iq_0^3 \Lambda^\mu(p, p') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iq_0) \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\beta \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

Esso è logaritmicamente divergente sia nell'infrarosso che nell'ultravioletto. Ancora una volta si considera l'integrale normalizzato.

Nella funzione di auto-energia, un primo termine divergente è dato da  $\Sigma(\not{p} = m)$  cioè la funzione di auto-energia per una particella libera. Similmente, ci si aspetta che il primo termine divergente per la funzione di correzione al vertice  $\Lambda^\mu$  sia quello della particella libera. Si considerino due momenti  $P$  di una particella sul mass shell. Si riscrive

$$p' = P + (p' - P), \quad p = P + (p - P)$$

come pure

$$\Lambda^\mu(p', p) = \Lambda^\mu(P, P) + [\Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(P, P)] \equiv \Lambda^\mu(P, P) + \Lambda_c^\mu(p', p)$$

Il secondo addendo calcolato in  $P$  è nullo  $\Lambda_c^\mu(P, P) = 0$ . La funzione di correzione al vertice appare sempre tra spinori. Si studia il termine di particella libera, la cui forma più generale è

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) = \bar{u}(\mathbf{P}) \left[ a \frac{P^\mu}{m} + b \gamma^\mu \right] u(\mathbf{P})$$

Si utilizza l'identità di Gordon. Sapendo che gli spinori sono on-shell e soddisfano l'equazione di Dirac, si ha

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \implies \not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p} = m\bar{u}(\mathbf{p})$$

moltiplicando per le matrici di Dirac da sinistra e da destra, si ha

$$\gamma^\mu \not{p}u(\mathbf{p}) = m\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu$$

moltiplicando per  $\bar{u}(\mathbf{p})$  e  $\bar{u}(\mathbf{p})$  da sinistra e da destra, si ottiene

$$\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu \not{p} u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

Sommando le due si ha

$$\bar{u}(\mathbf{p})\{\gamma^\mu, \not{p}\}u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}) \implies 2\bar{u}(\mathbf{p})\eta^{\mu\nu}p_\nu u(\mathbf{p}) = 2\bar{u}(\mathbf{p})p^\mu u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

L'identità di Gordon per due momenti diversi è

$$2m\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u(\mathbf{p})$$

Il primo membro è (proporzionale a) la corrente di Dirac, il secondo membro è la somma di una corrente classica e di una corrente di spin. Notando che gli spinori di particella libera  $u$  e  $\bar{u}$  soddisfano l'equazione di Dirac, si può applicare l'identità di Gordon. Da essa segue che i termini  $P^\mu$  e  $\gamma^\mu$  nella decomposizione della funzione  $\Lambda^\mu(P, P)$  sono dipendenti.

## Lezione 6

Pertanto

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

dove  $L$  è una costante scalare divergente che dipende dal regolatore. Dunque la struttura del vertice è

$$\Lambda(P, P') = L\Lambda^\mu(P, P) + \Lambda_c^\mu(P, P')$$

Ricordando che per costruzione vale

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda_c u(\mathbf{P}) = 0$$

Si vuole studiare il comportamento del termine  $\Lambda$ . Si introducono due variabili

$$\Delta \equiv p - k - m, \quad q = p' - p$$

Pertanto, isolando i termini divergenti, si ha

$$\Lambda \sim \frac{1}{\not{p} - \not{k} + m + (\not{p}' - \not{p})}\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} = \frac{1}{\not{\Delta} + \not{q}}\gamma^\mu \frac{1}{\not{\Delta}} = \left[ \frac{1}{\not{\Delta}} - \frac{1}{\not{\Delta}}\not{q}\frac{1}{\not{\Delta}} + \dots \right] \gamma^\mu \frac{1}{\not{\Delta}}$$

alla seconda uguaglianza si utilizza l'identità per  $(A+B)^{-1}$ . Il termine che diverge più velocemente è il primo addendo, poiché gli altri hanno  $\not{q}$  che è un fattore di convergenza. Pertanto, espandendo il prodotto, si identificano  $\Lambda(P, P)$  e  $\Lambda_c(P, P')$ .

Dunque

$$iq_0^2\Lambda_{\text{cor}}^\mu(P, P') = -iq_0[\gamma^\mu(1 + q_0^2L) + q_0^2\Lambda_c^\mu(P, P')] + o(q_0^3)$$

[r] La parentesi tonda è la terza rinormalizzazione della carica elettrica

$$q + o(q_0^3) = q_0(1 + q_0^2L) = \frac{q_0}{Z_1}$$

A questo punto manca la rinormalizzazione delle linee esterne (detta anche rinormalizzazione della funzione d'onda). Prima si vede come applicare quanto sviluppato.

