

# Nuclear and Subnuclear Physics

20 marzo 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Particella elementare . . . . .	2
1.2	Unità naturali . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Richiami di relatività speciale</b>	<b>5</b>
2.1	Formalismo covariante . . . . .	5
2.2	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	7
2.2.1	Spaziotempo di Minkowski . . . . .	8
2.3	Cinematica relativistica . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Decadimenti</b>	<b>13</b>
3.1	Regola d'oro di Fermi . . . . .	16
3.2	Vita media e rapporto di ramificazione . . . . .	18
3.3	Stati instabili . . . . .	19
3.4	Diffusione – scattering . . . . .	21
3.4.1	Classi di diffusione . . . . .	23
3.5	Diffusione in meccanica quantistica . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Misure in fisica delle particelle</b>	<b>26</b>
4.1	Particelle cariche massive . . . . .	26
4.2	Particelle cariche leggere . . . . .	30

## Lezione 1

lun 27 feb  
2023 13:30

### 1 Introduzione

**Introduzione.** La fisica delle particelle si basa sulle teorie quantistiche dei campi che permettono di unificare la relatività speciale e la meccanica quantistica. Tuttavia, queste teorie non sono ancora disponibili. Si tratta la fisica delle particelle tramite la relatività speciale e la meccanica quantistica non relativistica separatamente (sebbene siano presenti delle eccezioni come la nascita dell'anti-materia che proviene dall'unione delle due teorie e come la simmetria CPT).

Si va dalla fisica delle particelle (problema a due corpi) alla fisica nucleare (problema ad  $N$  corpi). Nel corso si studia indistintamente l'aspetto teorico e quello sperimentale.

**L'alba della fisica delle particelle.** La fisica delle particelle elementari è nata quando si è falsificato il modello del mezzo continuo. Cauchy diede la definizione rigorosa di un mezzo continuo. Intuitivamente, un mezzo materiale continuo ha un insieme di proprietà ed esse sono le stesse anche a scale arbitrariamente piccole.

Un mezzo continuo è un insieme di punti  $A \subset \mathbb{R}^3$  tale per cui  $\forall \underline{x} \in A$  si può definire una funzione

$\rho(\underline{x})$  che determina le proprietà del mezzo continuo. La massa inerziale del mezzo continuo di una regione  $B \subset A$  è

$$m = \int \rho(\underline{x}) d^3x \in \mathbb{R}^+$$

Il mezzo si dice continuo se  $\rho(\underline{x})$  è una funzione continua in  $A$ . Questa è la definizione data da Cauchy. Da questa deriva la definizione di limite

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \underline{x}' \in U_\delta(\underline{x}) \implies |\rho(\underline{x}') - \rho(\underline{x})| < \varepsilon$$

dove  $U_\delta$  è un intorno. La fisica delle particelle nasce quando questa definizione è falsificata. Infatti, se  $\delta \sim 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ , la disuguaglianza viene meno. Storicamente, ci si è resi conto che a tali distanze i mezzi non sono più continui e le leggi fisiche macroscopiche non valgono più (ad esempio Maxwell). Inoltre, le particelle sono relativistiche.

## 1.1 Particella elementare

**Fisica classica.** In fisica classica, non esiste la distinzione tra punto materiale e particella elementare. Un punto materiale (che coincide con la particella elementare in questo contesto) è un punto di  $\mathbb{R}^3$  a cui si può associare una massa inerziale  $m \in \mathbb{R}^+$  ed una carica elettrica  $q \in \mathbb{R}$ , la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. La traiettoria è una mappa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto \underline{x}(t)$  che mette in corrispondenza la posizione con il tempo.

**Meccanica relativistica.** In meccanica relativistica, la massa inerziale non è un invariante di Lorentz: si vuole caratterizzare il punto materiale con delle proprietà intrinseche. Dunque, in relatività, un punto materiale è un punto nello spazio-tempo di Minkowski  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$  a cui è associata una massa a riposo  $m \in \mathbb{R}^+$  (la massa solidale con il punto) che è un invariante di Lorentz (cioè è identica per qualunque osservatore inerziale) ed associata una carica elettrica  $q \in \mathbb{R}$  che è anch'essa un invariante di Lorentz, la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. La traiettoria è una mappa

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \tau \mapsto x^\mu(\tau)$$

cioè una corrispondenza tra la tetra-posizione in funzione del tempo proprio. Non si può usare la traiettoria classica perché parametrizzata in funzione del tempo. In meccanica relativistica classica, il punto materiale coincide ancora con una particella elementare.

**Meccanica quantistica.** Entrambe le definizioni precedenti non sono compatibili con la meccanica quantistica perché non è più presente il concetto di traiettoria (deterministica). Inoltre, il punto materiale è un punto in senso matematico: non ha estensione spaziale. Facendo una misura, bisogna determinare in modo infinitamente preciso la posizione,  $\Delta z \rightarrow 0$ . Tuttavia, deve valere la relazione di Heisenberg

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Quando si danno le condizioni al contorno di un punto materiale, non si possono più determinare le equazioni del moto. La definizione di punto è incompatibile con la meccanica quantistica. Bisogna cambiare la definizione, ma mantenere la stessa idea: una particella elementare è qualcosa di talmente piccolo che non presenta altri costituenti.

Si separa il concetto di particella elementare da quello di punto materiale. In meccanica quantistica, il punto materiale è l'oggetto che obbedisce l'equazione di Schrödinger per il punto materiale

$$i\hbar \partial_t \psi = \hat{H} \psi, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hat{V}(\underline{x})$$

Questa equazione ha un unico parametro intrinseco: la massa del punto materiale. Il potenziale è una caratteristica dello spazio. I sistemi che risolvono tale equazione non sono sistemi che

descrivono le particelle elementari. In meccanica quantistica, la particella elementare è un punto materiale le cui soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono esprimibili *esclusivamente* come sovrapposizione di onde piane.

Si consideri un atomo di idrogeno in caduta libera. Esso soddisfa l'equazione sopra, ma non è una particella elementare. Nel riferimento del protone, il moto dell'elettrone è dato da

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{R(r)}{r} Y_l^m$$

che si può traslare per seguire il centro di massa in caduta libera. Tuttavia, questa non è una sovrapposizione di onde piane. Se non esiste alcun altro modo di descrivere un punto materiale (oltre alla sovrapposizione di onde piane), allora si ha una particella elementare. A priori non si può distinguere una particella vista come un punto materiale da un sistema composto.

## 1.2 Unità naturali

In quanto le masse sono piccole, le velocità sono relativistiche. Si utilizzano strumenti adatti alla relatività ristretta ed alla meccanica quantistica. Si vuole avere un formalismo che garantisca a priori che le formule sono compatibili con le due teorie citate.

Il sistema internazionale SI è un sistema metrico: si definiscono le quantità fisiche in termini di quantità fondamentali, come il tempo, lo spazio, la massa e la carica elettrica. Si sceglie un prototipo e si esprimono le quantità in termini di suoi multipli. Un esempio di prototipo utilizzato fino al 2019 è quello del chilogrammo. Modernamente, le quantità fondamentali sono definite in termini di costanti fisiche. Il secondo è dato da un certo numero di periodi di una transizione iperfine del cesio-133. Il metro è una frazione della distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un secondo. Dunque i prototipi sono dati da fenomeni naturali.

Il problema del sistema metrico è l'arbitrarietà del valore dei prototipi. Si consideri la legge di gravitazione universale

$$\underline{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}, \quad G = 6.674\,30(15) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Si ha un valore di proporzionalità  $G$  che non ha significato fisico, ma che serve a conciliare diverse grandezze fisiche. Lo stesso vale per la forza di Coulomb e la costante associata.

Per questo si utilizzano sistemi di misura razionalizzati: si utilizzano le leggi fisiche (di cui si è ragionevolmente certi) come vincoli e si eliminano quanti più prototipi possibili. Il primo sistema razionalizzato è il sistema cgs elettrostatico: si misura lo spazio in centimetri, il tempo in secondi, la massa in grammi, ma la carica non ha prototipo. Si utilizza una legge fisica (quella di Coulomb) e si pone il termine di proporzionalità pari all'unità:

$$F = \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \implies \mathbf{F} = \frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{L}^2} \implies [F] = \text{dyn} \implies [q] = \text{dyn}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}$$

In fisica delle particelle si usano altre leggi fisiche. La prima è l'energia relativistica

$$E = \gamma mc^2, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

dove  $\gamma$  è il fattore di Lorentz: un numero puro. La costante di proporzionalità è il quadrato della velocità della luce  $c^2$ . Si impone

$$\boxed{c \equiv 1} \implies \mathbf{E} = \mathbf{M}$$

Dalla relazione di moto rettilineo uniforme si ha

$$x = ct \implies \mathbf{L} = \mathbf{T}$$

I prototipi che vengono meno sono quelli della massa e dello spazio. Dunque lo spazio ed il tempo hanno le stesse unità di misura: questo fa comodo oltre a porre sullo stesso piano le due dimensioni. La seconda legge utilizzata è l'energia di un fotone

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Il coefficiente di proporzionalità è la costante di Planck ridotta  $\hbar$  e si pone

$$\boxed{\hbar \equiv 1} \implies E = T^{-1}$$

A questo punto, si rimuove anche il prototipo della carica. Dalla legge di Coulomb si ha

$$\underline{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \rightsquigarrow \boxed{k \equiv \frac{1}{4\pi}}$$

da cui, considerando anche la velocità della luce, si ha

$$c = 1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \implies \epsilon_0 = 1 \wedge \mu_0 = 1$$

Questo sistema di scelte costituisce il sistema razionalizzato in uso nella fisica delle particelle elementari. Esso è detto sistema naturale di Heaviside-Lorentz (si noti che esistono diversi sistemi naturali).

Per definire tutte le unità fisiche basta definire l'energia tramite l'elettronvolt. Il tempo e lo spazio hanno dimensioni di reciproco dell'energia. La carica non ha dimensioni. Eliminare i prototipi implica una minore precisione in metrologia. Per ovviare a tale problema, si fanno i conti in unità naturali, ma si convertono i risultati nel sistema internazionale. Un altro problema del sistema naturale è la difficoltà a capire di cosa si stia parlando (energia, massa, momento) qualora manchi un contesto. Per ovviare a tale problema, si esprimono le quantità menzionate tramite notazioni esplicite diverse eV, eV/c<sup>2</sup>, eV/c.

## Lezione 2

mar 28 feb  
2023 13:30

Per operazioni semplici conviene sapere i valori delle costanti di proporzionalità

$$\hbar \approx 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s} \approx 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}, \quad \hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

Si noti che dal 2019 il valore della costante di Planck è fisso. Tramite l'analisi dimensionale si può passare dal sistema naturale (NU, natural units) al sistema internazionale e viceversa

$$\alpha_{\text{NU}} = \hbar^a c^b \alpha_{\text{SI}}$$

**Esempio.** Si converte la massa dell'elettrone

$$m_e = 511 \text{ keV } c^{-2} = \frac{511 \times 10^3 \text{ eV} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

**Esempio.** Si trova la lunghezza Compton del protone e dell'elettrone. Essa è la lunghezza d'onda di un fotone la cui energia coincide con la massa a riposo della particella considerata:

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

Si utilizza l'energia relativistica nel sistema internazionale. La massa a riposo di una particella corrisponde ad un'energia pari a  $E = mc^2$ . Un fotone con momento lineare  $p$  ha energia pari a  $E = pc$ . Unendo le due si ha  $p = mc$ . Dalla lunghezza d'onda di de Broglie si ottiene

$$\lambda = \frac{h}{p} \implies \lambda = \frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 1.32 \text{ fm}$$

In unità naturali si ha

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1 \implies \lambda = \frac{2\pi}{m}$$

Al posto di fare l'analisi dimensionale, si possono usare i valori calcolati in precedenza per convertire rapidamente da lunghezza ad energia:

$$\lambda_{\text{NU}} = \frac{\lambda_{\text{SI}}}{\hbar c} = \frac{1.32 \text{ fm}}{197 \times 10^6 \text{ eV fm}} = 6.7 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-1}$$

**Esempio.** Nel sistema di unità naturali, la massa di Planck è data da

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

La massa di Planck è la massa di una particella elementare il cui campo gravitazionale generato è confrontabile con il campo elettrico generato da una carica pari a 1. Per la massa di Planck, la forza gravitazionale non è più trascurabile rispetto alla forza elettrostatica: bisogna sviluppare una teoria che sia in accordo con la meccanica quantistica e la relatività generale, cosa che non è ancora disponibile. Appena si trattano particelle con massa vicina alla massa di Planck, le teorie moderne vengono meno e non si possono più conoscere le equazioni del moto. Gli effetti di gravità quantistica non sono più trascurabili rispetto agli effetti elettromagnetici. Per convertire la formula nel sistema internazionale si esegue l'analisi dimensionale

$$M_{\text{SI}} = \hbar^a c^b G^{-\frac{1}{2}} \implies M = \left[ \frac{\text{ML}^2}{\text{T}} \right]^a \left[ \frac{\text{L}}{\text{T}} \right]^b \left[ \frac{\text{L}^3}{\text{MT}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = M^{a+\frac{1}{2}} L^{2a+b-\frac{3}{2}} T^{-a-b+1}$$

Da ciò bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2} = 1 \\ 2a + b - \frac{3}{2} = 0 \\ -a - b + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto

$$M_{\text{SI}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 21.7 \mu\text{g} \approx 2 \times 10^{23} \text{ eV} = 2 \times 10^{15} \text{ TeV}$$

Questa massa è enorme a livello microscopico. La massima energia a cui si riescono ad accelerare le particelle ad LHC è 14 TeV. Pertanto, per raggiungere energie confrontabili con la massa di Planck bisogna affidarsi a processi naturali come la dinamica dei buchi neri (ad esempio come la radiazione elettromagnetica di Hawking).

