

# Maths for Physics

May 20, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analisi complessa</b>	<b>2</b>
2.1	Numeri complessi . . . . .	2
2.2	Serie e successioni . . . . .	6
2.3	Serie di potenze . . . . .	8
2.4	Funzione complessa . . . . .	11
2.5	Proiezione stereografica e punto all'infinito . . . . .	16
2.6	Singolarità . . . . .	17
2.7	Superfici di Riemann. . . . .	21
2.8	Integrazione . . . . .	21
2.8.1	Integrali di linea e forme differenziali . . . . .	25
2.8.2	Forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	29
2.8.3	Formula integrale di Cauchy . . . . .	30
2.9	Serie di Laurent . . . . .	35
2.10	Prolungamento analitico . . . . .	40
2.11	Residui . . . . .	44
2.11.1	Risoluzione di integrali tramite il metodo dei residui . . . . .	47
2.12	Valore principale di Cauchy . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Proprietà delle mappe</b>	<b>51</b>
3.1	Proprietà globali . . . . .	52
3.2	Trasformazioni lineari fratte . . . . .	53
3.3	Applicazioni fisiche . . . . .	55
3.3.1	Fluidodinamica . . . . .	56
3.3.2	Elettrostatica . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>56</b>
4.1	Spazi vettoriali . . . . .	57
4.2	Metrica, norma e prodotto scalare . . . . .	57
4.3	Spazi normati . . . . .	59
4.4	Spazi di Hilbert finito-dimensionali . . . . .	62
4.5	Spazi di Hilbert . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Spazi funzionali</b>	<b>66</b>
5.1	Spazio $L^1_\omega(\Omega)$ . . . . .	67
5.2	Spazio $L^p_\omega(\Omega)$ . . . . .	69
5.3	Spazio di Hilbert $L^2_\omega(\Omega)$ . . . . .	69
5.4	Base di Hilbert ed espansione di Fourier . . . . .	71
5.4.1	Base ortonormale. . . . .	71
5.4.2	Convergenza puntuale. . . . .	73
5.4.3	Polinomi ortonormali . . . . .	76

5.4.4	Applicazioni fisiche . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Distribuzioni</b>	<b>92</b>
6.1	Funzioni di prova . . . . .	93
6.1.1	Spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . . . . .	93
6.1.2	Spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	94
6.2	Distribuzioni . . . . .	94
6.2.1	Distribuzioni regolari . . . . .	95
6.2.2	Distribuzioni singolari . . . . .	97
6.3	Limiti di distribuzioni . . . . .	98
6.4	Operazioni . . . . .	99
6.4.1	Cambio di variabile . . . . .	100
6.4.2	Moltiplicazione per funzione $C^\infty$ . . . . .	101
6.4.3	Complesso coniugato . . . . .	101
6.4.4	Derivata . . . . .	102
6.4.5	Convoluzione . . . . .	102
6.4.6	Esempi . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>105</b>
7.1	Proprietà in $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	107
7.2	Trasformata di Fourier inversa . . . . .	108
7.2.1	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	110
7.2.2	Trasformata di Fourier per una distribuzione . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Operatori lineari in spazi finito-dimensionali</b>	<b>118</b>
8.1	Spazio duale . . . . .	119
8.2	Operatore aggiunto . . . . .	120
8.3	Operatore autoaggiunto o hermitiano . . . . .	120
8.4	Operatori unitari . . . . .	120

## Lecture 1

mar 01 mar  
2022 12:30

# 1 Introduzione

Il corso si articola in due filoni principali:

- Analisi complessa
- Spazi funzionali, algebra operatoriale, spazi infiniti dimensionali
  - ◊ trasformata di Fourier
  - ◊ trasformata di Laplace
  - ◊ distribuzioni

**Libri.** vedi e-learning

## 2 Analisi complessa

### 2.1 Numeri complessi

Si vede un richiamo sui numeri complessi. Storicamente sono comparsi nel XVI secolo per la risoluzione di equazioni polinomiali di terzo grado. Con essi si trovano soluzioni algebriche che non hanno soluzioni nel campo reale. Un esempio è  $x^2 + 1 = 0$ .

In fisica si sono visti nell'elettromagnetismo: in elettrotecnica si utilizza l'impedenza; in meccanica quantistica, la funzione d'onda è un oggetto complesso,  $\Psi \in \mathbb{C}$ .

**Definizione.** Un numero complesso è una coppia ordinata  $(a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che siano definite l'addizione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

la moltiplicazione

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

e la relazione di equivalenza

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

con tale definizione è possibile dimostrare che l'insieme di tale coppie ordinate formano un campo (nel senso della definizione algebrica).

**Teorema.** L'insieme

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

è un campo abeliano rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione.

**Osservazione.**

- La proprietà commutativa e la proprietà associativa derivano da quelle dei numeri reali.
- Esiste l'identità additiva (detto zero per analogia con  $\mathbb{R}$ ) ed è  $(0, 0)$ .
- Esiste l'opposto di  $(a, b)$  definito come

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

- Esiste l'identità moltiplicativa (detta uno) ed è  $(1, 0)$ .
- Esiste l'inverso di  $(a, b)$  definito come

$$(a, b) \cdot \frac{1}{(a, b)} = (1, 0)$$

Per trovare l'inverso si risolve

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \implies \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Dunque

$$\frac{1}{(a, b)} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

**Teorema.** Il sottoinsieme

$$\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

è un campo a sua volta rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione. Esso è isomorfo ad  $\mathbb{R}$ : cioè esiste una mappa tra i due insiemi che ne preserva la struttura:  $f(a, 0) \mapsto f(a)$ .

Inoltre,  $\mathbb{C}_0$  ha la stessa relazione di ordine di  $\mathbb{R}$ . Questo è importante perché  $\mathbb{C}$  non ha nessuna relazione d'ordine e non è possibile introdurne una in maniera sensata.

**Definizione.** L'unità immaginaria è  $(0, 1) = i$ .

Si nota subito che multipli di  $i$  non hanno sempre parte immaginaria e dunque numeri che hanno solo parte immaginaria non formano un campo:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \in \mathbb{C}_0$$

Quindi la soluzione di  $x^2 + 1 = 0$  risulta essere  $x = (0, 1)$ . Si nota che anche  $(0, -1)$  risulta essere soluzione. In particolare,  $(0, -1) = -i$ .

Segue che  $\pm i = \pm\sqrt{-1}$ . Quindi  $x^2 + 1 = 0$  ha soluzioni  $x = \pm i$ .

**Definizione.** Forma cartesiana. Considerato

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{C}$ . Inoltre,  $a = \operatorname{Re}\{z\}$  e  $b = \operatorname{Im}\{z\}$ .

**Definizione.** La coniugazione complessa è un automorfismo (cioè una corrispondenza tra di un campo e se stesso che lascia invariate le relazioni). Considerato,  $z = a + ib$ , il suo complesso coniugato è

$$\bar{z} = a - ib = (a, -b)$$

Ne segue che

$$\bar{i} = -i, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

Le operazioni notevoli che si possono fare sono

$$z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}\{z\}, \quad z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}\{z\}, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

**Piano complesso.** di Argand-Gauss. Il piano ha due assi ortogonali su cui si rappresenta la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso. Ogni punto è individuato da coordinate cartesiane o da coordinate sferiche. In questo modo la somma di numeri complessi diventa la somma di vettori.

**Definizione.** In questo modo si può utilizzare la rappresentazione tramite le coordinate polari. Considerato

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\tan \theta = \frac{b}{a}$  a meno di  $2\pi$ . L'angolo  $\theta$  è detto anche argomento e si indica come

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \\ -\pi, & a < 0, b = 0 \end{cases}$$

tutto questo è definito a meno di  $2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definizione.** Formula di Eulero. Per utilizzare tale formula, si vuole estendere ai numeri complessi, l'esponenziale definito per i numeri reali. Considerato  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  allora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

si assume che le proprietà della funzione esponenziale rimangano invariante sia per argomento reale che per argomento complesso. Quindi si ha  $e^x \in \mathbb{R}$  e  $e^{iy} \in \mathbb{C}$ . Pertanto

$$e^{iy} = A(y) + iB(y)$$

si deriva una volta rispetto ad  $y$  e si assume che la derivata si comporti allo stesso modo anche con i numeri complessi. Quindi

$$d_y e^{iy} = i e^{iy} = i(A(y) + iB(y)) = A'(y) + iB'(y) \implies \begin{cases} A(y) = B'(y) \\ B(y) = -A'(y) \end{cases}$$

derivando una seconda volta si ha

$$d_y^2 e^{iy} = i(i e^{iy}) = -e^{iy} = -A(y) - iB(y) = A''(y) + iB''(y) \implies \begin{cases} A(y) = -A''(y) \\ B(y) = -B''(y) \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni differenziali da cui si può estrarre la soluzione; le condizioni al contorno sono  $e^{i0} = 1$ . Dunque

$$\begin{cases} A(0) = 1 \\ B(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A'(0) = 0 \\ B'(0) = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} A(y) = \cos y \\ B(y) = \sin y \end{cases}$$

questa è detta forma polare o di Eulero:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Dunque si è così estesa la definizione di esponenziale ai numeri complessi.

Si nota che

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

e considerato  $|z| \ll 1$ , cioè  $x, y \ll 1$  si utilizza l'espansione in serie di Taylor per ottenere

$$e^z \approx (1+x)(1+iy) = 1+x+iy = 1+z$$

dunque l'espansione di Taylor funziona anche per i numeri complessi. In particolare

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{z}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

**Osservazione.** Considerato  $z = re^{i\theta}$  segue  $\bar{z} = re^{-i\theta}$ . Inoltre

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Da ciò si evince la formula di de Moivre. Considerato  $n \in \mathbb{Z}$ , segue

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

**Definizione.** Così si può trovare anche la radice  $n$ -esima. La radice  $n$ -esima  $w$  di un numero complesso  $z$  è tale per cui  $w^n = z$ . Infatti

$$w = z^{\frac{1}{n}} = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

per de Moivre. Inoltre, esistono  $n$  differenti radici di  $z$  se  $|z| \neq 0$ .

**Esempio.**

- La radice quadrata di  $1 = 1e^{i0}$  risulta essere  $e^{ik\pi}$ , con  $k \in \{0, 1\}$ .
- La radice quadrata di  $-1 = e^{i\pi}$  risulta essere  $e^{i(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$  con  $k \in \{0, 1\}$ .

**Equazione di secondo grado in  $\mathbb{C}$ .** Un'equazione di secondo grado su  $\mathbb{C}$  si scrive come

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

**Teorema.** Un'equazione di tale tipo ha sempre due soluzioni nel campo complesso. La natura delle soluzioni è dato dal discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Per  $\Delta \geq 0$  si ha

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_{1,2} \in \mathbb{R}$$

- Per  $\Delta < 0$  (cioè  $-\Delta > 0$ ) si ha

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_{1,2} \in \mathbb{C}$$

e si ha  $z_1 = \bar{z}_2$ .

**Logaritmo.** Considerato

$$z = re^{i\varphi} = e^{\ln r} e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$$

Si può definire il logaritmo come

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

Il logaritmo ha valori diversi in base all'angolo: se tale angolo viene considerato con multipli di  $2\pi$ , il numero  $z$  è sempre lo stesso, ma il suo logaritmo cambia. Il logaritmo è una funzione polidroma.

Dunque, bisogna fare una scelta del valore di  $\varphi$  in modo da renderlo univoco

$$\begin{cases} \varphi \in [0, \pi], & y > 0 \\ \varphi \in [-\pi, 0], & y < 0 \end{cases}$$

La funzione  $\text{Arg}(z)$  ha già le proprietà corrette, dunque si definisce il logaritmo in modo univoco come

$$\ln z = \ln r + i \text{Arg}(z)$$

Tuttavia, in questo modo la funzione non è più continua e si ha un branch cut. Il logaritmo è discontinuo per  $x \in (-\infty, 0]$ . Il branch cut risulta essere  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ .

**Osservazione.** Vale  $\overline{\ln z} = \ln \bar{z}$ . Infatti

$$\ln r - i \text{Arg}(z) = \ln r + i \text{Arg}(\bar{z})$$

dato che si ha

$$\bar{z} \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{r} = r \\ \bar{\varphi} = -\varphi \end{cases}$$

## Lecture 2

### 2.2 Serie e successioni

lun 07 mar  
2022 12:30

Si vedrà la proiezione stereografica.

Si studiano le successione e le serie sul campo dei numeri complessi. Per poter definire la successione ad una serie è necessario definire un concetto di distanza. Su  $\mathbb{C}$  questo è possibile perché è definita la norma  $|z|$  che soddisfa le proprietà di distanza  $d(a, b)$ , per due  $a, b \in \mathbb{C}$ :

- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- $\forall c \in \mathbb{C}, d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$

Si definisce un concetto di distanza tra due numeri complessi  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  come il numero reale  $|z_1 - z_2|$ .

**Definizione.** Successione convergente. La successione di numeri  $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$  con  $z_k \in \mathbb{C}$  si dice convergere a  $z \in \mathbb{C}$  se e solo se la successione dei numeri reali  $|z_k - z| \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

**Osservazione.** Se si decompone un numero complesso nelle sue parti reale ed immaginaria allora

$$z_k - z = \operatorname{Re}(z_k - z) + i \operatorname{Im}(z_k - z)$$

ma

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_k - z) &\leq |z_k - z| \leq |\operatorname{Re}(z_k - z)| + |\operatorname{Im}(z_k - z)| \\ \operatorname{Im}(z_k - z) &\leq |z_k - z| \leq |\operatorname{Re}(z_k - z)| + |\operatorname{Im}(z_k - z)| \end{aligned}$$

Pertanto

$$|z_k - z| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty \iff \operatorname{Re}(z_k - z) \rightarrow 0 \wedge \operatorname{Im}(z_k - z) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty$$

Dove le successioni di parti reali ed immaginarie sono successioni di numeri reali.

**Definizione.** Successioni di Cauchy. Una successione di Cauchy è una successione  $\{z_k\}_k$  tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \mid n, m > N_\varepsilon \implies |z_n - z_m| < \varepsilon$$

**Osservazione.** Si nota che

- Se la successione  $\{z_k\}$  è di Cauchy allora pure  $\{\operatorname{Re}(z_k)\}$  e  $\{\operatorname{Im}(z_k)\}$  sono successioni di Cauchy.
- Tutte le successioni convergenti in  $\mathbb{C}$  sono di Cauchy.
- In  $\mathbb{C}$  vale anche il viceversa perché è uno spazio metrico completo.

**Definizione.** Serie. La serie  $\sum_n z_n$  con  $z_n \in \mathbb{C}$  converge a  $z \in \mathbb{C}$  se la successione delle somme parziali  $\{S_n\}$  converge a  $z$ . Le somme parziali sono

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

**Osservazione.** Si osserva

- Condizione necessaria per la convergenza è  $z_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Dunque  $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow 0$  e  $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .
- Condizione sufficiente per la convergenza è la convergenza assoluta: se converge  $\sum_n |z_n|$  su  $\mathbb{R}$  allora converge anche  $\sum_n z_n$  su  $\mathbb{C}$ .

**Esempio.** Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n$$

con  $\theta \in \mathbb{R}$ . Si studia la convergenza assoluta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} (i\theta)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\theta|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\theta|^n = e^{|\theta|}$$

quindi la serie converge assolutamente su  $\mathbb{R}$  a  $e^{|\theta|}$  e quindi la serie originale converge in  $\mathbb{C}$  a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n = e^{i\theta}$$

Questo è come si definisce l'esponenziale complesso.

**Osservazione.** Si può ricordare la formula di Eulero

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} i \frac{(i^2)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Si nota che riordinare i termini di una serie non ne cambia il valore se e solo se tale serie converge assolutamente, questo vale per il teorema delle serie di Riemann.

### 2.3 Serie di potenze

**Definizione.** Una serie di potenza è una quantità  $S(z, z_0)$  dove  $z_0$  è il centro della serie,  $z, z_0 \in \mathbb{C}$  ed è definita come

$$S(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con  $a_n \in \mathbb{C}$  costanti.

Si studia la sua convergenza per ogni valore fissato di  $z$ , cioè si studia la convergenza puntuale.

Si definisce l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid S(z, z_0) \text{ converge}\}$$

**Osservazione.** L'insieme  $E$  non è vuoto perché  $z_0$  è suo elemento e la serie converge a  $S(z_0, z_0) = a_0$ .

**Definizione.** Raggio di convergenza. Si definisce l'insieme delle distanze

$$D = \{|z - z_0| \mid z \in E\}$$

Il raggio di convergenza è  $R = \sup_{z \in E} |z - z_0| = \sup D$ , cioè la maggiore distanza da  $z_0$  per cui  $S$  converge.

**Osservazione.** Si osserva

- Una serie di potenze convergente in  $\mathbb{C}$ , converge in un cerchio di raggio  $R$ .
- Se la serie converge solo per  $z = z_0$  allora  $R = 0$ .
- Se la serie converge  $\forall z \in \mathbb{C}$  allora  $R = +\infty$ .

**Definizione.** Si vedono due definizioni per calcolare il raggio di convergenza. Una funziona solamente se un limite esiste.

- Vale

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$$

questo si riduce a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

quando quest'ultimo limite esiste.

- Vale

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

quando il limite esiste.

Una volta trovato  $R$ , allora si può affermare che la serie converge per  $|z - z_0| < R$  e diverge per  $|z - z_0| > R$ . Per  $|z - z_0| = R$  la convergenza dipende dal caso particolare.



**Esempio.** Si consideri la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

essa è una particolare serie di potenze che ha  $a_n = 1 \forall n$  e  $z_0 = 0$ . Si consideri la somma parziale  $n$ -esima:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Si studia la convergenza. Si utilizza il primo criterio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1^{\frac{1}{n}}} = 1 \implies R = 1$$

Per il secondo criterio si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1 \implies R = 1$$

pertanto la serie ha raggio di convergenza pari ad 1. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \iff |z| < 1$$

Se  $|z| > 1$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Per  $|z| = 1$  si può riscrivere  $z = e^{i\theta}$  e per qualsiasi valore di  $\theta \in \mathbb{R}$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\theta} = \infty, \quad a_n = 1, \forall n$$

perché non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Pertanto la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge solamente per  $|z| < 1$ .

**Definizione.** Una serie bilatera è la serie

$$S(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

l'ultima uguaglianza è vera quando

$$c_n = \begin{cases} a_n, & n \geq 0 \\ b_n, & n < 0 \end{cases}$$

Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  converge con raggio  $R$  allora  $|z - z_0| < R$ .

Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$  converge con raggio  $R'$  allora

$$\frac{1}{|z - z_0|} < R' \implies |z - z_0| > R'$$

pertanto, la regione di convergenza è l'intersezione tra le due. Per  $R' < R$  si ha una corona circolare, per  $R' > R$  si ha l'insieme vuoto.

**Esempio.** La funzione esponenziale è definita come

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

con  $a_n = \frac{1}{n!}$  e  $z_0 = 0$ . Si calcola il suo raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^n e^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-1} = +\infty$$

si utilizza la formula di Stirling  $n! \sim n^n e^{-n}$ . Quindi la funzione esponenziale converge in tutto  $\mathbb{C}$ .

**Esempio.** Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (in)^{in} z^n$$

essa ha  $a_n = (in)^{in}$  e  $z_0 = 0$ . Si studia il raggio di convergenza con il primo criterio si utilizza il fatto che

$$|a_n| = |(in)^{in}| = |e^{in \ln(in)}| = |e^{in(\ln i + \ln n)}| = |e^{in(i\frac{\pi}{2} + \ln n)}| = |e^{-n\frac{\pi}{2}}| |e^{in \ln n}| = e^{-\frac{\pi}{2}n}$$

ricordando che  $|e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$ . Pertanto

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-\frac{\pi}{2}}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

**Osservazione.** La derivata di una serie di potenze, con raggio di convergenza  $R$ , ha ancora raggio di convergenza  $R$ . Si definisce la derivata come

$$S'(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Si mostra avere lo stesso raggio di convergenza tramite il primo criterio

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} = R$$

questo perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} k^{\frac{1}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

**Corollario.** Una serie di potenze è infinitamente differenziabile all'interno del proprio raggio di convergenza.

**Osservazione.** I coefficienti di

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sono

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

## 2.4 Funzione complessa

**Definizione.** Una funzione complessa è una mappa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che associa un punto  $z \in \mathbb{C}$  ad un punto  $w = f(z) \in \mathbb{C}$ .

Inoltre, vale

$$f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + i \operatorname{Im}(f(z))$$

e dato che qualsiasi numero complesso si può scrivere come  $z = x + iy$  allora si può scrivere

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni reali.

**Definizione.** Continuità di una funzione. Una funzione  $f(z)$  è continua in  $z_0 \in \mathbb{C}$  se essa è definita in un intorno di  $z_0$  e se esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

**Definizione.** Limite. Il valore  $f(z_0)$  è il limite di  $f(z)$  per  $z \rightarrow z_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

**Osservazione.** Come nel caso di  $\mathbb{R}^2$ , il limite deve essere indipendente dal cammino utilizzato.

**Esempio.** Si consideri

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

questo limite non esiste perché dipende dal cammino. Infatti, lungo l'asse reale si ha  $y = 0$  e pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - iy}{x + iy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

d'altra parte, lungo l'asse immaginario si ha  $x = 0$  e quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - iy}{x + iy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

**Definizione.** Continuità in un dominio. La funzione  $f(z)$  è continua su di un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  se essa è continua  $\forall z \in D$ .

**Definizione.** Derivata di una funzione continua. La funzione  $f(z)$  è differenziabile in  $z_0$  se il limite

$$d_z f(z_0) \equiv f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

esiste.

**Osservazione.** Dato che la derivata è definita come un limite, se il limite esiste, allora la derivata è indipendente dal cammino.

**Definizione.** Funzione olomorfa. Una funzione differenziabile su di un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  è detta olomorfa su tale dominio.

**Esempio.** Una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$  è

$$f(z) = z^3$$

infatti

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

posto  $\Delta z \equiv z - z_0$ , con  $z_0 \in \mathbb{C}$ , si ha

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{3z_0^2 \Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = 3z_0^2$$

la derivata esiste ed è indipendente dall'incremento, quindi  $f(z) = z^3$  è olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$ .

**Esempio.** La funzione  $f(z) = \bar{z}$  non è olomorfa su  $\mathbb{C}$ . Questo perché

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

ma, come visto, tale limite non esiste.

### Lecture 3

**Proposizione.** Valgono

mar 08 mar  
2022 12:30

- $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ , quando  $g(z) \neq 0$
- $d_z(f \circ g)(z) = f'(g(z))g'(z)$
- Considerata  $w = f(z)$  una funzione olomorfa in  $z_0$  con  $f'(z_0) \neq 0$ , allora  $z = f^{-1}(w)$  è olomorfa in  $w_0 = f(z_0)$  e vale

$$(f^{-1}(w_0))' = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Si determina la differenziabilità di una funzione in termini pratici.

**Condizioni di Cauchy-Riemann.** Queste condizioni sono equivalenti alla definizione tramite il rapporto incrementale, ma sono più pratiche. Esse sono condizioni necessarie e sufficienti per verificare la differenziabilità di una funzione  $f(z)$  in  $z_0 \in \mathbb{C}$ . In  $\mathbb{C}$  la differenziabilità è legata alla derivabilità.

**Teorema.** Si consideri una funzione  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  con  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $u, v$  abbiano derivate parziali continue in un intorno di  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Allora le condizioni di Cauchy-Riemann sono

$$\partial_x f(z_0) = -i \partial_y f(z_0)$$

oppure, analogamente

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\partial_x v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

ed esse sono necessarie e sufficienti per definire  $f(z)$  differenziabile in  $z_0$ .

**Dimostrazione.** Si vede come le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie ( $f$  differenziabile implica condizioni). Se  $f(z)$  è differenziabile allora esiste la derivata e quindi

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

questo limite esiste ed esso non dipende da  $h \in \mathbb{C}$ , quindi non dipende nemmeno dal cammino verso 0. Pertanto, si può procedere sull'asse reale ed sull'asse immaginario. Dunque, sull'asse reale  $h = h_x \in \mathbb{R}$  e si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h_x) - f(z_0)}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_x, y_0) + iv(x_0 + h_x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h_x} \\ &= \partial_x u(x_0, y_0) + i \partial_x v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Mentre sull'asse immaginario  $h = ih_y$ ,  $h_y \in \mathbb{R}$  e si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih_y) - f(z_0)}{ih_y} \\ &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_y) + iv(x_0, y_0 + h_y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0 + h_y)}{ih_y} \\ &= \frac{1}{i} \partial_y u(x_0, y_0) + \partial_y v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Dato che la derivata dev'essere indipendente del cammino, segue che le espressioni devono essere identiche:

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$$

Si vede come le condizioni di Cauchy-Riemann sono sufficienti. Si consideri  $h = h_x + ih_y$  e la definizione di derivata come limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_x, y_0 + h_y) + iv(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h_x + ih_y}$$

Siccome  $u$  e  $v$  sono differenziabili in un intorno di  $z_0$  allora per Taylor si ha

$$\begin{aligned} u(x_0 + h_x, y_0 + h_y) &= u(x_0, y_0) + h_x \partial_x u(x_0, y_0) + h_y \partial_y u(x_0, y_0) + o(|h|) \\ v(x_0 + h_x, y_0 + h_y) &= v(x_0, y_0) + h_x \partial_x v(x_0, y_0) + h_y \partial_y v(x_0, y_0) + o(|h|) \end{aligned}$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_x \partial_x u + h_y \partial_y u + ih_x \partial_x v + ih_y \partial_y v}{h_x + ih_y} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_x \partial_x u - h_y \partial_x v + ih_x \partial_x v + ih_y \partial_x u}{h_x + ih_y} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h_x + ih_y)(\partial_x u + i \partial_x v)}{h_x + ih_y} = \partial_x u + i \partial_x v \end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza si applicano le condizioni di Cauchy-Riemann. Il limite esiste, è finito e non dipende da  $h$ . Pertanto

$$f'(z_0) = (\partial_x u + i \partial_x v)|_{(x_0, y_0)}$$

**Osservazione.** Le condizioni di Cauchy-Riemann permettono di scrivere le derivate di  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  in quattro modi equivalenti:

$$f'(z) = \begin{cases} \partial_x u + i \partial_x v \\ \partial_y u - i \partial_y v \\ \partial_x u - i \partial_y u \\ \partial_y u + i \partial_x u \end{cases}$$

**Esempio.** Si consideri la funzione  $f(z) = z = x + iy$ . Si ha  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = y$ . Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\begin{cases} \partial_x u = 1 \equiv \partial_y v = 1 \\ \partial_y u = 0 \equiv -\partial_x v = 0 \end{cases}$$

Questo equivale in ogni punto  $z \in \mathbb{C}$ , quindi  $f(z) = z$  è olomorfa in tutto  $\mathbb{C}$ .

**Esempio.** Si vede una funzione non olomorfa. Si consideri  $f(z) = \bar{z} = x - iy$ . Si ha  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = -y$ . Le condizioni diventano

$$\partial_x u = 1 \neq \partial_y v = -1$$

le condizioni non sono verificate per alcun  $z \in \mathbb{C}$ ; pertanto, la funzione non è mai olomorfa.

**Osservazione.** Se una funzione contiene  $\bar{z}$ , allora essa non è mai olomorfa (anzi è antiolomorfa).

**Definizione.** Operatori differenziali in  $z$  e  $\bar{z}$ . Si definiscono due operatori differenziali rispetto a  $z$  e  $\bar{z}$  come

$$\partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_x - i \partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_x + i \partial_y)$$

**Teorema.** Se una funzione  $f(z)$  è olomorfa su di un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  allora

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$$

**Dimostrazione.** Infatti

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2}(\partial_x f(z) + i \partial_y f(z)) = \frac{1}{2}(\partial_x(u(x, y) + iv(x, y)) + i \partial_y(u(x, y) + iv(x, y))) \\ &= \frac{1}{2}[\partial_x u + i \partial_x v + i \partial_y u - \partial_y v] = 0 \end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza è data dal fatto che  $f(z)$  è olomorfa e quindi segue valere le condizioni di Cauchy-Riemann.

**Osservazione.** Quando una funzione è derivabile nel campo complesso, allora è derivabile un numero infinito di volte (per cui è detta funzione analitica). Le funzioni  $u$  e  $v$  non sono qualsiasi, ma sono funzioni armoniche: hanno precise relazioni tra le loro derivate. Le condizioni di Cauchy-Riemann affermano che  $\partial_x f(z) = -i \partial_y f(z)$ , ma se  $f(z)$  è olomorfa, allora ammette derivate seconde

$$\partial_x \partial_x f(z) = -i \partial_x \partial_y f(z) \iff \partial_x^2 f(z) = -i \partial_{xy}^2 f(z) = -i \partial_y \partial_x f(z) = -\partial_y^2 f(z)$$

dove nell'ultima uguaglianza si sono usate le condizioni di Cauchy-Riemann. Pertanto

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)f(z) = 0 \iff \nabla^2 f = 0$$

cioè  $f$  soddisfa l'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^2$ , cioè  $f$  è una funzione armonica.