## 4.4 Applicazione

**Riepilogo.** Il propagatore del fermione diventa

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m) + \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m)(\not{p} - m) + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)$$

da cui

$$iq_0^2 S^{\text{cor}}(p) = \frac{iq_0^2 Z_2}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] = iq_0^2 Z_2 S^{\text{rinorm}}$$

Il propagatore rinormalizzato contiene quantità fisiche.

gio 30 nov  
2023 10:30

Per il propagatore del fotone si ha

$$\Pi(q^2) = A'(0) + \Pi_c(q^2)$$

dove il primo addendo diverge logaritmicamente, il secondo è finito, non si ha rinormalizzazione della massa a qualsiasi ordine. Pertanto

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}^{\text{cor}}(q^2) = -iq_0^2 Z_3 \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} (1 - q_0^2 \Pi_c) = iq_0^2 Z_3 D_{\mu\nu}^{\text{rinorm}}(q^2)$$

Per il vertice si ha

$$-iq_0 \Lambda_\mu^{\text{cor}} = -\frac{iq}{Z_1} [\gamma_\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] = -\frac{iq_0}{Z_1} \Lambda^{\text{rinorm}}$$

Per le linee esterne fermioniche si ha

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

Mentre per le linee fotoniche esterne si ottiene

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon_\mu$$

Dal diagramma scheletro si scrive l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}') \sqrt{Z_2} \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{-iq_0}{Z_1} \Lambda_\mu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_2} \frac{-iq_0}{Z_1} \Lambda_\nu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \sqrt{Z_3} \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Lambda_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Lambda_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu (-iq) \Lambda_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) (-iq) \Lambda_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \end{aligned}$$

Nel diagramma non ci sono più termini divergenti, né parametri non misurabili. Questo corrisponde all'ampiezza di Feynman che si scriverebbe per il diagramma albero con i parametri bare. [r]

Tutto questo vale al secondo ordine. I diagrammi one-particle irreducible dev'essere considerato e aggiunto all'ampiezza.

## 4.5 Identità di Ward

Notando

$$0 = \partial_{p_\mu} 1 = \partial_{p_\mu} \left[ \frac{1}{\not{p} - m} (\not{p} - m) \right] = \left[ \partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} \right] (\not{p} - m) + \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu$$

la derivata rispetto  $p_\mu$  del propagatore del fermione è

$$\partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} = -\frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m}$$

da cui l'identità di Ward

$$\Sigma(p) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma(p)$$

essa è vera ad ogni ordine. Il termine  $\Lambda^\mu(p, p)$  corrisponde ad un fotone con  $q = 0$ . Pertanto, si può ottenere il diagramma della correzione al vertice a partire da quello dell'auto-energia inserendo un fotone ad energia nulla nel propagatore del fermione



Si studia una conseguenza per le rinormalizzazioni  $Z$ . L'identità di Ward è

$$\Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma(p)$$

Si consideri

$$iq_0^2 \Sigma(p)$$

così come

$$\begin{aligned} (p' - p) i \Lambda^\mu(p', p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \text{v. correzione al vertice seconda formula} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} [(\not{p}' + \not{k} - m) - (\not{p} + \not{k} - m)] \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} + \not{k} - m} \\ &= \dots [\Sigma(p') - \Sigma(p)] \end{aligned}$$

[r] Dunque

$$q_0^2(p' - p) \Lambda^\mu(p' - p) = q_0^2[\Sigma(p') - \Sigma(p)]$$

Nel limite in cui  $p' \rightarrow p$  si ottiene

$$\Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma$$

Si consideri l'identità di Ward posta tra due spinori

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) L \gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) \partial_{p_\mu} \Sigma u(\mathbf{p})$$

ricordando che  $\Lambda_c$  è nullo tra spinori. Ricordando la struttura di  $\Sigma$ , in particolare

$$B = \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m)$$

si ottiene

$$\partial_{p_\mu} \Sigma = B \gamma^\mu$$

Confrontando questa espressione con la seconda sopra si ha

$$B = L \implies Z_2 = (1 - q_0^2 B), \quad Z_1 = \frac{1}{1 + q_0^2 L} = 1 - q_0^2 L + o(q_0^2) \implies Z_1 = Z_2$$