Modernamente, si è bloccati sulla conciliazione della meccanica quantistica con la relatività generale. Utilizzare le teorie quantistiche dei campi in relatività generale porta a delle incoerenze, la teoria non è rinormalizzabile. Ci sono due possibilità. La prima è costruire una teoria alternativa su base empirica; si è tentato di trovare fenomeni naturali che siano vicini alla scala di Planck, ma i risultati sono stati modesti; due esempi sono la radiazione di Hawking e l'inflazione nei primi istanti dell'universo che non rientra nel Modello Standard (magari indice di gravità quantistica). L'altra possibilità è stipulare la simultanea validità degli assiomi della relatività generale e della meccanica quantistica relativistica pensando che, probabilità, la somma dei due insiemi di assiomi riduce le teorie candidate al punto che l'unica rimasta è la teoria quantistica della gravitazione. Questo procedimento ha dato origine alle teorie di stringhe e di membrana. Si è in una fase di stallo perché l'insieme di assiomi fornisce un numero di vincoli insufficiente: la classe di teorie compatibili è enorme. Secondo (un teorema? di) Witten, le classi di teorie sono solo cinque, ma danno vita ad un grande numero di teorie concrete. La situazione sta progredendo grazie a nuovi dati sulla cosmologia primordiale  $\Lambda$ CDM.

## 2 Richiami di relatività speciale

### 2.1 Formalismo covariante

Il formalismo covariante permette di scrivere le leggi fisiche in modo che siano già compatibili con la relatività speciale (e generale, ma in questo corso si tratta solo la prima). I vettori devono rimanere fissi nello spazio per qualsiasi cambio di base e devono essere descritti tramite le regole di trasformazione delle loro componenti da un sistema di coordinate (una base) ad un altro. Cambiando la base, cambiano le componenti: per un vettore fisico classico, le coordinate variano

in maniera opposta (contro-variano) rispetto i versori della base. Un vettore è una ennupla di coordinate che contro-variano rispetto un cambio di base.

In uno spazio  $\mathbb{R}^n$ , un vettore è la combinazione lineare

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v^i \hat{e}_i = v^i \hat{e}_i$$

dove  $\{\hat{e}_i\}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ . Si utilizza la notazione di Einstein per la somma implicita: indici covarianti e contro-varianti ripetuti si intendono sommati. Dopo un cambio di base, i versori della nuova base sono dati da

$$\hat{e}'_j = F^i_j \hat{e}_i$$

Dunque, il vettore è

$$\underline{v} = v^i \hat{e}_i = v'^j \hat{e}'_j = v'^j F^i_j \hat{e}_i \implies v^i = F^i_j v'^j \implies v'^j = (F^{-1})^j_i v^i = B^j_i v^i$$

dove si pone  $F^{-1} \equiv B$ . Tali lettere, che indicano le trasformazioni, sono le iniziali di “forward” e “backward” (transformation). Quando si sostituisce  $\hat{e}'_j$  si utilizza ancora l'indice muto  $i$  per convenienza, ma l'implicazione successiva deriva dal fatto che due vettori coincidono quando hanno le stesse componenti. In forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \cdots & \hat{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \cdots & \hat{e}_n \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} = F^{-1} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

Questa scrittura è comoda perché negli spazi affini, in particolare negli spazi euclidei, le matrici del cambio di base sono invertibili.

I versori (le basi) di uno spazio vettoriale (uno spazio affine) si trasformano in modo covariante per cambi di base, cioè secondo  $F = B^{-1}$ . Le coordinate di un vettore si trasformano in modo contro-variante per cambi di base, cioè secondo  $F^{-1} = B$ . Un indice basso descrive delle componenti covarianti. Un indice alto descrive quantità contro-varianti. Un vettore è la somma

$$\underline{v} = v^i \hat{e}_i$$

Le trasformazioni di Galileo e di Lorentz sono entrambe cambi di base.

**Classificazione.** Si possono classificare gli oggetti contro-covarianti:

- Gli scalari corrispondono alle quantità fisiche che non variano per un cambio di base. Talvolta vengono detti invarianti. Si noti che gli invarianti sono definiti a seconda delle trasformazioni: il tempo è uno scalare in fisica classica, ma non in fisica relativistica. Alcuni esempi sono la massa a riposo e la carica. La temperatura è data dalla velocità media delle particelle rispetto al centro di massa del corpo, dunque è prescritta nel riferimento solidale.
- Un vettore (contro-variante) è una ennupla reale che trasforma in modo contro-variante. Le coordinate di un vettore trasformano come

$$x'^i = B^i_j x^j$$

- Un tensore di rango  $(2,0)$  è un insieme di  $n^2$  numeri reali che, per un cambio di base, trasforma come

$$T'^{kl} = B^k_i B^l_j T^{ij}$$

Un tensore di questo tipo si può rappresentare con una matrice (ma non è una matrice!).

In modo astratto, un tensore è un insieme di vettori e covettori legati dal prodotto tensoriale. Un vettore è un tensore di rango  $(1,0)$ . Uno scalare è un tensore di rango  $(0,0)$ .

**Oggetti covarianti.** Ci si chiede se esistono quantità fisiche che trasformano in modo covariante. Le nuove coordinate di un vettore sono combinazioni lineari delle vecchie coordinate

$$\underline{x}' = B\underline{x} \implies x'^j = B^j_i x^i$$

Per trovare i coefficienti che legano le due coordinate si utilizzano le derivate

$$B^j_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Le coordinate di un oggetto contro-variante si trasformano come

$$x'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i, \quad T'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} T^{ij}$$

Tutte le derivate di ordine dispari di un oggetto contro-variante trasformano in maniera covariante. L'esempio più importante è il gradiente  $\nabla f(\underline{x})$ . Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = F^i_j \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Un vettore covariante (covettore) è una ennupla reale che, per un cambio di base, trasforma come

$$a'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a_i$$

cioè come la base, in modo covariante. Un tensore di rango  $(0, 2)$  è un insieme di  $n^2$  numeri reali che trasforma come

$$T_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} T_{ij}$$

### Lezione 3

Il formalismo covariante è utile per cambi di base che dipendono dal tempo e dallo spazio che appaiono in relatività generale. In questo caso essi ne sono indipendenti quando si studia la relatività speciale.

mer 01 mar  
2023 13:30

## 2.2 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono cambi di base in uno spazio  $\mathbb{R}^4$  alle volte scritto  $\mathbb{R}^{3+1}$  per distinguere le dimensioni spaziali da quella temporale. Le coordinate di un punto sono

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

Si utilizzano le unità naturali. La più semplice trasformazione di Lorentz è un boost in direzione  $x$ . Vale  $x \equiv x'$ . Inoltre  $y \parallel y'$  e  $z \parallel z'$ . Le relazioni che legano le coordinate nei due riferimenti sono

$$x'^0 = t' = \gamma t - \gamma\beta x, \quad x'^1 = x' = \gamma x - \gamma\beta t, \quad x'^2 = y' = y, \quad x'^3 = z' = z$$

La forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Si evitano le notazioni matriciali perché complicano i calcoli rispetto la convenzione di Einstein

$$x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu$$

Per convenzione, in relatività speciale le lettere greche indicano indici tetra-dimensionali, le lettere latine indicano le tre componenti spaziali. La scrittura precedente descrive come un vettore che descrive la tetra-posizione sia un vettore contro-variante cioè trasformi opponendosi alla trasformazione delle basi.

Le trasformazioni di Lorentz coinvolgono boost, rotazioni e traslazioni. Esse costituiscono il gruppo di Poincaré. Si noti che un boost in direzione arbitraria è definito mantenendo gli assi equiversi, questo perché più boost successivi ruotano il sistema finale rispetto a quello iniziale. Il boost in direzione generica è

$$t' = \gamma t - \underline{v} \cdot \underline{x}, \quad \underline{x}' = \underline{x}_\perp + \gamma(\underline{x}_\parallel - \underline{v}t), \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

dove  $\underline{v}$  è la velocità relativa tra i due riferimenti. Bisogna porre attenzione perché questa scrittura mischia la notazione dello spazio di Minkowski (la scrittura della trasformazione di Lorentz) con la notazione dello spazio euclideo ( $\underline{v}$ ,  $\underline{x}_\perp$ ,  $\underline{x}_\parallel$ ). Le componenti parallele alla direzione del moto si mescolano con il tempo, mentre quelle perpendicolari rimangono inalterate: sono invarianti di Lorentz.

### 2.2.1 Spaziotempo di Minkowski

Lo spaziotempo di Minkowski  $\mathcal{M}$  è lo spazio dei vettori applicati su  $\mathbb{R}^4$  in cui i cambi di base sono definiti dalle trasformazioni di Lorentz. I punti di  $\mathcal{M}$  sono gli eventi e i punti materiali hanno traiettorie funzioni del tempo proprio  $\tau$  cioè il tempo misurato dall'osservatore solidale al punto materiale. Questo spazio è analogo allo spazio euclideo.

**Teorema.** Nello spazio  $\mathcal{M}$  è possibile definire un tensore metrico

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

tale per cui la norma di un quadrivettore

$$\|a\|^2 = (a^\mu)^2 = a^\mu a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$$

risulta essere un invariante di Lorentz.

Si consideri il tetravettore dello spostamento infinitesimo di un punto materiale  $ds = dx^\mu$ . La sua norma è

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Un punto che si muove alla velocità della luce implica  $(ds)^2 = 0$ , ma da questo deriva che la velocità della luce è un invariante perché  $(ds)^2$  è uno scalare. Lo spostamento infinitesimo  $ds$  permette di calcolare la distanza. Il motivo dell'utilizzo dello spazio di Minkowski è l'automatica compatibilità con la teoria della relatività.

**Norma pseudo-euclidea di Minkowski.** Formalmente, la distanza è definita positiva. La norma di Minkowski non induce una tale distanza, per questo è detta norma pseudo-euclidea: la proprietà di definita positività è sostituita con la non degenerazione (le altre due proprietà sono la linearità della prima entrata e la simmetria, che danno vita ad una forma bilineare), questo distingue uno pseudo-prodotto interno dal prodotto interno vero e proprio.

La norma di Minkowski può assumere valori positivi (eventi di tipo tempo, time-like), negativi (tipo spazio, space-like) e nulli (tipo luce, light-like). Eventi di tipo tempo e tipo luce possono essere connessi causalmente. Eventi di tipo spazio non possono essere connessi causalmente.

Il fatto che il tensore metrico sia diagonale rende semplice passare da un vettore ad un covettore. La metrica permette di alzare ed abbassare gli indici.



**Teorema.** Se  $a^\nu$  è un vettore contro-variante, allora il corrispondente vettore covariante ha componenti

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu = (a^0 \quad -a^1 \quad -a^2 \quad -a^3)$$

Questo non si può fare in relatività generale, non esiste una relazione globale, ma bisogna utilizzare il trasporto parallelo.

Lo spazio di Minkowski si può vedere come analogo dello spazio euclideo. Sebbene lo spazio di Minkowski non sia uno spazio metrico (la metrica, la distanza di Minkowski non è propriamente una metrica, ma una forma bilineare indefinita e non degenere), esso contiene sotto-varietà con metriche di Riemann che forniscono la geometria iperbolica. Nello spazio euclideo si ha un prodotto scalare che induce una norma che induce una distanza

$$\langle \underline{x} | \underline{x} \rangle = \|\underline{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad d(\underline{x}, \underline{y})^2 = \|\underline{x} - \underline{y}\|^2$$

Nello spazio di Minkowski si ha

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \|x^\mu\|^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad d(\underline{x}, \underline{y})^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)$$

**Postulati della relatività speciale.** Si utilizza il formalismo covariante per scrivere leggi fisiche automaticamente in accordo con la relatività speciale. La relatività speciale ha due postulati:

- Le leggi della fisica hanno la stessa forma funzionale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale.

