

# Theoretical Physics I

Maso\*

4 novembre 2023

## Indice

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Meccanica quantistica relativistica</b>                       | <b>2</b>  |
| <b>1</b>  | <b>Introduzione</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1       | Problemi della meccanica quantistica con la relatività . . . . . | 5         |
| 1.2       | Infiniti gradi di libertà . . . . .                              | 7         |
| 1.3       | Formalismo covariante . . . . .                                  | 8         |
| 1.4       | Equazioni di Maxwell . . . . .                                   | 12        |
| <b>2</b>  | <b>Equazioni d'onda relativistiche</b>                           | <b>17</b> |
| 2.1       | Equazione di Dirac . . . . .                                     | 18        |
| 2.2       | Limite non relativistico . . . . .                               | 20        |
| 2.3       | Covarianza . . . . .   | 26        |
| 2.4       | Soluzioni per una particella libera . . . . .                    | 31        |
| 2.5       | Proiettori . . . . .   | 35        |
| 2.6       | Equazioni di Weyl . . . . .                                      | 38        |
| <b>II</b> | <b>Teoria quantistica dei campi libera</b>                       | <b>39</b> |
| <b>3</b>  | <b>Formalismo lagrangiano</b>                                    | <b>39</b> |
| 3.1       | Campo elettromagnetico . . . . .                                 | 40        |
| 3.2       | Teorema di Noether . . . . .                                     | 42        |
| <b>4</b>  | <b>Quantizzazione del campo elettromagnetico</b>                 | <b>46</b> |
| 4.1       | Interazione di dipolo . . . . .                                  | 51        |
| 4.2       | Scattering Thomson . . . . .                                     | 54        |
| 4.3       | Spin del fotone . . . . .  | 57        |
| 4.4       | Tensore energia-impulso . . . . .                                | 58        |
| 4.5       | Legge di conservazione per il campo in interazione . . . . .     | 58        |
| <b>5</b>  | <b>Campo di Klein–Gordon</b>                                     | <b>60</b> |
| 5.1       | Campo reale . . . . .  | 60        |
| 5.2       | Campo complesso . . . . .  | 62        |
| <b>6</b>  | <b>Campo di Dirac</b>  | <b>64</b> |
| <b>7</b>  | <b>Simmetrie di gauge locali</b>                                 | <b>66</b> |
| 7.1       | Campo di Dirac . . . . .   | 66        |
| 7.2       | Campo di Klein–Gordon . . . . .                                  | 67        |

---

\*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

|          |                                   |           |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| <b>8</b> | <b>Propagatore</b>                | <b>68</b> |
| 8.1      | Campo di Klein–Gordon . . . . .   | 68        |
| 8.2      | Spazio delle coordinate . . . . . | 71        |
| 8.3      | Spazio dei momenti . . . . .      | 73        |
| 8.4      | Campo di Dirac . . . . .          | 73        |

## Lezione 1

lun 02 ott  
2023 10:30

## Parte I

# Meccanica quantistica relativistica

## 1 Introduzione

Il corso di fisica teorica è un corso di introduzione alle teorie quantistiche relativistiche dei campi. La relatività generale è la prima teoria relativistica di una interazione fondamentale, ma non è stata ancora quantizzata. Le altre tre forze fondamentali — elettromagnetica, forte e debole — sono descritte da un'unica teoria relativistica e quantistica. Si vuole capire come quantizzare i campi unendo la relatività, la meccanica quantistica e la teoria dei campi.

Le motivazioni per costruire teorie relativistiche dei campi sono radicate nella storia delle teorie ad inizio XX secolo: dal problema del corpo nero alla relatività speciale ed alla meccanica quantistica. Come scrisse Kuhn, si ebbe un cambiamento di paradigma e le certezze della fisica classica scomparvero: il tempo assoluto ed il determinismo vennero meno. La relatività e la meccanica quantistica non vennero subito accettate. Una prima prova della relatività generale provenne dall'esperimento di Eddington in cui egli osservò la luce provenire da stelle dietro al sole durante un'eclissi. La meccanica quantistica, nata qualche anno dopo, non era relativistica: l'equazione di Schrödinger è la trascrizione operatoriale della formula classica per l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p^\mu \rightarrow \begin{pmatrix} i\hbar \partial_t \\ -i\hbar \nabla \end{pmatrix}$$

Le correzioni finì all'atomo di idrogeno contengono la correzione relativistica che funziona sebbene l'elettrone sia in regime non relativistico: l'energia dell'elettrone è molto più piccola dell'energia a riposo, per questo si può fare lo sviluppo perturbativo. L'ordine di grandezza dell'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno è degli elettronvolt, mentre la massa dell'elettrone è  $511 \text{ keV } c^{-2}$ .

La meccanica quantistica non relativistica fornisce dei dati in grande accordo con quelli sperimentali, tuttavia si sono fatte delle scelte insolite e ad hoc: l'aggiunta dello spin, l'introduzione del fattore giromagnetico nel termine di spin-orbita, il principio di Pauli. Unificare la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, mantenendo i principi di entrambe, non è possibile: si arriva a varie incongruenze che si vedono in seguito.

Bisogna cambiare ancora il paradigma adottando la seconda quantizzazione. Dirac creò la meccanica quantistica relativistica tramite la sua equazione, ma il tutto funziona per energie minori dell'energia a riposo dell'elettrone.

Tutte queste discussioni provengono sempre dal campo elettromagnetico. La velocità della luce nel vuoto è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Einstein aggiunge al principio di relatività anche la costanza della velocità della luce in ogni sistema di riferimento.

Nel corso si vede una evoluzione della fisica teorica a partire da Dirac passando per le teorie dei campi. Si studia cosa significare utilizzare una teoria quantistica relativistica e come spesso le cose non sono semplici. Uno dei problemi è quello delle divergenze: lo sviluppo perturbativo porta con sé delle divergenze che vanno interpretate. Ironicamente, la meccanica quantistica è nata per risolvere la divergenza UV dello spettro del corpo nero.

L'auto-energia dell'elettrone è infinita a causa del termine  $r^{-1}$  del campo elettrico. Porre un raggio finito all'elettrone risolve il problema, ma non ha potere predittivo. Le divergenze sono ricorrenti, ma la rinormalizzazione permette di ridefinire le divergenze inserendole nella relazione

tra la carica nuda di una particella — che non corrisponde alla carica misurata — e la carica misurata stessa.

Inizialmente, la presenza di anti-materia fu un problema. Per la relatività, la massa è equivalente all'energia  $E = mc^2$ : l'una si trasforma nell'altra e viceversa. Può capitare che una radiazione diventi una coppia particella-antiparticella. Tuttavia, la meccanica quantistica non relativistica tratta una sola particella

$$\int d^3x |\psi|^2 = 1$$

La probabilità di trovare (esattamente) una particella in tutto lo spazio è unitaria, quindi la creazione e annichilazione di particelle non sono compatibili con tale teoria.

Dalla meccanica razionale — con le variabili canoniche, il formalismo di Lagrange, le equazioni di Hamilton–Jacobi, le parentesi di Poisson — le variabili canoniche diventano equivalenti operatoriali hermitiani nella meccanica quantistica. La funzione d'onda è interpretata come ampiezza di probabilità. Ora, la qualità di operatore è assunta dalla funzione d'onda che crea e distrugge particelle, ed in un certo senso si riprendono le variabili canoniche della meccanica classica. Le variabili canoniche classiche sono discrete, ma la funzione d'onda è continua: si passa ad infiniti gradi di libertà, il campo.

Si conoscono già vari campi: il campo elettrico, magnetico, la temperatura, la pressione, etc. Essi presentano tutti uno stato fondamentale. Per quantizzare un campo, ci si pone attorno allo stato fondamentale e si osservano le piccole fluttuazioni — un oscillatore armonico quantistico — attorno al minimo.

Uno dei punti fondamentali in fisica teorica è spiegare un fenomeno, ma anche predire. Un modello spiega un fenomeno, una teoria si basa su un principio fondamentale ed è caratterizzata da una predittività. Il modello di Glashow–Weinberg–Salam nacque come modello, ma con la teoria elettrodebole ed il meccanismo di Higgs divenne una teoria, cioè il Modello Standard. Esso possiede un enorme accordo tra teoria ed esperimenti. Ad esempio, il fattore giromagnetico del muone misurato<sup>1</sup> porta ad un momento di dipolo magnetico anomalo pari a

$$a_\mu = \frac{g-2}{2} = 0.001\,165\,920\,59(22)$$

La discrepanza con il valore teorico<sup>2</sup> è

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$$

Le interazioni elettromagnetica, forte e debole sono correttamente descritte dal Modello Standard alle energie finora investigate. Esso è una teoria quantistica relativistica dei campi e per questo si pensa essere la teoria corretta. Tuttavia, si pensa anche che il Modello Standard sia una teoria a basse energie, limite di una teoria più grande, poiché non spiega, tra le altre cose, la materia e l'energia oscura.

Il corso è una introduzione alla teoria dei campi. La parte avanzata, tra cui il metodo funzionale, si vede al corso di Teoria Quantistica dei Campi I e II, e pure in Laboratorio di Fisica Computazionale con lo studio delle interazioni forti su reticolo.

**Unità di misura.** Si utilizza il sistema MKS. Le costanti fisiche di interesse sono

$$c = 299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}, \quad \hbar \approx 6.582 \times 10^{-16}\,\text{eV s}$$

Si pone  $c = 1$ : lunghezza e tempo sono la stessa dimensione. Per ragioni storiche, si elimina il tempo, sebbene sia più preciso da misurare. Come conseguenza, dalla relazione di Einstein

$$E = mc^2$$

la massa ha le dimensioni dell'energia. Altre scale di lunghezza interessanti sono l'ångström (o angstrom) ed il fermi

$$1\,\text{\AA} = 10^{-10}\,\text{m}, \quad 1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m}$$

<sup>1</sup>Si veda <https://arxiv.org/abs/2308.06230>.

<sup>2</sup>Si veda <https://physics.aps.org/articles/v16/139>.

corrispondenti alle scale atomiche e scale nucleari.

Si pone  $\hbar c = 1$ , che nel Sistema Internazionale vale  $\hbar c \approx 197 \text{ MeV fm}$ . Si introduce la lunghezza Compton (ridotta)

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2}$$

Per l'elettrone vale  $\lambda \approx 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$ , mentre per un nucleone è  $\lambda \approx 0.21 \text{ fm}$ . Dalla lunghezza Compton si ottiene una relazione tra lunghezza e massa. La massa di un nucleone è data da  $m = 5 \text{ fm}^{-1}$ .

In generale, le particelle elementari sono instabili. Si consideri una vita media

$$\tau = 10^{-23} \text{ s} \implies \frac{\tau c}{\hbar c} \approx \frac{3}{200} \text{ MeV}^{-1}$$

Si passa da un tempo ad una energia: dalla vita media all'indeterminazione sul valore dell'energia e quindi della massa. La relazione

$$\Delta t \Delta E \sim 1$$

non è un principio di indeterminazione perché il tempo non è un operatore e le misurazioni sono fatte a tempi diversi. Essa lega l'incertezza sulla misura dell'energia data la differenza temporale tra due misure. La vita media di una particella permette di ottenere l'indeterminazione sulla sua massa. Tornando alla lunghezza Compton, si ha

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} \implies \lambda mc \sim \hbar \rightsquigarrow \Delta x \Delta p \sim \hbar$$

L'ultima relazione è un principio di indeterminazione. Dalle relazioni sopra si nota che risolvere la posizione di una particella su una lunghezza inferiore alla sua lunghezza Compton significa fornirle un'energia dell'ordine della sua massa a riposo e quindi aprire la strada alla creazione di coppia. Confinare una particella porta alla creazione di altre particelle.

Riassumendo, le dimensioni seguono le relazioni

$$E = L^{-1} = T^{-1} = M$$

Per l'elettromagnetismo si utilizzano le unità di Heaviside–Lorentz e le associate definizioni della forza di Coulomb e dei campi.

Si può costruire un analogo della lunghezza Compton anche per la massa, cioè la massa di Planck. Non si considera la gravità perché è molto più debole delle altre forze fondamentali

$$E_{\text{grav}} = G \frac{m_e M_N}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-41}}{r_{\text{Bohr}}}, \quad E_{\text{elet}} = \frac{\alpha}{r_{\text{Bohr}}} \approx \frac{10^{-2}}{r_{\text{Bohr}}}$$

**Scale di energia.** L'energia di un fascio del Large Hadron Collider fu 6.5 TeV per la scoperta del bosone di Higgs. Per il LEP fu 100 GeV. Per il SPS fu 300 GeV per la scoperta dei bosoni  $W^\pm$  e  $Z$ . L'energia necessaria ad ottenere tali fasci è  $600 \text{ GWh yr}^{-1}$  solo per LHC. Questo perché particelle che accelerano irradiano energia per bremsstrahlung. Tutto il CERN consuma  $1.3 \text{ TWh yr}^{-1}$ , mentre il mondo produce circa  $20\,000 \text{ TWh yr}^{-1}$ .

## Lezione 2

**Diagramma di Minkowski.** In un diagramma  $xt$  di Minkowski, la bisettrice dei quadranti indica oggetti che si muovono alla velocità della luce (ricordando  $c = 1$ ). Si costituisce un cono luce. Al di sopra e al di sotto dell'origine  $O$  si hanno eventi che possono essere causalmente connessi con l'origine: in particolare, per eventi al di sopra, l'origine  $O$  può avere un effetto causale, si ha il futuro; gli eventi al di sotto hanno potuto influenzare causalmente l'origine, si ha il passato. Ai lati, gli eventi non possono essere causalmente connessi con l'origine perché bisogna superare la velocità della luce.

La metrica nello spazio di Minkowski non è definita positiva: l'intervallo spazio-temporale può cambiare segno. Gli eventi con  $t = 0$  sono contemporanei all'origine. In base al segno — positivo, nullo e negativo — si ha vettori di tipo tempo, luce e spazio. Ai lati del cono sono presenti vettori di tipo spazio, sopra e sotto si hanno vettori di tipo tempo. Lungo le bisettrici si hanno vettori di tipo luce.

mar 03 ott  
2023 10:30

## 1.1 Problemi della meccanica quantistica con la relatività

Si vedono alcuni problemi nel conciliare la meccanica quantistica con la relatività.

**Problema primo.** Si svolge un esercizio preso dalle Coleman's Lectures, p. 12. Si considera una particella localizzata nell'origine  $|\mathbf{x} = 0\rangle \equiv |0\rangle$ . Per ottenere uno stato ad un tempo successivo a  $t = 0$  si applica l'operatore di evoluzione temporale. Ricordando varie relazioni, tra cui la completezza nello spazio dei momenti,

$$I = \int d^3k |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|, \quad H|\mathbf{k}\rangle = E_k|\mathbf{k}\rangle, \quad E_k^2 = k^2 + m^2$$

così come

$$\langle\mathbf{k}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle^*$$

Si ottiene

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle = \int d^3k \langle\mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle \langle\mathbf{k}|e^{-iHt}|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_k t}$$

dove si applica l'esponenziale a  $\langle\mathbf{k}|$  facendo l'espansione in serie di Taylor. Passando in coordinate polari  $r$  e  $\theta$ , si ha

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle &= \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos\theta} e^{-iE_k t} = \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} e^{-iE_k t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} e^{-iE_k t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dk k e^{ikr} e^{-iE_k t} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}} dk k e^{ikr} e^{-it\sqrt{k^2+m^2}} \end{aligned}$$

Si passa nel piano complesso. La radice è una funzione polidroma: si pone il branch cut da  $-\infty$  a  $-im$  e da  $im$  a  $\infty$ . Il cammino di integrazione è una semicirconferenza con base l'asse reale e che evita il branch cut, percorsa in senso anti-orario. La funzione integranda è analitica all'interno del cammino, pertanto l'integrale è nullo. Vicino al taglio si ha

$$E_k = -i\sqrt{(\text{Im } k)^2 - m^2}, \quad E_k = i\sqrt{(\text{Im } k)^2 - m^2}$$

a sinistra e destra. Si studia il limite in cui il raggio della semicirconferenza tende ad infinito. L'esponenziale sul segmento discendente a sinistra tende a zero, ma non a destra. Supponendo che la particella viaggi più veloce della luce  $r > t$ , allora anche tale termine si annulla all'infinito. Inoltre, gli archi non contribuiscono all'integrale. Sia  $k = iz$ , così  $k dk = iz d(iz)$ . Pertanto, solamente i segmenti verticali contribuiscono con termini non nulli:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}|e^{-iHt}|0\rangle &= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^\infty d(iz) (iz) e^{-zr} [e^{t\sqrt{z^2-m^2}} - e^{-t\sqrt{z^2-m^2}}] \\ &= \frac{i}{2\pi^2 r} \int_m^\infty dz z e^{-zr} \sinh(t\sqrt{z^2-m^2}) > 0 \end{aligned}$$

Da questo risultato si nota che, a partire da una particella è localizzata nell'origine, ad un tempo infinitesimo successivo, la funzione d'onda è non nulla ovunque: si potrebbe trovare al di fuori del cono luce. Non si è coerenti con la relatività speciale. Si ha violazione di causalità nel momento in cui si localizza una particella. La localizzazione diventa un concetto che non si riesce più a mantenere, come già visto discutendo della lunghezza Compton.

L'integrale non presenta una soluzione esplicita in forma chiusa, ma si può trovare un limite superiore all'ampiezza di probabilità

$$\psi(x, t) < \frac{i}{2\pi^2 r} \int_m^\infty dz z e^{-z(r-t)} = \frac{i}{2\pi^2 r} e^{-m(r-t)} \left[ \frac{m}{r-t} + \frac{1}{(r-t)^2} \right]$$

Si noti il campo complesso  $\mathbb{C}$  non è un campo totalmente ordinato, quindi la relazione di disuguaglianza è valida in senso lessicografico. Fuori dal cono di luce, l'ampiezza di probabilità

è esponenzialmente piccola, ma comunque non nulla. In generale, una simmetria semplifica il problema, ma la simmetria di Lorentz rovina la meccanica quantistica. In natura deve esistere qualcosa che cancella la violazione di causalità: le anti-particelle forniscono contributi che cancellano la violazione. La scala che descrive quanto scende la probabilità è data dalla massa  $m$ . La lunghezza Compton associata ad una particella è il reciproco della massa: cercando di confinare una particella in una regione più piccola della lunghezza Compton — il problema visto considera la particella in un punto infinitesimo, l'origine — si ottiene una violazione della causalità.

**Problema secondo.** Seguendo Bohr, si consideri una particella in una scatola perfettamente riflettente: la particella rimbalza continuamente. Il lato superiore della scatola è un pistone che si può muovere per diminuire lo spazio all'interno della scatola. Ricordando la relazione di Einstein, per il principio di indeterminazione

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar$$

la particella acquista abbastanza energia da irraggiare qualsiasi cosa e creare tutte le particelle compatibili con il principio di conservazione dell'energia.

**Relazione di Einstein.** Le difficoltà sorgono dalla relazione di Einstein  $E = mc^2$ . Si tenta dare un senso a tale formula. Si consideri una scatola. Si emette della radiazione dal lato sinistro della scatola con energia  $E$ . Per una radiazione, il momento portato è  $p = \frac{E}{c}$ . Per conservazione del momento  $p = 0$ , la scatola si sposta verso sinistra con momento  $p = -\frac{E}{c}$ . La scatola si sposta fino a quando la radiazione incide sull'altro lato. La velocità con cui si muove la scatola è  $v = -\frac{E}{Mc}$ . La distanza percorsa è

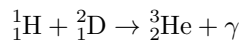
$$\Delta x = -\frac{E}{Mc} \frac{L}{c} = -\frac{EL}{Mc^2}$$

corrispondente al tempo di viaggio della radiazione. La scatola è un sistema isolato, ma si è spostato: il baricentro deve restare fermo. Per Einstein, la radiazione porta con sé della massa, infatti dall'equazione del baricentro si ottiene

$$mL + M\Delta x = 0 \implies mL - M\frac{EL}{Mc^2} = 0 \implies E = mc^2$$

Si ricordi che non si può considerare la scatola come un corpo rigido giacché si sta trattando la Relatività Speciale. Tuttavia, il problema di considerare il corpo rigido o meno non si pone poiché le conclusioni sono le medesime.

Si vede un esempio in cui si trova la relazione di Einstein. Le stelle sono sorrette dalla fusione nucleare



La massa iniziale combinata del protone e del deutrone è  $m = 5.01624 \times 10^{-27}$  kg, mentre il nucleo di elio ha massa  $m = 5.008234 \times 10^{-27}$  kg. L'eccesso di massa che si trasforma in energia è  $\Delta m \approx 7.97 \times 10^{-30}$  kg. Con questa reazione, insieme a delle altre, il Sole perde una quantità di massa pari a

$$\Delta M_{\odot} \approx 4.5 \times 10^9 \text{ kg s}^{-1} \approx 10^{-14} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

dove  $M_{\odot}$  è una massa solare.

**Esperimento di Nichols e Hull.** Nichols e Hull si posero la questione di misurare il momento portato dalla luce. I due costruirono una bilancia di torsione con due specchi rivolti nella stessa direzione. L'esperimento rivelò

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

**Problema terzo.** Quando un commutatore tra due operatori è nullo, si possono misurare le quantità associate in modo indipendente (l'ordine non è importante). Nella rappresentazione di Heisenberg, gli operatori dipendono solo dal tempo. Rispetto ad una misura fatta all'origine del diagramma di Minkowski, nella regione sopra e sotto del cono di luce, il commutatore con un'altra misura è diverso da zero perché le due misure si possono influenzare, mentre ai lati il commutatore deve essere nullo perché i sistemi non si possono influenzare. Dunque i commutatori devono dipendere anche dalla posizione delle misure.

**Problema quarto.** Si veda Cohen E<sub>II</sub>. Si considerino due operatori tali per cui

$$[q, p] = i\hbar, \quad [q, q] = [p, p] = 0$$

Dal primo commutatore segue

$$qp - pq = i\hbar \implies qp^2 - pqp = i\hbar p \implies qp^2 - p^2q - i\hbar p = i\hbar p$$

In generale si ottiene

$$[q, p^n] = ni\hbar p^{n-1}, \quad [p, q^n] = -in\hbar q^{n-1}$$

cioè relazioni simili a quelle delle derivate. Si consideri una generica funzione dei momenti e delle coordinate:

$$[q, G(p)] = i\hbar \partial_p G(p), \quad [p, F(q)] = -i\hbar \partial_q F(q)$$

Si consideri l'operatore di traslazione in una dimensione

$$T(a) = e^{-ia\frac{p}{\hbar}}$$

dove  $a$  è una coordinata. Dal primo dei due commutatori sopra segue

$$qT(a) = T(a)q + i\hbar \partial_p T = T(a)q + aT(a) = T(a)(q + a)$$

L'operatore di posizione agisce sugli autostati della posizione come

$$\hat{q} |q'\rangle = q' |q'\rangle$$

Applicando prima l'operatore di traslazione, si ottiene

$$\hat{q}T(a) |q'\rangle = (q' + a)T(a) |q'\rangle$$

Il vettore  $T(a) |q'\rangle$  è ancora autovettore della posizione ed ha autovalore  $q' + a$ . Il parametro  $a$  è un numero reale arbitrario. Se lo spettro di un operatore che ha commutatore  $i\hbar$  con un altro è continuo e illimitato (superiormente o inferiormente), allora pure lo spettro dell'altro operatore è continuo e illimitato. In questo caso lo spettro dell'operatore di traslazione  $T(a)$  è continuo e illimitato, pertanto lo è pure quello della posizione  $\hat{q}$ .

Ne si vede la motivazione. Se due operatori sono finiti e discreti, allora — sapendo  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  —

$$0 = \text{Tr}[A, B] = \text{Tr } i\hbar = Ni\hbar$$

che è una contraddizione. Pertanto, operatori che non commutano, non possono essere finiti, in modo che la traccia non sia definita.

Seguendo Pauli, per rendere coerenti la meccanica relativistica e la meccanica quantistica, bisogna aggiungere alle regole di commutazione ordinarie — come  $[x, p] = i\hbar$  —, tutte le altre regole di commutazione:

$$[t, H] = -i\hbar, \quad [x, H] = 0, \quad [t, p] = 0$$

Per la prima regola di commutazione, supponendo di avere un operatore tempo, poiché  $t$  è illimitato, allora pure l'hamiltoniana  $H$  deve avere spettro illimitato (in particolare illimitato inferiormente): ciò non è possibile perché non ci sarebbe uno stato fondamentale stabile ed i sistemi non sarebbero quantizzabili. La seconda regola di commutazione afferma che la posizione è conservata e misurabile in modo indipendente dall'energia. Similmente per la terza regola. Pertanto, la possibilità di trovare regole di commutazione compatibili con la regola tra posizione e momento, generalizzate ai quadrivettori posizione e momento, porta ad un assurdo.

## Lezione 3

### 1.2 Infiniti gradi di libertà

Per passare ad una teoria dei campi, bisogna passare ad infiniti gradi di libertà. Si vede un esempio in meccanica classica. Si consideri una corda vibrante in una dimensione: si hanno  $n$

mer 04 ott  
2023 10:30

masse  $m$  alternate a delle molle di costante  $k$ . Nello stato a minima energia, tutte le masse hanno una distanza pari al passo reticolare  $a$ . La lagrangiana del sistema è data da

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La corda ha una dimensione finita e bisogna scegliere le condizioni al contorno: si possono fissare gli estremi  $q_1(t) = q_n(t) = 0$  oppure imporre delle condizioni periodiche  $q_i(t) = q_{i+n}(t)$ . Quest'ultima condizione permette di passare ad un numero infinito di particella. L'hamiltoniana è data da

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

La densità di massa e la tensione della corda sono

$$\rho = \frac{m}{a}, \quad \sigma = ka$$

Nel limite di  $a \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\frac{q_{j+1} - q_j}{a} \rightarrow \partial_x \phi(x, t), \quad \sum_j \rightarrow \frac{1}{a} \int dx$$

dove  $\phi$  è il campo spostamento di ogni massa dalla propria posizione di equilibrio. La lagrangiana diventa una funzione del campo e, passando in tre dimensioni, si ha

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

L'hamiltoniana è data da

$$H(\phi, \dot{\phi}) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\nabla \phi)^2 \right]$$

Si introducono le densità di lagrangiana e di hamiltoniana

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}$$

I momenti coniugati sono

$$\pi = \partial_{\dot{\phi}} \mathcal{L}, \quad \mathcal{H} = \pi \cdot \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

Le equazioni del moto sono

$$\partial_{\phi} \mathcal{L} - \partial_{\mu} \partial_{\mu} \phi \mathcal{L} = 0$$

In generale, si utilizzano le condizioni periodiche perché le teorie trattate sono locali. Il campo elettromagnetico è un campo a lungo raggio, ma si può considerare locale perché la materia è complessivamente neutra: oltre una certa distanza, il campo non ha più effetto.

Utilizzare un campo porta una difficoltà. Si è riusciti a scrivere l'energia relativistica, ma non si riesce a scrivere in modo relativisticamente corretto un potenziale. Infatti, un potenziale descrive un'interazione istantanea. Bisogna utilizzare qualcos'altro: uno scambio di particelle, i mediatori delle interazioni fondamentali. Il potenziale in quanto tale non può più esistere.

### 1.3 Formalismo covariante

Si veda Landau vol. 2 per una trattazione completa. Si studia il formalismo covariante nella relatività speciale. Le trasformazioni di Galileo sono equivalenti alle trasformazioni di Lorentz nel limite di piccole velocità.

Si considerino due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$  equiversi. Il secondo si muove lungo l'asse  $z$  del primo. Le trasformazioni di Lorentz sono

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 1$$



Queste configurazione e trasformazione sono usate anche successivamente come prototipi. Interessa capire come una certa quantità si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. Queste esistono anche in termini di funzioni iperboliche secondo la rapidità.

L'intervallo spazio-temporale è una quantità costante, un invariante

$$x^\mu x_\mu = s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Dei sistemi di riferimento tipicamente usati sono:

- il target system, cioè il sistema del laboratorio solidale con una particella su cui impatta un'altra particella;
- il riferimento del centro di massa.

