

Theoretical Physics II

Maso*

18 dicembre 2023

Indice

I	Correzioni radiative	2
1	Scattering con un campo esterno	2
1.1	Bremsstrahlung	4
2	Divergenza ultravioletta	7
2.1	Correzioni radiative	8
3	Spin dei campi	12
3.1	Fermioni	12
3.2	Fotoni	13
4	Correzioni al secondo ordine	16
4.1	Polarizzazione del vuoto	16
4.2	Auto-energia dell'elettrone	18
4.3	Vertice elettromagnetico	20
4.4	Applicazione	21
4.5	Identità di Ward	22
4.6	Linee esterne	24
4.6.1	Fermioni	24
4.6.2	Fotoni	26
4.7	Riepilogo	27
5	Ordini superiori	28
5.1	Diagrammi one-particle reducible	28
5.2	Diagrammi primitivamente divergenti	29
6	Divergenza infrarossa	32
7	Teorema di Furry	36
8	Regolarizzazione dimensionale	38
II	Interazione debole	42
9	Teoria di Fermi	44
9.1	Decadimento del muone	44
9.2	Inverse muon decay	51
9.3	Ordini superiori	53

*<https://github.com/M-a-s-o/notes>

Lezione 1

[r] cambiare carica q con Q

mer 22 nov
2023 10:30

Parte I

Correzioni radiative

1 Scattering con un campo esterno

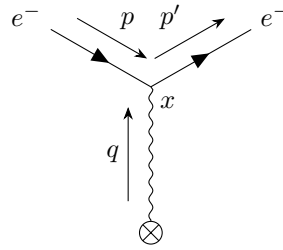
Si studia lo scattering con un campo esterno, cioè un campo statico. Si considera un campo generato da una sorgente massiva che non è influenzata dallo scattering. Infatti, per il principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta v \sim \frac{1}{M}$$

se la sorgente ha una grande massa, allora il suo spostamento è nullo. Sperimentalmente, tale situazione corrisponde allo scattering elettrone-nucleo. Il campo del fotone si può scomporre in una parte trasversa (cioè i fotoni reali) ed una parte statica

$$A^\mu(x) = A_{\text{quant.}}^\mu(x) + A_{\text{clas.}}^\mu(x)$$

La sorgente statica si rappresenta con una croce



Questo diagramma al primo ordine è permesso, a differenza di quelli incontrati in precedenza. Infatti, per questi non si può conservare il quadri-momento perché il fotone considerato è reale, on-shell con $k^\mu k_\mu = 0$. In questo caso, il fotone è off-shell e non rispetta la legge di dispersione di Einstein. Esso ha un momento che la sorgente statica può assorbire o fornire senza muoversi. Questo implica che la sorgente è indipendente dal tempo e viene a mancare l'invarianza per traslazione perché la sorgente ha posizione fissa.

Nel diagramma sopra si ha solamente la parte classica del campo elettromagnetico poiché non sono presenti fotoni reali, trasversi. Pertanto, il prim'ordine della matrice di scattering è

$$S^{(1)} = -iq \int d^4x \bar{\psi}^{(-)}(x) A_{\text{cl}}^\mu(x) \psi^{(+)}(x), \quad A_{\text{cl}}^\mu(x) = \left(\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0} \right)$$

cioè il campo elettrostatico di Coulomb, con $e > 0$ carica elementare. Si comprende già che l'energia è conservata, ma non il momento. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= \langle 0 | c(\mathbf{p}') (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) : c^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \left[\frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) \int d^4x A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{x}) e^{-i(p-p')_\mu x^\mu} \\ &= 2\pi \left[\frac{m}{EV} \frac{m}{E'V} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) (-iq) A_{\text{cl}}^\mu(\mathbf{q}) \delta(E - E') \end{aligned}$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. In assenza della sorgente statica, i propagatori sono tutti invarianti per traslazioni spaziali e temporali, ma ora il campo del fotone dipende dalla posizione. Alla seconda riga la parte temporale fornisce la conservazione dell'energia tramite una delta, mentre la parte spaziale dà la trasformata di Fourier del campo. Non si ha più l'invarianza per traslazione spaziale perché

si è fissata la sorgente. Il momento non si conserva: la sorgente assorbe momento senza muoversi, una particella che fa scattering cambia direzione. Il modulo del momento, cioè l'energia, è ancora conservata poiché si ha invarianza per traslazione temporale.

Si aggiunge un'altra regola di Feynman. Ogni volta che appare uno scattering con un campo esterno statico si ha un termine

$$A_{cl}^\mu(\mathbf{q}) \quad \alpha \quad \leftarrow \quad q \quad \text{---} \quad \otimes$$

mentre nell'elemento di matrice si sostituisce

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \rightarrow (2\pi) \delta(E_f - E_i)$$

Sezione d'urto. La sezione d'urto nell'angolo di scattering dell'elettrone uscente è la formula di scattering di Mott:

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= \frac{1}{2} m^2 \frac{(2\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \sum_{rs} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \frac{(\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr}[(\not{\mathbf{p}}' + m) \gamma^0 (\not{\mathbf{p}} + m) \gamma_0] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (|\mathbf{p}|^2 + m^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta + m^2) = \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [2m^2 + |\mathbf{p}|^2 (1 + \cos \theta)] \\ &= \frac{2(\alpha Z)^2}{16|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[2m^2 + 2|\mathbf{p}|^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[E^2 - |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \frac{(\alpha Z)^2 E^2}{4|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 \beta^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} \end{aligned}$$

Si noti che la sezione d'urto include il numero atomico dell'atomo considerato. Poiché si utilizza la teoria delle perturbazioni, per elementi pesanti bisogna porre attenzione al prodotto αZ . Alla seconda riga si è applicato

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma}]$$

alla terza riga si è applicato

$$E = E' \implies |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Il primo addendo della sezione d'urto è pari alla sezione d'urto Rutherford: lo scattering di particelle alfa su atomi di oro. Il termine ulteriore compare perché si è calcolato lo scattering per fermioni e deriva dall'effetto dello spin. Nel limite non relativistico $\beta \rightarrow 0$ si ottiene Rutherford, tuttavia si è utilizzata la teoria delle perturbazioni per ottenere il risultato. Se il numero atomico Z è grande, lo sviluppo perturbativo può essere inaffidabile. Infatti, la formula di Mott non è sperimentalmente affidabile per $Z \gtrsim 40$. Ciononostante, il problema a due corpi si risolve analiticamente e la sezione d'urto esatta corrisponde a quella trovata con lo sviluppo perturbativo. Per il problema Coulombiano, nel limite non relativistico, tutti gli ordini superiori si riducono ad una fase¹. Pertanto, l'ordine α^2 è esatto.

La formula sopra si può ritrovare anche in astrodinamica con il problema Kepleriano a due corpi: questo è il caso delle orbite iperboliche.

Per studiare una zona di dimensione spaziale Δx , il momento necessario è $(\Delta x)^{-1}$. Quando il parametro di impatto è grande, il momento trasferito è piccolo, e viceversa. Infatti, il seno al denominatore deriva dal momento trasferito $|\mathbf{q}|$ cioè il denominatore del campo di Coulomb pari alla trasformata di Fourier di r^{-1} .

Per angoli piccoli, la sezione d'urto diverge a causa del seno. Infatti

$$\sigma = \int d(\cos \theta) d\varphi d_{\Omega} \sigma \sim \int \theta d\theta d_{\Omega} \sigma = \int \frac{d\theta^2}{\theta^4} \rightarrow \infty$$

¹Si veda Dalitz Richard Henry. 1951. On higher Born approximations in potential scattering. *Proc. R. Soc. Lond. A* **206**:509–520. <http://doi.org/10.1098/rspa.1951.0085>.

Tuttavia, si dev'essere commesso un errore: l'esperimento di Rutherford vide una distribuzione ragionevole di atomi di elio, senza evidenze di una divergenza della sezione d'urto. Lo scattering di una particella su un nucleo è definito dal parametro b di impatto cioè quanto la traiettoria dista dal nucleo (cioè la distanza dal nucleo nel piano perpendicolare alla direzione del moto). Il campo di Coulomb è un campo a lungo raggio, va come $\frac{1}{r}$: non si annulla abbastanza rapidamente ad infinito. Questo è uno dei problemi da cui deriva la patologia del campo elettromagnetico. Il nucleo causa scattering per un parametro di impatto pari circa al raggio di Bohr. Per grandi parametri di impatto, il nucleo viene schermato dagli elettroni, cosa che non si è considerata nel calcolo precedente. Si è commesso un errore fondamentale: ipotizzare l'esistenza di una sorgente senza nulla intorno. Questo è analogo a quanto si è già accennato trattando dell'elettrone bare.

Per risolvere il problema, si utilizza il (energia) potenziale di Yukawa, cioè un campo smorzato

$$V_Y = -\frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x}|}e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a_0}}$$

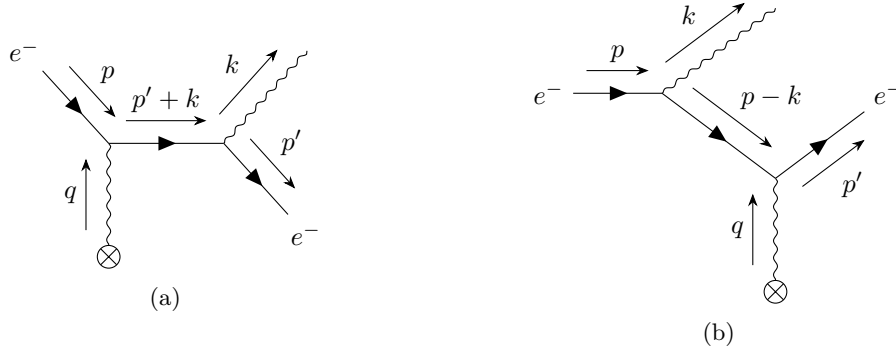
dove a_0 è il raggio di Bohr. La divergenza trovata è causata da una cattiva definizione del problema.

1.1 Bremsstrahlung

Si studia la radiazione emessa a causa della decelerazione di una particella carica. Si aggiunge un fotone reale allo scattering con un campo esterno

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma$$

I diagrammi corrispondenti sono dati da



dove $q = p' + k - p$. Nel primo diagramma il propagatore del fermione porta momento $p' + k$, mentre nel secondo diagramma porta $p - k$. In questo caso si hanno entrambi i contributi della parte trasversa e della parte classica del campo del fotone. Il second'ordine della matrice di scattering è

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-iq)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{T} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (A_\mu^T + A_\mu^{cl}) \psi :_x : \bar{\psi} \gamma^\nu (A_\nu^T + A_\nu^{cl}) \psi :_y \} \\ &= (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^T)^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^{cl})^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \\ &\quad + (-iq)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu (A_\mu^{cl})^{(-)}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \gamma^\nu (A_\nu^T)^{(+)}(y) \psi^{(+)}(y) : \end{aligned}$$

La seconda riga corrisponde al primo diagramma, mentre la terza riga al secondo diagramma. L'elemento di matrice è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (2\pi) \delta(E' + \omega - E) \prod_i N_i \left[\bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{i}{\not{p}' + \not{k} - m} (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) A^{cl}(\mathbf{q}) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

La sezione d'urto esatta è quella di Bethe-Heitler (v. Itzykson e Zuber, p. 240).

Fotone soffice. Si opera l'approssimazione di fotone soffice, cioè l'energia del fotone è molto minore di quella dell'elettrone che l'ha emesso

$$\mathbf{k} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}', \quad \omega \ll E, E', \quad |\mathbf{p}| \approx |\mathbf{p}'|$$

L'ultima relazione porta allo scattering elastico. Infatti, lo scattering sopra è detto anelastico. Dunque, il termine del primo diagramma diventa

$$\begin{aligned} I &= \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \\ &\approx \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + m}{2(p'k)} A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Nel limite di k piccolo, la frazione porta ad una divergenza infrarossa, diversa da quelle sospettate per l'auto-energia e la polarizzazione del vuoto (cioè divergenze ultraviolette). Applicando l'anti-commutatore delle matrici di Dirac

$$\not{\epsilon}(\not{p}' + m) = (-\not{p}' + m)\not{\epsilon} + 2\varepsilon^\mu p'_\mu$$

e noto che \bar{u} soddisfa l'equazione di Dirac poiché riguarda una particella reale, si ottiene

$$I = \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{p'_\nu k^\nu} \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p})$$

cioè un termine proporzionale a quello dello scattering elastico precedente.

Le ampiezze di Feynman per i due diagrammi sono

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p'_\mu}{k^\nu p'_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \\ \mathcal{M}_b &= -i(-iq) \frac{\varepsilon^\mu p_\mu}{k^\nu p_\nu} [(-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

Nella parentesi è presente l'ampiezza dello scattering elastico. Questo è un primo esempio di fattorizzazione: lo scattering elastico viene fattorizzato. Il tasso di transizione è il tasso dello scattering elastico per il tasso di emettere un fotone.

L'elemento di matrice di transizione è

$$S_{fi} = (2\pi) \delta(E' - E) \frac{m}{EV} (-iq^2) \bar{u}(\mathbf{p}') A^{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \left[\frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]$$

Sommando sulle polarizzazioni finali del fotone, la sezione d'urto è

$$\begin{aligned} d_{\Omega'} \sigma &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elastico}} \frac{q^2}{2\omega V} \sum_{\text{pol}} \left[\frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V \\ &= d_{\Omega'} \sigma|_{\text{elas}} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \sum_{\text{pol}} \left[\frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 \frac{d^3 k}{\omega} \end{aligned}$$

si nota che l'ampiezza in parentesi è invariante di gauge: infatti basta sostituire $\varepsilon' = \varepsilon - ikf$ e ricordare che $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$. Anche la sezione d'urto esatta è invariante di gauge. La probabilità di bremsstrahlung è il prodotto della probabilità di scattering elastico e della probabilità di emettere un fotone.

Il termine in parentesi si può riscrivere come

$$\left[\frac{\varepsilon_r^\mu p'_\mu}{kp'} - \frac{\varepsilon_r^\mu p_\mu}{kp} \right] \left[\frac{\varepsilon_s^\nu p'_\nu}{kp'} - \frac{\varepsilon_s^\nu p_\nu}{kp} \right] = \varepsilon_r^\mu \varepsilon_s^\nu \left[\frac{p'_\mu p'_\nu}{(kp')^2} - \frac{p'_\mu p_\nu}{(kp')(kp)} - \frac{p_\mu p'_\nu}{(kp)(kp')} + \frac{p_\mu p_\nu}{(kp)^2} \right]$$

Ricordando che

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_\mu^r \varepsilon_\nu^r = -\eta_{\mu\nu}$$

la somma sulle polarizzazioni è

$$\sum_{rs} \left[\frac{\varepsilon p'}{kp'} - \frac{\varepsilon p}{kp} \right]^2 = -\frac{p'^2}{(kp)^2} + \frac{2pp'}{(kp)(kp')} - \frac{p^2}{(kp)^2} = -\left[\frac{p'}{kp'} - \frac{p}{kp} \right]^2$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale di Bethe-Heitler nel limite di fotone soffice è

$$\begin{aligned} d_{\Omega}\sigma &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-q^2}{2\omega} \left[\frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &= d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \left[\frac{p'}{kp'} - \frac{p}{pk} \right]^2 = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elast}} dP \end{aligned}$$

La parentesi diverge nell'infrarosso cioè per k piccolo.

Lezione 2

Divergenza infrarossa. La sezione d'urto elastica è di ordine α^2 (si noti che un ordine α deriva da A_{cl}) quindi la sezione d'urto anelastica è di ordine α^3 . Si studia il comportamento, in particolare

$$dP \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0$$

Questa divergenza è diversa da quella trovata per lo scattering Rutherford. In quel caso, essa è causata da una cattiva definizione del processo che avviene. In questo caso, chiedersi quanti fotoni sono emessi ad energia sempre più piccola è lecito. Bisogna capire la natura di tale divergenza. Inoltre, nell'esperimento di Rutherford non si osserva una crescita a grande parametro di impatto, mentre nella bremsstrahlung si osserva sperimentalmente che i fotoni emessi aumentano al diminuire della loro energia.

Per risolvere il problema, bisogna definire operativamente lo scattering elastico ed anelastico: il primo è uno scattering in cui non si misura alcun fotone emesso. Bisogna porre attenzione al fatto che gli apparati sperimentali hanno una sensibilità limitata. Si deve ridefinire il concetto di scattering elastico tenendo conto di tale sensibilità. Alla probabilità dello scattering elastico

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z$$

bisogna aggiungere anche la probabilità di bremsstrahlung con energia minore di quella minima rivelabile

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega < \omega_{\min}$$

Pertanto lo scattering anelastico è quello per cui il fotone ha un'energia maggiore di quella minima

$$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + \gamma, \quad \omega \geq \omega_{\min}$$

Con questa ridefinizione, l'integrale dello scattering anelastico non diverge più

$$dP \sim \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega^3} < \infty$$

Il problema è stato spostato nello scattering elastico. Il punto cruciale è la sensibilità dell'apparato di misura: al di sotto di una certa energia, l'apparato è cieco alla distinzione tra elastico ed anelastico. La divergenza è causata dalla massa nulla del fotone. Considerando una piccola massa λ del fotone, la sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d_{\Omega}\sigma|_{\text{el. sp.}} = d_{\Omega}\sigma|_{\text{elas}} \left[1 + \alpha \ln \frac{\omega_{\min}}{\lambda} \right]$$

Questa regolarizzazione viene spesso utilizzata. Si può modificare una teoria per ottenerne un'altra e può accadere che unendo correttamente i contributi, i termini proporzionali al parametro aggiunto si semplificano. Pertanto, la teoria nel limite di massa nulla $\lambda \rightarrow 0$ è perfettamente definita. Lo stesso si può fare per una divergenza ultravioletta.

gio 23 nov
2023 10:30

Modificare l'elettrodinamica quantistica porta ad una teoria che viola l'invarianza di gauge, ma in cui la massa del fotone si semplifica e si può fare il limite di massa nulla $\lambda \rightarrow 0$ per ottenere l'elettrodinamica non modificata.

Inoltre, poiché l'ordine dello scattering anelastico è α^3 bisogna considerare tutti i termini di tale ordine, non solamente alcuni: mancano i termini di interferenza (i prodotti misti) provenienti dagli ordini superiori. Per aggiungere un ordine α bisogna anche considerare i diagrammi dello scattering elastico con tre vertici: quando si calcola il modulo quadro della somma delle ampiezze di Feynman del diagramma ad un vertice e dei diagrammi a tre vertici, compaiono i termini misti di ordine α^3 (e termini di ordine superiore trascurabili). In questo modo, al grafico dello scattering elastico si aggiungono le correzioni virtuali derivanti dalle particelle virtuali. Le correzioni virtuali cancellano la divergenza infrarossa parametrizzata dalla piccola massa del fotone. In questo modo si può fare il limite per massa nulla $\lambda \rightarrow 0$. In particolare, il teorema di Bloch–Nordsieck afferma che, per tutti i processi in elettrodinamica quantistica, le divergenze infrarosse si cancellano esattamente ad ogni ordine perturbativo, lasciando solamente le correzioni radiative finite di ordine α (rispetto all'ordine minore).

La divergenza infrarossa deriva dal fatto che, nel limite $k \rightarrow 0$, il propagatore

$$\frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \approx \frac{\not{p}' + m}{2kp'}, \quad k \ll p$$

diverge poiché propaga un fermione con momento di un fermione reale. Aggiungendo una massa Λ si mantiene la particella virtuale lontano dal mass shell.

2 Divergenza ultravioletta

Finora si sono studiati i diagrammi albero cioè diagramma in cui non appaiono loop. Le correzioni radiative appaiono sempre ad ordini superiori dello sviluppo perturbativo. Si noti che le discussioni valgono a stati iniziale e finale fissati. Come prototipi si utilizzano i diagrammi di scattering con un campo esterno e di scattering Compton.

Nella lagrangiana del campo di Dirac in interazione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - q_0\bar{\psi}\not{A}\psi$$

sono presenti i parametri bare m_0 ed q_0 . Le misure sperimentali riguardano la massa m e la carica q fisiche, in particolare la carica bare più tutte le auto-interazioni. La carica bare non si può misurare. La relazione tra i parametri effettivi ed i parametri bare non si può misurare perché bisogna sempre considerare il campo elettromagnetico. Questa discussione è simile a trattare il campo elettrico nei materiali \mathbf{D} aggiungendo la polarizzazione \mathbf{P} al campo elettrico nel vuoto \mathbf{E} . In un materiale, si misura il campo elettrico \mathbf{D} . La relazione tra i due campi è una costante di proporzionalità. In teoria dei campi, la differenza tra la carica bare e quella fisica è infinita. Passare dalla teoria libera alla teoria in interazione ridefinisce i parametri introdotti nella lagrangiana libera e si studia tale ridefinizione.

I diagrammi divergenti nell'ultravioletto sono l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Il procedimento da seguire è

- isolare gli infiniti modificando la teoria tramite la regolarizzazione, se ne esiste un numero infinito, la teoria ha un utilizzo limitato;
- calcolare le relazioni tra parametri bare e fisici;
- ritornare alla teoria originaria, ma ora senza infiniti.

La procedura, se possibile, implica che la teoria è rinormalizzabile. Una teoria non rinormalizzabile può essere una teoria efficace, cioè corretta fino ad un certo ordine, agli ordini superiori compare sempre un nuovo infinito e si ha bisogno di una nuova costante di rinormalizzazione.

Il Modello Standard è un'unica teoria rinormalizzabile tramite il metodo funzionale (che è diverso dal modo perturbativo presentato), ma è comunque incompleto.

