Nuclear and Subnuclear Physics

4 marzo 2023

Indice

Lezione 1

lun 27 feb 2023 13:30

1 Introduzione

Introduzione. La fisica delle particelle si basa sulle teorie quantistiche dei campi che permettono di unificare la relatività speciale e la meccanica quantistica. Tuttavia, queste teorie non sono ancora disponibili. Si tratta la fisica delle particelle tramite la relatività speciale e la meccanica quantistica non relativistica separatamente (sebbene siano presenti delle eccezioni come la nascita dell'anti-materia che proviene dall'unione delle due teorie e come la simmetria CPT).
Si va dalla fisica delle particelle (problema a due corpi) alla fisica nucleare (problema ad N corpi). Nel corso si studia indistintamente l'aspetto teorico e quello sperimentale.

L'alba della fisica delle particelle. La fisica delle particelle elementari è nata quando si è falsificato il modello del mezzo continuo. Cauchy diede la definizione rigorosa di un mezzo continuo. Intuitivamente, un mezzo materiale continuo ha un insieme di proprietà ed esse sono le stesse anche a scale arbitrariamente piccole.
Un mezzo continuo è un insieme di punti $A \subset \mathbb{R}^3$ tale per cui $\forall \underline{x} \in A$ si può definire una funzione $\rho(\underline{x})$ che determina le proprietà del mezzo continuo. La massa inerziale del mezzo continuo di una regione $B \subset A$ è

$$m = \int \rho(\underline{x}) \, \mathrm{d}^3 x \in \mathbb{R}^+$$

Il mezzo si dice continuo se $\rho(\underline{x})$ è una funzione continua in A. Questa è la definizione data da Cauchy. Da questa deriva la definizione di limite

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \underline{x}' \in U_\delta(\underline{x}) \implies |\rho(\underline{x}') - \rho(\underline{x})| < \varepsilon$$

dove U_δ è un intorno. La fisica delle particelle nasce quando questa definizione è falsificata. Infatti, se $\delta \sim 10^{-10}\,\mathrm{m} = 1\,\text{Å}$, la disuguaglianza viene meno. Storicamente, ci si è resi conto che a tali distanze i mezzi non sono più continui e le leggi fisiche macroscopiche non valgono più (ad esempio Maxwell). Inoltre, le particelle sono relativistiche.

1.1 Particella elementare

Fisica classica. In fisica classica, non esiste la distinzione tra punto materiale e particella elementare. Un punto materiale (che coincide con la particella elementare in questo contesto) è un punto di $\mathbb{R}^3$ a cui si può associare una massa inerziale $m \in \mathbb{R}^+$ ed una carica elettrica $q \in \mathbb{R}$, la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. La traiettoria è una mappa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \underline{x}(t)$ che mette in corrispondenza la posizione con il tempo.

Meccanica relativistica. In meccanica relativistica, la massa inerziale non è un invariante di Lorentz: si vuole caratterizzare il punto materiale con delle proprietà intrinseche. Dunque, in relatività, un punto materiale è un punto nello spazio-tempo di Minkowski $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$ a cui è associata una massa a riposo $m \in \mathbb{R}^+$ (la massa solidale con il punto) che è un invariante di Lorentz (cioè è identica per qualunque osservatore inerziale) ed associata una carica elettrica $q \in \mathbb{R}$ che è anch'essa un invariante di Lorentz, la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. La traiettoria è una mappa

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, \quad \tau \mapsto x^\mu(\tau)$$

cioè una corrispondenza tra la tetra-posizione in funzione del tempo proprio. Non si può usare la traiettoria classica perché parametrizzata in funzione del tempo. In meccanica relativistica classica, il punto materiale coincide ancora con una particella elementare.

