

Theoretical Physics I

20 ottobre 2023

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Problemi della meccanica quantistica con la relatività	4
1.2	Infiniti gradi di libertà	7
1.3	Formalismo covariante	8
1.4	Equazioni di Maxwell	12
2	Equazioni d'onda relativistiche	17
2.1	Equazione di Dirac	18
2.2	Limite non relativistico	20
2.3	Covarianza	26
2.4	Soluzioni per una particella libera	31
2.5	Proiettori	35
2.6	Equazioni di Weyl	38
3	Formalismo lagrangiano	39
3.1	Campo elettromagnetico	40
3.2	Teorema di Noether	42

Lezione 1

lun 02 ott
2023 10:30

1 Introduzione

Il corso di fisica teorica è un corso di introduzione alle teorie quantistiche relativistiche dei campi. La relatività generale è la prima teoria relativistica di una interazione fondamentale, ma non è stata ancora quantizzata. Le altre tre forze fondamentali — elettromagnetica, forte e debole — sono descritte da un'unica teoria relativistica e quantistica. Si vuole capire come quantizzare i campi unendo la relatività, la meccanica quantistica e la teoria dei campi.

Le motivazioni per costruire teorie relativistiche dei campi sono radicate nella storia delle teorie ad inizio XX secolo: dal problema del corpo nero alla relatività speciale ed alla meccanica quantistica. Come scrisse Kuhn, si ebbe un cambiamento di paradigma e la certezza della fisica classica scomparvero: il tempo assoluto ed il determinismo vennero meno. La relatività e la meccanica quantistica non vennero subito accettate. Una prima prova della relatività generale provenne dall'esperimento di Eddington in cui egli osservò la luce provenire da stelle dietro al sole durante un'eclissi. La meccanica quantistica, nata qualche anno dopo, non era relativistica: l'equazione di Schrödinger è la trascrizione operatoriale della formula classica per l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p^\mu \rightarrow \begin{pmatrix} i\hbar \partial_t \\ -i\hbar \nabla \end{pmatrix}$$

Le correzioni fini all'atomo di idrogeno contengono la correzione relativistica che funziona sebbene l'elettrone sia in regime non relativistico: l'energia dell'elettrone è molto più piccola dell'energia a riposo, per questo si può fare lo sviluppo perturbativo. L'ordine di grandezza dell'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno è degli elettronvolt, mentre la massa dell'elettrone è $511 \text{ keV } c^{-2}$.

La meccanica quantistica non relativistica fornisce dei dati in grande accordo con quelli sperimentali, tuttavia si sono fatte delle scelte insolite e ad hoc: l'aggiunta dello spin, l'introduzione del fattore giromagnetico nel termine di spin-orbita, il principio di Pauli. Unificare la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, mantenendo i principi di entrambe, non è possibile: si arriva a varie incongruenze che si vedono in seguito.

Bisogna cambiare ancora il paradigma adottando la seconda quantizzazione. Dirac creò la meccanica quantistica relativistica tramite la sua equazione, ma il tutto funziona per energie minori dell'energia a riposo dell'elettrone.

Tutte queste discussioni provengono sempre dal campo elettromagnetico. La velocità della luce nel vuoto è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Einstein aggiunge al principio di relatività anche la costanza della velocità della luce in ogni sistema di riferimento.

Nel corso si vede una evoluzione della fisica teorica a partire da Dirac passando per le teorie dei campi. Si studia cosa significare utilizzare una teoria quantistica relativistica e come spesso le cose non sono semplici. Uno dei problemi è quello delle divergenze: lo sviluppo perturbativo porta con sé delle divergenze che vanno interpretate. Ironicamente, la meccanica quantistica è nata per risolvere la divergenza UV dello spettro del corpo nero.

L'auto-energia dell'elettrone è infinita a causa del termine r^{-1} del campo elettrico. Porre un raggio finito all'elettrone risolve il problema, ma non ha potere predittivo. Le divergenze sono ricorrenti, ma la rinormalizzazione permette di ridefinire le divergenze inserendole nella relazione tra la carica nuda di una particella — che non corrisponde alla carica misurata — e la carica misurata stessa.

Inizialmente, la presenza di anti-materia fu un problema. Per la relatività, la massa è equivalente all'energia $E = mc^2$: l'una si trasforma nell'altra e viceversa. Può capitare che una radiazione diventi una coppia particella-antiparticella. Tuttavia, la meccanica quantistica non relativistica tratta una sola particella

$$\int d^3x |\psi|^2 = 1$$

La probabilità di trovare (esattamente) una particella in tutto lo spazio è unitaria, quindi la creazione e annichilazione di particelle non sono compatibili con tale teoria.

Dalla meccanica razionale — con le variabili canoniche, il formalismo di Lagrange, le equazioni di Hamilton–Jacobi, le parentesi di Poisson — le variabili canoniche diventano equivalenti operatoriali hermitiani nella meccanica quantistica. La funzione d'onda è interpretata come ampiezza di probabilità. Ora, la qualità di operatore è assunta dalla funzione d'onda che crea e distrugge particelle, ed in un certo senso si riprendono le variabili canoniche della meccanica classica. Le variabili canoniche classiche sono discrete, ma la funzione d'onda è continua: si passa ad infiniti gradi di libertà, il campo.

Si conoscono già vari campi: il campo elettrico, magnetico, la temperatura, la pressione, etc. Essi presentano tutti uno stato fondamentale. Per quantizzare un campo, ci si pone attorno allo stato fondamentale e si osservano le piccole fluttuazioni — un oscillatore armonico quantistico — attorno al minimo.

Uno dei punti fondamentali in fisica teorica è spiegare un fenomeno, ma anche predire. Un modello spiega un fenomeno, una teoria si basa su un principio fondamentale ed è caratterizzata da una predittività. Il modello di Glashow–Weinberg–Salam nacque come modello, ma con la teoria elettrodebole ed il meccanismo di Higgs divenne una teoria, cioè il Modello Standard. Esso possiede un enorme accordo tra teoria ed esperimenti. Ad esempio, il fattore giromagnetico del muone misurato¹ porta ad un momento di dipolo magnetico anomalo pari a

$$a_\mu = \frac{g-2}{2} = 0.001\,165\,920\,59(22)$$

La discrepanza con il valore teorico² è

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$$

Le interazioni elettromagnetica, forte e debole sono correttamente descritte dal Modello Standard alle energie finora investigate. Esso è una teoria quantistica relativistica dei campi e per questo

¹Si veda <https://arxiv.org/abs/2308.06230>.

²Si veda <https://physics.aps.org/articles/v16/139>.

si pensa essere la teoria corretta. Tuttavia, si pensa anche che il Modello Standard sia una teoria a basse energie, limite di una teoria più grande, poiché non spiega, tra le altre cose, la materia e l'energia oscure.

Il corso è una introduzione alla teoria dei campi. La parte avanzata, tra cui il metodo funzionale, si vede al corso di Teoria Quantistica dei Campi I e II, e pure in Laboratorio di Fisica Computazionale con lo studio delle interazioni forti su reticolo.

Unità di misura. Si utilizza il sistema MKS. Le costanti fisiche di interesse sono

$$c = 299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}, \quad \hbar \approx 6.582 \times 10^{-16}\,\text{eV s}$$

Si pone $c = 1$: lunghezza e tempo sono la stessa dimensione. Per ragioni storiche, si elimina il tempo, sebbene sia più preciso da misurare. Come conseguenza, dalla relazione di Einstein

$$E = mc^2$$

la massa ha le dimensioni dell'energia. Altre scale di lunghezza interessanti sono l'ångström (o angstrom) ed il fermi

$$1\,\text{\AA} = 10^{-10}\,\text{m}, \quad 1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m}$$

corrispondenti alle scale atomiche e scale nucleari.

Si pone $\hbar c = 1$, che nel Sistema Internazionale vale $\hbar c \approx 197\,\text{MeV fm}$. Si introduce la lunghezza Compton (ridotta)

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2}$$

Per l'elettrone vale $\lambda \approx 3.86 \times 10^{-13}\,\text{m}$, mentre per un nucleone è $\lambda \approx 0.21\,\text{fm}$. Dalla lunghezza Compton si ottiene una relazione tra lunghezza e massa. La massa di un nucleone è data da $m = 5\,\text{fm}^{-1}$.

In generale, le particelle elementari sono instabili. Si consideri una vita media

$$\tau = 10^{-23}\,\text{s} \implies \frac{\tau c}{\hbar c} \approx \frac{3}{200}\,\text{MeV}^{-1}$$

Si passa da un tempo ad una energia: dalla vita media all'indeterminazione sul valore dell'energia e quindi della massa. La relazione

$$\Delta t \Delta E \sim 1$$

non è un principio di indeterminazione perché il tempo non è un operatore e le misurazioni sono fatte a tempi diversi. Essa lega l'incertezza sulla misura dell'energia data la differenza temporale tra due misure. La vita media di una particella permette di ottenere l'indeterminazione sulla sua massa. Tornando alla lunghezza Compton, si ha

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} \implies \lambda mc \sim \hbar \rightsquigarrow \Delta x \Delta p \sim \hbar$$

L'ultima relazione è un principio di indeterminazione. Dalle relazioni sopra si nota che risolvere la posizione di una particella su una lunghezza inferiore alla sua lunghezza Compton significa fornirle un'energia dell'ordine della sua massa a riposo e quindi aprire la strada alla creazione di coppia. Confinare una particella porta alla creazione di altre particelle.

Riassumendo, le dimensioni seguono le relazioni

$$E = L^{-1} = T^{-1} = M$$

Per l'elettromagnetismo si utilizzano le unità di Heaviside–Lorentz e le associate definizioni della forza di Coulomb e dei campi.

Si può costruire un analogo della lunghezza Compton anche per la massa, cioè la massa di Planck. Non si considera la gravità perché è molto più debole della altre forze fondamentali

$$E_{\text{grav}} = G \frac{m_e M_N}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-41}}{r_{\text{Bohr}}}, \quad E_{\text{elet}} = \frac{\alpha}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-2}}{r_{\text{Bohr}}}$$

Scale di energia. L'energia di un fascio del Large Hadron Collider fu 6.5 TeV per la scoperta del bosone di Higgs. Per il LEP fu 100 GeV. Per il SPS fu 300 GeV per la scoperta dei bosoni W^\pm e Z . L'energia necessaria ad ottenere tali fasci è 600 GWh yr^{-1} solo per LHC. Questo perché particelle che accelerano irradiano energia per bremsstrahlung. Tutto il CERN consuma 1.3 TWh yr^{-1} , mentre il mondo produce circa $20\,000 \text{ TWh yr}^{-1}$.

Lezione 2

mar 03 ott
2023 10:30

Diagramma di Minkowski. In un diagramma xt di Minkowski, la bisettrice dei quadranti indica oggetti che si muovono alla velocità della luce (ricordando $c = 1$). Si costituisce un cono luce. Al di sopra e al di sotto dell'origine O si hanno eventi che possono essere causalmente connessi con l'origine: in particolare, per eventi al di sopra, l'origine O può avere un effetto causale, si ha il futuro; gli eventi al di sotto hanno potuto influenzare causalmente l'origine, si ha il passato. Ai lati, gli eventi non possono essere causalmente connessi con l'origine perché bisogna superare la velocità della luce.

La metrica nello spazio di Minkowski non è definita positiva: l'intervallo spazio-temporale può cambiare segno. Gli eventi con $t = 0$ sono contemporanei all'origine. In base al segno — positivo, nullo e negativo — si ha vettori di tipo tempo, luce e spazio. Ai lati del cono sono presenti vettori di tipo spazio, sopra e sotto si hanno vettori di tipo tempo. Lungo le bisettrici si hanno vettori di tipo luce.

1.1 Problemi della meccanica quantistica con la relatività

Si vedono alcuni problemi nel conciliare la meccanica quantistica con la relatività.

Problema primo. Si svolge un esercizio preso dalle Coleman's Lectures, p. 12. Si considera una particella localizzata nell'origine $|\mathbf{x} = 0\rangle \equiv |0\rangle$. Per ottenere uno stato ad un tempo successivo a $t = 0$ si applica l'operatore di evoluzione temporale. Ricordando varie relazioni, tra cui la completezza nello spazio dei momenti,

$$I = \int d^3k |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|, \quad H|\mathbf{k}\rangle = E_k|\mathbf{k}\rangle, \quad E_k^2 = k^2 + m^2$$

così come

$$\langle\mathbf{k}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle^*$$

Si ottiene

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle = \int d^3k \langle\mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle \langle\mathbf{k}|e^{-iHt}|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_k t}$$

dove si applica l'esponenziale a $\langle\mathbf{k}|$ facendo l'espansione in serie di Taylor. Passando in coordinate polari r e θ , si ha

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle &= \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos\theta} e^{-iE_k t} = \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} e^{-iE_k t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} e^{-iE_k t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dk k e^{ikr} e^{-iE_k t} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}} dk k e^{ikr} e^{-it\sqrt{k^2+m^2}} \end{aligned}$$

Si passa nel piano complesso. La radice è una funzione polidroma: si pone il branch cut da $-\infty$ a $-im$ e da im a ∞ . Il cammino di integrazione è una semicirconferenza con base l'asse reale e che evita il branch cut, percorsa in senso anti-orario. La funzione integranda è analitica all'interno del cammino, pertanto l'integrale è nullo. Vicino al taglio si ha

$$E_k = -i\sqrt{(\text{Im } k)^2 - m^2}, \quad E_k = i\sqrt{(\text{Im } k)^2 - m^2}$$

a sinistra e destra. Si studia il limite in cui il raggio della semicirconferenza tende ad infinito. L'esponenziale sul segmento discendente a sinistra tende a zero, ma non a destra. Supponendo che la particella viaggi più veloce della luce $r > t$, allora anche tale termine si annulla all'infinito. Inoltre, gli archi non contribuiscono all'integrale. Sia $k = iz$, così $k dk = iz d(iz)$. Pertanto, solamente i segmenti verticali contribuiscono con termini non nulli:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | 0 \rangle &= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^\infty d(iz) (iz) e^{-zr} [e^{t\sqrt{z^2-m^2}} - e^{-t\sqrt{z^2-m^2}}] \\ &= \frac{i}{2\pi^2 r} \int_m^\infty dz z e^{-zr} \sinh(t\sqrt{z^2-m^2}) > 0\end{aligned}$$

Da questo risultato si nota che, a partire da una particella è localizzata nell'origine, ad un tempo infinitesimo successivo, la funzione d'onda è non nulla ovunque: si potrebbe trovare al di fuori del cono luce. Non si è coerenti con la relatività speciale. Si ha violazione di causalità nel momento in cui si localizza una particella. La localizzazione diventa un concetto che non si riesce più a mantenere, come già visto discutendo della lunghezza Compton.

L'integrale non presenta una soluzione esplicita in forma chiusa, ma si può trovare un limite superiore all'ampiezza di probabilità

$$\psi(x, t) < \frac{i}{2\pi^2 r} \int_m^\infty dz z e^{-z(r-t)} = \frac{i}{2\pi^2 r} e^{-m(r-t)} \left[\frac{m}{r-t} + \frac{1}{(r-t)^2} \right]$$

Si noti il campo complesso \mathbb{C} non è un campo totalmente ordinato, quindi la relazione di disuguaglianza è valida in senso lessicografico. Fuori dal cono di luce, l'ampiezza di probabilità è esponenzialmente piccola, ma comunque non nulla. In generale, una simmetria semplifica il problema, ma la simmetria di Lorentz rovina la meccanica quantistica. In natura deve esistere qualcosa che cancella la violazione di causalità: le anti-particelle forniscono contributi che cancellano la violazione. La scala che descrive quanto scende la probabilità è data dalla massa m . La lunghezza Compton associata ad una particella è il reciproco della massa: cercando di confinare una particella in una regione più piccola della lunghezza Compton — il problema visto considera la particella in un punto infinitesimo, l'origine — si ottiene una violazione della causalità.