2.1 Correzioni radiative

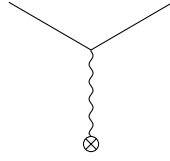
L'ampiezza di Feynman associata al diagramma di scattering con un campo esterno è

$$\mathcal{M}' = -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{A}_{\text{cl}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})$$

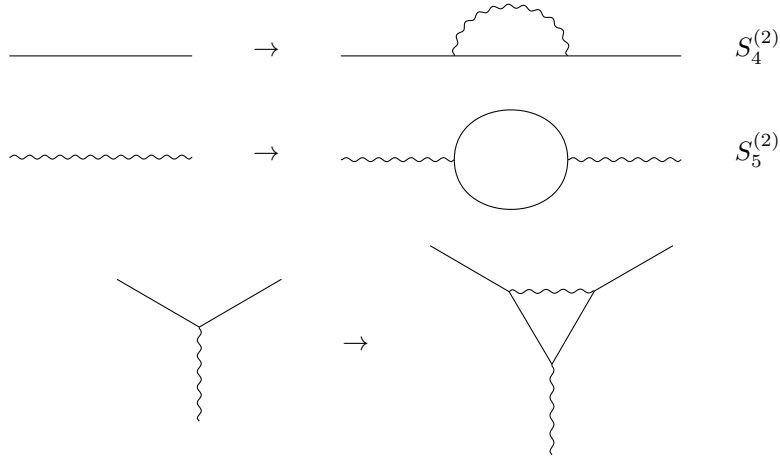
dove si considerano i parametri bare q_0 ed m_0 . Non si considera la parte quantizzata del campo del fotone poiché non sono presenti fotoni negli stati iniziale e finale. La matrice di scattering è

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iq_0)^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \mathcal{T} \{ : \bar{\psi} \not{A}_{\text{cl}} \psi :_{x_1} : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_2} \cdots : \bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_n} \}$$

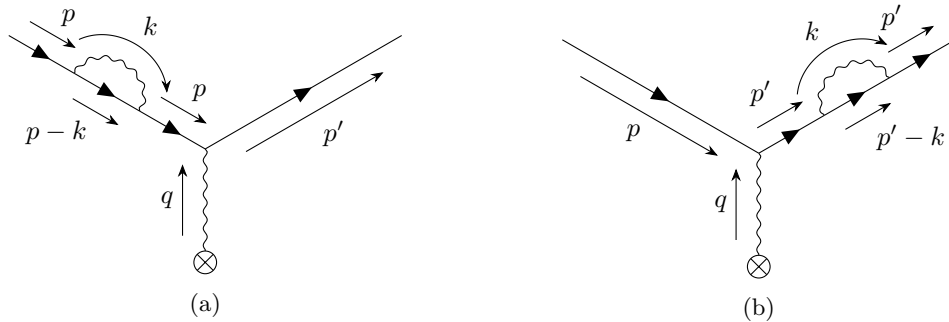
dove il campo senza pedice è il solo campo quantizzato $A \equiv A^T \equiv A_{\text{quant}}$. Si considera un solo campo classico perché si ipotizza essere debole e dunque soppresso agli ordini superiori. Si vedono i diagrammi dello sviluppo. Al prim'ordine $n = 1$ è presente solo il campo classico

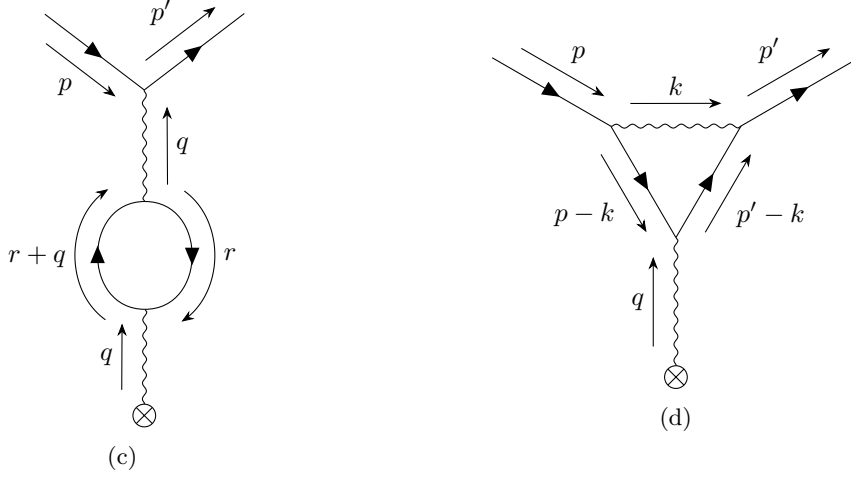


Al second'ordine $n = 2$ si ha la bremsstrahlung: il campo A ha anche la parte quantizzata che descrive i fotoni reali. Al terzo ordine $n = 3$ ci sono le correzioni radiative: l'auto-energia, la polarizzazione del vuoto e la correzione al vertice. Per ottenere i grafici corrispondenti, bisogna operare le sostituzioni seguenti



Pertanto si ha





dove $q = p' - p$. Questi sono gli unici diagrammi possibili al terzo ordine. In tutti è presente un integrale che potrebbe divergere. Le ampiezze di Feynman corrispondenti sono

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu] u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_b &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\nu] iS_F(p') A_{cl}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_c &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) iD_F^{\mu\nu}(q) \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r [\gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r)] A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ \mathcal{M}_d &= -iq_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [\gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)] u(\mathbf{p}) A_{cl}^\rho(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\end{aligned}$$

dove si pone

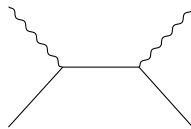
$$\begin{aligned}iq_0^2 \Sigma(p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\mu iS_F(p-k) \gamma_\nu \\ iq_0^2 \Pi_{\nu\rho}(q) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4r \gamma_\nu iS_F(q+r) \gamma_\rho iS_F(r) \\ q_0^2 \Lambda_\rho(p', p) &\equiv \frac{(-iq_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma_\rho iS_F(p-k) \gamma_\nu iD_F^{\mu\nu}(k)\end{aligned}$$

cioè le funzioni di auto-energia, di polarizzazione del vuoto e di correzione al vertice. Si studia il limite ultravioletto, cioè $k \rightarrow \infty$. I termini sopra vanno come

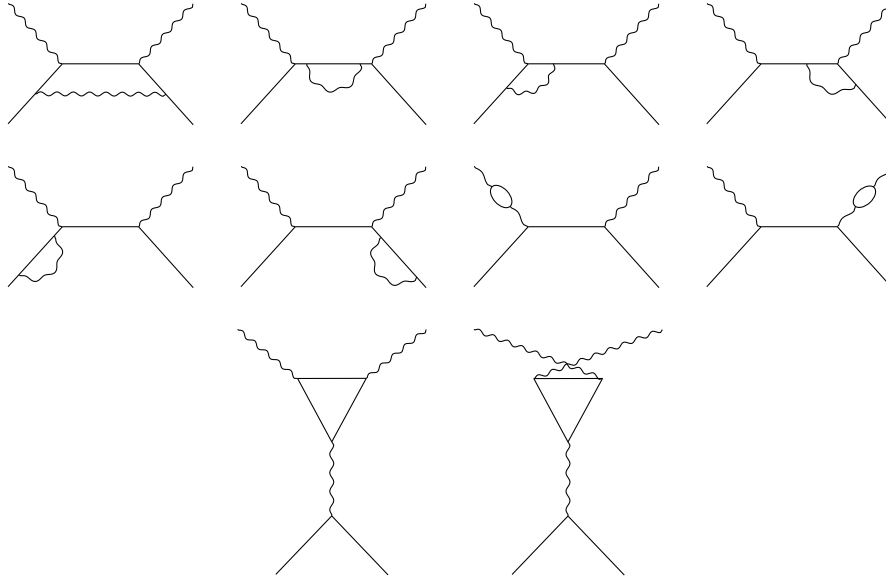
$$\Sigma \sim \int dk, \quad \Pi \sim \int dr r, \quad \Lambda \sim \ln k$$

I propagatori sono fattori di convergenza, ma non ne sono presenti abbastanza. In elettrodinamica quantistica, questi sono i soli diagrammi divergenti.

Classificazione dei diagrammi. Capiti i diagrammi con loop, si studiano i diagrammi in modo dettagliato con l'aggiunta delle correzioni radiative nel caso dello scattering Compton. Al diagramma albero



si aggiungono le correzioni sopra per ottenere parte dei seguenti diagrammi:



Si noti che il primo diagramma e gli ultimi due non si possono ottenere aggiungendo le correzioni.

Nel primo diagramma, l'elettrone entrante interagisce con quello finale tramite un fotone virtuale. Gli ultimi due diagrammi si possono trattare tramite il teorema di Furry: tutti i diagrammi che contengono un loop fermionico con un numero dispari di vertici si sommano a zero. Intuitivamente, l'ultimo diagramma, tramite la simmetria di crossing della matrice di scattering, si può far diventare il penultimo, ma con un segno negativo e dunque i due si cancellano.

Si vogliono studiare le classi di diagrammi. Evitando di considerare gli ultimi due diagrammi, il primo diagramma è diverso da tutti gli altri poiché è one-particle irreducible (1PI), mentre gli altri sono one-particle reducible (1PR). Per ottenere un tale diagramma si può usare un diagramma di ordine inferiore e aggiungere una delle tre correzioni sopra. I diagrammi one-particle reducible sono utili perché dal diagramma albero si possono ottenere le correzioni all'ordine superiore. I diagrammi nella seconda riga correggono le particelle fisiche e questo significa rinormalizzare la funzione d'onda.

Correzioni. Il propagatore del fermione si corregge aggiungendo l'auto-energia

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

le cui linee corrispondenti sono



Si vuole costruire un diagramma scheletro. Si inserisce un rettangolo che indica il propagatore corretto fino ad un ordine stabilito. Si modifica la teoria ed un propagatore, come quello del fotone

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = -\frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \sim -\frac{\Lambda^2}{k^4}, \quad k \rightarrow \infty$$

Si introduce un cut-off. Nel limite $\Lambda \rightarrow \infty$ compare nuovamente la divergenza dell'integrale. In questo modo si è aumentata la potenza a denominatore di modo che l'integrale sia convergente. Secondo la regolarizzazione di Pauli-Villars, il propagatore corretto si può intendere come una particella con massa Λ , sebbene abbia un segno negativo. In questo modo l'integrale converge e se il risultato non dipende dal cut-off Λ allora nel limite ultravioletto si ottiene la teoria originaria. Questa regolarizzazione si può fare per l'elettrodinamica quantistica, ma per altre teorie non è possibile.

Il grado di divergenza degli integrali nei diagrammi di Feynman è

$$D = 4 - I_F - 2I_B$$

dove I_j indica il numero di propagatori di fermioni F e di bosoni B, cioè i fattori convergenza. Se il grado di divergenza superficiale è $D < 0$ allora l'integrale converge, se $D > 0$ allora diverge. Se $D = 0$, allora diverge logicamente. Questo grado di divergenza è superficiale perché si basa sul power-counting. Altre condizioni, come le simmetrie e cancellazioni, possono cambiare il grado di divergenza superficiale. In particolare si vede che i diagrammi sopra hanno solo divergenza logaritmica.

Il cut-off rompe l'invarianza di gauge, cioè il gruppo di simmetria locale $U(1)$, e questo complica un poco la teoria. Per il Modello Standard, la teoria si complica molto di più e bisogna utilizzare la regolarizzazione dimensionale passando a $4 - \varepsilon$ dimensioni ottenendo integrali convergenti. Infatti, il caso peggiore $D = 0$ diventa negativo di poco e si prolungano analiticamente gli integrali in un numero reale di dimensioni, cioè $4 - \varepsilon$. Le singolarità vanno come ε^{-1} , si rinormalizza la teoria, i termini dipendenti da ε si semplificano e si può ritornare alla teoria originaria. La regolarizzazione dimensionale non rompe l'invarianza di gauge.

Lezione 3

lun 27 nov
2023 10:30

Si possono utilizzare vari metodi per la rinormalizzazione.

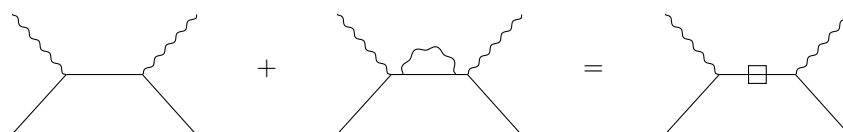
- La regolarizzazione permette di isolare gli infiniti. Si rinormalizza la teoria capendo se gli infiniti si possono assorbire in una ridefinizione della massa e della costante di accoppiamento liberi di modo che nessuna osservabile dipenda dalla regolarizzazione utilizzata. In tal caso, il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ del cut-off ultravioletto è ben definito.
- La regolarizzazione dimensionale considera $4 - \varepsilon$ dimensioni e si procede come detto sopra.
- Un altro metodo utilizza l'integrale sui cammini (path integral) di Feynman. In meccanica classica, due punti sono connessi da traiettorie e le equazioni del moto corrispondono alla traiettoria che minimizza l'azione S . Con l'integrale dei cammini, ad ogni traiettoria viene dato un peso $e^{-\frac{i}{\hbar}S}$ e la traiettoria delle equazioni del moto è data dalla somma di tutte le possibili traiettorie (v. Feynman e Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals). L'integrale sui cammini permette utilizzare le tecniche numeriche. Infatti, per definire una teoria di campo si è partiti da un volume finito V ed un passo reticolare a in modo che i gradi di libertà siano un numero finito e numerabile (si ha invarianza di gauge, ma non più simmetria continua di traslazione e rotazione). Nel limite di volume infinito e passo infinitesimo si ottiene la teoria del continuo. Questo metodo non è perturbativo, quindi considera ogni diagramma, e si può utilizzare un calcolatore. La formulazione con l'integrale dei cammini è equivalente alla meccanica quantistica di Schrödinger. Questo metodo si può usare anche per le interazioni forti per cui lo sviluppo perturbativo non funziona sempre. Tuttavia, il limite al continuo $a \rightarrow 0$ può essere complicato.

Non tutti i metodi di regolarizzazione sono coerenti con le simmetrie del sistema, come il taglio ultravioletto o la massa del fotone che rompe la simmetria di gauge.

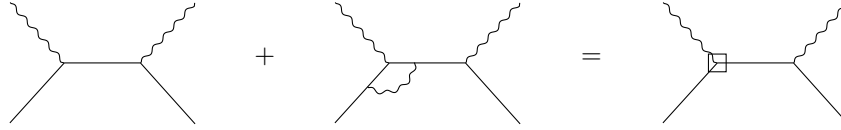
Osservando che ad un certo ordine si può aggiungere qualsiasi ordine superiore perché tanto viene tralasciato, si possono riscrivere le somme dei diagrammi in modo accorto. I diagrammi one-particle reducible sono divergenti e la loro somma si può scrivere come

$$q^2(1 + a + b + c + d + e + f + g) + o(q^4) = q^2(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e)(1 + f)(1 + g)$$

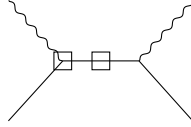
dove l'unità indica il diagramma Compton senza correzioni e le lettere sono le correzioni di ordine q^2 aggiunte al diagramma albero. Il propagatore bare del fermione diventa il propagatore corretto iS_F^{cor} all'ordine q^4 . Quindi il fattore $(1 + a)$ è dato dal diagramma



Si conserva la struttura del diagramma originario: nel propagatore intermedio è presente la versione corretta. Al vertice elettromagnetico viene inserita la correzione al vertice (1 + b):



Il vertice bare diventa il vertice corretto $-iq(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu$. Unendo le due correzioni sopra si ha

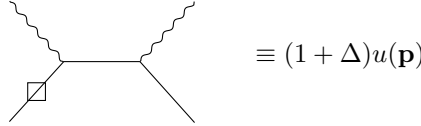


per cui si ottiene

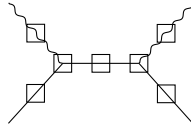
$$i(S_F + \Delta S_F)(-iq)(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)\varepsilon^\mu = iS_F(-iq)\gamma_\mu + i\Delta S_F(-iq)\gamma_\mu + iS_F(-iq)\Lambda_\mu + o(q^4)$$

L'addendo dato dal prodotto delle due correzioni è di ordine q^6 .

Anche le particelle fisiche sentono il proprio campo elettromagnetico, pertanto



dove $\Delta u(\mathbf{p})$ è una certa variazione. In conclusione, dal diagramma albero iniziale, si sommano tutti i diagrammi one-particle reducible ottenendo il diagramma scheletro



Si conserva la struttura del diagramma ricordando che in ogni quadrato è presente la correzione radiativa all'ordine desiderato. Si calcolano tutte le correzioni e si vede che in ognuna si sostituiscono i parametri bare con quelli sperimentalmente misurati e la tecnica di regolarizzazione non appare più.

Rimane ancora un diagramma one-particle irreducible, ma il suo integrale è convergente $D = -1$. Il diagramma scheletro si calcola dai diagrammi one-particle reducible, ma il calcolo dell'ampiezza di Feynman è fatto con tutti i diagrammi. La procedura è la seguente: i diagrammi one-particle reducible si sommano nel diagramma scheletro, si sostituiscono i parametri liberi con quelli fisici (ad esempio presi dalle tavole di Rosenfeld) e si aggiungono i diagrammi one-particle irreducible che sono convergenti. Questo vale in elettrodinamica quantistica, solo i diagrammi one-particle reducible divergono. Lo stesso non si può dire per la teoria dell'interazione debole di Fermi.

3 Spin dei campi

Si studia in modo rigoroso lo spin di un fermione di Dirac e di un fotone tramite il tensore momento angolare.

3.1 Fermioni

Il campo di Dirac si trasforma in modo infinitesimo come

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \psi(x) - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}(\Delta\omega)_{\mu\nu}\psi(x) \\ \psi'_\alpha(x') &= \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\Delta\omega)_{\mu\nu}S^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\right]\psi_\beta(x), \quad S^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

dove $\mu\nu$ sono gli indici spazio-temporale, mentre $\alpha\beta$ sono gli indici spinoriali. Le quantità $(\Delta\omega)_{\mu\nu}$ e $S^{\mu\nu}$ sono anti-simmetriche. Studiando l'invarianza della densità di lagrangiana per rotazioni (v. Fisica Teorica I, §Teorema di Noether) si ha la conservazione del tensore momento angolare

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu} = \int d^3x [(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) + \pi_r S_r^{\mu\nu} \psi_s]$$

dove T è il tensore energia-impulso. Ricordando che

$$\pi_r = \partial_{\dot{\psi}_r} \mathcal{L} = i\hbar \psi_r^\dagger$$

il tensore energia-impulso è dato da

$$T^{\mu\nu} = \partial_{\partial_\mu \psi_r} \mathcal{L} \partial^\nu \psi_r - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad T^{0i} = i\hbar \psi^\dagger \partial^i \psi$$

Si considerano le componenti spaziali del tensore momento angolare

$$\mathbf{M} = \int d^3x \psi^\dagger [\mathbf{x} \times (-i\hbar \nabla)] \psi + i\hbar \psi^\dagger \left[-\frac{i}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right] \psi$$

La prima parentesi si può identificare con il momento angolare orbitale, mentre il secondo addendo si identifica con lo spin poiché è indipendente dalle coordinate. L'operatore spin non è conservato perché $\boldsymbol{\sigma}$ non commuta con l'hamiltoniana. La quantità conservata è l'elicità

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p})$$

Si calcola l'operatore di spin longitudinale, cioè l'operatore di elicità per uno spinore

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}} &= \frac{\hbar}{2} \int d^3x : \psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi : = \text{Fourier} \\ &= \frac{\hbar}{2} \int d^3p [c_1^\dagger(\mathbf{p}) c_1(\mathbf{p}) - c_2^\dagger(\mathbf{p}) c_2(\mathbf{p}) - d_1^\dagger(\mathbf{p}) d_1(\mathbf{p}) + d_2^\dagger(\mathbf{p}) d_2(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

[r] Dunque

$$S_{\mathbf{p}} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Un fermione è auto-stato dell'operatore di elicità con spin up $r = 1$ e spin down $r = 2$. Similmente, l'anti-fermione corrispondente è auto-stato dell'operatore di elicità.

3.2 Fotoni

Si veda Jackson, §11.7 e Maggiore, "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", §§2.3, 4.3.1.

Generatori del gruppo di Lorentz. Si considerino le trasformazioni di Lorentz Λ definite da

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

La trasformazione infinitesima è

$$\Lambda_\varepsilon = \eta + \varepsilon L \implies \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta + \varepsilon L)^n = e^{\omega L}, \quad \omega = n\varepsilon$$

Inoltre

$$(\eta L)^\top = -\eta L \implies L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

La prima riga e la prima colonna sono boost, mentre la sotto-matrice 3×3 descrive le rotazioni. Si introducono i generatori delle rotazioni

$$J_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

così come i generatori dei boost

$$K_1 = i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I loro commutatori sono

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Le trasformazioni di Lorentz finite derivano dall'esponenziale delle matrici sopra. Si raggruppano i generatori del gruppo di Lorentz all'interno di un tensore anti-simmetrico $J^{\mu\nu}$

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}, \quad J^{0i} = K^i, \quad J^{ij} = \varepsilon^{ijk}J^k$$

per ottenere

$$\Lambda = \exp \left[-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]$$

Un insieme di n campi ϕ^i si trasforma nella rappresentazione di dimensione n del gruppo di Lorentz se

$$\phi'^i = \exp \left[-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right]^i_j \phi^j$$

Lezione 4

Si studia come si trasforma un quadri-vettore

mar 28 nov
2023 10:30

$$\delta v^\mu = \varepsilon^\mu_\nu v^\nu, \quad \delta v^\rho = -\frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma v^\sigma$$

dove $\rho\sigma$ sono gli indici che mescolano le componenti dei quadri-vettori. Per confronto con i singoli generatori si ha

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)$$

Si vede il caso particolare di una rotazione $\delta\theta$ attorno all'asse z

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= -\frac{i}{2}[(\delta\omega)_{12}J^{12} + (\delta\omega)_{21}J^{21}]^\mu_\nu x^\nu = -i\delta\theta(J^{12})^\mu_\nu x^\nu = \delta\theta(\eta^{1\mu}\delta^2_\nu - \eta^{2\mu}\delta^1_\nu)x^\nu \\ &= \delta\theta(\eta^{1\mu}x^2 - \eta^{2\mu}x^1) \end{aligned}$$

dove $J^{12} = J^3$ e alla seconda uguaglianza si ricorda che sia il parametro infinitesimo $\delta\omega$ che i generatori J sono anti-simmetrici. Pertanto

$$\delta x^1 = -x^2 \delta\theta, \quad \delta x^2 = x^1 \delta\theta, \quad \delta x^3 = \delta x^0 = 0$$

cioè quanto atteso. Un altro caso è il boost $\delta\beta$ lungo x per cui si applica J^{10} e $J^{01} = K^1$.