Meccanica quantistica. Entrambe le definizioni precedenti non sono compatibili con la meccanica quantistica perché non è più presente il concetto di traiettoria (deterministica). Inoltre, il punto materiale è un punto in senso matematico: non ha estensione spaziale. Facendo una misura, bisogna determinare in modo infinitamente preciso la posizione, $\Delta z \to 0$. Tuttavia, deve valere la relazione di Heisenberg

$$\Delta z \, \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Quando si danno le condizioni al contorno di un punto materiale, non si possono più determinare le equazioni del moto. La definizione di punto è incompatibile con la meccanica quantistica. Bisogna cambiare la definizione, ma mantenere la stessa idea: una particella elementare è qualcosa di talmente piccolo che non presenta altri costituenti.

Si separa il concetto di particella elementare da quello di punto materiale. In meccanica quantistica, il punto materiale è l'oggetto che obbedisce l'equazione di Schrödinger per il punto materiale

$$i\hbar \, \partial_t \psi = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hat{V}(\underline{x})$$

Questa equazione ha un unico parametro intrinseco: la massa del punto materiale. Il potenziale è una caratteristica dello spazio. I sistemi che risolvono tale equazione non sono sistemi che descrivono le particelle elementari. In meccanica quantistica, la particella elementare è un punto materiale le cui soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono esprimibili *esclusivamente* come sovrapposizione di onde piane.

Si consideri un atomo di idrogeno in caduta libera. Esso soddisfa l'equazione sopra, ma non è una particella elementare. Nel riferimento del protone, il moto dell'elettrone è dato da

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{R(r)}{r} Y_l^m$$

che si può traslare per seguire il centro di massa in caduta libera. Tuttavia, questa non è una sovrapposizione di onde piane. Se non esiste alcun altro modo di descrivere un punto materiale (oltre alla sovrapposizione di onde piane), allora si ha una particella elementare. A priori non si può distinguere una particella vista come un punto materiale da un sistema composto.

1.2 Unità naturali

In quanto le masse sono piccole, le velocità sono relativistiche. Si utilizzano strumenti adatti alla relatività ristretta ed alla meccanica quantistica. Si vuole avere un formalismo che garantisca a priori che le formule sono compatibili con le due teorie citate.
Il sistema internazionale SI è un sistema metrico: si definiscono le quantità fisiche in termini di quantità fondamentali, come il tempo, lo spazio, la massa e la carica elettrica. Si sceglie un prototipo e si esprimono le quantità in termini di suoi multipli. Un esempio di prototipo utilizzato fino al 2019 è quello del chilogrammo. Modernamente, le quantità fondamentali sono definite in termini di costanti fisiche. Il secondo è dato da un certo numero di periodi di una transizione iperfine del cesio-133. Il metro è una frazione della distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un secondo. Dunque i prototipi sono dati da fenomeni naturali.
Il problema del sistema metrico è l'arbitrarietà del valore dei prototipi. Si consideri la legge di gravitazione universale

$$\underline{F} = G\frac{mM}{r^2}\hat{r}, \quad G = 6.674\,30(15) \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$$

Si ha un valore di proporzionalità G che non ha significato fisico, ma che serve a conciliare diverse grandezze fisiche. Lo stesso vale per la forza di Coulomb e la costante associata.
Per questo si utilizzano sistemi di misura razionalizzati: si utilizzano le leggi fisiche (di cui si è ragionevolmente certi) come vincoli e si eliminano quanti più prototipi possibili. Il primo sistema razionalizzato è il sistema cgs elettrostatico: si misura lo spazio in centimetri, il tempo in secondi, la massa in grammi, ma la carica non ha prototipo. Si utilizza una legge fisica (quella di Coulomb) e si pone il termine di proporzionalità pari all'unità:

$$F = \frac{qQ}{r^2}\hat{r} \implies \mathsf{F} = \frac{\mathsf{C}^2}{\mathsf{L}^2} \implies [F] = \mathrm{dyn} \implies [q] = \mathrm{dyn}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}$$

In fisica delle particelle si usano altre leggi fisiche. La prima è l'energia relativistica

$$E = \gamma mc^2, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

dove γ è il fattore di Lorentz: un numero puro. La costante di proporzionalità è il quadrato della velocità della luce c^2. Si impone

$$\boxed{c \equiv 1} \implies \mathsf{E} = \mathsf{M}$$

Dalla relazione di moto rettilineo uniforme si ha

$$x = ct \implies \mathsf{L} = \mathsf{T}$$

I prototipi che vengono meno sono quelli della massa e dello spazio. Dunque lo spazio ed il tempo hanno le stesse unità di misura: questo fa comodo oltre a porre sullo stesso piano le due dimensioni. La seconda legge utilizzata è l'energia di un fotone