Si vuole costruire un formalismo che soddisfi questi due postulati. Il secondo si è già risolto perché si è affermato che tutti i sistemi fisici evolvono nello spazio di Minkowski: sopra (quando si parla dello spostamento infinitesimo  $ds$ ) si è dimostrato che qualunque coppia di eventi è costruita in maniera tale che la misura della velocità sia sempre minore di  $c$  e, se i due punti si muovono alla velocità della luce, allora tutti gli osservatori inerziali concordano sulla loro velocità. Lo spaziotempo di Minkowski verifica il secondo postulato. Formalmente bisognerebbe introdurre altre ipotesi come l'omogeneità, l'isotropia e la mancanza di memoria (memorylessness) dello spazio.

Il primo postulato equivale ad affermare che tutte le leggi fisiche devono essere relazioni tra tensori. In tale modo, la forma delle leggi rimane identica in ogni riferimento

$$f(s, x^\mu, T^{\mu\nu}) = 0 \iff f(s, x'^\mu, T'^{\mu\nu}) = 0$$

Una relazione tra tensori si può esprimere come un nuovo tensore. Da questo si nota

$$S^{\mu\nu\cdots} = 0 \implies S'^{\lambda\rho\cdots} A^\mu{}_\lambda A^\nu{}_\rho \cdots = 0 \implies S'^{\lambda\rho\cdots} = 0$$

Ad esempio, la forza di Lorentz si può scrivere come

$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \implies f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

da cui si può vedere la validità del primo postulato osservando

$$S^\mu = f^\mu - qF^{\mu\nu}u_\nu = 0$$

## 2.3 Cinematica relativistica

Si costruiscono la cinematica e la dinamica relativistiche in maniera analoga alla fisica classica. Lo spostamento infinitesimo classico è

$$d\underline{x} = (dx, dy, dz)$$

Similmente, il quadri-spostamento è

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

In fisica classica, le traiettorie sono parametrizzate dal tempo perché universale. In relatività speciale, esse sono parametrizzate dal tempo proprio, cioè il tempo misurato nel riferimento solidale al punto materiale. Il tempo proprio è un invariante di Lorentz. Infatti, ponendosi nel riferimento solidale si ha

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (d\tau)^2 - 0 - 0 - 0 = (d\tau)^2$$

Fisicamente, il tempo proprio è il tempo misurato da qualsiasi osservatore solidale con il punto materiale. La definizione stessa prescinde dall'osservatore perché lo costringe ad essere solidale al punto.

## Lezione 4

lun 06 mar  
2023 13:30

**Velocità.** Definiti l'analogo della posizione e l'analogo del tempo, si può introdurre l'analogo della velocità classica  $\underline{v} = d_t \underline{x}$  tramite il concetto di quadri-velocità

$$u^\mu \equiv d_\tau x^\mu$$

Il formalismo covariante permette di sapere già che tale quantità è un vettore contro-variante perché si ha un quadrivettore contro-variante  $dx^\mu$  moltiplicato per un invariante di Lorentz  $d\tau^{-1}$ .

Si vede il significato fisico della quadri-velocità e la sua relazione con la velocità spaziale. Si consideri un boost lungo l'asse  $x$ . Dalle leggi di trasformazione dal riferimento solidale a qualsiasi altro, si ottiene

$$d_\tau t = \gamma(v) \implies \boxed{dt = \gamma(v) d\tau}$$

Questo è il teorema della dilatazione dei tempi. Esso permette di collegare la velocità spaziale con la quadri-velocità

$$d_\tau x^1 = d_t x^1 d_\tau t = \gamma(v) d_t x^1 = \gamma(v) v_x \implies u^\mu = \gamma(1, \underline{v})$$

La quadri-velocità è il vettore tangente alla traiettoria nello spazio di Minkowski.

**Accelerazione.** In analogia con quanto fatto, si definisce la quadri-accelerazione

$$\underline{a} = d_t \underline{v} \implies a^\mu = d_\tau u^\mu = d_\tau^2 x^\mu$$

L'accelerazione causa una variazione del moto. La relazione tra l'accelerazione spaziale e la quadri-accelerazione è

$$a^\mu = \gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \underline{v} + \gamma \underline{a})$$

Rispetto alla fisica classica, compare l'addendo  $\dot{\gamma} \underline{v}$ . Fornendo un'accelerazione, non solo si perturba il moto generando una velocità (in direzione diversa da quella già presente) tramite l'addendo  $\gamma \underline{a}$ , ma si aumenta il fattore di Lorentz, la velocità già presente tramite l'addendo  $\dot{\gamma} \underline{v}$ , aumentando così anche l'energia cinetica in direzione della velocità originaria.

**Quantità di moto.** Si definisce la prima quantità derivata. In fisica classica, la quantità di moto (o momento lineare) è  $\underline{p} = m \underline{v}$ . In relatività speciale si definisce il quadri-momento

$$\boxed{p^\mu = m u^\mu} = \gamma m(1, \underline{v})$$

dove  $m$  è la massa a riposo: affinché  $p^\mu$  sia un quadri-vettore, il fattore  $m$  dev'essere un'invariante di Lorentz.

**Forza.** La definizione classica di forza è  $\underline{F} = m\underline{a}$ . Contro-intuitivamente, la generalizzazione relativistica non è  $f^\mu = ma^\mu$ . Infatti, la quadri-accelerazione  $a^\mu$  ha due addendi che contribuiscono ai modi con cui si trasferisce energia. Tali modi sono in numero maggiore rispetto alla fisica classica. Dato che in quest'ultima,  $\underline{F} = m\underline{a}$  descrive il modo in cui si trasferisce l'energia, sorge una incompatibilità tra le modalità di scambio dell'energia in fisica classica ed in relatività speciale. La corretta definizione di forza utilizza il teorema dell'impulso

$$\underline{F} = d_t \underline{p} \implies f^\mu = K^\mu = d_\tau p^\mu$$

La relazione tra la forza classica e quella relativistica è

$$f^\mu = d_\tau p^\mu = d_\tau t d_t p^\mu = \gamma d_t(\gamma m, \gamma m v)$$

**Principi della dinamica.** I primi due principi della dinamica newtoniana sono validi anche in meccanica relativistica. Il primo principio afferma che esiste una classe privilegiata di sistemi di riferimento (detti inerziali) che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Questo tipo di riferimento è stato inventato per offrire un ambiente in cui l'assenza di forze corrisponde all'assenza di perturbazione. Si ritrova questa stessa presupposizione in relatività speciale, ma non in relatività generale in cui si mette in discussione il concetto di sistema inerziale. In relatività speciale, il secondo principio va sostituito con una legge più generale tramite il teorema dell'impulso.

**Terzo principio della dinamica – conservazione del momento.** In relatività non vale il principio di azione, reazione. In fisica classica esso è equivalente alla conservazione del momento lineare. Tuttavia, la formulazione del terzo principio come azione-reazione non è compatibile con la relatività speciale: un corpo rigido non può *istantaneamente* generare una forza uguale e contraria a quella applicata. L'informazione ha una velocità massima di propagazione: in relatività non esistono corpi rigidi, cioè un insieme di punti per il quale, muovendone uno, si muovono tutti gli altri istantaneamente. Microscopicamente, in un corpo rigido le perturbazioni si propagano localmente come interazioni elettromagnetiche fino all'altra estremità del corpo generando un effetto complessivo di movimento. La conservazione della quantità di moto vale anche in relatività speciale senza dover utilizzare il corpo rigido. In fisica classica, la conservazione del momento si esprime come

$$p^{\text{tot}} = \sum_i p_i^{\text{in}} = \sum_i p_i^{\text{fin}}$$

cioè il momento totale è una costante del moto. Il fatto che questo sia equivalente al principio di azione, reazione lo si dimostra attraverso il corpo rigido. In relatività, non si può utilizzare il corpo rigido, pertanto si utilizza il principio di conservazione del quadri-momento. In un sistema di  $n$  particelle interagenti vale

$$\sum_{i=1}^n p_i^{\mu, \text{in}} = \sum_{i=1}^m p_i^{\mu, \text{fin}}$$

dove non è necessario che  $n = m$ . Il principio di conservazione del momento non è un assioma in meccanica classica, relativistica o quantistica, ma deriva dalla simmetria della situazione fisica. Noether dimostra che se una teoria fisica ammette rappresentazione lagrangiana e la teoria è invariante per traslazione, allora si ha conservazione del momento e dell'energia. Visto che tale proprietà vale in meccanica classica, meccanica quantistica non relativistica e meccanica relativistica, allora si è giustificati nello scrivere il principio di conservazione del quadri-momento.

**Energia.** La prima componente del quadri-momento è l'energia relativistica

$$p^0 = E = \gamma m$$

Il principio di conservazione del quadri-momento vale componente per componente. Per questo, la conservazione del momento nella prima componente è la conservazione dell'energia. Avendo delle interazioni tra delle particelle, pur senza sapere risolvere la dinamica di un sistema, si possono porre dei vincoli sulle quantità cinematiche imponendo la conservazione del momento.

**Singola particella.** Si studia la cinematica di una singola particella. Essa può evolvere in due modi: la particella si muove nello spazio-tempo oppure la particella decade in altre particelle. Si consideri il primo caso. L'energia relativistica e l'energia cinetica classica sono

$$E = p^0, \quad E = \frac{1}{2}mv^2$$

Si noti che queste sono le uniche quantità fisiche nella relatività e fisica classica rispettivamente. L'energia (relativistica e cinetica rispettivamente) è una proprietà che dipende dal moto della particella, ma è intrinseca ad essa: basta sapere la massa e la velocità. L'energia potenziale descrive potenzialmente quanta energia cinetica può ottenere una particella in virtù della sua posizione in una regione in cui sono presenti dei campi. Tramite il teorema di Poynting, il campo elettromagnetico cede energia ad una particella carica sotto forma di energia cinetica. Affinché si possa descrivere correttamente l'interazione di una particella con un campo, bisogna risolvere simultaneamente l'equazione della particella e l'equazione del campo.

La norma del quadri-momento è

$$p_\mu p^\mu = p^0 p_0 + p^i p_i = (p^0)^2 - (p^i)^2$$

Sapendo che essa è un invariante di Lorentz, si utilizza il riferimento più comodo: quello solidale. Pertanto

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 = m^2$$

Dunque, in ogni riferimento inerziale vale

$$\boxed{p_\mu p^\mu = m^2}$$

Dalle relazioni sopra si ottiene

$$m^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2 \implies E^2 = m^2 + p^2$$

Si consideri una particella con una velocità  $\underline{v}$ . Si trova la relazione tra la trasformazione di Lorentz per arrivare nel riferimento solidale con la particella e la velocità della particella. Si ha

$$p = \gamma m v \implies \boxed{v = \frac{p}{\gamma m} = \frac{p}{E}}$$

Inoltre, dalla prima componente del momento si ha

$$E = \gamma m \implies \boxed{\gamma = \frac{E}{m}}$$

Da queste formule si hanno due importanti risultati che evidenziano il ruolo privilegiato della luce. Per particelle massive,  $m \neq 0$ , si ha

$$p^\mu = (E, \underline{p}) = (\sqrt{m^2 + p^2}, \underline{p}), \quad v = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} < 1$$

In relatività, esistono anche le particelle massless,  $m = 0$ , per cui si ha

$$p^\mu = (E, \underline{p}) = (p, \underline{p}), \quad v = 1$$

Esse si muovono alla velocità della luce. Risulta essere fortuito avere messo la luce in una posizione di preminenza. Questo è legato al fatto che nel 1905 l'unica particella massless nota era il fotone. Modernamente, le particelle massless conosciute sono le otto varietà di gluoni, il fotone e le perturbazioni dello spazio-tempo cioè un oggetto classico con una dubbia struttura quantistica un tempo detto gravitone.

## Lezione 5

mar 07 mar  
2023 13:30

In fisica classica, le particelle massless non esistono perché non potrebbero perturbare il mondo né essere perturbate dal mondo. Dalla seconda legge di Newton, qualunque forza esercitata su di una particella massless non è in grado di generare un'accelerazione e quindi un moto. Tale moto non è osservabile perché non si può perturbare. Per il rasoio di Occam, se un ente non ha possibilità di essere osservato né di perturbare il mondo, si presuppone che tale oggetto non esiste.

