

# Physics 2

December 18, 2021

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Legge di Coulomb</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Distribuzioni continue</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Campo elettrico</b>	<b>8</b>
4.1	Calcolo in situazioni particolari . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Legge di Gauss</b>	<b>11</b>
5.1	Applicazioni della legge di Gauss . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Potenziale elettrico</b>	<b>18</b>
6.1	Potenziale di un dipolo elettrico . . . . .	22
6.2	Divergenza . . . . .	25
6.3	Rotore . . . . .	29
6.4	Laplaciano . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Conduttori</b>	<b>31</b>
7.1	Carica immagine . . . . .	36
7.2	Capacità . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Correnti stazionarie</b>	<b>42</b>
8.1	Conduttori Ohmici . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Magnetismo</b>	<b>51</b>
9.1	Circuitazione . . . . .	53
9.2	Configurazioni notevoli. . . . .	60
9.3	Configurazioni elementari . . . . .	62
9.4	Moti notevoli . . . . .	65
9.5	Azioni sui conduttori . . . . .	67
9.6	Lavoro della forza di Lorentz . . . . .	68
9.7	Pressione magnetostatica . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Interazioni tra cariche e moto relativo</b>	<b>70</b>
10.1	Campo elettrico . . . . .	72
<b>11</b>	<b>Induzione elettromagnetica</b>	<b>85</b>
	Introduzione	

## Lecture 1

lun 04 OTT  
2021 13:30

## 1 Introduzione

Si studia la forza elettrica e magnetica. Si sviluppa la teoria dell'elettromagnetismo, studiando anche i fondamenti di ottica.

Serve sapere

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Dove  $\vec{F}$  indica la legge di forza, mentre  $m\vec{a}$  descrive l'effetto dinamico. La scrittura con la quantità di moto è tipicamente relativistica, da essa discendono i teoremi dell'energia cinetica e della conservazione dell'energia.

Si trattano molti aspetti formali nuovi per gestire la complessità dell'elettromagnetismo. Interessa interpretare il mondo. Con la legge  $\vec{F} = m\vec{a}$ , conoscendo la legge di forza si conosce il moto, mentre se c'è il moto allora c'è una forza.

Gonfiando un palloncino e strofinandolo con un panno si rivela l'esistenza di una forza non riconducibile a quanto già studiato. Il palloncino rimane "attaccato" al soffitto. Due palloncini, tra di loro, non si attraggono. Nel corso si caratterizza tale forza. La forza elettrica è molto complicata, essa dipende da:

- carica, dato che i corpi si respingono e si attraggono si hanno due classi di materia a cui si dà un segno;
- distanza relativa, (per configurazioni elettrostatiche essa è l'unica oltre la carica);
- velocità, (per configurazioni complicate) si aggiunge una forza magnetica;
- accelerazione, (per sistemi a campi variabili).

Dato che dipende dalla velocità bisogna trovare come si deve descrivere di modo che la relatività sia rispettata. L'elettromagnetismo è di partenza invariante perché è stata la relatività ad essere revisionata.

In Fisica II non ci si occupa dei moti, ma si analizza la struttura della forza in modo progressivo. Bisogna trovare un sistema che permetta di ricavare la forza in qualsiasi situazione. Dall'evidenza sperimentale si passa alla costruzione della struttura della forza.

Si introducono strumenti nuovi come i campi vettoriali  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ , la forza è una funzione delle coordinate. Sebbene tali siano artefici matematici che semplificano la descrizione dei fenomeni, si scopre che si rivelano delle proprietà: i campi elettromagnetici hanno proprietà fisiche come l'energia, la quantità di moto ed il momento angolare misurabili che trasportano l'energia elettromagnetica nelle onde, le quali sono perturbazioni dei campi che si propagano. Nell'elettromagnetismo classico, la carica, la posizione e la velocità sono note con assoluta certezza; tuttavia, ci sono limiti intrinseci che non permettono la certezza: il principio di indeterminazione di Heisenberg  $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{4\pi}$ . La struttura della forza classica vale anche nella meccanica quantistica.

Si ha una evidenza sperimentale della carica: essa ha due segni; è dovuta a cariche elementari  $e^-$  e  $p^+$ ; si ha la conservazione della carica in sistemi isolati  $\sum q^+ + \sum q^- = \text{cost.}$ . La carica si conserva anche in fenomeni quantistici e relativistici. Nella relatività si può convertire l'energia in massa  $\gamma + N \rightarrow N + e^+e^-$ . La carica è un invariante relativistico, si conserva ed è la stessa in tutti i sistemi di riferimento (diversamente dalla massa). Nella definizione della carica non si fa attenzione al sistema di riferimento.

La differenza in carica tra  $e^-$  e  $p^+$  è minore di  $10^{-21}$ . Un'altra proprietà della carica è che essa è quantizzata: i sistemi macroscopici hanno cariche pari ad un multiplo di quella elementare. Tuttavia, non si sa perché è quantizzata: è un fatto sperimentale. Inoltre, l'elettrone è privo di

struttura fino a  $10^{-18}$  m, cioè la lunghezza d'onda di de Broglie: attualmente non si riescono a raggiungere energie maggiori.

Esistono particelle a cariche frazionarie, ma si trovano solamente in composti, non libere. Inoltre, si descrive la carica come distribuzione continua, sebbene essa sia una quantità discreta.

## 2 Legge di Coulomb

Si scopre la legge fondamentale dell'elettrostatica: la legge di Coulomb

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{u}_{r_{12}}.$$

Dove  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

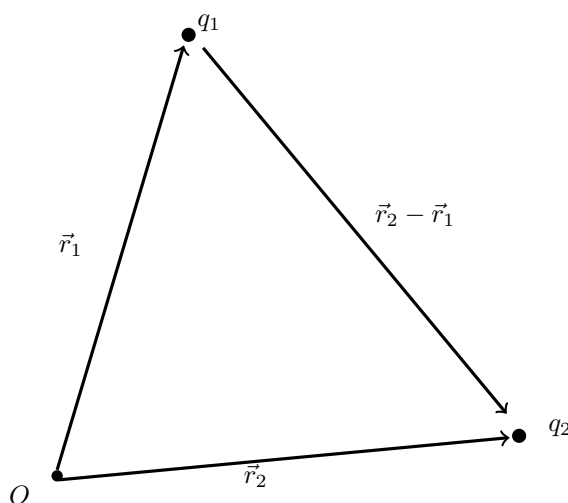


Figure 1: coulomb

Le particelle sono puntiformi, quindi c'è una sola direzione  $\hat{u}_{r_{12}}$ , cioè la congiungente. Inoltre,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , cioè il terzo principio e non è un'osservazione banale; la forza magnetica non ha tale proprietà e nemmeno quella elettrica se non si è nel caso statico. Dunque si ha la dipendenza dal prodotto delle cariche e dal reciproco del quadrato della distanza. La costante  $k$  dipende dal sistema di misura. In SI si ha

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Il  $4\pi$  si ha per ragioni storiche e per semplicità nei casi a simmetria sferica. Il termine  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto. Si ha:

- $k = 8.99 \cdot 10^{-19} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$ ;
- $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \text{m}^2}$ ;
- $e^- = q^+ = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Le unità di misura fondamentali sono scelte in base alla tradizione ed alla precisione. Si può confrontare la forza elettrica con quella gravitazionale:

$$F_E = k \frac{q^2}{d^2}, \quad F_G = G \frac{m_p^2}{d^2} \implies \frac{F_G}{F_E} = \frac{G m_p^2}{k q^2} = \frac{10^{-11} \cdot 10^{-27 \cdot 2}}{10^9 \cdot 10^{-19 \cdot 2}} = 10^{-36}.$$

La forza gravitazionale è molto debole a livello atomico. I protoni e gli elettroni hanno forze magnetiche legate al proprio spin, ma nel mondo macroscopico tali forze sono deboli.

Le legge di Coulomb non basta per caratterizzare la forza elettrostatica; serve il principio di sovrapposizione: in un sistema con  $n \geq 3$  cariche,  $q_1, \dots, q_n$ , sulla carica  $Q$  agisce la somma delle forze elettrostatiche tra  $Q$  e  $q_i$ , per ogni  $i$ :

$$\vec{F}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i Q}{r_i^2} \hat{u}_i.$$

con  $r_i$  distanza tra  $Q$  e  $q_i$ . Considerando il sistema al continuo, la densità di carica è la media, ma si fa una media su di un volume relativamente grande rispetto le dimensioni atomiche, altrimenti si ottengono regioni a densità infinita ed altre regioni a densità nulla. Dunque,  $dq = \rho(\vec{r}') d\nu$  con  $\rho$  densità di carica in  $\vec{r}'$  e  $d\nu$  volume infinitesimo, si ha:

$$\vec{F}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Legge Coulomb

## Lecture 2

mar 05 ott  
2021 13:30

**Esempio.** [immagine] Data una carica negativa, ci sono tre regioni in cui si può avere un equilibrio. Tale carica è respinta dalla quella in  $C$  ed attratta dalle due in  $A$  e  $B$ . Si può avere equilibrio sopra le tre cariche oppure sotto.

Si consideri la carica al di sotto di tutte e tre. Sia  $l = 1$ . Allora la forza agente da  $q^-$  è

$$F_{q^-} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{3} + |y|)^2}.$$

Mentre per le cariche  $q^+$  le componenti  $x$  si elidono e si ha

$$F_{q^+} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1+y^2} \sin \alpha = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1+y^2} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

[immagine] La soluzione numerica è  $y \approx 0.15$ .

## 3 Distribuzioni continue

Per una distribuzione continua, la forza elettrica agente su di una carica  $q$  è

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Dove  $d\nu'$  si riferisce ad integrare con rispetto ad  $\vec{r}'$  e non  $\vec{r}$ . Inoltre,  $dq' = \rho(\vec{r}') d\nu' \implies \rho(\vec{r}') = \frac{dq'}{d\nu'}$  che è la densità volumica di carica. L'elemento di volume  $d\nu'$  è scelto in modo tale da essere macroscopicamente piccolo e microscopicamente grande così da non rendere discontinua la funzione (che succede qualora si considerino separatamente gli atomi; invece, si fa una media). Si può estendere il volume su tutto lo spazio, tuttavia bisogna specificare la funzione di densità:

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho(\dots) & \vec{r}' \in V \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Bisogna trovare  $V$  e  $\rho(\vec{r}')$ . Tuttavia, esistono casi particolari: la carica distribuita su di un piano oppure una retta.

Su di un piano si ha

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \sigma(\vec{r}') & z = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Dunque, si evita di considerare  $dz$  e si ha

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} da.$$

Dove  $da$  è l'elemento di superficie e  $\sigma = \frac{dq}{da}$  è la distribuzione areica. Per una distribuzione lineica l'espressione della forza è analoga e si ha  $\lambda = \frac{dq}{dz}$ .

Non è detto che le superfici siano piane: cilindri, sfere. Bisogna utilizzare delle coordinate appropriate.

**Esempio.** Si consideri un tronco di cono cavo con densità areica

$$\sigma(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma & \text{su superficie} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

[immagine] Si vuole trovare la forza su  $q$ . L'asse verticale è un asse di simmetria, dunque la forza ha direzione lungo tale asse. Quindi  $\vec{F} = F_z \hat{u}_z$ , così il problema non è più vettoriale ma scalare. Quindi:

$$dq = \sigma da, \quad F_z = \frac{qdq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \cos \theta.$$

Dove  $F_z$  è la forza dovuta a  $da$ . Bisogna esprimere  $dq$  in termini di  $x$  che è la quantità che cambia. Tutti i punti a distanza  $x$  hanno la stessa forza, dunque l'elemento naturale di superficie a considerare è un anello:  $da = 2\pi r(x)dx$ . Quindi

$$dF_z = \frac{q\sigma 2\pi r(x)dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos \theta(x).$$

Dato che  $r(x) = x \sin \theta$  e  $\cos \theta = \text{cost.}$  si ha

$$dF_z = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi x \sin \theta}{x^2} \cos \theta dx.$$

Da cui segue

$$F_z = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{L}{2}}^L \sin \theta \cos \theta \frac{2\pi x}{x^2} dx = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dx}{x} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta \ln 2.$$

Se si integra da zero allora la forza diverge.

Si considera un altro problema, questa volta con un valore storico. Si vuole calcolare la forza su di una carica posta all'interno di una sfera cava con densità superficiale uniforme,  $\sigma$ . L'espressione generale della forza è

$$\vec{F}_q = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} da.$$

[immagini] Tuttavia, si osserva che costruendo due superfici in modo tale che sottendono lo stesso angolo solido in  $q$ , si ottengono varie semplificazioni sommandoli a coppie. Un angolo solido  $\Omega$  si misura in steradiani ed è definito dalla superficie che lo sottende  $d\Omega = \frac{da}{r^2}$ , simile alla definizione di radiante  $d\theta = \frac{da}{r}$ .

Sorgono alcuni problemi quando si vuole calcolare un angolo in situazioni particolari. Ad esempio, ci si chiede sotto quale angolo si veda una lunghezza  $d$  da un punto  $P$ . Non si ha più la geometria di un cerchio. L'angolo misurato è legato all'arco  $l$  diviso il raggio  $r$ , anche se l'arco non coincide con la corda, si ha una correzione del secondo ordine che si può ignorare. Dunque,  $d\alpha = \frac{dl}{r} = \frac{d \cos d\theta}{r}$ , [rivedi] per immagini. Se il punto è lungo la normale allora si ha la definizione precedente. Fuori dalla normale bisogna correggere per  $\cos \theta$ . Allo stesso modo con

l'angolo solido.

Per una coppia di aree lungo il diametro si ha:

$$F_1 = \frac{q\sigma da_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} = \frac{q\sigma d\Omega r_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \frac{r_2^2}{r_2^2} = F_2.$$

Lungo una qualsiasi altra direzione compare il coseno dell'angolo che, però, si semplifica. Dunque, la somma delle forze è nulla. L'andamento della forza con il reciproco del quadrato della distanza è compensato della geometria sferica. La superficie non dev'essere necessariamente sferica perché ciò accada.

**Proprietà della forza elettrostatica.** Dato un sistema di carica, la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione lo descrivono completamente. Si studiano dei risultati che ne discendono. Alcune proprietà:

- la forza elettrostatica è conservativa, si ha un'energia potenziale e si hanno delle leggi di conservazione. Essa è conservativa perché la forza di Coulomb tra le cariche puntiformi è una forza centrale:  $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$ . Dunque:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r)\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r) dr = -[U(r_B) - U(r_A)].$$

Per convenzione si pone un meno davanti alla primitiva.

- Con  $N$  cariche, la forza complessiva  $\vec{F}_q = \sum \vec{F}_i$  è la somma di solo forze centrali:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_q \cdot d\vec{r} = \int_A^B \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

Si sommano integrali di cammino di forze centrali, ciascuna conservativa, dunque quella totale non dipende dal percorso perché conservativa a sua volta.

**Energia potenziale.** Si introduce l'energia potenziale e ne si trova l'espressione. La situazione più semplice è una coppia di cariche: [immaginare]

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{r} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = -\left[ \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \right] = -[U(r_B) - U(r_A)].$$

Tale energia potenziale è definita a meno di una costante, infatti:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + \text{cost.}$$

Si sceglie un riferimento da cui calcolarla, di modo che si può calcolare il percorso da  $A$  al riferimento  $O$  e calcolare da  $O$  a  $B$ . Si pone  $r_0$  all'infinito, da cui  $U(r_0) = \text{cost.} = 0$ . Dunque

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Si ha  $U > 0$  per  $q_1 q_2 > 0$  e  $U < 0$  per  $q_1 q_2 < 0$ .

Per  $N$  cariche si sommano le interazioni di coppia tramite il principio di sovrapposizione. Per tre cariche si hanno

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \quad (1)$$

$$U_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}} \quad (2)$$

$$U_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} \quad (3)$$

Infatti

$N$	termini
1	0
2	1
3	3
4	6
$N$	$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$

Dunque

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}.$$

Essa è una energia potenziale di configurazione.

**Esempio.** Energia di legame di una molecola di Na+Cl-. [immagine]. Sia  $|q| = e^-$ ,  $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$  m. L'energia potenziale è negativa perché le due cariche hanno segno opposto. Per separarle bisogna vincere l'energia di dissociazione, cioè l'energia necessaria per portare tali due cariche a distanza infinita l'una dall'altra.

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \approx 8 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

Lo si confronta con l'energia termica a temperatura ambiente:

$$K = \frac{5}{2} k_B T = \frac{5}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \approx 10^{-20} \text{ J}.$$

Quindi il sale non si dissocia a temperatura ambiente.

Tuttavia, l'interazione tra le cariche in materiale è affievolita dalla polarizzazione delle cariche all'interno del materiale. La costante dielettrica relativa dell'acqua è  $\epsilon_r = 80$ , dunque l'energia potenziale si riduce di 80 volte ed è così confrontabile con l'energia termica. Questo è fondamentale perché i sali si dissociano nei liquidi fisiologici come il sangue.

**Vantaggi energia potenziale.** L'uso dell'energia potenziale è più conveniente rispetto alla forza, dato che è una grandezza scalare.

Si consideri un anello con densità lineica  $\lambda$  e si disponga una carica  $q$  con stesso segno al centro. Tale è una posizione di equilibrio. Spostandola dal centro di una lunghezza  $\varepsilon$  si ha una configurazione di non equilibrio perché  $F \propto \frac{1}{r^2}$  mentre prendendo due porzioni opposte che sottendono lo stesso angolo, si ha una carica contenuta di  $dq = \lambda r_1 d\alpha$  che non bilancia la forza.

Si vuole trovare la forza di richiamo. Si ha  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{\varepsilon}$  e

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r.$$

con  $dq = \lambda R d\varphi$ . Risolvendo tutto quanto con la forza risulta complicato. Tuttavia, utilizzando il potenziale è più semplice. Si calcola  $U(\varepsilon)$  e si trova

$$F = -\frac{dU}{d\varepsilon}.$$

Dunque

$$dU = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\varphi}{r} \Rightarrow U = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2 - 2R\varepsilon \cos \varphi}} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi}}.$$

Dato che  $\frac{\varepsilon}{R} \ll 1$  si può utilizzare lo sviluppo di Taylor. Tuttavia, non si sono scritte tutte le interazioni di ogni carica sull'anello con le altre, questo perché tali sono tutte costanti e dunque si possono ignorare perché l'energia potenziale è definita a meno di una costante.

Si utilizza il seguente sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + o(\delta^2).$$

Si pone  $\delta \equiv \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R}\cos\varphi$ . Dunque

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R}\cos\varphi}} \sim 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{R}\cos\varphi\right] + \frac{3}{8} \cdot 4\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \cos^2\varphi + o\left(\left[\frac{\varepsilon}{R}\right]^3\right).$$

Pertanto

$$U(\varepsilon) = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{\varepsilon}{R}\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 (3\cos^2\varphi - 1) d\varphi = \frac{q\lambda}{2\varepsilon_0} + 0 + \frac{q\lambda}{8\varepsilon_0 R^2} \varepsilon^2.$$

Dunque,  $F = -\frac{dU}{d\varepsilon} = -\frac{q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2} \varepsilon$ . Campo elettrico

### Lecture 3

mer 06 ott  
2021 13:30

Si è detto che per distribuzioni continue di carica, la forza di Coulomb è

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Invece, per due distribuzioni continue di cariche  $\rho_1, \rho_2$  si ha: [immagine]

$$\vec{F}_{\rho_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu' d\nu.$$

Tuttavia, non interessa tutto  $\rho_1$  esplicitamente. Basta conoscere l'interazione di ciascuna carica puntiforme con  $\rho_2$  e poi sommare per il principio di sovrapposizione.

## 4 Campo elettrico

Si introduce il concetto di campo elettrico: esso permette di rappresentare la forza che agisce su ogni punto dello spazio, conoscendo la carica. Con una distribuzione di cariche si può calcolare il campo elettrico.

Si consideri una distribuzione di cariche puntiformi,  $q_1, \dots, q_n$ , e si ponga una carica esploratrice  $q_0$  in qualsiasi posizione  $\vec{r}$  dello spazio. Dunque

$$\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}_i}.$$

Si definisce una grandezza vettoriale: [immagine]

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}_i}.$$

Per una distribuzione continua si ha:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$



Da cui risulta  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Il campo elettrico è definito in maniera operativa: esso si misura conoscendo la forza e la carica, senza però sapere la distribuzione delle sorgenti. Nella pratica esso semplifica l'analisi dei problemi.

Il campo elettrico ha una importanza geometrica che permette di analizzare il comportamento del sistema prima di trovare l'espressione del campo: tale importanza è data dalle linee di campo. La linea indica la direzione, la freccia indica il verso e la densità delle linee indica l'intensità del campo. Si disegnano uscenti da cariche positive ed entranti in cariche negative. Per cariche puntiformi si ha [immagine]

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r.$$

Il campo è definito in modo univoco in ogni punto e la forza segue una linea di campo. Le linee non si intersecano mai, tranne nelle sorgenti o all'infinito.

**Esempio.** Si consideri un sistema di cariche lungo l'asse  $x$  di intensità  $3q > 0$  e  $-q$  poste in  $(-d, 0)$  e  $(0, 0)$  rispettivamente. [immagine]

Si vogliono disegnare le linee di campo e trovare, se esiste, una regione in cui il campo è nullo.

Vicino a  $3q$  si hanno delle linee di campo uscenti radialmente. Un terzo di queste linee si chiudono su  $-q$  e gli altri due terzi proseguono all'infinito. Infatti, guardando dall'infinito, la carica totale è  $2q$ , quindi escono linee solo da  $q$  e non ne entrano da  $-q$ .

Si ha una zona in cui non passano linee del campo elettrico e qui ci si aspetta una posizione di equilibrio. Dunque

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{(d+x)^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

La condizione di equilibrio si ha per  $3x^2 = (d+x)^2$ . Da notare che l'equazione sopra è scritta solo per la zona a destra, infatti per avere validità generale bisogna inserire dei valori assoluti. Inoltre, la soluzione della condizione di equilibrio è quella positiva proprio per la rimozione dei valori assoluti operata precedentemente.

Dunque si ha  $\sqrt{3}x = d+x \iff \frac{d}{\sqrt{3}-1}$ .

#### 4.1 Calcolo in situazioni particolari

**Disco.** Si consideri un disco di raggio  $R$  con densità aerica uniforme di carica  $\sigma$ . Si calcola il campo elettrico in un punto  $P$  che si trova lungo l'asse  $z$  il quale passa per il centro  $O$  del disco a cui è perpendicolare. [immagine]

Si sa:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \hat{u}_d.$$

In componenti si ottiene:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \frac{z}{d} \quad (4)$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma da}{d^2} \frac{r}{d} \quad (5)$$

Con  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ . Se si supponga che il campo elettrico risultante abbia una qualsiasi direzione che non sia quella lungo l'asse  $z$ , allora ruotando il disco di un angolo arbitrario, segue che il vettore campo elettrico punta in un'altra direzione, ma la situazione fisica è identica a quella prima della rotazione, dunque non c'è motivo per cui il vettore debba avere diversa direzione: pertanto, l'unica direzione possibile è quella lungo l'asse  $z$ .

Dunque,  $E_r = 0$ . Si calcola  $E_z$ . Si sa  $P(0, 0, z)$  e  $da(x, y, 0)$ . Inoltre,  $d \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $da = dx dy$ . Pertanto

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{z\sigma dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bisogna discutere il dominio di integrazione, i limiti di integrazione. In coordinate cartesiane, per coprire un cerchio bisogna avere  $x \in [-R, R]$  e  $x^2 + y^2 \leq R^2 \implies y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$ . Da cui risulta

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Tuttavia, utilizzando dei sistemi di coordinate diverse, l'integrale si può semplificare perché si fa uso di simmetrie. Tale sistema di coordinate è quello cilindrico:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Dunque  $d \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$ . [immaginare]

Si ha  $da = r d\varphi dr$ . Quindi

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il dominio di integrazione è  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ :

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si opera la sostituzione  $r^2 + z^2 \equiv u$ ,  $2r dr = du$ , da cui

$$E_z = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-\frac{3}{2}} du = -\frac{z\sigma}{4\epsilon_0} 2u^{-\frac{1}{2}} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right].$$

Si potrebbe notare che si può anche integrare solo su  $r$  sfruttando la simmetria circolare tramite le corone circolari  $2\pi r dr$ .

Si controlla che il risultato abbia senso fisico andando ad osservare il comportamento per  $z \rightarrow +\infty$ . Ad infinito si vede una carica puntiforme, quindi essa dovrebbe dipendere da  $z^2$ . Dunque per Taylor

$$E_z = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \right].$$

Pertanto

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} E_z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{z} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}\right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} \frac{\pi}{\pi} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{z^2}.$$

Nell'ultimo termine si evidenzia la carica totale  $q \equiv \sigma\pi R^2$  e la dipendenza da  $z^2$ .

**Piano infinito.** Si consideri un piano infinito: esso è una buona rappresentazione della situazione in cui si è molto vicini ad una grande distribuzione planare di carica. Il piano presenta una carica aerica uniforme  $\sigma$ . Si ha simmetria rotazionale e, per la stessa argomentazione precedente, l'unica direzione possibile del campo elettrico è quella verticale lungo  $z$ . Inoltre, si ha simmetria traslazionale, quindi si ha la stessa intensità alla stessa distanza. Non è necessario ripetere il calcolo dell'integrale, basta notare che nella soluzione precedente, quando si ha  $R \rightarrow +\infty$  si ottiene un piano infinito:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \vec{E}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_z.$$

Quindi il campo è lo stesso a qualsiasi distanza.

**Piano infinito con foro circolare.** Si può calcolare il campo elettrico in due modi:

- Calcolare l'integrale:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{z\sigma da}{d^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{+\infty} \frac{z\sigma r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Principio di sovrapposizione: il piano infinito con un foro è la somma della densità di carica  $\sigma^+$  del piano infinito più quella  $\sigma^-$  del foro. Quindi

$$\vec{E}_z = \left[ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \right] \hat{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{u}_z.$$

Legge di Gauss

## Lecture 4

lun 11 ott  
2021 13:30

## 5 Legge di Gauss

La relazione tra campo elettrico e sorgente diventa utile se viene espressa in termini di flusso. Si consideri una superficie in una regione in cui esiste un campo elettrico  $\vec{E}(x, y, z)$ . [immagine] Si ha  $\Delta\vec{a} = \Delta a \hat{n}$ . Si definisce il flusso del campo elettrico attraverso la superficie:  $\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \vec{a}$ , dunque  $\Phi_S(\vec{E}) = \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{a}_i$ . La superficie  $\Delta a$  è presa in modo che il campo elettrico è costante, così che il prodotto sia ben definito.

Nel continuo si ha:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

Si è già conosciuta una grandezza legata al flusso. Nei fluidi, la velocità è un vettore descritto in tutti i punti dello spazio, dunque forma un campo vettoriale. Le linee di flusso sono linee di campo. Si è introdotto il tubo di flusso e la portata (o flusso)  $Q = \frac{dV}{dt} = Av$ . Si è presa la sezione ortogonale alla direzione della velocità. [immagine]

Si generalizza in modo che la sezione non sia ortogonale alle linee di flusso. [immagine] Dunque si ha  $dV = Adh = Avd \cos \alpha = A\hat{n} \cdot \vec{v}dt$ . L'integrale lungo una superficie è analogo a  $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , con  $d\vec{s} = s\hat{u}$ .

La legge di Gauss permette di associare il flusso attorno una superficie con le cariche all'interno:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

[immagine]

La legge discende da una osservazione sperimentale. Essa è conseguenza della legge di Coulomb e del principio di sovrapposizione. Inoltre, le riassume entrambe. D'altra parte, il teorema di Gauss, come tutti i teoremi, è una verità matematica.

Si dimostra l'equivalenza con la legge di Coulomb ed il principio di sovrapposizione:

- 1 Si dimostra vera per una carica puntiforme e una superficie sferica con centro nella carica.
- 2 Si dimostra vera per una carica puntiforme ed ogni superficie.
- 3 Si dimostra vera per qualunque distribuzione di cariche e per ogni superficie.

Nei primi due passaggi si utilizza la legge di Coulomb, mentre nel terzo si applica il principio di sovrapposizione.

**Punto I.** Si consideri una sfera  $S$  di raggio  $R$ . Un elemento di area è  $d\vec{a} = da\hat{u}_r$  con  $\hat{u}_r$  direzione radiale che coincide con la direzione normale. Quindi il campo elettrico per una carica puntiforme è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Pertanto

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int_S da = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Questo è anche il motivo per cui la costante di Coulomb presenta il fattore di  $4\pi$ : per simmetria sferica.

**Punto II.** Si consideri una superficie arbitraria al cui interno sia posta una singola carica puntiforme. Si consideri una superficie sferica con centro nella carica e che sia tutta contenuta nella superficie arbitraria. Dunque, la superficie che sottende lo stesso angolo solido  $d\Omega$  è  $dA \cos \theta = d\Omega R^2$ . Dato che il campo è radiale, si utilizza la configurazione con il medesimo angolo solido così da avere la stessa quantità di linee per quantità di area. Quindi

$$\Phi_{da}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\Omega r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dA \cos \theta}{R^2} = \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

**Punto III.** Si consideri una distribuzione qualunque di cariche puntiformi. Si scrive il campo elettrico come sovrapposizione  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$ . Dunque

$$\Phi_S(\vec{E}) \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{a} = \sum \int_S \vec{E}_i \cdot d\vec{a}_i = \sum \Phi_S(\vec{E}_i) = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

## Lecture 5

La legge di Gauss è

mar 12 ott  
2021 13:30

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0} \rightarrow \Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Quindi, il flusso attraverso una superficie chiusa in cui non sono presenti cariche è  $\Phi_S(\vec{E}) = 0$ . [immagine] Infatti, il flusso nella superficie  $S + S'$  è  $\Phi_{S+S'}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Si consideri un collegamento infinitesimo si ha:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \implies \Phi_{S'}(\vec{E}) = 0.$$

Un altro modo per vedere che  $\Phi_S = 0$  è sapere che il contributo attraverso le superfici che sottendono lo stesso angolo solido è uguale: il flusso in entrata ed in uscita è lo stesso (solo con segno opposto).

Si scelga una carica puntiforme e la si guardi attraverso una superficie  $da$  che sottende un angolo solido  $d\Omega$ . Allora il flusso attraverso la superficie che sottende tale angolo solido è uguale qualunque sia la superficie. Questo è utile per scegliere la superficie più comoda così da semplificare i calcoli.

Infatti, si considerino due casi come quelli in figura [immagini] Si costruisce un sistema che è la somma dei due con  $S = A + A'$ . Si ha  $\Phi_S(\vec{E}) = 0$  perché non ci sono cariche all'interno. Dunque

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{A'} \vec{E} \cdot d\vec{a}' = 0.$$

Per superfici aperte, il verso del versore normale è arbitrario. Per superfici chiuse, esso punta verso l'esterno. Quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = -\Phi_A(\vec{E}) + \Phi_{A'}(\vec{E}) = 0 \implies \Phi_A(\vec{E}) = \Phi_{A'}(\vec{E}).$$

**Esempio.** Si consideri un cono ed una calotta sferica. [immagine]

Per il cono vale  $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a}$ . Per simmetria, i punti di una corona circolare hanno la stessa intensità del campo elettrico:  $r = \frac{h}{\cos \alpha}$ ,  $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r$ ,  $da = 2 dR \hat{n}$ .

Quindi  $R = r \sin \alpha = h \tan \alpha$ ,  $dR = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ . Pertanto

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} da \hat{n} \cdot \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \alpha}{h^2} 2\pi h \tan \alpha \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \cos \alpha = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Dunque

$$\Phi = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta).$$

Per la calotta il calcolo è più semplice:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}; \quad da = 2\pi R \sin \alpha R d\alpha.$$

Quindi

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Da cui il risultato è ancora  $\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$ .

## 5.1 Applicazioni della legge di Gauss

**Sfera piena.** Si consideri una sfera piena con carica uniforme

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & r \leq R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Si calcola il campo elettrico per mezzo della legge di Gauss. Essa ha un'utilità quando si sceglie una superficie opportuna così da semplificare l'integrale, cioè sarebbe comodo trovare una superficie tale per cui il campo elettrico sia costante.

Nella sfera, l'unica direzione possibile è quella radiale, questo è motivato dall'argomento già esposto riguardo la simmetria di rotazione, la quale vale attorno a qualunque asse per il centro. Quindi, la direzione e l'intensità non dipendono dalle componenti angolari:  $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$ . Dunque, la superficie pure la superficie all'interno utilizzata per il calcolo dell'integrale dev'essere sferica con raggio  $r$ . Pertanto

$$\Phi_S(\vec{E}) = E(r) \int_S da = E(r) 4\pi r^2 = (\text{Gauss}) \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\nu.$$

Dunque

- Per  $r \geq R$  si ha

$$\int_V \rho d\nu = \rho \int_{V(r=R)} d\nu = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q.$$

Quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Una sfera uniformemente carica si comporta come una carica puntiforme.

