Physics 3

April 8, 2022

Contents

Lecture 1

mar 01 mar 2022 15:30

1 Introduzione

Si trattano i costituenti della materia.

- Corpuscolarità della materia. Si osserva la teoria cinetica dei gas, la cui trattazione è statistica. Si accenna alla meccanica statistica. Si individuano alcuni problemi della trattazione classica.
- Corpuscolarità della carica. Si osservano gli esperimenti della scoperta dell'elettrone e della misura della sua carica.
- Si affronta l'argomento del corpo nero con cui si introducono i primi concetti di fisica quantistica.
- Calore specifico. Si risolve, con un nuovo modello che si basa sulla fisica quantistica il problema del calore specifico.
- Effetto fotoelettrico. Si partono dalle evidenze sperimentali che non si riescono a spiegare con le nozioni classiche, così bisogna introdurre il fotone con cui si riesce a spiegare la fenomenologia.
- Modelli atomici. Si vede in dettaglio il modello di Rutherford, ed il modello di Bohr che prende spunto dal corpo nero e dall'effetto fotoelettrico. Si spiegano le evidenze sperimentali degli spettri atomici.
- Raggi X.

- Onde materiali, dualismo onda-particella, principio di indeterminazione di Heisenberg.

Il filo conduttore sono i dati sperimentali in coppia con il modello che spiega tali dati.

2 Corpuscolarità della materia

Tutta la fisica in questo corso copre circa 70 anni fino al 1850 al 1925. Questo è l'anno della pubblicazione dell'equazione d'onda di Schrödinger e inizia l'utilizzo della meccanica quantistica. Ai primi del 1800, i chimici avevano capito che la materia è costituita da componenti uguali ed fondamentali. Si formula la teoria cinetica dei gas in cui lo scopo è quello di legare delle proprietà cinematiche di meccanica alla temperatura. Si ricorda la legge dei gas perfetti

$$PV = n_{\text{moli}} RT$$

con $R = 8.31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$.
Le ipotesi della teoria cinetica sono

- volume V fissato
- equilibrio termico
- N elementi interagiscono in modo elastico
- si trascurano le forze inter-molecolari
- non sono presenti forze esterne (il sistema è isolato)

Considerato un sottoinsieme N_i delle particelle con velocità v_i si considerano gli urti elastici con le pareti. [immagine]
Si calcola la variazione di momento lineare come

$$\Delta p_{x_i} = 2mv_{x_i}$$

e quindi la pressione

$$\frac{F}{A} = \frac{\frac{\Delta p}{\Delta t}}{A} = \frac{2mv_{x_i}}{A\Delta t}$$

dove la forza si calcola tramite il teorema dell'impulso. Questo vale per una particella, tuttavia, non tutte le particelle urtano la parete nell'intervallo Δt, ma solamente una frazione. Solamente le particelle nel volume dato da $Av_{x_i}\Delta t$ sono quelle che urteranno la parete. Pertanto, tale frazione è

$$\rho = \frac{v_{x_i}\Delta t A}{2V}$$

bisogna porre un fattore di $\frac{1}{2}$ perché una metà (in media) delle particelle si allontana dalla parete sempre con velocità v_{x_i}. Si calcola la pressione come

$$P_i = \frac{2mv_{x_i}}{A\Delta t}\frac{v_{x_i}\Delta t A}{2V} = \frac{mv_{x_i}^2}{V}$$

Ora bisogna sommare su tutte le possibili velocità. Dunque la pressione totale è

$$P_T = \sum_i P_i N_i = \frac{m}{V}\sum_i N_i v_{x_i}^2 = \frac{Nm}{V}\langle v_x^2 \rangle$$

si ricorda che

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_i N_i v_{x_i}^2$$

Per isotropia dello spazio si ha

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$$

Pertanto, l'espressione della pressione totale risulta essere

$$P_T = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m\langle v^2\rangle = \frac{2}{3}n\langle K\rangle$$

si dice $\frac{N}{V} \equiv n$ densità di particelle. Inoltre, K è l'energia cinetica.
Si lega la velocità alla temperatura tramite la legge dei gas perfetti

$$P_T V = \frac{1}{3}Nm\langle v^2\rangle = \frac{2}{3}N\langle K\rangle \equiv n_{\text{moli}}RT$$

pertanto

$$\langle K\rangle = \frac{3}{2}\frac{n_{\text{moli}}}{N}RT = \frac{3}{2}k_B T$$

ricordando che $n_{\text{moli}} = \frac{N}{N_A}$ e $k_B = \frac{R}{N_A}$ costante di Boltzmann (essa è una R specifica, che viene riscalata per un costituente di una mole) e vale $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,\text{J}\,\text{K}^{-1}$.
Si nota che $k_B T$ ha le dimensioni di una energia. Per la temperatura ambiente di $T = 300\,\text{K}$, si ha

$$k_B T = 4.14 \times 10^{-21}\,\text{J} = 25\,\text{meV}$$

Considerazioni. Su questo si fanno alcune considerazioni.

- Si è legata l'energia cinetica alla temperatura per un gas monoatomico: $\langle K\rangle = \frac{3}{2}k_B T$. Da cui la velocità a partire dalla temperatura risulta

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- Moltiplicando l'energia cinetica media si ottiene l'energia cinetica totale da cui si può ricavare il calore specifico. Ricordando

$$c_V = \frac{1}{n_{\text{m}}}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

  Si ha un'energia totale di una mole

$$U = N_A\langle K\rangle = N_A\frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2}RT$$

  pertanto il calore specifico risulta essere

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

  questa espressione funziona per alte temperature.

- Si deriva il teorema di equipartizione. Considerato

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

  l'energia cinetica ha un contributo per ogni asse a cui si associa

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

  e ciò si finalizza nel teorema di equipartizione.

Esempio. Si consideri l'elio ha $20\,^\circ\text{C}$. Dunque la velocità (root mean square)

$$v_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (1.38 \times 10^{-23}\,\text{J}\,\text{K}^{-1})(293\,\text{K})}{4 \cdot (1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg}})}) = 1350\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

Teorema. Considerato un sistema in equilibrio termico, il calore si ripartisce equamente tra i contributi quadratici indipendenti dell'energia con un fattore pari a $\frac{1}{2}k_BT$.

Esempio. Si vede l'oscillatore armonico in una dimensione. L'energia totale

$$E_T = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

dunque l'energia media alla temperatura T è

$$\langle E_T \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2}k_BT = k_BT$$

Esempio. Si considera un gas costituito da molecole biatomiche. [immagine]
Si vedono alcune ipotesi di base che poi si analizzano e rimuovono.

- La distanza tra i due atomi è fissa.
- Tre gradi di libertà traslazionali.
- Due gradi di libertà rotazionali (due perché essi sono rotazioni rispetto gli assi che non sono di simmetria).

Pertanto, l'energia totale ha cinque contributi:

$$E_T = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2$$

Dunque l'energia totale per una mole risulta essere

$$U = 5N_A\frac{1}{2}k_BT = \frac{5}{2}RT \implies c_V = \frac{5}{2}R$$

rimuovendo l'ipotesi di distanza fissa, bisogna considerare una forza di attrazione tra le due masse di tipo elastico, dunque si aggiungono due termini (perché si ottiene un oscillatore armonico). Quindi

$$c_V = \frac{7}{2}R$$

Se, invece, la molecola può anche ruotare attorno a z' allora si ha un altro contributo rotazione per cui

$$c_V = \frac{6}{2}R = 3R$$

I ragionamenti fatti non sono sempre veri. Da misure sperimentali, il calore specifico varia con la temperatura.

Osservazione. Quarta considerazione. Si può applicare il teorema di equipartizione anche ai solidi. Dalla legge di Dulong-Petit si trova che il calore specifico è $c_V = 3R$. Per tanti elementi, tale valore rimane costante per certi intervalli estesi di temperatura.
.[immagine] Si ricava la legge di Dulong-Petit dal teorema di equipartizione. In prima approssimazione, gli atomi del solido sono legati da potenziali armonici. Quindi, per quanto visto, si hanno tre contributi armonici (uno per ogni asse) per cui

$$U = 6N_A\frac{1}{2}k_BT = 3RT \implies c_V = 3R$$

Questo vale ad alte temperature. A basse temperature il calore specifico tende a zero cubicamente. [immagine]
La teoria cinetica funziona, ma non sempre. Nella fisica nota fin'ora non si è in grado di spiegare l'abbassamento del calore specifico: questo richiede i primi concetti di fisica quantistica.

2.1 Distribuzione

Si vede la distribuzione di probabilità delle velocità delle particelle di un gas.
Le ipotesi sono

- Lungo le tre coordinate sia ha la stessa distribuzione.
- Tali tre distribuzioni sono indipendenti.
- Vale
$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT$$
così si estende quanto visto fin'ora.

Si cerca una distribuzione $F(v_x^2, v_y^2, v_z^2)$ di probabilità delle velocità. Il numero di particelle con velocità v_i compresa tra v_i e $v_i + \mathrm{d}v_i$ (con $i = x, y, z$) risulta
$$NF(v_x^2, v_y^2, v_z^2)\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$$
con N numero totale di particelle.
Si applicano le prime due ipotesi. Per la seconda ipotesi, la distribuzione F si può fattorizzare e, insieme alla prima, si ha
$$F(v_x^2, v_y^2, v_z^2) = f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2)$$
si impone come vincolo che $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Risulta essere un problema di massimizzazione, bisogna trovare f tale da massimare la probabilità F sotto il vincolo precedente. Si utilizzano i moltiplicatori di Lagrange. Si considera il logaritmo:
$$\mathcal{L} = \ln F + \lambda(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$
quindi
$$\partial_{v_x^2}\mathcal{L} = \frac{1}{f(v_x^2)}\,\mathrm{d}_{v_x^2} f + \lambda = 0 \iff \mathrm{d}_{v_x^2} f = -\lambda f(v_x^2)$$
la cui soluzione risulta essere
$$f(v_x^2) = f_0 e^{-\lambda v_x^2} = f(v_x)$$
l'ultima uguaglianza vale perché lo spazio è isotropo, quello che si fa è riscalare gli assi del sistema di riferimento di modo che si abbia la trasformazione $v_x^2 \to v_x$.
Per determinare i due parametri basta imporre la normalizzazione e la terza ipotesi (cioè il teorema di equipartizione): si calcola la velocità quadratica media e si utilizza la relazione dell'ipotesi. Si impone la normalizzazione
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0 e^{-\lambda v_x^2}\,\mathrm{d}v_x \equiv 1$$
posto $\lambda = A^2$, tale integrale fa parte della famiglia degli integrali di Gauss. Si definisce l'integrale di Gauss di ordine zero:
$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2x^2}\,\mathrm{d}x$$
Considerato
$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$
segue
$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \pi \implies I = \sqrt{\pi}$$
Pertanto
$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}} e^{-A^2x^2}\,\mathrm{d}(Ax) = \frac{1}{A}\sqrt{\pi}$$
A questo punto si ottiene
$$\int_{\mathbb{R}} f_0 e^{-A^2v_x^2}\,\mathrm{d}v_x = f_0\frac{\sqrt{\pi}}{A} \equiv 1 \implies f_0 = \frac{A}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

Lecture 2

lun 07 mar 2022 14:30

Si ricava la costante A dalla terza ipotesi. Ricordando che

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT \implies \langle v_x^2\rangle = \frac{k_BT}{m}$$

si scrive il valore medio come un integrale

$$\langle v_x^2\rangle = \int_{\mathbb{R}} v_x^2 \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2v_x^2}\,\mathrm{d}v_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} v_x^2 e^{-A^2v_x^2}\,\mathrm{d}v_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}}I_2 \equiv \frac{k_BT}{m}$$

Si ha un integrale di Gauss del secondo ordine

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-A^2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}A^2} = -\mathrm{d}_A I_0\,\mathrm{d}_{A^2}A = \frac{\sqrt{\pi}}{A^2}\frac{1}{2A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2A^3}$$

portare la derivata dentro il segno di integrale è concesso per mezzo della regola di Leibniz per l'integrazione. Pertanto

$$\langle v_x^2\rangle = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2A^3} = \frac{1}{2A^2} \equiv \frac{k_BT}{m}$$

da cui si ottiene

$$A = \sqrt{\frac{m}{2k_BT}}$$

A questo punto, l'espressione della distribuzione cercata risulta essere

$$f(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}}e^{-A^2v_x^2}\,\mathrm{d}v_x = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v_x$$

essa è una gaussiana centrata in zero con varianza pari a $\sigma^2 = \frac{k_BT}{m}$. La media è nulla cioè non si ha uno spostamento netto del gas in una direzione particolare. La distribuzione che tiene conto di tutte e tre le proiezioni risulta essere

$$F(v_x^2, v_y^2, v_z^2)\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$$

ricordando che $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \equiv v^2$, la distribuzione dipende dal valore assoluto dalla velocità, ma gli elementi differenziali dipendono ancora dalla proiezioni. Per ovviare a tale problema si passa in coordinate sferiche e si integra sugli angoli facendo rimanere v:

$$F(v)\,\mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v$$

questa è la distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità. Interessa sapere la quantità $n(v)$ di particelle con una velocità tra v e $v + \mathrm{d}v$. Per trovarlo basta moltiplicare la distribuzione per il numero totale delle particelle del gas

$$n(v)\,\mathrm{d}v = NF(v)\,\mathrm{d}v$$

La distribuzione ha dominio $[0, +\infty)$, è asimmetrica e si possono individuare la velocità più probabile, v_{MP} (MP per most probable ed essa corrisponde alla moda), la velocità media, $\langle v\rangle$, e la radice della velocità quadratica media, v_{RMS}.
Si trova v_{MP}. Si compie la derivata rispetto la velocità:

$$2ve^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} + v^2\left(-2v\frac{m}{2k_BT}\right)e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} = 0 \iff 1 - \frac{mv^2}{2k_BT} = 0 \iff v_{\mathrm{MP}} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

Si trova la velocità media $\langle v \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \int_0^{+\infty} vF(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} I_3\end{aligned}$$

Si ha un integrale di Gauss di ordine terzo. Si risolve per ricorrenza tramite l'integrale di Gauss di ordine primo

$$I_1 = \int_0^{+\infty} ve^{-A^2v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2A^2}\int_0^{+\infty} 2A^2 ve^{-A^2v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2A^2}\left[-e^{-A^2v^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2A^2}$$

e si nota che

$$I_3 = -\mathrm{d}_{A^2} I_1 = \frac{1}{2A^4}$$

Ricordando che

$$A^2 = \frac{m}{2k_BT}$$

si ha

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

L'espressione di $v_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ è già nota, infatti è una delle ipotesi utilizzata per trovare esplicitamente la distribuzione:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_BT \implies v_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

Pertanto le tre quantità sono

$$v_{\mathrm{MP}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$

2.2 Conferme sperimentali

Si vedono delle conferme sperimentali della teoria cinetica:

- Distribuzione delle velocità di effusione;
- Effetto Doppler termico;
- Coefficienti di trasporto (viscosità, conducibilità del calore);
- Moto browniano.