Problema secondo. Seguendo Bohr, si consideri una particella in una scatola perfettamente riflettente: la particella rimbalza continuamente. Il lato superiore della scatola è un pistone che si può muovere per diminuire lo spazio all'interno della scatola. Ricordando la relazione di Einstein, per il principio di indeterminazione

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar$$

la particella acquista abbastanza energia da irraggiare qualsiasi cosa e creare tutte le particelle compatibili con il principio di conservazione dell'energia.

Relazione di Einstein. Le difficoltà sorgono dalla relazione di Einstein $E = mc^2$. Si tenta dare un senso a tale formula. Si consideri una scatola. Si emette della radiazione dal lato sinistro della scatola con energia E . Per una radiazione, il momento portato è $p = \frac{E}{c}$. Per conservazione del momento $p = 0$, la scatola si sposta verso sinistra con momento $p = -\frac{E}{c}$. La scatola si sposta fino a quando la radiazione incide sull'altro lato. La velocità con cui si muove la scatola è $v = -\frac{E}{Mc}$. La distanza percorsa è

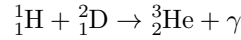
$$\Delta x = -\frac{E}{Mc} \frac{L}{c} = -\frac{EL}{Mc^2}$$

corrispondente al tempo di viaggio della radiazione. La scatola è un sistema isolato, ma si è spostato: il baricentro deve restare fermo. Per Einstein, la radiazione porta con sé della massa, infatti dall'equazione del baricentro si ottiene

$$mL + M\Delta x = 0 \implies mL - M\frac{EL}{Mc^2} = 0 \implies E = mc^2$$

Si ricordi che non si può considerare la scatola come un corpo rigido giacché si sta trattando la Relatività Speciale. Tuttavia, il problema di considerare il corpo rigido o meno non si pone poiché le conclusioni sono le medesime.

Si vede un esempio in cui si trova la relazione di Einstein. Le stelle sono sorrette dalla fusione nucleare



La massa iniziale combinata del protone e del deutrone è $m = 5.01624 \times 10^{-27}$ kg, mentre il nucleo di elio ha massa $m = 5.008234 \times 10^{-27}$ kg. L'eccesso di massa che si trasforma in energia è $\Delta m \approx 7.97 \times 10^{-30}$ kg. Con questa reazione, insieme a delle altre, il Sole perde una quantità di massa pari a

$$\Delta M_{\odot} \approx 4.5 \times 10^9 \text{ kg s}^{-1} \approx 10^{-14} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

dove M_{\odot} è una massa solare.

Esperimento di Nichols e Hull. Nichols e Hull si posero la questione di misurare il momento portato dalla luce. I due costruirono una bilancia di torsione con due specchi rivolti nella stessa direzione. L'esperimento rivelò

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Problema terzo. Quando un commutatore tra due operatori è nullo, si possono misurare le quantità associate in modo indipendente (l'ordine non è importante). Nella rappresentazione di Heisenberg, gli operatori dipendono solo dal tempo. Rispetto ad una misura fatta all'origine del diagramma di Minkowski, nella regione sopra e sotto del cono di luce, il commutatore con un'altra misura è diverso da zero perché le due misure si possono influenzare, mentre ai lati il commutatore deve essere nullo perché i sistemi non si possono influenzare. Dunque i commutatori devono dipendere anche dalla posizione delle misure.

Problema quarto. Si veda Cohen E_{II}. Si considerino due operatori tali per cui

$$[q, p] = i\hbar, \quad [q, q] = [p, p] = 0$$

Dal primo commutatore segue

$$qp - pq = i\hbar \implies qp^2 - pqp = i\hbar p \implies qp^2 - p^2q - i\hbar p = i\hbar p$$

In generale si ottiene

$$[q, p^n] = ni\hbar p^{n-1}, \quad [p, q^n] = -in\hbar q^{n-1}$$

cioè relazioni simili a quelle delle derivate. Si consideri una generica funzione dei momenti e delle coordinate:

$$[q, G(p)] = i\hbar \partial_p G(p), \quad [p, F(q)] = -i\hbar \partial_q F(q)$$

Si consideri l'operatore di traslazione in una dimensione

$$T(a) = e^{-ia\frac{p}{\hbar}}$$

dove a è una coordinata. Dal primo dei due commutatori sopra segue

$$qT(a) = T(a)q + i\hbar \partial_p T = T(a)q + aT(a) = T(a)(q + a)$$

L'operatore di posizione agisce sugli autostati della posizione come

$$\hat{q} |q'\rangle = q' |q'\rangle$$

Applicando prima l'operatore di traslazione, si ottiene

$$\hat{q}T(a) |q'\rangle = (q' + a)T(a) |q'\rangle$$

Il vettore $T(a) |q'\rangle$ è ancora autovettore della posizione ed ha autovalore $q' + a$. Il parametro a è un numero reale arbitrario. Se lo spettro di un operatore che ha commutatore $i\hbar$ con un altro è continuo e illimitato (superiormente o inferiormente), allora pure lo spettro dell'altro operatore è continuo e illimitato. In questo caso lo spettro dell'operatore di traslazione $T(a)$ è continuo e illimitato, pertanto lo è pure quello della posizione \hat{q} .

Ne si vede la motivazione. Se due operatori sono finiti e discreti, allora — sapendo $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ —

$$0 = \text{Tr}[A, B] = \text{Tr } i\hbar = Ni\hbar$$

che è una contraddizione. Pertanto, operatori che non commutano, non possono essere finiti, in modo che la traccia non sia definita.

Seguendo Pauli, per rendere coerenti la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, bisogna aggiungere alle regole di commutazione ordinarie — come $[x, p] = i\hbar$ —, tutte le altre regole di commutazione:

$$[t, H] = -i\hbar, \quad [x, H] = 0, \quad [t, p] = 0$$

Per la prima regola di commutazione, supponendo di avere un operatore tempo, poiché t è illimitato, allora pure l'hamiltoniana H deve avere spettro illimitato (in particolare illimitato inferiormente): ciò non è possibile perché non ci sarebbe uno stato fondamentale stabile ed i sistemi non sarebbero quantizzabili. La seconda regola di commutazione afferma che la posizione è conservata e misurabile in modo indipendente dall'energia. Similmente per la terza regola. Pertanto, la possibilità di trovare regole di commutazione compatibili con la regola tra posizione e momento, generalizzate ai quadri-vettori posizione e momento, porta ad un assurdo.

Lezione 3

mer 04 ott
2023 10:30

1.2 Infiniti gradi di libertà

Per passare ad una teoria dei campi, bisogna passare ad infiniti gradi di libertà. Si vede un esempio in meccanica classica. Si consideri una corda vibrante in una dimensione: si hanno n masse m alternate a delle molle di costante k . Nello stato a minima energia, tutte le masse hanno una distanza pari al passo reticolare a . La lagrangiana del sistema è data da

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La corda ha una dimensione finita e bisogna scegliere le condizioni al contorno: si possono fissare gli estremi $q_1(t) = q_n(t) = 0$ oppure imporre delle condizioni periodiche $q_i(t) = q_{i+n}(t)$. Quest'ultima condizione permette di passare ad un numero infinito di particella. L'hamiltoniana è data da

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La densità di massa e la tensione della corda sono

$$\rho = \frac{m}{a}, \quad \sigma = ka$$

Nel limite di $a \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$ si ha

$$\frac{q_{j+1} - q_j}{a} \rightarrow \partial_x \phi(x, t), \quad \sum_j \rightarrow \frac{1}{a} \int dx$$

dove ϕ è il campo spostamento di ogni massa dalla propria posizione di equilibrio. La lagrangiana diventa una funzione del campo ϕ , passando in tre dimensioni, si ha

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

L'hamiltoniana è data da

$$H(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

Si introducono le densità di lagrangiana e di hamiltoniana

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}$$

I momenti coniugati sono

$$\pi = \partial_{\dot{\phi}} \mathcal{L}, \quad \mathcal{H} = \pi \cdot \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

Le equazioni del moto sono

$$\partial_{\phi} \mathcal{L} - \partial_{\mu} \partial_{\partial_{\mu} \phi} \mathcal{L} = 0$$

In generale, si utilizzano le condizioni periodiche perché le teorie trattate sono locali. Il campo elettromagnetico è un campo a lungo raggio, ma si può considerare locale perché la materia è complessivamente neutra: oltre una certa distanza, il campo non ha più effetto.

Utilizzare un campo porta una difficoltà. Si è riusciti a scrivere l'energia relativistica, ma non si riesce a scrivere in modo relativisticamente corretto un potenziale. Infatti, un potenziale descrive un'interazione istantanea. Bisogna utilizzare qualcos'altro: uno scambio di particelle, i mediatori delle interazioni fondamentali. Il potenziale in quanto tale non può più esistere.

1.3 Formalismo covariante

Si veda Landau vol. 2 per una trattazione completa. Si studia il formalismo covariante nella relatività speciale. Le trasformazioni di Galileo sono equivalenti alle trasformazioni di Lorentz nel limite di piccole velocità.

Si considerino due sistemi di riferimento S ed S' equiversi. Il secondo si muove lungo l'asse z del primo. Le trasformazioni di Lorentz sono

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 1$$

Queste configurazione e trasformazione sono usate anche successivamente come prototipi. Interessa capire come una certa quantità si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. Queste esistono anche in termini di funzioni iperboliche secondo la rapidità.

L'intervallo spazio-temporale è una quantità costante, un invariante

$$x^{\mu} x_{\mu} = s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Dei sistemi di riferimento tipicamente usati sono:

- il target system, cioè il sistema del laboratorio solidale con una particella su cui impatta un'altra particella;
- il riferimento del centro di massa.

Qualunque evento è caratterizzato da un punto (t, x, y, z) nello spazio di Minkowski. Si introduce il quadrivettore posizione

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

Le sue componenti sono coordinate contravarianti perché controvariano rispetto le trasformazioni dei cambi di base cioè le trasformazioni di Lorentz. Il moto di una particella è una curva, una linea di universo, $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$ che descrive come essa si muove nello spazio-tempo. Le trasformazioni nello spazio di Minkowski sono trasformazioni lineari e corrispondono alle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Nel formalismo covariante bisogna fare attenzione alla posizione degli indici: scritture del tipo $x^{\mu} x^{\mu}$ sono legittime e perfettamente definite, ma non sono quantità invarianti per trasformazioni di Lorentz. Queste hanno caratteristiche particolari che determinano la forma delle matrici associate. Per i due sistemi di riferimento S ed S' sopra, si ottiene

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Il tensore metrico è definito secondo la convenzione timelike

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Pertanto, il quadrivettore posizione covariante è dato da

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

In questo modo si passa da componenti contravarianti a covarianti e viceversa. Si può definire la norma

$$\|x\|^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

Proprietà delle trasformazioni di Lorentz. Le matrici delle trasformazioni hanno 16 componenti. Le trasformazioni che si vogliono applicare ad un quadrivettore sono le rotazioni ed i boost, cioè sei totali: bisogna limitare le componenti indipendenti. Dato

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

si calcola l'invariante spazio-temporale nel riferimento S' che deve essere identico all'invariante calcolato nel riferimento S :

$$x'^\mu x'_\mu = \eta_{\mu\rho} x'^\mu x'^\rho = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma \equiv \eta_{\alpha\theta} x^\alpha x^\theta$$

Poiché si considera lo stesso vettore, allora l'identità vale per componenti. Quindi si hanno delle relazioni tra gli elementi di matrice delle trasformazioni di Lorentz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = \eta_{\nu\sigma}$$

Sommando su ρ si ottiene $\Lambda_{\mu\sigma}$ da cui segue

$$\eta_{\nu\sigma} = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_{\mu\sigma} = (\Lambda^\top)_\nu{}^\mu \Lambda_{\mu\sigma}$$

Alzando l'indice ν tramite la metrica si ottiene

$$\delta^\nu{}_\sigma = (\Lambda^\top)_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta \eta^{\beta\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma = (\eta \Lambda \eta^{-1})_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = [(\eta \Lambda \eta^{-1})^\top]^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma$$

che in forma matriciale risulta essere

$$I = (\eta \Lambda \eta^{-1})^\top \Lambda \iff \eta = \Lambda^\top \eta \Lambda \iff \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta = \eta \Lambda \eta^{-1}$$

Per passare alla notazione matriciale bisogna porre attenzione alla posizione degli indici. La matrice trasposta di $\Lambda^\mu{}_\sigma$ non ha gli indici posti come $(\Lambda^\top)^\nu{}_\mu$, bensì come $(\Lambda^\top)_\nu{}^\mu$. Infatti vale³

$$\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu, \quad \Lambda^\top = (\Lambda^\top)_\mu{}^\nu, \quad \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$$

così come

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^\top)_\nu{}^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$$

La derivazione può seguire anche un altro modo. Si può introdurre direttamente la matrice trasposta

$$\Lambda^\mu{}_\nu \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = \eta_{\nu\sigma} \implies (\Lambda^\top)_\nu{}^\mu \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = \eta_{\nu\sigma} \implies \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

La scrittura tramite matrici permette di capire che il tensore metrico è lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale. Le matrici delle trasformazioni di Lorentz sono definite dall'equazione derivata sopra. Le equazioni indipendenti che caratterizzano le matrici sono $2^{-1}n(n+1)$ cioè dieci in quattro dimensioni. I gradi di libertà risultano essere sei: i tre angoli di Eulero e le tre componenti della velocità.

Infine, il determinante è dato da

$$\det(\Lambda^\top \eta \Lambda) = \det \eta \implies (\det \Lambda)^2 = 1$$

Il volume quadridimensionale è preservato nelle trasformazioni.

³Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/567237> e <https://physics.stackexchange.com/q/456640>.

Elementi di teoria dei gruppi. Le trasformazioni di Lorentz costituiscono il gruppo di Lorentz $O(1,3)$. Un gruppo è un insieme G in cui esiste una regola di composizione tale per cui vale:

- chiusura: $g_i \circ g_k = g_j \in G$;
- associatività: $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$;
- elemento identità: $\exists g_0$ tale per cui $g_0 \circ g_i = g_i \circ g_0 = g_i$ per ogni $g \in G$;
- elemento inverso: $\forall g_i \in G, \exists g_s \in G$ tale per cui $g_s \circ g_i = g_i \circ g_s = g_0$.

Il gruppo di Lorentz è continuo. Si verificano queste proprietà. La composizione di più trasformazioni di Lorentz fornisce

$$x''^\mu = (\Lambda')^\mu_\nu x'^\nu = (\Lambda')^\mu_\nu \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma \implies x'' = \Lambda' \Lambda x$$

Sfruttando il determinante si ha

$$\det \eta = \det((\Lambda' \Lambda)^\top \eta \Lambda' \Lambda) \implies 1 = [\det(\Lambda' \Lambda)]^2$$

L'associatività è data dalla linearità delle trasformazioni di Lorentz. L'identità è I , mentre l'inversa è $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta$.