**Esempio.** Si consideri la funzione  $f(z) = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ . Tale funzione non è olomorfa perché dipende da  $\bar{z}$  (propriamente, perché la derivata parziale rispetto  $\bar{z}$  non è nulla).

**Esercizio.** Si mostri valere quanto affermato utilizzando  $u$  e  $v$ , mostrando la violazione delle condizioni di Cauchy-Riemann.

**Esempio.** Si consideri la funzione  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ . Essa è olomorfa solamente in  $z = 0$  perché  $\partial_{\bar{z}}z\bar{z} = z$ .

**Definizione.** Anti-olomorfa. Una funzione  $f(z)$  è detta anti-olomorfa se

$$\partial_z f(z) = 0$$

**Osservazione.** Si dimostra che se  $f(z)$  è anti-olomorfa, allora  $\bar{f}(z)$  è olomorfa.

**Definizione.** Polinomi a coefficienti complessi. Un polinomio a coefficienti complessi è una funzione del tipo

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

con  $z, a_i \in \mathbb{C}$ .

**Osservazione.** Esso è una funzione olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$  in quanto  $\partial_{\bar{z}}P(z) = 0$ . Inoltre

$$\partial_z P(z) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k z^{k-1}$$

Invece, i polinomi del tipo

$$Q(z, \bar{z}) = \sum_{n,m=0}^k a_{nm} z^n \bar{z}^m$$

non sono olomorfi perché

$$\partial_{\bar{z}}Q(z, \bar{z}) \neq 0$$

**Osservazione.** Si consideri la funzione esponenziale  $f(z) = e^z$ . Non si sa come fare la derivata rispetto a  $\bar{z}$  per verificare l'olomorfa, in quanto si è scritta la derivata solamente in funzione di  $x$  ed  $y$ . Posto  $z = x + iy$  si ha

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i(e^x \sin y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\begin{cases} \partial_x u = e^x \cos y \equiv \partial_y v = e^x \cos y \\ \partial_y u = -e^x \sin y \equiv -\partial_x v = -e^x \sin y \end{cases}$$

Inoltre  $\partial_z e^z = \frac{1}{2}(\partial_x - i \partial_y)e^z$  si vede che  $\partial_z e^z = e^z$ .

**Definizione.** Si possono definire le funzioni trigonometriche come

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}$$

**Esercizio.** Svolgere la derivata del seno e del coseno, verificando il dominio di olomorfia (che è  $\mathbb{C}$ ).

**Definizione.** Si possono definire le funzioni iperboliche come

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \\ \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})\end{aligned}$$

## 2.5 Proiezione stereografica e punto all'infinito

Si introduce la nozione della proiezione stereografica di un punto all'infinito. Dato che  $\mathbb{C}$  è rappresentabile con un piano, si possono avere infiniti in varie direzioni. Tuttavia, tutti i punti all'infinito sono uno solo punto e ciò si vede quando si considera il piano complesso come la proiezione di una sfera.

Il punto all'infinito estende  $\mathbb{C}$  ed ha particolari proprietà.

I numeri complessi del piano  $\mathbb{C}$  possono essere rappresentati come punti sulla superficie di una sfera

$$S^2 = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \mid \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

Per proiettare un punto dalla sfera al piano si considera la retta che passa per il polo nord ed il punto della sfera. Il punto d'intersezione con il piano complesso è la proiezione  $(x, y, 0) \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}$ . [immagine]

La mappa si può ricavare considerando triangoli simili

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1 - \xi}$$

che implica

$$x = \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \xi}$$

Ricordando l'equazione della sfera si hanno le equazioni

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

si ha una mappa univoca tra ogni punto di  $\mathbb{C}$  ad  $S^2$ , ma esiste un punto di  $S^2$  che non è raggiungibile tramite tale mappa:  $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1)$ . Infatti quando  $\zeta = 1$  si ha  $x = y = \infty$ . Questo punto è detto punto all'infinito.

Si definisce l'insieme di compattificazione di  $\mathbb{C}$  come  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ed esso si può identificare con la sfera:  $\hat{\mathbb{C}} \leftrightarrow S^2$ . La sfera è detta sfera di Riemann.

**Osservazione.** La proiezione è fatta dal polo nord, tuttavia traslando la sfera verso il basso di un'unità, si può utilizzare la proiezione dal polo sud  $(0, 0, -1)$ . In questo caso, il punto all'infinito  $z = \infty$  viene mappato ad un punto  $w = z^{-1} = 0$  e viceversa.

Il polo nord della sfera originale è mappato al punto all'infinito, mentre il polo nord della sfera traslata è mappato a zero. Similmente per gli altri punti: l'emisfero superiore della sfera originale mappa i punti al di fuori della circonferenza unitaria, mentre l'emisfero superiore della sfera traslata mappa i punti all'interno della circonferenza unitaria.

La visualizzazione è più semplice se si considera la sfera unitaria centrata nell'origine: posta la proiezione dal polo nord, l'emisfero superiore mappa i punti oltre la circonferenza unitaria, mentre l'emisfero inferiore mappa quelli all'interno; il polo sud è mappato a zero, mentre il polo nord ad infinito. Tuttavia, ponendo la proiezione dal polo sud, i ruoli degli emisferi si scambiano



e quindi il polo nord è mappato a zero ed il polo sud ad infinito. Per passare da una descrizione all'altra si utilizza la mappa di transizione definita da  $w = z^{-1}$  e  $z = w^{-1}$ .

Per studiare una funzione  $f(z)$  su  $\mathbb{C}$  e comprendere il suo comportamento a  $z = \infty$  si può studiare  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  intorno a  $w = \frac{1}{z} = 0$ .

Se  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  è olomorfa o singolare in  $w = 0$  allora  $f(z)$  è olomorfa o singolare in  $z = \infty$ .

## 2.6 Singolarità

Si vedono le singolari delle funzioni olomorfe.

**Definizione.** Una funzione  $f(z)$  olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$  si dice intera.

**Definizione.** I punti in cui  $f(z)$  non è intera, non è differenziabile o non è definita si dicono punti di singolarità.

Le singolarità sono classificate come

- **Isolata.** Un punto  $z_0$  è un punto di singolarità isolata per una funzione  $f(z)$  olomorfa (cioè differenziabile) se esiste un intorno  $D$  di  $z_0$  di raggio  $\varepsilon$  definito come

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

tale per cui  $f$  è olomorfa (e quindi definita) su  $D$ , ma  $f(z_0)$  non è definita o non è differenziabile.

- **Non isolata.** Se tale intorno non esiste, allora la singolarità non è isolata. Si nota che basta anche solo un punto  $z_1$  tale che  $|z_0 - z_1| < \varepsilon$  con  $f(z_1)$  non olomorfa per avere che  $f(z_0)$  non è una singolarità isolata.

**Singolarità isolata.** Esistono tre tipi di singolarità isolate

- **Rimovibile.** Se  $f(z_0)$  non è definita, ma esiste finito

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

allora si estende  $f(z)$  in  $z_0$  definendo

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Dato che la singolarità è isolata, segue che la funzione  $f(z)$  estesa diventa olomorfa in  $D \cup \{z_0\}$ .

- **Polo di ordine  $k$ .** Se esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \neq 0$$

con  $k \in \mathbb{N}$ . Si dice che  $f(z)$  ha un polo di ordine  $k$ . Per  $k = 1$  si ha un polo semplice, per  $k = 2$  si ha un polo doppio, etc.

- **Essenziale.** Essa è una singolarità che non si può rimuovere moltiplicando per alcuna potenza  $(z - z_0)^k$ .

Pertanto, il limite di  $f(z)$  per  $z \rightarrow z_0$  non esiste e  $f(z)$  oscilla tanto più rapidamente quanto si è vicini a  $z_0$ ; essa oscilla rapidamente in base al cammino. Tale funzione assume qualsiasi valore un numero infinito di volte in base al cammino con cui ci si avvicina. Successivamente si vedono due teoremi.

**Esempio.** Si consideri la funzione  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ . Essa non è olomorfa in  $z = 0$ . Tuttavia, esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Dunque, definendo  $f(0) = 1$  allora  $f(z)$  è olomorfa in  $z = 0$  e  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**Osservazione.** Si osserva che nelle vicinanze di un polo di ordine  $k$  si può scrivere  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ , con  $g(z)$  olomorfa e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ .

**Osservazione.** Dato un polo di ordine  $n$ , il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \infty, \quad \forall k < n$$

In particolare, per  $k = 0$  cioè  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  segue che la funzione diverge al polo.

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{3z - 2}{(z - 1)^2(z + 1)(z - 4)}$$

In questo caso, i suoi poli sono gli zeri del denominatore (ma potrebbe non sempre essere così, bisogna fare il limite per essere sicuri):  $z = 1$  è un polo doppio,  $z = -1$  e  $z = 4$  sono poli singoli.

**Teorema.** Weierstrass. Se  $z_0$  è una singolarità essenziale di una funzione  $f(z)$  allora

$$\forall \varepsilon, \delta > 0, \forall c \in \mathbb{C}, \exists z \mid |z - z_0| < \delta, |f(z) - c| < \varepsilon$$

cioè avvicinandosi arbitrariamente alla singolarità essenziale, ci si può avvicinare arbitrariamente a qualsiasi numero complesso.

**Teorema.** Picard. In un intorno di  $z_0$  singolarità essenziale di una funzione  $f(z)$ , tale funzione assume qualsiasi valore complesso un numero infinito di volte con eccezione al più di un valore.

**Esempio.** Si consideri la funzione  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ . Essa ha una singolarità essenziale in  $z = 0$ . Dato  $c \in \mathbb{C}$  con  $c \neq 0$  e dato  $\delta > 0$ , si può trovare  $z$  con  $|z| < \delta$  tale che  $e^{\frac{1}{z}} = c$ . Infatti, posto  $z = re^{i\theta}$  e  $c = \rho e^{i\varphi}$ , e considerato

$$c = e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{r}e^{-i\theta}} = e^{\frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)} \equiv \rho e^{i\varphi}$$

Uguagliando fattore a fattore si ha

$$\begin{cases} e^{\frac{\cos \theta}{r}} = \rho \\ e^{i \frac{-\sin \theta}{r}} = e^{i\varphi} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\cos \theta}{r} = \ln \rho \\ -\frac{\sin \theta}{r} = \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} -\tan \theta = \frac{\varphi}{\ln \rho} \\ \varphi^2 + \ln^2 \rho = \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

Studiando tale sistema, si afferma che esiste sempre una soluzione. Tuttavia, dato che  $\rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi+2k\pi)}$  per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ , segue che si può ridefinire  $\varphi' = \varphi + 2k\pi$  e quindi la seconda equazione è

$$(\varphi')^2 + \ln^2 \rho = \frac{1}{r^2}$$

con  $\varphi'$  arbitrariamente grande. Pertanto,  $r$  dev'essere arbitrariamente piccolo per mantenere l'uguaglianza. Quindi  $r < \delta$  ed  $f(z)$  può assumere qualsiasi valore quando  $r \rightarrow 0$ . L'unico valore che non può assumere è  $f(z) = 0$ .

**Definizione.** Funzione meromorfa. Una funzione  $f(z)$  è meromorfa se ha solo singolarità rimovibili o poli in un dominio  $D \subset \mathbb{C}$ . Cioè non ha singolarità essenziali. Non si considerano le singolarità a  $z = \infty$ .

## Lecture 4

ven 11 mar  
2022 14:30

**Osservazione.** Si possono studiare le proprietà di singolarità di  $f(z)$  in  $z = \infty$  studiando le proprietà di  $f(w)$  con  $w = \frac{1}{z}$  in  $w = 0$ .  
Grazie alla doppia mappa della proiezione stereografica

- i poli diventano zeri e viceversa
- le singolarità essenziali rimangono tali

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Gli zeri di tale funzione sono gli zeri di  $A(z)$ , mentre i poli sono gli zeri di  $B(z)$  quando non ha fattori in comune con  $A(z)$ . Le singolarità sono  $z = 1$  e  $z = -\frac{2}{3}$ . Si studia che tipo di polo sono

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2} = \frac{4}{5}$$

dunque  $z = 1$  è un polo di ordine terzo. Per esercizio studiare la natura di  $z = -\frac{2}{3}$ .  
Si osserva anche se il punto ad infinito  $z = \infty$  è una singolarità. Si pone  $z = \frac{1}{w}$  e si scrive

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w^8} + \frac{1}{w^4} + 2}{\left(\frac{1}{w} - 1\right)^3 \left(\frac{3}{w} + 2\right)^2} = \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2}$$

Si studia  $w = 0$ :

$$\lim_{w \rightarrow 0} w^3 \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2} = \frac{1}{9}$$

dunque  $w = 0$  è un polo di ordine terzo, pertanto  $z = \infty$  è un polo di ordine terzo per  $f(z)$ .

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = e^z$$

Si ricorda essere una funzione su  $\mathbb{C}$ . Tuttavia, si deve comunque studiare  $z = \infty$ . Per quanto già visto, risulta immediato che

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$$

ha una singolarità essenziale in  $\frac{1}{z} = w = 0$ . Pertanto,  $z = \infty$  è una singolarità essenziale per  $f(z) = e^z$ .

**Singolarità non isolata.** Esistono due tipi di singolarità non isolate:

- punto limite di una sequenza di singolarità isolate;
- punto di diramazione di una funzione a più valori (multivalued, come il logaritmo).

**Esempio.** Si vede un esempio per la prima categoria. Si consideri la funzione

$$f(z) = \tan \frac{1}{z} = \frac{\sin \frac{1}{z}}{\cos \frac{1}{z}}$$

la tangente sui numeri complessi è ancora definita come il rapporto tra seno e coseno, i quali sono definiti in termini della funzione esponenziale. Tuttavia, la funzione  $f(z)$  non è definita in  $z = 0$  ed ha dei poli nei punti  $z_k$  in cui  $\cos \frac{1}{z}$  si annulla. Tali zeri sono

$$z_k = \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si dimostra essere dei poli semplici. Espandendo in serie di Taylor fino al secondo ordine attorno  $z_k$  si ha

$$f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z_k} + d_z \sin\left(\frac{1}{z_k}\right)(z - z_k) + \dots}{\cos \frac{1}{z_k} + d_z (\cos \frac{1}{z_k})(z - z_k) + \dots} \sim_{z_k} \frac{1 - \frac{1}{2z_k^4}(z - z_k)^2}{\frac{1}{z_k^2}(z - z_k) - \frac{1}{z_k^3}(z - z_k)^2} \sim_{z_k} \frac{z_k^2}{z - z_k}$$

Inoltre, la successione  $\{z_k\}$  converge a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} = 0$$

pertanto, in qualsiasi intorno di  $z = 0$  si ha almeno un  $z_k$  e questo implica che  $z = 0$  è una singolarità non isolata. Infatti, ogni  $z_k$  è una singolarità isolata, perché per ogni  $z_k$  esiste un intorno che non contiene altri  $z_k$  ed in cui la funzione è olomorfa escluso al più  $z_k$  stesso.

**Esempio.** Si vede un esempio per la seconda categoria. Si consideri la funzione

$$f(z) = \sqrt{z} \equiv w$$

La funzione  $f(z) = w(z)$  è la funzione (“funzione” non nel senso di Analisi I, bensì di relazione che può associare ad un punto del dominio *più valori* in un codominio) inversa di  $z(w) = w^2$ , tuttavia,  $w^2$  non è (in generale) iniettiva. La mancanza di iniettività implica che  $f(z)$  sia una funzione a molteplici valori. Infatti  $\forall z \mid z = re^{i\theta}$  si possono definire (almeno) due valori di  $w(z)$ :

$$w_0(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad w_1(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+\pi}$$

e tutti i numeri  $w_{0k}(z)$  e  $w_{1k}(z)$  che sono rotazioni di  $2k\pi$  dei due valori riportati. Si escludono queste molteplici soluzioni scegliendo  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Le due soluzioni sono chiamate rami (branches).

Ciò è analogo alla situazione sui numeri reali  $y(x) = x^2$  che ha per soluzione  $x(y) = \pm\sqrt{y}$ . Tuttavia, mentre da un lato (quello reale) la scelta di uno dei due rami (positivo o negativo) implica che  $y(x)$  sia differenziabile per  $x \neq 0$ ; dall’altro (quello complesso) non è così:  $z = 0$  è una singolarità ed è impossibile definire  $w_0(z)$  e  $w_1(z)$  su  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  in modo che  $w_0$  e  $w_1$  siano olomorfe (oltretutto, esse non sono nemmeno continue).

Infatti, scegliendo un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ , si ha

$$w_0(z_0) = \sqrt{r_0}e^{i\frac{\theta_0}{2}}$$

Si consideri un cammino chiuso  $\Gamma_\alpha$  intorno a  $z_0$  che non include non l’origine, ed un secondo cammino chiuso  $\Gamma_\beta$  che la contiene. La fase dei punti di  $\Gamma_\alpha$  varia tra due valori di  $\theta$ , uno massimo ed uno minimo. La distanza tra i due angoli risulta essere  $\Delta\theta < 2\pi$ , proprio perché non si include l’origine (in questo caso l’origine è il punto di singolarità perché  $f(x) = \sqrt{z}$  non è olomorfa in  $z = 0$  dato che non è ivi derivabile). Sul piano complesso di  $f(z) = \sqrt{z} = w$  (cioè quello che ha assi  $\text{Re}(w)$  e  $\text{Im}(w)$ ), il valore di  $w$  oscilla tra un massimo ed un minimo per poi tornare al valore di partenza.

Invece, sul cammino  $\Gamma_\beta$  la fase varia di  $2\pi$ , perché è inclusa l’origine, cioè il punto di singolarità. Infatti, si passa da  $\theta$  a  $\theta + 2\pi$  e dunque

$$w_0(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \rightarrow \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = w_1(z)$$

Pertanto, sul piano complesso di  $w$ , la curva  $\Gamma_\beta$  non è più una chiusa, bensì collega le due soluzioni  $w_0$  e  $w_1$ : percorrendo una curva chiusa (nel piano di  $z$ , del dominio) che contiene  $z = 0$  (cioè la singolarità), si passa su di un altro ramo della funzione (nel piano di  $w$ , del codominio). Una rotazione di  $4\pi$  risulta essere l’identità. Dunque, i rami possibili sono solo due. Pertanto, il punto  $z = 0$  è un punto di diramazione.

Dato che

$$w_1(z) = -w_0(z)$$

segue che la funzione non è continua in  $z = 0$ . A questo punto si introduce il branch cut cioè l'esclusione di una regione del piano complesso (inteso come dominio) per rendere impossibile la costruzione di curve chiuse che permettano di passare da un branch all'altro.

Pertanto, su  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  risulta che  $\sqrt{z}$  sia ben definita e su tale insieme,  $w_0(z)$  e  $w_1(z)$  sono funzioni olomorfe, continue e ad un solo valore (single-valued).

**Osservazione.** L'analisi complessa dà informazioni solamente sul numero di branch cut e su quale punto si ha la diramazione, ma non permette di stabilire come dev'essere posto nel piano complesso.

Il branch cut è arbitrariamente posizionato, ma deve contenere il punto di diramazione ed impedire di poter girare intorno ad esso. Una volta fissata la scelta, allora il valore di tutti i rami è fissato.

## 2.7 Superfici di Riemann.

Una volta fissata la disposizione del cut, tutti i valori della funzione in tutti i rami sono fissati sapendo il valore in un punto. Considerata

$$f(z) = \sqrt{z}$$

definendo il taglio  $(-\infty, 0]$  e ponendo  $\sqrt{1} = 1$ , si ha completamente determinato  $f(z)$ ,  $w_0(z)$  e  $w_1(z)$ .

Questo implica l'esistenza di (almeno) una descrizione alternativa in cui non sono presenti tagli ed in cui le funzioni a valori multipli diventano a singola variabile ed olomorfe. Si arriva a tale descrizione estendendo il dominio con molteplici copie del dominio stesso  $D \subset \mathbb{C}$ .

**Esempio.** Lo stesso punto  $z \in \mathbb{C}$  si può immaginare abbia due diverse immagini,  $f_1(z)$  ed  $f_2(z)$ , sotto la stessa funzione  $f(z)$ . Raddoppiando  $\mathbb{C}$  si avrebbero due copie,  $z_1$  e  $z_2$ , con  $f_1(z_1)$  e  $f_2(z_2)$  dove  $f_1$  ed  $f_2$  sono funzioni ad un valore (single valued).

**Definizione.** Il nuovo dominio formato da molteplici copie del dominio complesso si chiama superficie di Riemann e corrisponde ad un'estensione di  $\mathbb{C}$ . Le copie di  $\mathbb{C}$  devono essere connesse lungo il branch cut. In questo modo, attraversando il precedente cut, si passa da un ramo all'altro.

In generale, sono presenti tante copie di  $D \subset \mathbb{C}$  quanti sono i branches (eventualmente infiniti come per il logaritmo).

**Esempio.** Si consideri

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)}$$

Basta estendere il dominio di  $\theta$  a  $(-\pi, 3\pi]$ . In questo modo si copre  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  due volte. Si definisce  $D_0 = (-\pi, \pi]$  e  $D_1 = (\pi, 3\pi]$ . Con una rotazione di  $2\pi$  si passa da  $D_0$  a  $D_1$  e viceversa; con una rotazione di  $4\pi$  si ha l'identità.

La funzione così definita ha un singolo valore ovunque perché  $D_0 \cup D_1$  contiene più copie di  $\mathbb{C}$ .

## Lecture 5

### 2.8 Integrazione

Le proprietà di olomorfia di  $f(z)$  su  $\mathbb{C}$  possono essere determinate da condizioni di Cauchy-Riemann.

Sul campo complesso, le proprietà di differenziabilità sono collegate alle proprietà di integrabilità.

lun 14 mar  
2022 12:30

**Definizione.** Una curva è una mappa continua

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

I valori  $z_a = \gamma(a)$  e  $z_b = \gamma(b)$  sono gli estremi della curva.

**Definizione.** Una curva ha orientazione positiva se il verso di percorrenza è antiorario. Essa ha orientazione negativa se ha verso orario.

**Definizione.** La curva con orientazione opposta è data dalla mappa tale per cui

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow D, \quad t \mapsto \gamma(a + b - t)$$

che viene detta  $-\gamma$ .

**Definizione.** Una curva semplice è una curva che non interseca se stessa, cioè è una mappa iniettiva:

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), \quad \forall t_1 \neq t_2$$

**Definizione.** Una curva chiusa è una curva  $\gamma$  tale per cui

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

**Definizione.** Una curva di Jordan è una curva semplice e chiusa. Gli unici due punti coincidenti sono gli estremi.

**Teorema.** Ogni curva di Jordan divide il piano complesso in due regioni. Se la curva è orientata positivamente, allora la regione interna è a sinistra; mentre se è orientata negativamente, allora la regione interna è a destra.

**Definizione.** Una curva regolare a tratti (piecewise regular) è una curva  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  tale per cui  $x(t)$  e  $y(t)$  sono continue per  $t \in [a, b]$  e per cui esiste una partizione di  $[a, b]$  in cui  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$  sono continue e non simultaneamente nulle.

**Esempio.** Un rettangolo sul piano complesso è una curva regolare a tratti.

**Esempio.** La funzione

$$\gamma(t) = e^{(\rho+i\omega)t} = e^{\rho t} \cos(\omega t) + ie^{\rho t} \sin(\omega t)$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ , e  $\rho, \omega \in \mathbb{R}$ . Tale curva è la spirale logaritmica.

**Definizione.** Una curva è omotopa ad un'altra se si può deformare in maniera continua nell'altra.

Due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  su di un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  con gli stessi estremi  $[a, b]$  sono omotope se esiste una mappa  $\gamma$  continua che manda una curva nell'altra.

La mappa

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{C}$$

è tale che  $\gamma(t, u) \in D$ ,  $\forall t \in [a, b]$  e  $\forall u \in [0, 1]$  e si ha

$$\gamma(t, 0) = \gamma_1(t), \quad \gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$$

inoltre

$$\gamma(a, u) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad \gamma(b, u) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$$

Per ogni valore di  $u$  si ha una curva sul dominio e variandola si passa da  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ .

**Definizione.** Dominio semplicemente connesso. Due curve chiuse  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope se  $\forall u \in [0, 1]$ ,  $\gamma(a, u) = \gamma(b, u)$ ,  $\gamma(t, 0) = \gamma_1(t)$  e  $\gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$ . Dunque, il dominio  $D$  (su cui sono definite  $\gamma_i$ ) è semplicemente connesso se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto. Questo vale a dire che ogni curva chiusa può essere deformata in un unico punto e ciò è possibile se non sono presenti fori nel dominio.

**Definizione.** Integrale. Considerata una curva regolare a tratti

$$\gamma : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

con  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Dato un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  ed una funzione  $f(z)$  con  $z = \gamma(t)$  continua  $\forall z = \gamma(t) \in D$  e  $\forall t \in [a, b]$ , si definisce l'integrale di linea di  $f(z)$  lungo  $\gamma$  come

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

dove  $\gamma'(t) = d_t \gamma(t) = x'(t) + iy'(t)$ . Pertanto,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt$$

dove  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Questo implica che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b ux' - vy' dt + i \int_a^b uy' + vx' dt$$

cioè si è scritto l'integrale complesso come due integrali reali di linea.

**Esempio.** Si consideri

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

sulla curva

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]$$

Dunque, l'integrale è

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 x^2 + y^2 dt + i \int_0^1 x^2 + y^2 dt = \int_0^1 2t^2 dt (1 + i) = 2(1 + i) \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(1 + i)$$

## Lecture 6

**Osservazione.** Il fatto che l'integrale complesso si può scrivere come somma di due integrali reali di linea implica che l'integrale è un operatore lineare ed i cammini possono essere sommati:

$$\int_{\gamma} af(z) + bg(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Inoltre

$$\int_{\gamma_1} f(z) + \int_{\gamma_2} f(z) = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)$$

quando  $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$ , cioè i percorsi hanno un estremo in comune. Queste proprietà permettono di scrivere

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$$

mar 15 mar  
2022 12:30

**Osservazione.** L'integrale è indipendente dalla parametrizzazione scelta per una curva  $\gamma$ . Si passa da  $\gamma_1(t)$ , con  $t \in [a, b]$ , ad un'altra parametrizzazione  $\gamma_2(\tau)$ , con  $\tau \in [\alpha, \beta]$ . Si definisce la funzione  $t(\tau)$  la parametrizzazione che è una mappa di classe  $C^1$ , da  $[\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  tale che  $\gamma_1(t(\tau)) = \gamma_2(\tau)$ .

Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t(\tau))) \gamma_1'(t(\tau)) t'(\tau) d\tau$$

dove  $dt = t'(\tau) d\tau$ . Applicando la parametrizzazione si ottiene

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_2(\tau)) \gamma_2'(\tau) d\tau = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

notando che  $\gamma_2'(\tau) = \gamma_1'(t(\tau)) t'(\tau)$ .

**Definizione.** La lunghezza di una curva è

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Teorema.** Disuguaglianza di Darboux. Lemma di stima. Considerata una curva  $\gamma(t)$  regolare a tratti di lunghezza  $L$  ed una funzione  $f(z)$  continua e limitata su  $\gamma$  (limitata cioè  $|f(z)| \leq M$  quando valutata su  $\gamma$ ); allora vale

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML$$

**Dimostrazione.** Infatti

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = ML$$

**Esempio.** Si consideri la curva

$$\gamma(\theta) = Re^{i\theta}, \quad y'(\theta) = Rie^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

e la funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Dunque

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

**Definizione.** Valore principale. Il valore principale di un integrale generalizza il concetto di integrale improprio. Se la funzione  $f(z)$  è continua su di una curva  $\gamma(t)$ , con  $t \in [a, b]$  escluso un punto  $\xi \in \gamma(t)$ , allora si considera una circonferenza di raggio  $\varepsilon$  intorno a  $\xi$ . Tale circonferenza interseca la curva in due punti  $\gamma(\xi')$  e  $\gamma(\xi'')$ . [immagine] Pertanto, si possono definire gli integrali

$$I_a = \int_a^{\xi'} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \quad I_b = \int_{\xi''}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Se  $I_a$  e  $I_b$  esistono per  $\varepsilon \rightarrow 0$  allora  $I_a + I_b$  è l'integrale improprio di  $f(z)$  lungo  $\gamma$ . Altrimenti, se entrambi  $I_a \rightarrow \pm\infty$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ma  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_a + I_b = \alpha \in \mathbb{C}$  è finito, allora si definisce il valore principale (principal value, PV) di tale integrale come

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{\xi'(\varepsilon)} f(z) dt + \int_{\xi''(\varepsilon)}^b f(z) dt$$



**Osservazione.** Qualora le singolarità fossero più di una  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , allora il valore principale è

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^n \int_{\xi_j''}^{\xi_{j+1}'} f(z) dz$$

dove  $\xi_0'' \equiv a$  e  $\xi_{n+1}' \equiv b$

**Esempio.** Si consideri la funzione  $f(z) = (z-x)^{-n}$ , con  $x \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$ ; e la curva  $\gamma(t) = t$ . La funzione ha una singolarità per  $z = x$ . Pertanto

$$I_a = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{1-n} \left[ \frac{1}{(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \right], & n > 1 \\ \ln \varepsilon - \ln(x-a), & n = 1 \end{cases}$$

$$I_b = \int_{x+\varepsilon}^b \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \left[ \frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \right], & n > 1 \\ \ln(b-x) - \ln \varepsilon, & n = 1 \end{cases}$$

Allora, il valore principale è

$$\int_{\gamma} (z-x)^{-n} dz = \int_a^b \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \left[ \frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \right], & n > 1 \text{ e dispari} \\ \ln \frac{b-x}{a-x}, & n = 1 \end{cases}$$

Nel caso di  $n$  pari, il valore principale non è definito perché non esiste il limite della somma.