Qualunque evento è caratterizzato da un punto  $(t, x, y, z)$  nello spazio di Minkowski. Si introduce il quadrivettore posizione

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

Le sue componenti sono coordinate contravarianti perché controvariano rispetto le trasformazioni dei cambi di base cioè le trasformazioni di Lorentz. Il moto di una particella è una curva, una linea di universo,  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  che descrive come essa si muove nello spazio-tempo. Le trasformazioni nello spazio di Minkowski sono trasformazioni lineari e corrispondono alle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Nel formalismo covariante bisogna fare attenzione alla posizione degli indici: scritture del tipo  $x^\mu x^\mu$  sono legittime e perfettamente definite, ma non sono quantità invarianti per trasformazioni di Lorentz. Queste hanno caratteristiche particolari che determinano la forma delle matrici associate. Per i due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$  sopra, si ottiene

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Il tensore metrico è definito secondo la convenzione timelike

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Pertanto, il quadrivettore posizione covariante è dato da

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

In questo modo si passa da componenti contravarianti a covarianti e viceversa. Si può definire la norma

$$\|x\|^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

**Proprietà delle trasformazioni di Lorentz.** Le matrici delle trasformazioni hanno 16 componenti. Le trasformazioni che si vogliono applicare ad un quadrivettore sono le rotazioni ed i boost, cioè sei totali: bisogna limitare le componenti indipendenti. Dato

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

si calcola l'invariante spazio-temporale nel riferimento  $S'$  che deve essere identico all'invariante calcolato nel riferimento  $S$ :

$$x'^\mu x'_\mu = \eta_{\mu\rho} x'^\mu x'^\rho = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Lambda^\rho_\sigma x^\sigma \equiv \eta_{\alpha\theta} x^\alpha x^\theta$$

Poiché si considera lo stesso vettore, allora l'identità vale per componenti. Quindi si hanno delle relazioni tra gli elementi di matrice delle trasformazioni di Lorentz:

$$\Lambda^\mu_\nu \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma = \eta_{\nu\sigma}$$

Sommando su  $\rho$  si ottiene  $\Lambda_{\mu\sigma}$  da cui segue

$$\eta_{\nu\sigma} = \Lambda^\mu_{\nu} \Lambda_{\mu\sigma} = (\Lambda^\top)_{\nu}^{\mu} \Lambda_{\mu\sigma}$$

Alzando l'indice  $\nu$  tramite la metrica si ottiene

$$\delta^\nu_{\sigma} = (\Lambda^\top)_{\mu}^{\nu} \Lambda^\mu_{\sigma} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda^\mu_{\sigma} = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_{\beta} \eta^{\beta\nu} \Lambda^\mu_{\sigma} = (\eta \Lambda \eta^{-1})_{\mu}^{\nu} \Lambda^\mu_{\sigma} = [(\eta \Lambda \eta^{-1})^\top]^\nu_{\mu} \Lambda^\mu_{\sigma}$$

che in forma matriciale risulta essere

$$I = (\eta \Lambda \eta^{-1})^\top \Lambda \iff \eta = \Lambda^\top \eta \Lambda \iff \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta = \eta \Lambda \eta^{-1}$$

Per passare alla notazione matriciale bisogna porre attenzione alla posizione degli indici. La matrice trasposta di  $\Lambda^\mu_{\sigma}$  non ha gli indici posti come  $(\Lambda^\top)^\nu_{\mu}$ , bensì come  $(\Lambda^\top)_{\mu}^{\nu}$ . Infatti vale<sup>3</sup>

$$\Lambda = \Lambda^\mu_{\nu}, \quad \Lambda^\top = (\Lambda^\top)_{\mu}^{\nu}, \quad \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$$

così come

$$\Lambda^\mu_{\nu} = (\Lambda^\top)_{\nu}^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$$

La derivazione può seguire anche un altro modo. Si può introdurre direttamente la matrice trasposta

$$\Lambda^\mu_{\nu} \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma} \implies (\Lambda^\top)_{\nu}^{\mu} \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma} \implies \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

La scrittura tramite matrici permette di capire che il tensore metrico è lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale. Le matrici delle trasformazioni di Lorentz sono definite dall'equazione derivata sopra. Le equazioni indipendenti che caratterizzano le matrici sono  $2^{-1}n(n+1)$  cioè dieci in quattro dimensioni. I gradi di libertà risultano essere sei: i tre angoli di Eulero e le tre componenti della velocità.

Infine, il determinante è dato da

$$\det(\Lambda^\top \eta \Lambda) = \det \eta \implies (\det \Lambda)^2 = 1$$

Il volume quadridimensionale è preservato nelle trasformazioni.

**Elementi di teoria dei gruppi.** Le trasformazioni di Lorentz costituiscono il gruppo di Lorentz  $O(1,3)$ . Un gruppo è un insieme  $G$  in cui esiste una regola di composizione tale per cui vale:

- chiusura:  $g_i \circ g_k = g_j \in G$ ;
- associatività:  $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ ;
- elemento identità:  $\exists g_0$  tale per cui  $g_0 \circ g_i = g_i \circ g_0 = g_i$  per ogni  $g \in G$ ;
- elemento inverso:  $\forall g_i \in G, \exists g_s \in G$  tale per cui  $g_s \circ g_i = g_i \circ g_s = g_0$ .

Il gruppo di Lorentz è continuo. Si verificano queste proprietà. La composizione di più trasformazioni di Lorentz fornisce

$$x''^\mu = (\Lambda')^\mu_{\nu} x'^\nu = (\Lambda')^\mu_{\nu} \Lambda^\nu_{\sigma} x^\sigma \implies x'' = \Lambda' \Lambda x$$

Sfruttando il determinante si ha

$$\det \eta = \det((\Lambda' \Lambda)^\top \eta \Lambda' \Lambda) \implies 1 = [\det(\Lambda' \Lambda)]^2$$

L'associatività è data dalla linearità delle trasformazioni di Lorentz. L'identità è  $I$ , mentre l'inversa è  $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta$ .

<sup>3</sup>Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/567237> e <https://physics.stackexchange.com/q/456640>.

**Trasformazioni di tensori.** Un quadrivettore è un insieme di quattro componenti che si trasformano come le coordinate. Essi si rappresentano come vettori colonna e sono detti semplicemente vettori. Per la velocità si ha

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu}$$

Un tensore di tipo  $(2, 0)$  è un oggetto di sedici componenti per cui ogni indice si trasforma come le coordinate

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} T^{\rho\sigma}$$

Un quadrivettore covariante si trasforma come

$$v'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} v'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} v^{\rho} = \Lambda_{\mu}^{\nu} v_{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} v_{\nu} \implies v' = v \Lambda^{-1}$$

Essi si rappresentano come vettori riga e sono detti covettori: sono i duali dei vettori. La derivata rispetto un quadrivettore covariante si può scrivere come

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Sapendo  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ ,  $x' = \Lambda x$  e moltiplicando da sinistra per  $\Lambda^{-1}$ , si ha

$$\Lambda^{-1} x' = x \implies \eta^{-1} \Lambda^{\top} \eta x' = x \implies x^{\nu} = (\Lambda^{\top})^{\nu}_{\mu} x'^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x'^{\mu}$$

oppure in modo più diretto

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \implies (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} x'^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \delta^{\rho}_{\nu} x^{\nu} = x^{\rho}$$

Dunque si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \iff \partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}$$

La derivata di un quadrivettore rispetto alle componenti contravarianti  $\partial_{\mu} v^{\mu}$  è un invariante. Il d'Alembertiano  $\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu}$  è anch'esso invariante. Data un'equazione nel formalismo covariante, la sua forma è identica in ogni sistema di riferimento inerziale. Ad esempio

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0, \quad \square A^{\mu} = v^{\mu}$$

## Lezione 4

L'equazione di Schrödinger non è un invariante relativistico e nemmeno invariante galileiano. Basta considerare  $x' = x + vt$ . Bisogna ridefinire la funzione d'onda con un fattore di fase di un argomento che è funzione della velocità, dell'energia e della massa: l'equazione non è invariante, ma le osservabili non cambiano perché compare solo un fattore di fase.

gio 05 ott  
2023 10:30

**Altre proprietà delle trasformazioni di Lorentz.** Un tensore di tipo  $(p, q)$  si trasforma con  $p$  componenti contravarianti e  $q$  componenti covarianti. Le trasformazioni di Lorentz contengono sei parametri: gli angoli di Eulero e le componenti della velocità, corrispondenti alle rotazioni ed ai boost. Si può considerare una trasformazione più generale che include anche una traslazione ottenendo il gruppo di Poincaré

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + \delta^{\mu}$$

con  $\delta^{\mu}$  costante.

Il determinante è una funzione continua degli elementi di matrice, pertanto non può passare tra due valori discontinui, 1 e  $-1$ . Esistono quattro settori disconnessi del gruppo di Lorentz. Si consideri

$$\eta_{\sigma\rho} = \Lambda^{\mu}_{\sigma} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho}$$

Scegliendo  $\rho = \sigma = 0$  si ha

$$1 = \Lambda^{\mu}_{0} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{0} = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \implies \Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2}$$

Insieme al determinante, si hanno quattro settori non legati tra loro: non si può passare da un settore all'altro. Tali settori sono:

- trasformazioni ortocrone proprie:  $\Lambda^0_0 \geq 1$ ,  $\det \Lambda = 1$ . Esse sono le trasformazioni infinitesime che si possono infinitamente risommare a partire dall'unità; esse formano un gruppo. Un esempio di trasformazione è l'identità.
- trasformazioni ortocrone improprie:  $\Lambda^0_0 \geq 1$ ,  $\det \Lambda = -1$ . Un esempio di trasformazione è la parità  $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .
- trasformazioni anticrone improprie:  $\Lambda^0_0 \leq -1$ ,  $\det \Lambda = -1$ . Un esempio di trasformazione è l'inversione temporale  $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .
- trasformazioni anticrone proprie:  $\Lambda^0_0 \leq -1$ ,  $\det \Lambda = 1$ . Un esempio di trasformazione è la combinazione delle precedenti  $PT = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$ .

Questi settori sono disgiunti perché non esiste una trasformazione infinitesima che permette di passare dall'unità ad un settore diverso dal primo: bisogna utilizzare delle trasformazioni discrete.

**Teorema 1.1.** Le trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono non cambiano il segno della componente temporale di un vettore di tipo tempo.

*Dimostrazione.* Si consideri

$$\Lambda^0_0 = \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2} = \sqrt{1 + |\mathbf{\Lambda}|^2} > |\mathbf{\Lambda}|$$

Un vettore di tipo tempo è caratterizzato da

$$v_\mu v^\mu = (v^0)^2 - |\mathbf{v}|^2 > 0 \implies (v^0)^2 > |\mathbf{v}|^2$$

Si consideri  $v^0 > |\mathbf{v}|$  e  $v^0 > 0$ . Applicando una trasformazione di Lorentz si ottiene

$$v'^0 = \Lambda^0_0 v^0 + \Lambda^0_i v^i = \Lambda^0_0 v^0 + |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{v}| \cos \theta \geq \Lambda^0_0 v^0 - |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{v}| > \Lambda^0_0 v^0 - \Lambda^0_0 |\mathbf{v}| > 0$$

Dunque la trasformazione mantiene la qualità di tipo tempo del vettore. La dimostrazione è analoga per  $v^0 < 0$ .  $\square$

Questo teorema si può vedere in modo geometrico. Un evento nell'origine non può influenzarne un altro che si trova al di là della bisettrice del diagramma di Minkowski. La componente temporale di un quadrivettore è la distanza temporale rispetto l'origine. Operando una trasformazione di Lorentz, l'evento può avvenire prima o dopo l'origine, in base al sistema di riferimento considerato: non c'è causalità.

Si consideri un vettore di tipo tempo con norma  $k^2 > 0$ . Essa è la stessa per ogni riferimento inerziale. Pertanto

$$t^2 - x^2 = k^2 \implies t = \pm \sqrt{k^2 + x^2}$$

cioè un iperboloide nello spazio di Minkowski che si trova nella zona sopra e sotto all'origine, ma le due zone sono disconnesse e la componente di tipo tempo non cambia. D'altra parte, per un vettore di tipo spazio, la norma è  $-k^2$  con  $k^2 > 0$ , da cui

$$x^2 - t^2 = k^2$$

cioè ancora un iperboloide, ma al di fuori dal cono di luce, ai lati dell'origine. Una trasformazione di Lorentz cambia il segno della componente tempo e per questo non si può avere una relazione di causalità.

## 1.4 Equazioni di Maxwell

Vedere Landau, vol. 2, cap. 4, p. 70.

**Leggi di Maxwell.** Le equazioni di Maxwell sono quattro equazioni, due scalari e due vettoriali, per un totale di otto equazioni scalari:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

I gradi di libertà non sembrano essere corretti. Sei gradi di libertà fisici (le componenti dei campi), ma otto equazioni: alcune di queste sono ridondanti. In fisica classica, la conservazione della carica è aggiunta manualmente alla legge di Ampère e non si può dedurre dalle equazioni di Maxwell (dell'elettrostatica):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Non è evidente che le equazioni di Maxwell siano invarianti relativistici. In forma integrale, la legge di Gauss è

$$\int_V \rho d^3x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato il teorema della divergenza (o teorema di Gauss). Per la seconda equazione, la legge di Ampère–Maxwell, si ha

$$\partial_t \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato il teorema di Stokes. La terza, la legge di Gauss per il magnetismo, è analoga alla prima ed afferma l'inesistenza del monopolo magnetico:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La quarta equazione, la legge di Faraday, è analoga alla seconda

$$-\partial_t \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

**Formalismo covariante.** Si introducono dei quadrivettori utili per lo studio dell'elettrodinamica:

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\nabla), \quad J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$$

Il secondo si può motivare nel seguente modo. La carica infinitesima  $\rho dV = dq$  è un invariante relativistico. Operando una trasformazione di Lorentz, la misura diventa

$$d^4x' = dt' dx' dy' dz' = \left| \frac{\partial(t', x', y', z')}{\partial(t, x, y, z)} \right| d^4x = \det \Lambda d^4x = d^4x$$

cioè è un invariante. Poiché  $\rho dV$  è un invariante e  $dV$  si trasforma come le componenti spaziali di un quadrivettore, allora  $\rho$  si deve trasformare come la componente temporale. Pertanto, l'equazione di continuità è data da

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

che è chiaramente un invariante relativistico.

Si consideri la legge di Gauss per il magnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

dove  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore. Si dimostra l'implicazione sopra tramite il simbolo di Levi–Civita

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

L'uguaglianza è nulla poiché  $\varepsilon_{ijk}$  è completamente anti-simmetrico (in particolare la coppia  $ij$ ), mentre la derivata  $\partial_i \partial_j$  è simmetrica. Inserendo il potenziale vettore nella legge di Faraday, si ha

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \implies \nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0$$

Il vettore tra parentesi è irrotazionale:

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} \equiv -\nabla \phi \implies \mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$$

dove  $\phi$  è il potenziale scalare. Dalla legge di Gauss si ottiene

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) = \rho \implies -\nabla^2 \phi - \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \rho$$

Aggiungendo e rimuovendo  $\partial_t \phi$  all'interno della derivata temporale, segue

$$\rho = \square \phi - \partial_t (\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A}) = \square \phi - \partial_t \partial_\mu A^\mu$$

dove si definisce il quadri-potenziale  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ . Si consideri la legge di Ampère–Maxwell:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \mathbf{A}$$

Ricordando

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mathbf{J} - \partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \mathbf{A} \\ \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi) &= \mathbf{J} \\ \square \mathbf{A} + \nabla(\partial_\mu A^\mu) &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

Le due equazioni trovate si possono riassumere come

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Da questa scrittura risulta evidente che le leggi di Maxwell sono covarianti. Il numero di gradi di libertà sembra essere quattro, poi si scoprono essere tre e infine due. Il campo elettromagnetico è estremamente patologico. Questo è legato al fatto che, quando si quantizza il campo, la particella che media le interazioni ha massa nulla.

Si può riscrivere l'equazione per ottenere

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu \implies \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\mu$$

Il termine tra parentesi è un tensore di tipo (2,0) totalmente anti-simmetrico detto tensore di campo (o di Faraday) per cui le equazioni di Maxwell si possono scrivere come

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Le componenti indipendenti del tensore di campo sono solo sei e corrispondono alle componenti del campo elettromagnetico. Considerando la derivata si ottiene la conservazione della corrente

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu$$

La conservazione della carica è intrinseca alle equazioni di Maxwell. Si studiano le componenti del tensore di campo

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_t A^i + \nabla \phi = -E^i$$

mentre le altre sono

$$F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Le componenti del tensore hanno perso il proprio senso assoluto: il campo elettrico diventa il campo magnetico e viceversa.

## Lezione 5

Il tensore di campo soddisfa l'identità di Bianchi

$$\partial^{[\alpha} F^{\mu\nu]} = 0 \implies \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

Si consideri  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 3$  e  $\nu = 0$ . Si ha

$$-\partial_y E_z + \partial_z E_y - \partial_t B_x = 0 \implies (\nabla \times \mathbf{E})_x = -\partial_t B_x$$

Considerando le altre componenti, si ottengono le due leggi omogenee di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

Da questo si capisce che le otto equazioni scalari di Maxwell sono ridondanti perché le quattro sopra sono dipendenti da quelle con le sorgenti.

lun 09 ott  
2023 10:30

**Trasformazioni delle componenti del tensore.** Si studia come trasforma il tensore di campo. Si consideri la trasformazione prototipo lungo l'asse  $z$ :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Il tensore di campo nel sistema di riferimento  $S'$  è

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho F^{\sigma\rho}$$

Si studiano le componenti

$$F'^{01} = -E'_x = \Lambda^0{}_\sigma \Lambda^1{}_\rho F^{\sigma\rho} = \Lambda^0{}_\sigma F^{\sigma 1} = -\gamma(E_x - vB_y)$$

I due campi si mescolano. Le trasformazioni delle tre componenti del campo elettrico sono

$$E'_x = \gamma(E_x - vB_y), \quad E'_y = \gamma(E_y + vB_x), \quad E'_z = E_z$$

Per trasformazioni più generali si veda Landau, vol. 2, oppure Fisica II o Relatività.

**Invarianza di gauge.** Si trattano le trasformazioni di gauge globali. Si consideri il potenziale vettore  $\mathbf{A}$ . I campi sono:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$$

Noto  $\nabla \times (\nabla f) = 0$ , si ha

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$$

dove  $f$  è una funzione arbitraria. Dunque, il campo magnetico è invariante per la trasformazione

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

Affinché pure il campo elettrico rimanga invariato, si pone

$$\phi' = \phi - \partial_t f \implies E' = -\nabla\phi + \nabla(\partial_t f) - \partial_t \mathbf{A} - \nabla(\partial_t f) = E$$

Unendo le due trasformazioni nel quadri-potenziale, una trasformazione di gauge di prima specie è data da

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

Nell'equazione di campo si ha

$$\square A'^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A'^\nu) = \square A^\mu - \square \partial^\mu f - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) + \square \partial^\mu f = \square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

Si ha una libertà ulteriore sulla scelta del potenziale vettore: le quantità indipendenti sono tre al posto di quattro. Ci sono varie scelte di gauge accorte. In particolare il gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

così come il gauge di Coulomb o di radiazione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

comoda in assenza di cariche. Tuttavia, questa non è covariante.

Le equazioni di campo sono invarianti di gauge e così pure il tensore di campo: esso contiene i campi che sono invarianti di gauge.

Si studia l'origine della scelta di gauge di Lorenz. Si consideri un quadri-potenziale  $A^\mu$  che non si trovi in gauge di Lorenz e un altro quadri-potenziale  $A'^\mu$  che si trovi nel gauge. Poiché vale

$$0 = \partial_\mu A'^\mu = \partial_t \phi' + \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi + \nabla^2 f - \partial_t^2 f$$

$$\nabla^2 f - \partial_t^2 f = -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi)$$

Questa è un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali: ammette sempre soluzione e così si può sempre trovare una trasformazione per porsi nel gauge di Lorenz.

**Tensore di Levi-Civita.** Il tensore metrico è invariante per trasformazioni di Lorentz

$$\eta'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}$$

Similmente il delta di Kronecker

$$\delta_\mu^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu}$$

Si introduce il tensore di Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ permutazione pari di } 0123 \\ -1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ permutazione dispari di } 0123 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Alcune identità sono

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

La prima deriva dal fatto che tutti i diversi prodotti dei tensori metrici  $\eta$  portano un segno negativo, mentre la seconda è data dal numero di permutazioni di quattro indici ed il segno negativo è portato dai prodotti con i tensori metrici. La regola del determinante con il simbolo di Levi-Civita per una matrice  $2 \times 2$  è

$$\varepsilon_{\alpha\beta} M^{\alpha\eta} \varepsilon_{\eta\theta} M^{\beta\theta} = 2 \det M$$

In  $n$  dimensioni, la relazione è analoga:

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} M^{\alpha_1 \beta_1} \dots M^{\alpha_n \beta_n} = n! \det M, \quad \alpha_i, \beta_j = 0, \dots, n-1$$

Si consideri una matrice di Lorentz

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} \Lambda_{\gamma\rho} \Lambda_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 24 \det \Lambda_{\iota\kappa}$$

Gli indici  $\iota\kappa$  sono posti solo per indicare che la matrice di cui si calcola il determinante ha entrambi gli indici covarianti. Confrontando questa equazione con l'identità di contrazione degli indici nel tensore di Levi-Civita — in particolare, moltiplicando quest'ultima per  $-\det \Lambda_{\iota\kappa}$  —, si ha

$$\Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} \Lambda_{\gamma\rho} \Lambda_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \det \Lambda_{\iota\kappa}$$

Alzando il primo indice di ogni matrice  $\Lambda$  e del tensore di Kronecker, si ha

$$\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\rho \Lambda^\delta_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \det \Lambda^\iota_\kappa$$

notando che  $\det \Lambda_{\iota\kappa} = \det(\eta_{\iota\xi} \Lambda^\xi_\kappa) = -1 \det \Lambda^\xi_\kappa$ . Pertanto, il tensore di Levi-Civita è uno pseudo-tensore

$$\varepsilon' = (\det \Lambda) \varepsilon$$

Per trasformazioni improprie compare un segno negativo. Uno pseudo-tensore è una generalizzazione dei vettori assiali detti anche pseudo-vettori, come il momento angolare ed il campo magnetico.

**Tensore duale.** Il tensore duale di un tensore è dato da

$$\tilde{A}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\rho\sigma}$$

Solamente i tensori anti-simmetrici possono avere duale poiché il tensore di Levi-Civita  $\varepsilon$  è anti-simmetrico. Contrarre un duale con sé stesso fornisce uno scalare

$$\tilde{A}^{\mu\nu} \tilde{A}_{\mu\nu} = k$$

Mentre la contrazione di un tensore con il proprio duale fornisce uno pseudo-scalare

$$(\tilde{A}^{\mu\nu} A_{\mu\nu})' = \det \Lambda (\tilde{A}^{\mu\nu} A_{\mu\nu})$$



**Invarianti del campo elettromagnetico.** Si consideri lo scalare del tensore di campo

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) = \tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

L'unico altro scalare che si può costruire è quello con il proprio duale

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Essi sono entrambi invarianti, ma quest'ultimo è uno pseudo-scalare.

Se i campi sono ortogonali in un riferimento, allora lo sono in tutti. Se i moduli dei campi sono uguali in un riferimento, allora lo sono in tutti. A seconda del segno del primo invariante, se i due campi sono ortogonali, allora esiste un riferimento in cui un campo è nullo e l'altro non nullo.

## 2 Equazioni d'onda relativistiche

Si veda Bjorken e Drell "Relativistic quantum mechanics", capp. 1 e 2.

Si vuole ricavare un'equazione d'onda simile a quella di Schrödinger, ma che soddisfi i postulati della meccanica quantistica e della meccanica relativistica. Il problema non è banale. L'equazione di Schrödinger utilizza la traslazione operatoriale  $p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu$ , ma considera delle derivate con ordini diversi

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

Risulta evidente che per trasformazioni di Lorentz, l'equazione non è più identica in forma.

**Primo tentativo.** Si consideri l'hamiltoniana relativistica

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \implies i\hbar \partial_t \psi = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi$$

L'azione di traslazione operatoriale è lecita, tuttavia il ruolo delle derivate è altamente asimmetrico a causa della radice. Essa è definita in termini dell'espansione in serie di potenze: appaiono tutte le potenze della derivata e quindi si hanno infinite derivate, infinite condizioni al contorno e il valore della funzione in un punto dipende da tutti gli altri punti, anche quelli al di fuori del cono di luce. Non si ha località né causalità.

In tutte le teorie che si studiano, avere derivate di ordine maggiore del primo porta a teorie patologiche.

**Secondo tentativo.** In generale, un'equazione operatoriale

$$A\psi = B\psi$$

si può iterare o quadrare solamente se i due operatori commutano. Infatti, applicando  $B$  da sinistra

$$BA\psi = B^2\psi = AB\psi = A^2\psi$$

Gli operatori di derivata temporale  $\partial_t$  e spaziale  $\nabla^2$  commutano. Si può quadrare:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi$$

Tuttavia, in questo modo si ammettono anche energie negative illimitate inferiormente e quindi non c'è stato fondamentale stabile. Infatti, si consideri una soluzione ad onde piane

$$\psi = \exp\left[-\frac{Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{i\hbar}\right] \implies E^2 = p^2 + m^2$$

Ignorando tale problematica, si prosegue. In forma compatta, l'equazione d'onda sopra diventa l'equazione di Klein-Gordon

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0$$

cioè un'equazione scalare con legge di dispersione data dalla relazione di Einstein. Si noti una certa somiglianza con l'equazione per il potenziale vettore nel gauge di Lorenz a meno del termine di massa. Essa è un invariante relativistico. Come per l'equazione di Schrödinger, si ricava la corrente di probabilità. Si moltiplica per  $\psi^*$  e  $\psi$  da sinistra e si fa la differenza:

$$\begin{aligned}\psi^* \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* &= 0 \\ \partial^\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) &= 0 \\ \partial_\mu J^\mu &= 0 \\ \partial_t (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) &= 0\end{aligned}$$

Nel caso di Schrödinger, la prima parentesi è la densità di probabilità  $\psi^* \psi$ , ma in questo caso la parentesi non è definita positiva e non può rappresentare una densità di probabilità. Questo è un altro problema. Integrando l'equazione di continuità si ottiene la conservazione di una probabilità non definita positiva

$$\partial_t \int d^3x (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = 0$$

Partendo da un pacchetto di onde a sole energie positive, l'operatore di evoluzione temporale porta subito le energie negative.

Si potrebbe affermare che le soluzioni ad energia negativa non siano fisiche e quindi non vadano considerate. Questo non si può fare perché, in meccanica quantistica, lo spazio funzionale è ortonormale e completo. Le soluzioni all'equazione di Klein–Gordon sono complete solo considerando anche le soluzioni ad energia negativa. Successivamente, queste si interpretano come le anti-particelle.

Si definisce la densità di probabilità dell'equazione di Klein–Gordon come

$$\rho \equiv \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$$

Nel coefficiente, la velocità della luce  $c^2$  deriva dal d'Alembertiano, l'unità immaginaria rende l'espressione reale ed il fattore restante permette di ottenere un'espressione della corrente di probabilità identica a quella dell'equazione di Schrödinger.

Nel limite di  $v \rightarrow 0$ , si deve ottenere la meccanica quantistica classica. Nell'espressione della densità si sostituisce l'equazione di Schrödinger e si ottiene

$$\rho = \frac{E}{2mc^2} (\psi^* \psi + \psi \psi^*) = \frac{E}{mc^2} \psi^* \psi \sim \psi^* \psi$$

L'equazione di Klein–Gordon è un'equazione relativistica, ma con due problemi: l'energia negativa e la probabilità non definita positiva.

## 2.1 Equazione di Dirac

Si veda anche Dirac, “Principi della meccanica quantistica”, cap. “Teoria relativistica dell'elettrone”.

L'espressione della densità di probabilità, che presenta delle derivate temporali, è dovuta al fatto che l'equazione di Klein–Gordon è di secondo ordine. Dirac si rese conto che per ottenere una densità definita positiva bisogna passare ad un'equazione del prim'ordine.

## Lezione 6

Dirac si concentrò sull'equazione al prim'ordine più generale

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{\hbar c}{i} (\alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y + \alpha_3 \partial_z) \psi + \beta mc^2 \psi = H \psi$$

Il primo membro è la trascrizione operatoriale dell'energia, il secondo membro è il termine di massa insieme ad una generica somma delle derivate spaziali. Le derivate spazio-temporali devono apparire nella stessa forma affinché l'equazione sia relativisticamente corretta. Dirac si rese conto

mar 10 ott  
2023 10:30

che i coefficienti  $\alpha_i$  non possono essere numeri perché le derivate costituiscono il gradiente ed esso si trasforma come le componenti di un vettore. Tali coefficienti sono matrici. Similmente, la funzione d'onda non è scalare poiché la densità di probabilità  $\rho = \psi^* \psi$  è la componente tempo di un quadri-vettore conservato (e quindi si deve trasformare come una componente temporale, ma gli scalari sono invarianti).