Spin. Si ritorna al campo del fotone $\phi_s = A_\mu$. Il tensore momento angolare è

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x [(x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha}) + \pi_r S_r^{\alpha\beta} \phi_s]$$

Si studia il secondo addendo e si specializzano gli indici alle componenti di un quadri-vettore. Conoscendo che la trasformazione di un campo generico e di un quadri-vettore, si ha

$$\delta v^\rho = \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} v_\sigma \implies S_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} = -i(J_{\alpha\beta})^{\rho\sigma} = \eta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \eta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma$$

Pertanto

$$\pi_\mu S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} A_\nu = (\eta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \eta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \pi_\mu A_\nu = \pi_\alpha A_\beta - \pi_\beta A_\alpha = (\partial_0 A_\beta) A_\alpha - (\partial_0 A_\alpha) A_\beta$$

dove si utilizza la lagrangiana del campo elettromagnetico libero fissando il gauge di Coulomb e considerando il vuoto $A_0 = 0$ (v. Maggiore, §3.5.2):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \implies \pi_\mu = \partial_{\partial^0 A^\mu} \mathcal{L} = -\partial_0 A_\mu$$

L'operatore di spin ha solo indici spaziali e presenta tre componenti spaziali poiché è anti-simmetrico. Inserendo lo sviluppo in serie di Fourier del campo del fotone quantizzato in modo non covariante, si ha

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int d^3x : (\partial^0 A^i) A^j - (\partial^0 A^j) A^i : = \text{Fourier} \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\varepsilon_s^i(\mathbf{k}) \varepsilon_r^j(\mathbf{k}) - \varepsilon_r^i(\mathbf{k}) \varepsilon_s^j(\mathbf{k})] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

dove si ripetono i passaggi visti per la quantizzazione dei campi.

Si considera lo spin lungo l'asse z

$$S_{12} = S_3 = S_z = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^2 [\delta_s^1 \delta_r^2 - \delta_s^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})$$

con

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

Dunque, applicato ad un fotone si ha

$$S_z a_t^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i \sum_{r=1}^2 [\delta_t^1 \delta_r^2 - \delta_t^2 \delta_r^1] a_r^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

dove si è utilizzato il commutatore per ottenere la delta che risolve l'integrale e la somma in s . Pertanto

$$S_3 a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = i a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle, \quad S_3 a_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = -i a_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$$

Gli stati con polarizzazione lineare non sono auto-stati dello spin. Si considerano gli stati con polarizzazione circolare

$$a_{(\pm)}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1^\dagger(\mathbf{q}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{q})]$$

per cui

$$\begin{aligned} S_3 a_{(+)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) + i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = a_{(+)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \\ S_3 a_{(-)}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 [a_1^\dagger(\mathbf{q}) - i a_2^\dagger(\mathbf{q})] |0\rangle = -a_{(-)}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \end{aligned}$$

cioè essi sono auto-stati. Il fotone ha solo due polarizzazioni possibili $s = \pm\hbar$. Una terza polarizzazione non è presente. Questo è coerente con il fatto che il fotone ha massa nulla e la terza possibilità di spin, ortogonale all'asse di quantizzazione, non esiste (conseguenza dell'algebra di Poincaré).

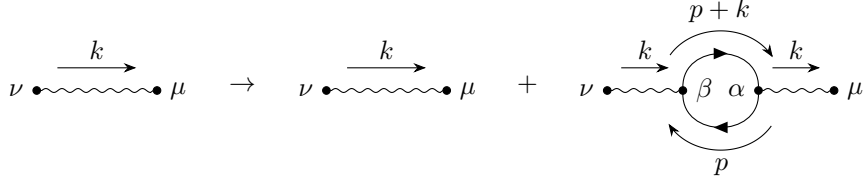
4 Correzioni al secondo ordine

4.1 Polarizzazione del vuoto

Si parte dal propagatore imperturbato e si studia la correzione derivante dalla polarizzazione del vuoto

$$iD_F^{\mu\nu}(k) \rightarrow iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F^{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi_{\alpha\beta}(k) iD_F^{\beta\nu}(k)$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



dove si ha

$$i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \equiv \frac{(-i q_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4 p \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_0}$$

Tramite la divergenza superficiale, l'integrale è divergente al più quadraticamente. Non si calcola esplicitamente il diagramma, ma si immagina di aver già regolarizzato l'integrale al fine di cercare quali sono le divergenze e dove si trovano per poterle riassorbire all'interno di una relazione tra i parametri bare ed i parametri fisici. Si isolano le divergenze, ma non si svolge alcun calcolo.

La teoria è invariante di gauge e si deve avere $k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = 0$. Infatti

$$\begin{aligned} k_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(k) &\propto \int d^4 p \text{Tr} \left[k_\alpha \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] = \int d^4 p \text{Tr} \left[\not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} \not{k} \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} (\not{p} - m_0 - \not{p} + m_0 + \not{k}) \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m_0} [(\not{p} + \not{k} - m_0) - (\not{p} - m_0)] \frac{1}{\not{p} - m_0} \gamma^\beta \right] \\ &= \int d^4 p \text{Tr} [f(\not{p}) \gamma^\beta - f(\not{p} + \not{k}) \gamma^\beta] \end{aligned}$$

alla seconda riga si è utilizzata la ciclicità della traccia, alla terza riga si aggiunge e sottrae uno stesso termine, all'ultima riga f indica una funzione generica. Traslare p di una quantità k all'interno dell'integrale permette di semplificare i due addendi. Se ciò è possibile, allora la regolarizzazione rispetta l'invarianza di gauge. Viceversa, nel caso di un cut-off, l'integrale ha dei limiti di integrazione finiti e la traslazione non permette di ottenere termini identici. Dunque, si immagina che gli integrali siano regolarizzati in modo gauge invariante.

Ci si concentra solamente sulla funzione di polarizzazione del vuoto $\Pi^{\alpha\beta}$. Si ipotizza di averlo regolarizzato in modo gauge invariante. Poiché esso è un tensore di tipo 2, si può riscrivere come

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2)$$

dove A e B sono due funzioni che divergono quadraticamente in senso superficiale (prima della regolarizzazione, dopo sono quantità finite). Dall'invarianza di gauge segue

$$0 = k_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = -k^\beta A(k^2) + k^2 k^\beta B(k^2) \implies A(k^2) = k^2 B(k^2) \implies A(0) = 0$$

Quando la funzione $\Pi^{\alpha\beta}$ incontra una corrente, ogni termine proporzionale al momento del fotone k^μ si semplifica perché accoppiato con la corrente J_μ : il termine B si può ignorare. Lo sviluppo in potenze di A in termini di k^2 è

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) + o(k^4), \quad A'(0) = A'(k^2 = 0) = \partial_{k^2} A(k^2)|_{k^2=0}$$

dove $\Pi_c(k^2)$ tende a zero linearmente in k^2 per $k^2 \rightarrow 0$. Esprimendo la derivata in termini di k si ha

$$A' \sim \frac{1}{k} \partial_k \Pi \sim \frac{1}{p^2} \Pi \sim \frac{d^4 p}{p^4}$$

cioè una divergenza logaritmica. L'invarianza di gauge permette di ridurre il grado della divergenza superficiale (questo è dato dal fatto che $A(0) = 0$). Il secondo addendo è una derivata seconda e l'integrale associato è convergente e non dipende dal regolatore

$$\Pi_c(k^2) = k^2 \partial_{k^2}^2 \Pi(0)$$

anche se il power-counting fornisce una divergenza logaritmica? [r].

Sostituendo l'espressione della funzione di polarizzazione del vuoto

$$\Pi^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

all'interno del propagatore del fotone si ottiene il propagatore corretto

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \left[1 - q_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2} \right] = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)} + o(q_0^2)$$

La costante di accoppiamento $q_0^2 \ll 1$ è piccola e dunque si aggiungono ordini superiori per scrivere l'espressione in modo più comodo sfruttando l'espansione in serie di Taylor. Il propagatore non corretto ha un polo a $k^2 = 0$ che corrisponde ad una massa nulla per il fotone. Poiché $A(0) = 0$, il polo del fotone corretto è ancora $k^2 = 0$ e la massa del fotone non subisce correzioni. La massa del fotone non si rinormalizza ad ogni ordine: questa protezione deriva ancora dall'invarianza di gauge. Il termine $A(k^2)$ non posta il polo del propagatore.

A questo punto si trova una ridefinizione della relazione tra parametri bare e parametri fisici. Si ha

$$iD_{\mu\nu}^{\text{cor}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} [1 - q_0^2 A'(k^2) - q_0^2 \Pi_c(k^2)]$$

Il propagatore si accoppia sempre con la corrente elettromagnetica da entrambi gli estremi, pertanto compaiono le cariche dei fermioni

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 \rightarrow \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2} q_0^4 \Pi_c(k^2) + o(q^4)$$

La parentesi quadra — che è un termine divergente prima della regolarizzazione — è una correzione alla carica elettrica al secondo ordine dello sviluppo perturbativo in α e viene detta costante di rinormalizzazione

$$q_0^2 \rightarrow q^2 \equiv q_0^2 [1 - q_0^2 A'(0)] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_3, \quad Z_3 \equiv 1 - q_0^2 A'(0) + o(q_0^2)$$

Il secondo addendo è una correzione finita di cui bisogna tenere conto all'ordine α^2 . Si è trovata la ridefinizione della relazione tra parametro bare e fisico. Pertanto

$$q = Z_3^{\frac{1}{2}} q_0 = q_0 \left[1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) + o(q_0^2) \right]$$

La legge di Coulomb diventa

$$\frac{q_0^2}{r^2} \rightarrow \frac{q_0^2 Z_3}{r^2} = \frac{q^2}{r^2}$$

Inoltre, il propagatore rinormalizzato è

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}(k) \rightarrow iq^2 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu} q^2}{k^2} + \frac{i\eta_{\mu\nu} q^4}{k^2} \Pi_c(k^2) + o(q_0^4) = iq^2 D_{\mu\nu}(k) [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] + o(q_0^4)$$

Questa espressione è quella che corrisponde al diagramma scheletro: si mantiene la struttura, ma con i parametri fisici. Si noti che al secondo addendo, cioè la correzione finita, si può scambiare q_0 con q perché la differenza è di ordine q_0^2 e dunque rientra negli ordini superiori.

Lezione 5

 mer 29 nov
2023 10:30

Ordini di grandezza. Regularizzando la teoria tramite un cut-off si ottiene una costante di rinormalizzazione pari a [r] fonte?

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

In questa regularizzazione non si ha più l'invarianza di gauge

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) \neq 0$$

La divergenza logaritmica è una divergenza lenta. Cercando un valore della costante Z_3 apprezzabilmente maggiore di 1 si ha

$$Z_3 = 2 \implies \Lambda \sim e^{\frac{3\pi}{2\alpha}} m \sim 10^{280} m$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg, la lunghezza associata a tale momento è pari a

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \implies \Delta x \sim 10^{-293} \text{ cm}$$

Ad una tale scala non è garantito che la teoria funzioni e che non bisogna tenere conto delle altre interazioni fondamentali.

Ciononostante, rimane il fatto che in una teoria rinormalizzabile, i diagrammi divergenti sono in numero finito e vengono riassorbiti all'interno delle costanti di rinormalizzazione dei parametri. In una teoria non rinormalizzabile, questo non è possibile.

Massa sperimentale del fotone. La massa del fotone è legata al campo magnetico di un corpo celeste. Sulla superficie terrestre, il campo magnetico è dell'ordine del gauss. Secondo i geologi, l'origine del campo magnetico è il nucleo della Terra. Come il potenziale di Coulomb cambia aggiungendo una massa al fotone è stato studiato da Fischbach et al.²:

$$V = \frac{q}{r} e^{-\mu r}$$

cioè il potenziale di Yukawa. Visto che il campo magnetico sulla superficie non è nullo, la scala di massa è

$$\mu < \frac{\hbar c}{R}, \quad \mu \lesssim \frac{200 \text{ MeV fm}}{10^9 \text{ cm}} \sim \frac{2 \times 10^8 \text{ eV} \cdot 10^{-13} \text{ cm}}{1 \text{ cm}} 10^{-9} \sim 10^{-14} \text{ eV}$$

dove R è il raggio terrestre. Dunque, la massa del fotone ha un limite superiore. Considerando lo stesso argomento per Giove si ha $\mu \lesssim 10^{-19} \text{ eV}$. Anche dal punto di vista sperimentale si ha una conferma che il fotone abbia massa nulla.

4.2 Auto-energia dell'elettrone

Esistono altre due rinormalizzazioni della carica oltre Z_3 .

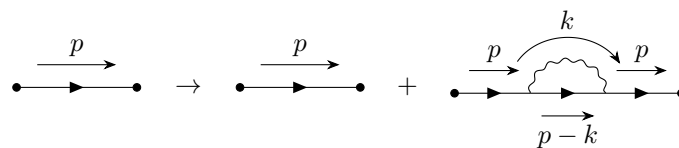
Partendo dal propagatore bare del fermione si passa al propagatore corretto

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

dove

$$i q_0^2 \Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i q_0) \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_0} (-i q_0) \gamma_\nu \frac{-i \eta^{\mu\nu}}{k^2}$$

I cui diagrammi corrispondenti sono



²Si veda Fischbach, E., et al. "New geomagnetic limits on the photon mass and on long-range forces coexisting with electromagnetism," in Phys. Rev. Lett., vol. 73, pp. 514-517, 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.514>.

L'integrale diverge nell'infrarosso e nell'ultravioletto. Si considera l'integrale già regolarizzato ad esempio tramite una massa del fotone ed un cut-off. Si isolano le divergenze per capire se è possibile riassorbirle. Il propagatore corretto è

$$iS^{\text{cor}}(p) = i \left[\frac{1}{\not{p} - m_0} - \frac{1}{\not{p} - m_0} q_0^2 \Sigma(p) \frac{1}{\not{p} - m_0} + o(q_0^2) \right] = \frac{i}{\not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q_0^2)$$

si noti il segno negativo provenire dalla moltiplicazione di due unità immaginarie i . Si è utilizzata la relazione per due operatori non commutanti

$$(A + B)^{-1} = \left[A \left(1 + \frac{1}{A} B \right) \right]^{-1} = \left(1 + \frac{1}{A} B \right)^{-1} A^{-1} = \left[1 - \frac{1}{A} B + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B + \dots \right] \frac{1}{A}$$

dove all'ultima uguaglianza si usa la serie geometrica

$$\frac{1}{1 + M} = 1 - M + M^2 - M^3 + o(M^3)$$

Il propagatore bare ha il polo in m_0 . In precedenza, per l'auto-energia del fotone, l'invarianza di gauge $A(0) = 0$ protegge dalla rinormalizzazione additiva della massa. In questo caso non si ha alcuna protezione poiché $\Sigma(0) \neq 0$. La massa fisica, cioè il polo del propagatore corretto, è

$$m = m_0 + \delta m = m_0 - q_0^2 \Sigma|_{\not{p}=m_0}$$

dove per $\not{p} = m_0$ si intende $\not{p}^2 = m_0^2$, cioè il polo. Al secondo ordine si trova la correzione additiva per la massa.

La funzione di auto-energia Σ opera su uno spazio spinoriale e dunque contiene le matrici di Dirac. Sapendo che

$$(\not{p})^{2n} = p^{2n}, \quad (\not{p})^{2n+1} = \not{p} p^{2n}$$

si sviluppa la funzione in serie di potenze in termini di $\not{p} - m_0$ per avere

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0) B + (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)$$

Il secondo addendo è la derivata $B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0)$. I primi due addendi sono costanti e indipendenti da p , mentre Σ_c ne dipende, ma converge in quanto dipende da derivate di ordine superiori. Tale addendo dipende da \not{p} , si azzera in $\not{p} = m$ (poiché un fattore $\not{p} - m$ proviene dallo sviluppo di Taylor) e non dipende dal regolatore perché finito.

Inserendo la forma trovata della funzione Σ all'interno del propagatore corretto, il denominatore è

$$\begin{aligned} \not{p} - m_0 + q_0^2 \Sigma(p) &= \not{p} - [(m_0 + \delta m) - q_0^2 (\not{p} - m_0) B - q_0^2 (\not{p} - m_0) \Sigma_c(p)] \\ &= (\not{p} - m) [1 + q_0^2 B + q_0^2 \Sigma_c(p)] \end{aligned}$$

dove si ha $\delta m \propto \Sigma(\not{p} = m_0)$ e si sostituisce $m = m_0 + \delta m$ a tutti gli ordini poiché agli ordini superiori si commette un errore di ordine q_0^2 che è trascurabile all'ordine desiderato. Pertanto si ottiene

$$iS^{\text{cor}} = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2) = \frac{i}{\not{p} - m} [1 - q_0^2 B] [1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^2)$$

dove si utilizza il fatto che q_0 è piccolo e dunque si espande in serie di Taylor. La seconda parentesi è zero quando $\not{p} = m_0$, mentre la prima è un termine divergente logicamente (prima della regolarizzazione) che si accoppia con due fotoni fornendo una correzione alla carica elettrica che propaga.

Dunque, finora si è trovato

$$\delta m = -q_0^2 \Sigma(\not{p} = m_0)$$

che diverge logicamente. Inoltre

$$B \sim \partial \not{p} \Sigma(\not{p} = m_0) \sim \int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \ln k, \quad \Sigma_c \sim \partial^2 \Sigma(\not{p} = m_0) < \infty$$

Pertanto, la massa fisica è

$$m = m_0 + \delta m < \infty$$

che è finita ed indipendente dal regolatore.

Nei diagrammi compare il propagatore rinormalizzato

$$iq^2 S^R(p) = q_0^2 iS_F(p)[1 - q_0^2 B][1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq^2 S_F(p)[1 - iq^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4)$$

dove la carica fisica è

$$q^2 = q_0^2[1 - q_0^2 B] + o(q_0^4) = q_0^2 Z_2, \quad Z_2 = 1 - q_0^2 B + o(q_0^2)$$

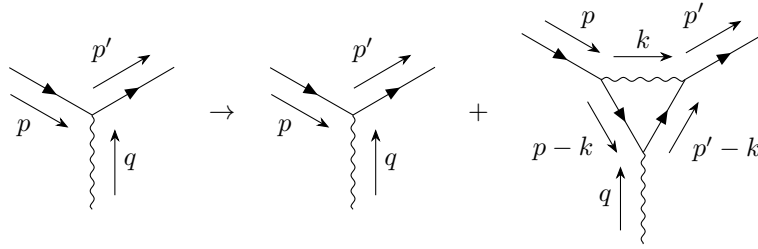
A questo punto si utilizzano i propagatori corretti inserendo le costanti fisiche, ma bisogna calcolare la correzione radiativa finita Σ_c .

4.3 Vertice elettromagnetico

Il vertice elettromagnetico diventa

$$-iq_0 \gamma_\mu \rightarrow -iq_0 \gamma_\mu - iq_0^3 \Lambda_\mu(p', p)$$

i cui diagrammi sono



dove $q = p' - p$ e

$$-iq_0^3 \Lambda^\mu(p', p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iq_0) \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq_0) \gamma^\beta \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

Esso è logaritmicamente divergente sia nell'infrarosso che nell'ultravioletto. Ancora una volta si considera l'integrale normalizzato.

Nella funzione di auto-energia, un primo termine divergente è dato da $\Sigma(\not{p} = m)$ cioè la funzione di auto-energia per una particella libera. Similmente, ci si aspetta che il primo termine divergente per la funzione di correzione al vertice Λ^μ sia quello della particella libera. Si considerino due momenti P di una particella sul mass shell. Si riscrive

$$p' = P + (p' - P), \quad p = P + (p - P)$$

come pure

$$\Lambda^\mu(p', p) = \Lambda^\mu(P, P) + [\Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(P, P)] \equiv \Lambda^\mu(P, P) + \Lambda_c^\mu(p', p)$$

Il secondo addendo calcolato in P è nullo $\Lambda_c^\mu(P, P) = 0$. La funzione di correzione al vertice appare sempre tra spinori. Si studia il termine di particella libera, la cui forma più generale è

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) = \bar{u}(\mathbf{P}) \left[a \frac{P^\mu}{m} + b \gamma^\mu \right] u(\mathbf{P})$$

Si utilizza l'identità di Gordon. Sapendo che gli spinori sono on-shell e soddisfano l'equazione di Dirac, si ha

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \implies \not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p} = m\bar{u}(\mathbf{p})$$

moltiplicando per le matrici di Dirac da sinistra e da destra, si ha

$$\gamma^\mu \not{p}u(\mathbf{p}) = m\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu$$

moltiplicando per $\bar{u}(\mathbf{p})$ e $\bar{u}(\mathbf{p})$ da sinistra e da destra, si ottiene

$$\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu \not{p} u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p})\not{p}\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

Sommando le due si ha

$$\bar{u}(\mathbf{p})\{\gamma^\mu, \not{p}\}u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}) \implies 2\bar{u}(\mathbf{p})\eta^{\mu\nu}p_\nu u(\mathbf{p}) = 2\bar{u}(\mathbf{p})p^\mu u(\mathbf{p}) = 2m\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

L'identità di Gordon per due momenti diversi è

$$2m\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u(\mathbf{p})$$

Il primo membro è (proporzionale a) la corrente di Dirac, il secondo membro è la somma di una corrente classica e di una corrente di spin. Notando che gli spinori di particella libera u e \bar{u} soddisfano l'equazione di Dirac, si può applicare l'identità di Gordon. Da essa segue che i termini P^μ e γ^μ nella decomposizione della funzione $\Lambda^\mu(P, P)$ sono dipendenti.