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Il coefficiente di proporzionalità è la costante di Planck ridotta $\hbar$ e si pone

$$\boxed{\hbar \equiv 1} \implies \mathsf{E} = \mathsf{T}^{-1}$$

A questo punto, si rimuove anche il prototipo della carica. Dalla legge di Coulomb si ha

$$\underline{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{r} \rightsquigarrow \boxed{k \equiv \frac{1}{4\pi}}$$

da cui, considerando anche la velocità della luce, si ha

$$c = 1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \implies \varepsilon_0 = 1 \wedge \mu_0 = 1$$

Questo sistema di scelte costituisce il sistema razionalizzato in uso nella fisica delle particelle elementari. Esso è detto sistema naturale di Heaviside-Lorentz (si noti che esistono diversi sistemi naturali).
Per definire tutte le unità fisiche basta definire l'energia tramite l'elettronvolt. Il tempo e lo spazio hanno dimensioni di reciproco dell'energia. La carica non ha dimensioni. Eliminare i prototipi implica una minore precisione in metrologia. Per ovviare a tale problema, si fanno i conti in unità naturali, ma si convertono i risultati nel sistema internazionale. Un altro problema del sistema naturale è la difficoltà a capire di cosa si stia parlando (energia, massa, momento) qualora manchi un contesto. Per ovviare a tale problema, si esprimono le quantità menzionate tramite notazioni esplicite diverse eV, eV$/c^2$, eV$/c$.

Lezione 2

mar 28 feb 2023 13:30

Per operazioni semplici conviene sapere i valori delle costanti di proporzionalità

$$\hbar \approx 6.58 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV\,s} \approx 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}, \quad \hbar c = 197\,\mathrm{MeV\,fm}$$

Si noti che dal 2019 il valore della costante di Planck è fisso. Tramite l'analisi dimensionale si può passare dal sistema naturale (NU, natural units) al sistema internazionale e viceversa

$$\alpha_{\mathrm{NU}} = \hbar^a c^b \alpha_{\mathrm{SI}}$$

Esempio. Si converte la massa dell'elettrone

$$m_e = 511\,\mathrm{keV}\,c^{-2} = \frac{511 \times 10^3\,\mathrm{eV} \cdot 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J\,eV^{-1}}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

Esempio. Si trova la lunghezza Compton del protone e dell'elettrone. Essa è la lunghezza d'onda di un fotone la cui energia coincide con la massa a riposo della particella considerata:

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

Si utilizza l'energia relativistica nel sistema internazionale. La massa a riposo di una particella corrisponde ad un'energia pari a $E = mc^2$. Un fotone con momento lineare p ha energia pari a $E = pc$. Unendo le due si ha $p = mc$. Dalla lunghezza d'onda di de Broglie si ottiene

$$\lambda = \frac{h}{p} \implies \lambda = \frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1.32\,\mathrm{fm}$$

In unità naturali si ha

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1 \implies \lambda = \frac{2\pi}{m}$$

Al posto di fare l'analisi dimensionale, si possono usare i valori calcolati in precedenza per convertire rapidamente da lunghezza ad energia:

$$\lambda_{\mathrm{NU}} = \frac{\lambda_{\mathrm{SI}}}{\hbar c} = \frac{1.32\,\mathrm{fm}}{197 \times 10^6\,\mathrm{eV\,fm}} = 6.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{MeV^{-1}}$$

Esempio. Nel sistema di unità naturali, la massa di Planck è data da

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

La massa di Planck è la massa di una particella elementare il cui campo gravitazionale generato è confrontabile con il campo elettrico generato da una carica pari a 1. Per la massa di Planck, la forza gravitazionale non è più trascurabile rispetto alla forza elettrostatica: bisogna sviluppare una teoria che sia in accordo con la meccanica quantistica e la relatività generale, cosa che non