Indicando con  $\psi^\dagger$  la versione riga della funzione d'onda  $\psi$ , deve sempre valere

$$\rho = \psi^\dagger \psi$$

cioè  $\rho$  dev'essere una densità di probabilità: la funzione d'onda  $\psi$  si deve trasformare in modo che la densità di probabilità si trasformi come una componente temporale. Seguendo un'interpretazione probabilistica, l'integrale della densità

$$\int d^3x \rho$$

dev'essere invariante e, seguendo lo stesso discorso fatto per la carica elettrica, la misura  $d^3x$  si trasforma come un volume, perciò la densità  $\rho$  deve trasformarsi come una componente temporale. Pertanto, la funzione d'onda dev'essere un vettore colonna

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad \psi^\dagger = [\psi_1^* \quad \cdots \quad \psi_n^*]$$

Inoltre, dev'essere sempre verificata l'equazione di Klein–Gordon perché contiene ed è la trascrizione della relazione di dispersione di Einstein. Ogni componente della funzione d'onda deve soddisfare tale equazione

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi_i = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi_i$$

Si itera l'equazione lineare considerata da Dirac:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \partial_t^2 \psi_i &= \left( \frac{\hbar c}{i} \alpha_i \partial_i + \beta m c^2 \right) \left( \frac{\hbar c}{i} \alpha_j \partial_j + \beta m c^2 \right) \psi_i \\ &= \left[ -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j + \beta^2 m^2 c^4 + \frac{\hbar m c^3}{i} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i \right] \psi \end{aligned}$$

Si noti che gli indici  $ij$  non indicano componenti spaziali, ma si usano per abbreviare la scrittura; inoltre  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  con  $x_i = x, y, z$ . La derivata seconda è simmetrica per scambio degli indici. Il termine  $\alpha_i \alpha_j$  si può scrivere in termini di una parte simmetrica ed una anti-simmetrica

$$\alpha_i \alpha_j = \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i \alpha_j - \alpha_j \alpha_i}{2}$$

La parte anti-simmetrica si annulla quando moltiplicata per la derivata seconda. L'equazione sopra dev'essere uguale a quella di Klein–Gordon per ogni componente. In quest'ultima non compare alcuna derivata mista, ma solamente il laplaciano, pertanto

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \implies \alpha_i^2 = I$$

Inoltre, non sono presenti derivate del prim'ordine:

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

Infine, per confronto si ottiene  $\beta^2 = I$ . Nell'equazione lineare considerata da Dirac, il secondo membro è l'operatore hermitiano. Da ciò segue la condizione di auto-aggiunzione dei coefficienti:

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta$$

Si consideri la traccia dei coefficienti

$$\text{Tr } \alpha_i = \text{Tr}(1\alpha_i) = \text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \beta \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr } \alpha_i \implies \text{Tr } \alpha_i = 0$$

dove alla quarta uguaglianza si è usata la proprietà di ciclicità della traccia

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$$

mentre alla quinta uguaglianza si è usata la relazione di anti-commutazione tra  $\alpha_i$  e  $\beta$ . Le matrici  $\alpha_i$  hanno traccia nulla e così  $\beta$ . Dalle relazioni dei quadrati delle matrici, segue che i loro autovalori sono  $\pm 1$ . Poiché la traccia è nulla (ed è la somma degli autovalori), allora le matrici hanno dimensione  $N$  pari. Le regole di commutazione corrispondono alle stesse delle matrici di Pauli, ma tali matrici sono solo tre. In quattro dimensioni  $N = 4$  si ha

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

La funzione d'onda è un vettore di quattro componenti. L'equazione di Dirac è

$$i\hbar \partial_t \psi = -i\hbar c \alpha_i \partial_i \psi + \beta mc^2 \psi$$

Si consideri la corrente conservata ottenuta tramite l'equazione complessa coniugata

$$-i\hbar \partial_t \psi^\dagger = i\hbar c (\partial_i \psi^\dagger) \alpha_i + mc^2 \psi^\dagger \beta$$

Moltiplicando per la funzione d'onda e sottraendo l'equazione dalla coniugata, si ottiene

$$i\hbar \partial_t (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \partial_i (\psi^\dagger \alpha_i \psi) \implies \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Essendo un'equazione del prim'ordine, la quantità temporale è definita positiva. Si ha

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \psi_i^* \psi_i, \quad J^i = c \psi^\dagger \alpha^i \psi$$

Per ora non si è ancora dimostrato che le due quantità sopra costituiscono un quadri-vettore, né si è dimostrata l'invarianza relativistica della funzione d'onda, ma si è solo ricavata una sua corretta interpretazione probabilistica. Bisogna anche capire cosa sia la funzione d'onda.

**Significato fisico delle soluzioni.** Si studia il caso più semplice. L'operatore derivativo è l'operatore di momento. Ci si pone nel riferimento solidale alla funzione d'onda:

$$i\hbar \partial_t \psi = \beta mc^2 \psi$$

La soluzione di onda piana fornisce

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \psi^2 &= \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \psi^3 &= \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \psi^4 &= \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le prime due corrispondono ad energia positiva, le altre due ad energia negativa.

## 2.2 Limite non relativistico

Si veda Landau, vol. 2, par. 16. Si considera una soluzione ad energia positiva ed un campo esterno  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ .

**Accoppiamento minimale.** Si trova il termine di interazione minimale tra una carica ed il campo esterno. L'azione è il più generale invariante di Lorentz

$$S = \int_a^b \left( -mc \, ds - \frac{e}{c} A_\mu \, dx^\mu \right)$$

dove  $ds = c \, dt \sqrt{1 - \beta^2}$  è invariante ed  $e$  è la carica. Il secondo addendo è pari a

$$-\frac{e}{c} A_\mu \, dx^\mu = \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - e\phi \, dt, \quad \mathbf{v} = d_t \mathbf{x}$$

Dunque

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

Il momento generalizzato (o coniugato, canonico) è

$$\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{v}} L = \gamma m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

dove  $\mathbf{p}$  è il momento meccanico (o cinetico). L'hamiltoniana è data da

$$H = \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{v}} L - L = \gamma mc^2 + e\phi = c \sqrt{m^2 c^2 + \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\phi$$

Questa è l'interazione minimale.

Introducendo il campo esterno, il momento diventa

$$p^i = P^i \rightarrow p^i = P^i - \frac{e}{c} A^i$$

Nella quantizzazione canonica, la traslazione operatoriale  $-i\hbar \nabla$  è fatta sul momento coniugato, non sul momento meccanico. Dunque, l'equazione di Dirac per una particella carica in un campo elettromagnetico esterno

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[ c \boldsymbol{\alpha} \cdot \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi$$

La funzione d'onda è una struttura a quattro componenti su cui operano le matrici  $\alpha_i$ . La funzione d'onda è un bispinore che si può scrivere come un vettore di spinori

$$\psi = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Dato l'operatore del momento meccanico  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ , l'equazione di Dirac diventa

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Si faccia attenzione alle dimensioni degli operatori: le matrici di Pauli sono bidimensionali e ognuna agisce solo su uno spinore, cioè una componente del bispinore intero.

**Ordine zero e ordine primo.** Si studia il limite non relativistico: l'energia cinetica è molto minore dell'energia a riposo della particella. Si sviluppa l'energia relativistica  $E$  in termini di  $\frac{p}{mc} \approx \beta$

$$E = c \sqrt{p^2 + (mc)^2} = mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{p}{mc} \right)^4 + o(p/mc)^5 \right]$$

Il campo esterno dev'essere debole. In questa situazione il termine dominante che si trova nella soluzione ad onde piane è l'energia a riposo  $mc^2$ . Si scrive la funzione d'onda separando il contributo rapidamente variabile — perché dipende da  $mc^2$  — da quello lentamente variabile — la cui energia proviene dal campo esterno:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Inserendo questa espressione nell'equazione di Dirac, si ottiene

$$\begin{aligned} i\hbar \left( -i \frac{mc^2}{\hbar} \right) e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + i\hbar e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \left( c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \varphi \\ -\chi \end{bmatrix} \right) \\ i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si hanno due equazioni in termini degli spinori  $\varphi$  e  $\chi$ . Si consideri la seconda equazione. L'energia residua  $i\hbar \partial_t \chi$  dovuta al campo esterno, cui si è già tolto il termine fortemente oscillante, è molta più piccola dell'energia di riposo  $mc^2$ . Per questo, il primo membro — la derivata temporale — ed il secondo addendo del secondo membro — il termine con il potenziale scalare esterno debole — sono trascurabili rispetto all'ultimo termine. Dunque rimane

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} \approx 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \implies \chi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc} \varphi$$

Il secondo spinore è più piccolo rispetto al primo

$$\chi \sim \frac{v}{c} \varphi$$

Nel limite non relativistico, le componenti inferiori del bispinore sono superflue. Nella struttura fine dell'atomo di idrogeno, come si vede successivamente, si possono prendere anche ordini superiori nell'energia e quindi nella velocità.

Si sostituisce l'andamento sopra dello spinore  $\chi$  nell'equazione di Dirac lentamente variabile:

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[ \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m} + e\phi \right] \varphi$$

Si consideri il termine di prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \pi_i \pi_j &= [\delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k] \pi_i \pi_j = [\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k] \left( P - \frac{e}{c} A \right)_i \left( P - \frac{e}{c} A \right)_j \\ &= \pi^2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \left[ P_i P_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i P_j - \frac{e}{c} P_i A_j \right] \\ &= \pi^2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \left[ P_i P_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i P_j - \frac{e}{c} A_j P_i - \frac{e}{c} (P_i A_j) \right] \\ &= \pi^2 - i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} (P_i A_j) = \pi^2 - \varepsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} \hbar (\partial_i A_j), \quad \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j = (\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k \\ &= \pi^2 - \frac{e}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Alla prima riga si utilizzano le regole di commutazione ed anti-commutazione delle matrici di Pauli:

$$2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k + 2\delta_{ij} I = [\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\sigma_i \sigma_j$$

Alla seconda riga, nell'ultimo addendo, bisogna ricordare che il momento coniugato è un operatore derivativo e la scrittura dell'addendo significa  $P_i(A_j \varphi)$ . Pertanto

$$-\frac{e}{c} P_i A_j = -\frac{e}{c} A_j P_i - \frac{e}{c} (P_i A_j)$$

L'ultimo addendo deriva solamente  $A_i$  e non la funzione d'onda. Alla terza riga il prodotto  $A_i P_j$  è simmetrico per scambio degli indici e, sommato con il tensore di Levi-Civita, si ha zero. Lo stesso vale per  $P_i P_j$  e  $A_i A_j$ .

Dunque, nel limite non relativistico, l'equazione di Dirac è

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[ \frac{(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\phi \right] \varphi$$

Questa è un'equazione di Pauli per una particella di carica  $e$  in un campo esterno. Il primo addendo è il termine cinetico, ma è comparso in modo naturale un termine di interazione con il campo magnetico.

## Lezione 7

mer 11 ott  
2023 10:30

La definizione dell'operatore di momento di spin

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$$

viene in modo naturale. Esso è un momento angolare intrinseco, separato dal momento angolare corrispondente ai gradi di libertà spaziali.

L'equazione di Dirac descrive fermioni a spin  $\frac{1}{2}$ , mentre l'equazione di Klein–Gordon tratta bosoni scalari.

**Fattore giromagnetico.** Si consideri il caso particolare di un debole campo magnetico costante e uniforme. Il potenziale vettore di un campo magnetico costante è dato da

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x}$$

Sapendo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

il campo magnetico è

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{x} \\ &= \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{x} = \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B} = \mathbf{B} \end{aligned}$$

Nel secondo addendo della prima riga, l'operatore differenziale si applica sia al campo magnetico che alla posizione. L'espressione  $\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z$  è detta operatore di avvezione (advection operator).

La scrittura sopra è fuorviante. Un modo più semplice per verificarla è

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l x_m) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \partial_j (B_l x_m) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (B_l x_m) \\ &= \frac{1}{2} [x_j \partial_j B_i + B_i \partial_j x_j - x_i \partial_j B_j - B_j \partial_j x_i] = \frac{1}{2} [0 + 3B_i - 0 - B_j \delta_{ij}] = B_i \end{aligned}$$

Il primo zero deriva dal fatto che  $\mathbf{B}$  è costante, mentre il secondo deriva dalla legge di Gauss per il magnetismo.

Si consideri l'equazione di Pauli sopra. Il quadrato del momento meccanico è

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \left(P - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)_i \left(P - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)_i = P_i P_i - \frac{e^2}{c^2} A_i A_i - \frac{e}{c} A_i P_i - \frac{e}{c} P_i A_i \\ &\sim P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i - i \frac{e}{c} \hbar (\partial_i A_i) = P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i - i \frac{e}{2c} \hbar \partial_i [\varepsilon_{ijk} B_j x_k] \\ &= P_i P_i - \frac{2e}{c} A_i P_i = P^2 - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = P^2 - \frac{e}{c} \varepsilon_{ijk} B_j x_k P_i = P^2 - \frac{e}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

Alla seconda riga, si considera solamente il prim'ordine in  $\mathbf{A}$ . Inoltre, poiché  $\mathbf{B}$  è uniforme, vale

$$\partial_i [\varepsilon_{ijk} B_j x_k] = \varepsilon_{ijk} B_j \delta_{ik} = 0$$

giacché il delta di Kronecker è simmetrico e il tensore di Levi–Civita è anti-simmetrico.

Unendo quanto trovato si ha

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[ \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \right] \varphi$$

da cui si può trovare il fattore giromagnetico  $g = 2$ . Questo è tutto quanto si può trovare fino al prim'ordine in  $\beta = v/c$ .

**Ordine secondo.** Si veda Sakurai, Meccanica quantistica avanzata, §§ 3-3, 3-7. Si consideri l'equazione di Dirac di partenza:

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}$$

Si esplicita la dipendenza temporale della funzione d'onda:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Gli spinori a destra sono indipendenti dal tempo. Si vuole scoprire la struttura fine dell'atomo di idrogeno. Il potenziale è dato da

$$\phi = -\frac{Ze}{4\pi r}$$

da cui il momento meccanico diventa  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}$ . Si riscrive l'equazione in modo diverso

$$(E - mc^2 - e\phi)\varphi = -i\hbar c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\chi, \quad (E + mc^2 - e\phi)\chi = -i\hbar c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\varphi$$

Si espande la relazione tra  $\chi$  e  $\varphi$  fino al secondo ordine in  $\beta$ . Dalla seconda equazione si ha

$$\chi = -\frac{i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{E + mc^2 - e\phi} \varphi = \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{E + mc^2 - e\phi} \varphi$$

Si ipotizza il limite non relativistico:

$$E \approx mc^2, \quad |e\phi| \ll mc^2$$

Posta l'energia non relativistica pari a  $E^{\text{NR}} = E - mc^2 \ll mc^2$ , il termine a denominatore si riscrive come

$$(E + mc^2 - e\phi)^{-1} = (E^{\text{NR}} + 2mc^2 - e\phi)^{-1} = \frac{1}{2mc^2} \left( 1 + \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{2mc^2} \left( 1 - \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right)$$

Quindi

$$\chi \approx \frac{1}{2mc} \left( 1 - \frac{E^{\text{NR}} - e\phi}{2mc^2} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \varphi$$

La procedura segue lo stesso metodo dell'ordine precedente, tuttavia il calcolo è più complicato. Sorge anche un problema. Infatti, in precedenza si è passati dallo spinore alto del bispinore di Dirac allo spinore di Schrödinger e all'equazione di Pauli associata. In tal caso, la normalizzazione non è stata un problema. Lo spinore di Schrödinger  $\varphi_S$  deve conservare la normalizzazione del bispinore

$$\int d^3x |\varphi_S|^2 = \int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = 1$$

Ogni formula dev'essere coerente con l'ordine a cui si sta sviluppando. Nel secondo integrale, si ha un termine di ordine zero ed un termine di ordine  $\beta^2$  rispettivamente. Nel caso precedente, la normalizzazione non è un problema poiché si considera l'espansione fino al prim'ordine in  $\beta$  e lo spinore di Schrödinger  $\varphi_S$  coincide con lo spinore  $\varphi$  componente del bispinore di Dirac. Tuttavia, ora bisogna essere accorti nella normalizzazione identificando correttamente lo spinore di Schrödinger. Evitare tale passaggio porta ad un'hamiltoniana non hermitiana. Dunque

$$\int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = \int d^3x \left[ |\varphi|^2 - \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi)^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi) \right]$$

dove si ha

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\partial_i\partial_j = \nabla^2$$

Pertanto

$$\int d^3x (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) = \int d^3x \left[ |\varphi|^2 - \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \varphi^* \nabla^2 \varphi \right] = \int d^3x \varphi^* \left[ 1 + \frac{P^2}{4m^2 c^2} \right] \varphi$$



In questo modo si esplicita il primo spinore in termini del corretto spinore di Schrödinger:

$$\varphi_S = \left[ 1 + \frac{P^2}{8m^2c^2} + o\left(\frac{P^3}{m^3c^3}\right) \right] \varphi \iff \varphi = \left[ 1 - \frac{P^2}{8m^2c^2} + o\left(\frac{P^3}{m^3c^3}\right) \right] \varphi_S$$

Questo implica anche

$$\begin{aligned} \chi &\approx \frac{1}{2mc} \left( 1 - \frac{E - mc^2 - e\phi}{2mc^2} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \left( 1 - \frac{P^2}{8m^2c^2} \right) \varphi_S \\ &\approx \frac{1}{2mc} \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \left( 1 - \frac{P^2}{8m^2c^2} \right) - \frac{E - mc^2 - e\phi}{2mc^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \right] \varphi_S \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione di Dirac per lo spinore  $\varphi$  a cui si è rimossa la dipendenza temporale porta ad avere

$$E^{\text{NR}} \varphi_S = (E - mc^2) \varphi_S = \left[ \frac{P^2}{2m} + e\phi - \frac{P^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{P}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] \varphi_S$$

Questa equazione è esatta fino al secondo ordine in  $\beta$ . Essa corrisponde all'equazione di Schrödinger per la struttura fine dell'atomo di idrogeno. La struttura fine segue automaticamente dall'equazione di Dirac.

Si analizzano gli ultimi tre termini. Il primo termine è la correzione relativistica

$$E = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} = mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{p}{mc} \right)^4 + o(p/mc)^5 \right]$$

Il secondo è l'interazione spin-orbita. A Meccanica Quantistica, l'aggiunta di questo termine viene giustificata affermando che l'elettrone vede il protone, una particella carica, muoversi e quindi presentare un campo magnetico. Per trasformazioni di Lorentz, si ha

$$c\mathbf{B}' = \gamma(c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + o(\beta^2)$$

Ma utilizzare le trasformazioni di Lorentz è errato perché l'elettrone ha un riferimento non inerziale. Inoltre, manca la precessione di Thomas, un effetto puramente cinematico. Dall'equazione di Dirac, il fattore giromagnetico  $g = 2$  viene già naturalmente. Per un potenziale centrale si ha

$$e\mathbf{E} = -\nabla(e\phi) = -\nabla V = -\mathbf{r} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} \partial_r V \right)$$

Dunque

$$-\frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{P}) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} d_r V \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} d_r V \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} = \frac{g-1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} d_r V \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

L'ultimo addendo è il termine di Darwin e non ha alcun equivalente classico. In una teoria relativistica, la localizzazione di una particella perde di significato. Non ha senso affermare che un elettrone risente del campo elettrico del protone in un punto  $\mathbf{r}$  perché l'elettrone non può essere confinato in quel solo punto, ma è delocalizzato su una scala delle dimensioni data dalla propria lunghezza Compton: l'elettrone fluttua. Tale fluttuazione è detta zitterbewegung: la presenza di stati ad energia negativa non permette di localizzare una particella poiché si scopre che è presente una fluttuazione molto rapida. La densità di carica è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = e\delta^3(\mathbf{r})$$

Il termine di Darwin è data da

$$H_D = \frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2} \delta^3(\mathbf{r})$$

Solamente gli stati in onda s hanno una funzione d'onda non nulla nell'origine: il termine di Darwin ha contributi solamente per gli stati s. Se un elettrone non può essere localizzato meglio della propria lunghezza Compton, allora la scrittura  $V(r)$  non ha senso, ma bisogna mediare temporalmente il potenziale in un volume isotropo grande quanto la lunghezza Compton. Dunque

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \approx V(r) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla V + \frac{1}{2} \delta x_i \delta x_j \partial_{x_i x_j}^2 V$$

Poiché il volume è isotropo, la media temporale dello spostamento  $\delta \mathbf{r}$  è nulla e lo stesso si applica a  $\delta x_i$  e  $\delta x_j$  quando  $i \neq j$ . I fattori lineari si mediano a zero, mentre quelli quadratici forniscono contributi (ma non quelli misti). Quindi

$$\langle \Delta V \rangle \approx \frac{1}{6} \nabla^2 V \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2$$

Il fattore  $1/3$  è la normalizzazione della media in ogni direzione. Questo è il contributo all'energia dovuto al fatto che l'elettrone è delocalizzato. In modo approssimato si ha

$$\langle \Delta V \rangle = \tilde{H}_D = \frac{e^2 \hbar^2}{6m^2 c^2} \delta^3(\mathbf{r})$$

ricordando che la permittività elettrica del vuoto  $\epsilon_0$  è 1 nelle unità di Heaviside–Lorentz e che vale (si veda Fisica Matematica)

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} = \delta^3(\mathbf{r})$$

Il calcolo approssimato fornisce la stessa formula del calcolo esatto, tranne per il fattore numerico.

L'unica cosa che manca da giustificare è il principio di Pauli. Infatti, si è già trovato il fattore giromagnetico, il termine spin-orbita e lo spin.

## Lezione 8

gio 12 ott  
2023 10:30

### 2.3 Covarianza

Si veda Bjorken e Mandl. Nel Bjorken, la matrice della trasformazione di Lorentz è  $a^\mu{}_\nu$ .

Le informazioni fisiche ricavate dall'equazione di Dirac sono risultati esatti in accordo con quanto già noto. Questo è stato possibile poiché l'elettrone dell'atomo di idrogeno è altamente non relativistico. Tuttavia, non si sa come trasforma il bispinore, né si è dimostrata la covarianza dell'equazione di Dirac.

La relazione che definisce le trasformazioni di Lorentz è data da

$$\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\nu{}_\rho$$

D'ora in avanti si trattano solo le trasformazioni proprie. Inoltre, le trasformazioni ortocrone proprie si possono ottenere tramite trasformazioni infinitesime a partire dall'unità.

Le matrici  $\alpha_i$  e  $\beta$  sono asimmetriche, si introducono le matrici di Dirac nella base di Dirac

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \gamma^0 \alpha_i = \beta \alpha_i$$

Sebbene si uniscano le matrici di Dirac in un quadri-vettore, bisogna considerarle come invarianti di Lorentz. Successivamente si studia cosa succede a tali matrici quando inserite tra spinori. L'equazione di Dirac diventa

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Si studiano le regole di commutazione delle matrici gamma. Le regole di commutazione delle matrici  $\alpha_i$  e  $\beta$  sono

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

Si inserisce  $\beta^2 = 1$  tra le matrici  $\alpha_i$  del primo anti-commutatore:

$$\alpha_i \beta \beta \alpha_j + \alpha_j \beta \beta \alpha_i = 2\delta_{ij} \implies \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

Poiché le matrici  $\alpha_i$  e  $\beta$  sono hermitiane, l'aggiunzione porta a

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = (\beta \alpha_i)^\dagger = \alpha_i \beta = -\gamma^i$$

La matrice temporale è hermitiana, quelle spaziali sono anti-hermitiane. La traccia rimane nulla. In forma matriciale, le matrici di Dirac sono

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}$$

Si introduce la notazione di Feynman

$$\not{p} = \gamma^\mu v_\mu = \gamma^0 v_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}, \quad \not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_t + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$$

Introducendo il momento  $p^\mu = i\hbar \partial^\mu$ , l'equazione di Dirac diventa

$$(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0 \iff (\not{p} - mc)\psi = 0$$

Si dimostra la covarianza. Si considerino due riferimenti  $O$  ed  $O'$ . La scrittura dell'equazione di Dirac nel secondo riferimento è

$$(i\hbar \gamma'^\mu \partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0$$

Le matrici  $\gamma^\mu$  sono state introdotte solamente in base alle proprie regole di anti-commutazione. Tali matrici sono equivalenti a meno di una trasformazione unitaria

$$\gamma'^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad U^\dagger = U^{-1}$$

pertanto, non si riporta più la distinzione delle matrici nei vari riferimenti.

La funzione d'onda si trasforma in modo lineare perché lo sono pure le trasformazioni di Lorentz e l'equazione di Dirac. Lo spinore si trasforma ed il suo argomento si trasforma secondo Lorentz. Posto  $x' = \Lambda x$ , vale

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

cioè deve esistere una trasformazione  $S$ , funzione della trasformazione di Lorentz, che mappa gli spinori nei due riferimenti. Dal primo e dal penultimo membro segue

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x)$$

cioè deve esistere la trasformazione inversa  $S^{-1}$ . Dunque si ottiene

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda)$$

L'equazione di Dirac nel riferimento  $O$  non primato in termini della funzione d'onda del riferimento primato è

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

Moltiplicando per  $S(\Lambda)$  da sinistra si ha

$$[i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\partial_\mu - mc]\psi'(x') = 0$$

La derivata in termini dell'osservatore primato è

$$\partial_\mu = \partial_\mu x'^\nu \partial'_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$$

sapendo che  $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho$ . Inserendo questa espressione nell'equazione di Dirac sopra si ottiene

$$[i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - mc]\psi'(x') = 0$$

Questa è l'equazione di Dirac in termini di quantità del riferimento primato. Se esiste una trasformazione  $S$  tale che

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

allora l'osservatore primato scrive la stessa equazione di Dirac dell'osservatore iniziale. Poiché non si sa calcolare la trasformazione  $S(\Lambda)$ , si utilizzano le trasformazioni di Lorentz infinitesime. Una trasformazione di Lorentz infinitesima è data da

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \eta^\nu{}_\mu + (\Delta\omega)^\nu{}_\mu$$

dove  $\Delta\omega$  è un parametro infinitesimo che non è arbitrario: deve conservare la norma. Considerando  $x^\mu x_\mu$  nel riferimento primato e sostituendo l'espressione trasformata fino al prim'ordine, si ottiene

$$(\Delta\omega)_{\mu\nu} = -(\Delta\omega)_{\nu\mu}$$

Si noti che relazioni di (anti-)simmetria vanno ricavate per indici omologhi, cioè entrambi co(ntra)varianti. I termini misti del parametro infinitesimo si annullano ed esso ha sei gradi di libertà. Questi sono (quasi) i generatori del gruppo di Lorentz. Si sta seguendo una procedura opposta: dalla conservazione della norma, si stanno derivando le trasformazioni di Lorentz. Se la trasformazione  $\Lambda$  è infinitesima, allora si espande la trasformazione  $S$  in serie di potenze:

$$S \approx I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\Delta\omega)^{\mu\nu}, \quad S^{-1} \approx I + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

dove  $\sigma_{\mu\nu}$  è un tensore anti-simmetrico poiché la sua parte simmetrica sommata con  $\Delta\omega$  fornisce zero. Si moltiplica l'equazione che caratterizza le trasformazioni  $S$  per  $S^{-1}$  ed  $S$  da sinistra e da destra rispettivamente:

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda)$$

Si inserisce la trasformazione di Lorentz infinitesima

$$[\eta^\nu{}_\mu + (\Delta\omega)^\nu{}_\mu] \gamma^\mu = \left[ 1 + \frac{i}{4} \sigma_{\lambda\rho} (\Delta\omega)^{\lambda\rho} \right] \gamma^\nu \left[ 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} (\Delta\omega)^{\alpha\beta} \right]$$

Si considerano tutti i termini al prim'ordine in  $\Delta\omega$ :

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu \gamma^\mu = -\frac{i}{4} (\Delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu]$$

Riscrivendo il primo membro in parte simmetrica e parte anti-simmetrica, e ricordando le proprietà di anti-simmetria del parametro infinitesimo, si ha

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu \gamma^\mu = (\Delta\omega)^{\nu\mu} \gamma_\mu = \eta^{\nu\alpha} (\Delta\omega)_{\alpha\beta} \gamma^\beta = \frac{1}{2} (\Delta\omega)_{\alpha\beta} [\eta^{\nu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\nu\beta} \gamma^\alpha]$$

L'equazione sopra al prim'ordine nel parametro infinitesimo diventa

$$2i[\eta^{\nu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\nu\beta} \gamma^\alpha] = [\gamma^\nu, \sigma^{\alpha\beta}]$$

Se esistono sei matrici che soddisfano questa equazione, allora vale l'invarianza di Lorentz. Tali matrici sono date da<sup>4</sup>

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Si calcola la trasformazione  $S$  finita per sapere come si trasforma lo spinore. La sua versione infinitesima è data da

$$S = 1 + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\Delta\omega)^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

Si scrive il parametro infinitesimo come

$$(\Delta\omega)^\nu{}_\mu = \Delta\omega (I_n)^\nu{}_\mu$$

dove  $\Delta\omega$  è un numero infinitesimo mentre  $I_n$  è uno dei sei generatori del gruppo di Lorentz.

**Esempio.** Si vede un esempio di una matrice  $I_n$  generatore. Si consideri la trasformazione prototipo lungo l'asse  $x$ . La matrice è data da

$$I^\nu{}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il suo quadrato ed il suo cubo sono dati da

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I^{2n}, \quad I^3 = I = I^{2n+1}$$

<sup>4</sup>Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/381625>.

Ricordando l'espressione delle funzioni iperboliche e la loro espansione in serie di potenze, la trasformazione finita di una coordinata si ottiene applicando infinite volte la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x'^\nu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \eta + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_1}^\nu \left( \eta + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cdots \left( \eta + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_N}^{\alpha_{N-1}} x^{\alpha_N} = (e^{\omega I})^\nu_\mu x^\mu \\ &= [\cosh(\omega I) + \sinh(\omega I)]^\nu_\mu x^\mu = [1 - I^2 + I^2 \cosh \omega + I \sinh \omega]^\nu_\mu x^\mu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu \end{aligned}$$

dove  $\omega = \Delta\omega N$ . Alla seconda riga si applicano le proprietà di  $I$  riguardo le potenze:

$$\begin{aligned} \cosh(I\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(I\omega)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I^{2k} \omega^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I^2 \omega^{2k}}{(2k)!} = 1 + I^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - I^2 + I^2 + I^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} = 1 - I^2 + I^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

L'operazione per il seno iperbolico è più immediata. Segue

$$\Lambda^\nu_\mu = \begin{bmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè le trasformazioni di Lorentz in forma iperbolica dove  $\omega$  è la rapidità.