- Per  $r < R$  si ha

$$\int_V \rho d\nu = \int_0^r d\nu = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \text{carica fino a raggio } r.$$

Quindi

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

[immagine]

**Filo infinito.** Si consideri un filo infinito (cioè che si è talmente vicini che appare essere infinito) di densità di carica lineica  $\lambda$  e con simmetria cilindrica. Si consideri inoltre una superficie cilindrica lunga  $L$ . [immagine] Dunque  $\Phi_S(E) = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ,  $\hat{u}_r \cdot \hat{n} = 1$ . Il flusso è nullo per le basi perché  $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ . Pertanto

$$\int E(r) da = E(r) \int_{\text{Superf. later.}} da = E(r) 2\pi r L.$$

Si ha  $dq = \lambda da$ , da cui  $q = \lambda \int_0^L dz = \lambda L$ . Quindi

$$E(r) 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Questa formula è valida quando si è molto vicini al filo, cioè supponendo che (relativamente) il filo sia infinito.

**Piano infinito.** Si consideri una distribuzione planare di carica con densità areica  $\sigma$ . Per ogni punto si ha simmetria rotazionale e traslazionale. Il campo punta in direzione  $z$ :  $\vec{E}(z) = E\hat{u}_z$ . Tramite Gauss si può utilizzare un cilindro. [immagine] Non sapendo come il campo elettrico dipenda da  $z$  si sceglie il cilindro in modo tale che il piano lo sezioni a metà. Quindi  $d\vec{a} = \pm da \hat{u}_z$ . Il prodotto scalare sopra e sotto tra  $\vec{E}$  e  $d\vec{a}$  è lo stesso. Inoltre, il contributo delle superfici laterali è nullo perché sono parallele alla direzione del campo. Il campo è concorde con  $d\vec{a}$  per  $\sigma > 0$  e discorde per  $\sigma < 0$ . Dunque, grazie alle simmetrie si ha

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{base}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2E(z)A = (\text{Gauss}) \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \iff E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_z.$$

Per due piani paralleli con carica opposta si può utilizzare il principio di sovrapposizione.

**Superficie generica.** Si consideri una superficie generica con densità areica  $\sigma$  e altre cariche presenti di cui non si sa la disposizione. [immagine] Tramite Gauss si può stabilire la relazione tra  $E_1$  ed  $E_2$ , campi da una e dall'altra parte della superficie. Localmente, la superficie è piana, dunque, si consideri un cilindro con altezza  $h$  attraverso cui si calcola il flusso nel limite per cui  $h \rightarrow 0$ . Bisogna notare che in questo caso il flusso attraverso la superficie laterale non è nullo. Nel limite di  $h \rightarrow 0$  il flusso attraverso la superficie laterale va a zero, quindi interessano solo le due basi. Quindi

$$\int_{\text{base sup.}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_1 + \int_{\text{base inf.}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_2 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}.$$

Dunque per  $\hat{n}$  con verso uscente dalla superficie si ha

$$(E_{\perp,1} + E_{\perp,2})A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} A.$$

Se si considera  $\hat{n}$  con una sola direzione allora si ha

$$\Delta E_{\perp} = (E_1 - E_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Si nota che un campo ha il segno opposto. Infatti, nel piano si ha  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  per  $z > 0$  e  $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  per  $z < 0$  che hanno differenza di  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ .

La discontinuità nel campo elettrico è dovuta alla superficie.

**Sfera cava.** Si consideri una sfera cava uniformemente carica. Si ha  $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$ .

$$\Phi_S(E) = E \int d\vec{a} = (\text{Gauss})0 \implies E = 0 \text{ fino a } r < R.$$

Appena  $r \geq R$  si ha  $Q = 4\pi\sigma R^2$ . Quindi

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

Dunque  $E(R^-) = 0$  e

$$E(R^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

**Lavoro per avvicinare delle cariche.** L'energia potenziale può essere scritta in termini di campo elettrico. Quando si portano delle cariche elettriche in uno spazio vuoto, si crea un campo elettrico. Il lavoro per avvicinare due cariche si può intendere come il lavoro che va nell'energia potenziale di interazione oppure come lavoro necessario a creare il campo elettrico. Dunque, si cerca  $U = U(\vec{E})$ .

Si consideri una sfera cava carica. Per avvicinare le cariche di una distanza  $dR$  si compie un lavoro utile a creare del campo elettrico dove prima non era presente, pertanto si aumenta l'energia potenziale  $dU$ . [immagine]

Dunque, il volume infinitesimo è  $dV = 4\pi R^2 dR$ . Si calcola il lavoro necessario ad avvicinare le cariche. Interessa il lavoro compiuto dal campo elettrico:

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dq\vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Con la forza elettrica si intende solo quella dovuta all'eccesso di carica, non alla mutua interazione tra gli atomi né alle loro forze di coesione, le quali sono la somma di tante cariche di segni opposti che, su grandi distanze, si cancellano.

Su una porzione di carica  $dq = \sigma dA$  sulla superficie agisce un campo elettrico che è contributo di tutte le cariche sulla superficie comprese quelle nella regione  $dA$ ; tuttavia, una carica non interagisce con se stessa. Idealmente,  $\vec{F} = dq \vec{E}_{\text{ext}}$ , ma si aggiunge  $\vec{E}_{\text{int}}$  perché le forze interne si bilanciano (per principio di azione, reazione). Dunque

$$\vec{F} = dq (\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}}) = dq \vec{E}.$$

Inoltre, il campo all'interno è  $E = 0$  ed all'esterno è  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Il campo da considerare è una media. Infatti, una distribuzione fisica non è mai uno strato di spessore nullo, dunque la superficie ha uno spessore  $d$  piccolo e si consideri una porzione di spessore  $dx$ . Pertanto, la quantità di carica contenuta in  $dx$  è  $dq = \rho dx A = d\sigma(x) A$ . [immagine]

Quindi,  $dF(x) = dqE(x) = d\sigma AE$  e  $d\sigma = \epsilon_0 dE$  in quanto passando attraverso una superficie, il campo elettrico ha una discontinuità dovuta alla superficie stessa. Dunque

$$dF = AE\epsilon_0 dE \iff \frac{dF}{A} = E\epsilon_0 dE \implies \frac{F}{A} = \epsilon_0 \int_{E_1}^{E_2} E dE = \epsilon_0 \frac{1}{2} (E_1 + E_2) \Delta E = \epsilon_0 \langle E \rangle \frac{\sigma}{\epsilon_0} \iff F = dq \langle E \rangle.$$

(nei precedenti passaggi l'area  $A$  era una porzione infinitesimale, dunque è  $dq$  e non  $q$ ). Quindi, per la sfera

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} + 0 \right) \implies dF = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} dA.$$

Dunque, il lavoro è

$$W = -dU = -\langle E \rangle q dr = -\langle E \rangle \sigma A dr = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sigma 4\pi r^2 dr.$$

Per  $q > 0$  rimpicciolendo si lavora contro il campo elettrico e similmente per  $q < 0$  si lavora contro la forza e si fa crescere l'energia potenziale. Quindi

$$dU = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 dr 4\pi r^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 dV.$$

Il termine  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  è la densità di energia potenziale.

**Esercizio.** Si considerino due piani paralleli con la stessa densità areica di carica  $\sigma$ . Avvicinando i due piani, il campo elettrico creato è  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  in un volume  $dV = A dx$ . Si calcoli la forza elettrica e qual è il lavoro di tale forza per calcolare la variazione di energia potenziale. Bisogna notare che, considerando una carica, le forze elettrostatiche dovute alle altre cariche sullo stesso piano sono perpendicolari allo spostamento  $dx$ , dunque non compiono lavoro e l'unico contributo al lavoro è dovuto al campo del piano opposto. Infatti,  $W = qE dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sigma A dx = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} A dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$ . [immagine]

## Lecture 6

Le espressioni dell'energia potenziale diventa

mer 13 ott  
2021 13:30

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV, \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Ne caso di due piani paralleli con distribuzione areica uniforme  $\sigma$ . Si ha

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_z & \text{se ext.} \\ 0 & \text{se int.} \end{cases}.$$

Il lavoro per avvicinare i piani è

$$-dU = W = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Isolando  $dq = \sigma dA$ , si ha che tutte le cariche sul piano esercitano su  $dq$  delle forze perpendicolari allo spostamento; dunque si considera solo l'interazione delle cariche dell'altro piano. Quindi

$$W = E dq dx = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sigma dA dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 dA dx.$$

Si crea un campo elettrico dove prima era nullo. L'energia potenziale si può calcolare dal campo elettrico senza avere conoscenza delle cariche.

**Coordinate sferiche.** [immagine]

Le coordinate sono  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $r \in [0, +\infty)$ . I passaggi di coordinate sono

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}.$$

Quindi per ottenere un elemento di volume bisogna passare da  $(r, \theta, \varphi)$  a  $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ . Dunque  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ .

**Esempio.** Si consideri una sfera cava con densità di carica areica  $\sigma$ . Il campo elettrico

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r & r \geq R \end{cases}.$$

Con  $Q = 4\pi R^2 \sigma$ . Il contributo del campo elettrico all'interno della sfera è nullo. Quindi

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^{+\infty} \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

La funzione non dipende dalle coordinate angolari  $\theta$  e  $\varphi$ ; dunque, per linearità

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2}}_{\frac{1}{R}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}.$$



Si vede un altro modo di calcolare l'energia potenziale di una distribuzione continua. Si ha il passaggio  $q_i \rightarrow dq_i = \sigma da_i$ . Dunque

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \int_S \frac{\sigma da \sigma da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_S \int_S \frac{da da'}{|\hat{u}_r - \hat{u}_{r'}|}.$$

[immagine]

Dove  $\vec{r} - \vec{r}' = R\hat{u}_r - R\hat{u}_{r'} = R(\hat{u}_r - \hat{u}_{r'})$ . Inoltre, il secondo integrale vale  $(4\pi R^2)^2$  ed il motivo di tale risultato può essere di seguito informalmente motivato: si tenga fissata la direzione di  $da$  e si integri l'altra  $da'$  così da spazzare tutto l'angolo solido ottenendo un risultato di  $4\pi R^2$ ; ripetendo lo stesso procedimento per ogni direzione di  $da$ , si ripete un numero totale di volte pari a  $4\pi R^2$ . Pertanto il risultato è  $(4\pi R^2)^2$ .

Si vede un terzo modo per calcolare l'energia potenziale. [immagine]

L'energia potenziale è il lavoro necessario per configurare il sistema portando le cariche dall'infinito alla loro posizione. Quando si è ad una carica totale  $0 < q < Q$ , con  $Q = \sigma 4\pi R^2$ , e si vuole portare una carica dall'infinito fino ad  $R$  si ha

$$W = - \int_{+\infty}^R dq \vec{E}_q \cdot d\vec{r} = \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Dunque, l'energia potenziale della configurazione è

$$U = \int_0^Q \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

**Equivalenza espressioni.** Si dimostra l'equivalenza delle due espressioni precedentemente citate. Se si dimostra l'equivalenza per una coppia di cariche allora per il principio di sovrapposizione si può estendere il risultato ad un numero arbitrario di cariche.

Si considerino due cariche elementari  $e$  separati da una distanza  $b$ . [immagine]. Si ha l'espressione di interazione delle cariche come

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{b}.$$

Mentre l'espressione con i campi elettrici è

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 d\nu = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_1^2 d\nu + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_2^2 d\nu + \epsilon_0 \int_V \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\nu.$$

Si ricorda che  $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ . Inoltre, nei primi due integrali si ha  $E^2 \sim \frac{1}{r^4}$ ,  $d\nu = 4\pi r^2 dr$  e dunque gli integrali hanno comportamento asintotico come  $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$ , infatti divergono. Tuttavia, tali due integrali sono detti di auto-energia: essi rappresentano l'energia necessaria a "creare" una carica puntiforme. Sono divergenti perché per accumulare una quantità finita di carica in uno spazio infinitesimo richiede, nell'elettrodinamica classica, un lavoro infinito. Tuttavia, le cariche puntiformi "esistono pronte all'uso" e ci si occupa solamente di calcolare il lavoro necessario per creare la configurazione, cioè il lavoro di interazione. Inoltre, essi sono costanti e si possono ignorare dato che l'energia potenziale è definita a meno di costanti. Queste divergenze non sono eliminate nella meccanica quantistica: il problema è gestito tramite la rinormalizzazione, cioè si sottrae i termini divergenti irrilevanti. Quindi, l'ultimo integrale (e l'espressione dell'energia potenziale) diventa:

$$U = \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \cos \psi \frac{1}{r^2} \frac{1}{R^2} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Inoltre  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{b}$  da cui  $R = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}$ , e soprattutto  $\cos \psi = \frac{r-b \cos \theta}{R}$ . [immagine]. Tuttavia, non si segue questa strada di integrazione, ma si manipola l'integrando

ancora un po'. Se si integra  $r$  mantenendo  $\theta$  costante si ha  $dr \cos \psi' = dR$ , tuttavia  $\psi' \approx \psi$  per infinitesimi. Dunque

$$U = \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \underbrace{\epsilon_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{4\pi} \underbrace{\int_b^{+\infty} \frac{dR}{R^2}}_{\frac{1}{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{b}.$$

Tutte le volte che si lavorano con energie potenziali si potrebbero aver costanti infinite dovute alla costruzione della configurazione delle cariche.

## 6 Potenziale elettrico

La forza elettrostatica è conservativa, quindi vi si associa un'energia potenziale. Il campo elettrico è stato introdotto in modo tale che  $\vec{F} = q\vec{E}$  per ogni carica  $q$  che si trova sotto l'influenza della distribuzione di carica statica che genera  $\vec{E}$ . Dunque diventa naturale chiedersi quali proprietà abbia l'integrale di linea del campo elettrico:  $\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}$  è indipendente dal percorso.

La dimostrazione è la stessa di quella utilizzata per la forza. Il campo elettrico di una carica puntiforme è radiale come la forza e vale

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Dunque l'integrale di linea su  $\Gamma$  è

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Si introduce in maniera analoga alla forza, una funzione scalare associata all'integrale di linea. Inoltre, vale il principio di sovrapposizione. Se  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$  allora

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\Gamma \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \int_\Gamma \vec{E}_i \cdot d\vec{s}.$$

Dato che ogni integrale è indipendente dal percorso, allora anche la somma lo è a sua volta. Inoltre, dato che è conservativo segue che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Si introduce la grandezza associata  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  chiamata potenziale elettrostatico:

$$\Delta\varphi \equiv - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

La scelta del segno negativo ritorna dalla convenzione dei segni già usata per la definizione dell'energia potenziale. Infatti

$$\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{P_1}^{P_2} q\vec{E} \cdot d\vec{s} = q\Delta\varphi.$$

Quindi  $\Delta\varphi$  è una energia per unità di carica ed ha come unità di misura:

$$[\Delta\varphi] = \frac{J}{C} = V.$$

Similmente, il campo elettrico ha come unità di misura:

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}.$$

Il potenziale elettrostatico è definito a partire dalla differenza di potenziale come funzione scalare della posizione  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  definita a partire da un punto di riferimento fissato in modo arbitrario, ma oculato:

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{P_0}^{P(x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Il potenziale elettrostatico è un campo scalare.

Se si suppone di conoscere  $\varphi$  e si vuole trovare il lavoro necessario per andare da un punto all'altro dello spazio si utilizza l'espressione  $q\Delta\varphi$ .

**Nota.** Con le cariche elementari si utilizza l'unità di energia dell'elettronvolt:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

**Esempio.** [immagine]

Si consideri  $\vec{E} = (ky \quad kx \quad 0)$ . La differenza di potenziale tra l'origine ed un punto  $(x, y)$  è seguendo una traiettoria che percorre l'asse  $x$  fino alla proiezione del punto e poi si innalza alla sua ordinata è:

$$\varphi(x, y) = - \int_0^x \vec{E}(x, 0) \cdot dx \hat{i} - \int_0^y \vec{E}(x, y) \cdot dy \hat{j} = 0 - kx \int_0^y dy = -kxy.$$

**Nota.** Non tutte le funzioni di coordinate sono possibili potenziali di campi elettrici. Non tutti i vettori funzioni di coordinate sono possibili campi elettrici. Deve essere soddisfatta la condizione di circuitazione. Si vede più avanti questa caratteristica impone delle condizioni precise sulle derivate di  $f$ .

**Esempio.** Si consideri una sfera cava,  $Q = 4\pi R^2 \sigma$ . L'energia potenziale descrive l'interazione tra le cariche ed i campi. Il potenziale è una funzione scalare legata alla configurazione delle cariche. Quindi

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r & r \geq R \end{cases}.$$

Si definisce  $\varphi(\vec{r}) = - \int_{+\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$ . Quindi

- Per  $r \geq R$  si ha

$$\varphi(r) = - \int_{+\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Sulla superficie risulta  $\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$ .

- Per  $r \leq R$  si ha

$$\varphi(r) = - \underbrace{\int_{+\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{\varphi(R)} - \underbrace{\int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}}_0 = \text{cost..}$$

[immagini] All'interno della sfera si ha regime equipotenziale.

**Esempio.** Si consideri una sfera piena di densità di carica uniforme  $\rho$ . La carica totale è  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ . Inoltre

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r & r \geq R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r & r \leq R \end{cases}.$$

Quindi

- Per  $r \geq R$  si ha

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

come precedentemente.

- Per  $r \leq R$  si ha

$$\varphi(r) = - \underbrace{\int_{+\infty}^R \vec{E}_{\text{ext.}} \cdot d\vec{r}}_{\varphi(R)} - \underbrace{\int_R^r \vec{E}_{\text{int.}} \cdot d\vec{r}}_{\varphi_{\text{int.}}}$$

Dove si ha

$$\varphi_{\text{int.}} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{1}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R^2 - r^2).$$

Dato che

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{R} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2.$$

Segue

$$\varphi(r) = \varphi_{\text{int.}} + \varphi(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = a - br^2.$$

[immagini]

## Lecture 7

Il campo elettrico è conservativo, dunque si introduce una funzione che dipende dalle coordinate tale che

lun 18 ott  
2021 13:30

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \varphi(x_0, y_0, z_0) \equiv 0, \quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

La forma infinitesimale è  $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ . La funzione  $\varphi$  è la primitiva di  $E$ , tuttavia essa è scalare: non preserva le informazioni geometriche. Pertanto, si utilizza il gradiente il quale preserva tale tipo di informazioni.

**Gradiente.** Si consideri  $f = f(x)$ . Si ha

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = \partial_x f \cdot dx.$$

Nello spazio si ha

$$df(x, y, z) = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy + \partial_z f \cdot dz.$$

Inoltre

$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}.$$

Ricordando il prodotto scalare si scrive

$$df(x, y, z) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s}.$$

con  $\vec{\nabla} f = \partial_x f \hat{i} + \partial_y f \hat{j} + \partial_z f \hat{k}$ . Il gradiente indica la direzione di incremento massimo

$$df = |\vec{\nabla} f| ds \cos \theta.$$

Infatti, si ha variazione massima per  $\theta = 0$ .

**Esempio.** Sia  $f = f(r)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Per  $dr$  a  $r = \text{cost.}$  si ha  $f(r) = \text{cost.}$ ,  $df = 0$ . Dunque  $\vec{\nabla}f = \partial_r f \hat{u}_r$ .

Unendo quanto visto per il campo elettrico ed il gradiente segue

$$dq = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{a} \implies \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \iff \varphi = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

**Esempio.** Se  $q(x, y) = -kxy$  allora  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi ky \hat{i} + kx \hat{j}$ .

Si vuole collegare il campo elettrico alle sorgenti. Affinché il potenziale sia utile, bisogna collegarlo a tali sorgenti. Da esse si può ricavare il campo come

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}\vec{r}'} d\nu'.$$

Si sa che il campo elettrico è legato al potenziale tramite  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  di una distanza generica. La si consideri come la sovrapposizione di cariche puntiformi

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = - \sum \vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r}).$$

Per una carica puntiforme si ha

$$\varphi_i = - \int_{+\infty}^{r'_i} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 (r'_i)^2} \hat{u}_{r'_i} \cdot d\vec{s} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'_i}.$$

[immagine] [rivedi] primato e non primato. Quindi  $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\sum \varphi_i)$  il potenziale elettrostatico è additivo cioè  $\varphi = \sum \varphi_i$ , dove  $\varphi_i$  è il potenziale dovuto alla  $i$ -esima carica puntiforme ad una certa distanza  $r'_i$ . Dunque

$$\varphi(r) = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'_i}.$$

Per una distribuzione continua si ha  $dq = \rho d\nu$  e quindi

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'.$$

Se  $\rho = \begin{cases} \sigma & \text{su } S \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$  allora

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da'.$$

Se  $\rho = \begin{cases} \lambda & \text{su } \Gamma \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$  allora

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds.$$

**Esempio.** Si consideri un sfera cava con carica  $\sigma$  sulla superficie. [immagine] Utilizzando le coordinate sferiche si ha  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $r = R$ . Dunque

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \theta \sigma}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} d\theta.$$

Dove si è posto  $da = R d\theta R \sin \theta d\varphi$  e  $|\vec{r} - \vec{R}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$ . Dunque

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi R^2 \sigma}{Rr} \int \frac{2Rr \sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} \iff \varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & \text{se } r \geq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, & \text{se } r \leq R \end{cases}.$$

**Esempio.** Si consideri il filo infinito. Il campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r.$$

Il potenziale diventa

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z} \rightarrow +\infty.$$

Dunque si deve scegliere il punto di riferimento diverso dall'infinito:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{z + \sqrt{r^2 + z^2}}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + L^2} + L}{\sqrt{r^2 + L^2} - L}.$$

Dato che  $\frac{r}{L} \ll 1$  segue per Taylor

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \text{cost.}$$

Quindi

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\partial_r \varphi \hat{u}_r = -\partial_r \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \text{cost.} \right) \hat{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r.$$

## Lecture 8

Si è introdotto il potenziale elettrostatico

mar 19 ott  
2021 13:30

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Per principio di sovrapposizione, il potenziale è additivo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'.$$

**Esercizio.** Si calcoli il potenziale lungo l'asse di un disco con densità areica di carica uniforme  $\sigma$ . Si scopre che il potenziale lontano si comporta come  $\frac{1}{r}$  e vicino si ha una discontinuità nella derivata: il campo elettrico cambia segno.

### 6.1 Potenziale di un dipolo elettrico

Si consideri una coppia di cariche  $q_+$ ,  $q_-$  separate da una distanza  $l$  tale che  $r \gg l$ . [immagine] Guardando da lontano si vede un polo neutro; da vicino si nota la separazione (simile alle molecole polari). Si vuole trovare il campo. Risulta essere comodo usare il potenziale insieme al principio di sovrapposizione. Quindi:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Si esprimono le distanze in riferimento all'origine. Inoltre, il sistema è simmetrico rispetto la coordinata  $\phi$ . Dunque

$$r_- = r + \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_+ = r - \frac{l}{2} \cos \theta.$$

Pertanto

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta}.$$

Dato che  $r \gg l$  segue

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Si indica  $\vec{r}$  con il simbolo di vettore nell'argomento del potenziale elettrico perché esso dipende da  $r$  e  $\theta$ .

Si osserva:

- Risulta  $\varphi \propto ql$  quantità detta dipolo elettrico. Se si associa una direzione ad  $l$  con verso dalla carica negativa a quella positiva allora  $\vec{p} = ql\vec{e}$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

- Il potenziale di una carica puntiforme dipende da  $\varphi \propto \frac{1}{r}$ , mentre di un dipolo è  $\varphi \propto \frac{1}{r^2}$ . Per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  si ha  $\varphi = 0$  e questo significa che uno spostamento  $d\vec{r}$  da  $d\varphi = 0$  quindi il campo elettrico è ortogonale. Dato che  $\varphi \propto \frac{1}{r^2}$  allora  $E \propto \frac{1}{r^3}$ . Questo comportamento è simile alle maree: la luna è la sorgente, mentre le maree ai due capi della Terra sono i dipoli.

Si può creare una configurazione per cancellare i dipoli. [immagini]

Nel quadripolo rimane un termine residuo  $\varphi \propto \frac{1}{r^3}$ . In generale, per una distribuzione di cariche localizzata, il potenziale può essere sviluppato come

$$\varphi = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \dots$$

Il termine  $\frac{1}{r}$  è il monopolio che è nullo da lontano perché la configurazione pare neutra. Il termine  $\frac{1}{r^2}$  è il dipolo che è nullo se le cariche positive e negative sono mescolate; compare se c'è polarizzazione.

**Esempio.** Un esempio di potenziale di dipolo è quello del cuore. Le cellule si polarizzano e depolarizzano. Si ha un eccesso di carica, la contrazione è una polarizzazione coordinata. Nell'elettrocardiogramma si pone un elettrodo sul polso e sulla caviglia che è usata come riferimento. [immagine]

Dunque

$$\varphi_A = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_{r_A}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A^2}, \quad \varphi_B - \varphi_A = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (\hat{u}_B - \hat{u}_A), \quad r_A \equiv r_B.$$

Con l'elettrocardiogramma si vede la proiezione del dipolo sulla congiungente degli elettrodi.

Per calcolare il campo elettrico si utilizza il gradiente:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ . Sarebbe utile calcolare il gradiente in coordinate polari: si può ottenere per cambio di coordinate oppure per calcolo diretto.

**Gradiente in coordinate sferiche e cilindriche.** Il differenziale del potenziale elettrico in coordinate sferiche è

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s} = \partial_r\varphi dr + \partial_\theta\varphi d\theta + \partial_\phi\varphi d\phi.$$

Si può scrivere il differenziale dello spostamento come

$$d\vec{s} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{u}_\phi.$$

Dunque bisogna trovare un'espressione per  $\vec{\nabla}\varphi$  tale per cui valga la prima uguaglianza  $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}$ .  
Dunque

$$\vec{\nabla}\varphi = \partial_r\varphi \hat{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta\varphi \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi\varphi \hat{u}_\phi.$$

Per le coordinate cilindriche si ha

$$d\vec{s} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z.$$

Dunque, il campo elettrico del dipolo risulta essere

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = -\partial_r \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_r - \frac{1}{r} \partial_\theta \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_\theta - \cancel{\partial_\phi \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{u}_\phi} \rightarrow 0 \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta).\end{aligned}$$

Si ricorda che è un'approssimazione per  $r \gg l$ , inoltre si ha simmetria lungo la coordinata  $\phi$ . [immagine]

**Energia potenziale e potenziale elettrico.** L'energia potenziale è associata alla configurazione di cariche. Il potenziale elettrico indica il lavoro necessario a portare una carica dall'infinito.

Per una sfera cava l'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}, \quad Q = 4\pi R^2 \sigma.$$

Mentre il potenziale è

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, & r \leq R \end{cases}.$$

Entrambi esprimono un lavoro ed essere sono legate:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

La seconda sommatoria è il potenziale dovuto a  $q_j$  quando si è a distanza  $r_{ij}$ :

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} = \sum \varphi_j(r_{ij}) = \varphi(r_i).$$

Dunque, l'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(r_i).$$

Per una distribuzione continua risulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi d\nu.$$

**Esercizio.** Trovare l'energia potenziale di una sfera cava utilizzando la formula per una distribuzione continua di carica.

Si sono viste tre espressioni per l'energia potenziale di un sistema:

- $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ , interazione delle cariche
- $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 d\nu$ , campo elettrico



- $U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d\nu$ , densità di carica potenziale

[rivedi]

Dalla legge di Gauss si ha

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\nu.$$

Il campo elettrico statico è conservativo dunque

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \implies \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi.$$

Si vuole tradurre questi integrali in forma differenziale analoghe alla relazione tra campo elettrico e potenziale. Si introducono altri operatori di derivazione dei vettori.

## 6.2 Divergenza

Essa descrive il flusso locale. [immagine]

Il flusso attraverso la superficie  $S$  si può considerare come il flusso attraverso  $S_1$  e quello attraverso  $S_2$ , con  $S = S_1 + S_2$ . [rivedi]

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{a} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Per tante superfici si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{a}.$$

Il valore dell'integrale dipende dalla dimensione della superficie scelta. Per trovare una misura del flusso indipendente da tale scelta bisogna normalizzare l'integrale per una grandezza con lo stesso ordine di infinitesimo: si utilizza il volume che ha ordine di infinitesimo pari a tre. Dunque, si introduce la divergenza:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Si scrive una relazione che lega il flusso sulla [rivedi] con la divergenza. Si usa il teorema della divergenze o di Gauss (non legge di Gauss che è una proprietà fisica?). Quindi

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{a}}_{\text{div } \vec{F}} V_i = \int_V \text{div } \vec{F} d\nu.$$

Si nota che  $S = \partial V$ . Applicando questo teorema al campo elettrico si ottiene

$$\int_V \text{div } \vec{E} \cdot d\nu = (\text{T. G.}) \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = (\text{L. G.}) \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\nu.$$

Dato che  $V$  è generico, si ha  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , cioè la forma differenziale della legge di Gauss e prima legge di Maxwell.

Si trova un modo per calcolare la divergenza. [immagine]

Il volume è  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Dunque, sulla faccia di destra si ha

$$\Phi_{\Delta y \Delta z} = \vec{F} \cdot (\Delta y \Delta z) \hat{u}_x = F_x \Delta y \Delta z.$$

In generale si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} & \left[ (F_x(x + \Delta x, y_M, z_M) - F_x(x, y_M, z_M)) \Delta y \Delta z \right. \\ & + (F_y(x_M, y + \Delta y, z_M) - F_y(x_M, y, z_M)) \Delta x \Delta z \\ & \left. + (F_z(x_M, y_M, z + \Delta z) - F_z(x_M, y_M, z)) \Delta x \Delta y \right] = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z. \end{aligned}$$

Dato che il gradiente è

$$\vec{\nabla} f = \partial_z f \hat{u}_x + \partial_y f \hat{u}_y + \partial_x f \hat{u}_z = (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z)(f).$$

Dove l'ultimo operatore differenziale è detto Nabla o Del. Dunque, in simboli risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z)(F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z) \\ &= \hat{u}_x \partial_x F \cdot \hat{u}_x + \hat{u}_x F \overset{0}{\partial_x \hat{u}_x}. \end{aligned}$$

La derivata di un versore degli assi cartesiani (!) è nulla perché essi sono costanti, ma in altri sistemi di coordinate ciò potrebbe non essere più vero.

Pertanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Tuttavia, la legge di Gauss in questa forma non definisce univocamente il campo elettrico. Infatti, se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$  allora vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}).$$

Dunque servono le condizioni al contorno. Inoltre vale

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{F} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.$$

**Equivalenze delle espressioni dell'energia potenziale.** Dalla terza espressione risulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi \, d\nu = (\text{L.G.}) \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \varphi \, d\nu.$$

Applicando la simmetria della divergenza rispetto al prodotto si ha

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) \, d\nu - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varphi \, d\nu.$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale e applicando la legge di Gauss al secondo integrale si ha

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 \, d\nu.$$

La superficie del primo integrale è infinita perché il volume dell'integrale da cui deriva è infinito a sua volta (infatti, è  $\rho$  che assume valori diversi da zero dove interessa). Dunque, dato che  $E \propto \frac{1}{r^2}$  e  $\varphi \propto \frac{1}{r}$  segue  $\varphi E \propto \frac{1}{r^3}$ ; mentre  $S \propto r^2$ . Quindi l'integrale è proporzionale a  $\frac{1}{r}$  pertanto tende a zero per raggio infinito. Pertanto

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 \, d\nu.$$

[rivedi]

## Lecture 9

mer 20 ott  
2021 13:30

Si è vista la divergenza come

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

In coordinate cartesiane vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z.$$

Dove

$$\vec{\nabla} = (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z).$$

Per il teorema di Gauss o teorema della divergenza si ottiene

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Dove  $S$  è la superficie che racchiude il volume  $V$ :  $S = \partial V$ . Per il campo elettrico per cui vale la legge di Gauss si ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

che è la prima equazione di Maxwell.

**Esempio.** Si consideri una lastra di estensione indefinita in  $yz$  con densità di carica uniforme:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho, & x \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}.$$

Dunque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$

Dato che il sistema ha simmetria di rotazione attorno ad un qualsiasi asse che sia parallelo all'asse  $x$  si ha  $\vec{E} = E_x \hat{u}_x$  e  $E_y = E_z = 0$ . Pertanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \implies \frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & x \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}.$$

Per il primo caso si ha

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} + c.$$

Bisogna capire quanto vale la costante  $c$ . Si guarda il sistema: considerando una carica in  $x = 0$ , se  $c \neq 0$  allora si avrebbe una forza; tuttavia, in  $x = 0$  c'è la stessa quantità di carica da una parte e dall'altra ( $F_q(x=0) = 0$ ), quindi per la simmetria del problema si ha  $c = 0$ . Un campo costante sarebbe dato da una carica superficiale infinita che in questo caso non è presente.

Per il secondo caso si ha

$$E_x = \text{cost.} \quad |x| > \frac{l}{2}.$$

Sulla superficie esterna non c'è carica quindi il campo deve essere continuo. Pertanto

$$E = \pm \frac{\rho l}{2\varepsilon_0}.$$

[immagine]

Tuttavia, una equazione del tipo  $\frac{dE_x}{dx} = 0$  permette anche  $E_x = 0$  come soluzione, però le soluzioni particolare sono date dalle condizioni al contorno.

Si guardi la lastra da lontano: ci si aspetta che la discontinuità tra i due lati sia uguale alla carica superficiale:

$$\Delta q = \rho A \Delta x \implies \sigma = \frac{\Delta q}{A} = \rho \Delta x = \rho l.$$

Dunque il salto è

$$\frac{\rho l}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \Delta E_{\perp}.$$

[immagine]

**Esempio.** [immagine] Si consideri un cilindro infinito in  $z$  con densità di carica uniforme

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

Si utilizza Gauss in forma integrale:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V S d\nu.$$

Si sceglie una superficie cilindrica e per simmetria si ha

$$\vec{E} = E(r)\hat{u}_r \implies \int_S E(r) da = E(r) \int_S da = E(r) 2\pi r L = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi r^2 L, & r \leq a \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi a^2 L, & r > a \end{cases} \implies E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}, & r \leq a \\ \frac{\rho \pi a^2}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}, & r > a \end{cases}.$$

Inoltre,  $\rho \pi a^2 L = Q = \lambda L$  quando si osserva il cilindro da lontano.