è ancora disponibile. Appena si trattano particelle con massa vicina alla massa di Planck, le teorie moderne vengono meno e non si possono più conoscere le equazioni del moto. Gli effetti di gravità quantistica non sono più trascurabili rispetto agli effetti elettromagnetici.
Per convertire la formula nel sistema internazionale si esegue l'analisi dimensionale

$$M_{\text{SI}} = \hbar^a c^b G^{-\frac{1}{2}} \implies \mathsf{M} = \left[\frac{\mathsf{ML}^2}{\mathsf{T}}\right]^a \left[\frac{\mathsf{L}}{\mathsf{T}}\right]^b \left[\frac{\mathsf{L}^3}{\mathsf{MT}^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \mathsf{M}^{a+\frac{1}{2}} \mathsf{L}^{2a+b-\frac{3}{2}} \mathsf{T}^{-a-b+1}$$

Da ciò bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2} = 1 \\ 2a + b - \frac{3}{2} = 0 \\ -a - b + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto

$$M_{\text{SI}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 21.7\,\mu\text{g} \approx 2 \times 10^{23}\,\text{eV} = 2 \times 10^{15}\,\text{TeV}$$

Questa massa è enorme a livello microscopico. La massima energia a cui si riescono ad accelerare le particelle ad LHC è 14 TeV. Pertanto, per raggiungere energie confrontabili con la massa di Planck bisogna affidarsi a processi naturali come la dinamica dei buchi neri (ad esempio come la radiazione elettromagnetica di Hawking).
Modernamente, si è bloccati sulla conciliazione della meccanica quantistica con la relatività generale. Utilizzare le teorie quantistiche dei campi in relatività generale porta a delle incoerenze, la teoria non è rinormalizzabile. Ci sono due possibilità. La prima è costruire una teoria alternativa su base empirica; si è tentato di trovare fenomeni naturali che siano vicini alla scala di Planck, ma i risultati sono stati modesti; due esempi sono la radiazione di Hawking e l'inflazione nei primi istanti dell'universo che non rientra nel Modello Standard (magari indice di gravità quantistica). L'altra possibilità è stipulare la simultanea validità degli assiomi della relatività generale e della meccanica quantistica relativistica pensando che, probabilità, la somma dei due insiemi di assiomi riduce le teorie candidate al punto che l'unica rimasta è la teoria quantistica della gravitazione. Questo procedimento ha dato origine alle teorie di stringhe e di membrana. Si è in una fase di stallo perché l'insieme di assiomi fornisce un numero di vincoli insufficiente: la classe di teorie compatibili è enorme. Secondo (un teorema? di) Witten, le classi di teorie sono solo cinque, ma danno vita ad un grande numero di teorie concrete. La situazione sta progredendo grazie a nuovi dati sulla cosmologia primordiale ΛCDM.

2 Richiami di relatività speciale

2.1 Formalismo covariante

Il formalismo covariante permette di scrivere le leggi fisiche in modo che siano già compatibili con la relatività speciale (e generale, ma in questo corso si tratta solo la prima). I vettori devono rimanere fissi nello spazio per qualsiasi cambio di base e devono essere descritti tramite le regole di trasformazione delle loro componenti da un sistema di coordinate (una base) ad un altro. Cambiando la base, cambiano le componenti: per un vettore fisico classico, le coordinate variano in maniera opposta (contro-variano) rispetto i versori della base. Un vettore è una ennupla di coordinate che contro-variano rispetto un cambio di base.
In uno spazio $\mathbb{R}^n$, un vettore è la combinazione lineare

$$\boxed{\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \hat{e}_i = v^i \hat{e}_i}$$

dove $\{\hat{e}_i\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$. Si utilizza la notazione di Einstein per la somma implicita: indici covarianti e contro-varianti ripetuti si intendono sommati. Dopo un cambio di base, i versori della nuova base sono dati da

