

Physics 3

May 29, 2022

Contents

1	Introduzione	1
2	Corpuscolarità della materia	2
2.1	Distribuzione	5
2.2	Conferme sperimentali	8
2.3	Meccanica statistica	19
3	Granularità della carica	21
4	Radiazione di corpo nero	25
4.1	Leggi empiriche	27
5	Calore specifico dei solidi	34
6	Effetto fotoelettrico	38
6.1	Fotomoltiplicatore	40
7	Modelli atomici	40
7.1	Thomson	41
7.2	Rutherford	43
7.3	Bohr	47
7.4	Modello di Wilson-Sommerfeld	55
8	Raggi X	61
8.1	Scattering di Compton	65
8.2	Produzione di coppie	68
9	Onde materiali	69
9.1	Pacchetto d'onda	71
9.2	Principi di indeterminazione di Heisenberg	74

Lecture 1

mar 01 mar
2022 15:30

1 Introduzione

Si trattano i costituenti della materia.

- Corpuscolarità della materia. Si osserva la teoria cinetica dei gas, la cui trattazione è statistica. Si accenna alla meccanica statistica. Si individuano alcuni problemi della trattazione classica.
- Corpuscolarità della carica. Si osservano gli esperimenti della scoperta dell'elettrone e della misura della sua carica.

- Si affronta l'argomento del corpo nero con cui si introducono i primi concetti di fisica quantistica.
- Calore specifico. Si risolve, con un nuovo modello che si basa sulla fisica quantistica il problema del calore specifico.
- Effetto fotoelettrico. Si partono dalle evidenze sperimentali che non si riescono a spiegare con le nozioni classiche, così bisogna introdurre il fotone con cui si riesce a spiegare la fenomenologia.
- Modelli atomici. Si vede in dettaglio il modello di Rutherford, ed il modello di Bohr che prende spunto dal corpo nero e dall'effetto fotoelettrico. Si spiegano le evidenze sperimentali degli spettri atomici.
- Raggi X.
- Onde materiali, dualismo onda-particella, principio di indeterminazione di Heisenberg.

Il filo conduttore sono i dati sperimentali in coppia con il modello che spiega tali dati.

2 Corpuscolarità della materia

Tutta la fisica in questo corso copre circa 70 anni fino al 1850 al 1925. Questo è l'anno della pubblicazione dell'equazione d'onda di Schrödinger e inizia l'utilizzo della meccanica quantistica. Ai primi del 1800, i chimici avevano capito che la materia è costituita da componenti uguali ed fondamentali. Si formula la teoria cinetica dei gas in cui lo scopo è quello di legare delle proprietà cinematiche di meccanica alla temperatura. Si ricorda la legge dei gas perfetti

$$PV = n_{\text{moli}}RT$$

con $R = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

Le ipotesi della teoria cinetica sono

- volume V fissato
- equilibrio termico
- N elementi interagiscono in modo elastico
- si trascurano le forze inter-molecolari
- non sono presenti forze esterne (il sistema è isolato)

Considerato un sottoinsieme N_i delle particelle con velocità v_i si considerano gli urti elastici con le pareti. [immagine]

Si calcola la variazione di momento lineare come

$$\Delta p_{x_i} = 2mv_{x_i}$$

e quindi la pressione

$$\frac{F}{A} = \frac{\frac{\Delta p}{\Delta t}}{A} = \frac{2mv_{x_i}}{A\Delta t}$$

dove la forza si calcola tramite il teorema dell'impulso. Questo vale per una particella, tuttavia, non tutte le particelle urtano la parete nell'intervallo Δt , ma solamente una frazione. Solamente le particelle nel volume dato da $Av_{x_i}\Delta t$ sono quelle che urteranno la parete. Pertanto, tale frazione è

$$\rho = \frac{v_{x_i}\Delta t A}{2V}$$

bisogna porre un fattore di $\frac{1}{2}$ perché una metà (in media) delle particelle si allontana dalla parete sempre con velocità v_{x_i} . Si calcola la pressione come

$$P_i = \frac{2mv_{x_i}}{A\Delta t} \frac{v_{x_i}\Delta t A}{2V} = \frac{mv_{x_i}^2}{V}$$

Ora bisogna sommare su tutte le possibili velocità. Dunque la pressione totale è

$$P_T = \sum_i P_i N_i = \frac{m}{V} \sum_i N_i v_{x_i}^2 = \frac{Nm}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

si ricorda che

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i v_{x_i}^2$$

Per isotropia dello spazio si ha

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$$

Pertanto, l'espressione della pressione totale risulta essere

$$P_T = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle K \rangle$$

si dice $\frac{N}{V} \equiv n$ densità di particelle. Inoltre, K è l'energia cinetica. Si lega la velocità alla temperatura tramite la legge dei gas perfetti

$$P_T V = \frac{1}{3} N m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} N \langle K \rangle \equiv n_{\text{moli}} R T$$

pertanto

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \frac{n_{\text{moli}}}{N} R T = \frac{3}{2} k_B T$$

ricordando che $n_{\text{moli}} = \frac{N}{N_A}$ e $k_B = \frac{R}{N_A}$ costante di Boltzmann (essa è una R specifica, che viene riscalata per un costituente di una mole) e vale $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Si nota che $k_B T$ ha le dimensioni di una energia. Per la temperatura ambiente di $T = 300 \text{ K}$, si ha

$$k_B T = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J} = 25 \text{ meV}$$

Considerazioni. Su questo si fanno alcune considerazioni.

- Si è legata l'energia cinetica alla temperatura per un gas monoatomico: $\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$. Da cui la velocità a partire dalla temperatura risulta

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- Moltiplicando l'energia cinetica media si ottiene l'energia cinetica totale da cui si può ricavare il calore specifico. Ricordando

$$c_V = \frac{1}{n_m} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Si ha un'energia totale di una mole

$$U = N_A \langle K \rangle = N_A \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} R T$$

pertanto il calore specifico risulta essere

$$c_V = \frac{3}{2} R$$

questa espressione funziona per alte temperature.

- Si deriva il teorema di equipartizione. Considerato

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

l'energia cinetica ha un contributo per ogni asse a cui si associa

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

e ciò si finalizza nel teorema di equipartizione.

Esempio. Si consideri l'elio ha 20 °C. Dunque la velocità (root mean square)

$$v_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1})(293 \text{ K})}{4 \cdot (1.66 \times 10^{-27} \text{ kg})}} = 1350 \text{ m s}^{-1}$$

Teorema. Considerato un sistema in equilibrio termico, il calore si ripartisce equamente tra i contributi quadratici indipendenti dell'energia con un fattore pari a $\frac{1}{2}k_B T$.

Esempio. Si vede l'oscillatore armonico in una dimensione. L'energia totale

$$E_T = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

dunque l'energia media alla temperatura T è

$$\langle E_T \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2}k_B T = k_B T$$

Esempio. Si considera un gas costituito da molecole biatomiche. [immagine]
Si vedono alcune ipotesi di base che poi si analizzano e rimuovono.

- La distanza tra i due atomi è fissa.
- Tre gradi di libertà traslazionali.
- Due gradi di libertà rotazionali (due perché essi sono rotazioni rispetto gli assi che non sono di simmetria).

Pertanto, l'energia totale ha cinque contributi:

$$E_T = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2$$

Dunque l'energia totale per una mole risulta essere

$$U = 5N_A \frac{1}{2}k_B T = \frac{5}{2}RT \implies c_V = \frac{5}{2}R$$

rimuovendo l'ipotesi di distanza fissa, bisogna considerare una forza di attrazione tra le due masse di tipo elastico, dunque si aggiungono due termini (perché si ottiene un oscillatore armonico). Quindi

$$c_V = \frac{7}{2}R$$

Se, invece, la molecola può anche ruotare attorno a z' allora si ha un altro contributo rotazione per cui

$$c_V = \frac{6}{2}R = 3R$$

I ragionamenti fatti non sono sempre veri. Da misure sperimentali, il calore specifico varia con la temperatura.

Osservazione. Quarta considerazione. Si può applicare il teorema di equipartizione anche ai solidi. Dalla legge di Dulong-Petit si trova che il calore specifico è $c_V = 3R$. Per tanti elementi, tale valore rimane costante per certi intervalli estesi di temperatura.

[immagine] Si ricava la legge di Dulong-Petit dal teorema di equipartizione. In prima approssimazione, gli atomi del solido sono legati da potenziali armonici. Quindi, per quanto visto, si hanno tre contributi armonici (uno per ogni asse) per cui

$$U = 6N_A \frac{1}{2} k_B T = 3RT \implies c_V = 3R$$

Questo vale ad alte temperature. A basse temperature il calore specifico tende a zero cubicamente. [immagine]

La teoria cinetica funziona, ma non sempre. Nella fisica nota fin'ora non si è in grado di spiegare l'abbassamento del calore specifico: questo richiede i primi concetti di fisica quantistica.

2.1 Distribuzione

Si vede la distribuzione di probabilità delle velocità delle particelle di un gas.

Le ipotesi sono

- Lungo le tre coordinate sia ha la stessa distribuzione.
- Tali tre distribuzioni sono indipendenti.
- Vale

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

così si estende quanto visto fin'ora.

Si cerca una distribuzione $F(v_x^2, v_y^2, v_z^2)$ di probabilità delle velocità. Il numero di particelle con velocità v_i compresa tra v_i e $v_i + dv_i$ (con $i = x, y, z$) risulta

$$NF(v_x^2, v_y^2, v_z^2) dv_x dv_y dv_z$$

con N numero totale di particelle.

Si applicano le prime due ipotesi. Per la seconda ipotesi, la distribuzione F si può fattorizzare e, insieme alla prima, si ha

$$F(v_x^2, v_y^2, v_z^2) = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2)$$

si impone come vincolo che $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Risulta essere un problema di massimizzazione, bisogna trovare f tale da massimare la probabilità F sotto il vincolo precedente. Si utilizzano i moltiplicatori di Lagrange. Si considera il logaritmo:

$$\mathcal{L} = \ln F + \lambda(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

quindi

$$\partial_{v_x^2} \mathcal{L} = \frac{1}{f(v_x^2)} d_{v_x^2} f + \lambda = 0 \iff d_{v_x^2} f = -\lambda f(v_x^2)$$

la cui soluzione risulta essere

$$f(v_x^2) = f_0 e^{-\lambda v_x^2} = f(v_x)$$

l'ultima uguaglianza vale perché lo spazio è isotropo, quello che si fa è riscaldare gli assi del sistema di riferimento di modo che si abbia la trasformazione $v_x^2 \rightarrow v_x$.

Per determinare i due parametri basta imporre la normalizzazione e la terza ipotesi (cioè il teorema di equipartizione): si calcola la velocità quadratica media e si utilizza la relazione dell'ipotesi. Si impone la normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0 e^{-\lambda v_x^2} dv_x \equiv 1$$

posto $\lambda = A^2$, tale integrale fa parte della famiglia degli integrali di Gauss. Si definisce l'integrale di Gauss di ordine zero:

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2 x^2} dx$$

Considerato

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$$

segue

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta dr = \pi \implies I = \sqrt{\pi}$$

Pertanto

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2 x^2} dx = \frac{1}{A} \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2 x^2} d(Ax) = \frac{1}{A} \sqrt{\pi}$$

A questo punto si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f_0 e^{-A^2 v_x^2} dv_x = f_0 \frac{\sqrt{\pi}}{A} \equiv 1 \implies f_0 = \frac{A}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

Lecture 2

lun 07 mar
2022 14:30

Si ricava la costante A dalla terza ipotesi. Ricordando che

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \implies \langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$$

si scrive il valore medio come un integrale

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} v_x^2 \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 v_x^2} dv_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} v_x^2 e^{-A^2 v_x^2} dv_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}} I_2 \equiv \frac{k_B T}{m}$$

Si ha un integrale di Gauss del secondo ordine

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-A^2 x^2} dx = -\frac{dI_0}{dA^2} = -d_A I_0 d_{A^2} A = \frac{\sqrt{\pi}}{A^2} \frac{1}{2A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2A^3}$$

portare la derivata dentro il segno di integrale è concesso per mezzo della regola di Leibniz per l'integrazione. Pertanto

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2A^3} = \frac{1}{2A^2} \equiv \frac{k_B T}{m}$$

da cui si ottiene

$$A = \sqrt{\frac{m}{2k_B T}}$$

A questo punto, l'espressione della distribuzione cercata risulta essere

$$f(v_x) dv_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 v_x^2} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

essa è una gaussiana centrata in zero con varianza pari a $\sigma^2 = \frac{k_B T}{m}$. La media è nulla cioè non si ha uno spostamento netto del gas in una direzione particolare. La distribuzione che tiene conto di tutte e tre le proiezioni risulta essere

$$F(v_x^2, v_y^2, v_z^2) dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$

ricordando che $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \equiv v^2$, la distribuzione dipende dal valore assoluto dalla velocità, ma gli elementi differenziali dipendono ancora dalla proiezioni. Per ovviare a tale problema si passa in coordinate sferiche e si integra sugli angoli facendo rimanere v :

$$F(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

questa è la distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità. Interessa sapere la quantità $n(v)$ di particelle con una velocità tra v e $v + dv$. Per trovarlo basta moltiplicare la distribuzione per il numero totale delle particelle del gas

$$n(v) dv = NF(v) dv$$

La distribuzione ha dominio $[0, +\infty)$, è asimmetrica e si possono individuare la velocità più probabile, v_{MP} (MP per most probable ed essa corrisponde alla moda), la velocità media, $\langle v \rangle$, e la radice della velocità quadratica media, v_{RMS} .

Si trova v_{MP} . Si compie la derivata rispetto la velocità:

$$2ve^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} + v^2 \left(-2v \frac{m}{2k_B T} \right) e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = 0 \iff 1 - \frac{mv^2}{2k_B T} = 0 \iff v_{MP} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

Si trova la velocità media $\langle v \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^{+\infty} v F(v) dv = \int_0^{+\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} I_3 \end{aligned}$$

Si ha un integrale di Gauss di ordine terzo. Si risolve per ricorrenza tramite l'integrale di Gauss di ordine primo

$$I_1 = \int_0^{+\infty} v e^{-A^2 v^2} dv = \frac{1}{2A^2} \int_0^{+\infty} 2A^2 v e^{-A^2 v^2} dv = \frac{1}{2A^2} \left[-e^{-A^2 v^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2A^2}$$

e si nota che

$$I_3 = -d_{A^2} I_1 = \frac{1}{2A^4}$$

Ricordando che

$$A^2 = \frac{m}{2k_B T}$$

si ha

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^2 = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

L'espressione di $v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ è già nota, infatti è una delle ipotesi utilizzata per trovare esplicitamente la distribuzione:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \implies v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Pertanto le tre quantità sono

$$v_{MP} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

2.2 Conferme sperimentali

Si vedono delle conferme sperimentali della teoria cinetica:

- Distribuzione delle velocità di effusione;
- Effetto Doppler termico;
- Coefficienti di trasporto (viscosità, conducibilità del calore);
- Moto browniano.

Velocità di effusione. [immagine] Risulta possibile misurare la distribuzione delle velocità tramite un esperimento ingegnoso. Si consideri un volume contenente un gas a temperatura T in equilibrio termico. Si effettua un piccolo foro su di una parete in modo che non si perturbi la distribuzione interna la quale rimane in equilibrio termico. Il gas attraversa il collimatore e si trova in una zona dove sono presenti due dischi paralleli, in movimento con velocità ω , a distanza s , con settori circolari rimossi e sfalsati di un angolo θ .

La condizione per cui le particelle passano per la prima fenditura ed anche per la seconda è quella per cui $\frac{s}{v} = \frac{\theta}{\omega}$ per cui $v = \frac{s}{\theta}\omega$. Variando ω si ottiene la distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann, ma con un bias che deriva dalla selezione delle particelle più probabili a colpire la parete e dunque più probabili ad avere una velocità maggiore. La presenza di tale bias non è un problema fin tanto che ne si deduce la natura. Si deduce la distribuzione delle velocità di effusione dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann con bias.

Si analizza il processo di fuoriuscita dalla fenditura di area dA . [immagine] Fissato un angolo θ rispetto la normale della superficie, solamente le particelle all'interno di un cilindro di volume $dA \cos \theta v dt$ potranno uscire dal foro.

Il numero di particelle con velocità tra v e $v + dv$ abbastanza alta per uscire è

$$dn_E = NF(v) dv \frac{dA \cos \theta v dt}{V}$$

che è la frazione di particelle con la probabilità di avere velocità tra v e $v + dv$, e di trovarsi all'interno del cilindro avendo una traiettoria per uscire dal foro.

Si raggruppano i coefficienti del volume, dell'area, dell'angolo e del tempo in una costante Φ_0 che si ricava successivamente dalla condizione di normalizzazione. Quindi

$$dn_E = N v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v \Phi_0$$

si nota che dei coefficienti che non si sono raggruppati compare una v . Questa trovata è la nuova densità di probabilità delle velocità di effusione.

In altre parole,

$$dn_E = NP(\text{avere certa velocità}) P(\text{distanza giusta}) P(\text{direzione giusta})$$

dove $P(\cdot)$ è l'operatore "probabilità di". Il numero di particelle che escono è la frazione delle particelle totali che hanno contemporaneamente una certa velocità, la distanza giusta e la direzione giusta.

Il primo fattore corrisponde a $F(v) dv$.

Si studia la probabilità del secondo fattore. La probabilità di trovarsi alla distanza giusta corrisponde alla probabilità di trovarsi all'interno di un emisfero centrato nella fenditura e tale probabilità è data dal rapporto dei volumi

$$P = \frac{1}{2} \frac{4\pi (v dt)^3}{3V}$$

Si studia il terzo fattore. Una particella deve puntare alla fenditura, cioè il vettore velocità dev'essere compreso in un settore sferico definito da un angolo solido $d\Omega$ che sottende $dA \cos \theta$. Si ha che

$$d\Omega = \frac{dA \cos \theta}{(v dt)^2} \implies P = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{dA \cos \theta}{4\pi (v dt)^2}$$

dove si ricorda che $v dt$ fa da raggio (in quanto anche dimensionalmente si ha una lunghezza) e 4π è l'angolo solido totale che sottende tutta la superficie sferica.

Pertanto, la probabilità di questi tre eventi (indipendenti) risulta essere

$$dn_E = NF(v) dv \frac{4\pi(v dt)^3}{2 \cdot 3V} \cdot \frac{dA \cos \theta}{4\pi(v dt)^2} = NF(v) dv \frac{dA \cos \theta v dt}{6V}$$

Il fattore di $\frac{1}{6}$ si sarebbe potuto anche ottenere nell'espressione scritta in precedenza attraverso vari ragionamenti, ma esso sarebbe comunque andato a far parte della costante Φ_0 . Si determina Φ_0 . La distribuzione delle velocità di effusione è

$$\Phi_E(v) = \Phi_0 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

Si impone la normalizzazione

$$1 \equiv \int_0^{+\infty} \Phi_0 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv = \Phi_0 I_3 = \Phi_0 \frac{1}{2A^4}$$

Si nota l'integrale di Gauss di terzo ordine. Pertanto

$$\Phi_0 \frac{1}{2} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^2 = 1 \implies \Phi_0 = 2 \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^2$$

Dunque

$$n_E(v) dv = N 2 \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

questa espressione ha un bias verso le alte velocità rispetto alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann proprio perché si stanno selezionando le particelle con velocità maggiore. Per il confronto si studia la velocità quadratica media

$$\begin{aligned} \langle v_E^2 \rangle &= \int_0^{+\infty} \Phi_0 v^5 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv = \Phi_0 I_5 = -\Phi_0 d_{A^2} I_3 \\ &= \Phi_0 \frac{1}{A^6} = 2 \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^2 \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^3 = \frac{4k_B T}{m} \end{aligned}$$

mentre quella di Maxwell-Boltzmann risulta essere $\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$ che è minore.

Effetto Doppler termico. La seconda conferma deriva dall'espansione dello spettro di emissione ed assorbimento. Ogni elemento ha una diversa sequenza di bande spettrali di emissione ed assorbimento. I due spettri non sono l'uno il complementare dell'altro perché lo spettro di assorbimento riguarda il percorso dal livello fondamentale ai livelli superiori, ma lo spettro di emissione riguarda anche il salto tra livelli intermedi e poi al livello fondamentale.

Le righe, soprattutto per un gas, non sono monocromatiche, ma hanno un'estensione che è determinata dalla risoluzione dell'apparato e per effetto doppler perché l'atomo è in movimento in quanto vibra: l'effetto netto è quello di allargare la riga spettrale.

Lecture 3

Dalla chimica è noto che i livelli energetici degli atomi sono discreti. Fornendo energia all'atomo, esso emette energia che, se sono radiative, sono onde elettromagnetiche la cui lunghezza d'onda dipende dal salto energetico che è particolare ad ogni atomo. Tramite uno spettrometro si può analizzare la luce emessa.

Uno spettro (Marowak!) di emissione, soprattutto per un gas, è un insieme di distribuzioni piccate in determinate lunghezze d'onda. Tali picchi hanno una larghezza dovuta all'effetto doppler termico in quanto l'atomo è in continuo movimento (dato che la temperatura è maggiore dello zero assoluto). Quando l'atomo si allontana, si ha una lunghezza d'onda maggiore e quando si avvicina si ha una lunghezza d'onda minore.

La teoria cinetica permette di predire la larghezza della distribuzione.

mar 08 mar
2022 15:30

Ripasso effetto doppler. Si vede un ripasso dell'effetto doppler. Tale effetto è la variazione di frequenza e lunghezza d'onda che l'osservatore misura rispetto al valore intrinseco della sorgente, per il solo effetto che la sorgente è in moto relativo rispetto l'osservatore.

Si supponga che la sorgente si avvicini all'osservatore con velocità v . Un'onda emessa dalla sorgente ha una velocità v_0 che dipende solamente dal mezzo e non dalla sorgente stessa. Il fronte d'onda percorre un tratto s ed arriva all'osservatore dopo un tempo $t_0 = \frac{s}{v_0}$. Dopo un periodo, la sorgente emette un nuovo fronte d'onda, ed essa ha percorso una distanza di $\frac{v}{\nu_0}$. Tale fronte impiega un tempo

$$t_1 = \frac{s - \frac{v}{\nu_0}}{v_0}$$

per percorrere la distanza $s - \frac{v}{\nu_0}$ che lo separa dall'osservatore.

La distanza temporale tra i due fronti, Δt , è l'inverso della frequenza percepita dall'osservatore:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu_0} + \frac{s}{v_0} - \frac{v}{\nu_0 v_0} - \frac{s}{v_0} = \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{v_0 - v}{v_0} \right) \Rightarrow \nu' = \nu_0 \frac{v_0}{v_0 - v}$$

dove ν' è la frequenza osservata. Considerato $\nu' = \nu_0 + \Delta\nu$ si ha

$$\Delta\nu = \nu_0 \left(\frac{v_0}{v_0 - v} - 1 \right) = \nu_0 \frac{v}{v_0 - v} = \nu_0 \frac{v}{v_0} \frac{1}{1 - \frac{v}{v_0}}$$

Si ricorda che v è la velocità della sorgente e v_0 è la velocità dell'onda. Tipicamente si ha $v_0 \gg v$ e quindi si ha una buona approssimazione:

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v}{v_0}$$

Nel caso delle onde elettromagnetiche si ha

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v}{c}$$

dove c è la velocità della luce.

Esperimento. Si calcola l'estensione per effetto doppler delle righe spettrali. L'esperimento è costituito da un gas ad una certa temperatura T e si osserva la luce da esso emessa in una certa direzione. Quello che interessa è la distribuzione delle velocità lungo tale direzione.

Dalla relazione precedente si ha

$$v = \frac{c}{\nu_0}(\nu - \nu_0), \quad dv = \frac{c}{\nu_0} d\nu$$

e ricordando la distribuzione delle velocità

$$f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

si sostituisce ed il numero di molecole che emettono una radiazione elettromagnetica tra una frequenza ν e $\nu + d\nu$ è

$$n(\nu) d\nu = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T} \frac{c^2}{\nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2} \frac{c}{\nu_0} d\nu$$

questa è una distribuzione normale $\mathcal{N}(\nu_0, \sigma^2)$ con

$$\sigma^2 = \frac{k_B T \nu_0^2}{mc^2}$$

Quella che si misura è un'intensità luminosa che è proporzionale al numero di particelle che emettono una radiazione elettromagnetica. L'intensità misurata è

$$I(\nu) d\nu \propto n(\nu) d\nu$$

In spettroscopia, la quantità di riferimento è la piena larghezza a metà altezza (full width at half maximum). La si calcola:

$$\frac{I(\nu)}{I_{\max}} = \frac{1}{2} \iff e^{-\frac{m}{2k_B T} \frac{c^2}{\nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2} = \frac{1}{2}$$

Pertanto, posto $\nu - \nu_0 = \Delta\nu$

$$\frac{mc^2}{2k_B T \nu_0^2} (\Delta\nu)^2 = \ln 2 \iff \Delta\nu = \sqrt{\frac{2 \ln 2 k_B T}{m}} \frac{\nu_0}{c}$$

Da cui la piena larghezza a metà altezza è

$$2\Delta\nu = \sqrt{\frac{8 \ln 2 k_B T}{m}} \frac{\nu_0}{c}$$

La larghezza relativa risulta essere

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta\nu}{\nu_0} &= \sqrt{\frac{8 \ln 2 k_B T}{m}} \frac{1}{c} = \frac{1}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} \sqrt{\frac{8 \ln 2 \cdot 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}}{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}}} \sqrt{\frac{T}{M}} \\ &= 7.2 \times 10^{-7} \text{ K}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{T}{M}} \end{aligned}$$

dove M è il numero di massa, cioè il numero di nucleoni.

Si ricorda che $\lambda\nu = c$, per cui si ha $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda}{\nu} d\nu$ e dunque

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \left| \frac{d\nu}{\nu} \right|$$

L'incremento relativo vale sia in frequenza che in lunghezza d'onda a meno di un segno.

Esempio. Questo è utile nel misurare la larghezza spettrale della lunghezza d'onda dovuta alla temperatura della sorgente. Infatti, la riga spettrale dovuta alla transizione H α dell'idrogeno, ha una lunghezza d'onda di 6563 Å (angstrom e vale 1 Å = 1 × 10⁻¹⁰ m) e si vuole trovare la larghezza spettrale della lunghezza d'onda che l'osservatore misura quando la radiazione è emessa da una stella a temperatura $T = 6000 \text{ K}$. La larghezza spettrale è

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 7.2 \times 10^{-7} \text{ K}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{6000 \text{ K}}{1}} = 5.6 \times 10^{-5}$$

La larghezza assoluta è

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot 5.6 \times 10^{-5} = 6563 \text{ Å} \cdot 5.6 \times 10^{-5} = 3.7 \times 10^{-1} \text{ Å}$$

Si può anche porre la domanda inversa: osservando una stella, si misura la larghezza spettrale e ne si deduce la temperatura.