Lezione 6

Pertanto, il termine di particella libera è

gio 30 nov
2023 10:30

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

dove L è una costante scalare divergente che dipende dal regolatore. Dunque la funzione di correzione del vertice è

$$\Lambda(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p), \quad \bar{u}(\mathbf{P})\Lambda_c u(\mathbf{P}) = 0$$

Si vuole studiare il suo comportamento. Si introducono due variabili

$$\Delta \equiv \not{p}' - \not{k} - m, \quad q = p - P, \quad q' = p' - P$$

Pertanto, isolando i termini divergenti, si ha

$$\Lambda \sim \frac{1}{\not{p}' - \not{k} + m}\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} = \frac{1}{\Delta + \not{q}'}\gamma^\mu \frac{1}{\Delta + \not{q}} = \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}'\frac{1}{\Delta} + \dots \right] \gamma^\mu \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}\frac{1}{\Delta} + \dots \right]$$

alla seconda uguaglianza si utilizza l'identità per $(A+B)^{-1}$. Il termine che diverge più velocemente è il primo addendo del prodotto ed esso corrisponde a $\Lambda^\mu(P, P)$, gli altri hanno termini Δ^{-1} in più che sono fattori di convergenza. I termini successivi di ordine più basso sono convergenti e corrispondono a $\Lambda_c^\mu(p', p)$.

Il vertice corretto è dato da

$$-iq_0\Gamma_{\text{cor}}^\mu(p', p) = -iq_0[\gamma^\mu(1 + q_0^2 L) + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] + o(q_0^3)$$

La parentesi tonda è la terza rinormalizzazione della carica elettrica

$$q = q_0(1 + q_0^2 L) + o(q_0^3) = \frac{q_0}{Z_1}$$

4.4 Applicazione

A questo punto manca la rinormalizzazione delle linee esterne (detta anche rinormalizzazione della funzione d'onda). Prima si vede come applicare quanto sviluppato.

Riepilogo. La funzione di auto-energia è

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m) + (\not{p} - m)\partial \not{p}\Sigma(\not{p} = m) + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)$$

da cui

$$iq_0^2 S^{\text{cor}}(p) = \frac{iq_0^2 Z_2}{\not{p} - m}[1 - q_0^2 \Sigma_c(p)] + o(q_0^4) = iq_0^2 Z_2 S^{\text{R}}(p)$$

Il propagatore rinormalizzato contiene quantità fisiche.

La funzione di polarizzazione del vuoto è

$$\Pi(q^2) = A'(0) + \Pi_c(q^2)$$

dove il primo addendo diverge logaritmicamente, il secondo è finito. Non si ha rinormalizzazione della massa a qualsiasi ordine. Pertanto

$$iq_0^2 D_{\mu\nu}^{\text{cor}}(q) = iq_0^2 Z_3 \frac{-\eta_{\mu\nu}}{q^2} [1 - q_0^2 \Pi_c(q^2)] + o(q_0^4) = iq_0^2 Z_3 D_{\mu\nu}^{\text{R}}(q)$$

Per il vertice elettromagnetico si ha

$$-iq_0 \Gamma_\mu^{\text{cor}}(p', p) = -\frac{iq}{Z_1} [\gamma_\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p, p')] + o(q_0^3) = -\frac{iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^{\text{R}}(p', p)$$

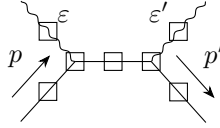
Per le linee esterne fermioniche si ha

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

Mentre per le linee fotoniche esterne si ottiene

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon_\mu$$

Diagramma scheletro. Prendendo come prototipo l'effetto Compton, ovunque sono presenti diagrammi one-particle reducible si inserisce il quadrato



L'elemento di matrice corrispondente è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}') \sqrt{Z_2} \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_2} \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\nu^{\text{R}} \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \sqrt{Z_3} \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Gamma_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} (-iq_0) \Gamma_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \varepsilon^\mu (-iq) \Gamma_\mu^{\text{R}} S^{\text{R}}(p+q) (-iq) \Gamma_\nu^{\text{R}} u(\mathbf{p}) \varepsilon^\nu \end{aligned}$$

La costante di accoppiamento misurata, cioè la carica, ha sempre la forma

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0$$

poiché ogni vertice è sempre costituito da due linee fermioniche ed una fotonica. Nel diagramma scheletro non sono più presenti termini divergenti, né parametri non misurabili, bare. Tale ampiezza ha una forma simile all'ampiezza di Feynman che si scriverebbe per il diagramma albero con i parametri bare. In questo caso, l'ampiezza è corretta all'ordine q_0^2 e contiene tutti i diagrammi one-particle reducible. Si ricordi che dentro ogni termine rinormalizzato compare un fattore convergente da calcolare.

Quanto fatto vale per il secondo ordine e non si sa ancora nulla sugli ordini successivi. Inoltre, il diagramma one-particle irreducible dev'essere considerato e aggiunto all'ampiezza.

4.5 Identità di Ward

Un importante risultato è l'identità di Ward. Notando

$$0 = \partial_{p_\mu} 1 = \partial_{p_\mu} \left[\frac{1}{\not{p} - m} (\not{p} - m) \right] = \left[\partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} \right] (\not{p} - m) + \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu$$

la derivata rispetto p_μ del propagatore del fermione è

$$\partial_{p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} = - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m}$$

da cui l'identità di Ward

$$\Sigma(p) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma(p)$$

essa è vera ad ogni ordine. Il termine $\Lambda^\mu(p, p)$ corrisponde ad un fotone con $q = 0$. Pertanto, si può ottenere il diagramma della correzione al vertice a partire da quello dell'auto-energia inserendo un fotone ad energia nulla nel propagatore del fermione



Si vede un'altra dimostrazione. Si consideri

$$\begin{aligned} (p' - p)_\mu i\Lambda^\mu(p', p) &= (p' - p)_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\beta \frac{\eta_{\alpha\beta}}{k^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} (\not{p}' - \not{p}) \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} - \not{k} - m} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} [(\not{p}' - \not{k} - m) - (\not{p} - \not{k} - m)] \frac{\gamma_\alpha}{\not{p} - \not{k} - m} \\ &= i[\Sigma(p') - \Sigma(p)] \end{aligned}$$

Dunque

$$q_0^2 (p' - p)_\mu \Lambda^\mu(p', p) = q_0^2 [\Sigma(p') - \Sigma(p)] \implies \Lambda^\mu(p, p) = \partial_{p_\mu} \Sigma, \quad p' \rightarrow p$$

Si studia una conseguenza per le costanti di rinormalizzazione Z . Si consideri l'identità di Ward posta tra due spinori

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \partial_{p_\mu} \Sigma u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}) L \gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

ricordando che Λ_c è nullo tra spinori. Tenendo presente la struttura della funzione di auto-energia

$$\Sigma(p) = \Sigma(\not{p} = m_0) + (\not{p} - m_0)B + (\not{p} - m_0)\Sigma_c(p)$$

si ottiene

$$\partial_{p_\mu} \Sigma = B \gamma^\mu$$

Confrontando questa espressione con quella dall'identità di Ward si ha

$$B = L, \quad Z_2 = (1 - q_0^2 B) + o(q_0^2), \quad Z_1 = \frac{1}{1 + q_0^2 L} + o(q_0^{-2}) = 1 - q_0^2 L + o(q_0^2) \implies Z_1 = Z_2$$

questo vale a tutti gli ordini. Pertanto, la carica si normalizza solamente con

$$q = \sqrt{Z_3} q_0$$

Naturalzza. Si considerino i tre diagrammi divergenti. Nel loop virtuale della polarizzazione del vuoto, non si creano solo fermioni, ma qualsiasi particella che interagisce con il campo elettromagnetico. A differenza di questo diagramma, le costanti di rinormalizzazione per l'auto-energia e la correzione al vertice contengono le masse delle particelle iniziale e finale. La differenza tra la carica del protone e dell'elettrone è al più³

$$\frac{\Delta q}{q_e} \sim 10^{-21}$$

³Si veda <https://arxiv.org/abs/1102.2766>.

Questo vale per ogni particella. Infatti, l'auto-energia e la correzione al vertice si rinormalizzano con Z diverse in base alla particella, ma solamente per la polarizzazione del vuoto la rinormalizzazione è universale. Se $Z_1 \neq Z_2$, diversi parametri iniziali nelle lagrangiane di partenza dovrebbero arrivare a medesimi risultati tramite costanti di rinormalizzazione diverse. Questa cosa è ritenuta innaturale. Tuttavia, il problema non si pone in questo caso, poiché la carica si rinormalizza solamente con Z_3 . A questo fatto si collega la naturalezza di una teoria o di un modello: risulta innaturale avere una teoria che prevede l'aggiustamento fine di tanti parametri per ottenere un risultato sperimentale cercato.

4.6 Linee esterne

4.6.1 Fermioni

Quando si è studiata la rinormalizzazione della massa, si è partiti dal parametro bare m_0 e si è calcolata la correzione all'ordine q_0^2 . Per la rinormalizzazione delle linee esterne si utilizza una tecnica diversa, la tecnica dei controtermini di massa. Si pone un problema da risolvere. Si è introdotto lo spegnimento adiabatico perché nella descrizione di interazione, quando l'hamiltoniana di interazione tende ad annullarsi, gli stati tendono ad essere costanti; il limite degli stati all'infinito utilizzato nella matrice S di scattering è perfettamente definito, ma la particella bare non è misurabile. Nel tragitto dall'infinito al luogo di interazione, la particella bare si riveste ed interagisce brevemente, poi si dirige nuovamente all'infinito ritornando bare. Sono presenti due scale temporali. Questa considerazione è da tenere presente quando si rinormalizzano le linee esterne. La linea entrante (o uscente) nel processo non può essere la particella bare $u(\mathbf{p}, m_0)$, ma è la particella fisica $u(\mathbf{p}, m)$. Bisogna capire come passare da una all'altra. Si introduce la tecnica dei controtermini.

Si scrive la lagrangiana libera esplicitando la massa fisica

$$\mathcal{L} = : \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi : + \delta m : \bar{\psi}\psi : , \quad m = m_0 + \delta m$$

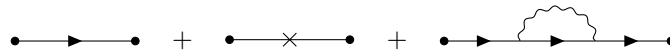
In questo modo, il primo addendo è la lagrangiana libera con la massa fisica, mentre il secondo termine è il contro-termine di massa che viene aggiunto ad un eventuale termine di interazione. Dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = : \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi : + [\delta m : \bar{\psi}\psi : - q_0 : \bar{\psi} A \psi :]$$

Tuttavia, la differenza δm tra la massa bare e fisica è ignota. In questa teoria, il propagatore imperturbato è

$$\frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i \delta m \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m}$$

i cui diagrammi corrispondenti sono



Si utilizza una croce per il contro-termine di massa poiché il prodotto normale $: \bar{\psi}\psi :$ distrugge e crea un fermione nello stesso punto. Il contro-termine è di ordine q_0^2 , mentre l'integrazione con il campo elettromagnetico è di ordine q_0 .

In questo modo il parametro bare m_0 non appare.

Dunque, il propagatore imperturbato è

$$\begin{aligned} iS &\rightarrow i \left[\frac{1}{\not{p} - m} - \frac{1}{\not{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\not{p} - m} \right] = \frac{i}{\not{p} - m} \left[1 - (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \frac{1}{\not{p} - m} \right] \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \left[1 + \frac{\delta m + q_0^2 \Sigma(p)}{\not{p} - m} \right]^{-1} + o(q^2) = \frac{i}{\not{p} - m + \delta m + q_0^2 \Sigma(p)} + o(q^2) \end{aligned}$$

Visto che m è già la massa fisica, non dev'essere presente alcuna rinormalizzazione della massa. Pertanto

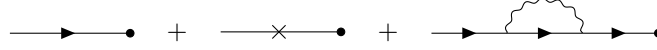
$$\delta m + q_0^2 \Sigma(p) = 0 \implies \delta m = -q_0^2 \Sigma(p = m)$$

cioè quanto già trovato in precedenza per la rinormalizzazione della massa.

Linea esterna di un fermione. Si utilizza la tecnica dei controtermini. La linea esterna (entrante) diventa

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m} i\delta m u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m} i q_0^2 \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \left[1 - \frac{1}{\not{p} - m} (\delta m + q_0^2 \Sigma(p)) \right] u(\mathbf{p})$$

i diagrammi corrispondenti sono



Si sviluppa la funzione di auto-energia Σ per avere

$$\frac{q_0^2}{\not{p} - m} \Sigma(p) u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\not{p} - m} [-\delta m + q_0^2 (\not{p} - m) B + q_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p)] u(\mathbf{p})$$

L'ultimo addendo contiene si annulla quadraticamente in $\not{p} - m$ per $\not{p} \rightarrow m$ e visto che $u(\mathbf{p})$ è un fermione reale, si ha contributo nullo. D'altra parte, nel limite il secondo addendo è indefinito

$$\frac{B}{\not{p} - m} (\not{p} - m) u(\mathbf{p}) \sim \frac{0}{0}$$

poiché $u(\mathbf{p})$ soddisfa l'equazione di Dirac.

Lezione 7

lun 04 dic
2023 10:30

Per risolvere il problema si utilizza l'ipotesi adiabatica: si considerano una scala temporale di rivestimento e una di interazione degli stati iniziale e finale. Si immagina che la carica elettrica sia una funzione del tempo

$$e_0(t) = e_0 f(t)$$

così da ottenere un limite definito

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} S_{fi}$$

Questo è possibile nella descrizione di interazione perché gli stati evolvono con l'hamiltoniana di interazione e all'infinito essa tende a zero. Si sceglie la funzione $f(t)$ che si annulli all'infinito (e quindi pure l'hamiltoniana di interazione) ed abbia un valore apprezzabilmente vicino a uno in un intervallo $[-T, T]$. Ad un certo tempo $-T$, la particella bare si riveste e ad un tempo T ritorna bare. Si ha un'altra scala temporale $[-t, t]$ con $t \ll T$ in cui avviene l'interazione.

Risulta utile studiare la trasformata di Fourier $\tilde{f}(E)$. Se $f(t)$ fosse costante, la sua trasformata è una funzione delta di Dirac. La forma della funzione $f(t)$ è irrilevante, ma importano solo le scale. Si può immaginare che la funzione sia una gaussiana con picco pari ad 1 e la larghezza della sua trasformata sia dell'ordine T^{-1} . Pertanto

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} dE \tilde{f}(E) e^{-iEt} = \int dE \tilde{f}(E) e^{-iq^\mu x_\mu}$$

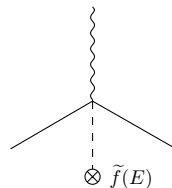
dove si considera un quadri-vettore $q^\mu = (E, \mathbf{0})$. Si normalizza la funzione

$$f(0) = \int dE \tilde{f}(E) = 1$$

La parte di lagrangiana di interazione dovuta alla corrente del campo di Dirac è data da

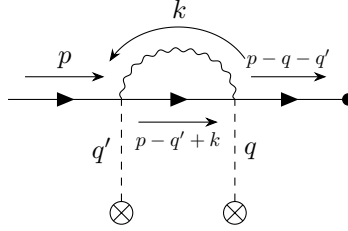
$$: -q_0 f(t) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A^\mu(x) \psi(x) :$$

cioè un vertice elettromagnetico ed una nuova interazione con $\tilde{f}(E)$



Il quadri-vettore q^μ rompe l'invariante di traslazione temporale poiché ha solamente la componente temporale. Questa situazione è simile all'aggiunta di un campo esterno che rompe l'invarianza per traslazione spaziale. Il vertice non conserva l'energia.

Si modifica la teoria sostituendo ogni vertice con quello sopra. Il termine indeterminato corrisponde al diagramma dell'auto-energia



Nel limite in cui $q, q' \rightarrow 0$ si ottiene il diagramma originario. La prima linea di destra corrisponde al propagatore di un fermione

$$S_F(p - q - q')$$

mentre nella linea centrale si ha la funzione di auto-energia

$$\Sigma(p - q')$$

Unendo tutto quanto, si riscrive la linea esterna come

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}) &\rightarrow \left[1 - \int dE dE' \tilde{f}(E) \tilde{f}(E') \frac{q_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m} (\not{p} - \not{q}' - m) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \left[1 - \int dE dE' \tilde{f}(E) \tilde{f}(E') \frac{q_0^2 B}{\not{p} - (\not{q}' + \not{q}) - m} \left((\not{p} - m) - \frac{1}{2}(\not{q}' + \not{q}) \right) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} q_0^2 B \right] u(\mathbf{p}) = \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Alla prima riga l'integrale è simmetrico per scambio $q \leftrightarrow q'$ tranne per l'ultima parentesi. Si riscrive q' in parte simmetrica ed anti-simmetrica

$$q' = \frac{q' + q}{2} + \frac{q' - q}{2}$$

Visto che l'integrale è su tutto lo spazio, la parte anti-simmetrica fornisce un contributo nullo. Alla seconda riga, separando $\not{p} - m$ in due metà, una dà zero con $u(\mathbf{p})$, l'altra si somma a $q' + q$ e semplifica il denominatore. Ricordando la normalizzazione, si ottiene la terza riga.

Non compare più la funzione $f(t)$ né la sua trasformata $\tilde{f}(E)$. Il limite $q, q' \rightarrow 0$ riporta alla forma corretta dell'elettrodinamica quantistica: non compare più il vertice modificato.

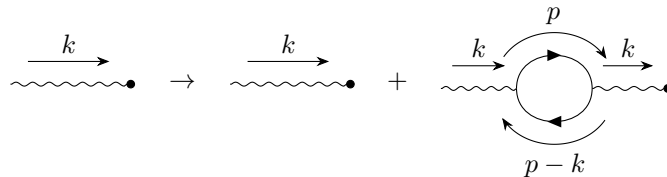
La stessa discussione vale per un fermione che esce.

4.6.2 Fotoni

Si consideri un fotone reale di momento k . La linea esterna diventa

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) + iD_{\mu\alpha}(k) i q_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \varepsilon_\beta(\mathbf{k})$$

i cui diagrammi sono



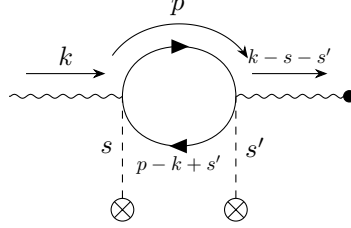
In questo caso non si ha necessità di introdurre il contro-termine di massa poiché l'invarianza di gauge protegge dalla rinormalizzazione. Sapendo che

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = -\eta^{\alpha\beta} A(k^2)$$

segue

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) &\rightarrow \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{k^2} i q_0^2 [-\eta_{\alpha\beta} A(k^2)] \varepsilon^\beta(\mathbf{k}) \\ &= \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \left[1 - \frac{q_0^2 k^2 A'(0)}{k^2} - \frac{q_0^2 k^2 \Pi_c(k^2)}{k^2} \right], \quad \Pi_c(0) = 0\end{aligned}$$

Alla seconda riga si è inserito lo sviluppo di A in potenze di k^2 . Si introduce una nuova interazione tra il vertice e la corrente elettromagnetica simile a quella precedente



La prima linea di destra è il propagatore $D_F(k - s - s')$. La polarizzazione centrale contiene la funzione di polarizzazione $\Pi(s - k)$. Pertanto

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \left[1 - \int dE dE' f(E) f(E') q_0^2 \frac{A'(0)(s - k)^2}{(k - s - s')^2} \right]$$

dove f è un'arbitraria funzione che è una nuova costante di accoppiamento dell'interazione. Si vuole fare il limite $s, s' \rightarrow 0$. La frazione è pari a

$$\frac{(s - k)^2}{(k - s - s')^2} = \frac{s^2 + k^2 - 2sk}{k^2 + (s + s')^2 - 2k(s + s')} = \frac{k^2 - 2sk + o(s, s')}{k^2 - 2k(s + s') + o(s, s')}$$

Essa è simmetrica per scambio di $s \leftrightarrow s'$ tranne per l'addendo $-2sk$. Dunque si riscrive

$$s = \frac{s + s'}{2} + \frac{s - s'}{2}$$

Come prima il contributo dell'integrale della parte anti-simmetrica è nullo e si ha

$$\frac{(s - k)^2}{(k - s - s')^2} = \frac{k^2 - k(s + s') + o(s, s')}{k^2 - 2k(s + s') + o(s, s')} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k^2 \rightarrow 0$$

si fa il limite $k^2 \rightarrow 0$ poiché il fotone è reale. A questo punto il limite $s, s' \rightarrow 0$ è ben definito e si ottiene la teoria originaria. Pertanto, la rinormalizzazione della linea fotonica è

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon^\mu(\mathbf{k})$$

Lo stesso discorso vale per la rinormalizzazione della linea esterna data da un campo esterno.

4.7 Riepilogo

Il propagatore del fermione si rinormalizza come

$$i q_0^2 Z_2 S^R = i q_0^2 \sqrt{Z_2} S^R \sqrt{Z_2}$$

Il propagatore del fotone si rinormalizza come

$$i q_0^2 Z_3 D^R = i q_0^2 \sqrt{Z_3} D^R \sqrt{Z_3}$$

Le linee esterne fermioniche

$$u, v, \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \sqrt{Z_2} u, v, \bar{u}, \bar{v}$$

mentre le linee fotoniche

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} \varepsilon^\mu$$

Il vertice si rinormalizza come

$$\frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma_\mu^R$$

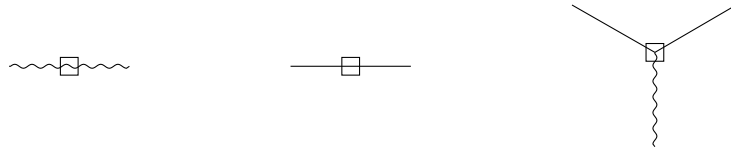
Un vertice elettromagnetico ha sempre due linee fermioniche ed una fotonica. La costante di accoppiamento con tutte le correzioni è

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0 = \sqrt{Z_3} q_0$$

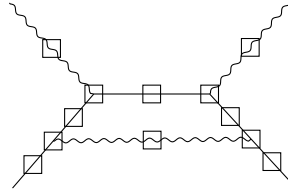
Il fatto che il rapporto è unitario si ricollega alla naturalezza della teoria.