$$\hat{e}'_j = F^i{}_j \hat{e}_i$$

Dunque, il vettore è

$$\underline{v} = v^i \hat{e}_i = v'^j \hat{e}'_j = v'^j F^i{}_j \hat{e}_i \implies v^i = F^i{}_j v'^j \implies v'^j = (F^{-1})^j{}_i v^i = B^j{}_i v^i$$

dove si pone $F^{-1} \equiv B$. Tali lettere, che indicano le trasformazioni, sono le iniziali di "forward" e "backward" (transformation). Quando si sostituisce $\hat{e}'_j$ si utilizza ancora l'indice muto i per convenienza, ma l'implicazione successiva deriva dal fatto che due vettori coincidono quando hanno le stesse componenti. In forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \cdots & \hat{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \cdots & \hat{e}_n \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{bmatrix} = F^{-1} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

Questa scrittura è comoda perché negli spazi affini, in particolare negli spazi euclidei, le matrici del cambio di base sono invertibili.

I versori (le basi) di uno spazio vettoriale (uno spazio affine) si trasformano in modo covariante per cambi di base, cioè secondo $F = B^{-1}$. Le coordinate di un vettore si trasformano in modo contro-variante per cambi di base, cioè secondo $F^{-1} = B$. Un indice basso descrive delle componenti covarianti. Un indice alto descrive quantità contro-varianti. Un vettore è la somma

$$\underline{v} = v^i \hat{e}_i$$

Le trasformazioni di Galileo e di Lorentz sono entrambe cambi di base.

Classificazione. Si possono classificare gli oggetti contro-covarianti:

- Gli scalari corrispondono alle quantità fisiche che non variano per un cambio di base. Talvolta vengono detti invarianti. Si noti che gli invarianti sono definiti a seconda delle trasformazioni: il tempo è uno scalare in fisica classica, ma non in fisica relativistica. Alcuni esempi sono la massa a riposo e la carica. La temperatura è data dalla velocità media delle particelle rispetto al centro di massa del corpo, dunque è prescritta nel riferimento solidale.
- Un vettore (contro-variante) è una ennupla reale che trasforma in modo contro-variante. Le coordinate di un vettore trasformano come

  $$x'^i = B^i{}_j x^j$$

- Un tensore di rango $(2,0)$ è un insieme di n^2 numeri reali che, per un cambio di base, trasforma come

  $$T'^{kl} = B^k{}_i B^l{}_j T^{ij}$$

  Un tensore di questo tipo si può rappresentare con una matrice (ma non è una matrice!).

In modo astratto, un tensore è un insieme di vettori e covettori legati dal prodotto tensoriale. Un vettore è un tensore di rango $(1,0)$. Uno scalare è un tensore di rango $(0,0)$.

Oggetti covarianti. Ci si chiede se esistono quantità fisiche che trasformano in modo covariante. Le nuove coordinate di un vettore sono combinazioni lineari delle vecchie coordinate

$$\underline{x}' = B\underline{x} \implies x'^j = B^j{}_i x^i$$

Per trovare i coefficienti che legano le due coordinate si utilizzano le derivate

$$\boxed{B^j{}_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}$$

Le coordinate di un oggetto contro-variante si trasformano come

$$x'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i, \quad \boxed{T'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x^j} T^{ij}}$$

Tutte le derivate di ordine dispari di un oggetto contro-variante trasformano in maniera covariante. L'esempio più importante è il gradiente $\nabla f(\underline{x})$. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = F^i{}_j \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Un vettore covariante (covettore) è una ennupla reale che, per un cambio di base, trasforma come

$$a'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\, a_i$$

cioè come la base, in modo covariante. Un tensore di rango $(0,2)$ è un insieme di n^2 numeri reali che trasforma come

$$T_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l} T_{ij}$$

Lezione 3

mer 01 mar 2023 13:30

Il formalismo covariante è utile per cambi di base che dipendono dal tempo e dallo spazio che appaiono in relatività generale. In questo caso essi ne sono indipendenti quando si studia la relatività speciale.