Si controlla il risultato con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ . Si scrive il campo in coordinate cartesiane. Per  $r \leq a$ :

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y).$$

Quindi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Mentre per  $r > a$ :

$$\vec{E} = \frac{\rho \pi a^2}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\rho \pi a^2}{2\pi \varepsilon_0} \frac{x\hat{u}_x + y\hat{u}_y}{x^2 + y^2}.$$

[rivedi] risultato.

Si vuole partire dall'equazione differenziale e ricavare il campo. Risulta utile conoscere la divergenza in vari sistemi di coordinate.

**Coordinate cilindriche.**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (A_\theta) + \partial_z A_z.$$

**Coordinate sferiche.**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi A_\varphi.$$

Si calcola l'operatore nabla in coordinate cilindriche. Si conosce

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} &= df \\ d\vec{s} &= dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z \\ \vec{\nabla} &= \hat{u}_r \partial_r + \frac{1}{r} \hat{u}_\theta \partial_\theta + \hat{u}_z \partial_z. \end{aligned}$$

Dunque

$$(\hat{u}_r \partial_r + \frac{1}{r} \hat{u}_\theta \partial_\theta + \hat{u}_z \partial_z) \cdot (A_r \hat{u}_r + A_\theta \hat{u}_\theta + A_z \hat{u}_z) = \dots = \partial_r A_r + \frac{A_r}{r} + \partial_\theta A_\theta + \text{vedi note online.}$$

Si ricava la legge di Gauss in forma differenziale in coordinate cilindriche. Per simmetria  $E = E(r) \hat{u}_r$ , quindi

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r E_r) = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \iff d(r E_r) = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r dr, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

Per la prima espressione si ha

$$r E_r = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + b \iff E_r = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} + \frac{b}{r}.$$

Il secondo addendo si può intendere come il contributo di un filo infinito carico. Tuttavia, non è presente alcun filo, pertanto si può porre  $b = 0$ .

Per la seconda espressione si ha

$$r E_r = \text{cost.} \iff E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Non è presente una carica superficiale, dunque non ci può essere una discontinuità nel campo: esso dev'essere continuo. Quindi la costante è per forza  $\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ .

### 6.3 Rotore

Esso traduce in forma locale il fatto che il campo elettrico è conservativo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Sia  $\Gamma = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$  [immagini]. Si consideri un percorso e lo si divida in due altri percorsi: la somma della circuitazione su tali due percorsi è uguale alla circuitazione sul percorso originale in quanto il tratto condiviso è percorso due volte ma in sensi opposti, quindi si elidono nella somma. Pertanto

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{l}.$$

Come per la divergenza, l'integrale ha un valore sempre più piccolo, quanto più breve è  $d\vec{l}$ , dunque bisogna bilanciare l'ordine di infinitesimo con un altro, di modo che il rapporto sia una quantità finita: l'integrale ha lo stesso ordine di infinitesimo della superficie,  $\frac{\Gamma_i}{S_i}$  rimane finito. Quindi si introduce il rotore:

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Mandando a zero il circuito, bisogna tener conto alla direzione con cui si costruisce la superficie, per questo si aggiunge nell'espressione del rotore il vettore normale alla superficie. [rivedi]

**Teorema.** Di Stokes. Il teorema di Stokes è analogo al teorema di Gauss, solo in una dimensione inferiore:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{l}}_{(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n}} S_i = \int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a}.$$

Si nota che  $\hat{n} \cdot d\vec{S}_i \rightarrow d\vec{a} = da \hat{n}$  e  $C = \partial S$ . Si usa la convezione della regola della mano destra. Per il campo elettrico statico risulta

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\text{Stokes}) \int_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{a}.$$

Dato che la superficie  $S$  è qualunque si ha  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . I campi conservativi sono irrotazionali: non si hanno linee chiuse, esse si chiudono solo su sorgenti.

Si esplicita il rotore in coordinate cartesiane. [immaginare]  
L'elemento di superficie è  $\Delta\vec{a} = \Delta y \Delta z \hat{u}_x$ . La circuitazione è

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[ F_z(y + \Delta y) \Delta z - F_z(y) \Delta z - F_y(z + \Delta z) \Delta y + F_y(z) \Delta y \right] = \partial_y F_z - \partial_z F_y.$$

Scambiando gli assi si ottiene

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_y &= \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_z &= \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{aligned}$$

Il modo più semplice di rappresentare il rotore per mezzo di Nabla è attraverso il prodotto vettoriale:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Dato che il campo elettrico è conservativo, esso si può rappresentare attraverso una funzione scalare del potenziale elettrostatico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

Combinare restringono le tipologie di funzioni potenziale:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \iff \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = (\partial_{yz}^2 \varphi - \partial_{zy}^2 \varphi) \hat{u}_x + \dots = 0 \implies \partial_{yz}^2 \varphi = \partial_{zy}^2 \varphi, \dots$$

Tale condizione è necessaria e sufficiente per rappresentare un campo conservativo (la condizione di sufficienza si vede in Analisi II).

## 6.4 Laplaciano

Combinando le espressioni trovate per il campo elettrico si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &= (\hat{u}_x \partial_x + \hat{u}_y \partial_y + \hat{u}_z \partial_z) \cdot (\partial_x \varphi \hat{u}_x + \partial_y \varphi \hat{u}_y + \partial_z \varphi \hat{u}_z) \\ &= \partial_{xx}^2 \varphi \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x + \hat{u}_x \partial_x \varphi \overset{0}{\cancel{\partial_x \hat{u}_x}} + \hat{u}_x \partial_{xy} \varphi \overset{0}{\cancel{\hat{u}_y}} + \dots = \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

L'ultima è detta di Poisson, la cui soluzione è la soluzione del problema generale dell'elettrostatica. [rivedi] La soluzione è

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Tuttavia, costruire  $\varphi$  da  $\rho$  risulta essere complicato. La soluzione all'equazione di Poisson è unica.

**Esercizio.** Verificare che la soluzione del potenziale di una sfera di carica uniforme:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}, & r > R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho R^3}{6\epsilon_0}, & r \leq R \end{cases}.$$

In tutti i problemi elettrostatici esiste una regione in cui non ci sono cariche. Si ottiene l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Essa è più facile da risolvere con le condizioni al contorno che l'equazione di Poisson su tutto lo spazio.

Si può dimostrare che il potenziale di una carica puntiforme soddisfa l'equazione di Poisson, poi per principio di sovrapposizione, l'equazione generale del potenziale è soddisfatta da qualunque distribuzione.

## Lecture 10

lun 25 ott  
2021 13:30

## 7 Conduttori

Esistono materiali che si elettrizzano: essi hanno una virtù elettrica. Altri materiali non si elettrizzano: [rivedi]

Un palloncino elettrizzato si attacca ad un muro neutro. Con un elettroscopio si può osservare la presenza di carica. Quando si avvicina un campo elettrico ad un conduttore, le cariche si ridistribuiscono in base al campo elettrico generato dal corpo carico. Nei conduttori le cariche sono libere di muoversi. [immagini]

Si dimostra che l'elettroscopio può essere elettrizzato se viene toccato da un corpo carico.

Esiste una elettrizzazione locale temporanea dovuta al campo elettrico esterno. [rivedi]

I

II

III Si può trasportare la virtù elettrica da un corpo ad un altro.

La forza è legata alla carica presente sul corpo carico e a quella che si ridistribuisce sull'altro corpo. I materiali sono classificati in isolanti e conduttori. I conduttori si possono elettrizzare per contatto e trasportano le cariche. Esse si ridistribuiscono in presenza di campo elettrico esterno.

La scala dei tempi dei fenomeni ha rilevanza riguardo a cosa viene classificato conduttore e cosa classificato isolante [rivedi]

Per quanto trattato fin'ora, si è assunto che le cariche siano statiche. Introducendo i conduttori si ha una carica statica ed una distribuzione nel conduttore che non è nota a priori, ma dipende dal campo elettrico esterno. Si vuole descrivere i fenomeni elettrostatici quando sono presenti dei conduttori.

Si richiede che il fenomeno sia statico:  $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$ . Su ogni carica agisce una forza  $\vec{F}_{\text{tot}} = q\vec{E} + \vec{F}_{\text{residue}}$ . Agisce anche la gravità, ma essa è molto minore delle forze elettrostatiche. Esistono forze elettrostatiche di interazione dovuta alla configurazione che a lunghe distanze svaniscono [rivedi]

Tali forze dipendono dal materiale. Per gli isolanti le forze residue sono notevoli?. Nei conduttori esse sono nulle,  $\vec{F}_{\text{res}} \approx 0$ . Quindi,  $\vec{F}_{\text{tot}} = 0 \implies \vec{E} = 0$  in un conduttore. In configurazioni statiche il campo elettrico interno è nullo.

**Conduttore carico** Si consideri un conduttore di forma qualunque sul quale si deposita una carica  $Q \neq 0$ . [immagine]

Il campo elettrico interno è nullo per la proprietà fondamentale dei conduttori. Quindi la carica si distribuisce sulla superficie del conduttore, questo perché

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

e, considerando una superficie interna, il campo è nullo e quindi anche la carica contenuta dev'essere zero. Ciò vale anche considerando come superficie quella del conduttore. Tuttavia, le cariche non possono uscire perché l'esterno (il vuoto?) è un isolante perfetto.

**Proprietà dei conduttori.** Si vedono cinque proprietà dei conduttori:

- $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ .
- Le cariche si distribuiscono sulla superficie limite.
- Si ha  $d\varphi - \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \implies \varphi = \text{cost.}$ . Il conduttore è un volume equipotenziale.
- All'esterno del conduttore c'è un campo elettrico ed esso è ortogonale alla superficie perché  $\varphi = \text{cost.}$ . Infatti, le cariche si dispongono in modo che  $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ . Il campo esterno vale  $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$  perché si passa attraverso una superficie perciò si ha una discontinuità nel campo elettrico. Infatti [immagine]

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Per  $h \rightarrow 0$  il contributo delle superfici laterali si annulla:

$$\underbrace{\int_{S_{\text{int}}} \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{a}}_0 + \underbrace{\int_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{a}}_{\rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0} + \int_{S_{\text{ext}}} \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{a} = E_{\text{ext}} \cdot \Delta a = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \iff E_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0 \Delta a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

- Il campo elettrico alla superficie esterna, la carica totale e il potenziale sono legati tra loro

$$Q_{\text{tot}} = \int_S \sigma da = \varepsilon_0 \int_S \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{a} = -\varepsilon_0 \int_S \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{a}.$$

**Conduttore neutro** Si vede il caso in cui un conduttore neutro sia posto in un campo elettrico esterno. [immagine]

Il campo elettrico è presente anche dentro il conduttore, ma dato che dev'essere nullo, segue che la cariche si devono distribuire in modo tale che generino un campo elettrico opposto annullando quello presente a causa delle sorgenti esterne:  $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{indotto}} = 0$ . Inoltre, non esistono linee di campo che vanno da cariche indotte positive a cariche indotte negative [immagine]. Questo perché il campo elettrico è conservativo

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Infatti, se calcola l'integrale su tale linea si ha una circuitazione positiva perché la parte interna del tragitto fornisce un contributo nullo. I campi elettrici indotti si chiudono solo su altre cariche sorgenti.

**Conduttore carico immerso in un campo elettrico.** Nel caso in cui un conduttore carico sia immerso in un campo elettrico esterno basta utilizzare il principio di sovrapposizione.



**Distribuzione delle cariche.** In un conduttore le cariche tendono a distribuirsi sulla superficie limite. Si può capire tale fenomeno osservando l'energia potenziale di una sfera piena ed una sfera cava:

$$U = \frac{6}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}, \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

Le cariche si pongono in una distribuzione che minimizza l'energia potenziale. Dunque, è facile comprendere come le cariche interne tendano a ridistribuirsi sulla superficie.

**Esercizio.** Si considerino quattro cariche puntiformi  $q$  vincolate ad un anello di raggio fisso. Si dimostri che la configurazione con energia potenziale minore è quella per la quale le cariche sono equidistanziate sulla circonferenza dell'anello.

**Raggio di curvatura.** Se il conduttore ha forma generica allora

$$\sigma \propto \frac{1}{R_{\text{curv}}}.$$

**Dimostrazione.** Per una geometria semplice, si considerino due sfere di raggio  $R_1$  e  $R_2$ . [immagine] Se è presente della carica sulle sfere si ha

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_i^2} \hat{u}_r = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \hat{u}_r.$$

Pertanto il potenziale sulla superficie è

$$\varphi(R_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_i} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} R_i.$$

Unendo le due sfere con un filo conduttore, si fa in modo di porle allo stesso potenziale perché esso è costante sulla superficie di un conduttore. Dunque

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} R_1 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} R_2 \implies \sigma \propto \frac{1}{R}.$$

Le cariche sono come fluidi: non si hanno forze tangenziali perché si sposterebbero le cariche dall'equilibrio, dunque esistono solo forze perpendicolari.

**Induzione totale.** Si studia cosa succede quando si pone una carica all'interno di un conduttore con una cavità. [immagine]

Il campo della carica si chiude sulla superficie del conduttore con linee ortogonali ad essa e su cui si aggregano cariche di segno opposto indotte. Inoltre, dato che il campo elettro all'interno del conduttore è nullo si ha

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 = \frac{q + Q_{\text{indott}}}{\epsilon_0} \implies Q_{\text{indott}} = -q.$$

Se il conduttore è neutro, allora la carica esterna induce la stessa quantità di carica nel conduttore. L'unica zona dove la carica opposta è presente è la superficie estrema. Per una superficie che racchiude tutto il conduttore si ha

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \implies Q_{\text{indott}}^{\text{ext}} = -Q_{\text{indott}}^{\text{int}} = q.$$

Dato che il conduttore è una sfera, segue che la carica è distribuita uniformemente, quindi il campo elettrico esterno è equivalente al campo elettrico di una carica puntiforme: spostando  $q$  all'interno della cavità non si influenza il campo elettrico esterno. Se  $q$  è molto vicina alla superficie interna, allora si ha una carica indotta molto forte. Essa è costituita da cariche dello stesso segno perché altrimenti si avrebbe una circuitazione non nulla.

## Lecture 11

Dunque si ha

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_q + \vec{E}_{Q_{\text{int}}}}_0 + \vec{E}_{Q_{\text{ext}}}.$$

**Carica esterna al conduttore.** [immagine]

Si genera nel conduttore un campo elettrico indotto

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_q + \vec{E}_{Q_{\text{indott}}}.$$

Dato che il conduttore è globalmente neutro, segue che guardando a lontano si vede solo il campo elettrico di  $q$ . Alcune linee del campo della carica vanno all'infinito, altre si chiudono sul conduttore. Le cariche positive indotte mandano linee di campo che si chiudono all'infinito. Inoltre

$$|Q_{\text{indott}}| < |q|.$$

perché non tutte le linee si chiudono sul conduttore.

In un sistema con un conduttore si hanno delle situazioni complicate. La densità di carica su un conduttore non si conosce a priori. Tuttavia, si sa

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ con soluzione formale } \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Non è detto che si conosca  $\rho$  a priori perché essa considera sia le cariche fisse che quelle indotte. Tuttavia, si risolve il problema utilizzando le informazioni sui conduttori:

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0, \quad \varphi = \text{cost}, \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}, \quad Q = \varepsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

e si risolve il problema al di fuori del conduttore e si impongono dei vincoli. Si cerca una regione fuori dal conduttore ponendo condizioni al contorno.

**Esempio.** Si consideri una configurazione con due piani conduttori infiniti e paralleli. Tali sono delle superfici a potenziale costante con  $\varphi_2 > \varphi_1$ . Si risolve l'equazione di Laplace nel volume tra i due conduttori con condizioni al contorno:

$$\varphi(a) = \varphi_1, \quad \varphi(b) = \varphi_2.$$

Dunque

$$\nabla^2 \varphi = 0 \iff \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi = 0.$$

I piani hanno simmetria rotazionale e traslazionale, quindi il campo elettrico può solo dipendere da  $x$ :  $\varphi = \varphi(x)$ . Dunque

$$\partial_x^2 \varphi = 0 \implies \partial_x \varphi = \text{cost} = a \implies \varphi(x) = ax + b.$$

Con condizioni al contorno di

$$\varphi(0) = b = \varphi_1, \quad \varphi(d) = ad + \varphi_1 = \varphi_2 \iff a = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}.$$

Da cui si ottiene

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} x + \varphi_1, \quad x \in [0, d].$$

Il potenziale è definito a meno di una costante (in questo caso  $\varphi_1$ ). Inoltre

$$\vec{E} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \hat{u}_x = -\vec{\nabla} \varphi.$$

mar 26 ott  
2021 13:30

La densità superficiale di carica della superficie del conduttore è  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$ . Quindi sulla superficie a  $x = d$  si ha

$$\vec{E} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \underbrace{\hat{u}_x}_{\hat{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}.$$

Sulla superficie a  $x = 0$  si ha

$$\vec{E} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}.$$

Tale formula è la differenza di potenziale

$$\Delta\varphi = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \implies \Delta\varphi = -Ed.$$

Nel caso in cui tra le due superfici ci sia una carica si ha

$$\partial_x^2 \varphi = \rho \implies \partial_x \varphi = a + \rho x \implies \varphi = \frac{1}{2} \rho x^2 + ax + b.$$

[rivedi]

Per problemi multidimensionali non si ha sempre una soluzione analitica. Si usano dei trucchi per trovare soluzioni attraverso strade differenti dalla integrazione diretta. Si può utilizzare la forma confinata: una zona è tutta racchiusa da conduttori, anche all'infinito. [immagine] [rivedi] Si cercano soluzioni

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Prendendo la derivata seconda e dividendo per l'espressione di  $\varphi(x, y, z)$  si ha

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Che è equivalente a risolvere

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k.$$

per ciascuna coordinata. Essa ha soluzione sinusoidale, dunque la soluzione totale è una combinazione lineare di funzioni sinusoidali. Tuttavia, questo metodo non viene trattato in questo corso, però è descritto in Griffiths. In generale, non si trova la soluzione, ma si possono conoscere le proprietà. [rivedi]

**Proposizione.** Prima. Il potenziale in un punto  $C$  è pari alla media del potenziale dei punti calcolati su di una superficie sferica centrata in  $C$ :

$$\varphi_C = |\varphi|_S.$$

Vale per qualunque potenziale per cui  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$ . Si dimostra vera per una carica puntiforme e per il principio di sovrapposizione vale per ogni distribuzione. Quindi: [immagine]

$$\varphi_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}, \quad \langle \varphi \rangle_S = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i}.$$

Si supponga che la carica totale sulla superficie  $S$  sia  $q'$ , allora il potenziale dovuto a tale carica equivale al potenziale di una carica  $q'$  posta al centro della sfera, ad una distanza  $r$ :

$$\varphi' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Il lavoro per portare  $q$  a distanza  $r$  dal centro della sfera è

$$W'_q = q\varphi'(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = q'\varphi_C.$$

Il lavoro per portare la sfera ad una distanza  $r$  da  $q$  p

$$W_{q'} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = q' \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = q' \langle \varphi \rangle_S.$$

I due lavori sono uguali perché il campo è conservativo: l'energia per costruire la configurazione non dipende dal percorso. Inoltre, per formare la sfera ci vuole altra energia, ma la si è ignorata perché essa fornisce un contributo costante al lavoro. Dunque

$$W'_q = W_{q'} \iff \varphi_C = \langle \varphi \rangle_S.$$

Nel caso dei due piani paralleli è evidente

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+\delta) + \varphi(x-\delta)}{2}.$$

**Proposizione.** Seconda. Il potenziale elettrostatico non ha estremi nella regione in cui vale  $\nabla^2\varphi = 0$ . Per assurdo, si supponga esista un punto  $P$  tale che  $\varphi(P) = \varphi_{\max}$ . Allora, per tutti i punti sulla sfera attorno a  $P$  si ha  $\varphi_S = \varphi_P$ . Quindi la sfera possiede un potenziale medio per cui vale  $\varphi_S = \varphi_P$ . Pertanto, la sfera ha  $\langle \varphi \rangle_S < \varphi_P$ , il che è assurdo. [rivedi]

Lo stesso argomento vale per il minimo. Dove vale Laplace, la soluzione del potenziale non presenta configurazioni di equilibrio.

**Proposizione.** Terza. La soluzione all'equazione di Laplace è unica. Si ipotizzi di avere  $\varphi_1, \varphi_2$  soluzioni di  $\nabla^2\varphi = 0$ . Quindi  $\varphi(\vec{x}_1) = \varphi_1, \dots, \varphi(\vec{x}_n) = \varphi_n$ . Sia  $W = \varphi_2 - \varphi_1$ . Allora  $W(\vec{x}_1) = \varphi_2(\vec{x}_1) - \varphi_1(\vec{x}_1) = 0$  [rivedi]. Quindi  $W(\vec{x}_i) = 0$  perché è una condizione al contorno. Dato che l'equazione di Laplace è lineare si ha

$$\nabla^2 W = \nabla^2 \varphi_2 - \nabla^2 \varphi_1 = 0.$$

Essa è ancora soluzione con condizioni al contorno nulle, ma dato che non ha massimo né minimo ed è zero al contorno allora è zero ovunque. Per l'equazione di Poisson, la dimostrazione è analoga.

**Gabbia di Faraday.** [immagine] Il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore: si ha una gabbia di Faraday. Nella cavità interna si ha  $\rho = 0$  e quindi  $\nabla^2\varphi = 0$  [rivedi]

Una cavità monodimensionale è ciò che si è visto in precedenza con i due piani paralleli e si impone  $\varphi_1 = \varphi_2$ , quindi  $E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0$ . Inoltre, se ci fossero linee di campo che passassero attraverso la cavità, si potrebbe prendere un percorso per cui la circuitazione non sarebbe nulla [rivedi]

## 7.1 Carica immagine

Si consideri un piano conduttore infinito ed una distribuzione  $\rho$  di carica [immagine]

Si ottiene una configurazione equivalente se si specchia la distribuzione  $\rho$  e le si cambia il segno. Questa situazione è tipica dei problemi elettrostatici con la terra come conduttore. Si dimostra per una carica puntiforme, ma il risultato vale per ogni distribuzione per il principio di sovrapposizione. Si consideri una carica posta a distanza  $h$  dal piano [immagine]

Si ha

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Tale potenziale si è già visto per il dipolo. Inoltre, se  $r_+ = r_-$  allora  $\varphi = 0$ . Interessa sapere come si distribuisce la carica sul piano e conoscere il campo elettrico. La distribuzione è  $\sigma = \varepsilon E_\perp$ , mentre il campo elettrico dovuto alla carica è

$$\vec{E}_+ = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z.$$

[immagine] Quello dovuto alla carica virtuale è  $\vec{E}_- = \vec{E}_+$  e quello totale che agisce perpendicolarmente al piano è

$$\vec{E} = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z.$$

Quindi

$$\sigma(R) = -\frac{2q}{4\pi} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si ha una carica negativa concentrata alla perpendicolare ed il massimo è  $\sigma(0) = -\frac{q}{2\pi} \frac{1}{h^2}$ , mentre la densità si dimezza a  $R = \sqrt{3}h$ .

La carica indotta è  $Q_{\text{ind}} = \int_S \sigma(r) da$ . Si integra in coordinate polari:

$$Q_{\text{ind}} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{h_2 \pi R dR}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qh}{\sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_0^{+\infty} = -q.$$

Cioè si ottiene l'induzione totale in quanto si può pensare che il piano conduttore chiuda la carica. Tutte le linee di campo di  $q$  si chiudono sul piano. Inoltre, la carica contenuta in un cerchio di raggio  $R_A$  risulta essere

$$Q_{\text{ind}}(R < R_A) = \frac{qh}{\sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_0^{R_A} = \frac{qh}{\sqrt{R_A^2 + h^2}} - q.$$

Per cui per avere il 90% di carica bisogna porre  $R_A = 10h$ , mentre il 99% bisogna porre  $R_A = 100h$ .

Globalmente il piano è neutro: la carica positiva è distribuita uniformemente. Il campo dovuto alla carica positiva è trascurabile. Infatti, si consideri un disco con raggio  $R_D \gg h$ , segue

$$\sigma^+ = \frac{q}{2\pi R_D^2}.$$

Il fattore 2 proviene dal fatto che una superficie fisica reale ha spessore e dunque le cariche indotte si separano nei due estremi della superficie. Quindi

$$\sigma^- = -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{(R_D^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \sigma^-(0) = -\frac{q}{2\pi h^2}.$$

Dunque

$$\frac{\sigma^+}{|\sigma^-|} = \frac{h^2}{R_D^2} \ll 1.$$

**Forza sulla carica.** La forza con cui la carica  $q$  è attratta alla superficie è

$$\vec{F} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{u}_z.$$

L'energia potenziale di  $qq'$  è

$$U_{qq'} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2h}.$$

Ma questa non è l'energia potenziale della configurazione, infatti nel caso originale si ha solo la metà del campo elettrico:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 d\nu.$$

Il volume dev'essere solo quello della parte positiva proprio perché la carica opposta è virtuale. Dunque il lavoro della forza su  $q$  è

$$W = \int_h^{+\infty} qE(x) dx = \int_h^{+\infty} \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2x)^2} dx = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4h}.$$

Nel caso reale, allontanando  $q$  si spostano anche le cariche indotte, il cui lavoro è nullo perché sono in un conduttore, il quale ha potenziale costante sulla sua superficie. Un altro modo per interpretare tale fenomenologia è considerare che tali cariche si spostano perpendicolarmente al campo elettrico.

## Lecture 12

mer 27 ott  
2021 13:30

### 7.2 Capacità

Note modificate online?

Si vedono delle proprietà che caratterizzano i conduttori per semplificare i problemi.

Per conduttori isolati si ha

$$C \equiv \frac{Q}{\varphi} = \text{cost.}$$

[immagine]

Tale relazione vale per qualunque condensatore isolato ed dipende solo dalla geometria del conduttore.

**Esempio.** Si consideri una sfera conduttrice di raggio  $R$ ; il potenziale  $\varphi$  è costante:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Quindi  $C = 4\pi\varepsilon_0 R$  dipende solo da un parametro legato alla geometria. Il rapporto  $C$  viene chiamato capacità ed essa misura la quantità di carica che si immagazzina in un conduttore ad un determinato potenziale. In altre geometrie si hanno altri coefficienti. Per un disco conduttore di raggio  $R$  si ha  $C = 8\varepsilon_0 R$ . Il calcolo è complicato perché  $\sigma$  non è uniforme:

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

[immagine]

Sul Purcell è presente la derivazione.

L'espressione è sempre del tipo  $C = k\varepsilon_0\lambda$  dove  $k$  è un coefficiente numero e  $\lambda$  è una lunghezza. L'unità di misura della capacità è il farad:

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}.$$

Inoltre, conviene ridefinire  $\varepsilon_0$  con le unità di misura della capacità e della lunghezza come rapporto tra le due:  $\varepsilon_0 = 8.99 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \approx 9 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ .

La capacità della Terra è

$$C = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 6.8 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ F} < 1 \text{ mF}.$$

**Coppie di conduttori.** Si definisce la capacità per coppie di conduttori. Spesso si incontrano configurazioni di conduttori con stessa carica di diverso segno ed allo stesso potenziale. Tale è un condensatore la cui capacità è

$$C = \frac{Q^+}{\varphi_+ - \varphi_-}.$$

Si discutono alcune configurazioni.

**Condensatori planari o a piatti paralleli.** Si considerino due dischi di raggi  $R$  separati da una distanza  $d$ , con  $R \gg d$ . Il campo elettrico è uniforme tra i due piatti [immagine]. Inoltre

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \hat{n}.$$

Però un disco isolato conduttore non ha distribuzione uniforme. Ma la configurazione dei due dischi risulta essere il problema di Laplace risolto in precedenza per cui il campo è uniforme nella regione tra i piatti:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{d}.$$

Esso è uniforme perché i potenziali sono costanti. Inoltre,

$$\sigma = \varepsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

Se  $E$  è uniforme, allora anche  $\sigma$  è uniforme. Questo è valido per un raggio infinito. Il motivo per cui con due lastre ?? [rivedi] il campo diventa uniforme è il campo elettrico di un solo disco è che la componente tangenziale sposta la carica negativa del disco superiore verso l'interno. Dunque, la capacità è

$$E = E \iff \frac{Q}{A\varepsilon_0} = \frac{\Delta\varphi}{d} \iff C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

A parità di  $\Delta\varphi$ , meno è la distanza, più è la carica; mentre più è l'area, più è la carica. Con condensatori finiti, il campo elettrico non è uniforme e la formula è approssimata.

Si è definita la capacità imponendo  $Q$  uguale sui due piatti. Tuttavia, la definizione è buona in quanto non restringe altri casi. Si considerino due conduttori. Si pongono due cariche  $Q_1 < Q_2$  a potenziali  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Essendo un conduttore, la carica di ogni piatto si divide in due andando sulle due superfici: quella interna e quella esterna. Per una superficie cilindrica che passa per i due piatti si ha flusso nullo perché la superficie laterale è parallela al campo elettrico e le superfici interne alle lastre sono in campo elettrico nullo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0.$$

Quindi

$$Q_1^{\text{int}} + Q_2^{\text{int}} = 0 \implies Q_1^{\text{int}} \equiv q_2^{\text{int}} \equiv -q.$$

Per principio di sovrapposizione, il campo elettrico in  $P$  è:

$$\vec{E}(P) = \left( \frac{\sigma_1^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1^{\text{int}}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2^{\text{int}}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} \right) \hat{n} = \left( \frac{\sigma_1^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2^{\text{ext}}}{2\varepsilon_0} \right) \hat{n} = 0.$$

Perché  $\sigma_1^{\text{int}} = \frac{q}{A}$  e  $\sigma_2^{\text{int}} = -\frac{q}{A}$ . Dunque

$$\sigma_1^{\text{ext}} = \sigma_2^{\text{ext}} \implies Q_1^{\text{ext}} = Q_2^{\text{ext}} \equiv Q = \begin{cases} Q_1 - q \\ Q_2 + q \end{cases} \implies \begin{cases} q = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \\ Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \end{cases}.$$

Sulla superficie interna si ha la stessa carica ed il campo elettrico è lo stesso con verso opposto. Quindi

$$E_{\text{int}} = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \implies C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Si può arrivare a tale risultato anche in un altro modo:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{A}, \quad E_{\text{int}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \frac{1}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}.$$

Infine

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} \iff \Delta\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Da cui risulta chiaro che fissata la carica  $Q$ , segue che misurando  $\Delta\varphi$  si può risalire alla distanza  $d$ : su ciò si basano i trasduttori.

**Conduttore interno ed esterno.** [immagine]

Ponendo una carica sul conduttore interno si crea una capacità

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Tuttavia, si ignora la carica esterna indotta  $-Q_1$ : in tale configurazione si ha conduzione totale. Non interessa il campo esterno perché la differenza di potenziale tra i due conduttori dipende solo dal campo interno:

$$\Delta\varphi = \int_1^2 \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}.$$

Prendendo il conduttore esterno con una carica si ha una situazione di cavità; aggiungendo carica a  $Q_1$  si cambia il potenziale del conduttore interno ed esterno, ma entrambi nella stessa misura, dunque la differenza di potenziale è costante. [rivedi]

**Condensatore cilindrico.** Si può calcolare la capacità in due modi:

- Calcolare il campo elettrico e poi il potenziale.
- Trovare la differenza di potenziale, utilizzare l'equazione di Laplace, prendere il gradiente, poi si ottiene la carica superficiale [rivedi]

Si vede il primo metodo. [immagine]

La densità lineica è  $\lambda = \frac{Q}{L}$ ; per  $L$  molto grande si ha  $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{u}_r$ . Quindi

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Pertanto

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{L} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}.$$

**Esercizio.** Calcolare la capacità per condensatori sferici. Dovrebbe essere  $C \propto \frac{ab}{a-b}\varepsilon_0$ ?