Distribuzione dell'energia cinetica. Si vede la distribuzione di probabilità dell'energia cinetica. Considerata l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad dv = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E}} dE$$

Per cui la distribuzione dell'energia cinetica risulta essere

$$F(v) dv \implies F(E) dE = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2E}{m} \frac{1}{\sqrt{2mE}} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

Il numero di particelle con energia compresa tra E ed $E + dE$ risulta essere

$$n(E) dE = N 2\pi \left(\frac{1}{\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

Si individuano due contributi. La densità di stati

$$g(E) = 2\pi \left(\frac{1}{\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$$

ed il termine esponenziale detto fattore di Maxwell-Boltzmann

$$e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

Si fa un passo indietro. Si osserva il problema da un'altra prospettiva. Si ha il problema di collocare N particelle con una propria distribuzione in energia in un sistema che ha i propri livelli energetici. Le due cose sono separate e potrebbero non essere pienamente compatibili, ma si vogliono mettere insieme le particelle nei livelli energetici del sistema.

Si vuole fattorizzare il problema. Si parte da N particelle che si vogliono collocare in un sistema con una certa distribuzione di livelli energetici. La distribuzione finale, quella di particelle che si riescono a collocare nel sistema, si può vedere come una fattorizzazione di probabilità: la probabilità di avere nel sistema certi livelli energetici disponibili intorno ad E ; e la probabilità che le particelle abbiano tale energia intorno ad E . La prima delle due è la densità di stati, $g(E)$; mentre la seconda è il fattore di Maxwell-Boltzmann.

L'analogia con quanto visto sull'espressione esplicita della distribuzione dell'energia (cioè passare dalla fattorizzazione delle probabilità alla scrittura analitica della distribuzione dell'energia) viene meglio spiegata quando si tratta la meccanica statistica classica con cui si ottiene la distribuzione delle particelle nei vari livelli energetici.

Coefficienti di trasporto. La teoria cinetica permette di predire i coefficienti di trasporto come la viscosità che è associata al trasporto della quantità di moto; la conducibilità termica associata al trasporto di energia; e la diffusione associata al trasporto di materia.

Si studiano i primi due. Molto in dettaglio il primo; mentre il secondo sarà molto simile.

Si introducono due concetti fondamentali:

- Si considerano le particelle come entità aventi una dimensione finita, approssimabili da sfere o cubi.
- Si studia il libero cammino medio: esso è la distanza media percorsa da una particella tra due urti successivi.

Si considera una traiettoria possibile di una particella sferica di raggio r . Il cambiamento di traiettoria è causato dagli urti. Attorno alla traiettoria si può considerare un cilindro di raggio $d = 2r$ che corrisponde allo spazio occupato dalla particella nel proprio tragitto. Dato che le particelle hanno dimensioni finite, allora si ha un urto quando la distanza tra due particelle è minore di d . La distanza media tra un urto e l'altro è il libero cammino medio:

$$l = \frac{\langle v \rangle t}{n \langle v \rangle t \pi d^2} = \frac{1}{n \pi d^2} = \frac{1}{n \sigma}$$

dove n è la densità di particelle per unità di volume; mentre σ è detta sezione d'urto o area efficace.

Esso è il rapporto tra la distanza percorsa e il numero di particelle (dato come densità volumica per volume occupato) urtate nel mentre. Il concetto di libero cammino medio è sottile: l'urto tra particelle ne rimescola le velocità; perciò, date delle condizioni, ha senso ragionare al più ad una distanza pari al libero cammino medio.

La formula trovata è un caso particolare: si sono considerate tutte le altre particelle come essere ferme. In realtà, bisogna considerare una velocità relativa

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

In particolare, si è interessati al modulo

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2}\langle v \rangle$$

Quando si calcolano i valori medi, il prodotto scalare tra le due velocità è nullo, perché non si ha una direzione preferenziale e maggioritaria delle velocità. Inoltre, dato che le particelle sono identiche, le due velocità sono, in media, la stessa $\langle v \rangle$.

Dunque, si è trovato il fattore per cui modificare il libero cammino medio:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

tale fattore rende conto del moto delle altre particelle.

Un'altra quantità d'interesse è la frequenza degli urti intesa come inverso del tempo medio tra un urto e l'altro

$$f = \frac{\langle v \rangle}{l} = \sqrt{2}n\sigma\langle v \rangle$$

Esempio. Si consideri dell'azoto gassoso a $T = 25^\circ\text{C}$ e $P = 1\text{ atm}$, con dimensione $d = 2\text{ \AA}$. Si vuole calcolare il libero cammino medio e la frequenza degli urti. Ricordando

$$PV = n_m RT \frac{N_A}{N_A} = N k_B T$$

si ha

$$\frac{N}{V} = n = \frac{P}{k_B T} = \frac{1.01 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}} = 2.5 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Il libero cammino medio risulta essere

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot (2 \times 10^{-10} \text{ m})^2 \cdot 2.5 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}} = 2.25 \times 10^{-7} \text{ m}$$

La velocità media risulta essere

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m N_A}} = 474 \text{ m s}^{-1}$$

dove mN_A è la massa molare. La frequenza degli urti risulta essere

$$f = \frac{\langle v \rangle}{l} = 2.23 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

Lecture 4

Digressione sull'effetto doppler termico. L'effetto doppler è utilizzato nei laser per calcolarne la larghezza spettrale. Un laser è una cavità risonante in cui si instaurano delle onde elettromagnetiche stazionarie e vi è presente un mezzo attivo (un gas od un solido). Tracciando in frequenza lo spettro di emissione del mezzo attivo, oltre alla larghezza dovuta alla

lun 14 mar
2022 14:30

temperatura, bisogna tenere conto dei modi di vibrazione del campo elettromagnetico all'interno della cavità: esistono solo alcune frequenze permesse con cui si stabiliscono delle onde stazionarie. Solamente i modi al di sotto della riga di emissione del gas sono quelli che vengono eccitati. Più modi sono eccitati, più frequenze sono utilizzate per formare l'impulso in uscita e più la durata temporale dell'impulso è breve. Questo fatto è fondamentale per il principio di indeterminazione di Heisenberg nella dualità tra onda e particella.

I coefficienti di trasporto sono tre: la viscosità, la conducibilità termica e la diffusione. Ognuno legato al trasporto di entità diverse: quantità di moto, energia cinetica e materia.

Viscosità. Si definisce il sistema. [immagine] Si consideri un volume rettangolare la cui parete superiore scorre verso le x positive con velocità v_0 . All'interno si ha un gas che urta contro le pareti. A seconda del tipo di fluido si può avere un comportamento diverso.

Si considera un fluido perfetto. Nel caso di un urto, una particella arriva con una velocità v_z e v_x , e per un fluido perfetto le reazioni vincolari sono solamente normali. Dopo l'urto la particella ha velocità ancora v_z e v_x . Non è questo il caso di interesse, bensì lo è quello dei fluidi viscosi.

I fluidi viscosi sono quelli per cui si hanno reazioni vincolari normali e forze di taglio parallele alla parete. Dunque, una particella con velocità v_z e v_x ha velocità dopo l'urto di v_z e v'_x dovuta al trascinamento della particella causato alla parete. Pertanto, si instaura un gradiente di velocità: la parete ha un'azione di trascinamento del fluido direttamente sottostante, il quale trascina il fluido sotto ancora e così via. Dunque, si forma un campo netto di velocità $v_x(z)$ con un trasporto netto di fluido verso x che dipende da z .

Si analizza l'interazione tra due strati di fluido adiacenti. Si hanno due strati a quote z e $z + \Delta z$ con velocità $v_x(z)$ e $v_x(z + \Delta z)$ dove la prima è minore della seconda (perché inferiore). Si vuole studiare che forza F (eventualmente una pressione) esercita lo strato a quota z su superiore: esso tende a frenarlo. Interessa la componente lungo x per unità di area

$$P_x = -\eta \partial_z v_x, \quad \eta \in \mathbb{R}$$

Se entrambi gli strati avessero la medesima velocità, allora nessuno dei due eserciterebbe una forza sull'altro. Dunque, si presume esistere la relazione lineare della pressione sopra riportata. Si esplicita il segno meno per fare in modo che $\eta > 0$. I fluidi per cui vale tale relazione sono detti fluidi newtoniani (sono una sottoclasse dei fluidi viscosi).

Si utilizza la teoria cinetica per dedurre il coefficiente di viscosità η . Si consideri la densità di particelle per unità di volume n . In media si può affermare che $\frac{1}{3}$ vanno lungo ogni direzione cartesiana. Del terzo lungo z , la metà va in ogni verso. Pertanto, $\frac{1}{6}$ ha verso $z+$ e un altro $z-$. Si è interessati ad una corrente, più che un numero di particelle. Qualunque corrente è una grandezza per unità di tempo. Pertanto, la corrente di particelle in ogni verso è

$$\frac{1}{6} n \langle v \rangle$$

Si ha un trasporto di quantità di moto. Si calcola cosa trasportare. Considerata una quota z , e le due distanze $z \pm l$, dove l è il libero cammino medio, si cerca il bilancio delle correnti che trasportano quantità di moto rispetto a z da $z-l$ verso l'alto e da $z+l$ verso il basso. Negli strati superiore ed inferiore la quantità di moto è $mv_x(z \pm l)$ rispettivamente (le parentesi a v_x sono da intendersi come argomento di una funzione, non come moltiplicazione). Pertanto, il bilancio è

$$\frac{1}{6} n \langle v \rangle m v_x(z-l) - \frac{1}{6} n \langle v \rangle m v_x(z+l) = P_x$$

Dimensionalmente esso è una forza per unità di area, cioè una pressione. Quindi

$$P_x = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m [v_x(z-l) - v_x(z+l)]$$

espandendo in serie la velocità

$$v_x(z \pm l) \approx v_x(z) \pm \partial_z v_x l$$

si ha

$$P_x = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m [v_x(z) - \partial_z v_x l - (v_x(z) + \partial_z v_x l)] = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle m l \partial_z v_x$$

Si identifica il coefficiente di viscosità

$$\eta = \frac{2}{3} n \langle v \rangle m l = \frac{1}{3\sqrt{2}\sigma n} n m \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m} \frac{N_A}{N_A} \frac{N_A}{N_A}} = \frac{M_{\text{mol}}}{3\sqrt{2}\sigma N_A} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}$$

dove $M_{\text{mol}} = mN_A$ è la massa di una mole. Si può ricavare η oppure, qualora sia noto, si può misurare il numero di Avogadro come ha fatto Loschmidt (1865).

Inoltre, la viscosità dipende dalla radice della temperatura, maggiore è la temperatura e più il fluido è viscoso. Tuttavia, per un fluido liquido, è il contrario: questo è dovuto all'aumento dell'energia cinetica.

Esempio. Si consideri l'esempio dell'azoto già visto. Si calcola il coefficiente di viscosità

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{3} n m \langle v \rangle l = \frac{1}{3} 2.5 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} \cdot 28 \cdot 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot 474 \text{ m s}^{-1} \cdot 2.25 \times 10^{-7} \text{ m} \\ &= 4.13 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Mentre la misura sperimentale dà

$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Il fallo rimane nel ragionamento con i valori medi, però almeno gli ordini di grandezza sono d'accordo.

Conducibilità termica. Il ragionamento è analogo. Si mettono in evidenza le differenze sostanziali.

Si definisce il sistema contenente il gas. [immagine] Questa volta non si ha una parete in movimento, ma le pareti fanno da termostati a temperature T_1 e T_2 , l'una minore dell'altra. Date le diverse temperature, si instaura un gradiente di temperatura nel gas.

Si ha una corrente come costituenti per unità di area per unità di tempo ed essa trasporta energia cinetica. Il calore trasportato è

$$Q = -k \partial_z T$$

dove Q è un'energia per unità di area per unità di tempo. Tramite la teoria cinetica si ricava il coefficiente di conducibilità termica k . Si studia il bilancio di correnti:

$$Q = \frac{1}{6} n \langle v \rangle [\langle E \rangle (z - l) - \langle E \rangle (z + l)]$$

si sviluppa l'energia cinetica intorno a z :

$$Q = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle l \partial_z \langle E \rangle = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle l \partial_T \langle E \rangle \partial_z T$$

dove il coefficiente è

$$k = \frac{1}{3} n \langle v \rangle l \partial_T \langle E \rangle$$

Si ricorda che il calore specifico a volume costante è

$$c_V = \frac{1}{n_{\text{moli}}} (\partial_T U)_V = \frac{\partial \langle E \rangle N_A}{\partial T} \implies \partial_T \langle E \rangle = \frac{c_V}{N_A}$$

nell'ipotesi di una mole e dove N_A è il numero di costituenti. Pertanto

$$k = \frac{1}{3} n \langle v \rangle l \frac{c_V}{N_A} = \frac{1}{3} n \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m} \frac{3}{2} \frac{R}{N_A}} = \frac{k_B}{2\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}$$

il calore specifico dipende dai gradi di libertà del sistema e nel caso di gas monoatomico si ha $c_V = \frac{3}{2}$.

Si confronta quanto ottenuto con i dati sperimentali. Il rapporto tra i coefficienti ottenuti è

$$\frac{k}{\eta} = \frac{c_V}{N_A m} \iff \frac{k}{\eta} \left(\frac{c_V}{N_A m} \right)^{-1} = 1$$

nella realtà varia da 1.3 a 2.5. Ancora una volta, il fallo rimane nell'utilizzo dei valori medi al posto della distribuzione di velocità.

Random walk. Robert Brown osserva con un microscopio delle molecole di polline in acqua e le vede animate da un moto erratico. Nel 1905, Einstein provvede una spiegazione coerente per tale tipo di moto tramite la teoria cinetica. La spiegazione sono i milioni di urti delle molecole con il polline. Nel 1908, Perrin conferma sperimentalmente la teoria.

Si vede un processo più semplice: il random walk. Esiste un'unica lunghezza l_0 del passo. La quantità casuale è la direzione. Si vuole calcolare la distanza quadratica media. La si calcola statisticamente. Si studia la distanza quadratica media perché la distanza media percorsa è nulla. Dunque, per due passi, la distanza quadratica media è

$$\langle l_2^2 \rangle = \langle (l_0 + l_0)^2 \rangle = l_0^2 + l_0^2 + 2l_0 l_0 \langle \cos \theta \rangle = 2l_0^2 \implies \sqrt{\langle l_2^2 \rangle} = \sqrt{2} l_0$$

La media del coseno dell'angolo è nullo, perché il prodotto scalare non ha una direzione preferenziale. Dopo tre passi, la distanza quadratica media è

$$\langle l_3^2 \rangle = \langle (l_0 + l_0 + l_0)^2 \rangle = 3l_0^2 + 3 \cdot 2l_0 l_0 \langle \cos \theta \rangle = 3l_0^2 \implies \sqrt{\langle l_3^2 \rangle} = \sqrt{3} l_0$$

Dunque, dopo N passi

$$l_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle l_N^2 \rangle} = \sqrt{N} l_0$$

Associato un intervallo temporale ad ogni passo, si può affermare

$$l_{\text{RMS}} \propto \sqrt{t}$$

Vista la similarità con il moto browniano, ci si aspetta una stessa proporzionalità.

Moto browniano. Come Einstein, si scrive l'equazione del moto di una particella di polline. Essa è immersa in acqua e quindi è soggetta ad una forza browniana F_B di cui non si conosce l'espressione, ma si sa essere una forza casuale e sono note alcune sue proprietà statistiche. Inoltre, per l'immersione in acqua, è anche presente un attrito viscoso, ma non si considera la gravità. Pertanto, l'equazione del moto risulta essere

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} + F_B$$

Essa è scritta in una dimensione, tuttavia non è un problema perché la forza browniana è casuale e quindi il calcolo lungo ogni coordinata è indipendente dalle altre.

Quest'equazione differenziale non è nota perché è stocastica. La variabile x è aleatoria, non deterministica e quindi non si può trattare con gli elementi di calcolo fin'ora studiati. Einstein manipola l'equazione in modo da studiare i momenti e quindi i valori medi della variabile aleatoria che non sono variabili aleatorie a loro volta. Inoltre, $x(t)$ è un processo stocastico: la distribuzione non è nota e dipende dal tempo.

Dunque

$$mx\ddot{x} = -\mu x\dot{x} + xF_B$$

Si nota che

$$mx\ddot{x} = -m \left[\frac{d}{dt}(x\dot{x}) - \dot{x}^2 \right]$$

A questo punto si utilizza l'operatore di valore atteso:

$$m\langle d_t(x\dot{x}) \rangle - m\langle \dot{x}^2 \rangle = -\mu\langle x\dot{x} \rangle + \langle xF_B \rangle$$

Si osserva che

- Si inverte l'operatore di valore atteso con la derivata per la linearità della derivata

$$d_t \left(\frac{1}{N} \sum_i y_i \right) = \frac{1}{N} \sum d_t y_i \iff d_t \langle y \rangle = \langle d_t y \rangle$$

- Inoltre, dalla teoria cinetica

$$m\langle \dot{x}^2 \rangle = k_B T$$

- Infine, del termine

$$\langle xF_B \rangle$$

non si sa l'espressione analitica, ma si conoscono delle sue proprietà statistiche. In particolare

$$\langle F_B \rangle = 0$$

cioè il polline non si muove prevalentemente in una direzione. Oltretutto, per due variabili aleatorie x, y si ha

$$\text{Cov}[x, y] = \mathbb{E}[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \mathbb{E}[xy] - \mu_x \mu_y$$

Se le due variabili sono indipendenti, allora la covarianza è nulla. Nel problema in esame, la posizione del polline in un sistema di riferimento è indipendente dalla forza e viceversa. Pertanto

$$\text{Cov}[x, F_B] = 0, \quad \mu_x \equiv \langle x \rangle = 0, \quad \mu_y \equiv \langle F_B \rangle = 0 \implies \mathbb{E}[xy] = \langle xF_B \rangle = 0$$

Quindi, l'equazione differenziale risulta essere

$$m d_t \langle x\dot{x} \rangle = k_B T - \mu \langle x\dot{x} \rangle$$

ed essa non è più un'equazione differenziale stocastica perché si è applicato l'operatore di valore atteso e dunque si sa risolvere.

Lecture 5

La soluzione risulta essere

$$\langle x\dot{x} \rangle = ce^{-\frac{\mu}{m}t} + A$$

Pertanto, l'equazione differenziale diventa

$$c \left(-\frac{\mu}{m} \right) e^{-\frac{\mu}{m}t} = \frac{k_B T}{m} - \frac{\mu}{m} ce^{-\frac{\mu}{m}t} - \frac{\mu}{m} A \implies A = \frac{k_B T}{\mu}$$

A tempi grandi rispetto $\tau = \frac{m}{\mu}$, sopravvive solamente il termine costante A . Inoltre

$$\langle x\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} d_t \langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{\mu} \implies \langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\mu} t$$

Si ritrova quanto ci si aspetta dal random walk: $\sqrt{\langle x^2 \rangle} \propto \sqrt{t}$. Oltretutto, non si sa nulla di F_B , ma si sono usate delle ipotesi semplici e ragionevoli sulla sua natura statistica: ha valore medio nullo, la posizione media è nulla, è decorrelata dalla media; e con tali ipotesi si è potuto

mar 15 mar
2022 15:30

affermare qualcosa di concreto sul sistema.

Inoltre, per Stokes $\mu = 6\pi\eta r$ da cui si ha

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{6\pi\eta r} t = 2Dt, \quad D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

dove D è detto coefficiente di diffusione. Non si ha l'espressione della posizione x , ma si conosce solamente la sua varianza:

$$\text{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \langle x^2 \rangle - 0 = \sigma^2$$

Dunque, la distribuzione delle posizioni (che non è nota) ha una varianza proporzionale al tempo. Questo riflette il fatto che si ha un processo stocastico descritto da una distribuzione di probabilità che varia nel tempo.

Esperimento di Perrin. Nel 1908 Perrin conferma tramite un esperimento la teoria di Einstein del 1905 sul moto browniano.

Il sistema è costituito da una colonna a base quadrata di area a contenente dell'acqua in cui si trovano delle sfere di gomma lacca [immagine] (si è scelta la gomma lacca perché permette un'alta riproducibilità delle dimensioni delle sfere). La trattazione seguente è intesa rimpiazzando l'acqua con un gas. Solo in un secondo momento si introduce nuovamente l'acqua come nuova ipotesi. Si considera la forza di gravità e l'accelerazione g .

Si definisce w come il peso del gas sopra la quota dy , mentre $w + dw$ come il peso precedente più il peso dello strato dy stesso. Pertanto

$$w + dw = w + mgn dy$$

dove n è la densità del gas. Si calcola la differenza di pressione

$$dP = -mgn dy$$

il meno deriva dal fatto che aumentando y , la pressione diminuisce. Per la legge del gas perfetto (e considerando una mole) si ha

$$PV = RT \implies \frac{P}{n} = k_B T \implies P = nk_B T \implies dP = dn k_B T$$

si ha una relazione di proporzionalità. Scendendo la colonna, si ha un maggiore densità di particelle. Quindi

$$dn k_B T = -mgn dy \implies \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dy \implies n = n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}, \quad P = P_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$$

dove l'espressione per la pressione è detta legge dell'atmosfera. Si rimuove l'ipotesi di trovarsi in un gas e si considera la presenza dell'acqua: si considera anche la spinta archimedeica. Quindi

$$mg - mg \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho} = mg \frac{\rho - \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho}$$

dove ρ è la densità delle sfere di gomma lacca. Pertanto

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{mg(\rho - \rho_{\text{H}_2\text{O}})h}{\rho k_B T} \right]$$

Perrin scopre la legge dell'atmosfera e, nel tracciare per punti l'andamento di n in funzione di h , egli conta quante particelle di gomma lacca sono presenti in ogni strato. Ma facendo questo, vede anche le particelle muoversi e, misurandone più volte la distanza media percorsa, osserva che essa corrisponde a quanto predetto da Einstein.

Nell'espressione della legge dell'atmosfera, l'umidità prende il ruolo della gomma lacca, mentre l'acqua diventa l'aria

$$P = P_0 \exp \left[-\frac{mg(\rho_{\text{H}_2\text{O}} - \rho_{\text{Aria}})h}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} k_B T} \right]$$

Dunque, quando la temperatura si alza, allora si alza anche la pressione. Quando si abbassa la densità di acqua nell'atmosfera, si alza la pressione.

2.3 Meccanica statistica

La meccanica statistica è la generalizzazione dei sistemi a molte particelle. Parte da presupposti generali, ma permette di ottenere la distribuzione di Maxwell-Boltzmann ed è possibile dimostrare il teorema di equipartizione.

Si considera un sistema di N particelle (distinguibili), con una certa energia totale U . Il sistema in cui si collocano le particelle ha diversi livelli energetici E_n : una quantità n_i in ogni E_i . I vincoli sono $\sum_i n_i = N$ e $\sum_i n_i E_i = U$. Si vuole capire qual è il modo in cui si dispongono le N particelle nei diversi livelli energetici.

Definizione. Un macrostato è uno stato di un sistema definito da grandezze come U, T, N che non entrano nel dettaglio di come si sono disposte le particelle nei livelli energetici.

I microstati sono le possibili configurazioni delle particelle nei livelli energetici E_i .

Definizione. Il principio di equiprobabilità a priori afferma che tutti i microstati sono equiprobabili.

Dato che i microstati sono equiprobabili, il sistema si colloca in quella configurazione caratterizzata dal maggior numero di microstati, dal maggior numero di modi in cui si può realizzare una situazione (il macrostato).

Esempio. Si consideri un sistema a quattro livelli energetici in cui si vogliono disporre cinque $N = 5$ particelle. I livelli energetici sono $E_1 = 0$, $E_2 = E$, $E_3 = 2E$, $E_4 = 3E$. La disposizione delle particelle dei livelli energetici è detta partizione.

Si consideri il caso in cui si hanno quattro particelle in E_1 ed una in E_4 . Dato che le particelle sono distinguibili, si vuole trovare il numero di microstati che danno la stessa partizione.

Si hanno N palline da dividere in due categorie: una da n_1 particelle e l'altra da $N - n_1$ particelle. Si calcola il numero totale di permutazioni: $N!$. Per ogni permutazione, non interessa come le n_1 sono ordinate, cioè bisogna togliere le permutazioni interne: $n_1!$. Lo stesso per l'altra categoria: $(N - n_1)!$. Pertanto, il numero di modi di disposizione è

$$P_1 = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!}$$

Tornando all'esempio, la configurazione scelta si può ottenere in cinque modi, cioè in cinque microstati.

A questo punto si hanno $N - n_1$ particelle rimaste e di queste se ne collocano n_2 nel secondo livello energetico. Pertanto

$$P_2 = \frac{(N - n_1)!}{n_2!(N - n_1 - n_2)!}$$

e questo vale per gli ulteriori livelli. Per trovare il numero totale di combinazioni, si deve moltiplicare le combinazioni di ogni livello energetico

$$\frac{N!(N - n_1)!}{n_1!n_2!(N - n_1 - n_2)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!}$$

notando che l'ultimo termine del denominatore è 0! perché si va avanti fin quando le particelle si esauriscono.

Un sistema in cui la disposizione ha tre particelle nel primo livello, una nel secondo ed una nel terzo livello, ha un numero di microstati è

$$\frac{5!}{3!1!1!0!} = 20$$

[r]

Siccome tutti i microstati sono equiprobabili, il sistema viene più probabilmente trovato nella

partizione realizzata da più microstati. Tuttavia, non si ha un modo per trovare il numero di particelle per ogni livello n_i . Cioè si vuole cercare la partizione più probabile. Si massimizza P sotto certi vincoli.

Per ora tutti i livelli energetici sono equiprobabili, ora si aggiunge la probabilità g_i per una particella di poter usufruire il livello E_i [r]. Dunque

$$P = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

Si massimizza P con i vincoli tramite i moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L} = \ln P - \alpha \left(\sum_i n_i - N \right) - \beta \left(\sum_i n_i E_i - U \right)$$

Si nota che vale

$$\ln P = \ln N! + \sum_i n_i \ln g_i - \sum_i \ln n_i!$$

Si utilizza la formula di Stirling:

$$\sum_i \ln n_i! \sim \sum_i n_i \ln n_i - n_i$$

Pertanto

$$\mathcal{L} = \ln N! - \sum_i n_i \ln \frac{n_i}{g_i} - (\alpha - 1) \sum_i n_i + \alpha N - \beta \sum_i n_i E_i + \beta U$$

Il cui differenziale è

$$d\mathcal{L} = - \sum_i dn_i \ln \frac{n_i}{g_i} - \sum_i n_i \frac{g_i}{n_i} \frac{1}{g_i} dn_i - (\alpha - 1) \sum_i dn_i - \beta \sum_i E_i dn_i = 0$$

Che diventa

$$\sum_i \left(\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i \right) dn_i = 0$$

per cui l'argomento della sommatoria è nullo per ogni i :

$$\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0 \implies n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i}$$

[r] Si determinano i parametri α e β tramite i vincoli. Infatti

$$N = \sum_i n_i = \sum_i g_i e^{-\alpha} e^{-\beta E_i} = e^{-\alpha} Z \implies e^{-\alpha} = \frac{N}{Z}$$

dove Z è detta funzione di partizione. Dunque

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}$$

Si ha un'espressione per il numero di particelle nel livello energetico i -esimo, fermo restando la conoscenza della distribuzione g_i . [r]

Osservazione. La funzione di partizione Z è una condizione di normalizzazione perché è una somma su tutti gli attendi.