Trasformazioni di tensori. Un quadrivettore è un insieme di quattro componenti che si trasformano come le coordinate. Essi si rappresentano come vettori colonna e sono detti semplicemente vettori. Per la velocità si ha

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu$$

Un tensore di tipo $(2,0)$ è un oggetto di sedici componenti per cui ogni indice si trasforma come le coordinate

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}$$

Un quadrivettore covariante si trasforma come

$$v'_\mu = \eta_{\mu\nu} v'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho v^\rho = \Lambda_\mu^\nu v_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu v_\nu \implies v' = v \Lambda^{-1}$$

Essi si rappresentano come vettori riga e sono detti covettori: sono i duali dei vettori. La derivata rispetto un quadrivettore covariante si può scrivere come

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Sapendo $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, $x' = \Lambda x$ e moltiplicando da sinistra per Λ^{-1} , si ha

$$\Lambda^{-1} x' = x \implies \eta^{-1} \Lambda^\top \eta x' = x \implies x^\nu = (\Lambda^\top)^\nu_\mu x'^\mu = \Lambda_\mu^\nu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x'^\mu$$

oppure in modo più diretto

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \implies (\Lambda^{-1})^\rho_\mu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \delta^\rho_\nu x^\nu = x^\rho$$

Dunque si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \iff \partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$$

La derivata di un quadrivettore rispetto alle componenti contravarianti $\partial_\mu v^\mu$ è un invariante. Il d'Alembertiano $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ è anch'esso invariante. Data un'equazione nel formalismo covariante, la sua forma è identica in ogni sistema di riferimento inerziale. Ad esempio

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \square A^\mu = v^\mu$$

Lezione 4

gio 05 ott
2023 10:30

L'equazione di Schrödinger non è un invariante relativistico e nemmeno invariante galileiano. Basta considerare $x' = x + vt$. Bisogna ridefinire la funzione d'onda con un fattore di fase di un argomento che è funzione della velocità, dell'energia e della massa: l'equazione non è invariante, ma le osservabili non cambiano perché compare solo un fattore di fase.

Altre proprietà delle trasformazioni di Lorentz. Un tensore di tipo (p, q) si trasforma con p componenti contravarianti e q componenti covarianti. Le trasformazioni di Lorentz contengono sei parametri: gli angoli di Eulero e le componenti della velocità, corrispondenti alle rotazioni ed ai boost. Si può considerare una trasformazione più generale che include anche una traslazione ottenendo il gruppo di Poincaré

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \delta^\mu$$

con δ^μ costante.

Il determinante è una funzione continua degli elementi di matrice, pertanto non può passare tra due valori discontinui, 1 e -1 . Esistono quattro settori disconnessi del gruppo di Lorentz. Si consideri

$$\eta_{\sigma\rho} = \Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho$$

Scegliendo $\rho = \sigma = 0$ si ha

$$1 = \Lambda^\mu_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \implies \Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2}$$

Insieme al determinante, si hanno quattro settori non legati tra loro: non si può passare da un settore all'altro. Tali settori sono:

- trasformazioni ortocrone proprie: $\Lambda^0_0 \geq 1$, $\det \Lambda = 1$. Esse sono le trasformazioni infinitesime che si possono infinitamente risommare a partire dall'unità; esse formano un gruppo. Un esempio di trasformazione è l'identità.
- trasformazioni ortocrone improprie: $\Lambda^0_0 \geq 1$, $\det \Lambda = -1$. Un esempio di trasformazione è la parità $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- trasformazioni anticrone improprie: $\Lambda^0_0 \leq -1$, $\det \Lambda = -1$. Un esempio di trasformazione è l'inversione temporale $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- trasformazioni anticrone proprie: $\Lambda^0_0 \leq -1$, $\det \Lambda = 1$. Un esempio di trasformazione è la combinazione delle precedenti $PT = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$.

Questi settori sono disgiunti perché non esiste una trasformazione infinitesima che permette di passare dall'unità ad un settore diverso dal primo: bisogna utilizzare delle trasformazioni discrete.

Teorema 1.1. Le trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono non cambiano il segno della componente temporale di un vettore di tipo tempo.

Dimostrazione. Si consideri

$$\Lambda^0_0 = \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2} = \sqrt{1 + |\mathbf{\Lambda}|^2} > |\mathbf{\Lambda}|$$

Un vettore di tipo tempo è caratterizzato da

$$v_\mu v^\mu = (v^0)^2 - |\mathbf{v}|^2 > 0 \implies (v^0)^2 > |\mathbf{v}|^2$$

Si consideri $v^0 > |\mathbf{v}|$ e $v^0 > 0$. Applicando una trasformazione di Lorentz si ottiene

$$v'^0 = \Lambda^0_0 v^0 + \Lambda^0_i v^i = \Lambda^0_0 v^0 + |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{v}| \cos \theta \geq \Lambda^0_0 v^0 - |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{v}| > \Lambda^0_0 v^0 - \Lambda^0_0 |\mathbf{v}| > 0$$

Dunque la trasformazione mantiene la qualità di tipo tempo del vettore. La dimostrazione è analoga per $v^0 < 0$. \square

Questo teorema si può vedere in modo geometrico. Un evento nell'origine non può influenzarne un altro che si trova al di là della bisettrice del diagramma di Minkowski. La componente temporale di un quadrivettore è la distanza temporale rispetto l'origine. Operando una trasformazione di Lorentz, l'evento può avvenire prima o dopo l'origine, in base al sistema di riferimento considerato: non c'è causalità.

Si consideri un vettore di tipo tempo con norma $k^2 > 0$. Essa è la stessa per ogni riferimento inerziale. Pertanto

$$t^2 - x^2 = k^2 \implies t = \pm \sqrt{k^2 + x^2}$$

cioè un iperboloide nello spazio di Minkowski che si trova nella zona sopra e sotto all'origine, ma le due zone sono disconnesse e la componente di tipo tempo non cambia. D'altra parte, per un vettore di tipo spazio, la norma è $-k^2$ con $k^2 > 0$, da cui

$$x^2 - t^2 = k^2$$

cioè ancora un iperboloide, ma al di fuori dal cono di luce, ai lati dell'origine. Una trasformazione di Lorentz cambia il segno della componente tempo e per questo non si può avere una relazione di causalità.

1.4 Equazioni di Maxwell

Vedere Landau, vol. 2, cap. 4, p. 70.

Leggi di Maxwell. Le equazioni di Maxwell sono quattro equazioni, due scalari e due vettoriali, per un totale di otto equazioni scalari:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

I gradi di libertà non sembrano essere corretti. Sei gradi di libertà fisici (le componenti dei campi), ma otto equazioni: alcune di queste sono ridondanti. In fisica classica, la conservazione della carica è aggiunta manualmente alla legge di Ampère e non si può dedurre dalle equazioni di Maxwell (dell'elettrostatica):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Non è evidente che le equazioni di Maxwell siano invarianti relativistici. In forma integrale, la legge di Gauss è

$$\int_V \rho d^3x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato il teorema della divergenza (o teorema di Gauss). Per la seconda equazione, la legge di Ampère–Maxwell, si ha

$$\partial_t \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato il teorema di Stokes. La terza, la legge di Gauss per il magnetismo, è analoga alla prima ed afferma l'inesistenza del monopolo magnetico:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La quarta equazione, la legge di Faraday, è analoga alla seconda

$$-\partial_t \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Formalismo covariante. Si introducono dei quadrivettori utili per lo studio dell'elettrodinamica:

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\nabla), \quad J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$$

Il secondo si può motivare nel seguente modo. La carica infinitesima $\rho dV = dq$ è un invariante relativistico. Operando una trasformazione di Lorentz, la misura diventa

$$d^4x' = dt' dx' dy' dz' = \left| \frac{\partial(t', x', y', z')}{\partial(t, x, y, z)} \right| d^4x = \det \Lambda d^4x = d^4x$$

cioè è un invariante. Poiché ρdV è un invariante e dV si trasforma come le componenti spaziali di un quadrivettore, allora ρ si deve trasformare come la componente temporale. Pertanto, l'equazione di continuità è data da

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

che è chiaramente un invariante relativistico.

Si consideri la legge di Gauss per il magnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

dove \mathbf{A} è il potenziale vettore. Si dimostra l'implicazione sopra tramite il simbolo di Levi-Civita

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

L'uguaglianza è nulla poiché ε_{ijk} è completamente anti-simmetrico (in particolare la coppia ij), mentre la derivata $\partial_i \partial_j$ è simmetrica. Inserendo il potenziale vettore nella legge di Faraday, si ha

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \implies \nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0$$

Il vettore tra parentesi è irrotazionale:

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} \equiv -\nabla \phi \implies \mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$$

dove ϕ è il potenziale scalare. Dalla legge di Gauss si ottiene

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) = \rho \implies -\nabla^2 \phi - \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \rho$$

Aggiungendo e rimuovendo $\partial_t \phi$ all'interno della derivata temporale, segue

$$\rho = \square \phi - \partial_t (\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A}) = \square \phi - \partial_t \partial_\mu A^\mu$$

dove si definisce il quadri-potenziale $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Si consideri la legge di Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \mathbf{A}$$

Ricordando

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mathbf{J} - \partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \mathbf{A} \\ \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi) &= \mathbf{J} \\ \square \mathbf{A} + \nabla(\partial_\mu A^\mu) &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

Le due equazioni trovate si possono riassumere come

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Da questa scrittura risulta evidente che le leggi di Maxwell sono covarianti. Il numero di gradi di libertà sembra essere quattro, poi si scoprono essere tre e infine due. Il campo elettromagnetico è estremamente patologico. Questo è legato al fatto che, quando si quantizza il campo, la particella che media le interazioni ha massa nulla.

Si può riscrivere l'equazione per ottenere

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu \implies \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\mu$$

Il termine tra parentesi è un tensore di tipo $(2,0)$ totalmente anti-simmetrico detto tensore di campo (o di Faraday) per cui le equazioni di Maxwell si possono scrivere come

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Le componenti indipendenti del tensore di campo sono solo sei e corrispondono alle componenti del campo elettromagnetico. Considerando la derivata si ottiene la conservazione della corrente

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu$$

La conservazione della carica è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Si studiano le componenti del tensore di campo

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_t A^i + \nabla \phi = -E^i$$

mentre le altre sono

$$F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Le componenti del tensore hanno perso il proprio senso assoluto: il campo elettrico diventa il campo magnetico e viceversa.

Lezione 5

lun 09 ott
2023 10:30

Il tensore di campo soddisfa l'identità di Bianchi

$$\partial^{[\alpha} F^{\mu\nu]} = 0 \implies \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

Si consideri $\alpha = 2$, $\mu = 3$ e $\nu = 0$. Si ha

$$-\partial_y E_z + \partial_z E_y - \partial_t B_x = 0 \implies (\nabla \times \mathbf{E})_x = -\partial_t B_x$$

Considerando le altre componenti, si ottengono le due leggi omogenee di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

Da questo si capisce che le otto equazioni scalari di Maxwell sono ridondanti perché le quattro sopra sono dipendenti da quelle con le sorgenti.

Trasformazioni delle componenti del tensore. Si studia come trasforma il tensore di campo. Si consideri la trasformazione prototipo lungo l'asse z :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Il tensore di campo nel sistema di riferimento S' è

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho F^{\sigma\rho}$$

Si studiano le componenti

$$F'^{01} = -E'_x = \Lambda^0{}_\sigma \Lambda^1{}_\rho F^{\sigma\rho} = \Lambda^0{}_\sigma F^{\sigma 1} = -\gamma(E_x - vB_y)$$

I due campi si mescolano. Le trasformazioni delle tre componenti del campo elettrico sono

$$E'_x = \gamma(E_x - vB_y), \quad E'_y = \gamma(E_y + vB_x), \quad E'_z = E_z$$

Per trasformazioni più generali si veda Landau, vol. 2, oppure Fisica II o Relatività.

Invarianza di gauge. Si trattano le trasformazioni di gauge globali. Si consideri il potenziale vettore \mathbf{A} . I campi sono:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$$

Noto $\nabla \times (\nabla f) = 0$, si ha

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$$

dove f è una funzione arbitraria. Dunque, il campo magnetico è invariante per la trasformazione

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

Affinché pure il campo elettrico rimanga invariato, si pone

$$\phi' = \phi - \partial_t f \implies E' = -\nabla\phi + \nabla(\partial_t f) - \partial_t \mathbf{A} - \nabla(\partial_t f) = E$$

Unendo le due trasformazioni nel quadri-potenziale, una trasformazione di gauge di prima specie è data da

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

Nell'equazione di campo si ha

$$\square A'^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A'^\nu) = \square A^\mu - \square \partial^\mu f - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) + \square \partial^\mu f = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Si ha una libertà ulteriore sulla scelta del potenziale vettore: le quantità indipendenti sono tre al posto di quattro. Ci sono varie scelte di gauge accorte. In particolare il gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

così come il gauge di Coulomb o di radiazione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

comoda in assenza di cariche. Tuttavia, questa non è covariante.

Le equazioni di campo sono invarianti di gauge e così pure il tensore di campo: esso contiene i campi che sono invarianti di gauge.

Si studia l'origine della scelta di gauge di Lorenz. Si consideri un quadri-potenziale A^μ che non si trovi in gauge di Lorenz e un altro quadri-potenziale A'^μ che si trovi nel gauge. Poiché vale

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu A'^\mu &= \partial_t \phi' + \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi + \nabla^2 f - \partial_t^2 f \\ \nabla^2 f - \partial_t^2 f &= -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi) \end{aligned}$$

Questa è un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali: ammette sempre soluzione e così si può sempre trovare una trasformazione per porsi nel gauge di Lorenz.

Tensore di Levi-Civita. Il tensore metrico è invariante per trasformazioni di Lorentz

$$\eta'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}$$

Similmente il delta di Kronecker

$$\delta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu}$$

Si introduce il tensore di Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ permutazione pari di } 0123 \\ -1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ permutazione dispari di } 0123 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Alcune identità sono

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

La prima deriva dal fatto che tutti i diversi prodotti dei tensori metrici η portano un segno negativo, mentre la seconda è data dal numero di permutazioni di quattro indici ed il segno

negativo è portato dai prodotti con i tensori metrici. La regola del determinante con il simbolo di Levi-Civita per una matrice 2×2 è

$$\varepsilon_{\alpha\beta} M^{\alpha\eta} \varepsilon_{\eta\theta} M^{\beta\theta} = 2 \det M$$

In n dimensioni, la relazione è analoga:

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} M^{\alpha_1 \beta_1} \dots M^{\alpha_n \beta_n} = n! \det M, \quad \alpha_i, \beta_j = 0, \dots, n-1$$

Si consideri una matrice di Lorentz

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} \Lambda_{\gamma\rho} \Lambda_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 24 \det \Lambda_{\iota\kappa}$$

Gli indici $\iota\kappa$ sono posti solo per indicare che la matrice di cui si calcola il determinante ha entrambi gli indici covarianti. Confrontando questa equazione con l'identità di contrazione degli indici nel tensore di Levi-Civita — in particolare, moltiplicando quest'ultima per $-\det \Lambda_{\iota\kappa}$ —, si ha

$$\Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} \Lambda_{\gamma\rho} \Lambda_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \det \Lambda_{\iota\kappa}$$

Alzando il primo indice di ogni matrice Λ e del tensore di Kronecker, si ha

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\rho \Lambda^\delta{}_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \det \Lambda^\iota{}_\kappa$$

notando che $\det \Lambda_{\iota\kappa} = \det(\eta_{\iota\xi} \Lambda^\xi{}_\kappa) = -1 \det \Lambda^\xi{}_\kappa$. Pertanto, il tensore di Levi-Civita è uno pseudo-tensore

$$\varepsilon' = (\det \Lambda) \varepsilon$$

Per trasformazioni improprie compare un segno negativo. Uno pseudo-tensore è una generalizzazione dei vettori assiali detti anche pseudo-vettori, come il momento angolare ed il campo magnetico.