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono cambi di base in uno spazio $\mathbb{R}^4$ alle volte scritto $\mathbb{R}^{3+1}$ per distinguere le dimensioni spaziali da quella temporale. Le coordinate di un punto sono

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

Si utilizzano le unità naturali. La più semplice trasformazione di Lorentz è un boost in direzione x. Vale $x \equiv x'$. Inoltre $y \parallel y'$ e $z \parallel z'$. Le relazioni che legano le coordinate nei due riferimenti sono

$$x'^0 = t' = \gamma t - \gamma\beta x, \quad x'^1 = x' = \gamma x - \gamma\beta t, \quad x'^2 = y' = y, \quad x'^3 = z' = z$$

La forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Si evitano le notazioni matriciali perché complicano i calcoli rispetto la convenzione di Einstein

$$x'^\mu = A^\mu{}_\nu x^\nu$$

Per convenzione, in relatività speciale le lettere greche indicano indici tetra-dimensionali, le lettere latine indicano le tre componenti spaziali. La scrittura precedente descrive come un vettore che descrive la tetra-posizione sia un vettore contro-variante cioè trasformi opponendosi alla trasformazione delle basi.

Le trasformazioni di Lorentz coinvolgono boost, rotazioni e traslazioni. Esse costituiscono il gruppo di Poincaré. Si noti che un boost in direzione arbitraria è definito mantenendo gli assi equiversi, questo perché più boost successivi ruotano il sistema finale rispetto a quello iniziale. Il boost in direzione generica è

$$t' = \gamma t - \underline{v} \cdot \underline{x}, \quad \underline{x}' = \underline{x}_\perp + \gamma(\underline{x}_\parallel - \underline{v}t), \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

dove $\underline{v}$ è la velocità relativa tra i due riferimenti. Bisogna porre attenzione perché questa scrittura mischia la notazione dello spazio di Minkowski (la scrittura della trasformazione di Lorentz) con la notazione dello spazio euclideo ($\underline{v}$, $\underline{x}_\perp$, $\underline{x}_\parallel$). Le componenti parallele alla direzione del moto si mescolano con il tempo, mentre quelle perpendicolari rimangono inalterate: sono invarianti di Lorentz.

2.2.1 Spaziotempo di Minkowski

Lo spaziotempo di Minkowski $\mathcal{M}$ è lo spazio dei vettori applicati su $\mathbb{R}^4$ in cui i cambi di base sono definiti dalle trasformazioni di Lorentz. I punti di $\mathcal{M}$ sono gli eventi e i punti materiali hanno traiettorie funzioni del tempo proprio τ cioè il tempo misurato dall'osservatore solidale al punto materiale. Questo spazio è analogo allo spazio euclideo.

Teorema. Nello spazio $\mathcal{M}$ è possibile definire un tensore metrico

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

tale per cui la norma di un quadrivettore

$$\|a\|^2 = (a^\mu)^2 = a^\mu a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$$

risulta essere un invariante di Lorentz.

Si consideri il tetravettore dello spostamento infinitesimo di un punto materiale $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^\mu$. La sua norma è

$$(\mathrm{d}s)^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$$

Un punto che si muove alla velocità della luce implica $(\mathrm{d}s)^2 = 0$, ma da questo deriva che la velocità della luce è un invariante perché $(\mathrm{d}s)^2$ è uno scalare. Lo spostamento infinitesimo $\mathrm{d}s$ permette di calcolare la distanza. Il motivo dell'utilizzo dello spazio di Minkowski è l'automatica compatibilità con la teoria della relatività.

Norma pseudo-euclidea di Minkowski. Formalmente, la distanza è definita positiva. La norma di Minkowski non induce una tale distanza, per questo è detta norma pseudo-euclidea: la proprietà di definita positività è sostituita con la non degenerazione (le altre due proprietà sono la linearità della prima entrata e la simmetria, che danno vita ad una forma bilineare), questo distingue uno pseudo-prodotto interno dal prodotto interno vero e proprio.
La norma di Minkowski può assumere valori positivi (eventi di tipo tempo, time-like), negativi (tipo spazio, space-like) e nulli (tipo luce, light-like). Eventi di tipo tempo e tipo luce possono essere connessi causalmente. Eventi di tipo spazio non possono essere connessi causalmente.