Inoltre, si nota un'analogia con la teoria cinetica in cui si ha

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

da cui si ottiene

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Infatti, nella teoria cinetica si è vista la distribuzione delle particelle nel livello energetico tra E ed $E + dE$:

$$n(E) dE \propto N \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

dove $e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$ è il termine di Boltzmann e $\sqrt{E} = g(E)$ è la [r].

A seguito di quanto fatto, si può rileggere tale espressione. Nel continuo si ha

$$n(E) dE = \frac{N}{Z} g(E) e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

dove Z è un integrale. [r].

Il problema di contare quante particelle hanno energia tra E ed $E + dE$ si può fattorizzare in più probabilità.

Il termine di Boltzmann è la probabilità di avere una particella all'energia tra E ed $E + dE$. Il termine $g(E)$ consente di stabilire se il sistema ha livelli in cui possibile collocare particelle con energia tra E ed $E + dE$.

Energia totale. Dalla meccanica statistica si può derivare l'energia totale:

$$U = \sum n_i E_i = \sum \frac{N}{Z} g_i E_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \implies \langle E \rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{Z} \sum E_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE} = k_B T$$

Per semplicità si pone $g_i = 1$. Quest'espressione è utile per l'energia media irradiata da un corpo nero [r]. Si pesa l'energia con la propria probabilità divisa la condizione di normalizzazione.

Dato che quest'espressione è ottenuta dalla meccanica statistica classica [r].

Lecture 6

lun 21 mar
2022 14:30

Si vuole ottenere $g(E)$. L'energia cinetica è $E = \frac{1}{2}mv^2$. In tre dimensioni, il numero di configurazioni possibili dipende dalla direzione e del modulo della velocità, pertanto gli stati possibili S sono proporzionali al volume della sfera $\frac{4}{3}\pi v^3$. Inoltre $dS \propto 4\pi v^2 dv$. Dato che $v^2 = \frac{2E}{m}$ e $2v dv = \frac{2}{m} dE$ si ha

$$dS \propto 4\pi \sqrt{\frac{2E}{m^3}} dE$$

Quindi, la distribuzione di particelle nei livelli energetici è

$$n(E) dE = \frac{N}{Z} A \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

quest'espressione si può confrontare con l'espressione trovata dalla teoria cinetica.

3 Granularità della carica

Si vedono degli esperimenti [r] che hanno portato alla misura della carica dell'elettrone. L'evidenza della granularità della carica viene notata da Faraday mentre lavora sulla sua cella elettrolitica: egli osserva che cambiando gli elettroliti, si misura la stessa corrente. Successivamente, Thomson osserva che, ponendo un oggetto tra un anodo ed un catodo, si proietta un'ombra di tale oggetto sulla parete di fronte il catodo: questi sono i raggi catodici. [r]

Esperimento di Thomson. [immagine] Si consideri l'esperimento di Thomson. Si ha un condensatore con due piatti paralleli distanti d in cui si ha un campo elettrico. Tali piatti hanno lunghezza L ed il loro estremo è a distanza D dallo schermo.[r]

L'accelerazione verticale è

$$a_y = \frac{qE}{m}$$

mentre il campo elettrico sul condensatore è $E = \frac{V}{d}$. La legge oraria risulta essere

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \quad t = \frac{x}{v_x}$$

dove t è il tempo trascorso nel condensatore. Pertanto, la massima deviazione dentro il condensatore è

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{L^2}{v_x^2}$$

Quando la particella esce dal condensatore, essa procede in modo rettilineo fino ad una quota di

$$y_2 = D \tan \theta \implies \tan \theta = d_x y(L) = \frac{qEL}{mv_x^2} \implies y_2 = \frac{qELD}{mv_x^2}$$

Pertanto, la deviazione totale è

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{L^2}{v_x^2} + \frac{qELD}{mv_x^2} = \frac{qEL}{mv_x^2} \left(\frac{L}{2} + D \right)$$

Per misurare la velocità si utilizza la forza di Lorentz: si vuole bilanciare la forza di Lorentz per ricavare la velocità. Per questo si aggiunge un campo magnetico di modo che le particelle siano deviate verso il basso. Infatti

$$F_E = F_B \iff qE = qv_x B \iff v_x = \frac{E}{B}$$

Pertanto, il rapporto carica-massa è

$$\frac{q}{m} = \frac{yv_x^2}{EL \left(\frac{L}{2} + D \right)} = \frac{yE}{B^2 L \left(\frac{L}{2} + D \right)} = 1.7 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

[r] [immagine] Ora si consideri un campo magnetico tra le due armature orizzontali. La forza magnetica ha il ruolo di forza centripeta

$$qv_x B = m \frac{v_x^2}{R} \implies R = \frac{mv_x}{qB}$$

Si calcola ancora la deviazione totale come deviazione all'interno delle due lastre più moto rettilineo all'esterno. Nel campo magnetico, la particella compie un arco di circonferenza con raggio R . L'equazione di tale circonferenza è

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2 \implies R = -\frac{x^2 + y^2}{2y} \approx -\frac{x^2}{2y} \implies y = -\frac{x^2}{2R}$$

[r] L'approssimazione è giustificata dal fatto che la deviazione in y è molto minore della distanza percorsa in x . Pertanto

$$y = -\frac{qBx^2}{2mv_x}, \quad y_3 = -\frac{qBL^2}{2mv_x}$$

dove y_3 è la deviazione all'interno del campo magnetico. Mentre la quota percorsa all'esterno è

$$y_4 = D \tan \phi \implies \tan \phi = d_x y(L) = -\frac{qBL}{mv_x}$$

Per cui la deviazione totale è

$$y = y_3 + y_4 = -\frac{qBL}{mv_x} \left(\frac{L}{2} + D \right)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{q}{m} = \frac{yv_x}{BL \left(\frac{L}{2} + D \right)}, \quad v_x = \frac{E}{B}$$

Effetto Zeeman. Tramite l'effetto Zeeman si determina il rapporto carica-massa attraverso la spettroscopia. [immagine] Due elettromagneti sono disposti ai lati di un gas. Zeeman osserva le righe spettrali in due direzioni per mezzo di un polarimetro ed uno spettrometro. Egli osserva due righe spettrali in posizioni $\nu_0 \pm \Delta\nu$. Esse erano polarizzate circolarmente.

In direzione ortogonale al campo magnetico, egli osserva tre righe spettrali in posizioni ν_0 e $\nu_0 \pm \Delta\nu$. La polarizzazione è lineare: verticale per quelle ai lati, orizzontale per quella centrale. Si individua un sistema di riferimento con z parallelo al campo magnetico. Si lega la distanza in frequenza la rapporto massa-carica dell'elettrone. [r] Egli considera un moto armonico rispetto ai tre assi caratterizzato dalla stessa costante. La frequenza caratteristica dunque è

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b}{m}}$$

dove m è la massa della particella.

Si considerano i moti armonici uno per volta. L'oscillazione lungo z non produce nessun campo lungo la direzione di oscillazione. [r] Pertanto, si studiano i moti armonici solo lungo x ed y . Ciascun moto armonico lineare si può scomporre in due moti circolari contro-rotanti (con la stessa velocità): $x = x^+ + x^-$ e $y = y^+ + y^-$, dove la parte con $+$ ruota in senso orario e la parte con $-$ ruota in senso antiorario. Si ipotizza che la carica sia negativa. Pertanto, la forza di Lorentz sulla carica oraria è centrifuga, mentre sulla carica antioraria è centripeta. Quindi, si ha rispettivamente

$$m \frac{v^2}{r} = br - |q|vB, \quad m \frac{v^2}{r} = br + |q|vB$$

Si può già intuire la frequenza di rotazione. Nel caso del segno concorde, il periodo di rotazione è minore e quindi la velocità è maggiore [r].

Pertanto si ha rispettivamente $\nu' = \nu_0 - \Delta\nu < \nu_0$ e $\nu'' = \nu_0 + \Delta\nu > \nu_0$. La scomposizione vale sia per x che per y . Si considera il moto a coppie. In senso orario, $x^+ + y^+$, ci si aspetta una riga spettrale a $\nu' < \nu_0$. In senso antiorario, $x^- + y^-$, ci si aspetta una riga spettrale a $\nu'' > \nu_0$. Si osserva il moto in direzione perpendicolare al campo magnetico \vec{B} ed a z . Una particella che oscilla lungo z , non viene influenzata dal campo magnetico [r]. Si spiegano le altre righe spettrali. Una particella che oscilla lungo x non emette alcun campo elettromagnetico lungo tale direzione. Dunque, rimane solamente la direzione lungo y . [r] I due moti armonici contro-rotanti subiscono una variazione del proprio periodo di rotazione nella stessa maniera descritta quando si è osservato lungo z . [r]

Si calcola la distanza tra le righe spettrali. Si ha

$$m \frac{v_1^2}{r} = br + |q|v_1B, \quad m \frac{v_2^2}{r} = br - |q|v_2B$$

Sottraendo un'equazione all'altra si ha

$$m \frac{v_1^2 - v_2^2}{r} = |q|(v_1 + v_2)B \implies m \frac{v_1 - v_2}{r} = |q|B \implies m(\omega_1 - \omega_2) = |q|B$$

ricordando che $v = \omega r$. Si pone $\omega_1 - \omega_2 \equiv \Delta\omega$, che è la distanza tra le due frequenze laterali (e non la distanza tra quella centrale). Pertanto

$$\frac{\Delta\omega}{B} = \frac{|q|}{m} = 1.6 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

Lecture 7

Esperimento di Millikan. [immagine] L'apparato sperimentale è costituito da due piatti a cui viene applicata una differenza di potenziale. Vi sono presenti dei fori in cui iniettare dell'olio nebulizzato. Dal lato si fanno entrare dei raggi X e dalla parte opposte si può osservare

mar 22 mar
2022 15:30

l'apparato.

A potenziale nullo, le gocce di olio cadono in aria. I raggi X servono a ionizzare l'aria, così liberando elettroni che vanno a caricare le gocce di olio. Una volta che le gocce approssimano il fondo, si fornisce un potenziale fino a quando la goccia non si ferma e poi risale. Ripetendo molte volte l'esperimento, Millikan misura vari multipli della carica elementari che gli permettono di dedurre il valore proprio della carica elementare.

A campo nullo, la goccia di olio sferica è soggetta alla forza di gravità mg , alla spinta archimedeica dovuta all'aria $m'g$, all'attrito viscoso $6\pi\eta r v_g$. Fornendo un potenziale, la goccia d'olio è soggetta alla forza di gravità mg , alla spinta archimedeica $m'g$, alla forza elettrica qE ed all'attrito viscoso $4\pi\eta r v_E$. A campo acceso, la goccia risale, dunque il verso della forza di attrito viscoso è verso il basso. [r]

Pertanto, nel primo caso il bilancio delle forze a moto rettilineo uniforme (in quanto la forza viscosa aumenta fino a quando non bilancia le altre e così non si ha più accelerazione):

$$mg - m'g - 6\pi\eta r v_g = 0 \implies mg - m'g = 6\pi\eta r v_g$$

mentre nel secondo caso è

$$mg - m'g + 6\pi\eta r v_E - qE = 0 \implies 6\pi\eta r (v_g + v_E) = qE$$

Da cui si ottiene

$$q = \frac{6\pi\eta r}{E} (v_E + v_g)$$

Dato che si conosce il tratto percorso L , si può scrivere tale relazione in funzione del tempo:

$$v_E = \frac{L}{T_E}, \quad v_g = \frac{L}{T_g}$$

Pertanto

$$q = \frac{6\pi\eta r L}{E} \left(\frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_g} \right)$$

Si ricava la carica elementare sfruttando più misure di suoi multipli.

Ogni discesa, a prescindere dal numero di elettroni passati sulla goccia, è identica, dunque T_g è fissato. Quello che può succedere è che nella risalita, il tempo T_E dipende da quante cariche sono state trasferite. Pertanto

$$ne = \frac{6\pi\eta r L}{E} \left(\frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_g} \right) \implies n = \frac{6\pi\eta r L}{eE} \left(\frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_g} \right) = a \frac{1}{T_E} + b$$

Tutte le quantità sono costanti, tranne T_E . Sottraendo due misure si ha

$$\Delta n \equiv n' \equiv n_0 - n_1 = a \left(\frac{1}{T_{E,0}} - \frac{1}{T_{E,1}} \right) \implies \frac{1}{a} = \frac{1}{n'} \left(\frac{1}{T_{E,0}} - \frac{1}{T_{E,1}} \right) = \text{cost}$$

La costante a è incognita, tuttavia si può ricavare come rapporto. [r] Facendo la differenza tra altre misure si ha

$$\frac{1}{n''} \left(\frac{1}{T_{E,1}} - \frac{1}{T_{E,2}} \right) = \text{stessa cost}$$

Egli misura

$$e = 1.5961 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Da cui dal rapporto carica-massa di Thomson si ricava la massa dell'elettrone

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = \frac{1}{1836} m_H$$

dove m_H è la massa dell'idrogeno.

Misura dei raggi positivi. Thomson osserva che il catodo è forato e dall'anodo provengono raggi capaci di impressionare una lastra fotografica. [r] Si vede la misura della carica-massa per ioni positivi.

[immagine] L'apparato sperimentale è simile a quello usato per i raggi catodici: si ha un catodo forato succeduto all'esterno da un condensatore di lunghezza L e da una parete distante D dal condensatore. Il tutto è nel vuoto. Thomson pone le bobine del campo magnetico in modo che questi sia parallelo al campo elettrico.

La deviazione di quota è data da

$$y = \frac{qEL}{mv_x^2} \left(\frac{L}{2} + D \right)$$

Per i raggi catodici, si è introdotto un campo magnetico per bilanciare la forza elettrica così da dedurre la velocità. [r] Il discorso implicito nei raggi catodici è dato dalla presenza di un'unica velocità (dovuta alla stessa massa). Tuttavia, per i raggi positivi non è più così: si ha un gas rarefatto le cui molecole sono urtate dagli elettroni del catodo a distanze diverse dalla parete dell'apparato [r], quindi non esiste una v_x univoca per tutti gli ioni generati all'interno del volume. Per far fronte al nuovo grado di libertà, Thomson decide di misurare la traiettoria e alla dimensione z per determinare il rapporto carica-massa.

Dato che il campo magnetico è parallelo al campo elettrico, esso devia le particelle nella direzione z e non più y :

$$z = \frac{qBL}{mv_x} \left(\frac{L}{2} + D \right) \Rightarrow \frac{qBL}{mz} \left(\frac{L}{2} + D \right)$$

Da cui si ottiene

$$y = \frac{qEL}{m} \frac{m^2 z^2}{q^2 B^2 L^2} \frac{\left(\frac{L}{2} + D \right)}{\left(\frac{L}{2} + D \right)^2} = \frac{Em}{qB^2 L} \frac{z^2}{\left(\frac{L}{2} + D \right)}$$

si ha una parabola nel piano yz . Nel disegno ci si aspetta che i punti sperimentali si trovino nel terzo quadrante. Thomson osserva proprio questo. Il coefficiente di z^2 dipende solamente da $\frac{q}{m}$ e quindi dalla specie di gas utilizzato. Pertanto, m e q (cioè il gas particolare utilizzato) determinano la curvatura della parabola.

Gli studenti di Thomson utilizzano del neon ed osservano due parabole questo perché il gas utilizzato è formato da due isotopi: Neon-20 e Neon-22. La curvatura della seconda è più pronunciata della prima, perché la massa è maggiore. La parabola limite è data dall'idrogeno. Thomson verifica l'assenza del bias nel suo apparato cambiando le direzioni di campo elettrico e di campo magnetico ottenendo una parabola per ogni quadrante.

Appunto sull'effetto Zeeman. L'effetto Zeeman per altre specie chimiche oltre l'idrogeno è diverso e la teoria sviluppata non funziona più: bisogna raffinare il modello atomico. [r] Infatti si chiama "lamina quarto d'onda" proprio perché sfasa di 90° .

4 Radiazione di corpo nero

Si vuole studiare la radiazione termica, cioè la radiazione emessa da qualunque corpo per il solo fatto di avere una temperatura. Qualunque corpo emette uno spettro elettromagnetico. Misurando la forma spettrale dell'onda emessa, si nota essere uno spettro continuo che presenta un'emissione massima ad una particolare lunghezza d'onda.

Il primo approccio allo studio del problema è utilizzare le leggi di Maxwell. Esse si sono dimostrate valide in intervalli di frequenze e lunghezze d'onda estremamente vasti. Si è tentato di spiegare in modo classico la radiazione di corpo nero tramite la legge di Rayleigh-Jeans, tuttavia essa non corrisponde ai dati empirici. La semplicità del problema [r] Quindi, Planck mette in discussione alcuni principi fondamentali e grazie alla revisione di alcune credenze, egli riesce a formulare un modello da principi primi che fosse in grado di descrivere perfettamente la radiazione termica. [r] la nascita della fisica quantistica che poi si è evoluta con Bohr tramite postulati fino al 1926, senza una teoria matematica coerente della fisica quantistica. Poi Schrödinger provvede ad una spiegazione più coerente ed accettabile dai fisici.

Si studia in dettaglio lo spettro della radiazione termica.

Ogni corpo emette uno spettro continuo di radiazione elettromagnetica e due corpi con la stessa temperatura hanno anche uno spettro simile. Risulta tipico rappresentare lo spettro in un grafico λ, R dove la variabile indipendente λ è la lunghezza d'onda, mentre la variabile dipendente R è la radianza o emittenza con unità di misura W m^{-2} .

Si definisce l'assorbanza a come la frazione di radiazione incidente assorbita; l'assorbanza t come la frazione di radiazione incidente trasmessa; e la riflettanza r come la frazione di radiazione incidente riflessa. La relazione che lega tali tre efficienti, per la conservazione dell'energia è

$$a + t + r = 1$$

Inoltre, si definisce corpo opaco quel corpo che non trasmette, $t = 0$ e dunque $a + r = 1$. In questo corso ci si occupa sostanzialmente di corpi opachi.

Legge di Kirchhoff. Si studiano le relazioni di questi coefficienti con la radianza. Si trova la legge di Kirchhoff (lo stesso dei circuiti). Si considerino diversi corpi opachi ($t = 0$) in equilibrio termico tra loro. Essi vengono investiti da un'intensità I di radiazione elettromagnetica; essa ha unità di misura $[I] = \text{W m}^{-2}$. Sia E_{in} l'energia entrante e E_{out} l'energia uscente. Esse devono essere uguali perché i corpi sono in equilibrio termico. Si formalizza il bilancio energetico. Per un i -esimo corpo, l'energia risulta essere [r]

$$E_{\text{in}} = E_{\text{out}} \iff I A_i \Delta t a_i = R_i A_i \Delta t$$

Andando a dividere a due a due si ha

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1}{a_2} \implies \frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2} = \dots = \frac{R_i}{a_i} = \text{cost}$$

Parentesi. L'energia elettromagnetica riflessa differisce dalla radianza. L'energia riflessa mantiene la stessa forma spettrale dell'energia incidente, sebbene possa cambiare l'ampiezza. Tuttavia, lo spettro di radiazione termica irradiato ha una forma particolare e specifica a prescindere dalla forma dell'energia incidente.

Corpo nero. Il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica, pertanto ha assorbanza $a_{\text{BB}} = 1$ ("BB" per "black body").

Il rapporto costante $\frac{R_i}{a_i} = \frac{R_{\text{BB}}}{1}$ è la radianza di corpo nero. Inoltre, $R_x < R_{\text{BB}}$, la radianza di corpo nero è la massima (alla stessa temperatura).

Il corpo in sé, per come definito, non esiste in natura, però esiste un modo per ottenere la sua stessa distribuzione spettrale. Si consideri una cavità (detta cavità isoterma) all'interno di un corpo opaco. Lo spettro all'interno di tale cavità è lo stesso spettro del corpo nero. La radiazione emessa del corpo opaco è costretta a rimanere nella cavità a meno di una piccola fessura per mezzo della quale si può osservare la radiazione.

Si anticipano dei concetti utili per la fine della trattazione del corpo nero e per l'osservazione della radiazione microonde del fondo cosmico. La radiazione è in equilibrio in dinamico con la materia. Dunque, si può immaginare la cavità in un altro modo: come materia dispersa, diffusa all'interno di una regione di radiazione [r] (essa non fugge perché è presente tanta massa che non ci si preoccupa degli effetti di bordo).

Si dimostra che la cavità ha lo stesso spettro del corpo nero.

Lecture 8

Si considerino due materiali M_1 ed M_2 corpi opachi all'interno di una cavità.

Si studia la radiazione emessa e riflessa da M_1 . Esso emette una radiazione $R_1 \Delta t$ verso M_2 .

lun 28 mar
2022 14:30

Essa viene rifletta come radiazione $R_1 \Delta t r_2$. Così via: $R_1 \Delta t r_1 r_2$ poi $R_1 \Delta t r_1 r_2^2$ poi $R_1 \Delta t r_1^2 r_2^2$ e così oltre.

Si studia la radiazione emessa e riflessa da M_2 . Esso emette una radiazione in base alla propria radianza verso M_1 : $R_2 \Delta t$. Così si ha $R_2 \Delta t r_1$ poi $R_2 \Delta t r_1 r_2$ poi $R_2 \Delta t r_1^2 r_2$ e oltre.

La radianza verso destra (verso il corpo M_2) è

$$R_D \Delta t = R_1 \Delta t [1 + r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + \dots] + R_2 \Delta t [r_1 + r_1^2 r_2 + r_1^3 r_2^2 + \dots] = \frac{R_1 + R_2 r_1}{1 - r_1 r_2} \Delta t$$

Si utilizza la serie geometrica in quanto $r_1 r_2 < 1$. Dato che le pareti M_1 ed M_2 sono in equilibrio termico, si può applicare la legge di Kirchhoff

$$R_{BB} = \frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2}$$

Inoltre vale $a_i + r_i = 1$, da cui

$$R_i = (1 - r_i) R_{BB}$$

Pertanto

$$R_D \Delta t = \frac{R_{BB}(1 - r_1) + r_1(1 - r_2)R_{BB}}{1 - r_1 r_2} \Delta t = R_{BB} \Delta t \implies R_D = R_{BB}$$

Stessa cosa per la radiazione di sinistra:

$$R_S \Delta t = R_1 \Delta t [r_2 + r_1 r_2^2 + r_1^2 r_2^3 + \dots] + R_2 \Delta t [1 + r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + \dots] = \frac{r_2 R_1 + R_2}{1 - r_1 r_2} \Delta t$$

Da cui si ottiene ancora $R_S = R_{BB}$. Ogni riflessione, riempie la parte di spettro necessaria per passare dallo spettro del corpo opaco a quello del corpo nero.

4.1 Leggi empiriche

Si vedono delle leggi empiriche trovate studiando il corpo. Poi si studia come modellizzare lo spettro di corpo nero.

La radianza totale di corpo nero è proporzionale alla temperatura quartica:

$$R_{BB} = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

[r] dove σ è una costante ottenuta per interpolazione (successivamente la si può ottenere da costanti fondamentali). Per il corpo opaco si ha

$$R_{BB} = a \sigma T^4$$

Esempio. Si vede la potenza netta emessa dal corpo umano:

$$\begin{aligned} P_{\text{netta}} &= P_{\text{emessa}} - P_{\text{assorbita}} = A a \sigma (T^4 - T_0^4) \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} (300^4 - 293^4) = 120 \text{ W} \end{aligned}$$

[r] Dove $A = 2 \text{ m}^2$ è l'area del corpo umano e l'assorbanza è $a \approx 1$.

Esempio. Si deduce la temperatura sulla superficie del Sole. Il raggio solare è $r_s = 7 \times 10^8 \text{ m}$, la distanza media Terra-Sole è $d_{TS} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, la costante solare (cioè la potenza irradiata sulla superficie terrestre) è $c_s = 1400 \text{ Wm}^{-2}$. La potenza emessa sulla superficie del sole è

$$P_s = 4\pi d_{TS}^2 c_s$$

Per Stefan-Boltzmann si ha

$$R = \sigma T^4 = \frac{P_s}{4\pi r_s^2} = \frac{d_{TS}^2 c_s}{r_s^2} \implies T = 5800 \text{ K}$$

Pressione di radiazione. Si studia la pressione di radiazione all'interno della cavità, così da collegare l'energia elettromagnetica con la pressione. Poi si collega la radianza con l'energia interna. [r]

Si consideri la densità di energia

$$[W] = \frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$$

Essa ha le stesse unità di misura di una pressione. [r] Si considera l'incidenza di un'onda elettromagnetica in maniera non ortogonale, ma con un angolo θ rispetto l'orizzontale. [immagine] A causa dell'angolo, la densità di energia trasferita alla parete è minore del caso ortogonale, perché l'area è maggiore a parità di energia. Infatti

$$\frac{RP}{PQ} = \frac{PQ}{\cos \theta}$$

Quindi, la densità di energia assorbita è

$$w' = w \cos \theta$$

L'argomentazione riguardo la pressione è più sottile. [immagine] La pressione trasferita risulta essere

$$\tilde{P} = w' \cos \theta = w \cos^2 \theta$$

cioè si proietta la densità di energia assorbita dalla parete sulla direzione ortogonale alla superficie.

Si complica il modello. Si considerano N raggi nella cavità, ciascuno porta una densità di energia w , per cui la densità di energia totale è $U = Nw$. All'interno della cavità non c'è motivo per cui la distribuzione sia anisotropa quanto l'energia non proviene, o si sposta, da una direzione preferenziale. Pertanto, considerando una calotta sferica centrata in un punto di una parete, si ha

$$\frac{dN}{N} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{2\pi} = \sin \theta d\theta$$

dove dN è il numero di raggi in una corona circolare (?, [r] per nome) della sfera. [r]

$$P = \sum^N w \cos^2 \theta \implies P = \int_0^N w \cos^2 \theta dN = \int_0^{\frac{\pi}{2}} w \cos^2 \theta \sin \theta N d\theta = \frac{1}{3} w N = \frac{1}{3} U$$

Così si lega la pressione alla densità di energia nella cavità.

Ora si vuole legare la radianza all'energia interna alla cavità. La superficie è in equilibrio termico, quindi per ogni punto, l'energia entrante è uguale all'energia uscente. Pertanto, si hanno $\frac{N}{2}$ raggi in entrata e la stessa quantità in uscita.

Si osserva che quanto studiato si applica ancora: sia ricevendo che emettendo un raggio, si ottiene comunque la stessa quantità di moto.