questo vale a tutti gli ordini. Pertanto, la carica si normalizza solamente con

$$q = \sqrt{Z_3} q$$

**Naturalzza.** Si considerino i tre grafici divergenti. Nel loop virtuale della polarizzazione del vuoto, non si creano solo fermioni, ma qualsiasi particella che interagisce con il campo elettromagnetico. L'auto-energia e la correzione al vertice contengono le masse delle particelle iniziale e finale. [r] La differenza tra la carica del protone e dell'elettrone è

$$\frac{\Delta e(p - e)}{e} \sim 10^{-19}$$

Questo vale per ogni particella. [r] La carica si rinormalizza con  $Z$  diverse. Solamente per la polarizzazione del vuoto la rinormalizzazione è la stessa [r]. Se  $Z_1 \neq Z_2$ , le lagrangiane di partenza dovrebbero arrivare a medesimi risultati. A questo fatto si collega la naturalzza di una teoria. Questo problema non si pone, poiché la carica si normalizza solamente con  $Z_3$ .

## 4.6 Linee esterne

[r] Per la rinormalizzazione delle linee esterne utilizza una tecnica diversa dalla rinormalizzazione della massa: si usa la tecnica dei controtermini di massa. Si pone un problema da risolvere. Si è introdotto lo spegnimento adiabatico perché nella descrizione di interazione [r] gli stati iniziale e finale sono perfettamente definiti, ma la particella bare non è misurabile: la particella bare si riveste ed interagisce. Sono presenti due scale temporali. Questa considerazione è da tenere presente quando si rinormalizzano le linee esterne.

La linea entrante nel processo non può essere  $u(p, m_0)$ , ma  $u(p, m)$ . Bisogna capire come passare da una all'altra. Si introduce la tecnica dei controtermini.

Si scrive la lagrangiana libera come

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \delta m \bar{\psi}\psi, \quad m = m_0 + \delta m$$

Si esplicita la massa fisica. In questo modo, il primo addendo è la lagrangiana libera con la massa fisica, mentre il secondo termine viene aggiunto ad un eventuale termine di interazione. Dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \delta m \bar{\psi}\psi - q_0 \bar{\psi} A \psi$$

Il secondo addendo è il controtermine di massa [r]. In questa teoria, il propagatore imperturbato è

$$\frac{i}{\cancel{p} - m} + \frac{i}{\cancel{p} - m} i \delta m \frac{i}{\cancel{p} - m} + \frac{i}{\cancel{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\cancel{p} - m}$$

[r] Il prodotto normale distrugge una particella e crea nuovamente tale particella. In questo modo il parametro bare non appare.

Dunque

$$\begin{aligned} &= i \left[ \frac{1}{\cancel{p} - m} - \frac{1}{\cancel{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\cancel{p} - m} \right] \\ &= \frac{i}{\cancel{p} - m} \left[ 1 - (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\cancel{p} - m} \right] + o(q^2) \\ &\sim \frac{i}{\cancel{p} - m} \left[ 1 + \frac{\delta m + q_0^2 \Sigma(p)}{\cancel{p} - m} \right]^{-1} = \frac{i}{\cancel{p} - m + \delta m + q_0^2 \Sigma(p)} \end{aligned}$$

Non dev'essere presente alcuna rinormalizzazione della massa poiché si utilizza la massa fisica. Pertanto

$$\delta m + q_0^2 \Sigma(p) = 0 \implies \delta m = -q_0^2 \Sigma(\cancel{p} = m)$$

cioè quanto già trovato.

**Linea esterna di un fermione.** [r] Si utilizza la tecnica dei controtermini

$$u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\cancel{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\cancel{p} - m} i \delta m u(\mathbf{p})$$

Pertanto

$$\left[ 1 - \frac{1}{\cancel{p} - m} (q_0^2 \Sigma(p) + \delta m) \right] u(\mathbf{p})$$

Si sviluppa  $\Sigma$  per avere

$$\frac{q_0^2}{\cancel{p} - m} \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\cancel{p} - m} [A(0) + \dots] u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\cancel{p} - m} [-\delta m + q_0^2 B(\cancel{p} - m) + q_0^2 (\cancel{p} - m) \Sigma_c(p)] u(\mathbf{p})$$

L'ultimo addendo contiene  $\cancel{p} - m$  e tende più velocemente della frazione, perciò si annulla. Il secondo addendo è indefinito

$$B \frac{\cancel{p} - m}{\cancel{p} - m} u(\mathbf{p}) \sim \frac{B}{\cancel{p} - m} (\cancel{p} - m) u(\mathbf{p}) \sim \frac{0}{0}$$

poiché  $u(\mathbf{p})$  soddisfa l'equazione di Dirac.