Velocità di effusione. [immagine] Risulta possibile misurare la distribuzione delle velocità tramite un esperimento ingegnoso. Si consideri un volume contenente un gas a temperatura T in equilibrio termico. Si effettua un piccolo foro su di una parete in modo che non si perturbi la distribuzione interna la quale rimane in equilibrio termico. Il gas attraversa il collimatore e si trova in una zona dove sono presenti due dischi paralleli, in movimento con velocità ω, a distanza s, con settori circolari rimossi e sfalsati di un angolo θ.
La condizione per cui le particelle passano per la prima fenditura ed anche per la seconda è quella per cui $\frac{s}{v} = \frac{\theta}{\omega}$ per cui $v = \frac{s}{\theta}\omega$. Variando ω si ottiene la distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann, ma con un bias che deriva dalla selezione delle particelle più probabili a colpire la parete e dunque più probabili ad avere una velocità maggiore. La presenza di tale bias non è un problema fin tanto che ne si deduce la natura. Si deduce la distribuzione delle velocità di effusione dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann con bias.

Si analizza il processo di fuoriuscita dalla fenditura di area $\mathrm{d}A$. [immagine] Fissato un angolo θ rispetto la normale della superficie, solamente le particelle all'interno di un cilindro di volume $\mathrm{d}A\,\cos\theta\,v\,\mathrm{d}t$ potranno uscire dal foro.
Il numero di particelle con velocità tra v e $v + \mathrm{d}v$ abbastanza alta per uscire è

$$\mathrm{d}n_E = NF(v)\,\mathrm{d}v\,\frac{\mathrm{d}A\,\cos\theta\,v\,\mathrm{d}t}{V}$$

che è la frazione di particelle con la probabilità di avere velocità tra v e $v + \mathrm{d}v$, e di trovarsi all'interno del cilindro avendo una traiettoria per uscire dal foro.
Si raggruppano i coefficienti del volume, dell'area, dell'angolo e del tempo in una costante Φ_0 che si ricava successivamente dalla condizione di normalizzazione. Quindi

$$\mathrm{d}n_E = Nv^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} v\Phi_0$$

si nota che dei coefficienti che non si sono raggruppati compare una v. Questa trovata è la nuova densità di probabilità delle velocità di effusione.
In altre parole,

$$\mathrm{d}n_E = NP(\text{avere certa velocità})\,P(\text{distanza giusta})\,P(\text{direzione giusta})$$

dove $P(\cdot)$ è l'operatore "probabilità di". Il numero di particelle che escono è la frazione delle particelle totali che hanno contemporaneamente una certa velocità, la distanza giusta e la direzione giusta.
Il primo fattore corrisponde a $F(v)\,\mathrm{d}v$.
Si studia la probabilità del secondo fattore. La probabilità di trovarsi alla distanza giusta corrisponde alla probabilità di trovarsi all'interno di un emisfero centrato nella fenditura e tale probabilità è data dal rapporto dei volumi

$$P = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{\pi(v\,\mathrm{d}t)^3}{V}$$

Si studia il terzo fattore. Una particella deve puntare alla fenditura, cioè il vettore velocità dev'essere compreso in un settore sferico definito da un angolo solido $\mathrm{d}\Omega$ che sottende $\mathrm{d}A\,\cos\theta$.
Si ha che

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A\,\cos\theta}{(v\,\mathrm{d}t)^2} \implies P = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \frac{\mathrm{d}A\,\cos\theta}{4\pi(v\,\mathrm{d}t)^2}$$

dove si ricorda che $v\,\mathrm{d}t$ fa da raggio (in quanto anche dimensionalmente si ha una lunghezza) e 4π è l'angolo solido totale che sottende tutta la superficie sferica.
Pertanto, la probabilità di questi tre eventi (indipendenti) risulta essere

$$\mathrm{d}n_E = NF(v)\,\mathrm{d}v\frac{4\pi(v\,\mathrm{d}t)^3}{2\cdot 3V}\cdot\frac{\mathrm{d}A\,\cos\theta}{4\pi(v\,\mathrm{d}t)^2} = NF(v)\,\mathrm{d}v\frac{\mathrm{d}A\,\cos\theta\,v\,\mathrm{d}t}{6V}$$

Il fattore di $\frac{1}{6}$ si sarebbe potuto anche ottenere nell'espressione scritta in precedenza attraverso vari ragionamenti, ma esso sarebbe comunque andato a far parte della costante Φ_0. Si determina Φ_0. La distribuzione delle velocità di effusione è

$$\Phi_E(v) = \Phi_0 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$$

Si impone la normalizzazione

$$1 \equiv \int_0^{+\infty} \Phi_0 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v = \Phi_0 I_3 = \Phi_0\frac{1}{2A^4}$$

Si nota l'integrale di Gauss di terzo ordine. Pertanto

$$\Phi_0\frac{1}{2}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^2 = 1 \implies \Phi_0 = 2\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^2$$

Dunque

$$n_E(v)\,\mathrm{d}v = N2\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v$$

questa espressione ha un bias verso le alte velocità rispetto alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann proprio perché si stanno selezionando le particelle con velocità maggiore. Per il confronto si studia la velocità quadratica media

$$\begin{aligned}\left\langle v_E^2\right\rangle &= \int_0^{+\infty} \Phi_0 v^5 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v = \Phi_0 I_5 = -\Phi_0\,\mathrm{d}_{A^2} I_3 \\ &= \Phi_0 \frac{1}{A^6} = 2\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^2\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^3 = \frac{4k_BT}{m}\end{aligned}$$

mentre quella di Maxwell-Boltzmann risulta essere $\left\langle v^2\right\rangle = \frac{3k_BT}{m}$ che è minore.

Effetto Doppler termico. La seconda conferma deriva dall'espansione dello spettro di emissione ed assorbimento. Ogni elemento ha una diversa sequenza di bande spettrali di emissione ed assorbimento. I due spettri non sono l'uno il complementare dell'altro perché lo spettro di assorbimento riguarda il percorso dal livello fondamentale ai livelli superiori, ma lo spettro di emissione riguarda anche il salto tra livelli intermedi e poi al livello fondamentale.
Le righe, soprattutto per un gas, non sono monocromatiche, ma hanno un'estensione che è determinata dalla risoluzione dell'apparato e per effetto doppler perché l'atomo è in movimento in quanto vibra: l'effetto netto è quello di allargare la riga spettrale.

Lecture 3

mar 08 mar 2022 15:30

Dalla chimica è noto che i livelli energetici degli atomi sono discreti. Fornendo energia all'atomo, esso emette energia che, se sono radiative, sono onde elettromagnetiche la cui lunghezza d'onda dipende dal salto energetico che è particolare ad ogni atomo. Tramite uno spettrometro si può analizzare la luce emessa.
Uno spettro (Marowak!) di emissione, soprattutto per un gas, è un insieme di distribuzioni piccate in determinate lunghezze d'onda. Tali picchi hanno una larghezza dovuta all'effetto doppler termico in quanto l'atomo è in continuo movimento (dato che la temperatura è maggiore dello zero assoluto). Quando l'atomo si allontana, si ha una lunghezza d'onda maggiore e quando si avvicina si ha una lunghezza d'onda minore.
La teoria cinetica permette di predire la larghezza della distribuzione.

Ripasso effetto doppler. Si vede un ripasso dell'effetto doppler. Tale effetto è la variazione di frequenza e lunghezza d'onda che l'osservatore misura rispetto al valore intrinseco della sorgente, per il solo effetto che la sorgente è in moto relativo rispetto l'osservatore.
Si supponga che la sorgente si avvicini all'osservatore con velocità v. Un'onda emessa dalla sorgente ha una velocità v_0 che dipende solamente dal mezzo e non dalla sorgente stessa. Il fronte d'onda percorre un tratto s ed arriva all'osservatore dopo un tempo $t_0 = \frac{s}{v_0}$. Dopo un periodo, la sorgente emette un nuovo fronte d'onda, ed essa ha percorso una distanza di $\frac{v}{\nu_0}$. Tale fronte impiega un tempo

$$t_1 = \frac{s - \frac{v}{\nu_0}}{v_0}$$

per percorrere la distanza $s - \frac{v}{v_0}$ che lo separa dall'osservatore.
La distanza temporale tra i due fronti, Δt, è l'inverso della frequenza percepita dall'osservatore:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu_0} + \frac{s}{v_0} - \frac{v}{\nu_0 v_0} - \frac{s}{v_0} = \frac{1}{\nu_0}\left(\frac{v_0 - v}{v_0}\right) \implies \nu' = \nu_0 \frac{v_0}{v_0 - v}$$

dove ν' è la frequenza osservata. Considerato $\nu' = \nu_0 + \Delta\nu$ si ha

$$\Delta\nu = \nu_0\left(\frac{v_0}{v_0 - v} - 1\right) = \nu_0 \frac{v}{v_0 - v} = \nu_0 \frac{v}{v_0} \frac{1}{1 - \frac{v}{v_0}}$$

Si ricorda che v è la velocità della sorgente e v_0 è la velocità dell'onda. Tipicamente si ha $v_0 \gg v$ e quindi si ha una buona approssimazione:

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v}{v_0}$$

Nel caso delle onde elettromagnetiche si ha

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v}{c}$$

dove c è la velocità della luce.

Esperimento. Si calcola l'estensione per effetto doppler delle righe spettrali. L'esperimento è costituito da un gas ad una certa temperatura T e si osserva la luce da esso emessa in una certa direzione. Quello che interessa è la distribuzione delle velocità lungo tale direzione.
Dalla relazione precedente si ha

$$v = \frac{c}{\nu_0}(\nu - \nu_0), \quad \mathrm{d}v = \frac{c}{\nu_0}\,\mathrm{d}\nu$$

e ricordando la distribuzione delle velocità

$$f(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}}\,\mathrm{d}v_x$$

si sostituisce ed il numero di molecole che emettono una radiazione elettromagnetica tra una frequenza ν e $\nu + \mathrm{d}\nu$ è

$$n(\nu)\,\mathrm{d}\nu = N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m}{2k_BT}\frac{c^2}{\nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2}\frac{c}{\nu_0}\,\mathrm{d}\nu$$

questa è una distribuzione normale $\mathcal{N}(\nu_0, \sigma^2)$ con

$$\sigma^2 = \frac{k_B T \nu_0^2}{mc^2}$$

Quella che si misura è un'intensità luminosa che è proporzionale al numero di particelle che emettono una radiazione elettromagnetica. L'intensità misurata è

$$I(\nu)\,\mathrm{d}\nu \propto n(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

In spettroscopia, la quantità di riferimento è la piena larghezza a metà altezza (full width at half maximum). La si calcola:

$$\frac{I(\nu)}{I_{\max}} = \frac{1}{2} \iff e^{-\frac{m}{2k_BT}\frac{c^2}{\nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2} = \frac{1}{2}$$

Pertanto, posto $\nu - \nu_0 = \Delta\nu$

$$\frac{mc^2}{2k_BT\nu_0^2}(\Delta\nu)^2 = \ln 2 \iff \Delta\nu = \sqrt{\frac{2\ln 2 k_B T}{m}}\frac{\nu_0}{c}$$

Da cui la piena larghezza a metà altezza è

$$2\Delta\nu = \sqrt{\frac{8\ln 2 k_B T}{m}}\frac{\nu_0}{c}$$

La larghezza relativa risulta essere

$$\begin{aligned}\frac{2\Delta\nu}{\nu_0} &= \sqrt{\frac{8\ln 2k_BT}{m}}\frac{1}{c} = \frac{1}{3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\sqrt{\frac{8\ln 2\cdot 1.38\times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}}{1.66\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}}}\sqrt{\frac{T}{M}}\\ &= 7.2\times 10^{-7}\,\mathrm{K}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{T}{M}}\end{aligned}$$

dove M è il numero di massa, cioè il numero di nucleoni.
Si ricorda che $\lambda\nu = c$, per cui si ha $\mathrm{d}\lambda = -\frac{c}{\nu^2}\,\mathrm{d}\nu = -\frac{\lambda}{\nu}\,\mathrm{d}\nu$ e dunque

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \left|\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}\right|$$

L'incremento relativo vale sia in frequenza che in lunghezza d'onda a meno di un segno.

Esempio. Questo è utile nel misurare la larghezza spettrale della lunghezza d'onda dovuta alla temperatura della sorgente. Infatti, la riga spettrale dovuta alla transizione Hα dell'idrogeno, ha una lunghezza d'onda di 6563 Å (angstrom e vale $1\,\text{Å} = 1\times 10^{-10}\,\mathrm{m}$) e si vuole trovare la larghezza spettrale della lunghezza d'onda che l'osservatore misura quando la radiazione è emessa da una stella a temperatura $T = 6000\,\mathrm{K}$. La larghezza spettrale è

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 7.2\times 10^{-7}\,\mathrm{K}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{6000\,\mathrm{K}}{1}} = 5.6\times 10^{-5}$$

La larghezza assoluta è

$$\Delta\lambda = \lambda\cdot 5.6\times 10^{-5} = 6563\,\text{Å}\cdot 5.6\times 10^{-5} = 3.7\times 10^{-1}\,\text{Å}$$

Si può anche porre la domanda inversa: osservando una stella, si misura la larghezza spettrale e ne si deduce la temperatura.