Tensore duale. Il tensore duale di un tensore è dato da

$$\tilde{A}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\rho\sigma}$$

Solamente i tensori anti-simmetrici possono avere duale poiché il tensore di Levi-Civita ε è anti-simmetrico. Contrarre un duale con sé stesso fornisce uno scalare

$$\tilde{A}^{\mu\nu} \tilde{A}_{\mu\nu} = k$$

Mentre la contrazione di un tensore con il proprio duale fornisce uno pseudo-scalare

$$(\tilde{A}^{\mu\nu} A_{\mu\nu})' = \det \Lambda (\tilde{A}^{\mu\nu} A_{\mu\nu})$$

Invarianti del campo elettromagnetico. Si consideri lo scalare del tensore di campo

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) = \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

L'unico altro scalare che si può costruire è quello con il proprio duale

$$\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Essi sono entrambi invarianti, ma quest'ultimo è uno pseudo-scalare.

Se i campi sono ortogonali in un riferimento, allora lo sono in tutti. Se i moduli dei campi sono uguali in un riferimento, allora lo sono in tutti. A seconda del segno del primo invariante, se i due campi sono ortogonali, allora esiste un riferimento in cui un campo è nullo e l'altro non nullo.

2 Equazioni d'onda relativistiche

Si veda Bjorken e Drell “Relativistic quantum mechanics”, capp. 1 e 2.

Si vuole ricavare un'equazione d'onda simile a quella di Schrödinger, ma che soddisfi i postulati della meccanica quantistica e della meccanica relativistica. Il problema non è banale. L'equazione di Schrödinger utilizza la traslazione operatoriale $p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu$, ma considera delle derivate con ordini diversi

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

Risulta evidente che per trasformazioni di Lorentz, l'equazione non è più identica in forma.

Primo tentativo. Si consideri l'hamiltoniana relativistica

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \implies i\hbar \partial_t \psi = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi$$

L'azione di traslazione operatoriale è lecita, tuttavia il ruolo delle derivate è altamente asimmetrico a causa della radice. Essa è definita in termini dell'espansione in serie di potenze: appaiono tutte le potenze della derivata e quindi si hanno infinite derivate, infinite condizioni al contorno e il valore della funzione in un punto dipende da tutti gli altri punti, anche quelli al di fuori del cono di luce. Non si ha località né causalità.

In tutte le teorie che si studiano, avere derivate di ordine maggiore del primo porta a teorie patologiche.

Secondo tentativo. In generale, un'equazione operatoriale

$$A\psi = B\psi$$

si può iterare o quadrare solamente se i due operatori commutano. Infatti, applicando B da sinistra

$$BA\psi = B^2\psi = AB\psi = A^2\psi$$

Gli operatori di derivata temporale ∂_t e spaziale ∇^2 commutano. Si può quadrare:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi$$

Tuttavia, in questo modo si ammettono anche energie negative illimitate inferiormente e quindi non c'è stato fondamentale stabile. Infatti, si consideri una soluzione ad onde piane

$$\psi = \exp\left[-\frac{Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{i\hbar}\right] \implies E^2 = p^2 + m^2$$

Ignorando tale problematica, si prosegue. In forma compatta, l'equazione d'onda sopra diventa l'equazione di Klein–Gordon

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0$$

cioè un'equazione scalare con legge di dispersione data dalla relazione di Einstein. Si noti una certa somiglianza con l'equazione per il potenziale vettore nel gauge di Lorenz a meno del termine di massa. Essa è un invariante relativistico. Come per l'equazione di Schrödinger, si ricava la corrente di probabilità. Si moltiplica per ψ^* e ψ da sinistra e si fa la differenza:

$$\begin{aligned} \psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* &= 0 \\ \partial^\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) &= 0 \\ \partial_\mu J^\mu &= 0 \\ \partial_t (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) &= 0 \end{aligned}$$

Nel caso di Schrödinger, la prima parentesi è la densità di probabilità $\psi^* \psi$, ma in questo caso la parentesi non è definita positiva e non può rappresentare una densità di probabilità. Questo è un

altro problema. Integrando l'equazione di continuità si ottiene la conservazione di una probabilità non definita positiva

$$\partial_t \int d^3x (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = 0$$

Partendo da un pacchetto di onde a sole energie positive, l'operatore di evoluzione temporale porta subito le energie negative.

Si potrebbe affermare che le soluzioni ad energia negativa non siano fisiche e quindi non vadano considerate. Questo non si può fare perché, in meccanica quantistica, lo spazio funzionale è ortonormale e completo. Le soluzioni all'equazione di Klein–Gordon sono complete solo considerando anche le soluzioni ad energia negativa. Successivamente, queste si interpretano come le anti-particelle.

Si definisce la densità di probabilità dell'equazione di Klein–Gordon come

$$\rho \equiv \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$$

Nel coefficiente, la velocità della luce c^2 deriva dal d'Alembertiano, l'unità immaginaria rende l'espressione reale ed il fattore restante permette di ottenere un'espressione della corrente di probabilità identica a quella dell'equazione di Schrödinger.

Nel limite di $v \rightarrow 0$, si deve ottenere la meccanica quantistica classica. Nell'espressione della densità si sostituisce l'equazione di Schrödinger e si ottiene

$$\rho = \frac{E}{2mc^2} (\psi^* \psi + \psi \psi^*) = \frac{E}{mc^2} \psi^* \psi \sim \psi^* \psi$$

L'equazione di Klein–Gordon è un'equazione relativistica, ma con due problemi: l'energia negativa e la probabilità non definita positiva.

2.1 Equazione di Dirac

Si veda anche Dirac, “Principi della meccanica quantistica”, cap. “Teoria relativistica dell'elettrone”.

L'espressione della densità di probabilità, che presenta delle derivate temporali, è dovuta al fatto che l'equazione di Klein–Gordon è di secondo ordine. Dirac si rese conto che per ottenere una densità definita positiva bisogna passare ad un'equazione del prim'ordine.

Lezione 6

Dirac si concentrò sull'equazione al prim'ordine più generale

mar 10 ott
2023 10:30

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{\hbar c}{i} (\alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y + \alpha_3 \partial_z) \psi + \beta mc^2 \psi = H \psi$$

Il primo membro è la trascrizione operatoriale dell'energia, il secondo membro è il termine di massa insieme ad una generica somma delle derivate spaziali. Le derivate spazio-temporali devono apparire nella stessa forma affinché l'equazione sia relativisticamente corretta. Dirac si rese conto che i coefficienti α_i non possono essere numeri perché le derivate costituiscono il gradiente ed esso si trasforma come le componenti di un vettore. Tali coefficienti sono matrici. Similmente, la funzione d'onda non è scalare poiché la densità di probabilità $\rho = \psi^* \psi$ è la componente tempo di un quadri-vettore conservato (e quindi si deve trasformare come una componente temporale, ma gli scalari sono invarianti).

Indicando con ψ^\dagger la versione riga della funzione d'onda ψ , deve sempre valere

$$\rho = \psi^\dagger \psi$$

cioè ρ dev'essere una densità di probabilità: la funzione d'onda ψ si deve trasformare in modo che la densità di probabilità si trasformi come una componente temporale. Seguendo un'interpretazione probabilistica, l'integrale della densità

$$\int d^3x \rho$$

dev'essere invariante e, seguendo lo stesso discorso fatto per la carica elettrica, la misura d^3x si trasforma come un volume, perciò la densità ρ deve trasformarsi come una componente temporale. Pertanto, la funzione d'onda dev'essere un vettore colonna

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad \psi^\dagger = [\psi_1^* \quad \cdots \quad \psi_n^*]$$

Inoltre, dev'essere sempre verificata l'equazione di Klein–Gordon perché contiene ed è la trascrizione della relazione di dispersione di Einstein. Ogni componente della funzione d'onda deve soddisfare tale equazione

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi_i = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi_i$$

Si itera l'equazione lineare considerata da Dirac:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \partial_t^2 \psi_i &= \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha_i \partial_i + \beta m c^2 \right) \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha_j \partial_j + \beta m c^2 \right) \psi_i \\ &= \left[-\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j + \beta^2 m^2 c^4 + \frac{\hbar m c^3}{i} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i \right] \psi \end{aligned}$$

Si noti che gli indici ij non indicano componenti spaziali, ma si usano per abbreviare la scrittura; inoltre $\partial_i = \partial/\partial x_i$ con $x_i = x, y, z$. La derivata seconda è simmetrica per scambio degli indici. Il termine $\alpha_i \alpha_j$ si può scrivere in termini di una parte simmetrica ed una anti-simmetrica

$$\alpha_i \alpha_j = \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i \alpha_j - \alpha_j \alpha_i}{2}$$

La parte anti-simmetrica si annulla quando moltiplicata per la derivata seconda. L'equazione sopra dev'essere uguale a quella di Klein–Gordon per ogni componente. In quest'ultima non compare alcuna derivata mista, ma solamente il laplaciano, pertanto

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \implies \alpha_i^2 = I$$

Inoltre, non sono presenti derivate del prim'ordine:

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

Infine, per confronto si ottiene $\beta^2 = I$. Nell'equazione lineare considerata da Dirac, il secondo membro è l'operatore hermitiano. Da ciò segue la condizione di auto-aggiunzione dei coefficienti:

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta$$

Si consideri la traccia dei coefficienti

$$\text{Tr } \alpha_i = \text{Tr}(1\alpha_i) = \text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \beta \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr } \alpha_i \implies \text{Tr } \alpha_i = 0$$

dove alla quarta uguaglianza si è usata la proprietà di ciclicità della traccia

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$$

mentre alla quinta uguaglianza si è usata la relazione di anti-commutazione tra α_i e β . Le matrici α_i hanno traccia nulla e così β . Dalle relazioni dei quadrati delle matrici, segue che i loro autovalori sono ± 1 . Poiché la traccia è nulla (ed è la somma degli autovalori), allora le matrici hanno dimensione N pari. Le regole di commutazione corrispondono alle stesse delle matrici di Pauli, ma tali matrici sono solo tre. In quattro dimensioni $N = 4$ si ha

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

La funzione d'onda è un vettore di quattro componenti. L'equazione di Dirac è

$$i\hbar \partial_t \psi = -i\hbar c \alpha_i \partial_i \psi + \beta m c^2 \psi$$

Si consideri la corrente conservata ottenuta tramite l'equazione complessa coniugata

$$-i\hbar \partial_t \psi^\dagger = i\hbar c (\partial_i \psi^\dagger) \alpha_i + mc^2 \psi^\dagger \beta$$

Moltiplicando per la funzione d'onda e sottraendo l'equazione dalla coniugata, si ottiene

$$i\hbar \partial_t (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \partial_i (\psi^\dagger \alpha_i \psi) \implies \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Essendo un'equazione del prim'ordine, la quantità temporale è definita positiva. Si ha

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \psi_i^* \psi_i, \quad J^i = c \psi^\dagger \alpha^i \psi$$

Per ora non si è ancora dimostrato che le due quantità sopra costituiscono un quadri-vettore, né si è dimostrata l'invarianza relativistica della funzione d'onda, ma si è solo ricavata una sua corretta interpretazione probabilistica. Bisogna anche capire cosa sia la funzione d'onda.

Significato fisico delle soluzioni. Si studia il caso più semplice. L'operatore derivativo è l'operatore di momento. Ci si pone nel riferimento solidale alla funzione d'onda:

$$i\hbar \partial_t \psi = \beta mc^2 \psi$$

La soluzione di onda piana fornisce

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \exp\left(-i \frac{mc^2}{\hbar} t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \psi^2 &= \exp\left(-i \frac{mc^2}{\hbar} t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \psi^3 &= \exp\left(i \frac{mc^2}{\hbar} t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \psi^4 &= \exp\left(i \frac{mc^2}{\hbar} t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le prime due corrispondono ad energia positiva, le altre due ad energia negativa.

2.2 Limite non relativistico

Si veda Landau, vol. 2, par. 16. Si considera una soluzione ad energia positiva ed un campo esterno $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$.

Accoppiamento minimale. Si trova il termine di interazione minimale tra una carica ed il campo esterno. L'azione è il più generale invariante di Lorentz

$$S = \int_a^b \left(-mc \, ds - \frac{e}{c} A_\mu \, dx^\mu \right)$$

dove $ds = c \, dt \sqrt{1 - \beta^2}$ è invariante ed e è la carica. Il secondo addendo è pari a

$$-\frac{e}{c} A_\mu \, dx^\mu = \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - e\phi \, dt, \quad \mathbf{v} = d_t \mathbf{x}$$

Dunque

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

Il momento generalizzato (o coniugato, canonico) è

$$\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{v}} L = \gamma m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

dove \mathbf{p} è il momento meccanico (o cinetico). L'hamiltoniana è data da

$$H = \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{v}} L - L = \gamma mc^2 + e\phi = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\phi$$

Questa è l'interazione minimale.

Introducendo il campo esterno, il momento diventa

$$p^i = P^i \rightarrow p^i = P^i - \frac{e}{c} A^i$$

Nella quantizzazione canonica, la traslazione operatoriale $-i\hbar\nabla$ è fatta sul momento coniugato, non sul momento meccanico. Dunque, l'equazione di Dirac per una particella carica in un campo elettromagnetico esterno

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi$$

La funzione d'onda è una struttura a quattro componenti su cui operano le matrici α_i . La funzione d'onda è un bispinore che si può scrivere come un vettore di spinori

$$\psi = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Dato l'operatore del momento meccanico $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, l'equazione di Dirac diventa

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Si faccia attenzione alle dimensioni degli operatori: le matrici di Pauli sono bidimensionali e ognuna agisce solo su uno spinore, cioè una componente del bispinore intero.

Ordine zero e ordine primo. Si studia il limite non relativistico: l'energia cinetica è molto minore dell'energia a riposo della particella. Si sviluppa l'energia relativistica E in termini di $\frac{p}{mc} \approx \beta$

$$E = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc} \right)^4 + o(p/mc)^5 \right]$$

Il campo esterno dev'essere debole. In questa situazione il termine dominante che si trova nella soluzione ad onde piane è l'energia a riposo mc^2 . Si scrive la funzione d'onda separando il contributo rapidamente variabile — perché dipende da mc^2 — da quello lentamente variabile — la cui energia proviene dal campo esterno:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Inserendo questa espressione nell'equazione di Dirac, si ottiene

$$\begin{aligned} i\hbar \left(-i\frac{mc^2}{\hbar} \right) e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + i\hbar e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \left(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \varphi \\ -\chi \end{bmatrix} \right) \\ i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si hanno due equazioni in termini degli spinori φ e χ . Si consideri la seconda equazione. L'energia residua $i\hbar \partial_t \chi$ dovuta al campo esterno, cui si è già tolto il termine fortemente oscillante, è molta più piccola dell'energia di riposo mc^2 . Per questo, il primo membro — la derivata temporale — ed il secondo addendo del secondo membro — il termine con il potenziale scalare esterno debole — sono trascurabili rispetto all'ultimo termine. Dunque rimane

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} \approx 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \Rightarrow \chi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc} \varphi$$

Il secondo spinore è più piccolo rispetto al primo

$$\chi \sim \frac{v}{c} \varphi$$

Nel limite non relativistico, le componenti inferiori del bispinore sono superflue. Nella struttura fine dell'atomo di idrogeno, come si vede successivamente, si possono prendere anche ordini superiori nell'energia e quindi nella velocità.