5 Ordini superiori

Finora si è definita la somma dei diagrammi one-particle reducible i quali sono stati inseriti in un diagramma scheletro



Le correzioni al secondo ordine q_0^2 , i diagrammi one-particle reducible portano a tre costanti di rinormalizzazione con cui si rinormalizzano la carica e la massa. Non tutte le correzioni sono di questo tipo poiché esistono anche i diagrammi one-particle irreducible. Per lo scattering Compton, l'unico tale diagramma converge. Non è ovvio che un diagramma simile sia convergente ad ogni ordine. Ad esempio, inserendo nel diagramma convergente per l'effetto Compton una polarizzazione del vuoto nel fotone scambiato, si ottiene un diagramma divergente poiché contiene un sotto-diagramma divergente (cioè la polarizzazione). Ci si chiede se il diagramma scheletro del diagramma one-particle irreducible continui a convergere.



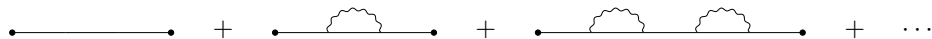
5.1 Diagrammi one-particle reducible

Si studiano tutti i diagrammi one-particle reducible.

Propagatore del fermione. Si considerino tutti i diagrammi di auto-energia del fermione

$$iS \rightarrow iS + iS i q_0^2 \Sigma(p) iS + iS i q_0^2 \Sigma(p) iS i q_0^2 \Sigma(p) iS + \dots = \frac{i}{(\not{p} - m_0) + q_0^2 \Sigma(p)}$$

dove si è applicata la formula per $(A + B)^{-1}$. I diagrammi corrispondenti sono



In questo caso la formula sopra è esatta. Si sono risommati tutti i grafici one-particle reducible che contribuiscono alla rinormalizzazione del propagatore del fermione. Dentro la funzione di auto-energia Σ sono presenti i diagrammi da calcolare (fino ad un certo ordine) con un contributo divergente e ed uno convergente. A questo punto non si sa se esistono nuove divergenze oltre alle tre studiate. Le considerazioni fatte in precedenza sullo sviluppo della funzione di auto-energia Σ valgono ancora.

In precedenza, si è trovato

$$i q_0^2 S \rightarrow \frac{i q_0^2}{(\not{p} - m)(1 + q_0^2 B) + q_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p)}, \quad q = \frac{q_0}{\sqrt{1 + q_0^2 B}} = \sqrt{Z_2} q_0$$

Queste due formule sono esatte e valgono ad ogni ordine. Gli ordini superiori vengono inclusi nel termine Σ_c e per $\not{p} = m$ si ha zero.

La relazione fondamentale è

$$iq_0^2 S \rightarrow \frac{iq^2}{(\not{p} - m) + q^2(\not{p} - m)\Sigma_c}$$

in cui appare la carica e la massa rinormalizzate, e tutti i diagrammi one-particle irreducible convergenti all'interno di Σ_c .

Propagatore del fotone. Si risommano tutti i diagrammi one-particle reducible che correggono il propagatore del fotone

$$\text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

Come prima, le formule trovate al secondo ordine q_0^2 , sono esatte per la somma di tutti gli ordini. Quindi

$$iD_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2 + q_0^2 A(k^2)}, \quad A(0) = 0$$

Ad ogni ordine non si ha rinormalizzazione additiva della massa del fotone. Inoltre

$$iq_0^2 D_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-iq^2 \eta_{\alpha\beta}}{k^2 + q^2 \Pi_c(k^2)}$$

Anche in questo caso si calcolano tutti i diagrammi nel termine Π_c all'ordine a cui si decide.

Vertice elettromagnetico. Per il vertice si aggiungono fotoni nel mezzo e i diagrammi sono one-particle irreducible. In modo esatto vale

$$-iq_0 \gamma^\mu \rightarrow -iq[\gamma^\mu + q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)]$$

Per calcolare un processo all'ordine n bisogna disegnare tutti i diagrammi scheletro con n vertici. Ogni diagramma contiene propagatori e linee esterne rinormalizzati all'ordine q^{2n} . Bisogna capire se tali diagrammi convergono.

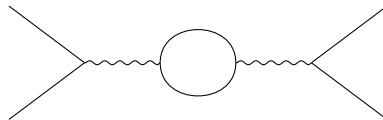
Lezione 8

5.2 Diagrammi primitivamente divergenti

mar 05 dic
2023 10:30

Si veda Peskin, cap. 10. Si studia la struttura di possibili nuove divergenze che appaiono agli ordini superiori.

Solo all'ordine q_0^2 , la divergenza superficiale è una sovrastima della divergenza di un diagramma. Ad ordini superiori, questo non vale più. Ad esempio, il diagramma seguente ha una divergenza superficiale di $D = -2$, ma in verità diverge



In questo caso, il motivo è la presenza di un sotto-diagramma divergente, cioè la polarizzazione del vuoto. Un sotto-diagramma è un qualunque diagramma che si può ottenere da un altro diagramma tagliando un numero arbitrario di linee. Un altro esempio di grafico divergente, ma con grado superficiale negativo è il grafico dell'effetto Compton con la correzione di auto-energia la propagatore del fermione.

La separazione in base alla qualità di particle reducible ha permesso già uno studio della struttura delle divergenze. Si introducono i diagrammi primitivamente divergenti: un tale

diagramma non ha sotto-diagrammi divergenti e, tagliando una linea, diventa convergente. In questo caso, tagliare una linea significa che l'integrale di loop è risolto da una delta che equivale a considerare un momento fissato.

Risulta intuitivo che tutte le divergenze derivino da divergenze primitive. I tre diagrammi divergenti visti finora (polarizzazione, auto-energia e correzione al vertice) sono tutti primitivamente divergenti.

Il grado di divergenza superficiale è la differenza di potenze del momento a numeratore e denominatore

$$\omega = n - m$$

Se è positivo allora diverge, se negativo converge e se nullo diverge logaritmicamente. Si ha sempre un integrale del tipo

$$\int \frac{d^4 p}{I_F - 2I_B}$$

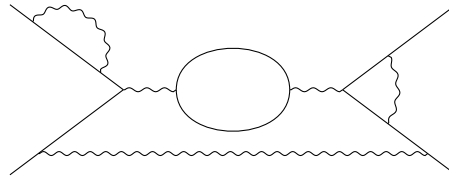
dove I indica il numero di linee interne che sono fermioniche F o bosoniche B . Ogni diagramma è composto da vertici V , linee interne I_F e I_B , linee esterne E_F e E_B . Le quantità dimensionali associate alle componenti precedenti non sono indipendenti perché ad ogni vertice si ha la conservazione del quadri-momento. Dunque, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4(I_F + I_B) - 4(V - 1) - I_F - 2I_B$$

Il primo addendo (la parentesi) rispecchia la misura che deriva da ogni integrale dei propagatori. Il secondo addendo corrisponde alla conservazione del quadri-momento ad ogni vertice, mentre il -1 deriva dalla conservazione del momento totale, ma essa fissa linee esterne e non gli integrali. Infine, gli ultimi due addendi sono i denominatori dei propagatori $(\not{p} - m)^{-1}$ e k^{-2} . Il numero di quantità dimensionali non fissate dalle delta interne è pari al numero di loop

$$N_L = I_B + I_F - (V - 1)$$

Esempio. Si consideri il seguente diagramma



Le linee interne fermioniche sono $I_F = 8$, quelle bosoniche sono $I_B = 5$. I vertici sono $V = 10$. Pertanto i loop sono 4. Si noti che il fotone inferiore è anch'esso parte di un loop.

Il numero di vertici che non emettono fotoni reali è

$$V - E_B = 2I_B$$

poiché essi sono collegati a due a due con linee fotoniche interne. Le linee fermioniche esterne sono pari. Una linea fermionica esterna tocca un solo vertice, mentre una linea fermionica interna tocca due vertici. Quindi

$$E_F = V, \quad 2I_F = V \implies 2I_F + E_F = 2V \implies I_F = V - \frac{1}{2}E_F$$



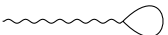


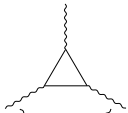
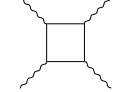
Dunque, il grado di divergenza superficiale è

$$\omega = 4 \left[\frac{3}{2}V - \frac{1}{2}E_B - \frac{1}{2}E_F \right] - 4(V - 1) - V + \frac{1}{2}E_F - V + E_B = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F$$

Per i grafici primitivamente divergenti, il grado superficiale non dipende dal numero di vertici né dal numero di linee interne. Inoltre, tutti i diagrammi che rappresentano processi due a due ($2 \rightarrow 2$) sono convergenti $\omega = -1$.

Questa topologia vale per l'elettrodinamica quantistica. Per l'elettrodinamica scalare la topologia è diversa poiché un tipo di vertice è il diagramma seagull.

Riassunto. I diagrammi primitivamente divergenti sono

E_B	E_F	ω	Diagramma	E_B	E_F	ω	Diagramma
0	0	4		0	2	1	
1	0	3		1	2	0	
2	0	2					
3	0	1					
4	0	0					

Il primo diagramma divergente, ma non primitivamente ed è un esempio senza linee esterne: esso fornisce una correzione infinita all'energia del vuoto e non ce ne si occupa. Tale diagramma non si può ignorare in relatività generale poiché una densità di energia infinita del vuoto ha un effetto fondamentale. Il secondo diagramma è il tadpole che è nullo per il teorema di Furry. In ogni caso, per il teorema di Wick tale termine non si può ottenere poiché non si fanno contrazioni all'interno di un prodotto normale. Il quarto diagramma è nullo per il teorema di Furry. Il quinto diagramma è il diagramma luce-luce e la sua divergenza superficiale è logaritmica; successivamente si mostra essere convergente per invarianza di gauge.

Nella seconda tabella, dove si hanno linee esterne fermioniche, aumentando il numero di linee esterne, i diagrammi convergono sempre di più e non si hanno nuove divergenze. I diagrammi sopra sono divergenti ed essi ridefiniscono i parametri bare della lagrangiana libera. Pertanto, il dubbio se agli ordini superiori il diagramma scheletro — che consiste nel porre le correzioni dentro i parametri fisici ed utilizzare i propagatori rinormalizzati con carica e massa fisiche — potesse portare a nuove divergenze è risolto, poiché i diagrammi sopra sono gli unici diagrammi divergenti. Le uniche quantità divergenti sono le costanti di rinormalizzazione Z_i e la rinormalizzazione additiva della massa δm .

Per la teoria di Fermi la situazione è diversa in quanto il grado di divergenza superficiale contiene anche il numero di linee interne, quindi ad ogni ordine superiore la divergenza peggiora.

Il procedimento da seguire è partire da un diagramma a qualsiasi ordine, rimuovere le correzioni delle due tabelle sopra, cioè i diagrammi primitivamente divergenti. Lo scheletro di tale diagramma può convergere o divergere. Se converge si introducono nuovamente le correzioni senza problemi. Se diverge, allora è primitivamente divergente. Infatti, se così non fosse, allora tagliando le linee si arriva ad un diagramma convergente e il diagramma precedente è primitivamente divergente, ma avendo tolto tutte le correzioni sopra (cioè i diagrammi primitivamente divergenti), questo diagramma non potrebbe essere primitivamente divergente: si è arrivati ad una contraddizione. Pertanto, tutte le divergenze possono solamente provenire dai diagrammi primitivamente divergenti sopra.

La procedura di rinormalizzazione si riduce allo studio del terzo diagramma di sinistra e dei due di destra. Sebbene i diagrammi one-particle irreducible non aggiungano divergenze, bisogna comunque calcolarli ad un dato ordine dello sviluppo.

Diagramma luce-luce. Si consideri il diagramma luce-luce. La sua convergenza segue la stessa argomentazione vista per la funzione di polarizzazione del vuoto $\Pi(k^2)$. L'elemento di matrice di scattering è

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_i N_i \mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \varepsilon^{\mu_1} \varepsilon^{\mu_2} \varepsilon^{\mu_3} \varepsilon^{\mu_4}$$

La trasformazione di gauge non deve cambiare l'ampiezza di Feynman, altrimenti la sezione d'urto dipenderebbe dalla scelta di gauge. La relazione di invarianza di gauge del primo fotone

svilupata attorno ad un momento piccolo è

$$(k_1)_{\mu_1} \mathcal{M}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = 0$$

e così per gli altri. L'ampiezza di Feynman è data da

$$\mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = A \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} + \dots$$

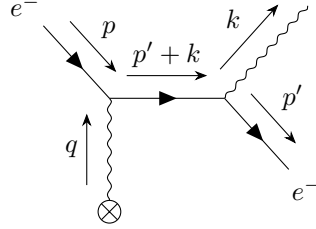
dove A è una quantità dimensionale ed i puntini indicano tutte le combinazioni possibili della metrica. Applicando l'invarianza di gauge si ha

$$0 = (k_1)_{\mu_1} \mathcal{M}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(0, \mathbf{0}) = A k_1^{\mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} + (\propto k^2) \implies A = 0$$

Il termine A dev'essere nullo, mentre i termini superiori sono nulli perché si hanno fotoni reali $k^2 = 0$. Lo sviluppo dell'ampiezza parte con la derivata prima e così si ha una potenza in più al denominatore: il diagramma converge.

6 Divergenza infrarossa

Si è vista una divergenza infrarossa quando si è studiata la bremsstrahlung. Si studiano i grafici da cui può scaturire una divergenza. Si consideri l'emissione di un fotone



La sezione d'urto differenziale nell'approssimazione di fotone soffre è

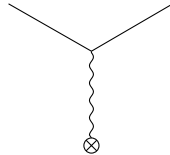
$$d_\Omega \sigma = d_\Omega \sigma|_{\text{elas}} dP, \quad dP = -\frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3 k}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \sim \int \omega^2 d\omega \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \sim \ln \omega$$

Essa diverge nell'infrarosso. Tuttavia, non si stanno considerando tutti i diagrammi dell'ordine di quello sopra, come ad esempio la correzione al vertice. Questi, nel limite in cui il fotone virtuale abbia momento on-shell $q^2 = 0$, potrebbe finire sul polo del propagatore del fotone e cancellare la divergenza. La regolarizzazione infrarossa viene fatta dando una piccola massa al fotone

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^2}$$

In precedenza, si è introdotto il concetto di sensibilità dell'apparato di misura dei fotoni. L'urto elastico sperimentale è l'insieme dell'urto elastico e di emissione di un fotone con energia $\omega < \omega_{\text{riv}}$. L'urto inelastico sperimentale è l'emissione di un fotone con energia $\omega \geq \omega_{\text{riv}}$. In questo caso la divergenza si trova nell'urto elastico sperimentale.

Bisogna considerare tutti i diagrammi che danno contributo ad un certo ordine della teoria delle perturbazioni. Al diagramma elastico



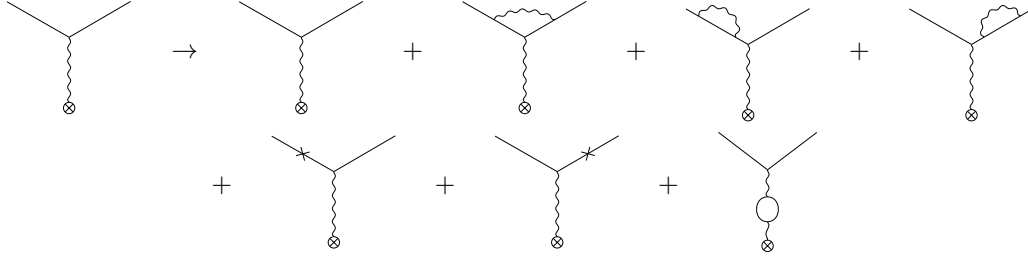
si aggiungono i diagrammi di correzione per ottenere un'ampiezza di Feynman pari a

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{elas}}|^2 (1 + \alpha V)$$

dove α è una costante, mentre V è il contributo dei grafici virtuali, cioè non presentano un fotone reale.

Come per la divergenza ultravioletta, si osservano un diagramma isolando i termini divergenti. Si studiano gli stessi diagrammi cercando l'origine della divergenza infrarossa.

Correzioni virtuali. Le correzioni virtuali all'interazione con un campo esterno sono



La sezione d'urto elastica sperimentale è

$$d\Omega\sigma|_{\text{exp}} = d\Omega\sigma|_{\text{elas}}(1 + \alpha B + \beta R)$$

dove B sono le correzioni reali dovute alla bremsstrahlung con energia minore di quelle del rivelatore, mentre R sono le correzioni radiative, cioè i diagrammi sopra. Le rinormalizzazioni delle linee esterne (diagramma tre, quattro, cinque e sei) portano solo a correzioni divergenti nell'ultravioletto Z_2 e non hanno correzioni finite (cioè Σ_c). Pertanto, tali termini non sono i responsabili della divergenza infrarossa. Dunque, bisogna considerare solo due diagrammi (diagramma due e sette): i loro termini finiti (nell'ultravioletto), Λ_c e Π_c , potrebbero avere una divergenza infrarossa.

L'ampiezza di Feynman per tali due correzioni è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + iD_{\mu\nu}(k)iq_0^2\Pi^{\nu\rho}(k)] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + q_0^2 D_{\mu\nu}(k)\eta^{\nu\rho} A(k^2)] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu [\delta_\mu^\rho + q_0^2 D_{\mu\nu}(k)\eta^{\nu\rho}(k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2))] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[\delta_\mu^\rho - q_0^2 \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} \left(\frac{1}{2} A'(0) + \Pi_c(k^2) \right) \right] A_\rho(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[1 - q_0^2 \left(\frac{1}{2} A'(0) + \Pi_c(k^2) \right) \right] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} \Gamma^\mu \left[1 - \frac{1}{2} q_0^2 A'(0) \right] [1 - q_0^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \sqrt{Z_2}\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{-iq_0}{Z_1} [\gamma^\mu + q_0^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] \sqrt{Z_3} [1 - q_0^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) \sqrt{Z_2}u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) [\gamma^\mu + q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \gamma^\mu A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + \bar{u}(\mathbf{p}') (-iq) \gamma^\mu [-q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \\ &\quad + (-iq) \bar{u}(\mathbf{p}') [q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] A_\mu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) + o(q_0^3) \end{aligned}$$

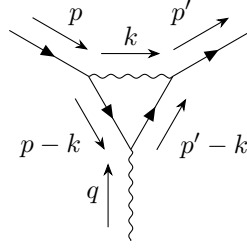
Si noti che l'ampiezza si scrive per un diagramma a cui si aggiunge ogni modifica, e non come somma di tre diagrammi uno con una sola modifica ciascuno. La parentesi quadra deriva dalla polarizzazione del vuoto.

Per trovare una divergenza si rimuovono prima i termini di sicuro convergenti. Dalla polarizzazione del vuoto, si ricorda valere $\Pi_c(0) = 0$, pertanto tale termine non può contribuire alla divergenza infrarossa. Rimane solamente il termine Λ_c^μ : il vertice potrebbe finire sul polo del propagatore del fotone.

Lezione 9

Si studia il diagramma della correzione al vertice

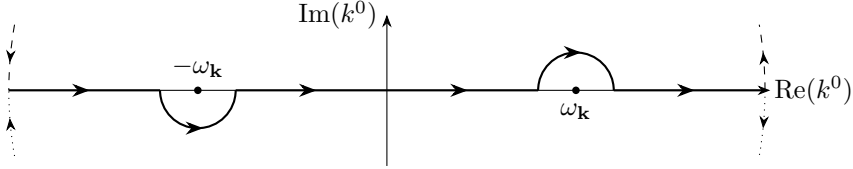
lun 11 dic
2023 10:30



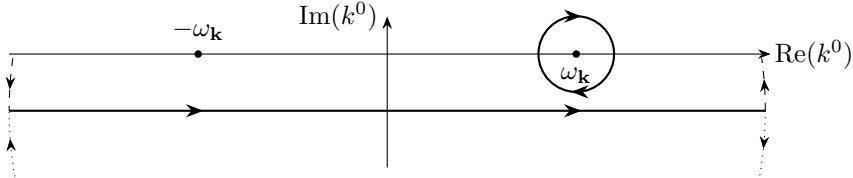
da cui la funzione di correzione al vertice è

$$-iq^3 \Lambda^\mu(p', p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iq) \gamma_\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} (-iq) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-iq) \gamma^\alpha \frac{-i}{k^2 - \lambda^2}$$

si utilizza propagatori e vertici rinormalizzati, dunque si utilizzano i parametri fisici q ed m . La divergenza deriva dall'ultimo propagatore nel limite $\lambda \rightarrow 0$ della massa del fotone. Il propagatore utilizza la prescrizione, il cammino di Feynman. Quando si fa un integrale su un certo cammino, si possono avere due tipi di singolarità: end-point e pinch. La prima è una singolarità che si trova all'estremo del cammino di interazione, la seconda considera due poli che si avvicinano e incontrano il cammino. Questo secondo tipo riguarda il caso presente. Infatti, per $\lambda \rightarrow 0$ si ha $\omega_{\mathbf{k}} \rightarrow |\mathbf{k}|$ che tende a zero nel limite infrarosso.



Al posto della prescrizione dei Feynman, si può scegliere una qualsiasi prescrizione che fornisca lo stesso propagatore causale. Si considera una retta R parallela all'asse reale ed un cerchio C orientato in senso orario attorno al polo $\omega_{\mathbf{k}}$.



Si calcola un integrale del tipo

$$D(k) = \int_{\gamma} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\eta}{k^2 - \lambda^2} e^{-ik^\mu x_\mu} = \int_{\gamma} d^4 k f(k)$$

Per $\text{Im } k_0 > 0$ si chiude la retta R da sotto. Tale cammino non circonda poli e l'integrale associato I_1 è nullo. Il secondo cammino fornisce

$$I_2 = -2\pi i \text{Res } f(\omega_{\mathbf{k}})$$

Per $\text{Im } k_0 < 0$ si chiude da sopra e si ha

$$I_1 = 2\pi i [\text{Res } f(\omega_{\mathbf{k}}) + \text{Res } f(-\omega_{\mathbf{k}})], \quad I_2 = -2\pi i \text{Res } f(\omega_{\mathbf{k}})$$

da cui il contributo totale è

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \text{Res } f(-\omega_{\mathbf{k}})$$

Pertanto, questa altra prescrizione è equivalente a quella di Feynman.