### 2.8.1 Integrali di linea e forme differenziali

**Definizione.** Una forma differenziale è

$$\omega \equiv P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

dove  $P, Q$  sono funzioni di classe  $C^1$  su  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Esempio.** L'esempio più semplice è il differenziale stesso

$$df = \partial_x f(x, y) dx + \partial_y f(x, y) dy$$

**Definizione.** L'integrale di una forma differenziale  $\omega$  su di una curva  $\gamma$  regolare a tratti

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

risulta essere

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Scrivendo  $dz = dx + i dy$ , si può associare una funzione  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  alla forma differenziale

$$\omega = u dx - v dy + i(u dy + v dx) = (u + iv) dx + i(u + iv) dy = f(z) dx + i f(z) dy = f(z) dz$$

pertanto, l'integrale diventa

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} f(z) dz$$

**Teorema.** di Green. Considerata una forma differenziale  $\omega$  definita su di un dominio  $S$  racchiuso da una curva di Jordan  $\gamma$  con orientazione positiva; allora

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \partial_x Q(x, y) - \partial_y P(x, y) dx dy$$

**Dimostrazione.** Si dimostra separatamente che

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P(x, y) dx &= \iint_S -\partial_y P dx dy \\ \int_{\gamma} Q(x, y) dy &= \iint_S \partial_x Q dx dy\end{aligned}$$

così vale pure la somma membro a membro.

Si consideri una curva  $\gamma$  che limita una regione

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Le funzioni  $g_1$  e  $g_2$  sono funzioni di classe  $C^1([a, b])$ . Si definisce la curva

$$\gamma \equiv \bigcup_i \gamma_i$$

ciascuna  $\gamma_i$  è parametrizzata come

$$\begin{aligned}\gamma_1 : z(t) &= t + ig_1(t), \quad t \in [a, b] \\ \gamma_2 : z(t) &= b + it, \quad t \in [g_1(b), g_2(b)] \\ -\gamma_3 : z(t) &= t + ig_2(t), \quad t \in [a, b] \\ -\gamma_4 : z(t) &= a + it, \quad t \in [g_1(a), g_2(a)]\end{aligned}$$

L'integrale su ciascuna curva è

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} P(x, y) dx &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx \\ \int_{\gamma_2} P(x, y) dx &= \int_{\gamma_4} P(x, y) dx = 0 \\ \int_{\gamma_3} P(x, y) dx &= - \int_{-\gamma_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x)) dx$$

Allora stesso tempo

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \partial_y P(x, y) dx dy &= - \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \partial_y P(x, y) dx dy = - \int_a^b P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x)) dx \\ &= \int_{\gamma} P(x, y) dx\end{aligned}$$

La dimostrazione dell'integrale di  $Q$  è analoga:

$$\int_{\gamma} Q(x, y) dy = \iint_{S_2} \partial_x Q dx dy$$

si utilizza una figura simile, ma ruotata di  $90^\circ$ .

**Teorema.** di Cauchy. In generale, un integrale di linea dipende dal cammino particolare  $\gamma$ . Per le funzioni olomorfe, l'integrale sul cammino prescinde dal cammino, ma dipende solamente dagli estremi.

Esistono due versioni di questo teorema, quella di Cauchy è meno generale.

Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un dominio  $D$  semplicemente connesso, ed una curva chiusa  $\gamma$  su  $D$ ; allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Osservazione.** Esiste una generalizzazione di questo teorema dovuta a Goursat che non richiede l'ipotesi che  $f$  sia derivabile su di un dominio semplicemente connesso, bensì basta assumere che  $\gamma$  sia omotopa ad un punto.

Pertanto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

anche su domini molteplicitamente (contrapposto a semplicemente) connessi se  $\gamma$  è omotopa ad un punto.

**Dimostrazione.** di Cauchy. Una curva generica si può scrivere come unione di curve semplici. Pertanto, si assume che  $\gamma$  sia semplice. Si utilizza il teorema di Green applicandolo ai due reali seguenti

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \iint_S -\partial_y u - \partial_x v dx dy + i \iint_S -\partial_y v + \partial_x u dx dy = 0 \end{aligned}$$

dove nel primo integrale si pone  $P = u$ ,  $Q = -v$  e nel secondo integrale si pone  $P = v$ ,  $Q = u$ . Dato che  $f(z)$  è olomorfa, seguono valere le condizioni di Cauchy-Riemann, pertanto entrambi gli integrali sono nulli.

**Osservazione.** Per la dimostrazione si è richiesto che  $u$  e  $v$  siano funzioni di classe  $C^1$ ; ma il teorema vale più in generale.

**Corollario.** L'integrale di una funzione  $f(z)$  olomorfa sul dominio  $D$  semplicemente connesso non dipende dal cammino particolare  $\gamma$ .

**Dimostrazione.** Si considerino due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in  $D$  con medesimi estremi. Definita la curva  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  e per il teorema di Cauchy si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz = 0 &\iff \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = 0 \\ &\iff \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \iff \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

Visto che il cammino non è importante, allora si scrivono solamente gli estremi di integrazione

$$\int_A^B f(z) dz$$

**Osservazione.** In generale, se  $D$  non è semplicemente connesso allora il teorema non vale.

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \quad a \in \mathbb{C}$$

olomorfa solo su  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Per ogni curva chiusa  $\gamma_2$  che non contiene  $a$  si ha

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

per Goursat. Integrando sulla curva  $\gamma_1$ , circonferenza di raggio  $R$ , che racchiude  $a$  si ha

$$\gamma_1(t) = a + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi), \quad \gamma_1'(t) = iRe^{it}$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + Re^{it} - a} iRe^{it} dt = 2\pi i$$

Più avanti si vede come la formula integrale di Cauchy permette di scrivere una funzione in base a come si espande attorno alle sue singolarità.

## Lecture 7

**Teorema.** Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un dominio  $D$ . Per un punto arbitrario  $z_0 \in D$  si può sempre definire la primitiva

ven 18 mar  
2022 14:30

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

Inoltre, anche  $F(z)$  è una funzione olomorfa e vale

$$F'(z) = f(z)$$

**Dimostrazione.** Si calcola

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_{z_0}^{z+h} f(z') dz' - \int_{z_0}^z f(z') dz' \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z') dz' \end{aligned}$$

Ponendo  $z' = z + \zeta'$  allora

$$F(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z + \zeta') d\zeta'$$

Dato che  $f(z)$  è olomorfa, essa è continua, pertanto

$$f(z + \zeta') = f(z) + g(z, \zeta')$$

dove  $g(z, \zeta')$  è una funzione tale per cui

$$\lim_{\zeta' \rightarrow 0} g(z, \zeta') = 0$$

Dunque

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z) + g(z, \zeta') d\zeta' = f(z) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h g(z, \zeta') d\zeta'$$

La funzione  $g$  è continua e quindi limitata sulla curva di integrazione. Per la disuguaglianza di Darboux si può scrivere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_0^h g(z, \zeta') d\zeta' \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \right| \left| h \max_{\gamma_{0,h}} g(z, \zeta') \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \max_{\gamma_{0,h}} g(z, \zeta') \right| = 0$$

dove  $\gamma_{0,h}$  è una curva tra 0 ad  $h$ . Quindi

$$F'(z) = f(z)$$

**Corollario.** Due primitive di  $f(z)$  differiscono per una costante.

**Corollario.** Il valore di un integrale è il valore della primitiva agli estremi

$$\int_A^B f(z) dz = F(B) - F(A)$$

### 2.8.2 Forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$

La forma differenziale dopo aver usare le condizioni di Cauchy-Riemann si può scrivere come

$$\omega = f(z) dx + (-v + iu) dy$$

**Definizione.** Una forma differenziale

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

si dice chiusa se e solo se

$$\partial_y P = \partial_x Q$$

**Definizione.** Una forma differenziale è esatta se

$$\omega = dg = \partial_x g(x, y) dx + \partial_y g(x, y) dy$$

**Osservazione.** Ogni forma chiusa è anche esatta

$$\partial_x \partial_y g(x, y) = \partial_y \partial_x g(x, y)$$

Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa con primitiva

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

con  $U, V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si può scrivere il differenziale di  $f(z)$

$$\omega = f(z) dz = F'(z) dz = \partial_x (U + iV) dx + \partial_y (U + iV) dy = d(U + iV) = dF$$

Quindi  $\omega = f(z) dz$  è esatta. Inoltre, segue che l'integrale su di una curva in un insieme semplicemente connesso è nullo

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Ogni forma differenziale chiusa è esatta su di un insieme semplicemente connesso.

Ogni forma differenziale  $\omega = f(z) dz$  con  $f(z)$  funzione olomorfa può essere scritta come  $dF$  dove  $F$  è la primitiva di  $F$  e quindi  $\omega$  è esatta. In fisica, questi concetti si applicano ai campi vettoriali

$$\vec{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

L'integrale di linea su un campo vettoriale è

$$\int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

allora la condizione di chiusura corrisponde al campo vettoriale irrotazionale:  $\nabla \times \vec{A} = 0$ .

La forma esatta implica valere

$$\vec{A} = \nabla V$$

dove  $V$  è un campo scalare (quindi  $\vec{A}$  è un campo vettoriale conservativo). Pertanto, su di un dominio semplicemente connesso, le due condizioni coincidono: una forma differenziale chiusa è esatta, cioè un campo irrotazionale è anche conservativo.

**Esempio.** Il lavoro svolto da una forza conservativa non dipende dal cammino. Considerato il campo  $\vec{F}$ , si associa una forma differenziale  $\omega$  chiusa. Dato che  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso, segue esiste un campo scalare  $U$  detto energia potenziale per cui  $\vec{F} = \nabla U$ . Inoltre, il lavoro tra i due punti è

$$\int_A^B F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy = U(B) - U(A)$$

### 2.8.3 Formula integrale di Cauchy

**Teorema.** Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un dominio  $D$  semplicemente connesso; e si consideri una curva di Jordan  $\gamma$  con orientazione positiva. Per ogni  $z_0$  nella regione interna a  $\gamma$  si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**Dimostrazione.** Dato che  $D$  è semplicemente connesso allora si può deformare in modo continuo la curva  $\gamma$  di modo da ottenere una circonferenza  $\gamma_\varepsilon$  di raggio  $\varepsilon$  attorno a  $z_0$ . Inoltre, gli integrali su tali due percorsi sono uguali per il teorema di Cauchy. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= f(z_0) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + \varepsilon e^{i\theta} - z_0} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

Il secondo integrale nel limite tende a zero quando  $\varepsilon$  tende a zero perché l'integrale di una funzione  $f(z)$  continua tende a zero per la lunghezza dell'intervallo di integrazione tendente a zero.

**Osservazione.** Questo teorema permette di costruire i valori di  $f(z)$  all'interno della regione delimitata da  $\gamma$  partendo dai valori su  $\gamma$  stessa. Questa proprietà è detta olografia.

**Corollario.** Se  $f(z)$  è una funzione olomorfa in  $z_0$ , allora essa è ivi differenziabile infinite volte e le derivate si possono scrivere come

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

**Dimostrazione.** Bisogna derivare  $n$  volte la formula integrale di Cauchy rispetto a  $z_0$ , utilizzando il fatto che

$$d_{z_0}^n \frac{1}{z - z_0} = \frac{n!}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Dato che l'integrale è finito, allora  $f$  è differenziabile  $n$  volte in  $z$ . Si può scambiare l'ordine di integrazione e derivazione perché l'integrando e la sua derivata sono continui. Inoltre, l'integrazione avviene in un insieme compatto.

La formula integrale di Cauchy è un caso particolare per curve semplici e chiuse. Se la curva non è semplice, allora essa si può avvolgere più volte attorno a  $z_0$ .

**Definizione.** Il winding number, il numero di avvolgimenti è

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

e si ha

$$n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**Esempio.** Si consideri la circonferenza  $\gamma$  di raggio  $r$  e centro  $z_0$ , percorsa  $k$  volte. La curva è

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2k\pi)$$

Mentre il numero di avvolgimenti è

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2k\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = k$$

**Teorema.** Considerata una curva  $\gamma(t)$  chiusa,  $t \in [a, b]$  e considerato  $z_0 \notin \gamma$ , si ha  $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ .

**Dimostrazione.** Si definisce l'integrale

$$F(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt$$

esso è tale per cui  $F(a) = 0$ . La sua derivata rispetto  $s$  è

$$F'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}$$

Inoltre, la seguente derivata è

$$\begin{aligned} d_s(e^{-F(s)}(\gamma(s) - z_0)) &= -e^{-F(s)}F'(s) + e^{-F(s)}\gamma'(s) \\ &= e^{-F(s)} \left[ -\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}(\gamma(s) - z_0) + \gamma'(s) \right] = 0 \end{aligned}$$

Pertanto

$$e^{-F(b)}(\gamma(b) - z_0) = e^{-F(a)}(\gamma(a) - z_0)$$

Dato che  $\gamma(a) = \gamma(b)$  in quanto la curva è chiusa si ha

$$e^{-F(b)} = e^{-F(a)}$$

Inoltre,  $F(a) = 0$  e dunque

$$e^{-F(b)} = 1 \implies F(b) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tuttavia

$$F(b) = \int_0^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i n(\gamma, z_0) \implies k = n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$$

**Definizione.** Una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un cerchio  $C_R$  di raggio  $R$  attorno a  $z_0 \in \mathbb{C}$  è analitica, cioè si può espandere in serie di potenze (quindi è anche derivabile infinite volte):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{n!} d_z^n f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Il raggio  $R$  è il raggio di convergenza. La serie di potenze così scritta è la serie di Taylor.

**Teorema.** di Morera. Il teorema di Cauchy garantisce che per una funzione  $f(z)$  olomorfa su  $D$  semplicemente connesso si abbia

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

dove  $\gamma$  è una curva di Jordan. Il teorema di Morera afferma che se una funzione ha tale proprietà, allora è olomorfa.

Si consideri una funzione  $f(z)$  su di un dominio  $D$  semplicemente connesso e tale che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

dove  $\gamma$  è una curva semplice chiusa contenuta in  $D$ . Allora  $f(z)$  è olomorfa.

**Dimostrazione.** Si consideri un punto  $z_0 \in D$  e due cammini  $\gamma, \gamma'$  da  $z_0$  a  $z \in D$ . Si definisce la funzione

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta$$

che vale per ogni  $z$  in un intorno di  $z_0$  contenuto in  $D$ . Inoltre vale

$$\int_{\gamma_{z_0, z} - \gamma'_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta = 0$$

per ipotesi. Si consideri il punto  $z + h$  e si consideri la curva  $\Gamma$  che parta da  $z_0$ , passi per  $z + h$ , per  $z$  per poi ritornare a  $z_0$ . Pertanto

$$0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = F(z + h) + \int_{\gamma_{z+h, z}} f(\zeta) d\zeta - F(z)$$

Dato che  $f$  è continua su  $D$ , segue  $F$  è differenziabile e che il rapporto incrementale è

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z, z+h}} f(\zeta) d\zeta = f(z)$$

dove l'ultima uguaglianza è motivata nello stesso modo della dimostrazione dell'esistenza della primitiva di una funzione olomorfa (cioè il teorema e la sua dimostrazione ad inizio lezione).

Dato che ciò vale  $\forall z_0 \in D$  allora  $F(z)$  è olomorfa e quindi analitica. Pertanto, tutte le derivate sono funzioni olomorfe, in particolare  $F'(z) = f(z)$ .

**Proposizione.** Si vede un utile risultato. Considerata una circonferenza

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

vale

$$I_n = \int_C (z - z_0)^n dz = 2\pi i \delta_{n, -1}$$

con  $n \in \mathbb{Z}$  e dove  $\delta$  è il delta di Kronecker.

**Dimostrazione.** Considerato  $n \geq 0$ , segue che  $I_n$  è nullo per il teorema di Cauchy. Considerato  $n < 0$  e  $m = -n > 0$ , si ha

$$I_n = I_{-m} = \int_C \frac{1}{(z - z_0)^m} dz$$

Per  $m = 1$  si ha

$$I_{-1} = \int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} = n(\gamma, z_0) 2\pi i = 2\pi i$$

dove  $n(C, z_0)$  è il numero di avvolgimenti. Per  $m > 1$  si ha

$$I_{-m} = \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^m} = \partial_{z_0}^{m-1} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = \partial_{z_0}^{m-1} 2\pi i = 0$$

Dunque, segue la tesi.



## Lecture 8

lun 21 mar  
2022 12:30

Ulteriori proprietà delle funzioni olomorfe si possono dedurre dalla formula integrale di Cauchy

**Teorema.** Valor medio. Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  semplicemente connesso. Vale

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

che è il valor medio della funzione sulla circonferenza.

**Dimostrazione.** Si applica la formula integrale di Cauchy con  $z_0 = a$  e  $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Pertanto

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{a + re^{i\theta} - a} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

**Definizione.** Dato uno spazio topologico  $S$  (un insieme in cui sono definiti degli insiemi aperti e sia chiusa l'operazione di unione) ed un punto  $z_0 \in S$ . Dicesi  $z_0$  punto di bordo di  $S$  se ogni intorno di  $z_0$  contiene sia punti di  $S$  che del suo complementare  $S^c$ . L'insieme dei punti di bordo è la frontiera  $\partial S$ .

**Teorema.** Massimo modulo. Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa e non identicamente costante su di un dominio  $D$  limitato tale che  $f$  sia continua sul suo bordo. Allora  $|f(z)|$  raggiunge il proprio valore massimo sulla frontiera di  $D$ . Se  $f(z) \neq 0$  in  $D$ , allora anche il minimo di  $|f(z)|$  è sulla frontiera di  $D$ .

**Dimostrazione.** Si consideri un disco

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$$

dove  $f$  non sia identicamente costante. Per ogni circonferenza

$$C_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + re^{i\theta}, r, \theta \in \mathbb{R}\}$$

di centro  $z_0$  contenuta in  $D(z_0, R)$ , per il teorema del valor medio si ha

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

Esiste un valore di  $r$  per cui l'uguaglianza è stretta. Se valesse l'uguaglianza (e quindi vale per ogni  $r, \theta$ ), allora una funzione olomorfa di modulo costante, è una funzione costante, che non è contemplato per ipotesi. Pertanto, esiste un punto  $z_1$  su tale circonferenza in  $z_0$  tale per cui  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ . Per l'arbitrarietà di  $z_0$ , questo vale ogni punto di  $D(z_0, R)$ , e dunque il massimo non può essere un punto interno dell'insieme  $D$ . Tuttavia, una funzione continua su di un insieme compatto ha un massimo. Pertanto, tale massimo si deve trovare nella chiusura di  $D$ , ma visto che non è interno, segue che esso è sulla frontiera.

Per dimostrare che il minimo è anch'esso sul bordo qualora  $f(z) \neq 0$  in  $D$ , si studia  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ . Senza l'ipotesi aggiuntiva su  $|f|$ , vien da sé che il minimo del modulo è nel punto  $z$  in cui  $f(z) = 0$  (si nota che il modulo è non negativo).

**Teorema.** di Liouville. Una funzione  $f(z)$  olomorfa e limitata su  $\mathbb{C}$  (cioè intera e limitata) è costante.

**Dimostrazione.** La limitatezza garantisce l'esistenza di un numero reale  $M$  tale per cui  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Si consideri una circonferenza in  $z_0$  di raggio  $R$ :  $\gamma(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$ . Per la formula integrale di Cauchy si scrive la derivata prima di  $f$  in  $z_0$

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| = \frac{1}{2\pi R} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi M}{R} = \frac{M}{R} \end{aligned}$$

dato che  $f(z)$  è intera (e quindi olomorfa su  $\mathbb{C}$ ) si può scegliere  $R$  arbitrariamente grande, pertanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f'(z_0)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R} = 0$$

Dato che la derivata di  $f$  è nulla per ogni punto del piano complesso, segue che  $f$  è identicamente costante ovunque.

**Teorema.** fondamentale dell'algebra. Un polinomio complesso (cioè un polinomio con coefficienti complessi) di grado  $n$  ha  $n$  radici complesse.

**Dimostrazione.** Si consideri il polinomio

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

Per  $n = 0$  la tesi è immediata, perché ci sono zero radici in  $\mathbb{C}$ . Si consideri  $n \geq 1$ . La funzione  $\frac{1}{P(z)}$  tende a zero per  $z \rightarrow \infty$ . Se  $P(z)$  non si annullasse, allora  $\frac{1}{P(z)}$  sarebbe una funzione olomorfa in tutto  $\mathbb{C}$ . Inoltre, grazie al limite precedente, essa sarebbe limitata (oltre a non essere costante). Tuttavia, ciò contraddice il teorema di Liouville. Pertanto, esiste almeno una radice  $\alpha_1$ . Scrivendo  $z \equiv z - \alpha_1 + \alpha_1$  in  $P(z)$  ed espandendo le potenze si ha

$$P(z) = \sum_{j=0}^n c_j (z - \alpha_1)^j$$

con  $c_j$  funzioni di  $a_j$  ed  $\alpha_1$ . Dato che  $P(\alpha_1) = 0$  segue  $c_0 = 0$  e si può fattorizzare il polinomio

$$P(z) = (z - \alpha_1) P_{n-1}(z) = (z - \alpha_1) \sum_{j=0}^{n-1} c_j (z - \alpha_1)^j$$

Ripetendo quanto fatto, ottenendo ogni volta la relazione

$$P_{n-j}(z) = (z - \alpha_j) P_{n-j-1}(z)$$

Fino ad arrivare a

$$P(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) P_0(z)$$

dove  $P_0(z)$  un polinomio di ordine zero, cioè una costante. Confrontando con i coefficienti  $a_n$  si ottiene  $P_0(z) = a_n$ . Dunque, si sono ottenute  $n$  radici per un polinomio di grado  $n$ .

**Teorema.** di unicità. Tutti gli zeri di una funzione olomorfa sono punti isolati.

Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  tale che  $f(z_n) = 0$  per ogni elemento della successione  $\{z_n\}$  in  $D$ , con  $z_n \neq z_0$  punto di convergenza della successione. Allora  $f(z) = 0$ ,  $\forall z \in D$ .

**Dimostrazione.** Per olomorfia, esiste un disco  $D_0$  centrato in  $z_0$  in cui  $f(z)$  si può scrivere come serie di Taylor intorno  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

dato che  $f$  è continua e  $f(z_n) = 0$ , si ha

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Si scrive  $f(z)$  con una funzione  $g(z)$  olomorfa

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} = f'(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0) + \dots$$

Dato che  $g$  è continua, segue

$$f'(z_0) = g(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Riprendendo tale procedimento per  $g(z)$ , si ottiene  $g'(z_0) = f''(z_0) = 0$ . Continuando ad infinitum, si mostra che tutti i coefficienti della serie di Taylor sono nulli e dunque  $f(z) \equiv 0$ .

Si considera  $z_1 \in \partial D_0$ ,  $z_1 \in D$ . Dato che  $f(z_1) = 0$ , segue esistere una sequenza  $\{z_n\}$  e si può trovare un disco  $D_1$  che si sovrappone parzialmente con  $D_0$  e sul quale  $f(z) = 0$ ,  $\forall z \in D_0 \cap D_1$ . In quanto  $D$  è un insieme connesso, si può estendere la procedura fino a coprire tutto  $D$ .

**Osservazione.** Risulta cruciale che  $z_0 \in D$ . Altrimenti, la funzione

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

è olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ed è nulla su tutti i punti della successione  $z_n = \frac{1}{n\pi}$ . La successione converge a zero, ma esso non è un punto di  $D$ . Il teorema non si può applicare, infatti tale funzione non è identicamente nulla in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Corollario.** Se la funzione  $f(z)$  olomorfa è nulla in un aperto contenuto nel dominio  $D$  allora essa è nulla su tutto il dominio.

## 2.9 Serie di Laurent

L'olomorfia e l'analiticità sono proprietà strettamente collegate nell'insieme dei numeri complessi: una funzione olomorfa si può scrivere come serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

per ogni  $z_0 \in D$  in cui  $f(z_0)$  sia olomorfa e per ogni disco  $|z - z_0| < R$  interamente contenuto in  $D$ , si ha

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dove  $\gamma$  è una curva chiusa, semplice e positivamente orientata che contiene  $z_0$ .

**Osservazione.** La funzione  $f(z)$  è analitica perché può essere differenziabile infinite volte.

**Osservazione.** Questo fatto non accade nell'insieme dei numeri reali. Esso è una differenza importante tra analisi reale ed analisi complessa.

**Esempio.** La serie di Taylor di una funzione reale è

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Se essa converge in un intorno di  $x_0$  e la somma coincide con  $f(x)$  allora la funzione  $f(x)$  è analitica. Tuttavia, esistono funzioni di classe  $C^\infty$  che non sono analitiche:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Essa è differenziabile infinite volte, ma ha una serie di Taylor attorno a  $x_0$  che è identicamente nulla. Tuttavia,  $f(x) \neq 0$  per ogni  $x \neq x_0$  in un intorno di  $x_0$ . Pertanto,  $f(x)$  non è analitica.

## Lecture 9

mar 22 mar  
2022 12:30

Per domini non semplicemente connessi è possibile dare una rappresentazione in serie per una funzione olomorfa su di un anello. Risulta tipico utilizzare questo tipo di serie con singolarità isolate. La serie che si ottiene è una serie bilatera e si chiama serie di Laurent.

**Teorema.** Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa su di un anello

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

dove  $z_0 \in \mathbb{C}$  è il centro e  $r < R$  sono i raggi. Su tale insieme si può rappresentare la funzione  $f(z)$  come

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

I coefficienti  $d_n$  sono dati da

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dove  $\gamma$  è una curva semplice, chiusa, con orientazione positiva all'interno di  $K$  contenente  $z_0$ . Il primo addendo della serie è detto parte regolare, il secondo addendo è detto parte principale.

**Osservazione.** In generale si ha

$$d_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

perché la serie non contiene più potenze solamente positive. Quindi i coefficienti non si possono scrivere in termini di semplici derivate ( $z_0$  può essere una singolarità).

**Proposizione.** Si vede un corollario del teorema di Cauchy. Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa su di un dominio  $D$  (non necessariamente semplicemente connesso). Si consideri un insieme di curve chiuse semplici, orientate positivamente,  $\gamma, \gamma_i$ , che non intersecano tra loro. Sia  $\gamma$  una curva che contenga ogni  $\gamma_i$  e sia  $S \subset D$  un insieme semplicemente connesso limitato da  $\gamma$  e  $\gamma_i$ . Vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

**Dimostrazione.** Per ogni curva interna a  $\gamma$ , si aggiungono due segmenti orientati. Il primo,  $\overline{AB}_i$ , dalla curva interna alla curva  $\gamma$ ; il secondo,  $\overline{CD}_i$ , in verso opposto. Tali segmenti si posizionano in modo che  $A$  sia infinitamente vicino a  $D$  e medesimo per  $B$  con  $C$ . A questo punto, per l'orientazione positiva delle curve, si costruisce la frontiera

$$\Gamma = -\gamma + \sum_i \overline{CD}_i + \gamma_i + \overline{AB}_i$$

Essa limita l'insieme semplicemente connesso  $S \subset D$ . Per il teorema di Cauchy segue

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_i \int_{AB_i} f(z) dz + \int_{\gamma_i} f(z) dz + \int_{CD_i} f(z) dz \\ &= - \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_i \int_{\gamma_i} f(z) dz \end{aligned}$$

Gli integrali sui segmenti aggiunti sono uguali ed opposti, perché infinitesimamente vicini. La tesi segue immediatamente.

**Dimostrazione.** Si consideri un punto  $z$  nell'anello  $K$  ed una curva  $\tilde{\gamma}$  semplice chiusa in  $K$  che circonda  $z$ . Inoltre, siano  $\gamma$  e  $\Gamma$  due circonferenze di centro  $z_0$  che definiscono una corona circolare in  $K$  contenente  $z$  e  $\tilde{\gamma}$ . Per la formula integrale di Cauchy, si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

Nella regione delimitata dalle curve  $\Gamma$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma}$ , la funzione integranda è olomorfa. Si applica la proposizione precedente. Nel caso in esame si ha

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \int_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0$$

Utilizzando la formula integrale di Cauchy precedente si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

Si calcola l'integrale su  $\Gamma$ . Si riscrive la frazione integranda

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} = \frac{1}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n$$

Si utilizza la serie geometrica in quanto vale  $|z - z_0| < |z' - z_0|$  (cioè un generico punto all'interno della regione delimitata dalle curve  $\Gamma$ ,  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  è più vicino al centro di un punto che si trova su  $\Gamma$ , cioè sulla circonferenza più esterna). Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z' - z} dz' &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n dz' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n dz' = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Si è ottenuta la parte regolare.