Si sostituisce l'andamento sopra dello spinore χ nell'equazione di Dirac lentamente variabile:

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m} + e\phi \right] \varphi$$

Si consideri il termine di prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \pi_i \pi_j &= [\delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k] \pi_i \pi_j = [\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k] \left(P - \frac{e}{c} A \right)_i \left(P - \frac{e}{c} A \right)_j \\ &= \pi^2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \left[P_i P_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i P_j - \frac{e}{c} P_i A_j \right] \\ &= \pi^2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \left[P_i P_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i P_j - \frac{e}{c} A_j P_i - \frac{e}{c} (P_i A_j) \right] \\ &= \pi^2 - i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} (P_i A_j) = \pi^2 - \varepsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} \hbar (\partial_i A_j), \quad \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j = (\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k \\ &= \pi^2 - \frac{e}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Alla prima riga si utilizzano le regole di commutazione ed anti-commutazione delle matrici di Pauli:

$$2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k + 2\delta_{ij} I = [\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\sigma_i \sigma_j$$

Alla seconda riga, nell'ultimo addendo, bisogna ricordare che il momento coniugato è un operatore derivativo e la scrittura dell'addendo significa $P_i(A_j \varphi)$. Pertanto

$$-\frac{e}{c} P_i A_j = -\frac{e}{c} A_j P_i - \frac{e}{c} (P_i A_j)$$

L'ultimo addendo deriva solamente A_i e non la funzione d'onda. Alla terza riga il prodotto $A_i P_j$ è simmetrico per scambio degli indici e, sommato con il tensore di Levi-Civita, si ha zero. Lo stesso vale per $P_i P_j$ e $A_i A_j$.

Dunque, nel limite non relativistico, l'equazione di Dirac è

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\phi \right] \varphi$$

Questa è un'equazione di Pauli per una particella di carica e in un campo esterno. Il primo addendo è il termine cinetico, ma è comparso in modo naturale un termine di interazione con il campo magnetico.

Lezione 7

La definizione dell'operatore di momento di spin

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$$

viene in modo naturale. Esso è un momento angolare intrinseco, separato dal momento angolare corrispondente ai gradi di libertà spaziali.

L'equazione di Dirac descrive fermioni a spin $\frac{1}{2}$, mentre l'equazione di Klein-Gordon tratta bosoni scalari.

Fattore giromagnetico. Si consideri il caso particolare di un debole campo magnetico costante e uniforme. Il potenziale vettore di un campo magnetico costante è dato da

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x}$$

Sapendo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

mer 11 ott
2023 10:30

il campo magnetico è

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{x} \\ &= \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{x} = \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B} = \mathbf{B}\end{aligned}$$

Nel secondo addendo della prima riga, l'operatore differenziale si applica sia al campo magnetico che alla posizione. L'espressione $\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z$ è detta operatore di avvezione (advection operator).

La scrittura sopra è fuorviante. Un modo più semplice per verificarla è

$$\begin{aligned}B_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l x_m) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \partial_j (B_l x_m) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (B_l x_m) \\ &= \frac{1}{2} [x_j \partial_j B_i + B_i \partial_j x_j - x_i \partial_j B_j - B_j \partial_j x_i] = \frac{1}{2} [0 + 3B_i - 0 - B_j \delta_{ij}] = B_i\end{aligned}$$

Il primo zero deriva dal fatto che \mathbf{B} è costante, mentre il secondo deriva dalla legge di Gauss per il magnetismo.

Si consideri l'equazione di Pauli sopra. Il quadrato del momento meccanico è

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \left(P - \frac{e}{c} A\right)_i \left(P - \frac{e}{c} A\right)_i = P_i P_i - \frac{e^2}{c^2} A_i A_i - \frac{e}{c} A_i P_i - \frac{e}{c} P_i A_i \\ &\sim P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i - i \frac{e}{c} \hbar (\partial_i A_i) = P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i - i \frac{e}{2c} \hbar \partial_i [\varepsilon_{ijk} B_j x_k] \\ &= P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i = P^2 - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = P^2 - \frac{e}{c} \varepsilon_{ijk} B_j x_k P_i = P^2 - \frac{e}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}\end{aligned}$$

Alla seconda riga, si considera solamente il prim'ordine in \mathbf{A} . Inoltre, poiché \mathbf{B} è uniforme, vale

$$\partial_i [\varepsilon_{ijk} B_j x_k] = \varepsilon_{ijk} B_j \delta_{ik} = 0$$

giacché il delta di Kronecker è simmetrico e il tensore di Levi-Civita è anti-simmetrico.

Unendo quanto trovato si ha

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{P^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \right] \varphi$$

da cui si può trovare il fattore giromagnetico $g = 2$. Questo è tutto quanto si può trovare fino al prim'ordine in $\beta = v/c$.

Ordine secondo. Si veda Sakurai, Meccanica quantistica avanzata, §§ 3-3, 3-7. Si consideri l'equazione di Dirac di partenza:

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Si esplicita la dipendenza temporale della funzione d'onda:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Gli spinori a destra sono indipendenti dal tempo. Si vuole scoprire la struttura fine dell'atomo di idrogeno. Il potenziale è dato da

$$\phi = -\frac{Ze}{4\pi r}$$

da cui il momento meccanico diventa $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}$. Si riscrive l'equazione in modo diverso

$$(E - mc^2 - e\phi)\varphi = -i\hbar c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\chi, \quad (E + mc^2 - e\phi)\chi = -i\hbar c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\varphi$$

Si espande la relazione tra χ e φ fino al secondo ordine in β . Dalla seconda equazione si ha

$$\chi = -\frac{i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{E + mc^2 - e\phi} \varphi = \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{E + mc^2 - e\phi} \varphi$$

Si ipotizza il limite non relativistico:

$$E \approx mc^2, \quad |e\phi| \ll mc^2$$

Posta l'energia non relativistica pari a $E^{\text{NR}} = E - mc^2 \ll mc^2$, il termine a denominatore si riscrive come

$$(E + mc^2 - e\phi)^{-1} = (E^{\text{NR}} + 2mc^2 - e\phi)^{-1} = \frac{1}{2mc^2} \left(1 + \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{2mc^2} \left(1 - \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right)$$

Quindi

$$\chi \approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \varphi$$

La procedura segue lo stesso metodo dell'ordine precedente, tuttavia il calcolo è più complicato. Sorge anche un problema. Infatti, in precedenza si è passati dallo spinore alto del bispinore di Dirac allo spinore di Schrödinger e all'equazione di Pauli associata. In tal caso, la normalizzazione non è stata un problema. Lo spinore di Schrödinger φ_S deve conservare la normalizzazione del bispinore

$$\int d^3x |\varphi_S|^2 = \int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = 1$$

Ogni formula dev'essere coerente con l'ordine a cui si sta sviluppando. Nel secondo integrale, si ha un termine di ordine zero ed un termine di ordine β^2 rispettivamente. Nel caso precedente, la normalizzazione non è un problema poiché si considera l'espansione fino al prim'ordine in β e lo spinore di Schrödinger φ_S coincide con lo spinore φ componente del bispinore di Dirac. Tuttavia, ora bisogna essere accorti nella normalizzazione identificando correttamente lo spinore di Schrödinger. Evitare tale passaggio porta ad un'hamiltoniana non hermitiana. Dunque

$$\int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = \int d^3x \left[|\varphi|^2 - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi)^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi) \right]$$

dove si ha

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\partial_i\partial_j = \nabla^2$$

Pertanto

$$\int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = \int d^3x \left[|\varphi|^2 - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \varphi^* \nabla^2 \varphi \right] = \int d^3x \varphi^* \left[1 + \frac{P^2}{4m^2c^2} \right] \varphi$$

In questo modo si esplicita il primo spinore in termini del corretto spinore di Schrödinger:

$$\varphi_S = \left[1 + \frac{P^2}{8m^2c^2} + o\left(\frac{P^3}{m^3c^3}\right) \right] \varphi \iff \varphi = \left[1 - \frac{P^2}{8m^2c^2} + o\left(\frac{P^3}{m^3c^3}\right) \right] \varphi_S$$

Questo implica anche

$$\begin{aligned} \chi &\approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{E - mc^2 - e\phi}{2mc^2} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \left(1 - \frac{P^2}{8m^2c^2} \right) \varphi_S \\ &\approx \frac{1}{2mc} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \left(1 - \frac{P^2}{8m^2c^2} \right) - \frac{E - mc^2 - e\phi}{2mc^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \right] \varphi_S \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione di Dirac per lo spinore φ a cui si è rimossa la dipendenza temporale porta ad avere

$$E^{\text{NR}} \varphi_S = (E - mc^2) \varphi_S = \left[\frac{P^2}{2m} + e\phi - \frac{P^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{P}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] \varphi_S$$

Questa equazione è esatta fino al secondo ordine in β . Essa corrisponde all'equazione di Schrödinger per la struttura fine dell'atomo di idrogeno. La struttura fine segue automaticamente dall'equazione di Dirac.

Si analizzano gli ultimi tre termini. Il primo termine è la correzione relativistica

$$E = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc} \right)^4 + o(p/mc)^5 \right]$$

Il secondo è l'interazione spin-orbita. A Meccanica Quantistica, l'aggiunta di questo termine viene giustificata affermando che l'elettrone vede il protone, una particella carica, muoversi e quindi presentare un campo magnetico. Per trasformazioni di Lorentz, si ha

$$c\mathbf{B}' = \gamma(c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + o(\beta^2)$$

Ma utilizzare le trasformazioni di Lorentz è errato perché l'elettrone ha un riferimento non inerziale. Inoltre, manca la precessione di Thomas, un effetto puramente cinematico. Dall'equazione di Dirac, il fattore giromagnetico $g = 2$ viene già naturalmente. Per un potenziale centrale si ha

$$e\mathbf{E} = -\nabla(e\phi) = -\nabla V = -\mathbf{r} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \partial_r V \right)$$

Dunque

$$-\frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{P}) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} d_r V \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} d_r V \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} = \frac{g-1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} d_r V \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

L'ultimo addendo è il termine di Darwin e non ha alcun equivalente classico. In una teoria relativistica, la localizzazione di una particella perde di significato. Non ha senso affermare che un elettrone risente del campo elettrico del protone in un punto \mathbf{r} perché l'elettrone non può essere confinato in quel solo punto, ma è delocalizzato su una scala delle dimensioni data dalla propria lunghezza Compton: l'elettrone fluttua. Tale fluttuazione è detta zitterbewegung: la presenza di stati ad energia negativa non permette di localizzare una particella poiché si scopre che è presente una fluttuazione molto rapida. La densità di carica è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = e\delta^3(\mathbf{r})$$

Il termine di Darwin è data da

$$H_D = \frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2} \delta^3(\mathbf{r})$$

Solamente gli stati in onda s hanno una funzione d'onda non nulla nell'origine: il termine di Darwin ha contributi solamente per gli stati s. Se un elettrone non può essere localizzato meglio della propria lunghezza Compton, allora la scrittura $V(r)$ non ha senso, ma bisogna mediare temporalmente il potenziale in un volume isotropo grande quanto la lunghezza Compton. Dunque

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \approx V(r) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla V + \frac{1}{2} \delta x_i \delta x_j \partial_{x_i x_j}^2 V$$

Poiché il volume è isotropo, la media temporale dello spostamento $\delta\mathbf{r}$ è nulla e lo stesso si applica a δx_i e δx_j quando $i \neq j$. I fattori lineari si mediano a zero, mentre quelli quadratici forniscono contributi (ma non quelli misti). Quindi

$$\langle \Delta V \rangle \approx \frac{1}{6} \nabla^2 V \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2$$

Il fattore $1/3$ è la normalizzazione della media in ogni direzione. Questo è il contributo all'energia dovuto al fatto che l'elettrone è delocalizzato. In modo approssimato si ha

$$\langle \Delta V \rangle = \tilde{H}_D = \frac{e^2\hbar^2}{6m^2c^2} \delta^3(\mathbf{r})$$

ricordando che la permittività elettrica del vuoto ϵ_0 è 1 nelle unità di Heaviside–Lorentz e che vale (si veda Fisica Matematica)

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} = \delta^3(\mathbf{r})$$

Il calcolo approssimato fornisce la stessa formula del calcolo esatto, tranne per il fattore numerico.

L'unica cosa che manca da giustificare è il principio di Pauli. Infatti, si è già trovato il fattore giromagnetico, il termine spin-orbita e lo spin.

Lezione 8

gio 12 ott
2023 10:30

2.3 Covarianza

Si veda Bjorken e Mandl. Nel Bjorken, la matrice della trasformazione di Lorentz è $a^\mu{}_\nu$.

Le informazioni fisiche ricavate dall'equazione di Dirac sono risultati esatti in accordo con quanto già noto. Questo è stato possibile poiché l'elettrone dell'atomo di idrogeno è altamente non relativistico. Tuttavia, non si sa come trasforma il bispinore, né si è dimostrata la covarianza dell'equazione di Dirac.

La relazione che definisce le trasformazioni di Lorentz è data da

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho$$

D'ora in avanti si trattano solo le trasformazioni proprie. Inoltre, le trasformazioni ortocrone proprie si possono ottenere tramite trasformazioni infinitesime a partire dall'unità.

Le matrici α_i e β sono asimmetriche, si introducono le matrici di Dirac nella base di Dirac

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \gamma^0 \alpha_i = \beta \alpha_i$$

Sebbene si uniscano le matrici di Dirac in un quadri-vettore, bisogna considerarle come invarianti di Lorentz. Successivamente si studia cosa succede a tali matrici quando inserite tra spinori. L'equazione di Dirac diventa

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Si studiano le regole di commutazione delle matrici gamma. Le regole di commutazione delle matrici α_i e β sono

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

Si inserisce $\beta^2 = 1$ tra le matrici α_i del primo anti-commutatore:

$$\alpha_i\beta\beta\alpha_j + \alpha_j\beta\beta\alpha_i = 2\delta_{ij} \implies \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

Poiché le matrici α_i e β sono hermitiane, l'aggiunzione porta a

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i\beta = -\gamma^i$$

La matrice temporale è hermitiana, quelle spaziali sono anti-hermitiane. La traccia rimane nulla. In forma matriciale, le matrici di Dirac sono

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}$$

Si introduce la notazione di Feynman

$$\not{p} = \gamma^\mu v_\mu = \gamma^0 v_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}, \quad \not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$$

Introducendo il momento $p^\mu = i\hbar \partial^\mu$, l'equazione di Dirac diventa

$$(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0 \iff (\not{p} - mc)\psi = 0$$

Si dimostra la covarianza. Si considerino due riferimenti O ed O' . La scrittura dell'equazione di Dirac nel secondo riferimento è

$$(i\hbar\gamma'^\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0$$

Le matrici γ^μ sono state introdotte solamente in base alle proprie regole di anti-commutazione. Tali matrici sono equivalenti a meno di una trasformazione unitaria

$$\gamma'^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad U^\dagger = U^{-1}$$

pertanto, non si riporta più la distinzione delle matrici nei vari riferimenti.