**Trasformazione di un bispinore.** La trasformazione di un bispinore è data da

$$\psi'(x') = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \sigma_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu} \right]^N \psi(x) = \exp \left[ -\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu} \right] \psi(x) = S(\Lambda) \psi(x)$$

Per la trasformazione dell'esempio si ha

$$\psi'(x') = \exp \left[ -\frac{i}{2} \omega \sigma_{01} \right] \psi(x)$$

Per una rotazione attorno all'asse  $z$ , il generatore è dato da

$$I^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\psi'(x') = \exp \left[ \frac{i}{2} \sigma_{12} \varphi \right] \psi(x)$$

dove  $\varphi$  è l'angolo di rotazione. Per una rotazione completa, lo spinore cambia segno. Questo è simile a quanto si ottiene per gli spinori non relativistici

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}} \psi(x)$$

**Proprietà delle trasformazioni degli spinori.** La trasformazione di rotazione  $S_R$  è unitaria

$$S_R = \exp \left[ -\frac{i}{4} \omega \sigma_{ij} (I_n)^{ij} \right] \implies S_R^\dagger = \exp \left[ \frac{i}{4} \omega (\sigma_{ij})^\dagger (I_n)^{ij} \right] = \exp \left[ \frac{i}{4} \omega \sigma_{ij} (I_n)^{ij} \right] = S_R^{-1}$$

Mentre le trasformazioni di boost

$$S_L = \exp \left[ -\frac{i}{2} \sigma_{0i} \omega^{0i} \right]$$

e rotazioni entrambe soddisfano

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \iff S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$$

**Densità di probabilità.** Si dimostra che la densità di probabilità  $\rho = \psi^\dagger \psi$  è la componente temporale di un quadri-vettore. La corrente di probabilità è data da

$$J^\mu = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$$

Per trasformazioni di Lorentz, solamente gli spinori  $\psi$  si trasformano:

$$J'^\mu = c\psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi$$

Ricordando l'equazione che soddisfano le matrici  $S$  è

$$S\gamma^\mu S^{-1} \Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu \iff S^{-1} \gamma^\nu S = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu$$

segue

$$J'^\mu = c\psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S S^{-1} \gamma^\mu S \psi = c\psi^\dagger \gamma^0 \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \psi = \Lambda^\mu_\nu c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \psi = \Lambda^\mu_\nu J^\nu$$

La corrente si trasforma come un vettore e per comodità si introduce lo spinore aggiunto

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \implies J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

La sua legge di trasformazione è data da

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}$$

La corrente di probabilità è conservata, ha una corretta interpretazione probabilistica e si comporta correttamente dal punto di vista relativistico.

Si vuole capire quanto di ciò visto ha un corrispondente classico. In particolare, si scrivono le equazioni di Ehrenfest utilizzando l'hamiltoniana di Dirac.

## Lezione 9

mar 17 ott  
2023 10:30

Si sta lavorando con una teoria di singola particella nel tentativo di generalizzare l'equazione di Schrödinger. Le uniche cose che non si sanno ancora spiegare sono il principio di Pauli ed il Lamb shift, uno scostamento più piccolo della struttura fine: esso proviene dall'auto-interazione dell'elettrone.

**Equazioni di Ehrenfest.** Si consideri l'equazione di Dirac con un campo esterno

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[ c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi = H\psi$$

Successivamente, è frequente separare l'hamiltoniana in una componente libera ed una componente di interazione

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

Il termine di interazione dell'equazione di Dirac è

$$H_{\text{int}} = -e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + e\phi$$

il cui corrispettivo classico è

$$H_{\text{int cl}} = -e \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} + e\phi$$

Da ciò si potrebbe pensare che nella teoria di Dirac, le matrici  $\boldsymbol{\alpha}$  siano l'operatore velocità. Ricordando il teorema di Ehrenfest (si discutono di valori medi)

$$d_t \langle r_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, r_k] \rangle = \frac{i}{\hbar} c \left\langle \alpha_i \left[ \left( P_i - \frac{e}{c} A_i \right) r_k - r_k \left( P_i - \frac{e}{c} A_i \right) \right] \right\rangle = c \langle \alpha_i [\partial_i r_k - r_k \partial_i] \rangle = c \langle \alpha_k \rangle$$

dove non si ha dipendenza esplicita della posizione  $\mathbf{r}$  — coordinata canonica — dal tempo. L'ultima parentesi è il commutatore delle variabili canoniche  $[r_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$ , alternativamente si può espandere la derivata del primo addendo. Questo conferma che l'operatore velocità nella teoria di Dirac siano le matrici  $\alpha_i$ .

Si consideri l'equazione di Ehrenfest per il momento meccanico

$$\begin{aligned}
 d_t \langle \pi_k \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, \pi_k] \rangle + \langle \partial_t \pi_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \pi_k] \rangle - \frac{e}{c} \langle \partial_t A_k \rangle \\
 &= \frac{i}{\hbar} \langle [c\alpha_i \pi_i \pi_k - c\alpha_i \pi_k \pi_i + e\phi \pi_k - e\pi_k \phi] \rangle - \frac{e}{c} \langle \partial_t A_k \rangle \\
 &= \frac{i}{\hbar} c \langle \alpha_i [\pi_i, \pi_k] \rangle + e \langle \phi \partial_k \rangle - e \langle (\partial_k \phi) \rangle - e \langle \phi \partial_k \rangle - \frac{e}{c} \langle \partial_t A_k \rangle \\
 &= \frac{i}{\hbar} c \langle \alpha_i [\pi_i, \pi_k] \rangle + e \langle E_k \rangle = e \langle [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}]_k \rangle = e \left\langle \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]_k \right\rangle
 \end{aligned}$$

si ottiene la forza di Lorentz. Identificando l'operatore velocità con le matrici  $\alpha_i$  si riscoprono i risultati classici.

Bisogna fare attenzione al parallelo tra il caso relativistico e non. Nella teoria di Schrödinger la corrente di probabilità  $\mathbf{J}$  è proporzionale al momento  $\mathbf{P}$ . Per una particella libera, la velocità  $\mathbf{v}$  che appare nella corrente è conservata. In questo caso, per l'identificazione della velocità con le matrici  $\boldsymbol{\alpha}$ , si ha che tali matrici non commutano con l'hamiltoniana,  $[\boldsymbol{\alpha}, H] \neq 0$  — poiché non commutano tra di esse —, e quindi la velocità non si conserva più. Inoltre, esse hanno autovalori  $\pm 1$ : pertanto, nella teoria di Dirac l'operatore velocità ha autovalori  $\pm c$ . D'altra parte, considerando un pacchetto di onde, si ottiene una distribuzione continua di velocità tra  $-c$  e  $c$ .

**Energie negative e teoria delle buche.** Dirac voleva risolvere il problema delle energie negative: se sono presenti stati disponibili ad energia negativa, non esiste uno stato fondamentale stabile. Egli considerò la seguente situazione. Le energie negative si trovano nell'intervallo  $(-\infty, -mc^2]$ , mentre quelle positive tra  $[mc^2, \infty)$ . Tra le due c'è un energy gap. Dirac affermò che tutti gli stati ad energia negativa sono pieni, quindi nessuno stato può scendere ad energie negative. Diversamente da Klein e Gordon, si può affermare che tutti gli stati sono occupati poiché l'equazione di Dirac descrive dei fermioni che obbediscono il principio di esclusione di Pauli.

Dirac pensò che nella regione delle energie negative sono presenti delle buche con carica negativa  $-e$ . Si consideri una radiazione assorbita da uno stato ad energia negativa. Se la radiazione ha energia sufficiente,  $E > 2mc^2$ , allora la particella in tale stato può passare alla regione delle energie positive: si ha un elettrone. Nella buca c'è l'assenza di una carica negativa e l'assenza di energia negativa: si ha una carica positiva ed energia positiva, un positrone. La giustificazione dell'anti-materia è possibile dopo aver quantizzato il campo di Dirac. Vale anche il viceversa: se esiste un positrone, esso può riempire una buca ed emettere radiazione (l'annichilazione elettrone-positrone).

Queste sono le basi per la fine della teoria di singola particella.

## 2.4 Soluzioni per una particella libera

Si sono già viste le soluzioni ad onda piana nel riferimento solidale con la particella. Tramite il metodo del boost si possono trovare le soluzioni in ogni altro sistema di riferimento inerziale. Il generico bispinore è

$$\psi^r(x) = w^r(0) e^{-i\varepsilon_r \frac{mc^2}{\hbar} t}, \quad r = 1, 2, 3, 4$$

dove

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$$

mentre il fattore  $w^r(0)$  indica degli spinori che dipendono dal momento lineare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se una particella è inizialmente solidale con il proprio riferimento, allora per vederla con una velocità  $\mathbf{v}$  bisogna operare un boost in direzione  $-\mathbf{v}$ . Si rende l'esponente covariante esplicitando

il quadri-momento  $p_\mu^{(0)}$  nel riferimento solidale:

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r mc^2 t\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r p_\mu^{(0)} x^\mu\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r p'_\mu x'^\mu\right]$$

dove i termini primati appartengono ad un riferimento inerziale arbitrario. Il quadri-vettore momento è un quadri-vettore di tipo tempo

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 > 0$$

dunque la sua componente temporale non cambia segno per trasformazioni proprie di Lorentz: l'energia mantiene il segno in ogni riferimento.

Si consideri un boost nella direzione  $x$ :

$$S_L = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}}$$

Gli spinori trasformati sono

$$w^r(p) = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}\right] w^r(0) = \left(\cosh \frac{\omega}{2} - \alpha_1 \sinh \frac{\omega}{2}\right) w^r(0)$$

dove  $\sigma_{01} = -i\alpha_1$  e alla seconda uguaglianza si è scritto l'esponenziale in termini di funzioni iperboliche che vengono espanse in serie di potenze per poter portare fuori dall'argomento la matrice  $\alpha_1$ , ricordando che  $\alpha_1^2 = I$ .

Per una velocità in direzione generica, si ha

$$(I_n)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\zeta & -\cos\eta & -\cos\theta \\ -\cos\zeta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\eta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordando

$$p^\mu = \frac{1}{c}(E, E\beta), \quad \beta = \frac{pc}{E}$$

e sapendo le formule di bisezione per le funzioni iperboliche, si ottiene

$$-\tanh \frac{\omega}{2} = \frac{-\tanh \omega}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \omega}} = \frac{\beta}{1 + \gamma^{-1}} = \frac{pc}{E + mc^2}, \quad \cosh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

Nella formula di trasformazione dello spinore, si ha

$$w^r(p) = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu\nu}\right] = \exp\left[-\frac{\omega}{2} \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right] w^r(0)$$

Riformulando l'esponenziale secondo funzioni iperboliche, espandendo queste in serie di potenze e sapendo che le proprietà delle potenze di  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}$  sono analoghe a quelle di  $\alpha_i$ , si ottiene la seguente forma matriciale

$$w^r(p) = S(\Lambda)w^r(0) = [2mc^2(E + mc^2)]^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} E + mc^2 & 0 & p_z c & p_- c \\ 0 & E + mc^2 & p_+ c & -p_z c \\ p_z c & p_- c & E + mc^2 & 0 \\ p_+ c & -p_z c & 0 & E + mc^2 \end{bmatrix} w^r(0)$$

dove  $p_\pm = p_x \pm ip_y$ . Quindi la soluzione generica per una particella libera è

$$\psi^r(x) = w^r(p) e^{-i\varepsilon_r \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}$$



**Soluzioni ad energia definita.** Si veda Mandl, appendice A.4 e A.8. Le soluzioni indipendenti sono quattro bispinori, due per ogni segno dell'energia:

$$\psi(x) = C \begin{cases} u_r(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu}, & E > 0, \quad r = 1, 2 \\ v_r(p) e^{\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu}, & E < 0, \quad r = 3, 4 \end{cases}$$

con  $C$  costante di normalizzazione. L'indice  $r$  indica la direzione dello spin. Si introduce lo spinore aggiunto

$$\bar{u}_r(p) = u_r^\dagger(p) \gamma^0, \quad \bar{v}_r(p) = v_r^\dagger(p) \gamma^0$$

L'equazione di Dirac per tali soluzioni è

$$(i\hbar \not{\partial} - mc) e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} u_r(p) = 0, \quad (i\hbar \not{\partial} - mc) e^{\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} v_r(p) = 0$$

Applicando la derivata si ottiene

$$e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} [i(-i)p_\mu \gamma^\mu - mc] u_r(p) = 0 \implies (\not{p} - mc) u_r(p) = 0$$

mentre per  $v_r(p)$  si ha

$$(\not{p} + mc) v_r(p) = 0$$

L'equazione di Dirac per il bispinore aggiunto è

$$\begin{aligned} u^\dagger(p) [p_\mu (\gamma^\mu)^\dagger - mc] \gamma^0 &= u^\dagger(p) [p_0 (\gamma^0)^\dagger - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}^\dagger - mc] \gamma^0 = u^\dagger(p) [p_0 \gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - mc] \gamma^0 \\ &= u^\dagger(p) \gamma^0 [p_0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - mc] \end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione per il bispinore coniugato è

$$\bar{u}(p) (\not{p} - mc) = 0, \quad \bar{v}(p) (\not{p} + mc) = 0$$

**Onde piane.** Si costruiscono le espressioni delle onde piane ad energia positiva ed energia negativa. Si introducono due spinori

$$\chi_1 = \chi'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \chi'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tali per cui

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi'_r \end{pmatrix}$$

Nella scrittura di  $v_r(0)$  si utilizza  $\chi'_r$  poiché successivamente si identificano queste soluzioni con le anti-particelle le quali hanno spin nella direzione opposta rispetto alle particelle associate. La trasformazione degli spinori si può scrivere come

$$S(\Lambda) = \frac{\not{p} + mc\gamma_0}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}} \gamma_0$$

Applicandola alle soluzioni indipendenti, si ottiene la loro forma per  $p$  arbitrario:

$$u_r(p) = \frac{mc + \not{p}}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}} u_r(0), \quad v_r(p) = \frac{mc - \not{p}}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}} v_r(0)$$

Si verifica la coerenza di quanto trovato. L'equazione di Dirac è

$$(\not{p} - mc) \frac{mc + \not{p}}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}} u_r(0) = \frac{\not{p}\not{p} - m^2c^2}{\sqrt{2mE + 2m^2c^2}} u_r(0) = 0$$

dove si ha

$$\not{p}\not{p} = p_\mu \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu 2\eta^{\mu\nu} = \|p\|^2 = m^2c^2$$

Alla seconda uguaglianza si utilizza il fatto che  $p_\mu$  è simmetrico mentre  $\gamma_\mu$  non ha simmetria definita, ma viene scritto in parte simmetrica ed anti-simmetrica. Da ciò l'equazione di Dirac è risolta.

La scrittura in due spinori di un bispinore ad energia positiva è

$$u_r(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \chi_r \end{pmatrix}$$

Da questo si vede che le componenti basse sono meno intense delle componenti alte di un fattore  $\beta$  come già ricavato nel limite relativistico. La situazione è opposta per  $v_r(p)$ .

**Normalizzazione.** Si veda Bjorken. La normalizzazione dei bispinori è

$$\bar{u}_r u_s = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r v_s = -\delta_{rs}$$

Il segno meno nella relazione per  $v_r$  è portato dalla matrice  $\gamma_0$ . Inoltre

$$u^\dagger u = \frac{E + mc^2}{2mc^2} (\chi^\dagger \quad \chi^\dagger \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2}) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \chi \end{pmatrix} = \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left[ 1 + \frac{E^2 - m^2 c^4}{(E + mc^2)^2} \right] = \frac{E}{mc^2} = \gamma$$

dove non si specifica il pedice  $r$  e si ricorda

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})I + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \implies c^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = c^2 \|\mathbf{p}\|^2 = E^2 - m^2 c^4$$

così come  $\chi^\dagger \chi = 1$ . Il prodotto calcolato è la densità di probabilità che si trasforma come una componente temporale al fine di lasciare la probabilità  $\rho dV$  invariata.

**Covarianti bilineari.** Poiché per rotazioni nello spazio, si ha metà rotazione di uno spinore, allora le osservabili fisiche sono funzioni bilineari negli spinori. Tramite i prodotti delle matrici di Dirac si possono costruire sedici matrici indipendenti che ricorrono spesso nella teoria di Dirac

$$\Gamma^S = I, \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu, \quad (\Gamma_{\mu\nu})^T = \sigma_{\mu\nu}, \quad \Gamma^P = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma^5 = \gamma_5, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_5\gamma_\mu$$

dove S sta per scalare, V per vettore, T per tensore, P per pseudo-scalare, e A per (vettore) assiale, cioè pseudo-vettore. Si noti che questa classificazione è da intendersi riferita ai prodotti con spinori, cioè alle osservabili:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$$

Utilizzando la relazione di anti-commutazione delle matrici di Dirac, si può dimostrare che le sedici matrici  $\Gamma^n$  sono linearmente indipendenti:

- per ogni  $\Gamma^n$  vale  $(\Gamma^n)^2 = \pm I$ ,
- per ogni  $\Gamma^n$  diversa da  $\Gamma^S$ , esiste una  $\Gamma^m$  tale per cui

$$\Gamma^n \Gamma^m = -\Gamma^m \Gamma^n \iff \{\Gamma^n, \Gamma^m\} = 0$$

Da ciò segue che la traccia di ogni matrice diversa da  $\Gamma^S$  è nulla

$$\pm \text{Tr} \Gamma^n = \text{Tr} [\Gamma^n (\Gamma^m)^2] = -\text{Tr} [\Gamma^m \Gamma^n \Gamma^m] = -\text{Tr} [\Gamma^n (\Gamma^m)^2] = \mp \text{Tr} \Gamma^n \implies \text{Tr} \Gamma^n = 0$$

alla seconda uguaglianza si è applicato l'anti-commutatore, mentre alla terza uguaglianza si è applicata la proprietà di ciclicità della traccia.

- Date  $\Gamma^a$  e  $\Gamma^b$  con  $a \neq b$ , esiste una matrice  $\Gamma^n$  diversa da  $\Gamma^S$  tale che

$$\Gamma^a \Gamma^b = \Gamma^n$$

## Lezione 10

- Si supponga l'esistenza di coefficienti  $a_n$  tali che

$$\sum_n a_n \Gamma^n = 0$$

cioè una combinazione lineare delle matrici che dia il vettore nullo. Si moltiplica per  $\Gamma^m$  e ne si fa la traccia. Utilizzando il primo punto, il punto precedente e sapendo che  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$ , si ottiene

$$\sum_n a_n \Gamma^n \Gamma^m = 0 \implies a_m = 0$$

Poiché  $m$  è arbitrario, tutti i coefficienti sono nulli.

mer 18 ott  
2023 10:30

Pertanto, le matrici sono linearmente indipendenti (l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella banale). Poiché esistono solo sedici matrici indipendenti, allora ogni altra matrice si può scrivere come loro combinazione lineare. Questo significa anche che le osservabili fisiche sono sedici:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$$

uno scalare, un vettore, un tensore di tipo 2, uno pseudo-scalare ed uno pseudo-vettore. Le ultime due osservabili non compaiono nell'elettrodinamica quantistica, ma sono utili per l'interazione debole in cui sorge la violazione della parità.

**Parità.** Alcune proprietà della quinta matrice gamma sono

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0, \quad [S, \gamma^5] = 0$$

per tutte le trasformazioni di Lorentz proprie. In elettrodinamica quantistica non ci si occupa della violazione di parità poiché tale interazione conserva la parità, a differenza dell'interazione debole. La trasformazione di Lorentz per inversione degli assi, la trasformazione di parità, è data da

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad t' = t, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'equazione che caratterizza la trasformazione  $S = P$  degli spinori è

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = P^{-1} \gamma^\nu P \implies \gamma^0 = P^{-1} \gamma^0 P, \quad \boldsymbol{\gamma} = -P^{-1} \boldsymbol{\gamma} P$$

che è soddisfatta da

$$P = e^{i\varphi} \gamma^0$$

Da ciò si può evincere anche

$$\{\gamma^5, P\} = 0$$

L'operatore di parità è la matrice  $\gamma^0$  a meno di un fattore di fase che può essere scelto pari a  $\pm 1$  o  $\pm i$  qualora si richieda che quattro riflessioni portino lo spinore nella condizione originale  $P^4 = I$ . La coniugazione della carica e l'inversione temporale sono trattate successivamente.

Si dimostra la natura di pseudo-scalare dell'osservabile  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ . Si ricorda

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}, \quad \gamma^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu S \gamma^\mu S^{-1}, \quad \gamma^5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

Nel riferimento in cui si è cambiata la parità si ha

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' \gamma^5 \psi' &= \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^5 S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^5 S \psi = \bar{\psi} S^{-1} \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma S \psi \\ &= \bar{\psi} S^{-1} \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha S \gamma^\alpha S^{-1} \Lambda^\nu{}_\beta S \gamma^\beta S^{-1} \Lambda^\rho{}_\gamma S \gamma^\gamma S^{-1} \Lambda^\sigma{}_\delta S \gamma^\delta S^{-1} S \psi \\ &= \bar{\psi} \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \psi \\ &= \bar{\psi} (\det \Lambda) \frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \psi = \bar{\psi} \gamma^5 \psi \det \Lambda \end{aligned}$$

Alla prima riga si inserisce  $1 = \gamma^0 \gamma^0$  nel prodotto  $\psi^\dagger S^\dagger$  e poi si applica la prima e la terza relazione sopra. Alla seconda riga si è utilizzata la seconda relazione per ogni matrice  $\gamma^\mu$ . Alla quarta riga si è applicata un'identità del tensore di Levi-Civita. Da questo risultato si evince la natura di pseudo-scalare.

Nella teoria di Dirac si possono costruire sedici osservabili e si conoscono tutte le proprietà sotto trasformazioni di Lorentz proprie ed improprie.

## 2.5 Proiettori

Si veda Mandl. La soluzione generale all'equazione di Dirac è una sovrapposizione di soluzioni ad energia positiva ed energia negativa. Risulta utile avere un proiettore: dato uno stato generico si proiettano separatamente l'energia positiva e l'energia negativa.

**Proiettori dell'energia.** Il proiettore dell'energia è dato da

$$\Lambda_r(p) = \frac{\varepsilon_r \not{p} + mc}{2mc}, \quad r = \pm, \quad \varepsilon_r = \pm 1$$

Esso è idempotente e applicare i due proiettori in successione deve dare zero

$$\Lambda_r^2 = \Lambda_r, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0$$

Infatti, si consideri

$$\begin{aligned} \Lambda_r(p) \Lambda_s(p) &= \frac{(\varepsilon_r \not{p} + mc)(\varepsilon_s \not{p} + mc)}{4m^2 c^2} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_s \not{p} \not{p} + m^2 c^2 + (\varepsilon_r \not{p} + \varepsilon_s \not{p})mc}{4m^2 c^2} \\ &= \frac{(\varepsilon_r \varepsilon_s + 1)m^2 c^2 + mc \not{p}(\varepsilon_r + \varepsilon_s)}{4m^2 c^2} = \frac{(\varepsilon_r \varepsilon_s + 1)m^2 c^2 + \varepsilon_r mc \not{p}(1 + \varepsilon_r \varepsilon_s)}{4m^2 c^2} \\ &= \frac{1 + \varepsilon_r \varepsilon_s}{2} \frac{\varepsilon_r \not{p} + mc}{2mc} = \frac{1 + \varepsilon_r \varepsilon_s}{2} \Lambda_r(p) \end{aligned}$$

Per  $r = s$  si ha l'idempotenza mentre per  $r \neq s$  si ha zero. Inoltre, dalla definizione segue

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = I$$

Considerata una soluzione ad energia positiva, si ha

$$\Lambda_+(p) u_r(p) = u_r(p), \quad \bar{u}_r \Lambda_+ = \bar{u}_r$$

Similmente per  $\Lambda_-$  e la soluzione ad energia negativa  $v_r$ .

Dai proiettori si può ricavare una formula utile da poi utilizzare con i diagrammi di Feynman. Si scrive la regola di completezza

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p) - v_{r\alpha}(p) \bar{v}_{r\beta}(p)] = \delta_{\alpha\beta}$$

Si noti che  $u\bar{u}$  è un operatore, non uno scalare. L'indice  $r$  descrive lo spin, mentre gli indici  $\alpha, \beta$  indicano le componenti del bispinore. Si dimostra tale formula ricordando la completezza nel riferimento solidale:

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon_r w_\alpha^r(0) \bar{w}_\beta^r(0) = \delta_{\alpha\beta}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p) - v_{r\alpha}(p) \bar{v}_{r\beta}(p)] &= \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r w_\alpha^r(p) \bar{w}_\beta^r(p) \\ &= \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r S_{\alpha\gamma} w_\gamma^r(0) (w_\delta^r)^\dagger(0) S_{\delta\beta}^\dagger \gamma^0 \\ &= \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r S_{\alpha\gamma} w_\gamma^r(0) (w_\delta^r)^\dagger(0) \gamma^0 \gamma^0 S_{\delta\beta}^\dagger \gamma^0 \\ &= S_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma\delta} S_{\delta\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

dove  $S_{\alpha\beta}$  è la trasformazione che permette di ottenere lo spinore con momento  $p$ , mentre alla quarta riga si utilizza la completezza sopra.

L'operatore di proiezione ad energia positiva si può riscrivere come

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta}(p) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p)$$

Si dimostra. La somma coinvolge solo soluzione ad energia positiva, ma si può riscrivere in termini di tutte le energie a cui si applica un proiettore:

$$\sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p) = \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r w_{r\alpha}(p) \bar{w}_{r\beta}(p) \left( \frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\delta\beta} = \delta_{\alpha\delta} \left( \frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\delta\beta} = \left( \frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta}$$

Alla seconda uguaglianza si applica la relazione di completezza. In questo modo si può passare da spinori a proiettori, ad esempio, nel calcolo delle probabilità di transizione. Si ha una relazione simile per  $v_r$  e  $\Lambda_-$ .

**Proiettori dello spin.** Si veda Landau, Vol. 4, §21, p. 79? e Mandl, A.6. Già in Meccanica Quantistica si sono visti i proiettori dello spin  $\sigma_z$ . Passando ai bispinori, la generalizzazione da considerare è

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\gamma^5, \quad \sigma^{ij} = \begin{bmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k = \Sigma_k$$

con  $ijk$  ciclici. Ad esempio si ha

$$\frac{1}{2}\Sigma_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tuttavia, si ha un problema. Tale operatore di spin non commuta con l'hamiltoniana

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + bm, \Sigma] \neq 0$$

Infatti, considerato

$$\alpha_i \Sigma_j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \sigma^j \\ \sigma^i \sigma^j & 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + bm, \Sigma_j] = \begin{bmatrix} 0 & [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \sigma^j] \\ [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \sigma^j] & 0 \end{bmatrix}$$

I commutatori sono nulli solamente nel riferimento solidale in cui si ha  $\mathbf{p} = 0$ . Lo spin così definito non rappresenta un buon numero quantico perché con si conserva nel tempo dato che non commuta con l'hamiltoniana.

D'altra parte, l'elicità commuta

$$[H, \sigma_p] = 0, \quad \sigma_p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}), \quad \sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k$$

infatti

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}] = p_i p_j [\sigma^i, \sigma^j] = 0$$

poiché  $p_i p_j$  è simmetrico, mentre il commutatore è anti-simmetrico. L'elicità è un buon numero quantico. Nella base di Dirac, o rappresentazione di Dirac-Pauli (si veda Mandl, A.8) si ha

$$\sigma_p u_r = (-1)^{r+1} u(p), \quad \sigma_p v_r(p) = (-1)^r v(p)$$

Le soluzioni  $v_r$  si possono immaginare come particelle con energia negativa e momento  $-\mathbf{p}$ : l'elicità cambia segno. La scrittura esplicita delle soluzioni ad energia definita, ad esempio

$$u_r(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{bmatrix} \chi_r \\ \frac{c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \chi_r \end{bmatrix}$$

non è un auto-stato dell'elicità, ma è un auto-stato di  $\Sigma_z$  a  $p = 0$ . Per ottenere gli auto-stati bisogna cambiare base cioè la forma della matrici di Dirac (la base di Weyl?).

I proiettori di spin sono

$$\Pi^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_p)$$

Valgono le stesse proprietà dei proiettori dell'energia: idempotenza e l'applicazione successiva dei due proiettori fornisce zero.

L'elicità è un buon numero quantico perché si conserva nel tempo, ma non è un invariante di Lorentz. Solo per massa nulla, essa è un invariante. Una particella con elicità positiva è detta right-handend, mentre con elicità negativa è detta left-handend. Viceversa, la chiralità non si conserva nel tempo, ma è invariante di Lorentz poiché è determinata dalla rappresentazione del gruppo di Poincaré (right- o left-handed) con cui la particella si trasforma.

## 2.6 Equazioni di Weyl

Ad oggi non si sono scoperti fermioni elementari di massa nulla. Infatti, le masse dei neutrini sono molto più piccole della massa dell'elettrone, ma non zero (a causa delle oscillazioni dei neutrini).