Ci si chiede se una particella massiva può diventare massless e viceversa. Il fatto che esiste una corrispondenza tra massa ed energia e che l'una si tramuti nell'altra non è una conseguenza della relatività. Infatti, una particella ha una massa a riposo con dimensioni di energia, ma non si può trasformare in energia: essa è un nucleo intoccabile che preserva l'identità della particella. Si può definire l'energia cinetica della particella come

$$K = E - m = m(\gamma - 1)$$

Nel 1905 non si conoscevano le particelle ultra-relativistiche. Gli unici tipi di particelle note erano quelle per cui  $v \ll 1$ . Sviluppando l'energia cinetica in serie di Taylor si ottiene

$$K \approx m + \frac{1}{2}mv^2 + o(v^2) - m = \frac{1}{2}mv^2 + o(v^2)$$

La minima energia di una particella è la propria massa a riposo: una particella è inviolabile per quanto concerne la propria massa a riposo. Tuttavia, Einstein intuisce che una frazione della massa intoccabile che preserva l'identità della particella può essere convertita in energia cinetica. Una dimostrazione della violazione dell'identità di una particella è il decadimento del pione neutro  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Il pione ha massa a riposo  $m \approx 139 \text{ MeV } c^{-2}$ . La massa del pione si trasforma completamente in energia, onde elettromagnetiche. Da questo si capisce che una particella massiva si può trasformare in almeno due particelle massless. Per la conservazione della quantità di moto, una particella massiva non si può trasformare in una sola particella massless. Infatti, si consideri il riferimento solidale al pione. In esso si ha la quantità di moto pari a

$$p_\pi^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

Per conservazione, le componenti spaziali del fotone sono nulle. Dato che la massa del fotone è nulla, allora l'energia è

$$E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + p_\gamma^2 = 0$$

Per la conservazione della prima componente, cioè dell'energia, si ottiene  $m = 0$ , ma questo non è possibile perché  $m > 0$ . Pertanto, non esistono decadimenti ad un corpo così come una particella isolata non può cambiare massa.

## 3 Decadimenti

Si consideri uno stato iniziale in cui si ha una particella con momento  $p^\mu$ . La situazione finale presenta  $N$  particelle con momenti  $p_i^\mu$ . La quantità da utilizzare è il quadri-momento totale

$$p_{\text{tot}}^\mu = \sum_{i=1}^N p_i^\mu \quad (= p^\mu)$$

Per studiare i decadimenti si utilizza l'invariante dato dalla norma del quadri-momento totale

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - p^2 = \left[ \sum_{i=1}^N E_i \right]^2 - \left[ \sum_{i=1}^N \underline{p}_i \right]^2$$

La quantità invariante che si usa più frequentemente in fisica delle particelle è la prima variabile di Mandelstam, detta anche massa invariante:

$$s = (p_{\text{tot}})_\mu (p_{\text{tot}})^\mu = p_\mu p^\mu$$

Si dice massa invariante perché nella sintesi di una particella da due altre particelle, può capitare che la massa finale sia la somma delle masse iniziali. La prima variabile di Mandelstam coincide con la massa a riposo della particella finale. Essendo la massa a riposo un invariante, allora si dice che la prima variabile di Mandelstam è la massa invariante. In generale tale sintesi non avviene, ma si ha scattering o generazione di altre particelle.

**Decadimento a due corpi.** La prima variabile di Mandelstam si può utilizzare per studiare i decadimenti a due corpi. Il decadimento a due corpi ha la forma  $a \rightarrow b + c$ . La conservazione del momento è

$$p_a^\mu = p_b^\mu + p_c^\mu$$

Si hanno quattro vincoli dati dalle componenti del quadri-momento. Per determinare tutte le energie e tutte le quantità di moto delle particelle finali, sapendo già di quali particelle si tratta (cioè la massa), si ha bisogno di tre incognite per particella (cioè le componenti del momento spaziale perché l'energia è nota da  $E^2 = m^2 + p^2$ ). Per un decadimento a due corpi, si hanno sei incognite (tre per particella) e quattro equazioni (la conservazione del quadri-momento). Si consideri il decadimento  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  ed il riferimento solidale al pione. Il momento totale è quello del pione

$$p_\pi^\mu = (M_\pi, 0, 0, 0)$$

Per conservazione del quadri-momento si ha

$$p_\pi^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \implies p_2^\mu = p_\pi^\mu - p_1^\mu$$

dove  $p_1^\mu$  è il momento del muone e  $p_2^\mu$  è il momento dell'anti-neutrino muonico. La norma della relazione precedente è

$$\begin{aligned} m_2^2 = \|p_2^\mu\|^2 &= \|p_\pi^\mu - p_1^\mu\|^2 = \|p_\pi^\mu\|^2 - 2(p_\pi)_\mu p_1^\mu + \|p_1^\mu\|^2 \\ &= M_\pi^2 - 2(p_\pi)_\mu p_1^\mu + m_1^2 = M_\pi^2 - 2M_\pi E_1 + m_1^2 \end{aligned}$$

da ciò si ricava l'energia del muone e del neutrino

$$E_1 = \frac{M_\pi^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M_\pi}, \quad E_2 = \frac{M_\pi^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M_\pi}$$

Si riesce a determinare univocamente l'energia perché si conoscono le particelle dello stato finale. Ci si chiede quale sia la massa massima delle particelle finali affinché la particella iniziale vi possa decadere. Un decadimento può avvenire qualora

$$m_a \geq m_b + m_c$$

Infatti, la minima configurazione energetica è quella per la quale le particelle prodotte si trovano a riposo nel riferimento della particella iniziale:

$$p_a^0 = p_b^0 + p_c^0 \implies m_a = m_b + m_c$$

Si calcolano le energie e le quantità di moto in un generico sistema di riferimento. Si pone l'asse  $z$  lungo il moto della particella iniziale. Bisogna utilizzare le trasformazioni di Lorentz. Si ricorda

$$\gamma = \frac{E_\pi}{M_\pi}, \quad v = \frac{p_\pi}{M_\pi}$$

Nel riferimento solidale (rest frame, RF,  $S'$ ) al pione, si definisce l'angolo  $\theta'$  del muone rispetto l'asse  $z' = z$ . Dunque, in componenti si ha

$$p'_1 \sin \theta' = p_1'^1, \quad p'_1 \cos \theta' = p_1'^3$$

Nel riferimento  $S$  del laboratorio si ottiene

$$p_1^1 = p_1'^1, \quad p_1^3 = \gamma(p_1'^3 + vE_1'), \quad E_1'^2 = m_1^2 + p_1'^2$$

Per grandi velocità, l'angolo misurato nel laboratorio diventa sempre minore. Infatti, la tangente è

$$\tan \theta = \frac{p_1^1}{p_1^3} = \frac{p_1'^1}{\gamma(p_1'^3 + vE')} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 1$$

Delle sei incognite, le variabili che si sanno determinare sono le due energie e i due (moduli dei) momenti, rimangono ignoti gli angoli di decadimento  $\theta$  e  $\varphi$ .

**Decadimento a tre corpi.** Il decadimento schematico è  $a \rightarrow b + c + d$ . Gli esempi tipici sono

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Le variabili non determinabili sono cinque (tre variabili per ogni particella finale, nove totali, meno quattro equazioni dalla conservazione). Per un decadimento a tre corpi, è facile calcolare l'energia minima e massima di una determinata particella nel riferimento solidale. La configurazione di minima energia di tale particella è quella in cui la particella è ferma, mentre le altre due particelle conservano il quadri-momento. La configurazione di massima energia è quella per la quale la particella è in moto in direzione opposta alle altre due particelle (che hanno traiettorie parallele). Questa configurazione si può immaginare come un decadimento a due corpi: la particella considerata e una particella somma delle due rimanenti. Per l'esempio del decadimento muonico si ha

$$E_{e^-}^{\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2^2 + m_3^2)}{2M} \approx \frac{1}{2}M$$

dove  $M$  è la massa del muone,  $m_2$  ed  $m_3$  sono le masse dei neutrini. Si noti che i decadimenti sono processi di meccanica quantistica e pertanto non sono deterministici. Gli angoli di decadimento sono descritti tramite una distribuzione di probabilità.

**Decadimenti.** I decadimenti sono una transizione spontanea da un corpo (una particella) ad  $N$  corpi

$$a \rightarrow b + c + d + \dots$$

In meccanica quantistica (classica e relativistica), si calcolano le probabilità di transizione. Le tecniche imparate in Meccanica Quantistica sono le stesse utilizzate in fisica delle particelle elementari. Si consideri un atomo di idrogeno in cui l'elettrone si trova nello stato  $2p$ . L'elettrone in tale stato può transire allo stato fondamentale  $1s$ . Tale decadimento è veloce (avviene in 1.6 ns) perché soddisfa le regole di selezione di dipolo elettrico

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta s = 0, \quad \Delta j = 0, \pm 1, \quad j = 0 \not\rightarrow 0$$

Il decadimento  $2s \rightarrow 1s + \gamma\gamma$  non può avvenire all'ordine più basso in teoria perturbativa perché non rispetta le regole di selezione. Tuttavia, questo non significa che è di certo impossibile, ma che è molto soppresso. Infatti, esso ha una vita media di 0.125 s con emissione di due fotoni a 243 nm. Una particella può decadere in particelle arbitrarie (rispettando i vincoli cinematici) a meno che sia presente una regola di selezione che lo impedisce. Tuttavia anche se essa fosse presente, il decadimento potrebbe avvenire comunque, ma con una lunga vita media.

Ad esempio, il decadimento

$$\mu^- \rightarrow \pi^- + \nu_\mu$$

non può avvenire perché la massa dei prodotti è superiore alla massa della particella iniziale. Il decadimento più frequente è

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \tau = 2.8 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Inoltre, i seguenti decadimenti non possono avvenire

$$\pi^- \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$$

per violazione della carica elettrica e la legge di conservazione del numero elettronico rispettivamente. In base a come decadono le particelle, si possono dedurre le leggi di conservazione da cui si è introdotto il Modello Standard cioè quel sistema di simmetrie e leggi di conservazione che determinano le interazioni fondamentali.

**Ampiezza di decadimento e vita media.** La quantità caratteristica di un decadimento è l'ampiezza di decadimento  $\Gamma$ . Essa è la probabilità per unità di tempo che una particella decada. La vita media è il reciproco dell'ampiezza di decadimento

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

### 3.1 Regola d'oro di Fermi

La probabilità di decadimento è data dalla regola d'oro di Fermi. Essa fornisce l'ampiezza di transizione (in questo caso di decadimento) in funzione dell'hamiltoniana del sistema. La probabilità che un sistema fisico transisca da uno stato iniziale ad uno stato finale è

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \rho(E)$$

dove  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$  è l'elemento di matrice che collega lo stato finale e lo stato iniziale perturbato

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle f | \psi(t) \rangle = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle$$

mentre  $\rho(E)$  è la densità degli stati finali.

### Lezione 6

La regola d'oro di Fermi è stata dedotta per processi di emissione di fotoni da parte di elettroni in stati eccitati. In meccanica quantistica non relativistica, il processo di emissione

mer 08 mar  
2023 13:22

$$H^* \rightarrow H + \gamma$$

risulta difficile da trattare. La fisica delle particelle vede il processo di emissione come un decadimento a due corpi. Ma nella disciplina di cui sopra, il fotone si deve trattare come un'onda elettromagnetica, non esiste il fotone come particella: bisogna introdurre un termine perturbativo nell'hamiltoniana, con un andamento periodico. Il fenomeno è spiegato tramite l'interazione di un campo classico elettromagnetico con un atomo di idrogeno descritto quantisticamente.

Nella densità di stati sono presenti tutte le configurazioni cinematiche (dei prodotti) tranne quelle che violano il principio conservazione dell'energia e del momento. Conviene riscrivere la regola d'oro come

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \int \prod_a \frac{V d^3 p_a}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left[ E_f + \sum_{k=1}^{N_f} E_k - E_i \right] \delta^3 \left[ \underline{p}_f + \sum_{k=1}^{N_f} \underline{p}_k - \underline{p}_i \right]$$

dove l'integrale (e la delta spaziale) è lo spazio-fase relativistico. Se esiste uno stato finale che viola la conservazione del momento o dell'energia, allora l'integrale è nullo. Il termine  $V$  è il volume su cui si normalizza la funzione d'onda della (sola) particella finale (non di quella iniziale). La scelta di tale volume è arbitraria e tipicamente si vuole che esso sia  $\mathbb{R}^3$ . Per ogni particella finale si ha un termine  $V$  a numeratore. Tuttavia, in quanto termine di normalizzazione, la funzione d'onda di una qualunque particella è

$$\psi \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$$

mentre l'elemento della matrice (che non è relativistica) di transizione è

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle f | \psi(t) \rangle = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle$$

Sebbene ogni particella finale presenti un fattore  $V$ , l'elemento di matrice è proporzionale a  $\frac{1}{\sqrt{V}}$ , dunque nella regola d'oro di Fermi, il volume si semplifica: si può scegliere arbitrariamente e per questo si può utilizzare  $\mathbb{R}^3$ .