Si calcola l'integrale su  $\gamma$ . Dato che  $|z - z_0| > |z' - z_0|$ , segue potersi scrivere

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0 - (z - z_0)} = - \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}} = - \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale e ponendo  $k = n + 1$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' &= - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z - z_0)^{n+1}} (z' - z_0)^n dz' \\ &= - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{-k+1}} \frac{1}{(z - z_0)^k} dz' = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{-k}}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

Si è ottenuta la parte principale.

Dato che  $f(z)$  è olomorfa sull'anello  $K$ , si possono deformare continuamente le curve  $\Gamma$  e  $\gamma$  fino a farle coincidere. A tal punto si ottengono le espressioni nella tesi per  $f(z)$  e per i coefficienti  $d_n$ .

**Osservazione.** Il valore minimo ed il valore massimo dei raggi  $r$  ed  $R$  sono

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |d_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}, \quad n \geq 0$$

cioè la parte regolare è una serie di potenze centrata in  $z_0$  e convergente nel disco  $|z - z_0| < R$ . Allora stesso modo la parte principale si può intendere come una serie di potenze nella variabile  $w = \frac{1}{z - z_0}$  convergente sul disco  $|w| < \frac{1}{r}$  dove

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |d_{-k}|^{\frac{1}{k}}, \quad n \geq 1$$

L'intersezione delle due regioni dà  $r < |z - z_0| < R$ . La serie converge uniformemente sull'anello  $K$  e su ogni suo sotto-anello.

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{12}{z(z+1)(2-z)}$$

Essa ha tre poli semplici in  $z = -1, 0, 2$ . Inoltre, essa è olomorfa in tre regioni:

- $0 < |z| < 1$
- $1 < |z| < 2$
- $2 < |z| < \infty$

Si calcola la serie di Laurent in ogni regione. Una metodologia comoda a tal fine è decomporre la funzione in frazioni elementari (tramite la decomposizione in fratti semplici) e scrivere ciascuna frazione come una serie geometrica. Dunque, per trovare le serie di Laurent conviene scrivere

$$f(z) = \frac{4}{z} \left( \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z} \right)$$

In quanto  $|z| < 1$ , segue

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, \quad \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

Pertanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [4(-1)^n + 2^{-n+1}] z^{n-1}$$

Il raggio più piccolo è  $r = 0$ , mentre il raggio più grande è  $R = 1$  perché qualsiasi numero sotto radice  $n$ -esima tende ad 1.

Nella seconda regione si ha  $\frac{|z|}{2} < 1$ , ma  $|z| > 1$ , dunque

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}$$

mentre la serie geometrica già utilizzata per l'altro addendo è ancora valida. Pertanto, la serie di Laurent risulta essere

$$f(z) = \frac{4}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \frac{2}{z} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}$$

Nell'ultima regione, la serie geometrica del primo addendo è identica al caso precedente, mentre per il secondo addendo si ha

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

La serie di Laurent corrispondente è

$$f(z) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n+2}}$$

che converge per  $|z| > 2$ .

**Serie di Laurent e singolarità isolate.** I poli ed i coefficienti delle espansioni sono strettamente connessi. Il numero di potenze negative determina la natura del polo. Per un numero infinito di potenze negative si ha una singolarità essenziale.

Considerata una singolarità isolata  $z_0$  di una funzione  $f(z)$ , esiste un anello

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

in cui  $f(z)$  è olomorfa e, dunque, esiste l'espansione in serie di Laurent. La forma della serie contiene informazioni sulla natura della singolarità:

- Se  $z_0$  è una singolarità rimovibile, allora la parte principale è assente. La serie di Laurent coincide con la serie di Taylor. Questo perché sostituendo la funzione con la sua serie di Taylor in un intorno di  $z_0$ , si rimuove tale punto di singolarità.
- Se  $z_0$  è un polo di ordine  $k$ , allora la parte principale della serie di Laurent contiene solamente i primi  $k$  termini

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

cioè  $d_{-k} = 0, \forall k > n$  e  $d_{-n} \neq 0$ . Anche gli altri  $d_{-k}, k < n$ , possono essere nulli.

- Se  $z_0$  è una singolarità essenziale, allora la parte principale della serie di Laurent contiene infinite potenze negative

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^5(z+1)}$$

Essa ha un polo semplice in  $z = -1$  ed un polo di ordine quinto in  $z = 0$ . In un intorno di  $z = 0$  si ha  $|z| < 1$  e dunque

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-5} = \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^{k+1}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k$$

La parte principale si ferma a  $d_{-5} = 1$  e si conferma che  $z = 0$  è difatti un polo di ordine quinto. Si studia il punto  $z = -1$ . Si pone  $u = z + 1$  e come nel caso precedente, si riscrive la parte non singolare come una serie geometrica

$$f(u) = \frac{1}{u} \frac{1}{(u-1)^5} = -\frac{1}{u} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u^n \right)^5 = -\frac{1}{u} - 5 - 15u - 35u^2 + \dots$$

In questo caso, la parte principale contiene solamente il termine  $d_{-1}$  confermando che  $z = -1$  è un polo semplice.

**Esempio.** La funzione  $e^{\frac{1}{z}}$  ha una singolarità isolata essenziale in  $z = 0$  ed è olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La sua serie di Laurent in  $z = 0$  è

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

e converge per  $0 < |z| < \infty$ . Tutti i coefficienti  $d_k$  per  $k > 0$  svaniscono. Si ha un numero infinito di potenze negative attorno a  $z = 0$ . Si calcola il raggio di convergenza

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |d_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

perché  $d_n = 0$  per  $n \geq 0$ . Invece

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{-n-1}}{d_{-n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Pertanto  $e^{\frac{1}{z}}$  su  $0 < |z| < \infty$  e la singolarità essenziale in  $z = 0$  implica un numero finito di  $d_{-k}$ .

## Lecture 10

lun 28 mar  
2022 12:30

### 2.10 Prolungamento analitico

Si una funzione  $f(z)$  olomorfa già definita su di un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  in un altro dominio  $D' \subset D$ . Data  $f(z)$ ,  $z \in D$ , si vuole trovare una funzione olomorfa  $g(z)$ ,  $z \in D'$  tale che

$$f(z) = g(z) \iff z \in D \cap D'$$

Si può definire l'estensione

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ g(z), & z \in D' \end{cases}$$

Questa funzione estesa è olomorfa su  $D \cup D'$  e si riduce a  $f(z)$  su  $D$ .

**Definizione.** La funzione  $\tilde{f}(z)$  è detta prolungamento analitico di  $f(z)$ .

**Teorema.** Se  $\tilde{f}(z)$  esiste, allora è unica.

**Dimostrazione.** Siano  $\tilde{f}_1(z)$  e  $\tilde{f}_2(z)$  due prolungamenti analitici di  $f(z)$  che la estendono da  $D$  a  $D' \supset D$ . Si definisce una funzione olomorfa su  $D'$

$$\tilde{h}(z) = \tilde{f}_1(z) - \tilde{f}_2(z)$$

La funzione  $\tilde{h}$  è nulla in  $D$ . Allora, per il teorema di unicità,  $\tilde{h}$  si annulla su tutto il dominio  $D'$ .

**Osservazione.** [immagine] Si considerino due insiemi  $\Omega$ ,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  con  $\Omega \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ ,  $\Omega \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  e  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ . La prima intersezione implica che la funzione  $f(z)$  ha prolungamento  $\tilde{f}_1(z)$  in  $\Omega_1$ . Allo stesso modo, la seconda intersezione implica che la funzione  $f(z)$  ha prolungamento  $\tilde{f}_2(z)$  in  $\Omega_2$ .

Qualora  $\Omega \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2) \neq \emptyset$ , segue che il prolungamento è unico e  $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ ,  $\forall z \in \Omega \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Tuttavia, qualora  $\Omega \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2) = \emptyset$ , segue che il prolungamento analitico può non essere più unico e si ha

$$\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z), \quad \forall z \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Pertanto,  $f(z)$  estesa è una funzione poldroma in  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ . Questo succede se nella regione delimitata dai tre insieme è presente una singolarità.



**Osservazione.** L'unicità della continuazione analitica è un risultato fondamentale dell'analisi complessa. Una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un insieme aperto  $\Omega$  è univocamente determinata per quanto piccolo sia  $\Omega$ . Questo non risulta essere vero su  $\mathbb{R}^n$ .

Infatti, su  $\mathbb{R}$ , una funzione  $g(x)$  di classe  $C^\infty$  su di un intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  può essere estesa all'intervallo  $[a, c]$ , con  $c > b$  in modi diversi. Risulta sufficiente trovare una funzione  $\tilde{g}(x)$  di classe  $C^\infty$  tale che tutte le sue derivate in  $b$  coincidano con quelle di  $g(b)$ :

$$d_x^n \tilde{g}(b) = d_x^n g(b)$$

Questo può essere fatto in infiniti modi diversi. Il ragionamento analogo vale per  $\mathbb{R}^n$ .

Si vuole trovare il massimo dominio  $D'$  di olomorfia a cui poter estendere una funzione  $f(z)$  olomorfa sul dominio  $D \subset D'$ . Esistono diversi modi per calcolare la continuazione (prolungamento) analitica ed ognuno di essi è valido in un sotto-dominio del massimo dominio possibile. I tipi di prolungamento sono

- Estensione per serie di potenze.
- Rappresentazione integrale.
- Espressione analitica.

**Estensione per serie di potenze.** Si utilizza il metodo di Weierstrass detto anche estensione per cerchi. Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un disco  $D_0$  centrato nell'origine (qualora non lo fosse, si può sempre traslare l'argomento della funzione). Si supponga che tale funzione abbia una singolarità  $z_0$  sulla frontiera di  $D_0$ . Si sceglie un punto  $z_1 \in D_0$  e si rappresenta la funzione come una serie di Taylor centrata in  $z_1$ , il cui raggio di convergenza può essere al più  $r_1 = |z_1 - z_0|$ , cioè la distanza tra il centro  $z_1$  e il punto singolare  $z_0$ . Sia tale serie di Taylor  $f_1(z)$ . Per costruzione  $f(z) = f_1(z)$ ,  $\forall z \in D_0 \cap D_1$  (dove  $D_1$  è il disco in cui converge la serie di Taylor). Se  $D_1$  non è completamente contenuto in  $D_0$ , allora  $f_1$  fornisce un prolungamento analitico di  $f$ . Si può ripetere la costruzione per  $z_2 \in D_1$ . Continuando, si può costruire un'estensione olomorfa della funzione  $f$  fino al massimo dominio di olomorfia.

**Esempio.** Si consideri la serie geometrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Essa converge per  $|z| < 1$ . Pertanto, il suo dominio di olomorfia è  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . La funzione definita sul disco  $D$  ha un unico punto di singolarità sulla frontiera di  $D$ :  $z = 1$ . Si applica il metodo di Weierstrass. Si consideri  $z = \frac{i}{2}$ . Si estende la funzione ad disco di raggio  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (cioè la distanza da 1):

$$f(z) = f\left(\frac{i}{2}\right) + f'\left(\frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) + \dots = \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{i}{2}\right)^2}\left(z - \frac{i}{2}\right) + \dots$$

Così si è esteso il dominio di olomorfia. Continuando, si può arrivare al dominio massimo  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Tuttavia, il metodo di Weierstrass non è l'unico metodo per questa funzione. Infatti, la funzione  $\frac{1}{1-z}$  ha un polo semplice in  $z = 1$  e dunque è olomorfa altrove.

**Esempio.** Si vede una funzione il cui dominio massimo è quello di partenza. Si consideri la funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

Il raggio di convergenza è

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} = 1$$

Infatti,  $a_k = 0$  per  $k$  dispari e  $a_k = 1$  per  $k$  pari. Dunque, la serie converge per  $|z| < 1$ . La disuguaglianza stretta deriva dal fatto che la serie diverge per  $z = 1$ . Tuttavia, tale punto non è l'unica singolarità. Se  $z_0$  è una  $2^k$ -esima radice dell'unità, allora  $z_0^{2^k} = 1$ . Pertanto,  $z_0^{2^k} = \left(z_0^{2^k}\right)^{2^{n-k}} = 1$  per  $n \geq k$ . Pertanto

$$f(z_0) = z_0 + z_0^2 + z_0^4 + \dots + z_0^{2^{k-1}} + \sum_{n=k}^{\infty} 1 = \infty$$

Pertanto, la serie diverge per ogni

$$z_{p_k} = e^{\frac{2\pi i}{2^k} p_k}, \quad p_k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Quindi, per  $k \rightarrow \infty$ , le singolarità sono dense sulla circonferenza unitaria che è una frontiera naturale per la funzione  $f$ . Dunque  $|z| < 1$  definisce il massimo dominio di  $f(z)$ .

**Rappresentazione integrale.** Si scrive la funzione in termini di un integrale. Si consideri la funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

olomorfa sul disco unitario centrato nell'origine:

$$R = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|n+1|^{\frac{1}{n}}} \right]^{-1} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n} \ln(n+1)} \right)^{-1} = 1$$

Utilizzando il fatto che

$$\frac{1}{1+n} = \int_0^1 t^n dt$$

si può scrivere la funzione come

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (tz)^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (tz)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1-tz} dt$$

con  $|z| < 1$ . L'ultimo integrale ha senso anche oltre il disco unitario. Infatti, l'unica singolarità dell'integrando è  $t = \frac{1}{z}$ , che si trova sull'intervallo di integrazione  $[0, 1]$  sse  $z \in [1, \infty)$ . Come conseguenza, la funzione diviene definita su  $D = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  dove è continua e per il teorema di Morera è ivi olomorfa. Questo è atteso perché  $f(z)$  è una funzione di solo  $z$  e non  $\bar{z}$ . In questo esempio, si può semplicemente svolgere l'integrale trovando

$$f(z) = -\frac{\ln(1-z)}{z}$$

che è olomorfa in  $D$ .

**Esempio.** Si vede la funzione  $\Gamma$  di Eulero:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Dato che

$$|t^{z-1}| = \left| e^{(z-1) \ln t} \right| = e^{(\operatorname{Re}(z)-1) \ln t} = t^{\operatorname{Re}(z)-1}$$

segue che l'integrale esiste in  $t = 0$  solamente per  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Infatti, per  $t \sim \infty$ , l'integrale è dominato dall'esponenziale ed è integrabile. Per  $t \sim 0$ , l'integrale

$$\int_0^a t^\alpha dt \sim \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \Big|_{t=0}^{t=a}$$

converge in  $t = 0$  per  $\alpha > -1$ . Per Morera si dimostra che  $\Gamma(z)$  è olomorfa

$$\int_\gamma \Gamma(z) dz = \int_\gamma dz \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt \int_\gamma t^{z-1} dz = \int_0^\infty e^{-t} dt \cdot 0 = 0$$

La funzione gamma è la generalizzazione dell'operazione di fattoriale ai numeri complessi. Infatti

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \\ \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt = z \Gamma(z) \end{aligned}$$

Da cui  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . In  $z = 0$ , la funzione è singolare

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

che diverge. Si può estendere la funzione al più a  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N} \cup \{0\})$ . Infatti

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Il secondo integrale è ben definito per  $\operatorname{Re}(z) < 0$  dato che non ha singolarità in  $[1, \infty)$ . Nel primo integrale, si può espandere l'esponenziale in serie di Taylor attorno  $t = 0$  e integrare termine a termine

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n t^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z-1+n} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{z+n}}{z+n} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \end{aligned}$$

Si ottiene la rappresentazione

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

che è definita su  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N} \cup \{0\})$ . Inoltre, si vede che  $z = -n$  sono dei poli semplici. Infatti,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \Gamma(z+n+1) \prod_{k=0}^n \frac{1}{z+k}$$

Dato che  $\Gamma(1) = 1$  segue

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \Gamma(z+n+1) \prod_{k=0}^n \frac{1}{z+k} = \Gamma(1) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{-n+k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{n-k} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0 < \infty$$

Pertanto,  $z = -n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , è un polo semplice.

## Lecture 11

mar 29 mar  
2022 12:30

### 2.11 Residui

Si generalizza il teorema di Cauchy al caso in cui l'integrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

si calcoli su di una curva chiusa  $\gamma$  che circonda delle singolarità di  $f(z)$ .

**Definizione.** Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa con una singolarità isolata nel punto  $z_0$ . Dicesi residuo di  $f$  in  $z_0$ , il coefficiente  $d_{-1}$  della serie di Laurent di  $f$  centrata in  $z_0$ :

$$d_{-1} \equiv \text{Res}[f, z_0]$$

Si consideri una curva  $\gamma$  chiusa, semplice e positivamente orientata nel dominio  $D$  di olomorfia della funzione  $f(z)$ , e tale per cui circonda solamente la singolarità  $z_0$  e nessun'altra. Allora l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  è dato da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \equiv \text{Res}[f, z_0]$$

**Proposizione.** Il risultato precedente è indipendente da  $\gamma$  come ci si aspetta dal teorema di Cauchy.

**Dimostrazione.** La serie di Laurent della funzione  $f(z)$  attorno  $z_0$  è

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n$$

e converge sull'anello

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$$

Si considera una curva  $\gamma$  in  $K$  e si sostituisce la serie di Laurent nella formula integrale del residuo:

$$\text{Res}[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$$

Si ricorda che

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1} = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1 \end{cases}$$

dove  $\delta$  è il delta di Kronecker. Pertanto, l'espressione per il residuo diventa

$$\text{Res}[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n 2\pi i \delta_{n,-1} = d_{-1}$$

**Osservazione.** Il residuo può essere zero. Per esempio,  $d_{-1} = 0$ , ma  $d_{-n} \neq 0$  con  $n > 1$ .

**Esempio.** Si consideri la funzione vista verso la fine della lezione 9:

$$f(z) = \frac{1}{z^5(z+1)}$$

Osservando le sue serie di Laurent, si nota che il residuo in zero è

$$\text{Res}[f, 0] = 1$$

Mentre in  $-1$  è

$$\text{Res}[f, -1] = -1$$

**Esempio.** Per la funzione  $f(z) = \Gamma(z)$  il residuo è

$$\text{Res}[f, -k] = \frac{(-1)^k}{k!}$$

dove  $k \in \mathbb{N}$ .

**Osservazione.** Se  $z_0$  è un polo di ordine  $n$ , allora si può calcolare il residuo come

$$\text{Res}[f, z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} d_z^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)]$$

Infatti, una funzione con un polo di ordine  $n$  in  $z_0$  si può scrivere, in un intorno di  $z_0$ , come

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

dove  $g(z)$  è olomorfa e non si annulla in  $z_0$ . Si usa l'espansione in serie di Taylor per  $g(z)$  e si ottiene la serie di Laurent per  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-n}$$

Il coefficiente di  $(z - z_0)^{-1}$  corrisponde a  $k = n - 1$  ed il residuo è

$$\frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} d_z^{n-1} g(z_0)$$

Dato che  $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ , si ottiene la tesi.

**Proposizione.** Un'altra formula utile per il residuo di un polo semplice  $z_0$  di una funzione della forma

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

dove  $h$  è olomorfa,  $g$  ha uno zero semplice in  $z_0$ , e  $h(z_0) \neq 0$ . Allora, il residuo di  $f$  in  $z = z_0$  è dato da

$$\text{Res}[f, z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Quando  $g'(z) = z - z_0$  allora il residuo è  $\text{Res}[f, z_0] = h(z_0)$ .

**Dimostrazione.** L'espansione in serie di Laurent di  $f(z)$  si ottiene tramite Taylor, espandendo le funzioni

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = h(z_0) + h'(z_0)(z - z_0) + \dots \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= g'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} g''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

ricordando che  $g(z_0) = 0$ . Pertanto

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} \sim \frac{1}{z - z_0} \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

da cui la tesi.

**Residuo all'infinito.** Una funzione  $f(z)$  può avere una singolarità in  $z = \infty$ . Se la singolarità è un punto isolato, si può definire il residuo della funzione in infinito. Si consideri una circonferenza

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$$

con  $R$  grande abbastanza da contenere tutte le altre possibili singolarità di  $f(z)$ . Si definisce il residuo di  $f(z)$  all'infinito come

$$\text{Res}[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz$$

dove  $-\gamma$  descrive la circonferenza  $\gamma$ , ma percorsa in senso opposto (questo perché la serie di Laurent, e quindi  $d_{-1}$  cioè il residuo, è definita per curve di Jordan orientate positivamente; dunque, cambiando l'orientazione cambia anche l'interno e l'esterno della curva: il punto all'infinito che si trova all'esterno di  $\gamma$ , diventa un punto all'interno di  $-\gamma$ ; la visualizzazione risulta più semplice quando si considera la sfera di Riemann al posto del piano complesso per sé). Il punto all'infinito può essere mappato a  $w = 0$  tramite  $w = \frac{1}{z}$ . Il residuo diventa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw$$

dove  $\gamma'$  è una circonferenza di centro  $w = 0$  e raggio  $\frac{1}{R}$  con orientazione positiva. Per costruzione,  $\gamma'$  contiene solamente la singolarità  $w = 0$ . Il residuo di  $f(z)$  in  $z = \infty$  è dato dal residuo di  $w = 0$  della funzione

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

**Osservazione.** Si nota che  $\text{Res}[f, \infty]$  può non essere nullo anche se  $f(z)$  è regolare a  $z = \infty$  (cioè non è un polo).

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Il residuo all'infinito è

$$\text{Res}[f, \infty] = \text{Res}\left[-\frac{1}{w^2} w, 0\right] = -1$$

**Esempio.** La funzione  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  è olomorfa in  $z = \infty$ . Dalla serie di Laurent di  $g(w)$  in  $w = 0$  si ha

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+2)!}$$

Dunque,  $\text{Res}[f, \infty] = \text{Res}[g, 0] = -1$ .

**Teorema.** dei residui. Si consideri una funzione  $f(z)$  olomorfa su di un dominio  $D$  semplicemente connesso tranne per singolarità isolate ai punti  $z_k$ . Se  $\gamma \subset D$  è una curva chiusa, semplice e positivamente orientata che circonda tutte le singolarità di  $f(z)$  allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f, z_k]$$

**Corollario.** Quando  $\gamma$  non è semplice oppure non è positivamente orientata, allora la tesi del teorema diventa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k n(\gamma, z_j) \text{Res}[f, z_j]$$

dove  $n(\gamma, z_j)$  è l'indice con segno degli avvolgimenti.

**Dimostrazione.** Si consideri  $\gamma_j$  curve semplici, chiuse e positivamente orientate all'interno di  $\gamma$ , ognuna circondando solo una singolarità  $z_j$ . Allora, per il (corollario del) teorema di Cauchy si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f, z_k]$$

cioè la tesi.

**Osservazione.** Il teorema dei residui permette di calcolare l'integrale di una funzione olomorfa lungo una curva chiusa conoscendo i valori dei residui di tale funzione alle singolarità all'interno della curva. Pertanto, l'integrale dipende solamente dalle proprietà locali della funzione.

**Corollario.** La somma di tutti i residui, anche di quello all'infinito, è nulla. Infatti, data una funzione  $f(z)$  con singolarità isolate in  $\hat{\mathbb{C}}$ , si ha

$$\text{Res}[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f, z_k] = -\sum_{k=1}^n \text{Res}[f, z_k]$$

**Osservazione.** Il teorema dei residui si può applicare quando la curva  $\gamma$  racchiude un numero finito di singolarità isolate. Questo perché la nozione di residuo si fonda sull'esistenza della serie di Laurent per la funzione alla singolarità, ed il residuo può essere definito solamente per singolarità isolate.

Qualora le singolarità fossero infinite, esisterebbe un punto di accumulazione per le singolarità e dunque esisterebbe una singolarità non isolata. Per le stesse ragioni, il teorema dei residui non si può direttamente applicare ad integrali che coinvolgono funzioni a più valori. Tuttavia, focalizzandosi su di un singolo ramo della funzione, allora la funzione stessa si può intendere come una tipica funzione olomorfa. Pertanto, fin quando la curva di integrazione non varca un branch cut, si può comunque applicare il teorema dei residui.

### 2.11.1 Risoluzione di integrali tramite il metodo dei residui

Il metodo dei residui permette di calcolare integrali di linea di funzioni olomorfe e fornisce un metodo per risolvere integrali di funzioni reali.

**Nota.** Da questo punto in avanti, si sottintende che tutte le curve chiuse siano anche semplici e positivamente orientate, salvo altrimenti specificato.

**Integrali trigonometrici.** Si vuole calcolare un integrale nella forma

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Si esprimono coseno e seno in termini della funzione esponenziale e si operano le sostituzioni  $z = e^{i\theta}$  e  $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$  (e non  $\bar{z} = e^{-i\theta}$ ). Pertanto, l'integrale precedente si può interpretare come un integrale di linea sulla circonferenza unitaria nel piano complesso. Pertanto, ricordando

$$\sin \theta \equiv \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta \equiv \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

da cui si ottiene  $f(\cos \theta, \sin \theta) = f(z)$ , e calcolando

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \implies -i \frac{dz}{z} = d\theta$$

si ottiene

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res} \left[ \frac{f(z)}{z}, z_k \right]$$

dove  $z_k$  sono le singolarità della funzione integranda  $\frac{f(z)}{z}$  contenute all'interno della circonferenza.

**Integrali sull'intero asse reale.** Il teorema dei residui permette di calcolare integrali della forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad f \in \mathbb{R}$$

L'idea è di considerare un integrale complesso che si riduce a quello precedente nel limite appropriato. Si supponga che  $f(z)$ , con  $z \in \mathbb{C}$ , abbia un numero singolarità finite che non si trovino sull'asse reale, cioè con  $\text{Im}(z_k) \neq 0$ . Allora si definisce l'integrale sul piano complesso

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

dove  $\Gamma_R$  è una curva chiusa composta dal segmento reale  $[-R, R]$  e dalla semicirconferenza  $\gamma_R$  di raggio  $R$  centrata nell'origine. Quest'ultima dev'essere tale da racchiudere tutte le singolarità del semipiano in cui si trova. Dato che  $I(R)$  è un integrale calcolato su di una curva chiusa ed  $f(z)$  ha solamente singolarità isolate, per il teorema dei residui segue

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_k \text{Res}[f, z_k]$$

dove  $z_k$  sono i punti singolari di  $f$  contenuti in  $\Gamma_R$ , la cui orientazione determina il segno (l'integrale reale è percorso da sinistra verso destra, dunque se  $\gamma_R$  si trova nel semipiano delle parti immaginarie positive, allora  $\Gamma_R$  è positivamente orientata; viceversa altrimenti).

Qualora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

si può recuperare l'integrale reale  $I$  tramite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = I$$

I residui di  $f$  non sono sensibili alla forma della curva  $\Gamma_R$  e dunque si ha

$$I = \pm 2\pi i \sum_k \text{Res}[f, z_k]$$

dove  $z_k$  ed il segno sono come sopra.

La condizione sul limite dell'integrale su  $\gamma_R$  può essere garantita dai due lemmi di Jordan (cercando in fonti diverse da Zaffaroni, ho trovato solamente il secondo come lemma di Jordan, peraltro in forma più generale).

**Lemma.** Se la funzione  $f(z)$  è continua su  $\gamma_R$  e ivi il suo valore assoluto diminuisce più velocemente di  $|z|^{-1}$  per  $z \rightarrow \infty$ , cioè

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0 \stackrel{?}{\iff} |f(\gamma_R)| \in o(|z|^{-1})$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

**Lemma.** Sia  $f(z)$  una funzione della forma

$$f(z) = e^{i\alpha z} g(z), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sia  $g(\gamma_R)$  una funzione continua e tale per cui

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$$



Per  $\alpha > 0$ , sia la curva  $\gamma_R$  nel semipiano complesso superiore. Altrimenti, per  $\alpha < 0$ , sia  $\gamma_R$  nel semipiano inferiore (questo di modo che la parte immaginaria di  $z \in \gamma_R$  si combini con la  $i$  e la  $\alpha$  ad esponente così da garantire un segno negativo). Allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Per  $\alpha = 0$  si può applicare la disuguaglianza di Darboux dove  $M = \max g(\gamma_R)$  (?).

**Esempio.** Si considerino due polinomi  $P(x)$  e  $Q(x)$  tali che  $\deg Q(x) - \deg P(x) > 1$ . Vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res} \left[ \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k \right]$$

dove  $z_k$  sono le singolarità dell'integrando contenute in  $\Gamma_R$ . La prima uguaglianza è garantita dalla differenza nel grado dei polinomi da cui si può applicare il primo lemma.