Distribuzione dell'energia cinetica. Si vede la distribuzione di probabilità dell'energia cinetica. Considerata l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad \mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}E$$

Per cui la distribuzione dell'energia cinetica risulta essere

$$F(v)\,\mathrm{d}v \implies F(E)\,\mathrm{d}E = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2E}{m}\frac{1}{\sqrt{2mE}}e^{-\frac{E}{k_BT}}\,\mathrm{d}E$$

Il numero di particelle con energia compresa tra E ed $E+\mathrm{d}E$ risulta essere

$$n(E)\,\mathrm{d}E = N2\pi\left(\frac{1}{\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}e^{-\frac{E}{k_BT}}\,\mathrm{d}E$$

Si individuano due contributi. La densità di stati

$$g(E) = 2\pi\left(\frac{1}{\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}$$

ed il termine esponenziale detto fattore di Maxwell-Boltzmann

$$e^{-\frac{E}{k_BT}}\,\mathrm{d}E$$

Si fa un passo indietro. Si osserva il problema da un'altra prospettiva. Si ha il problema di collocare N particelle con una propria distribuzione in energia in un sistema che ha i propri

livelli energetici. Le due cose sono separate e potrebbero non essere pienamente compatibili, ma si vogliono mettere insieme le particelle nei livelli energetici del sistema.
Si vuole fattorizzare il problema. Si parte da N particelle che si vogliono collocare in un sistema con una certa distribuzione di livelli energetici. La distribuzione finale, quella di particelle che si riescono a collocare nel sistema, si può vedere come una fattorizzazione di probabilità: la probabilità di avere nel sistema certi livelli energetici disponibili intorno ad E; e la probabilità che le particelle abbiano tale energia intorno ad E. La prima delle due è la densità di stati, $g(E)$; mentre la seconda è il fattore di Maxwell-Boltzmann.
L'analogia con quanto visto sull'espressione esplicita della distribuzione dell'energia (cioè passare dalla fattorizzazione delle probabilità alla scrittura analitica della distribuzione dell'energia) viene meglio spiegata quando si tratta la meccanica statistica classica con cui si ottiene la distribuzione delle particelle nei vari livelli energetici.

Coefficienti di trasporto. La teoria cinetica permette di predire i coefficienti di trasporto come la viscosità che è associata al trasporto della quantità di moto; la conducibilità termica associata al trasporto di energia; e la diffusione associata al trasporto di materia.
Si studiano i primi due. Molto in dettaglio il primo; mentre il secondo sarà molto simile.

Si introducono due concetti fondamentali:

- Si considerano le particelle come entità aventi una dimensione finita, approssimabili da sfere o cubi.
- Si studia il libero cammino medio: esso è la distanza media percorsa da una particella tra due urti successivi.

Si considera una traiettoria possibile di una particella sferica di raggio r. Il cambiamento di traiettoria è causato dagli urti. Attorno alla traiettoria si può considerare un cilindro di raggio $d = 2r$ che corrisponde allo spazio occupato dalla particella nel proprio tragitto. Dato che le particelle hanno dimensioni finite, allora si ha un urto quando la distanza tra due particelle è minore di d. La distanza media tra un urto e l'altro è il libero cammino medio:

$$l = \frac{\langle v\rangle t}{n\langle v\rangle t\pi d^2} = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{1}{n\sigma}$$

dove n è la densità di particelle per unità di volume; mentre σ è detta sezione d'urto o area efficace.
Esso è il rapporto tra la distanza percorsa e il numero di particelle (dato come densità volumica per volume occupato) urtate nel mentre. Il concetto di libero cammino medio è sottile: l'urto tra particelle ne rimescola le velocità; perciò, date delle condizioni, ha senso ragionare al più ad una distanza pari al libero cammino medio.
La formula trovata è un caso particolare: si sono considerate tutte le altre particelle come essere ferme. In realtà, bisogna considerare una velocità relativa

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

In particolare, si è interessati al modulo

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2}\langle v\rangle$$

Quando si calcolano i valori medi, il prodotto scalare tra le due velocità è nullo, perché non si ha una direzione preferenziale e maggioritaria delle velocità. Inoltre, dato che le particelle sono identiche, le due velocità sono, in media, la stessa $\langle v\rangle$.
Dunque, si è trovato il fattore per cui modificare il libero cammino medio:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

tale fattore rende conto del moto delle altre particelle.
Un'altra quantità d'interesse è la frequenza degli urti intesa come inverso del tempo medio tra un urto e l'altro

$$f = \frac{\langle v \rangle}{l} = \sqrt{2} n\sigma \langle v \rangle$$

Esempio. Si consideri dell'azoto gassoso a $T = 25\,^\circ\mathrm{C}$ e $P = 1\,\mathrm{atm}$, con dimensione $d = 2\,\text{Å}$. Si vuole calcolare il libero cammino medio e la frequenza degli urti. Ricordando

$$PV = n_\mathrm{m} RT \frac{N_A}{N_A} = N k_B T$$

si ha

$$\frac{N}{V} = n = \frac{P}{k_B T} = \frac{1.01 \times 10^5\,\mathrm{Nm^{-2}}}{1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \cdot 298\,\mathrm{K}} = 2.5 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$$

Il libero cammino medio risulta essere

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot (2 \times 10^{-10}\,\mathrm{m})^2 \cdot 2.5 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}} = 2.25 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

La velocità media risulta essere

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m N_A}} = 474\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

dove mN_A è la massa molare. La frequenza degli urti risulta essere

$$f = \frac{\langle v \rangle}{l} = 2.23 \times 10^9\,\mathrm{s^{-1}}$$

Lecture 4

lun 14 mar 2022 14:30

Digressione sull'effetto doppler termico. L'effetto doppler è utilizzato nei laser per calcolarne la larghezza spettrale. Un laser è una cavità risonante in cui si instaurano delle onde elettromagnetiche stazionarie e vi è presente un mezzo attivo (un gas od un solido). Tracciando in frequenza lo spettro di emissione del mezzo attivo, oltre alla larghezza dovuta alla temperatura, bisogna tenere conto dei modi di vibrazione del campo elettromagnetico all'interno della cavità: esistono solo alcune frequenze permesse con cui si stabiliscono delle onde stazionarie. Solamente i modi al di sotto della riga di emissione del gas sono quelli che vengono eccitati. Più modi sono eccitati, più frequenze sono utilizzate per formare l'impulso in uscita e più la durata temporale dell'impulso è breve. Questo fatto è fondamentale per il principio di indeterminazione di Heisenberg nella dualità tra onda e particella.

I coefficienti di trasporto sono tre: la viscosità, la conducibilità termica e la diffusione. Ognuno legato al trasporto di entità diverse: quantità di moto, energia cinetica e materia.

Viscosità. Si definisce il sistema. [immagine] Si consideri un volume rettangolare la cui parete superiore scorre verso le x positive con velocità v_0. All'interno si ha un gas che urta contro le pareti. A seconda del tipo di fluido si può avere un comportamento diverso.
Si considera un fluido perfetto. Nel caso di un urto, una particella arriva con una velocità v_z e v_x, e per un fluido perfetto le reazioni vincolari sono solamente normali. Dopo l'urto la particella ha velocità ancora v_z e v_x. Non è questo il caso di interesse, bensì lo è quello dei fluidi viscosi.
I fluidi viscosi sono quelli per cui si hanno reazioni vincolari normali e forze di taglio parallele alla parete. Dunque, una particella con velocità v_z e v_x ha velocità dopo l'urto di v_z e v'_x dovuta al trascinamento della particella causato alla parete. Pertanto, si instaura un gradiente di velocità: la parete ha un'azione di trascinamento del fluido direttamente sottostante, il quale trascina il

fluido sotto ancora e così via. Dunque, si forma un campo netto di velocità $v_x(z)$ con un trasporto netto di fluido verso x che dipende da z.
Si analizza l'interazione tra due strati di fluido adiacenti. Si hanno due strati a quote z e $z+\Delta z$ con velocità $v_x(z)$ e $v_x(z+\Delta z)$ dove la prima è minore della seconda (perché inferiore). Si vuole studiare che forza F (eventualmente una pressione) esercita lo strato a quota z su superiore: esso tende a frenarlo. Interessa la componente lungo x per unità di area

$$P_x = -\eta\,\partial_z v_x, \quad \eta \in \mathbb{R}$$

Se entrambi gli strati avessero la medesima velocità, allora nessuno dei due eserciterebbe una forza sull'altro. Dunque, si presume esistere la relazione lineare della pressione sopra riportata. Si esplicita il segno meno per fare in modo che $\eta > 0$. I fluidi per cui vale tale relazione sono detti fluidi newtoniani (sono una sottoclasse dei fluidi viscosi).
Si utilizza la teoria cinetica per dedurre il coefficiente di viscosità η. Si consideri la densità di particelle per unità di volume n. In media si può affermare che $\frac{1}{3}$ vanno lungo ogni direzione cartesiana. Del terzo lungo z, la metà va in ogni verso. Pertanto, $\frac{1}{6}$ ha verso $z+$ e un altro $z-$. Si è interessati ad una corrente, più che un numero di particelle. Qualunque corrente è una grandezza per unità di tempo. Pertanto, la corrente di particelle in ogni verso è

$$\frac{1}{6}n\langle v\rangle$$

Si ha un trasporto di quantità di moto. Si calcola cosa trasportare. Considerata una quota z, e le due distanze $z \pm l$, dove l è il libero cammino medio, si cerca il bilancio delle correnti che trasportano quantità di modo rispetto a z da $z-l$ verso l'alto e da $z+l$ verso il basso. Negli strati superiore ed inferiore la quantità di moto è $mv_x(z \pm l)$ rispettivamente (le parentesi a v_x sono da intendersi come argomento di una funzione, non come moltiplicazione). Pertanto, il bilancio è

$$\frac{1}{6}n\langle v\rangle m v_x(z-l) - \frac{1}{6}n\langle v\rangle m v_x(z+l) = P_x$$

Dimensionalmente esso è una forza per unità di area, cioè una pressione. Quindi

$$P_x = \frac{1}{6}n\langle v\rangle m\,[v_x(z-l) - v_x(z+l)]$$

espandendo in serie la velocità

$$v_x(z \pm l) \approx v_x(z) \pm \partial_z v_x\, l$$

si ha

$$P_x = \frac{1}{6}n\langle v\rangle m\,[v_x(z) - \partial_z v_x\, l - (v_x(z) + \partial_z v_x\, l)] = -\frac{1}{3}n\langle v\rangle ml\,\partial_z v_x$$

Si identifica il coefficiente di viscosità

$$\eta = \frac{2}{3}n\langle v\rangle ml = \frac{1}{3\sqrt{2}\sigma n}nm\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}\frac{N_A}{N_A}}\frac{N_A}{N_A} = \frac{M_{\text{mol}}}{3\sqrt{2}\sigma N_A}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}$$

dove $M_{\text{mol}} = mN_A$ è la massa di una mole. Si può ricavare η oppure, qualora sia noto, si può misurare il numero di Avogadro come ha fatto Loschmidt (1865).
Inoltre, la viscosità dipende dalla radice della temperatura, maggiore è la temperatura e più il fluido è viscoso. Tuttavia, per un fluido liquido, è il contrario: questo è dovuto all'aumento dell'energia cinetica.

Esempio. Si consideri l'esempio dell'azoto già visto. Si calcola il coefficiente di viscosità

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{3}nm\langle v\rangle l = \frac{1}{3}2.5\times10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}\cdot 28\cdot 1.66\times10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot 474\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cdot 2.25\times10^{-7}\,\mathrm{m}\\ &= 4.13\times10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}\end{aligned}$$

Mentre la misura sperimentale dà

$$\eta = 1.8\times10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$$

Il fallo rimane nel ragionamento con i valori medi, però almeno gli ordini di grandezza sono d'accordo.

Conducibilità termica. Il ragionamento è analogo. Si mettono in evidenza le differenze sostanziali.
Si definisce il sistema contenente il gas. [immagine] Questa volta non si ha una parete in movimento, ma le pareti fanno da termostati a temperature T_1 e T_2, l'una minore dell'altra. Date le diverse temperature, si instaura un gradiente di temperatura nel gas.
Si ha una corrente come costituenti per unità di area per unità di tempo ed essa trasporta energia cinetica. Il calore trasportato è

$$Q = -k\,\partial_z T$$

dove Q è un'energia per unità di area per unità di tempo. Tramite la teoria cinetica si ricava il coefficiente di conducibilità termica k. Si studia il bilancio di correnti:

$$Q = \frac{1}{6}n\langle v\rangle\left[\langle E\rangle(z-l) - \langle E\rangle(z+l)\right]$$

si sviluppa l'energia cinetica intorno a z:

$$Q = -\frac{1}{3}n\langle v\rangle l\,\partial_z\langle E\rangle = -\frac{1}{3}n\langle v\rangle l\,\partial_T\langle E\rangle\,\partial_z T$$

dove il coefficiente è

$$k = \frac{1}{3}n\langle v\rangle l\,\partial_T\langle E\rangle$$

Si ricorda che il calore specifico a volume costante è

$$c_V = \frac{1}{n_{\text{moli}}}\left(\partial_T U\right)_V = \frac{\partial\langle E\rangle N_A}{\partial T} \implies \partial_T\langle E\rangle = \frac{c_V}{N_A}$$

nell'ipotesi di una mole e dove N_A è il numero di costituenti. Pertanto

$$k = \frac{1}{3}n\langle v\rangle l\frac{c_V}{N_A} = \frac{1}{3}n\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}\frac{3}{2}\frac{R}{N_A} = \frac{k_B}{2\sqrt{2}\sigma}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}$$

il calore specifico dipende dai gradi di libertà del sistema e nel caso di gas monoatomico si ha $c_V = \frac{3}{2}$.
Si confronta quanto ottenuto con i dati sperimentali. Il rapporto tra i coefficienti ottenuti è

$$\frac{k}{\eta} = \frac{c_V}{N_A m} \iff \frac{k}{\eta}\left(\frac{c_V}{N_A m}\right)^{-1} = 1$$

nella realtà varia da 1.3 a 2.5. Ancora una volta, il fallo rimane nell'utilizzo dei valori medi al posto della distribuzione di velocità.

Random walk. Robert Brown osserva con un microscopio delle molecole di polline in acqua e le vede animate da un moto erratico. Nel 1905, Einstein provvede una spiegazione coerente per tale tipo di moto tramite la teoria cinetica. La spiegazione sono i milioni di urti delle molecole con il polline. Nel 1908, Perrin conferma sperimentalmente la teoria.
Si vede un processo più semplice: il random walk. Esiste un unica lunghezza l_0 del passo. La quantità casuale è la direzione. Si vuole calcolare la distanza quadratica media. La si calcola statisticamente. Si studia la distanza quadratica media perché la distanza media percorsa è nulla. Dunque, per due passi, la distanza quadratica media è

$$\left\langle l_2^2\right\rangle = \left\langle(\underline{l}_0 + \underline{l}_0)^2\right\rangle = l_0^2 + l_0^2 + 2l_0l_0\langle\cos\theta\rangle = 2l_0^2 \implies \sqrt{\langle l_2^2\rangle} = \sqrt{2}l_0$$

La media del coseno dell'angolo è nullo, perché il prodotto scalare non ha una direzione preferenziale. Dopo tre passi, la distanza quadratica media è

$$\left\langle l_2^2\right\rangle = \left\langle(\underline{l}_0 + \underline{l}_0 + \underline{l}_0)^2\right\rangle = 3l_0^2 + 3\cdot 2l_0l_0\langle\cos\theta\rangle = 3l_0^2 \implies \sqrt{\langle l_3^2\rangle} = \sqrt{3}l_0$$

Dunque, dopo N passi

$$l_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\langle l_N^2 \rangle} = \sqrt{N} l_0$$

Associato un intervallo temporale ad ogni passo, si può affermare

$$l_{\mathrm{RMS}} \propto \sqrt{t}$$

Vista la similarità con il moto browniano, ci si aspetta una stessa proporzionalità.