Inoltre, dato che w è una densità di energia, allora moltiplicando una densità per una velocità, si ottiene una densità di corrente di energia

$$[w \cdot c] = \frac{J}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{J}{m^2 s} = [R]$$

[r] Pertanto

$$R = \sum^{\frac{N}{2}} cw \cos \theta \implies P = \int_0^{\frac{N}{2}} cw \cos \theta dN = \int_0^{\frac{N}{2}} cw \cos \theta \sin \theta \frac{N}{2} d\theta = \frac{1}{4} cw N = \frac{1}{4} cU$$

Esempio. Si calcola la pressione di radiazione sulla Terra. La costante solare è esattamente la radianza sulla Terra $c_s = 1400 \text{ W m}^{-2}$. Dalle relazioni precedenti si ha

$$U = \frac{4R}{c} \implies P = \frac{4R}{3C} = 6.2 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} = 6.2 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

Legge di Stefan-Boltzmann. Boltzmann ottiene la legge di Stefan-Boltzmann da considerazioni puramente termodinamiche.

L'entropia è una variabile di stato

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Quindi

$$\delta Q = \delta L + \delta \mathcal{U}$$

dove L è il lavoro e \mathcal{U} è l'energia interna. Si ha

$$L = p dV = \frac{1}{3} U dV, \quad \mathcal{U} = UV \implies \delta \mathcal{U} = U dV + V dU = U dV + V d_T U dT$$

Pertanto

$$dS = \frac{1}{3} \frac{U}{T} dV + \frac{U}{T} dV + \frac{V}{T} d_T U dT = \frac{4}{3} \frac{U}{T} dV + \frac{V}{T} d_T U dT \equiv \partial_V S dV + \partial_T S dT$$

[r] L'entropia è una funzione di stato e dunque il suo differenziale è esatto. Pertanto, le derivate miste sono identiche. Dunque

$$\begin{aligned} \partial_V \left(\frac{V}{T} d_T U \right) &= \partial_T \left(\frac{4U}{3T} \right) \iff \frac{1}{T} d_T U = \frac{4}{3} \frac{1}{T} d_T U - \frac{4}{3} \frac{U}{T^2} \\ &\iff 4 \frac{U}{T} = d_T U \implies 4 \frac{dT}{T} = \frac{dU}{U} \\ &\implies \ln U = A + 4 \ln T \implies U = AT^4 \implies R = \frac{1}{4} cU = \frac{1}{4} cAT^4 \end{aligned}$$

Ciò che sta alla base dello spettro di radiazione termica è qualcosa di fondamentale che non dipende da nulla se non dalle condizioni di equilibrio termico. Pertanto, si rende necessario descrivere la radiazione di corpo nero da principi primi.

Legge di Wien. Wien osserva che

$$\lambda_{\max} T = \text{cost} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

dove λ_{\max} è la lunghezza d'onda per cui la radianza è massima.

Esempio. Sempre riguardo il corpo umano, ad una temperatura di $T = 305 \text{ K}$, la lunghezza d'onda massima è

$$\lambda_{\max} = \frac{2898 \mu\text{m K}}{305 \text{ K}} = 9.5 \mu\text{m}$$

Il picco è negli infrarossi.

Esempio. Nel caso del Sole, si ha il problema opposto. La lunghezza d'onda di radiazione massima è $\lambda_{\max} = 5000 \text{ Å}$. La temperatura del Sole è

$$T = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}}{5000 \times 10^{-10} \text{ m}} = 5537 \text{ K}$$

La radiazione del sole ha un picco a 500 nm (attorno al verde). Tale radiazione trapassa la plastica di una serra. Il suolo si scalda ed emette radiazione intorno ai micrometri che è una lunghezza d'onda troppo lunga per sfuggire dalla serra.

Funzione universale. Wien cerca una legge più universale che spieghi la radiazione di corpo nero [r]. Osservando $\lambda^5 R(\lambda)$ (oppure $T^{-5} R(\lambda)$) in funzione di λT , tutti i punti di misura seguono esattamente la stessa curva. Dunque

$$R(\lambda) = \lambda^{-5} f(\lambda T) = T^5 F(\lambda T) \implies F(\lambda T) = (\lambda T)^{-5} f(\lambda T)$$

La funzione F descrive tutti i punti sperimentali: è una funzione universale. Esiste qualcosa di fondamentale nello spettro di corpo. Bisogna ricavare tale funzione da principi primi. [r]

Lecture 9

mar 29 mar
2022 15:30

Wien cerca di modellizzare la densità di energia in cavità trovando una formula empirica

$$U(\lambda) d\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

I punti sperimentali seguono bene la curva, tranne per lunghezze d'onda grandi.

Si formulano modelli derivanti da primi principi che spieghino i dati sperimentali. Il sistema è un insieme di radiazione in una cavità: tali onde sono assorbite ed emesse dalle pareti. Bisogna trovare tutti i modi possibili con cui un'onda si può disporre e poi associare un'energia ad ogni modo. Si può pensare che nelle pareti siano presenti degli oscillatori che assorbono ed emettono le radiazioni.

Esempio. Si vede un esempio monodimensionale per trovare i modi nella cavità. Si cercano i modi in cui si pone un'onda (simile ad una corda di una chitarra) e la sua vibrazione così da formare un'onda stazionaria. La condizione per trovare i modi di vibrazione di una corda è

$$kL = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \implies \frac{2\pi}{\lambda} L = \pi n \implies n = \frac{2L}{\lambda}$$

dove L è la lunghezza della cavità e kL è il fattore di fase (cioè, l'onda è della forma $\sin(kx)$, dove $x = L$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$). Quindi, considerato \tilde{n} la [r] per unità di lunghezza, si ha

$$n = \frac{N}{L} = \frac{2}{\lambda}, \quad dn = \frac{2}{\lambda^2} d\lambda \cdot 2$$

Inoltre, si aggiunge un fattore 2 perché [r]

Per il caso tridimensionale, si scompone il problema sui tre assi $k_i L = n_i \pi$. Pertanto

$$k_i = n_i \frac{\pi}{L}$$

[r] significato di n . Da cui

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$$

Da cui si ottiene

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L} n \implies n = \frac{2L}{\lambda}$$

Si vuole contare il numero di modi. In tre dimensioni, il numero di modi, cioè il numero dei vettori n è il volume della sfera di raggio n , in particolare un ottavo della sfera perché ogni n_i è positivo. Pertanto, il numero di modi tra 0 ed n è

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n^3 = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \frac{8L^3}{\lambda^3} = \frac{4}{3} \pi \frac{L^3}{\lambda^3} \implies dN = \frac{4\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda \cdot 2 = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda$$

dove il fattore 2 tiene conto del numero di polarizzazioni. Da cui il numero di modi per unità di volume è

$$dn = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

[r] Nella teoria di Planck, non tutti i modi trovano oscillatori adatti.

L'oscillatore più semplice è quello armonico, la cui energia media è $k_B T$ [r]. Rayleigh e Jeans deducono che la densità di energia tra λ e $\lambda + d\lambda$ è

$$U(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda k_B T$$

Tuttavia, tale modello presenta una discrepanza con i dati sperimentali: la catastrofe ultravioletta. Si pone in discussione l'energia media per modo: essa deve essere dipendente

dalla lunghezza d'onda così da bilanciare il fattore a denominatore. Si è visto che l'energia media è

$$\langle E \rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{N} \frac{N}{Z} \int E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

dove si è posto $g = 1$. Essa è la media pesata per il fattore di Boltzmann delle energie. Il parametro Z è il fattore di normalizzazione. Non si rinuncia al fattore di Boltzmann, ma si mantiene simile l'espressione e si afferma che gli oscillatori che costituiscono le pareti, non possono scambiare energia in maniera continua, bensì solamente discreta. Dunque, l'energia media

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m u e^{-\frac{m u}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m u}{k_B T}}}$$

dove u è il quanto di energia che può essere scambiato solamente in quantità discrete, mentre $m \in \mathbb{N}$. La forma è mantenuta perché $E_m = m u$: si ha ancora una media pesata dell'energia da parte del fattore di Boltzmann.

In realtà, Planck, prima di questi ragionamenti, cerca una formula empirica per descrivere lo spettro. Egli trova

$$U(\lambda) d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

Questa formula descrive perfettamente tutti i punti di misura.

Dunque

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m u e^{-\frac{m u}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m u}{k_B T}}} = \frac{u e^{-\frac{u}{k_B T}} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{(m-1)u}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m u}{k_B T}}}$$

Posto $x = e^{-\frac{u}{k_B T}}$. Il numeratore è

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = d_x \sum_{m=1}^{\infty} x^m = d_x \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{(1-x)^2}$$

mentre il denominatore è

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

Dunque

$$\langle E \rangle = \frac{u x}{\frac{1}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{u x}{1-x} = \frac{u e^{-\frac{u}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{u}{k_B T}}} = \frac{u}{e^{\frac{u}{k_B T}} - 1}$$

Il denominatore deve corrispondere a quello trovato con la formula empirica pertanto

$$\frac{u}{k_B T} = \frac{c_2}{\lambda T} \implies u = \frac{k c_2}{\lambda} = \frac{k c_2}{c} \nu \equiv h \nu$$

dove il fattore della frequenza è la costante di Planck, $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js. Pertanto

$$\langle E \rangle = \frac{h \nu}{e^{\frac{h \nu}{k_B T}} - 1} = \frac{1}{\lambda} \frac{h c}{e^{\frac{h c}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Si una l'energia dipendente dalla lunghezza d'onda. Come Rayleigh e Jeans, trova il numero di modi $[r]$ tra λ e $\lambda + d\lambda$:

$$U(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{1}{\lambda} \frac{h c}{e^{\frac{h c}{\lambda k_B T}} - 1} = 8\pi h c \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{h c}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Sapendo $\lambda = \frac{c}{\nu}$, $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$ si ha

$$\frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Da cui

$$U(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Inoltre, per $h \rightarrow 0$ si ha

$$\langle E \rangle \rightarrow \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = k_B T$$

Si studia perché la discretizzazione dell'energia risolve il problema. Quando si è calcolata l'energia media nella formula di Boltzmann si ha

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \int E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

L'energia è pesata per il numero di oscillatori che hanno energia tra E e $E + dE$. Se il quanto di energia è piccolo, cioè ν è piccolo, si discretizza l'asse delle energie, allora tale quanto è in risonanza con un oscillatore (ed anche i suoi multipli) [r]. Se il quanto di energia è grande, cioè ad alte frequenze, non ci sono oscillatori adatti ad oscillare a tale frequenza e tali modi sono poco presenti nella cavità. Ad alte frequenze si abbassa l'energia media. La legge di Planck modula l'energia in base alla frequenza [r]. Dato che gli oscillatori hanno una distribuzione in base alla temperatura, per frequenze alte, si hanno sempre meno oscillatori.

Oscillatori armonici. Si consideri un oscillatore armonico classico. L'equazione del moto e la frequenza è

$$\ddot{x} = -kx, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La cui soluzione è

$$x = x_0 \sin(\omega t), \quad \dot{x} = x_0 \omega \cos(\omega t)$$

L'energia totale è

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} k x_0^2$$

L'energia totale dipende solamente dall'elongazione delle oscillazioni.

L'oscillatore armonico quantistico non può avere un'energia di qualunque valore, ma dipende da $h\nu$: non si può mettere la massa in tutte le posizioni, ma solamente in certe.

Conseguenze macroscopiche. Si vedono le oscillazioni del pendolo con quantità macroscopiche. La sua frequenza di oscillazione è

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 1.6 \text{ s}^{-1}$$

Mentre l'energia totale dipende dalla quota iniziale di rilascio $E = mgz$. Si ha

$$\Delta e = h\nu \approx 10^{-33} \text{ J}, \quad \frac{\Delta E}{E} = 10^{-28} = \frac{\Delta z}{z} = 10^{-28}$$

Questo rapporto è tredici ordini di grandezza del raggio nucleare (10^{-15}) [r].

Si vogliono ottenere le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien partendo dalla legge di Planck.

Lecture 10

[r] Si scompone la probabilità di densità di energia $U(\lambda) d\lambda$ come la probabilità di contare un certo numero di modi tra λ e $\lambda + d\lambda$ per la probabilità dell'energia media in ogni modo. [r] Planck suppone che lo scambio di energia avvenga in modo discreto. L'espressione trovata descrive

lun 04 apr
2022 14:30

perfettamente i dati. La descrizione è fatta in termini di densità di energia: l'energia elementare è $U(\lambda) d\lambda$, mentre quella totale è

$$U_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} U(\lambda) d\lambda$$

Il calcolo della densità di energia è partito da contare il numero totale di modi tra 0 ed n

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n^3$$

Non si utilizza una funzione cumulativa, ma si usano i relativi incrementi dN perché più informativi.

I modi in cavità sono i modi in cui un'onda stazionaria, il campo elettromagnetico si può presentare in cavità. Un'onda progressiva ed una regressiva si possono scrivere come

$$y_D = y_0 \sin(kx - \omega t), \quad y_S = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

Da cui l'onda totale è

$$y_D + y_S = y_0(\sin a + \sin b) = 2y_0 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = 2y_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Il tempo e lo spazio vengono disaccoppiati: i nodi rimangono sempre nella stessa posizione. Ogni corpo emette uno spettro elettromagnetico, tuttavia, generalmente un corpo è elettricamente neutro, ma sono presenti le cariche che si separano creando un dipolo oscillante che emette radiazione [r]. In cavità, si può immaginare un piccolo dipolo che oscilla emettendo un'onda elettromagnetica progressiva che si propaga in cavità. La parete opposta al dipolo riflette l'onda così producendo un'onda regressiva e dando vita ad onde stazionarie. Sebbene il dipolo oscilli poco [r] esso continua ad alimentare l'onda: le oscillazioni si aggiungono costruttivamente all'onda già presente ed essa raggiunge ampiezze maggiori delle oscillazioni di partenza. Questo succede se non si ha un termine dissipativo: nella cavità non si ha tale termine perché essa è isoterma. Le onde stazionarie nella cavità sono vincolate e non libere. I due vincoli sono la presenza di nodi sulle pareti

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases}$$

[r] Queste condizioni causano la presenza di nodi stazionari. Per la seconda condizione si ha

$$kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Da cui si ottiene

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \nu_n = \frac{c}{2L} n$$

Finiti questi chiarimenti, a questo punto, da Planck si vuole riottenere la legge di Stefan-Boltzmann $R = \sigma T^4$. [r] Si ha

$$R = \frac{c}{4} \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

si pone $x = \frac{h\nu}{k_B T}$, $d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$ e si ha

$$R = \frac{1}{4} cU = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \left(\frac{k_B T}{h} \right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \frac{k_B T}{h} dx = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h} \right) \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5}{c^2 15} \frac{k_B^4}{h^3} T^4$$

L'ultimo integrale è risolvibile tramite la funzione ζ di Riemann. Si trova anche il termine σ che dipende da costanti fondamentali.

Si ricava la legge di Wien: $\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}$. Dalla densità di energia si ha

$$U(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{\frac{hc}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda$$

Si trova il massimo

$$d\lambda \left[\frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \right] = 0 \iff -\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} \frac{hc}{\lambda^2 k_B T}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)^2} = 0$$

Si moltiplica da entrambi i lati per $\lambda^6 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)$ e si pone $x \equiv \frac{hc}{\lambda k_B T}$. Pertanto

$$x \frac{e^x}{e^x - 1} - 5 = 0 \implies x e^x = 5(e^x - 1) \implies x = 5(1 - e^{-x}) \implies x = W\left(-\frac{5}{e^5}\right) + 5 \approx 4.9651$$

Dove $W(x)$ è il ramo principale della funzione W di Lambert. Da cui si ricava un valore

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{k_B x} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot x} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

Una tipica domanda è: dati la radianza totale R_{tot} e lunghezza d'onda λ_{\max} a radianza massima, cosa si può dire del corpo? Tramite Wien si ricava la temperatura del corpo; tramite Stefan-Boltzmann si ottiene l'assorbanza.

Il corpo nero è stato uno dei primi problemi risolti con nuovi concetti fisici: tramite la quantizzazione dell'energia. La discretezza dell'energia ha effetto trascurabile sul mondo macroscopico, ma non sul modo microscopico [r]. In questo modo si può rivedere il calore specifico e l'effetto fotoelettrico.

[r] Il successo del modello di Planck venne confermato dal satellite COBE nella misura della radiazione di fondo dell'universo a 3 K. L'universo è permeato dalla radiazione di corpo nero [r]. In passato, l'universo era una cavità isoterma: radiazione e materia erano in equilibrio.

5 Calore specifico dei solidi

[r]

Teoria di Einstein. Si vedono le ipotesi della teoria di Einstein:

- gli oscillatori sono indipendenti; questa ipotesi viene rivista da Debye;
- le oscillazioni nei tre assi sono indipendenti;
- tutti gli oscillatori hanno la stessa frequenza di oscillazione

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b}{m}}$$

L'energia totale è

$$U = 3N \langle E \rangle$$

dove N è il numero di atomi che compongono il solido, $\langle E \rangle$ è l'energia media per grado di libertà, ottenuta da Planck. Si calcola il calore specifico per volumi costanti

$$c_V = \frac{1}{n_{\text{mol}}} (d_T U)_V$$

Ricordando che il numero di atomi totale è $N = n_m N_A$ e la costante di gas perfetto è $R = N_A k_B$, si ha

$$c_V = 3N_A h\nu e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \frac{\frac{h\nu}{k_B T^2}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)^2} \frac{k_B}{k_B} = 3R \left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)^2}$$

Si definisce la temperatura di Einstein come $\theta_E \equiv \frac{h\nu}{k_B}$. Pertanto

$$c_V = 3R \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{\left(e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1\right)^2}$$

Per alte temperature $T \gg \theta_E$ si ha

$$c_V \approx 3R \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_E}{T} - 1\right)^2} = 3R$$

Per basse temperature $T \ll \theta_E$ si ha

$$c_V \approx 3R \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \sim_0 e^{-\frac{\theta_E}{T}}$$

Pertanto, tende a zero come un esponenziale e non come la cubica seguita dai dati sperimentali.

Modello di Debye. Egli ipotizza

- le vibrazioni termiche sono assimilate a delle onde sonore;
- il solido è considerato un continuo elastico: il mezzo in cui si propagano tali è il corpo stesso;
- essendo il corpo finito, sono presenti delle condizioni al contorno e pertanto bisogna contare i modi ammessi, come per la cavità isoterma.

Per continuo elastico, si intende che i siti molecolari sono accoppiati con i propri vicini. Bisogna contare i modi che si instaurano nel continuo elastico. Il conto è quasi identico a quanto fatto per Planck. Il numero di modi per unità di frequenza è

$$G(\nu) d\nu = \frac{4\pi V}{v^3} \nu^2 d\nu$$

dove v è la velocità dell'onda, cioè la velocità del suono all'interno del corpo elastico; mentre V è il volume del corpo. La differenza con il corpo nero risiede nel fatto di considerare tutte le direzioni di propagazione. Nel campo elettromagnetico sono presenti solamente modi trasversali, in questo caso i modi sono anche longitudinali. Dunque

$$\frac{4\pi V}{v_l^3} \nu^2 d\nu, \quad 2 \frac{4\pi V}{v_t^3} \nu^2 d\nu$$

Il fattore due descrive le polarizzazioni. Dunque, bisogna sommare i modi

$$G(\nu) d\nu = 4\pi V \nu^2 \left[\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right] d\nu = 4\pi V \nu^2 \frac{1}{\langle v_s^3 \rangle} d\nu$$

[r] Dove v_s è la velocità sonora. Si ha un'altra perturbazione al modello di Planck. Ci si chiede quanti possono essere i modi possibili. La sommatoria dei modi non può andare all'infinito: al limite si hanno tanti modi di vibrazione quanti sono gli atomi, in quanto ogni atomo potrebbe

vibrare indipendentemente. Dunque, i modi totali sono $3N$ ed esiste un estremo superiore della frequenza di vibrazione, detto frequenza di Debye ν_0 . Infatti

$$3N = \int_0^{\nu_0} \frac{4\pi V}{\langle v_s^3 \rangle} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi V}{\langle v_s^3 \rangle} \frac{\nu_0^3}{3} \implies \nu_0^3 = \frac{9}{4} \frac{N \langle v_s^3 \rangle}{nV} = \frac{9}{4\pi} n \langle v_s^3 \rangle$$

Inoltre, $\frac{N}{V} = n \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ è una densità di atomi. In particolare, la relazione seguente è utile per semplificare i conti

$$\frac{4\pi V}{\langle v_s^3 \rangle} = \frac{9N}{\nu_0^3}$$

[r] Tipicamente si ha che $v_t < v_l$. Nel caso di Einstein, esiste una ed una sola frequenza di oscillazione dei siti reticolari.

Per una densità tipica di $\frac{N}{V} = 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ed una velocità del suono media di $\langle v_s \rangle = 10^5 \text{ cm s}^{-1}$, si ottiene una frequenza di Debye di

$$\nu_0 = 10^{13} \text{ s}^{-1} \implies \lambda_{\min} \approx 1 \text{ Å}$$

Ma questa lunghezza d'onda diventa un problema perché essa risulta più piccola del passo reticolare [r]. Solo alla fine si ritorna su questo punto.

Lecture 11

ν_0 sarebbe ν_D . [r]
Il calore specifico è

$$c_V = \frac{1}{n_m} (\partial_T U)_V$$

Mentre la densità di energia è il prodotto della probabilità di contare un certo numero di modi tra ν e $\nu + d\nu$ per la probabilità dell'energia media in ciascun modo. Pertanto, l'energia totale è

$$U = \int_0^{\nu_0} \frac{4\pi V \nu^2}{\langle v_s^3 \rangle^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

Si utilizza l'utile relazione scritta in precedenza con cui si ottiene

$$U = \frac{9Nh}{\nu_D^3} \int_0^{\nu_D} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

Si ricorda che il numero totale di atomi è $N = N_A n_m$. Pertanto, il calore specifico è

$$c_V = \frac{9N_A h}{\nu_D^3} \int_0^{\nu_D} \frac{\nu^3 e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \frac{h\nu}{k_B T}}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)^2} d\nu$$

[r] Sostituendo $x \equiv \frac{h\nu}{k_B T}$, $dx = \frac{h}{k_B T} d\nu$, $d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$ e $\nu = \frac{k_B T}{h} x$; si a

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{9N_A h}{\nu_D^3} \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{h}{k_B T^2} \frac{k_B T}{h} x \frac{k_B T}{h} dx \\ &= 9R \left(\frac{k_B T}{h\nu_D}\right)^3 \int_0^{\bar{x}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \end{aligned}$$

dove $\bar{x} \equiv \frac{h\nu_D}{k_B T}$, mentre R è la costante dei gas perfetti. Si definisce la temperatura di Debye $\theta_D = \frac{h\nu_D}{k_B}$. Dunque

$$c_V = 9R \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

Per alte temperature $T \gg \theta_D$, si ha

$$c_V \approx 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^4}{(1+x)^2} dx = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{1}{3} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3 = 3R$$

come ci si aspetta. Per basse temperature $T \ll \theta_D$ si ha

$$c_V \approx 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \sim_0 T^3$$

Si nota la dipendenza da T^3 come osservato dai dati sperimentali (l'integrale è uguale a $\frac{4}{15}\pi^4$).

Si è già notato che le frequenze vibrazionali [r] limite hanno una dimensione confrontabile con la spaziatura degli atomi nel reticolo. Si raffina la teoria per il caso monodimensionale.

Continuo elastico raffinato monodimensionale. Si consideri un continuo elastico monodimensionale. Sia a la spaziatura tra gli atomi. Sia ξ_n la distanza dalla posizione di equilibrio. L'atomo n -esimo è soggetto ad una forza elastica causata dagli atomi vicini, però bisogna anche considerare lo spostamento di essi [r]. Le forze elastiche dovute ai vicini sono

$$-\beta\xi_n + \beta\xi_{n\pm 1}$$

Si considerano solamente le interazioni con i primi vicini. Pertanto, l'equazione del moto è

$$M d_t^2 \xi_n = -b(\xi_n - \xi_{n+1}) - \beta(\xi_n - \xi_{n-1}) = \beta(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n)$$

Si cercano soluzioni armoniche del tipo

$$\xi_n = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

La posizione assoluta dell'atomo n -esimo è $x_n = na$. Sostituendo la soluzione nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} -M\omega^2 \xi_0 e^{i(\omega t - kna)} &= \beta \left(\xi_0 e^{i(\omega t - k(n+1)a)} + \xi_0 e^{i(\omega t - k(n-1)a)} - 2\xi_0 e^{i(\omega t - kna)} \right) \iff \\ -M\omega^2 &= \beta (e^{-ika} + e^{ika} - 2) = \beta (2 \cos(ka) - 2) \\ \implies \omega^2 &= \frac{2\beta}{M} (1 - \cos(ka)) = \frac{4\beta}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \end{aligned}$$

Si è trovata una relazione di dispersione, essa lega ω a k :

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{\beta}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

Si ha il massimo per $k = \frac{\pi}{a}$ in cui si ha $\omega = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}}$. La velocità di gruppo dell'onda è $v_g = d_k \omega$. I diversi modi in questo modello raffinato non si propagano alla stessa velocità, ma a velocità diverse. Nella teoria di Debye si sottintende che $\lambda \nu = \frac{\omega}{k} = \langle v_s \rangle$. [r]

Per $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ piccolo, si ha λ grande e dunque tale lunghezza d'onda non è confrontabile con le dimensioni reticolari perché molto più grande. Per $k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{\pi}{a}$ si ha $\lambda \approx 2a$ e dunque λ è relativamente piccolo, e tali lunghezze d'onda non si propagano (basta vedere il valore di v_g).

Velocità di gruppo. [r]

La frequenza è una funzione della lunghezza d'onda

$$\omega = f(k) = \omega_0 + (k - k_0) \omega'_0$$

Per un'onda si ha

$$\begin{aligned}\sin(\omega t - kx) &= \sin(f(k)t - kx) = \sin(\omega_0 t + (k - k_0)\omega'_0 t - kx + k_0 x - k_0 x) \\ &= \sin((\omega_0 t - k_0 x) - (k - k_0)(x - \omega'_0 t)) = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Per un pacchetto di onde, cioè un insieme di onde a diversa lunghezza k , si ha

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int \sin(\omega_0 t - k_0 x) \cos((k - k_0)(x - \omega'_0 t)) - \cos(\omega_0 t - k_0 x) \sin((k - k_0)(x - \omega'_0 t)) dk \\ &= \sin(\omega_0 t - k_0 x) \int \cos((k - k_0)(x - \omega'_0 t)) dk\end{aligned}$$

dove il seno è un'onda che si propaga con una velocità di fase $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$, ma la sua ampiezza è modulata dall'integrale. La frequenza interna si muove con v_f , mentre l'involuppo si muove con una velocità di gruppo $v_g = \omega'_0$.