**Condensatori in serie.** [immagine]

Si considerino dei condensatori di qualsiasi forma in serie. Si ponga una carica  $Q$  ad un estremo e una carica  $-Q$  all'altro. Sia  $\Delta\varphi$  la differenza totale di potenziale agli estremi della serie. Sapendo che per ogni condensatore vale  $C_i = \frac{Q_i}{\Delta\varphi_i}$ , si vuole attribuire una capacità totale equivalente  $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ . I condensatori in mezzo alle due cariche si hanno carica netta nulla, tuttavia si creano delle cariche indotte. Pertanto, sulla faccia di ciascun condensatore si ha

$$Q_i^{\text{int}} = \frac{Q_i - Q_{i+1}}{2}, \quad Q_i^{\text{ext}} = \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}.$$

Per ogni coppia di piatti connessi [rivedi]

Su ogni piatto si induce una carica  $Q$ . Quindi

$$\Delta\varphi = \sum \Delta\varphi_i = \sum \frac{Q_i}{C_i} = \sum \frac{Q}{C_i} \iff \frac{1}{C} = \frac{\Delta\varphi}{Q} = \sum \frac{1}{C_i}.$$



**Condensatori in parallelo.** [immagine]

I condensatori sono tutti allo stesso potenziale. La capacità di ciascuno è  $C_i = \frac{Q_i}{\Delta\varphi}$ . Dalla carica totale risulta

$$Q = \sum Q_i = \sum C_i \Delta\varphi \implies C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \sum C_i.$$

Non sempre le configurazioni possono essere ridotte in parallele e serie. Si considerino  $N$  conduttori con altrettante cariche e potenziali. [immagine]

La carica su ciascun conduttore dipende dai potenziali di tutti gli altri. Si utilizza il principio di sovrapposizione: si mandino tutti i potenziali  $\varphi_i$  a terra (quindi a zero, cioè possibilmente all'infinito), tranne uno posto su  $Q_1$ . Si può riscrivere il problema con Laplace. Se si raddoppia la carica su  $Q_1$  allora si raddoppia la carica su tutti i  $Q_i$  perché  $Q = \varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{\alpha}$ . Dunque  $Q_i = C_{i1}\varphi_1$ . Si scollegi da terra  $Q_1$  e si colleghi la successiva,  $Q_2$ , e si ripeta quanto fatto prima. Per il principio di sovrapposizione risulta

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \dots + C_{1n}\varphi_n \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2n}\varphi_n \\ &\vdots \\ Q_n &= C_{n1}\varphi_1 + C_{n2}\varphi_2 + \dots + C_{nn}\varphi_n. \end{aligned}$$

I fattori  $C_{ij}$  sono detti coefficienti di induzione [rivedi] e  $C_{ii}$  sono i coefficienti di capacità. Tale problema è un sistema lineare invertibile per cui i potenziali dipendono dalla capacità attraverso appropriati coefficienti di potenziale:

$$Q_i = \sum Q_{ij}\varphi_j, \quad \varphi_i = \sum P_{ij}Q_j.$$

Non tutti i coefficienti sono indipendenti, infatti  $C_{ij} = C_{ji}$  per la conservazione dell'energia. Inoltre, le matrici dei coefficienti sono l'una l'inversa dell'altra:  $P = (P_{ij}) = C^{-1} = (C_{ij})^{-1}$ .

Tuttavia, sapendo che una carica è proporzionale alla differenza di potenziale, appare contro intuitivo che ponendo  $\varphi_i = 0$  si ottiene una  $Q_i \neq 0$ . Risulta essere così perché la proporzionalità vale per conduttori isolati. In questo caso l'infinito (che è preso come messa a terra) ha capacità infinita, dunque si ha  $Q$  finita per  $\varphi$  nullo (infinitesimo).

**Esempio.** Si consideri una sfera cava conduttrice  $B$  con carica  $-Q$  al cui interno ne è presente un'altra  $A$  con carica  $Q$ . [immagine]

Si studia:

I Cosa succede se  $B$  è connessa alla messa a terra.

II Cosa succede se  $A$  è connessa a terra e si studia la sua carica  $Q_A$ .

Quindi

$$\varphi_A = P_{AA}Q_A + P_{AB}Q_B, \quad \varphi_B = P_{BA}Q_A + P_{BB}Q_B.$$

Per il punto primo, si consideri  $r > r_B$ . Il campo è nullo e quindi  $\varphi_B = -\int_{+\infty}^{r_B} \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = 0$ . Quindi collegando il conduttore più esterno a terra non cambia niente.

Nel punto secondo, si consideri il principio di sovrapposizione:

- Sia  $Q_A \neq 0$  e  $Q_B = 0$ . Segue

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_A} = P_{AA}Q_A, \quad \varphi_B = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_B} = P_{BA}Q_A \\ P_{AA} &\equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_A} = \frac{1}{C_{AA}}, \quad P_{BA} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_B} \end{aligned}$$

- Sia  $Q_A = 0$  e  $Q_B \neq 0$ . Segue

$$\varphi_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_B}, \quad \varphi_A = \varphi_B$$

$$P_{BB} = \frac{1}{C_B}, \quad P_{AB} = P_{BA}$$

Il potenziale  $\varphi_A$  di  $A$  è uguale a  $\varphi_B$  di  $B$  perché all'interno di una sfera cava il potenziale è costante, dato che il campo elettrico è nullo. Dunque dato che  $A$  è collegato a terra si ha

$$\varphi_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_A} + \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_B} = 0 \implies Q_A = -Q_B \frac{R_A}{R_B} = Q \frac{R_A}{R_B} < Q.$$

Collegando  $A$  a terra, un po' di carica se ne va. Se tutta la carica dovesse andarsene allora  $\varphi_A < 0$ , e se tutta la carica dovesse rimanere allora  $\varphi_A > 0$ . Pertanto,  $\varphi_A$  è giustamente nel mezzo.

**Energia immagazzinata in un condensatore.** L'energia immagazzinata è l'energia potenziale di tale condensatore. Si consideri un conduttore costituito da due elettrodi. Per aumentare l'energia immagazzinata bisogna spostare una carica  $dq$  contro la differenza di potenziale:

$$dW = -dq \varphi = -dq \frac{q}{C}.$$

Quindi

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2.$$

Se il condensatore è a piatti paralleli allora la capacità ha un'espressione definita da  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ . Dunque

$$U = \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon_0 A} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Ad}{\epsilon_0} \left( \frac{Q}{A} \right)^2 = \frac{1}{2} Ad\epsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV.$$

## Lecture 13

### 8 Correnti stazionarie

mer 03 nov  
2021 13:30

[immagine]

Fin'ora si sono viste delle correnti statiche. Si sono discussi i conduttori con cariche libere, ma non il moto delle cariche libere. Ora si caratterizza il trasporto delle cariche e capire cosa succede quando si muovono.

Una singola carica è soggetta ad una forza  $\vec{F} = q\vec{E}$  quindi si ha un moto uniformemente accelerato con  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ .

Per il momento si studia il trasporto di cariche dovuto alla presenza di campi elettrici.

Si introduce l'intensità di corrente  $I = \frac{dq}{dt}$  cioè una carica  $dq$  che passa attraverso una superficie. È facile capire quando un conduttore ha una geometria ben definita. Tuttavia esistono configurazioni più complicate. Si vuole generalizzare la definizione. Il passaggio di carica attraverso una superficie è legata al concetto di flusso per mezzo dell'intensità di corrente?

Nel sistema internazionale l'intensità di corrente ha unità di Ampere

$$1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}.$$

Si introduce la grandezza della densità di corrente. Si consideri un conduttore con una certa densità  $n$  di portatore di carica per unità volume. "Portatore di carica" nel senso che le cariche

sono libere di muoversi.

Sia  $q$  la carica di tali portatori di carica. Si immagini che essi si muovano con una velocità  $\vec{v}$ . Inoltre, si consideri una superficie  $\vec{a} = a\hat{n}$ .

La velocità non è per forza allineata con la direzione della superficie. Può avere una direzione  $\theta$ . In un intervallo di tempo  $dt$ , le cariche percorrono una distanza  $v dt$  passando attraverso la superficie. Il volume del prisma è  $a \cdot v \cos \theta$ . Quindi

$$dq = nqV = nq \underbrace{v dt \cos \theta}_{\text{altezza prisma}} \cdot a.$$

Quindi l'intensità di corrente attraverso l'area è

$$I = \frac{dq}{dt} = nq\vec{v} \cdot \vec{a}.$$

Questo non è molto diverso dalla relazione tra portata, sezione e velocità dei fluidi. Perché è detta corrente deriva ancora dai fluidi. Non tutti i conduttori hanno solo una specie portatrice di carica, ognuno ha propria  $n_i$ ,  $q_i$ ,  $v_i$ . Per ciascuna specie si può scrivere una relazione del tipo

$$I_i = n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}.$$

La corrente totale risulta essere la somma delle correnti. In generale

$$I = \sum_{\vec{J}} n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}.$$

Dove  $\vec{J}$  è la densità di corrente con unità di misura  $\frac{A}{m^2}$ . Tuttavia, nella realtà, le particelle hanno una distribuzione di velocità. Tuttavia, poco cambia, basta considerare solamente una specie con velocità differenti. Si immagini che abbia  $k$  valori di velocità differenti detti  $v_k$  che corrisponde a  $n = \sum n_k$ .

Dunque si afferma che per qualsiasi classe di velocità si ha  $I_k = n_k q \vec{v}_k \cdot \vec{a}$ , quindi quella totale è la somma

$$I = \sum n_k q \vec{v}_k \cdot \vec{a} = nq \left( \frac{1}{n} \sum n_k \vec{v}_k \right) \cdot \vec{a}.$$

Dove il valore tra parentesi risulta essere la velocità media ponderata. Dunque al posto di  $v_i$  per ogni specie bisogna mettere

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \langle \vec{v}_i \rangle.$$

Risulta ovvio dal procedimento che a questo punto, se si prende una superficie finita, di forma qualunque, si può calcolare la quantità di carica che vi passa attraverso nell'unità di tempo, cioè la corrente, come

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

[immaginare]

Per una superficie  $d\vec{a}$  piccola. Dunque, la corrente è il flusso di  $\vec{J}$ .

Si consideri una superficie chiusa. Se si ha un flusso netto [rivedi] Dunque

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{a} = -\partial_t Q = -\partial_t \int_V \rho d\nu.$$

Il segno meno è per convenzione, perché il verso delle superfici è rivolto verso l'esterno. Se  $J$  è uscente allora la carica sta diminuendo. Se il flusso è entrante, la carica aumenta. Il meno bilancia l'effetto del versore della superficie. [rivedi]

Tramite il teorema di Gauss, si traduce quanto trovato in una situazione locale:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\nu = -\partial_t \int_V \rho d\nu.$$

Dato che questo è valido in qualunque volume, allora gli integrandi devono essere uguali. Dunque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0.$$

Questa è l'equazione di continuità ed esprime la conservazione della carica. In generale  $\vec{J}$  e  $\rho$  possono dipendere sia dallo spazio che dal tempo. Infatti

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}(\vec{r}, t) \\ \rho &= \rho(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Inoltre

$$I_A = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = I(\vec{r}, t).$$

Esiste una classe di fenomeni su cui ci si concentra (cioè i fenomeni stazionari) in cui non si ha dipendenza dal tempo  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$  e  $\rho = \rho(\vec{r})$ . Si ha una corrente costante attraverso una superficie fissata,  $I = I(\vec{r})$ . La corrente dev'essere nulla attraverso qualunque superficie chiusa:  $\partial_t \rho = 0$  cioè  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  il flusso è nullo attraverso superfici chiuse. Tagliando una superficie, all'interno non si ha accumulo o diminuzione di carica:

$$-\partial_t \int \rho d\nu = 0.$$

Si osservano fenomeni stazionari in cui si hanno correnti.

**Esempio.** Si mostra come la densità di corrente può dipendere dalle coordinate.  
immagine

Si consideri un tubo catodico. Si ha un moto di elettroni verso una lastra. Tale moto è uniformemente accelerato tale per cui  $a = \frac{qE}{m}$ ,  $v = at$  e  $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} \implies v = \sqrt{2ax}$ . La velocità dipende dalla coordinata spaziale. L'intensità di corrente è

$$J = ne^-v(x).$$

Per calcolare la corrente bisogna tagliare una sezione e calcolarne il flusso

$$I = JA.$$

Per geometria  $J$  non dipende da  $y$ . Prendendo due superfici così da costituirne un'unica chiusa succede che, dato che  $J$  dipende da  $x$  ma non dal tempo, si ha un fenomeno stazionario, dunque il flusso netto per la superficie dev'essere nullo:

$$I(x_1) = I(x_2) \implies I = \text{cost.} = ne^-v(x)A.$$

Dato che la velocità dipende da  $x$ , l'unica cosa che può mantenere il prodotto costante è che la densità anch'essa dipenda da  $x$ :

$$\rho = ne^- = \frac{I_0}{A\sqrt{2ax}}.$$

La densità di corrente non è indipendente dalla posizione, ma lo è dal tempo.

Inoltre, esistono molti fenomeni in cui le correnti variano in modo sinusoidale. Essi non sono stazionari, ma guardando il comportamento medio su di un periodo, allora lo risultano essere. Tuttavia, se oscillano molto velocemente, la descrizione fin'ora fatta non vale più.

Ora bisogna capire come  $J$  dipenda da i campi elettrici. Si ha una variabile che descrive il flusso attraverso una superficie e lo si vuole legare alla presenza di un campo elettrico. Un conduttore in un campo elettrico, si ha un riarrangiamento delle cariche, dunque un flusso, tuttavia avviene in tempo rapidi e quindi il flusso si annulla velocemente.

Ora per un effetto esterno, si impedisce che il campo elettrico si annulli [rivedi]  
 Si ha una legge di origine empirica cioè la legge di Ohm generalizzata:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

Dove  $\sigma$  è la conducibilità elettrica ed è caratteristica del materiale. Tale legge è empirica simile alla legge della viscosità. Essa non vale sempre, ma vale solo nei conduttori ohmici (omogenei), cioè quelli per cui vale la legge di Ohm.

Inoltre,  $\sigma$  è scalare e non è il caso generale, in alcuni conduttori l'intensità di corrente è diversa per diverse direzioni del campo elettrico ed in quel caso  $\sigma$  è descritta da un tensore. Si possono ingegnerizzare materiali per ottenere diversa conducibilità in base alla direzione, sia livello di struttura della materia che a livello macroscopico. Per conduttori impilati con conducibilità diversa, la conducibilità è diversa in base alla direzione? [rivedi]

Inoltre, tale relazione vale fin quando il campo elettrico non è forte, vale fino a quando non genera modificazioni strutturali? [rivedi].

## 8.1 Conduttori Ohmici

**Legge di Ohm.** Essa afferma

$$V = RI.$$

dove  $R$  è la resistenza elettrica e  $V$  è la differenza di potenziale, non si usa più  $\varphi$  perché si parla di correnti e non di potenziali elettrostatici. Inoltre, l'unità di misura di  $R$  è  $1\Omega = \frac{1V}{1A}$ .

Si mette in relazione  $R$  con  $\sigma$ . [immagine] Si prenda un conduttore cilindrico lungo  $l$  e con sezione  $A$ . Sia la differenza di potenziale ai capi pari a  $V$  costante. Dunque

$$\vec{E} = \frac{V}{l} \hat{u}_l.$$

La scrittura deriva dalla definizione di differenza di potenziale come integrale di cammino. Si presenta della carica superficiale statica che mantiene il campo elettrico all'interno del cilindro. Dunque

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{I}{A} \hat{u}_l.$$

Per convenzione, nella legge di Ohm generalizzata,  $\sigma$  è sempre positiva, dunque la corrente  $J$  è sempre allineata con  $\vec{E}$ . Quindi

$$\frac{\sigma V}{l} = \frac{I}{A} \implies V = \underbrace{\frac{1}{\sigma} \frac{l}{A}}_R I, \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{A}.$$

con  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  resistività. Piegando il filo, la resistenza è sempre la stessa, perché anche piegandolo le cariche seguono una lunghezza  $l$  nel campo elettrico. Le cariche non escono perché esiste una carica superficiale che si configurano in modo tale per cui il campo è sempre interno al filo. Dunque, all'esterno il campo elettrico è zero, mentre dentro dipende dalla differenza di potenziale e dal percorso delle cariche? [rivedi]

Analogamente ai fluidi, la resistenza idraulica è analoga alla resistenza, tuttavia la prima dipende dalla geometria  $R = \eta \frac{l}{A^2}$ . In entrambi i casi si ha un attrito viscoso, la cui forza è proporzionale alla velocità. Infatti, per i conduttori  $\vec{J} = nq\langle \vec{v} \rangle = \sigma \vec{E}$ , dove  $\vec{E}$  è la forza di trascinamento. Quindi  $q\vec{E} - \vec{F}_{\text{attr.}} = 0$ .

Nei fluidi la velocità dipende dalla distanza dalle pareti del condotto, perché l'attrito viscoso è associato allo scorrimento di uno strato sull'altro. Nelle correnti, l'attrito è dovuto agli urti tra le cariche, dunque non dipende dalla distanza, pertanto è uguale in tutta la sezione del condotto. Dato che  $\vec{E}$  è uniforme, allora pure  $\vec{J}$ , dunque pure la velocità. Esistono anche altre correzioni minori, ma sono trascurabili. Una conseguenza della legge di Ohm generalizzata è che per correnti stazionarie, quelle per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , si ha  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ . Quindi, il campo elettrico all'interno di una regione con corrente stazionaria non può avere una distribuzione di carica

$\rho = 0$ . Se il conduttore non è omogeneo si [rivedi]

Si considerino due blocchi adiacenti con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e con stessa sezione. Dunque  $J_1 = JA = J_2$ , ma se sono ohmici si ha  $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ , se le due  $\sigma$  sono diverse allora pure il campo elettrico. L'unica cosa che genera una discontinuità è una densità di carica superficiale.

Ora si interpreta la legge di Ohm generalizzata su un modello corpuscolare. Si vuole trovare una relazione per cui  $J \propto E$ . Si osserva un modello numerico.

Per i metalli la resistività è  $\rho \approx 10^{-8} \Omega\text{m}$ , per i conduttori ionici (come l'acqua salata) è  $\rho \approx 1 \Omega\text{m}$ , per semiconduttori  $\rho \approx 0.1 - 1 \Omega\text{m}$  e per gli isolanti è  $\rho \approx 10^8 \Omega\text{m}$ . In particolare, il rame è  $\rho \approx 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ . Si calcola la velocità di deriva (che determina il trasporto di carica) se si applica una differenza di potenziale di 6 V lungo 1 metro. Sapendo  $J = nqv_D$  si ha  $v_D = \frac{J}{nq}$ . Per il rame si ha un elettrone libero per atomo. Quindi  $n = \frac{\rho_m}{m} N_A$ , con  $\rho_m$  densità massica,  $m$  massa di una mole e  $N_A$  numero di Avogadro. Quindi

$$n = \frac{7.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{74\text{g}} 6 \cdot 10^{23} \approx 8 \cdot 10^{28}.$$

[rivedi]

Dunque

$$v = \frac{I}{Anq} = \frac{V}{RnqA} = \frac{V}{\rho l n q}.$$

Quindi, per l'esempio si ha  $v \approx 2.5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Tale velocità è trascurabile rispetto la velocità di agitazione degli elettroni. Infatti  $\frac{1}{2} m v_T^2 = KT \implies v_T = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$ , dove  $K = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ,  $T = 300\text{K}$  e  $m_e = 8 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ . Dunque si ha  $v_T \approx 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Si può costruire un modello tenendo conto di tali informazioni. Si supponga che l'elettrone abbia una velocità alta e che quando urta con un altro elettrone esso viene riflesso in una direzione casuale. Quindi  $\vec{p} = m\vec{v}_c$ . Fra un urto ed il successivo, l'elettrone è soggetto al campo elettrico, quindi la quantità di moto è aumentata  $\Delta\vec{p} = q\vec{E}\Delta t$ . Si consideri una porzione di conduttore in cui siano presenti  $N$  cariche. Si studia il contributo complessivo di tali  $N$  cariche. In un istante di tempo, per ogni particella sia il tempo precedente dell'urto  $t_i$  (che segue una distribuzione esponenziale). Ciascuna ha  $\vec{p}_i = m\vec{v}_{c,i} + q\vec{E}t_i$ . Dunque la quantità di moto media è

$$m\langle\vec{v}\rangle = \underbrace{m\langle\vec{v}_{c,i}\rangle}_0 + q\vec{E}\tau_M.$$

dove  $\tau_M$  è il tempo medio dall'ultima collisione. Quindi

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{q\vec{E}\tau_M}{m}.$$

Da cui risulta

$$\vec{J} = m q \langle\vec{v}\rangle = \underbrace{\frac{n q^2}{m}}_{\sigma} \tau_M \vec{E}.$$

Il modello corpuscolare funziona, ma non in maniera accurata: per questo serve una trattazione quantistica. Il termine  $\tau_M$ , nei metalli, dipende con la temperatura. La conducibilità di un metallo diminuisce all'aumentare della temperatura. Nei semiconduttori si hanno elettroni poco legati agli atomi e l'energia termica ne libera una certa frazione. Dunque, salendo con la temperatura, la probabilità di liberare elettroni aumenta secondo la distribuzione di Boltzmann  $\propto e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$ .

## Lecture 14

Il tubo catodico non è un conduttore ohmico perché le cariche accelerano, il campo elettrico non è proporzionale a  $\vec{J}$ .

gio 04 nov  
2021 13:30

Si è visto come ingegnerizzare la resistenza di un conduttore scegliendo il materiale e la geometria del conduttore  $R = \rho \frac{L}{A}$ . Per una gran parte di applicazioni, la resistenza caratterizza completamente il comportamento di un sistema, quindi non è necessario conoscere tutte le relazioni fin'ora discusse. L'unica cosa utile conoscere è la resistenza.

Un apparecchio resistivo si può pensare come una scatola nera, senza sapere cosa c'è dentro, completamente caratterizzato dalla resistenza:  $R = \frac{V_{AB}}{I}$ , [immagine], per conduttori ohmici e correnti continue (cioè costanti nel tempo). Per correnti alternate, il comportamento per un apparecchio resistivo richiede delle correzioni. Nel limite stazionario, quanto visto caratterizza completamente il sistema.

L'apparecchio si può ridurre ad elementi più semplici fino ad arrivare alla resistenza. Si ha una rete di resistenze detta circuito resistivo e la sua caratteristica è di avere un elemento circuitale (cioè la resistenza) con relazione  $V = IR$  e altri tratti detti fili che hanno  $V = 0$ , per qualunque  $I$ . Quindi un sistema complesso si condensa in resistenze e fili (che non hanno resistenza e quindi caduta di potenziale).

**Esempio.** Per un circuito come in figura [immagine] entra delle corrente in  $A$  e si hanno resistenze  $R_1 - R_6$ . Il tutto è l'apparecchio elettrico con differenza di potenziale  $V_{AB}$ . Si vuole tradurre il sistema in uno equivalente con resistenza  $R$ . Si procede combinando le resistenze.

**Resistenze in serie.** La prima combinazione che si può considerare è quella in serie. Per  $n$  resistenze in serie, si trova la resistenza equivalente. Si utilizza quanto visto, cioè i potenziali sono additivi:

$$V_{AB} = V_1 + \dots + V_n.$$

Inoltre, se il circuito ha corrente stazionaria allora  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  quindi  $I = \text{cost.}$  e la carica si conserva, cioè la corrente  $I$  è comune a tutte le resistenze:

$$V_{AB} = R_1 I + \dots + R_n I = \underbrace{(R_1 + \dots + R_n)}_R I = RI.$$

Quindi la resistenza equivalente dalle resistenze in serie è  $R = \sum R_i$ .

**Resistenze in parallelo.** [immagine]

Per  $n$  resistenze in parallelo, tutti i punti sul filo prima delle resistenze sono allo stesso potenziale, allo stesso modo per i punti dopo il filo. La corrente da  $A$  si ramifica nelle varie resistenze. Si sa che la corrente totale attraverso una sezione è costante, perché il flusso è costante? Quindi

$$I = I_1 + \dots + I_n = \frac{V_1}{R_1} + \dots + \frac{V_n}{R_n} = \left( \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) V_{AB} = \frac{1}{R} V \implies \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}.$$

Dato che comunque vale Ohm:  $V = IR$ . Per due resistenze la combinazione è semplice  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  e se sono uguali allora  $R = \frac{R_1}{2}$ . Mettendole in parallelo, si aumenta la sezione e quindi diminuisce la resistenza? [rivedi]

Dunque ritornando all'esempio si ha  $R_{12} = R_1 + R_2$ ,  $R_{123} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ ,  $R_{12345} =$  in serie,  $R_{123456} = R_{12345}$  in parallelo con  $R_6$ .

Esistono configurazioni più interessanti, come quello di un cavo resistivo infinito, con una dispersione di corrente verso terra. Il cavo infinito si può frazionare in tanti elementi finiti [immagine]

Dove il filo sotto rappresenta la terra. Si vuole sapere alla fine della catena cosa succede. Inoltre,  $R_1$  rappresenta la resistenza lungo il filo, mentre  $R_2$  è la resistenza verso terra.

Si vuole trovare la resistenza equivalente del sistema e capire come si attenua il segnale. Se il filo è infinito e la sua resistenza equivalente è  $R$ , aggiungendo davanti un altro stadio, il comportamento non cambia e rimane uguale a se stesso [immagine]. Quindi

$$R_1 + (R_2 \parallel R) = R \iff R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = R \iff R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}.$$

Da cui si può ricavare  $R$ .

Si studia la seconda domanda, si cerca la tensione dopo aver passato  $n$  stadi. Si pensi che dopo lo stadio  $n$  ce ne sono ancora infiniti; quindi [immagine]

si ha  $R_2$  ed  $R$  in parallelo, e si ha resistenze in serie, dunque la corrente per le due è la stessa:

$$V_n = I \frac{R_2 R}{R_2 + R}.$$

Inoltre

$$V_{n-1} = I(R_1 + (R_2 \parallel R)) = IR.$$

Ricavando  $I$  da questa si ottiene nella prima:

$$V_n = V_{n-1} \frac{R_2}{R_2 + R}.$$

Generalizzando si ha

$$V_n = \left( \frac{R_2}{R_2 + R} \right)^n V_{\text{ingresso}}.$$

Dunque, il potenziale si attenua con una legge esponenziale. Nella realtà si può far finta di avere un cavo infinito: basta mettere una resistenza  $R$  alla fine del filo. Tale strumento permette di attenuare il potenziale in ingresso di un fattore a piacere.

Tuttavia sorge un problema. Non tutte le configurazioni possono essere ridotte ad una resistenza equivalente tramite resistenze in serie e parallelo. Ad esempio [immagine]

Le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  non hanno la stessa differenza di potenziale ai propri capi. Bisogna utilizzare il metodo generale che risalgono alle leggi generali di un campo stazionario: il campo elettrico è conservativo e in corrente stazionaria le correnti sono conservate. Si ottengono le leggi di Kirchhoff:

- $\sum V_i = 0$  per ogni maglia del circuito, cioè una linea chiusa, questo discende dal fatto che  $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$  e  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ .
- $\sum I_i = 0$  con  $I_i$  correnti ai nodi, questa discende dal fatto che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  e quindi il flusso è nullo attraverso tutte le superfici chiuse.

Con tali due regole, si scrive un'equazione per ogni maglia indipendente, una equazione per ogni nodo e si ottiene un sistema lineare di equazioni.

**Esempio.** [immagine]

Per la prima maglia

$$V_1 + V_2 + V_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 (I_1 - I_2) = 0.$$

Per la seconda maglia

$$R_3 (I_2 - I_1) + R_4 I_2 + R_7 I_2 + R_6 (I_2 - I_3) = 0.$$

Per la terza maglia

$$R_6 (I_3 - I_2) + R_5 I_3 = 0.$$

Si hanno tre equazioni in tre incognite. Infine,  $V_{\text{out}} = R_7 I_2$ .



**Forza elettromotrice.** Considerando un apparecchio rappresentabile con una certa resistenza, si vuole che circoli una corrente: ai capi del terminale bisogna avere una differenza di potenziale non nulla stabile nel tempo. La carica positiva che esce dal terminale  $B$  venga inserita in  $A$ . Questo si può fare inserendo un elemento nel circuito portando le cariche positive da un punto con potenziale più basso ad un di potenziale più alto. Si ha una forza di natura non elettrica che lavora con il campo elettrico: tale forza è detta forza elettromotrice (fem oppure  $\mathcal{E}$ ). Essa è il lavoro per unità di carica della forza non elettrica. Essa è omogenea alla differenza di potenziale, dunque l'unità di misura è il volt. [immagine]

Si costruisce un circuito complesso in cui si hanno tali elementi. Si utilizzando le leggi precedenti: si ha un'equazione per ogni maglia ed un'equazione per ogni nodo. Dunque

$$\sum I_i = 0$$

$$\sum V_i + \sum \mathcal{E}_i = 0$$

In termini generali, si ha

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{c}.$$

La forza su carica unitaria  $\vec{f}$  è

$$\vec{f} = \vec{E} + \vec{f}_{\text{non elettrica sorgente}}.$$

Ora si sa che

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \iff \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{V_{AB}} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Dunque

$$\mathcal{E} = \oint_c (\vec{E} * \vec{f}_s) \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{f}_s \cdot d\vec{s} = \int_B^A f_s ds.$$

Nell'esempio si ha

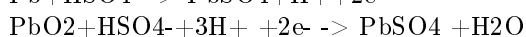
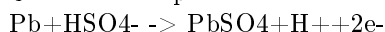
$$R_2 I_1 + \mathcal{E}_1 + R_2 (I_1 - I_2) = 0.$$

Ora ci si chiede cosa sia tale forza di natura non elettrica. Si vede qualche esempio. Tutti i circuiti resistivi si possono ridurre ad un circuito con una sola resistenza equivalente. Mentre un circuito con più forze elettromotrici e più resistenze si può ridurre ad un circuito con una sola forza equivalente ed una sola resistenza equivalente, tutte due in serie. Questo è il teorema di Thevenin?.

**Esempio.** Si vede un esempio storico di forza elettromotrice: la macchina di van de Graaff. [immagine]

Si strofina un nastro, caricandolo. Le cariche positive vengono raccolte e scendono lungo il conduttore attraverso una resistenza. Alla fine le cariche vengono raccolte ancora dal nastro e riportate all'inizio del ciclo: si fornisce una forza elettromotrice che lavora contro il campo elettrico.

Un altro esempio è costituito dalle batterie al piombo



Queste batterie sono reversibili, al contrario delle pile di Volta: si forzano le reazioni inverse. In entrambe le direzioni, gli ioni  $\text{H}^+$  devono vincere la resistenza interna della batteria.

Dato che si ha resistenza interna ed una perdita di energia, ci si chiede quale sia la potenza dissipata.

Ai capi di [rivedi]

Ai capi di una resistenza si ha una differenza di potenziale pari a  $V = RI$ , con  $I = \frac{dq}{dt}$ . Per

un circuito elementare con una sola forza elettromotrice ed una sola resistenza si ha  $\mathcal{E} = IR$ . Il lavoro per spostare una carica attraverso una differenza di potenziale è

$$W = q\Delta V.$$

Quindi la potenza con differenza di potenziale costante è

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = I\Delta V.$$

Per la resistenza vale

$$\frac{dW}{dt} = RI^2.$$

A livello microscopico, il campo elettrico accelera gli elettroni acquisendo una energia, ma non è tutta utilizzata nel trasporto, perché gli elettroni si urtano. Dato che l'energia degli elettroni aumenta, allora aumenta anche la temperatura ed il sistema deve dissipare calore per rimanere alla stessa temperatura.

La prima equazione per la potenza vale per qualsiasi elemento circuitale:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

Una fem non può erogare più di una corrente massima.

**Condensatori.** Si conosce un'altra configurazione di conduttori che si può pensare come elemento circuitale: i condensatori. La relazione di questa componente è  $q = CV$ . Con i circuiti non si usa la carica ma la corrente:  $I = C \frac{dV}{dt}$  e da questo risulta che se la differenza di potenziale è costante allora la corrente è nulla.

Considerando un circuito con un condensatore carico ed una resistenza, succede che chiudendo il circuito la differenza di potenziale iniziale è  $V_0 = \frac{Q_0}{R}$ . La corrente inizia a circolare fino a quando il condensatore si scarica.

Per un tempo  $t \geq 0$  si ha

$$V_C + V_R = 0 \iff V_C + RI = 0 \iff V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0 \iff \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{RC} \implies V_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

La costante si ricava per  $t = 0$ , per cui  $V_C(0) = V_0$ . Quindi

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Un condensatore carico chiuso su di una resistenza si scarica con una legge esponenziale. La costante di tempo  $\tau = RC$ . Inoltre trovare  $I$  e dimostrare  $\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2} CV_0^2$

$$I = .$$

Si può costruire un circuito più complicato prendendo una batteria, un condensatore ed una resistenza. Chiudendo il circuito, si presenta la differenza di potenziale immediatamente al condensatore. Per Kirchhoff si ha

$$-\mathcal{E} + V_C + V_R = 0 \iff -\mathcal{E} + V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0.$$

Si ottiene un'equazione differenziale non omogenea, la cui soluzione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione all'equazione differenziale omogenea associata:

$$V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = \mathcal{E}.$$

Una soluzione particolare è  $V_C = \mathcal{E}$ . Dunque la soluzione generale è

$$V_C(t) = \mathcal{E} + Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Per  $t = 0$ ,  $V_C = 0$  si ottiene

$$V_C(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

## Lecture 15

lun 08 nov  
2021 13:30

## 9 Magnetismo

[rivedi] L'evidenza della forza magnetica si ha dall'esperimento di Ørsted. Si ha un'interazione con un ago magnetico posto attorno ad un filo attraverso cui passa corrente. Si ha una simmetria cilindrica. Si sviluppa un concetto di campo, perché si è sondato lo spazio:  $\vec{B} = k \frac{i}{r} \hat{u}_\theta$ . Si ha un convenzione di segno che discende da come si orientano gli aghi: la regola della mano destra. L'esperimento viene da Ørsted, ma la mappatura avviene con Biot-Savart. Ampère aggiunge un altro filo e si nota che l'interazione con un altro filo dipende dal verso di percorrenza delle correnti: concordi si ha attrazione, discordi si ha repulsione. Se si mettono i fili ortogonalmente non si ha interazione, mentre ad un angolo si ha interazione in parte. Ampère quantifica l'interazione tra fili paralleli in una forza:

$$\vec{F} = \pm k i_1 i_2 \frac{l}{r} \hat{u}_r.$$

Dove  $r$  è la distanza tra i fili ed  $L$  è un tratto di filo. Nel sistema internazionale

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}, \quad \mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{C}^2 \text{m}}.$$

Capita che

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Che si ricava da Maxwell oppure da Lorentz. Si utilizza la interazione tra due fili per definire l'ampere (in verità ora non è più così: dal 20 maggio 2019 tutte le unità fondamentali del sistema internazionale sono definite in base a costanti universali ben precise, ciò significa che  $\mu_0$  deve essere determinata sperimentalmente). L'ampere è la quantità di corrente che fluisce nei due fili quando la forza tra i due fili è  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ , fissando  $\frac{l}{r} = 1$ .