Moto browniano. Come Einstein, si scrive l'equazione del moto di una particella di polline. Essa è immersa in acqua e quindi è soggetta ad una forza browniana F_B di cui non si conosce l'espressione, ma si sa essere una forza casuale e sono note alcune sue proprietà statistiche. Inoltre, per l'immersione in acqua, è anche presente un attrito viscoso, ma non si considera la gravità. Pertanto, l'equazione del moto risulta essere

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} + F_B$$

Essa è scritta in una dimensione, tuttavia non è un problema perché la forza browniana è casuale e quindi il calcolo lungo ogni coordinata è indipendente dalle altre.
Quest'equazione differenziale non è nota perché è stocastica. La variabile x è aleatoria, non deterministica e quindi non si può trattare con gli elementi di calcolo fin'ora studiati. Einstein manipola l'equazione in modo da studiare i momenti e quindi i valori medi della variabile aleatoria che non sono variabili aleatorie a loro volta. Inoltre, $x(t)$ è un processo stocastico: la distribuzione non è nota e dipende dal tempo.
Dunque

$$mx\ddot{x} = -\mu x\dot{x} + xF_B$$

Si nota che

$$mx\ddot{x} = -m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\dot{x}) - \dot{x}^2\right]$$

A questo punto si utilizza l'operatore di valore atteso:

$$m\langle \mathrm{d}_t(x\dot{x})\rangle - m\langle \dot{x}^2\rangle = -\mu\langle x\dot{x}\rangle + \langle xF_B\rangle$$

Si osserva che

- Si inverte l'operatore di valore atteso con la derivata per la linearità della derivata

$$\mathrm{d}_t\left(\frac{1}{N}\sum_i y_i\right) = \frac{1}{N}\sum \mathrm{d}_t y_i \iff \mathrm{d}_t\langle y\rangle = \langle \mathrm{d}_t y\rangle$$

- Inoltre, dalla teoria cinetica

$$m\langle \dot{x}^2\rangle = k_B T$$

- Infine, del termine

$$\langle xF_B\rangle$$

non si sa l'espressione analitica, ma si conoscono delle sue proprietà statistiche. In particolare

$$\langle F_B\rangle = 0$$

cioè il polline non si muove prevalentemente in una direzione. Oltretutto, per due variabili aleatorie x, y si ha

$$\mathrm{Cov}[x, y] = \mathbb{E}[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = \mathbb{E}[xy] - \mu_x\mu_y$$

Se le due variabili sono indipendenti, allora la covarianza è nulla. Nel problema in esame, la posizione del polline in un sistema di riferimento è indipendente dalla forza e viceversa. Pertanto

$$\mathrm{Cov}[x, F_B] = 0, \quad \mu_x \equiv \langle x\rangle = 0, \quad \mu_y \equiv \langle F_B\rangle = 0 \implies \mathbb{E}[xy] = \langle xF_B\rangle = 0$$

Quindi, l'equazione differenziale risulta essere

$$m\,\mathrm{d}_t\langle x\dot{x}\rangle = k_BT - \mu\langle x\dot{x}\rangle$$

ed essa non è più un'equazione differenziale stocastica perché si è applicato l'operatore di valore atteso e dunque si sa risolvere.

Lecture 5

mar 15 mar 2022 15:30

La soluzione risulta essere

$$\langle x\dot{x}\rangle = ce^{-\frac{\mu}{m}t} + A$$

Pertanto, l'equazione differenziale diventa

$$c\left(-\frac{\mu}{m}\right)e^{-\frac{\mu}{m}t} = \frac{k_BT}{m} - \frac{\mu}{m}ce^{-\frac{\mu}{m}t} - \frac{\mu}{m}A \implies A = \frac{k_BT}{\mu}$$

A tempi grandi rispetto $\tau = \frac{m}{\mu}$, sopravvive solamente il termine costante A. Inoltre

$$\langle x\dot{x}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{d}_t\left\langle x^2\right\rangle = \frac{k_BT}{\mu} \implies \left\langle x^2\right\rangle = \frac{2k_BT}{\mu}t$$

Si ritrova quanto ci si aspetta dal random walk: $\sqrt{\langle x^2\rangle} \propto \sqrt{t}$. Oltretutto, non si sa nulla di F_B, ma si sono usate delle ipotesi semplici e ragionevoli sulla sua natura statistica: ha valore medio nullo, la posizione media è nulla, è decorrelata dalla media; e con tali ipotesi si è potuto affermare qualcosa di concreto sul sistema.
Inoltre, per Stokes $\mu = 6\pi\eta r$ da cui si ha

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{2k_BT}{6\pi\eta r}t = 2Dt, \quad D = \frac{k_BT}{6\pi\eta r}$$

dove D è detto coefficiente di diffusione. Non si ha l'espressione della posizione x, ma si conosce solamente la sua varianza:

$$\mathrm{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \left\langle x^2\right\rangle - 0 = \sigma^2$$

Dunque, la distribuzione delle posizioni (che non è nota) ha una varianza proporzionale al tempo. Questo riflette il fatto che si ha un processo stocastico descritto da una distribuzione di probabilità che varia nel tempo.

Esperimento di Perrin. Nel 1908 Perrin conferma tramite un esperimento la teoria di Einstein del 1905 sul moto browniano.
Il sistema è costituito da una colonna a base quadrata di area a contenente dell'acqua in cui si trovano delle sfere di gomma lacca [immagine] (si è scelta la gomma lacca perché permette un'alta riproducibilità delle dimensioni delle sfere). La trattazione seguente è intesa rimpiazzando l'acqua con un gas. Solo in un secondo momento si introduce nuovamente l'acqua come nuova ipotesi. Si considera la forza di gravità e l'accelerazione g.
Si definisce w come il peso del gas sopra la quota $\mathrm{d}y$, mentre $w + \mathrm{d}w$ come il peso precedente più il peso dello strato $\mathrm{d}y$ stesso. Pertanto

$$w + \mathrm{d}w = w + mgna\,\mathrm{d}y$$

dove n è la densità del gas. Si calcola la differenza di pressione

$$\mathrm{d}P = -mgn\,\mathrm{d}y$$

il meno deriva dal fatto che aumentando y, la pressione diminuisce. Per la legge del gas perfetto (e considerando una mole) si ha

$$PV = RT \implies \frac{P}{n} = k_BT \implies P = nk_BT \implies \mathrm{d}P = \mathrm{d}n\,k_BT$$

si ha una relazione di proporzionalità. Scendendo la colonna, si ha un maggiore densità di particelle. Quindi

$$\mathrm{d}n\, k_B T = -mgn\, \mathrm{d}y \implies \frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{mg}{k_B T}\, \mathrm{d}y \implies n = n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}, \quad P = P_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$$

dove l'espressione per la pressione è detta legge dell'atmosfera. Si rimuove l'ipotesi di trovarsi in un gas e si considera la presenza dell'acqua: si considera anche la spinta archimedea. Quindi

$$mg - mg\frac{\rho_{\mathrm{H2O}}}{\rho} = mg\frac{\rho - \rho_{\mathrm{H2O}}}{\rho}$$

dove ρ è la densità delle sfere di gomma lacca. Pertanto

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{mg(\rho - \rho_{\mathrm{H2O}})h}{\rho k_B T}\right]$$

Perrin scopre la legge dell'atmosfera e, nel tracciare per punti l'andamento di n in funzione di h, egli conta quante particelle di gomma lacca sono presenti in ogni strato. Ma facendo questo, vede anche le particelle muoversi e, misurandone più volte la distanza media percorsa, osserva che essa corrisponde a quanto predetto da Einstein.
Nell'espressione della legge dell'atmosfera, l'umidità prende il ruolo della gomma lacca, mentre l'acqua diventa l'aria

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{mg(\rho_{\mathrm{H2O}} - \rho_{\mathrm{Aria}})h}{\rho_{\mathrm{H2O}} k_B T}\right]$$

Dunque, quando la temperatura si alza, allora si alza anche la pressione. Quando si abbassa la densità di acqua nell'atmosfera, si alza la pressione.

2.3 Meccanica statistica

La meccanica statistica è la generalizzazione dei sistemi a molte particelle. Parte da presupposti generali, ma permette di ottenere la distribuzione di Maxwell-Boltzmann ed è possibile dimostrare il teorema di equipartizione.
Si considera un sistema di N particelle (distinguibili), con una certa energia totale U. Il sistema in cui si collocano le particelle ha diversi livelli energetici E_n: una quantità n_i in ogni E_i. I vincoli sono $\sum_i n_i = N$ e $\sum_i n_i E_i = U$. Si vuole capire qual è il modo in cui si dispongono le N particelle nei diversi livelli energetici.

Definizione. Un macrostato è uno stato di un sistema definito da grandezze come U, T, N che non entrano nel dettaglio di come si sono disposte le particelle nei livelli energetici.
I microstati sono le possibili configurazioni delle particelle nei livelli energetici E_i.

Definizione. Il principio di equiprobabilità a priori afferma che tutti i microstati sono equiprobabili.

Dato che i microstati sono equiprobabili, il sistema si colloca in quella configurazione caratterizzata dal maggior numero di microstati, dal maggior numero di modi in cui si può realizzare una situazione (il macrostato).

Esempio. Si consideri un sistema a quattro livelli energetici in cui si vogliono disporre cinque $N = 5$ particelle. I livelli energetici sono $E_1 = 0$, $E_2 = E$, $E_3 = 2E$, $E_4 = 3E$. La disposizione delle particelle dei livelli energetici è detta partizione.
Si consideri il caso in cui si hanno quattro particelle in E_1 ed una in E_4. Dato che le particelle sono distinguibili, si vuole trovare il numero di microstati che danno la stessa partizione.
Si hanno N palline da dividere in due categorie: una da n_1 particelle e l'altra da $N - n_1$ particelle.
Si calcola il numero totale di permutazioni: $N!$. Per ogni permutazione, non interessa come le n_1

sono ordinate, cioè bisogna togliere le permutazioni interne: $n_1!$. Lo stesso per l'altra categoria: $(N-n_1)!$. Pertanto, il numero di modi di disposizione è

$$P_1 = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

Tornando all'esempio, la configurazione scelta si può ottenere in cinque modi, cioè in cinque microstati.
A questo punto si hanno $N - n_1$ particelle rimaste e di queste se ne collocano n_2 nel secondo livello energetico. Pertanto

$$P_2 = \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}$$

e questo vale per gli ulteriori livelli. Per trovare il numero totale di combinazioni, si deve moltiplicare le combinazioni di ogni livello energetico

$$\frac{N!(N-n_1)!}{n_1!n_2!(N-n_1)!(N-n_1-n_2)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!}$$

notando che l'ultimo termine del denominatore è 0! perché si va avanti fin quando le particelle si esauriscono.
Un sistema in cui la disposizione ha tre particelle nel primo livello, una nel secondo ed una nel terzo livello, ha un numero di microstati è

$$\frac{5!}{3!1!1!0!} = 20$$

[r]
Siccome tutti i microstati sono equiprobabili, il sistema viene più probabilmente trovato nella partizione realizzata da più microstati. Tuttavia, non si ha un modo per trovare il numero di particelle per ogni livello n_i. Cioè si vuole cercare la partizione più probabile. Si massimizza P sotto certi vincoli.
Per ora tutti i livelli energetici sono equiprobabili, ora si aggiunge la probabilità g_i per una particella di poter usufruire il livello E_i [r]. Dunque

$$P = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

Si massimizza P con i vincoli tramite i moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L} = \ln P - \alpha \left(\sum_i n_i - N \right) - \beta \left(\sum_i n_i E_i - U \right)$$

Si nota che vale

$$\ln P = \ln N! + \sum_i n_i \ln g_i - \sum_i \ln n_i!$$

Si utilizza la formula di Stirling:

$$\sum_i \ln n_i! \sim \sum_i n_i \ln n_i - n_i$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = \ln N! - \sum n_i \ln \frac{n_i}{g_i} - (\alpha - 1) \sum n_i + \alpha N - \beta \sum n_i E_i + \beta U$$

Il cui differenziale è

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = -\sum \mathrm{d}n_i \, \ln \frac{n_i}{g_i} - \sum n_i \frac{g_i}{n_i} \frac{1}{g_i} \, \mathrm{d}n_i - (\alpha - 1) \sum \mathrm{d}n_i - \beta \sum E_i \, \mathrm{d}n_i = 0$$

Che diventa

$$\sum \left(\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i \right) \mathrm{d}n_i = 0$$

per cui l'argomento della sommatoria è nullo per ogni i:

$$\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0 \implies n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i}$$

[r] Si determinano i parametri α e β tramite i vincoli. Infatti

$$N = \sum n_i = \sum g_i e^{-\alpha} e^{-\beta E_i} = e^{-\alpha} Z \implies e^{-\alpha} = \frac{N}{Z}$$

dove Z è detta funzione di partizione. Dunque

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}$$

Si ha un'espressione per il numero di particelle nel livello energetico i-esimo, fermo restando la conoscenza della distribuzione g_i. [r]

Osservazione. La funzione di partizione Z è una condizione di normalizzazione perché è una somma su tutti gli attendi.
Inoltre, si nota un'analogia con la teoria cinetica in cui si ha

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

da cui si ottiene

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Infatti, nella teoria cinetica si è vista la distribuzione delle particelle nel livello energetico tra E ed $E + \mathrm{d}E$:

$$n(E)\,\mathrm{d}E \propto N\sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T}}\,\mathrm{d}E$$

dove $e^{-\frac{E}{k_B T}}\,\mathrm{d}E$ è il termine di Boltzmann e $\sqrt{E} = g(E)$ è la [r].
A seguito di quanto fatto, si può rileggere tale espressione. Nel continuo si ha

$$n(E)\,\mathrm{d}E = \frac{N}{Z} g(E) e^{-\frac{E}{k_B T}}\,\mathrm{d}E$$

dove Z è un integrale. [r].
Il problema di contare quante particelle hanno energia tra E ed $E + \mathrm{d}E$ si può fattorizzare in più probabilità.
Il termine di Boltzmann è la probabilità di avere una particella all'energia tra E ed $E + \mathrm{d}E$. Il termine $g(E)$ consente di stabilire se il sistema ha livelli in cui possibile collocare particelle con energia tra E ed $E + \mathrm{d}E$.