Questa formula è incompatibile con la relatività speciale. La formula d'oro venne scoperta da Dirac sia in forma classica che relativistica. Fermi intuì la sua ampia validità: si può applicare a tutti i sistemi fisici che subiscono delle transizioni.

Si vede il problema che sorge nell'applicare la regola d'oro di Fermi alla relatività speciale. Secondo l'interpretazione Copenhagen (anche detta statistica generalizzata), la funzione d'onda  $\psi(\underline{x}, t)$  è legata alla probabilità  $P_V$  di trovare la particella in una regione dello spazio  $V$  tramite

$$P_V = \int_V |\psi|^2 d^3x$$

Si vuole che tale probabilità sia un invariante di Lorentz. Ad esempio, si vuole sapere la probabilità che una particella scompaia (come in un decadimento). Tuttavia, il volume  $V$  non è un invariante di Lorentz. Infatti, si consideri il volume proprio infinitesimo  $dV = dx dy dz$ . Per un boost lungo  $z$ , il volume in un riferimento non solidale  $S'$  è

$$d^3x' = dx dy \frac{dz}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} d^3x$$

In quanto il fattore di Lorentz che permette un boost al riferimento della particella è

$$\gamma = \frac{E}{m} \propto E$$

si ridefinisce la funzione d'onda in modo tale che, quando si calcola la probabilità, il fattore di Lorentz del volume si semplifica con il fattore della funzione d'onda: in questo modo la probabilità di transizione diventa un invariante. Dalla funzione d'onda classica  $\psi$  con normalizzazione

$$\int_V |\psi|^2 d^3x = 1$$

si introduce la funzione d'onda relativistica  $\tilde{\psi}$  secondo la normalizzazione

$$\int_V |\tilde{\psi}|^2 d^3x = 2E \implies \tilde{\psi} = \sqrt{2E} \psi$$

dove  $d^3x$  è calcolato nel riferimento solidale alla particella, mentre  $\tilde{\psi}$  e  $E$  sono la funzione d'onda e l'energia calcolate in un riferimento arbitrario. Si utilizzano le energie con un fattore 2 poiché esso si semplifica nelle formule di sezione d'urto. A questo punto si ha

$$\begin{aligned} \gamma' > 1, \quad P' &= \int_V |\tilde{\psi}'|^2 d^3x' = \int_V |\tilde{\psi}'|^2 \frac{d^3x}{\gamma'} = \frac{2E'}{\gamma'} \\ &= 2m = 2E = \int_V |\tilde{\psi}|^2 d^3x = P, \quad \gamma = 1 \end{aligned}$$

dove  $\gamma'$  è rispetto al riferimento solidale alla particella. Si sfrutta tale proprietà per generalizzare la regola d'oro di Fermi. Si consideri l'elemento di matrice non relativistico (NR)

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{\text{NR}} = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle = \langle \psi_1 \cdots \psi_n | \hat{H}_1 | \psi_a \rangle, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

dove  $\psi_a$  è la funzione d'onda della particella iniziale e  $\psi_n$  sono le funzioni d'onda delle particelle finali. L'elemento di matrice compatibile con la relatività speciale diventa

$$\mathcal{M} = \sqrt{2E_a} \prod_{i=1}^{N_f} \sqrt{2E_i} \mathcal{M}^{\text{NR}}$$

Si dimostra che questo rende invariante la probabilità di transizione. Si parte dallo spazio delle fasi. Noto

$$d^3p' = \gamma dp_x dp_y dp_z \propto E d^3p$$

Si definisce un nuovo elemento dello spazio-fasi

$$\frac{d^3p}{h^3} \rightarrow \frac{d^3p}{2E\hbar(2\pi)^3} = \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}$$

La regola di Fermi non relativistica

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \int \prod_{i=1}^{N_f} \frac{V d^3p_i}{(2\pi\hbar)^3} |\mathcal{M}^{\text{NR}}|^2 \delta \left[ E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right] \delta^3 \left[ \underline{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \underline{p}_i \right]$$

diventa la regola d'oro di Fermi relativistica

$$\Gamma = \frac{1}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 (2\pi)^4 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \delta \left[ E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right] \delta^3 \left[ \underline{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \underline{p}_i \right]$$

Si può porre

$$\delta \left[ E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right] \delta^3 \left[ \underline{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \underline{p}_i \right] \equiv \delta^4 \left[ p_a^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right]$$

La regola d'oro si utilizza per i calcoli dei decadimenti e delle sezioni d'urto. Si noti che nella formula, il numero di  $2\pi$  a numeratore corrisponde al numero di  $\delta$  e il numero di  $2\pi$  a denominatore corrisponde a quello di  $dp$ . La formula fornisce il tasso di probabilità di transizione  $R_{i \rightarrow f}$ . Per una singola particella che decade, tale tasso è detto ampiezza di decadimento  $\Gamma$ .

La regola d'oro non è invariante. L'elemento di matrice è Lorentz invariante perché costruito apposta. Lo stesso vale per lo spazio delle fasi. Pure la delta quadri-dimensionale è invariante. Lo si può vedere esplicitamente utilizzando le proprietà della delta  $\delta(f(x))$  oppure, seguire un ragionamento intuitivo. L'espressione della delta quadri-dimensionale afferma che un decadimento avviene solamente quando si ha conservazione di quadri-momento: questa è una prescrizione universale e quindi invariante. Tuttavia, il fattore  $2E_a$  non è un invariante. Pertanto, l'ampiezza di transizione non è un invariante giacché dipende dall'energia della particella iniziale. Questo risultato è atteso. Infatti, l'ampiezza di decadimento  $\Gamma$  è la probabilità per unità di tempo (il tasso) che una particella decada. La vita media  $\tau$  è il tempo di sopravvivenza di una particella:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \propto 2E_a$$

La regola d'oro di Fermi è una prescrizione per il calcolo della vita media. Essa è un tempo e quindi non è invariante. La vita media in un riferimento generico è

$$\tau = \gamma \tau_0, \quad \gamma = \frac{E}{m} \propto E \implies \tau \propto E \tau_0$$

dove  $\tau_0$  è il tempo proprio. Il fattore  $(2E_a)^{-1}$  risulta essere il fattore  $\gamma$  che deriva da considerare un tempo generico e non il solo tempo proprio. La vita media  $\tau$  (lifetime) è la vita media calcolata nel riferimento solidale alla particella.

### 3.2 Vita media e rapporto di ramificazione

**Regola di Rutherford-Soddy.** La regola d'oro di Fermi permette di spiegare la regola di Rutherford e Soddy per i decadimenti nucleari. I primi decadimenti osservati sono stati quelli di nuclei radioattivi. La formula empirica del decadimento di una quantità di materiale radioattivo è data dalla formula del decadimento radioattivo (di Rutherford-Soddy)

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Tale formula è la manifestazione di una proprietà della meccanica quantistica, cioè la manifestazione che il decadimento è un fenomeno quantistico.

Si considerino varie particelle identiche tra loro. Esse hanno un'ampiezza di decadimento finita cioè che ogni particella abbia probabilità finita di decadere in  $N$  particelle. Si consideri il riferimento solidale con le particelle. L'ampiezza di decadimento  $\Gamma = \tau^{-1}$  è il tasso di probabilità che avvenga una transizione. La probabilità che una singola particella cessi di esistere all'istante  $t + dt$  rispetto all'istante iniziale è

$$P(dt) = \Gamma dt$$

Il numero di particelle che sopravvivono ad un istante è minore del numero di particelle presenti all'istante precedente. Pertanto

$$N(t + dt) - N(t) = -N(t) \Gamma dt \implies dN = -N(t) \Gamma dt \implies N = N_0 e^{-\Gamma t}$$

Senza conoscere i processi di decadimento, cioè l'elemento di matrice  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ , si deduce che il decadimento segue una legge esponenziale descritta dall'ampiezza di decadimento. La regola di Rutherford-Soddy è una manifestazione della meccanica quantistica, in particolare essa è una proprietà specifica del fatto che la meccanica quantistica è una teoria Markoviana.

**Rapporto di ramificazione – branching ratio.** Si calcolano i decadimenti di una particella  $a$  in  $N$  particelle. Una particella può decadere in vari modi, distinti dalla probabilità di avvenimento. Ad esempio, in ordine decrescente di probabilità

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \gamma, \quad \dots$$

dove la prima ha probabilità di avvenimento pari a 99.987%. Un esempio di decadimenti più equi è

$$k^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad k^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \quad \dots$$

dove la prima avviene con probabilità 63% mentre la seconda 21%. In principio, una particella può decadere in tanti modi diversi. Si studia la relazione tra la vita media e le varie ampiezze che descrivono i decadimenti. Dalla regola d'oro di Fermi, l'ampiezza totale è la somma di ampiezze parziali

$$\Gamma = \Gamma_{a \rightarrow 1} + \Gamma_{a \rightarrow 2} + \Gamma_{a \rightarrow 3}$$

Si introduce la larghezza parziale  $\Gamma_{i \rightarrow f_j}$  (decay fraction) per cui la larghezza totale è

$$\Gamma = \sum_j \Gamma_{f_j}$$

Il rapporto di ramificazione (branching ratio, BR) è la probabilità che un decadimento avvenga

$$\text{BR} \equiv \frac{\Gamma_{i \rightarrow f_j}}{\Gamma}$$

La vita media di una particella è il reciproco della larghezza totale

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\sum_j \Gamma_j} \neq \sum_j \frac{1}{\Gamma_j}$$

La vita media totale *non* è la somma delle vite medie parziali  $\tau_j = \Gamma_j^{-1}$ .

### 3.3 Stati instabili

In meccanica quantistica, una particella che si propaga, soggetta eventualmente a delle interazioni, soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}\psi = i\hbar \partial_t \psi, \quad \psi(\underline{x}, t)$$

La sua soluzione è un'ampiezza di probabilità di trovare la particella in una certa posizione ad un determinato istante. In meccanica quantistica non relativistica, le particelle non scompaiono (cioè non sono sottoposte a decadimenti) e la probabilità di trovare la particella nello spazio è sempre unitaria

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 d^3x = 1$$

Tuttavia, in fisica delle particelle ed in meccanica quantistica relativistica, le particelle possono decadere e scomparire. Si può gestire questa situazione in due modi. Il modo corretto è costruire una teoria in cui sono presenti degli operatori che creano e distruggono le particelle. Le teorie quantistiche dei campi sono state proprio create per permettere la distruzione e la creazione delle particelle. D'altra parte, in meccanica quantistica non relativistica, si può comunque introdurre la distruzione delle particelle: si introduce un termine di smorzamento sulla funzione d'onda. Le particelle instabili sono tutte le soluzioni dell'equazione di Schrödinger tali che

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Questo è un artificio: non si fornisce una motivazione della dissipazione, sebbene esso descriva correttamente il moto. Inoltre, si introduce una nuova funzione d'onda. Si considera una particella stabile risolvendo la corrispondente equazione di Schrödinger

$$\psi(\underline{x}, t) = \psi(\underline{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

Similmente, la funzione d'onda di una particella instabile è

$$\psi(\underline{x}, t) = \psi(\underline{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

Una particella stabile è uno stato stazionario con una fase temporale. La particella instabile è costituita dalla stessa fase, ma presenta un termine che non è più uno stato stazionario perché svanisce. L'energia ed il tempo devono sottostare al principio di indeterminazione di Heisenberg. Si consideri una particella di cui si misura in modo preciso l'energia. La durata della misura deve essere grande affinché si possa vedere la particella: l'incertezza sul tempo è grande. Se si vuole misurare l'energia in modo arbitrariamente preciso, allora bisogna osservare la particella per un tempo infinitamente lungo. Se la particella è instabile, questo diventa un problema. Se la vita media è  $\tau$ , la misura si può fare in un tempo di tale ordine. Per una particella instabile non si può fare una misura di energia arbitrariamente precisa

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2} \implies \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{1}{2}\Gamma$$

Per una particella instabile, qualunque sia la precisione dell'apparato sperimentale, l'incertezza sull'energia è sempre dell'ordine della larghezza totale  $\Gamma$ .