**Esempio.** Se l'integrale non può essere esteso a tutto l'asse reale a causa di singolarità ivi presente, si può calcolare l'integrale aggiungendo un logaritmo e scegliendo il branch cut dal lato opposto alla singolarità. La curva  $\Gamma_R$  dev'essere costruita in modo da collegare due circonferenze nell'origine, una grande  $\gamma_R$  ed una piccola, tramite due segmenti, uno sopra ed uno sotto il branch cut. Supponendo che i polinomi siano come sopra, vale

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = - \sum_k \text{Res} \left[ \frac{P(z)}{Q(z)} \ln z, z_k \right]$$

dove  $z_k$  sono le singolarità contenute in  $\Gamma_R$ .

## Lecture 12

### 2.12 Valore principale di Cauchy

lun 04 apr  
2022 12:30

Risulta comune avere a che fare con integrali di funzioni che presentano singolarità sulla curva di integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

dove  $x_0 \in \mathbb{R}$ . La funzione  $f(x)$  è regolare in  $x_0$  e tende a zero abbastanza velocemente per assicurare la convergenza dell'integrale. Propriamente integrali di questo tipo non sono ben definiti, dato che sono divergenti, tuttavia è possibile dare una prescrizione su come definirli. Un modo per far senso di tali integrali è tramite il valore principale di Cauchy:

$$P \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

I due integrali sono entrambi divergenti per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , però la prescrizione è scelta in modo tale che le loro divergenti si cancellano esattamente.

Si calcola l'integrale precedente come un integrale complesso utilizzando il teorema dei residui. Si suppone che il prolungamento di  $f$  al piano complesso è olomorfo in  $z = x_0$  e presenta singolarità isolate solo al di fuori dell'asse reale. Il cammino  $\Gamma_R$  utilizzato è costituito da due semicirconferenze centrate in  $x_0$ : la più grande  $\gamma_R$ , la più piccola  $\gamma_\varepsilon$ ; le due sono collegate con segmenti che percorrono l'asse reale. Il cammino  $\Gamma_R$  è orientato positivamente. Pertanto si ha

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res} \left[ \frac{f(z)}{z - z_0}, z_k \right]$$

Dove  $z_k$  sono le singolarità contenute in  $\Gamma_R$ . Se

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0$$

allora, il primo lemma di Jordan è soddisfatto. Si mostra che nei limiti  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , l'integrale  $I(R)$  si riduce a quanto definito come valore principale di Cauchy. Pertanto

$$I(R) = \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^R \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{\gamma_R} \frac{f(x)}{x-x_0} dx$$

Nei due limiti, gli integrali su  $[-R, -\varepsilon]$  e  $[\varepsilon, R]$  diventano il valore principale di Cauchy. Per il primo lemma di Jordan, l'integrale su  $\gamma_R$  scompare per  $R \rightarrow \infty$ . Dunque bisogna calcolare il contributo di  $\gamma_\varepsilon$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dato che  $f(z)$  è olomorfa in  $x_0$ , si può utilizzare la propria espansione in serie di Taylor

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z=x_0)}{n!} \int_{\gamma_\varepsilon} (z-x_0)^{n-1} dz$$

Si scambia la sommatoria con l'integrale perché la serie di Taylor converge uniformemente. Parametrizzando la semicirconferenza  $\gamma_\varepsilon$  come  $z-x_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ , con  $\theta \in [\pi, 0]$ , si ha

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (z-x_0)^{n-1} dz = \varepsilon^{n-1} \int_{\pi}^0 e^{i\theta(n-1)} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\varepsilon^n \int_{\pi}^0 e^{i\theta n} d\theta$$

L'unico termine che non si annulla nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  è quello per  $n=0$ . Pertanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(x_0)(-\pi i) = -\pi i f(x_0)$$

Dunque si ottiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(R) = P \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - i\pi f(x_0) = 2\pi i \sum_k \text{Res} \left[ \frac{f(z)}{z-z_0}, z_k \right]$$

**Esempio.** Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Dato che l'integrando è pari, si può scrivere

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} P \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{i}{4} \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{ix}}{x} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right] = -\frac{i}{4} 2i \text{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

dove si intende il primo integrale come un numero complesso  $z$  ed il secondo come  $\bar{z}$ . L'ultimo integrale non è definito per  $x=0$  [r], però si può fare uso del valore principale

$$I = \frac{1}{2} P \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left( P \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

Inoltre

$$P \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i e^{i\theta} + \sum_k \text{Res}[e^{iz}, z_k] = \pi i$$

[r] Pertanto

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \left( P \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = \frac{\pi}{2}$$

## Lecture 13

mar 05 apr  
2022 12:30

### 3 Proprietà delle mappe

Una funzione  $f(z)$  può essere vista come una mappa da  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  (endomorfismo?).

Si consideri un insieme aperto  $\Omega \subset D$  dominio di olomorfia di  $f$ . Si studia il comportamento locale della funzione. In  $\Omega$ , la funzione è olomorfa e quindi analitica. Pertanto, essa si può espandere in serie di Taylor attorno ogni punto di  $\Omega$ . Quindi, il comportamento locale di  $f$  è determinato dai primi termini della sua serie di Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Posto  $m$  il primo indice per cui  $a_m \neq 0$ , segue che il comportamento locale è determinato da

$$f(z) - f(z_0) \sim a_m (z - z_0)^m + \dots$$

Si hanno due casi

- Sia  $m = 1$ , cioè la derivata prima esiste ed è diversa da zero,  $f'(z_0) \neq 0$ .
- Vale  $m > 1$ .

**Teorema.** Quando è soddisfatto il primo punto, allora esiste un insieme aperto  $U$  in un intorno di  $z_0$  tale che

- la mappa  $f : U \rightarrow f(U)$  è univoca;
- l'insieme  $f(U)$  è aperto, da cui  $f$  è detta mappa aperta;
- la funzione  $f$  possiede una inversa  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  olomorfa;
- la funzione  $f$  è una mappa conforme, cioè preserva gli angoli tra curve.

**Definizione.** Se le rette  $L$  ed  $L'$  hanno un angolo  $\theta$  tra loro in  $U$  e segue che  $f(L)$  e  $f(L')$  hanno rette tangenti che si intersecano con un angolo  $\theta$  in  $f(U)$ ; allora gli angoli tra le curve si preservano.

**Dimostrazione.** Dimostrazione del teorema. Tramite una traslazione in  $U$  ed  $f(U)$  si può sempre avere  $z_0 = 0$  e  $f(z_0) = 0$ . Si consideri un intorno circolare  $U = B(0, \varepsilon)$  (aperto) di raggio  $\varepsilon$  centrato in 0. Se  $\varepsilon$  è arbitrariamente piccolo, si ha  $f \sim \tilde{f} = a_1 z$ , con  $a_1 = f'(0)$ . Quindi, il punto  $z = \rho e^{i\varphi}$  viene mappato in

$$\tilde{f}(z) = \rho(a_1) e^{i(\varphi + \beta)}, \quad a_1 = |a_1| e^{i\beta}$$

Dato che  $0 \leq \rho \leq \varepsilon$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , segue che  $\tilde{f}(U)$  è un cerchio aperto di raggio  $|1|\varepsilon$  (secondo punto del teorema). Inoltre, la mappa  $\tilde{f}$  è biunivoca (primo punto del teorema). Dato che  $a_1 \neq 0$ , allora  $\tilde{f}$  è invertibile e l'inversa è  $\tilde{f}^{-1}(w) = \frac{w}{a_1}$ . Inoltre,  $a_1 \neq 0$  e quindi l'inversa è olomorfa (punto tre).

Si dimostra l'ultimo punto. La mappa  $\tilde{f}$  manda la semiretta

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z) = \varphi\}$$

nella semiretta

$$\tilde{f}(L) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z) = \varphi + \beta\}$$

e similmente per  $L'$ .

Se la funzione  $f$  è completa, cioè estendo il comportamento locale, allora  $f$  manda rette in curve, ma le tangenti alle curve preservano gli angoli.

**Osservazione.** Dato che  $f^{-1}$  è olomorfa, essa si può espandere in serie di Taylor attorno a  $w_0 = f(z_0)$  e si ha

$$f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (w - w_0)^k$$

i coefficienti  $b_k$  sono ricavati dalla formula di Lagrange

$$b_0 = z_0, \quad b_n = \frac{1}{n!} d_z^{n-1} \left( \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n \Big|_{z=z_0}, \quad n \geq 1$$

**Teorema.** Nel caso  $m > 1$ , esiste un insieme aperto  $U$  tale che

- la funzione  $f$  è una mappa  $m$  a 1 [r];
- l'insieme  $f(U)$  è aperto;
- la funzione  $f$  scala gli angoli di un fattore  $m$ .

**Dimostrazione.** Si considera un intorno circolare  $B(0, \varepsilon)$  e  $\tilde{f}(z) = a_m z^m$ , con  $m > 1$  e  $a_m = |a_m| e^{i\beta}$ . Segue che  $z = \rho e^{i\varphi} \in U$  viene mappato in

$$\tilde{f}(z) = \rho^m |a_m| e^{i(m\varphi + \beta)}$$

Dividendo l'intorno circolare in settori circolari identici con angolo al centro di  $\frac{2\pi}{m}$ , segue che ogni settore viene mappato in un settore di angolo  $2\pi$ , cioè un cerchio completo, con raggio  $\varepsilon^m |a_m|$ . Pertanto,  $\tilde{f}$  mappa insiemi aperti in insiemi aperti, con una mappa  $m$  a 1.

### 3.1 Proprietà globali

Il comportamento locale delle mappe permette di trarre conclusioni sulle proprietà globali.

**Teorema.** Open mapping theorem. Ogni funzione  $f$  olomorfa, non costante, mappa insiemi aperti in insiemi aperti.

**Dimostrazione.** Considerato un insieme  $\Omega$  aperto, per ogni  $z_0 \in \Omega$  si può trovare un intorno  $U$  di  $z_0$  in cui  $f(U)$  è un insieme aperto. Questo si può fare sia quando  $f'(z_0) = 0$  (caso  $m > 1$ ) sia quando  $f'(z_0) \neq 0$  (caso  $m = 1$ ). Dunque, l'insieme  $f(\Omega)$  contiene un intorno aperto di un qualsiasi  $f(z_0)$  e perciò, essendo un insieme di aperti un aperto, allora  $f(\Omega)$  è aperto. Questo non vale se la funzione è costante: si mappa tutto  $\mathbb{C}$  in un punto che non è un insieme aperto.

**Teorema.** Se la funzione  $f$  è olomorfa e biunivoca, allora  $f'(z) \neq 0, \forall z$ , ed esiste l'inversa  $f^{-1}$  che è pure olomorfa. Questo implica che  $f$  è una mappa conforme.

**Dimostrazione.** Se la funzione  $f$  è biunivoca, allora non può essere una costante (perché è strettamente monotona). Allora  $f'(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in \Omega$ . Dunque valgono tutte le proprietà del caso  $m = 1$ .

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = z^2, \quad f'(z) = 2z$$

La derivata non è nulla per ogni  $z \neq 0$ . In tal caso, la funzione  $f$  è una mappa biunivoca e conforme, con inversa olomorfa. Altrimenti, cioè per  $z = 0$ , si ha che  $f(0) = a_2(z - 0)^2$  (cioè la prima derivata non nulla è la seconda); dunque  $m = 2$  e si raddoppiano gli angoli: la funzione  $f$  non è biunivoca, ma è 2 a 1. [r]

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Essa non è olomorfa in  $z = 0$ . Dato che  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ , segue che  $f$  è una mappa conforme in qualsiasi  $z \neq 0$ . Un raggio con angolo  $\theta$

$$L_\theta = \{z = \rho e^{i\theta} \mid \rho \in (0, \infty)\}$$

viene mappato in

$$f(L_\theta) = L_{-\theta} = \left\{z = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \mid \rho \in (0, \infty)\right\}$$

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z) = e^z$$

Dato che  $f'(z) = e^z$ , si ha una mappa conforme ovunque con  $f$  olomorfa e biunivoca la cui inversa è olomorfa a sua volta (questa caratteristica di  $f$  e della sua inversa è detta bi-olomorfia). Linee di costante  $x$  vengono mappate in cerchi, mentre linee costanti in  $y$  sono mappate a raggi uscenti dall'origine. In tutti i punti con  $z \neq 0$ , gli angoli vengono preservati. In  $z = 0$  la mappa non è conforme perché  $e^z$  ha una singolarità essenziale all'infinito. Inoltre, ivi la mappa non è biunivoca perché  $e^{z+2\pi in} = e^z$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Quindi, una qualsiasi retta orizzontale di spessore  $2\pi$  (da  $-\pi i$  a  $\pi i$ ) è mappata a tutto il piano complesso. Questo è evidente dal fatto che la funzione inversa è polidroma:  $g(w) = \ln w$ . Restringendosi in un qualsiasi insieme aperto semplicemente connesso  $f(\Omega)$  che non contiene l'origine, segue che  $g$  è a singolo valore ed è olomorfa.

### 3.2 Trasformazioni lineari fratte

Le trasformazioni lineari fratte sono trasformazioni conformi del tipo

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

e  $ad - bc \neq 0$ . Esse sono mappe conformi per ogni  $z_0 \neq -\frac{d}{c}$ . Inoltre, vale

$$F'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Sono casi particolari:

- traslazioni  $w = z + \alpha$
- dilatazioni  $w = \beta z$
- inversioni  $w = \frac{1}{z}$

Qualsiasi trasformazione  $F$  lineare fratta può essere scritta come combinazione lineare delle tre trasformazioni precedenti.

Sia  $c = 0$ , allora

$$F(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

Il fattore di  $z$  è la dilatazione, mentre il termine noto aggiunto è la traslazione.

Sia  $c \neq 0$ . Si può scrivere

$$F(z) = \frac{bc + ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}$$

Si ha una traslazione  $\frac{d}{c}$ , poi una dilatazione  $\frac{c^2}{bc+ad}$ , poi una inversione  $\frac{1}{z}$  ed infine una traslazione  $\frac{a}{c}$ .

**Osservazione.** Conviene estendere  $F(z)$  alla sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . Si definisce

$$F\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

e  $F(\infty) = \frac{a}{c}$  così che quando  $c = 0$  si ha  $\infty$ .

Le trasformazioni lineari fratte sono le uniche mappe biunivoche ed olomorfe (cioè bi-olomorfe) di  $\hat{\mathbb{C}}$  su  $\hat{\mathbb{C}}$ : esse sono automorfismi di  $\hat{\mathbb{C}}$ , cioè trasformano uno spazio in se stesso. Esse mappano rette in rette e cerchi in cerchi (le rette sulla sfera di Riemann sono cerchi che passano per il punto all'infinito, quindi basta dire che le trasformazioni mappano cerchi in cerchi).

**Teorema.** Date due terne di numeri complessi, esiste una sola trasformazione lineare fratta che abbia  $w_i = F(z_i)$ .

**Dimostrazione.** Si consideri la terna  $(z_1, z_2, z_3)$ . La si mappa in  $(0, 1, \infty)$  tramite la mappa cross-ratio:

$$B(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

Si ha che  $z_1 \rightarrow 0, z_2 \rightarrow 1, z_3 \rightarrow \infty$ . Tale mappa può essere scritta in termini di  $w$ . Dunque vale

$$B(w, w_1, w_2, w_3) = B(z, z_1, z_2, z_3)$$

da cui si può ricavare  $w$  così da mappare  $(z_i) \rightarrow (w_i)$ .

**Esempio.** Si vuole mappare

$$(1, 2, 7) \rightarrow (1, 2, 3)$$

Dunque, si trova

$$w = \frac{7z - 4}{2z + 1}$$

**Osservazione.** La mappa cross-ratio è invariante per trasformazione lineari fratte, cioè

$$B(F(z), F(z_1), F(z_2), F(z_3)) = B(z, z_1, z_2, z_3)$$

**Dimostrazione.** A CASA non a caso.

**Osservazione.** L'insieme delle trasformazioni  $F$  forma un gruppo (in senso algebrico). Si associa ad

$$F = \frac{az + b}{cz + d}$$

la matrice

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La trasformazione inversa e la composizione di altre trasformazioni con  $F$  seguono dalle regole delle matrici. Dato che si può riscalare  $\hat{F} \rightarrow \lambda \hat{F}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , senza cambiare  $F$ , segue che si può normalizzare  $\hat{F}$  di modo che

$$ad - bc = 1$$

Così che il gruppo delle trasformazioni di  $F$  è il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  di matrici  $2 \times 2$  complesse a determinante unitario. Più in dettaglio, visto che  $\det \hat{F} = 1$  non fissa il segno di  $a, b, c, d$  segue che il gruppo è

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$$

dove  $I$  è l'identità.

**Teorema.** Riemann mapping theorem. Ogni insieme aperto  $\Omega$  semplicemente connesso e strettamente contenuto in  $\mathbb{C}$  (cioè sottoinsieme proprio di  $\mathbb{C}$ ) può essere mappato in modo conforme (cioè con una mappa  $f$  olomorfa) sul cerchio unitario aperto (cioè senza frontiera).

**Corollario.** Tutte le regioni costituite da sottoinsiemi propri aperti di  $\mathbb{C}$  semplicemente connessi sono conformemente equivalenti.

**Esempio.** Si consideri di mappare il semipiano superiore  $\text{Im}(z) > 0$  sul disco unitario. Si utilizza la mappa

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i}, \quad f'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

La derivata è non nulla sul semipiano superiore, dunque ivi  $f$  è una mappa conforme. Si vedono alcuni punti sulla frontiera:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(+\infty) = 1$$

Mentre per un punto nel semipiano si ha

$$f(i) = 0$$

cioè viene mappato all'interno del cerchio. Dunque

$$f(\text{Im}(z) > 0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

### 3.3 Applicazioni fisiche

**Definizione.** Si definisce il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. La funzione armonica  $u(x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 u = 0$$

Il problema di Dirichlet è il problema di trovare una funzione  $u$  armonica in un insieme aperto  $\Omega$ , continua nella sua chiusura  $\overline{\Omega}$  (in alcuni testi, tale condizione significa essere  $c$ -armonica) che assuma i valori opportuni sul bordo

$$u|_{\partial\Omega} = u(\partial\Omega) = g$$

dove  $g$  è una funzione reale su  $\partial\Omega$ .

La soluzione del problema di Dirichlet su  $\Omega$  semplicemente connesso è unica. Infatti, si considerino due soluzioni  $u_1$  ed  $u_2$  con

$$u_1(\partial\Omega) = u_2(\partial\Omega) = g$$

La loro differenza è su  $\partial\Omega$  è  $u_1 - u_2 = 0$ . Tuttavia, tale differenza è ancora una funzione armonica perché differenza di funzioni armoniche su  $\Omega$ . Una funzione armonica è la parte reale di una funzione olomorfa. Per il teorema del massimo modulo segue che  $u_1 - u_2$  ha massimo e minimo su  $\partial\Omega$ . Tuttavia,  $u_1 - u_2$  ha massimo e minimo nullo su  $\partial\Omega$ , e dunque  $u_1 - u_2$  è identicamente nulla in  $\Omega$  e pertanto  $u_1 = u_2$ .

**Teorema.** Non chiesta all'esame.

Se  $u(z)$  è  $c$ -armonica sul disco unitario, allora

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \text{Ker}(\theta, z) d\theta$$

dove il nucleo è il kernel di Poisson

$$\text{Ker}(\theta, z) = \text{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right)$$

In forma polare esso si scrive

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta$$

Quindi, mappando il disco unitario su qualsiasi altro dominio conformemente equivalente, si trovano le soluzioni del problema di Dirichlet utilizzando le mappe conformi.

### 3.3.1 Fluidodinamica

L'elemento infinitesimo del fluido 2D è caratterizzato dalla velocità  $\vec{v}(x, y, t)$ . Nel caso di fluido ideal, cioè stazionario  $\vec{v}(x, y)$ , incomprimibile  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  ed irrotazionale  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Le ultime due condizioni sono le condizioni di Riemann-Cauchy (se scritte per due dimensioni). Pertanto, la soluzione si può scrivere come una funzione olomorfa

$$f(z) = v_1(x, y) - iv_2(x, y)$$

Se il dominio  $\Omega$  è semplicemente connesso, allora per il teorema della primitiva, la funzione  $f(z)$  ammette primitiva  $\chi(z)$  olomorfa con  $\chi'(z) = f(z)$ . La primitiva  $\chi(z)$  è detto potenziale complesso del fluido e si indica

$$\chi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Dove  $\phi$  è il potenziale scalare, mentre  $\psi$  è la funzione di flusso. Dato che

$$v_1(x, y) - iv_2(x, y) = f(z) = \partial_x \phi - i \partial_y \phi$$

Si ha che  $\vec{v} = \nabla \phi$ . Inoltre, le linee a potenziale costante  $\phi(x, y) = \text{cost}$  sono curve equipotenziali; mentre le linee con  $\psi(x, y) = \text{cost}$  sono le linee di flusso. La velocità è tangente alle linee di flusso e perpendicolare alle curve equipotenziali.

Il problema tipico è quello di trovare le equazioni del moto in  $\Omega$  dato  $\partial\Omega$  cioè il bordo in cui il fluido si muove. Questo è un problema di Dirichlet.

**Caso primo.** Flusso costante in cui  $f(z) = a \in \mathbb{R}$ . Si ha un moto orizzontale perché la velocità è costante sulle  $x$ . Si ha un potenziale complesso

$$\chi(z) = az + c$$

con  $c$  costante arbitraria.

**Caso secondo.** Flusso attorno un unitario. Si può utilizzare una mappa

$$g(z) = z + \frac{1}{z}, \quad g: e^{it} \rightarrow g(e^{it}) = 2 \cos t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Inoltre,  $g(z)$  mappa sia l'interno del disco che l'esterno su  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . Oltretutto,  $g(z)$  mappa l'asse reale a  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ . Le linee equipotenziali sono mappate in rette orizzontali, mentre le linee di flusso in rette verticali. [r]

### 3.3.2 Elettrostatica

Risulta analogo a quanto visto,  $\vec{v} \rightarrow \vec{E}(x, y)$ . Si ha  $\nabla \times \vec{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ .

## Lecture 14

## 4 Spazi vettoriali

Si vuole estendere le definizioni usate sugli spazi euclidei in modo astratto così da poterle usare con spazi con infinite dimensioni.

ven 08 apr  
2022 14:30



## 4.1 Spazi vettoriali

**Definizione.** Lo spazio vettoriale  $V$  su di un campo  $F$  è un insieme con due operazioni, la somma di vettori e la moltiplicazione di un vettore per un elemento di  $F$  (elemento detto scalare)

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{w} &\in V, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \\ \lambda \vec{v} &\in V, \quad \forall \vec{v} \in V, \lambda \in F\end{aligned}$$

La soma di vettori è commutativa ed associativa con inverso ed l'elemento identità  $\vec{0} \in V$ . Il prodotto di vettori per elementi di  $F$  è distributivo con l'elemento identità  $1 \in F$ . Gli elementi di  $V$  sono detti vettoriali. Le operazione precedenti definiscono una struttura lineare in  $V$ .

**Definizione.** Un sottoinsieme  $W \subset V$  chiuso rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare, cioè il vettore somma ed il vettore prodotto sono ancora vettori di  $W$  ed tale spazio è chiamato sottospazio di  $V$ .

**Definizione.** Dati  $n$  vettori  $u_k$ , essi sono linearmente indipendenti se

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies \alpha_k = 0, \forall k$$

Altrimenti i vettori sono linearmente dipendenti ed esiste una combinazione lineare non banale che dà il vettore nullo.

**Definizione.** Un insieme di vettori linearmente indipendenti  $\{u_k\}$  è detto massimale se ogni insieme che contiene propriamente  $\{u_k\}$  è lineare linearmente dipendente.

Un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti sono una base di  $V$ . Considerata una base  $\{u_k\}$  di  $V$ , ogni vettore  $\vec{v} \in V$  si può esprimere come una combinazione lineare dei vettori della base

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{u}_k, \quad v_k \in F$$

Gli scalari nell'espressione precedente sono le componenti (o coordinate) del vettore  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\{u_k\}$ .

**Osservazione.** La dimensione dello spazio può essere infinita. Se è finita, allora tutte le basi hanno lo steso numero di vettori e tale numero è la dimensione dello spazio vettoriale  $V$ .

**Esempio.** La dimensione di  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbb{C}^n$  è  $n$ . Uno spazio con dimensione infinita è uno spazio di funzioni, come l'insieme dei polinomi a coefficienti complessi nella variabile  $z$ . Infatti, la somma e la moltiplicazione (per uno scalare) sono operazioni chiuse. L'insieme di tutti i monomi  $S = \{1, z, z^2\}$  è una base. Ogni polinomio è una combinazione lineare finita di monomi e tale combinazione è il vettore nullo sse tutti i coefficienti sono nulli.

## 4.2 Metrica, norma e prodotto scalare

Sugli spazi vettoriali si possono aggiungere struttura che permettono di specificare il concetto di distanza, limite e continuità in maniera astratta.

**Definizione.** La metrica, o distanza, in un insieme  $M$  è una mappa  $d : M \rightarrow \mathbb{R}$  con le proprietà per ogni due elementi  $a, b \in M$ :

- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- $d(a, b) + d(b, c) \implies d(a, c), \forall c \in M$

**Definizione.** Uno spazio vettoriale in cui è possibile definire una metrica è uno spazio metrico. La distanza permette di definire le nozioni di sottoinsiemi aperti e chiusi (cioè si definisce una topologia) e definire le nozioni di limite e continuità.

**Definizione.** In  $\mathbb{C}^n$  si estende la distanza euclidea con la distanza hermitiana

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i - w_i|^2}, \quad v_i, w_i \in \mathbb{C}$$

**Definizione.** Una topologia è la collezione  $\tau$  di tutti i sottoinsiemi aperti in  $X$ . Essa contiene  $\emptyset$  ed  $X$ . Inoltre, dev'essere chiusa rispetto ad un numero finito di intersezioni e rispetto un numero infinito di unioni.

**Osservazione.** La topologia non è unica. Infatti, un esempio su  $\mathbb{R}$  è la seguente topologia

$$\tau = \{V_i \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in V_i, \exists \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V_i\}$$

Tuttavia, si può definire un'altra topologia

$$\tau' = \{\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}\}$$

L'intervallo  $(0, 1)$  in questa topologia non è aperto.

**Definizione.** Sugli spazi metrici è intuitivo introdurre una topologia metrica utilizzando gli intorno circolari, ma si ha bisogno del concetto di distanza.

L'intorno circolare (open ball) di raggio  $r$  centrata in  $a \in M$  è

$$B(a, r) = \{b \in M \mid d(b, a) < r\}$$

**Definizione.** Ogni sottoinsieme  $X \subset M$  è aperto se, per ogni  $a_0 \in X$ , esiste un intorno circolare  $B(a_0, r) \subset X$ .

**Osservazione.** Ogni spazio metrico è uno spazio topologico. Uno spazio topologico è un insieme in cui è definita una topologia (tramite gli intorno circolari).

**Definizione.** Un insieme chiuso è un insieme il cui complementare è aperto.

**Definizione.** L'esistenza di una topologia permette di definire la nozione di limite di una successione. Una successione  $\{a_n\}$  in uno spazio metrico  $M$  converge ad un elemento  $a \in M$  sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid n > n_0 \implies d(a_n, a) < \varepsilon$$

Oppure, si può utilizzare la definizione di limite in  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$$

**Osservazione.** La convergenza di una serie si trova tramite la convergenza della successione delle somme parziali.

**Osservazione.** Un insieme chiuso contiene tutti i propri punti di accumulazione. Il più piccolo insieme chiuso che contiene l'insieme  $X$  è la chiusura di tale insieme  $\overline{X}$ .

**Definizione.** Un insieme  $Z$  è denso in  $Y$  se la propria chiusura è  $Y$  cioè  $\overline{Z} = Y$ .

**Definizione.** Un insieme  $K$  in uno spazio metrico  $X$  è compatto sse ogni successione  $\{x_n\} \subset K$  ha una sotto-successione convergente ad un punto di  $K$ .

**Definizione.** Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra due spazi topologici è continua se la controimmagine di ogni aperto in  $Y$  contenente  $f(x_0)$  è un aperto in  $X$  contenente  $x_0$ .  
Per gli spazi metrici, tale definizione si può riformulare tramite gli intorni circolari

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

**Definizione.** Una successione  $\{x_n\}$  è di Cauchy sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \mid n, m > N_\varepsilon \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

**Teorema.** In uno spazio metrico, ogni successione convergente è di Cauchy (quindi lo spazio è completo?).

**Dimostrazione.** Si utilizza la disuguaglianza triangolare

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$$

Dato che la successione  $\{x_n\}$  converge ad  $x$ , allora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0 \mid n > n_0 \implies d(x_0, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e dato lo stesso per  $\{x_m\}$  si ha

$$n, m > 0 \implies d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**Definizione.** Uno spazio metrico completo è uno spazio metrico in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti.