Nell'analisi vettoriale dei fili di Laplace, egli ha scritto la seconda formula di Laplace per cui si può frazionare la forza come un'interazione associata al campo magnetico generato da un filo per la corrente che fluisce nell'altro filo. In particolare, isolando un tratto di filo  $d\vec{l} = dl \hat{u}_z$ , con verso concorde con la corrente, allora

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} = i dl B \underbrace{(\hat{u}_z \times \hat{u}_\theta)}_{-\hat{u}_r}.$$

Dunque, utilizzando tale interazione si ha la forza totale tra due fili paralleli come

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int i_2 d\vec{l} \times k \frac{i_1}{r} \hat{u}_\theta = -k \frac{i_1 i_2}{r} l \hat{u}_r.$$

Se ora si prende la condizione per cui  $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$  allora il campo del filo infinito percorso da corrente assume l'espressione

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \hat{u}_\theta.$$

L'analisi delle interazioni prosegue e porta a specificare qual è l'interazione tra campo magnetico e la carica puntiforme. All'interno dei fili si sposta della carica, quindi l'interazione è tra le cariche in moto. [rivedi]

**Forza di Lorentz.** Si ricostruisce la forza di Lorentz. La forza che agisce su di una carica puntiforme nello spazio è

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Dove il secondo addendo è la forza di Lorentz o legge di forza magnetica. Essa è una forza particolare. L'interazione  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$  è perpendicolare alla velocità. Quindi l'accelerazione subita da una carica in presenza di campo magnetico è centripeta, cioè ortogonale alla traiettoria. Essa è  $a = \frac{qvB}{m}$ .

Un moto ovvio e notevole è il caso in un il campo elettrostatico è nullo e campo magnetico uniforme: l'accelerazione centripeta è costante e si ha moto circolare uniforme.

Inoltre, tale legge di forza si riconcilia con la formula di Laplace suddetta. Pensando di avere una corrente che fluisce in un conduttore, si può immaginare di rappresentarla come  $i = \frac{dq}{dt}$  e  $\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = dq \vec{v} \times \vec{B}$ . Una carica all'interno di un conduttore è vincolata a rimanere nel conduttore, dunque il moto della carica è bloccato dalla reazione vincolare del filo e quindi si ha un effetto meccanico sul filo e non più sulla carica.

rivedi  
Si fa confronto l'intensità della forza elettrica e magnetica? Si consideri un filo carico con densità lineica  $\lambda$  e si ponga una carica puntiforme  $q$  a distanza  $r$ . Quindi il campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r}.$$

Si prenda un filo e si immagini che la corrente  $i = \lambda v$ . Si genera un campo magnetico attorno al filo. Per una carica esterna al filo si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \lambda v \hat{u}_\theta.$$

Dunque il confronto delle forze è

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{qvB}{qE} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Dunque, la forza magnetica è molto piccola rispetto a quella elettrica.

Si specifica il campo elettrico in maniera più chiara. Si definisce  $\vec{B}$  in maniera operativa dalla forza di Lorentz: quando si va a sondare uno spazio con una carica, quell'interazione afferma quanto è il valore di  $\vec{B}$ ; questo si è fatto anche con il campo elettrico, si è definito in maniera indipendente dalle sorgenti.

Si prende una carica  $q$  esploratrice e si sonda lo spazio. Bisogna sondare lo spazio con  $\vec{v} = 0$  in un dato sistema di riferimento e quindi risulta che  $\vec{F}$  misura il campo elettrico. Poi si sonda lo spazio con  $\vec{v} \neq 0$  (anche in tante direzioni) e si attribuisce al campo magnetico la differenza  $\vec{F} - q\vec{E}$  che campiona  $\vec{B}$ . Il campo magnetico definito così è il vettore induzione magnetica che si distingue dai campi prodotti dai mezzi materiali (anche se essi sono dovuti a correnti nei mezzi).  
[rivedi]

L'unità di misura del campo magnetico nel sistema internazionale è

$$[B] = \left[ \frac{F}{qv} \right] = 1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ C} \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

L'intensità media del campo magnetico terrestre è di  $50 \mu\text{T}$ . Le macchine da risonanza magnetica operano su  $1.5 \text{ T}$ .

Data la definizione operativa, il campo magnetico dipende dal sistema di riferimento perché nel procedimento seguito si è scelto un sistema di riferimento in cui si è scelto  $\vec{v} = 0$ . Si possono avere situazioni per cui cambiando sistema di riferimento non si ha più campo elettrostatico, ma solo campo magnetico. Tuttavia, nel momento in cui si fissa il sistema di riferimento, la

definizione operativa è ben posta. Mettendosi in movimento la definizione della forza magnetica è buona se la forza elettrostatica non dipende dalla velocità. Ciò è vero perché discende dal fattore che la carica elettrica è invariante. [rivedi]

Un'altra cosa particolare è che la legge della forza elettrostatica  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r^2} \hat{u}_r$  è espressa rispetto ?? fondamentali [rivedi]. Tuttavia, per il campo magnetico non si sa come ricostruirlo dalla distribuzione di corrente,  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Allora si segue la strada opposta del campo elettrico. Dalle proprietà fondamentali del campo (flusso e circuitazione) si risale alla relazione tra il campo e le sorgenti.

## Lecture 16

### 9.1 Circuitazione

mar 09 nov  
2021 13:30

Si studia la circuitazione di  $\vec{B}$ . Per un filo infinito con corrente  $i$  stazionaria si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \hat{u}_\theta.$$

Si vede che la circuitazione di  $\vec{B}$  dipende dal percorso, quindi  $\vec{B}$  non è conservativo. Infatti, si può costruire un circuito che collega due archi concentrici [immagine] di raggi  $r_1$  e  $r_2$ . Risulta apparente che

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \dots$$

Sui tratti  $AB$  e  $DC$  si ha che  $d\vec{l} \perp \vec{B}$ , perché i due segmenti sono paralleli a  $\hat{u}_r$ . Si riscrive come  $d\hat{u}_r \perp B\hat{u}_\theta$ . Per gli altri due segmenti si ha uno spostamento allineato con  $\hat{u}_\theta$ . Prendendo il tratto  $BC$  si ha  $d\vec{l} = dr \hat{u}_r$ , mentre il campo magnetico è  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{u}_\theta$ . Mentre lungo l'arco  $AD$  si ha  $d\vec{l} = -dr \hat{u}_r$ , ed il campo magnetico è uguale a quello di prima cambiando solo  $r_1$  con  $r_2$ . I contributi dati da  $d\vec{l}$  sono uguali ed opposti, dunque la circuitazione risultante è nulla. Si costruisce un'altra linea chiusa che segue una linea di campo a raggio  $r$  partendo e arrivando allo stesso punto. Si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\theta \cdot r d\theta \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 i.$$

Quindi il campo magnetico non è conservativo. Il campo magnetico attorno ad un filo è

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, & \text{se il filo non passa attraverso la superficie racchiusa dal circuito} \\ n\mu_0 i, & \text{se il filo attraversa la superficie} \end{cases}.$$

Con  $n \in \mathbb{Z}$  in base a quanti giri e con che verso si percorre il circuito.

Questo vale per un percorso qualunque. Per una forma arbitraria si sa che il campo magnetico ha simmetria cilindrica, quindi si deve scrivere  $d\vec{l}$  in coordinate cilindriche:

$$d\vec{l} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z.$$

E quindi

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta.$$

Per una linea che passa attraverso la superficie allora l'integrale è uguale a  $2\pi$ . Per un circuito esterno, per cui il filo non passa attraverso si ha

$$\oint \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta = 0.$$

In generale si può scrivere

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{concatenata}}.$$

Dove per corrente concatenata viene intesa la corrente che passa attraverso la superficie. Inoltre, il segno è dato dalla regola della mano destra. Tale formula è stata scritta per un filo, ma si può generalizzare.

Si consideri un numero arbitrario di fili. Si prenda un circuito arbitrario con alcuni fili che passano attraverso e altri sono esterni. Per ogni filo si ha

$$B_j = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_j \hat{u}_\theta.$$

Il campo magnetico totale è la somma, per il principio di sovrapposizione

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_j.$$

Prendendo una linea chiusa si ha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c \sum \vec{B}_j \cdot d\vec{l} = \sum \oint_c \vec{B}_j \cdot d\vec{l} = \sum \mu_0 i_j \equiv \mu_0 i_{\text{concatenata}}.$$

Si può scriverlo anche in una forma diversa, passando al continuo con infiniti fili infinitesimi ognuno con una corrente  $dI = \vec{J} d\vec{a}$  e si ottiene

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int dI_{\text{concat}} = \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Dove  $c = \partial A$  ed è detta legge di Ampère (non proprio). Tale relazione vale per correnti stazionarie, cioè che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Le superfici che insistono su  $c$  sono infinite e grazie alla divergenza nulla si può scegliere una superficie qualunque perché la legge di continuità sopra menzionata, in termini macroscopici, implica che il flusso attraverso qualunque superficie chiusa sia nullo e quindi vale la legge appena scritta.

**Esempio.** Si consideri un cavo conduttore di raggio  $R$  in cui passi una densità di corrente  $\vec{J} = \frac{i}{\pi R^2} \hat{u}_z$ . Per come è stata scritta, la densità di carica è uniforme perché il conduttore è ohmico per cui  $J = \sigma E$ ; applicando una differenza di potenziale ai capi si ha lo stesso lavoro per unità di carica su tutti i percorsi, dunque  $E$  è uniforme e quindi pure  $J$ .

Si cerca un circuito di Ampère che risponda alla simmetria del problema. Infatti il campo dipende solo dal raggio. Si sceglie un circuito di Ampère circolare attorno il filo, di raggio  $r$  che potrebbe anche essere più piccolo di  $R$ . Quindi

$$\begin{aligned} \oint \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \implies \\ B_\theta(r) 2\pi r &= \mu_0 J \int d\vec{a}, \quad r \leq R \\ B_\theta(r) &= \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{\mu_0 J}{2} r. \end{aligned}$$

Bisogna specificare  $J$  perché cambia da dentro a fuori dal conduttore. Tuttavia quando si integra l'area, quando si è dentro si integra fino a  $r$ , mentre quando si è fuori si integra fino a  $R$ . Quindi

$$J = \frac{i}{\pi R^2}.$$

Per  $r \geq R$  si ha

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \overbrace{J \pi R^2}^i}{2\pi r}.$$

mentre per  $r \leq R$  si ha

$$B_\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi R^2} \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \mu_0 \frac{J r}{2}.$$

Dunque l'intensità del campo è diretta lungo  $\theta$ , cresce linearmente fino a  $r$  e poi diminuisce come  $\frac{1}{r}$ .

La legge di Ampère così formulata vale sempre, per qualunque distribuzione di correnti, anche se non sono dei fili. Tuttavia questo non si può dedurre per via analitica: è un fatto sperimentale. In particolare, usando le tecniche imparate per l'elettrostatica, si può riformulare tale legge in modo che dia la relazione locale tra il campo magnetico e le sue sorgenti cioè si può scrivere, per correnti stazionarie,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Per il teorema di Stokes si ha

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Che è la forma differenziale della legge di Ampère per correnti stazionarie. Si vede che essa è vera solo per correnti stazionarie. Infatti:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0.$$

Per tale proprietà si ha che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ .

Si dimostra che la divergenza del rotore è zero, in coordinate cartesiane. Infatti

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\nu = (\text{Gauss}) \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = (\text{Stokes}) \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Se la superficie è chiusa, allora il circuito su cui insiste la superficie è un punto, dunque l'ultimo integrale è nullo.

Il fatto che  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  implica che  $\vec{B}$  è, localmente, ortogonale a  $\vec{J}$ . Infatti

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Il versore  $\hat{n}$  è ortogonale al circuito. Il rotore è una grandezza che è ortogonale rispetto a  $\vec{B}$ .

Il rotore in coordinate cilindriche è

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r} (\partial_\theta B_z - \partial_z B_\theta) \hat{u}_r + (\partial_z B_r - \partial_r B_z) \hat{u}_\theta + \frac{1}{r} (\partial_r (r B_\theta) - \partial_\theta B_r) \hat{u}_z.$$

L'unica componente che interessa è l'ultima perché  $J$  è zero lungo le altre due. Inoltre, dato che il campo è invariante per rotazione si ha che la seconda derivata è nulla. Dunque si ha

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \begin{cases} \mu_0 J_z, & r \leq R \\ 0, & r \geq R \end{cases} \implies B_\theta = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_z r}{2} + \frac{k_1}{r}, & r \leq R \\ \frac{k_2}{r}, & r \geq R \end{cases}.$$

Si fissa  $k_1 = 0$  perché prendendo una carica esploratrice con velocità lungo l'asse, essa ha sorgenti di campo magnetico a destra e sinistra simmetriche, dunque la somma delle forze di Lorentz è nulla, dunque pure il campo deve faro zero per  $r = 0$ . Inoltre,  $k_2$  si fissa in modo da avere un campo continuo e risulta essere  $k_2 = \frac{\mu_0 J_z R}{2}$ .

Inoltre, è emerso che  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  non caratterizza completamente il campo, ma servono informazioni in più; infatti si sa che

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} + \vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad \forall \vec{F} \mid \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0.$$

L'informazione in più è fornita dal flusso del campo magnetico. Esso ha una proprietà importante, cioè il flusso di  $\vec{B}$  attraverso una superficie chiusa è sempre nullo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \iff (\text{Teo Gauss}) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Questo significa che il campo magnetico non ha sorgenti di monopoli. Le linee di campo sono sempre chiuse. Nel caso del filo, le linee sono cerchi attorno al filo. Tale proprietà si descrive anche che il campo magnetico è un campo solenoidale.

Questa è l'unica legge che non cambia forma, tuttavia è l'unica senza nome.

**Teorema.** Si collegano le sorgenti ai campi con la legge di Ampère. Per farlo bene si utilizza il teorema di unicità di  $\vec{B}$ . Per sorgenti finite, cioè  $\vec{B} \rightarrow 0$ , per  $r \rightarrow \infty$  le equazioni

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

Definiscono  $\vec{B}$  univocamente.

**Dimostrazione.** Si utilizza quanto imparato per l'elettrostatica e si procede per assurdo. Si supponga che esistano due campi  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  entrambi soluzioni. Allora si costruisce un campo differenza  $\vec{D} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$  con la seguente proprietà:  $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 - \vec{\nabla} \times \vec{B}_2 = 0$ , cioè  $\vec{D}$  è conservativo, pertanto si può rappresentare tramite un potenziale scalare, cioè esiste una funzione  $\varphi$  scalare tale che  $\vec{D} = \vec{\nabla} \varphi$ . Tuttavia, dato che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  segue  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = 0$  cioè  $\nabla^2 \varphi = 0$  le cui condizioni al contorno sono  $\vec{D} \rightarrow 0$ , per  $r \rightarrow \infty$ , da cui segue  $\varphi(\infty) = \text{cost.}$ . Tuttavia, risulta che ad infinito  $\varphi$  è costante, ma dentro il laplaciano è nullo. Dall'elettrostatica, non esistono massimi e minimi locali, dunque  $\varphi$  è costante dappertutto cioè  $\vec{\nabla} \varphi = 0 \implies \vec{D} = 0 \implies \vec{B}_1 = \vec{B}_2$ .

Per configurazioni semplici si utilizza la legge di Ampère, mentre per configurazioni più complicate bisogna seguire un'altra strada.

Si è visto in elettrostatica che si può usare Gauss, però in generale, non si può formulare il problema in termini di una funzione scalare che porti a collegare i campi alle sorgenti. Infatti

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Da cui esiste  $\varphi$  per cui  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ , per cui nella seconda equazione si ottiene  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  di cui si conosce la soluzione formale:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Si vuole ridurre il problema fondamentale della magnetostatica a qualcosa di simile. Dunque, le equazioni sono

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione, il campo magnetico non è conservativo, dunque non si può introdurre un potenziale scalare (se non ci sono correnti, allora esso è conservativo). Dalla seconda equazione, si può introdurre un potenziale vettore, infatti si sa che la legge di Ampère è vera solo nel caso stazionario, si sa che la divergenza del rotore è zero. Quindi introducendo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$



allora segue che

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

Il campo  $\vec{A}$  è ortogonale a  $\vec{B}$ , pertanto ci si aspetta che sia diretto come  $\vec{J}$ . Si vede com'è la relazione tra il rotore di  $\vec{A}$  e le sorgenti. Dunque

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}.$$

Pertanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \implies \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{u}_x = \mu_0 J_x \implies \partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 J_x.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} (\partial_y - \partial_z)B_z &= (\hat{u}_z \partial_y - \hat{u}_y \partial_z) \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \implies \\ \mu_0 J_x &= \partial_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \partial_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z) \\ &= -\partial_y^2 A_x - \partial_z^2 A_x + \partial_x(\partial_y A_y + \partial_z A_z) \\ &= -\partial_x^2 A_x - \partial_y^2 A_x - \partial_z^2 A_x + \partial_x(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) \\ &= -\nabla^2 A_x + \partial_x(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \end{aligned}$$

Analogamente per le altre coordinate. Dunque, in generale

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Se si trova un modo per mandare via il gradiente della divergenza, si ottiene un analogo dell'equazione di Poisson. Si può mettere  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  perché l'introduzione di rappresentare  $\vec{B}$  tramite il rotore di  $\vec{A}$  lascia una certa arbitrarietà:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ , con  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{F}$ , per cui  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , dunque il campo  $\vec{A}$  è arbitrario, perciò si sceglie il più comodo. Quindi, si sceglie il potenziale vettore per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Si ottiene così un analogo all'equazione di Poisson. Il fatto che  $\vec{B}$  possa essere rappresentato con un numero infinito di potenziali è detto invarianza di gauge. Inoltre, esiste sempre la scelta di  $\vec{A}$  per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  ed essa è detta gauge di Coulomb, perché riduce un problema di magnetostatica ad un problema equivalente di elettrostatica.

Infatti, si supponga di avere  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , con  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f$  non nullo. Si scelga un  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{F}$  con le condizioni per cui  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -f$  così che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ . Tale scelta esiste sempre perché è analogo alle due equazioni differenziali del campo elettrico.

Dunque, l'equazione diventa

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x.$$

La cui soluzione è

$$A_x = \mu_0 \int \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Analogamente per le altre coordinate. Emerge il quadrivettore: tre correnti ed una densità di carica, un potenziale scalare e tre potenziali vettoriali.

## Lecture 17

Si sono trovate due leggi fondamentali per la magnetostatica

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

mer 10 nov  
2021 13:30

che hanno una soluzione unica per il teorema di unicità. Si è introdotto il potenziale vettore  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , esiste una arbitrarietà nella scelta di  $\vec{A}$  infatti basti prendere  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{F}$ , con  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ . Si sceglie dunque un potenziale vettore comodo che permette di scrivere le equazioni che legano il campo con le sorgenti

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \implies \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Dove la scelta di  $\vec{A}$  è la gauge di Coulomb. In forma compatta si ha

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Questa è simmetrica alla relazione che si conosce per l'elettrostatica

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu.$$

Le stesse discussione sulle anomalie del secondo integrale valgono anche nel primo. Per ora il potenziale vettoriale è un ente matematico che semplifica i calcoli. Più avanti si vede che ha delle proprietà che lo caratterizzano.

In elettrostatica si sa anche che

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_r d\nu.$$

Si vuole scrivere una relazione generale che permette di collegare il campo magnetico alle sorgenti. Essa è facile da scrivere quando le sorgenti sono delle correnti sui fili; per correnti distribuite su di un volume è più facile utilizzare il potenziale.

**Circuiti.** Si consideri un circuito in cui scorra una corrente  $i$ . Dunque

$$\vec{J} d\nu = Ja d\vec{l} = i d\vec{l}.$$

dove  $a$  è la sezione del filo,  $d\vec{l}$  è un tratto di filo. Dunque, l'integrale del potenziale vettoriale, considerando che  $J = 0$  ovunque tranne sul filo, si ha un integrale di linea su  $d\vec{l}$ :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{i d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

con  $\vec{r}$  punto generico dello spazio. Dunque ora si considera  $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l}}{r}$ . Si fissa un tratto  $d\vec{l}$  e si calcola il suo contributo in un punto qualunque individuato da un vettore  $\vec{r}$  che parte da  $d\vec{l}$ . Così il potenziale assume la forma scritta sopra. Ora si ha, per cui:

$$d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \vec{\nabla} \times \left( \frac{d\vec{l}}{r} \right).$$

Inoltre

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fF_x & fF_y & fF_z \end{vmatrix} = \partial_y f F_z + f \partial_y F_z - \partial_z f F_y - f \partial_z F_y + \dots$$

Quindi segue

$$\underbrace{(\partial_y f F_z - \partial_z f F_y)}_{\vec{\nabla} f \times \vec{F}} + f \underbrace{(\partial_y F_z - \partial_z F_y)}_{f \vec{\nabla} \times \vec{F}} + \dots$$

Quindi risulta

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \times d\vec{l} + \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times d\vec{l} \right].$$

Si sta calcolando il potenziale vettore di un punto qualunque per un  $d\vec{l}$  fisso, dunque la sua derivata si annulla. Ora

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \hat{u}_r.$$

Quindi

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{u}_r \times d\vec{l}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Il campo magnetico totale risulta essere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{|\vec{r}_O - \vec{r}'|^2}.$$

Si è fatta coincidere l'origine del sistema di riferimento con  $d\vec{l}$ , dunque  $\vec{r}' = 0$ .

Questa formula è l'equivalente di quella del campo elettrostatico. Essa è la formula di Biot-Savart o prima formula di Laplace. Bisogna porre attenzione nell'interpretazione di questa legge. Infatti, in alcuni testi c'è un tentativo di collegarla ad una sorgente elementare, ma  $i d\vec{l}$  non è una sorgente elementare: non esiste una corrente  $i$  che vive solo su di un tratto  $d\vec{l}$ , si sta lavorando con correnti stazionarie, quindi il minimo che si può avere sono circuiti chiusi. In alcuni libri si afferma che  $i d\vec{l} = dq \vec{v}$ , però la carica  $dq$  non è una corrente stazionaria, perché il suo flusso attraverso una superficie è infinito quando la traversa e zero negli altri casi.

Inoltre, il campo per correnti impulsive non è così descritto, presenta una forma più complicata che si riduce a quanto trovato per velocità molto minori di  $c$ .

La formula di Laplace è stata costruita empiricamente. Ma qua si è presentata per via concettuale; partire da Laplace è la via utilizzata particolarmente in ingegneria.

Tale legge sembra suggerire che il campo magnetico dipende da  $\frac{1}{r^2}$  come il campo elettrico, tuttavia guardando il circuito da lontano, per ogni coppia di punti ai lati opposti si vedono due correnti opposte e da lontano sono dipoli magnetici e quindi  $r^2$  si semplifica, facendo rimanere solamente  $\frac{1}{r^3}$ .

Si calcola il campo di un tratto di filo. [immagine]

Si ha una densità di corrente  $\vec{J} = i d\vec{l}$ . Ad una distanza  $R$  dall'asse si ha il campo magnetico ortogonale a  $\vec{J}$ . Dunque, per un tratto sul filo  $dz \hat{u}_z$ , si individua la posizione con un raggio vettore  $\vec{r}$ . Quindi il campo magnetico dovuto a quel tratto è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dz \hat{u}_z \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dz \sin \alpha}{r^2} \hat{u}_\theta.$$

Si ha  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \implies \sin \alpha = \cos \varphi$ . Inoltre,  $R = r \cos \varphi \implies r = \frac{R}{\cos \varphi}$  e  $z = r \sin \varphi = R \tan \varphi$ ,  $dz = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi$ . Pertanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{R^2} \cos^2 \varphi \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} [\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1] \hat{u}_\theta.$$

Per un filo infinito, cioè  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i.$$

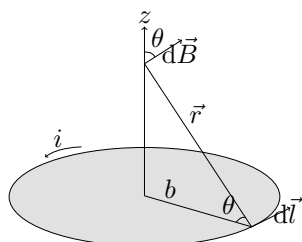


Figure 2: spira-circolare

**Campo di una spira circolare.** Una spira è un anello di corrente. Si calcola il campo magnetico di un punto sull'asse dell'anello di raggio  $b$ . La corrente circola in senso antiorario. Per Biot-Savart, si individua un elemento  $d\vec{l}$ . Ad un'altezza  $z$ , il raggio vettore è  $\vec{r}$ . Il campo magnetico è ortogonale a  $d\vec{l}$ , tuttavia integrando le direzioni trasverse si annullano e rimane solamente la componente verticale. Quindi

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{|d\vec{l} \times \hat{u}_r|}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \cos \theta}{r^2}.$$

Quindi

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{b}{r^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{2} i \frac{b^2}{r^3}.$$

Da qui si vede la dipendenza da  $r^3$ : il comportamento è quello di un campo di dipolo.

Si studia l'andamento delle linee di campo. La componente  $B_\theta = 0$  ovunque. Infatti,  $B_\theta = \text{cost}$  per simmetria rotazionale. Considerano una circonferenza di raggio  $s$  sopra l'anello, si applica la legge di Ampère:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta \oint dl = B_\theta 2\pi s = 0 \implies B_\theta = 0.$$

L'integrale è nullo perché l'anello non concatena nessuna corrente.

Le componenti radiale e assiale non sono nulle. Nel piano dell'anello non si può avere una componente radiale. [immagine] Cambiando segno alla corrente, il campo magnetico cambia verso, ma girando l'anello si ritorna alla situazione prima del cambio di corrente, ma ciò non può succedere; l'unico caso permesso è quello per cui  $B_r = 0$  sul piano.

Il campo è verticale sull'asse, mentre è perpendicolare al piano dell'anello. Si ha una struttura simile al dipolo elettrico a grandi distanze. La forma delle linee di campo è simile ad un toro.

## 9.2 Configurazioni notevoli.

Si trova il campo di alcune configurazioni notevoli.

**Solenoide.** [immagine]

Sia  $b$  il raggio del solenoide. Si individua una piccola regione cilindrica di altezza  $dz$ . Si considera il filo come molto sottile, così che il calcolo è analogo a considerare tanti anelli di spessore  $dz$ . Si supponga siano presenti  $N$  spire ed  $l$  sia la lunghezza del solenoide. Allora  $n = \frac{N}{l}$  è il numero di spire per unità di lunghezza. Quindi in un tratto  $dz$  si ha una corrente

$$dI = n dz i.$$

Prendendo un punto sull'asse, a distanza  $\vec{r}$  dall'anello, allora il campo magnetico sull'asse è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} dI \frac{b^2}{r^3} \hat{u}_z = \frac{\mu_0}{2} n i \frac{dz b^2}{r^2} \hat{u}_z.$$

Quindi risulta  $\frac{b}{r} = \sin \theta$  e  $r d\theta = dz \sin \theta$  [immagine] da cui:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} ni \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2} ni [\cos \theta_1 - \cos \theta_2].$$

Per un solenoide infinito, gli angoli vanno da 0 a  $\pi$ :

$$B_z(r=0) = \mu_0 ni.$$

Si vuole sapere com'è il campo dappertutto. Per un anello, spostandosi dall'asse, il campo magnetico non è più verticale. Se il solenoide è infinito allora il campo è uniforme in  $z$ . La componente  $\theta$  dev'essere zero perché lo era per un anello e quindi lo è per la somma di tanti. Per la direzione radiale, vale ancora l'argomento del campo sul piano, cioè è nullo. Pertanto, il campo ha solo direzione  $z$ :  $\vec{B} = B_z \hat{u}_z$ . Esso è uniforme in  $z$ , ma il suo valore può dipendere da  $r$ , mentre le altre due componenti sono nulle. Si utilizza la legge di Ampère per vedere come dipende, se dipende, da  $r$ . Si costruisce un circuito di Ampère [immagine] con  $r < b$ . Allora, sul circuito si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z(r=0)L - B_z(r)L = 0 \implies B_z(r) = B_z(r=0).$$

Si ha zero perché non si è concatenata nessuna corrente. Vale per un solenoide infinito.

Facendo una circuitazione uscendo orizzontalmente dal solenoide, si concatenano delle correnti e quindi per  $r > b$  si ha

$$B_z(r=0)L - B_z(r)L = \mu_0 i_{\text{concat.}} = \mu_0 niL.$$

Si concatena una corrente  $i$  che circola in ciascun anello intercettato e si hanno  $nL$  anelli. Dunque, dato che  $B_z(r=0) = \mu_0 ni$ , come trovato precedentemente, segue che  $B_z(r) = 0$ .

Nella realtà, il solenoide ha un campo disperso sopra e sotto, e c'è anche una corrente che scorre verso l'alto. Pertanto, si dovrebbe rappresentare il solenoide come tanti anelli più una corrente verticale.

Si nota che quando si passa attraverso il bordo del solenoide si ha una discontinuità nella componente del campo parallela alla superficie pari a

$$\Delta B_{\parallel} = \mu_0 ni.$$

Per il campo elettrico la relazione è

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

**Solenoide toroidale.** Si può fare un solenoide toroidale per non avere un campo disperso, tuttavia il campo non è più uniforme.

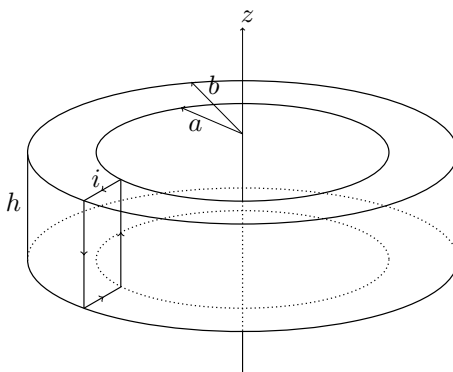


Figure 3: toro

In questo caso  $\vec{B} = B_\theta \hat{u}_\theta$ . Si consideri una sezione del toro. Si supponga che ci sia un campo magnetico in direzione  $z$ . Nel punto diametralmente opposto si ha il campo che punta in verso opposto, tuttavia ruotando il toro si ha ritorna nella situazione iniziale, ma con i versi invertiti e ciò non può essere. Così,  $B_z = 0$  e lo stesso per  $B_r$ .

Trovata la simmetria si utilizza Ampère. Sia  $a$  il raggio interno,  $b$  il raggio esterno e  $h$  l'altezza. Si sceglie un circuito di Ampère circolare di raggio  $r$ . Per simmetria,  $d\vec{l} = r d\theta \hat{u}_\theta$  e dunque:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B_\theta d\theta = B_\theta \oint_c d\theta = B_\theta 2\pi r = \begin{cases} 0, & (r < a \vee r > b) \wedge z \notin [0, h] \\ \mu_0 i N, & \text{all'interno del toro} \end{cases}.$$

con  $N$  avvolgimenti. Dunque

$$\vec{B} = \begin{cases} 0, & \text{esterno} \\ \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}, & \text{interno} \end{cases}.$$

Assomiglia al campo di un filo infinito, ma con campo più intenso. Al di fuori non si ha campo, però all'interno non è uniforme. Ancora, attraversando il bordo si ha una discontinuità.

Le configurazioni possibili per i campi sono solenoidi, toroidi, fili con Biot-Savart per curve integrabili.

immagine

In termini generali, vale una proprietà. Si consideri un foglio sottile di spessore  $d$ . Considerando un tratto  $L$  in cui si ha densità di carica  $J$ , si ha  $i = J L d$ , dove  $\frac{i}{L} = J d$  è definita densità di corrente di strato (o densità di corrente superficiale). Si vuole trovare il campo magnetico dalle due parti della lastra. Si può immaginare che la corrente di strato sia la somma di tanti fili per cui si ha un campo verticale con versi opposti da una parte e dall'altra della lastra. Si consideri un circuito di Ampère che abbracci entrambi i lati della superficie e poi si mandi il circuito ad avere un'altezza trascurabile così che esso prenda il campo appena sopra le due superfici. Dunque, sulla superficie della corrente di strato si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_{+,||} - B_{-,||})L = \mu_0 i_{\text{concat.}} = \mu_0 J L d \implies \Delta B_{||} = \mu_0 K.$$

con  $K = \frac{i}{L} = J d$ .

**Esercizio.** Trovare  $K$  nel caso di un toroide. In un caso  $L = 2\pi a$  e nell'altro  $L = 2\pi b$ .

## Lecture 18

### 9.3 Configurazioni elementari

lun 15 nov  
2021 13:30

[immagine] Quando si ha un circuito percorso da corrente, si è trovata una relazione generale che permette di calcolare il contributo di un tratto  $d\vec{l}$  al campo magnetico  $d\vec{B}(\vec{r})$ :

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Tale relazione è stata trovata utilizzando  $d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A}$ , con

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{r}.$$

Sapendo anche che  $\vec{J} d\nu = i d\vec{l}$ . Il tratto  $d\vec{l}$  non si può vedere come una corrente elementare, perché essa è almeno un anello infinitesimo (dunque puntiforme). Se si pone  $b$  il raggio di tale anello allora si è interessati al campo per  $r \gg b$ . Quindi per calcolare il campo non conviene usare Biot-Savart ma conviene ricavare il potenziale vettore e da ciò ricavare il campo. Si prosegue il calcolo per una geometria semplice e poi si generalizza ad una geometria qualunque.