Nel limite $\lambda \rightarrow 0$, i due poli si avvicinano e si ha una singolarità di pinch sul cerchio C . Per fare l'integrale in k_0 bisogna utilizzare il teorema dei residui con un cammino simile al cammino C . Dunque, la funzione di correzione al vertice divergente nell'infrarosso è

$$\Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} dk_0 \gamma_\alpha \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{2p'k} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{2pk} \gamma^\alpha \frac{1}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

dove si sono razionalizzati i propagatori dei fermioni — applicando già il limite $k^2 \rightarrow 0$ poiché il denominatore è regolare e ricordando che $p^2 = m^2$ è il momento di una particella sul mass shell — e si è riscritto il denominatore del propagatore del fotone come

$$k^2 - \lambda^2 = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - \lambda^2 = k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 = (k_0 + \omega_{\mathbf{k}})(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})$$

Considerando le relazioni

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad p^2 = m^2, \quad k^2, k \rightarrow 0$$

e ricordando che la funzione di correzione al vertice si trova tra due spinori $\bar{u}(\mathbf{p}')\Lambda_\mu(p', p)u(\mathbf{p})$, il numeratore del primo propagatore si può riscrivere come

$$\gamma_\alpha(\not{p}' + m) = \gamma_\alpha m + \gamma_\alpha \gamma_\mu p'^\mu = \gamma_\alpha m + 2\eta_{\mu\alpha} p'^\mu - \not{p}' \gamma_\alpha = (-\not{p}' + m)\gamma_\alpha + 2p'_\alpha$$

in modo che, applicando l'equazione di Dirac a $\bar{u}(\mathbf{p})$, rimanga solamente $2p'_\alpha$. Lo stesso vale per il secondo propagatore con $u(\mathbf{p})$. Dunque

$$\Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p) = -i\gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} dk_0 \frac{p'_\alpha p^\alpha}{(p'k)(pk)} \frac{1}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

Integrando attorno al cerchio C e utilizzando il teorema dei residui, si ha

$$\text{Res} \left[\frac{1}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})} \right]_{\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \implies I_2 = -\frac{2\pi i}{2\omega_{\mathbf{k}}}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p) &= -i\gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{(-2\pi i)}{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{pp'}{(p'k)(pk)}, \quad \alpha = \frac{q^2}{4\pi} \\ &= -\frac{1}{2q^2} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{2pp'}{(p'k)(pk)} \equiv \frac{1}{q^2} \gamma^\mu A(p', p) \end{aligned}$$

Ricordandosi le manipolazioni della funzione Λ^μ quando si sono studiate le divergenze ultraviolette, si riscrive

$$q^2 \Lambda_c^\mu(p', p) = q^2 [\Lambda^\mu(p', p) - L\gamma^\mu]$$

La costante L è divergente nell'ultravioletto e vale

$$L\gamma^\mu = \Lambda^\mu(P, P), \quad P^2 = m^2$$

Scegliendo $P = p', p$ si ottiene

$$q^2 L_{\text{IR div}}(p', p)\gamma^\mu = \frac{1}{2} q^2 [\Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p', p') + \Lambda_{\text{IR div}}^\mu(p, p)] = \frac{1}{2} [A(p', p') + A(p, p)]\gamma^\mu$$

Dunque, la parte finita della funzione Λ divergente nell'infrarosso è

$$\begin{aligned} q^2 \Lambda_{c, \text{IR div}}^\mu &= [A(p', p) - q^2 L_{\text{IR div}}]\gamma^\mu \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\mu [2A(p', p) - A(p, p) - A(p', p')] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\frac{4pp'}{(p'k)(pk)} - \frac{2p^2}{(pk)^2} - \frac{2(p')^2}{(p'k)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 = \frac{1}{2} \alpha \gamma^\mu R \end{aligned}$$

Questa è la parte di correzioni radiative. Pertanto, il termine dell'ampiezza di Feynman per l'urto elastico sperimentale divergente nell'infrarosso calcolato all'inizio risulta essere

$$\mathcal{M}_{\text{IR div}} = A_\mu^R \bar{u}(\mathbf{p}')(-iq)\gamma^\mu \left[1 + \frac{\alpha}{2} R \right] u(\mathbf{p})$$

dove

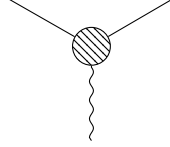
$$A_\mu^R(\mathbf{k}) = [1 - q^2 \Pi_c(k^2)] A_\mu(\mathbf{k}) + o(q_0^2)$$

La sezione d'urto è proporzionale al modulo quadro

$$|\mathcal{M}_{\text{IR div}}|^2 \propto 1 + \alpha R + o(\alpha)$$

Da questo risulta che $\int dP = \alpha B = -\alpha R$: la divergenza infrarossa si cancella. Quando si considerano tutti i termini ad un particolare ordine, il processo non ha divergenze infrarosse.

Per l'elettrodinamica quantistica, il teorema di Bloch–Nordsieck garantisce che le divergenze infrarosse si cancellano a tutti gli ordini. Per qualunque diagramma del tipo



la cancellazione delle divergenze avviene per emissione di un fotone reale da una linea esterna e scambio di un fotone virtuale interno.

Per la divergenza ultravioletta, si può utilizzare l'argomentazione qualitativa di tagliare le linee fino a trovare diagrammi primitivamente divergenti, oppure sapere che i teoremi di Bogoliubov–Parasyuk, Hepp e Zimmermann garantiscono che le divergenze ultraviolette derivano dai tre grafici primitivamente divergenti che si sono studiati (v. Weinberg, vol. 1).

Conclusioni. Si è ottenuta ad una teoria quantistica relativistica dei campi per l'interazione elettromagnetica. La teoria è perfettamente definita con una trattazione robusta di regolarizzazione dimensionale che non rompe la simmetria di gauge.

7 Teorema di Furry

Per dimostrare il teorema di Furry si utilizza l'operatore di coniugazione di carica per la teoria di Dirac.

Coniugazione di carica. Si veda Bjorken, §5.2. Si ritorna all'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico

$$(i\partial - qA - m)\psi = 0$$

L'equazione per l'anti-particella è

$$(i\partial + qA - m)\psi_c = 0$$

dove ψ_c è la funzione d'onda coniugata di carica. Si studia il suo legame con la funzione d'onda ψ . Notando

$$(i\partial)^* = -i\partial, \quad A_\mu = A_\mu^*$$

si coniuga l'equazione di Dirac per una particella

$$[(i\partial_\mu + qA_\mu)(\gamma^\mu)^* + m]\psi^* = 0$$

Si cerca un operatore $C\gamma_0$ tale per cui

$$(C\gamma_0)\gamma_\mu^*(C\gamma_0)^{-1} = -\gamma_\mu$$

così da ottenere l'operatore per la funzione d'onda coniugata. Applicando l'operatore alla sinistra dell'equazione sopra si ottiene

$$C\gamma_0[(i\partial_\mu + qA_\mu)(\gamma^\mu)^* + m](C\gamma_0)^{-1}(C\gamma_0)\psi^* = 0 \implies [i\partial + qA - m]C\gamma_0\psi^* = 0$$

Per confronto, si ha

$$C\gamma_0\psi^* = C\bar{\psi}^\top = \psi_c$$

Ricordando

$$\gamma_0 \gamma_\mu^* \gamma_0 = \gamma_\mu^\top$$

dalla definizione di $C\gamma_0$ si ottiene

$$-\gamma_\mu = C\gamma_0 \gamma_\mu^* \gamma_0 C^{-1} = C\gamma_\mu^\top C^{-1} \implies C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^\top$$

Sapendo che le matrici di Dirac soddisfano

$$\gamma_{0,2}^\top = \gamma_{0,2}, \quad \gamma_{1,3}^\top = -\gamma_{1,3}$$

dalla relazione sopra l'operatore di coniugazione di carica C commuta con $\gamma_{1,3}$ e anti-commuta con $\gamma_{0,2}$. Pertanto

$$C = i\gamma_2 \gamma_0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^\top$$

ricordando che la base dello spazio di Dirac sono le sedici matrici indipendenti che costituiscono i covarianti bilineari.

Esempio. Si consideri una soluzione ad energia negativa per una particella a riposo con massa m

$$\psi^4 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt}$$

Si applica l'operatore di coniugazione di carica

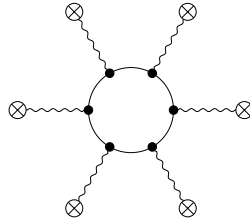
$$\psi_c = C\bar{\psi}^\top = C\gamma_0 \psi^* = i\gamma_2 \psi^* = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-imt} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$

si ottiene una soluzione ad energia positiva.

Simmetria. Potendo passare da una funzione d'onda alla sua carica coniugata, implica che la fisica di una particella di carica q in un campo elettromagnetico A_μ è la stessa di quella di una particella di carica $-q$ in un campo elettromagnetico $-A_\mu$. La corrente di Dirac è

$$J_\mu = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

Teorema di Furry. Si consideri un diagramma con un loop ad n lati



Esso vale

$$L = \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \langle 0 | \mathcal{T} \{ J^{\mu_1}(x_1) \cdots J^{\mu_n}(x_n) \} | 0 \rangle A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n)$$

Gli unici termini non nulli sono le contrazioni cioè i propagatori fermionici tra due punti adiacenti. Applicando l'operatore coniugazione di carica \mathcal{C} per i campi (v. §15.12), la corrente ed il vuoto si comportano come

$$\mathcal{C}J^\mu\mathcal{C}^{-1} = -J^\mu, \quad \mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$$

Si inserisce $I = \mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}$ tra ogni corrente e, per la relazione sopra, si ottiene $(-1)^n$. Per n dispari il loop è nullo.

Lezione 10

Da questa lezione in avanti gli appunti sono in ordine diverso rispetto alle lezioni: ho separato le parti dell'elettrodinamica e dell'interazione debole.

mar 12 dic
2023 10:30

8 Regularizzazione dimensionale

Si veda Mandl, §10.3. Si studia la regularizzazione dimensionale visto che gli integrali in un numero minore di 4 dimensioni convergono. Inoltre si calcola analiticamente la parte finita della funzione di polarizzazione del vuoto.

Si consideri l'integrale

$$\pi(s) = \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^n}{s^{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3$$

dove si utilizza la funzione gamma di Eulero (detta anche integrale di Eulero di seconda specie)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$$

Essa soddisfa varie proprietà

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Per altri integrali, si veda Gradshteyn e Ryzhik, e Abramowitz e Stegun. La funzione gamma è singolare all'origine e la sua serie di Laurent⁴ è

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma_E + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \gamma_E^2 \right) z + o(z)$$

dove γ_E è la costante di Eulero-Mascheroni.

Si consideri una numero di dimensioni D . L'integrale sopra diventa

$$\pi(s) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - s)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^n}{s^{n-D/2}}, \quad n > \frac{D}{2}$$

Per $n = \frac{D}{2}$ l'integrale diverge logaritmicamente mentre la funzione gamma è singolare. Per valori non interi di D , il secondo membro è perfettamente definito ed è finito, pertanto lo si può utilizzare per definire l'integrale a primo membro nel caso di dimensioni non intere, in particolare per $D = 4 - \varepsilon$.

Le relazioni delle matrici di Dirac si possono generalizzare

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = D, \quad \gamma^0, \dots, \gamma^{D-1}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu\gamma^\mu = DI, \quad \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -(D-2)\gamma^\alpha$$

Interessa un numero $D = 4 - \varepsilon$ dimensioni. Nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si ritorna alla teoria originaria.

Esempio. Si consideri l'integrale

$$\pi(s) = \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s)^2}$$

Nella regularizzazione dimensionale si passa a $4 - \varepsilon$ dimensioni

$$\pi(s) = \int \frac{d^{4-\varepsilon} k}{(k^2 - s)^2} = i\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{\Gamma(2)} \frac{1}{s^{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

La divergenza nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ proviene dalla funzione gamma a numeratore

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + o(1)$$

⁴Si veda <https://math.stackexchange.com/q/1287555>.

Inoltre, sapendo che

$$s^{\pm \frac{\varepsilon}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon \ln s + o(\varepsilon)$$

si espande l'integrale fino all'ordine ε^0 per avere

$$\pi(s) = \frac{2i\pi^2}{\varepsilon} - i\pi^2(\gamma_E + \ln s) + o(1)$$

cioè una parte divergente ed una finita. Questo calcolo è simile a quello seguente riguardante la polarizzazione del vuoto.

Dimensioni di massa. Bisogna porre attenzione alle dimensioni dei campi. Si calcolano le dimensioni in termini di potenze della massa nelle unità naturali. Per l'azione si ha

$$\dim S = 0, \quad S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \right) [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$$

pertanto segue

$$D = 4 \implies \dim A^\mu = 1, \quad \dim \psi = \frac{3}{2}, \quad \dim m = 1, \quad \dim q = 0$$

In numero arbitrario di dimensioni, imponendo che l'azione sia uno scalare, si ha

$$\dim A^\mu = \frac{D-2}{2}, \quad \dim \psi = \frac{D-1}{2}, \quad \dim m = 1, \quad \dim q = \frac{4-D}{2}$$

Affinché la carica rimanga adimensionale, si opera la sostituzione

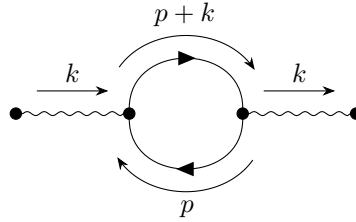
$$q \rightarrow \mu^{\frac{4-D}{2}} q = \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} q$$

dove μ è una scala di massa.

Polarizzazione del vuoto. Si consideri la funzione di polarizzazione del vuoto

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2][p^2 - m_0^2]}$$

del seguente diagramma



Si ricorda che il prodotto di un numero dispari di matrici di Dirac ha traccia nulla e si utilizzano le seguenti identità

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = D\eta^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = D[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}]$$

Pertanto, il numeratore è

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(p, k) &= \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)] \\ &= D[(p+k)^\mu p^\nu + (p+k)^\nu p^\mu - p_\rho(p+k)^\rho \eta^{\mu\nu} + m_0^2 \eta^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

Si riscrive il denominatore utilizzando l'integrale

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}$$

infatti

$$\xi = (a-b)z + b, \quad d\xi = (a-b) dz \implies \int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{1}{a-b} = - \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \frac{1}{a-b} = \frac{1}{ab}$$

Pertanto

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m_0^2 + (k^2 + 2pk)z]^2}$$

Introducendo la variabile $q^\mu = p^\mu + zk^\mu$, si ha

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D q \frac{N^{\mu\nu}(q - kz, k)}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2}$$

Il numeratore diventa

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(q - kz, k) &= D\{[2q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu}] + [m_0^2 - k^2 z(1-z)]\eta^{\mu\nu} \\ &\quad + [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu})] + f(q)\} \end{aligned}$$

dove $f(q)$ contiene termini lineari in q il cui integrale è nullo. Dunque, la funzione di polarizzazione del vuoto si scrive come

$$iq_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{q_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} D \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z)$$

Si considerino i seguenti integrali

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(q^2 - s)^n} q^\mu q^\nu &= i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{\eta^{\mu\nu} (-1)^{n+1}}{s^{n-D/2-1}} \\ \int d^D q \frac{q^2}{(q^2 - s)^n} &= i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D(-1)^{n+1}}{s^{n-D/2-1}} \\ \int \frac{d^D q}{(q^2 - s)^n} &= i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^n}{s^{n-D/2}} \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu} &= \int d^D q \frac{2q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu}}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2} = -\frac{i\eta^{\mu\nu} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(1 - D/2)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} \frac{2-D}{2} \\ I_2^{\mu\nu} &= \int d^D q \frac{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]\eta^{\mu\nu}}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2} = \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} [m_0^2 - k^2 z(1-z)]\eta^{\mu\nu}}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \Gamma(2 - D/2) \\ &= \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - D/2)\eta^{\mu\nu}}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} = \frac{i\eta^{\mu\nu} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(1 - D/2)(1 - D/2)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} = -I_1^{\mu\nu} \\ I_3^{\mu\nu} &= \int d^D q \frac{-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu})}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m_0^2]^2} \\ &= -2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu}) \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - D/2)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \end{aligned}$$

Questo è anche in accordo con il fatto che il terzo addendo del numeratore è invariante di gauge: moltiplicando per k_μ si ottiene, ma lo stesso non si può dire degli altri due addendi. La funzione di polarizzazione diventa

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu}) \mu^{D-4} \Pi(k^2)$$

dove si ha

$$\Pi(k^2) \equiv \frac{2\mu^{4-D} D\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m_0^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}}$$

L'invarianza di gauge è preservata dalla regolarizzazione dimensionale

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$$

Si studia l'origine della divergenza ultravioletta. Sia $D = 4 - \varepsilon$ e ricordando

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + o(1), \quad 2 - \frac{D}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad s^{\pm \frac{\varepsilon}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon \ln s + o(\varepsilon)$$

si ottiene⁵

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + o(1) \right] \int_0^1 dz z(1-z) \left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon \ln \frac{m_0^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} + o(\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right] - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \frac{m_0^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} + o(1) \end{aligned}$$

La divergenza ultravioletta si evidenzia nel primo addendo. Dall'espansione della funzione $\Pi^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} A(k^2)$ si ha, per confronto con l'espressione sopra,

$$\Pi(k^2) = A'(0) + \Pi_c(k^2), \quad \Pi_c(0) = 0$$

dunque

$$\begin{aligned} \Pi_c(k^2) &= \Pi(k^2) - A'(0) = \Pi(k^2) - \Pi(0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \frac{m_0^2 - k^2 z(1-z)}{m_0^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m_0^2} \right] \end{aligned}$$

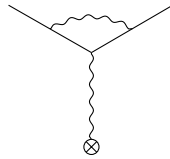
Nel limite di $k^2 \rightarrow 0$ si ha

$$q_0^2 \Pi_c(k^2) \sim \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z^2(1-z)^2 \frac{k^2}{m_0^2} = \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m_0^2}$$

Momento di dipolo magnetico anomalo. Il vertice elettromagnetico fornisce anch'esso una correzione finita, ma è più complicato da calcolare. Esso porta una correzione al momento di dipolo magnetico. La parte finita del vertice corretto fornisce un termine (v. Mandl, §9.6.1)

$$-iq\bar{u}(\mathbf{p}') [q^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] u(\mathbf{p}) A_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q}) = -iq\bar{u}(\mathbf{p}') \left[\frac{i\alpha}{4\pi m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\mathbf{p}) A_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q})$$

dove A_μ^{cl} è il campo esterno e $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{q}$



L'ampiezza di Feynman del vertice elettromagnetico (non corretto) si può riscrivere tramite l'identità di Gordon

$$-iq\bar{u}(\mathbf{p}') A_{\text{cl}}(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) = -\frac{iq}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}') [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(\mathbf{p}) A_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q})$$

Da ciò è evidente che il processo di scattering di una particella su di un campo esterno ha due contributi: il primo è dato dal momento lineare, mentre il secondo coinvolge il commutatore delle matrici di Dirac $\sigma^{\mu\nu}$, le sue tre componenti spaziali sono gli operatori di spin Σ_k : si ha l'interazione tra il momento di dipolo magnetico di spin con il campo esterno. Il momento di dipolo magnetico di spin, il rapporto giromagnetico ed il fattore- g sono (v. Peskin, §§6.2, 6.3)

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}, \quad \gamma = \frac{gq}{2m}, \quad g = 2$$

⁵Il risultato avrebbe anche l'addendo $-\frac{1}{2}$ a seguire $\ln 4\pi$, tuttavia le quantità misurabili ne sono indipendenti e pertanto non lo si include. La derivazione corretta considera una funzione $f(D)$ al posto del fattore D presente nelle varie relazioni sopra. Tale funzione vale $f(4) = 4$ e pertanto quando si fa il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si considera $f(4 - \varepsilon) = 4 - \varepsilon f'(4) + o(\varepsilon)$. Se $f(D) = D$ allora si ottiene $f'(4) = 1$ da cui segue l'addendo precedente non incluso. Tuttavia, visto che f è arbitraria, la convenzione tipica è considerare $f'(4) = 0$.

Tramite la correzione del vertice, si ha

$$\gamma = \frac{q}{2m} \left(2 + \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

Il momento di dipolo magnetico anomalo è

$$a = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Ad ordini maggiori, non si può considerare solamente l'elettrodinamica quantistica, ma bisogna introdurre anche le altre interazioni. Il reticolo è una regolarizzazione utile per le interazioni forti.

Lezione 11

mer 13 dic
2023 10:30

Parte II

Interazione debole

L'interazione debole si venne scoperta con il decadimento beta

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^-$$

dove A è il numero di massa e Z è il numero atomico, che coinvolge il decadimento del neutrone

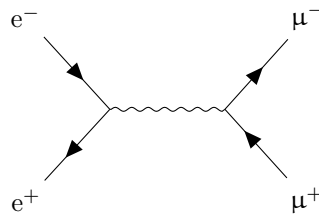
$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

Le particelle sono divise in adroni e leptoni. Gli adroni interagiscono in modo debole, forte ed elettromagnetico; si suddividono in mesoni — numero pari di quark, spin intero, bosoni — e barioni — un numero dispari di quark, spin semi-intero, fermioni. I leptoni sono divisi in tre famiglie: elettronica, muonica e tauonica. Ogni famiglia ha una particella carica ed una neutra cioè il neutrino associato. Le scale di massa sono molto diverse

$$m_e \approx 511 \text{ keV}, \quad m_\mu \approx 107 \text{ MeV}, \quad m_\tau \approx 1.777 \text{ GeV}$$

La stessa classificazione si ha per l'anti-materia. La teoria presenta la conservazione del numero leptonico e la conservazione del numero leptonico per ogni famiglia (conservazione del sapore). Alla materia si assegna un numero, mentre l'anti-materia ha il numero opposto.