### 4.3 Spazi normati

**Definizione.** La norma di un vettore  $\vec{v} \in V$  di uno spazio vettoriale  $V$  è una mappa

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$$

che soddisfa per ogni  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $\lambda \in F$ , le condizioni

- $\|\vec{v}\| \geq 0$ ;  $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$ , condizione di positività
- $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$
- $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ , disuguaglianza triangolare

**Definizione.** Uno spazio vettoriale dotato di norma è detto spazio normato.

**Proposizione.** Gli spazi normati sono spazi metrici.  
Dato che si può sempre definire una distanza

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

**Proposizione.** Per la convergenza in uno spazio normato si può usare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{v}_n - \vec{v}\| = 0$$

**Esempio.** L'insieme  $\mathbb{R}$  è normato rispetto  $\|x\| = |x|$ .

**Esempio.** Si possono definire norme differenti. La norma euclidea

$$\|\vec{v}\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

La norma quadrata?

$$\|\vec{v}\|_2 = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots\}$$

Esse sono norme differenti. Gli insiemi aperti indotti dalla topologia metrica sono differenti. Per la norma euclidea, gli intorni circolari sono cerchi; per l'altra norma, gli intorni circolari sono quadrati.

Tuttavia, la topologia indotta è identica. Tutte le norme in  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbb{C}^n$  definiscono la stessa nozione di insiemi aperti. Questo è vero per tutti gli spazi vettoriali reali e complessi a dimensione finita in quanto sono isomorfi ad uno dei due precedenti.

**Definizione.** L'isomorfismo tra due spazi normati è l'esistenza di una mappa biunivoca

$$f : (X, \|\cdot\|_x) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_y)$$

che preserva la struttura lineare della/e la? norma, cioè

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) &= \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w}) \\ \|f(\vec{v})\|_y &= \|\vec{v}\|_x \end{aligned}$$

**Esempio.** Si consideri l'insieme  $C(K)$  delle funzioni continue su di insieme compatto  $K$ . Esso è uno spazio vettoriale con infinite dimensioni in cui si può definire la norma superiore

$$\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

**Osservazione.** Tramite la norma superiore, si può definire il concetto di convergenza uniforme.

**Definizione.** Una successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente ad una funzione  $f$  in  $K$  insieme compatto sse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\text{sup}} = 0$$

**Osservazione.** La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

**Esempio.** Si consideri l'insieme delle funzioni continua  $C(K)$ , dove  $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Si definiscono due norme. La norma superiore

$$\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

La norma  $L_1$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Si dimostra che la convergenza con la norma superiore implica la convergenza con la norma  $L_1$ . Se  $\|f - g\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$  allora

$$\|f - g\|_1 = \int_0^1 |f - g| dx \leq \sup_{x \in K} |f - g| \int_0^1 dx \leq \|f - g\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$$

Le due norme non sono equivalenti. Si consideri la successione di funzioni  $f_n(x)$  che hanno valore zero per  $0 < x < \frac{1}{2n+1}$  e  $\frac{1}{2n-1} < x < 1$ , valore 1 in  $\frac{1}{2n}$  e in mezzo si raccordano in modo lineare. Dunque

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \left[ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] \frac{1}{2} = \frac{1}{4n^2-1} \rightarrow 0$$

Mentre con la norma superiore si ha

$$\|f_n\|_{\sup} = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 1$$

La successione converge a due punti diversi in base alla norma. Si ha un concetto diverso di limite di successioni e di distanza. Infatti, siano

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}, \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\|f - g\|_{\sup} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} - 0 \right| = 1$$

Invece

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} - 0) dx = \sqrt{\pi\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

**Definizione.** Uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale normato e completo.

**Esempio.** Alcuni esempi di spazi di Banach sono  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $C(K)$ , con  $K$  compatto, quando si considera la norma superiore.

## Lecture 15

**Definizione.** Una prodotto scalare (o prodotto interno, en. dot/scalar/inner product) in uno spazio vettoriale complesso è una mappa

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \vec{v}, \vec{w} \mapsto (\vec{v}, \vec{w})$$

Essa soddisfa le proprietà di linearità, hermiticità (simmetria coniugata) e positività

- $(\vec{w}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}) = \lambda (\vec{w}, \vec{v}) + \mu (\vec{w}, \vec{u})$
- $(\vec{w}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{w})}$ , si nota che la coniugazione è un'operazione involutoria
- $(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ . Inoltre  $(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0$

per ogni  $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

**Osservazione.** Le prime due proprietà implicano l'anti-linearità della prima entrata del prodotto scalare

$$(\lambda \vec{v} + \mu \vec{u}, \vec{w}) = \overline{\lambda} (\vec{v}, \vec{w}) + \overline{\mu} (\vec{u}, \vec{w})$$

**Definizione.** Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è detto spazio pre-Hilbert. (La rimozione del prefisso si ottiene quando lo spazio è completo).

**Osservazione.** Uno spazio pre-Hilbertiano è anche uno spazio normato in quanto si può definire la norma in termini del prodotto scalare

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$$

mar 11 apr  
2022 12:30

**Proposizione.** Ogni prodotto scalare soddisfa la disuguaglianza di Schwarz

$$|(\vec{v}, \vec{w})|^2 \leq (\vec{v}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w}), \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$$

**Dimostrazione.** Si consideri un numero complesso

$$\lambda = \rho e^{-i\theta}, \quad \theta = \arg[(\vec{v}, \vec{w})]$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Per la proprietà di positività segue

$$(\vec{v} + \lambda \vec{w}, \vec{v} + \lambda \vec{w}) \geq 0$$

Espandendo tale espressione tramite le proprietà di linearità e anti-linearità si ha

$$(\vec{v}, \vec{v}) + \rho^2(\vec{w}, \vec{w}) + \rho [(\vec{v}, \vec{w})e^{-i\theta} + (\vec{w}, \vec{v})e^{i\theta}] \geq 0$$

Gli addendi tra parentesi quadre sono uno il coniugato complesso dell'altro. Pertanto, usando l'ipotesi su  $\theta$  e la proprietà di hermiticità si ha

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v}) + \rho^2(\vec{w}, \vec{w}) + \rho [(\vec{v}, \vec{w})e^{i\theta}e^{-i\theta} + |(\vec{v}, \vec{w})|e^{-i\theta}e^{i\theta}] &\geq 0 \\ (\vec{v}, \vec{v}) + \rho^2(\vec{w}, \vec{w}) + 2\rho|(\vec{v}, \vec{w})| &\geq 0 \end{aligned}$$

Il primo membro della disequazione rappresenta una parabola in  $\rho$ . Affinché la relazione sia soddisfatta, il discriminante dev'essere non positivo

$$\Delta = |(\vec{v}, \vec{w})|^2 - (\vec{v}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w}) \leq 0$$

da cui segue la tesi.

#### 4.4 Spazi di Hilbert finito-dimensionali

**Definizione.** Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale completo dotato di prodotto scalare.

**Definizione.** Uno spazio di Hilbert reale di un numero finito di dimensioni è detto spazio Euclideo, come  $\mathbb{R}^n$  in cui il prodotto scalare si può scrivere come

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

Uno spazio di Hilbert complesso di un numero finito di dimensioni è detto spazio Hermitiano, come  $\mathbb{C}^n$  in cui il prodotto scalare si può scrivere come

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i$$

**Definizione.** Due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  finito-dimensionale sono ortogonali qualora

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

**Proposizione.** Vettori ortogonali sono linearmente indipendenti.

**Dimostrazione.** Si considerino due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  ortogonali e si consideri la loro combinazione lineare  $\alpha \vec{v} + \beta \vec{w} = 0$ . Dunque

$$0 = (\vec{v}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}) + \beta(\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v})$$

L'uguaglianza dev'essere soddisfatta per  $\vec{v}$  (in generale per ogni coppia di vettori ortogonali), pertanto  $\alpha = 0$ . Lo stesso si può fare per  $\vec{w}$ . Si nota che

$$(\vec{v}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{v}) = (\vec{v}, 0\vec{u}) = 0(\vec{v}, \vec{u}) = 0$$

Dato che  $\alpha = \beta = 0$ , allora l'unica combinazione lineare di  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  che dà il vettore nullo è quella banale, quindi per definizione i due vettori sono linearmente indipendenti.

**Proposizione.** Considerata una base ortonormale  $\{\vec{e}_i\}$ , cioè i vettori sono ortogonali tra loro e di lunghezza unitaria:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

Si hanno le proprietà

- Si possono esprimere le coordinate di un vettore  $\vec{v}$  rispetto a tale base tramite la scrittura

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{e}_k, \quad v_k \equiv (\vec{e}_k, \vec{v})$$

- Il prodotto scalare di due vettori si può scrivere in termini delle loro coordinate

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k w_k$$

- La norma di un vettore si ottiene tramite l'identità di Parseval

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^n |v_k|^2$$

Essa generalizza il teorema di Pitagora.

**Proposizione.** In uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  finito-dimensionale si può costruire una base ortonormale a partire da una base qualsiasi tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt.

**Dimostrazione.** Considerato un vettore non nullo di riferimento  $\vec{u}$ , si può sempre scomporre un vettore  $\vec{v}$  in una componente parallela a  $\vec{u}$ :

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

ed una parte ad esso ortogonale  $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$ . La scomposizione è sempre unica. Questi passaggi si possono iterare su vettori di una base qualsiasi  $\{\vec{u}_k\}$ . Ogni vettore  $k$ -esimo della nuova base è il vettore  $k$ -esimo della base originale a cui si sottraggono le sue proiezioni (cioè la componente parallela) sui vettori precedenti della base nuova:

$$\vec{v}_k = \vec{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\vec{v}_j, \vec{u}_k)}{\|\vec{v}_j\|^2} \vec{v}_j$$

Da cui la normalizzazione segue immediatamente

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}$$

Pertanto, la base  $\{\vec{e}_k\}$  è ortonormale.

## 4.5 Spazi di Hilbert

Si generalizza la nozione di base ortonormale per spazi di Hilbert con un numero infinito di dimensioni. Si studia il caso particolare degli spazi separabili, cioè gli spazi che contengono un sottoinsieme denso e numerabile.

**Definizione.** Un insieme di vettori  $\{\vec{e}_k\}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , è un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  infinito-dimensionale sse

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Tali vettori sono linearmente indipendenti.

**Definizione.** Un sistema ortonormale è completo sse ogni vettore  $\vec{v} \in \mathcal{H}$  si può scrivere come

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \vec{e}_i, \quad v_i = (\vec{e}_i, \vec{v}) \in \mathbb{C}$$

Un sistema ortonormale completo è detto base di Hilbert.

**Osservazione.** La definizione precedente è resa possibile dalla nozione di limite aggiunta alla struttura lineare delle combinazioni lineari. Tale definizione equivale a

$$\vec{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i - \vec{v} \right\| = 0$$

**Definizione.** La scrittura della definizione precedente è unica ed è chiamata serie di Fourier di  $\vec{v}$  dove i termini  $v_i$  sono detti coefficienti di Fourier di  $\vec{v}$  rispetto la base  $\{\vec{e}_k\}$ .

**Teorema.** Una serie del tipo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \vec{e}_i$$

converge sse

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$$

cioè, nel contesto degli spazi vettoriali, il vettore ha lunghezza finita rispetto la distanza euclidea.  
?

**Dimostrazione.** Una serie converge sse converge la successione delle proprie somme parziali. Si considerino

$$\vec{x}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \quad y_n = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$$

Segue

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 &= \left\| \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right\|^2 = \left( \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \vec{e}_j \right) \\ &= \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \bar{\alpha}_i \alpha_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^2 = y_n - y_m \end{aligned}$$

dove  $n > m$  e ricordando che  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ . Segue che  $\vec{x}_n$  è una successione di Cauchy sse  $y_n$  è una successione di Cauchy. Dato che  $\mathcal{H}$  ed  $\mathbb{R}$  sono insiemi completi, allora ogni successione di Cauchy è convergente (e vale ovviamente il viceversa). Pertanto,  $\vec{x}_n$  converge sse  $y_n$  converge.

**Proposizione.** Una base di Hilbert possiede le seguenti proprietà:

- La base è l'insieme massimale di vettori ortogonali:  $\forall i, (\vec{v}, \vec{e}_i) = 0 \implies \vec{v} = \vec{0}$ .
- Vale l'identità di Parseval:  $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2$ , dove  $v_k$  sono i coefficienti di Fourier.
- $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$  si ha  $(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k w_k$ .



**Proposizione.** L'insieme delle successioni  $\vec{z} = \{z_n\}$  di numeri complessi, con  $n \in \mathbb{N}$ , tali che  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$ , è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(\vec{z}, \vec{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n w_n$$

Tale spazio è detto  $\ell^2(\mathbb{C})$ . Intuitivamente, esso è il limite per  $n \rightarrow \infty$  dello spazio Hermitiano  $\mathbb{C}^n$ .

**Dimostrazione.** Innanzitutto, si mostra che  $\ell^2$  è uno spazio vettoriale, cioè si mostra che

$$\vec{v}, \vec{w} \in \ell^2 \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{C} \implies \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in \ell^2$$

Vale l'identità

$$|a + b|^2 \leq 4 \max(|a|^2, |b|^2) \leq 4(|a|^2 + |b|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda v_i + \mu w_i|^2 \leq 4 \left( |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 + |\mu|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 \right) < \infty$$

dove  $v_i$  e  $w_i$  sono le componenti di  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

Si mostra che il prodotto scalare è finito per ogni due vettori. Vale l'identità

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

Pertanto

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}_i w_i = \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{v}_i + w_i)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{v}_i - w_i)^2 \right) < \infty$$

Le due sommatorie di destra sono limitate grazie a quanto dimostrato precedentemente; infatti, se  $\vec{v} \in \ell^2$  allora  $\vec{v} \in \ell^2$ , dunque pure  $\vec{v} \pm \vec{w} \in \ell^2$  perché esso è uno spazio vettoriale, quindi è chiuso rispetto la somma.

Si mostra che  $\ell^2$  è completo. Si consideri una successione di Cauchy  $\vec{z}_k = \{z_{nk}\}$  in  $\ell^2$  (dove  $k$  è l'indice in  $\ell^2$ , mentre  $n$  è l'indice in  $\mathbb{C}$ ). Dato che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k' \rightarrow \infty} \|\vec{z}_k - \vec{z}_{k'}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k' \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk} - z_{nk'}|^2 = 0$$

Fissato  $n$ , la successione  $(\vec{z}_k)_n$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , è una successione di Cauchy in  $\mathbb{C}$  (cioè la successione della componente  $n$ -esima del vettore  $\vec{z}_k$  è una successione di Cauchy). Dato che  $\mathbb{C}$  è completo, segue che la successione  $(\vec{z}_k)_n$  converge al limite  $z_n \in \mathbb{C}$  per  $k \rightarrow \infty$ .

Sia  $\vec{z} = \{z_n\}$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k' \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk} - z_{nk'}|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k' \rightarrow \infty} |z_{nk} - z_{nk'}|^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk} - z_n|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{z}_k - \vec{z}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

quindi  $\vec{z}_k \rightarrow \vec{z}$  rispetto la norma di  $\ell^2$ . Si mostra che  $\vec{z} \in \ell^2$ . Per ogni  $k$  vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n - z_{nk}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk}|^2$$

La seconda sommatoria del secondo membro è finita (cioè converge) perché  $\vec{z}_k \in \ell^2$ . La prima sommatoria del secondo membro è finita anch'essa per qualche  $k$  in quanto può essere arbitrariamente piccola per  $k$  grande abbastanza. Questo mostra che  $\ell^2$  è completo.

**Esempio.** Più in generale, gli spazi  $\ell^p(\mathbb{R})$  oppure  $\ell^p(\mathbb{C})$  con  $p \in [1, \infty)$  tali per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

sono solamente dotati di norma, quindi sono spazi di Banach detti spazi delle successioni (sequence spaces).

**Osservazione.** Utilizzando la disuguaglianza di Minkowski per le serie, si ha

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Esempio.** Gli spazi di successioni  $\ell^p$  sono spazi di Banach, costituiti da successioni limitate e dotati di norma superiore

$$\sup_{0 \leq n \leq \infty} |x_n| < \infty$$

## 5 Spazi funzionali

Il tipico esempio di prodotto scalare su spazi di Hilbert infinito-dimensionali è quello delle funzioni definite in un intervallo  $[a, b]$ :

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

La norma  $L^1$  rientra in questa categoria.

**Integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue.** Prima di studiare gli spazi funzionali, si rivedono le differenze tra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue. Informalmente, entrambi sono il limite di approssimazioni di una funzione  $f(x)$  tramite delle funzioni costanti a tratti. L'integrale di Riemann è il limite delle somme di Riemann

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\overline{x}_i), \quad \overline{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

cioè si partiziona l'asse  $x$  e si approssima l'area della funzione con tanti rettangoli divisi verticalmente.

Invece, l'integrale di Lebesgue risulta essere il limite delle somme

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i \mu(f^{-1}([f_{i+1} - f_i]))$$

dove  $\mu(X)$  è la misura dell'insieme  $X$ . Con Lebesgue si partiziona l'asse  $y$  e si approssima l'area sempre con rettangoli, però ora divisi orizzontalmente. Tuttavia, con la misura di Lebesgue, la controimmagine di un intervallo non è necessariamente un intervallo a sua volta.

**Esempio.** Si vede una differenza tra i due integrali. Si consideri la funzione caratteristica dei numeri razionali ristretta a  $[0, 1]$ :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Essa non è Riemann integrabile perché presenta una quantità non numerabile di discontinuità. D'altra parte, per Lebesgue, l'insieme dei numeri razionali ha misura nulla (perché numerabile) e pertanto l'integrale di tale funzione sul proprio dominio è nullo a sua volta.

## Lecture 16

mar 12 apr  
2022 12:30

### 5.1 Spazio $L^1_\omega(\Omega)$

Lo spazio  $L^1_\omega(\Omega)$  è lo spazio di funzioni complesse Lebesgue-integrabili definite in un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (oppure  $\mathbb{C}^n$ ) la cui norma è

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| \omega(x) dx < \infty$$

La funzione positiva  $\omega(x)$  è la densità di misura di integrazione. Quando la densità è banale,  $\omega(x) \equiv 1$ , allora lo spazio è semplicemente  $L^1(\Omega)$ . Lo spazio  $L^1_\omega(\Omega)$  è uno spazio di Banach.

**Osservazione.** Lo spazio di funzioni continue  $C([a, b])$  dotato della norma  $L^1$  non è uno spazio di Banach perché non è completo: le successioni di Cauchy convergono, ma non ad un elemento dello spazio, cioè non convergono ad una funzione continua. Per questo si considerano le funzioni Lebesgue-integrabili per definire uno spazio completo e non le funzioni continue.

**Esempio.** Si vede un esempio dell'incompletezza di  $C([a, b])$ . Una successione di funzioni continue  $f_n(x)$  converge alla funzione  $f(x)$  rispetto la norma  $L^1$  sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \implies \|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon$$

Si consideri la successione di Cauchy

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ \frac{kx+1}{2}, & -\frac{1}{k} < x < \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

con  $[a, b] = [-1, 1]$ . Essa è una successione di Cauchy in quanto la norma tra due elementi può essere resa arbitrariamente piccola

$$\|f_k - f_l\|_1 = \int_{-1}^1 |f_k - f_l| dx = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{l} \right|$$

per valori grandi di  $k$  ed  $l$ . Tuttavia, il limite della successione è

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

e tale funzione limite non è di certo continua e quindi non appartiene a  $C([a, b])$ .

**Osservazione.** Affinché lo spazio  $L^1_\omega(\Omega)$  sia uno spazio di Banach, bisogna dimostrare la positività, la linearità e la disuguaglianza triangolare della norma  $L^1_\omega$ . La linearità e la disuguaglianza triangolare seguono dalle proprietà degli integrali. Tuttavia, la positività richiede

$$\int_{\Omega} |f(x)| \omega(x) dx = 0 \iff f(x) \equiv 0$$

Questo è vero per l'integrale di Riemann, ma non più per l'integrale di Lebesgue: basta che  $f$  sia nulla quasi ovunque e l'integrale è comunque zero, ma  $f$  non è identicamente nulla. Pertanto, la condizione di positività richiede che  $f(x) = 0$  quasi ovunque. A questo punto, lo spazio  $L^1_\omega(\Omega)$  è uno spazio normato. Ora rimane solo da verificarne la completezza.

**Teorema.** di Riesz-Fischer. Lo spazio  $L^1_\omega(\Omega)$  è completo (quindi è uno spazio di Banach).

**Dimostrazione.** Si mostra che le successioni di Cauchy convergono ad un elemento interno dello spazio. Si consideri  $f_n$  una successione di Cauchy in  $L^1_\omega$ . Per la condizione di Cauchy, si trova una sotto-successione  $f_{n_i}$  tale che

$$\|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\|_1 \leq \frac{1}{2^i}$$

Questo si può fare perché dato che due elementi di una successione di Cauchy sono arbitrariamente vicini, allora si possono scegliere con accortezza alcuni elementi di tale successione di modo che distino meno di  $2^{-i}$ .

Si considerino le funzioni

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

La funzione limite

$$g_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$$

esiste per ogni  $x$  perché la successione  $g_k$  è monotona (limiti di successioni monotone esistono sempre, ma possono essere sia finiti che infiniti). Si applica il teorema della convergenza monotona (nella seconda uguaglianza di seguito) per controllare che tale funzione limite sia finita

$$\|g_\infty\|_1 = \int_{\Omega} |g_\infty(x)| \omega(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\|_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k 2^{-i} = 1$$

Dato che  $\|g_\infty\|_1 \leq 1$ , allora  $g_\infty(x)$  è finita quasi ovunque. Quindi, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$$

converge quasi ovunque perché converge assolutamente (infatti,  $g_k$  è la serie dei moduli). Quindi, scrivendo ogni termine  $f_{n_k}$  per mezzo della serie telescopica precedente, si ha

$$f_{n_{k+1}}(x) \equiv f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^k f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$$

da cui si conclude che la sotto-successione  $\{f_{n_k}\}_k$  converge anch'essa quasi ovunque. Si definisce  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$  quando tale limite esiste, e  $f(x) = 0$  altrimenti. Ogni termine della sotto-successione è limitato da una funzione  $L^1$

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + g_\infty(x)$$

dato che  $g_\infty$  è il limite di una successione monotona crescente. Il membro di destra è Lebesgue-integrabile in norma  $L^1_\omega$ . Dunque, per il teorema della convergenza dominata, pure  $f$  è Lebesgue-integrabile in norma  $L^1_\omega$ , cioè  $f \in L^1_\omega$ .

Lo stesso si può dire della successione originale. Infatti

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1, \quad \forall k$$

Il primo addendo tende a zero per la condizione di Cauchy. Il secondo addendo tende a zero perché  $f_{n_k} \rightarrow f$  in norma  $L^1_\omega$ . Pertanto, pure  $f_n \rightarrow f$  in norma  $L^1_\omega$ . Dunque  $L^1_\omega(\Omega)$  è completo.

**Osservazione.** Tale dimostrazione vale per la definizione di  $L^1_\omega$  tramite gli integrali di Lebesgue perché si è fatto uso di due teoremi che si applicano solamente a tale tipo di integrali.

## 5.2 Spazio $L^p_\omega(\Omega)$

Lo spazio  $L^p_\omega(\Omega)$  è lo spazio di funzioni a valori complessi definite in un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (oppure  $\mathbb{C}^n$ ) tali che la potenza  $p$ -esima del modulo sia L-integrabile

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(x) dx < \infty$$

con  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ .

**Osservazione.** Le funzioni uguali quasi ovunque sono considerate identiche tramite classi di equivalenza. Pertanto, lo spazio  $L^p_\omega(\Omega)$  è definito come lo spazio delle classi di equivalenza di funzioni L-integrabili che sono identiche quasi ovunque.

**Proposizione.** Lo spazio  $L^p_\omega(\Omega)$  è uno spazio di Banach con norma  $L^p_\omega$

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

La dimostrazione della completezza deriva dalla generalizzazione del teorema di Riesz-Fischer.

**Proposizione.** Siano  $p$  e  $q$  coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Allora vale

- disuguaglianza di Hölder:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

- disuguaglianza di Minkowski:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

## 5.3 Spazio di Hilbert $L^2_\omega(\Omega)$

Tra tutti i possibili valori di  $p$ , il caso  $p = 2$  è particolare in quanto  $L^2_\omega(\Omega)$  è anche uno spazio di Hilbert: è normato (quindi è uno spazio di Banach), possiede un prodotto scalare ed è completo. Tale spazio è l'unico in cui si può definire il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f}(x) g(x) \omega(x) dx$$

La norma  $L^2_\omega$  risulta essere

$$\|f\|_2 = [(f, f)]^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Gli elementi di tale spazio sono le funzioni tipicamente dette quadrato-integrabili.

In meccanica quantistica, la funzione d'onda è un'ampiezza di probabilità. La probabilità risulta essere il quadrato dell'ampiezza e dato che dev'essere finita perché misurabile, allora lo spazio delle funzioni d'onda è uno spazio  $L^2$ , uno spazio di Hilbert.

**Esercizio.** Dimostrare che  $L^2_\omega(\Omega)$  è uno spazio vettoriale: positività, linearità e disuguaglianza triangolare.

**Esempio.** Lo spazio  $L^2_\omega(\Omega)$  contiene sia funzioni continue (di  $C(\Omega)$ ) sia funzioni discontinue, con singolarità

$$f(x) \sim \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}, \quad x_0 \in \Omega$$

Tale funzione è quadrato-integrabile sse

$$\int |f(x)|^2 dx \sim \int \frac{1}{(x-x_0)^{2\alpha}} dx < \infty$$

e tale funzione è integrabile qualora  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

Allo stesso modo, una funzione

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\beta}$$

è integrabile per  $x \rightarrow \infty$  qualora  $\beta > 1$ .

**Esempio.** Sia  $0 \leq a \leq b < \infty$ . Si dimostra che  $L^2([a, b]) \subset L^1([a, b])$ . Si utilizza la disuguaglianza di Hölder. Considerati  $p = q = 2$  e  $g(x) \equiv 1$  si ha

$$\|f \cdot 1\|_1 \leq \|f\|_2 \|1\|_2 \iff \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \left( \int_a^b |1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \sqrt{b-a}$$

Pertanto, se  $f \in L^2([a, b])$ , cioè  $\|f\|_2 < \infty$ , allora  $\|f\|_1 < \infty$ , cioè  $f \in L^1([a, b])$ .

Infatti, se  $a = 0$ , allora l'integrabilità di una funzione in  $x = 0$  richiede che  $f \sim x^{-\alpha p}$  abbia  $p\alpha < 1$ . Se  $p = 2$ , allora  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Quando  $p = 1$ , si ha  $\alpha < 1$  che è sempre verificato quando  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

Inoltre, si dimostra che  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ . Basta considerare

$$f(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty$$

Una funzione di questo tipo è integrabile in  $L^2$  in quanto

$$|f(x)|^2 \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty$$

ma non è integrabile in  $L^1$ .

Analogamente si dimostra che  $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ . Infatti, basta considerare

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow 0$$

Essa è integrabile in  $L^1$ , ma non in  $L^2$ .

**Osservazione.** Si nota che  $L^p_\omega(\Omega)$ , con  $p \neq 2$ , non è uno spazio di Hilbert perché non è possibile definire un prodotto scalare. Infatti, se  $f, g \in L^p_\omega(\Omega)$ ,  $p \neq 2$ , non è detto che

$$\int_\Omega \bar{f}(x)g(x)\omega(x) dx < \infty$$

Per esempio, si considerino  $p = 1$  e  $f, g \in L^1$  tali che

$$f \sim g \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow \infty$$

Dunque, si ha

$$\int_\Omega \bar{f}(x)g(x) dx \sim \int_\Omega \frac{1}{x} dx$$

Ma tale funzione non è integrabile in  $x = 0$ .

**Osservazione.** Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare non è necessariamente uno spazio di Hilbert: esso dev'essere anche completo.

**Esempio.** Si consideri lo spazio delle funzioni continue su di un intervallo  $C([a, b])$ . Il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x) \, dx$$

è ben definito ed induce la norma  $L^2$ . Tuttavia,  $C([a, b])$  non è completo rispetto la norma  $L^2$ . Infatti, si considerino l'intervallo  $[0, 1]$  e la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2n \left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Essa è una successione di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned} (\|f_n - f_m\|_2)^2 &= \int_0^1 \left( \overline{f_n(x) - f_m(x)} \right) (f_n(x) - f_m(x)) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - 1 \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} \left| 1 - 2n \left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 + 2m \left(x - \frac{1}{2}\right) \right|^2 \, dx + \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}} \left| -1 + 2m \left(x - \frac{1}{2}\right) \right|^2 \, dx + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}}^1 0 \, dx \\ &= \frac{(m-n)^2}{6n^3} - \frac{(m-n)^3}{6mn^3} = \frac{1}{6m} + \frac{m}{6n^2} - \frac{1}{3n} \\ &\leq \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m} + \frac{m}{n^2} \right) \leq \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f_n - f_m\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty$$

Pertanto, la successione  $f_n(x)$  è una successione di Cauchy. Tuttavia, la funzione limite in norma  $L^2$  risulta essere

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La funzione  $f(x)$  è discontinua e pertanto non appartiene a  $C([0, 1])$ . Ciò mostra che tale insieme non è completo. Questo implica che, in generale,  $C([a, b])$  non è completo.