Energia totale. Dalla meccanica statistica si può derivare l'energia totale:

$$U = \sum n_i E_i = \sum \frac{N}{Z} g_i E_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \implies \langle E \rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{Z} \sum E_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}}\,\mathrm{d}E}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}}\,\mathrm{d}E} = k_B T$$

Per semplicità si pone $g_i = 1$. Quest'espressione è utile per l'energia media irradiata da un corpo nero [r]. Si pesa l'energia con la propria probabilità divisa la condizione di normalizzazione. Dato che quest'espressione è ottenuta dalla meccanica statistica classica [r].

Lecture 6

lun 21 mar 2022 14:30

Si vuole ottenere $g(E)$. L'energia cinetica è $E = \frac{1}{2}mv^2$. In tre dimensioni, il numero di configurazioni possibili dipende dalla direzione e del modulo della velocità, pertanto gli stati possibili S sono proporzionali al volume della sfera $\frac{4}{3}\pi v^3$. Inoltre $\mathrm{d}S \propto 4\pi v^2 \,\mathrm{d}v$. Dato che $v^2 = \frac{2E}{m}$ e $2v\,\mathrm{d}v = \frac{2}{m}\,\mathrm{d}E$ si ha

$$\mathrm{d}S \propto 4\pi\sqrt{\frac{2E}{m^3}}\,\mathrm{d}E$$

Quindi, la distribuzione di particelle nei livelli energetici è

$$n(E)\,\mathrm{d}E = \frac{N}{Z}A\sqrt{E}e^{-\frac{E}{k_BT}}\,\mathrm{d}E$$

quest'espressione si può confrontare con l'espressione trovata dalla teoria cinetica.

3 Granularità della carica

Si vedono degli esperimenti [r] che hanno portato alla misura della carica dell'elettrone. L'evidenza della granularità della carica viene notata da Faraday mentre lavora sulla sua cella elettrolitica: egli osserva che cambiando gli elettroliti, si misura la stessa corrente. Successivamente, Thomson osserva che, ponendo un oggetto tra un anodo ed un catodo, si proietta un'ombra di tale oggetto sulla parete di fronte il catodo: questi sono i raggi catodici. [r]

Esperimento di Thomson. [immagine] Si consideri l'esperimento di Thomson. Si ha un condensatore con due piatti paralleli distanti d in cui si ha un campo elettrico. Tali piatti hanno lunghezza L ed il loro estremo è a distanza D dallo schermo.[r]
L'accelerazione verticale è

$$a_y = \frac{qE}{m}$$

mentre il campo elettrico sul condensatore è $E = \frac{V}{d}$. La legge oraria risulta essere

$$y = \frac{1}{2}a_yt^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2, \quad t = \frac{x}{v_x}$$

dove t è il tempo trascorso nel condensatore. Pertanto, la massima deviazione dentro il condensatore è

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{L^2}{v_x^2}$$

Quando la particella esce dal condensatore, essa procede in modo rettilineo fino ad una quota di

$$y_2 = D\tan\theta \implies \tan\theta = \mathrm{d}_xy(L) = \frac{qEL}{mv_x^2} \implies y_2 = \frac{qELD}{mv_x^2}$$

Pertanto, la deviazione totale è

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{L^2}{v_x^2} + \frac{qELD}{mv_x^2} = \frac{qEL}{mv_x^2}\left(\frac{L}{2} + D\right)$$

Per misurare la velocità si utilizza la forza di Lorentz: si vuole bilanciare la forza di Lorentz per ricavare la velocità. Per questo si aggiunge un campo magnetico di modo che le particelle siano deviate verso il basso. Infatti

$$F_E = F_B \iff qE = qv_xB \iff v_x = \frac{E}{B}$$

Pertanto, il rapporto carica-massa è

$$\frac{q}{m} = \frac{yv_x^2}{EL\left(\frac{L}{2}+D\right)} = \frac{yE}{B^2L\left(\frac{L}{2}+D\right)} = 1.7 \times 10^{11}\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$$

[r] [immagine] Ora si consideri un campo magnetico tra le due armature orizzontali. La forza magnetica ha il ruolo di forza centripeta

$$qv_xB = m\frac{v_x^2}{R} \implies R = \frac{mv_x}{qB}$$

Si calcola ancora la deviazione totale come deviazione all'interno delle due lastre più moto rettilineo all'esterno. Nel campo magnetico, la particella compie un arco di circonferenza con raggio R. L'equazione di tale circonferenza è

$$x^2 + (y+R)^2 = R^2 \implies R = -\frac{x^2+y^2}{2y} \approx -\frac{x^2}{2y} \implies y = -\frac{x^2}{2R}$$

[r] L'approssimazione è giustificata dal fatto che la deviazione in y è molto minore della distanza percorsa in x. Pertanto

$$y = -\frac{qBx^2}{2mv_x}, \quad y_3 = -\frac{qBL^2}{2mv_x}$$

dove y_3 è la deviazione all'interno del campo magnetico. Mentre la quota percorsa all'esterno è

$$y_4 = D\tan\phi \implies \tan\phi = \mathrm{d}_x y(L) = -\frac{qBL}{mv_x}$$

Per cui la deviazione totale è

$$y = y_3 + y_4 = -\frac{qBL}{mv_x}\left(\frac{L}{2}+D\right)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{q}{m} = \frac{yv_x}{BL\left(\frac{L}{2}+D\right)}, \quad v_x = \frac{E}{B}$$

Effetto Zeeman. Tramite l'effetto Zeeman si determina il rapporto carica-massa attraverso la spettroscopia. [immagine] Due elettromagneti sono disposti ai lati di un gas. Zeeman osserva le righe spettrali in due direzioni per mezzo di un polarimetro ed uno spettrometro. Egli osserva due righe spettrali in posizioni $\nu_0 \pm \Delta\nu$. Esse erano polarizzate circolarmente.
In direzione ortogonale al campo magnetico, egli osserva tre righe spettrali in posizioni ν_0 e $\nu_0 \pm \Delta\nu$. La polarizzazione è lineare: verticale per quelle ai lati, orizzontale per quella centrale. Si individua un sistema di riferimento con z parallelo al campo magnetico. Si lega la distanza in frequenza la rapporto massa-carica dell'elettrone. [r] Egli considera un moto armonico rispetto ai tre assi caratterizzato dalla stessa costante. La frequenza caratteristica dunque è

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{b}{m}}$$

dove m è la massa della particella.
Si considerano i moti armonici uno per volta. L'oscillazione lungo z non produce nessun campo lungo la direzione di oscillazione. [r] Pertanto, si studiano i moti armonici solo lungo x ed y. Ciascun moto armonico lineare si può scomporre in due moti circolari contro-rotanti (con la stessa velocità): $x = x^+ + x^-$ e $y = y^+ + y^-$, dove la parte con $+$ ruota in senso orario e la parte con $-$ ruota in senso antiorario. Si ipotizza che la carica sia negativa. Pertanto, la forza di Lorentz sulla carica oraria è centrifuga, mentre sulla carica antioraria è centripeta. Quindi, si ha rispettivamente

$$m\frac{v^2}{r} = br - |q|vB, \quad m\frac{v^2}{r} = br + |q|vB$$

Si può già intuire la frequenza di rotazione. Nel caso del segno concorde, il periodo di rotazione è minore e quindi la velocità è maggiore [r].
Pertanto si ha rispettivamente $\nu' = \nu_0 - \Delta\nu < \nu_0$ e $\nu'' = \nu_0 + \Delta\nu > \nu_0$. La scomposizione vale sia per x che per y. Si considera il moto a coppie. In senso orario, $x^+ + y^+$, ci si aspetta una riga spettrale a $\nu' < \nu_0$. In senso antiorario, $x^- + y^-$, ci si aspetta una riga spettrale a $\nu'' > \nu_0$.
Si osserva il moto in direzione perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$ ed a z. Una particella che oscilla lungo z, non viene influenzata dal campo magnetico [r]. Si spiegano le altre righe spettrali. Una particella che oscilla lungo x non emette alcun campo elettromagnetico lungo tale direzione. Dunque, rimane solamente la direzione lungo y. [r] I due moti armonici contro-rotanti subiscono una variazione del proprio periodo di rotazione nella stessa maniera descritta quando si è osservato lungo z. [r]
Si calcola la distanza tra le righe spettrali. Si ha

$$m\frac{v_1^2}{r} = br + |q|v_1 B, \quad m\frac{v_2^2}{r} = br - |q|v_2 B$$

Sottraendo un'equazione all'altra si ha

$$m\frac{v_1^2 - v_2^2}{r} = |q|(v_1 + v_2)B \implies m\frac{v_1 - v_2}{r} = |q|B \implies m(\omega_1 - \omega_2) = |q|B$$

ricordando che $v = \omega r$. Si pone $\omega_1 - \omega_2 \equiv \Delta\omega$, che è la distanza tra le due frequenze laterali (e non la distanza tra quella centrale). Pertanto

$$\frac{\Delta\omega}{B} = \frac{|q|}{m} = 1.6 \times 10^{11}\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$$

Lecture 7

mar 22 mar 2022 15:30

Esperimento di Millikan. [immagine] L'apparto sperimentale è costituito da due piatti a cui viene applicata una differenza di potenziale. Vi sono presenti dei fori in cui iniettare dell'olio nebulizzato. Dal lato si fanno entrare dei raggi X e dalla parte opposte si può osservare l'apparato.
A potenziale nullo, le gocce di olio cadono in aria. I raggi X servono a ionizzare l'aria, così liberando elettroni che vanno a caricare le gocce di olio. Una volta che le gocce approcciano il fondo, si fornisce un potenziale fino a quando la goccia non si ferma e poi risale. Ripetendo molte volte l'esperimento, Millikan misura vari multipli della carica elementari che gli permettono di dedurre il valore proprio della carica elementare.

A campo nullo, la goccia di olio sferica è soggetta alla forza di gravità mg, alla spinta archimedea dovuta all'aria $m'g$, all'attrito viscoso $6\pi\eta r v_g$. Fornendo un potenziale, la goccia d'olio è soggetta alla forza di gravità mg, alla spinta archimedea $m'g$, alla forza elettrica qE ed all'attrito viscoso $4\pi\eta r v_E$. A campo acceso, la goccia risale, dunque il verso della forza di attrito viscoso è verso il basso. [r]
Pertanto, nel primo caso il bilancio delle forze a moto rettilineo uniforme (in quanto la forza viscosa aumenta fino a quando non bilancia le altre e così non si ha più accelerazione):

$$mg - m'g - 6\pi\eta r v_g = 0 \implies mg - m'g = 6\pi\eta r v_g$$

mentre nel secondo caso è

$$mg - m'g + 6\pi\eta r v_E - qE = 0 \implies 6\pi\eta r(v_g + v_E) = qE$$

Da cui si ottiene

$$q = \frac{6\pi\eta r}{E}(v_E + v_g)$$

Dato che si conosce il tratto percorso L, si può scrivere tale relazione in funzione del tempo:

$$v_E = \frac{L}{T_E}, \quad v_g = \frac{L}{T_g}$$

Pertanto

$$q = \frac{6\pi\eta r L}{E}\left(\frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_g}\right)$$

Si ricava la carica elementare sfruttando più misure di suoi multipli.
Ogni discesa, a prescindere dal numero di elettroni passati sulla goccia, è identica, dunque T_g è fissato. Quello che può succedere è che nella risalita, il tempo T_E dipende da quante cariche sono state trasferite. Pertanto

$$ne = \frac{6\pi\eta r L}{E}\left(\frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_g}\right) \implies n = \frac{6\pi\eta r L}{eE}\left(\frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_g}\right) = a\frac{1}{T_E} + b$$

Tutte le quantità sono costanti, tranne T_E. Sottraendo due misure si ha

$$\Delta n \equiv n' \equiv n_0 - n_1 = a\left(\frac{1}{T_{E,0}} - \frac{1}{T_{E,1}}\right) \implies \frac{1}{a} = \frac{1}{n'}\left(\frac{1}{T_{E,0}} - \frac{1}{T_{E,1}}\right) = \text{cost}$$

La costante a è incognita, tuttavia si può ricavare come rapporto. [r] Facendo la differenza tra altre misure si ha

$$\frac{1}{n''}\left(\frac{1}{T_{E,1}} - \frac{1}{T_{E,2}}\right) = \text{stessa cost}$$

Egli misura

$$e = 1.5961 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Da cui dal rapporto carica-massa di Thomson si ricava la massa dell'elettrone

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg} = \frac{1}{1836} m_H$$

dove m_H è la massa dell'idrogeno.

Misura dei raggi positivi. Thomson osserva che il catodo è forato e dall'anodo provengono raggi capaci di impressionare una lastra fotografica. [r] Si vede la misura della carica-massa per ioni positivi.
.[immagine] L'apparato sperimentale è simile a quello usato per i raggi catodici: si ha un catodo forato succeduto all'esterno da un condensatore di lunghezza L e da una parete distante D dal condensatore. Il tutto è nel vuoto. Thomson pone le bobine del campo magnetico in modo che questi sia parallelo al campo elettrico.
La deviazione di quota è data da

$$y = \frac{qEL}{mv_x^2}\left(\frac{L}{2} + D\right)$$

Per i raggi catodici, si è introdotto un campo magnetico per bilanciare la forza elettrica così da dedurre la velocità. [r] Il discorso implicito nei raggi catodici è dato dalla presenza di un'unica velocità (dovuta alla stessa massa). Tuttavia, per i raggi positivi non è più così: si ha un gas rarefatto le cui molecole sono urtate dagli elettroni del catodo a distanze diverse dalla parete dell'apparato [r], quindi non esiste una v_x univoca per tutti gli ioni generati all'interno del volume. Per far fronte al nuovo grado di libertà, Thomson decide di misurare la traiettoria e alla dimensione z per determinare il rapporto carica-massa.
Dato che il campo magnetico è parallelo al campo elettrico, esso devia le particelle nella direzione z e non più y:

$$z = \frac{qBL}{mv_x}\left(\frac{L}{2} + D\right) \implies \frac{qBL}{mz}\left(\frac{L}{2} + D\right)$$

Da cui si ottiene
$$y = \frac{qEL}{m} \frac{m^2 z^2}{q^2 B^2 L^2} \frac{\left(\frac{L}{2} + D\right)}{\left(\frac{L}{2} + D\right)^2} = \frac{Em}{qB^2 L} \frac{z^2}{\left(\frac{L}{2} + D\right)}$$
si ha una parabola nel piano yz. Nel disegno ci si aspetta che i punti sperimentali si trovino nel terzo quadrante. Thomson osserva proprio questo. Il coefficiente di z^2 dipende solamente da $\frac{q}{m}$ e quindi dalla specie di gas utilizzato. Pertanto, m e q (cioè il gas particolare utilizzato) determinano la curvatura della parabola.
Gli studenti di Thomson utilizzano del neon ed osservano due parabole questo perché il gas utilizzato è formato da due isotopi: Neon-20 e Neon-22. La curvatura della seconda è più pronunciata della prima, perché la massa è maggiore. La parabola limite è data dall'idrogeno.
Thomson verifica l'assenza del bias nel suo apparato cambiando le direzioni di campo elettrico e di campo magnetico ottenendo una parabola per ogni quadrante.