Quando si è trattata l'equazione di Dirac, si è passati da uno spazio a due componenti spinoriali ad uno spazio a quattro componenti aggiungendo la matrice  $\beta$ , il coefficiente della massa. Per fermioni a massa nulla, tale matrice non serve. L'equazione di Dirac con massa nulla si riduce alle equazioni di Weyl.

Posto  $m = 0$  e notando  $E = p_0 = p^0 = |\mathbf{p}|$ , l'equazione di Dirac senza massa è

$$\begin{aligned} (\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) w_r(p) &= 0 \\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} w_r(p) &= \gamma^0 |\mathbf{p}| w_r(p) \\ \gamma^5 \gamma^0 \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} w_r(p) &= \gamma^5 w_r(p) \\ \sigma_p w_r(p) &= \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} w_r(p) = \gamma^5 w_r(p) \end{aligned}$$

Alla terza riga si è moltiplicato per  $\gamma^5 \gamma^0$ , mentre alla quarta riga si ricorda  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  e  $\boldsymbol{\Sigma} = -\gamma^0 \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}$ . Nel limite di massa nulla, l'operatore di elicità è la matrice  $\gamma^5$ . Il proiettore è dato da

$$\Pi^\pm(p) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$$

**Matrici di Pauli.** Si veda Bjorken, cap. 10.12. Considerata l'equazione di Dirac senza massa

$$i\hbar \partial_t \psi = -i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi$$

le matrici  $\alpha_i$  che soddisfano le regole di anti-commutazione necessarie all'equazione sopra sono le matrici di Pauli con segno positivo oppure negativo. Quindi

$$Eu = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u(p, s)$$

dove  $s$  è la direzione della proiezione dello spin lungo il momento. La soluzione di onda piana con elicità right-handed è

$$u(p, +) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per cui vale

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E} u(p, +) = u(p, +)$$

Similmente, per particelle left-handed si sceglie  $\alpha_i = -\sigma_i$  e si ha

$$u(p, -) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E} u(p, -) = -u(p, -)$$

**Base di Weyl.** La base di Weyl è utile per esplicitare le componenti right- e left-handed di un bispinore. Si consideri la seguente rappresentazione

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a cui si può arrivare tramite il cambio di base

$$\gamma_W^\mu = U \gamma_D^\mu U^\dagger, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^5 \gamma^0), \quad \psi_W = U \psi_D$$

dove le matrici  $\gamma$  sono nella base di Dirac. Considerato

$$\psi = \begin{bmatrix} u(+) \\ u(-) \end{bmatrix}$$

si ha

$$i\hbar \partial_t u(+) = -i\hbar (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) u(+) - mu(-), \quad i\hbar \partial_t u(-) = i\hbar (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) u(-) - mu(+)$$

Le soluzioni ad energia positiva e quelle ad energia negativa sono accoppiate solamente a causa del termine di massa. Per  $m = 0$  le equazioni si disaccoppiano e costituiscono le equazioni di Weyl. Pertanto

$$i\hbar \partial_t \psi = \mp i\hbar (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi$$

Dunque quattro componenti sono troppe se la massa è nulla. Vale

$$\gamma^5 \psi(+) = \psi(+), \quad \gamma^5 \psi(-) = -\psi(-)$$

cioè energie positive hanno solo elicità positiva, mentre energie negative hanno solo elicità negativa. Questo viola la parità: lo spin è un vettore assiale e per trasformazione di parità cambia segno, ma dalle equazioni sopra non si può avere una particella senza massa ad energia positiva ed elicità negativa.

## Lezione 11

Le equazioni di Weyl vennero rigettate perché violano la parità.

gio 19 ott  
2023 10:30

## Parte II

# Teoria quantistica dei campi libera

## 3 Formalismo lagrangiano

Si veda Mandl. Si sta procedendo per risolvere il problema delle energie negative. Per far questo bisogna introdurre il formalismo lagrangiano per i campi.

**Meccanica classica.** Per un sistema classico si possono definire una lagrangiana ed un funzionale azione

$$L(q, \dot{q}), \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}), \quad \delta S = 0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2$$

La soluzione delle equazioni del moto (la traiettoria) minimizza il funzionale azione. Gli estremi della traiettoria sono punti fissi (nello spazio  $q$ ) e si studiano le variazioni della traiettoria. La variazione dell'azione è data da

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt [\partial_q L \delta q + \partial_{\dot{q}} L \delta \dot{q}]$$

Integrando per parti e sapendo

$$\delta \dot{q} = \delta(d_t q) = d_t(q + \delta q) - d_t q = d_t(q + \delta q - q) = d_t \delta q$$

si ottiene il secondo addendo pari a

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \partial_{\dot{q}} L d_t(\delta q) = \partial_{\dot{q}} L \delta q|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt d_t(\partial_{\dot{q}} L) \delta q = - \int_{t_1}^{t_2} dt d_t(\partial_{\dot{q}} L) \delta q$$

ricordando che  $\delta(q_1) = \delta(q_2) = 0$ . Pertanto, la variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt [\partial_q L - d_t(\partial_{\dot{q}} L)] \delta q = 0$$

Poiché la variazione  $\delta q$  è arbitraria, allora vale

$$\partial_q L - d_t(\partial_{\dot{q}} L) = 0$$

cioè le equazioni di Eulero-Lagrange.

**Teoria dei campi classica.** Si ricordi l'esempio della corda vibrante nel passaggio ad infiniti gradi di libertà. Le coordinate canoniche  $q_i$  diventano un campo  $\varphi(x_i)$  nel limite del passo reticolare  $a \rightarrow 0$  e del volume  $V \rightarrow \infty$ . Si introduce la densità di lagrangiana

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$$

Non si può avere solamente la derivata temporale  $\dot{\varphi}$  poiché si vuole avere una teoria lagrangiana relativisticamente corretta. Si introducono anche le derivate spaziali

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

Questa non è una condizione sufficiente affinché la teoria sia relativisticamente corretta: bisogna anche verificare la covarianza.

Rispetto al caso classico, l'argomentazione è analoga. In generale si considera un numero arbitrario di campi  $\varphi_r(x)$  definiti come funzioni del tempo e della posizione. L'azione è data da

$$S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r)$$

Nel considerare il principio di minima azione, bisogna variare i campi

$$\varphi_r(x) \mapsto \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x)$$

dove la variazione del campo è nulla sulla frontiera  $\partial\Omega$  della regione  $\Omega$  considerata dello spazio-tempo dello spazio-tempo. La variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_\Omega d^4x [\partial_{\varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r + \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta(\partial_\mu \varphi_r)]$$

Come in precedenza, si ha

$$\delta(\partial_\mu \varphi_r) = \partial_\mu(\varphi_r + \delta\varphi_r) - \partial_\mu(\varphi_r) = \partial_\mu(\delta\varphi_r)$$

Utilizzando la formula per la derivata del prodotto (equivalente ad integrare per parti), il secondo addendo diventa

$$\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta(\partial_\mu \varphi_r) = \partial_\mu [(\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L}) \delta\varphi_r] - (\partial_\mu \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L}) \delta\varphi_r$$

da cui la variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_\Omega d^4x [\partial_{\varphi_r} \mathcal{L} - \partial_\mu \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L}] \delta\varphi_r + \int_\Omega d^4x \partial_\mu (\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r) = 0$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo integrale, e sapendo che la variazione si annulla sulla frontiera, allora tale integrale è zero. Dunque le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\partial_{\varphi_r} \mathcal{L} - \partial_\mu \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} = 0$$

I momenti coniugati e la densità di hamiltoniana sono

$$\pi_r(x) = \partial_{\dot{\varphi}_r} \mathcal{L}, \quad \mathcal{H} = \pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L}$$

Si specializza quanto visto al campo elettromagnetico.

### 3.1 Campo elettromagnetico

Si veda Landau vol. 2, §15, in cui si spiega il motivo per cui si parla sempre di particelle senza dimensioni e sparisce il concetto di corpo in relatività. Si veda Landau, vol. 2, §27, per la discussione della lagrangiana del campo elettromagnetico.

L'azione dev'essere uno scalare e così pure la densità di lagrangiana. Studiando la natura, o si conoscono già le equazioni del moto — per il campo elettromagnetico sono le equazioni di Maxwell — con cui costruire la lagrangiana oppure si scrive una lagrangiana che rispetta una



simmetria da cui si ricavano le equazioni del moto che vanno verificate. Questo secondo metodo è utilizzato dal Modello Standard.

Il principio fondamentale dell'elettrodinamica classica è il principio di sovrapposizione. Affinché esso valga, le equazioni del moto devono essere lineari nei campi. Pertanto, la lagrangiana deve essere composta da campi al massimo nel secondo ordine e deve essere uno scalare. Dunque

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

Il primo termine descrive il campo libero, il secondo descrive l'interazione con le cariche. Esiste anche un altro termine che si può aggiungere ottenuto dal tensore di campo duale. La quantità

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 4\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma)$$

è uno pseudo-scalare e si potrebbe aggiungere se si considerano solo trasformazioni proprie, tuttavia esso è una quadri-divergenza. Inoltre, il termine  $A_\mu A^\mu$  non si può aggiungere perché porta a termini nelle equazioni del moto che non sono invarianti di gauge. Infatti, l'invarianza di gauge dev'essere una simmetria dell'azione poiché è simmetria del campo elettromagnetico. In generale, un termine quadratico dei campi nella densità di lagrangiana corrisponde ad un termine di massa nelle equazioni del moto. Quando si quantizza il campo elettromagnetico si scopre che l'invarianza di gauge è equivalente alla massa nulla del fotone.

Si è dunque scritta la lagrangiana più generale che sia invariante di gauge.

**Equazioni del moto.** Si ha un campo quadri-vettoriale  $\varphi_r = A^\mu$ . Il primo termine delle equazioni del moto è

$$\partial_{A_\nu}\mathcal{L} = -J^\nu$$

Ricordando che il tensore di campo è

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho$$

si ha

$$\begin{aligned}\partial_{\partial_\mu A_\nu}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}[(\partial_{\partial_\mu A_\nu}F_{\rho\sigma})F^{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma}(\partial_{\partial_\mu A_\nu}F_{\rho\sigma})] = -\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}(\partial_{\partial_\mu A_\nu}F_{\rho\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}[\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho] = -F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

da cui si ottengono le equazioni del moto

$$\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu A_\nu}\mathcal{L}) = \partial_{A_\nu}\mathcal{L} \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

cioè le equazioni di Maxwell.

Si vuole operare la quantizzazione canonica, dunque si ha bisogno dei momenti coniugati. Essi sono

$$\pi^\mu = \partial_{\dot{A}_\mu}\mathcal{L} = \partial_{\partial_0 A_\mu}\mathcal{L} = -F^{0\mu} = F^{\mu 0} = (0, \mathbf{E})$$

Il tensore  $F^{\mu\nu}$  è anti-simmetrico e dunque  $\pi^0$  è nullo: si hanno solo tre momenti coniugati. Questa è una patologia del campo elettromagnetico che rende più complicata la quantizzazione.

**Densità di hamiltoniana.** L'integrale della densità di hamiltoniana deve essere l'energia del campo elettromagnetico. Si ricava tale risultato dalla teoria lagrangiana sviluppata. La densità di hamiltoniana è

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{A} - \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) + J_\mu A^\mu \\ &= |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) + J_\mu A^\mu = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi + J_\mu A^\mu \\ &= \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) + \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) - (\nabla \cdot \mathbf{E})\phi + \rho\phi - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) + \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\end{aligned}$$

Alla seconda riga si è applicata l'espressione del campo elettrico in termini dei potenziali

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A} \implies |\mathbf{E}|^2 = -\mathbf{E} \cdot \nabla\phi - \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{A}$$

così come l'invariante  $F^\mu F_{\mu\nu}$ . Alla terza riga si è usata la regola per la derivata del prodotto, mentre alla quarta riga si è utilizzata la legge di Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ . L'hamiltoniana è

$$H = \int_V d^3x \mathcal{H} = \int_V d^3x \left[ \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right]$$

ricordando il teorema della divergenza e supponendo che alla frontiera i campi vadano a zero abbastanza velocemente.

**Invarianza di gauge.** La lagrangiana del campo elettromagnetico

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

non è invariante per trasformazioni di gauge

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

In particolare non è invariante il secondo termine. Infatti, se la quadri-corrente è conservata  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , si ottiene

$$J_\mu A'^\mu = J_\mu A^\mu - J_\mu \partial^\mu f = J_\mu A^\mu - J_\mu \partial^\mu f + f \partial_\mu J^\mu = J_\mu A^\mu - \partial_\mu (J^\mu f)$$

Alla lagrangiana si aggiunge una quadri-divergenza, ma l'azione, e le equazioni del moto, non cambiano. Per il teorema di Noether, una simmetria, invarianza della lagrangiana porta ad una legge di conservazione. Ma l'opposto non è sempre vero, come in questo caso: le equazioni del moto possono avere una simmetria (l'invarianza di gauge) che la lagrangiana non presenta.

**Nota sul teorema della divergenza.** Considerato il gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

l'integrale spaziale della componente temporale del quadri-vettore non è conservato. In generale, da una legge di continuità si può definire l'integrale spaziale

$$\partial_\mu f^\mu = 0 \implies F^\mu = \int_V d^3x f^\mu(x, t)$$

la cui derivata temporale è

$$\partial_0 F^0 = \nabla \cdot \mathbf{F} \implies d_t \int_V d^3x f^0 = \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{f} = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f}$$

L'integrale di superficie è nullo se  $\mathbf{f}$  si comporta bene abbastanza all'infinito, ma il quadri-potenziale  $A^\mu$  è un'onda piana e oscilla in continuazione.

### 3.2 Teorema di Noether

Si veda Mandl, §2.4. Le simmetrie sono le fondamenta del Modello Standard. Alla base delle leggi di invarianza è presente il teorema di Noether, fondamentale per la fisica matematica.

Si studiano le possibili simmetrie e trasformazioni di una lagrangiana. Le trasformazioni si dividono in esterne, che coinvolgono i gradi di libertà spazio-temporali, ed interne che non coinvolgono i gradi di libertà spazio-temporali. Si vede il primo teorema di Noether: ogni trasformazione continua dipendente da un parametro per cui la lagrangiana è invariante porta ad una corrente conservata. La lagrangiana si trasforma oppure rimane invariante

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \rightarrow \mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu \varphi')$$

**Invarianza per traslazione.** Si vede l'esempio di traslazione come trasformazione esterna utilizzando il gruppo di Poincaré:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$$

Una traslazione equivale a spostare le coordinate dell'origine. La traslazione è un caso semplice poiché le componenti del campo non cambiano. Esiste una trasformazione della forma del campo e del suo argomento che, solo per le traslazioni, è

$$\varphi'_r(x') = \varphi_r(x)$$

dove si sottintende l'indice spazio-temporale  $x \equiv x^{\mu}$ . La variazione di forma del campo a stesso argomento è

$$\delta\varphi_r(x) = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$$

mentre la variazione totale (detta anche locale poiché  $x'$  ed  $x$  rappresentano lo stesso punto ma in riferimenti diversi) è

$$\delta_T\varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x)$$

cioè di forma ed argomento. Per traslazioni, la variazione totale è nulla  $\delta_T\varphi_r(x) = 0$ . Inoltre

$$0 = \delta_T\varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) = [\varphi'_r(x') - \varphi_r(x')] + [\varphi_r(x') - \varphi_r(x)]$$

A meno di infinitesimi superiori al prim'ordine, la prima parentesi è pari alla distanza del campo valutato nelle coordinate non primarie

$$\begin{aligned}\varphi'_r(x') - \varphi_r(x') &= \delta\varphi_r(x') = \delta[\varphi_r(x) + \partial_{\mu}\varphi_r(x)\delta x^{\mu}] \\ &= \delta\varphi_r(x) + o(\delta\varphi_r) \approx \varphi'_r(x) - \varphi_r(x) = \delta\varphi_r(x)\end{aligned}$$

La trasformazione di forma è conseguenza della trasformazione delle coordinate. La trasformazione di forma e di argomento  $\varphi'_r(x')$  contiene due infinitesimi e la sua distanza da  $\varphi_r(x')$  è la stessa di  $\varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$  a meno di infinitesimi di ordine superiore del primo. Inoltre, la seconda parentesi è

$$\varphi_r(x') - \varphi_r(x) = \delta x^{\mu} \partial_{\mu}\varphi_r(x)$$

Quindi

$$0 = \delta_T\varphi_r(x) = \delta\varphi_r(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu}\varphi_r(x) = \delta\varphi_r(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu}\varphi_r(x)$$

Pertanto

$$\delta\varphi_r(x) = -\delta x^{\mu} \partial_{\mu}\varphi_r(x)$$

Si ipotizza che la lagrangiana sia invariante per trasformazione di traslazione.

## Lezione 12

Dunque

lun 23 ott  
2023 10:30

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial_{\mu}\varphi'_r(x')) - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_{\mu}\varphi_r(x)) = \delta\mathcal{L} + \partial_{\mu}\mathcal{L}\delta x^{\mu} \\ &= \partial_{\varphi_r}\mathcal{L}\delta\varphi_r + \partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L}\delta(\partial_{\mu}\varphi_r) + \partial_{\mu}\mathcal{L}\delta x^{\mu} \\ &= \partial_{\mu}(\partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L})\delta\varphi_r + \partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L}\delta(\partial_{\mu}\varphi_r) + \partial_{\mu}\mathcal{L}\delta x^{\mu} \\ &= \partial_{\mu}(\partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L})\delta\varphi_r + \partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L}\partial_{\mu}(\delta\varphi_r) + \partial_{\mu}\mathcal{L}\delta x^{\mu} \\ &= \partial_{\mu}[\partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L}\delta\varphi_r] + \partial_{\mu}\mathcal{L}\delta x^{\mu} \\ &= \partial_{\mu}[-\partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L}\partial^{\nu}\varphi_r\delta x_{\nu} + \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}\delta x_{\nu}] \\ &= \partial_{\mu}[-\partial_{\partial_{\mu}\varphi_r}\mathcal{L}\partial^{\nu}\varphi_r + \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}]\delta x_{\nu} \\ &= \partial_{\mu}J^{\mu}\end{aligned}$$

Alla prima riga la variazione  $\delta\mathcal{L}$  è la variazione rispetto al campo  $\varphi$  ed è funzione delle variabili canoniche,  $\varphi$  e  $\partial_{\mu}\varphi$ , che sono variabili indipendenti (simile a  $q$  e  $p$  in meccanica classica o quantistica). Al primo addendo della terza riga, si è applicato il fatto che i campi verificano le equazioni di Eulero-Lagrange perché esse provengono dal principio di minima azione. Al secondo addendo della quarta riga si è applicato

$$\delta(\partial_{\mu}\varphi_r) = \partial_{\mu}(\varphi_r + \delta\varphi_r) - \partial_{\mu}\varphi_r = \partial_{\mu}(\delta\varphi_r)$$

Alla quinta riga si applicata la regola della derivata del prodotto. Alla penultima riga la relazione sopra per la variazione del campo  $\delta\varphi_r(x)$ .

Si ottiene una corrente conservata

$$J^\mu = -\partial_{\partial_\mu\varphi_r}\mathcal{L}\partial^\nu\varphi_r\delta x_\nu + \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}\delta x_\nu$$

da cui si definisce il tensore energia-impulso

$$J^\mu \equiv -T^{\mu\nu}\delta x_\nu, \quad T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu\varphi_r}\mathcal{L}\partial^\nu\varphi_r - \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}$$

Poiché le componenti della traslazione  $\delta x_\nu$  sono indipendenti le une dalle altre (cioè arbitrarie), l'equazione di continuità diventa

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

da cui seguono quattro quantità conservate

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x (\pi_r \partial^\nu\varphi_r - \mathcal{L}\eta^{0\nu})$$

corrispondenti alla componente temporale  $\mu = 0$  della quadri-corrente. La quantità conservata è l'hamiltoniana

$$P^0 = \int d^3x (\pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L}) = \int d^3x \mathcal{H} = H$$

Le altre componenti sono il momento del campo

$$P^j = \int d^3x \pi_r \partial^j\varphi_r$$

La relazione tra conservazione del quadri-momento e simmetria per traslazione è nota dalla fisica classica, ma questo risultato si è ritrovato tramite il formalismo lagrangiano. Questa relazione vale per qualunque campo.

**Invarianza per rotazione.** La discussione è analoga. La più generica rotazione è la trasformazione di Lorentz

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu$$

dove  $\varepsilon^{\mu\nu}$  è un tensore anti-simmetrico. Come fatto per cercare la trasformazione  $S$  degli spinori quando sottoposti ad una trasformazione di Lorentz, così si considera la più generale trasformazione del campo

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = \varphi_r(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}S_{rs}^{\alpha\beta}\varphi_s(x)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono indici quadri-dimensionali, di Lorentz, mentre  $r$  ed  $s$  indicizzano i campi; inoltre,  $S_{rs}^{\alpha\beta}$  è un tensore anti-simmetrico in  $\alpha$  e  $\beta$  che viene determinato dalle proprietà di trasformazione dei campi  $\varphi_r$ . Per un campo scalare si ha  $S = 0$ . Per un campo vettoriale, le componenti vengono mischiate secondo  $S_{rs}$ . Per un campo bispinoriale, si è ricavata la trasformazione

$$S = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu\nu}\right]$$

Dalla trasformazione del campo, la variazione totale è

$$\delta_T\varphi_r = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}S_{rs}^{\alpha\beta}\varphi_s$$

mentre, ricordando il discorso fatto in precedenza, la variazione di forma è

$$\delta\varphi_r = \delta_T\varphi_r - \partial_\alpha\varphi_r\delta x^\alpha$$

Pertanto, la variazione della lagrangiana è

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial_\mu\varphi'_r(x')) - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu\varphi_r(x)) = \partial_\mu [\partial_{\partial_\mu\varphi_r}\mathcal{L}\delta\varphi_r] + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \\ &= \partial_\mu \left[ \partial_{\partial_\mu\varphi_r}\mathcal{L} \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}S_{rs}^{\alpha\beta}\varphi_s - \partial_\alpha\varphi_r\delta x^\alpha \right) + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = \partial_\mu J^\mu \end{aligned}$$

Ricordando  $\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\beta} x_\beta$ , la corrente è

$$\begin{aligned} J^\mu &= \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \varphi_s - \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \partial^\alpha \varphi_r \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta + \mathcal{L} \varepsilon^{\mu\beta} x_\beta \\ &= \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \varphi_s - \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} (\partial^\alpha \varphi_r x^\beta - \partial^\beta \varphi_r x^\alpha) + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} \mathcal{L} (\eta^{\mu\alpha} x^\beta - \eta^{\mu\beta} x^\alpha) \\ &= \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} [\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} S_{rs}^{\alpha\beta} \varphi_s - x^\beta T^{\mu\alpha} + x^\alpha T^{\mu\beta}] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} M^{\mu\alpha\beta} \end{aligned}$$

Alla prima riga, il secondo addendo è costituito dalla contrazione del tensore di Levi-Civita per un tensore senza simmetria definita: si riscrive quest'ultimo in termini di parte simmetrica (che si contrae a zero) ed anti-simmetrica; lo stesso per il terzo addendo  $\varepsilon^{\mu\beta} x_\beta = \eta^{\mu\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta$ .

Poiché le rotazioni sono arbitrarie, la legge di continuità diventa

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0, \quad M^{\mu\alpha\beta} = -M^{\mu\beta\alpha}$$

L'anti-simmetria implica sei quantità conservate

$$M^{\alpha\beta} \equiv \int d^3x M^{0\alpha\beta} = \int d^3x [(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}) + \pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \varphi_s]$$

Considerando solo le componenti spaziali  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  (quindi tre quantità conservate), i primi due addendi sono un termine di momento angolare orbitale poiché  $T^{0\alpha}$  è una densità di momento lineare. Il terzo addendo è un momento angolare intrinseco perché deve avere le stesse dimensioni del primo termine e non dipende dalle coordinate. In precedenza, il momento angolare intrinseco è stato introdotto in una teoria quantistica come necessità relativistica, ma ora si sta trattando una teoria dei campi classica. In questo caso il momento angolare intrinseco è definito dal modo in cui i campi si trasformano per trasformazioni di coordinate. Ad esempio, il bispinore si trasforma secondo la rappresentazione  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$  bispinoriale del gruppo di Poincaré.

Come in precedenza, tramite il formalismo lagrangiano si è ricavata la relazione tra invarianza per rotazioni e conservazione del momento angolare, sebbene sia già nota dalla fisica classica.

Inoltre, bisogna notare che viene conservato il momento angolare totale, non il solo momento angolare orbitale o intrinseco.

Nel caso in cui  $\alpha = 0$  si hanno i boost. Considerando una particella scalare, si ottengono le tre quantità conservate

$$M^{0\beta} = \int d^3x M^{00\beta} = \int d^3x [x^0 T^{0\beta} - x^\beta T^{00}] \sim t\mathbf{p} - E\mathbf{r}$$

Il loro significato non è trasparente per una sola particella. Si considerino  $N$  corpi non interagenti:

$$\mathbf{M} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{p}_n t - E_n \mathbf{r}_n) = \text{cost.} \implies \sum_{n=1}^N \frac{E_n \mathbf{r}_n}{E} - \frac{t}{E} \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n = \text{cost.}$$

dove si ha l'energia, la velocità e la posizione del centro di massa

$$E = \sum_n E_n, \quad \mathbf{V} = \frac{\sum \mathbf{p}_n}{E} = \frac{\mathbf{P}}{E}, \quad \mathbf{R} = \frac{\sum E_n \mathbf{r}_n}{E}$$

Dunque, si ha la generalizzazione relativistica del moto del centro di massa di un sistema di particelle

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \text{cost.}$$

**Simmetrie interne.** Le trasformazioni interne non coinvolgono i gradi di libertà spazio-temporali. Le simmetrie interne sono fondamentali per il Modello Standard. Esse operano solamente sui campi. Una trasformazione interna è data da

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x) = \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x)$$

La variazione della lagrangiana è

$$0 = \partial_{\varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r + \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta(\partial_\mu \varphi_r) = \partial_\mu [\partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta\varphi_r] = \partial_\mu f^\mu$$

Pertanto, la corrente conservata e la quantità conservata sono

$$f^\mu = \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \delta \varphi_r \implies F^0 = \int d^3x \pi_r \delta \varphi_r$$

La trasformazione particolare definisce la variazione  $\delta \varphi_r$ .

**Osservabili.** In generale, per un'equazione di continuità

$$\partial_\mu f^\mu = 0$$

le quantità locali — la lagrangiana, la corrente — non sono osservabili poiché sono ambigue, diversamente dalle quantità integrate che sono conservate, come l'azione. Si supponga di aver trovato una corrente conservata  $f^\mu$  e si consideri

$$f'^\mu = f^\mu + \partial_\nu x^{\mu\nu}$$

dove  $x^{\mu\nu}$  è un arbitrario tensore anti-simmetrico. La scrittura

$$\partial_\mu f'^\mu = \partial_\mu f^\mu + \partial_\mu \partial_\nu x^{\mu\nu} = \partial_\mu f^\mu$$

non porta ad alcun cambiamento della legge di conservazione. La corrente non è univocamente definita e dunque non è osservabile. D'altra parte, la quantità conservata è

$$\int d^3x f'^0 = \int d^3x (f^0 + \partial_i x^{0i}) = \int d^3x f^0$$

supponendo che all'infinito  $x^{0i}$  tenda a zero abbastanza velocemente.

## 4 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Si veda Mandl, cap. 1. Si tratta la quantizzazione non covariante poiché quella covariante è più complicata e non si può fare la quantizzazione canonica al quadri-potenziale perché il momento coniugato associato al potenziale elettrostatico  $\phi = A^0$  è nullo. Si studia come passare al campo quantizzato. In Meccanica Quantistica si passa dalla posizione e dal momento agli operatori associati  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , variabili canoniche che rispettano certe regole di commutazione: queste è la quantizzazione canonica.

Per il campo elettromagnetico, la fisica è contenuta nel campo del potenziale vettore  $\mathbf{A}$ . Questi è un campo definito in ogni punto dello spazio e del tempo quindi è rappresentato da un nucleo infinito e continuo di gradi di libertà. Per rendere la trattazione più comoda, si definisce il campo su di un reticolo all'interno di un volume finito: si ottiene la teoria continua per  $a \rightarrow 0$  e  $V \rightarrow \infty$ . Si considera il caso in assenza di cariche. Si quantizzano i gradi di libertà indipendenti.

**Campo classico.** Si consideri il gauge di Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  che non è covariante (in particolare a causa dei boost). Dunque la trattazione vale in un particolare sistema di riferimento. Nello spazio dei momenti, il gauge è

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$$

dove  $\mathbf{k}$  è il numero d'onda (angolare). Si hanno due polarizzazioni possibili ed il numero d'onda è ortogonale al piano definito dai due versori di polarizzazione

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}, \quad \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{k} = 0$$

Poiché si utilizza un reticolo, il numero d'onda non è continuo:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z), \quad V = L^3$$

Si applicano le condizione al bordo periodiche

$$A(0, y, z, t) = A(L, y, z, t)$$

e similmente per gli altri assi. L'importanza di tale condizione viene meno quando poi si fa il limite continuo  $V \rightarrow \infty$ . Sia  $x$  un punto generico in tre dimensioni. Si sviluppa il potenziale vettore in serie di Fourier

$$\mathbf{A}(x, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k}, t)e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}], \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$$

dove  $r$  è l'indice di polarizzazione (verticale oppure orizzontale). Poiché il potenziale vettore è reale, esso dev'essere dato dalla somma di termine e del suo complesso coniugato. Inoltre, esso è sovrapposizione di onde piane. La somma è fatta solamente sui momenti poiché la componente temporale è fissata dalla relazione di dispersione.