La funzione d'onda si trasforma in modo lineare perché lo sono pure le trasformazioni di Lorentz e l'equazione di Dirac. Lo spinore si trasforma ed il suo argomento si trasforma secondo Lorentz. Posto $x' = \Lambda x$, vale

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

cioè deve esistere una trasformazione S , funzione della trasformazione di Lorentz, che mappa gli spinori nei due riferimenti. Dal primo e dal penultimo membro segue

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x)$$

cioè deve esistere la trasformazione inversa S^{-1} . Dunque si ottiene

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda)$$

L'equazione di Dirac nel riferimento O non primato in termini della funzione d'onda del riferimento primato è

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

Moltiplicando per $S(\Lambda)$ da sinistra si ha

$$[i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\partial_\mu - mc]\psi'(x') = 0$$

La derivata in termini dell'osservatore primato è

$$\partial_\mu = \partial_\mu x'^\nu \partial'_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$$

sapendo che $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho$. Inserendo questa espressione nell'equazione di Dirac sopra si ottiene

$$[i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - mc]\psi'(x') = 0$$

Questa è l'equazione di Dirac in termini di quantità del riferimento primato. Se esiste una trasformazione S tale che

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

allora l'osservatore primato scrive la stessa equazione di Dirac dell'osservatore iniziale. Poiché non si sa calcolare la trasformazione $S(\Lambda)$, si utilizzano le trasformazioni di Lorentz infinitesime. Una trasformazione di Lorentz infinitesima è data da

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \eta^\nu{}_\mu + (\Delta\omega)^\nu{}_\mu$$

dove $\Delta\omega$ è un parametro infinitesimo che non è arbitrario: deve conservare la norma. Considerando $x^\mu x_\mu$ nel riferimento primato e sostituendo l'espressione trasformata fino al prim'ordine, si ottiene

$$(\Delta\omega)_{\mu\nu} = -(\Delta\omega)_{\nu\mu}$$

Si noti che relazioni di (anti-)simmetria vanno ricavate per indici omologhi, cioè entrambi co(ntra)varianti. I termini misti del parametro infinitesimo si annullano ed esso ha sei gradi di libertà. Questi sono (quasi) i generatori del gruppo di Lorentz. Si sta seguendo una procedura opposta: dalla conservazione della norma, si stanno derivando le trasformazioni di Lorentz. Se la trasformazione Λ è infinitesima, allora si espande la trasformazione S in serie di potenze:

$$S \approx I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}, \quad S^{-1} \approx I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

dove $\sigma_{\mu\nu}$ è un tensore anti-simmetrico poiché la sua parte simmetrica sommata con $\Delta\omega$ fornisce zero. Si moltiplica l'equazione che caratterizza le trasformazioni S per S^{-1} ed S da sinistra e da destra rispettivamente:

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)$$

Si inserisce la trasformazione di Lorentz infinitesima

$$[\eta^\nu{}_\mu + (\Delta\omega)^\nu{}_\mu]\gamma^\mu = \left[1 + \frac{i}{4}\sigma_{\lambda\rho}(\Delta\omega)^{\lambda\rho}\right]\gamma^\nu \left[1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\Delta\omega)^{\alpha\beta}\right]$$

Si considerano tutti i termini al prim'ordine in $\Delta\omega$:

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu \gamma^\mu = -\frac{i}{4}(\Delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu]$$

Riscrivendo il primo membro in parte simmetrica e parte anti-simmetrica, e ricordando le proprietà di anti-simmetria del parametro infinitesimo, si ha

$$(\Delta\omega)^{\alpha\beta} \eta^\nu{}_\alpha \gamma_\beta = \frac{1}{2}(\Delta\omega)^{\alpha\beta} [\eta^\nu{}_\alpha \gamma_\beta - \eta^\nu{}_\beta \gamma_\alpha]$$

L'equazione sopra al prim'ordine nel parametro infinitesimo diventa

$$2i[\eta^\nu{}_\alpha \gamma_\beta - \eta^\nu{}_\beta \gamma_\alpha] = [\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}]$$

Se esistono sei matrici che soddisfano questa equazione, allora vale l'invarianza di Lorentz. Tali matrici sono date da⁴

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Si calcola la trasformazione S finita per sapere come si trasforma lo spinore. La sua versione infinitesima è data da

$$S = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\Delta\omega)^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu} (\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

Si scrive il parametro infinitesimo come

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu = \Delta\omega (I_n)^\nu{}_\mu$$

dove $\Delta\omega$ è un numero infinitesimo mentre I_n è uno dei sei generatori del gruppo di Lorentz.

Esempio. Si vede un esempio di una matrice I_n generatore. Si consideri la trasformazione prototipo lungo l'asse x . La matrice è data da

$$I^\nu{}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il suo quadrato ed il suo cubo sono dati da

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I^{2n}, \quad I^3 = I = I^{2n+1}$$

Ricordando l'espressione delle funzioni iperboliche e la loro espansione in serie di potenze, la trasformazione finita di una coordinata si ottiene applicando infinite volte la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x'^\nu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\eta + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_1}^\nu \left(\eta + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cdots \left(\eta + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_N}^{\alpha_{N-1}} x^{\alpha_N} = (e^{\omega I})^\nu{}_\mu x^\mu \\ &= [\cosh(\omega I) + \sinh(\omega I)]^\nu{}_\mu x^\mu = [1 - I^2 + I^2 \cosh \omega + I \sinh \omega]^\nu{}_\mu x^\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \end{aligned}$$

dove $\omega = \Delta\omega N$. Alla seconda riga si applicano le proprietà di I riguardo le potenze:

$$\begin{aligned} \cosh(I\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(I\omega)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I^{2k} \omega^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I^2 \omega^{2k}}{(2k)!} = 1 + I^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - I^2 + I^2 + I^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} = 1 - I^2 + I^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

⁴Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/381625>.

L'operazione per il seno iperbolico è più immediata. Segue

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \begin{bmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè le trasformazioni di Lorentz in forma iperbolica dove ω è la rapidità.

Trasformazione di un bispinore. La trasformazione di un bispinore è data da

$$\psi'(x') = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \sigma_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu} \right]^N \psi(x) = \exp \left[-\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu} \right] \psi(x) = S(\Lambda) \psi(x)$$

Per la trasformazione dell'esempio si ha

$$\psi'(x') = \exp \left[-\frac{i}{2} \omega \sigma_{01} \right] \psi(x)$$

Per una rotazione attorno all'asse z , il generatore è dato da

$$I^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\psi'(x') = \exp \left[\frac{i}{2} \sigma_{12} \varphi \right] \psi(x)$$

dove φ è l'angolo di rotazione. Per una rotazione completa, lo spinore cambia segno. Questo è simile a quanto si ottiene per gli spinori non relativistici

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}} \psi(x)$$

Proprietà delle trasformazioni degli spinori. La trasformazione di rotazione S_R è unitaria

$$S_R = \exp \left[-\frac{i}{4} \omega \sigma_{ij} (I_n)^{ij} \right] \implies S_R^\dagger = \exp \left[\frac{i}{4} \omega (\sigma_{ij})^\dagger (I_n)^{ij} \right] = \exp \left[\frac{i}{4} \omega \sigma_{ij} (I_n)^{ij} \right] = S_R^{-1}$$

Mentre le trasformazioni di boost

$$S_L = \exp \left[-\frac{i}{2} \sigma_{0i} \omega^{0i} \right]$$

e rotazioni entrambe soddisfano

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \iff S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$$

Densità di probabilità. Si dimostra che la densità di probabilità $\rho = \psi^\dagger \psi$ è la componente temporale di un quadri-vettore. La corrente di probabilità è data da

$$J^\mu = c \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$$

Per trasformazioni di Lorentz, solamente gli spinori ψ si trasformano:

$$J'^\mu = c \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi$$

Ricordando l'equazione che soddisfano le matrici S è

$$S \gamma^\mu S^{-1} \Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu \iff S^{-1} \gamma^\nu S = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$$

segue

$$J'^\mu = c\psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S S^{-1} \gamma^\mu S \psi = c\psi^\dagger \gamma^0 \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \psi = \Lambda^\mu_\nu c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \psi = \Lambda^\mu_\nu J^\nu$$

La corrente si trasforma come un vettore e per comodità si introduce lo spinore aggiunto

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \implies J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

La sua legge di trasformazione è data da

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}$$

La corrente di probabilità è conservata, ha una corretta interpretazione probabilistica e si comporta correttamente dal punto di vista relativistico.

Si vuole capire quanto di ciò visto ha un corrispondente classico. In particolare, si scrivono le equazioni di Ehrenfest utilizzando l'hamiltoniana di Dirac.

Lezione 9

mar 17 ott
2023 10:30

Si sta lavorando con una teoria di singola particella nel tentativo di generalizzare l'equazione di Schrödinger. Le uniche cose che non si sanno ancora spiegare sono il principio di Pauli ed il Lamb shift, uno scostamento più piccolo della struttura fine: esso proviene dall'auto-interazione dell'elettrone.

Equazioni di Ehrenfest. Si consideri l'equazione di Dirac con un campo esterno

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi = H\psi$$

Successivamente, è frequente separare l'hamiltoniana in una componente libera ed una componente di interazione

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

Il termine di interazione dell'equazione di Dirac è

$$H_{\text{int}} = -e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + e\phi$$

il cui corrispettivo classico è

$$H_{\text{int cl}} = -e \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} + e\phi$$

Da ciò si potrebbe pensare che nella teoria di Dirac, le matrici $\boldsymbol{\alpha}$ siano l'operatore velocità. Ricordando il teorema di Ehrenfest (si discutono di valori medi)

$$d_t \langle r_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, r_k] \rangle = \frac{i}{\hbar} c \left\langle \alpha_i \left[\left(P_i - \frac{e}{c} A_i \right) r_k - r_k \left(P_i - \frac{e}{c} A_i \right) \right] \right\rangle = c \langle \alpha_i [\partial_i r_k - r_k \partial_i] \rangle = c \langle \alpha_k \rangle$$

dove non si ha dipendenza esplicita della posizione \mathbf{r} — coordinata canonica — dal tempo. L'ultima parentesi è il commutatore delle variabili canoniche $[r_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$, alternativamente si può espandere la derivata del primo addendo. Questo conferma che l'operatore velocità nella teoria di Dirac siano le matrici α_i .

Si consideri l'equazione di Ehrenfest per il momento meccanico

$$\begin{aligned} d_t \langle \pi_k \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, \pi_k] \rangle + \langle \partial_t \pi_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \pi_k] \rangle - \frac{e}{c} \langle \partial_t A_k \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle [c\alpha_i \pi_i \pi_k - c\alpha_i \pi_k \pi_i + e\phi \pi_k - e\pi_k \phi] \rangle - \frac{e}{c} \langle \partial_t A_k \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} c \langle \alpha_i [\pi_i, \pi_k] \rangle + e \langle \phi \partial_k \rangle - e \langle (\partial_k \phi) \rangle - e \langle \phi \partial_k \rangle - \frac{e}{c} \langle \partial_t A_k \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} c \langle \alpha_i [\pi_i, \pi_k] \rangle + e \langle E_k \rangle = e \langle [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}]_k \rangle = e \left\langle \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]_k \right\rangle \end{aligned}$$

si ottiene la forza di Lorentz. Identificando l'operatore velocità con le matrici α_i si riscoprono i risultati classici.

Bisogna fare attenzione al parallelo tra il caso relativistico e non. Nella teoria di Schrödinger la corrente di probabilità \mathbf{J} è proporzionale al momento \mathbf{P} . Per una particella libera, la velocità \mathbf{v} che appare nella corrente è conservata. In questo caso, per l'identificazione della velocità con le matrici $\boldsymbol{\alpha}$, si ha che tali matrici non commutano con l'hamiltoniana, $[\boldsymbol{\alpha}, H] \neq 0$ — poiché non commutano tra di esse —, e quindi la velocità non si conserva più. Inoltre, esse hanno autovalori ± 1 : pertanto, nella teoria di Dirac l'operatore velocità ha autovalori $\pm c$. D'altra parte, considerando un pacchetto di onde, si ottiene una distribuzione continua di velocità tra $-c$ e c .

Energie negative e teoria delle buche. Dirac voleva risolvere il problema delle energie negative: se sono presenti stati disponibili ad energia negativa, non esiste uno stato fondamentale stabile. Egli considerò la seguente situazione. Le energie negative si trovano nell'intervallo $(-\infty, -mc^2]$, mentre quelle positive tra $[mc^2, \infty)$. Tra le due c'è un energy gap. Dirac affermò che tutti gli stati ad energia negativa sono pieni, quindi nessuno stato può scendere ad energie negative. Diversamente da Klein e Gordon, si può affermare che tutti gli stati sono occupati poiché l'equazione di Dirac descrive dei fermioni che obbediscono al principio di esclusione di Pauli.

Dirac pensò che nella regione delle energie negative sono presenti delle buche con carica negativa $-e$. Si consideri una radiazione assorbita da uno stato ad energia negativa. Se la radiazione ha energia sufficiente, $E > 2mc^2$, allora la particella in tale stato può passare alla regione delle energie positive: si ha un elettrone. Nella buca c'è l'assenza di una carica negativa e l'assenza di energia negativa: si ha una carica positiva ed energia positiva, un positrone. La giustificazione dell'anti-materia è possibile dopo aver quantizzato il campo di Dirac. Vale anche il viceversa: se esiste un positrone, esso può riempire una buca ed emettere radiazione (l'annichilazione elettrone-positrone).

Queste sono le basi per la fine della teoria di singola particella.

2.4 Soluzioni per una particella libera

Si sono già viste le soluzioni ad onda piana nel riferimento solidale con la particella. Tramite il metodo del boost si possono trovare le soluzioni in ogni altro sistema di riferimento inerziale. Il generico bispinore è

$$\psi^r(x) = w^r(0)e^{-i\varepsilon_r \frac{mc^2}{\hbar} t}, \quad r = 1, 2, 3, 4$$

dove

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$$

mentre il fattore $w^r(0)$ indica degli spinori che dipendono dal momento lineare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se una particella è inizialmente solidale con il proprio riferimento, allora per vederla con una velocità \mathbf{v} bisogna operare un boost in direzione $-\mathbf{v}$. Si rende l'esponente covariante esplicitando il quadri-momento $p_\mu^{(0)}$ nel riferimento solidale:

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r mc^2 t\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r p_\mu^{(0)} x^\mu\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r p'_\mu x'^\mu\right]$$

dove i termini primati appartengono ad un riferimento inerziale arbitrario. Il quadri-vettore momento è un quadri-vettore di tipo tempo

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 > 0$$

dunque la sua componente temporale non cambia segno per trasformazioni proprie di Lorentz: l'energia mantiene il segno in ogni riferimento.

Si consideri un boost nella direzione x :

$$S_L = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}}$$

Gli spinori trasformati sono

$$w^r(p) = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}\right]w^r(0) = \left(\cosh\frac{\omega}{2} - \alpha_1 \sinh\frac{\omega}{2}\right)w^r(0)$$

dove $\sigma_{01} = -i\alpha_1$ e alla seconda uguaglianza si è scritto l'esponenziale in termini di funzioni iperboliche che vengono espanse in serie di potenze per poter portare fuori dall'argomento la matrice α_1 , ricordando che $\alpha_1^2 = I$.