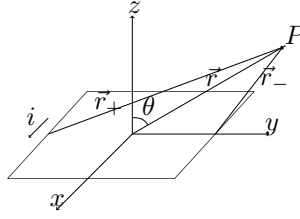


Figure 4: spira-quadrata

**Spira quadrata.** [immagine] Si consideri una spira quadrata di lato  $b$  ed un punto lontano  $P(0, y, z)$ . Quindi, per i lati parallelo ad  $y$  si ha

$$dA_y = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy \hat{u}_y}{r}.$$

La somma sui  $dA_y$  è zero perché le correnti sono uguali ed opposte. Per i lati paralleli ad  $x$ , non si hanno contributi uguali perché i due lati si trovano a distanze diverse:

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \hat{u}_x \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Dato che si è molto lontano, si considerano  $r_+$  ed  $r_-$  costanti, come pure  $\cos \alpha$ . Pertanto

$$r_{\pm} = r \pm \frac{b}{2} \cos \alpha.$$

Dunque

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \hat{u}_x \left( \frac{1}{r + \frac{b}{2} \cos \alpha} - \frac{1}{r - \frac{b}{2} \cos \alpha} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{b \cos \alpha}{r^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \hat{u}_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ib^2 \cos \alpha}{r^2} \hat{u}_x.$$

Inoltre, si ha  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Dunque

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ib^2 \sin \theta}{r^2} \hat{u}_x.$$

Si introduce la grandezza del dipolo magnetico:

$$\vec{m} = ib^2 \hat{u}_z \implies \begin{cases} m = \text{corrente} \cdot \text{area} \\ \text{direzione} \perp \text{piano della spira} \\ \text{verso secondo la regola della mano destra a partire dal verso di } i \end{cases}.$$

Quindi si riscrive il potenziale in forma più comoda:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

**Spira qualunque.** Si generalizza il risultato per una spira qualunque. [rivedi] Per ogni anello interno, le correnti sui lati condivisi si elidono e rimane solamente la corrente esterne. Quindi  $\vec{B}$  in  $P$  è la sovrapposizione di tali spire. La sovrapposizione vale anche per  $\vec{A}$ .

Dunque ponendo  $N$  il numero dei quadrati di area  $b^2$ , si ha

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{Nb^2 \sin \theta}{r^2} \hat{u}_x.$$

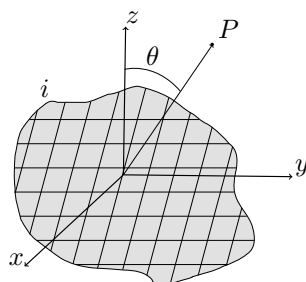


Figure 5: spira-qualunque

Si utilizza  $r$  perché si è nel limite di lontananza, perché infatti non tutti i quadratini sono tecnicamente distanti  $r$ .

Dunque, ponendo  $a$  l'area della spira si ha

$$\vec{m} = ia\hat{u}_z.$$

Pertanto, il risultato finale è

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Essa è simile, ma non identica alla relazione trovata per il dipolo elettrico:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}.$$

Ora si trova il campo magnetico:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Il potenziale vettore  $\vec{A}$  è perpendicolare al piano contenente  $\hat{u}_z$  e  $\hat{u}_r$ . Tale piano ha come vettore normale  $\hat{u}_\varphi$ . Quindi  $\vec{A} = (0, 0, A_\varphi)$ . Pertanto

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2}.$$

Da cui

$$\vec{B} = (B_r, B_\theta, 0).$$

Conoscendo l'espressione del rotore in coordinate sferiche si ha

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \partial_\theta (A_\varphi \sin \theta) - \cancel{\partial_\varphi A_\theta} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} 2 \cos \theta$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \cancel{\partial_\varphi A_r} - \partial_r (r A_\varphi) \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \sin \theta.$$

Pertanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta).$$

L'espressione di un dipolo elettrico ha la stessa struttura quando visti da lontano, mentre localmente sono diversi, perché diverse sono le sorgenti

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta).$$

[immagine] Per i campi magnetici non si hanno dipoli. Inoltre, allontanandosi, il campo magnetico diminuisce come  $\frac{1}{r^3}$ , mentre per il campo elettrico è  $\frac{1}{r^2}$ .

Inoltre, le sorgenti elementari sono monopoli elettrici e dipoli magnetici. Esistono dipoli elementari, irriducibili. Le particelle elementari hanno un dipolo magnetico associato al loro spin. Il campo magnetico deriva da moti di cariche, che sono anche sorgenti irriducibili dove tuttavia non c'è moto di carica.



## Lecture 19

mar 16 nov  
2021 13:30

## 9.4 Moti notevoli

Si vedono dei moti notevoli dovuti alla forza di Lorentz:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Essa ha una dipendenza esplicita dalla velocità, per cui bisogna porre attenzione al sistema di riferimento che è quello in cui si misura  $\vec{B}$ .

In generale, se la velocità è nulla, allora non si ha nessuna forza. Ci si immagina di avere una velocità non nulla. Essa può avere direzione qualunque rispetto al campo magnetico, tuttavia si può sempre scomporre in due componenti: una parallela al campo magnetico ed una perpendicolare:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \hat{u}_{\perp}.$$

Da cui risulta  $F = q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$ ; inoltre si ipotizza che non ci siano campi elettrici  $\vec{E} = 0$  e quindi si ha un moto rettilineo uniforme. Inoltre, la forza trasversa vive nel piano ortogonale a  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ :

$$F = qv_{\perp} B \hat{u}_{\perp}.$$

Si supponga si abbia solo moto dovuto ad una forza trasversa e si supponga che  $\vec{B}$  sia uniforme (in caso contrario  $\vec{F}$  è una funzione della posizione e si ha un moto vario). [immagine] Si ha moto circolare uniforme perché l'accelerazione

$$a = \frac{qv_{\perp} B}{m} \perp v.$$

Infatti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_v) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_v + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_{\perp}.$$

Da cui risulta che cambia solamente il verso, ma non il modulo: cioè un moto circolare uniforme. Dunque, ponendo  $v = v_{\perp}$  si ha

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m} \iff mv = qBR.$$

La quantità di moto è proporzionale al raggio di curvatura, alla carica ed all'intensità del campo magnetico. Inoltre, la velocità angolare risulta essere

$$\frac{v}{R} = \frac{qB}{m} = \omega.$$

Detta frequenza di Larmor ed è la frequenza caratteristica con cui avviene il moto circolare. Considerando anche una componente verticale della velocità diversa da zero. [immagine] Il moto nel piano è circolare uniforme a cui bisogna sovrapporre un moto rettilineo uniforme nella direzione verticale. Quindi

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \varphi) \\ z(t) = v_{\parallel} t + z_0 \end{cases}.$$

Dunque si ha un moto elicoidale. La distanza tra due punti successivi con le stesse coordinate  $x$  e  $y$  è detto passo dell'elica pari a

$$\Delta z = v_{\parallel} T.$$

con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

La descrizione è più complicata quando si considera anche un campo elettrico non nullo. Infatti,

esso può avere una direzione qualunque rispetto al campo magnetico; e lo si divide in due componenti

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \hat{u}_{\perp}.$$

Dato che la forza dovuta al campo elettrico è allineata ad esso; mentre dato che la forza magnetica è trasversa rispetto al campo magnetico; e se  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  allora l'accelerazione dovuta al campo magnetico è [rivedi] Si ha che in  $(x, y)$  il moto è circolare uniforme perché  $q\vec{E} = qE\hat{u}_z$ . Mentre  $z(t) = \frac{1}{2}qEt^2 + v_{\parallel}t + z_0$ , si ha un moto uniformemente accelerato lungo  $z$  e non si può trovare un sistema di riferimento per cui si elimina la componente parallela; inoltre, il passo dell'elica non è costante.

Per un campo elettrico perpendicolare al campo magnetico si ha una combinazione di accelerazioni nello stesso piano.

**Moto cicloide.** Si consideri un campo elettrico  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . Si sceglie  $\vec{E} = E\hat{u}_z$ ,  $\vec{B} = B\hat{u}_x$  e  $v(0) = 0$ .

La particella, ferma nell'origine, comincia a muoversi per effetto del campo elettrico. Quando parte, sviluppa una velocità in  $z$  e quindi si ha una forza di Lorentz nella direzione  $y$ . Più la particella acquisisce velocità, essa viene piegata verso l'asse  $y$  e la forza di Lorentz. Si arriva ad un punto in cui  $F_B > F_E$  e la particella torna verso il basso fino a quando si ferma, e il ciclo ricomincia. Il moto è in direzione [rivedi]

$$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{EB} = \hat{u}_y.$$

Le accelerazioni sono solamente nel piano  $yz$ . La forza elettrica è  $\vec{F}_z = qE\hat{u}_z$ , mentre la forza di Lorentz è  $F_B = -qv_y B\hat{u}_z + qv_z B\hat{u}_y$ . Quindi l'equazione del moto è

$$\begin{cases} m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = qE - qB\dot{y} \end{cases}.$$

Posto  $\omega = \frac{qB}{m}$  si ha

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega\dot{z} \\ \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \end{cases}.$$

Il moto è accoppiato nei due assi. Per disaccoppiarlo, si prende la derivata della prima espressione e la si sostituisce nella seconda espressione:

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega\dot{z} \\ \ddot{y} = \omega^2\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \end{cases}.$$

Si riscrive per ottenere

$$\ddot{y} + \omega^2\dot{y} = \omega^2\frac{E}{B}.$$

Risulta essere l'oscillatore armonico forzato. La cui soluzione particolare e la soluzione dell'omogenea associata sono

$$\dot{y} = \frac{E}{B}, \quad \dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t).$$

Per cui la soluzione è

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{E}{B} \\ \dot{z}(t) = -a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \end{cases}.$$

Dato che la velocità iniziale è nulla si ha  $\dot{z}(0) = \dot{y}(0) = 0$ , per cui

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = a + \frac{E}{B} = 0 \implies a = -\frac{E}{B} \\ \dot{z}(0) = b = 0 \end{cases}.$$

Dunque segue

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{E}{B}(1 - \cos(\omega t)) \\ \dot{z}(t) = \frac{E}{B} \sin(\omega t) \end{cases}.$$

Si integrano queste velocità per trovare la traiettoria

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) + y_0 \\ z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + z_0 \end{cases}.$$

Le condizioni iniziali sono  $y(0) = z(0) = 0$ ; da cui si ottiene

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ z_0 = \frac{E}{\omega B} \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) \\ z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}.$$

Si pone  $R \equiv \frac{E}{\omega B}$  che è una lunghezza, da cui si ottiene

$$\begin{cases} y(t) - R\omega t = R \sin(\omega t) \\ z(t) - R = R \cos \omega t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (y(t) - R\omega t)^2 = R^2 \sin^2(\omega t) \\ (z(t) - R)^2 = R^2 \cos^2(\omega t) \end{cases} \implies (t - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Questa è l'equazione di una circonferenza di raggio  $R$  e centro  $(R\omega t, R)$ . Essa descrive un cicloide con  $z_{\max} = 2R$  che corrisponde a  $\omega t = \pi$  e  $y = \pi R$ . L'osservatore al centro del cerchio vede un moto circolare uniforme, per cui il campo elettrico si elimina. Imparare come si trasformano i campi è utile. Inoltre, se esiste un sistema di riferimento in cui non si ha campo elettrico e ne esiste uno in cui si ha anche campo elettrico allora significa che le trasformazioni di coordinate devono trasformare i campi l'uno nell'altro.

## 9.5 Azioni sui conduttori

Si studia l'azione della forza magnetica sui conduttori. Si osserva il comportamento macroscopico.

**Comportamento macroscopico.** Dalla prima formula di Laplace

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Discende dalla forza di Lorentz applicata alla densità di corrente

$$\vec{J} d\nu = i d\vec{l}, \quad \vec{J} = nq\vec{v}.$$

Essa permette di descrivere un conduttore quando viene considerato come elemento rigido. Osservando quest'ultimi bisogna occuparsi di forze e momenti.

Per le forze si ha

$$\vec{R} = \sum \vec{F}.$$

E per i momenti si ha

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

**Esempio.** [immagine] Si consideri una spira quadrata come precedentemente. Il momento di dipolo magnetico è  $\vec{m} = ib^2 \hat{u}_z$ . Si è scelto  $\vec{B} = B_x \hat{u}_x$ . Per come è allineato il campo magnetico, si ha forza di Lorentz nei due tratti paralleli all'asse  $y$ . Dunque

$$\begin{aligned} F_B^1 &= -ibB_1 \hat{u}_z \\ F_B^2 &= ibB_2 \hat{u}_z. \end{aligned}$$

Se il campo magnetico è uniforme allora la risulta è nulla,  $\vec{R} = 0$ . Inoltre, considerando il campo magnetico uniforme, si hanno le due forze uguali ed opposte, pertanto

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \Delta\vec{r} \times \vec{F}.$$

Con  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ed  $\vec{F} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Dato che  $\Delta r = b$  si ha

$$\vec{\tau} = ib^2 B \hat{u}_\perp = \vec{m} \times \vec{B}.$$

L'interazione magnetica di un dipolo è di questo tipo. [rivedi]

**Comportamento microscopico.** [immaginare] Si consideri un campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{u}_x$  e si ha una corrente  $\vec{J} = nq\vec{v} = \sigma\vec{E}_{\text{conduzione}}$  in direzione  $y$ . Considerando un portatore di carica, questo si muove in un verso in base al segno della carica. Si verifica l'effetto Hall: la presenza di un campo magnetico esterno genera una forza di Lorentz sulle cariche che si stanno muovendo, in questo caso agisce sempre verso  $-z$ . Muovendosi verso il basso, si svuota la parte superiore di cariche e quindi si genera un campo elettrico che si oppone al movimento di cariche fino a raggiungere un equilibrio in cui

$$qE_z\hat{u}_z + q\vec{v} \times \vec{B} = 0.$$

Moltiplicando per  $n$  si ottiene

$$E_z\hat{u}_z = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{nq}.$$

La direzione ed il verso di  $\vec{J}$  sono indipendenti dal segno della carica; tuttavia, nell'espressione del campo elettrico dipende dal segno del portatore di carica. Misurando la direzione del campo elettrico si può risalire a capire che segno hanno i portatori di carica: nei metalli la corrente è trasportata da carica negativa.

Per misurare il campo elettrico si sa che ai capi del conduttore si ha  $\Delta V = E_z d$ .

Si supponga di avere un conduttore cilindrico senza campo magnetico esterno [rivedi]. Se fluisce una corrente  $\vec{J}$  si ha un campo magnetico

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi r} i, & \text{dentro} \\ \frac{\mu_0 J r}{2}, & \text{fuori} \end{cases}.$$

La differenza di potenziale per la sezione del cilindro è trascurabile. [rivedi]

## 9.6 Lavoro della forza di Lorentz

La forza di Lorentz è sempre perpendicolare allo spostamento, dunque il suo lavoro è nullo. Tuttavia, tale situazione non è immediatamente riconoscibile in tutte le configurazioni. Si possono avere dei casi in cui sembra che ciò non avvenga.

immaginare

Si consideri una regione in cui si abbia una regione di campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{u}_y$  ed una regione in cui esso è nullo. Si consideri un circuito alimentato da una batteria.

Si sceglie di far circolare una corrente tale per cui si ha una configurazione di equilibrio. Si ha una forza magnetica verso l'alto bilanciata dalla forza peso

$$F_B = iaB = mg \implies i = \frac{mg}{aB}.$$

Aumentando la corrente, se  $i > \frac{mg}{aB}$  allora la forza di Lorentz è maggiore e quindi sale di un tratto  $\Delta z$ . Il lavoro compiuto su tale sistema per farlo salire è

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F}_B \cdot \Delta\vec{z} = iaB\Delta z.$$

Questo è un lavoro apparente, perché la forza di Lorentz non compie lavoro. Questo lavoro non è compiuto dalla forza di Lorentz. Mentre il filo sale, la velocità con cui si muovono i portatori di

carica non sono solo lungo [rivedi] La velocità effettiva delle cariche è inclinata. Quindi con un campo magnetico che va verso l'interno, segue che la forza di Lorentz è ortogonale alla velocità e si può scomporre in due componenti lungo  $z$  ed  $x$ . Quindi  $\Delta x = v_x \Delta t$ ,  $\Delta z = v_z \Delta t$  da cui segue  $v_x \Delta z = v_z \Delta x$ . Ora, la forza lungo  $z$  è

$$F_z = \Delta q v_x B = iaB, \quad F_x = -\Delta q v_z B.$$

La forza  $F_x$  è diretta lungo il filo, ma in verso opposto a quello in cui circola la corrente. Per far circolare la corrente, la batteria deve vincere tale forza. Dunque

$$W_b = -\vec{F}_x \cdot \Delta \vec{x} = \Delta q v_z B \Delta x = \Delta q v_x B \Delta z = iaB \Delta z.$$

Dunque è la batteria che compie lavoro.

## 9.7 Pressione magnetostatica

[immagine] Si consideri un cilindro cavo di raggio  $R$  con una corrente  $I$  che fluisce attraverso la superficie esterna.

Il campo magnetico all'interno Considerando un circuito di Ampère si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concat.}}$$

Per cui

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}.$$

Dunque si ha una discontinuità di

$$\Delta B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \equiv \mu_0 k.$$

alla superficie. [rivedi] Si ha una pressione magnetostatica che si può calcolare con la formula di Laplace. Si trova l'interazione associato al campo con un quadrato di lato  $L$  sulla superficie del cilindro. Nel quadrato fluisce una corrente  $i$ . La forza che si vuole calcolare è

$$\vec{F} = iL \langle B \rangle \hat{u}_r = kL^2 \langle B \rangle \hat{u}_r.$$

(verso l'interno quindi  $-\hat{u}_r$ ? [rivedi]) Dunque

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{1}{\mu_0} (B_{\text{ext}} - B_{\text{int}}) \frac{B_{\text{ext}} + B_{\text{int}}}{2} = \frac{1}{2\mu_0} (B_{\text{ext}}^2 - B_{\text{int}}^2).$$

[rivedi] I plasmi in campi magnetici subiscono delle pressioni. [rivedi] Questa espressione è una densità di energia. Anche il campo magnetostatico può accumulare energia.

Si immagini di modificare il volume del cilindro comprimendolo sotto l'azione della pressione. Nello spazio prima occupato dal cilindro si crea un campo magnetico [rivedi]

$$p d\nu = \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\nu.$$

In questo caso, sembra che [rivedi] La corrente va verso l'alto, quando si comprime si ha una forza.

Si ritrovano i risultati sull'energia quando si parla di campi variabili e conduzioni?

## Lecture 20

lun 22 nov  
2021 13:30

## 10 Interazioni tra cariche e moto relativo

e trasformazioni dei campi.

Si sa che l'interazione tra la carica ed i campi è descritta da una legge di forza generale

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Questa definizione dipende dal sistema di riferimento a causa della velocità  $\vec{v}$ . Risulta evidente che da questa discende una dipendenza dei campi stessi dal sistema di riferimento.

La definizione del campo elettrico è  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  nel sistema di riferimento in cui  $\vec{v}_q = 0$ . Inoltre, questa definizione operativa non pone nessuna restrizione sullo stato di moto delle cariche sorgenti. Essa pone una restrizione sul moto della carica esploratrice. Tuttavia, non si sa caratterizzare il campo di cariche in moto.

Nella definizione di  $\vec{B}$  compare esplicitamente la velocità definita in un particolare riferimento. Dunque ci si chiede come dipendono i campi da sorgenti in moto; come si trasformano i campi nei sistemi relativi; come si trasforma la forza (perché non è un invariante relativistico). Si analizza tutto questo alla luce del principio di relatività. Esso era noto ai fisici che hanno sviluppato l'elettromagnetismo, ma in questo corso si utilizza il principio di relatività ristretta istituzionalizzato da 116 anni.

**Principio di relatività.** Esso afferma

- Le leggi della fisica (non solo della meccanica come per Galileo) sono invarianti nella forma per ogni sistema di riferimento inerziale (SRI, sacro romano impero).
- La velocità della luce  $c$  è costante in ogni sistema di riferimento.

Si vuole trovare come si trasformano i campi. Le sorgenti sono

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \vec{J} = \frac{dq}{dt dA} \hat{u}_A.$$

Si sa come si trasformano le coordinate spaziali e temporali, ma non si sa come trasforma la carica. Inoltre, per il primo principio, quando si sa come trasformano le sorgenti, allora si possono usare le stesse leggi del caso statico per legare il campo alle sorgenti in movimento.

Le trasformazioni di Lorentz per un sistema di riferimento  $S'$  in moto rettilineo uniforme rispetto un sistema  $S$  lungo l'asse  $x$  con velocità  $\vec{v}$  sono:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma \beta ct \\ ct' = \gamma ct - \gamma \beta x \end{cases}.$$

La trasformazione reciproca è

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma \beta ct' \\ ct = \gamma ct' + \gamma \beta x' \end{cases}.$$

con  $\beta = \frac{v}{c}$  e  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . Due relazioni risultano essere importanti

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}, \quad \Delta t' = \gamma \Delta t.$$

per eventi nello stesso tempo ed eventi nello stesso luogo rispettivamente. Inoltre, esistono anche le relazioni per le coordinate trasverse le quali rimangono invariate.

Per la carica, bisogna rivederne la definizione perché la carica è stata definita in modo contestuale alla legge di Coulomb dove si sono scelte la carica sorgente del campo e la carica esploratrice entrambi statici. Quando si definisce un'interazione del tipo  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  si vincola  $q$  ad essere statica,

ma non si ha nessun vincolo sulla velocità della carica sorgente. Introducendo una definizione elettrostatica della carica, indipendente dalla direzione:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{F}{q}.$$

con  $q$  carica esploratrice, e  $v_Q = v_q = 0$  non si ha nessuna direzione privilegiata, perché la forza dipende dalla congiungente tra le cariche. Ponendosi in un sistema in cui la carica è in moto, non si ha la garanzia che non ci sia una direzione privilegiata. In linea di principio, l'interazione può dipendere dalla direzione relativa.

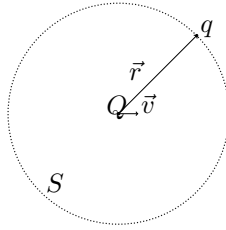


Figure 6: def-carica-relativ

Si può generalizzare la definizione. Si consideri una carica  $Q$  con velocità  $\vec{v}_Q$  rispetto l'osservatore. Si prenda una superficie  $S$  sferica solidale con l'osservatore su cui si pone una carica  $q$ , che ha  $v_q = 0$ . Dunque, la nuova definizione di carica è la media dell'interazione su tutte le direzioni:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \left\langle \frac{F}{q} \right\rangle_S.$$

Tale media si calcola quando la carica  $Q$  si trova al centro di tale superficie  $S$ . Dunque si ha

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \Phi_S(\vec{E}).$$

cioè la legge di Gauss per cui si ha una definizione di carica indipendente dalla direzione. Si trovano due cose:

- nel limite in cui la carica è ferma, tale definizione collassa in quella elettrostatica;
- la relazione scritta esprime in maniera esplicita l'invarianza in forma della legge di Gauss.

Questo non dice come trasforma la carica. Risulta essere un fatto sperimentale che la carica è un invariante relativistico. Una prova sperimentale è considerare l'elio, il quale è un sistema di due protoni e due neutroni. Si consideri anche una molecola con due atomi di deuterio: ha due protoni e due elettroni. Gli orbitali dei due sono diversi, tuttavia sono entrambi neutri con precisione molto alta. Per dieci moli di sostanza si hanno  $10^{24}$  molecole. Facendole uscire si osserva se si ha una carica che si accumula:

$$\Delta Q = N \Delta q.$$

risulta essere neutra in una parte in  $10^{20}$ . Quindi,  $Q$  è lo stesso per ogni sistema di riferimento. Pertanto, interessa solamente la trasformazione del volume.

Tuttavia, la conservazione è diversa dall'invarianza. La conservazione della carica deriva dall'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0.$$

Inoltre, l'energia si conserva per il secondo principio della termodinamica, ma non è un invariante relativistico. L'energia si trasforma come il tempo.

## 10.1 Campo elettrico

Si studia la trasformazione di un sistema semplice e poi si generalizza il risultato.

Si consideri una doppia distribuzione planare con  $\sigma$  uniforme. Si osserva cosa succede quando questa è in moto relativo rispetto ad un osservatore. Si fa l'analisi della componente longitudinale e trasversa rispetto al moto relativo.

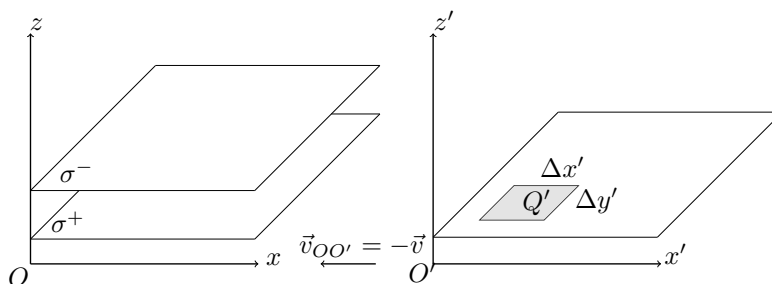


Figure 7: trasf-camp-eletttr

Si consideri un sistema di riferimento  $O$  solidale con le cariche. In tale configurazione si ha un campo elettrostatico pari a

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_z.$$

Si consideri un altro riferimento  $O'$  in cui tali distribuzioni siano in moto con velocità  $\vec{v}$ . Dunque si prende  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$ , velocità di  $O'$  rispetto ad  $O$ . Bisogna calcolare il campo elettrico in tale sistema. Si può calcolare cosa succede alla densità di carica:

$$\sigma' = \frac{Q'}{\Delta x' \Delta y'} = \frac{Q}{\frac{\Delta x}{\gamma} \Delta y} = \gamma \frac{Q}{\Delta x \Delta y} = \gamma \sigma.$$

Quindi tale riferimento vede una densità di carica maggiore. Un corollario di tale formula è che la densità di carica è minima nel sistema di riferimento solidale.

Si può prendere la legge di Gauss e trovare il campo, tuttavia si ha un problema: in  $O$  si sa applicare Gauss perché il sistema presenta delle simmetrie che si possono sfruttare; in  $O'$  si ha una direzione definita dalla velocità delle cariche, non si ha simmetria per rotazione. Non si può assumere una simmetria cilindrica che, in  $O$ , permetteva di assumere che il campo fosse ortogonale. Quello che si può usare è l'invarianza per traslazione che implica l'uniformità. Pertanto, si ha un campo elettrico inclinato rispetto al piano e con tutte le linee parallele. [immagine]

Per principio di sovrapposizione, il campo di ciascuna lastra esiste ovunque nello spazio e si nota immediatamente che

$$\vec{E}' = 0.$$

oltre lo spazio delle lastre. Inoltre, dato che all'interno le linee hanno lo stesso angolo, la componente orizzontale si elide e rimane la componente verticale

$$\vec{E}' = E'_z \hat{u}_z.$$

Ora si sa collegare il campo alle sorgenti. Si considera una superficie gaussiana cilindrica attraverso una delle due lastre. [immagine]

Dunque,

$$\oint_S \vec{E}' \cdot d\vec{a} = E'_z A' = (\text{L.G.}) \frac{Q'}{\epsilon_0}.$$



dove  $Q'$  è la carica contenuta nel cilindro. Pertanto

$$E'_z = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A'} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_z.$$

Si può scegliere una qualsiasi orientazione dei piani fin quando la velocità è parallela ad essi. Per cui la relazione precedente si può generalizzare come

$$E'_\perp = \gamma E_\perp.$$

Tale risultato è vero se  $\vec{B} = 0$  nel sistema di partenza. Per la componente longitudinale si girano i piani. [immagine]

Per cui in  $O$  si ha

$$\vec{E} = E_x \hat{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_x.$$

Considerando un altro riferimento  $O'$  con velocità  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$  si ha che il piano vive in  $\Delta y' \Delta z'$  per cui

$$\sigma' = \frac{Q'}{\Delta y' \Delta z'} = \frac{Q}{\Delta y \Delta z} = \sigma.$$

Si ha invarianza per traslazione e rotazione attorno la velocità, dunque il campo è ortogonale al piano. La legge di Gauss dà lo stesso risultato del sistema  $O$  sostituendo  $\sigma'$ . Infatti, risulta

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_x.$$

La componente longitudinale è invariante. Si studia una configurazione più complicata. Il campo elettrico ha significato locale. Infatti, con la definizione  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  si misura il campo in un punto ignorando la distribuzione delle sorgenti; si può fare tale operazione nel riferimento  $O$  e nel riferimento  $O'$ . Tuttavia,  $O$  ed  $O'$  devono comunicarsi i campi elettrici in maniera indipendente dalla distribuzione delle sorgenti. Questo significa che la relazione trovata per una specifica distribuzione deve valere per tutte le distribuzioni. Se in quel punto si ha un campo elettrico, allora un altro riferimento vede un campo elettrico con componenti

$$\begin{cases} E'_\perp = \gamma E_\perp \\ E'_\parallel = E_\parallel \end{cases}.$$

## Lecture 21

La componente longitudinale è invariante, mentre la componente trasversa si dilata. Tale comportamento è diverso rispetto a come trasformano le coordinate.

Da qua si ricavano i campi elettrici per configurazioni notevoli in cui le cariche sono in moto rispetto al riferimento.

**Carica puntiforme.** Sapendo come si trasforma una carica puntiforme, allora per il principio di sovrapposizione si conosce come trasforma ogni campo. Si considera un campo elettrico  $\vec{E}$  dovuto ad una carica  $Q$  con velocità  $\vec{v}$  costante nel sistema di riferimento. Esiste un riferimento  $O$  solidale con la carica. [immagine]. Il campo ha intensità

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}.$$

si è in un regime elettrostatico. Dato che si conoscono le leggi di trasformazione delle componenti del campo elettrico, si considera che la carica sia in moto lungo l'asse  $x$ . Dunque

$$\begin{cases} E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2+z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}.$$

Si sceglie un riferimento  $O'$  in moto con velocità  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$  per cui in  $O'$  risulta che la carica  $Q$  è in moto con velocità  $\vec{v}$ . Si valuta il campo quando la carica si trova sull'origine  $O'$ . Inoltre si ha

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma \beta ct' \\ z' = z \end{cases}.$$

Pertanto,  $z$  rimane costante, mentre per  $x$  bisogna tenere conto di un fattore  $\gamma$ . Si sceglie l'asse del riferimento di modo che l'origine dei tempi sia esattamente nel momento in cui la carica passa per l'origine  $O'$ , dunque  $t' = 0$ . Pertanto,  $x = \gamma x'$ . Quindi, si ha l'espressione per i campi

$$\begin{cases} E'_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E'_z = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}.$$

Le due espressioni sono identiche. Risulta che

$$\frac{E'_z}{E'_x} = \frac{z'}{x'}.$$

cioè la tangente dell'angolo con l'asse  $x$ , pertanto il campo è radiale.

Tuttavia, il campo non è centrale: il modulo  $E'$  non dipende solamente da  $r'$ , ma dipende anche dall'angolo  $\theta'$ . Infatti

$$\begin{aligned} (E'_x)^2 + (E'_z)^2 &= \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(\gamma x')^2 + (\gamma z')^2}{((\gamma x')^2 + (z')^2)^3} = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\gamma^2 (r')^2}{[\gamma^2 ((x')^2 + (z')^2) + (1 - \gamma^2)(z')^2]^3} \\ &= \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\gamma^2 (r')^2}{(\gamma r')^6 [1 - \beta^2 \frac{(z')^2}{(r')^2}]^3} \Rightarrow E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r')^2} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta']^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Il campo dipende dal reciproco del quadrato della distanza; ha un fattore che dipende dalla trasformazione; ed ha una dipendenza angolare nella sua intensità. Non è un campo centrale, perché l'intensità non è uniforme a tutti gli angoli. Si ha campo elettrico  $E'$  massimo per  $\theta' = \pm \frac{\pi}{2}$ , mentre  $E'$  è minimo quando  $\theta' = k\pi$ . Nel limite  $\beta \rightarrow 1$ , il campo tende tutto nella direzione di campo massimo.

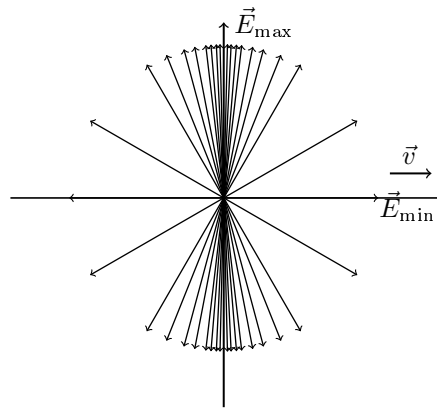


Figure 8: campo-elettrico-puntiforme-relativistico

Inoltre, tale campo non è conservativo. [immagine] Considerano un percorso con due archi si ha

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}' \cdot d\vec{l}.$$

dove il secondo ed il quarto integrale sono zero perché il campo elettrico è parallelo allo spostamento. I due integrali rimanendo non si elidono perché l'intensità del campo sui due percorsi è diverso. Una carica stazionaria ha un campo elettrico associato che non è elettrostatico, ha proprietà differenti: è radiale, ma non è centrale quindi non è conservativo. Sembra esserci una violazione apparente del principio di causalità. Infatti, si afferma che il campo associato ad una carica nel centro di  $O'$  ha la forma in figura, per cui

$$\vec{E} = \vec{E}(r', \theta').$$

Significa che  $r'$  e  $\theta'$  sono coordinate qualunque in tutto lo spazio. Tuttavia, la carica è in moto, dunque quando si trova in una nuova posizione, con lo stesso procedimento si scelgono degli assi centrati in quel punto, si opera la stessa trasformazione e si ritrova lo stesso campo in tutto lo spazio: la carica si trascina dietro il campo elettrico, anche a distanza infinita. Non c'è violazione di causalità perché il moto viene a velocità costante: l'informazione sulla la posizione futura è disponibile a tutti gli osservatori a tutti i tempi e tale posizione è prevista da ciascuno senza incertezze.