## Lecture 17

### 5.4 Base di Hilbert ed espansione di Fourier

ven 29 apr  
2022 14:30

Si applica la teoria generale degli spazi di Hilbert agli spazi  $L^2_\omega(\Omega)$ . Si dimostra che esso possiede una base di Hilbert numerabile di funzioni in  $L^2_\omega(\Omega)$ . Una qualsiasi funzione di tale spazio si può esprimere come combinazione lineare degli (infiniti) elementi della base. Tale base si può anche definire tale che sia ortonormale.

#### 5.4.1 Base ortonormale.

Una funzione in  $L^2_\omega(\Omega)$  è normalizzata sse

$$\|f\|_2 = \int_\Omega |f(x)|^2 \omega(x) \, dx = 1$$

Inoltre, due funzioni sono ortogonali qualora

$$(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f}(x)g(x)\omega(x) \, dx = 0$$

**Definizione.** Un insieme di funzioni  $\psi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , in  $L^2_{\omega}(\Omega)$  è un sistema ortonormale sse

$$(\psi_m, \psi_n) = \delta_{mn}$$

dove  $\delta$  è il delta di Kronecker.

**Definizione.** Se non esistono altre funzioni ortogonali ad ogni  $\psi_n$ , allora il sistema è completo ed esso è una base di Hilbert per  $L^2_{\omega}(\Omega)$ .

**Osservazione.** Grazie alla teoria degli spazi di Hilbert, si può espandere una funzione  $f \in L^2_{\omega}(\Omega)$  come

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n, \quad c_n = (\psi_n, f) = \int_{\Omega} \bar{\psi}_n(x)f(x)\omega(x) \, dx$$

cioè la serie di Fourier (generalizzata), dove  $c_n$  sono i coefficienti di Fourier (generalizzati).

**Osservazione.** La convergenza della serie di Fourier non implica che

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

converga puntualmente e, anche se lo facesse, potrebbe non implicare che il limite sia il valore di  $f$  in  $x$ . L'espansione dev'essere interpretata come un'identità tra vettori nello spazio  $L^2_{\omega}(\Omega)$ , cioè le somme parziali convergono ad  $f$  in norma  $L^2$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| f(x) - \sum_{n=0}^m c_n \psi_n(x) \right|^2 \omega(x) \, dx = 0$$

**Esempio.** Si consideri  $L^2[a, b]$  l'insieme delle funzioni quadrato-integrabili sull'intervallo  $[a, b]$  con misura  $\omega(x) \equiv 1$ . Il prodotto scalare diventa

$$(f, g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x) \, dx$$

Le funzioni

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i \frac{kx}{L}}, \quad L = b - a, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sono funzioni ortonormali tra loro. Per  $p \neq k$  si ha

$$\begin{aligned} (\psi_k, \psi_p) &= \frac{1}{L} \int_a^b e^{2\pi i x \frac{p-k}{L}} \, dx = \frac{e^{2\pi i b \frac{p-k}{L}} - e^{2\pi i a \frac{p-k}{L}}}{2\pi i (p-k)} \\ &= \frac{e^{2\pi i b \frac{p-k}{L}} - e^{2\pi i a \frac{p-k}{L}} \cdot e^{2\pi i (p-k) \frac{b-a}{L}}}{2\pi i (p-k)} = \frac{e^{2\pi i b \frac{p-k}{L}} - e^{2\pi i b \frac{p-k}{L}}}{2\pi i (p-k)} = 0 \end{aligned}$$

Per  $p = k$  si ha

$$(\psi_k, \psi_p) = \frac{1}{L} \int_a^b \, dx = \frac{b-a}{L} = 1$$

Pertanto

$$(\psi_k, \psi_p) = \delta_{kp}$$



e l'insieme di  $\psi_k$  costituiscono una base per  $L^2[a, b]$ . Dunque, l'espansione di Fourier della funzione  $f$  è

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{L}} e^{2\pi i \frac{kx}{L}}$$

con

$$c_k(\psi_k, f) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-2\pi i \frac{kx}{L}} f(x) dx$$

**Proposizione.** La serie di Fourier per una funzione quadrato-integrabile definita in un intervallo limitato  $[a, b]$  converge ad  $f$  in norma  $L^2[a, b]$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \psi_k - f \right\|_2 = 0$$

**Proposizione.** Se  $f(x) \in \mathbb{R}$  allora  $c_k = \bar{c}_{-k}$ .

**Proposizione.** La serie di Fourier in  $L^2[a, b]$  si può scrivere in forma trigonometrica. Infatti

$$e^{\pm 2\pi i \frac{nx}{L}} = \cos\left(2\pi \frac{nx}{L}\right) \pm i \sin\left(2\pi \frac{nx}{L}\right)$$

dunque

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{nx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi \frac{nx}{L}\right)$$

In tale formulazione i coefficienti sono dati da

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2}}, \quad b_n = i \frac{(c_n - c_{-n})}{\sqrt{2}}$$

pertanto

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(2\pi \frac{nx}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin\left(2\pi \frac{nx}{L}\right) dx$$

Quindi, la base in forma trigonometrica è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(2\pi \frac{nx}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(2\pi \frac{nx}{L}\right) \right\}, \quad n \geq 1$$

Per la rappresentazione esponenziale, la base è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i \frac{nx}{L}} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Le funzioni della base trigonometrica sono dette funzioni armoniche. Il numero  $\frac{n}{L}$  è la frequenza dell'armonica.

#### 5.4.2 Convergenza puntuale.

Dato che la serie di Fourier converge in norma  $L^2$  ci si chiede quali siano le condizioni per cui si abbia convergenza puntuale. Inoltre, perché la definizione dei coefficienti  $c_n$  della serie di Fourier sia ben posta è sufficiente che  $f \in L^1[a, b]$ . Ci si chiede se la serie di Fourier può convergere per funzioni in  $L^1$ , ma non in  $L^2$ .

Per semplicità si considera  $[a, b] = [0, 2\pi]$ . Se  $f \in L^1[0, 2\pi]$  allora i coefficienti

$$c_n = (f_n, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

sono ben definiti e si costruisce la serie di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Si osserva che gli addendi di tale serie sono  $2\pi$ -periodici a causa del fattore esponenziale. Pertanto, risulta conveniente estendere la funzione  $f(x)$  ad  $\mathbb{R}$  come funzione  $2\pi$ -periodica. Inoltre, deve valere  $f(x) = f(x + 2\pi)$ . Dunque, si studia la convergenza delle somme parziali su tutto  $\mathbb{R}$ :

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iky} f(y) dy e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} f(y) dy$$

si usa la periodicità per cambiare variabile  $z = y - x$  e si ricorda valere

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{2\pi+a} f(x) dx$$

Si ha

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikz} f(x+z) dz$$

si noti che l'esponente  $ikz$  avrebbe un segno negativo, ma la somma è simmetrica, quindi se ne può far a meno perché sia  $k$  che  $-k$  vanno da  $-n$  ad  $n$ . Si introduce il nucleo (kernel) di Dirichlet

$$D_n(x) \equiv \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

Da cui si ottiene

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+z) D_n(z) dz$$

A questo punto, dividendo l'integrale in due altri integrali sul semi-periodo si può scrivere

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz + \int_{\pi}^{2\pi} f(x+z) D_n(z) dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz - \int_{\pi}^0 f(x+2\pi-z) D_n(2\pi-z) dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz + \int_0^{\pi} f(x-z) D_n(z) dz \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+z) + f(x-z)}{2} D_n(z) dz \end{aligned}$$

dove nel secondo integrale si è operata la sostituzione  $z \rightarrow 2\pi - z$  e si ricorda valere  $f(x+2\pi) = f(x)$ . Per dimostrare che la successione  $\{s_n\}$  delle somme parziali converga ad  $f(x)$ ,  $\forall x$ , bisogna soddisfare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Questo può accadere solamente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = \pi \delta(x)$$

Si ricorda che una proprietà della funzione delta di Dirac è

$$\int_{-a}^a f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

cioè è un funzionale lineare?

Tuttavia, non esistono studi generali per garantire la convergenza della successione  $D_n$  e dunque non ci sono condizioni necessarie per la convergenza della serie di Fourier. Però esistono condizioni sufficienti.

**Teorema.** di Dirichlet. Se una funzione  $f$ ,  $2\pi$ -periodica, è integrabile nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  ed è tale che esistano

$$\lim_{y \rightarrow x^\pm} f(y) = f(x^\pm), \quad \int_0^\delta \frac{f(x \pm y) - f(x^\pm)}{y} dy$$

per qualche  $\delta$ , allora la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \begin{cases} f(x), & f \text{ continua in } x \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & f \text{ discontinua in } x \end{cases}$$

**Osservazione.** In particolare, tale teorema si applica a tutte le funzioni regolari a tratti cioè a tratti di classe  $C^1$ .

**Esempio.** La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

è elemento di entrambi  $L^1[0, 2\pi]$  e  $L^2[0, 2\pi]$ . Utilizzando la formulazione trigonometrica della serie di Fourier si nota che  $a_0 = a_n = b_{2n} = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , mentre si ha

$$b_{2n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin[(2n+1)x] dx = \frac{4}{\pi(2n+1)}$$

Dunque, la serie di Fourier è

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$$

Tale serie converge in  $L^2[0, 2\pi]$  dato che

$$\sum_n |b_{2n+1}|^2 < \infty$$

Si studia cosa succede punto per punto. La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet, pertanto la serie converge ad  $f$  in quei punti in cui essa è continua. Nei punti di discontinuità  $x_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , la funzione converge a

$$\frac{f(x_k^+) + f(x_k^-)}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

**Osservazione.** Una funzione  $f(x)$  definita su di un intervallo limitato  $[0, a]$  si può estendere su  $\mathbb{R}$  in modi diversi:

- Con periodo  $a$ .
- Con periodo  $2a$  ed estensione pari, cioè riflessa rispetto la retta  $x = 0$  (ed intervallo elementare  $[-a, a]$ ). In questo caso, tutti i  $b_n = 0$  perché la funzione è pari.
- Con periodo  $2a$  ed estensione dispari, cioè riflessa rispetto l'origine (ed intervallo elementare  $[-a, a]$ ). In questo caso, tutti i  $a_n$  sono nulli perché la funzione è dispari.

**Proposizione.** L'identità di Parseval per la serie di Fourier in forma trigonometrica è

$$\frac{2}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Mentre in forma esponenziale è

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

per una funzione  $f(x)$   $2\pi$ -periodica.

## Lecture 18

lun 02 mag  
2022 12:30

### 5.4.3 Polinomi ortonormali

Si può applicare il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt anche a basi infinito-dimensionali. Solitamente si parte da monomi di potenze diverse, eventualmente moltiplicati per funzioni a divergenza rapida per essere quadrato-integrabili ad  $\infty$ . [r]

Ci sono vari esempi di diverse basi in  $L^2_\omega[a, b]$  la cui forma esplicita dipende dalla scelta della misura  $\omega(x)$  e dall'intervallo  $[a, b]$ .

Si vedono tre casi principali

- 1 L'intervallo  $[a, b]$  è finito e  $\omega \equiv 1$ . Si hanno i polinomi di Legendre sull'intervallo  $[-1, 1]$ . Sono le soluzioni del momento angolare in meccanica quantistica.
- 2 L'intervallo è  $[0, \infty]$  e  $\omega = (x) = e^{-x}$ . Si hanno i polinomi di Laguerre. Servono per rappresentare il potenziale coulombiano in meccanica quantistica.
- 3 L'intervallo è  $[-\infty, \infty]$  e  $\omega(x) = e^{-x^2}$ . Si hanno i polinomi di Hermite. Essi sono la soluzione dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica.

**Polinomi di Legendre.** Si studia l'intervallo  $[-1, 1]$ . Questo perché i polinomi di Legendre sono associati a soluzioni di problemi a simmetria sferica e rappresentano la dipendenza dal coseno  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ .

I polinomi di Legendre si indicano come  $P_l(x)$  oppure  $P_l(\cos \theta)$  e si possono ricavare dalla formula di Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} d_x^l (x^2 - 1)^l, \quad l \in \mathbb{N}$$

Questi polinomi si possono ricavare da una funzione generatrice

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

Inoltre, essi sono normalizzati per motivi storici come  $P_l(1) = 1$ , per ogni  $l$ . I primi polinomi sono

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

In generale  $P_l(x)$  è un polinomio di grado massimo  $l$  in  $x$ . Vale la relazione di parità

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

I polinomi di Legendre soddisfano le seguenti relazioni ricorsive

$$P'_{l+1} = (l+1)P_l + xP'_l, \quad P'_{l-1} = -lP_l + xP'_l, \quad (l+1)P_{l+1} = (2l+1)xP_l - lP_{l-1}$$

dove il primato indica la derivata rispetto  $x$ . Inoltre, essi sono la soluzione dell'equazione di Legendre:

$$(1 - x^2)P''_l - 2xP'_l + l(l+1)P_l = 0$$

L'utilità di tali polinomi è la condizione di ortogonalità

$$(P_l, P_m) = \int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

Dunque, si possono definire le funzioni ortonormali

$$u_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

il cui insieme  $\{u_l\}$  costituisce un sistema ortonormale completo cioè una base di Hilbert per  $L^2[-1, 1]$ .

**Teorema.** di Weierstraß. Ogni funzione continua  $f(x)$  in un intervallo limitato  $[a, b]$  è il limite uniforme di una successione di polinomi  $\{Q_n(x)\}$ .

**Dimostrazione.** Si consideri il fatto che la convergenza uniforme sia la convergenza in norma superiore. Questa implica la convergenza in norma  $L^2$ . Infatti

$$\int_a^b |Q_n(x) - f(x)|^2 dx \leq (b-a) \max_{[a,b]} |Q_n(x) - f(x)|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Pertanto, l'insieme dei polinomi  $\{Q_n(x)\}$  è denso nell'insieme delle funzioni continue  $C[a, b]$  rispetto la norma  $L^2$ . Si è già visto? che  $C[a, b]$  è un insieme denso in  $L^2[a, b]$ . Dunque, segue che  $\{Q_n(x)\}$  è denso in  $L^2[a, b]$  a sua volta e pertanto il sistema è completa ed ogni  $f \in L^2[a, b]$  sul sistema ortonormale completo  $\{Q_n(x)\}$ . Focalizzandosi su  $u_l(x)$ , quanto detto significa che  $u_l(x)$  sono una base di Hilbert su  $L^2[-1, 1]$ .

Si vedono le proprietà dei polinomi di Legendre.

**Esempio.** Si ottengono i polinomi dalla funzione generatrice. Si consideri

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

Ponendo  $z = t^2 - 2xt$  segue

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1+z)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} z^k$$

dove si utilizza il coefficiente binomiale generalizzato:

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n+1-j}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$$

Dunque

$$\begin{aligned} (1+z)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} z^k = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}(t^2 - 2xt) + \frac{3}{8}(t^2 - 2xt)^2 + \dots = 1 + xt + \left(4x^2\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots \\ &= 1 + xt + \frac{1}{2}t^2(3x^2 - 1) + \dots \end{aligned}$$

Pertanto, i polinomi di Legendre sono

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

**Esempio.** Si deriva la proprietà di parità. Si parte dalla funzione generatrice e si usa la condizione di parità

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}}$$

Cioè rimane identica:  $F(x, t) = F(-x, -t)$ . Tuttavia

$$F(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = F(-x, -t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(-x)(-t)^l$$

L'uguaglianza vale termine a termine e quindi

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x)$$

cioè la proprietà di parità.

**Esempio.** Si ricavano le relazioni di ricorrenza. Sempre dalla funzione generatrice si a

$$\begin{aligned}\partial_t \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \partial_t \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2xt+t^2} \frac{2t-2x}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)lt^{l-1} \\ \frac{x-t}{1-2xt+t^2} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} (P_l(x) - lP_{l-1}(x))t^{l-1} \\ (x-t)F(x,t) &= (1-2xt+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)lt^{l-1} \\ (x-t) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l &= (1-2xt+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)lt^{l-1} \\ \sum_{l=0}^{\infty} (xP_l(x)t^l + 2x l P_l(x)t^l) - (P_l(x)t^{l+1} + P_l(x)lt^{l+1}) - P_l(x)lt^{l-1} &= 0\end{aligned}$$

Si osserva termine a termine. Per  $t^0$  si ha

$$xP_0(x) - P_1(x) \implies P_1(x) = xP_0(x)$$

Per la condizione di normalizzazione si ha

$$P_0(x) \equiv 1 \implies P_1(x) = x$$

Continuando con le altre potenze di  $t$  e cambiando gli indici  $n \rightarrow n-1$  alla seconda parentesi, ma  $n \rightarrow n+1$  all'ultimo addendo (che è lecito fare perché  $l > 0$  ed equivale a riordinare gli addendi), si ottiene:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l [x(2l+1)P_l(x) - lP_{l-1}(x) - (l+1)P_{l+1}(x)] = 0$$

Per essere nullo per ogni potenza di  $t$  bisogna avere nullo ogni coefficiente:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

Così si può costruire ogni  $P_l(x)$  dati  $P_0(x)$  e  $P_1(x)$ .

**Esempio.** Sempre dalla funzione generatrice si ha

$$\begin{aligned}\partial_x \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \partial_x \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \\ -\frac{1}{2} \frac{-2t}{1-2xt+t^2} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l \\ t \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l &= (1-2xt+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l \\ \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^{l+1} &= \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l - 2 \sum_{l=0}^{\infty} xP'_l(x)t^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^{l+2}\end{aligned}$$

Osservando i coefficienti termine a termine, potenza per potenza, si ha

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x)$$

[r] Applicano la derivata parziale in  $x$  alla relazione di ricorrenza [r] si ha

$$\partial_x [(l+1)P_{l+1}] = (2l+1)xP_l - lP_{l-1}$$

da cui si ottiene

$$(l+1)P'_{l+1} = (2l+1)P_l + (2l+1)xP'_l - lP'_l$$

Isolando  $xP'_l$ , lo si sostituisce nella prima relazione trovata

$$(l+1)P'_{l+1} = (2l+1)P_l + \frac{1}{2}(2l+1)(P'_{l+1} + P'_{l-1} - P_l) - lP'_l$$

$$P'_{l+1} = (2l+1)P_l + P'_{l-1}$$

$$P'_{l+1} - P'_{l-1} = (2l+1)P_l$$

[r] Si ottiene

$$P'_{l+1} = (l+1)P_l + xP'_l, \quad P'_{l-1} = -lP_l + xP'_l$$

Facendo un cambio d'indice in  $l \rightarrow l-1$  si ha

$$P'_l = lP_{l-1} + xP'_{l-1}$$

Da cui, sommando  $x$  volte la seconda espressione, si ottiene

$$P'_l + xP'_{l-1} = lP_{l-1} + xP'_{l-1} + x(-lP_l + xP'_l)$$

$$(1-x^2)P'_l = lP_{l-1} - xlP_l$$

Derivando rispetto ad  $x$  si ottiene

$$(1-x^2)P''_l - 2xP'_l = lP'_{l-1} - lP_l - xlP'_l$$

in cui si sostituisce l'espressione per  $P'_l$  [r] per ottenere

$$(1-x^2)P''_l - 2xP'_l = l(-lP_l + xP_l) - lP_l - xlP'_l = -l(l+1)P_l$$

da cui si arriva all'equazione di Legendre

$$(1-x^2)P''_l - 2xP'_l + l(l+1)P_l = 0$$

**Osservazione.** Dato che i polinomi di Legendre sono una base di Hilbert per  $L^2[-1, 1]$ , segue che si può espandere ogni funzione in serie di Fourier su  $[-1, 1]$  utilizzando le funzioni

$$u_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

come base. Pertanto

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l u_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

con coefficienti

$$a_l = (u_l, f) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx$$

Questo è lo sviluppo di Legendre di una funzione.

## Lecture 19

mar 03 mag  
2022 12:30

**Polinomi di Laguerre.** I polinomi di Laguerre sono un sistema ortonormale completo per  $L^2[0, \infty)$  con misura  $\omega(x) = e^{-x}$ . Essi si costruiscono ortogonalizzando tramite Gram-Schmidt i monomi  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} d_x^n (e^{-x} x^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Si definisce una funzione generatrice

$$F(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

I primi polinomi sono

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

In generale, i polinomi di Laguerre  $L_n(x)$  sono polinomi di grado massimo  $n$  in  $x$ . Essi soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$L_{n-1} = L'_{n-1} - L'_n, \quad xL'_n = nL_n - nL_{n-1}, \quad (n+1)L_{n+1} = (2n+1-x)L_n - nL_{n-1}$$

e l'equazione differenziale di Laguerre:

$$xL''_n + (1-x)L'_n + nL_n = 0$$

I polinomi sono ortogonali con la misura  $\omega(x) = e^{-x}$ :

$$(L_n, L_m) = \int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm}$$

Pertanto, le funzioni  $L_n$  sono un sistema ortonormale completo per  $L^2_{\omega}[0, \infty)$ ,  $\omega(x) = e^{-x}$ . Altrimenti, si possono usare le funzioni  $L_n e^{-\frac{x}{2}}$  per realizzare un sistema ortonormale completo per  $L^2[0, \infty)$  con  $\omega(x) \equiv 1$ .

**Polinomi di Hermite.** Essi sono un sistema ortonormale completo per  $L^2_{\omega}(-\infty, \infty)$  con  $\omega(x) = e^{-x^2}$ . Essi sono definiti da

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} d_x^n e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si possono ottenere anche dalla funzione generatrice

$$F(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

I polinomi non sono normalizzati, per questo bisogna dividerli per  $n!$ . I primi polinomi

$$H_0(x) = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

In generale, i polinomi di Hermite  $H_n(x)$  sono polinomi di grado massimo  $n$  in  $x$ . La parità di un polinomio particolare dipende dall'indice  $n$ :

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

Essi soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$H'_n = 2nH_{n-1}, \quad H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$



e l'equazione differenziale di Hermite

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

Tali polinomi non sono ortonormali, ma sono ortogonali:

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

Infatti, posto  $n \neq m$  si ha

$$\int_{\mathbb{R}} F(x, t)F(x, r)e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2xt-t^2} e^{2xr-r^2} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2x(t+r)} e^{-(t^2+r^2)} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2tr}$$

Questo integrale si può calcolare utilizzando l'espressione con le sommatorie

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!} t^n \frac{H_m}{m!} r^m e^{-x^2} dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n r^m}{n! m!} \int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx \equiv \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2tr)^k}{k!}$$

Eguagliando termine a termine, se  $m \neq n$  allora

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 0$$

perché non si hanno termini  $t^n r^m$  con  $n \neq m$  nella seconda espressione [r]. Inoltre, per  $n = m = k$  si ha

$$\frac{1}{(k!)^2} \int_{\mathbb{R}} |H_k(x)|^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{2^k}{k!}$$

Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}} |H_k(x)|^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^k k!$$

Da cui si ottiene

$$(H_n, H_m) = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

Per ottenere una base ortonormale bisogna normalizzare i polinomi  $H_n$  tramite

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

che costituiscono un sistema ortonormale completo per  $L^2_{\omega}(-\infty, \infty)$  con  $\omega(x) = e^{-x^2}$ . Allo stesso modo si può definire

$$u_n(x) = \frac{H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

che sono un sistema ortonormale per  $L^2(-\infty, \infty)$  con  $\omega(x) \equiv 1$ . [r]

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si vogliono trovare  $z \in \mathbb{C}$  tali per cui  $f(z, x) \in L^2(\mathbb{R})$  e si vuole calcolare  $(g, f)$  dove

$$g(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^2(\mathbb{R})$$

Si riscrive  $f(x)$  secondo il sistema ortonormale completo  $u_n(x)$ :

$$f(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{H_n e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Da cui segue

$$\frac{c_n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \implies c_n = z^n \pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n}{2}}$$

Inoltre

$$f(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n}{2}} u_n(x)$$

A questo punto si osserva che

$$\|f(z, x)\|_2^2 = (f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

Affinché  $f \in L^2(\mathbb{R})$  bisogna che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \sqrt{\pi} 2^n < \infty \implies 2|z|^2 < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{1 - 2|z|^2}$$

Cioè  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sse  $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ora si calcola

$$(g, f) = \sum_k \bar{d}_k c_k, \quad g(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u_n(x)$$

Si ottengono i coefficienti tramite

$$d_n = (u_n, g)$$

ma è più veloce trovare la soluzione più direttamente

$$x^3 = AH_3(x) + BH_2(x) + CH_1(x) + DH_0(x)$$

Dato che  $x^3$  è dispari, segue che  $B = D = 0$ . Utilizzando le relazioni di ricorrenza, si ha

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - 2nH_1(x) = 2x(4x^2 - 2) - 4(2x) = 8x^3 - 12x$$

Quindi

$$x^3 = A(8x^3 - 12x) + C(2x) \implies \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ C = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Pertanto

$$x^3 = \frac{1}{8}H_3(x) + \frac{3}{4}H_1(x)$$

implica

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[ \frac{1}{8}H_3(x) + \frac{3}{4}H_1(x) \right] e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{8} \sqrt{2^3 3!} \sqrt{\pi} \frac{H_3(x)}{\sqrt{2^3 3!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{3}{4} \sqrt{2\sqrt{\pi}} \frac{H_1(x)}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\pi} u_3(x) + \sqrt{\frac{9}{8}} \sqrt{\pi} u_1(x) = d_3 u_3(x) + d_1 u_1(x) \end{aligned}$$

Dunque

$$(g, f) = \bar{d}_3 c_3 + \bar{d}_1 c_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\pi} z^3 \pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{9}{8}} \sqrt{\pi} z \pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = \sqrt{\pi} \left( \sqrt{6} z^3 + \frac{3}{2} z \right)$$

**Esempio.** Si vuole trovare il polinomio di secondo grado che meglio approssima  $f(x) = \cos(\pi x)$ . Dato che  $f \in L^2[-1, 1]$ , si usano i polinomi di Legendre. In particolare

$$u_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

Da cui

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad u_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 2)$$

Si scrive la funzione in serie di Fourier come

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l u_l(x), \quad c_l = (u_l, f)$$

Dove si ha

$$\begin{aligned} c_0 &= (u_0, f) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\pi x) dx = 0 \\ c_1 &= (u_1, f) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x \cos(\pi x) dx = 0 \\ c_2 &= (u_2, f) = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) \cos(\pi x) dx = -\frac{3\sqrt{10}}{\pi^2} \end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio di Legendre di secondo grado che meglio approssima  $f$  è

$$-\frac{3\sqrt{10}}{\pi^2} u_2(x) = -\frac{3\sqrt{10}}{\pi^2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) = -\frac{15}{\pi^2} (3x^2 - 1)$$

## Lecture 20

### 5.4.4 Applicazioni fisiche

ven 06 mag  
2022 14:30

Si vedono degli usi della serie di Fourier e dei polinomi ortogonali per la risoluzione di problemi fisici. Si risolvono delle equazioni differenziali simili all'equazione di Laplace  $\nabla^2 a = 0$  o all'equazione di propagazione del calore

$$\partial_t u = k \partial_x^2 u$$

in presenza di condizioni al contorno date.

**Esempio.** Si vuole trovare il potenziale elettrostatico  $u(x, y)$  in una lamina quadrata di area unitaria con condizioni al bordo

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 0 \\ u(x, 1) = f(x) \end{cases}$$

L'equazione di Laplace associata afferma

$$\nabla^2 u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

Si ipotizza che la soluzione finale sia fattorizzabile nelle incognite: si separano le variabili. Tale ipotesi è giustificata dal fatto che la funzione  $f$  dipende solamente da  $x$ . Dunque

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \nabla^2 u = X''Y + XY'' = 0 \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = \text{cost}$$

Sarebbe più opportuno usare  $\lambda^2$  perché si ha una derivata seconda. Per ora non si usa la potenza e quando sorge il problema associato si introduce il quadrato. Pertanto

$$\frac{X''}{X} = \lambda \implies X''(x) = \lambda X(x) \implies X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Qualora si fosse usato  $\lambda^2$ , non si sarebbe dovuto maneggiare delle radici. Inoltre

$$\frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies Y''(y) = -\lambda Y(y) \implies Y(y) = Ce^{i\sqrt{\lambda}y} + De^{-i\sqrt{\lambda}y}$$

Questa è una combinazione lineare di onde piane. In meccanica quantistica soluzioni di questo tipo sono della particella libera.