Appunto sull'effetto Zeeman. L'effetto Zeeman per altre specie chimiche oltre l'idrogeno è diverso e la teoria sviluppata non funziona più: bisogna raffinare il modello atomico. [r]
Infatti si chiama "lamina quarto d'onda" proprio perché sfasa di 90°.

4 Radiazione di corpo nero

Si vuole studiare la radiazione termica, cioè la radiazione emessa da qualunque corpo per il solo fatto di avere una temperatura. Qualunque corpo emette uno spettro elettromagnetico. Misurando la forma spettrale dell'onda emessa, si nota essere uno spettro continuo che presenta un'emissione massima ad una particolare lunghezza d'onda.
Il primo approccio allo studio del problema è utilizzare le leggi di Maxwell. Esse si sono dimostrate valide in intervalli di frequenze e lunghezze d'onda estremamente vasti. Si è tentato di spiegare in modo classico la radiazione di corpo nero tramite la legge di Rayleigh-Jeans, tuttavia essa non corrisponde ai dati empirici. La semplicità del problema [r] Quindi, Planck mette in discussione alcuni principi fondamentali e grazie alla revisione di alcune credenze, egli riesce a formulare un modello da principi primi che fosse in grado di descrivere perfettamente la radiazione termica. [r] la nascita della fisica quantistica che poi si è evoluta con Bohr tramite postulati fino al 1926, senza una teoria matematica coerente della fisica quantistica. Poi Schrödinger provvede ad una spiegazione più coerente ed accettabile dai fisici.
Si studia in dettaglio lo spettro della radiazione termica.

Ogni corpo emette uno spettro continuo di radiazione elettromagnetica e due corpi con la stessa temperatura hanno anche uno spettro simile. Risulta tipico rappresentare lo spettro in un grafico λ, R dove la variabile indipendente λ è la lunghezza d'onda, mentre la variabile dipendente R è la radianza o emittenza con unità di misura $\mathrm{W\,m^{-2}}$.
Si definisce l'assorbanza a come la frazione di radiazione incidente assorbita; l'assorbanza t come la frazione di radiazione incidente trasmessa; e la riflettanza r come la frazione di radiazione incidente riflessa. La relazione che lega tali tre efficienti, per la conservazione dell'energia è
$$a + t + r = 1$$
Inoltre, si definisce corpo opaco quel corpo che non trasmette, $t = 0$ e dunque $a + r = 1$. In questo corso ci si occupa sostanzialmente di corpi opachi.

Legge di Kirchhoff. Si studiano le relazioni di questi coefficienti con la radianza. Si trova la legge di Kirchhoff (lo stesso dei circuiti). Si considerino diversi corpi opachi ($t = 0$) in equilibrio termico tra loro. Essi vengono investiti da un'intensità I di radiazione elettromagnetica; essa ha unità di misura $[I] = \mathrm{W\,m^{-2}}$. Sia E_{in} l'energia entrante e E_{out} l'energia uscente. Esse devono essere uguali perché i corpi sono in equilibrio termico. Si formalizza il bilancio energetico. Per un i-esimo corpo, l'energia risulta essere [r]
$$E_{\text{in}} = E_{\text{out}} \iff IA_i \Delta t\, a_i = R_i A_i \Delta t$$

Andando a dividere a due a due si ha

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1}{a_2} \implies \frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2} = \ldots = \frac{R_i}{a_i} = \text{cost}$$

Parentesi. L'energia elettromagnetica riflessa differisce dalla radianza. L'energia riflessa mantiene la stessa forma spettrale dell'energia incidente, sebbene possa cambiare l'ampiezza. Tuttavia, lo spettro di radiazione termica irradiato ha una forma particolare e specifica a prescindere dalla forma dell'energia incidente.

Corpo nero. Il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica, pertanto ha assorbanza $a_{\text{BB}} = 1$ ("BB" per "black body").
Il rapporto costante $\frac{R_i}{a_i} = \frac{R_{\text{BB}}}{1}$ è la radianza di corpo nero. Inoltre, $R_x < R_{\text{BB}}$, la radianza di corpo nero è la massima (alla stessa temperatura).
Il corpo in sé, per come definito, non esiste in natura, però esiste un modo per ottenere la sua stessa distribuzione spettrale. Si consideri una cavità (detta cavità isoterma) all'interno di un corpo opaco. Lo spettro all'interno di tale cavità è lo stesso spettro del corpo nero. La radiazione emessa del corpo opaco è costretta a rimanere nella cavità a meno di una piccola fessura per mezzo della quale si può osservare la radiazione.

Si anticipano dei concetti utili per la fine della trattazione del corpo nero e per l'osservazione della radiazione microonde del fondo cosmico. La radiazione è in equilibrio in dinamico con la materia. Dunque, si può immaginare la cavità in un altro modo: come materia dispersa, diffusa all'interno di una regione di radiazione [r] (essa non fugge perché è presente tanta massa che non ci si preoccupa degli effetti di bordo).

Si dimostra che la cavità ha lo stesso spettro del corpo nero.

Lecture 8

lun 28 mar 2022 14:30

Si considerino due materiali M_1 ed M_2 corpi opachi all'interno di una cavità.
Si studia la radiazione emessa e riflessa da M_1. Esso emette una radiazione $R_1 \Delta t$ verso M_2. Essa viene rifletta come radiazione $R_1 \Delta t \, r_2$. Così via: $R_1 \Delta t \, r_1 r_2$ poi $R_1 \Delta t \, r_1 r_2^2$ poi $R_1 \Delta t \, r_1^2 r_2^2$ e così oltre.
Si studia la radiazione emessa e riflessa da M_2. Esso emette una radiazione in base alla propria radianza verso M_1: $R_2 \Delta t$. Così si ha $R_2 \Delta t \, r_1$ poi $R_2 \Delta t \, r_1 r_2$ poi $R_2 \Delta t \, r_1^2 r_2$ e oltre.
La radianza verso destra (verso il corpo M_2) è

$$R_D \Delta t = R_1 \Delta t \left[1 + r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + \ldots\right] + R_2 \Delta t \left[r_1 + r_1^2 r_2 + r_1^3 r_2^2 + \ldots\right] = \frac{R_1 + R_2 r_1}{1 - r_1 r_2} \Delta t$$

Si utilizza la serie geometrica in quanto $r_1 r_2 < 1$. Dato che le pareti M_1 ed M_2 sono in equilibrio termico, si può applicare la legge di Kirchhoff

$$R_{\text{BB}} = \frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2}$$

Inoltre vale $a_i + r_i = 1$, da cui

$$R_i = (1 - r_i) R_{\text{BB}}$$

Pertanto

$$R_D \Delta t = \frac{R_{\text{BB}}(1 - r_1) + r_1(1 - r_2) R_{\text{BB}}}{1 - r_1 r_2} \Delta t = R_{\text{BB}} \Delta t \implies R_D = R_{\text{BB}}$$

Stessa cosa per la radiazione di sinistra:

$$R_S \Delta t = R_1 \Delta t \left[r_2 + r_1 r_2^2 + r_1^2 r_2^3 + \ldots\right] + R_2 \Delta t \left[1 + r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + \ldots\right] = \frac{r_2 R_1 + R_2}{1 - r_1 r_2} \Delta t$$

Da cui si ottiene ancora $R_S = R_{\text{BB}}$. Ogni riflessione, riempie la parte di spettro necessaria per passare dallo spettro del corpo opaco a quello del corpo nero.

4.1 Leggi empiriche

Si vedono delle leggi empiriche trovate studiando il corpo. Poi si studia come modellizzare lo spettro di corpo nero.
La radianza totale di corpo nero è proporzionale alla temperatura quartica:

$$R_{\mathrm{BB}} = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$$

[r] dove σ è una costante ottenuta per interpolazione (successivamente la si può ottenere da constanti fondamentali). Per il corpo opaco si ha

$$R_{\mathrm{BB}} = a\sigma T^4$$

Esempio. Si vede la potenza netta emessa dal corpo umano:

$$\begin{aligned} P_{\text{netta}} &= P_{\text{emessa}} - P_{\text{assorbita}} = Aa\sigma(T^4 - T_0^4) \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}\left(300^4 - 293^4\right) = 120\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

[r] Dove $A = 2\,\mathrm{m}^2$ è l'area del corpo umano e l'assorbanza è $a \approx 1$.

Esempio. Si deduce la temperatura sulla superficie del Sole. Il raggio solare è $r_s = 7 \times 10^8\,\mathrm{m}$, la distanza media Terra-Sole è $d_{\mathrm{TS}} = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, la costante solare (cioè la potenza irradiata sulla superficie terrestre) è $c_s = 1400\,\mathrm{Wm^{-2}}$. La potenza emessa sulla superficie del sole è

$$P_s = 4\pi d_{\mathrm{TS}}^2 c_s$$

Per Stefan-Boltzmann si ha

$$R = \sigma T^4 = \frac{P_s}{4\pi r_s^2} = \frac{d_{\mathrm{TS}}^2 c_s}{r_s^2} \implies T = 5800\,\mathrm{K}$$

Pressione di radiazione. Si studia la pressione di radiazione all'interno della cavità, così da collegare l'energia elettromagnetica con la pressione. Poi si collega la radianza con l'energia interna. [r]
Si consideri la densità di energia

$$[W] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Essa ha le stesse unità di misura di una pressione. [r] Si considera l'incidenza di un'onda elettromagnetica in maniera non ortogonale, ma con un angolo θ rispetto l'orizzontale. [immagine] A causa dell'angolo, la densità di energia trasferita alla parete è minore del caso ortogonale, perché l'area è maggiore a parità di energia. Infatti

$$\overline{RP} = \frac{\overline{PQ}}{\cos\theta}$$

Quindi, la densità di energia assorbita è

$$w' = w\cos\theta$$

L'argomentazione riguardo la pressione è più sottile. [immagine] La pressione trasferita risulta essere

$$\widetilde{P} = w'\cos\theta = w\cos^2\theta$$

cioè si proietta la densità di energia assorbita dalla parete sulla direzione ortogonale alla superficie.
Si complica il modello. Si considerano N raggi nella cavità, ciascuno porta una densità di energia w, per cui la densità di energia totale è $U = Nw$. All'interno della cavità non c'è motivo per cui la distribuzione sia anisotropa quanto l'energia non proviene, o si sposta, da una

direzione preferenziale. Pertanto, considerando una calotta sferica centrata in un punto di una parete, si ha

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{2\pi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

dove $\mathrm{d}N$ è il numero di raggi in una corona circolare (?, [r] per nome) della sfera. [r]

$$P = \sum^{N} w\cos^2\theta \implies P = \int_0^N w\cos^2\theta \,\mathrm{d}N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} w\cos^2\theta \sin\theta \, N \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}wN = \frac{1}{3}U$$

Così si lega la pressione alla densità di energia nella cavità.
Ora si vuole legare la radianza all'energia interna alla cavità. La superficie è in equilibrio termico, quindi per ogni punto, l'energia entrante è uguale all'energia uscente. Pertanto, si hanno $\frac{N}{2}$ raggi in entrata e la stessa quantità in uscita.
Si osserva che quanto studiato si applica ancora: sia ricevendo che emettendo un raggio, si ottiene comunque la stessa quantità di moto.
Inoltre, dato che w è una densità di energia, allora moltiplicando una densità per una velocità, si ottiene una densità di corrente di energia

$$[w \cdot c] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}} = [R]$$

[r] Pertanto

$$R = \sum^{\frac{N}{2}} cw\cos\theta \implies P = \int_0^{\frac{N}{2}} cw\cos\theta \,\mathrm{d}N = \int_0^{\frac{N}{2}} cw\cos\theta\sin\theta\frac{N}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}cwN = \frac{1}{4}cU$$

Esempio. Si calcola la pressione di radiazione sulla Terra. La costante solare è esattamente la radianza sulla Terra $c_s = 1400\,\mathrm{W m^{-2}}$. Dalle relazioni precedenti si ha

$$U = \frac{4R}{c} \implies P = \frac{4}{3}\frac{R}{C} = 6.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} = 6.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa}$$

Legge di Stefan-Boltzmann. Boltzmann ottiene la legge di Stefan-Boltzmann da considerazioni puramente termodinamiche.
L'entropia è una variable di stato

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$$

Quindi

$$\delta Q = \delta L + \delta\mathcal{U}$$

dove L è il lavoro e $\mathcal{U}$ è l'energia interna. Si ha

$$L = p\,\mathrm{d}V = \frac{1}{3}U\,\mathrm{d}V, \quad \mathcal{U} = UV \implies \delta\mathcal{U} = U\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}U = U\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}_T U\,\mathrm{d}T$$

Pertanto

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\frac{U}{T}\,\mathrm{d}V + \frac{U}{T}\,\mathrm{d}V + \frac{V}{T}\,\mathrm{d}_T U\,\mathrm{d}T = \frac{4}{3}\frac{U}{T}\,\mathrm{d}V + \frac{V}{T}\,\mathrm{d}_T U\,\mathrm{d}T \equiv \partial_V S\,\mathrm{d}V + \partial_T S\,\mathrm{d}T$$

[r] L'entropia è una funzione di stato e dunque il suo differenziale è esatto. Pertanto, le derivate miste sono identiche. Dunque

$$\begin{aligned}\partial_V\left(\frac{V}{T}\,\mathrm{d}_T U\right) = \partial_T\left(\frac{4}{3}\frac{U}{T}\right) &\iff \frac{1}{T}\,\mathrm{d}_T U = \frac{4}{3}\frac{1}{T}\,\mathrm{d}_T U - \frac{4}{3}\frac{U}{T^2} \\ &\iff 4\frac{U}{T} = \mathrm{d}_T U \implies 4\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}U}{U} \\ &\implies \ln U = A + 4\ln T \implies U = AT^4 \implies R = \frac{1}{4}cU = \frac{1}{4}cAT^4\end{aligned}$$

Ciò che sta alla base dello spettro di radiazione termica è qualcosa di fondamentale che non dipende da nulla se non dalle condizioni di equilibrio termico. Pertanto, si rende necessario descrivere la radiazione di corpo nero da principi primi.

Legge di Wien. Wien osserva che

$$\lambda_{\max} T = \text{cost} = 2.898 \times 10^{-3}\,\text{m}\,\text{K}$$

dove $\lambda_{\max}$ è la lunghezza d'onda per cui la radianza è massima.