**Moto variabile.** Se il moto è variabile il campo non può essere come visto dappertutto. Si consideri una configurazione di moto variabile. Si consideri

$$\begin{cases} \vec{v} \neq 0, & t < 0 \\ a \neq 0, & t \approx 0 \\ \vec{v} = 0, & t > 0 \end{cases}.$$

La carica  $Q$  ha una certa velocità e poi si ferma. Un osservatore che vede la carica ferma, nota che il campo è radiale con le linee distribuite uniformemente sull'angolo. L'informazione che la carica si è fermata non ha raggiunto tutti gli osservatori istantaneamente. Per un tempo  $t > 0$ , tale informazione ha percorso una distanza  $R \leq ct$ . Dunque, all'interno di una regione di raggio  $R = ct$  gli osservatori sanno che la carica si è fermata. Per quelli fuori non è così e pensano che la carica sia proseguita con il proprio moto. In base all'informazione che  $\vec{v} \neq 0$  per  $t < 0$ , gli osservatori esterni presumono che la carica abbia continuato per un tratto  $\vec{v}t$ .

Siccome non ci sono cariche sulla superficie che separa gli osservatori segue che le linee di campo devono avere continuità. Pertanto, compare un campo  $\vec{E} = E\hat{u}_\theta$  rispetto al punto in cui si è fermata la carica. Si ha un campo stazionario esterno associato al moto della carica, un campo stazionario interno associato alla carica fissa ed un fronte sferico con un campo trasverso che si allarga all'infinito: esso è un campo di radiazione, si ha un'onda elettromagnetica.

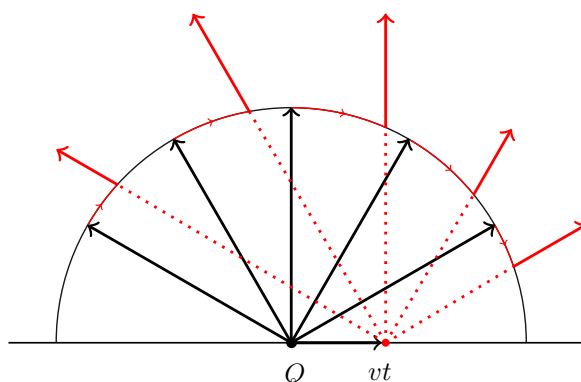


Figure 9: cmp-elettr-puntiforme-rel-moto-variabile

**Esempio.** Si vede un altro campo notevole con un filo infinito in moto con velocità  $\vec{v}$  lungo l'asse e densità di carica  $\lambda$  nel laboratorio. Si può trovare il campo in due modi

- ci si mette nel riferimento delle sorgenti, si conosce il campo elettrostatico di tale configurazione e quindi si può trasformare il campo in quello del laboratorio;
- si capisce la simmetria del campo in una configurazione in cui le cariche sono in moto e poi si usa la legge di Gauss perché è invariante in forma.

Con il secondo modo, per qualunque punto che si individua, si hanno due elementi di carica  $dq$  e  $dq'$  simmetrici rispetto al punto considerato. Essi hanno un campo di una carica in moto come visto sopra: molto dense nella perpendicolare e più rade lungo la parallela. Sulla verticale del punto considerato, le componenti assiali dei campi dovuti ai due elementi di carica considerati si elidono e le componenti trasverse si sommano. Il campo è solamente radiale.

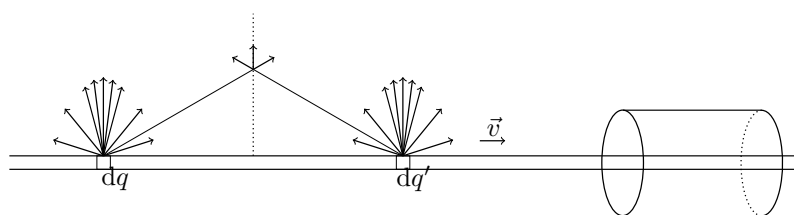


Figure 10: filo-infinito-relativistico

Dunque, si considera una superficie di Gauss cilindrica attorno al filo e ne si calcola il flusso attraverso:

$$E(r)2\pi rL = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}L \implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Utilizzando il primo modo, si prende un riferimento comovente con le sorgenti. Si ha un filo statico con una densità  $\lambda_0$  ed il campo elettrostatico è

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'} = \frac{\frac{\lambda}{\gamma}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'}.$$

con  $r' = r$  perché direzioni trasverse. Dato che  $E_{\text{lab}} = \gamma E$  allora risulta che

$$E_{\text{lab}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

L'interazione tra le cariche è una forza, cioè un prodotto tra una carica ed un campo. Si studia l'interazione tra le carica in sistemi in cui la carica esploratrice e le cariche sorgenti sono in moto relativo

**Interazione tra cariche in moto.** [immagine] Si considerino una carica  $q$  ed una distribuzione planare  $\sigma$  fisse. Tale configurazione è elettrostatica, quindi

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_z, \quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Non si hanno fenomeni magnetici.

Si consideri una seconda configurazione in cui si ha una distribuzione planare  $\sigma$  fissa ed una carica  $q$  in moto. Un'altra configurazione è quella per la quale è in moto il piano e la carica è fissa. Un'ultima configurazione è quella in cui sia il piano che la carica sono in moto con la stessa velocità; tale configurazione è analoga alla prima, semplicemente ci si trova in un sistema di riferimento in moto. Similmente per la seconda e la terza configurazione.

**Analisi della seconda configurazione.** Nel riferimento  $O$  si sa che

$$\begin{cases} E_{\parallel} = 0 \\ E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases}.$$

Inoltre, dato che le sorgenti sono statiche, si può pensare che la forza sia  $F = qE$ . Tuttavia, la definizione di interazione elettrica è stata data nel limite statico (della carica esploratrice?). Si consideri un riferimento  $O'$  solidale con la carica  $q$ . In  $O'$ , la forza  $\vec{F} = \vec{F}'_E = q\vec{E}'$  perché  $q$  è a riposo. Inoltre,  $E' = E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ . Quindi  $F' = \gamma q E_{\perp}$ . Per confrontarla con la definizione  $F = qE$  si vede come trasformano le forze.

**Trasformazione della forza.** Nel riferimento comovente con un punto di massa  $m_0$ . Si consideri una forza  $\vec{F}$  in tale riferimento  $O$ . Si vuole trovare la forza  $\vec{F}'$  in un riferimento in moto relativo. Quindi, si studia cosa succede alla massa  $m_0$  quando soggetta a tale forza. In un tempo  $dt$  si ha

$$d\vec{p} = \vec{F} dt, \quad dE = \frac{(dp)^2}{2m_0} = \frac{F^2}{2m_0} dt^2.$$

l'energia è al secondo ordine in  $dt$ . Dato che la massa si è messa in moto allora cambia anche la posizione:

$$dx = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} dt^2.$$

che è anch'esso al secondo ordine in  $dt$ . Nel riferimento  $O'$  in moto relativo si ha

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \Rightarrow \begin{cases} F'_{\perp} = \frac{dp'_{\perp}}{dt'} = \frac{dp_{\perp}}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} \sim \frac{1}{\gamma} F_{\perp} \\ F'_{\parallel} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt} = \frac{\gamma dp_{\parallel} - \gamma\beta c dt}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = F_{\parallel} \end{cases}.$$

si trascura il termine al secondo ordine  $\frac{\gamma\beta}{c} dx$  perché gli infinitesimi sono prossimi a zero. Quindi tornando nel riferimento  $O$  si ha  $F = \frac{1}{\gamma} F'$  per cui  $F = \frac{1}{\gamma} F' = \frac{1}{\gamma} \gamma q E_{\perp} = q E_{\perp}$  che è l'espressione della forza in  $O$  scritta precedentemente. (In questo caso  $F$  è la forza sulla carica nel riferimento  $O$  cioè quello in cui la carica si muove, mentre  $F'$  è la forza, che è solamente elettrica, nel riferimento  $O'$  che si muove con la carica; la scelta di posizionare l'apice è alquanto infelice, perché opposta alla trattazione appena fatta sulla trasformazione della forza, sebbene si continui ad utilizzare l'apice per il riferimento in moto).

Quando ci si pone nella configurazione seconda e osservando i campi usando le loro trasformazioni, si scopre quanto si è già commentato nell'analisi dell'elettrostatica come evidenza empirica: cioè la definizione di campo elettrico ha la carica esploratrice ferma, ma quando essa è in moto si ha evidenza che i moti delle cariche sono uniformemente accelerati. Quindi, l'interazione del campo elettrico con una carica, in assenza di campi magnetici, è esattamente  $\vec{F} = q\vec{E}$  cioè l'interazione elettrica non dipende dallo stato di moto della carica, è indipendente dalla velocità.

Il sistema tre è analogo al sistema due a meno di un cambio di coordinate. Quindi in queste due situazioni la forza è solamente elettrica.

**Analisi della quarta configurazione.** [immagine] La prima configurazione è pari alla quarta configurazione considerato  $\vec{v}_{OO'} = -\vec{v}$ . Pertanto, nel riferimento  $O$  si ha

$$\vec{E} = E_z \hat{u}_z = E_{\perp} \hat{u}_z, \quad \vec{F} = q E_{\perp} \hat{u}_z.$$

La forza è solamente elettrica. Nel riferimento  $O'$  si ha

$$E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}, \quad F'_E = q E'_{\perp} = \gamma q E_{\perp}.$$

la forza elettrica è su di una carica esploratrice a riposo in  $O'$ . Dunque, la forza totale in  $O'$  è

$$F' = \frac{1}{\gamma} F = \frac{1}{\gamma} q E_{\perp} \hat{u}_z \neq F'_E.$$

Le due forze sono differenti, la cui differenza è data dalla forza magnetica

$$F'_B = F'_{\text{tot}} - F'_E = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) qE_{\perp} = -\gamma\beta^2 qE_{\perp} = -qv \frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp}.$$

Si interpreta tale espressioni in termini di campo magnetico  $B$  diretto lungo  $y$  per cui

$$\vec{B} = -\frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp} \hat{u}_y.$$

Inoltre

$$\vec{F} = qv\hat{u}_x \times \left(-\frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp}\right) \hat{u}_y = -qv \frac{\gamma\beta}{c} E_{\perp} \hat{u}_z = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

L'interazione, in un riferimento, tra un piano di cariche in moto, che è di fatto una corrente, con una carica in moto — configurazione che in un altro riferimento è puramente elettrostatica — si interpreta, in un riferimento in cui sono entrambi in moto, in termini di un campo magnetico che deriva dalla trasformazione del campo elettrico e possiede una struttura della forza pari a quella che si è introdotta con la forza di Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dunque, il campo magnetico è una manifestazione del campo elettrico in un altro sistema di riferimento.

In questo modo si rivela anche una parte della trasformazione dei campi elettromagnetici. Si mette in evidenza il fatto che i fenomeni magnetici sono prescritti e resi necessari dal principio di relatività e dall'invarianza della carica.

Si spinge il confronto oltre e si rende esplicita l'espressione della forza tenendo conto il valore del campo  $E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  e sapendo che il riferimento  $O'$  della configurazione quarta, che interpreta tali fenomeni in termini magnetici, attribuisce a tale campo l'intensità  $\vec{B} = \frac{\mu_0 k}{2}$  con  $k$  corrente di strato (o superficiale). Dunque, dall'espressione trovata per il campo magnetico segue

$$B = \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{v\gamma\sigma}{2c^2\varepsilon_0} \equiv \frac{\mu_0 k}{2}.$$

Si vuole che la descrizione fenomenologica che si è data dei fenomeni magnetici coincida con  $\frac{\mu_0 k}{2}$ . Si studia la corrente di strato. Si consideri una superficie di lato  $L$  con densità superficiale  $\sigma'$  e che si muove con velocità  $\vec{v}$ . Allora, il lato parallelo alla velocità è  $v dt$  e dunque la quantità di carica contenuta nella superficie passa attraverso il bordo perpendicolare la superficie nell'intervallo di tempo  $dt$ . [immagine] Quindi

$$I = d_t q = d_t (\sigma' L v dt) = L \sigma' v.$$

(manca un differenziale da qualche parte).

La corrente di strato è una corrente per unità di lunghezza, dunque

$$k = \frac{I}{L} = \sigma' v.$$

Si utilizza  $\sigma'$  perché l'osservatore che interpreta il fenomeno come magnetico è  $O'$  cioè quello che vede il piano e la carica muoversi. Mentre,  $\sigma$  la densità di carica è nel riferimento in cui le sorgenti sono fisse. Nel riferimento comovente, la densità di carica è minima, quindi

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\gamma}.$$

pertanto

$$B = \frac{v(\gamma\sigma)}{2c^2\varepsilon_0} = \frac{v\sigma'}{2c^2\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 k}{2}.$$

Tramite tale trasformazione si ha il campo magnetico misurato dall'osservatore  $O'$  purché si abbia

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} \implies c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Il principio di relatività non solo prescrive l'insorgenza dei fenomeni magnetici, ma anche che le costanti  $\mu_0$  ed  $\varepsilon_0$  siano legate tra loro tramite la velocità della luce. Tale uguaglianza è stata storicamente trovata da Maxwell che osservò come nelle soluzioni ad onde delle equazioni del campo elettromagnetico compare una velocità di propagazione.

**Esercizio.** Si considerino due cariche puntiformi in moto con stessa velocità  $\vec{v}$  a distanza  $d$  in un riferimento  $O$ . Si trovi l'interazione tra le due cariche. Il meccanismo è mettersi nel riferimento solidale  $O'$  con le cariche e trasformare nel sistema  $O$  per cui si ha:

$$F_E = \gamma q E_\perp$$

$$F_{\text{tot}} = \frac{1}{\gamma} q E_\perp.$$

## Lecture 22

lun 29 nov  
2021 13:30

In alcune configurazioni particolari, il campo magnetico si può interpretare come una manifestazione della forza elettrica. Si interpretano gli esperimenti di Ørsted, Biot-Savart ed Ampère alla luce dei risultati fin'ora ottenuti. Si studia l'interazione tra correnti e cariche in moto. Ci si pone nel riferimento in cui la carica è fissa — la forza è solo elettrica — e poi si utilizzano le trasformazioni per tornare al riferimento del laboratorio e si studia cosa succede alla forza. Si sa

$$\begin{cases} \vec{F}'_\perp = \frac{1}{\gamma} \vec{F}_\perp \\ F'_\parallel = F_\parallel \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}'_\perp = \gamma \vec{E}_\perp \\ E'_\parallel = E_\parallel \end{cases}.$$

questo vale per  $\vec{B} = 0$ . (Il primato indica il riferimento in moto relativo).

**Carica e filo.** Si sceglie una configurazione semplice. [immagine] Si consideri un filo metallico attraversato da una corrente  $I = v_0 \lambda_0$ : gli elettroni sono in moto con una velocità  $\vec{v}_0$  rispetto al riferimento del laboratorio,  $O$ . Mentre le cariche positive sono fisse. Si sceglie il piano  $xy$  tale che contenga una carica  $q$  con velocità  $\vec{v}$  lungo l'asse  $x$ . Le grandezze sono

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = v_0 \hat{u}_x \\ \vec{v} = v \hat{u}_x \end{cases}.$$

Inoltre, nella configurazione del laboratorio, il filo è neutro: una carica statica non interagisce in modo elettrostatico con la corrente. Un filo neutro implica che le densità di carica lineica dovute ai cationi ed agli elettroni sono uguali ed opposte:  $\lambda_\pm = \pm \lambda_0$ .

Il riferimento  $O$  è quello proprio dei cationi, ma non quello degli elettroni perché sono in moto. Nel riferimento proprio degli elettroni, la densità di carica degli elettroni è diversa da  $\lambda_0$  e vale  $\lambda_e = -\frac{\lambda_0}{\gamma_0}$  perché nel riferimento proprio le lunghezze sono massime e le densità sono minime; dove

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}.$$

è il fattore di Lorentz necessario per spostarsi nel riferimento proprio degli elettroni e quindi deve essere associato alla loro velocità.

Nel riferimento  $O'$  in cui  $q$  è a riposo si hanno solo forze elettrostatiche. Il riferimento  $O'$  si muove con  $q$  a velocità  $\vec{v}_{OO'} = \vec{v}$  e, quindi, le cariche positive si muovono con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}$  ed hanno densità di carica dovuta al moto relativo pari a

$$\lambda'_+ = \frac{dq'}{dx'} = \gamma \frac{dq}{dx} = \gamma \lambda_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Gli elettroni si muovono con una composizione delle velocità  $\vec{v}_0$  e  $-\vec{v}$ :

$$\vec{v}'_0 = \frac{\vec{v}_0 - \vec{v}}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} \implies \beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta \beta_0}.$$

La densità degli elettroni in questo nuovo riferimento  $O'$  è

$$\lambda'_- = \gamma'_0 \lambda_e = \gamma'_0 \frac{\lambda_0}{\gamma_0} \neq \lambda'_+.$$

Nel riferimento  $O'$ , il filo ha densità di carica non nulla e quindi genera un campo elettrico:  $\lambda' \neq 0$ . Si ha un campo elettrico in  $O'$ :

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}.$$

Si trova l'espressione completa di  $\lambda'$  e per farlo si trova  $\gamma'_0$ . Infatti

$$\begin{aligned} \gamma'_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta'_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\beta_0 - \beta)^2}{(1 - \beta\beta_0)^2}}} = \frac{1 - \beta\beta_0}{\sqrt{1 - 2\beta\beta_0 + (\beta\beta_0)^2 - \beta_0^2 + 2\beta\beta_0 - \beta^2}} \\ &= \frac{1 - \beta\beta_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_0^2)}} = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0). \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lambda'_- = \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} \lambda_0 = \gamma(1 - \beta\beta_0) \lambda_0.$$

La densità che si cerca è

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \gamma\lambda_0 - \gamma(1 - \beta\beta_0)\lambda_0 = \gamma\beta\beta_0\lambda_0 > 0.$$

Si ha un filo con densità di carica positiva nel riferimento  $O'$  solidale con la carica. Se questa ha lo stesso segno del filo allora sente una forza repulsiva; attrattiva altrimenti. Tale forza è trasversa rispetto alla direzione delle trasformazioni, perché il campo elettrico del filo risulta essere

$$E'_\perp = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}.$$

ed è diretto radialmente a partire dal filo. Esso è un campo trasverso rispetto la direzione del moto. Dunque, si ha

$$F'_\perp = qE'_\perp.$$

Si ritorna nel riferimento del laboratorio e si ha

$$F_\perp = \frac{1}{\gamma} F'_\perp = q \frac{\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} = \frac{qv(v_0\lambda_0)}{c^2\epsilon_0 2\pi y} = qv \left( \frac{I}{c^2\epsilon_0 2\pi y} \right).$$

e, per una carica positiva, la forza è diretta come  $-\hat{u}_y$ , con  $\vec{v} = v\hat{u}_x$ . Quindi, si interpreta il termine tra parentesi come un campo magnetico:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2\epsilon_0} \frac{I}{2\pi y} \hat{u}_z = \frac{1}{c^2\epsilon_0} \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\theta.$$

(si sostituisce  $y$  con  $r$  perché l'asse  $y$  è un asse trasverso qualunque e dunque la direzione ortogonale risulta essere  $\theta$ ). Ricordando  $\hat{u}_x \times \hat{u}_z = -\hat{u}_y$ , si ottiene nuovamente

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

In questo si ha anche una convenzione di segno. Inoltre, si ha  $c^2\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0}$ . Si ottiene il campo di Biot-Savart. Il campo stabilito per via empirica coincide con il campo che si trova in un sistema di questo tipo partendo dalla configurazione elettrostatica, supponendo valido il principio di relatività e valida l'invarianza della carica.



**Fili paralleli.** [immagine]

Si considerino due fili paralleli. Nel laboratorio, in uno le cariche negative si muovono con velocità  $\vec{v}_1$  a densità  $\lambda_1$  e nel secondo filo le cariche negative si muovono con  $\vec{v}_2$  a densità  $\lambda_2$ . Si studia la forza tra i due fili. Sempre nel laboratorio, essi sono neutri, quindi le cariche positive non risentono l'effetto di alcuna forza a causa dell'altro filo. Dunque, l'unica interazione possibile è sulle cariche in moto. Ci si pone in un riferimento in cui i cationi sono in moto, ma si ignorano perché operando la trasformazione verso il laboratorio, si sa già essere fissi e non agisce alcuna forza su loro. Quindi si calcola solamente la forza sugli elettroni.

Ci si pone nel riferimento solidale con gli elettroni del filo primo. Sugli elettroni, in questo riferimento fissi, agisce il campo elettrico dovuto alla densità di carica degli elettroni dell'altro filo pari a:

$$\lambda'_2 = \gamma_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_2.$$

Quindi, la forza che agisce sulla carica del filo primo dovuta a tale densità è

$$F' = \frac{\gamma_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} q_1.$$

con  $r$  distanza tra i due fili. Questa espressione è il campo dovuto al filo secondo per la carica degli elettroni nel filo primo. Ritornando nel riferimento del laboratorio si ha

$$F = \frac{\beta_1 \beta_2 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1 l}{r} = \frac{1}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{v_1 \lambda_1 v_2 \lambda_2}{r} l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} l.$$

con  $q_1 = \lambda_1 l$ , per  $l$  un tratto di filo. Si ottiene l'espressione di Laplace per l'interazione tra due fili.

Il campo magnetico non è una manifestazione separata dai fenomeni magnetici anche se non è possibile descrivere tutti i fenomeni solo in forma elettrica.

**Filo percorso da corrente.** [immagine]

Si consideri un filo percorso da corrente come nella situazione precedente. Si sceglie una carica  $q$  con una velocità  $\vec{v}$  perpendicolare verso il filo. Il caso generale si può ridurre ad uno con velocità parallela e velocità perpendicolare. Nel filo, le cariche negative si muovono con velocità  $\vec{v}_0$ , mentre i cationi sono fissi.

Nel riferimento della carica, il filo si muove verso la carica con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}$  e gli elettroni si muovono con una velocità  $\vec{v}_0 - \vec{v}$ . In tale riferimento, si ha il campo elettrico di una carica in moto. Si sa che tale campo elettrico è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{\frac{3}{2}}}.$$

l'intensità del campo non è uniforme nell'angolo. Prendendo coppie di elettroni simmetrici rispetto alla carica, l'angolo formato a destra è maggiore rispetto a quello formato a sinistra. Dunque, il campo a destra è maggiore di quello a sinistra; pertanto la risultante ha una direzione verso destra.

Tuttavia, nel riferimento  $O$ , con il campo magnetico diretto come  $z$ , ci si aspetta che la forza sia parallela al filo. Infatti, scomponendo la forza ottenuta in componenti parallela  $\vec{F}_{\parallel}$  e perpendicolare  $\vec{F}_{\perp}$  alla velocità con cui si è fatta la trasformazione tra i riferimenti. La forza che si è calcolata è quella dovuta agli elettroni; tuttavia, agisce anche una forza dovuta ai cationi: dato che essi sono fissi, si sviluppa una forza la cui intensità è uguale ed opposta alla componente parallela della forza prodotta dagli elettroni del filo. Questo perché il filo è neutro nel riferimento del laboratorio e dato che ci si sposta ortogonalmente al filo, non si ha una contrazione della lunghezza, quindi le densità di carica positiva e negativa sono le stesse nei due riferimenti. Quindi, la forza totale è dovuta al fatto che il campo elettrico a destra ed a sinistra non è uguale per le cariche in moto.

La descrizione efficace tramite il campo magnetico è equivalente a quanto visto. In conclusione,

per l'invarianza della carica e per il principio di relatività, l'espressione della forza in un riferimento qualunque può essere rappresentata come

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

dove il primo termine è il campo definito operativamente per una carica esploratrice fissa, mentre il secondo è il termine residuo quando la carica esploratrice è in moto.

Nelle sorgenti reali, il filo dev'essere chiuso (perché finito), dunque la velocità cambia direzione e quindi non esiste mai un riferimento in cui si hanno a riposo tutte le cariche contemporaneamente: è necessario lavorare con un campo magnetico. La manifestazione di un fenomeno come elettrico o magnetico dipende dal riferimento.

A conclusione di quest'analisi, esistono configurazioni elettrostatiche, esistono configurazioni magnetostatiche, ma di fatto esiste sempre e solo un campo elettromagnetico in cui le componenti elettriche e magnetiche sono accoppiate e dipendono dal sistema di riferimento.

## Lecture 23

mar 30 nov  
2021 13:30

Si estende l'analisi e si vede come trasforma il campo magnetico. Si considera una configurazione in cui si ha anche campo magnetico. [immagine] Si considera il riferimento del laboratorio in cui sono presenti due piani infiniti con densità di carica  $\sigma$  del laboratorio uguale ed opposta. I piani sono in moto con velocità costante  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{u}_x$ : essa è anche la velocità delle cariche nel riferimento del laboratorio. Si ha un campo elettrico

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

lo spostamento del piano non influisce sulla disposizione delle cariche. [rivedi]

Inoltre, a causa del moto si ha una densità di corrente

$$J = d_t q = d_t(\sigma L v_0 dt) \implies \frac{I}{L} = \sigma v_0 \equiv K.$$

Quindi il campo magnetico dentro è rivolto verso l'alto, mentre fuori si ha campo nullo:

$$B_z = \mu_0 K = \mu_0 v_0 \sigma.$$

Si vogliono trovare i campi in un riferimento in moto relativo che non è il riferimento proprio. In questi la densità di carica è

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}.$$

Si sceglie un riferimento  $O'$  in moto con velocità  $\vec{v} = v \hat{u}_x$  e si studiano le trasformazioni. In particolare, si studiano le componenti trasverse dei campi. Si trova la densità delle cariche e delle correnti del nuovo sistema, per poi usare le leggi che legano i campi alle sorgenti.

Nel nuovo riferimento le sorgenti sono in moto con una velocità

$$\vec{v}'_0 = \frac{\vec{v}_0 - \vec{v}}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} \iff \beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta \beta_0}, \quad \gamma'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2_0}} = \gamma_0 \gamma (1 - \beta \beta_0).$$

Dunque la densità areica in  $O'$  risulta essere

$$\sigma' = \gamma'_0 \frac{\sigma}{\gamma_0} = \gamma (1 - \beta \beta_0) \sigma.$$

Si studia la densità di corrente di strato

$$K' = v'_0 \sigma' = \beta'_0 c \sigma' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta \beta_0} \gamma (1 - \beta \beta_0) c \sigma = \gamma (\beta_0 - \beta) c \sigma.$$

Si studia il campo elettrico. Per Gauss risulta

$$E'_y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \gamma(1 - \beta\beta_0) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_y - \gamma\beta \frac{v_0\sigma}{\varepsilon_0 c} = \gamma E_y - \gamma\beta c B_z.$$

Si studia il campo magnetico. Si considera un circuito di Ampère che abbraccia le due regioni di una lastra. Da un riferimento all'altro, la simmetria del campo rimane, cambia solamente l'intensità della corrente, perché cambia la velocità della corrente. Quindi

$$B'_z = \mu_0 K' - \mu_0 \gamma (\beta_0 - \beta) c v = \mu_0 c \gamma \frac{v_0}{c} \sigma - \mu_0 c \gamma \beta \sigma = \gamma B_z - \gamma \frac{\beta}{c} E_y.$$

Riassumendo si ha

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y - \gamma\beta c B_z \\ c B'_z = \gamma c B_z - \gamma\beta E_y \end{cases}.$$

Si mescolano  $B_z$  e  $E_y$  passando dall'uno all'altro riferimento. [rivedi]

Si consideri una configurazione come prima, ma con i campi paralleli a  $xy$ . Nel riferimento del laboratorio si ha

$$\begin{cases} E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ B_y = -\mu_0 K \end{cases}.$$

Dunque, per il campo elettrico

$$\begin{cases} E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma(1 - \beta\beta_0) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_z + \gamma\beta c B_y \\ B'_y = \mu_0 K' = \gamma B_y + \gamma \frac{\beta}{c} E_z \end{cases}.$$

Per le componenti ortogonali al moto relativo si ha

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y - \gamma\beta c B_z \\ E'_z = \gamma E_z + \gamma\beta c B_y \end{cases} \quad \begin{cases} c B'_y = \gamma c B_y + \gamma\beta E_z \\ c B'_z = \gamma c B_z - \gamma\beta E_y \end{cases}.$$

[rivedi] Si studia la componente longitudinale di  $\vec{B}$ . [immaginare] Si consideri un solenoide infinito. Nel riferimento del laboratorio si ha

$$\vec{B} = B_x \hat{u}_x, \quad B_x = \mu_0 \frac{N}{L} I.$$

Si consideri un riferimento  $O'$  in moto relativo con velocità  $\vec{v}_{OO'}$  lungo l'asse  $x$ . Il numero  $N$  è invariante. La lunghezza  $L$  è longitudinale rispetto lo spostamento, dunque si contrae  $L' = \frac{L}{\gamma}$ .

La corrente  $I' = d_t q' = \frac{dq}{\gamma dt} = \frac{1}{\gamma} I$ . Dunque, per Ampere si ha

$$B'_x = \mu_0 \frac{N}{L'} I' = \mu_0 \frac{N}{L} I = B_x.$$

Dunque, in questo caso il campo magnetico risulta essere invariante. Dunque le componenti sono

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x.$$

Si riscrivono le componenti in forma compatta:

$$E_x = E_{\parallel}, \quad E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z = \vec{E}_{\perp}.$$

ed analogamente per  $\vec{B}$ . Pertanto,

$$E'_y \hat{u}_y + E'_z \hat{u}_z = \gamma(E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z) + \gamma\beta c(-B_z \hat{u}_y + B_y \hat{u}_z) = \gamma \vec{E}_{\perp} \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}.$$

Quando la velocità è lungo  $x$  si ha che la componente  $z$  del campo magnetico va a finire sulla componente  $y$  del campo elettrico e ciò è il prodotto vettoriale. Dunque, la forma compatta risulta essere

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \gamma E_{\perp} + \gamma(\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ B'_{\perp} = \gamma B_{\perp} - \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{cases}.$$

Questo è un tensore.

Si studia il campo di una carica puntiforme  $q$  in moto con velocità  $\vec{v}$  nel riferimento del laboratorio. Si è imparato a calcolare il campo da correnti stazionarie tramite Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Molti hanno la tentazione di affermare che  $i d\vec{l} = d_t q d\vec{l} = dq d_t \vec{l} = dq \vec{v}$ , ma isolando una carica non valgono più le ipotesi di partenza per cui si ottiene l'equazione precedente.

In questa configurazione si trova il campo elettrico nel riferimento solidale con la carica e poi si trasforma al riferimento del laboratorio. Nel riferimento solidale si ha

$$\begin{cases} \vec{B} = 0 \\ E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \end{cases}.$$

Trasformando nel riferimento del laboratorio in moto con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}$  si ha

$$\begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ B'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp} + \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{cases}.$$

Dato che  $\vec{v} \times \vec{E}_{\parallel} = 0$  si ha

$$\vec{B}' = \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}) = \gamma \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_r}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Questa espressione è identica a Biot-Savart dove si identifica  $i d\vec{l}$  con  $q\vec{v}$  a meno del fattore  $\gamma$ .

Esiste un riferimento in cui si ha solo uno dei due campi. [rivedi]

Si può trovare una relazione che collega  $B_{\text{lab}} = B_{\text{lab}}(E_{\text{lab}})$  anche se potrebbe non essere conveniente.

**Caso notevole.** Si studia un caso notevole in cui esiste un sistema di riferimento inerziale in cui  $\vec{B} = 0$ . In un altro qualunque riferimento in moto relativo si ha

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \gamma E_{\perp} + 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0 \\ B'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp} + \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{cases}.$$

per avere la carica con velocità  $\vec{v}$  bisogna avere il riferimento con velocità  $-\vec{v}$ . Quindi

$$\vec{B}' = B'_{\parallel} + B'_{\perp} = 0 + \frac{\vec{v} \times (E'_{\parallel} + \gamma E'_{\perp})}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}').$$

questa relazione insegna che il campo magnetico dovuto ad una carica in moto è perpendicolare alla velocità della carica ed al campo elettrico da essa generata.

Lo stesso si può fare partendo dalla configurazione in cui

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{B} \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} E'_{\parallel} = 0 \\ E'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp} - \gamma(\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) = -\vec{v} \times (\vec{B}_{\parallel} + \gamma \vec{B}_{\perp}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp} + 0 \end{cases}.$$

quindi

$$\vec{E}'_{\perp} = -\vec{v} \times \vec{B}'.$$

la velocità relativa risulta essere  $v = \frac{E}{B}$ , questo ricorda il moto cicloide: due campi sono mutualmente ortogonali.