La presenza di più famiglie influenza i tipi di diagrammi che si possono disegnare, ad esempio il seguente scattering Bhabha



è un processo a soglia poiché

$$(p_{e^+} + p_{e^-})^2 > 4m_\mu^2$$

Lo stesso vale per i tauoni e per i bosoni vettoriali W , mentre lo scattering $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ può avvenire sempre.

Nel decadimento del neutrone si conserva il numero leptonico $L_e = 0$. Tale numero non si conserva per le oscillazioni dei neutrini. Il neutrone libero decade con un tempo di vita medio⁶

⁶Si noti che esistono due misure discordanti sulla vita media del neutrone: $877.75^{+0.50}_{-0.44}$ s e (879.6 ± 0.8) s.

$\tau \approx 878\text{s}$, ma i neutroni nei nuclei stabili non decadono. Il decadimento è dato dall'effetto tunnel quando si ha possibilità di superare l'interazione forte.

La conservazione del numero leptonico si osserva nell'assenza di certe transizioni cinematicamente favorite, in particolare il doppio decadimento beta senza neutrini

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-$$

per tale decadimento si avrebbe

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \bar{\nu}_e + n \rightarrow p^+ + e^-$$

Esso sarebbe avvantaggio rispetto all'emissione di neutrini

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$$

ma non conserva il numero leptonico.

Inizialmente la presenza dell'anti-neutrino nel decadimento beta era ignota. Considerando tale decadimento come fosse a due corpi, il protone e l'elettrone si dividono l'energia in eccesso dal neutrone: l'energia dell'elettrone è fissata (v. Fisica Subnucleare). Gli esperimenti mostrano invece una distribuzione di energia nel grafico di Kurie. Da questo si comprese che il decadimento è a tre corpi. Si pensò ad una particella neutra, diversa dalla luce con una frazione della massa del protone: il neutrino.

Fermi propose un'interazione a quattro punti

$$\mathcal{H}_I = \sum_i \bar{\psi}_p \Gamma_i (C_H + C'_H \gamma_5) \gamma_\mu \psi_n \bar{\psi}_e \Gamma_i (B_L + B'_L \gamma_5) \gamma_\mu \psi_{\bar{\nu}}$$

dove H per hadron e L per lepton, mentre le matrici Γ_i sono i covarianti bilineari della teoria di Dirac (si esplicita la matrice γ_5 , dunque non bisogna sommare i bilineari che la contengono). I quattro campi ψ sono calcolati tutti nello stesso punto. Inserire la matrice γ_5 porta ad una possibile violazione della parità, visto che tale matrice porta a pseudo-scalari e pseudo-vettori. La verifica sperimentale è in accordo eccellente con questa teoria.

La costante di accoppiamento è la costante di Fermi

$$G_F m_N^2 = 10^{-5}$$

dove N indica un nucleone (protone o neutrone). Visto che la costante è così piccola, nella pratica nulla è misurato con precisione maggiore; tuttavia dal punto di vista teorico ci si pone il problema degli ordini superiori.

L'interazione debole è chiamata così perché meno intensa delle altre interazioni fondamentali. Questo lo si evince dai decadimenti dei pioni

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu, & \pi^\pm &\sim 10^{-8} \text{ s} \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma, & \pi^0 &\sim 10^{-16} \text{ s} \end{aligned}$$

L'elettromagnetismo è molto più forte dell'interazione debole. Questa osservazione è qualitativa: la vita media dipende molto anche dallo spazio delle fasi, oltre che dalla costante di accoppiamento di un'interazione.

Si fissano i parametri. Quelli adronici sono difficili da calcolare perché i nucleoni sono influenzati dalle interazioni forti. Quelli leptonici sono facilmente calcolabili. Molti esperimenti hanno indagato la distribuzione spaziale del protone, dell'elettrone e del neutrino nel decadimento beta. Ogni covariante bilineare fornisce un diverso spettro di Michel. Dagli esperimenti si evince che la parte leptonica ha parametri $B_L = 1$ e $B'_L = -1$.

In questa teoria la parità non è conservata. Il proiettore di spin per fermioni di Dirac è

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Nel limite di massa nulla esso diventa

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

Il segno positivo per elicità positiva ed il segno negativo per elicità negativa. Nella teoria di Fermi, il neutrino non ha massa e dunque la sua elicità coincide con la chiralità e per il segno dei parametri leptonici sopra, può apparire solamente left-handed. L'espressione di quest'ultimo operatore definisce anche l'operatore di proiezione di chiralità⁷.

Rottura di parità. Si scoprirono due particelle, θ e τ , con massa, spin e vita media identici, ma decadono in due canali diversi

$$\theta^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0, \quad \tau \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$$

La parità è data dal momento angolare e dalla parità intrinseca. Per i due decadimenti, le parità sono $(-1)^l$ e $(-1)^{l+1}$. Queste due particelle sono il kaone (o mesone K): il primo decadimento è forte, il secondo è debole e viola la parità.

Tramite l'esperimento di Madame Wu si evidenziò la rottura di parità tramite il decadimento

$$^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$$

in cui si misura lo spettro dell'elettrone. Il cobalto ha spin $s = 5$ quindi facilmente polarizzabile con un campo magnetico. L'elettrone è espulso e si può rilevare, il neutrino esce, ma non viene rilevato, mentre il neutrone rimane nel nickel. Data un'emissione di un elettrone al di sopra del piano perpendicolare allo spin del cobalto (cioè verso la direzione dello spin), si può associare un evento al di sotto del piano a cui corrisponde tramite trasformazione di parità. Tuttavia, l'esperimento rivela un numero maggiore di eventi sopra il piano. Il numero di eventi elettronici è

$$N_e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}_e$$

dove \mathbf{p}_e è il momento dell'elettrone e \mathbf{B} è il campo magnetico che è uno pseudo-vettore: il numero di eventi è uno pseudo-scalare.

Le altre tre interazioni fondamentali conservano tutte la parità.

9 Teoria di Fermi

Si studiano le proprietà della teoria dell'interazione debole a quattro punti di Fermi. Diversamente dall'elettrodinamica quantistica, questa teoria non mantiene la parità e non è rinormalizzabile, ma è una teoria efficace.

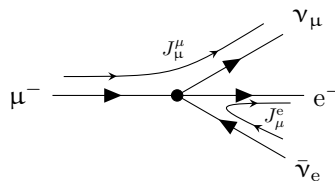
9.1 Decadimento del muone

Si veda Mandl, §16.6. Il decadimento del muone è un decadimento leptonico debole. Sebbene sia debole, si possono calcolare anche le correzioni dell'elettrodinamica quantistica poiché il muone è una particella carica.

Si integra la teoria a quattro punti di Fermi con i dati sperimentali riducendo i covarianti bilineari Γ_i solamente a due. Si accetta la violazione di parità. L'hamiltoniana di interazione è

$$H_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\mu] = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x J_\mu^e (J_\mu^\nu)^\dagger$$

Il cui diagramma è



⁷Tale operatore, applicato ad un campo, seleziona le componenti chirali right- e left-handed. Per particelle massive, tale operatore proietta stati che potrebbero non essere auto-stati dell'elicità. La chiralità è invariante di Lorentz, ma non è costante del moto. Viceversa, l'elicità non è invariante di Lorentz, ma è una costante del moto. Per particelle senza massa, chiralità ed elicità coincidono.

Il numero leptonico di ogni famiglia si conserva: numero muonico 1 e numero elettronico 0. Il secondo fattore si può interpretare come una corrente muonica, mentre il primo come una corrente elettronica.

Per calcolare l'ampiezza si utilizzano la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo e la regola d'oro di Fermi. Si scopre che la teoria delle perturbazioni porta ad un numero infinito di divergenze.

Per fermioni di massa nulla, la componente chirale left-handed è data dal proiettore di spin

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

Pertanto, il neutrino elettronico ψ_{ν_e} ha chiralità left-handed (e la cui elicità ne è un buon stimatore). L'elettrone ed il muone possono avere qualunque elicità.

L'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned} \langle p_e, p_{\bar{\nu}_e}, p_{\nu_\mu} | H_I(t) | p_\mu \rangle &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\frac{m_e}{E_e} \frac{m_{\bar{\nu}}}{E_{\bar{\nu}}} \frac{m_\nu}{E_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{m_\mu}{E_\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \int d^3x \int dt \exp[-i(p_i - p_f)^\mu x_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}] [\bar{u}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu] \end{aligned}$$

dove p_i e p_f indicano i quadri-impulsi totali iniziale e finale. Per il decadimento beta del neutrone si deve sostituire l'ultima parentesi con

$$\bar{u}_p \gamma_\mu \left[1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5 \right] u_n$$

dove i parametri g_A e g_V sono i parametri C_H e C'_H che si ottengono empiricamente. Applicando la regola d'oro di Fermi, l'esponenziale fornisce una delta che, nel limite $T, V \rightarrow \infty$, porta ad un termine⁸

$$[\delta_{VT}(p_i - p_f)]^2 = VT(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)$$

nella densità di probabilità di transizione. Il tasso di transizione dalla regola d'oro di Fermi risulta essere

$$w = (2\pi) \delta(E_i - E_f) |\langle f | H_I | i \rangle|^2$$

Pertanto, il tasso di transizione differenziale nello spazio delle fasi è

$$dw = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \left[\prod_f \frac{2m_f}{2E_f} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \right] \frac{2m_\mu}{2E_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} \frac{G_F^2}{2} |\mathcal{M}|^2$$

dove la somma sugli spin contiene sia gli spin iniziali (cioè quelli del muone che vanno mediati) sia gli spin finali (che sono solo sommati). Il tasso di transizione è il prodotto di vari invarianti relativistici per il rapporto tra la massa del muone e la sua energia. La vita media è

$$\frac{1}{w} = \tau \propto \frac{E_\mu}{m_\mu}$$

tale rapporto è pari al fattore γ di Lorentz.

La vita media del muone nel riferimento solidale è

$$\tau_\mu = 2.2 \mu\text{s}$$

I muoni prodotti dai raggi cosmici sono creati a 10 km di altitudine. Viaggiando vicino alla velocità della luce, un muone percorre 660 m nel proprio riferimento. Tuttavia, i muoni cosmici sono rilevati a terra. Infatti, il tempo di vita medio nel riferimento della Terra è maggiore e così un muone ha abbastanza tempo per arrivare al suolo.

Lezione 12

 gio 14 dic
2023 10:30

Si studia lo spettro dell'elettrone perché i neutrini interagiscono poco

$$(2\pi)^3 \frac{2E_e}{2m_e} \frac{dw}{d^3p_e} = \int \frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2E_{\bar{\nu}}(2\pi)^3} \frac{d^3p_{\nu}}{2E_{\nu}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) 2m_{\nu} 2m_{\bar{\nu}} \frac{2m_{\mu}}{2E_{\mu}} \frac{G_F^2}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2$$

dove si integra sulle variabili cinematiche dei neutrini perché non si osservano. Ricordando

$$|\bar{u}(f)\Gamma u(i)|^2 = [\bar{u}(f)\Gamma u(i)][\bar{u}(i)\bar{\Gamma} u(f)], \quad \bar{\Gamma} = \gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = & \sum_{r_1 r_2 r_3 r_4} \{(\bar{u}_e)_{\alpha}^{r_1} [\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\alpha\beta} (v_{\bar{\nu}})_{\beta}^{r_2} (\bar{v}_{\nu})_{\delta}^{r_2} [\gamma_{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\delta\theta} (u_e)_{\theta}^{r_1}\} \\ & \times \{(\bar{u}_{\nu})_{\eta}^{r_3} [\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\eta\sigma} (u_{\mu})_{\sigma}^{r_4} (\bar{u}_{\mu})_{\rho}^{r_4} [\gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\rho\chi} (u_{\nu})_{\chi}^{r_3}\} \end{aligned}$$

dove r_i sono indici di polarizzazione, mentre gli indici greci sono spinoriali. Nel calcolare il complesso coniugato di ogni fattore, si è fatto uso delle seguenti identità

$$\bar{\gamma}_{\mu} = \gamma_{\mu}, \quad \overline{(i\gamma_5)} = i\gamma_5, \quad \overline{(\gamma_{\mu}\gamma_5)} = \gamma_{\mu}\gamma_5$$

Esplicitati gli indici, si spostano gli spinori per ottenere i proiettori di energia

$$\sum_{r=1}^2 u_{\alpha}^r(\mathbf{p}) \bar{u}_{\beta}^r(\mathbf{p}) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta}, \quad \sum_{r=1}^2 v_{\alpha}^r(\mathbf{p}) \bar{v}_{\beta}^r(\mathbf{p}) = \left(\frac{\not{p} - m}{2m} \right)_{\alpha\beta}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = & [(2m_e)(2m_{\bar{\nu}})(2m_{\mu})(2m_{\nu})]^{-1} \{(\not{p}_e + m_e)_{\theta\alpha} [\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\alpha\beta} (\not{p}_{\bar{\nu}} - m_{\bar{\nu}})_{\beta\delta} [\gamma_{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\delta\theta}\} \\ & \times \{(\not{p}_{\nu} + m_{\nu})_{\chi\eta} [\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)]_{\eta\sigma} (\not{p}_{\mu} + m_{\mu})_{\sigma\rho} [\gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)]_{\rho\chi}\} \end{aligned}$$

I due fattori sono delle tracce. Nello spettro, le masse dei neutrini si semplificano. Si ipotizza

$$m_e = m_{\bar{\nu}} = m_{\nu} = 0, \quad \frac{m_e}{m_{\mu}} \approx \frac{1}{200}, \quad m_{\mu} \equiv m$$

quindi $2m_e$ (v. definizione di tasso di transizione, Fisica Teorica I, §Sezione d'urto). Successivamente si vede la correzione dovuta alla massa dell'elettrone. Ci si pone nel riferimento solidale al muone: la sua energia è pari alla massa $E_{\mu} = m_{\mu}$. Lo spettro dell'elettrone diventa

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \frac{dw}{d^3p_e} = & \frac{G_F^2}{4} \frac{1}{2E_e 2m} \int \frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2E_{\bar{\nu}}} \frac{d^3p_{\nu}}{2E_{\nu}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(Q - p_{\nu} - p_{\bar{\nu}}) \\ & \times \text{Tr}[\not{p}_e \gamma_{\mu}(1 - \gamma_5) \not{p}_{\bar{\nu}} \gamma_{\nu}(1 - \gamma_5)] \text{Tr}[(\not{p}_{\mu} + m) \gamma^{\nu}(1 - \gamma_5) \not{p}_{\nu} \gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)] \end{aligned}$$

dove $Q = p_{\mu} - p_e$. Per la prima traccia si ha

$$\begin{aligned} T_1^{\mu\nu} = & \text{Tr}[\not{p}_e \gamma^{\mu}(1 - \gamma_5) \not{p}_{\bar{\nu}} \gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)] = 2 \text{Tr}[\not{p}_e \gamma^{\mu} \not{p}_{\bar{\nu}} \gamma^{\nu}(1 - \gamma_5)] \\ = & 8[p_e^{\mu} p_{\bar{\nu}}^{\nu} - p_e p_{\bar{\nu}} \eta^{\mu\nu} + p_e^{\nu} p_{\bar{\nu}}^{\mu} + i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} (p_e)_{\alpha} (p_{\bar{\nu}})_{\beta}] = 8[A_1 - A_2 + A_3 + i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} (p_e)_{\alpha} (p_{\bar{\nu}})_{\beta}] \end{aligned}$$

alla seconda uguaglianza della prima riga si applica $(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)$, ricordando che la matrice γ_5 anti-commuta con le matrici γ_{μ} . Alla seconda riga si è utilizzato

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu}) &= 4(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}) \\ \text{Tr}(\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu} \gamma_5) &= -4i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \end{aligned}$$

⁸Come già visto, il prodotto di due distribuzioni non è ben definito. Si veda <https://physics.stackexchange.com/q/47934> e <https://mathoverflow.net/q/48067>. Così come Fisica Teorica I, §Processi in elettrodinamica quantistica.

La seconda traccia è

$$\begin{aligned} T_2^{\mu\nu} &= 2 \operatorname{Tr} [(\not{p}_\mu + m) \gamma^\nu \not{p}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] = 2 \operatorname{Tr} [\not{p}_\mu \gamma^\nu \not{p}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] + 2m \operatorname{Tr} [\gamma^\nu \not{p}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] \\ &= 8[p_\mu^\nu p_\nu^\mu - \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (p_\mu)_\alpha (p_\nu)_\beta] = 8[A'_1 - A'_2 + A'_3 + i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (p_\mu)_\alpha (p_\nu)_\beta] \end{aligned}$$

alla prima riga, l'ultimo addendo è nullo perché si ha una traccia di un numero dispari di matrici di Dirac e poiché

$$\operatorname{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^5) = 0$$

Dalle due tracce si può notare la simmetria di crossing? [r]: le due tracce sono identiche per scambio $\mu \leftrightarrow \nu$ e $\mathbf{v}_\mu \leftrightarrow \mathbf{v}_\nu$.

I primi tre addendi costituiscono un termine simmetrico per lo scambio $\mu \leftrightarrow \nu$, dunque il prodotto con il tensore di Levi-Civita è nullo. Si svolgono i prodotti

$$\begin{aligned} (T_1)_{\mu\nu} T_2^{\mu\nu} &= 64\{A_1 A'_1 + A_1 A'_3 - A_1 A'_2 + A_3 A'_3 + A_3 A'_1 - A_2 A'_1 \\ &\quad - (A_2 A'_1 + A_2 A'_3) + A_2 A'_2 - \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\nu\theta\mu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + (p_e p_\mu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - (p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) \\ &\quad + (p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + (p_e p_\mu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - (p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) \\ &\quad - 2(p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) + 4(p_e p_{\bar{\nu}})(p_\mu p_\nu) - \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\nu\theta\mu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\nu\theta\mu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) + \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon^{\eta\theta\mu\nu} p_e^\alpha p_{\bar{\nu}}^\beta (p_\mu)_\eta (p_\nu)_\theta\} \\ &= 64\{2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) - 2(p_e p_\mu)(p_{\bar{\nu}} p_\nu) + 2(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu)\} \\ &= 256(p_e p_\nu)(p_{\bar{\nu}} p_\mu) \end{aligned}$$

alla penultima riga si è utilizzato

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho)$$

Dunque, lo spettro dell'elettrone è

$$(2\pi)^3 \frac{dw}{d^3 p_e} = \frac{G_F^2}{4} \frac{1}{2E_e 2m} 256(p_e)_\sigma (p_\mu)_\sigma \int \frac{d^3 p_\nu d^3 p_{\bar{\nu}}}{2E_\nu 2E_{\bar{\nu}}} \frac{1}{(2\pi)^2} p_\nu^\rho p_{\bar{\nu}}^\sigma \delta^4(Q - p_\nu - p_{\bar{\nu}})$$

L'integrale è un tensore $I^{\rho\sigma}$ di tipo 2. L'unica quantità cinematica è il momento Q perché il resto è integrato. La forma più generale di tale tensore è

$$I_{\mu\nu}(Q^2) = A \eta_{\mu\nu} Q^2 + Q_\mu Q_\nu B$$

dove A e B sono due costanti. Vale

$$I_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = I_\mu{}^\mu = (4A + B)Q^2, \quad I_{\mu\nu} Q^\mu Q^\nu = (A + B)Q^4$$

La cinematica del decadimento è

$$Q = p_\mu - p_e = p_\nu + p_{\bar{\nu}}$$

da cui

$$Q^2 = 2p_\nu p_{\bar{\nu}}, \quad p_\nu Q = p_\nu(p_\nu + p_{\bar{\nu}}) = p_\nu p_{\bar{\nu}} = \frac{1}{2}Q^2, \quad p_{\bar{\nu}} Q = \frac{1}{2}Q^2$$

Pertanto, applicando la prima relazione sopra all'espressione integrale, si ha

$$I_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}Q^2 I, \quad I \equiv \int \frac{d^3 p_\nu d^3 p_{\bar{\nu}}}{2E_\nu 2E_{\bar{\nu}}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(Q - p_\nu - p_{\bar{\nu}})$$

applicando le altre due, si ottiene

$$Q_\mu Q_\nu I^{\mu\nu} = \frac{1}{4}Q^4 I$$

Per confronto segue

$$\frac{1}{2}Q^2I = (4A + B)Q^2, \quad \frac{1}{4}Q^4I = (A + B)Q^4 \implies A = \frac{1}{12}I, \quad B = \frac{1}{6}I$$

Ci si pone nel riferimento solidale al centro di massa dei neutrini perché l'integrale è invariante relativistico. Si ha

$$Q = p_\nu + p_{\bar{\nu}} = (Q_0, \mathbf{0}), \quad \mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_{\bar{\nu}}, \quad E_\nu = E_{\bar{\nu}}$$

Dunque, l'integrale è

$$I = \int \frac{d^3p_\nu}{Q_0^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(Q_0 - 2E_\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{Q_0^2} \int 4\pi E_\nu^2 dE_\nu \delta(Q_0 - 2E_\nu) = \frac{4\pi}{(2\pi)^2 Q_0^2} \frac{Q_0^2}{4} \frac{1}{2} = \frac{1}{8\pi}$$

dove si ricorda che

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

con x_i le n radici della funzione $f(x)$.