Per una velocità in direzione generica, si ha

$$(I_n)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\zeta & -\cos\eta & -\cos\theta \\ -\cos\zeta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\eta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordando

$$p^\mu = \frac{1}{c}(E, E\beta), \quad \beta = \frac{pc}{E}$$

e sapendo le formule di bisezione per le funzioni iperboliche, si ottiene

$$-\tanh\frac{\omega}{2} = \frac{-\tanh\omega}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2\omega}} = \frac{\beta}{1 + \gamma^{-1}} = \frac{pc}{E + mc^2}, \quad \cosh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

Nella formula di trasformazione dello spinore, si ha

$$w^r(p) = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu\nu}\right] = \exp\left[-\frac{\omega}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right]w^r(0)$$

Riformulando l'esponenziale secondo funzioni iperboliche, espandendo queste in serie di potenze e sapendo che le proprietà delle potenze di $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}$ sono analoghe a quelle di α_i , si ottiene la seguente forma matriciale

$$w^r(p) = S(\Lambda)w^r(0) = [2mc^2(E + mc^2)]^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} E + mc^2 & 0 & p_z c & p_- c \\ 0 & E + mc^2 & p_+ c & -p_z c \\ p_z c & p_- c & E + mc^2 & 0 \\ p_+ c & -p_z c & 0 & E + mc^2 \end{bmatrix} w^r(0)$$

dove $p_\pm = p_x \pm ip_y$. Quindi la soluzione generica per una particella libera è

$$\psi^r(x) = w^r(p)e^{-i\epsilon_r \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}$$

Soluzioni ad energia definita. Si veda Mandl, appendice A.4 e A.8. Le soluzioni indipendenti sono quattro bispinori, due per ogni segno dell'energia:

$$\psi(x) = C \begin{cases} u_r(p)e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}, & E > 0, \quad r = 1, 2 \\ v_r(p)e^{\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}, & E < 0, \quad r = 3, 4 \end{cases}$$

con C costante di normalizzazione. L'indice r indica la direzione dello spin. Si introduce lo spinore aggiunto

$$\bar{u}_r(p) = u_r^\dagger(p)\gamma^0, \quad \bar{v}_r(p) = v_r^\dagger(p)\gamma^0$$

L'equazione di Dirac per tali soluzioni è

$$(i\hbar\boldsymbol{\not{p}} - mc)e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}u_r(p) = 0, \quad (i\hbar\boldsymbol{\not{p}} - mc)e^{\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}v_r(p) = 0$$

Applicando la derivata si ottiene

$$e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}[i(-i)p_\mu\gamma^\mu - mc]u_r(p) = 0 \implies (\not{p} - mc)u_r(p) = 0$$

mentre per $v_r(p)$ si ha

$$(\not{p} + mc)v_r(p) = 0$$

L'equazione di Dirac per il bispinore aggiunto è

$$\begin{aligned} u^\dagger(p)[p_\mu(\gamma^\mu)^\dagger - mc]\gamma^0 &= u^\dagger(p)[p_0(\gamma^0)^\dagger - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}^\dagger - mc]\gamma^0 = u^\dagger(p)[p_0\gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - mc]\gamma^0 \\ &= u^\dagger(p)\gamma^0[p_0\gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - mc] \end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione per il bispinore coniugato è

$$\bar{u}(p)(\not{p} - mc) = 0, \quad \bar{v}(p)(\not{p} + mc) = 0$$

Onde piane. Si costruiscono le espressioni delle onde piane ad energia positiva ed energia negativa. Si introducono due spinori

$$\chi_1 = \chi'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \chi'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tali per cui

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi'_r \end{pmatrix}$$

Nella scrittura di $v_r(0)$ si utilizza χ'_r poiché successivamente si identificano queste soluzioni con le anti-particelle le quali hanno spin nella direzione opposta rispetto alle particelle associate. La trasformazione degli spinori si può scrivere come

$$S(\Lambda) = \frac{\not{p} + mc\gamma_0}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}}\gamma_0$$

Applicandola alle soluzioni indipendenti, si ottiene la loro forma per p arbitrario:

$$u_r(p) = \frac{mc + \not{p}}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}}u_r(0), \quad v_r(p) = \frac{mc - \not{p}}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}}v_r(0)$$

Si verifica la coerenza di quanto trovato. L'equazione di Dirac è

$$(\not{p} - mc)\frac{mc + \not{p}}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}}u_r(0) = \frac{\not{p}\not{p} - m^2c^2}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}}u_r(0) = 0$$

dove si ha

$$\not{p}\not{p} = p_\mu\gamma^\mu p_\nu\gamma^\nu = \frac{1}{2}p_\mu p_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}p_\mu p_\nu 2\eta^{\mu\nu} = \|p\|^2 = m^2c^2$$

Alla seconda uguaglianza si utilizza il fatto che p_μ è simmetrico mentre γ_μ non ha simmetria definita, ma viene scritto in parte simmetrica ed anti-simmetrica. Da ciò l'equazione di Dirac è risolta.

La scrittura in due spinori di un bispinore ad energia positiva è

$$u_r(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \chi_r \end{pmatrix}$$

Da questo si vede che le componenti basse sono meno intense delle componenti alte di un fattore β come già ricavato nel limite relativistico. La situazione è opposta per $v_r(p)$.

Normalizzazione. Si veda Bjorken. La normalizzazione dei bispinori è

$$\bar{u}_r u_s = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r v_s = -\delta_{rs}$$

Il segno meno nella relazione per v_r è portato dalla matrice γ_0 . Inoltre

$$u^\dagger u = \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left(\chi^\dagger \quad \chi^\dagger \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \right) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \chi \end{pmatrix} = \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left[1 + \frac{E^2 - m^2c^4}{(E + mc^2)^2} \right] = \frac{E}{mc^2} = \gamma$$

dove non si specifica il pedice r e si ricorda

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})I + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \implies c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = c^2\|\mathbf{p}\|^2 = E^2 - m^2c^4$$

così come $\chi^\dagger \chi = 1$. Il prodotto calcolato è la densità di probabilità che si trasforma come una componente temporale al fine di lasciare la probabilità ρdV invariata.

Covarianti bilineari. Poiché per rotazioni nello spazio, si ha metà rotazione di uno spinore, allora le osservabili fisiche sono funzioni bilineari negli spinori. Tramite i prodotti delle matrici di Dirac si possono costruire sedici matrici indipendenti che ricorrono spesso nella teoria di Dirac

$$\Gamma^S = I, \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu, \quad (\Gamma_{\mu\nu})^T = \sigma_{\mu\nu}, \quad \Gamma^P = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma^5 = \gamma_5, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_5\gamma_\mu$$

dove S sta per scalare, V per vettore, T per tensore, P per pseudo-scalare, e A per (vettore) assiale, cioè pseudo-vettore. Si noti che questa classificazione è da intendersi riferita ai prodotti con spinori, cioè alle osservabili:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$$

Utilizzando la relazione di anti-commutazione delle matrici di Dirac, si può dimostrare che le sedici matrici Γ^n sono linearmente indipendenti:

- per ogni Γ^n vale $(\Gamma^n)^2 = \pm I$,
- per ogni Γ^n diversa da Γ^S , esiste una Γ^m tale per cui

$$\Gamma^n\Gamma^m = -\Gamma^m\Gamma^n \iff \{\Gamma^n, \Gamma^m\} = 0$$

Da ciò segue che la traccia di ogni matrice diversa da Γ^S è nulla

$$\pm \text{Tr} \Gamma^n = \text{Tr} [\Gamma^n (\Gamma^m)^2] = -\text{Tr} [\Gamma^m \Gamma^n \Gamma^m] = -\text{Tr} [\Gamma^n (\Gamma^m)^2] = \mp \text{Tr} \Gamma^n \implies \text{Tr} \Gamma^n = 0$$

alla seconda uguaglianza si è applicato l'anti-commutatore, mentre alla terza uguaglianza si è applicata la proprietà di ciclicità della traccia.

- Date Γ^a e Γ^b con $a \neq b$, esiste una matrice Γ^n diversa da Γ^S tale che

$$\Gamma^a\Gamma^b = \Gamma^n$$

Lezione 10

mer 18 ott
2023 10:30

- Si supponga l'esistenza di coefficienti a_n tali che

$$\sum_n a_n \Gamma^n = 0$$

cioè una combinazione lineare delle matrici che dia il vettore nullo. Si moltiplica per Γ^m e ne si fa la traccia. Utilizzando il primo punto, il punto precedente e sapendo che $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$, si ottiene

$$\sum_n a_n \Gamma^n \Gamma^m = 0 \implies a_m = 0$$

Poiché m è arbitrario, tutti i coefficienti sono nulli.

Pertanto, le matrici sono linearmente indipendenti (l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella banale). Poiché esistono solo sedici matrici indipendenti, allora ogni altra matrice si può scrivere come loro combinazione lineare. Questo significa anche che le osservabili fisiche sono sedici:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$$

uno scalare, un vettore, un tensore di tipo 2, uno pseudo-scalare ed uno pseudo-vettore. Le ultime due osservabili non compaiono nell'elettrodinamica quantistica, ma sono utili per l'interazione debole in cui sorge la violazione della parità.

Parità. Alcune proprietà della quinta matrice gamma sono

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0, \quad [S, \gamma^5] = 0$$

per tutte le trasformazioni di Lorentz proprie. In elettrodinamica quantistica non ci si occupa della violazione di parità poiché tale interazione conserva la parità, a differenza dell'interazione debole. La trasformazione di Lorentz per inversione degli assi, la trasformazione di parità, è data da

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad t' = t, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'equazione che caratterizza la trasformazione $S = P$ degli spinori è

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = P^{-1} \gamma^\nu P \implies \gamma^0 = P^{-1} \gamma^0 P, \quad \boldsymbol{\gamma} = -P^{-1} \boldsymbol{\gamma} P$$

che è soddisfatta da

$$P = e^{i\varphi} \gamma^0$$

Da ciò si può evincere anche

$$\{\gamma^5, P\} = 0$$

L'operatore di parità è la matrice γ^0 a meno di un fattore di fase che può essere scelto pari a ± 1 o $\pm i$ qualora si richieda che quattro riflessioni portino lo spinore nella condizione originale $P^4 = I$. La coniugazione della carica e l'inversione temporale sono trattate successivamente.

Si dimostra la natura di pseudo-scalare dell'osservabile $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$. Si ricorda

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}, \quad \gamma^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu S \gamma^\mu S^{-1}, \quad \gamma^5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

Nel riferimento in cui si è cambiata la parità si ha

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' \gamma^5 \psi' &= \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^5 S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^5 S \psi = \bar{\psi} S^{-1} \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma S \psi \\ &= \bar{\psi} S^{-1} \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha S \gamma^\alpha S^{-1} \Lambda^\nu{}_\beta S \gamma^\beta S^{-1} \Lambda^\rho{}_\gamma S \gamma^\gamma S^{-1} \Lambda^\sigma{}_\delta S \gamma^\delta S^{-1} S \psi \\ &= \bar{\psi} \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \psi \\ &= \bar{\psi} (\det \Lambda) \frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \psi = \bar{\psi} \gamma^5 \psi \det \Lambda \end{aligned}$$

Alla prima riga si inserisce $1 = \gamma^0 \gamma^0$ nel prodotto $\psi^\dagger S^\dagger$ e poi si applica la prima e la terza relazione sopra. Alla seconda riga si è utilizzata la seconda relazione per ogni matrice γ^μ . Alla quarta riga si è applicata un'identità del tensore di Levi-Civita. Da questo risultato si evince la natura di pseudo-scalare.

Nella teoria di Dirac si possono costruire sedici osservabili e si conoscono tutte le proprietà sotto trasformazioni di Lorentz proprie ed improprie.

2.5 Proiettori

Si veda Mandl. La soluzione generale all'equazione di Dirac è una sovrapposizione di soluzioni ad energia positiva ed energia negativa. Risulta utile avere un proiettore: dato uno stato generico si proiettano separatamente l'energia positiva e l'energia negativa.

Proiettori dell'energia. Il proiettore dell'energia è dato da

$$\Lambda_r(p) = \frac{\varepsilon_r \not{p} + mc}{2mc}, \quad r = \pm, \quad \varepsilon_r = \pm 1$$

Esso è idempotente e applicare i due proiettori in successione deve dare zero

$$\Lambda_r^2 = \Lambda_r, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0$$

Infatti, si consideri

$$\begin{aligned}\Lambda_r(p)\Lambda_s(p) &= \frac{(\varepsilon_r \not{p} + mc)(\varepsilon_s \not{p} + mc)}{4m^2c^2} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_s \not{p} \not{p} + m^2c^2 + (\varepsilon_r \not{p} + \varepsilon_s \not{p})mc}{4m^2c^2} \\ &= \frac{(\varepsilon_r \varepsilon_s + 1)m^2c^2 + mc \not{p}(\varepsilon_r + \varepsilon_s)}{4m^2c^2} = \frac{(\varepsilon_r \varepsilon_s + 1)m^2c^2 + \varepsilon_r mc \not{p}(1 + \varepsilon_r \varepsilon_s)}{4m^2c^2} \\ &= \frac{1 + \varepsilon_r \varepsilon_s}{2} \frac{\varepsilon_r \not{p} + mc}{2mc} = \frac{1 + \varepsilon_r \varepsilon_s}{2} \Lambda_r(p)\end{aligned}$$

Per $r = s$ si ha l'idempotenza mentre per $r \neq s$ si ha zero. Inoltre, dalla definizione segue

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = I$$

Considerata una soluzione ad energia positiva, si ha

$$\Lambda_+(p)u_r(p) = u_r(p), \quad \bar{u}_r\Lambda_+ = \bar{u}_r$$

Similmente per Λ_- e la soluzione ad energia negativa v_r .

Dai proiettori si può ricavare una formula utile da poi utilizzare con i diagrammi di Feynman. Si scrive la regola di completezza

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(p)\bar{u}_{r\beta}(p) - v_{r\alpha}(p)\bar{v}_{r\beta}(p)] = \delta_{\alpha\beta}$$

Si noti che $u\bar{u}$ è un operatore, non uno scalare. L'indice r descrive lo spin, mentre gli indici α, β indicano le componenti del bispinore. Si dimostra tale formula ricordando la completezza nel riferimento solidale:

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon_r w_\alpha^r(0) \bar{w}_\beta^r(0) = \delta_{\alpha\beta}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(p)\bar{u}_{r\beta}(p) - v_{r\alpha}(p)\bar{v}_{r\beta}(p)] &= \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r w_\alpha^r(p) \bar{w}_\beta^r(p) \\ &= \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r S_{\alpha\gamma} w_\gamma^r(0) (w_\delta^r)^\dagger(0) S_{\delta\beta}^\dagger \gamma^0 \\ &= \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r S_{\alpha\gamma} w_\gamma^r(0) (w_\delta^r)^\dagger(0) \gamma^0 \gamma^0 S_{\delta\beta}^\dagger \gamma^0 \\ &= S_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma\delta} S_{\delta\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

dove $S_{\alpha\beta}$ è la trasformazione che permette di ottenere lo spinore con momento p , mentre alla quarta riga si utilizza la completezza sopra.

L'operatore di proiezione ad energia positiva si può riscrivere come

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta}(p) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p)$$

Si dimostra. La somma coinvolge solo soluzione ad energia positiva, ma si può riscrivere in termini di tutte le energie a cui si applica un proiettore:

$$\sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p) = \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r w_{r\alpha}(p) \bar{w}_{r\beta}(p) \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\delta\beta} = \delta_{\alpha\delta} \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\delta\beta} = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta}$$

Alla seconda uguaglianza si applica la relazione di completezza. In questo modo si può passare da spinori a proiettori, ad esempio, nel calcolo delle probabilità di transizione. Si ha una relazione simile per v_r e Λ_- .

Proiettori dello spin. Si veda Landau, Vol. 4, §21, p. 79? e Mandl, A.6. Già in Meccanica Quantistica si sono visti i proiettori dello spin σ_z . Passando ai bispinori, la generalizzazione da considerare è

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\gamma^5, \quad \sigma^{ij} = \begin{bmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k = \Sigma_k$$

con ijk ciclici. Ad esempio si ha

$$\frac{1}{2}\Sigma_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tuttavia, si ha un problema. Tale operatore di spin non commuta con l'hamiltoniana

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + bm, \Sigma] \neq 0$$

Infatti, considerato

$$\alpha_i \Sigma_j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \sigma^j \\ \sigma^i \sigma^j & 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + bm, \Sigma_j] = \begin{bmatrix} 0 & [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \sigma^j] \\ [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \sigma^j] & 0 \end{bmatrix}$$

I commutatori sono nulli solamente nel riferimento solidale in cui si ha $\mathbf{p} = 0$. Lo spin così definito non rappresenta un buon numero quantico perché con si conserva nel tempo dato che non commuta con l'hamiltoniana.