Esempio. Sempre riguardo il corpo umano, ad una temperatura di $T = 305\,\text{K}$, la lunghezza d'onda massima è

$$\lambda_{\max} = \frac{2898\,\text{µm}\,\text{K}}{305\,\text{K}} = 9.5\,\text{µm}$$

Il picco è negli infrarossi.

Esempio. Nel caso del Sole, si ha il problema opposto. La lunghezza d'onda di radiazione massima è $\lambda_{\max} = 5000\,\text{Å}$. La temperatura del Sole è

$$T = \frac{2.898 \times 10^{-3}\,\text{m}\,\text{K}}{5000 \times 10^{-10}\,\text{m}} = 5537\,\text{K}$$

La radiazione del sole ha un picco a 500 nm (attorno al verde). Tale radiazione trapassa la plastica di una serra. Il suolo si scalda ed emette radiazione intorno ai micrometri che è una lunghezza d'onda troppo lunga per sfuggire dalla serra.

Funzione universale. Wien cerca una legge più universale che spieghi la radiazione di corpo nero [r]. Osservando $\lambda^5 R(\lambda)$ (oppure $T^{-5}R(\lambda)$) in funzione di λT, tutti i punti di misura seguono esattamente la stessa curva. Dunque

$$R(\lambda) = \lambda^{-5} f(\lambda T) = T^5 F(\lambda T) \implies F(\lambda T) = (\lambda T)^{-5} f(\lambda T)$$

La funzione F descrive tutti i punti sperimentali: è una funzione universale. Esiste qualcosa di fondamentale nello spettro di corpo. Bisogna ricavare tale funzione da principi primi. [r]

Lecture 9

mar 29 mar 2022 15:30

Wien cerca di modellizzare la densità di energia in cavità trovando una formula empirica

$$U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{k_B T}}$$

I punti sperimentali seguono bene la curva, tranne per lunghezze d'onda grandi.
Si formulano modelli derivanti da primi principi che spieghino i dati sperimentali. Il sistema è un inseme di radiazione in una cavità: tali onde sono assorbite ed emesse dalle pareti. Bisogna trovare tutti i modi possibili con cui un'onda si può disporre e poi associare un'energia ad ogni modo. Si può pensare che nelle pareti siano presenti degli oscillatori che assorbono ed emettono le radiazioni.

Esempio. Si vede un esempio monodimensionale per trovare i modi nella cavità. Si cercano i modi in cui si pone un'onda (simile ad una corda di una chitarra) e la sua vibrazione così da formare un'onda stazionaria. La condizione per trovare i modi di vibrazione di una corda è

$$kL = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \implies \frac{2\pi}{\lambda} L = \pi n \implies n = \frac{2L}{\lambda}$$

dove L è la lunghezza della cavità e kL è il fattore di fase (cioè, l'onda è della forma $\sin(kx)$, dove $x = L$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$). Quindi, considerato $\widetilde{n}$ la [r] per unità di lunghezza, si ha

$$n = \frac{N}{L} = \frac{2}{\lambda}, \quad \mathrm{d}n = \frac{2}{\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda \cdot 2$$

Inoltre, si aggiunge un fattore 2 perché [r]

Per il caso tridimensionale, si scompone il problema sui tre assi $k_i L = n_i \pi$. Pertanto

$$k_i = n_i \frac{\pi}{L}$$

[r] significato di n. Da cui

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$$

Da cui si ottiene

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L} n \implies n = \frac{2L}{\lambda}$$

Si vuole contare il numero di modi. In tre dimensioni, il numero di modi, cioè il numero dei vettori n è il volume della sfera di raggio n, in particolare un ottavo della sfera perché ogni n_i è positivo. Pertanto, il numero di modi tra 0 ed n è

$$N = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi n^3 = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi \frac{8L^3}{\lambda^3} = \frac{4}{3}\pi \frac{L^3}{\lambda^3} \implies \mathrm{d}N = \frac{4\pi L^3}{\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda \cdot 2 = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda$$

dove il fattore 2 tiene conto del numero di polarizzazioni. Da cui il numero di modi per unità di volume è

$$\mathrm{d}n = \frac{8\pi}{\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda$$

[r] Nella teoria di Planck, non tutti i modi trovano oscillatori adatti.
L'oscillatore più semplice è quello armonico, la cui energia media è $k_B T$?[r]. Rayleigh e Jeans deducono che la densità di energia tra λ e $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ è

$$U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda\, k_B T$$

Tuttavia, tale modello presenta una discrepanza con i dati sperimentali: la catastrofe ultravioletta. Si pone in discussione l'energia media per modo: essa deve essere dipendente dalla lunghezza d'onda così da bilanciare il fattore a denominatore.
Si è visto che l'energia media è

$$\langle E \rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{N}\frac{N}{Z}\int E e^{-\frac{E}{k_B T}}\,\mathrm{d}E$$

dove si è posto $g = 1$. Essa è la media pesata per il fattore di Boltzmann delle energie. Il parametro Z è il fattore di normalizzazione. Non si rinuncia al fattore di Boltzmann, ma si mantiene simile l'espressione e si afferma che gli oscillatori che costituiti dalle pareti, non possono scambiare energia in maniera continua, bensì solamente discreta. Dunque, l'energia media

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} mue^{-\frac{mu}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{mu}{k_B T}}}$$

dove u è il quanto di energia che può essere scambiato solamente in quantità discrete, mentre $m \in \mathbb{N}$. La forma è mantenuta perché $E_m = mu$: si ha ancora una media pesata dell'energia da parte del fattore di Boltzmann.
In realtà, Planck, prima di questi ragionamenti, cerca una formula empirica per descrivere lo spettro. Egli trova

$$U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

Questa formula descrive perfettamente tutti i punti di misura.
Dunque

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} mue^{-\frac{mu}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{mu}{k_B T}}} = \frac{ue^{-\frac{u}{k_B T}}\sum_{m=1}^{\infty} me^{-\frac{(m-1)u}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{mu}{k_B T}}}$$

Posto $x = e^{-\frac{u}{k_BT}}$. Il numeratore è

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m = \sum_{m=1}^{\infty} mx^{m-1} = \mathrm{d}_x \sum_{m=1}^{\infty} x^m = \mathrm{d}_x \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{(1-x)^2}$$

mentre il denominatore è

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

Dunque

$$\langle E\rangle = \frac{ux}{\frac{1}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{ux}{1-x} = \frac{ue^{-\frac{u}{k_BT}}}{1-e^{-\frac{u}{k_BT}}} = \frac{u}{e^{\frac{u}{k_BT}}-1}$$

Il denominatore deve corrispondere a quello trovato con la formula empirica pertanto

$$\frac{u}{k_BT} = \frac{c_2}{\lambda T} \implies u = \frac{kc_2}{\lambda} = \frac{kc_2}{c}\nu \equiv h\nu$$

dove il fattore della frequenza è la costante di Planck, $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. Pertanto

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1} = \frac{1}{\lambda}\frac{hc}{e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1}$$

Si una l'energia dipendente dalla lunghezza d'onda. Come Rayleigh e Jeans, trova il numero di modi [r] tra λ e $\lambda + \mathrm{d}\lambda$:

$$U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{1}{\lambda}\frac{hc}{e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1} = 8\pi hc\frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1}$$

Sapendo $\lambda = \frac{c}{\nu}$, $\mathrm{d}\lambda = \frac{c}{\nu^2}\,\mathrm{d}\nu$ si ha

$$\frac{8\pi}{\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2\,\mathrm{d}\nu$$

Da cui

$$U(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2\,\mathrm{d}\nu\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$$

Inoltre, per $h \to 0$ si ha

$$\langle E\rangle \to \frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{k_BT}-1} = k_BT$$

Si studia perché la discretizzazione dell'energia risolve il problema. Quando si è calcolata l'energia media nella formula di Boltzmann si ha

$$\langle E\rangle = \frac{1}{Z}\int Ee^{-\frac{E}{k_BT}}\,\mathrm{d}E$$

L'energia è pesata per il numero di oscillatori che hanno energia tra E e $E + \mathrm{d}E$. Se il quanto di energia è piccolo, cioè ν è piccolo, si discretizza l'asse delle energie, allora tale quanto è in risonanza con un oscillatore (ed anche i suoi multipli) [r]. Se il quanto di energia è grande, cioè ad alte frequenze, non ci sono oscillatori adatti ad oscillare a tale frequenza e tali modi sono poco presenti nella cavità. Ad alte frequenze si abbassa l'energia media. La legge di Planck modula l'energia in base alla frequenza [r]. Dato che gli oscillatori hanno una distribuzione in base alla temperatura, per frequenze alte, si hanno sempre meno oscillatori.

Oscillatori armonici. Si consideri un oscillatore armonico classico. L'equazione del moto e la frequenza è

$$\ddot{x} = -kx, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La cui soluzione è

$$x = x_0 \sin(\omega t), \quad \dot{x} = x_0 \omega \cos(\omega t)$$

L'energia totale è

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}kx_0^2 \sin(\omega t) = \frac{1}{2}kx_0^2$$

L'energia totale dipende solamente dall'elongazione delle oscillazioni.
L'oscillatore armonico quantistico non può avere un'energia di qualunque valore, ma dipende da $h\nu$: non si può mettere la massa in tutte le posizioni, ma solamente in certe.

Conseguenze macroscopiche. Si vedono le oscillazioni del pendolo con quantità macroscopiche. La sua frequenza di oscillazione è

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 1.6\,\mathrm{s}^{-1}$$

Mentre l'energia totale dipende dalla quota iniziale di rilascio $E = mgz$. Si ha

$$\Delta e = h\nu \approx 10^{-33}\,\mathrm{J}, \quad \frac{\Delta E}{E} = 10^{-28} = \frac{\Delta z}{z} = 10^{-28}$$

Questo rapporto è tredici ordini di grandezza del raggio nucleare (10^{-15}) [r].

Si vogliono ottenere le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien partendo dalla legge di Planck.

Lecture 10

lun 04 apr 2022 14:30

[r] Si scompone la probabilità di densità di energia $U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ come la probabilità di contare un certo numero di modi tra λ e $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ per la probabilità dell'energia media in ogni modo. [r] Planck suppone che lo scambio di energia avvenga in modo discreto. L'espressione trovata descrive perfettamente i dati. La descrizione è fatta in termini di densità di energia: l'energia elementare è $U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$, mentre quella totale è

$$U_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} U(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

Il calcolo della densità di energia è partito da contare il numero totale di modi tra 0 ed n

$$N = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi n^3$$

Non si utilizza una funzione cumulativa, ma si usano i relativi incrementi $\mathrm{d}N$ perché più informativi.
I modi in cavità sono i modi in cui un'onda stazionaria, il campo elettromagnetico si può presentare in cavità. Un'onda progressiva ed una regressiva si possono scrivere come

$$y_D = y_0 \sin(kx - \omega t), \quad y_S = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

Da cui l'onda totale è

$$y_D + y_S = y_0(\sin a + \sin b) = 2y_0 \sin\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2} = 2y_0 \sin(kx)\sin(\omega t)$$

Il tempo e lo spazio vengono disaccoppiati: i nodi rimangono sempre nella stessa posizione. Ogni corpo emette uno spettro elettromagnetico, tuttavia, generalmente un corpo è elettricamente neutro, ma sono presenti le cariche che si separano creando un dipolo oscillante che emette radiazione [r]. In cavità, si può immaginare un piccolo dipolo che oscilla emettendo un'onda elettromagnetica progressiva che si propaga in cavità. La parete opposta al dipolo riflette l'onda così producendo un onda regressiva e dando vita ad onde stazionarie. Sebbene il dipolo oscilli poco [r] esso continua ad alimentare l'onda: le oscillazioni si aggiungono costruttivamente all'onda già presente ed essa raggiunge ampiezze maggiori delle oscillazioni di partenza. Questo succede se non si ha un termine dissipativo: nella cavità non si ha tale termine perché essa è isoterma.
Le onde stazionarie nella cavità sono vincolate e non libere. I due vincoli sono la presenza di nodi sulle pareti

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases}$$

[r] Queste condizioni causano la presenza di nodi stazionari. Per la seconda condizione si ha

$$kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Da cui si ottiene

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \nu_n = \frac{c}{2L} n$$

Finiti questi chiarimenti, a questo punto, da Planck si vuole riottenere la legge di Stefan-Boltzmann $R = \sigma T^4$. [r] Si ha

$$R = \frac{c}{4} \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \, \mathrm{d}\nu$$

si pone $x = \frac{h\nu}{k_B T}$, $\mathrm{d}\nu = \frac{k_B T}{h} \, \mathrm{d}x$ e si ha

$$R = \frac{1}{4} cU = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \frac{k_B T}{h} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right) \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi^5}{c^2 15} \frac{k_B^4}{h^3} T^4$$

L'ultimo integrale è risolvibile tramite la funzione ζ di Riemann. Si trova anche il termine σ che dipende da costanti fondamentali.
Si ricava la legge di Wien: $\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \, \mathrm{m\,K}$. Dalla densità di energia si ha

$$U(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{\frac{hc}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \, \mathrm{d}\lambda$$

Si trova il massimo

$$\mathrm{d}_\lambda \left[\frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}\right] = 0 \iff -\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} \frac{hc}{\lambda^2 k_B T}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)^2} = 0$$

Si moltiplica da entrambi i lati per $\lambda^6 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)$ e si pone $x \equiv \frac{hc}{\lambda k_B T}$. Pertanto

$$x \frac{e^x}{e^x - 1} - 5 = 0 \implies x e^x = 5(e^x - 1) \implies x = 5(1 - e^{-x}) \implies x = W\left(-\frac{5}{e^5}\right) + 5 \approx 4.9651$$

Dove $W(x)$ è il ramo principale della funzione W di Lambert. Da cui si ricava un valore

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{k_B x} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \, \mathrm{J\,s} \cdot 3 \times 10^8 \, \mathrm{m\,s^{-1}}}{1.38 \times 10^{-23} \, \mathrm{J\,K^{-1}} \cdot x} = 2.898 \times 10^{-3} \, \mathrm{m\,K}$$

Una tipica domanda è: dati la radianza totale R_{tot} e lunghezza d'onda $\lambda_{\max}$ a radianza massima, cosa si può dire del corpo? Tramite Wien si ricava la temperatura del corpo; tramite Stefan-Boltzmann si ottiene l'assorbanza.
Il corpo nero è stato uno dei primi problemi risolti con nuovi concetti fisici: tramite la quantizzazione dell'energia. La discretezza dell'energia ha effetto trascurabile sul mondo macroscopico, ma non sul modo microscopico [r]. In questo modo si può rivedere il calore specifico e l'effetto fotoelettrico.
.[r] Il successo del modello di Planck venne confermato dal satellite COBE nella misura della radiazione di fondo dell'universo a 3 K. L'universo è permeato dalla radiazione di corpo nero [r]. In passato, l'universo era una cavità isoterma: radiazione e materia erano in equilibrio.