In un mezzo, la frequenza massima che si può propagare è quella per cui gli atomi oscillano secondo versi alterni, uno su, uno giù, uno su, uno giù. Tuttavia, di questo modo ne esiste solamente uno, tutti gli altri modi hanno lunghezze d'onda maggiori (due su, uno giù, etc).

6 Effetto fotoelettrico

Si studia una fenomenologia non spiegabile con la fisica classica e ci si risolve alla meccanica quantistica.

Si consideri un metallo. L'effetto fotoelettrico consiste nell'estrarre i suoi elettroni irraggiandolo con onde elettromagnetiche. Le prime osservazioni risalgono al 1888. L'apparato sperimentale è costituito da due lastre metalliche (l'emettitore ed il collettore) una di fronte all'altra, entrambe collegate in serie con un amperometro, poi in serie con un voltmetro in parallelo ad un generatore di tensione continua. Colpendo una lastra con delle onde elettromagnetiche, vengono emessi degli elettroni. [r]

I parametri dell'apparato sono

- tensione del generatore $V \approx 10 \text{ V}$;
- corrente I ;
- campo elettrico? E [r];
- frequenza della radiazione elettromagnetica ν_{EM}

Si vuole mettere in relazione la corrente del generatore con la corrente fotoelettrica.

Le evidenze sperimentali sono

- l'osservazione di una relazione di proporzionalità diretta tra le due correnti per V, ν, E costanti;
- oltre una tensione di stop, la foto-corrente aumenta fino ad un massimo quando si aumenta la tensione [r] Applicando un potenziale contrario nel tentativo di interrompere la foto-corrente si trova il potenziale di stop V_s che è indipendente dall'intensità di illuminazione. Si può definire una energia cinetica massima $eV_s = K_{\text{max}}$ [r]. Classicamente, dato che $I \propto E^2$ e $F = qE$, ci si aspetta che l'energia dipende dall'illuminazione [r]
- La foto-corrente in funzione della frequenza della radiazione si registra solamente sopra una certa frequenza. Tale frequenza di soglia è indipendente dalla corrente (ma non è la stessa per tutti i materiali). Classicamente ci si aspetta di osservare della corrente a tutte le frequenze e che quindi non ne dipende.

- Il potenziale di stop in funzione della frequenza è una relazione lineare (con intercetta negativa):

$$eV_s = a\nu - W_0$$

dove W_0 è il lavoro di estrazione. Solamente quando la frequenza è tale che $a\nu > W_0$, si ha un potenziale di stop $V_s > 0 \implies K_{\max} > 0$. Solamente sopra una tale frequenza si ha abbastanza energia di scappare dal metallo ed acquisire energia cinetica, così misurando una corrente. L'intercetta della relazione lineare è Φ detto potenziale di estrazione. [r]

Einstein spiega questa intera fenomenologia introducendo il fotone.

Lecture 12

lun 11 apr
2022 14:30

L'effetto fotoelettrico è la proprietà della luce di causare l'emissione di elettroni quando colpisce un metallo.

Le ultime tre evidenze sperimentali non corrispondono con quanto ci si aspetta dalla fisica classica: ci sarebbe aspettata una indipendenza del potenziale di stop dall'intensità di illuminazione. [r]

Sempre nella fisica classica, l'energia dell'onda elettromagnetica è distribuita in modo uniforme sul fronte d'onda. Pertanto, ci si aspetta che si abbia bisogno di un certo tempo affinché tale energia sia accumulata dall'atomo per superare l'energia di estrazione. Considerando un'intensità I , si ha un'energia dell'elettrone di

$$K = IAEt - W_0$$

dove \mathcal{E} è un termine di efficienza, mentre A è un'area (si ricordi che le unità di misura dell'intensità sono watt su metro quadro). Pertanto

$$t_{\min} = \frac{W_0}{IA\mathcal{E}} = \frac{2.28 \text{ eV} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}}{\pi(10^{-10} \text{ m})^2 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}} = 1.2 \times 10^3 \text{ s}$$

Ma l'effetto fotoelettrico è istantaneo. I lavori di estrazione per i metalli è di quale elettronvolt (in questo caso si è usato il sodio).

Einstein, nel 1905, dieci anni dopo la legge di Planck per la radiazione del corpo nero, ipotizza che l'interazione sia di tipo puntuale: un quanto di energia viene scambiato tra l'onda elettromagnetica e l'elettrone. Tale quanto di energia è

$$E = h\nu$$

Tale particella che media l'interazione è detta fotone. A tale particella si può anche associare una quantità di moto che è un'osservabile tipica di una particella puntiforme [r]. L'introduzione di tale particella è fondamentale per far quadrare i conti

$$E = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}} \nu = (4.14 \times 10^{-15} \text{ eV s}) \nu$$

[r] La lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica nel visibile è $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$ cioè $1.5 \text{ eV} \leq E \leq 3.1 \text{ eV}$.

A ciascun fotone si può associare un quanto di energia. Così si può reinterpretare l'intensità

$$[I] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \implies \frac{[I]}{[E]} = \frac{\text{numero di fotoni}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{[I]}{[h\nu]}$$

[r] L'ipotesi di Einstein è diversa dall'ipotesi di Planck. Quest'ultima riguarda la quantizzazione dei livelli energetici degli oscillatori elementari. Einstein, invece, quantizza il campo elettromagnetico.

A questo punto, non risulta difficile comprendere la prima evidenza sperimentale, cioè la

relazione di proporzionalità diretta tra la corrente foto-elettrica e la corrente fornita dal generatore. [r] La foto-corrente dipende dalla frequenza? Inoltre si ha

$$eV_s = hv - W_0 \implies \nu_{\min} = \frac{W_0}{h}$$

Da cui la pendenza della relazione lineare è h stesso. [r] Per far coesistere quanto trovato con la fisica classica è il fatto che l'effetto fotoelettrico è un processo che viene esclusivamente per un fotone alla volta. I processi studiati a Fisica II riguardano più fotoni. Si divide l'interazione del campo elettromagnetico in multi fotoni e singoli fotoni.

Esempio. Si consideri una radiazione elettromagnetica a lunghezza $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, per un materiale con energia di estrazione $W = 19 \text{ eV}$. Si vuole trovare l'energia del fotone, l'energia del fotoelettrone liberato, il potenziale di stop.

L'energia del fotone incidente è

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 2.47 \text{ eV}$$

L'energia dell'elettrone è

$$K = 2.47 - 1.9 = 0.57 \text{ eV}$$

Mentre il potenziale di stop è

$$V_s = \frac{K}{e} = 0.57 \text{ V}$$

Esempio. Si consideri una intensità $I = 10^{-10} \text{ Wm}^{-2}$ di un'onda elettromagnetica con lunghezza $\lambda = 5.6 \times 10^{-7} \text{ m}$. Si vuole trovare il numero di fotoni al secondo che entrano in una pupilla con area $a = 0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Infatti

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 2.21 \text{ eV} = 3.54 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Per quanto si è visto prima, il numero di fotoni per unità di tempo è

$$\frac{I}{E} = 2.82 \times 10^8 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \implies \frac{\text{fotoni}}{\text{s}} = 14000 \text{ s}^{-1}$$

6.1 Fotomoltiplicatore

Esiste uno strumento di misura usato nella fisica delle particelle: il fotomoltiplicatore. Il suo funzionamento si basa sull'effetto fotoelettrico.

Si ha una lastra illuminata (il fotocatodo) che emette elettroni in una zona dove sono presenti degli elettrodi (detti dinodi) che a due a due sono ad una differenza di potenziale. Tale differenza accelera l'elettrone che collide con il dinodo più vicino così liberando altri quattro elettroni. Ciascuno di questi è attratto dal dinodo successivo così ripetendo il processo. Tipicamente i dinodi sono dodici, pertanto si hanno $4^{12} \approx 1.6 \times 10^6$ elettroni finali. Si ha un guadagno di $10^6 : 1$. Ogni fotone non produce esattamente un elettrone, ma si ha un'efficienza quantistica che dipende anche dalla frequenza. Essa va da 20% - 50%.

7 Modelli atomici

Si studiano i modelli di Thomson, Rutherford e Bohr.

Il modello di Thomson è il primo modello atomico formulato. Egli ipotizza che le cariche negative sono puntiformi, mentre la carica positiva è distribuita.

Rutherford studia le radiazioni alfa (nuclei di elio) e le utilizza come un proiettile molto fine per sondare la materia. Egli studia come esso viene deviato dalla materia. Questa stessa idea è utilizzata odiernamente scagliando degli elettroni su dei neutroni? così da capire la struttura.

7.1 Thomson

Le evidenze sperimentali puntano alla presenza di cariche negativa e carica positiva in valore assoluto identiche. Si pensa a come esse possono coesistere insieme. Thomson ipotizza una nuvola di cariche positive in cui sono immerse delle cariche negative.

La carica è

$$e = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \implies \rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

L'elettrone è sottoposto all'attrazione di una carica positiva distribuita all'interno del raggio atomico. La forza a cui è soggetto l'elettrone è

$$F = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) \frac{e}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{3}\pi \rho e \right) r$$

[r] Si ha una forza di tipo armonico. Il coefficiente del raggio è la costante della "molla"

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Da cui si può calcolare una frequenza caratteristica

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.5 \times 10^{15} \text{ Hz} \implies \lambda = \frac{c}{\nu} = 120 \text{ nm}$$

[r] La lunghezza d'onda è nei raggi ultravioletti.

Le evidenze sperimentali più forti sono date da Rutherford con l'esperimento di scattering delle particelle alfa su di una lastra d'oro.

Si è misurato il rapporto carica-massa delle particelle alfa come

$$\frac{q_\alpha}{M_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{q_H}{m_H}, \quad q_\alpha = 2q_H$$

Da cui si ottiene

$$M_\alpha = 4m_H$$

Energie tipiche delle radiazioni alfa sono 5 – 10 MeV. Da cui la velocità di tali particelle è

$$v_\alpha = \frac{1}{20} c$$

Pertanto si può utilizzare una approssimazione non relativistica.

Apparato sperimentale. Si ha una sorgente di radiazioni alfa seguito da un collimatore fino a giungere ad un foglio d'oro. Attorno a questo si ha un rivelatore per contare quante particelle alfa sono diffuse (scattered) ad un certo angolo θ . Rutherford osserva:

- l'angolo di diffusione medio è di qualche grado $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \approx 1^\circ$;
- una particella su 8000 ha un angolo maggiore di 90° [r];
- la probabilità di ottenere un angolo $\theta = 180^\circ$ è non nulla.

Si studia se il modello di Thomson spiega tali osservazioni.

Prima osservazione.

Interazione con un elettrone. Si vede l'interazione delle particelle alfa con gli elettroni. La particella si sposta con velocità v_α verso un elettrone. Dopo l'urto, tale elettrone assume una velocità di $v = 2v_\alpha$. Si ipotizza che la particella è molto maggiore di quella dell'elettrone: nel sistema di riferimento dell'elettrone, esso colpisce una parete con interazione perfettamente elastica e la variazione di quantità di moto è esattamente $2v_\alpha$. La quantità di moto dell'elettrone è

$$p'_e = 2m_e v_\alpha = 2 \frac{m_\alpha}{2000} \frac{v_\alpha}{4}$$

La variazione della quantità di moto della particella alfa

$$\delta p = p e'$$

[r] Considerando il peggiore dei casi, cioè quando la variazione della quantità di moto è perpendicolare ad essa, si ha

$$\tan \theta = \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} \implies \theta = \frac{1}{4000} = 0.04^\circ$$

[r] Si è ben distante dal singolo grado osservando da Rutherford.

Interazione con la nuvola di carica positiva. Si studia l'interazione con la nuvola di carica positiva. [r] Il tempo passato all'interno della nuvola è

$$\Delta t = \frac{2R}{v_\alpha}$$

Mentre la forza è

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q}{R^2} \implies \Delta p = F \Delta t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q}{R^2} \frac{2R}{v_\alpha}$$

Si studia ancora il caso peggiore in cui la deviazione è in direzione perpendicolare. Studiando l'angolo si ha

$$\tan \theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{2}{v_\alpha m_\alpha v_\alpha} = \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 R \left(\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2\right)} = 4.55 \times 10^{-4} \implies \theta = 0.026^\circ$$

[r] Dove si considera $Q = 79$ per l'oro. L'interazione singola con la nuvola elettronica non è in grado di spiegare l'evidenza sperimentale.

Dunque l'interazione non avviene una sola volta, ma si ha una diffusione multipla. La lastra d'oro, sebbene sottile, comprende vari strati atomici. Infatti, considerato uno spessore di $1 \mu\text{m}$ si hanno comunque $N = 10^4$ strati (si considera il raggio atomico 10^{-10}m). Quindi, la particella colpisce gli strati ed esce con un angolo finale che può essere diverso dall'angolo acquistato da un singolo strato.

Dopo la prima interazione con il primo strato, la particella subisce una deviazione che è puramente statistica. In prima approssimazione, si descrive la deviazione statistica dalla traiettoria con una gaussiana centrata in zero con una propria larghezza σ_1 . Lo stesso per gli strati successivi. Dunque, la variabile aleatoria è data da

$$X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i)$$

Dove è ragionevole supporre che $\sigma = \sigma_i, \forall i$. Dunque, la distribuzione finale è data da

$$X_N = \sum_i X_i, \quad X_N \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N)$$

Dove vale

$$\sigma_N^2 = \sum_i \sigma_i^2 \implies \sigma_N = \sqrt{N} \sigma$$

Pertanto, ci si aspetta

$$\sigma_N = \sqrt{10^4} \begin{cases} 0.01 \\ 0.026 \end{cases} \sim \text{qualche grado}$$

Ciò fa sperare di poter descrivere la diffusione tramite Thomson. Tuttavia, sperimentando in dettaglio per diversi spessori della lastra d'oro, si osserva che $[r]$ proporzionale all'angolo $[r]$.

Lecture 13

Lo spessore della lastra è $\delta = RN$, dove N è il numero di strati e R è lo spessore di ciascuno strato che ha altezza atomica. Da ciò si vede

$$N(\theta) \propto \delta \propto N$$

$[r]$

Rutherford si chiede in che raggio deve essere racchiusa la carica positiva affinché l'angolo sia circa 1 grado:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx 1 \implies \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 RK} = 1 \implies R = \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 K} = 4.6 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

La carica positiva deve avere un raggio molto più piccolo del raggio atomico (intorno ad 1 angstrom). La materia è costituita per lo più da spazio vuoto. Avanza il modello di Rutherford secondo il quale la carica positiva è racchiusa in un raggio molto più piccolo del raggio atomico ed attorno si hanno gli elettroni. $[r]$

Il modello di Rutherford non è un modello atomico, ma è un modello di diffusione, scattering. Egli non spiega perché le cariche hanno segni diversi, ma sono stabili.

7.2 Rutherford

Le ipotesi per creare il modello di diffusione coulombiano sono

- l'interazione è mediata dalla forza coulombiana;
- la massa del nucleo è molto maggiore di quella del proiettile;
- le particelle sono puntiformi;
- la trattazione è non relativistica.

La misura ottenuta è la variazione di conteggi di particelle diffuse rispetto la variazione di angolo solido

$$\frac{\Delta N}{\Delta \Omega}(\theta)$$

Per la simmetria circolare si ha $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Si vuole trovare un modello che predica tale quantità misurata. Il numero totale di particelle diffuse è

$$N_{\text{tot}} = \int d\Omega N d\Omega = \int dN$$

Si ha ancora una densità per unità di angolo solido.

mar 12 apr
2022 15:30

Scattering. La prima parte per trattare la creazione del modello non è legata a questo esperimento in particolare (scattering coulombiano), ma alla diffusione, scattering in modo generale.

Si definisce il problema. Si consideri un volume su cui giungono dei proiettili. Essi sono descritti come un'intensità: un numero di entità per unità di area e per unità di tempo. Il bersaglio ha una superficie A ed uno spessore δ . L'oggetto è caratterizzato da aree interne al proprio volume che sono i centri di scattering. Tali aree interne sono caratterizzate

- dall'area efficace σ (o sezione d'urto) [r] che è la stessa per ognuno;
- la loro densità è $\rho' = \frac{\#}{V}$;
- non si fanno ombra, cioè le loro proiezioni sono aree disgiunte. [r]

Quando una particella incontra un centro di scattering, essa viene deviata, altrimenti procede oltre. Sotto tale ipotesi, si calcola la probabilità di scattering di un proiettile

$$P = \frac{\rho' A \delta \sigma}{A}$$

Tale probabilità si intende come casi favorevoli su casi totali (numero di centri per la loro area, diviso l'area totale). Dunque, il numero totale di proiettili che subiscono scattering per unità di tempo è

$$N = IAP = IA \frac{\rho' A \delta \sigma}{A} = I \rho' A \delta \sigma = In \sigma$$

Dove n è il numero totale di centri di scattering.

Si studia una parentesi su ρ' . Tipicamente, la quantità disponibile è la densità volumica

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Bisogna dividere per la massa di ciascun centro di scattering. Dunque

$$\rho' = \rho \frac{N_A}{m_{\text{mol}}} = \frac{\#}{V}$$

[r]

Ritornando alla situazione particolare di Rutherford si ha

$$d_\Omega N = In d_\Omega \sigma$$

Si è spostato il problema sulla sezione d'urto.

La particella alfa m_α viaggia con velocità v_α verso il nucleo bersaglio. La distanza tra la traiettoria della particella e la traiettoria parallela diretta esattamente verso il nucleo è il parametro d'impatto b [r]. Da esso la sezione d'urto è $\sigma = \pi b^2$. A questo punto, bisogna legare b con θ , per farlo bisogna utilizzare la dinamica del problema particolare che si analizza: in questo caso si deve usare l'interazione coulombiana. Oltre questo punto non si può più fare una discussione generale sullo scattering.

Collisione head-on. La particella è diretta esattamente verso il nucleo. Esiste una distanza D alla quale la particella torna indietro. Infatti, bisogna eguagliare l'energia cinetica con l'energia potenziale

$$K = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 D} \implies D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 K} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2}$$

dove z e Z sono il numero di cariche elementari del proiettile ed il numero di cariche elementari del bersaglio.

Si ipotizza che $b \neq 0$ (cioè nel caso diverso da quello head-on). [r] Si conserva il momento angolare e l'energia cinetica del proiettile in ingresso ed in uscita sono identiche:

$$m_\alpha v_\alpha b_{\text{in}} = m_\alpha v'_\alpha b_{\text{out}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_\alpha (v'_\alpha)^2 \implies b_{\text{in}} = b_{\text{out}}$$

[r] Si individua un asse di simmetria z' [r]

$$\Delta p = 2m_\alpha v_\alpha \sin \frac{\theta}{2}$$

Tramite il teorema dell'impulso, si ha

$$dp = F dt, \quad (\Delta p)_{z'} = \int F \cos \varphi dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F \cos \varphi d_\varphi t d\varphi$$

dove φ è l'angolo tra la traiettoria diretta verso il nucleo e l'asse di simmetria, mentre F è la forza coulombiana. [r]

Inoltre, si sa che il momento angolare è

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \implies L = m_\alpha r(r\dot{\varphi}) = m_\alpha v_\alpha b$$

L'ultima uguaglianza è dato dal fatto che, in un campo centrale, il momento angolare si conserva. Pertanto

$$(\Delta p)_{z'} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \varphi \frac{r^2}{v_\alpha b} d\varphi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_\alpha b} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$

[immagine] Dato che z' è un asse di simmetria si ha $-\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$. Inoltre

$$2\varphi_0 + \theta = \pi \implies \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

Pertanto

$$(\Delta p)_{z'} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_\alpha b} 2 \sin \varphi_0 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_\alpha b} 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

Si hanno due espressioni per Δp , da cui si ricava l'espressione per il parametro d'impatto

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_\alpha b} 2 \cos \frac{\theta}{2} = 2m_\alpha v_\alpha \sin \frac{\theta}{2} \implies b = \frac{1}{2} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} D \cot \frac{\theta}{2}$$

L'angolo θ è confinato in $[0, \pi]$. Quando $\theta \approx 0$, il proiettile è deviato poco, cioè è lontano dal centro di scattering. Quando $\theta \approx \pi$ si ha back scattering: il proiettile passa molto vicino al bersaglio, pertanto il parametro di impatto è piccolo.

Ricordando il legame della sezione d'urto con il parametro di impatto $\sigma = \pi d^2$, $d\sigma = 2\pi b db$ si ha

$$db = \frac{1}{2} D \frac{-\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{1}{4} D \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

Si trascura il segno meno ricordando che quando si integra e si passa ad esprimere l'integrale in funzione di b bisogna scambiare gli estremi di integrazione. Pertanto

$$d\sigma = 2\pi \frac{D \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{D}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

Si vuole trovare $d_\Omega \sigma$, ricordando che in geometria cilindrica si ha $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Inoltre, sfruttando l'identità trigonometrica $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, si ottiene

$$d\sigma = \frac{1}{16} D^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{16} D^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega$$

Dunque, ciò che Rutherford misura è

$$d_{\Omega}N(\theta) = In d_{\Omega}\sigma = \frac{1}{16}InD^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Si nota che integrando la sezione d'urto su tutto il dominio si ottiene

$$\sigma = \int d\sigma = \int 2\pi b db = \pi b^2 \Big|_0^{\infty} = \infty$$

[r]

Verifiche sperimentali.

- Come si è costruito il modello, la sezione d'urto può avere dimensioni molto grandi, perché non si è considerato l'effetto schermo sulla carica positiva dato dalla carica degli elettroni. Più il proiettile passa ad una distanza maggiore dal nucleo, più piccola è la carica a cui la particella alfa è soggetta; nel limite tutta la carica positiva è schermata dagli elettroni. Se si considerassero gli elettroni, bisogna mettere un limite superiore al parametro d'impatto $d_{\max} < \infty$. Dunque, il modello sviluppato, non è più predittivo per valori piccoli di θ , cioè valori grandi di b . Il modello va bene oltre 5° fino a 180° . Rutherford verifica che l'andamento dei dati sperimentali è esattamente quello del modello sviluppato (in un intervallo $5^\circ - 150^\circ$). Rutherford non arriva ad un angolo di π perché il nucleo stesso ha una dimensione [r] e si ha un'interazione nucleare che non è più di tipo coulombiano.
- Si osserva $n = \rho \frac{N_A}{m_{\text{mol}}} A \delta$ dipende dallo spessore della lastra.
- Rutherford utilizza anche elementi diversi dall'oro e verifica che l'andamento $d_{\Omega}n \propto Z^2$, dove Z è incluso nel termine D .
- Egli testa particelle alfa con diverse energie cinetiche (1 MeV – 10 MeV) e verifica

$$d_{\Omega}N \propto \frac{1}{K^2} \propto \frac{1}{v_{\alpha}^4}$$

dove K è anch'essa inclusa in D .

Questo modello è di scattering, non è un modello atomico. Risulta essere il modello di Bohr che tiene in considerazione varie osservazioni fatte al tempo della propria creazione.

Esempio. Si consideri una sorgente di particelle alfa con energia cinetica $K = 4.8 \text{ MeV}$ che colpiscono un foglio di rame ($Z = 29$, $\rho = 8.99 \text{ g cm}^{-3}$, $M = 63.54 \text{ u.m.a.}$, $\delta = 10^{-4} \text{ cm}$). Dalla sorgente sono emesse una quantità di particelle al secondo di $N = 10^6 \text{ s}^{-1}$.

Si vuole trovare il numero di particelle diffuse a $\theta = 60^\circ$ in un minuto rivelate su di uno schermo quadrato con area $\Delta\Sigma = 4 \text{ mm}^2$ a distanza $R = 5 \text{ cm}$; trovare il numero di particelle diffuse ad un angolo maggiore di θ .

Pertanto

$$dN = In d_{\Omega}\sigma d\Omega = \frac{1}{16}InD^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega$$

Il numero totale di centri di scattering è

$$n = \rho \frac{N_A}{m_{\text{mol}}} \delta A = \frac{\rho}{\text{massa 1 centro scattering}} \delta A = \frac{\rho}{M m_{\text{protone}}} \delta A = (8.5 \times 10^{22} \text{ m}^{-2}) A$$

La distanza della traiettoria head-on è

$$D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 K} = 1.74 \times 10^{-14} \text{ m}$$

L'intensità è

$$I = \frac{N}{A}$$

La superficie è legata all'angolo solido

$$\Delta\Sigma = R^2 \Delta\Omega \implies \Delta\Omega = \frac{\Delta\Sigma}{R^2} = 1.6 \times 10^{-3}$$

Pertanto, le particelle diffuse al minuto ad un angolo θ è

$$\Delta N = 2.47 \text{ min}^{-1}$$

Mentre il numero ad un angolo maggiore di θ in un minuto è

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int dN = \int I n d\Omega \sigma d\Omega = \int I n d\sigma = I n \sigma \Big|_{60^\circ}^{180^\circ} \\ &= I n \pi b^2 = I n \pi \frac{1}{4} D^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} \Big|_{180^\circ}^{60^\circ} = 3638 \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

Lecture 14

7.3 Bohr

mar 26 apr
2022 13:30

Bohr vuole spiegare i primi spettri atomici. Egli formula una teoria in grado di spiegare tali spettri. [r]

Le prime righe spettrali sono state osservate da Balmer: si ha la serie omonima per l'atomo di idrogeno. Nel visibile, egli trova la relazione

$$\lambda = 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{Å}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

Rydberg e Ritz generalizzano tale espressione trovando

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad n > m$$

dove $R = 1.0974 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ è la costante di Rydberg che vale per tutti gli atomi entro un errore massimo di 0.05%.

Per $m = 2$ si ha

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) = R \frac{n^2 - 4}{4n^2} \implies \lambda = \frac{4}{R} \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

cioè la serie di Balmer.

Modello di Bohr. Formulato nel 1913, il modello attinge dalle idee di Planck, Einstein e Rutherford, formulando vari postulati. Tuttavia, essi non sono intuiti, però funziona per gli atomi idrogenoidi. Il fatto di utilizzare i postulati non è un problema in sé per la fisica, in quanto si fa uso di principi, tuttavia essi tendono ad essere pochi e intuitivi [r].

I postulati del modello di Bohr sono

- L'elettrone orbita attorno al nucleo con orbite circolari secondo la meccanica classica.
- Le orbite sono tali per cui il momento angolare è

$$L = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

- Le orbite del postulato precedente sono stabili.

- Le diverse orbite sono ad energie diverse. Il salto energetico dipende dalla frequenza dei fotoni emessi tramite

$$E_i - E_f = h\nu$$

Risulta chiaro dal modello di Rutherford, un modello di scattering, l'esistenza di una carica positiva concentrata ed una carica negativa che fornisce la dimensione dell'atomo. Si pone il problema della stabilità dell'elettrone che si trova in continua accelerazione attorno al nucleo. Bisogna creare un modello che spieghi la stabilità degli atomi. Bohr scavalca il problema tramite il secondo ed il terzo postulati.

Osservazione. Si nota che il primo postulato implica l'esistenza del nucleo: si attinge da Rutherford.