Le equazioni di Maxwell in assenza di cariche diventano

$$\square \mathbf{A} = 0$$

cioè l'equazione delle onde. Inserendovi la serie di Fourier di  $\mathbf{A}$  si ottiene

$$\partial_t^2 a_r(\mathbf{k}, t) = -\omega_{\mathbf{k}}^2 a_r(\mathbf{k}, t)$$

cioè l'equazione delle onde che definisce la dipendenza temporale dei coefficienti  $a_r(\mathbf{k}, t)$ . Questa è anche l'equazione dell'oscillatore armonico. Pertanto, conviene scrivere i coefficienti soluzione come

$$a_r(\mathbf{k}, t) = a_r(\mathbf{k}, 0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$$

Ricordandosi

$$\partial_{ct} \mathbf{A} = -\mathbf{E}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$$

si sostituisce lo sviluppo di Fourier nelle espressioni per i campi al fine di calcolare l'energia in termini dei coefficienti  $a(\mathbf{k}, t)$ . Conoscendo la dipendenza temporale di tali coefficienti, segue

$$\mathbf{A}(x, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}, 0)e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_r^*(\mathbf{k}, 0)e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}]$$

Dunque, il campo elettrico ed il campo magnetico sono

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\partial_{ct} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) [-i\omega_{\mathbf{k}} a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + i\omega_{\mathbf{k}} a_r^*(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu}] \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{i}\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_r a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + (-i\mathbf{k}) \times \hat{\mathbf{e}}_r a_r^*(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu}] \end{aligned}$$

## Lezione 13

Dunque, per il campo elettrico si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= \sum_{\mathbf{k}, r, \mathbf{k}', r'} \frac{\hbar c^2}{2Vc^2} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \\ &\times \left[ -\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} a_r(\mathbf{k}, t) a_{r'}(\mathbf{k}', t) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - \omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} a_r^*(\mathbf{k}, t) a_{r'}^*(\mathbf{k}', t) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. + \omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} a_r^*(\mathbf{k}, t) a_{r'}(\mathbf{k}', t) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + \omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} a_r(\mathbf{k}, t) a_{r'}^*(\mathbf{k}', t) e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right] \end{aligned}$$

dove si è inserita la dipendenza temporale all'interno dei coefficienti  $a(\mathbf{k}, t)$  che per ora sono numeri. Nella seconda e terza riga, la dipendenza spaziale proviene solamente dagli esponenziali, cioè onde piane:

$$\int d^3x |\mathbf{E}|_{\text{II}}^2 \propto V \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$$

mar 24 ott  
2023 10:30

mentre la terza riga fornisce

$$\int d^3x |\mathbf{E}|_{\text{III}}^2 \propto V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Il volume che proviene da questi termini si semplifica con il volume nella prima riga: l'energia del sistema non può dipendere dal volume in cui si sviluppa in serie di Fourier. Infine si nota

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'} = \delta_{r,r'}$$

Pertanto

$$\int d^3x |\mathbf{E}|^2 = \sum_{\mathbf{k},r} \frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}} [-\omega_{\mathbf{k}}^2 a_r(\mathbf{k},t) a_r(-\mathbf{k},t) - \omega_{\mathbf{k}}^2 a_r^*(\mathbf{k},t) a_r^*(-\mathbf{k},t) + 2\omega_{\mathbf{k}}^2 a_r^*(\mathbf{k},t) a_r(\mathbf{k},t)]$$

In maniera analoga, per il campo magnetico si ha

$$\begin{aligned} \int d^3x |\mathbf{B}|^2 = \sum_{\mathbf{k},r} \frac{\hbar c^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} [(-\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k},t) a_r(-\mathbf{k},t) - \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{k}) a_r^*(\mathbf{k},t) a_r^*(-\mathbf{k},t) \\ + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} a_r^*(\mathbf{k},t) a_r(\mathbf{k},t)] \end{aligned}$$

dove si utilizza

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

per cui

$$(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}') = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}')$$

Nella somma dei due integrali per ottenere l'hamiltoniana, i primi due addendi di ogni campo si semplificano, mentre il terzo addendo di ciascuno porta a

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},r} 4 \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2} a_r^*(\mathbf{k},t) a_r(\mathbf{k},t) = \sum_{\mathbf{k},r} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

la dipendenza temporale si è semplificata in accordo con il fatto che l'hamiltoniana, cioè l'energia, si conserva. Inoltre, si considerano i coefficienti  $a$  e  $a^*$  come numeri (quindi commutano).

**Campo quantizzato.** La dipendenza temporale dei coefficienti deriva dall'equazione d'onda che somiglia alla formula dell'oscillatore armonico classico. Si passa dalla funzione potenziale vettore  $\mathbf{A}$  ad un operatore, mentre le coordinate canoniche  $x$  e  $p$  rimangono tali e non diventano operatori. Il potenziale vettore operatore è dato da

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k},r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r [a_r(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{k},t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]$$

Esso è hermitiano e ciò corrisponde al fatto che nel caso classico è reale. I coefficienti di Fourier sono da intendersi come operatori. Nell'identificazione con il caso classico dell'oscillatore armonico, essi sono l'operatore di abbassamento ed innalzamento del numero di occupazione (detti anche di annichilazione, o distruzione, e creazione). Essi soddisfano

$$[a_r(\mathbf{k},t), a_s^\dagger(\mathbf{k}',t)] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

mentre tutte le altre regole di commutazione sono nulle. L'operatore  $\mathbf{A}$  agisce sul numero di occupazione poiché è combinazione lineare degli operatori di abbassamento ed innalzamento. Quando si calcola l'energia non si possono scambiare gli operatori senza considerare il commutatore. Dunque

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},r} \hbar \omega_{\mathbf{k}} [a_r^\dagger(\mathbf{k},t) a_r(\mathbf{k},t) + a_r(\mathbf{k},t) a_r^\dagger(\mathbf{k},t)] \\ &= \sum_{\mathbf{k},r} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[ a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] = \sum_{\mathbf{k},r} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[ N_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$



Come in precedenza, la dipendenza temporale si semplifica e dunque il valore di aspettazione dell'operatore numero è conservato.

Rimane un problema. Utilizzare un volume finito permette di ottenere un numero infinito e numerabile di valori di momento  $\mathbf{k}$ : la somma del termine  $\frac{1}{2}$  dà un infinito. Si può risolvere il problema tramite due modi, il secondo dei quali è detto ordinamento normale. Si vede il primo: l'energia non è osservabile, ma le differenze di energia sono osservabili, si può sempre ridefinire la scala di energia. Dunque si elimina il fattore  $\frac{1}{2}$  sebbene non si accettabile matematicamente. Quindi

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar \omega_{\mathbf{k}} N_r(\mathbf{k})$$

**Fotone.** In questo modo il campo è una sovrapposizione di oscillatori armonici quantistici, ma non si ha ancora una descrizione particellare del campo: il fotone non si è ancora palesato. Si può calcolare il momento del campo tramite il tensore energia-impulso oppure utilizzando direttamente il vettore di Poynting

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar \mathbf{k} \left[ N_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right]$$

dove si utilizza

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_r) = \mathbf{k}(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{k})\hat{\mathbf{e}}_r$$

I campi elettrico e magnetico sono operatori legati al campo  $\mathbf{A}$  e, come esso, sono lineari negli operatori di abbassamento ed innalzamento.

Anche per il vettore di Poynting si presenta il problema della somma infinita. Tuttavia il termine problematico si può eliminare perché per ogni momento  $\mathbf{k}$  esiste un momento opposto  $-\mathbf{k}$  e dunque la somma è nulla:

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar \mathbf{k} N_r(\mathbf{k})$$

Allo stato di vuoto — nel senso di stato di Fock, cioè lo stato per cui non è presente alcuna particella — si applica l'operatore di innalzamento generando un'eccitazione che porta l'oscillatore armonico ad avere numero di occupazione pari ad 1. L'eccitazione ha momento  $\mathbf{k}$  e polarizzazione  $r$ . Di questo stato si calcola l'energia

$$\begin{aligned} H a_{r\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle &= \sum_{\mathbf{k}', r'} \hbar \omega_{\mathbf{k}'} (a_{r'\mathbf{k}'}^\dagger a_{r'\mathbf{k}'} a_{r\mathbf{k}}^\dagger) a_{r\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle = \sum_{\mathbf{k}', r'} \hbar \omega_{\mathbf{k}'} a_{r'\mathbf{k}'}^\dagger [a_{r\mathbf{k}}^\dagger a_{r'\mathbf{k}'} + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{rr'}] |0\rangle \\ &= \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{r\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

alla seconda uguaglianza si applica il commutatore. Il primo addendo nella parentesi presenta l'operatore di distruzione che annichila lo stato di vuoto. Lo stato  $a_{r\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$  è auto-stato dell'hamiltoniana con autovalore  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ . Per il vettore di Poynting si ha

$$\mathbf{P} a_{r\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle = \hbar \mathbf{k} a_{r\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$$

cioè lo stato citato è auto-stato del momento con autovalore  $\hbar \mathbf{k}$ . In meccanica relativistica, una particella ha energia, impulso e massa legate dalla relazione di dispersione di Einstein. L'eccitazione creata dal vuoto ha energia  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ , impulso  $\hbar \mathbf{k}$  e massa nulla secondo la relazione

$$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$$

L'interpretazione è immediata: il fotone.

Rimane ancora il problema del potenziale elettrostatico poiché è un potenziale di interazione istantanea.

**Equazioni.** In precedenza, i coefficienti di Fourier sono funzioni che rispettano un'equazione delle onde. Si trova l'equazione soddisfatta dagli operatori. Tramite la descrizione di Heisenberg, gli operatori si evolvono nel tempo

$$\begin{aligned}\dot{a}_r(\mathbf{k}, t) &= \frac{i}{\hbar} [H, a_r(\mathbf{k}, t)] = i \sum_{\mathbf{k}', r'} \omega_{\mathbf{k}'} [a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}', t) a_{r'}(\mathbf{k}', t), a_r(\mathbf{k}, t)] \\ &= -i \sum_{\mathbf{k}', r'} \omega_{\mathbf{k}'} [a_r(\mathbf{k}, t), a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}', t)] a_{r'}(\mathbf{k}', t) = -i \sum_{\mathbf{k}', r'} \omega_{\mathbf{k}'} a_{r'}(\mathbf{k}', t) \delta_{rr'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= -i \omega_{\mathbf{k}} a_r(\mathbf{k}, t)\end{aligned}$$

Inoltre

$$\ddot{a}_r(\mathbf{k}, t) = \frac{i}{\hbar} [H, \dot{a}_r(\mathbf{k}, t)] = -\omega_{\mathbf{k}}^2 a_r(\mathbf{k}, t)$$

Gli operatori quantistici soddisfano le stesse equazioni delle funzioni del sistema classico.

**Differenza con la meccanica classica.** Si veda Sakurai, §2-3. Si è detto gli operatori dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono lineari negli operatori di distruzione e creazione, ma tali operatori non commutano tra loro e nemmeno con l'operatore numero di occupazione. Questo porta ad un principio di indeterminazione sulla misura contemporanea del campo elettrico e del campo magnetico.

Il valore di aspettazione del campo elettrico sullo stato di vuoto è

$$\mathbf{E} \propto c_1 a + c_2 a^\dagger \implies \langle 0 | \mathbf{E} | 0 \rangle = 0$$

La deviazione standard è

$$\langle 0 | |\mathbf{E}|^2 | 0 \rangle = \|\mathbf{E} | 0 \rangle\|^2 = \infty$$

poiché  $\langle a a^\dagger \rangle = 1$  e dunque la somma su tutti i momenti è infinita. Quando si ottiene un infinito, o la teoria è patologica (non rinormalizzabile) oppure la domanda non è ben posta, cioè questo caso. Le relazioni sopra affermano giustamente che è presente un'incertezza, sebbene sia infinita. Bisogna capire perché la domanda non è ben posta. Misurare il campo elettrico prevede l'esistenza di un apparato di misura che non è puntiforme, ma ha un'estensione spaziale.

Si media il campo elettrico in un volume di dimensione  $\Delta L$ . Dunque, seguendo calcoli qualitativi, si ha

$$E = -\partial_{ct} A \sim -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_{\mathbf{k}} [O(1)], \quad E^2 \sim \frac{1}{c^2} \frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\mathbf{k}}} \omega_{\mathbf{k}}^2 \sim \frac{\hbar \omega}{2V}$$

L'operatore di campo mediato è

$$\tilde{E}^2 \sim \frac{1}{V} \int_V E^2 d^3x \sim \frac{\hbar \omega}{2V} \frac{1}{V} \int_V d^3x \sim \frac{\hbar \omega}{(\Delta L)^3} \sim \frac{\hbar c}{(\Delta L)^4}$$

dove si considera una frequenza del campo dell'ordine del lato del volume  $\omega \Delta L \sim c$ .

Un altro modo per arrivare allo stesso risultato utilizza l'elettrodinamica classica. Si ha la costante di struttura fine e la scala del campo elettrico pari a

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad E \sim \frac{e}{L^2}$$

Dunque il campo medio è

$$E^2 \sim \frac{e^2}{L^4} L^3 \frac{1}{V} \sim \frac{\hbar c}{L^4}$$

Questa approssimazione dà una idea delle fluttuazioni del campo elettrico in assenza di fotoni.

L'interpretazione classica del campo elettromagnetico funziona bene grazie al principio di corrispondenza: per grandi numeri quantici, si ottiene nuovamente la fisica classica. Infatti, in tal caso i valori di aspettazione degli operatori sono di ordine del numero quantico (in unità  $\hbar$ ), mentre i commutatori sono di ordine 1 e quindi trascurabili. Tutti gli effetti della meccanica quantistica derivano dai commutatori.

Si considera una radiazione  $\lambda$  ed un volume di tale lunghezza d'onda. Dal punto di vista della teoria di campo sviluppata segue

$$\langle 0 | |\mathbf{E}|^2 | 0 \rangle \sim \frac{\hbar c}{\lambda^4}$$

D'altra parte, in elettrodinamica classica si ha il valor medio

$$\langle E^2 \rangle = \bar{n} \hbar \omega = \bar{n} \frac{\hbar c}{\lambda}$$

dove  $\bar{n}$  è il numero di fotoni e la relazione vale perché in assenza di campo magnetico, l'energia è proporzionale al quadrato del modulo del campo elettrico. Se l'elettrodinamica classica funziona bene, allora la fluttuazione quantistica dev'essere piccola rispetto al valor medio del campo in elettrodinamica classica. Infatti, il numero di fotoni è

$$\bar{n} \gg \frac{1}{\lambda^3} \gg 1$$

Si studia se il numero di fotoni è così grande. Si consideri una lampadina da  $W = 100 \text{ W}$  con lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 600 \text{ nm}$$

L'energia emessa in un secondo è data da

$$E = WT = 100 \text{ W} \cdot 1 \text{ s} = 100 \text{ J}$$

L'energia di un singolo fotone è

$$E_\gamma = h\nu = 3.3 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Pertanto, il numero di fotoni al secondo è

$$\bar{n} = \frac{W}{E_\gamma} = 3 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

L'emissione della lampadina è isotropa. Si considera una superficie di dimensioni della lunghezza d'onda a distanza di  $R = 1 \text{ m}$ . Dunque, il numero di fotoni attraverso la superficie è

$$\frac{\bar{n}}{4\pi R^2} \lambda^2 = 10^7 \text{ s}^{-1} \gg 1$$

Il numero di fotoni è il valore di aspettazione dell'operatore numero ed in questo caso è un numero grande rispetto al commutatore degli operatori che costituiscono l'operatore numero.

## Lezione 14

### 4.1 Interazione di dipolo

Si veda Mandl, §1.3. Si confronta la teoria con l'esperimento. Si utilizza la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

Si consideri il campo quantizzato  $\mathbf{A}$ . Il numero di occupazione per il campo libero commuta con l'hamiltoniana, è conservato. In presenza di cariche, cioè il caso presente, il numero non è più conservato: i fotoni possono essere emessi o assorbiti. Alla hamiltoniana libera bisogna aggiungere l'hamiltoniana di interazione. Si studia l'interazione del campo elettromagnetico con un sistema di cariche. Il sistema più comodo è quello di elettroni di un atomo che viene trattato in modo non relativistico. Si introduce l'approssimazione di dipolo.

Si è già visto il dipolo quando si è trattato l'effetto Stark. A meno di degenerazioni, il momento di dipolo per un atomo è nullo

$$\mathbf{D} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$$

Infatti, esso è un vettore polare e dunque cambia segno per inversione delle coordinate. Il suo valore di aspettazione su di uno stato elettronico è nullo

$$\langle nlm | \mathbf{D} | nlm \rangle = \int d^3x |\psi_{nlm}|^2 \mathbf{D} = 0$$

mer 25 ott  
2023 10:30

poiché la funzione d'onda ha parità  $(-1)^l$  definita e dunque il suo quadrato è sempre pari, però il dipolo è dispari. Non si ha momento di dipolo intrinseco. Questo vale a meno di degenerazioni oppure sovrapposizioni di stati con parità diversa.

L'esistenza di un dipolo elettrico intrinseco vale per qualunque stato, anche per una molecola. In Feynman vol. III, il capitolo 9 discute l'ammoniaca. Essa ha due stati degeneri e dunque ha un momento di dipolo. L'azoto si può trovare sopra o sotto il piano definito dagli atomi di idrogeno. Ponendo la molecola in oscillazione tra i due stati si ottiene un maser. L'oscillazione del momento di dipolo permette di creare microonde.

Si consideri un dipolo elettrico. In generale il problema non è risolvibile perché non si conoscono le funzioni d'onda degli elettroni in un generico atomo. Si opera un'approssimazione di dipolo:

- si trascura l'interazione tra carica e campo magnetico;
- la radiazione non varia apprezzabilmente sulla scala della distribuzione delle cariche; in queste condizioni, il campo elettrico

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

proveniente dal potenziale vettore trasverso — detto così poiché nel gauge di Coulomb vale  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$ , cioè solo la componente trasversa del campo, rispetto alla direzione del moto, non è nulla — si può calcolare in un punto arbitrario all'interno della distribuzione delle cariche, in particolare  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ . In questo modo si trascura anche il campo elettrostatico generato dalle cariche.

L'hamiltoniana di interazione è data da

$$H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_T(0, t)$$

Il numero di occupazione non è più conservato, ma è possibile scambiare fotoni con il campo esterno. Il campo elettrico è

$$\mathbf{E}_T(0, t) = i \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}]$$

Nella descrizione del sistema sono presenti due parti: la parte atomica ignota e la parte di assorbimento ed emissione nota, cioè l'elettrodinamica quantistica. Si fattorizza lo stato iniziale in uno stato atomico ignoto ed uno stato del campo quantizzato

$$|A, n_r(\mathbf{k})\rangle = |A\rangle |n_r(\mathbf{k})\rangle$$

Lo stato iniziale si può fattorizzare perché i due stati sopra sono elementi di diversi spazi di Hilbert. Nell'interazione il campo arriva sulle cariche e modifica lo stato atomico nello stato finale

$$|B, n_r(\mathbf{k}) \pm 1\rangle = |B\rangle |n_r(\mathbf{k}) \pm 1\rangle$$

Il numero di occupazione dello stato di un fotone varia solo di uno poiché l'hamiltoniana è proporzionale al campo elettrico, il quale dipende linearmente dagli operatori di distruzione e creazione: esso può solamente distruggere o creare un singolo fotone. Si ha un processo ad un fotone:

$$\langle n_r \pm 2 | \mathbf{E}_T | n_r \rangle = 0, \quad \langle n_r \pm 1 | \mathbf{E}_T | n_r \rangle \neq 0$$

Si studia l'emissione di un fotone. Tramite la teoria delle perturbazioni, si calcola il valore di aspettazione dell'hamiltoniana di interazione, cioè l'elemento di matrice di transizione tra lo stato iniziale e lo stato finale:

$$\begin{aligned} -\langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle &= \langle B | \mathbf{D} | A \rangle \langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | \mathbf{E}_T(0, t) | n_r(\mathbf{k}) \rangle \\ &= i \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) \cdot \langle B | \mathbf{D} | A \rangle \langle n_r + 1 | a_r^\dagger | n_r \rangle e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \\ &= i \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) \cdot \langle B | \mathbf{D} | A \rangle [n_r(\mathbf{k}) + 1]^{\frac{1}{2}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \end{aligned}$$

Alla seconda riga non si ha la somma perché solamente un operatore può creare un fotone con polarizzazione  $r$  e momento  $\mathbf{k}$ . Alla terza riga si è applicato

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Poiché il momento di dipolo  $\mathbf{D}$  è un vettore polare, allora gli stati  $|B\rangle$  e  $|A\rangle$  devono avere momenti angolari (quindi parità) diversi. I valori particolari derivano dalle regole di selezione della transizione di dipolo elettrico provenienti dal seguente elemento di matrice

$$\langle B | \mathbf{D} | A \rangle$$

Si utilizza la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, in particolare la regola d'oro di Fermi. Il tasso di transizione, cioè la probabilità per unità di tempo, è

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | H_I | n \rangle|^2 \delta(E_m - E_n \pm \hbar\omega)$$

A causa della delta di Dirac, la differenza di energia tra i due stati atomici è  $\pm\hbar\omega$  il cui segno va in base all'emissione o all'assorbimento di un fotone. Si calcola il modulo quadro dell'elemento di matrice dell'hamiltoniana di interazione. Per l'emissione si ha

$$\frac{E_A - E_B}{\hbar} = \omega = \omega_{\mathbf{k}}$$

Ricordando di essere in un volume finito, il momento è discreto e pari a

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x$$

Il numero di stati nell'intervallo  $[\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k}]$  è

$$dn_x = L_x \frac{dk_x}{2\pi} \implies dn = V \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{V k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3}$$

La delta è considerata sulla pulsazione  $\omega$ , ma l'integrale viene fatto sul vettore d'onda  $\mathbf{k}$ : compare un fattore  $c$ . Dunque, il tasso di transizione per una transizione atomica  $|A\rangle \rightarrow |B\rangle$  con emissione di un fotone con polarizzazione  $\hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k})$  è dato da

$$\begin{aligned} w_r d\Omega &= \int V \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_A - E_B - \hbar\omega) \frac{\hbar\omega}{2V} [n_r(k) + 1] |\langle B | \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D} | A \rangle|^2 \\ &= \frac{e^2 \omega^3}{8\pi^2 \hbar c^3} d\Omega [n_r(\mathbf{k}) + 1] |\hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2, \quad \mathbf{x}_{BA} \equiv \langle B | \sum \mathbf{r}_i | A \rangle \end{aligned}$$

dove  $d\Omega$  è l'angolo solido infinitesimo. Il fattore  $n_r(\mathbf{k})$  implica l'emissione stimolata: la probabilità di emissione è maggiore se arrivano più fotoni. L'addendo 1 corrisponde all'emissione spontanea: in assenza di fotoni, di campo esterno, c'è una probabilità non nulla di emissione. Tale addendo proviene dai commutatori degli operatori di creazione e distruzione. Non ha equivalente classico.

Da questo si può ritrovare ancora il principio di corrispondenza: l'emissione spontanea è trascurabile rispetto all'emissione stimolata in presenza di molti fotoni.

In generale, non è facile misurare la polarizzazione di un fotone, ma è semplice contare i fotoni incidenti. Per confrontare con i dati sperimentali, si somma sulle polarizzazioni

$$w d\Omega = \sum_r w_r d\Omega \propto \sum_r |\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2$$

Considerato che i momenti  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{k}})$  costituiscono un sistema di riferimento ortonormale, si ha la seguente regola di completezza

$$\varepsilon_1^i \varepsilon_1^j + \varepsilon_2^i \varepsilon_2^j + \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} = \delta^{ij} \implies \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2}$$

dove i pedici indicano il versore considerato, mentre gli apici indicano le componenti spaziali. Pertanto, la somma sulle polarizzazioni vale

$$\begin{aligned}\sum_r |\hat{\epsilon}_r \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2 &= \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^i \epsilon_r^j x_{BA}^i x_{BA}^j = x_{BA}^i x_{BA}^j \delta^{ij} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{BA})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{BA})}{|\mathbf{k}|^2} \\ &= |\mathbf{x}_{BA}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{x}_{BA}|^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

Il vettore  $\mathbf{x}_{BA}$  descrive il momento di dipolo, mentre il momento  $\mathbf{k}$  è il momento del fotone emesso. Si pone  $\theta$  l'angolo tra i due. Il tasso di transizione totale per un fotone emesso nello stato finale è

$$w_{\text{tot}} = \int w \, d\Omega = \int \frac{e^2 \omega^3}{8\pi^2 \hbar c^3} [n(\mathbf{k}) + 1] |\mathbf{x}_{BA}|^2 \sin^2 \theta \, d\Omega = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \hbar c^3} |\mathbf{x}_{BA}|^2 [n(\mathbf{k}) + 1]$$

ricordando che

$$\int \sin^2 \theta \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3}$$

Per l'assorbimento, la discussione è analoga, ma il numero di occupazione è  $n$  al posto di  $n + 1$ .

## 4.2 Scattering Thomson

Si veda Mandl, §§ 1.4.1, 1.4.4. Si calcola la sezione d'urto dello scattering Thomson. Poiché si è in presenza di un campo esterno, utilizza la sostituzione minimale

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

dove  $\mathbf{p}$  è il momento coniugato (non cinetico) della distribuzione di carica. L'hamiltoniana libera semi-classica è

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}$$

Si trascura il campo elettrico generato dalle singole cariche, ma si occupa di uno scattering: un fotone assorbito ed un fotone emesso. L'hamiltoniana di interazione è composta da tutti i termini che provengono dalla sostituzione minimale nell'hamiltoniana libera:

$$\begin{aligned}H_I &= \sum_i \left[ -\frac{e}{2mc} [\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}_i(x_i, t) + \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{p}_i] + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}(x_i, t) \cdot \mathbf{A}(x_i, t) \right] \\ &= \sum_i \left[ -\frac{e}{mc} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{p}_i + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i \right]\end{aligned}$$

Come già visto (cfr. limite non relativistico dell'equazione di Dirac) il termine  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$  è da intendersi

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{A}\psi) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \psi + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})\psi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \psi + (-i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A})\psi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \psi$$

poiché si utilizza il gauge di Coulomb.

Il primo addendo dell'hamiltoniana di interazione è al prim'ordine nei campi, mentre il secondo termine è al secondo ordine. Per fare un calcolo al secondo ordine, bisogna considerare tutti i termini di secondo ordine.

Si specializza l'hamiltoniana di interazione per lo scattering Thomson. Il campo arriva, interagisce con la distribuzione di carica, un fotone si diffonde: il fotone viene assorbito ed un altro viene emesso. Si ipotizza:

- l'energia del fotone è molto più grande dell'energia di legame dell'elettrone  $\hbar\omega \gg E_{\text{legame}}$ : il fotone vede gli elettroni come fossero liberi;
- l'energia del fotone è molto minore dell'energia di riposo dell'elettrone  $\hbar\omega \ll mc^2$ ; questo implica che lo scattering è elastico, l'energia del fotone non cambia e l'energia di rinculo dell'elettrone è trascurabile, cambia solo la direzione del vettore d'onda;

- la lunghezza d'onda del fotone è molto più grande della scala spaziale della distribuzione di cariche, quindi si può calcolare il campo in un punto arbitrario, in particolare  $\mathbf{r} = 0$ .

Bisogna considerare il secondo ordine perché si annichila un fotone e ne si crea un altro. Tuttavia, i due addendi dell'hamiltoniana di interazione non hanno lo stesso peso. Infatti, il rapporto (al secondo ordine) tra i due è

$$\frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})^2}{m^2} \frac{m}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \sim \frac{p^2}{m}$$

Si vuole calcolare la sezione d'urto che, dimensionalmente, è un'area. Utilizzando le costanti della teoria, essa è

$$\sigma \sim r_0^2 \left[ \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}}' + \frac{p^2}{m} \frac{1}{\hbar\omega} \right]$$

dove  $r_0$  è un'arbitraria scala lineare, il primo addendo deriva da  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  in cui il campo  $\mathbf{A}$  contiene i versori di polarizzazione e gli operatori di creazione e di distruzione (dunque ordine 1 rispetto ad  $\mathbf{A}$ ); il secondo addendo deriva dal rapporto dei due termini dell'hamiltoniana di interazione; e l'energia  $\hbar\omega$  è inserita per motivi dimensionali.