5 Calore specifico dei solidi

[r]

Teoria di Einstein. Si vedono le ipotesi della teoria di Einstein:

- gli oscillatori sono indipendenti; questa ipotesi viene rivista da Debye;
- le oscillazioni nei tre assi sono indipendenti;
- tutti gli oscillatori hanno la stessa frequenza di oscillazione

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{b}{m}}$$

L'energia totale è

$$U = 3N\langle E\rangle$$

dove N è il numero di atomi che compongono il solido, $\langle E\rangle$ è l'energia media per grado di libertà, ottenuta da Planck. Si calcola il calore specifico per volumi costanti

$$c_V = \frac{1}{n_{\text{mol}}}\left(\mathrm{d}_T U\right)_V$$

Ricordando che il numero di atomi totale è $N = n_{\text{m}}N_A$ e la costante di gas perfetto è $R = N_A k_B$, si ha

$$c_V = 3N_A h\nu e^{\frac{h\nu}{k_B T}}\frac{\frac{h\nu}{k_B T^2}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1\right)^2}\frac{k_B}{k_B} = 3R\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2\frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1\right)^2}$$

Si definisce la temperatura di Einstein come $\theta_E \equiv \frac{h\nu}{k_B}$. Pertnato

$$c_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{\left(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1\right)^2}$$

Per alte temperature $T \gg \theta_E$ si ha

$$c_V \approx 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\frac{1}{\left(1+\frac{\theta_E}{T}-1\right)^2} = 3R$$

Per basse temperature $T \ll \theta_E$ si ha

$$c_V \approx 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \sim_0 e^{-\frac{\theta_E}{T}}$$

Pertanto, tende a zero come un esponenziale e non come la cubica seguita dai dati sperimentali.

Modello di Debye. Egli ipotizza

- le vibrazioni termiche sono assimilate a delle onde sonore;
- il solido è considerato un continuo elastico: il mezzo in cui si propagato tali è il corpo stesso;
- essendo il corpo finito, sono presenti delle condizioni al contorno e pertanto bisogna contare i modi ammessi, come per la cavità isoterma.

Per continuo elastico, si intende che i siti molecolari sono accoppiati con i propri vicini. Bisogna contare i modi che si instaurano nel continuo elastico. Il conto è quasi identico a quanto fatto per Planck. Il numero di modi per unità di frequenza è

$$G(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{4\pi V}{v^3}\nu^2\,\mathrm{d}\nu$$

dove v è la velocità dell'onda, cioè la velocità del suono all'interno del corpo elastico; mentre V è il volume del corpo. La differenza con il corpo nero risiede nel fatto di considerare tutte le direzioni di propagazione. Nel campo elettromagnetico sono presenti solamente modi trasversali, in questo caso i modi sono anche longitudinali. Dunque

$$\frac{4\pi V}{v_l^3}\nu^2\,\mathrm{d}\nu, \quad 2\frac{4\pi V}{v_t^3}\nu^2\,\mathrm{d}\nu$$

Il fattore due descrive le polarizzazioni. Dunque, bisogna sommare i modi

$$G(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 4\pi V v^2\left[\frac{1}{v_l^3 + \frac{2}{v_t^3}}\right]\mathrm{d}\nu = 4\pi V v^2 \frac{1}{\langle v_s^3\rangle}\,\mathrm{d}v$$

[r] Dove v_s è la velocità sonora. Si ha un'altra perturbazione al modello di Planck. Ci si chiede quanti possono essere i modi possibili. La sommatoria dei modi non può andare all'infinito: al limite si hanno tanti modi di vibrazione quanti sono gli atomi, in quanto ogni atomo potrebbe vibrare indipendentemente. Dunque, i modi totali sono $3N$ ed esiste un estremo superiore della frequenza di vibrazione, detto frequenza di Debye ν_0. Infatti

$$3N = \int_0^{\nu_0} \frac{4\pi V}{\langle v_s^3\rangle}\nu^2\,\mathrm{d}\nu = \frac{4\pi V}{\langle v_s^3\rangle}\frac{\nu_0^3}{3} \implies \nu_0^3 = \frac{9}{4}\frac{N\langle v_s^3\rangle}{nV} = \frac{9}{4\pi}n\langle v_s^3\rangle$$

Inoltre, $\frac{N}{V} = n \approx 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$ è una densità di atomi. In particolare, la relazione seguente è utile per semplificare i conti

$$\frac{4\pi V}{\langle v_s^3\rangle} = \frac{9N}{\nu_0^3}$$

[r] Tipicamente si ha che $v_t < v_l$. Nel caso di Einstein, esiste una ed una sola frequenza di oscillazione dei siti reticolari.
Per una densità tipica di $\frac{N}{V} = 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$ ed una velocità del suono media di $\langle v_s\rangle = 10^5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, si ottiene una frequenza di Debye di

$$\nu_0 = 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1} \implies \lambda_{\min} \approx 1\,\text{Å}$$

Ma questa lunghezza d'onda diventa un problema perché essa risulta più piccola del passo reticolare [r]. Solo alla fine si ritorna su questo punto.

Lecture 11

mar 05 apr 2022 15:30

ν_0 sarebbe ν_D. [r]
Il calore specifico è

$$c_V = \frac{1}{n_\mathrm{m}}(\partial_T U)_V$$

Mentre la densità di energia è il prodotto della probabilità di contare un certo numero di modi tra ν e $\nu+\mathrm{d}\nu$ per la probabilità dell'energia media in ciascun modo. Pertanto, l'energia totale è

$$U=\int_0^{\nu_0}\frac{4\pi V\nu^2}{\langle v_s\rangle^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\,\mathrm{d}\nu$$

Si utilizza l'utile relazione scritta in precedenza con cui si ottiene

$$U=\frac{9Nh}{\nu_D^3}\int_0^{\nu_D}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\,\mathrm{d}\nu$$

Si ricorda che il numero totale di atomi è $N=N_An_\mathrm{m}$. Pertanto, il calore specifico è

$$c_V=\frac{9N_Ah}{\nu_D^3}\int_0^{\nu_D}\frac{\nu^3e^{\frac{h\nu}{k_BT}}\frac{h\nu}{k_BT}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1\right)^2}\,\mathrm{d}\nu$$

[r] Sostituendo $x\equiv\frac{h\nu}{k_BT}$, $\mathrm{d}x=\frac{h}{k_BT}\,\mathrm{d}\nu$, $\mathrm{d}\nu=\frac{k_BT}{h}\,\mathrm{d}x$ e $\nu=\frac{k_BT}{h}x$; si a

$$\begin{aligned}c_V&=\frac{9N_Ah}{\nu_D^3}\int_0^{\overline{x}}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^3\frac{x^3e^x}{(e^x-1)^2}\frac{h}{k_BT^2}\frac{k_BT}{h}x\frac{k_BT}{h}\,\mathrm{d}x\\&=9R\left(\frac{k_BT}{h\nu_D}\right)^3\int_0^{\overline{x}}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

dove $\overline{x}\equiv\frac{h\nu_D}{k_BT}$, mentre R è la costante dei gas perfetti. Si definisce la temperatura di Debye $\theta_D=\frac{h\nu_D}{k_B}$. Dunque

$$c_V=9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\int_0^{\frac{\theta_D}{T}}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Per alte temperature $T\gg\theta_D$, si ha

$$c_V\approx 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\int_0^{\frac{\theta_D}{T}}\frac{x^4}{(1+x-1)^2}\,\mathrm{d}x=9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\frac{1}{3}\left(\frac{\theta_D}{T}\right)^3=3R$$

come ci si aspetta. Per basse temperature $T\ll\theta_D$ si ha

$$c_V\approx 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3\int_0^{\infty}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x\sim_0 T^3$$

Si nota la dipendenza da T^3 come osservato dai dati sperimentali (l'integrale è uguale a $\frac{4}{15}\pi^4$).

Si è già notato che le frequenze vibrazionali? [r] limite hanno una dimensione confrontabile con la spaziatura degli atomi nel reticolo. Si raffina la teoria per il caso monodimensionale.

Continuo elastico raffinato monodimensionale. Si consideri un continuo elastico monodimensionale. Sia a la spaziatura tra gli atomi. Sia ξ_n la distanza dalla posizione di equilibrio. L'atomo n-esimo è soggetto ad una forza elastica causata dagli atomi vicini, però bisogna anche considerare lo spostamento di essi [r]. Le forze elastiche dovute ai vicini sono

$$-\beta\xi_n+\beta\xi_{n\pm1}$$

Si considerano solamente le interazioni con i primi vicini. Pertanto, l'equazione del moto è

$$M\mathrm{d}_t^2\xi_n=-b(\xi_n-\xi_{n+1})-\beta(\xi_n-\xi_{n-1})=\beta(\xi_{n+1}+\xi_{n-1}-2\xi_n)$$

Si cercano soluzioni armoniche del tipo

$$\xi_n=\xi_0e^{i(\omega t-kx)}$$

La posizione assoluta dell'atomo n-esimo è $x_n = na$. Sostituendo la soluzione nell'equazione si ha

$$\begin{aligned}
-M\omega^2\xi_0 e^{i(\omega t-kna)} &= \beta\left(\xi_0 e^{i(\omega t-k(n+1)a)} + \xi_0 e^{i(\omega t-k(n-1)a)} - 2\xi_0 e^{i(\omega t-kna)}\right) \iff \\
-M\omega^2 &= \beta\left(e^{-ika} + e^{ika} - 2\right) = \beta\left(2\cos(ka) - 2\right) \\
\implies \omega^2 &= \frac{2\beta}{M}\left(1-\cos(ka)\right) = \frac{4\beta}{M}\sin^2\frac{ka}{2}
\end{aligned}$$

Si è trovata una relazione di dispersione, essa lega ω a k:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$$

Si ha il massimo per $k = \frac{\pi}{a}$ in cui si ha $\omega = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}}$. La velocità di gruppo dell'onda è $v_g = \mathrm{d}_k\omega$. I diversi modi in questo modello raffinato non si propagano alla stessa velocità, ma a velocità diverse. Nella teoria di Debye si sottintende che $\lambda\nu = \frac{\omega}{k} = \langle v_s\rangle$. [r]
Per $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ piccolo, si ha λ grande e dunque tale lunghezza d'onda non è confrontabile con le dimensioni reticolari perché molto più grande. Per $k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{\pi}{a}$ si ha $\lambda \approx 2a$ e dunque λ è relativamente piccolo, e tali lunghezze d'onda non si propagano (basta vedere il valore di v_g).

Velocità di gruppo. [r]
La frequenza è una funzione della lunghezza d'onda

$$\omega = f(k) = \omega_0 + (k-k_0)\omega_0'$$

Per un onda si ha

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t - kx) &= \sin(f(k)t - kx) = \sin(\omega_0 t + (k-k_0)\omega_0' t - kx + k_0 x - k_0 x) \\
&= \sin((\omega_0 t - k_0 x) - (k-k_0)(x-\omega_0' t)) = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Per un pacchetto di onde, cioè un insieme di onde a diversa lunghezza k, si ha

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \int \sin(\omega_0 t - k_0 x)\cos((k-k_0)(x-\omega_0' t)) - \cos(\omega_0 t - k_0 x)\sin((k-k_0)(x-\omega_0' t))\,\mathrm{d}k \\
&= \sin(\omega_0 t - k_0 x)\int \cos((k-k_0)(x-\omega_0' t))\,\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

dove il seno è un'onda che si propaga con una velocità di fase $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$, ma la sua ampiezza è modulata dall'integrale. La frequenza interna si muove con v_f, mentre l'inviluppo si muove con una velocità di gruppo $v_g = \omega_0'$.
In un mezzo, la frequenza massima che si può propagare è quella per cui gli atomi oscillano secondo versi alterni, uno su, uno giù, uno su, uno giù. Tuttavia, di questo modo ne esiste solamente uno, tutti gli altri modi hanno lunghezze d'onda maggiori (due su, uno giù, etc).

6 Effetto fotoelettrico

Si studia una fenomenologia non spiegabile con la fisica classica e ci si risolve alla meccanica quantistica.
Si consideri un metallo. L'effetto fotoelettrico consiste nell'estrarre i suoi elettroni irraggiandolo con onde elettromagnetiche. Le prime osservazioni risalgono al 1888. L'apparato sperimentale è costituito da due lastre metalliche una di fronte all'altra, entrambe collegate in serie con un amperometro, poi in serie con un voltmetro in parallelo ad un generatore di tensione continua. Colpendo una lastra con delle onde elettromagnetiche, vengono emessi degli elettroni. [r]
I parametri dell'apparato sono

- tensione del generatore $V \approx 10\,\mathrm{V}$;
- corrente I;
- campo elettrico? E [r];
- frequenza della radiazione elettromagnetica ν_{EM}

Si vuole mettere in relazione la corrente del generatore con la corrente fotoelettrica.
Le evidenze sperimentali sono

- l'osservazione di una relazione di proporzionalità diretta tra le due correnti per V, ν, E costanti;
- oltre una tensione di soglia, la foto-corrente aumenta fino ad un massimo quando si aumenta la tensione [r] Applicando un potenziale contrario nel tentativo di interrompere la foto-corrente si trova il potenziale di stop V_s che è indipendente dall'intensità di illuminazione. Si può definire una energia cinetica massima $eV_s = K_{\max}$ [r]. Classicamente, dato che $I \propto E^2$ e $F = qE$, ci si aspetta che l'energia dipende dall'illuminazione [r]
- La foto-corrente in funzione della frequenza della radiazione si registra solamente sopra una certa frequenza. Tale frequenza di soglia è indipendente dalla corrente (ma non è la stessa per tutti i materiali). Classicamente ci si aspetta di osservare della corrente a tutte le frequenze e che quindi non ne dipendesse.
- Il potenziale di stop in funzione della frequenza è una relazione lineare (con intercetta negativa):
  $$eV_s = a\nu - W_0$$
  dove W_0 è il lavoro di estrazione. Solamente quando la frequenza è tale che $a\nu > W_0$, si ha un potenziale di stop $V_s > 0 \implies K_{\max} > 0$. Solamente sopra una tale frequenza si ha abbastanza energia di scappare dal metallo ed acquisire energia cinetica, così misurando una corrente. L'intercetta della relazione lineare è Φ detto potenziale di estrazione. [r]

Einstein spiega questa intera fenomenologia introducendo il fotone.