Il secondo postulato considera la quantizzazione di un'osservabile: si riprende Planck. La natura nel infinitamente piccolo mostra una quantizzazione di osservabili fisiche [r]

Il terzo postulato è quello di stabilità.

Il quarto postulato richiama Einstein tramite l'effetto fotoelettrico e la quantizzazione del campo elettromagnetico.

Si costruisce il modello predittivo. L'elettrone orbita attorno al nucleo. Si scrive la dinamica $F = ma$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

dove si considerano atomi idrogenoidi: atomi a cui si è sottratto un solo elettrone. Tramite il secondo postulato si ha

$$L = mvr \frac{v}{v} \sim E \frac{r}{v} \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{Et}{2\pi} = \frac{h}{2\pi} \equiv \hbar$$

dove t è il tempo, e l'unità fondamentale dell'azione è $Et = h$. Pertanto

$$L = n\hbar = mvr \implies v = \frac{n\hbar}{mr}$$

Dunque, dalle due espressioni si ottiene

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = m \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r^2} \implies r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m} \frac{n^2}{Z} = r_0 \frac{n^2}{Z}$$

dove $r_0 = 0.529 \times 10^{-10}$ m è detto raggio di Bohr ed è dell'ordine delle dimensioni atomiche. I raggi r_n sono i raggi delle orbite in funzione del numero quantico n .

Si studiano le velocità

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} = \frac{n\hbar Z}{mr_0 n^2} = \frac{\hbar}{mr_0} \frac{Z}{n} = \frac{\hbar}{m} \frac{e^2 m}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{Z}{n} \frac{c}{c} = \alpha c \frac{Z}{n}$$

dove $\alpha \approx \frac{1}{137}$ è la costante di struttura fine. Pertanto, $v \approx 1\%c$ e ciò giustifica la trattazione non relativistica dell'atomo di Bohr. [r] La velocità dell'ordine più basso ($n = 1$) è

$$v_0 = \frac{\hbar}{mr_0} \implies r_0 = \frac{\hbar}{mv_0} = \frac{\hbar}{m\alpha c}$$

La costante di Planck tagliata è analoga ad un momento angolare mvr e quindi dividendola per una massa ed una velocità si ottiene un raggio.

Si studiano le energie delle diverse orbite. L'energia totale è

$$E_{\text{tot}} = U + K, \quad U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

Inoltre, dall'equazione della dinamica, moltiplicando per $\frac{1}{2}$ si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{1}{2} m \frac{v^2}{r} \iff K = \frac{1}{2}|U|$$

Pertanto

$$E_{\text{tot}} = U + \frac{1}{2}|U| = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

Si sostituisce ad r l'espressione di r_n per ottenere

$$E_{\text{tot}} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r_0 n^2} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}$$

Per ricordarsi più semplicemente le espressioni si ha un modo più intuitivo. Si osserva che l'energia totale è

$$E_{\text{tot}} = -\frac{1}{2}|U| = -K = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \frac{Z^2}{n^2}$$

Le grandezze fin'ora calcolate sono

- La costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

Essa non è costante con l'energia $[r]$.

- Raggio di Bohr e raggi orbitali

$$r_0 = \frac{\hbar}{m\alpha c}, \quad r_n = r_0 \frac{n^2}{Z}$$

- Le velocità orbitali

$$v_n = \alpha c \frac{Z}{n}$$

- L'energia totale di un elettrone

$$E_n = -\frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

A questo punto si possono scrivere le energie totali in funzione del numero quantico n per l'idrogeno $Z = 1$:

$$E_1 = -13.6 \text{ eV}, \quad E_2 = -3.39 \text{ eV}, \quad E_3 = -1.51 \text{ eV}, \quad E_4 = -0.85 \text{ eV}$$

Le energia si avvicinano sempre di più allo zero. Per il quarto postulato, si associa ad ogni salto energetico una frequenza del possibile fotone emesso. Pertanto

$$E_i - E_f = h\nu \iff \nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{c}{\lambda}$$

Da cui segue

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc} \left(-\frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \left[\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right] \right) = \frac{m(\alpha c)^2}{2hc} \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$$

Si ritrova la relazione descritta da Rydberg che descrive le lunghezze d'onda nei vari livelli energetici. Quindi, si può esprimere la costante di Rydberg in termini di costanti fondamentali. L'espressione generale considera anche una carica nucleare $Z \neq 1$ da cui la relazione di Rydberg diventa

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) Z^2$$

Il predice ∞ si riferisce al caso in cui il nucleo abbia massa infinita e quindi il sistema elettrone-nucleo è ridotto alla considerazione della sola massa dell'elettrone e non della massa ridotta del sistema $[r]$. Dunque, la costante di Rydberg è

$$R_\infty = \frac{mc^2\alpha^2}{2hc} = 1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Il quarto postulato non afferma nulla sullo stato iniziale e finale. Tutte le transizioni tra i livelli energetici sono possibili. I vari salti, in base al livello energetico di arrivo, costituiscono una serie spettrale.

Si introduce la massa finita del nucleo e si studia come cambiano le formule ricavate. Si considera l'atomo fermo: il momento lineare totale è nullo

$$\vec{p}_{\text{tot}} = 0 \iff \vec{p}_{\text{nuc}} + \vec{p}_{\text{elettr}} = 0 \implies |\vec{p}_{\text{nuc}}| = |\vec{p}_{\text{elettr}}| = p$$

L'energia cinetica è data da

$$K = \frac{p_N^2}{2M} + \frac{p_e^2}{2m} = \frac{1}{2}p^2 \frac{M+m}{Mm} = \frac{p^2}{2\mu}, \quad \mu = \frac{mM}{M+m} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}$$

dove μ è la massa ridotta. Per quanto trovato, basta utilizzare la massa ridotta

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu(\alpha c)^2 \frac{Z^2}{n^2}$$

Dunque, la costante di Rydberg diventa

$$R_\mu = \frac{\mu(\alpha c)^2}{2hc} = \frac{m(\alpha c)^2}{2hc} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = R_\infty \left[1 - \frac{m}{M} + o\left(\frac{m}{M}\right) \right], \quad \frac{m}{M} \rightarrow 0$$

Esempio. Si vedono alcuni valori per gli atomi di idrogeno e di elio. Per l'idrogeno si ha

$$R_H \approx R_\infty \left(1 - \frac{1}{1836} \right) = 1.0968 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Per l'elio si ha

$$R_{\text{He}} \approx R_\infty \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 1836} \right) = 1.0972 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

L'approssimazione diventa migliore per atomi più pesanti.

Serie di transizione. Dall'espressione dei livelli energetici si possono costruire delle varie serie di transizione per l'atomo di idrogeno, $Z = 1$.

- Serie di Lyman, $n_f = 1$. Si ha

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(1 - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i = 1, 2, 3, \dots$$

Quando il numero quantico iniziale tende ad infinito si ha una lunghezza d'onda $\lambda \rightarrow 912 \text{ \AA}$ che si trova nell'ultravioletto.

- Serie di Balmer, $n_f = 2$. Si ha

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i = 3, 4, 5, \dots, \quad \lambda \rightarrow 3647 \text{ \AA} \quad \text{nel visibile}$$

- Serie di Paschen, $n_f = 3$. Si ha

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i = 4, 5, 6, \dots, \quad \lambda \rightarrow 8206 \text{ \AA} \quad \text{nell'infrarosso}$$

La costante di Rydberg va anche particolareggiata per i diversi isotopi di un atomo. Per il deuterio ed il trizio (due isotopi dell'idrogeno) si ha

$$R_D \approx R_\infty \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 1836} \right) = 1.0970 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$R_T \approx R_\infty \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 1836} \right) = 1.09719 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

[r] Per l'idrogeno si considera la serie di Balmer $n_f = 2$ e per l'elio si considera la serie di Pickering $n_f = 4$. Si studia cosa succede se non si considera la costante di Rydberg particolare per ogni serie. Per l'idrogeno si ha

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

e per l'elio si ha

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n_i^2} \right) 2^2 = R_{\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{n_i^2} \right)$$

Le righe spettrali si corrispondono e sovrappongono perfettamente ogni qual volta che

$$n_{i,H} = \frac{1}{2} n_{i,He}$$

Questo avviene perché non si è considerata la particolare costante di Rydberg. Nella realtà si riescono a distinguere tutte le righe spettrali perché le due costanti sono misurabilmente diverse (tramite uno spettroscopio).

Lecture 15

lun 02 mag
2022 14:30

Esperimento di Frank-Hertz. Un elettrone proiettile ha energia K_0 prima dell'urto con un atomo nel gas. Dopo l'urto, il proiettile perde una quantità discreta di energia fino a giungere all'energia $K_1 = K_0 - \Delta E$, dove ΔE è l'energia che un elettrone con numero quantico $n = 1$ richiede per raggiungere l'orbita nella seconda posizione $n = 2$.

L'apparato è costituito da un filamento che emette elettroni a velocità nulla all'interno di un gas di vapori di mercurio. Tali elettroni sono accelerati da un potenziale fino ad un collettore. Da esso esce una corrente fino ad una batteria che ritarda il voltaggio. [immagini]. Le osservabili sono il potenziale di accelerazione e la corrente generata. Fin quando l'energia del proiettile è minore di quella necessaria al salto orbitale dell'elettrone, allora si vede semplicemente un aumento di corrente (rispetto l'aumento di potenziale d'accelerazione). Ad un certo punto, quando si arriva ad una differenza potenziale tale per cui i proiettili hanno energia potenziale che permette il salto degli elettroni, allora si vede una diminuzione della corrente fino ad annullarsi. Tale zero si trova a tensione

$$\frac{\Delta E}{e} + V_c?$$

[r] dove V_c è il potenziale ritardante: gli elettroni devono avere abbastanza energia sia per permettere la transizione di un elettrone nell'atomo, ma anche per vincere il potenziale ritardante. Aumentando la tensione, si raggiunge l'energia cinetica necessaria al salto elettronico, prima rispetto alle situazioni precedenti. Questo significa che possono nuovamente guadagnare altra energia cinetica e la situazione è come quella iniziale: raggiungono nuovamente la soglia di energia e si ha un incremento di corrente. Il grafico finale è quello di una sinusoide. Ogni zero è distante l'uno dall'altro di $\frac{\Delta E}{e} + V_c$.

Per atomi di mercurio, lo stato fondamentale si trova a -10.4 eV . [r]

L'esperimento è la conferma della quantizzazione dei livelli atomici. Esso conferma il fatto che il salto energetico genera una fotone con lunghezza d'onda che rispetta la relazione di Einstein. Inoltre, [r] eccitazione collisioni ed elettromagnetica [r].

Esempio. Si consideri dell'idrogeno atomico nel proprio stato fondamentale. Si vogliono calcolare le lunghezze d'onda emesse in seguito a:

- il gas è colpito da elettroni con potenziale $V = 9.6 \text{ V}$, $V = 12.32 \text{ V}$;
- il gas è irraggiato con radiazione elettromagnetica di $\lambda = 1025 \text{ \AA}$, $\lambda = 1127 \text{ \AA}$ e infine $\lambda = 6523 \text{ \AA}$;

Si considera la costante di Rydberg sempre pari a R_∞ .

I livelli energetici dell'atomo di idrogeno sono

$$E_n = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \frac{1}{n^2}$$

I primi due stati hanno energie

$$E_1 = -13.6 \text{ eV}, \quad E_2 = -3.39 \text{ eV}, \quad \Delta E = 10.21 \text{ eV}$$

Per il primo caso, non si ha nessuna emissione: gli elettroni proiettile non hanno abbastanza energia per causare una transizione degli elettroni negli atomi.

Per il secondo caso si calcola anche il terzo livello energetico

$$E_3 = -1.51 \text{ eV}, \quad \Delta E_{13} = 12.09 \text{ eV}$$

Gli elettroni proiettile sono in grado di causare una transizione fino al terzo livello. Si osservano tre righe spettrali: da 3 a 1, da 3 a 2 e da 2 a 1. Inoltre, l'elettrone bersaglio ha più energia di quella richiesta per la transizione massima: il proiettile non necessario che sia in risonanza con la transizione energetica. Per una radiazione elettromagnetica risulta necessario che sia in risonanza.

Si calcolano le lunghezze d'onda tramite la formula di Rydberg

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{12}} &= R_\infty \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) = 1.0974 \times 10^7 \frac{3}{4} \implies \lambda_{21} = 1215 \text{ \AA} \\ \lambda_{31} &= \left[R_\infty \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \right]^{-1} = 1025 \text{ \AA} \\ \lambda_{32} &= \left[R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \right]^{-1} = 6563 \text{ \AA} \end{aligned}$$

A questo punto si studiano gli irraggiamenti elettromagnetici. Per il primo caso, si ha una transizione dal primo livello fino al terzo livello. Pertanto, si vedono le righe di emissione come nel caso precedente.

Per il secondo caso, non si ha un livello energetico che produce tale lunghezza d'onda, dunque non si vede alcuna riga spettrale.

Per il terzo caso, sebbene esiste un salto energetico con tale lunghezza d'onda, esso non avviene dallo stato fondamentale (questo vale perché si hanno atomi solo allo stato fondamentale); pertanto la radiazione non viene assorbita.

Ricordando quanto imparato dalla meccanica statistica, la popolazione ad una certa energia è

$$n_i \sim e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Quindi, si potrebbero avere degli elettroni nel secondo livello agitati dalla vibrazione termica. Pertanto

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}} \approx e^{-300} \approx 0$$

In pratica, non si ha alcun elettrone nel secondo stato dovuto all'agitazione termica. Questo ovviamente dipende dalla temperatura: nelle stelle, tale rapporto non è più trascurabile.

Emissione. Si consideri un atomo inizialmente fermo. Esso emette un fotone. Il fotone ha un momento lineare

$$E = pc = h\nu \implies p = \frac{h\nu}{c}$$

Il fotone ha energia minore rispetto a quello della transizione di fase, perché parte di questa energia è andata in quantità di moto all'atomo. Infatti

$$p_{\text{atomo}} = p_\gamma = \frac{h\nu}{c}$$

Per conservazione dell'energia

$$E_i = E_f + \frac{p_{\text{atomo}}^2}{2M} + h\nu = \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} + h\nu$$

[r] dove M è la massa dell'atomo. Da ciò deriva

$$0 < E_i - E_f = -\Delta E = h\nu \left(1 + \frac{h\nu}{2Mc^2}\right) \implies h\nu = \frac{-\Delta E}{1 + \frac{h\nu}{2Mc^2}} \approx -\Delta E \left(1 - \frac{h\nu}{2Mc^2}\right)$$

in quanto $h\nu \ll Mc^2$. Dunque si ottiene

$$h\nu \left(1 + \frac{|\Delta E|}{2Mc^2}\right) = |\Delta E| \implies h\nu = \frac{|\Delta E|}{1 + \frac{|\Delta E|}{2Mc^2}} \approx |\Delta E| \left(1 - \frac{|\Delta E|}{2Mc^2}\right)$$

[r] segni. L'energia del fotone è più piccola dell'energia della transizione.

Assorbimento. Si consideri un atomo inizialmente fermo. Esso assorbe un fotone. Per conservare la quantità di moto, l'atomo si mette in moto. Ci si aspetta che il fotone abbia un'energia maggiore rispetto a quella richiesta per la transizione perché deve mettere in moto l'atomo.

Pertanto

$$p_\gamma = p_{\text{atomo}} = \frac{h\nu}{c}$$

Per conservazione dell'energia si ha

$$E_i + h\nu = E_f + \frac{p_{\text{atomo}}^2}{2M}$$

Come precedentemente

$$0 < E_f - E_i = \Delta E = h\nu - \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} = h\nu \left(1 - \frac{h\nu}{2Mc^2}\right)$$

Pertanto

$$h\nu = \frac{\Delta E}{1 - \frac{h\nu}{2Mc^2}} \approx \Delta E \left(1 + \frac{h\nu}{2Mc^2}\right) = \Delta E + \frac{\Delta E h\nu}{2Mc^2}$$

Da cui

$$\Delta E = h\nu \left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right) \implies h\nu = \frac{\Delta E}{1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}} \approx \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$$

Pertanto

$$h\nu = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$$

[r] La differenza di energia tra l'assorbimento e l'emissione è

$$\frac{(\Delta E)^2}{Mc^2}$$

Per il mercurio, tale differenza è

$$\frac{(\Delta E)^2}{Mc^2} \sim 10^{-11} \text{ eV}$$

[r] L'allargamento in frequenza per effetto termico, doppler è

$$\frac{\Delta\nu_{\text{termico}}}{\nu} = \sqrt{\frac{2 \ln 2 k_B T}{Mc^2}} \frac{h}{h}$$

Da cui l'allargamento in energia è

$$\Delta E_{\text{termico}} = E \sqrt{\frac{2 \ln 2 k_B T}{Mc^2}} = \sqrt{\frac{E^2}{Mc^2} 2 \ln 2 k_B T} \approx 10^{-4} \text{ eV}$$

Dunque, avviene emissione ed assorbimento risonante perché l'allargamento per effetto doppler è molto maggiore della differenza di energia dovuta al rinculo dell'atomo. Oltre all'allargamento spettrale, i livelli energetici hanno una larghezza intrinseca che permette l'emissione e l'assorbimento risonante a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Esempio. Si studia la transizione tra due livelli energetici consecutivi per numeri quantici grandi. Dunque

$$E_{n \rightarrow n-1} = \frac{1}{2} m(\alpha c)^2 Z^2 \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{2} m(\alpha c)^2 Z^2 \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \sim \frac{m(\alpha c)^2}{n^3} Z^2, \quad n \rightarrow \infty$$

La frequenza di rivoluzione calcolata secondo la meccanica classica è

$$\nu_{\text{riv}} = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \alpha c \frac{Z}{n} \frac{1}{2\pi} \frac{Z}{r_0 n^2} = \alpha c \frac{Z^2}{n^3} \frac{1}{2\pi \frac{\hbar}{m\alpha c}} = m(\alpha c)^2 \frac{Z^2}{n^3 \hbar}$$

da cui l'energia di rivoluzione è

$$E_{\text{riv}} = \nu_{\text{riv}} \hbar = \frac{m(\alpha c)^2}{n^3} Z^2$$

Questa espressione è identica a quella trovata precedentemente. Il modello di Bohr (meccanica quantistica) si raccorda con la meccanica classica per grandi numeri quantici: questo è il principio di corrispondenza.

Lecture 16

mar 03 mag
2022 15:30

Il modello di Bohr predice correttamente le linee spettrali degli atomi idrogenoidi. Tuttavia, tramite misure più raffinate delle righe spettrali, si hanno dei problemi. Osservando la serie di Balmer, in particolare la transizione da $n = 3$ ad $n = 2$, detta $H\alpha$, e la transizione da $n = 4$ ad $n = 2$, detta $H\beta$, si nota che si hanno due righe spettrali la cui distanza è

$$\Delta \frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} = 3.6 \text{ m}^{-1}$$

Dalla teoria di Bohr si calcola

$$\frac{1}{\lambda_{H\alpha}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \approx 0.139 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \frac{1}{\lambda_{H\beta}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \approx 0.188 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

La distanza teorica tra $H\alpha$ e $H\beta$ è minore di quanto misurato. [r] Dunque, non si ha solamente un livello energetico per $n = 2$, cioè si ha una struttura fine. [r]

Si estende il modello di Bohr (andando così a studiare la meccanica quantistica pre-Schrödinger) e si studiano le cause della struttura fine:

- gli effetti relativistici;
- l'interazione spin-orbita: tra il momento magnetico dell'elettrone ed il campo magnetico dell'orbitale B_{orb} [r];
- l'interazione tra il momento magnetico orbitale ed un campo magnetico esterno B_{ext} , cioè l'effetto Zeeman.

7.4 Modello di Wilson-Sommerfeld

Tale modello viene sviluppato nel 1916. Si formula una regola generale di quantizzazione delle osservabili

$$\oint P_q dq = nh$$

Dove q è una coordinata generalizzata periodica (intesa nel senso di Meccanica Classica/Razionale), mentre P_q è il suo momento coniugato. Nello spazio delle fasi Pq , la coordinata q varia tra due estremi perché periodica; mentre, la coordinata P varia anch'essa tra due estremi perché funzione di q . Dunque, si disegna una curva. La regola di quantizzazione equivale al fatto che l'area di tale figura è quantizzata. [r]

Il prodotto

$$[Pq] = [Ftx] = J \cdot s \sim [h]$$

è l'azione, dove F è la forza, t il tempo, ed x la lunghezza.

Oscillatore armonico. L'energia meccanica totale è

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \implies \frac{P^2}{2mE} + \frac{x^2}{2\frac{E}{k}} = 1 \leftrightarrow \frac{P^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

essa è l'equazione di un'ellisse nello spazio delle fasi. Dunque, per la regola di quantizzazione, l'area dell'ellisse dev'essere un multiplo intero di h :

$$nh \equiv \oint P dq = \pi ab = \pi \sqrt{2\frac{E}{k}} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi E}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi E}{2\pi\nu} = \frac{E}{\nu} \implies E = nh\nu$$

ricordando che per un oscillatore armonico vale $2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Si riottiene la relazione di Planck [r].

Moto circolare. Si consideri una circonferenza su cui è vincolato un punto a muoversi. Si ha

$$nh \equiv \oint P dl = \oint mvr d\theta = L \oint d\theta \implies L = nh$$

cioè si ottiene Bohr. [r] In questo caso la particella non si muove avanti e indietro.

Particella in una scatola in una dimensione. Si consideri una particella confinata a muoversi in una scatola in una dimensione. Dunque

$$nh \equiv \oint P dx = \int_0^l P dx + \int_l^0 -P dx = mvl + mvl \implies p = mv = \frac{nh}{2l}$$

dove p è la quantità di moto. In questo caso la particella si muove avanti e indietro. L'energia della particella è

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{h^2}{8ml^2} n^2$$

Si calcola la differenza di energia tra due stati consecutivi

$$\Delta E_{n-(n-1)} = \frac{h^2}{8ml^2} [n^2 - (n-1)^2] = \frac{h^2}{8ml^2} (2n-1) \sim \frac{h^2}{8ml^2} 2n, \quad n \rightarrow \infty$$

Si sta arrivando ad un'altra formazione del principio di corrispondenza. Infatti

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h^2}{8ml^2} 2n \left(\frac{h^2}{8ml^2} n^2 \right)^{-1} \sim \frac{2}{n}, \quad n \rightarrow \infty$$

Per n grande, si tende ad un continuo di energie cinetiche: questo è quanto succede in meccanica classica, si ritrova il principio di corrispondenza.

Particella in una scatola in tre dimensioni. Si studia il caso tridimensionale in cui si osserva la degenerazione dei livelli energetici. Per ogni componente spaziale si ha

$$\oint P_i dx_i = n_i h, \quad p_i = \frac{h}{2l} n_i$$

Pertanto, l'energia è

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{1}{2m} [P_x^2 + P_y^2 + P_z^2] = \frac{h^2}{8ml^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Si può raggiungere lo stesso livello energetico in modi diversi (il cui numero di modi è associato alla probabilità di tale livello energetico): questa è la degenerazione dei livelli energetici. Posto $E_0 \equiv \frac{h^2}{8ml^2}$ si ha

Table 1: Livelli energetici		
E	Combinazione	Degenerazione
$3E_0$	(1,1,1)	1
$6E_0$	(2,1,1)(1,2,1)(1,1,2)	3
$9E_0$	(2,2,1)(1,2,2)(2,1,2)	3
$11E_0$	(3,1,1)(1,3,1)(1,1,3)	3
$12E_0$	(2,2,2)	1
$14E_0$	(1,2,3)(1,3,2)(3,2,1)(2,3,1)(2,1,3)(3,1,2)	6

[r] Si scrive ??? di Boltzmann

$$Z = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = e^{-\frac{3E_0}{k_B T}} + 3e^{-\frac{6E_0}{k_B T}} + 3e^{-\frac{9E_0}{k_B T}} + 3e^{-\frac{11E_0}{k_B T}} + e^{-\frac{12E_0}{k_B T}} + 6e^{-\frac{14E_0}{k_B T}} + \dots$$

Orbite ellittiche. [r] Si consideri un'orbita ellittica. La velocità di un punto su tale orbita si può scomporre in velocità radiale e velocità tangenziale. L'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)$$

I momenti coniugati sono

$$(P_r, P_\theta) = (m\dot{r}, mr^2\dot{\theta})$$

Si applica la regola di quantizzazione

$$\oint P_\theta d\theta = n_\theta h \implies L = n_\theta \hbar, \quad \oint P_r dr = n_r h \implies L \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r \hbar$$

dove a e b sono gli assi principali dell'ellisse (non i semi-assi): rispettivamente l'asse minore e l'asse maggiore. Pertanto

$$n_\theta \hbar \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r \hbar \implies \frac{a}{b} = \frac{n_r}{n_\theta} + 1 = \frac{n_r + n_\theta}{n_\theta}$$

Posto $n \equiv n_r + n_\theta$ si ha

$$\frac{b}{a} = \frac{n_\theta}{n}, \quad 1 \leq n_\theta \leq n_r$$

il numero quantico n_θ parte da 1 perché se partisse da zero, allora la particella (l'elettrone), nella propria orbita, passerebbe per il nucleo: l'orbita diventerebbe una retta.

La quantità n è il numero quantico principale. La quantità n_θ è il numero quantico azimutale. Quindi,

- per $n = 1$ si ha $n_\theta = 1$ e si ha un'orbita circolare $\frac{b}{a} = 1$;
- per $n = 2$ si può avere $n_\theta = 2$, quindi un'orbita circolare più grande di quella precedente; oppure si può avere $n_\theta = 1$, quindi un'orbita ellittica;
- per $n = 3$ si può avere $n_\theta = 3$, quindi un'orbita circolare; oppure $n_\theta = 2$ un'orbita ellittica; oppure $n_\theta = 1$ si ha un'orbita ancora più ellittica.

Si ha una degenerazione: i livelli energetici dipendono solo dal numero quantico principale

$$E_n = -\frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \frac{Z^2}{n^2}$$

Tuttavia, considerando anche la relatività ristretta, si elimina la degenerazione e si ottiene la separazione fine che implica la struttura fine:

$$E_{n,n_\theta} = -\frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \frac{Z^2}{n^2} \left[1 + \alpha^2 \frac{Z^2}{n} \left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

Le orbite circolari sono molto distanti dal nucleo: non è necessario considerare la correzione relativistica. Per le orbite ellittiche, in particolari quelle fortemente ellittiche, vicino al nucleo, l'elettrone ha velocità importanti per cui la correzione relativistica non è trascurabile.