## Lezione 7

Questa non è una limitazione: si possono osservare indirettamente energie maggiori di quelle che si possono produrre in un acceleratore.

lun 13 mar  
2023 13:30

**Acceleratore LEP, esperimento DELPHI e bosone  $Z^0$ .** L'acceleratore LEP era in grado di accelerare elettroni e positroni fino a 45 GeV. Si voleva osservare il bosone  $Z^0$  mediatore dell'interazione debole con massa  $m \approx 91$  GeV. Data la grande massa, tale bosone può avere vari decadimenti

$$Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-, \quad Z^0 \rightarrow e^+ e^-, \quad Z^0 \rightarrow q \bar{q}, \quad Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu}, \quad Z^0 \rightarrow \tau^+ \tau^-, \quad \dots$$

con branching ratios di 3.4%, 3.4%, 69.2%, 20.5% e 3.4% rispettivamente. Nell'acceleratore si fanno scontrare elettroni e positroni con energia sufficiente da creare un bosone  $Z^0$  che poi decade in altri prodotti. Ci si aspetta che il numero di bosoni osservati abbia un picco attorno all'energia

equivalente alla massa del bosone. Il picco non è una delta, ma una distribuzione Breit-Wigner (o Lorentziana per gli atomisti) più ampia con picco a  $m_Z \approx 91.1876(21)$  GeV ed una FWHM pari a  $\Gamma = 2.50$  GeV.

Si studia la comparsa di una distribuzione Breit-Wigner rispetto ad una delta e come si può trovare la sua espressione analitica. Il bosone  $Z^0$  ha una massa enorme e quindi ha la possibilità di decadere in un grande numero di particelle. Questo vale a dire che lo spazio fase è vasto: si hanno tante possibili configurazioni di particelle in stato finale le cui energie sommate forniscono la massa del bosone. Pertanto, la probabilità di decadimento  $\Gamma$  (della regola d'oro) è grande e quindi la vita media è piccola. Per il bosone  $Z^0$ , la vita media è pari a

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = 2.63 \times 10^{-25} \text{ s}$$

Anche producendo tale bosone a velocità relativistiche, esso decade praticamente immediatamente. Per una vita media così piccola, è normale che l'incertezza sull'energia sia grande. Questa non è una evidenza di violazione della conservazione dell'energia: se l'energia combinata dei fasci iniziali è 88 GeV allora l'energia dello stato finale è 88 GeV. Tuttavia, in un intervallo temporale breve, si genera una particella che dovrebbe avere una massa di 90 GeV, ma ha una massa misurata di 88 GeV: questa è l'incertezza intrinseca con cui si è in grado di determinare la massa quando si osserva un singolo bosone  $Z^0$ . Il principio di indeterminazione di Heisenberg permette di osservare particelle anche al di sotto dell'energia pari alla loro massa, cioè della soglia cinetica, a patto che decadano velocemente.

Si determina la forma analitica della distribuzione del numero di conteggi del bosone. Si esprime la funzione d'onda non più in funzione del tempo, ma in termini dell'energia, sua variabile coniugata: si utilizza la trasformata di Fourier. Data la funzione d'onda

$$\psi(\underline{x}, t) = \psi(\underline{x}) e^{-iEt} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

la trasformata è

$$\int_0^\infty \psi(\underline{x}, t) e^{iEt} dt = \int_0^\infty \psi(\underline{x}) e^{-i\tilde{E}t} e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{iEt} dt = \psi(\underline{x}) \int_0^\infty e^{i[E-\tilde{E}+i\frac{\Gamma}{2}]t} dt = \frac{i\psi(\underline{x})}{E - \tilde{E} + \frac{1}{2}i\Gamma}$$

In questo modo si esprime la funzione d'onda non più nello spazio del tempo, ma nello spazio dell'energia. La probabilità di osservare una particella con larghezza di decadimento  $\Gamma$  ad una energia  $E$  è

$$P(E) = \left| \frac{i}{E - \tilde{E} + \frac{1}{2}i\Gamma} \right|^2 = \frac{1}{(E - \tilde{E})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

Questa è la distribuzione Breit-Wigner. Poiché si conosce la distribuzione, si possono interpolare i dati sperimentali per ottenere l'energia  $\tilde{E}$ , quindi la massa, del bosone  $Z^0$ .

Nell'acceleratore LEP si osservano i prodotti del decadimento del bosone  $Z^0$ . Le particelle possono decadere in modi che non si possono osservare. Ad esempio, il bosone  $Z^0$  può decadere in una coppia neutrino, anti-neutrino con branching ratio del 20.5%. Tuttavia, la sezione d'urto dei neutrini è minuscola: essi interagiscono debolmente con la materia e quindi effettivamente l'interazione con il rivelatore è trascurabile. Per decadimenti simili non si può efficacemente osservare la distribuzione di conteggi. Tuttavia, la forma della distribuzione è la stessa a prescindere da quale decadimento si osserva. Questo perché  $\Gamma$  è il reciproco della vita media che è indipendente da come la particella decade. Infatti, la vita media è la probabilità di sopravvivenza della particella.

### 3.4 Diffusione – scattering

Si può calcolare l'ampiezza di decadimento tramite la regola d'oro di Fermi. Si estende quest'ultima per includere la diffusione. Lo scattering è il fenomeno in cui una particella che subisce una perturbazione del proprio moto a causa di un centro diffusore, un oggetto che genera un potenziale che cambia la dinamica del sistema. Una particella con moto  $p$  viene

deflessa da un centro diffusore con angolo  $\Omega$  rispetto la direzione del moto originale e passando ad un momento finale  $p'$ .

La quantità principale che descrive lo scattering è la sezione d'urto. La sezione d'urto differenziale  $d_\Omega\sigma$  è il rapporto tra il numero di particelle diffuse per unità di tempo nell'angolo solido  $\Omega$ , e il numero totale di particelle incidenti

$$d_\Omega\sigma \equiv \frac{d_\Omega N}{F}$$

dove  $F$  è il flusso cioè il numero di particelle incidenti per unità di tempo e unità di superficie. Esso ha dimensioni

$$\dim F = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}^{-2}$$

mentre il numero di particelle per angolo solido ha dimensioni

$$\dim d_\Omega N = \mathsf{T}^{-1} \implies \dim d_\Omega\sigma = \mathsf{L}^2$$

La sezione d'urto totale è

$$\sigma = \int d_\Omega\sigma d\Omega$$

Si vede il motivo fisico per cui si può immaginare che la sezione d'urto sia una superficie. Il modo più semplice per comprenderlo è studiare lo scattering in fisica classica. Si consideri una particella avvicinarsi nella direzione generale di un centro diffusore con cui interagisce. Il parametro di impatto  $b$  è la distanza tra la traiettoria della particella e la traiettoria parallela che passa per il centro diffusore [immagine]. In fisica classica, il processo è deterministico. L'equazione del moto della particella permette di trovare una relazione analitica tra l'angolo di diffusione e il parametro di impatto. Per un potenziale centrale, si ha

$$\theta = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{2V(r)}{mv_\infty^2}}}$$

Si può estendere il discorso in tre dimensioni. Si considera un intorno  $[b, b + db] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$  della particella considerata. In quanto  $\theta(b)$  è una funzione continua, l'intervallo precedente viene mappato in un intervallo di angoli solidi  $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ . Tutte le particelle nell'intorno del parametro di impatto  $(b, \varphi)$  sono diffuse deterministicamente in un intorno dell'angolo  $\theta$ . La superficie  $db \cdot b d\varphi$  è la sezione d'urto classica cioè la superficie ortogonale al piano del moto tracciata dal parametro d'impatto nel corrispondente angolo di diffusione  $\Omega$ .

**Esempio.** Si vede un esempio classico. Si calcola la sezione d'urto di un punto materiale (una particella) con un parametro di impatto  $b$  su di una sfera massiva e indeformabile (rigida ed incompressibile). [immagine] Il punto materiale rimbalza sulla sfera che non si muove. Per conservazione della quantità di moto, l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione. Si vuole determinare l'angolo di diffusione  $\theta$  cioè l'angolo che descrive il moto finale della particella rispetto al moto iniziale. Poiché si tratta la fisica classica, la funzione  $\theta(b)$  deve esistere, essere unica e di classe  $C^\infty$ . Dal diagramma si nota

$$\theta + 2\alpha = \pi$$

Quindi

$$b = R \sin \alpha = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$$

La sezione d'urto infinitesima è la superficie infinitesima nell'intorno del parametro di impatto:

$$d\sigma = b db d\varphi, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale (a meno del segno) è

$$d_\Omega\sigma = \left| \frac{b db d\varphi}{\sin \theta d\theta d\varphi} \right| = \left| \frac{R \cos \frac{\theta}{2} d(R \cos \frac{\theta}{2})}{\sin \theta d\theta} \right| = \frac{R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{1}{4} R^2$$

le apparenti semplificazioni dei differenziali sono giustificate dalla classe  $C^\infty$  di differenziabilità della funzione. La sezione d'urto totale risulta essere

$$\sigma = \int d\Omega \sigma d\Omega = \frac{1}{4} R^2 4\pi = \pi R^2$$

cioè la superficie della sfera proiettata nel piano ortogonale al moto (quindi l'area di un cerchio). Se il punto materiale è distante dalla sfera,  $b > R$ , allora la propria traiettoria è imperturbata. Viceversa, se il pnto è vicino alla sfera,  $b < R$ , allora la particella viene deflessa. Risulta normale che la sezione d'urto totale sia la proiezione della superficie della sfera sul piano ortogonale al moto. La sezione d'urto totale, che in ultima analisi è la probabilità che la particella interagisca con la sfera, dipende dal parametro di impatto in maniera banale: se il parametro di impatto è all'interno del disco (cioè la proiezione della sfera) interagisce e viceversa. Intuitivamente, la sezione d'urto descrive le condizioni affinché una particella abbia una probabilità non nulla di interagire.

**Sezione d'urto quantistica.** Una particella quantistica è un pacchetto d'onda con una incertezza associata. Dato un centro diffusore generatore di potenziale, non si ha più una relazione deterministica tra il parametro di impatto e l'angolo di diffusione. Infatti, il parametro di impatto non è univocamente determinato in quanto la particella ha un'incertezza intrinseca e in quanto le probabilità di transizione non sono deterministiche. Ad esempio, si ha una probabilità finita di osservare la particella oltre il diffusore: la particella non è un punto materiale, ma un'onda, si ha diffrazione.

**Unità di misura.** La sezione d'urto ha dimensioni  $L^2 = E^{-2}$ . Si usa l'unità di misura del barn

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 1 \text{ fm}^2$$

Per convertire dal sistema internazionale a quello naturale conviene sapere

$$1 \text{ GeV}^{-1} \approx 0.39 \text{ mb}$$

### 3.4.1 Classi di diffusione

In fisica delle particelle esistono due classi di scattering rilevanti: diffusione a targhetta (bersaglio) fissa e diffusione frontale.

**Diffusione a targhetta fissa – fixed-target experiment.** Si trova la relazione tra la sezione d'urto e le dimensioni del muro. Si consideri un flusso di particelle diretto verso un bersaglio. Si studia il numero di centri diffusori coinvolti nello scattering. Tale numero corrisponde all'intersezione della superficie del fascio diretta verso il bersaglio e la superficie del bersaglio stesso. Quindi, la superficie efficace, che contiene tutti i centri diffusori coinvolti nello scattering, è il minimo tra la superficie del bersaglio e la superficie del fascio di particelle. Il numero di particelle diffuse per unità di tempo in un angolo solido  $d\Omega$  risulta essere

$$d\Omega N = FA\tilde{N} dx d\Omega \sigma$$

dove  $A$  è la superficie efficace,  $\tilde{N}$  è la densità di centri diffusori,  $dx$  è lo spessore del bersaglio. Inoltre,  $FA$  è il numero di particelle per unità di tempo,  $\tilde{N} dx$  è il numero di centri diffusori (per unità di area, sezione d'urto).

**Diffusione frontale – head-on, collider scattering.** Due particelle si scontrano frontalmente. Lo scattering frontale trasferisce la maggiore quantità di moto e la maggiore energia. Per particelle con stessa velocità e massa, il sistema di riferimento del centro di massa coincide con quello del laboratorio.

La diffusione frontale presenta una differenza importante con la diffusione a targhetta fissa. In

quest'ultima, fin tanto che una particella è all'interno della superficie efficace, la particella interagisce con almeno un nucleo diffusore. Tuttavia, per due fasci di particelle che si scontrano, questo non è detto. La definizione precedente di flusso non tiene conto del fatto che le particelle devono essere bene allineate. Infatti, il flusso è il numero di particelle incidenti per unità di tempo per unità di superficie. Bisogna definire un nuovo tipo di flusso che descriva realisticamente le interazioni. Questo flusso generalizzato viene detto luminosità istantanea  $\mathcal{L}(t)$ . Essa è il coefficiente di proporzionalità nella relazione

$$d_\Omega N = \mathcal{L}(t) d_\Omega \sigma$$

Nella realtà, la luminosità dipende dal numero di particelle per bunch e dalla sezione d'urto del bunch.