**Paradosso.** Si consideri una carica  $q_1$  in moto con una velocità  $\vec{v}_1$ ; e una carica  $q_2$  fissa rispetto al riferimento del laboratorio. Si vuole calcolare la forza su  $q_2$  dovuta ai campi di  $q_1$  e viceversa. La carica prima genera sia un campo elettrico che magnetico perché è in moto. La seconda carica genera solamente un campo elettrico. Data l'espressione generale della forza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

[rivedi] tra le due cariche si ha solamente interazione elettrica. Infatti, la forza sulla carica seconda dovuta alla prima è

$$\begin{cases} F_{2,1} = q_2 E_1 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-\beta^2}{r^2} \\ F_{1,2} = q_1 E_2 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{cases}.$$

Dunque  $F_{1,2} \neq F_{2,1}$ . Per il principio di relatività vale il reciproco, ma si è persi il principio di azione-reazione: in un sistema isolato, la quantità di moto delle forze interne è nullo. Il problema è che il sistema non è solamente definito da delle due cariche: esistono anche i campi. Esiste una quantità di moto associata ai campi (ai quali si è già associata un'energia, e si è già trovata una radiazione elettromagnetica).[rivedi] Si ha anche un momento angolare dovuto ai campi.

## Lecture 24

lun 13 dic  
2021 13:30

## 11 Induzione elettromagnetica

Si studiano fenomeni con campi variabili. [r] La carica, sorgente del campo elettrico, induce carica nei conduttori; Faraday si chiede se le correnti, sorgenti del campo magnetico, inducono correnti nei conduttori. La risposta è negativa. Correnti stazionarie non inducono correnti, ma correnti variabili invece sì.

Si ha un'evidenza sperimentale divisa in tre fenomeni

- 1 per  $\vec{B}$  stazionario si osservano correnti indotte in un circuito in moto nel campo o che si deforma;
- 2 un circuito solidale con il riferimento del laboratorio e le sorgenti del campo magnetico in moto (cioè il campo non è stazionario)
- 3 si ha un circuito fisso, delle sorgenti fisse, ma il campo magnetico è variabile.

Tali tre leggi sono state riassunte in una relazione fondamentale da Faraday. Per sostenere una corrente si ha bisogno di una forza elettromotrice indotta:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

(faraday, neumann, lenz=??)

il sistema si oppone al cambiamento del flusso. Per arrivare a tale legge generale si analizzano le configurazioni precedenti facendo vedere i fenomeni che emergono sulla base di quanto è noto.

La forza elettromotrice è definita come

$$f_{em} = \mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

dove  $\vec{f}$  è la forza su carica unitaria. La superficie del circuito è una qualunque che abbia come bordo il circuito. Per correnti stazionarie si ricorda che la configurazione del sistema è una batteria a cui è collegato un circuito elettrico con una combinazione di resistenze e si ha

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}_0 + \oint \vec{f}_S \cdot d\vec{s}.$$

con  $\vec{f} = \vec{E} + \vec{f}_S$  con l'ultimo termine indica le forze dovute alle sorgenti (come la batteria). Per correnti stazionarie, il campo elettrico è stazionario ed è conservativo. Inoltre, tipicamente  $\vec{f}_S$  è confinata all'interno della batteria:

$$\vec{f}_S = \begin{cases} 0, & \text{sul circuito} \\ \neq 0, & \text{nella batteria} \end{cases}.$$

per cui, tipicamente si ha

$$\oint_c \vec{f}_S \cdot d\vec{s} = \int_-^+ \vec{f}_S \cdot d\vec{s} = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta V_{\text{ai morsetti}}.$$

dato che il campo elettrico è conservativo, vale la penultima uguaglianza. Nella situazione nuova, dove non si ha una batteria, risulta

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

**Situazione 1.** [immagine] Si analizza la prima situazione. Si consideri la situazione con un campo magnetico uniforme  $\vec{B} = B\hat{u}_z$  ed un conduttore aperto costituito da una sbarra metallica allineata lungo  $x$  messa in moto con una velocità  $\vec{v} = v\hat{u}_y$ . Il campo elettrico è nullo. In quanto la sbarra è un conduttore, al suo interno si hanno delle cariche libere che sono soggette ad una forza:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{u}_x.$$

Si ha una forza che tende a spostare le cariche come  $+x$ . Ad un certo punto si ha un eccesso di carica positiva da  $+x$  ed una carica negativa all'estremo opposto. Si ha una condizione di equilibrio per

$$q\vec{E}_{\text{indot}} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \iff \vec{E}_{\text{indot}} = -q\vec{v} \times \vec{B} = -vB\hat{u}_x.$$

Compare un campo elettrico anche all'esterno della sbarra. Da lontano si ha un campo di dipolo.

**Situazione 2.** [r]

Si considera la stessa situazione precedente ma ci si pone in un riferimento solidale con la sbarra, cioè con velocità  $\vec{v}_{SS'} = \vec{v}$ . Si hanno  $\vec{B}'$  e  $\vec{E}'$  non nulli. Si sa che

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0.$$

Inoltre si ha

$$\left\{ E'_{\perp} = \cancel{\gamma E_{\perp}} + \gamma \vec{v} \times \vec{B}_{\perp} \implies E' = \vec{v} \times \vec{B}' B'_{\perp} = \gamma B_{\perp} - \cancel{\gamma \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}}{c^2}} \right. .$$

la forza su carica unitaria risulta essere

$$\vec{f}' = \vec{E}' + \vec{v}_q \times \vec{B}', \quad v_q = 0.$$

si ha solamente forza elettrica sulle cariche: essere si redistribuiscono in modo da rendere nullo il campo elettrico. Compare una distribuzione di carica tale per cui nel conduttore si ha

$$\vec{E}'_{\text{condut}} = \vec{E}' + \vec{E}_{\text{indot}} = 0 \iff \vec{E}'_{\text{indot}} = -\vec{E}' = -\vec{v} \times \vec{B}' = -vB'\hat{u}_x.$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità relativa tra i due riferimenti. Dunque, l'osservatore  $O'$  vede un campo elettrico indotto in direzione  $-\hat{u}_x$  all'interno della sbarra che va a sommarsi al campo  $\vec{E}'$  presente in tutto lo spazio, di modo che all'interno del conduttore ci sia campo elettrico totale nullo. L'interpretazione del fenomeno è diversa, tuttavia rimane identico il fatto dell'accumulazione della carica ai due estremi ed alla presenza di un campo elettrico indotto definito dalla relazione  $-vB'\hat{u}_x$ .

In moto relativo, i fenomeni osservati e le relazioni sono gli stessi anche se [r]

**Situazione 3.** [r] Si consideri un circuito rigido: un campo magnetico generato da un solenoide di lunghezza finita. Si considera un circuito rettangolare di dimensioni  $a$  e  $b$ , con campi magnetici  $B_1$  e  $B_2$  sui lati di lunghezza  $a$  per cui  $B_2 < B_1$ .

Si trascina il circuito con una velocità  $\vec{v} = v\hat{u}_y$ . Si ritorna alla situazione uno. Le cariche si separano e perché soggette ad una forza di Lorentz  $\vec{F}_1 = -qvB_1\hat{u}_x$  e sull'altro lato si ha  $\vec{F}_2 = -qvB_2\hat{u}_x$ .

I tratti lungo  $b$  non si ha una distribuzione di carica [r]

Tuttavia, le cariche su di un estremo non sono in equilibrio, ma migrano e si genera una corrente indotta che scorre in senso antiorario. Continuando a tirare il circuito a velocità costante, si vuole trovare la forza elettromotrice [r].

Ricordando la definizione di forza elettromotrice segue

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

in tale configurazione si ha  $\vec{E} = 0$ . Dividendo il circuito in quattro sezioni si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^a (\vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot d\vec{s} + \int_a^0 (\vec{v} \times \vec{B}_2) \cdot d\vec{s} + \int_0^b (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_0) \cdot d\vec{s} + \int_b^0 (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_0) \cdot d\vec{s} \\ &= v(B_1 - B_2)a. \end{aligned}$$

essa è sempre diversa da zero per  $B_1 \neq B_2$ . [r]

Si ha una forza elettromotrice associata al lavoro della forza di Lorentz su carica unitaria. Ma la forza di Lorentz non compie lavoro: essa è un tramite. Il lavoro è compiuto dalla forza esterna che ~~trascina~~  
immagine il circuito.

Infatti, dopo un certo intervallo di tempo  $dt$ , il circuito si è spostato in una nuova posizione. Gli elettroni si muovono all'interno del circuito con velocità

$$\vec{v}_q = v_{\text{deriva}}\hat{u}_x + v\hat{u}_y.$$

quindi, la forza di Lorentz risulta essere

$$\vec{F}_B = q\vec{v}_q \times \vec{B} = -qv_D B_1 \hat{u}_y + qv B_1 \hat{u}_x.$$

si hanno due componenti della forza. Quella lungo il filo determina il moto delle cariche, l'altra determina la resistenza al trascinamento. Per avere velocità costante, la forza esterna dev'essere uguale a quella che si oppone. Si calcola il lavoro della forza esterna come

$$W = F_{\text{ext}} \Delta y = qv_D (B_1 - B_2) \Delta y.$$

Si immagini di osservare tale circuito per un intervallo di tempo  $\Delta t$  tale per cui gli elettroni percorrono una distanza  $a$ :

$$a = v_D \Delta t, \quad \Delta y = v \Delta t \implies \frac{a}{\Delta y} = \frac{v_D}{v} \iff v_D \Delta y = av.$$

dunque, nella relazione precedente si ha

$$f = \frac{W}{q} = v_D \Delta y (B_1 - B_2) = va(B_1 - B_2).$$

la forza di Lorentz non lavora: essa è solamente un tramite.

Tale espressione, per la configurazione studiata, è pari alla variazione del flusso del campo magnetico:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

## Lecture 25

mar 14 dic  
2021 13:30

Si è descritta la situazione con il campo magnetico stazionario. Esiste una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

nel caso in cui  $\vec{E} = 0$  vale la seconda uguaglianza. Si traduce tale risultato in uno più generale. Quanto ottenuto si può esprimere come la variazione di flusso attraverso una superficie  $S$  che insiste sul circuito:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

la superficie può essere qualunque perché vale

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

**Circuito in moto, che si deforma.** Si consideri un circuito in moto che si può spostare e deformare. [immagine] La posizione sotto è raggiunta ad un tempo  $t + dt$ . Si considera un campo magnetico  $\vec{B}$  stazionario. Si calcola la variazione di flusso

$$d\Phi = \Phi_{S(t+dt)}(\vec{B}) - \Phi_{S(t)}(\vec{B}).$$

il campo magnetico non dipende dal tempo:  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ . Invece di considerare la superficie piatta del circuito inferiore, si prende quella costituita dal bordo tra la superficie che collega i due circuiti e la superficie piatta del circuito sopra. Dunque

$$d\Phi = \Phi_{S(t)}(\vec{B}) + \Phi_{\Delta S}(\vec{B}) - \Phi_{S(t)}(\vec{B}) = \Phi_{\Delta S}(\vec{B}) = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

per ogni punto si ha una velocità  $\vec{v}$  ed un certo tratto  $d\vec{l}$  lungo il circuito iniziale. Il circuito si sposta di  $d\vec{s} = \vec{v} dt$ ; la superficie risulta essere  $da = dl v dt \sin \alpha$  da cui  $d\vec{a} = \vec{v} dt \times d\vec{l}$ . [immagine] Pertanto

$$d\Phi = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_c \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \times d\vec{l}).$$

si ricorda una proprietà del prodotto vettoriale

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \equiv \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}).$$

pertanto

$$d\Phi = \oint_c d\vec{l} \cdot (\vec{B} \times \vec{v} dt).$$

dato che il circuito è iniziale e il campo magnetico è stazionario, allora l'integrale non dipende dal tempo:

$$d_t \Phi = - \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{l}.$$

in generale  $f$  include anche il campo elettrico, ma in questo caso esso è assente e si ha solamente la forza di Lorentz.

**Esempio.** [immagine] Si consideri un circuito rigido, un campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{u}_z$  uniforme, una spira quadrata di lato  $a$  il cui normale forma un angolo  $\theta$  rispetto l'asse  $z$  verticale. Si pone in rotazione tale spira con una velocità angolare  $\omega$ .

Si ha

$$\Phi_S(\vec{B}) = Ba^2 \cos \theta, \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t.$$

dunque

$$d_t \Phi = -\omega Ba^2 \sin(\theta_0 + \omega t).$$



questo è un modo semplice di generare una forza elettromotrice tramite un'azione meccanica. Essa non è una corrente continua, dato  $\mathcal{E} = -d_t\Phi$  segue che la corrente ha un andamento sinusoidale. Quando il normale della spira è allineata con il campo, si ha flusso massimo, ma la variazione è nulla.

La corrente indotta che gira nel campo magnetico, crea a sua volta un campo magnetico il cui flusso compensa la variazione di flusso associata al campo esterno. Il sistema reagisce aggiungendo un campo di modo che il campo totale rimane costante.

**Esempio.** Vedi idex. Si considerino due binari che hanno un contatto con una sbarra che viene trascinata con velocità  $\vec{v}$ . L'area del circuito cambia.

**Esempio.** [immagine] Dinamo di Faraday. La variazione di flusso risulta essere difficile da conoscere. Il circuito risulta passare attraverso il disco. Il campo magnetico è uniforme ed ortogonale al normale della superficie del circuito. Per la perpendicolarità il prodotto scalare tra il campo e la normale risulta essere nulla. Tuttavia, il disco fornisce la forza elettromotrice:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_0^R (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

L'unico tratto che contribuisce all'integrale va dal centro del disco al bordo. Le cariche si muovono con una velocità  $v = \omega r$ . Quindi

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega R B dr = \frac{1}{2} \omega r^2 B.$$

**Sorgenti in moto.** Si consideri quanto detto precedentemente sulla sbarra metallica quando le sorgenti del campo magnetico sono in moto. [immagine]

Si consideri il circuito costituito da una spira quadrata di dimensione  $a$  che si muove rispetto ad un ... [r]

dato che il circuito è fisso segue che  $B'$  non ha effetto, mentre

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'.$$

quindi segue

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{s}.$$

Le cariche si muovono con una velocità di deriva lungo il filo, ma la forza di Lorentz è inefficace perché è perpendicolare al filo. Sostituendo  $\vec{E}'$  nell'integrale si ottiene l'espressione trovata precedentemente:

$$\mathcal{E} = \int_0^a \vec{E}'_1 \cdot d\vec{s} + \int_0^a \vec{E}'_2 \cdot d\vec{s} = v(B'_1 - B'_2)a = \mathcal{E}'.$$

[r] Questa espressione della forza elettromotrice è ancora una volta la variazione del flusso. Pertanto, l'osservatore  $S'$  ottiene

$$\mathcal{E}' = -d_t\Phi'.$$

tale legge rimane uguale in forma. Il circuito è fisso e cambia il campo magnetico. [r]

**Campo magnetico variabile.** Si ha un'altra configurazione. Si consideri il solenoide ed il circuito fissi, ma si cambia l'intensità della corrente del solenoide e quindi si ha un campo magnetico variabile.

Si ha un risultato sperimentale: tutte le volte che la variazione locale di campo magnetico sono identiche al caso precedente, la corrente indotta misurata è identica. Dunque, la legge vale indipendentemente dalla causa della variazione del campo.

Faraday conclude che

$$\mathcal{E} = -d_t\Phi.$$

è una legge generale che vale indipendentemente dalla storia delle sorgenti. In termini formali, per ogni linea chiusa  $c$  stazionaria, se il campo magnetico  $\vec{B}$  cambia nel tempo allora vale tale relazione, a prescindere da come esso è cambiato. La relazione diventa

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad d_t \Phi = d_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

La prima relazione afferma che il campo elettrico in configurazioni con campi magnetici variabili, non è conservativo. [r] In generale vale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

dove  $\vec{E}$  può essere la somma di un campo statico ed un campo indotto, perché l'integrale su di una linea chiusa del primo è nulla.

Tale relazione si può tradurre in una locale. In generale

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\text{Stokes}) \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

se il campo è statico, allora la derivata può entrare nel segno di integrale, e dunque

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\partial_t (\vec{B} \cdot d\vec{a}).$$

se la superficie è abbastanza piccola allora la derivata non dipende dall'elemento di superficie e quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}.$$

Questa è la legge di Faraday in forma differenziale. Il campo elettrico è perpendicolare alla direzione del campo magnetico, almeno localmente.

**Esempio.** [immagine] Si consideri un campo magnetico [r]

$$\vec{B} = B \cos(\omega t) \hat{u}_z.$$

allora

$$\Phi(B) = \pi r^2 B \cos(\omega t), \quad \mathcal{E} = \pi r^2 \omega B \sin(\omega t).$$

Per Faraday è dato che il campo magnetico è costante, dunque il campo elettrico ha simmetria cilindrica si ha

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oint_c d\vec{s} = E 2\pi r \iff E = \frac{r}{2} \omega B \sin(\omega t).$$

La discussione formale è stata fatta con i circuiti. Tuttavia, la legge vale a prescindere che ci sia effettivamente un circuito o meno.

Più avanti si vede che la legge di Faraday insieme ad un'altra, sono necessarie per affermare che esistono campi magnetici ed elettrici accoppiati. [r]

Si è vista la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E} = -d_t \Phi_S(\vec{B}).$$

[r] il cui membro a sinistra è

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}.$$

[r] Per il caso generale con un campo magnetico variabile ed il circuito che si sposta, si tengono conto di entrambi gli effetti nell'integrale.

La forza elettromotrice è una differenza di potenziale, ma di solito tale differenza si associa ad un campo conservativo, dunque si parla di tensione elettrica. [r]

**Configurazioni pratiche.** Risulta utile ricavare delle grandezze per caratterizzare le configurazioni pratiche.

**Mutua induttanza.** [r] [immagine] Il flusso  $\Phi_{21}$ , generato da  $c_1$  su  $c_2$  [r]  
Si sa che

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

essa è proporzionale all'intensità di corrente. Il flusso risulta essere

$$\Phi_{21} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}.$$

la corrente dipende dal tempo e non dalle variabili di integrazione. Pertanto,  $\Phi_{21} \propto I_1$  con cui il termine di proporzionalità dipende solamente dalla geometria. Dunque

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1.$$

dove  $M_{21}$  è detta mutua induttanza e dipende solamente dalla geometria della configurazione. Si può associare un'unità di misura. Infatti

$$\mathcal{E}_{21} = -d_t \Phi_{21} = -M_{21} d_t I_1.$$

si suppone che i due circuiti siano in posizioni fisse. Questa è una relazione per ricavare la forza elettromotrice a partire dalla corrente. Le dimensioni dell'induttanza risulta essere

$$[M_{21}] = \frac{V \cdot s}{A} = H, \quad \text{detta Henry.}$$

Si può calcolare  $M_{12}$ . Il significato di tali coefficienti è analogo ai coefficienti di potenziale  $\varphi = PQ$ .

**Esempio.** Si considerino due anelli concentrici con raggi  $R_2 \ll R_1$ . Sull'anello esterno circola una corrente,  $I_1$ . Si vuole trovare la corrente indotta nell'anello interno associata a variazioni nella corrente  $I_1$ . [r]

Si calcola la corrente indotta. La mutua induttanza risulta essere

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi R_2^2 B_1}{I_1}.$$

dato che l'anello esterno è molto maggiore dell'anello interno, allora si suppone che in esso il campo magnetico sia costante:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R_1}.$$

pertanto si ha

$$M_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}.$$

dipende dalla geometria, in particolare da una lunghezza. Dunque, si può definire le unità di misura per  $\mu_0$ :

$$[\mu_0] = \frac{H}{m}.$$

Si può modificare l'anello considerando la spira esterna avvolta su se stessa con  $N_1$  avvolgimenti e  $N_2$  per la spira interna. Si ottiene

$$M_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} N_1 N_2.$$

La mutua induttanza per l'anello grande risulta più difficile perché il campo magnetico non è costante. In soccorso, si utilizza il teorema di reciprocità.

**Teorema.** di reciprocità. Per ogni coppia di circuiti qualunque  $[r]$  risulta  $M_{21} = M_{12}$ .

**Dimostrazione.** [immagine] Si considerino due circuiti  $c_1, c_2$ . Si può calcolare il flusso di  $\vec{B}$  ricorrendo al potenziale vettore. Infatti

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \implies \Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = (\text{Stokes}) = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Dunque, un tratto  $d\vec{l}_1$  su  $c_1$  genera un potenziale vettore su  $d\vec{l}_2$  di  $c_2$ . Si ricorda che

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} d\nu}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}}{r}.$$

la  $\vec{J} d\nu$  si traduce in  $I d\vec{l}$  perché si ha un circuito. Pertanto

$$\Phi_{S_2}(\vec{B}) = \oint_{c_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{c_2} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}.$$

La mutua induttanza risulta essere

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_2} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{21}} = M_{12}.$$

per calcolare  $M_{12}$  bisogna scambiare gli indici, ma sono tutti simmetrici, anche l'ordine degli integrali.

**Problema.** [immagine] problema dato l'anno scorso. Si consideri solenoide toroidale a sezione quadrata con un filo infinito per il centro. Facendo variare la corrente nel filo, si vuole trovare la corrente indotta nel solenoide; e viceversa. cfr idefix.

Il filo genera un campo che passa per il solenoide. Variando la corrente, allora si ha un flusso nel solenoide. Dunque

$$\Phi = \int_{S_{\text{toro}}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr h = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} h I \implies M_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}.$$

La corrente indotta nel solenoide toroidale risulta essere

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{M_{12}}{R} d_t I_{\text{filo}}.$$

Viceversa. Fuori dal toroide, il campo magnetico è nullo. Tuttavia, vale il teorema di reciprocità: infatti, il filo infinito si chiude all'infinito dunque la corrente che varia passa per la superficie e si ha mutua induttanza.

Il calcolo fatto del flusso vale per una sola spira. Per  $N$  spire basta moltiplicare per  $N$ .

## Lecture 26

Si è introdotta la mutua induttanza. Esiste un fenomeno più intricato: l'autoinduttanza, cambiare una corrente in un circuito induce un'altra corrente nel circuito stesso.

[immagine]

Si consideri un anello. Il campo magnetico generato risulta essere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Si può calcolare il flusso di tale campo attraverso la superficie dell'anello

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \cdot d\vec{a}.$$

mer 15 dic  
2021 13:30

Cambiando la corrente, cambia il flusso. Avendo corrente variabile, il flusso cambia. Si introduce l'autoinduttanza  $L$  definita come

$$L \equiv \frac{\Phi_{11}}{I_1}.$$

utilizzando la relazione tra la forza elettromotrice ed il flusso si sa che esiste una fem che agisce su tale circuito data da

$$\mathcal{E}_{11} = -\mathrm{d}_t \Phi_{11} = -L \mathrm{d}_t I_1.$$

con due anelli si ha che sul primo anello si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -\mathrm{d}_t \Phi = -\mathrm{d}_t (\Phi_{11} + \Phi_{21}) = -L_1 \mathrm{d}_t I_1 - M_{12} \mathrm{d}_t I_2 \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \mathrm{d}_t I_2 - M_{21} \mathrm{d}_t I_1. \end{aligned}$$

con più anelli il sistema si complica sempre più. Tipicamente, si vogliono costruire sistemi che dipendono solamente da  $L$ , rendendo  $M$  poco significativo. In altri casi si vuole fare l'opposto come adattare la tensione in un sistema con corrente alternata.

Si osserva il segno. Si sa che

$$\oint_c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\partial_t \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{a}.$$

l'integrale di linea è percorso in un senso specifico, così come il verso della superficie (antiorario equivale a positivo e si segue la regola della mano destra).

**Solenoide toroidale.** Si consideri un solenoide toroidale a sezione quadrata con  $N$  avvolgimenti. Figura 3. L'autoinduttanza risulta essere

$$L = \frac{\Phi(B)}{I}, \quad B = \begin{cases} 0, & r \notin [a, b] \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, & r \in [a, b] \end{cases}.$$

grazie alla legge di Ampère. Il flusso di  $B$  nel toroide è

$$\Phi(B) = N \Phi_{\text{anello}}(B) = N \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \mathrm{d}r h = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}.$$

[immagine] dunque, l'autoinduttanza risulta essere

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}.$$

essa cresce con  $N^2$ . Tipicamente un solenoide di tale tipo ha campo esterno nullo. Esso è un sistema che risponde alla necessità di avere un valore di  $L$  che prevale sulla mutua induttanza  $M$ .

Il solenoide lineare finito ha un campo disperso se ideale.

**Induttore in un circuito elettrico.** [immagine] Si studia il comportamento di un induttore in un circuito elettrico. Si consideri un solenoide collegato ad una batteria. Una bobina reale è un filo elettrico: non esiste nessun circuito che non abbia una resistenza in serie con l'autoinduttanza con tale circuito. Lo schema equivalente risulta essere un circuito con una batteria, una resistenza ed un solenoide di autoinduttanza  $L$  (supponendo che le mutue induttanze siano trascurabili). La relazione di componente del solenoide risulta essere

$$\mathcal{E} = -L \mathrm{d}_t I.$$

chiudendo il circuito, inizia a circolare una corrente. La tensione della batteria è  $\mathcal{E}_0$ . Chiudendo il circuito si ha una forza elettromotrice indotta, per cui la forza elettromotrice totale risulta essere

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = RI \implies \mathcal{E}_0 = -\mathcal{E} + RI = L \mathrm{d}_t I + RI = V_L + V_R, \quad V_L = L \mathrm{d}_t I, \quad V_R = RI.$$

Si risolve tale equazione differenziale come la somma della soluzione particolare e della soluzione all'equazione omogenea associata. L'integrale particolare è

$$I_P = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \quad I_G(t) : L \, d_t I + RI = 0.$$

la seconda equazione diventa

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \implies I_G(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

La soluzione generale diventa

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad I(0) = 0.$$

per cui si ottiene  $A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$ , da cui:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

la costante di tempo risulta essere  $\tau = \frac{L}{R}$ . Fenomeni stazionari risultano essere quelli per cui si è in regime asintotico, i fenomeni di induzione spariscono e si è in un sistema puramente resistivo. Non si può generare corrente istantaneamente perché il sistema si oppone alla variazione di flusso. Si studia la scarica del solenoide. [immagine] Aprendo il circuito, la corrente che passa non può immediatamente arrestarsi perché la variazione di flusso si oppone, dunque la corrente in eccesso è scaricata da ciò che apre meccanicamente il circuito. Pertanto, bisogna scaricarlo attraverso una resistenza, collegando un altro filo e facendo chiudere l'interruttore su tale circuito. Quindi, il circuito equivalente è costituito dal solenoide e da una resistenza. Si ha

$$L \, d_t I + RI = 0 \implies \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} t \implies I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

esso si scarica con la stessa legge esponenziale con cui si carica.

Facendo passare della corrente attraverso una resistenza, si dissipa energia che dev'essere presa dall'induttore. Dunque, l'induttore deve aver immagazzinato dell'energia. L'energia dissipata si può calcolare dalla potenza come

$$W = \int_0^{+\infty} RI^2 \, dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} \, dt = \frac{1}{2} \frac{L}{R} RI_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Questa dev'essere anche l'energia immagazzinata all'inizio, prima della scarica. Dunque, l'energia immagazzinata nell'induttore è

$$U = \frac{1}{2} LI^2.$$

si nota l'analogia con il condensatore dove

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Inoltre, per definizione  $\Phi = LI$ , quindi la prima equazione si può scrivere come

$$U = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}.$$

Si è imparata una diversa espressione dell'energia del campo magnetico:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, d\nu.$$

si dimostra che tale relazione è equivalente a quella precedente.

La relazione dell'energia immagazzinata si può ricavare in modo più immediato. La differenza di potenziale ai capi dell'induttore è

$$V_L = L \, d_t I.$$

quindi il lavoro infinitesimo per far passare una carica attraverso l'induttore risulta essere

$$dW = L \, d_t I \, dq = L \, d_t I \, I \, dt = LI \, dI \implies W = \int_0^I LI \, dI = \frac{1}{2} LI^2.$$

il lavoro è l'integrale per passare da una corrente iniziale nulla ad una corrente finale pari ad  $I$ , cioè per carica l'induttore.

Si dimostra l'equivalenza delle due espressioni. Si vede prima nella geometria del solenoide toroidale e poi lo si generalizza:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, d\nu = \frac{1}{2} LI^2.$$

In prima approssimazione, il campo esterno del toroide è nullo: dato che le spire non possono essere tutte parallele, ma si devono spostare di un poco, risulta essere presente una corrente che segue un percorso circolare; dunque la configurazione è quella di un toroide ed un anello che dà un campo di dipolo che è molto meno intenso ed inoltre è asintotico a  $\frac{1}{r^3}$ , e quindi diventa trascurabile molto velocemente.

Pertanto

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \left( \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right) 2\pi r h \, dr = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 I^2 h \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}}_L I^2.$$

con  $dV = dr \, h 2\pi r$  grazie alle simmetrie. Ora si generalizza. La dimostrazione coinvolge il ripasso di tre mesi di corso. L'energia risulta essere

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, d\nu = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \, d\nu.$$

Dato che

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \partial_x (a_y b_z - b_y a_z) + \partial_y (a_z b_x - a_x b_z) + \partial_z (a_x b_y - a_y b_x) \\ \implies b_x (\partial_y a_z - \partial_z a_y) &= b_x (\vec{\nabla} \times \vec{a})_x, \quad -a_x (\partial_y b_z - \partial_z b_y) = a_x (\vec{\nabla} \times \vec{b})_x \\ \implies \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

risulta

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) \, d\nu + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \, d\nu.$$

ricordando che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Inoltre, si può applicare al teorema di Gauss al primo integrale e la legge di Ampère al secondo:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_S (\vec{B} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot \mu_0 \vec{J} \, d\nu.$$

nel primo integrale, la superficie è infinita e tutte le sorgenti finite sono dipoli magnetici, pertanto  $B \sim \frac{1}{r^3}$  e  $A \sim \frac{1}{r^2}$  e dunque  $\vec{B} \times \vec{A} \sim \frac{1}{r^5}$ , mentre l'area va come  $r^2$ , pertanto il primo integrale è nullo.

Nel secondo integrale, dato che la corrente passa per un circuito risulta  $\vec{J} \, d\nu = I \, d\vec{l}$  e quindi

$$U = \frac{1}{2} \oint_c \vec{A} \cdot I \, d\vec{l} = \frac{1}{2} I \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} I \Phi(B) = \frac{1}{2} LI^2.$$

**Applicazione.** [immagine] Si osserva il funzionamento delle cucine ad induzione. Si supponga che il fornello ad induzione sia un solenoide di raggio  $R$  con una corrente variabile  $I = I(t)$ . In tale solenoide si ha un campo magnetico variabile  $\vec{B} = \mu n I(t) \hat{u}_z$ , con  $n = \frac{N}{L}$ . Dato che il campo magnetico è variabile, esiste un campo elettrico associato tale per cui

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\mu_0 n \partial_t I.$$

Quindi

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = -\mu_0 n \partial_t I \hat{u}_z \iff \partial_x E_y - \partial_y E_x = -\mu_0 n \partial_t I.$$

Quindi, il campo elettrico vive nel piano ortogonale all'asse  $z$ . Per la simmetria del problema, si usano le coordinate cilindriche per cui il rotore risulta essere

$$\frac{1}{2} (\partial_r (r E_\theta) - \partial_\theta E_r)_z.$$

per simmetria, il campo elettrico non dipende da  $\theta$  perché se si avesse un campo con intensità diversa in base a  $\theta$ , allora ruotando le sorgenti si hanno due punti con campo diverso, ma con configurazione uguale nei due casi e ciò è assurdo: perciò il campo non può dipendere da  $\theta$ . Il campo non dipende da  $z$  perché invariante per traslazione. Dunque, esso è necessariamente  $\vec{E} = E_\theta(r) \hat{u}_\theta$ .

Dato che si è individuata una simmetria, si utilizza la forma integrale della legge di Faraday che è più semplice:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\partial_t \int \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

scegliendo un circuito circolare di raggio  $r$  si ha campo elettrico e magnetico uniformi per cui

$$E_\theta(r) 2\pi r = - \begin{cases} \mu_0 n \partial_t I \pi r^2, & r < R \\ \mu_0 n \partial_t I \pi R^2, & r \geq R \end{cases}.$$

Dunque il campo elettrico risulta essere

$$E_\theta(r) = \begin{cases} -2\mu_0 n \partial_t I \frac{r}{2}, & r < R \\ -\mu_0 n \partial_t I \frac{R^2}{2r}, & r \geq R \end{cases}.$$

Si pone un disco metallico sopra il solenoide. All'interno del metallo si stabiliscono delle correnti  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , con  $\sigma$  conducibilità del mezzo materiale. Inoltre, si sa che  $\vec{J} = n_e q \vec{v}$ . Si sa che le correnti all'interno di un materiale resistivo dissipano energia. Dunque, la potenza dissipata su di una carica è

$$d_t W = q \vec{E} \cdot \vec{v} = q E v.$$

perché le cariche si muovono come il campo. La potenza per unità di volume risulta essere

$$\frac{1}{V} d_t W = n_e q v E = n_e q v E = J E = \sigma E^2.$$

che è dissipata dalla lastra. Nella realtà il solenoide è poco lungo e gli anelli hanno diversa ampiezza perché altrimenti si scaldano solamente i bordi.

Si noti che il campo elettrico è indotto in tutto lo spazio, mentre in un metallo chiuso si ha una corrente indotta.