Si vede la regola di selezione per le transizioni ottiche: per le transizioni tra livelli per cui si ha assorbimento o emissione di un fotone, i livelli energetici degli elettroni emittenti possono cambiare al più secondo $\Delta n_\theta = \pm 1$. L'unità deriva dalla conservazione del momento angolare in quanto il fotone ha spin intero. [r] Questo significa che un elettrone può passare da $n = 3$ a $n = 2$ solamente cambiando $n_\theta = 3 \rightarrow 2$, $n_\theta = 2 \rightarrow 1$ e $n_\theta = 1 \rightarrow 2$. Le prime due transizioni si hanno per livelli n_θ che si discostano con quasi la stessa differenza di energia e quindi emettono un fotone con quasi la stessa frequenza. [r]

Si consideri un'orbita perpendicolare all'asse z . Il momento angolare è $L = n_\theta \hbar$. La proiezione sull'asse z è $L_z = m \hbar$. La quantità m è il numero quantico magnetico: tipicamente si fa coincidere l'asse z con la direzione del campo magnetico (esterno oppure orbitale).

Il modello di Sommerfeld è un modello che prevede ancora delle orbite classiche orientate nello spazio: si ha un elettrone che ruota intorno al nucleo. Tale idea viene abbandonata da Schrödinger perché la descrizione più coerente è data tramite le teorie dei campi: una particella è descritta tramite un campo, una funzione dello spazio. Tale funzione descrive la probabilità di trovare una particella nello spazio. Si perde la descrizione piatta introducendo la densità di probabilità tridimensionale di trovare una particella.

Si vedono altre critiche al modello di Bohr e Sommerfeld.

- Esso introduce le transizioni tra livelli energetici, ma non si conosce con quale probabilità esse possono avvenire.
- Tale modello vale solamente per atomi idrogenoidi: tutti gli elettroni sono rimossi tranne uno. In questa categoria possono rientrare anche i metalli alcalini, i metalli nel primo gruppo della tavola periodica.
- Si basa su postulati poco intuitivi, poi rimossi con le teorie dei campi.

Ci si concentra sulla rotazione dell'elettrone attorno al nucleo: tale fenomeno si può vedere come una corrente da cui calcolare un momento magnetico. In base all'orientazione rispetto al campo esterno, si hanno diverse energie permesse.

Lecture 17

I numeri quantici visti sono

- principale, $n = 1, 2, 3, \dots$;

lun 09 mag
2022 14:30

- azimutale, descrive l'eccentricità dell'orbita (maggiore il valore, maggiore l'eccentricità), $1 \leq n_\theta = l \leq n$;
- magnetico, $-n_\theta \leq m \leq n_\theta$, cioè la proiezione del momento angolare sull'asse z , cioè l'asse identificato dal campo magnetico esterno.

Si studiano le altre due cause della struttura fine:

- l'interazione tra il momento magnetico orbitale ed un campo magnetico esterno B_{ext} , cioè l'effetto Zeeman.
- l'interazione spin-orbita: tra il momento magnetico dell'elettrone ed il campo magnetico dell'orbitale B_{orb} [r];

Effetto Zeeman. Un elettrone, girando attorno al nucleo, produce una corrente

$$i = \frac{e}{T} = e \frac{v}{2\pi r}$$

da cui, considerando l'area dell'orbita pari a $A = \pi r^2$, si ha un momento magnetico

$$\vec{\mu} = iA = \frac{1}{2} e v r \frac{m_e}{m_e} \hat{u}_\mu = \frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

dove L è il momento angolare e si definisce il rapporto giromagnetico

$$\frac{\mu}{L} = \frac{e}{2m_e}$$

Nella teoria qui formulata, il momento angolare è quantizzato in unità di costante di Planck:

$$\mu = \frac{e}{2m} n \hbar = \frac{e\hbar}{2m} n = \mu_B n = g \frac{\mu_B}{\hbar} L$$

dove $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$ è detto magnetone di Bohr e g è il fattore giromagnetico che non è sempre pari all'unità: per l'elettrone esso è 2, cioè è un fattore giromagnetico anomalo.

A seconda di come il momento magnetico è orientato rispetto al campo magnetico esterno, si hanno energie diverse:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

che è identica all'espressione di una spira in cui fluisce corrente immersa in un campo magnetico.

Dinamica di una spira in un campo magnetico. Si consideri una spira con momento magnetico ad un angolo rispetto al campo magnetico esterno. La spira è soggetta ad un momento torcente pari a

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = d_t \vec{L}$$

Si osserva che $\mu \parallel \vec{L}$ e dunque $\vec{L} \perp d_t \vec{L}$ in quanto la derivata è il prodotto vettore con $\vec{\mu}$. Inoltre

$$d_t |\vec{L}|^2 = d_t (\vec{L} \cdot \vec{L}) = 2\vec{L} \cdot d_t \vec{L} = 0 \implies |\vec{L}| = \text{cost}$$

[r] Pertanto, il momento angolare cambia direzione, ma non il proprio modulo: si ha un modo di precessione del momento angolare [immagine]. Dunque

$$d_t L = \frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{2\pi L \sin \theta}{T} = \mu B \sin \theta$$

da cui la pulsazione con cui il momento angolare precede attorno al vettore del campo magnetico è

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\mu B}{L} = \frac{\mu_B L B}{\hbar L} \Big|_{B=1 \text{ T}} \approx 90 \text{ GHz} \implies \nu \approx 14 \text{ GHz}$$

ed è detta pulsazione di Larmor.

Si ricava l'espressione per il momento torcente. Si consideri una spira quadrata in cui la corrente scorre in senso antiorario. Si ponga tale spira inclinata di un angolo θ rispetto al campo magnetico verso solo una coppia di lati opposti [immagine]. Dunque si ha

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_l = r q v B \sin \theta = q v r \frac{2\pi r}{2\pi r} B \sin \theta = i A B \sin \theta = \mu B \sin \theta = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

[r]

Continuo effetto Zeeman. Si studiano le diverse energie prodotte dalle diverse orientazioni dell'orbita rispetto al campo magnetico esterno. Quindi

$$E = -\vec{\mu} \times \vec{B}_{\text{ext}} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} B L_z = -g \mu_B B m$$

si ricorda che \vec{B}_{ext} individua l'asse z e vale $L_z = m\hbar$.

Considerato $l = n_\theta = 2$, per $B_{\text{ext}} = 0$ si ha una sola energia, mentre con un campo magnetico esterno non nullo, compaiono cinque livelli $m = -2, -1, 0, 1, 2$ (si ricorda che $-l \leq m \leq l$). Si nota che la distanza tra i livelli dipende solamente da m ed è dunque indipendente da l . Tale distanza è $|g\mu_B B|$. Similmente, per $l = 1$ si hanno tre livelli quando il campo magnetico esterno non è nullo.

Regole di selezione per transizioni ottiche. Si è già detto che le transizioni ottiche (cioè transizione tramite assorbimento, emissione di fotoni) non possono avvenire tra qualunque livello, ma solo per $\Delta l = \pm 1$. Inoltre, bisogna anche aggiungere la regola $\Delta m = 0, \pm 1$. Queste regole vengono motivate in maniera formale in meccanica quantistica.

Di conseguenza il numero righe effettive (cioè distanze energetiche diverse) che si hanno quando si transisce sono solamente tre (anche se il numero di righe totali è nove, ma si sovrappongono a tre a tre):

$$\Delta E_m = 0, \pm g\mu_B B$$

tali tre righe sono le stesse dell'effetto Zeeman spiegato tramite il modello di Lorentz? [r] usato in precedenza.

Quindi la differenza di energia per un campo magnetico $B = 1 \text{ T}$ è [r]

$$\Delta E = g\mu_B B = 5.8 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

In precedenza si è trovata una pulsazione di rivoluzione che, se moltiplicata per \hbar , permette di ottenere un'ordine di grandezza pari a quanto appena qua riportato

$$\omega_{\text{riv}} \hbar = 2\pi \nu_{\text{riv}} \frac{\hbar}{2\pi} = \hbar \nu_{\text{riv}} = E_{\text{riv}} = \frac{m(\alpha c)^2}{n^3} Z^2$$

Esperimento di Stern-Gerlach. Degli atomi di argento ad una temperatura T si muovono in una zona in cui è presente un campo magnetico B non uniforme. Gli atomi con momento magnetico vengono deviati dalla loro traiettoria. Alla fine del percorso è posto un rivelatore. Il campo magnetico è realizzato tramite un traferro i cui poli hanno dimensioni differenti.

Per un campo scalare conservativo si ha

$$\vec{F} = -\nabla U = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$$

[r] Da cui

$$F_z = \mu_z \partial_z B, \quad \mu_z = g \frac{\mu_B}{\hbar} L_z = g \mu_B m$$

dove μ_z è la proiezione del momento magnetico sull'asse z . Gli atomi di argento sono in stato aeriforme e dalla teoria cinetica la loro velocità media è

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{4k_B T}{M}}$$

Da cui si ha

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \left(\frac{x}{v} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \frac{x^2 M}{4k_B T} = \frac{x^2}{8k_B T} \mu_z \partial_z B$$

dove x è la regione in cui si trova il campo magnetico. Classicamente, dall'esperimento ci si aspetta di trovare sul rivelatore una zona d'impatto continua, tuttavia si osservano solamente due zone d'impatto: una superiore ed una inferiore simili ad archi di circonferenze. [r]
Riscrivendo la coordinata si ha

$$z = \frac{x^2}{8k_B T} \partial_z B g \frac{\mu_B}{\hbar} L_z = \frac{x^2}{8k_B T} \partial_z B g \mu_B m$$

da cui ci si aspetta un numero dispari di zone. [r] La spiegazione è data da Uhlenbeck e Goudsmith nel 1925: la quantità di valori diversi di momento magnetico dell'elettrone è pari a

$$\# \{m_z\} = 2l + 1$$

dall'esperimento si osserva

$$2 = 2l' + 1 \implies l' = \frac{1}{2}$$

dunque il momento [r]

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

L'esperimento è stato ripetuto da Phipps e Taylor con atomi di idrogeno allo stato fondamentale $n = 1$: si è trovato lo stesso risultato.

Dunque

- si è scoperta la quantizzazione del momento magnetico, del momento angolare.
- Si osserva che l'elettrone ha un momento angolare intrinseco detto spin pari a mezza unità di \hbar . Dunque conoscendo

$$z = \frac{x^2}{8k_B T} \partial_z B g \mu_B m$$

si può ottenere

$$gm_e = \frac{z}{x^2} \frac{8k_B T}{\partial_z B \mu_B} = \pm 1 \implies g = 2$$

in quanto $m_e = \frac{1}{2}$, cioè per l'elettrone la costante geomagnetica è anomala.

- Si evidenziano stati dell'elettrone a momento angolare nullo, questa cosa è discorde da quanto predetto da Wilson e Sommerfeld che prevedeva un momento angolare unitario. [r]
Il momento magnetico su z è

$$\mu_{z_e} = g_e \frac{\mu_B}{\hbar} S_z$$

nel sistema di riferimento dell'elettrone, il nucleo ruota attorno ad esso e, essendo carico, genera un campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{2\pi}{r} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{Ze}{T} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{Zev}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze}{r^2} v \frac{\mu r}{\mu r}$$

dove μ è la massa ridotta. Quindi il campo magnetico è

$$\vec{B}_{\text{orb}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze}{\mu r^3} \vec{L}$$

[r]

Lecture 18

mar 10 mag
2022 15:30

L'evidenza sperimentale suggerisce che l'elettrone presenta due valori di proiezione del momento angolare sull'asse z :

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

Dunque, il momento magnetico dell'elettrone è

$$\vec{\mu}_e = g_e \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

[r] L'energia di un elettrone [r] è

$$E = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B} = -g_e \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze}{r^3} \vec{S} \cdot \vec{L} = \pm a \frac{1}{2} \hbar L$$

Dunque un livello energetico l è diviso in due anche in assenza di campo magnetico esterno.

Pertanto, i tre contributi ai livelli energetici che causano la struttura fine degli atomi idrogenoidi sono:

- gli effetti relativistici modellizzati
 - ◊ dall'introduzione del numero quantico azimutale $n_\theta = l$ e dall'introduzione delle orbite ellittiche;
 - ◊ dall'uso della relatività ristretta.
- L'interazione tra lo spin e l'orbita dell'elettrone. L'elettrone ha spin $S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$ [r]. La differenza di energia è $\Delta E_{SO} = a \vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} a \hbar L$.
- L'effetto Zeeman. La differenza di energia è $\Delta E = g \mu_B B$. Si è introdotto il numero quantico del momento magnetico. Questo numero è servito anche nel punto precedente.

8 Raggi X

Si studia la parte di radiazione elettromagnetica più energetica rispetto a quanto studiato finora: essi spandono un intervallo da qualche centinaio a qualche centinaia di migliaia di elettronvolt [r].

Questo tipo di radiazione è stato studiato da Röntgen nel 1895. Il suo apparato sperimentale è costituito da due elettrodi nel vuoto che ricordano l'apparato di Thomson. Dal catodo partono degli elettroni che impattano sull'anodo. L'intervallo di tensioni è 10 kV–100 kV. Nel 1901 riceve il premio Nobel, sebbene non riesce a discernere la natura di tali raggi, per questo chiamati X perché sconosciuti.

Egli osserva

- quasi tutte le sostanze sono trasparenti ai raggi X; al più si notano delle attenuazioni maggiori per alti numeri atomici Z .
- Diverse sostanze diventano fluorescenti (luminescenti?).
- Le lastre fotografiche vengono impressionate.
- Non è facile produrre riflessione o rifrazione.
- Non sono deflessi da campi magnetici.
- Ionizzano i composti aeriformi, gas.
- Sono prodotti tramite l'impatto di elettroni ad alta energia con un bersaglio.

Sembra che data la dipendenza da Z , i raggi X interagiscono con la nube elettronica. Tali raggi hanno una lunghezza d'onda piccola in modo che possano interagire con gli elettroni più interni. Da quest'osservazione si costruisce un modello per la sezione d'urto. [r]
Sono raggi neutri. Inoltre, il metodo di produzione permette di studiare una parte dello spettro elettromagnetico.

Tubo di Coolidge. Si introduce il tubo di Coolidge. Degli elettroni sono emessi per effetto termoionico e vengono accelerati verso un anodo da cui si emettono raggi X.
La ionizzazione di un gas permette di misurare l'intensità dei raggi X tramite una camera a ionizzazione.

Esperimento di Lave-Friedrich-Knipping. In quanto non è facile ottenere riflessione e rifrazione, bisogna trovare un oggetto con la stessa lunghezza d'onda dei raggi X così da eseguire esperimenti sulla loro natura ondulatoria. Si utilizzano dei cristalli.
Nel 1912 si utilizza un cristallo in trasmissione, cioè posto tra i raggi X ed uno schermo fotosensibile. Essi osservano uno schema periodico. L'unico modo per avere tale risultato è che la radiazione incidente sia un'onda (neutra). Dunque i raggi X sono onde elettromagnetiche.

Esperimento di Bragg. Egli utilizza un cristallo in riflessione. Si studia l'interferenza tra due raggi riflessi dallo stesso strato. [immagine] I raggi X impattano contro un primo strato di cristalli. Due raggi paralleli impattano con un angolo θ_i e vengono riflessi con angolo θ_r . Si studia la differenza di cammino ottico affinché si ottenga interferenza costruttiva. Dunque

$$\Delta\phi_{12} = n2\pi = k\Delta x_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (P \cos \theta_i - P \cos \theta_r) \implies n\lambda = P(\cos \theta_i - \cos \theta_r)$$

dove P è il passo tra due atomi.

Ora si studia l'interferenza tra raggi che riflettono da strati diversi. [immagine] Sia d la distanza tra uno strato e l'altro. La differenza di fase per avere interferenza costruttiva è

$$\Delta\phi_{12} = m2\pi = k\Delta x_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (d \sin \theta_i + d \sin \theta_r) \implies m\lambda = d(\sin \theta_i + \sin \theta_r)$$

Si impone la condizione $\theta_i = \theta_r = \theta$ per cui si ottiene la legge di Bragg

$$m\lambda = 2d \sin \theta$$

In questo modo si può costruire uno spettrometro per raggi X.

Spettrometro per raggi X. Da un tubo di Coolidge vengono generati raggi X che sono collimati fino ad impattare su di un cristallo che riflette i raggi ad un rivelatore, cioè una camera a ionizzazione. Si ruota il cristallo. Quindi pure il rivelatore si deve muovere perché si mantiene sempre $\theta_i = \theta_r = \theta$. Dalla legge di Bragg, variando θ si può ottenere λ (fissato m).

Lo spettro riportato sul grafico intensità-lunghezza d'onda risulta avere la forma di una campana con due piccoli picchi sul lato discendente [immagine]. Esiste una lunghezza d'onda minima. Si ha una componente continua ed una componente discreta.

La componente continua è indipendente dal materiale dell'anodo utilizzato nel tubo di Coolidge. [r] Si ha una radiazione di frenamento, "Bremsstrahlung": un'elettrone che entra tra gli atomi dell'anodo è frenato da tali atomi e dunque esso emette dei fotoni a seconda del percorso perché perde energia. Non c'è ragione per cui tale fenomeno avvenga in modo discreto.

Inoltre si ha una lunghezza d'onda minima che è la lunghezza d'onda per la quale l'elettrone emette tutta la propria energia cinetica sotto forma di radiazione elettromagnetica

$$E = eV = h \frac{c}{\lambda_{\min}} \implies \lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = 12400 \text{ V m} \cdot \frac{1}{V}$$

Questa è la legge di Duane-Hunt.

Esperienza di Mosley. Nel 1913, Mosley studia la relazione tra la frequenza ed il numero atomico

$$\sqrt{\nu_{K\alpha}} = A(Z - 1)\sqrt{H_Z}$$

Le righe K sono tutte le transizione $n \rightarrow 1$. Il pedice α indica la transizione $n = 2 \rightarrow 1$. Le righe L sono le transizioni $n \rightarrow 2$. Poi M e così via.

Il grafico numero atomico-radice frequenza è costituito da rette in base alle righe spettrali. La formula utilizzata è

$$\sqrt{\nu_{L,M}} = A_{L,M}(Z - \sigma_{L,M})$$

[r] inversione

I raggi X sono un mezzo per comprendere quali sono gli elementi presenti nell'anodo. Si utilizzano i raggi X perché entrano in profondità negli atomi: in un solido i livelli elettronici profondi non risentono dei legami chimici e dunque costituiscono una impronta degli atomi di cui fanno parte [r].

Un elettrone proiettile colpisce un elettrone in profondità $n = 1$ rimuovendolo dalla sua orbita e si genera una cascata di elettroni più energetici che occupano il posto libero sottostante. L'energia irradiata per la transizione $2 \rightarrow 1$ è

$$h\nu = \Delta E_{21} = \frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right] Z^2$$

Questo vale per atomi idrogenoidi. Tuttavia, quelli utilizzati da Mosley sono a più elettroni. Dunque, in $n = 1$ si è rimosso un elettrone, però rimane comunque l'altro (si ricorda che in $n = 1$ l'ottetto è raggiunto con due elettroni). Pertanto, in questo caso particolare, l'energia di transizione è

$$h\nu = \Delta E_{21} = \frac{1}{2}m(\alpha c)^2 \frac{3}{4}(Z - 1)^2$$

dove $Z - 1$ è la carica effettiva vista dall'elettrone che deve transire, proprio a causa della presenza dell'altro elettrone. Pertanto

$$\sqrt{\nu_{K\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{m(\alpha c)^2}{h}}(Z - 1) = A(Z - 1)$$

dove A è la costante trovata da Mosley.

Esempio. Si consideri il platino. Si ha

$$\Delta E_{21} = 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{3}{4}(78 - 1)^2 = 60 \text{ keV} \implies \lambda = 0.2 \text{ \AA}$$

Attenuazione nella materia. Si consideri una intensità I_0 della radiazione di raggi X sulla superficie di un solido in cui si considerano dei centri di diffusione (scattering). Dopo una profondità Δx , interessa conoscere l'intensità I_1 di raggi X che sopravvive. Si sa

$$I_1 - I_0 \propto I_0 \Delta x$$

Pertanto

$$dI = -\mu I_0 dx \implies I = I_0 e^{-\mu x}$$

dove μ è il coefficiente di diffusione, attenuazione.

Si consideri un solido di superficie irraggiata Σ e spessore Δx . In tale solido sono presenti dei centri di diffusione con la propria area efficace (la sezione d'urto?). In questo caso l'intensità è il numero di fotoni per unità di area e per unità di secondo. L'intensità che sopravvive è I_1 . La probabilità di scattering è il rapporto tra l'area di scattering e l'area totale

$$p = \frac{\sigma \rho \Delta x \Sigma}{\Sigma}$$

dove ρ è il numero di centri di diffusione per unità di volume, cioè la densità di centri di diffusione, mentre σ è la sezione d'urto (l'area efficace?). Questo presuppone che i centri di diffusione non si facciano ombra.

L'intensità diffusa

$$I_{SC} = pI_0 = I_0 - I_1 = -\Delta I = \sigma\rho I_0 \Delta x \implies \mu \equiv \sigma\rho$$

“SC” per scattering. Inoltre

$$\rho = \rho_M \left(\frac{N_A}{M_{\text{mol}}} \right) Z \implies \mu = \sigma\rho_M \frac{N_A}{M_{\text{mol}}} Z$$

dove ρ_M è la densità di materia, mentre il termine tra parentesi è il reciproco della massa di un atomo.

Barkla ricava il numero atomico Z per alcuni atomi ignoti e per questo riceve il nobel nel 1917. Inoltre, dato che il coefficiente di diffusione μ dipende da Z si possono reinterpretare le radiografie: i raggi X sono attenuati maggiormente dalle ossa (calcio) e minormente dagli altri tessuti (carbonio).

Lecture 19

lun 16 mag
2022 14:30

[r]

Si consideri un'onda elettromagnetica che incide su di una carica q libera. La carica si mette in moto ed emette una radiazione elettromagnetica. La direzione dell'onda elettromagnetica è individuata dal versore \vec{k} .

L'intensità entrante incide sui centri di scattering distribuiti in un volume $\Delta x \Sigma$. La potenza in entrata è $P_{\text{in}} = I\Sigma$. La probabilità di scattering (come rapporto tra casi favorevoli su casi totali) è

$$p_{SC} = \frac{\sigma\rho\Sigma\Delta x}{\Sigma}$$

da cui

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \cdot p_{SC} = I\Sigma \frac{\sigma\rho\Sigma\Delta x}{\Sigma} = I\sigma\rho\Sigma\Delta x = I\sigma N$$

dove N è il numero di elettroni. Pertanto, la sezione d'urto è

$$N\sigma = \frac{P_{\text{out}}}{I}$$

Si calcolano la potenza in uscita e l'intensità. L'intensità è data dal vettore di Poynting:

$$I = |\vec{P}| = |\vec{H} \times \vec{E}| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\vec{E}|^2$$

dove si ha

$$|\vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\vec{E}|$$

Si consideri una carica q con velocità \vec{v} . Sia x_1 il punto raggiunto dopo un tempo τ , cioè tempo necessario alla carica per decelerare fino a fermarsi; e sia x_2 il punto a distanza $vT \gg v\tau$ che sarebbe il punto in cui la particella si sarebbe trovata se non avesse decelerato. [r] Dato che la carica si ferma, essa emette una radiazione elettromagnetica costituita da un fronte sferico di spessore $c\tau$. [r] ???

Applicando la legge di Gauss alla zona di radiazione si ha

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = E_{n_1} + E_{n_2}$$

dove E_{n_1} è la componente normale del campo elettrico nella zona di perturbazione, mentre E_{n_2} è quello nella zona interna. [r] ???

Si ha

$$\frac{E_{\perp}}{E_r} = \frac{vT \sin \theta}{c\tau} \implies E_{\perp} = E_r \frac{vT \sin \theta}{c\tau} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(cT)^2} \frac{vT \sin \theta}{c\tau}$$

si sostituisce $a = \frac{v}{\tau}$ e $cT = R$:

$$E_{\perp} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qa \sin \theta}{R}$$

Si osserva che

$$E_r \sim \frac{1}{R^2}, \quad E_{\perp} \sim \frac{1}{R}$$

a grandi distanze sopravvive la componente tangenziale. Si calcola il vettore di Poynting

$$\vec{P} = \vec{H} \times \vec{E}, \quad |\vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\perp}$$

Quindi

$$|\vec{P}| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\perp}^2 = \frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2} \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{R^2}$$

Da cui si nota la dipendenza dall'accelerazione e dall'angolo

$$|\vec{P}| \sim a^2, \quad |\vec{P}| \sim \sin^2 \theta$$

Il massimo di emissione si ha in direzione perpendicolare alla direzione di oscillazione.

La potenza in uscita risulta essere

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2} \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{R^2} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mu_0^2}{8\pi} q^2 a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mu_0^2 q^2 a^2}{6\pi} \end{aligned}$$

Dunque, la sezione d'urto (di Thomson) diventa

$$\sigma = \frac{P_{\text{out}}}{I} = \frac{\mu_0^2}{6\pi E^2} q^2 a^2 = \frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m^2} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

ricordando che $ma = qE$.

Si definisce il raggio classico r_0 dell'elettrone, cioè il raggio per cui l'energia elettrostatica è uguale alla massa a riposo

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = mc^2 \implies r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

Tuttavia è una visione fallace perché l'elettrone è composto da carica negativa che tende ad allontanarsi, e dunque bisognerebbe trovare quale altra forza la tiene insieme [r]. Dunque, la sezione d'urto diventa

$$\sigma = \frac{2}{3} 4\pi r_0^2 = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = 0.67 \times 10^{-28} \text{ m}^2 = 0.67 \text{ b}$$

come fosse i $\frac{2}{3}$ di una sfera. L'unità di misura $\text{b} \equiv 10^{-28} \text{ m}^2$ è il barn.

Si studia se il modello sviluppato è in accordo con i dati sperimentali: il modello funziona solo per i primi elementi. Ci sono altri fenomeni che bisogna considerare: lo scattering Compton, la produzione di coppie. Non se ne vede il calcolo della sezione d'urto, ma se ne studia la cinematica (soprattutto dello scattering di Compton).

8.1 Scattering di Compton

L'effetto Compton è stato scoperto nel 1923 ed ha ottenuto il premio nobel nel 1927. L'apparato sperimentale è costituito da una sorgente monocromatica di Raggi X, in particolare le linee $K\alpha$ del molibdeno. Tale radiazione colpisce della grafite. Compton misura lo spettro a diversi angoli. Per diversi angoli si hanno diversi spettri. [immagine]

Si studia lo spettro su di un grafico intensità-lunghezza d'onda. Per un angolo θ_1 si vedono due picchi, il primo maggiore del secondo. Per un angolo $\theta > \theta_1$ si hanno ancora due picchi: il primo non cambia posizione, mentre il secondo ha lunghezza d'onda maggiore cioè un'energia inferiore. Il primo picco è la lunghezza d'onda dello spettro $K\alpha$.

[r] Quindi, l'energia dei fotoni riflessi è minore dell'energia dei fotoni incidenti. Compton fornisce una spiegazione prettamente meccanica: egli tratta il fotone come particella.