Il fatto che il tensore metrico sia diagonale rende semplice passare da un vettore ad un covettore. La metrica permette di alzare ed abbassare gli indici.

Teorema. Se a^ν è un vettore contro-variante, allora il corrispondente vettore covariante ha componenti

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu = \begin{pmatrix} a^0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$$

Questo non si può fare in relatività generale, non esiste una relazione globale, ma bisogna utilizzare il trasporto parallelo.

Lo spazio di Minkowski si può vedere come analogo dello spazio euclideo. Sebbene lo spazio di Minkowski non sia uno spazio metrico (la metrica, la distanza di Minkowski non è propriamente una metrica, ma una forma bilineare indefinita e non degenere), esso contiene sotto-varietà con metriche di Riemann che forniscono la geometria iperbolica. Nello spazio euclideo si ha un prodotto scalare che induce una norma che induce una distanza

$$\langle \underline{x} | \underline{x} \rangle = \|\underline{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad d(\underline{x}, \underline{y})^2 = \left\|\underline{x} - \underline{y}\right\|^2$$

Nello spazio di Minkowski si ha

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \|x^\mu\|^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad d(\underline{x}, \underline{y})^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)$$

Postulati della relatività speciale. Si utilizza il formalismo covariante per scrivere leggi fisiche automaticamente in accordo con la relatività speciale. La relatività speciale ha due postulati:

- Le leggi della fisica hanno la stessa forma funzionale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale.

Si vuole costruire un formalismo che soddisfi questi due postulati. Il secondo si è già risolto perché si è affermato che tutti i sistemi fisici evolvono nello spazio di Minkowski: sopra (quando si parla dello spostamento infinitesimo $\mathrm{d}s$) si è dimostrato che qualunque coppia di eventi è costruita in maniera tale che la misura della velocità sia sempre minore di c e, se i due punti si muovono alla velocità della luce, allora tutti gli osservatori inerziali concordano sulla loro velocità. Lo spaziotempo di Minkowski verifica il secondo postulato. Formalmente bisognerebbe introdurre altre ipotesi come l'omogeneità, l'isotropia e la mancanza di memoria (memorylessness) dello spazio.
Il primo postulato equivale ad affermare che tutte le leggi fisiche devono essere relazioni tra tensori. In tale modo, la forma delle leggi rimane identica in ogni riferimento

$$f(s, x^\mu, T^{\mu\nu}) = 0 \iff f(s, x'^\mu, T'^{\mu\nu}) = 0$$

Una relazione tra tensori si può esprimere come un nuovo tensore. Da questo si nota

$$S^{\mu\nu\cdots} = 0 \implies S'^{\lambda\rho\cdots} A^\mu{}_\lambda A^\nu{}_\rho \cdots = 0 \implies S'^{\lambda\rho\cdots} = 0$$

Ad esempio, la forza di Lorentz si può scrivere come

$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \implies f^\mu = qF^{\mu\nu} u_\nu$$

da cui si può vedere la validità del primo postulato osservando

$$S^\mu = f^\mu - qF^{\mu\nu} u_\nu = 0$$

2.3 Meccanica relativistica

Si costruiscono la cinematica e la dinamica relativistiche in maniera analoga alla fisica classica. Lo spostamento infinitesimo classico è

$$\mathrm{d}\underline{x} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

Similmente, il quadri-spostamento è

$$\mathrm{d}x^\mu = (\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3)$$

In fisica classica, le traiettorie sono parametrizzate dal tempo perché universale. In relatività speciale, esse sono parametrizzate dal tempo proprio, cioè il tempo misurato nel riferimento solidale al punto materiale. Il tempo proprio è un invariante di Lorentz. Infatti, ponendosi nel riferimento solidale si ha

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 = (\mathrm{d}\tau)^2 - 0 - 0 - 0 = (\mathrm{d}\tau)^2$$

Fisicamente, il tempo proprio è il tempo misurato da qualsiasi osservatore solidale con il punto materiale. La definizione stessa prescinde dall'osservatore perché lo costringe ad essere solidale al punto.