Lezione 13

Lo spettro dell'elettrone diventa

ven 15 dic
2023 10:30

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \frac{dw}{d^3p_e} &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} (p_e)_\rho (p_\mu)_\sigma \left[\eta^{\rho\sigma} \frac{Q^2}{2} + Q^\rho Q^\sigma \right] \\ &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} \left[\frac{1}{2} (p_e p_\mu) (p_\mu - p_e)^2 + p_e^\rho (p_\mu - p_e)_\rho p_\mu^\sigma (p_\mu - p_e)_\sigma \right] \end{aligned}$$

Si introduce una variabile x tale per cui

$$E_e = \frac{m}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad m = m_\mu$$

cioè la frazione massima di energia che l'elettrone può avere: essa è acquisita quando entrambi i neutrini vanno in verso opposto all'elettrone. La minima energia è l'elettrone a riposo ed i neutrini che escono back-to-back. Ritornando al riferimento solidale al muone, si ha

$$p_e p_\mu = \frac{1}{2}m^2x$$

Pertanto, lo spettro dell'elettrone cioè il tasso di decadimento del muone per l'emissione di elettrone con momento in $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + d^3p]$ è

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \frac{dw}{d^3p_e} &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{m^2}{2} x (m^2 - m^2x) + \frac{m^2}{2} x \left(m^2 - \frac{m^2x}{2} \right) \right] \\ &= \frac{G_F^2}{4} \frac{256}{2E_e 2m} \frac{1}{48\pi} \frac{m^4}{4} x (3 - 2x) = \frac{G_F^2}{12\pi m E_e} m^4 x (3 - 2x) \\ &= \frac{G_F^2}{6\pi} m^2 (3 - 2x) \end{aligned}$$

Si integra lo spettro dell'elettrone per trovare la probabilità di transizione. Sapendo

$$d^3p_e = 4\pi E_e^2 dE = 4\pi \frac{m^2 x^2}{4} \frac{m}{2} dx = \frac{\pi}{2} m^3 x^2 dx$$

si ottiene

$$d_x w = \frac{G_F^2}{6\pi} \frac{1}{8\pi^3} \frac{\pi}{2} m^5 x^2 (3 - 2x) = \frac{G_F^2}{96\pi^3} m^5 x^2 (3 - 2x)$$

dunque, il tasso di decadimento e la vita media (parziale) sono

$$w = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m^5, \quad \tau = \frac{1}{w}, \quad \dim \tau = T$$

Dal decadimento del muone si può ricavare il valore della costante di accoppiamento di Fermi:

$$\tau_\mu = 2.2 \mu\text{s}, \quad m_\mu = 105.7 \text{ MeV} \implies G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Questo risultato non è esatto perché esistono altri canali di decadimento ed sono presenti delle correzioni elettromagnetiche. Si introduce il rapporto di diramazione (branching ratio), cioè il rapporto della probabilità di decadimento in un certo canale rispetto alla probabilità totale di decadimento. Per questo decadimento si ha $\text{BR} > 98.6\%$.

Universalità delle interazioni leptoniche. Per il tauone, il calcolo è lo stesso, ma il branching ratio è diverso perché il suo spazio delle fasi è enorme: il decadimento leptonic è una frazione dei decadimenti totali (che includono anche decadimenti adronici).

Si consideri il decadimento

$$\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$$

Noto il branching ratio, si può ottenere la vita media a partire da quella parziale tramite

$$\tau_\tau = \text{BR}_{\tau \rightarrow e} \tau_\mu \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^5, \quad \text{BR} = 0.1782 \pm 0.0004, \quad m_\tau = (1776.86 \pm 0.12) \text{ MeV}$$

La vita media è

$$\tau_\tau^{\text{th}} = (2.920 \pm 0.007) \times 10^{-13} \text{ s}, \quad \tau_\tau^{\text{exp}} = (2.903 \pm 0.005) \times 10^{-13} \text{ s}$$

In questo caso, la teoria di Fermi è in accordo con l'esperimento.

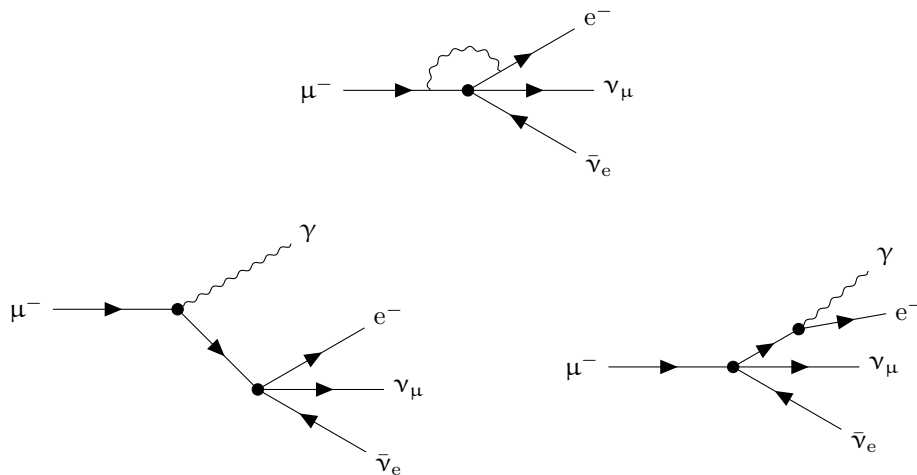
Correzioni. Aumentando la precisione degli esperimenti, si vedono anche le correzioni dovute all'elettromagnetismo poiché i leptoni sono particelle cariche. Le correzioni da aggiungere sono:

- massa non nulla dell'elettrone

$$w = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_\mu^5 [1 - 8y - 12y^2 \ln y + 8y^3 - y^4] = w_0 (1 - 1.87 \times 10^{-4}), \quad y = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2$$

Per $y = 0$ si ottiene il calcolo svolto. Per $y = 1$ il tasso di transizione è nullo: non si ha spazio delle fasi.

- Le particelle sono cariche e dunque ricevono correzioni dall'elettrodinamica: è presente la correzione al vertice ed due correzioni dalla bremsstrahlung



Bisogna calcolare le correzioni, regolarizzare, rinormalizzare considerando anche le linee esterne. Pertanto si ottiene

$$w = w_0 \left[1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\pi^2 - \frac{25}{4} \right) \right] = w_0 \cdot 0.9958$$

[r] fonte?

Dimensioni. L'azione della teoria di Fermi è data schematicamente da

$$S \propto \int d^4x G_F (\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi)$$

pertanto, le dimensioni di massa sono

$$\dim A^\mu = 1, \quad \dim \psi = \frac{3}{2}, \quad \dim \varphi = 1$$

dove φ è un campo bosonico. La costante di accoppiamento deve avere dimensioni

$$\dim G_F = -2$$

Il tasso di transizione è l'inverso di un tempo, cioè una massa (in unità naturali). Le variabili dimensionali sono solamente la costante di Fermi ed una massa. Pertanto, l'analisi dimensionale fornisce correttamente

$$w \propto G_F^2 m^5$$

Spettro dell'elettrone. Lo spettro dell'elettrone, detto anche spettro di Michel, è ottenuto a partire da un'interazione del tipo $(V - A)(V - A)$, cioè vettoriale meno assiale, $1 - \gamma_5$. Esso è

$$d_x w \propto x^2 (3 - 2x)$$

Se si considerasse l'interazione $(V - A)_e (V + A)_\mu$ si avrebbe uno spettro diverso

$$d_x w \propto x^2 (1 - x)$$

Tramite gli esperimenti si sono potuti escludere i vari spettri per arrivare solamente a quello precedente.

Violazione di parità. La violazione di parità non si può evincere dallo spettro perché si è mediata la polarizzazione iniziale del muone. Il calcolo per il muone polarizzato contiene un proiettore di spin al posto di quello di energia. Si ha

$$dw \propto x^2 [3 - 2x + \cos \theta (1 - 2x)] dx d(\cos \theta)$$

dove θ è l'angolo tra lo spin dell'elettrone \mathbf{p}_e ed lo spin \mathbf{S} del muone.

Si considera la configurazione di massima energia dell'elettrone

$$E_e = |\mathbf{p}_e| = \frac{m}{2} \implies x = 1$$

dove m è la massa del muone, le altre sono nulle. Lo spettro diventa

$$dw \propto (1 - \cos \theta)$$

Nel caso di energia massima, l'elettrone ha un'energia pari a 53 MeV ed esso è ultra-relativistico: l'elicità è un buon stimatore della chiralità. Se $\theta = 0$, allora la configurazione è proibita, mentre $\theta = \pi$ è la configurazione favorita. Questo coincide con i risultati dell'esperimento di Madame Wu. Si noti che il coseno

$$\cos \theta \propto \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{S}$$

è pseudo-scalare perché il momento è uno pseudo-vettore: la probabilità di transizione è proporzionale ad uno pseudo-scalare e da ciò si spiega la violazione di parità.

Nel caso $\theta = 0$, lo stato iniziale ha muone con spin up. L'elettrone è emesso in tale direzione. Visto che l'interazione considera particelle left-handed e l'elettrone è ultra-relativistico, allora la sua elicità è negativa. I neutrini sono entrambi emessi in verso opposto all'elettrone (perché la configurazione è quella di massima energia): il neutrino è left-handed con elicità negativa, l'anti-neutrino è right-handed con elicità positiva. Il momento angolare non si conserva:

$$S_f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = S_i$$

Per il caso $\theta = \pi$, lo stato finale è sottosopra rispetto al caso precedente ed il momento è conservato:

$$S_f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = S_i$$

Derivazione del coseno. Si vede come ottenere il coseno studiando la polarizzazione lungo un certo vettore. Nel riferimento solidale alla particella, si introduce il vettore

$$u^\mu = (0, \hat{u}), \quad u_\mu u^\mu = -1, \quad u^\mu p_\mu = 0$$

[r] Si consideri il proiettore di spin lungo z

$$\frac{1 + \sigma_z}{2}$$

Si ricordi

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{ij} = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k$$

con ijk ciclici. Pertanto, il proiettore diventa

$$\frac{1 + \sigma_z}{2} = \frac{1 - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 u_z}{2} = \frac{1 - \gamma_0 \gamma_5 \not{u}}{2} = \frac{1 + \gamma_5 \not{u} \gamma_0}{2}$$

[r] Si vuole arrivare ad una struttura relativisticamente invariante. Sapendo che

$$p_0 \gamma^0 w$$

con w la base degli spinori [r], si sceglie il proiettore di spin in una direzione arbitraria

$$\Sigma(p) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{S}}{2}$$

Ad esempio, si ottiene

$$\Sigma(u_z) w^1(0) = \frac{1 + \gamma_5 \not{u}}{2} w_1(0) = \frac{1 + \sigma_z}{2} w_1(0) = w_1(0)$$

L'elemento di matrice per il muone polarizzato si ha

$$\text{Tr}[(\not{p}_\mu + m) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{p}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5)]$$

[r] inserendo Σ^+ si seleziona la unica direzione di spin che si vuole considerare, da cui si ottiene $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$.

Questioni tecniche. Vale

$$\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u = \frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5)^2 u = \frac{1}{2} \bar{u} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u$$

Dunque \bar{u} è right-handed e u è left-handed. Quando le particelle sono ultra-relativistiche, la loro elicità è essenzialmente positiva e negativa rispettivamente.

Ogni spinore si può decomporre in componenti chirali left-handed e right-handed

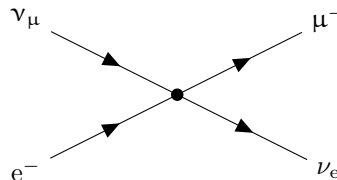
$$\psi = \frac{1}{2}[(1 + \gamma_5)\psi + (1 - \gamma_5)\psi]$$

9.2 Inverse muon decay

All'ordine albero, la teoria di Fermi è perfettamente definita. Si vedono le prime problematiche. Si studia l'inverse muon decay

$$e^- \nu_\mu \rightarrow \mu^- \nu_e$$

il cui diagramma corrispondente è



Si calcola la sezione d'urto. Grazie alla simmetria di crossing, l'ampiezza di Feynman è la stessa del decadimento del muone. La sezione d'urto differenziale è

$$d_{\Omega}\sigma = \frac{4}{\pi^2(E_{\nu_{\mu}} + E_e)^2} \frac{|\mathbf{p}_{\nu_e}|}{|\mathbf{p}_{\nu_{\mu}}|} (p_e p_{\nu_{\mu}})(p_{\nu_e} p_{\mu}) \frac{G_F^2}{4}$$

Ponendosi nel centro di massa e considerando i neutrini a massa nulla, si studia la cinematica utilizzando la variabile s di Mandelstam

$$(E_{\nu_{\mu}} + E_e)^2 = (p_{\nu_{\mu}} + p_e)^2 = s = (p_{\nu_e} + p_{\mu})^2 = (E_{\nu_e} + E_{\mu})^2$$

Dunque

$$s = (E_{\nu_{\mu}} + E_e)^2 = E_{\nu_{\mu}}^2 + 2E_{\nu_{\mu}}E_e + E_e^2$$

da cui si ha

$$s - m_e^2 = E_{\nu_{\mu}}^2 + 2E_{\nu_{\mu}}E_e + (E_e^2 - m_e^2) = 2E_{\nu_{\mu}}(E_{\nu_{\mu}} + E_e)$$

dove alla seconda uguaglianza si utilizza

$$E_e^2 - m_e^2 = p_e^2 = p_{\nu_{\mu}}^2 = E_{\nu_{\mu}}^2$$

Pertanto

$$E_{\nu_{\mu}} = \frac{s - m_e^2}{2(E_{\nu_{\mu}} + E_e)} = \frac{s - m_e^2}{2\sqrt{s}}$$

Similmente

$$s - m_{\mu}^2 = 2E_{\nu_e}(E_{\nu_e} + E_{\mu}) \implies E_{\nu_e} = \frac{s - m_{\mu}^2}{2(E_{\nu_e} + E_{\mu})} = \frac{s - m_{\mu}^2}{2\sqrt{s}}$$

Dalla variabile di Mandelstam si ha

$$s = p_{\nu_{\mu}}^2 + p_e^2 + 2p_e p_{\nu_{\mu}} = m_e^2 + 2p_e p_{\nu_{\mu}} \implies s - m_e^2 = 2p_e p_{\nu_{\mu}}$$

da cui segue

$$E_{\nu_{\mu}} = \frac{p_e p_{\nu_{\mu}}}{\sqrt{s}} = |\mathbf{p}_{\nu_{\mu}}|, \quad E_{\nu_e} = \frac{p_{\mu} p_{\nu_e}}{\sqrt{s}} = |\mathbf{p}_{\nu_e}|$$

Pertanto, la sezione d'urto differenziale è

$$d_{\Omega}\sigma = \frac{4}{\pi^2 s} \frac{p_{\mu} p_{\nu_e}}{p_e p_{\nu_{\mu}}} (p_e p_{\nu_{\mu}})(p_{\mu} p_{\nu_e}) \frac{G_F^2}{4} = \frac{G_F^2}{\pi^2 s} (p_{\mu} p_{\nu_e})^2 = \frac{G_F^2}{\pi^2} E_{\nu_e}^2 = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{(s - m_{\mu}^2)^2}{4s}$$

La sezione d'urto totale è

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4G_F^2}{\pi} E_{\nu_e}^2 = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - m_{\mu}^2)^2}{s}$$

Ad energie abbastanza alte da poter trascurare la massa del muone rispetto all'energia totale del centro di massa, la sezione d'urto diventa

$$\sigma \sim \frac{G_F^2 s}{\pi}$$

L'interazione forte non ancora descritta da una teoria di gauge fu concentrata sull'analiticità della matrice di scattering S . Esistono dei teoremi che ne garantiscono l'analiticità e l'unitarietà (legata alla conservazione della probabilità). Il teorema di Froissart afferma che se la matrice di scattering analitica ed unitaria, allora la sezione d'urto totale è limitata da⁹

$$\sigma_{\text{tot}} < c \ln^2 s$$

La teoria di Fermi non rispetta tale limite nonostante la sezione d'urto sia stata ottenuta per simmetria di crossing da una quantità corretta. Potrebbe darsi che il limite valga solo ad alte energie. Tuttavia, utilizzando lo sviluppo in onde parziali, in onda s il limite è ancora più stringente

$$\sigma < \frac{\pi}{p^2}$$

[r] fonte? Pertanto

$$s = 4p^2 \implies 4p^2 < \frac{2\pi}{G_F} \implies p < \sqrt{\frac{\pi}{2G_F}} \approx 390 \text{ GeV}$$

⁹Si veda Eden, Landshoff, Olive, Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, fine §1.4.

Lezione 14

lun 18 dic
2023 10:30

Scale di grandezza. Si consideri la sezione d'urto totale. Nel riferimento del centro di massa, la prima variabile di Mandelstam è il quadrato dell'energia del centro di massa

$$s = (p_{\nu_\mu} + p_e)^2 = 2m_e E_{\nu_\mu}$$

La sezione d'urto è

$$\sigma \approx \frac{G_F^2}{\pi} 2m_e E_{\nu_\mu} \approx 2 \times 10^{-41} \text{ cm}^2 \frac{E_{\nu_\mu}}{\text{GeV}}$$

ricordando che

$$\hbar c = 1.97 \times 10^{-14} \text{ GeV cm}, \quad G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Si consideri la sezione d'urto di Thomson cioè lo scattering della luce su di un elettrone

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \approx 6.7 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Cioè sedici ordini di grandezza di più grande.

9.3 Ordini superiori

Sebbene gli esperimenti non abbiano abbastanza risoluzione per [r] dal punto di vista teorico è lecito studiare gli ordini superiori. Il primo grafico all'ordine superiore è [r] diagr

L'integrale di k diverge. I soli fattori di convergenza sono i propagatori dei fermioni per il muone ed il neutrino. Per questioni dimensionali, la divergenza nel cutoff è dell'ordine $G_F \Lambda^2$. Ad ogni ordine superiore, si ha una divergenza sempre maggiore $G^n \Lambda^{2n-1}$: bisogna sempre introdurre nuovi contro-termini. Superficialmente, la teoria non appare rinormalizzabile.

La lagrangiana di Fermi è

$$\mathcal{L}_F = G_F (\bar{\psi}\psi)^2$$

Il quadrato della parentesi ha dimensione 6. Si studia il vertice di Fermi. Si consideri il precedente diagramma [r]. Ogni linea interna fermionica termina in due vertici

$$V = I_F$$

Il numero di linee esterne fermioniche è

$$E_F = 2V$$

Pertanto

$$I_F = 2V - \frac{E_F}{2}$$

Il grado superficiale di divergenza è

$$\omega = 4I_F - 4(V - 1) - I_F = 3 \left[2V - \frac{E_F}{2} \right] - 4(V - 1) = 4 + 2V - \frac{3}{2}E_F$$

Alla prima uguaglianza, il secondo addendo corrisponde alle delta di conservazione del quadri-momento ad ogni vertice, ricordando che una conserva il quadri-momento totale. A differenza dell'elettrodinamica quantistica, il grado divergenza superficiale dipende dai vertici. A partire da un grafico iniziale, non si possono aggiungere arbitrariamente dei vertici. Ad ogni ordine bisogna inserire nuovi contro-termini per bilanciare la divergenza. Si sta considerando la divergenza superficiale e potrebbe darsi che esista un processo per cui le divergenze si bilanciano. Tuttavia, la teoria si rivela non essere rinormalizzabile. L'origine di tale problema risiede nella costante di accoppiamento dimensionata.

Decadimento del pione. Si consideri il pione π . Esso è un mesone di spin $s = 0$ e compare in tre varietà π^\pm e π^0 . I primi due decadono debolmente, mentre il terzo decade elettromagneticamente. Il suo decadimento è perfettamente descritto dalla teoria di Fermi, ma non è semplice

$$\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu$$

[r] diagr Compare un problema. La corrente leptonica è

$$\bar{u}_l \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\bar{\nu}_l}$$

Il pione è una particella composita, quindi il vertice non è noto perché una parte deriva dalla struttura del pione. Si introduce un fattore di forma f_π . I fatti sperimentali noti sono:

- il muone e l'anti-neutrino hanno elicità positiva, ma il primo ha chiralità left-handed ed il secondo è right-handed;
- il rapporto tra i decadimenti in elettrone e muone sono

$$R \left(\frac{\pi \rightarrow e \bar{\nu}}{\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}} \right) = 1.3 \times 10^{-4}$$

Si consideri il decadimento $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$. Visto che l'elettrone è più leggero del muone, ci si aspetterebbe che tale decadimento sia favorito rispetto a quello in muone. [r] Lo spin non si conserva. Per il canale muonico, il muone ha velocità minore dell'elettrone e dunque l'elicità può non coincidere con la chiralità left-handed e pertanto può avere elicità positiva.

Si consideri l'elettrone senza massa. L'elettrone ed il neutrino si dividono l'energia del pione. Noto

$$E = m\gamma, \quad E_e = \frac{m_\pi}{2} = \gamma m_e$$

Pertanto

$$1 - \beta^2 = \left[\frac{2m_e}{m_\pi} \right]^2 \approx 0 \implies \beta_e \approx 1$$

Si studia il muone. La sua massa non è trascurabile. Nel riferimento del centro di massa, il momento è

$$p = \gamma m v, \quad \mathbf{p}_{\bar{\nu}_\mu} + \mathbf{p}_\mu = 0, \quad |\mathbf{p}_{\bar{\nu}}| = |\mathbf{p}_\mu|$$

dunque

$$\begin{aligned} \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} + |\mathbf{p}_\mu| &= m_\pi \\ p^2 + m_\mu^2 &= p_\pi^2 + p^2 - 2m_\pi p \\ p_\mu &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \end{aligned}$$

Pertanto, l'energia del muone è

$$E_\mu = \sqrt{\left[\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \right]^2 + m_\mu^2} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 1.04 m_\mu$$

[r] Tutta l'energia del muone è l'energia di riposo. Il muone non è relativistico. [r] Il tasso di transizione è

$$w = \frac{G_F^2 f_\pi^2}{8\pi} m_\pi^3 \left(\frac{m_l}{m_\pi} \right)^2 \left[1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right]^2$$

Il rapporto tra i tassi di transizione dei due decadimenti è

$$R = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left[\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right]^2 \approx 1.23 \times 10^{-4}$$

La seconda parentesi deriva dallo spazio delle fasi ed è pari a 5.5 La prima parentesi è la differenza in velocità tra le due particelle ed è pari a 2.24×10^{-5} .

La lagrangiana di interazione è del tipo

$$\mathcal{L}_I = J_\mu J^\mu$$

che è simile a quella vista per l'elettrodinamica. [r] Se è presente un bosone mediatore W , allora esso dev'essere vettoriale perché J_μ è un vettore con spin 1. Dato che J_μ porta carica, allora pure W . Bisogna capire come ottenere un bosone vettoriale tramite una teoria di gauge.