Si consideri un sistema di riferimento xy . [immagine] Un fotone proveniente da sinistra colpisce l'elettrone nell'origine. Il fotone esce dall'impatto con un angolo θ sopra l'orizzontale, mentre l'elettrone con un angolo φ sotto l'orizzontale.

L'energia totale è

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = pc \equiv h\nu \implies p = \frac{h}{\lambda}$$

Si studia la dinamica dell'urto. Si vede la conservazione della quantità di moto. Lungo i due assi si ha

$$\begin{cases} p_0 = p' \cos \theta + p_e \cos \varphi \\ 0 = p' \sin \theta - p_e \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} p_e \cos \varphi = p_0 - p' \cos \theta \\ p_e \sin \varphi = p' \sin \theta \end{cases}$$

Dunque

$$p_e^2 = (p_0 - p' \cos \theta)^2 + (p' \sin \theta)^2 = p_0^2 + (p')^2 - 2p_0 p' \cos \theta$$

Si studia la conservazione dell'energia

$$K_e = cp_0 - cp'$$

[r] L'energia totale relativistica è

$$(K_e + mc^2)^2 = c^2 p_e^2 + m^2 c^4 \iff K_e^2 + 2K_e mc^2 = c^2 p_e^2 \implies p_e^2 = \frac{K_e^2}{c^2} + 2K_e m$$

Utilizzando la relazione precedente che lega l'energia cinetica con la variazione di momento lineare del fotone si ha

$$p_e^2 = (p_0 - p')^2 + 2c(p_0 - p')m$$

Si sostituisce tale relazione in quella trovata in precedenza per p_e^2 .

Lecture 20

Quindi si ha

$$\begin{aligned} (p_0 - p')^2 + 2mc(p_0 - p') &= p_0^2 + (p')^2 - 2p_0 p' \cos \theta \\ 2mc(p_0 - p') &= 2p_0 p' (1 - \cos \theta) \\ 1 - \cos \theta &= mc \frac{p_0 - p'}{p_0 p'} = mc \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_0} \right) = \frac{mc}{h} (\lambda' - \lambda_0) \\ \Delta \lambda &= \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

dove $\Delta \lambda \equiv \lambda' - \lambda_0$ è lo shift Compton e $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ è la lunghezza d'onda di Compton.

Ricordando l'espressione del raggio classico dell'elettrone e l'espressione della costante di struttura fine

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

si ottiene

$$r_0 = \frac{\hbar}{mc} \alpha = \frac{h}{2\pi mc} \alpha = \frac{\lambda_C \alpha}{2\pi}$$

mar 17 mag
2022 15:30

La costante di struttura fine presenta una notevole fenomenologia la quale è descritta nel libro “The power of alpha”. La lunghezza d’onda di Compton vale

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 0.024 \text{ \AA}$$

Dunque, alcuni valori dello shift Compton sono

$$\begin{aligned}\theta = 0 &\implies \Delta\lambda = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\implies \Delta\lambda = \lambda_C \\ \theta = \pi &\implies \Delta\lambda = 2\lambda_C\end{aligned}$$

Lo shift non dipende dalle condizioni iniziali, dal valore assoluto dell’energia del fotone iniziale.

Si studia l’elettrone. La variazione di energia del fotone è

$$K_e = cp_0 - cp' = c\frac{h}{\lambda_0} - c\frac{h}{\lambda'}$$

Dall’espressione di $\Delta\lambda$ si ottiene

$$\lambda' = \lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

da cui segue

$$K_e = \frac{ch}{\lambda_0} - \frac{ch}{\lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos\theta)}$$

Il rapporto di tale quantità con l’energia iniziale $E_0 = h\frac{c}{\lambda_0}$ del fotone è

$$\frac{K_e}{E_0} = \frac{\lambda_0}{hc} \left(\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos\theta)} \right) = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos\theta)}$$

Il rapporto è variabile:

$$\lambda_0 \rightarrow \infty \implies \frac{K_e}{E_0} \rightarrow 0$$

Più grande è la lunghezza e meno energia viene trasferita all’elettrone. Inoltre

$$\lambda_0 \rightarrow 0 \implies \frac{K_e}{E_0} \rightarrow 1$$

Maggiore l’energia del fotone e maggiore è la frazione di energia trasferita all’elettrone.

Si studia come si comporta l’angolo φ . Ricordando

$$\begin{cases} p_e \cos\varphi = p_0 - p' \cos\theta \\ p_e \sin\varphi = p' \sin\theta \end{cases}$$

Segue

$$\cot\varphi = \frac{p_0 - p' \cos\theta}{p' \sin\theta} = \frac{p_0}{p' \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\lambda'}{\lambda_0 \sin\theta} - \cot\theta$$

dove si ricorda $p = \frac{h}{\lambda}$. Utilizzando λ' dall’espressione di $\Delta\lambda$ si ha

$$\begin{aligned}\cot\varphi &= \frac{\lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos\theta)}{\lambda_0 \sin\theta} - \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\lambda_C(1 - \cos\theta)}{\lambda_0 \sin\theta} - \cot\theta \\ &= \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\lambda_C(1 - \cos\theta)}{\lambda_0 \sin\theta} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \left(1 + \frac{\lambda_C}{\lambda_0} \right) = \tan\frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{h}{mc} \frac{E_0}{hc} \right) \\ &= \tan\frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{E_0}{mc^2} \right)\end{aligned}$$

L'angolo φ rimane sempre nel semi-piano di destra perché θ varia tra 0 e π , ma φ varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Inoltre, maggiore è l'energia del fotone e minore è l'angolo φ .

Si è spiegato il picco che si sposta, ma non ancora quello fisso. Per $E_0 \gg E_{\text{legame}}e^-$, gli elettroni sono "liberi" ottenendo una trattazione Compton e Thomson: sono due processi in competizione con la propria probabilità. Mentre per $E_0 \sim E_{\text{legame}}e^-$, si può interpretare il fenomeno come simile allo scattering Compton con lunghezza d'onda

$$\tilde{\lambda}_C = \frac{h}{Mc}$$

dove M è la massa dell'atomo (sostanzialmente del nucleo). [r] Si ha scattering elastico e si ha poca variazione del fotone. In questo caso lo scattering è detto di Rayleigh. Questa è la spiegazione del picco costante che ha la stessa lunghezza d'onda della radiazione incidente.

Esempio. Si considerino dei fotoni incidenti con energia $E_0 = h\nu_0$ diffusi a 90° da un elettrone libero. La lunghezza d'onda della radiazione diffusa è $\lambda' = 2\lambda_0$. Si vuole trovare l'energia iniziale del fotone incidente; l'angolo φ di scattering dell'elettrone; calcolare l'energia cinetica K_e dell'elettrone.

Si trova l'energia iniziale del fotone:

$$\lambda' - \lambda_0 = \lambda_C(1 - \cos\theta) \implies 2\lambda_0 - \lambda_0 = \lambda_C \implies \lambda_0 = \lambda_C$$

Da cui l'energia è

$$E = h\frac{c}{\lambda_0} = h\frac{c}{\lambda_C} = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$$

Si trova l'angolo φ :

$$\cot\varphi = \tan\frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{E_0}{mc^2}\right) = 1(1+1) = 2 \implies \varphi = \text{arccot } 2 \approx 27^\circ$$

Si calcola l'energia cinetica

$$K_e = E_0 - E' = mc^2 - \frac{hc}{\lambda'} = mc^2 - \frac{hc}{2\lambda_0} = mc^2 - \frac{hc}{2\lambda_C} = mc^2 - \frac{1}{2}mc^2 = \frac{1}{2}mc^2 = 256 \text{ keV}$$

8.2 Produzione di coppie

Interazioni radiazione-materia. Si sono visti vari tipi di interazione:

- effetto fotoelettrico;
- scattering Compton, scattering tra un fotone ed un elettrone libero;
- scattering Rayleigh, pensato come il precedente però l'elettrone è legato all'atomo e non si hanno shift alla lunghezza d'onda;
- scattering Thomson, [r] si è calcolata la sezione d'urto di Thomson;

Ora si studia la produzione di coppie e^+e^- . [immagine]

Produzione. Un fotone si divide in un elettrone ed un positrone. Si studia la dinamica. L'energia è conservata

$$E_\gamma = mc^2 + K_1 + mc^2 + K_2$$

[r] I termini mc^2 sono una soglia definita per $K_1 = K_2 = 0$. Dunque, la produzione di coppie è un fenomeno per

$$E_\gamma \geq 2mc^2 = 102 \text{ MeV}$$

Inoltre, tale processo non può avvenire nel vuoto per questioni cinematiche. Per assurdo si ipotizza che tale processo sia possibile nel vuoto. Quindi il bilancio di energia è

$$p_\gamma c = E_{e^-} + E_{e^+} = 2\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Il bilancio della quantità di moto lungo l'asse x è

$$p_\gamma = p_- \cos \theta + p_+ \cos \theta = 2p_e \cos \theta \implies p_\gamma c = 2p_e c \cos \theta$$

Unendo le due espressioni si ha

$$4p_e^2 c^2 \cos^2 \theta = 4(p_e^2 c^2 + m^2 c^4) \implies p_e^2 = \frac{m^2 c^2}{\cos^2 \theta - 1}$$

cioè il momento lineare quadro (!) dell'elettrone è negativo. Si è trovato l'assurdo, pertanto tale fenomeno può avvenire solamente in presenza di materia.

Si considera il fenomeno opposto: l'annichilazione elettrone-positrone. [immagine] Dunque

$$mc^2 + K_1 + mc^2 + K_2 = 2h\nu$$

Si generano due fotoni perché qualora se ne generasse solamente uno, segue che il momento lineare non sarebbe conservato. Si trascurano le energie cinetiche dei due elettroni perché piccole

$$2mc^2 = 2h\nu = 2 \cdot 511 \text{ keV}$$

[r] curiosità PET?

Un fotone ha bisogno di un solido per produrre una coppia elettrone-positrone. Nella fisica ad alte energie, si colpisce un bersaglio con particelle producendo dei detriti. Un rivelatore è costituito da più strati con funzioni diverse. Dall'interno all'esterno si hanno: tracciatore, calorimetro, rivelatore di muoni. Il tracciatore traccia la traiettoria delle particelle perturbandole il meno possibile. Il calorimetro ferma le particelle per misurarne l'energia. Infine il rivelatore di muoni traccia l'unica particella (in verità anche altre hanno probabilità di passare) che non interagisce con il resto della materia. [r]

Quando si ha produzione di coppia, il calorimetro misura due regioni diverse di energia che devono essere combinate con la traiettoria dell'elettrone e del positrone per costruire la natura del fotone generato nella collisione.

Lecture 21

9 Onde materiali

lun 23 mag
2022 14:30

Si sono visti diversi esperimenti che hanno mostrato la dualità onda-particella dell'elettromagnetismo. Il fisico de Broglie ipotizza tale dualità anche per la materia. Egli postula la possibilità di associare una lunghezza d'onda "portante" (cioè principale)

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Tale relazione si è già vista per il fotone

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

dove p è il momento lineare. Vale inoltre

$$p = \frac{h}{\lambda} \frac{2\pi}{2\pi} = \hbar k$$

dove k è il numero d'onda.

Si studiano le implicazioni della visione di de Broglie e l'esperimento che ne conferma la validità.

Si reinterpreta il postulato di Bohr della quantizzazione del momento angolare.

Si consideri l'orbita di un elettrone attorno al nucleo. L'orbita stabile è quella per cui nella circonferenza è contenuto un numero intero di lunghezze d'onda: [immagine]

$$2\pi r = n\lambda, \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

da cui si ha

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \iff L = n\hbar$$

Si ritrova il postulato di Bohr: la quantizzazione del momento angolare.

Esempio. Si considera un oggetto e ne si studia l'identità della lunghezza d'onda. Si consideri una palla da baseball

$$m = 140 \text{ g}, \quad v = 27 \text{ m s}^{-1}$$

La lunghezza d'onda di de Broglie è

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.7 \times 10^{-34} \text{ m}$$

Per un elettrone accelerato da un potenziale di $V = 50 \text{ V}$ si ha

$$E = eV = \frac{p^2}{2m} \implies p = \sqrt{2meV} \implies \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = 12.29 \text{ Å} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}} = 1.7 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Quindi l'elettrone dovrebbe presentare una lunghezza d'onda pari alle dimensioni cristalline.

Cinematica relativistica. Si completa il discorso considerando la relatività ristretta. Vale in generale

$$(K + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad K = eV$$

da cui si ottiene

$$K^2 + 2mc^2 K = p^2 c^2 \implies p^2 = \frac{(eV)^2}{c^2} + 2meV$$

pertanto, la lunghezza d'onda è

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{\frac{(eV)^2}{c^2} + 2meV}} = \frac{h}{\sqrt{2meV} \sqrt{1 + \frac{eV}{2mc^2}}}$$

Questo risulta simile a quanto trovato prima tranne per un fattore correttivo di $\frac{eV}{2mc^2}$.

Esperimento di Davisson-Germer. L'apparato sperimentale è costituito da elettroni generati per effetto termo[r]. Essi vengono accelerati fino ad impattare su di un cristallo. Ad un angolo φ rispetto la normale del cristallo si trova il rivelatore. Il tutto è nel vuoto.

L'esperimento originale ha coinvolto un policristallo di Nickel, ma il risultato non evidenzia alcuna osservazione. Il vuoto è venuto meno ed il policristallo si è ossidato e lo hanno scaldato per rimuovere l'ossidazione. Così facendo i cristalli interni si sono riallineati in un unica struttura cristalli (e non più come policristalli) da cui poi si è avuta l'evidenza sperimentale di quanto suggerito da de Broglie.

Nell'esperimento di Bragg [immagine] si ha interferenza costruttiva? [r] per

$$2d \cos \theta = n\lambda$$

Si studia la situazione in questo esperimento [immagine]. Si consideri il reticolo cristallino e si individuino dei piani inclinati passanti per gli atomi. Il fascio elettronico incide con un angolo $\theta = \frac{\varphi}{2}$ rispetto la normale al piano. Data d la distanza tra i piani, si ha

$$2d \cos \frac{\varphi}{2} = n\lambda, \quad d = D \sin \theta = D \sin \frac{\varphi}{2}$$

dove D è la distanza orizzontale tra i piani, cioè il passo cristallino: la distanza tra un atomo e l'altro. Dunque si ha

$$2D \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = n\lambda \implies D \sin \varphi = n\lambda$$

Se de Broglie è corretto, allora esiste un angolo per cui si ha interferenza costruttiva. Le osservazioni forniscono un massimo di intensità a circa $\varphi = 50^\circ$. Dato un passo cristallino di $D = 2.54 \text{ \AA}$ si ottiene una lunghezza d'onda misurata di

$$\lambda_M = 1.65 \text{ \AA}$$

Mentre la lunghezza d'onda di de Broglie è

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \Big|_{V=54 \text{ V}} = 1.67 \text{ \AA}$$

Dunque, pure la materia presenta una dualità onda-particella.

Esempio. Si vuole calcolare l'energia cinetica di un neutrone affinché esso abbia lunghezza d'onda $\lambda = 1 \text{ \AA}$:

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

Dunque

$$E = \frac{h^2 c^2}{2m\lambda^2 c^2} = 0.082 \text{ eV}$$

Si confronta tale energia con quella termica. Per il teorema di equipartizione con tre gradi di libertà si ha un'energia media di

$$\overline{E} = \frac{3}{2} k_B T = 0.04 \text{ eV}, \quad T = 300 \text{ K}$$

I neutroni devono essere termici, cioè all'energia termica, affinché essi abbiano una lunghezza d'onda pari al passo cristallino.

Esempio. Si calcola la lunghezza d'onda di de Broglie per una particella alfa ad energia $E = 5.78 \text{ MeV}$. Si ha

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 6 \times 10^{-15} \text{ m}$$

che è molto prossima al raggio nucleare $r_N = 3 \times 10^{-15} \text{ m}$. Ricordando l'esperimento di Rutherford, per piccoli angoli di incidenza, la particella alfa si comporta anche come un'onda e si hanno effetti di diffrazione.

9.1 Pacchetto d'onda

Si studiano i pacchetti d'onda: ad una particella si associano diverse armoniche. Si vede un esempio in particolare le cui deduzioni tratte hanno carattere generale. Successivamente si introduce il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Un pacchetto d'onda presenta un profilo d'onda pari a [immagine]

$$f(t) = \frac{\Delta u}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Delta u t)}{\frac{1}{2}\Delta u t} e^{-i\omega_0 t}$$

La cui parte reale è

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} \cos(\omega_0 t)$$

Il coseno è la parte “portante”. Il secondo fattore modula l’ampiezza del coseno: esso è l’involuppo. Si trascurano i lobi secondari che vanno a ridursi. Il primo zero si ottiene per

$$\frac{1}{2}\Delta\omega T = \pi \implies T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Dunque l’estensione temporale è

$$2T = \Delta T = \frac{4\pi}{\Delta\omega} \iff \Delta T \Delta\omega = 4\pi$$

[r] Un pacchetto di sinusoidi fornisce la forma d’onda qua riportata. Tale forma d’onda è ottenuta come somma continua di armoniche centrate intorno a ω_0 in un intervallo lungo $\Delta\omega$. Dunque bisogna calcolare

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-it} e^{-i\omega t} \Big|_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}t} \left[e^{-i(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega)t} - e^{-i(\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega)t} \right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}t} e^{-i\omega_0 t} \left[\cos\left(-\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) + i \sin\left(-\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) - i \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}t} e^{-i\omega_0 t} \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Se si avesse una sola armonica, allora si avrebbe uno sviluppo temporale infinito. L’unico modo per avere un pacchetto finito è prendere più armoniche.

Pertanto, nella relazione

$$\Delta T \Delta\omega = 4\pi$$

il fattore $\Delta\omega$ è l’estensione delle armoniche. Inoltre, aumentando le armoniche e minore è l’estensione temporale, così viceversa. Il caso particolare di questo esempio è il 4π . Per pacchetti gaussiani, il numero è il più piccolo possibile $\Delta T \Delta\omega = \frac{1}{2}$. Per qualsiasi tipo di pacchetto d’onda vale la disuguaglianza di Gabor

$$\Delta T \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$$

Questo discorso di indeterminazione vale tra ogni due spazi legati dalla trasformata di Fourier.

Si riscrive l’equazione per un pacchetto d’onda che si propaga, non solo fermo in un unico punto [r]. Pertanto

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

Si distingue qualora le armoniche si propagano alla stessa velocità o meno; cioè i mezzi non dispersivi (il vuoto) e dispersivi (i materiali).

Mezzi non dispersivi. Nei mezzi non dispersivi si ha

$$\frac{\omega}{k} = v_P = \text{cost}$$

dove “P” sta per “phase”, cioè fase. Dunque, l'integrale è

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{\omega}{v_P}x - \omega t\right)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{v_P}\right)} d\omega$$

L'integrale è analogo a quello precedente, ma si ha un semplice cambio di variabile:

$$f(t, x) = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left[\frac{1}{2}\Delta\omega\left(t - \frac{x}{v_P}\right)\right]}{\frac{1}{2}\Delta\omega\left(t - \frac{x}{v_P}\right)} e^{-i\omega_0\left(t - \frac{x}{v_P}\right)}$$

La portante e l'involuppo viaggiano alla stessa velocità v_P . Il vuoto non è dispersivo per le onde elettromagnetiche ma è dispersivo per le onde materiali?.

Lecture 22

mar 24 mag
2022 15:30

Mezzi dispersivi. La relazione che lega k ad ω può essere qualunque. Ci si concentra nell'intervallo centrato in ω_0 di lunghezza $\Delta\omega$ in cui si procede per sviluppo in serie di Taylor. Dunque

$$k(\omega) = k_0 + d_\omega k(\omega_0)(\omega - \omega_0) + o(\omega - \omega_0)$$

Si sostituisce tale espressione nell'integrale di Fourier?

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta\omega} e^{i(k_0x + d_\omega k(\omega_0)x - \omega t)} d\omega e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \int_{\Delta\omega} e^{i(d_\omega k(\omega_0)x - \omega t + \omega_0 t)} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{-i(\omega - \omega_0)(t - d_\omega k x)} d\omega, \quad \omega' \equiv \omega - \omega_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} e^{-i\omega'(t - d_\omega k x)} d\omega' \\ &= \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left[\frac{\Delta\omega}{2}(t - d_\omega k x)\right]}{\frac{\Delta\omega}{2}(t - d_\omega k x)} e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \end{aligned}$$

Il portante viaggia alla velocità di fase, mentre l'involuppo viaggia alla velocità di gruppo $v_g = d_k\omega$ che è ciò che porta l'informazione. [r]

Quindi, noto

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

si ottiene

$$v_P = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}{p}$$

Si scrive l'energia relativistica per una particella libera, cioè non inserita in un potenziale. Pertanto

$$v_P = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}$$

La velocità di fase non è una costante per onde materiali (perché dipendono da k), dunque il vuoto si comporta come un mezzo dispersivo. [r]

Ora si calcola la velocità di gruppo. Considerato $\omega = v_P k$, si ha

$$v_g = d_k\omega = v_P + k d_k v_P = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2} - k \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{k^3}$$

[r] calcoli. Pertanto

$$v_g = \frac{c \left(1 + \left(\frac{mc}{\hbar k} \right)^2 \right) - c \left(\frac{mc}{\hbar k} \right)^2}{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k} \right)^2} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k} \right)^2}} = \frac{c^2}{v_P}$$

Si studia la velocità meccanica che si attribuirebbe ad una particella. Essa si può ottenere dalla quantità di moto. Dall'espressione della velocità di fase si ha

$$v_P = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv_M} = \frac{c^2}{v_M}$$

dove “M” sta per meccanica. Pertanto, il nesso tra la fisica classica e l'inizio della meccanica quantistica è

$$v_g = v_M$$

Osservazione. Segue

$$v_P = \frac{c^2}{v_g} = \frac{c^2}{\alpha c} = \frac{c}{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

La velocità di fase è maggiore della velocità della luce, ma questo non viola il principio di causalità perché l'informazione è trasportata dalla velocità di gruppo, non dalla velocità di fase.

Considerato $v_P = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$ si ottiene

$$E = h\nu = \hbar \frac{v_P}{\lambda} = p v_P = p \frac{c^2}{v_g} \implies E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = p^2 \frac{c^4}{v_g^2}$$

Da ciò si ottiene

$$p^2 + m^2 c^2 = p^2 \frac{c^2}{v_g^2} \implies m^2 c^2 = p^2 \left(\frac{c^2}{v_g^2} - 1 \right) = p^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right)$$

Segue

$$m^2 c^2 \beta^2 = p^2 (1 - \beta^2) \implies m^2 v_g^2 = p^2 (1 - \beta^2) \implies p = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} m v_g = \gamma m v_g$$

cioè si ritrova quanto si ottiene dalla relatività ristretta. [r]

Osservazione. La descrizione della particella è condotta tramite le onde. La meccanica classica, basata su variabili generalizzate, non è più valida. Bisogna ripensare alla meccanica tramite equazioni d'onda.

Il significato da attribuire ad all'onda ψ è quello di associare $|\psi|^2$ ad una densità di probabilità. Dunque la probabilità $|\psi|^2 dV$ è quella tale di trovare la particella associata all'onda in una determinata regione dello spazio. Tale deduzione è data da Max Born.

[r] Dalla funzione d'onda si vogliono ottenere le osservabili di interesse. Bisogna operare sulla funzione d'onda tramite operatori: ogni operatore è associato ad un'osservabile.

9.2 Principi di indeterminazione di Heisenberg

Il principio di indeterminazione di Heisenberg (1927) è

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Non è possibile misurare contemporaneamente posizione e quantità di moto con arbitraria risoluzione su entrambe le osservabili. Allo stesso modo per altre osservabili si ha

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

(Appunto personale: i principi di indeterminazione sembrano legare le simmetrie dell'universo con le rispettive quantità conservate: posizione e quantità di moto; direzione e momento angolare; tempo ed energia; fase della funzione d'onda e carica; ...)

I principi derivano dall'applicazione della trasformata di Fourier. [r]

Esempio. Si consideri un proiettile $m = 50\text{ g}$ ed un elettrone. Entrambi hanno una velocità $v = 300\text{ m s}^{-1}$. L'incertezza sulla velocità è $\Delta v = 0.01\%$. Si calcola l'incertezza sulla posizione dell'elettrone e del proiettile.

L'elettrone ha quantità di moto

$$p = mv = 2.7 \times 10^{-28} \text{ kg m s}^{-1}, \quad \Delta p = m\Delta v = 2.7 \times 10^{-32} \text{ kg m s}^{-1}$$

Applicando il principio di indeterminazione, si ha un'incertezza sulla posizione dell'elettrone di

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} = 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Per il proiettile si ha una quantità di moto pari a

$$p = mv = 15 \text{ kg m s}^{-1}, \quad \Delta p = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg m s}^{-1}$$

Dunque, l'incertezza sulla posizione è

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} = 10^{-32} \text{ m}$$

Quindi, nella realtà si è limitati dagli strumenti, non dal principio.

Esempio. Si consideri un elettrone in una scatola monodimensionale di lunghezza $L = 1 \text{ Å}$. La risoluzione è $\Delta x = L$. L'incertezza sulla quantità di moto è

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2L}$$

Si vuole misurare l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

L'incertezza è

$$(\Delta p)^2 = \sigma^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

La quantità di moto media è nulla perché la direzione dell'elettrone è casuale. Dunque, l'energia media è

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m \cdot 4L^2} \approx 1 \text{ eV}$$

Confinare una particella dà essa energia per il principio di indeterminazione.

Considerando invece $L = 10^{-4} \text{ Å}$ si ottiene

$$\langle E \rangle = 10^8 \text{ eV} = 100 \text{ MeV}$$

Si consideri un decadimento beta. Se l'elettrone fosse stato emesso dal nucleo, dove si troverebbe confinato, allora si registrerebbe una energia come sopra riportata. Nella realtà, gli elettroni dei decadimenti beta hanno energie di qualche mega-elettronvolt.

Esempio. Si vede l'oscillatore armonico. L'energia è

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \implies \langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}k\langle x^2 \rangle$$

come prima si ha

$$(\Delta p)^2 = \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \quad (\Delta x)^2 = \sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Dal principio di indeterminazione

$$(\Delta p)^2 = \left(\frac{\hbar}{2\Delta x} \right)^2$$

L'energia è

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

Ora si calcola la condizione di energia minima, detta di punto zero:

$$d_{\Delta x} \langle E \rangle = 0 \iff -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + k\Delta x = 0 \iff (\Delta x)^2 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4mk}}$$

da cui l'energia è

$$\langle E \rangle_{\min} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar}{2} \omega_0 = \frac{1}{2} h\nu$$

Quando Planck formula la legge di radiazione di corpo nero, stabilisce $h\nu$ come energia minima. L'oscillatore armonico quantistico ha valore minimo metà di ciò. Lo spettro dei livelli energetici è

$$E_n = \frac{1}{2}h\nu + nh\nu, \quad n \in N \cup \{0\}$$