Nelle ipotesi sopra, l'energia del fotone  $\hbar\omega$  è molto maggiore dell'energia di legame dell'elettrone  $\frac{p^2}{m}$ , dunque il secondo addendo si può trascurare e così il termine  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  al secondo ordine. Infatti, anche applicando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo si ottiene

$$\frac{p^2}{m} \frac{1}{\hbar\omega} \sim \frac{1}{m} \frac{p^2}{E_A - E_B - \hbar\omega}$$

Pertanto, il potenziale vettore è

$$|\mathbf{A}|^2(0, t) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, r, s} \frac{\hbar c^2}{2V \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{k}_1) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{k}_2) \times [a_r(\mathbf{k}_1) e^{-i\omega_1 t} + a_r^\dagger(\mathbf{k}_1) e^{i\omega_1 t}] [a_s(\mathbf{k}_2) e^{-i\omega_2 t} + a_s^\dagger(\mathbf{k}_2) e^{i\omega_2 t}]$$

Ogni parentesi quadra può agire come distruttrice e l'altra come creatrice di fotoni. Si calcola l'elemento di matrice tra lo stato iniziale  $|\mathbf{k}, \alpha\rangle$  di momento  $\hbar\mathbf{k}$  e polarizzazione  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$ , e finale  $|\mathbf{k}', \beta\rangle$  di momento  $\hbar\mathbf{k}'$  e polarizzazione  $\hat{\mathbf{e}}_\beta$ . Dunque

$$\langle \mathbf{k}', \beta | \frac{e^2}{2mc^2} |\mathbf{A}|^2(0, t) | \mathbf{k}, \alpha \rangle = \frac{e^2 \hbar}{2mV \sqrt{\omega \omega'}} \hat{\mathbf{e}}_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta(\mathbf{k}') e^{i(\omega' - \omega)t}$$

ricordando che solo il termine  $a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})$  dà contributo (che in verità è due termini  $a^\dagger(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2) + a^\dagger(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_1)$  e per questo manca un fattore 2 a denominatore). In questo caso non sono presenti operatori sull'atomo poiché lo scattering non dipende dalla forma della distribuzione delle cariche. Si applica la regola d'oro di Fermi per ottenere il tasso di transizione per un fotone che viene diffuso nell'elemento di angolo solido  $d\Omega$  nella direzione  $\mathbf{k}'$  con polarizzazione  $\hat{\mathbf{e}}_\beta(\mathbf{k}')$  e momento in  $\hbar[k', k' + dk']$ :

$$dw_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}') d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V d^3 k' d\Omega}{(2\pi)^3} \delta(\hbar\omega' - \hbar\omega) \left( \frac{e^2 \hbar}{2mV} \right)^2 \frac{1}{\omega \omega'} [\hat{\mathbf{e}}_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta(\mathbf{k}')]^2$$

La delta è la manifestazione che l'energia del fotone è molto minore dell'energia a riposo dell'elettrone.

Si introduce la sezione d'urto differenziale: il rapporto tra il tasso di transizione verso gli stati finali ed il flusso (analogo al rapporto tra il numero di particelle per unità di tempo ed il flusso). Bisogna definire il flusso di particelle. Si considerino delle particelle che viaggiano lungo l'asse  $z$  incidere sulla faccia  $dx dy$  di un elemento di volume  $dV$  per unità di tempo  $dt$ . Si normalizza ad una particella per unità di volume:

$$\Phi = \frac{1}{dx dy dt} = \frac{dz}{dx dy dt dz} = \frac{v}{V} = \frac{c}{V}$$

Integrando il tasso di transizione sopra sui momenti, si ha

$$w_{\alpha \rightarrow \beta} d\Omega = \frac{c}{V} \left( \frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 [\hat{\mathbf{e}}_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta(\mathbf{k}')]^2 d\Omega, \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$$

Dividendo per il flusso si ottiene la sezione d'urto differenziale

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}') d\Omega = r_0^2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}')^2 d\Omega$$

dove si ha il raggio classico dell'elettrone

$$r_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m c^2} \approx 2.818 \text{ fm}$$

Si è ottenuta un'espressione per la sezione d'urto in accordo con quella trovata tramite l'analisi dimensionale.

Si somma sulle polarizzazioni dello stato finale e si media su quelle dello stato iniziale. Esistono due modi per sommare sulla polarizzazione. Si vede il primo. Bisogna svolgere la seguente somma:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 (\hat{\epsilon}_\alpha \cdot \hat{\epsilon}'_\beta)^2$$

Posto  $\hat{\epsilon}_3 \equiv \hat{\mathbf{k}}$  si nota

$$\sum_{\alpha=1}^3 (\hat{\epsilon}_\alpha \cdot \hat{\epsilon}'_\beta)^2 = 1$$

cioè la somma in quadratura delle componenti del versore  $\hat{\epsilon}'_\beta$  sulla base ortonormale definita dai versori  $\hat{\epsilon}_\alpha$ . Dunque, mediando le polarizzazioni iniziali si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 (\hat{\epsilon}_\alpha \cdot \hat{\epsilon}'_\beta)^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \hat{\epsilon}_\beta \right)^2 \right]$$

Similmente, sommando sulle polarizzazioni finali si ottiene

$$\sum_{\beta=1}^2 \left( \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \hat{\epsilon}'_\beta \right)^2 = 1 - \left( \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} \right)^2 = 1 - \cos^2 \theta$$

Pertanto la somma è

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta, \alpha=1}^2 (\hat{\epsilon}_\alpha \cdot \hat{\epsilon}'_\beta)^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos^2 \theta]$$

Quindi, la sezione d'urto differenziale e quella totale integrata sugli angoli sono

$$\sigma(\theta) d\Omega = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \implies \sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \sim 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Questo risultato è immediatamente misurabile. L'elettrodinamica quantistica è in accordo con i risultati sperimentali.

## Lezione 15

Si vede il secondo metodo. Si utilizza un tensore in tre dimensioni

gio 26 ott  
2023 10:30

$$T_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \epsilon_{\alpha i} \epsilon_{\alpha j}$$

dove  $ij$  indicizzano le componenti spaziali dei versori. La forma più generale di un tensore di tipo 2 in tre dimensioni è

$$T_{ij} = f(\mathbf{k}) \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} g(\mathbf{k})$$

dove  $f(\mathbf{k})$  e  $g(\mathbf{k})$  sono funzioni arbitrarie. Dalla prima equazione segue che  $T_{ij}$  sono numeri, dunque pure le funzioni  $f(\mathbf{k})$  ed  $g(\mathbf{k})$  devono essere tali. Le quantità ignote sono le due funzioni citate. Si studiano le due espressioni per poi confrontarle. Dalla prima espressione segue

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0 \implies k_i k_j T_{ij} = 0$$



Inoltre si può fare la traccia

$$\text{Tr } T_{ij} = T_{ii} = 2$$

Si fanno nuovamente questi due passaggi con la seconda espressione:

$$[f(\mathbf{k}) + g(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2 = 0, \quad \text{Tr } T_{ij} = 3f(\mathbf{k}) + g(\mathbf{k}) = 2 \implies f(\mathbf{k}) = -g(\mathbf{k}) = 1$$

Dunque si ottiene la forma seguente del tensore

$$T_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}$$

Pertanto, la somma è data da

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 (\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon'_\beta)^2 = T_{ij} T_{ij} = \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right] \left[ \delta_{ij} - \frac{k'_i k'_j}{|\mathbf{k}'|^2} \right] = 3 - 1 - 1 + \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'|} \right)^2 = 1 + \cos^2 \theta$$

cioè quanto trovato in precedenza.

### 4.3 Spin del fotone

Si vede una discussione qualitativa dello spin del fotone. Il campo elettromagnetico è mediato da una particella vettoriale, cioè con spin 1, senza massa. Si passa dalle polarizzazioni lineari  $\varepsilon_r$  alle polarizzazioni circolari

$$\varepsilon^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_1 \pm i \varepsilon_2)$$

Valgono le regole di ortogonalità

$$(\varepsilon^\pm)(\varepsilon^\pm)^* = -\varepsilon^\pm \varepsilon^\mp = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \varepsilon^\pm = 0$$

Gli operatori di creazione della polarizzazione circolare è

$$(a^\dagger)^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^\dagger(\mathbf{k}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{k})]$$

Per comprendere lo spin, si studiano le rotazioni attorno all'asse definito dalla direzione  $\mathbf{k}$  del moto. Si considerino le armoniche sferiche  $Y_l^m$

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i \varphi}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

Ricordando le espressioni per il passaggio di coordinate da sferiche a cartesiane, e moltiplicando per il raggio  $r$ , si ottiene

$$r Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x \pm i y), \quad r Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z \propto k$$

Una polarizzazione circolare positiva rappresenta una proiezione positiva del momento angolare lungo l'asse  $z$ , mentre quella negativa in verso opposto all'asse  $z$ . Queste proiezioni vengono chiamate elicità. Si hanno solo due possibili combinazioni perché la terza è proporzionale a  $k$  che è perpendicolare alle polarizzazioni. Si hanno due elicità  $\pm 1$ .

Le polarizzazioni lineari si possono esprimere in termini di quelle circolari

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\varepsilon^+ + \varepsilon^-), \quad \varepsilon_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\varepsilon^+ + \varepsilon^-)$$

Il mediatore dell'interazione elettromagnetica è il fotone, una particella a massa nulla, di spin 1, con due polarizzazioni. Il fatto che siano solo due è legato alla massa nulla come si è visto nelle equazioni di Weyl.

#### 4.4 Tensore energia-impulso

Si tratta il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico libero. La lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \implies \square A^\mu = 0$$

Il tensore energia-impulso per un campo generico è

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \varphi_r} \mathcal{L} \partial^\nu \varphi_r - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}$$

Ora si considera  $\varphi_r = A_\mu$ . Vale

$$\partial_{\partial_\mu A_\alpha} \mathcal{L} = -F^{\mu\alpha}$$

Dunque, il tensore energia-impulso è

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Gli integrali nello spazio di  $T^{0\nu}$  forniscono l'energia ed il momento del campo elettromagnetico. Trattando il teorema di Noether, si è detto che le quantità locali (le densità) hanno una certa arbitrarietà: si possono aggiungere termini che non hanno effetto. In questo caso, il tensore energia-impulso non è simmetrico: questo non è un problema in elettrodinamica quantistica (perché si utilizza  $T^{0\nu}$ ), ma in Relatività Generale il tensore dev'essere simmetrico perché si somma con la metrica. Inoltre non è invariante di gauge. In elettrodinamica classica, tale tensore si chiama tensore degli sforzi di Maxwell (si veda Jackson, Maxwell stress tensor, eq. 6.120), però i due non sono identici.

Si risolvono i problemi precedenti aggiungendo una quantità irrilevante dal punto di vista della conservazione del tensore energia-impulso. Si scrive il tensore di Belinfante. Si aggiunge e si sottrae uno stesso termine:

$$T^{\mu\nu} = -\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} (\partial^\nu A^\beta - \partial^\beta A^\nu) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} - \eta_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \partial^\beta A^\nu$$

Si consideri l'ultimo addendo:

$$\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} \partial^\beta A^\nu = \partial_\alpha (F^{\mu\alpha} A^\nu) - A^\nu \partial_\alpha F^{\mu\alpha} = \partial_\alpha (F^{\mu\alpha} A^\nu) + A^\nu \partial_\alpha F^{\alpha\mu} = \partial_\alpha (F^{\mu\alpha} A^\nu)$$

cioè la quadri-divergenza di un tensore anti-simmetrico. Il secondo addendo è nullo grazie alle equazioni del moto del campo libero

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = J^\mu = 0$$

Pertanto, il tensore simmetrico è

$$T^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

pari al tensore degli sforzi di Maxwell dell'elettrodinamica classica.

#### 4.5 Legge di conservazione per il campo in interazione

Si veda Landau, vol. 2, §16. L'invarianza per traslazione e rotazione porta alla conservazione del quadri-momento e del momento angolare. Si studia la legge di conservazione in presenza di cariche. Si consideri l'azione per il campo ed una particella carica trovata cercando lo scalare più generale possibile che sia un invariante relativistico:

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right] + \int d^4x \mathcal{L}_e(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$$

Il primo integrale è l'azione del campo elettromagnetico, mentre il secondo è la lagrangiana di una particella con carica elettrica  $e$ . Si considera una particella puntiforme le cui densità di carica e densità di corrente sono

$$\rho(\mathbf{x}) = e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = e\dot{\mathbf{x}}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$$

dove  $\mathbf{x}(t)$  è la traiettoria della particella. Il primo integrale dell'azione descrive il campo elettromagnetico in presenza di una carica

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Il secondo integrale insieme a  $J_\mu A^\mu$  porta ad un'equazione del moto pari alla forza di Lorentz

$$d_t p = e[\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)]$$

La relazione che porta alla conservazione del tensore energia-impulso in assenza di cariche è l'invarianza della Lagrangian per la trasformazione di traslazione

$$0 = \delta_x \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = -\partial_\mu T^{\mu\nu} \delta x_\nu$$

Nel caso dell'interazione, la variazione della lagrangiana non è più nulla: il quadri-potenziale interagisce con la quadri-corrente. Tuttavia, la quadri-corrente della particella è data, non è un campo che si trasforma per traslazione o rotazione. Compare un termine in più.

Il termine che cambia a causa della presenza della carica è

$$\int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x) \implies \int d^4x A_\mu(x + \varepsilon_\nu) J^\mu(x)$$

Si trasforma il campo studiato, non la corrente. Sviluppando in serie di potenze si ottiene

$$\delta_x \mathcal{L} = \partial^\nu A_\mu J^\mu \varepsilon_\nu$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni variazione  $\varepsilon_\nu$  segue

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial^\nu A_\mu J^\mu$$

Come in precedenza, si riscrive

$$\partial^\nu A^\mu J_\mu = (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) J_\mu + (\partial^\mu A^\nu) J_\mu$$

dove il secondo termine è

$$(\partial^\mu A^\nu) J_\mu = \partial^\mu (A^\nu J_\mu) - A^\nu \partial_\mu J^\mu = \partial^\mu (A^\nu J_\mu)$$

in quanto la quadri-corrente è conservata. Pertanto, la nuova equazione di conservazione è data da

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} J_\mu$$

Integrando la prima quantità conservata e applicando il teorema della divergenza (con opportune ipotesi al contorno), si ha

$$\begin{aligned} d_t \int d^3x T^{00} + \int d^3x \partial_i T^{i0} &= d_t \int d^3x T^{00} = - \int d^3x F^{0i} J_i = \int d^3x F^{0i} J^i \\ &= \int d^3x (-\mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} = - \int d^3x \mathbf{E} \cdot e \dot{\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) = -e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

cioè la variazione di energia per unità di tempo del campo in presenza della particella (Jackson, eq. 6.110), detta anche (in modo fuorviante) la potenza dissipata dalla particella nel campo esterno.

Si vede la potenza dissipata nell'elettromagnetismo classico. Sia  $\mathcal{E}$  l'energia della particella carica. Si ricordano valere le seguenti definizioni di velocità, momento ed energia relativistici

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad \mathcal{E} = \gamma m c^2 = \sqrt{p^2 + m^2}$$

Facendo il differenziale del quadrato dell'ultima formula si ottiene la variazione temporale di energia della particella

$$2\mathcal{E} d\mathcal{E} = 2\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} \implies d_t \mathcal{E} = \mathbf{v} \cdot d_t \mathbf{p}$$

Applicando la forza di Lorentz si ha

$$d_t \mathcal{E} = \mathbf{v} \cdot d_t \mathbf{p} = e \mathbf{v} \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)] = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

La quantità conservata si può riscrivere come

$$d_t \int d^3x T^{00} = - \int d^3x \mathbf{v} \cdot d_t \mathbf{p} = - \int d^3x d_t \mathcal{E} \implies \int d^3x (T^{00} + \mathcal{E}) = \text{cost.}$$

Si conserva l'energia totale del campo elettromagnetico e della particella: i due si possono scambiare energia.

Si può fare lo stesso calcolo, e ottenere le conclusioni analoghe, per il momento lineare e per il momento angolare

$$d_t \int d^3x M^{012} = -d_t (\mathbf{x}_e \times \mathbf{p}_e)_3$$

Il momento angolare acquistato dal campo è ceduto dalla particella e viceversa: si conserva il momento angolare totale del sistema di campo e particella.

## 5 Campo di Klein–Gordon

Si veda Mandl, cap. 3. Si è già vista l'omonima equazione. Essa porta una corrente in interpretabile in termini relativistici ed il problema delle energie negative. Nell'ottica di quanto fatto per il campo elettromagnetico, si studia il campo di Klein–Gordon.

### 5.1 Campo reale

Si considera un campo scalare, quindi senza spin, e reale  $\phi = \phi^\dagger$ . L'origine dell'equazione di Klein–Gordon si riconduce alla trascrizione operatoriale del quadri-momento

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu \implies (\square + \mu^2)\phi = 0, \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}, \quad c = \hbar = 1$$

**Lagrangiana.** Si scrive la lagrangiana come il più generale scalare che si può costruire. Esso dev'essere quadratico nelle derivate dei campi in modo da ottenere le equazioni di campo e bisogna avere un termine quadratico nei campi così che si ottenga un termine di massa. Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

Infatti

$$\partial_{\partial_\mu \phi} \mathcal{L} = \partial^\mu \phi, \quad \partial_\phi \mathcal{L} = -m^2 \phi \implies (\square + m^2)\phi = 0$$

**Tensore energia-impulso.** La procedura è analoga al campo elettromagnetico. Si considera la trasformata di Fourier per porsi nello spazio del quadri-momento, si sviluppa il campo  $\phi$  su una base di onde piane e si studiano le implicazioni. Il tensore energia-impulso è dato da

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \phi} \mathcal{L} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - m^2 \phi^2)$$

L'hamiltoniana è

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

mentre il momento fisico è

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = - \int d^3x \dot{\phi} \nabla \phi$$

**Quantizzazione.** Si abbandona l'interpretazione di energie positive ed energie negative rimpiazzandola con frequenze positive e frequenze negative. Si sviluppa il campo in serie di Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + a_{\mathbf{k}}^* e^{ik^\mu x_\mu}]$$

dove  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^*$  sono ancora funzioni e non operatori. Si somma solo sui momenti perché la componente temporale del quadri-momento è fissata dalla relazione di dispersione di Einstein

$$k^0 = \frac{1}{c} \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}, \quad E = \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{(mc^2)^2 + (\hbar \mathbf{k} c)^2}$$

Si vuole trovare l'energia ed il momento del campo. Si calcolano alcuni termini che compaiono nelle loro espressioni sopra. Il quadrato del gradiente è

$$\int d^3x (\nabla \phi)(\nabla \phi) = (\nabla \phi) \phi|_{\partial V} - \int d^3x \phi \nabla^2 \phi = - \int d^3x \phi \nabla^2 \phi$$

dove si integra per parti e si ricorda che le variazioni dei campi si annullano al bordo del volume di quantizzazione. Dunque, similmente a quanto visto per il campo elettromagnetico, si ha

$$\int d^3x \phi \nabla^2 \phi = \sum_{\mathbf{k}} V \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \omega_{\mathbf{k}}^2 (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}})$$

[r] Per la derivata temporale si ha

$$\dot{\phi} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [-i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* e^{ik^\mu x_\mu}]$$

Pertanto, si ottiene

$$\int d^3x \dot{\phi}^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} (-\omega_{\mathbf{k}})^2 (-a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* - a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}) V$$

Si è considerato un campo reale. Pertanto, l'energia è

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}})$$

mentre il momento è

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}})$$

## Lezione 16

[r]  $P$  dal tensore energia-impulso è il momento cinetico, mentre  $\pi$  come derivata della lagrangiana è il momento canonico. Si veda Gründler "Foundations of Relativistic Quantum Mechanics" [https://www.astrophys-neunhof.de/file6b\\_e.htm](https://www.astrophys-neunhof.de/file6b_e.htm), p. 59. Specificare anche canonico al posto di coniugato.

Come in precedenza, si trova la dipendenza temporale dei coefficienti  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^*$ , e l'energia del sistema che sono pari a quelle dell'oscillatore armonico. Si opera la seconda quantizzazione passando agli operatori di creazione e distruzione. Le regole di commutazione sono

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

e tutte le altre zero. L'energia ed il momento sono

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k})], \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} [a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k})]$$

Utilizzando l'operatore numero ed il commutare si ha

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[ N + \frac{1}{2} \right], \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left[ N + \frac{1}{2} \right]$$

lun 30 ott  
2023 10:30

L'addendo  $\frac{1}{2}$  viene rimosso come fatto per il campo elettromagnetico:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N, \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} N$$

Similmente, si applicano gli operatori di energia e momento allo stato  $a^\dagger |0\rangle$  trovando che esso è autostato di entrambi e la cui energia e momento sono legati dalla relazione di Einstein. Pertanto, lo sviluppo in onde piane del campo reale di Klein–Gordon non si interpreta più secondo energie positive e negative, ma come operatori di creazione e distruzione di un solo tipo di particella.

Poiché il campo è scalare, nel tensore di momento angolare non compare alcun termine di momento angolare intrinseco.

Per il campo di Klein–Gordon non c'è distinzione tra particelle ed anti-particelle.

## 5.2 Campo complesso

Si considera il campo di Klein–Gordon complesso. La lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

Si segue lo stesso discorso precedente tenendo conto che il campo non è hermitiano. Dunque, lo sviluppo in termini degli operatori è

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [a(\mathbf{k})e^{-ik^\mu x_\mu} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik^\mu x_\mu}] \\ \phi^\dagger &= \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik^\mu x_\mu} + b(\mathbf{k})e^{-ik^\mu x_\mu}] \end{aligned}$$

I commutatori non nulli sono

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Si hanno due operatori numero

$$N_a = a^\dagger a, \quad N_b = b^\dagger b$$

che contano particelle di tipi diversi. Applicando gli operatori creazioni  $a^\dagger$  e  $b^\dagger$  sul vuoto si ottengono due particelle con massa  $m$ . Per ora non le si sa ancora distinguere. La lagrangiana del campo dopo la seconda quantizzazione è

$$\mathcal{L} = : \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi :$$

dove i campi  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  sono trattati indipendentemente (si ricordino le derivate di Wirtinger) e la lagrangiana è già scritta secondo l'ordinamento normale.

**Ordinamento normale.** La lagrangiana presenta una simmetria interna che porta ad una carica conservata. Nella scrittura della carica in termini di operatori di creazione e distruzione, la divergenza causata dal fattore  $\frac{1}{2}$  che viene dai commutatori non si può eliminare con la stessa motivazione utilizzata in precedenza, ma bisogna avvalersi dell'ordinamento normale (normal ordering) indicato come

$$N(ABC \dots) \equiv : ABC \dots :$$

L'ordinamento normale è motivato dall'arbitrarietà dell'ordine dei fattori prima della quantizzazione: si parte da funzioni commutanti e si arriva ad operatori non commutanti. Tale ordinamento richiede che tutti i valori di aspettazione delle osservabili sullo stato di vuoto siano nulli. Questo equivale a porre tutti gli operatori di distruzione alla destra di tutti gli operatori di creazione utilizzando le regole di (anti-)commutazione e ignorare il (anti-)commutatore (oppure porlo a zero). In particolare, quando si compie l'ordinamento di operatori anti-commutanti compare un segno negativo.

**Simmetria interna.** La lagrangiana presenta una simmetria interna  $U(1)$ :

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{iq\alpha} \phi \sim (1 + i\alpha q)\phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow (\phi^\dagger)' = e^{-iq\alpha} \phi^\dagger \sim (1 - i\alpha q)\phi^\dagger\end{aligned}$$

dove  $q$  è la carica elettrica, talvolta posta pari all'unità  $q = 1$ , mentre  $\alpha$  è il parametro infinitesimo. Pertanto, seguendo la dimostrazione del teorema di Noether per traslazione e rotazione, si ha la seguente variazione di forma

$$\delta\phi = i\alpha q\phi, \quad \delta\phi^\dagger = -i\alpha q\phi^\dagger$$

Pertanto, la corrente conservata e la quantità conservata sono

$$\begin{aligned}J^\mu &= \partial_{\partial_\mu\phi} \mathcal{L} \delta\phi_r = \partial_{\partial_\mu\phi} \mathcal{L} \delta\phi + \partial_{\partial_\mu\phi^\dagger} \mathcal{L} \delta\phi^\dagger \\ Q &= \int d^3x J^0 = \int d^3x \partial_{\dot{\phi}_r} \mathcal{L} \delta\phi_r = \int d^3x : \pi_r \delta\phi_r : = \int d^3x : (\pi \delta\phi + \pi^\dagger \delta\phi^\dagger) : \end{aligned}$$

dove si hanno i momenti canonici coniugati

$$\pi = \partial_{\dot{\phi}} \mathcal{L} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \dot{\phi}$$

Poiché il prodotto di una quantità conservata per una costante è ancora una quantità conservata, si utilizza la seguente

$$Q = iq \int d^3x : (\pi\phi - \pi^\dagger\phi^\dagger) : = iq \int d^3x : (\dot{\phi}^\dagger\phi - \dot{\phi}\phi^\dagger) :$$

in modo che  $q$  assuma proprio il significato di carica. Analogamente, la corrente è

$$J^\mu = iq : [(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^\dagger] :$$

Si ritrova la corrente conservata dell'equazione di Klein-Gordon che si è dovuta abbandonare perché la densità di probabilità associata non è definita positiva. In questo caso, l'interpretazione fisica è cambiata e per comprenderla si studia la quantità conservata. Si inserisce lo sviluppo in frequenze del campo  $\phi$  all'interno della quantità conservata per ottenere

$$Q = q \sum_{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] = q \sum_{\mathbf{k}} [N_a(\mathbf{k}) - N_b(\mathbf{k})]$$

L'interpretazione è evidente: la quantità conservata è la carica elettrica del sistema. Ciò che distingue le particelle create da  $a^\dagger$  e  $b^\dagger$  è la carica elettrica: si manifestano le particelle e le anti-particelle.

**Natura bosonica.** Per creare stati a due particelle si usano due operatori di creazione

$$a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle$$

valido sia per il bosone di Klein-Gordon che per il fotone. Poiché gli operatori di creazione commutano

$$[a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

si stanno trattando bosoni. Il bosone di Klein-Gordon ha spin 0, mentre il fotone ha spin 1.

**Regole di commutazione canonica.** Si vuole seguire una procedura di quantizzazione canonica che implica particolari regole di commutazione dei campi e dei loro momenti. Si dimostra che le regole di commutazione canonica degli operatori di creazione e distruzione portano a regole di commutazione canonica per il campo. Si tratta il campo reale. Per ora si trattano commutatori a tempi identici, ma per descrivere una teoria quantistica relativistica bisogna utilizzare commutatori di operatori a tempi diversi.

Si calcola il commutatore nel continuo  $V \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k, \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

per cui si ha

$$\begin{aligned}
 [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} (i\omega_{\mathbf{k}'}) \\
 &\quad \times \left[ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-ik^\mu x_\mu} e^{ik'^\mu x'_\mu} - [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{ik^\mu x_\mu} e^{-ik'^\mu x'_\mu} \right] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} (i\omega_{\mathbf{k}'}) (2\pi)^3 \\
 &\quad \times \left[ \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{-ik^\mu x_\mu} e^{ik'^\mu x'_\mu} + \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu} e^{-ik'^\mu x'_\mu} \right] \\
 &= i \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} (e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} ) \\
 &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')
 \end{aligned}$$

Alla terza uguaglianza, il tempo è lo stesso e si semplifica negli esponenziali. Questa corrisponde alla regola di commutazione tra il campo ed il proprio momento coniugato, analogo a  $[x, p] = i\hbar$ .

**Esercizio.** Considerato l'operatore  $Q$ , si verifichi

$$Qa^\dagger |0\rangle = qa^\dagger |0\rangle, \quad Qb^\dagger |0\rangle = -qb^\dagger |0\rangle$$

## 6 Campo di Dirac

Si è già studiata l'equazione di Dirac, ora si vede come quantizzare il campo di Dirac. Si consideri lo sviluppo di Fourier di un bispinore prima di operare la quantizzazione

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}, r} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \left[ a_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + b_r^*(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \right]$$

dove si ricordano  $u_r$  e  $v_r$  essere le soluzioni ad onde piane nello spazio dei momenti per frequenze positive e frequenze negative, mentre  $r$  è la polarizzazione, lo spin. Il campo  $\psi$  è complesso. Si considerano ancora indipendenti i campi  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ .

Si ricava la lagrangiana a partire dalle equazioni del moto così da ottenere

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

da cui le equazioni del moto per il bispinore  $\psi$  sono

$$\partial_{\bar{\psi}} \mathcal{L} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad \partial_{\partial_\mu \bar{\psi}} \mathcal{L} = 0 \implies (i\partial - m)\psi = 0$$

mentre per il bispinore coniugato  $\bar{\psi}$  sono

$$\partial_\psi \mathcal{L} = -m\bar{\psi}, \quad \partial_{\partial_\mu \psi} \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \implies \bar{\psi}(i\partial - m) = 0$$

Come per il campo elettromagnetico ed il campo di Klein-Gordon, si calcola l'hamiltoniana ed il momento cinetico del campo. Il tensore energia-impulso è

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \psi} \mathcal{L} \partial^\nu \psi - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

L'energia è data da

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi = \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^j \partial_j + m) \psi$$

mentre il momento lineare cinetico è

$$\mathbf{P} = \int d^3x \psi^\dagger (-i\nabla) \psi$$



Questi risultati sono in accordo con il fatto che l'equazione di Dirac è già scritta in termini dell'hamiltoniana del sistema

$$i\hbar \partial_t \psi = H\psi$$

dove  $\psi$  è una particella, non il campo. I valori di aspettazione sono gli stessi della meccanica quantistica relativistica. Il calcolo dell'energia e del momento deve tenere conto della relazione di ortonormalità delle soluzioni  $u_r$  e  $v_r$  (si veda Peskin, §3.5). Dunque, considerando l'ordinamento normale, si ha

$$H = \sum_{\mathbf{p}, r} E_{\mathbf{p}} [a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) - b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p})], \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}, r} \mathbf{p} [a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) - b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p})]$$

Poiché l'operatore numero è illimitato superiormente, a causa del segno negativo del secondo termine dell'hamiltoniana, l'energia è illimitata inferiormente, incompatibile con un sistema stabile (problema che si è già trovato con l'equazione di Dirac e precedenti). Per risolvere il problema, al posto di applicare le regole di commutazione si utilizzano gli anti-commutatori

$$\{a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

Considerato

$$bb^\dagger = 1 - b^\dagger b$$

si ottiene un segno positivo al secondo termine dell'energia:

$$H = \sum_{\mathbf{p}, r} E_{\mathbf{p}} [a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) + b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p})], \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}, r} \mathbf{p} [a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) + b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p})]$$

Questa considerazione cambia lo spettro dell'operatore numero. Infatti, per operatori che anti-commutano, si ha

$$\{a, a\} = 0 \implies aa + aa = 2aa = 0$$

(cioè si comportano come campi di Grassmann) da cui il quadrato dell'operatore numero è

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a = a^\dagger a + 0 = N \implies N(N - 1) = 0$$

L'operatore numero è idempotente ed i suoi autovalori sono solo  $n = 0, 1$ : si ottiene il principio di esclusione di Pauli. Al fine di ottenere una teoria fermionica coerente, le regole di anti-commutazione (e quindi il principio) sono una necessità. Il campo di Dirac descrive fermioni a spin  $\frac{1}{2}$ .

**Simmetria interna.** Anche la lagrangiana di Dirac ha una simmetria interna  $U(1)$  globale. La carica conservata è

$$Q = q \sum_{\mathbf{p}, r} [a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) - b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p})]$$

Le particelle create dagli operatori  $a$  e  $b$  sono distinte solamente dalla carica, mentre sono identiche in massa ed relazione di dispersione: le particelle e le anti-particelle.

La corrente conservata associata è la stessa vista per l'equazione di Dirac

$$J^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

**Conclusioni.** Si sono quantizzati i campi fondamentali: elettromagnetico, Klein-Gordon e Dirac, corrispondenti a fotoni, bosoni di spin 0 e fermioni di spin  $\frac{1}{2}$ . Questi campi sono alla base dell'elettrodinamica quantistica.

Si è risolto il problema delle energie negative passando all'interpretazione di particelle ed anti-particelle. In questa teoria quantistica dei campi non si ha più il concetto di localizzazione ed il concetto probabilistico.

## 7 Simmetrie di gauge locali

La simmetria  $U(1)$  è la più semplice, ma è importante poiché conduce all'elettrodinamica quantistica. Si possono aggiungere tante simmetrie, ma non tutte portano ad una fisica rilevante. Si parte da una simmetria e si studia la fisica che ne segue. Su questo metodo si basa la fisica delle interazioni fondamentali.

Si è vista la simmetria globale  $U(1)$  e l'associata corrente conservata

$$\psi' = e^{iq\alpha}\psi, \quad J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

In una teoria relativistica, non è detto che il parametro  $\alpha$  sia lo stesso ovunque. Ogni volta che è presente una simmetria, si ha una quantità che non è osservabile: ad esempio, per conservazione del momento angolare si ha invarianza per rotazioni e dunque non si può misurare un angolo, una direzione assoluta; e similmente per le traslazioni e la posizione assoluta dell'origine di un sistema di riferimento.

Si studia il caso di una simmetria  $U(1)$  locale con parametro infinitesimo  $\alpha(\mathbf{x}, t)$ . La teoria corrispondente è detta di gauge perché legata ad una fase locale e arbitraria non osservabile. Per ottenere l'invarianza della lagrangiana per tale trasformazione, i campi e le loro derivate devono trasformarsi nello stesso modo:

$$\partial_\mu\phi' = e^{iq\alpha(x)}\partial_\mu\phi + iq[\partial_\mu\alpha(x)]e^{iq\alpha(x)}\phi$$

### 7.1 Campo di Dirac

Si consideri la lagrangiana del campo di Dirac

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

Si vogliono trovare le condizioni affinché essa sia invariante per trasformazioni  $U(1)$ . Per trasformazione di gauge del bispinore si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}e^{-iq\alpha(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iq\alpha(x)}\psi \\ &= \bar{\psi}e^{-iq\alpha(x)}[i(iq\gamma^\mu\partial_\mu\alpha)e^{iq\alpha}\psi + ie^{iq\alpha(x)}\gamma^\mu\partial_\mu - me^{iq\alpha(x)}]\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) - q[\partial_\mu\alpha(x)]\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \neq \mathcal{L}_0 \end{aligned}$$

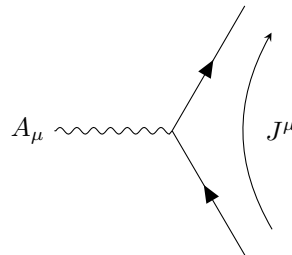
La lagrangiana non è invariante di gauge. Solamente se la simmetria  $\alpha(x)$  è globale allora si ritrova la lagrangiana di Dirac. Si vuole comunque studiare la fisica che la simmetria implica cercando un modo per rendere la lagrangiana invariante. Si introduce un campo vettoriale  $A_\mu$  e la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$$

In questo modo la derivata covariante  $D_\mu\psi$  si trasforma nello stesso modo dei campi. Se il campo vettoriale si trasforma come sopra, allora la lagrangiana di Dirac è invariante per trasformazione di gauge simultanea del bispinore  $\psi$  e del vettore  $A_\mu$ , ed è pari a

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_0 - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Il primo termine è la lagrangiana di Dirac libera, il secondo addendo è l'interazione della corrente di Dirac con il campo vettoriale.



Imporre una simmetria locale U(1) alla lagrangiana porta all'introduzione di una nuova teoria di interazione tra un fermione ed un bosone vettoriale  $A^\mu$ , che viene identificato con il campo elettromagnetico. Pertanto, la trasformazione di gauge U(1) di seconda specie, simmetria della lagrangiana, è

$$\psi' = e^{iq\alpha(x)}\psi, \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$$

Sulla simmetria locale U(1) si basa l'elettrodinamica quantistica, mentre il Modello Standard si basa sulla simmetria locale  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

## Lezione 17

mar 31 ott  
2023 10:30

### 7.2 Campo di Klein–Gordon

Si veda anche Peskin. La procedura è analoga per la lagrangiana di Klein–Gordon

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu\phi^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$$

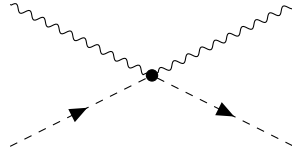
La derivata diventa la derivata covariante la cui legge di trasformazione è la stessa dei campi:

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)' &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)\phi' = [\partial_\mu + iqA_\mu - iq\partial_\mu\alpha(x)](e^{iq\alpha(x)}\phi) \\ &= e^{iq\alpha(x)}[iq\partial_\mu\alpha(x) + \partial_\mu + iqA_\mu - iq\partial_\mu\alpha(x)]\phi = e^{iq\alpha(x)}D_\mu\phi \end{aligned}$$

Si sta generalizzando il concetto di sostituzione minimale. La lagrangiana di Klein–Gordon invariante è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi^\dagger(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi - m^2\phi^\dagger\phi \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi + q^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger\phi + iqA^\mu[-\phi^\dagger \partial_\mu\phi + (\partial_\mu\phi^\dagger)\phi] \\ &= \mathcal{L}_0 + q^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger\phi + A^\mu J_\mu \end{aligned}$$

Il terzo termine è l'accoppiamento tra la corrente di Klein–Gordon ed il campo elettromagnetico  $A^\mu$ . Il secondo termine è quadratico nel campo di Klein–Gordon e quadratico nel campo elettromagnetico, e viene rappresentato da un diagramma seagull:



Si sta studiando l'elettrodinamica scalare.

Si nota un fatto generale: il termine di interazione è lineare nel bosone vettoriale  $A^\mu$  di gauge e contiene la corrente che proviene dalla simmetria globale. Il numero di bosoni vettoriali dipende dalla simmetria che si rende locale. Per trovare il termine lineare nel bosone  $A^\mu$  che si aggiunge alla lagrangiana invariante, si sviluppa la lagrangiana in serie di Taylor attorno ad  $A^\mu = 0$  fino al prim'ordine. Dunque

$$\mathcal{L}(\phi, D_\mu\phi) = \partial_{D_\mu\phi}\mathcal{L}|_{A_\mu=0} \partial_{A_\mu}(D_\mu\phi) A_\mu = \partial_{\partial_\mu\phi}\mathcal{L} \delta\phi A_\mu = J^\mu A_\mu$$

dove alla seconda uguaglianza si è applicato

$$\partial_{A_\mu}(D_\mu\phi) = iq\phi = \delta\phi, \quad \partial_{D_\mu\phi}\mathcal{L}|_{A_\mu=0} = \partial_{\partial_\mu\phi}\mathcal{L}$$

[r]  $\alpha$ ?

Finora si sono studiati gli operatori hamiltoniano  $H$ , momento  $\mathbf{P}$  e carica  $Q$ . Per il campo di Klein–Gordon complesso si è trovato

$$Q = iq \int d^3x : (\pi\phi - \pi^\dagger\phi^\dagger) : = iq \int d^3x : (\dot{\phi}^\dagger\phi - \phi\dot{\phi}^\dagger) : = q \sum_{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})]$$

La carica è conservata poiché commuta con l'hamiltoniana la quale è proporzionale alla somma dei due operatori numero  $N_a$  ed  $N_b$ .

**Equazioni del moto.** Si consideri l'hamiltoniana del campo reale

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

Sapendo

$$[\phi, (\nabla\phi)^n] = 0, \quad [\phi, \phi^n] = 0$$

tramite la descrizione di Heisenberg segue

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= -i[\phi(x), H] = -\frac{i}{2} \left[ \phi(x), \int d^3x' \pi^2(x') \right] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3x' \left( \pi(x') [\phi(x), \pi(x')] + [\phi(x), \pi(x')] \pi(x') \right) \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3x' (2i) \delta^3(x - x') \pi(x') = \pi(x) \end{aligned}$$

alla seconda riga si è utilizzato il commutatore

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta^3(x - x')$$

Questo risultato è anche in accordo anche con il fatto che il momento canonico coniugato di  $\phi$  è  $\pi = \dot{\phi}$ , come calcolato dalla lagrangiana.

Si calcola la derivata seconda

$$\ddot{\phi}(x) = \dot{\pi}(x) = -i[\pi(x), H] = -\frac{i}{2} \left[ \pi(x), \int d^3x' [(\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \right]$$

Per il primo addendo dell'integrale si ha

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_I(x) &= -\frac{i}{2} \int d^3x' [\pi(x), (\nabla\phi)^2] = -\frac{i}{2} \int d^3x' \left( \nabla\phi(x') [\pi(x), \nabla\phi(x')] + [\pi(x), \nabla\phi(x')] \nabla\phi(x') \right) \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3x' (-2i) \nabla\delta(x - x') \nabla\phi(x') = \int d^3x' \delta(x - x') \nabla^2\phi(x') = \nabla^2\phi(x) \end{aligned}$$

alla seconda riga si è applicato

$$[\nabla\phi(x), \pi(x')] = i\nabla\delta(x - x')$$

mentre alla penultima uguaglianza si è integrato per parti supponendo che  $\nabla\phi$  si annulli all'infinito. Per il secondo addendo si ha

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{II}(x) &= -\frac{i}{2} \int d^3x' [\pi(x), m^2\phi^2(x')] = -\frac{i}{2} m^2 \int d^3x' \left( \phi(x') [\pi(x), \phi(x')] + [\pi(x), \phi(x')] \phi(x') \right) \\ &= -\frac{i}{2} m^2 \int d^3x' (-2i) \delta(x - x') \phi(x') = -m^2\phi(x) \end{aligned}$$

Pertanto, le equazioni del moto sono

$$\ddot{\phi}(x) = (\nabla^2 - m^2)\phi(x) \iff (\square + m^2)\phi(x) = 0$$

I campi soddisfano le stesse equazioni del moto della meccanica quantistica relativistica. Per il campo complesso si sarebbero ottenute le stesse equazioni.

## 8 Propagatore

### 8.1 Campo di Klein-Gordon

Si veda Mandl, §3.3, e Peskin, §2.3 e seguenti. Si consideri la lagrangiana del campo reale di Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} : (\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi - m^2\phi^2) :$$

Bisogna considerare il campo come sovrapposizione di frequenze positive e frequenze negative

$$\phi = \phi^{(+)} + \phi^{(-)} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}} [a(\mathbf{p})e^{-ip^{\mu}x_{\mu}} + a^{\dagger}(\mathbf{p})e^{ip^{\mu}x_{\mu}}]$$

rispettivamente associate agli operatori di distruzione e di creazione. Tali operatori sono commutanti per il campo di Klein–Gordon ed anti-commutanti per il campo di Dirac, portando a bosoni e fermioni.

**Autostati della posizione.** Si consideri  $t = 0$ . Applicando il campo sul vuoto si ha una sovrapposizione di particelle a momento lineare definito

$$\phi(\mathbf{x}, 0) |0\rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} a^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle$$

L'operatore di creazione genera una particella di momento  $\mathbf{p}$ . Ci si chiede se si può identificare l'oggetto sopra con una particella in posizione  $\mathbf{x}$ . In meccanica quantistica non relativistica vale

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$$

Similmente in teoria dei campi si ha

$$\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | \phi(x) a^{\dagger}(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(\mathbf{p}) a^{\dagger}(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \frac{e^{-ip^{\mu}x_{\mu}}}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}} \langle 0 | a(\mathbf{p}) a^{\dagger}(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \frac{e^{-ip^{\mu}x_{\mu}}}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}}$$

Per analogia, si identifica

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} |$$

Tuttavia, questo passaggio è errato. Si vede a cosa porta tale identificazione. Si consideri

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

cioè la funzione d'onda di una particella in un punto, cosa che in teoria dei campi non ha senso. Proseguendo con l'identificazione, l'equivalente della relazione sopra è

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(\mathbf{x}) \phi^{(-)}(\mathbf{y}) | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2VE_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

Passando al continuo si ha

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \neq \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Questo integrale non è una delta di Dirac poiché compare un termine  $E_{\mathbf{p}}$  a normalizzare. Nel limite non relativistico, l'energia di riposo  $m^2$  è molto maggiore del momento  $p^2$  la radice è una costante e si ritrova la delta della meccanica quantistica non relativistica in cui una particella può essere localizzata. La scala delle distanze entro cui non si ha una delta è

$$r \sim \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{mc}$$

Si ritrova un problema discusso in precedenza: localizzare, confinare una particella comporta un aumento della sua energia e dunque la creazione di altre particelle.

Questo inconveniente non si può risolvere eliminando l'energia  $E_{\mathbf{p}}$  dalla normalizzazione. Infatti, si consideri

$$d^3p = \int d^3p dE^2 \delta(p_{\mu}p^{\mu} - m^2)$$

da cui si ottiene

$$\frac{d^3p}{2E} = \int d^3p dp_0 \delta(p_{\mu}p^{\mu} - m^2) = \int_V d^3p \int_{\mathbb{R}} dp_0 \delta(p_{\mu}p^{\mu} - m^2) \theta(p_0)$$

dove si ha la funzione  $\theta$  di Heaviside poiché l'integrale in  $p_0$  ha dominio  $[0, \infty)$ . La quantità  $d^4p$  è un invariante relativistico — a patto che  $p_0$  sia in  $\mathbb{R}$  —, così come l'argomento della delta. Anche la funzione  $\theta$  è invariante. Infatti, il momento lineare nel riferimento di riposo di una particella è

$$p^\mu = (m, \mathbf{0})$$

cioè un quadri-vettore di tipo tempo. Pertanto, se  $p_0 = m$  è positivo in un sistema di riferimento, allora lo è in tutti. Pertanto, l'unica misura relativisticamente invariante è  $(2E_{\mathbf{p}})^{-1} d^3p$  e non si può sperare altrimenti.

Normalizzando gli stati con

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

non si otterrebbe una teoria Lorentz invariante.

Si vede un ragionamento simile. Mentre la misura  $d^3p$  ha una quarta componente che fornisce una misura invariante — quindi gli stati di momento definito si possono utilizzare —, d'altra parte la misura  $d^3x$  non ha una quarta componente a denominatore: non si può costruire una misura invariante. Gli autostati della posizione non si possono utilizzare.

Pertanto, in una teoria dei campi non si possono identificare gli autostati della posizione. Ancora una volta si manifesta l'impossibilità di localizzare una particella. Il tentativo basato sull'intuito è vano.

Inoltre, nell'espressione  $\phi(x) |0\rangle$  compaiono solo le frequenze positive e si potrebbe costruire tutta la teoria senza frequenze negative. Tuttavia, ciò non è possibile perché entrambe descrivono interamente il campo.

**Propagatore.** In quanto non si possono utilizzare gli autostati della posizione, si può fornire una diversa interpretazione all'espressione

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

In particolare essa potrebbe descrivere l'ampiezza di probabilità di propagazione di una particella creata nel punto  $y^\mu$  e poi distrutta nel punto  $x^\mu$ . Affinché l'affermazione abbia un senso causale, gli eventi (creazione, distruzione) devono avere l'ordine temporale  $y^0 < x^0$ . L'ampiezza dev'essere nulla quando l'ordine è opposto  $x^0 < y^0$ . Si introduce l'operatore di ordinamento temporale per i bosoni

$$\mathcal{T}\{\phi(x)\phi(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$$

Si definisce il propagatore di Feynman:

$$i\Delta_F(x - y) \equiv \langle 0 | \mathcal{T}\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle$$

Esso è funzione della separazione degli eventi a causa dell'invarianza per traslazione.

Si espande l'ampiezza sopra in frequenze:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

Alla prima riga risulta immediato vedere che tre addendi sono nulli ricordando gli operatori all'interno delle parti del campo a frequenze positive e negative. Alla seconda riga, il termine in più che fa parte del commutatore dà valore medio nullo. Solamente per i campi liberi (v. Tong, QFT), il commutatore è un numero<sup>5</sup>, tuttavia si considera comunque il valore di aspettazione sullo stato di vuoto.

Si introducono le funzioni di Pauli–Jordan

$$i\Delta^+(x - y) = \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] | 0 \rangle, \quad i\Delta^-(x - y) = \langle 0 | [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] | 0 \rangle$$

<sup>5</sup>I numeri reali e complessi (moltiplicati per l'operatore identità) sono talvolta detti c-numbers, classical numbers, per distinguerli dagli operatori, q-numbers, quantum numbers. Questa nomenclatura introdotta da Dirac non è più così diffusa. Si veda anche <https://physics.stackexchange.com/q/211857>.

Il propagatore di Feynman si può esprimere come

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) i\Delta^+(x-y) + \theta(y^0 - x^0) i\Delta^+(y-x) \\ &= \theta(x^0 - y^0) i\Delta^+(x-y) - \theta(y^0 - x^0) i\Delta^-(x-y) \end{aligned}$$

Inoltre, si definisce una terza funzione  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] | 0 \rangle + \langle 0 | [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] | 0 \rangle \\ &= i(\Delta^+ + \Delta^-) \equiv i\Delta(x-y) \end{aligned}$$

## Lezione 18

### 8.2 Spazio delle coordinate

gio 02 nov  
2023 10:30

Si scrive la rappresentazione delle funzioni sopra nella base delle coordinate, cioè si calcola il commutatore. Segue

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= \frac{1}{2(2\pi)^6} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \frac{d^3p'}{\sqrt{E_{\mathbf{p}'}}} [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] e^{-ip^\mu x_\mu} e^{ip'^\mu y_\mu} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip^\mu (x_\mu - y_\mu)} \end{aligned}$$

ricordando che il commutatore degli operatori armonici è

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Dunque, la forma esplicita delle funzioni di Pauli-Jordan è

$$\Delta^+(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip^\mu (x_\mu - y_\mu)}, \quad \Delta^-(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip^\mu (x_\mu - y_\mu)}$$

Si può notare che esse sono funzioni invarianti: è presente un quadri-prodotto e la misura è invariante. Le funzioni di Pauli-Jordan soddisfano l'equazione di Klein-Gordon

$$i(\square + m^2)\Delta^+(x) = (\square + m^2) \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(0)] | 0 \rangle = \langle 0 | [(\square + m^2)\phi(x), \phi(0)] | 0 \rangle \equiv 0$$

dove si pone  $y = 0$  poiché vale l'invarianza di traslazione. L'identità con zero è verificata dal fatto che il campo  $\phi(x)$  soddisfa l'equazione di Klein-Gordon. Analogamente per  $i\Delta^-(x)$  e quindi pure per  $i\Delta(x)$ .

Si studia l'aspetto fisico. Si passa la campo complesso e si considera

$$\langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \quad y^0 < x^0$$

dove si ha  $\phi(x) \sim a, b^\dagger$  e  $\phi^\dagger(y) \sim a^\dagger, b$ . Nel punto  $y$  si crea una particella di carica  $q$  tramite l'operatore  $a^\dagger$  e si propaga fino al punto  $x$  in cui viene annichilita dall'operatore di distruzione  $a$ . Questo elemento di matrice è l'unico che può descrivere la propagazione causale di una particella dall'evento  $y^\mu$  all'evento  $x^\mu$ .

Nel caso opposto si ha

$$\langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi(x) | 0 \rangle, \quad x^0 < y^0$$

L'evento  $x$  avviene prima dell'evento  $y$ : una particella di carica  $-q$ , un'anti-particella, viene creata in  $x$  dall'operatore  $b^\dagger$ , si propaga fino ad  $y$  dove viene annichilita dall'operatore  $b$ . In entrambi i casi, la corrente è sempre nella stessa direzione cioè da  $y$  verso  $x$ .

La funzione  $\phi(x)\phi^\dagger(y)$  o  $\phi^\dagger(y)\phi(x)$ , cioè il propagatore causale di Feynman, sostituisce il concetto di una particella in un certo punto con l'ampiezza di probabilità di propagare una (anti-)particella tra due punti. Per il campo di Klein-Gordon reale si ottiene lo stesso elemento di matrice in entrambi i casi. Questo spiega il significato fisico delle funzioni di Pauli-Jordan e di

frequenze positive e negative. Non si ha più il problema delle energie negative, né della corrente di probabilità non definita positiva.

Il propagatore causale di Feynman è la funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y)$$

L'equazione inhomogenea (con condizioni al bordo appropriate)

$$(\square + m^2)\phi(x) = G(x)$$

ammette sempre come soluzione

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y G(y)\Delta_F(x - y)$$

dove  $\phi_0(x)$  è la soluzione dell'equazione omogenea<sup>6</sup>.

Si consideri il commutatore dei campi

$$\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = -i[\phi(x), \phi(0)], \quad y = 0$$

Si calcola il commutatore a  $x^0 = 0$ . Dunque

$$\Delta(0, \mathbf{x}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

Questo risultato è in accordo con il fatto che le regole di commutazione a tempo medesimo sono nulle. Se tale relazione vale a  $t = x^0 = 0$ , allora vale per ogni punto che sia al di fuori del cono di luce  $x^\mu x_\mu < 0$  (tramite le trasformazioni di Lorentz): si mantiene la causalità. Tale commutatore covariante garantisce il principio di micro-causalità: separazioni arbitrariamente piccole per differenze di tipo spazio non possono influenzarsi. I campi soddisfano tale principio e così tutte le quantità costruite da essi come il tensore energia-impulso, momento angolare, etc. Questo fatto è il punto fondamentale della teoria quantistica relativistica dei campi ottenuto tramite i propagatori covarianti. Mantenere la causalità implica che gli operatori separati da una distanza di tipo spazio devono commutare poiché non si possono influenzare.

Per il campo di Klein-Gordon complesso si ha

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = 0$$

Il commutatore si annulla poiché il contributo delle particelle viene cancellato dal contributo delle anti-particelle: si ritrova l'intuizione di Dirac e la cancellazione dei contributi non causali. Quantizzare il campo di Klein-Gordon con regole di anti-commutazione avrebbe portato ad un commutatore? [r] non nullo. Questo è un primo aspetto del teorema spin-statistica: le particelle di spin intero sono bosoni e commutano, le particelle di spin semi-intero sono fermioni e anti-commutano. La dualità particella-anti-particella è necessaria. Le loro frequenze non si possono trattare separatamente perché solo la loro sovrapposizione porta al principio di micro-causalità.

Si vede se si ottengono gli stessi risultati delle regole di commutazione a tempi uguali  $t = t' = 0$ . Si consideri

$$\begin{aligned} \partial_t[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t')] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t')] = [\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dp}{2E_{\mathbf{p}}} (-iE_{\mathbf{p}}) [e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}] \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Si noti che prima si deriva, poi si considerano i tempi uguali.

<sup>6</sup>Si veda Peskin, §2.4, Particle Creation by a Classical Source; e Fisica Matematica, §§ Soluzione all'equazione di Poisson, Soluzione debole.



### 8.3 Spazio dei momenti

[r] Si introduce la funzione

$$f(p^0) = \frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{(p^0 - \omega)(p^0 + \omega)}$$

[r] Integrando  $p_0$  sul piano complesso, si hanno due poli  $\pm\omega$ . Si considerino due cammini chiusi  $C^\pm$  attorno ai poli in senso orario ed un altro cammino  $C$  in senso orario che li contiene entrambi.

$$\int_{C^\pm} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} e^{ip^\mu x_\mu} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \Delta^\pm(x)$$

[r] Per il teorema dei residui si ha

$$I = 2\pi i \text{Res}[f]_{\omega_{\mathbf{p}}}, \quad \text{Res}[f]_{\omega_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{p_0 + \omega} \Big|_{\omega_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}$$

L'integrale sul cammino  $C$  più grande fornisce

$$\Delta(x) = - \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ip^\mu x_\mu}$$

Nello spazio dei momenti si ha

$$(\square + m^2)\Delta(x) = \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-1}{p^2 - m^2} (-p^2 + m^2) e^{-ip^\mu x_\mu} = 0$$

dove si porta il d'Alembertiano all'interno della definizione di  $\Delta$ . L'integrando non ha poli all'interno del cammino e dunque l'integrale è nullo.

Sapendo che il propagatore di Feynman a  $y = 0$  è

$$i\Delta_F(x) = \theta(x^0)i\Delta^+(x) - \theta(-x^0)i\Delta^-(x)$$

Nel piano complesso si utilizza il cammino di Feynman per ottenere entrambi i poli [r]: un semicerchio con base sull'asse reale che evita i poli in sensi diversi. In base al segno del tempo si chiude nel semipiano sopra o sotto. Per  $t > 0$  si chiude il cammino da sotto e  $e^{-ip_0 t} \rightarrow 0$  prendendo il polo  $\omega_{\mathbf{p}}$ . Pertanto si ottiene  $i\Delta^+$ . Per  $t < 0$  si chiude da sopra, il polo è  $-\omega_{\mathbf{p}}$  e si ha  $-i\Delta^-$ . Tale curva fornisce il propagatore causale quando viene scritto nello spazio dei momenti.

Si hanno altri tre modi per aggirare i poli delle funzioni di Green, si veda Jackson advanced, retarded Green functions. Si hanno potenziali avanzati e ritardati. La terza non si usa?.

Si vede che il propagatore di Feynman è una funzione di Green

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = i \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-p^2 + m^2}{p^2 - m^2} e^{-ip^\mu x_\mu} = \delta^4(x)$$

L'integrando è una funzione senza poli e si modifica il cammino per considerare solo l'asse reale, dunque si ottiene la funzione delta.

### 8.4 Campo di Dirac

Il bispinore di Dirac è

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p}, r} \sqrt{N} [c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ip^\mu x_\mu}]$$

Per avere una teoria coerente, gli operatori  $c$  e  $d$  soddisfano regole di anti-commutazione. Si ricorda che

$$\bar{u}_r(\mathbf{p}) u_{r'}(\mathbf{p}') = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p}) v_{r'}(\mathbf{p}') = -\delta_{rr'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

Si discutono le proprietà generali del propagatore e si vede come legarlo alle funzioni introdotte per il campo scalare. La discussione fatta per la micro-causalità è diversa perché si trattano gli

anti-commutatori. Inoltre, il campo bispinoriale  $\psi$  non è osservabile, ma solamente i bilineari costruiti a partire da esso lo sono ed essi sono commutanti.

Si esplicita l'indice spinoriale  $\alpha$ :

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = \{\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)\} + \{\psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)\}$$

si ricordi che  $\psi^{(+)}, \bar{\psi}^{(+)} \sim c_r, d_r$  e  $\psi^{(-)}, \bar{\psi}^{(-)} \sim c_r^\dagger, d_r^\dagger$ . In analogia con il campo bosonico, si definisce

$$iS^\pm(x-y) \equiv \{\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}$$

L'operatore di ordinamento temporale ordina secondo tempo crescente: bisogna ricordare che gli operatori fermioni anti-commutano, dunque compare un segno negativo. Dunque

$$iS_F(x-y) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle$$

con

$$\mathcal{T} \{ F(x) F(y) \} = \begin{cases} F(x) F(y), & x^0 > y^0 \\ -F(y) F(x), & y^0 > x^0 \end{cases}$$