## Lezione 8

La luminosità integrata è data dalla relazione

$$\mathcal{L} = \int \mathcal{L}(t) dt$$

La luminosità istantanea varia nel tempo perché dopo ogni collisione le particelle diminuiscono; alcune collisioni si possono verificati con atomi erranti nell'acceleratore in quanto non si ha il vuoto perfetto. La luminosità istantanea ha le stesse dimensioni del flusso cioè numero di particelle per unità di tempo e di superficie. La luminosità integrata ha dimensioni di numero di particelle per unità di superficie  $\dim \mathcal{L}_{\text{int}} = \text{L}^{-2}$ . Sapendo che la sezione d'urto è una superficie, allora si può esprimere la luminosità integrata con il reciproco del barn. Le condizioni per scoprire una nuova particella sono: una energia sufficiente dei fasci per produrre la particella e una grande luminosità rispetto la sezione d'urto della particella. Infatti, se la sezione d'urto è 1 b, allora per osservare almeno un evento si ha bisogno di una luminosità di  $1 \text{ b}^{-1}$ . Se la sezione d'urto è 1 nb, allora bisogna accumulare nel tempo una luminosità integrata pari a  $1 \text{ nb}^{-1}$ . Si noti che una luminosità elevata corrisponde ad un prefisso SI piccolo in quanto è presente il reciproco.

**Diffusione a targhetta fissa – spessore finito.** Si è detto che il numero di particelle che si diffondono in un bersaglio fisso è proporzionale alla sezione d'urto. Si è utilizzato uno spessore infinitesimo per semplificare i conti. La generalizzazione ad uno spessore macroscopico è immediata. Si consideri un fascio di particelle che interagisce con il bersaglio. Al passare del tempo, la quantità di particelle nel fascio diminuisce: il fascio entra nel bersaglio e molte particelle interagiscono con gli atomi del muro. Per un muro denso, la quantità di particelle persa è elevata grazie all'alta densità di centri diffusori. Questo è utile per calcolare la profondità del bersaglio affinché passi una frazione trascurabile di particelle. Per uno spessore infinitesimo, si ha una perdita infinitesima causata dall'interazione. La perdita aumenta con la sezione d'urto ed il flusso. Il numero di particelle che raggiungono un centro diffusore a profondità  $x$  risulta essere

$$N(x) = FA$$

Il numero di particelle rimanenti oltre tale profondità è

$$N(x + dx) = N(x) - \sigma N(x) dx \tilde{N} \equiv N(x) + (d_x N) dx \implies \frac{dN}{N} = -\sigma \tilde{N} dx$$

Dunque

$$N(x) = N(0)e^{-\sigma \tilde{N} x}$$

Si definiscono il coefficiente di attenuazione e la lunghezza omonima come

$$\mu \equiv \sigma \tilde{N}, \quad \lambda \equiv \mu^{-1} = \frac{1}{\sigma \tilde{N}}$$



### 3.5 Diffusione in meccanica quantistica

Tramite la regola d'oro di Fermi si ha un modo per calcolare la probabilità di decadimento. A questo punto si vuole calcolare la probabilità che due particelle interagiscano tra loro cioè calcolare la sezione d'urto d'interazione della particella. Un decadimento è una transizione spontanea di una particella in  $N$  particelle. D'altra parte, uno scattering si può interpretare come un decadimento catalizzato: in molti casi, la particella iniziale non ha abbastanza energia per produrre nuove particelle (perché è troppo leggera), ma ha bisogno di un'altra particella che le fornisca l'energia mancante. Secondo questa visione, si può utilizzare la regola d'oro di Fermi con due particelle in stato iniziale al posto di una sola.

Bisogna definire cosa sia un decadimento catalizzato. Innanzitutto, il flusso è il numero di particelle che raggiungono il centro diffusore per unità di tempo ed energia. In fluido-dinamica, il flusso di un mezzo materiale in una direzione è dato da  $\rho(\underline{x}) \underline{v} \cdot \underline{n}$ , dove  $\rho$  è la densità,  $\underline{v}$  la velocità del fluido,  $\underline{n}$  la normale alla superficie attraverso cui si vuole misurare il flusso. Similmente, il flusso di una particella su tanti centri diffusori è  $\tilde{N} \underline{v} \cdot \underline{n}$ , dove  $\tilde{N}$  è la loro densità. Il numero di centri diffusori attraversati da una particella in una regione dello spazio è  $\tilde{N} v \Delta t A$ , dove  $A$  è la superficie ortogonale alla direzione della particella. Il flusso risulta essere il numero di centri diffusori (numeratore) per unità di tempo e superficie (denominatore): ([r] fino a prima di Similmente, anno scorso)

$$F = \frac{\tilde{N} v \Delta t A}{\Delta t A} = \tilde{N} v = \frac{v}{V}$$

si noti che per un singolo centro di diffusione, la densità è  $\tilde{N} = \frac{1}{V}$ . Questo calcolo prevede l'approssimazione che il centro diffusore sia fermo, mentre la particella si muove. A parità di tempo, se il centro diffusore si avvicina verso la particella, allora il numero di particelle che attraversa il centro è maggiore (mentre è minore se si allontana). Per un centro diffusore con un moto generico rispetto alla particella incidente, il flusso nella direzione del moto della particella iniziale  $a$  è

$$F = \tilde{N} |\underline{v}_a - \underline{v}_b| = \frac{|\underline{v}_a - \underline{v}_b|}{V}$$

Nella regola d'oro di Fermi relativistica, l'elemento di matrice relativistico è

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \left| \langle \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n | \hat{H}_1(t) | \psi_a \rangle \right|^2$$

Si modifica tale formula affinché descriva uno scattering, cioè tenga conto di due particelle iniziali:

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \left| \langle \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n | \hat{H}_1(t) | \psi_a \psi_b \rangle \right|^2$$

Inoltre, la relazione tra la sezione d'urto e l'ampiezza di decadimento è

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{\Gamma_{i \rightarrow f}}{F} = \Gamma_{i \rightarrow f} \frac{V}{|\underline{v}_a - \underline{v}_b|}$$

Pertanto, la regola d'oro di Fermi relativistica per lo scattering vale

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2E_a} \frac{1}{2E_b} \frac{1}{|\underline{v}_a - \underline{v}_b|} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left[ p_a^\mu + p_b^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right]$$

Si noti che il coefficiente dell'integrale non è Lorentz invariante. Risulta normale che una sezione d'urto non sia invariante: essa si può interpretare come una superficie (che non è invariante in generale). Tuttavia, la sezione è invariante per tutti quegli osservatori che si muovono perpendicolarmente alla sezione d'urto stessa. Per questo, si dice sezione d'urto invariante quella sezione d'urto misurata dagli osservatori in moto ortogonale ad essa (cioè parallela al moto della particella). Quando si calcola la sezione d'urto invariante si scrive la

formula che equivale a misurare la sezione per un osservatore che si trova nella stessa direzione del moto della particella. Si dimostra che la sezione d'urto non è invariante in generale, ma che la corrispondente quantità, misurata dalla particolare classe di osservatori citata, risulta essere Lorentz invariante. Si introduce il fattore di flusso (flux factor) di Møller

$$F = 4E_a E_b |\underline{v}_a - \underline{v}_b|$$

che non è invariante in generale.

**Teorema.** Definendo il fattore di flusso Lorentz invariante (Lorentz-invariant flux factor) come

$$F = 4[(p_{a\mu} p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}}$$

allora vale

$$F = 4[(p_{a\mu} p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}} = 4E_a E_b |\underline{v}_a - \underline{v}_b|$$

per tutti gli osservatori, non solo quelli che si muovono lungo la direzione del moto della particella  $a$ . Infatti, calcolare  $F$  in un riferimento in moto nella direzione della particella fornisce il fattore di Møller; dato che  $F$  è invariante, allora tutti gli osservatori ottengono tale fattore.

In virtù del teorema precedente, la sezione d'urto invariante risulta essere

$$\sigma = \frac{1}{4[(p_{a\mu} p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}}} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left[ p_a^\mu + p_b^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right]$$

Essa è la sezione d'urto che si misura lungo il moto della particella.

## 4 Misure in fisica delle particelle

Le particelle hanno quattro tipi di interazioni (nucleare forte, elettromagnetica, nucleare debole, gravitazione). Il tipo utilizzato per la rivelazione è l'interazione elettromagnetica perché ha raggio infinito ed è intensa. Per rivelare le particelle si utilizza un processo che trasforma le particelle in particelle cariche.

### 4.1 Particelle cariche massive

Una particella pesante ha una massa molto maggiore di quella dell'elettrone  $M \gg m_e$ . Questo si applica al muone, al pione, al protone, al neutrone, ma non va bene per l'elettrone e tutte le particelle neutre. Una particella pesante che attraversa un mezzo materiale (un aggregato di atomi che sono per lo più spazio vuoto e la loro massa è concentrata nel nucleo) risente di una forza elettromagnetica dal nucleo e un'altra dagli elettroni di ogni atomo.

Si consideri l'interazione con un elettrone: se la particella colpisce un elettrone allora lo espelle dall'atomo. In prima approssimazione, la particella mantiene una traiettoria imperturbata, mentre gli elettroni incontrati vengono espulsi. Risulta chiaro che la particella perde energia se interagisce con tanti elettroni, ma con pochi si può ipotizzare che la traiettoria sia a tutti gli effetti imperturbata. Se la particella interagisce con il nucleo allora viene diffuso dal nucleo stesso perché più pesante.

Il processo di scattering con un elettrone sottrae energia al protone. Il processo di scattering con il nucleo modifica la traiettoria della particella senza perdite di energia. In questo corso si fa solo il primo processo perché permette trasferire energia dalla particella ad un rivelatore (cioè il mezzo materiale).

Si calcola la quantità di energia persa da una particella carica massiva quando questa attraversa un mezzo materiale colpendo gli elettroni presenti. Questo calcolo sfrutta l'elettrodinamica relativistica con correzioni quantistiche. Tuttavia, esiste un modo più semplice il cui risultato è la formula classica di Bohr. Il metodo basa su tre ipotesi:

- la particella incidente è pesante  $M \gg m_e$ ,
- l'energia ceduta in un urto è molto minore della massa dell'elettrone cioè l'urto non è relativistico,
- l'elettrone è in quiete durante lo scattering con la particella pesante.

L'ultima approssimazione si traduce nel fatto che prima passa il protone (quindi l'elettrone è statico), poi l'elettrone viene diffuso. Questo permette di utilizzare l'elettrostatica al posto dell'elettrodinamica. Si procede ad una derivazione semplificata che necessita di correzioni.

Si consideri una particella pesante, di massa  $M$  e carica  $\pm ze$ , in movimento lungo l'asse  $x$  che passa nelle vicinanze di un elettrone posto sull'asse  $y$  [immagine]. La minima distanza della particella dall'elettrone è il parametro di impatto  $d$ . La forza  $\underline{F}$  sentita dall'elettrone è la forza di Coulomb. Se l'urto non è relativistico, allora si può applicare il teorema dell'impulso

$$\underline{I} = \int \underline{F} dt = \Delta \underline{p} = \underline{p}_{\text{fin}} - \underline{p}_{\text{in}}$$

poiché l'elettrone è in quiete, si ha  $\underline{p}_{\text{in}} = 0$ . Per simmetria di traslazione del moto, l'impulso ha componente solo lungo  $y$  cioè la direzione perpendicolare al moto

$$\underline{I} = I_y \hat{j} = I \hat{j} = I_{\perp} \hat{j}$$

Quindi, l'impulso è pari a

$$I = I_{\perp} = \int \underline{F} dt = \int e E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

Sfruttando la velocità non relativistica, l'energia ceduta ad un singolo elettrone è piccola e la velocità con cui si muove la particella è praticamente invariata (per un singolo urto):

$$I \approx \frac{e}{v} \int E_{\perp} dx$$

Si utilizza la terza ipotesi: il problema elettrodinamico diventa elettrostatico e vale la legge di Coulomb. Il flusso del campo elettrico generato dalla particella che attraversa la superficie laterale del cilindro di raggio pari al parametro di impatto  $b$  e asse lungo il moto della particella è

$$\Phi = \int 2\pi b E_{\perp} dx = \frac{ze}{\varepsilon_0} \implies \int E_{\perp} dx = \frac{ze}{2\pi\varepsilon_0 b} \implies I_{\perp} = \frac{ze^2}{2\pi\varepsilon_0 bv} = p_f$$

L'energia acquisita dall'elettrone a causa del passaggio della particella è data da

$$\Delta E(b) = \frac{|\underline{p}_f|^2}{2m_e} = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{z^2 e^4}{8m_e (\pi\varepsilon_0 bv)^2}$$

Essa è l'energia ceduta dalla particella ad un singolo elettrone. L'energia acquisita dagli elettroni che si trovano ad un parametro di impatto  $b$  è pari a

$$d^2 E = \Delta E(b) N_e dV = \Delta E(b) N_e 2\pi b db dx = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\varepsilon_0^2 v^2 m_e} \frac{db}{b} dx$$

dove  $N_e$  è la densità degli elettroni. La perdita di energia per unità di lunghezza integrata su tutti i parametri di impatto è

$$d_x E = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\varepsilon_0^2 v^2 m_e} \ln \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}$$

I valori estremi del parametro di impatto sono dati da due limiti fisici.