D'altra parte, l'elicità commuta

$$[H, \sigma_p] = 0, \quad \sigma_p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}), \quad \sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k$$

infatti

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}] = p_i p_j [\sigma^i, \sigma^j] = 0$$

poiché $p_i p_j$ è simmetrico, mentre il commutatore è anti-simmetrico. L'elicità è un buon numero quantico. Nella base di Dirac, o rappresentazione di Dirac-Pauli (si veda Mandl, A.8) si ha

$$\sigma_p u_r = (-1)^{r+1} u(p), \quad \sigma_p v_r(p) = (-1)^r v(p)$$

Le soluzioni v_r si possono immaginare come particelle con energia negativa e momento $-\mathbf{p}$: l'elicità cambia segno. La scrittura esplicita delle soluzioni ad energia definita, ad esempio

$$u_r(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{bmatrix} \chi_r \\ \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \chi_r \end{bmatrix}$$

non è un auto-stato dell'elicità, ma è un auto-stato di Σ_z a $p = 0$. Per ottenere gli auto-stati bisogna cambiare base cioè la forma della matrici di Dirac (la base di Weyl?).

I proiettori di spin sono

$$\Pi^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_p)$$

Valgono le stesse proprietà dei proiettori dell'energia: idempotenza e l'applicazione successiva dei due proiettori fornisce zero.

L'elicità è un buon numero quantico perché si conserva nel tempo, ma non è un invariante di Lorentz. Solo per massa nulla, essa è un invariante. Una particella con elicità positiva è detta right-handend, mentre con elicità negativa è detta left-handend. Viceversa, la chiralità non si conserva nel tempo, ma è invariante di Lorentz poiché è determinata dalla rappresentazione del gruppo di Poincaré (right- o left-handed) con cui la particella si trasforma.

2.6 Equazioni di Weyl

Ad oggi non si sono scoperti fermioni elementari di massa nulla. Infatti, le masse dei neutrini sono molto più piccole della massa dell'elettrone, ma non zero (a causa delle oscillazioni dei neutrini).

Quando si è trattata l'equazione di Dirac, si è passati da uno spazio a due componenti spinoriali ad uno spazio a quattro componenti aggiungendo la matrice β , il coefficiente della massa. Per fermioni a massa nulla, tale matrice non serve. L'equazione di Dirac con massa nulla si riduce alle equazioni di Weyl.

Posto $m = 0$ e notando $E = p_0 = p^0 = |\mathbf{p}|$, l'equazione di Dirac senza massa è

$$\begin{aligned} (\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) w_r(p) &= 0 \\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} w_r(p) &= \gamma^0 |\mathbf{p}| w_r(p) \\ \gamma^5 \gamma^0 \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} w_r(p) &= \gamma^5 w_r(p) \\ \sigma_p w_r(p) &= \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} w_r(p) = \gamma^5 w_r(p) \end{aligned}$$

Alla terza riga si è moltiplicato per $\gamma^5 \gamma^0$, mentre alla quarta riga si ricorda $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ e $\boldsymbol{\Sigma} = -\gamma^0 \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}$. Nel limite di massa nulla, l'operatore di elicità è la matrice γ^5 . Il proiettore è dato da

$$\Pi^\pm(p) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$$

Matrici di Pauli. Si veda Bjorken, cap. 10.12. Considerata l'equazione di Dirac senza massa

$$i\hbar \partial_t \psi = -i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi$$

le matrici α_i che soddisfano le regole di anti-commutazione necessarie all'equazione sopra sono le matrici di Pauli con segno positivo oppure negativo. Quindi

$$Eu = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u(p, s)$$

dove s è la direzione della proiezione dello spin lungo il momento. La soluzione di onda piana con elicità right-handed è

$$u(p, +) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per cui vale

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E} u(p, +) = u(p, +)$$

Similmente, per particelle left-handed si sceglie $\alpha_i = -\sigma_i$ e si ha

$$u(p, -) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E} u(p, -) = -u(p, -)$$

Base di Weyl. La base di Weyl è utile per esplicitare le componenti right- e left-handed di un bispinore. Si consideri la seguente rappresentazione

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a cui si può arrivare tramite il cambio di base

$$\gamma_W^\mu = U \gamma_D^\mu U^\dagger, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^5 \gamma^0), \quad \psi_W = U \psi_D$$

dove le matrici γ sono nella base di Dirac. Considerato

$$\psi = \begin{bmatrix} u(+) \\ u(-) \end{bmatrix}$$

si ha

$$i\hbar \partial_t u(+) = -i\hbar (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) u(+) - mu(-), \quad i\hbar \partial_t u(-) = i\hbar (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) u(-) - mu(+)$$

Le soluzioni ad energia positiva e quelle ad energia negativa sono accoppiate solamente a causa del termine di massa. Per $m = 0$ le equazioni si disaccoppiano e costituiscono le equazioni di Weyl. Pertanto

$$i\hbar \partial_t \psi = \mp i\hbar (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi$$

Dunque quattro componenti sono troppe se la massa è nulla. Vale

$$\gamma^5 \psi(+) = \psi(+), \quad \gamma^5 \psi(-) = -\psi(-)$$

cioè energie positive hanno solo elicità positiva, mentre energie negative hanno solo elicità negativa. Questo viola la parità: lo spin è un vettore assiale e per trasformazione di parità cambia segno, ma dalle equazioni sopra non si può avere una particella senza massa ad energia positiva ed elicità negativa.

Lezione 11

Le equazioni di Weyl vennero rigettate perché violano la parità. Si veda Bjorken capp. 10-12.

gio 19 ott
2023 10:30

3 Formalismo lagrangiano

Si risolve il problema delle energie negative. Si usa sempre la teoria lagrangiana per i campi che viene di seguito introdotta. Si veda Landau e Mandl?

In un sistema classico, è presente una lagrangiana ed un funzionale azione

$$L(q, \dot{q}), \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}), \quad \delta S = 0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2$$

Tra tutte le equazioni, quelle del moto minimizzano il funzionale azione. Gli estremi della traiettoria sono punti fissati e si studiano le variazioni della traiettoria. La variazione della lagrangiana è data da

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt [\partial_q L \delta q + \partial_{\dot{q}} L \delta \dot{q}]$$

Integrando per parti e sapendo $\delta(q_1) = \delta(q_2) = 0$, così come

$$\delta \dot{q} = \delta(d_t q) = d_t(q + \delta q) - d_t q = d_t \delta q$$

si ottiene il secondo addendo

$$\int dt \partial_{\dot{q}} L d_t(\delta q) = \partial_{\dot{q}} L \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt d_t(\partial_{\dot{q}} L) \delta q = - \int_{t_1}^{t_2} dt d_t(\partial_{\dot{q}} L) \delta q$$

Pertanto, la variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt [\partial_q L - d_t(\partial_{\dot{q}} L)] \delta q$$

Poiché la variazione δq è arbitraria, allora vale

$$\partial_q L - d_t(\partial_{\dot{q}} L) = 0$$

cioè le equazioni di Eulero-Lagrange.

Si ricordi l'esempio della molle nel passaggio ad infiniti gradi di libertà. Le coordinate canoniche q_i diventano un campo $\varphi(x_i)$ nel limite del passo reticolare $a \rightarrow 0$ e del volume $V \rightarrow \infty$. Si introduce la densità di lagrangiana

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$$

Non si può avere $\dot{\varphi}$ poiché si vuole avere una teoria relativisticamente corretta. Si introducono anche le derivate spaziali

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

Questa non è una condizione sufficiente affinché la teoria sia relativisticamente corretta: bisogna anche verificare la covarianza.

Rispetto al caso classico, l'argomentazione cambia di poco. In generale si considera un numero arbitrario di campi $\varphi_r(x)$ definiti come funzione del tempo e della posizione. L'azione è data da

$$S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r)$$

Nel principio di minima azione, cambiano i campi

$$\varphi_r(x) \mapsto \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x)$$

dove la variazione è nulla su $\partial\Omega$ [r]. La variazione dell'azione è

$$\delta S = \int d^4x [\partial_{\varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r + \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta(\partial_\mu \varphi_r)]$$

Come in precedenza, si ha

$$\delta(\partial_\mu \varphi_r) = \partial_\mu(\varphi_r + \delta\varphi_r) - \partial_\mu(\varphi_r) = \partial_\mu(\delta\varphi_r)$$

Utilizzando la formula per la derivata di un prodotto, il secondo addendo diventa

$$\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta(\partial_\mu \varphi_r) = \partial_\mu(\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r) - (\partial_\mu \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L}) \delta\varphi_r$$

La variazione dell'azione diventa

$$\delta S = \int_\Omega d^4x [\partial_{\varphi_r} \mathcal{L} - \partial_\mu \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L}] \delta\varphi_r + \int_\Omega d^4x \partial_\mu (\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r)$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo integrale e sapendo che la variazione si annulla sulla frontiera, allora le equazioni di Eulero–Lagrange sono

$$\partial_{\varphi_r} \mathcal{L} - \partial_\mu \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} = 0$$

Si passa ai momenti coniugati

$$\pi_r(x) = \partial_{\dot{\varphi}_r} \mathcal{L}$$

La densità di Hamiltoniana è

$$\mathcal{H} = \pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L}$$

Si specializza quanto visto al campo elettromagnetico.

3.1 Campo elettromagnetico

Si veda Landau vol. 2, §15, in cui si spiega che si parla sempre di particelle senza dimensioni e sparisce il concetto di corpo in relatività. Si veda Landau, vol. 2 §27 per la discussione della lagrangiana del campo elettromagnetico.

L'azione dev'essere uno scalare e così pure la densità di lagrangiana [r]. Studiando la natura, o si conoscono già le equazioni del moto — per il campo elettromagnetico sono le equazioni di Maxwell — con cui costruire la lagrangiana oppure si scrive una lagrangiana che rispetta una simmetria da cui si ricavano le equazioni del moto che vanno verificate.

Il principio fondamentale dell'elettrodinamica classica è il principio di sovrapposizione [r]. La lagrangiana deve essere composta da campi al massimo nel secondo ordine ed essere uno scalare. Dunque

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

Il primo termine descrive il campo libero, il secondo descrive l'interazione. Esiste anche un altro termine che si può aggiungere ottenuto dal tensore di campo duale. La quantità

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4\partial_i(\varepsilon^{iklm}A_k\partial_l A_m)$$

[r] cambiare indici a greci, è uno pseudo-scalare, ma se si considerano solo trasformazioni proprie, allora si potrebbe aggiungere, ma è una quadri-divergenza. Inoltre, il termine $A_\mu A^\mu$ non si può aggiungere perché non è invariante di gauge che dev'essere simmetria della lagrangiana poiché è simmetria del campo elettromagnetico. In generale, un termine quadratico dei campi corrisponde ad un termine di massa nelle equazioni del moto. L'invarianza di gauge è equivalente alla massa nulla del fotone.

Si è dunque scritta la lagrangiana più generale che sia invariante di gauge.

Equazioni del moto. Si ha un solo campo quadri-vettoriale $\varphi_r = A^\mu$. Quindi

$$\partial_{A_\nu}\mathcal{L} = -J^\nu$$

Ricordando che il tensore di campo è

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho$$

[r] controllare posizione indici

Si ha

$$\partial_{\partial_\mu A_\nu}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[(\partial_{\partial_\mu A_\nu}F_{\rho\sigma})F^{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma}(\partial_{\partial_\mu A_\nu}F_{\rho\sigma})] = -F^{\mu\nu}$$

[r] Da cui si ottiene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

cioè le equazioni di Maxwell. Si vuole operare la quantizzazione canonica, dunque si ha bisogno dei momenti coniugati. Essi sono

$$\pi^\mu = \partial_{\dot{A}_\mu}\mathcal{L} = -F^{\mu 0}$$

come sopra

$$(\partial_{\partial_0 A_\nu}F_{\rho\sigma})F^{\rho\sigma} = F^{\mu 0} - F^{0\mu}$$

Il tensore $F^{\mu\nu}$ è anti-simmetrico e dunque π^0 è nullo: si hanno solo tre momenti coniugati. Questa è una patologia del campo elettromagnetico.

Densità di hamiltoniana. Si sa già che l'integrale della densità di Hamiltoniana deve essere l'energia del campo elettromagnetico. Si ricava tale risultato dalla teoria sviluppata. La densità di Hamiltoniana è

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 - |B|^2) + J_\mu A^\mu$$

Sapendo dalle equazioni di Maxwell che

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \nabla\phi - \frac{1}{2}(|E|^2 - |B|^2) + J_\mu A^\mu = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |B|^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla\phi + J_\mu A^\mu \\ &= \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) - (\nabla \cdot \mathbf{E})\phi + \rho\phi - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\end{aligned}$$

L'hamiltoniana è

$$H = \int_V d^3x \mathcal{H} = \int_V d^3x \frac{1}{2}(E^2 + B^2) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$$

Invarianza di gauge. Considerata la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

L'invarianza di gauge dà

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu f$$

Se la quadri-corrente è conservata $\partial_\mu J^\mu = 0$ allora

$$J_\mu \partial^\mu f + f \partial_\mu J^\mu = \partial_\mu (J^\mu f)$$

che non cambia l'azione. Le equazioni del moto possono avere una simmetria che la lagrangiana non ha, mentre nel viceversa, una lagrangiana con una simmetria fornisce sempre equazioni con tale simmetria.

Considerato il gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

la componente temporale del quadri-vettore non è conservata. [r] Dato

$$\partial_\mu f^\mu = 0 \implies F^\mu = \int d^3x f^\mu(x, t)$$

Si ha

$$\partial_0 F^0 = \nabla \cdot \mathbf{f} \implies d_t \int d^3x f^0 = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{f} = \oint ds \mathbf{f}$$

Questo integrale dev'essere nullo se \mathbf{f} si comporta bene abbastanza all'infinito, ma A^μ è un'onda piana [r].

3.2 Teorema di Noether

Si veda Mandl, p. 23? Il teorema di Noether è fondamentale per la fisica matematica. Si studiano le possibili simmetrie e trasformazioni della lagrangiana. Le trasformazioni si dividono in esterne, che toccano le variabili spazio-temporali, ed interne che non toccano le variabili spazio-temporali. Si vede il primo teorema di Noether [r]. La lagrangiana si trasforma oppure rimane invariante.

Si vede l'esempio di traslazione come trasformazione esterna utilizzando il gruppo di Poincaré:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta^\mu$$

[r] Trasformando le coordinate dell'origine

Esiste una variazione della forma del campo e del suo argomento

$$\varphi'_r(x') = \varphi_r(x)$$

che vale solo per le traslazioni. La variazione di forma del campo è

$$\delta\varphi_r(x) = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$$

mentre la variazione totale è

$$\delta_T \varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) = 0$$

cioè di forma ed argomento. Per traslazioni, la variazione totale è nulla. Inoltre

$$\delta_T \varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) = [\varphi'_r(x') - \varphi_r(x')] + [\varphi_r(x') - \varphi_r(x)]$$

[r] Il primo addendo è pari alla stessa distanza

$$\varphi'_r(x') - \varphi_r(x') = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$$

a meno di infinitesimi superiori al prim'ordine. Quindi

$$0 = \delta_T \varphi_r(x) = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x) + \varphi_r(x') - \varphi_r(x) = \delta\varphi_r(x) + \delta_\mu \partial_\mu \varphi_r(x)$$

Pertanto

$$\delta\varphi_r(x) = -\delta_\mu \partial_\mu \varphi_r(x)$$

Si ipotizza che la lagrangiana sia invariante per trasformazione di traslazione. Dunque

$$0 = \mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial_\mu \varphi'_r(x')) - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x)) = \delta\mathcal{L} + \partial^\mu \mathcal{L} \delta_\mu = \dots$$