## Lezione 9

mer 15 mar  
2023 13:30

Prima di derivare i due parametri di impatto, si osservano alcune particolarità. Dalla formula si nota che più lenta è la particella, maggiore energia si perde: se la particella passa lentamente accanto l'elettrone, allora i due trascorrono tanto tempo vicini e possono scambiare una grande quantità di energia perché l'impulso è proporzionale al tempo di interazione (si veda come si definisce l'impulso). La formula conferma l'aspettativa che una maggiore densità di elettroni porti ad una maggiore perdita di energia. La densità di elettroni non è la densità del mezzo. Essa si può ricavare come

$$N_e = Z \frac{\rho}{A} N_A$$

dove  $Z$  è il numero atomico del materiale,  $A$  è la massa molare (non il numero di massa, quindi ha dimensioni di massa su quantità di sostanza  $\text{MN}^{-1}$ , cioè unità di misura  $\text{g mol}^{-1}$ ) e  $N_A$  è la costante di Avogadro (con dimensioni del reciproco di quantità di sostanza  $\text{N}^{-1}$ ). In generale, la perdita di energia di una particella è

$$d_x E \propto \rho(x) \frac{Z}{A}$$

il valore numerico della frazione risulta essere circa  $\frac{1}{2}$  per tutti gli elementi. Di solito, si esprime la perdita di energia con dimensioni  $\text{EL}^{-1}$  e unità  $\text{MeV cm}^{-1}$ . Tuttavia, si può utilizzare la mass thickness

$$\tilde{x} = \rho x, \quad \dim \tilde{x} = \text{ML}^{-2}$$

da cui si definisce la perdita di energia normalizzata per la densità del mezzo con dimensioni e unità

$$\dim(d_{\tilde{x}} E) = \text{EL}^2 \text{M}^{-1}, \quad \text{MeV cm}^2 \text{g}^{-1}$$

Tipicamente si utilizza questa quantità perché così si ha una perdita di energia che prescinde dal materiale. Per  $v \rightarrow 0$  si ha una divergenza oppure per  $b_{\max} \rightarrow \infty$ . Questo perché si sono operate delle approssimazioni: in particolare, particella massiva  $M \gg m_e$  ed urto non relativistico  $\Delta E(b) \ll m_e$ . Quest'ultima approssimazione porta ad una contraddizione: non tenendo conto che in un urto reale esiste una massima energia che si può trasferire, allora per  $v \rightarrow 0$  si ha una divergenza. In fisica classica, la massima energia che si può trasferire corrisponde a due volte il momento:

$$K = \frac{1}{2} m (2v)^2$$

La stessa cosa vale per la relatività:  $2\gamma^2 m v^2$ . Un valore massimo di energia trasferibile implica un valore minimo al parametro di impatto. Tale valore, che non contraddice la conservazione del quadri-momento, è dato da

$$\Delta E(b_{\min}) = E_{\max} = 2\gamma^2 m v^2 = \frac{z^2 e^4}{8m(\pi\epsilon_0 b_{\min} v)^2} \implies b_{\min} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m v^2}$$

Si calcola il parametro d'impatto massimo. Per un parametro di impatto delle dimensioni atomiche, la regione che contribuisce all'energia è un intorno dell'elettrone, allontanandosi la forza diminuisce come  $r^{-2}$ . Per un parametro di impatto arbitrariamente grande, lungo un segmento notevole di traiettoria, la distanza tra l'elettrone e la particella è circa la distanza minima tra i due: la regione che contribuisce allo scattering è molto più ampia del caso precedente. In un mezzo materiale, quando una considerevole parte della traiettoria della particella è soggetta all'influenza dell'elettrone, cioè l'interazione avviene su tempi lunghi, l'approssimazione che l'elettrone sia in quiete viene meno. Per grandi valori del parametro di impatto, il passaggio della particella trasferisce energia all'elettrone quando quest'ultimo compie una o più orbite attorno all'atomo associato: bisogna correggere i calcoli svolti tenendo conto del fatto che l'elettrone cambia continuamente posizione. Tramite l'approssimazione adiabatica, si dimostra che se il tempo dell'interazione è dell'ordine del tempo di orbita dell'elettrone attorno all'atomo, allora l'energia trasferita è trascurabile  $\Delta E(b) = 0$ . Questa condizione fissa il parametro d'urto massimo. La particella produce un campo elettromagnetico

variabile nella posizione dell'atomo. Nel riferimento della particella, la durata per cui il campo è apprezzabile risulta essere  $t \approx \frac{b}{v}$ . Nel riferimento del laboratorio (quello dell'elettrone) si ottiene

$$b_{\max} = \gamma \tau v = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}}, \quad \tau = \frac{b}{\gamma v}$$

dove  $\bar{\nu}$  è la frequenza media di orbita dell'elettrone. La formula classica di Bohr risulta essere

$$d_x E = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi \varepsilon_0^2 m v^2} \ln \frac{4\pi \varepsilon_0 \gamma^2 m v^3}{z e^2 \bar{\nu}}$$

La formula di Bethe(-Bloch) migliora la formula classica di Bohr utilizzando l'elettrodinamica quantistica. Nelle unità del sistema internazionale essa è

$$d_x E = (0.15 \text{ MeV cm}^2 \text{ mol}^{-1}) \cdot \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \ln \frac{2m\gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 - \delta(\gamma) - \frac{2C(\beta\gamma, I)}{Z} \right]$$

dove il coefficiente numerico è dato da

$$\frac{1}{2} \frac{e^4 N_A}{4\pi \varepsilon_0^2 m c^2} = 0.15 \text{ MeV cm}^2 \text{ mol}^{-1}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Il termine  $W_{\max}$  è la massima energia cinetica trasferibile in un singolo urto

$$W_{\max} = 2\gamma^2 m_e v^2, \quad M \gg m_e$$

Il fattore  $I$  è l'energia media di ionizzazione che corrisponde a  $\hbar \bar{\nu}$  nel modello classico di Bohr. Gli ultimi tre addendi sono delle correzioni relativistiche:  $\delta(\gamma)$  è la density correction,  $\frac{2C(\beta\gamma, I)}{Z}$  è la shell correction e  $2\beta^2$  è la relativistic rise.

Il grafico di  $d_x E$  andando da  $v = 0$  a  $v = 1$  scende da infinito (come  $v^{-2}$ ) fino ad un minimo globale positivo a  $v = 0.94$  e poi risale appiattendosi. Dal grafico si nota che una particella non relativistica scambia una grande energia all'elettrone perché passa tanto tempo in sua prossimità. Aumentando la velocità, l'energia scambiata diminuisce come  $v^{-2}$  fino ad un minimo per poi risalire. Il minimo si trova a tra  $1 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$  e  $2 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$ , mentre la risalita si appiattisce tra  $13 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$  e  $25 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$ : la risalita non è drammatica. Essa è detta relativistic rise perché è effetto puramente relativistico: a velocità relativistiche, il campo elettrico perpendicolare al movimento della particella (cioè quello che contribuisce all'interazione particella-elettrone) diventa più intenso e da ciò l'energia scambiata aumenta. Il fatto che la componente perpendicolare del campo elettromagnetico sia quella che si trasforma secondo Lorentz (quindi non è invariante) è una dimostrazione del motivo per cui le onde elettromagnetiche sono onde trasverse: per  $v \rightarrow 1$ , le linee di campo sono perpendicolari alla direzione del moto.

Si vede il significato degli altri termini. Per quanto detto, la perdita di energia per una particella prossima alla velocità della luce dovrebbe essere infinita perché il campo elettrico nel riferimento dell'elettrone è  $E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}$ . Nella realtà non succede, per questo viene aggiunto il termine  $\delta(\gamma)$  che sopprime la divergenza. Infatti, nel riferimento della particella in movimento, gli elettroni generano campi elettrici intensi. In quanto gli elettroni fanno parte di un mezzo materiale, i campi elettrici producono una polarizzazione del materiale stesso che attenua il campo elettrico della particella: in questo modo si compensa la divergenza. La correzione si chiama density correction perché essa è data dal trovarsi in un mezzo materiale.

Infine, anche la shell correction è una correzione empirica. Serve per descrivere velocità classiche  $v \rightarrow 0$ . La divergenza in tale limite diventa un picco che ricurva verso zero. Si vede il significato fisico: un protone praticamente stazionario sottrae un elettrone al mezzo materiale trasformandosi in un atomo di idrogeno cioè uno stato stabile. L'atomo di idrogeno è neutro e dunque non può più perdere energia nell'interazione. Se la particella è carica negativamente, allora viene catturata da un atomo andando a costituire un sistema neutro.

Una particella con la minima perdita di energia viene detta minimum ionizing particle (MIP). Quando essa rallenta, la perdita di energia aumenta, quindi rallenta ancora perdendo più energia: si crea una retroazione positiva fino a quando si ferma. La particella si muove di moto rettilineo uniforme e poi si ferma bruscamente. La massima energia depositata avviene alla fine della traiettoria in modo localizzato: si ha il picco di Bragg. Il range  $R$  di una particella è il percorso fatto da tale particella pesante pari a

$$R = \int_{K_{\text{in}}}^0 d_E x \, dE = \int_{K_{\text{in}}}^0 (d_x E)^{-1} dE$$

Il picco di Bragg è utile nell'adroterapia.

## 4.2 Particelle cariche leggere

Si studia il comportamento di un elettrone. In questo caso, non si può più utilizzare l'ipotesi di particella massiva per presupporre una traiettoria rettilinea durante l'interazione con un elettrone. Pertanto, il range di un elettrone è molto maggiore della profondità  $x$  raggiungibile. Finora si è considerato un unico modo di perdita di energia. Tuttavia, le particelle cariche perdono energia anche per radiazione, per bremsstrahlung. La formula di Larmor-Liénard descrive la potenza perduta in un moto accelerato. Tale fenomeno è più intenso per particelle leggere in quanto la potenza emessa dipende da  $\gamma^4$  e  $\gamma^6$ : dato che  $E = \gamma m$ , a parità di energia, particelle più leggere, irradiano di più. La seconda particella elementare carica più leggera è il muone con duecento volte la massa dell'elettrone: la perdita di energia per radiazione è un fenomeno caratteristico e dominante per gli elettroni (ed i positroni) perché leggeri.

L'energia critica  $E_c$  è l'energia alla quale la perdita di energia per la formula di Bethe diventa circa uguale alla perdita di energia per radiazione. Risulta tipico nominare la perdita di energia per la formula di Bethe come perdita di energia per ionizzazione: l'interazione con un elettrone conferisce a questi dell'energia ed esso si separa dall'atomo ionizzandolo. Una frazione di energia ceduta per la formula di Bethe può essere utilizzata per produrre ioni.

Quando una particella ha raggiunto l'energia critica, allora

$$(d_x E)_{\text{totale}} = (d_x E)_{\text{Bethe}} + (d_x E)_{\text{rad}}, \quad (d_x E)_{\text{Bethe}} = (d_x E)_{\text{rad}}$$

Una formula semi-empirica per i materiali a stato solido che fornisce l'energia critica è

$$E_c \approx \frac{610 \text{ MeV}}{Z + 1.24}$$

Ad esempio, il piombo ha un'energia critica di 7.4 MeV. L'aria ha un'energia critica di 84 MeV. L'atomo di piombo è più pesante degli atomi dei composti dell'aria, pertanto un elettrone riceve un'accelerazione maggiore. Infine, l'acqua ha energia critica pari a 78 MeV.

Sebbene la perdita di energia per radiazione sia un fenomeno complesso (utilizzando il potenziale Liénard-Wiechert) e tenendo conto degli effetti quantistici, la formula empirica della perdita di energia è semplice. La perdita di energia di una particella in un mezzo è

$$E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}, \quad X_0 \approx \frac{716 \text{ g cm}^{-2}}{\rho(Z+1) \ln \frac{287}{\sqrt{Z}}} \frac{A}{Z} \propto \frac{1}{\rho} \frac{1}{Z+1}$$

dove  $X_0$  è la lunghezza di radiazione e  $A$  è il numero di massa. Si possono classificare i mezzi in base alla loro lunghezza di radiazione. Dopo una profondità  $X_0$ , l'energia rimanente è pari a circa un terzo dell'energia iniziale. Usando queste formule si dimostra l'esistenza dell'anti-materia.