Per trovare i parametri, bisogna imporre le condizioni al contorno: si hanno quattro equazioni in quattro incognite. Quindi

$$u(x, 0) = 0 \implies X(x)Y(0) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}(C + D) = 0 \implies C = -D$$

Similmente

$$u(0, y) = 0 \implies X(0)Y(y) = 0 \implies (A + B)Y(y) = 0 \implies A = -B$$

Così come

$$\begin{aligned} u(1, y) = 0 &\implies X(1)Y(y) = 0 \implies A(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}})C(e^{i\sqrt{\lambda}y} - e^{-i\sqrt{\lambda}y}) = 0 \\ &\implies 2A \sinh \sqrt{\lambda} C (e^{i\sqrt{\lambda}y} - e^{-i\sqrt{\lambda}y}) = 0 \implies \sinh \sqrt{\lambda} = 0 \vee \sin \sqrt{\lambda} = 0 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = ik\pi \vee \sqrt{\lambda} = k\pi \implies \lambda = -k^2\pi^2 \vee \lambda = k^2\pi^2, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

A seconda dei valori di  $k$  si hanno coefficienti  $A$  e  $C$  diversi. Si definisce

$$\begin{aligned} X_k(x) &= A_k(e^{i\pi kx} - e^{-i\pi kx}) = A_k 2i \sin(k\pi x) \\ Y_k(y) &= C_k(e^{-\pi ky} - e^{\pi ky}) = -2C_k \sinh(k\pi y) \end{aligned}$$

Unendo quanto trovato, una soluzione possibile è

$$u_k(x, y) = -4iA_kC_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y)$$

Si impone l'ultima condizione

$$u(x, 1) = f(x) = \sum_k u_k(x, 1) = \sum_k a_k(-4i)A_kC_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi)$$

si pone  $E_k \equiv a_k(-4i)A_kC_k$ . In quanto  $f(x)$  è definita in  $[0, 1]$ , per ottenere una serie di seni bisogna estendere  $f(x)$  in modo dispari in  $[-1, 0]$  (proprio perché il seno è una funzione dispari). Pertanto

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{2} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{2}, \quad a_0 = a_n = 0$$

Per calcolare i coefficienti  $b_n$  bisogna calcolare

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx + \frac{2}{L} \int_{-1}^0 \sin(n\pi x) (-f(x)) dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{nk} E_k \sinh(k\pi) \\ &= E_n \sinh(n\pi) \end{aligned}$$

dove  $L = 2$ , cioè la lunghezza dell'intervallo  $[-1, 1]$  di periodicità; mentre  $\delta$  è la delta di Kronecker. Da ciò si ricava  $E_n$  dato  $f(x)$ . Pertanto, da tali coefficienti si ricava la soluzione  $u(x, y)$ .

**Esempio.** Si vuole risolvere l'equazione del calore

$$\partial_t u = k \partial_x^2 u$$

Per una sbarra di lunghezza 3 con coefficiente  $k = 2$  tale per cui la temperatura agli estremi sia nulla

$$u(0, t) = u(3, t) = 0$$

e che sia sempre limitata:

$$t > 0 \implies |u(x, t)| < M$$

cioè la derivata dev'essere negativa. La temperatura iniziale in due casi diversi è

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 5 \sin(4\pi x) - 3 \sin(8\pi x) + 2 \sin(10\pi x) \\ u(x, 0) &= 25 \end{aligned}$$

Si separa la soluzione

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies T'X = 2TX'' \implies \frac{X''}{X} = \frac{1}{2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2 = \text{cost}$$

Il segno meno rispecchia la derivata negativa perché la temperatura dev'essere limitata. Si hanno due equazioni

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\lambda^2 X(x) \\ T'(t) &= -2\lambda^2 T(t) \end{aligned}$$

Da cui si ha

$$\begin{aligned} X(x) &= A'e^{i\lambda x} + B'e^{-i\lambda x} = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \\ T(t) &= Ce^{-2\lambda^2 t} \end{aligned}$$

Pertanto, la soluzione generale è

$$u(x, t) = e^{-2\lambda^2 t} C(A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)) = e^{-2\lambda^2 t} (a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x))$$

Si impongono le condizioni al contorno

$$u(0, t) = 0 \implies ae^{-2\lambda^2 t} = 0 \implies a = 0$$

Così come

$$u(3, t) = 0 \implies e^{-2\lambda^2 t} b \sin(3\lambda) = 0 \implies \sin(3\lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pertanto, la soluzione di questo problema particolare è

$$u_n(x, t) = e^{-2\lambda^2 t} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

Se  $u_n$  è soluzione, allora per il principio di sovrapposizione, una qualsiasi loro combinazione lineare è ancora soluzione, inclusa la combinazione

$$e^{-2\frac{n_1^2\pi^2 t}{9}} b_{n_1} \sin\left(\frac{n_1\pi}{3}x\right) + e^{-2\frac{n_2^2\pi^2 t}{9}} b_{n_2} \sin\left(\frac{n_2\pi}{3}x\right) + e^{-2\frac{n_3^2\pi^2 t}{9}} b_{n_3} \sin\left(\frac{n_3\pi}{3}x\right)$$

Applicando l'ultima condizione si ha

$$u(x, 0) = 5 \sin(4\pi x) - 3 \sin(8\pi x) + 2 \sin(10\pi x)$$

da cui

$$\begin{aligned}n_1 = 12 &\implies b_{12} = 5 \\n_2 = 24 &\implies b_{24} = -3 \\n_3 = 30 &\implies b_{30} = 2\end{aligned}$$

Polinomi ortogonali in  $x$  rimangono ortogonali nel tempo: l'evoluzione temporale non genera né sottrae altri polinomi ortogonali. Pertanto, la soluzione

$$u(x, t) = 5e^{-32\pi^2 t} \sin(4\pi x) - 3e^{-128\pi^2 t} \sin(8\pi x) + 2e^{-200\pi^2 t} \sin(10\pi x)$$

Si studia il caso in cui la temperatura iniziale sia costante. Nella somma di seni non si ha un termine costante, pertanto bisogna sovrapporre una serie infinita di seni.

Come precedentemente, bisogna estendere la funzione in modo dispari con  $L = 6$  così da avere una serie di Fourier solo di seni. Si parte dalla soluzione generale

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

Imponendo la condizione al contorno  $u(x, 0) = 25$  si ottiene

$$25 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

In cui si ha

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{6} \int_{-3}^3 \sin \frac{n\pi x}{3} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 25 \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{1}{3} \int_{-3}^0 (-25) \sin \frac{n\pi x}{3} dx \\&= \frac{50}{3} \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{50}{n\pi} (1 - \cos n\pi)\end{aligned}$$

Dunque, la soluzione di questo esempio è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{9}n^2\pi^2 t} \frac{50}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2}{9}\pi^2(2n+1)^2 t} \frac{100}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{3}$$

**Esempio.** Si vuole trovare il potenziale  $u(\rho, \varphi)$  in coordinate polari all'interno di un cerchio con condizioni al contorno

$$u(1, \varphi) = \begin{cases} u_1, & \varphi \in [0, \pi] \\ u_2, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

L'equazione di Laplace diventa:

$$\partial_\rho^2 u + \frac{1}{\rho} \partial_\rho u + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 u = 0$$

Si separano le variabili:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \implies R''\Phi + \frac{1}{\rho}R'\Phi + \frac{1}{\rho^2}R\Phi'' = 0$$

Da cui si ha

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2 = \text{cost}$$

Si hanno due equazioni

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = \lambda^2$$

$$\Phi'' = -\lambda^2 \Phi$$

Dalla seconda si ha una soluzione che è sovrapposizione di onde piane, per cui

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\lambda\varphi) + B \sin(\lambda\varphi)$$

Dalla prima si ha

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0$$

Assumendo che  $R(\rho) \propto \rho^k$  si ha

$$\rho^2 k(k-1)\rho^{k-2} + \rho k\rho^{k-1} - \lambda^2 \rho^2 = 0 \implies k^2 = \lambda^2 \implies k = \pm\lambda$$

Per cui una soluzione è data dalla combinazione lineare di  $\rho^\lambda$  e  $\rho^{-\lambda}$ :

$$R(\rho) = C\rho^\lambda + D\rho^{-\lambda} = C\rho^\lambda$$

Affinché la soluzione sia regolare anche in  $\rho = 0$  bisogna imporre  $D = 0$ .

Si consideri

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\lambda\varphi) + B \sin(\lambda\varphi)$$

Dato che  $\varphi$  è un angolo si richiede

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

Questo fatto può sembrare banale, tuttavia, in meccanica quantistica lo spin delle particelle è periodico ogni  $4\pi$ : ogni  $2\pi$  si cambia segno. Questo perché lo spin è un elemento in uno spazio di Hilbert diverso da  $\mathbb{R}^3$ .

Pertanto

$$A = A \cos(2\lambda\pi) + B \sin(2\lambda\pi) \implies \lambda = n \in \mathbb{Z}$$

Da cui

$$\Phi(\varphi) = A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi), \quad R(\rho) = C\rho^n$$

Quindi

$$u_n(\rho, \varphi) = C_n \rho^n [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)]$$

Sovrapponendo le soluzioni si ottiene

$$u(\rho, \varphi) = \sum_n \rho^n [A'_n \cos(n\varphi) + B'_n \sin(n\varphi)]$$

Imponendo le condizioni al contorno si ha

$$f(\varphi) \equiv u(1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n A'_n \cos(n\varphi) + B'_n \sin(n\varphi) = \begin{cases} n_1, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ n_2, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Dato che  $f(\varphi)$  è una funzione che si può estendere con periodo  $2\pi$  si ha

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)$$

dove si ha

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_1 + u_2) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 d\varphi = u_1 + u_2$$

così come

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos(n\varphi) u_1 d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\varphi) u_2 d\varphi \right] = 0$$

e pure

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi n_1 \sin(n\varphi) d\varphi + \int_\pi^{2\pi} u_2 \sin(n\varphi) d\varphi \right] = \begin{cases} 0, & n \text{ pari} \\ \frac{2}{n\pi}(u_1 - u_2), & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Pertanto

$$f(\varphi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)\varphi) \equiv u(1, \varphi)$$

per cui

$$A'_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad A'_n = 0 \\ B'_{2n} = 0, \quad B'_{2n+1} = \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi(2n+1)}$$

La soluzione finale è

$$u(\rho, \varphi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)\varphi)$$

## Lecture 21

lun 09 mag  
2022 12:30

**Esempio.** Si vede come risolvere equazioni integrali. Si vuole risolvere

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} u(y) dy$$

rispetto ad  $y$ : si vuole trovare  $u(y)$  dato  $G(x)$ . La funzione  $u$  dev'essere definita sull'intero asse reale, pertanto si deve espandere come combinazione lineare dei polinomi di Hermite:

$$u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(y)$$

Bisogna determinare i coefficienti  $a_n$  sulla base delle derivate della funzione integrale valutata in  $x = 0$ :  $G^{(n)}(0)$ . Si procede nel modo seguente

$$e^{-(x-y)^2} = e^{-x^2+2xy} e^{-y^2} = F(x, y) e^{-y^2} = e^{-y^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(y)}{m!} x^m$$

dove  $F$  è la funzione generatrice dei polinomi di Hermite. Sostituendo in  $G(x)$  si ottiene

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(y)}{m!} x^m dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(y)}{m!} x^m dy \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} H_n(y) H_m(y) e^{-y^2} dy \frac{a_n}{m!} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n 2^n \sqrt{\pi} n! = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n \end{aligned}$$

L'integrale nell'ultima riga è proporzionale a  $\delta_{nm}$ . La funzione  $G(x)$  si può espandere in serie di Taylor attorno a  $x = 0$ :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Uguagliando le due espressioni, potenza per potenza, si ottiene

$$a_n = \frac{G^{(n)}(0)}{\sqrt{\pi} 2^n n!}$$

Da cui si ha

$$u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(y)$$

[r] riveder su libro?.



**Esempio.** Si risolve l'equazione di Laplace in coordinate sferiche. Questa soluzione è importante: qualsiasi potenziale che non dipende dall'angolazione ha una simmetria sferica. Si utilizzano le armoniche sferiche per ottenere una base con cui risolvere ogni problema a simmetria sferica.

Il laplaciano in coordinate sferiche diventa

$$\nabla^2 U = 0 \iff \nabla^2 U = \frac{1}{r} \partial_r^2 (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta U) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 U = 0$$

Si procede per separazione di variabili

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

Pertanto

$$\frac{1}{r} u'' \Theta \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{u}{r} \Phi \partial_\theta (\sin \theta \Theta') + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{u}{r} \Theta \Phi'' = 0$$

Dividendo per  $u\Theta\Phi$  cioè per  $rU$  si ha

$$\frac{1}{r} \frac{u''}{u} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta r} \partial_\theta (\sin \theta \Theta') + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{r} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

moltiplicando per  $r^3$  si ha

$$r^2 \frac{u''}{u} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \partial_\theta (\sin \theta \Theta') + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Il primo addendo dipende solo da  $r$ , mentre i restanti due dipendono da  $\theta$  e  $\phi$ . Quindi

$$r^2 \frac{u''}{u} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \partial_\theta (\sin \theta \Theta') - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{cost.}$$

Quindi si ha

$$r^2 u'' = \lambda u, \quad \frac{\sin \theta}{\Theta} \partial_\theta (\sin \theta \Theta') + \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda \sin^2 \theta$$

La seconda espressione si può manipolare

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \partial_\theta (\sin \theta \Theta') + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2 = \text{cost.}$$

dove il primo membro dell'uguaglianza dipende solo da  $\theta$ , mentre il secondo dipende solo da  $\varphi$ . Pertanto, si è semplificato il problema in tre equazioni

$$\begin{aligned} r^2 u'' &= \lambda u \\ \frac{\sin \theta}{\Theta} \partial_\theta (\sin \theta \Theta') + \lambda \sin^2 \theta &= \mu^2 \\ \frac{\Phi''}{\Phi} &= -\mu^2 \end{aligned}$$

Partendo dall'ultima si ha

$$\Phi''(\varphi) = -\mu^2 \Phi(\varphi)$$

per cui ci si aspetta che le soluzioni siano onde piane:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm i\mu\varphi}$$

Dato che si sta studiando lo spazio tridimensionale, bisogna imporre

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

perché  $\varphi$  è un angolo. Questo pone il vincolo  $\mu \in \mathbb{Z}$ . In meccanica quantistica questa è la condizione di quantizzazione. Dunque

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Nella prima equazione, si cercano soluzioni del tipo  $r^\alpha$  in modo da ottenere

$$r^2 \alpha(\alpha - 1) r^{\alpha-2} = \lambda r^\alpha \implies \alpha(\alpha - 1) = \lambda \implies \alpha_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$$

La soluzione generale è la combinazione lineare

$$u(r) = Ar^{\alpha_+} + Br^{\alpha_-}$$

Il valore di  $\lambda$  è ricavato dalla seconda equazione. Quindi

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \partial_\theta \left( \sin^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \Theta'(\theta) \right) + \lambda = \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$$

Ponendo  $x = \cos \theta$  si nota che

$$\partial_\theta = \partial_x \partial_\theta x = -\sin \theta \partial_x$$

Pertanto

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta = -\partial_{\cos \theta} = -\partial_x$$

Da cui si ottiene

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_x [\sin^2 \theta \partial_x \Theta] + \lambda = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \iff \frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_x [(1 - x^2) \partial_x \Theta(\theta)] + \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} = 0$$

moltiplicando per  $\Theta$  si ha

$$\partial_x [(1 - x^2) \partial_x \Theta] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0$$

Nel caso in cui  $m = 0$  (cioè  $\varphi$  costante) si ha

$$\partial_x [(1 - x^2) \partial_x \Theta] + \lambda \Theta = 0$$

che corrisponde all'equazione di Legendre con  $\lambda = l(l + 1)$ :

$$\partial_x [(1 - x^2) \partial_x \Theta] + l(l + 1) \Theta = 0$$

tuttavia, l'equazione di Legendre è stata risolta solamente per  $l$  intero, ma con questa sostituzione esso non è garantito. Dunque, se  $l$  è intero, allora le soluzioni sono i polinomi di Legendre. Si studia perché  $l$  è intero: si cercano soluzioni che si possono esprimere come serie di potenze

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Derivando, si ha

$$\begin{aligned} d_x \left( \sum_n n a_n x^{n-1} - n a_n x^{n+1} \right) + \lambda \sum_n a_n x^n &= 0 \implies \\ \sum_n n(n-1) a_n x^{n-2} - n(n+1) a_n x^n + \lambda \sum_n a_n x^n &= 0 \end{aligned}$$

Affinché valga l'uguaglianza, tutte le potenze di  $x$  devono essere nulle. Operando un cambiamento d'indice si ha

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - n(n+1) a_n x^n + \lambda a_n x^n = 0$$

Da cui si trova una relazione di ricorrenza per i coefficienti

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n$$

Dunque, dati  $a_0$  ed  $a_1$  si può ricostruire  $\Theta(x)$ . Inoltre, tale relazione fornisce il comportamento asintotico di tali coefficienti

$$a_{n+2} \sim \frac{n}{n+2} a_n, \quad n \rightarrow \infty$$

Quindi, per  $n \gg 1$  si ha

$$a_{n+2}(n+2) \sim a_n n$$

Questo implica che

$$a_n \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty$$

Tuttavia, se si scegliesse  $a_n = \frac{1}{n}$  si avrebbe

$$\sum_n \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \neq \Theta(x)$$

ma questa non può essere la soluzione perché ha una singolarità in  $x = 1$ , cioè  $\cos \theta = \pi$ , ma non ci si aspetta alcuna singolarità nel problema iniziale.

La soluzione a questo problema risiede nel fatto che non si deve avere  $n \rightarrow \infty$ . Infatti, ipotizzando  $a_n = 0$  per  $n > n_0$ , segue che  $a_{n+2}$  deve diventare nullo quando  $a_n \neq 0$ . A tal fine bisogna ottenere

$$n(n+1) = \lambda = l(l+1)$$

In questo modo ci si assicura che la serie viene troncata ad  $a_{l+2} = 0$ , pertanto  $l$  dev'essere un numero intero. Dunque  $\lambda = l(l+1)$  con  $\lambda \in \mathbb{N}$  e l'equazione corrispondente a quella di Legendre ha per soluzione i polinomi omonimi

$$\Theta(x) = P_l(x) = P_l(\cos \theta)$$

Rimane il caso per  $m \neq 0$ : le soluzioni regolari sono le funzioni associate di Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} d_x^{l+m} (x^2-1)^l$$

Unendo tutto quanto trovato fin'ora si trova la soluzione generale per l'equazione di Laplace in coordinate sferiche

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = \frac{1}{r} (Ar^{\alpha_+} + Br^{\alpha_-}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Trovato  $\lambda = l(l+1)$  si ricava  $\alpha$

$$\alpha(\alpha-1) = \lambda = l(l+1) \implies \alpha_+ = l+1, \quad \alpha_- = -l$$

Pertanto

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} (Ar^{\alpha_+} + Br^{\alpha_-}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Il termine dopo le parentesi è proporzionale all'armonica sferica  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Tramite un'opportuna normalizzazione, l'armonica sferica è definita da

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Queste funzioni sono ortonormali quando integrate su di una sfera. I valori ammessi dei parametri sono

$$l \in [0, \infty), \quad m \in [-l, l], \quad l, m \in \mathbb{Z}$$

Il valore  $l$  è il momento angolare totale, mentre  $m$  è la sua proiezione, per questo non può mai diventarne maggiore.

Una proprietà delle armoniche sferiche riguarda la coniugazione complessa:

$$(Y_l^m(\theta, \varphi))^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi)$$

Le armoniche sferiche sono un sistema ortonormale completo di  $L^2(S^2)$  cioè lo spazio delle funzioni quadrato-integrabili sulla superficie della sfera unitaria:

$$L^2(S^2) = \left\{ f(\theta, \varphi) \mid \|f\|^2 < \infty \right\}, \quad \|f\|^2 = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |f(\theta, \varphi)|^2$$

Dato che  $Y$  sono un sistema ortonormale completo si ha

$$\left( Y_l^m, Y_{l'}^{m'} \right) = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (Y_l^m(\theta, \varphi))^* Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

[r] e ogni funzione  $f(\theta, \varphi) \in L^2(S^2)$  si può scrivere espandendola sulle armoniche sferiche

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

con

$$a_{lm} = (Y_l^m, f) = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (Y_l^m(\theta, \varphi))^* f(\theta, \varphi)$$

Per avere un'idea, i primi termini sono

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1(\cos \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^1 &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} P_1^1(\cos \theta) e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ Y_1^{-1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Ritornando alla soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche si ha

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{ml} r^{l+1} + \frac{B_{ml}}{r^l} \right) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

dove si è inclusa la normalizzazione nei coefficienti  $A$  e  $B$ . Qualora si volesse una soluzione regolare per  $r \rightarrow 0$ , allora bisogna che il secondo coefficiente sia  $B_{ml} = 0$ .

## Lecture 22

[r] rimpiazzare  $D$  con  $\mathcal{D}$  e simile per  $S$ .

mar 10 mag  
2022 12:30

## 6 Distribuzioni

Le distribuzioni estendono il concetto di funzione.

**Definizione.** Una distribuzione è un funzionale lineare (cioè una mappa)

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi(x) \mapsto T(\phi) \in \mathbb{C}$$

da uno spazio di funzioni di prova (test functions)  $\phi \in \mathcal{F}$  al campo dei numeri complessi. Un funzionale è una funzione di funzioni.

**Esempio.** Ad ogni funzione integrabile  $f(x)$  si può associare il funzionale

$$\phi(x) \mapsto T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx$$

Conoscendo il valore di  $T_f(\phi)$  per un numero sufficientemente grande di funzioni di prova  $\phi(x)$ , si può ricostruire la funzione  $f(x)$ .

**Osservazione.** In generale si può usare un funzionale lineare più generico e su di esso si possono definire operazioni che possono non essere ben definite sulla funzione di partenza. Si possono definire le derivate di funzioni discontinue quando vengono intese come distribuzioni.

## 6.1 Funzioni di prova

Si considerano le funzioni di prova in una variabile reale (l'estensione a più dimensioni dovrebbe seguire facilmente). Si vogliono scegliere le funzioni  $\phi$  di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  di modo che siano il più regolare possibile. Inoltre, si vuole che l'integrale tramite cui si definisce il funzionale esista finito. Pertanto, si richiede che ogni  $\phi$  deve svanire ad infinito abbastanza velocemente. Come viene implementata tale richiesta determina lo spazio delle funzioni di prova  $\mathcal{F}$ .

- Lo spazio  $D(\mathbb{R})$  è lo spazio delle funzioni  $C^\infty(\mathbb{R})$  a supporto compatto.
- Lo spazio  $S(\mathbb{R})$  è lo spazio delle funzioni  $C^\infty(\mathbb{R})$  che decrescono rapidamente.

**Definizione.** Il supporto di una funzione è

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

cioè è l'insieme dei punti in cui la funzione non si annulla.

### 6.1.1 Spazio $D(\mathbb{R})$

Tale spazio è definito come

$$D(\mathbb{R}) = \{\phi(x) \mid \phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ con supporto compatto}\}$$

[r] Un insieme compatto in  $\mathbb{R}$  equivale ad un insieme chiuso e limitato.

**Osservazione.** Lo spazio  $D(\mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale ed uno spazio topologico. In questo spazio non è possibile definire una topologia indotta da una metrica. In questo caso interessa definire la nozione di convergenza nella topologia di  $D(\mathbb{R})$ .

**Definizione.** Una successione di funzioni prova  $\{\phi_n\} \in D(\mathbb{R})$  converge a  $\phi \in D(\mathbb{R})$  se valgono

- esiste un intervallo limitato  $\hat{I} \subset \mathbb{R}$  che contiene il supporto di tutte le funzioni  $\phi_n$  e  $\phi$ . Cioè vale a dire che esiste un numero reale  $r$  tale che

$$\phi_n(x) = \phi(x) = 0, \quad \forall |x| \geq r$$

- La successione delle derivate  $p$ -esime di  $\phi_n$  converge uniformemente alla  $p$ -esima derivata di  $\phi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |d_x^p \phi_n - d_x^p \phi| = 0, \quad \forall p$$

In particolare,  $\phi_n$  converge uniformemente a  $\phi$ .

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Essa appartiene a  $D(\mathbb{R})$ : ha supporto compatto  $[-1, 1]$ , è infinitamente derivabile in  $(-1, 1)$  e tutte le derivate si annullano agli estremi. Si nota che la funzione non è analitica sebbene sia  $C^\infty(\mathbb{R})$ : la serie di Taylor attorno  $\pm 1$  è identicamente nulla a causa delle derivate, tuttavia la funzione non è identicamente nulla.

**Osservazione.** Ogni funzione in  $D(\mathbb{R})$  non sono analitiche.

**Osservazione.** Inoltre, l'insieme  $D(\mathbb{R})$  è denso in  $L^p(\mathbb{R})$ , oltre che essere suo sottoinsieme.

### 6.1.2 Spazio $S(\mathbb{R})$

Tale spazio è definito come

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ \phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{n \rightarrow \pm\infty} x^p d_x^q \phi(x) = 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

cioè esso è lo spazio delle funzioni che decrescono abbastanza rapidamente.

**Definizione.** Una successione  $\{\phi_n\} \in S(\mathbb{R})$  converge a  $\phi \in S(\mathbb{R})$  sse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p d_x^q \phi_n - x^p d_x^q \phi| \rightarrow 0, \quad \forall p, q$$

**Esempio.** Si considerino le funzioni

$$\phi(x) = e^{-x^2} \sin x, \quad \phi(x) = P(x)e^{-x^2}$$

dove  $P(x)$  è un polinomio. Esse sono elementi di  $S(\mathbb{R})$ . D'altra parte, le funzioni

$$\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \phi(x) = e^{-|x|}$$

non sono elementi di tale spazio: la prima svanisce troppo lentamente; la seconda non è  $C^\infty(\mathbb{R})$  perché non è derivabile in  $x = 0$ .

**Osservazione.** Ogni funzione di  $S(\mathbb{R})$  è quadrato integrabile. Pertanto, tale spazio è sottoinsieme di  $L^2(\mathbb{R})$ . Infatti,  $S(\mathbb{R})$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$ : ogni elemento di  $L^2(\mathbb{R})$  è il limite di una successione di elementi di  $S(\mathbb{R})$ .

Per veder ciò, si espande  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sulla base di Hermite

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x), \quad u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e si nota che tali funzioni diminuiscono abbastanza rapidamente, pertanto  $u_n \in S(\mathbb{R})$ .

## 6.2 Distribuzioni

Una distribuzione è un funzionale che associa una funzione di prova  $\phi$  ad un numero complesso

$$\phi(x) \mapsto T(\phi)$$

con le seguenti proprietà:

- Il funzionale  $T$  è lineare:

$$T(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1T(\phi_1) + \lambda_2T(\phi_2)$$

per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  e  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ .

- Il funzionale  $T$  è continuo: se una successione  $\phi_n(x)$  converge a  $\phi(x) \in \mathcal{F}$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\phi_n) = T(\phi)$$

Talvolta si utilizza la notazione

$$T(\phi) \equiv \langle T, \phi \rangle$$

per indicare l'azione della distribuzione sulla funzione di prova.

**Definizione.** Se  $\phi \in D(\mathbb{R})$ , allora il funzionale  $T(\phi)$  è detto semplicemente distribuzione e l'insieme di tali  $T$  costituiscono lo spazio  $D'(\mathbb{R})$ .

Se  $\phi \in S(\mathbb{R})$ , allora il funzionale  $T(\phi)$  è detto distribuzione temperata e l'insieme di tali  $T$  costituiscono lo spazio  $S'(\mathbb{R})$ .

**Osservazione.** Gli spazi delle distribuzioni  $D'(\mathbb{R})$  e  $S'(\mathbb{R})$  sono spazi vettoriali: essi sono chiusi rispetto la somma e la moltiplicazione per uno scalare

$$(T_1 + T_2)(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi), \quad (\lambda T)(\phi) = \lambda T(\phi)$$

**Osservazione.** Dato che gli spazi delle funzioni sono nella relazione  $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ , segue che gli spazi dei funzionali (delle distribuzioni) sono nella relazione  $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$ .

### 6.2.1 Distribuzioni regolari

**Definizione.** Una funzione  $f(x)$  è localmente integrabile, cioè  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , sse

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

dove  $K \subset \mathbb{R}$  è un (qualsiasi) insieme compatto.

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{|x|} \notin L^1(\mathbb{R})$$

Essa non è elemento di  $L^1$  perché diverge ad infinito. Tuttavia,  $f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  perché il suo integrale è finito su un qualsiasi insieme compatto.

**Teorema.** Ad ogni funzione  $f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  si può associare una distribuzione regolare

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx$$

Dove  $T_f(\phi) \in D'(\mathbb{R})$  è una distribuzione.

**Dimostrazione.** Per dimostrare che  $T_f$  è una distribuzione, bisogna verificare le proprietà di distribuzione per una funzione  $\phi$ . Si consideri  $K_\phi$  il supporto di  $\phi(x) \in D(\mathbb{R})$ . Dunque

$$\int_{K_\phi} f(x)\phi(x) dx < \infty$$

dato che  $\phi(x) \in C^\infty$  ed  $f$  è integrabile in ogni insieme compatto di  $\mathbb{R}$ . La linearità di  $T_f$  segue dalla linearità dell'integrale.

Per dimostrare la continuità si considera una successione di funzioni di prova  $\phi_n$  convergente a  $\phi$  nella topologia di  $D(\mathbb{R})$ . Questo significa che i supporti di  $\phi_n$  e  $\phi$  sono contenuti nell'insieme  $K$ ; inoltre, le funzioni  $\phi_n$  (e tutte le sue derivate) convergono uniformemente a  $\phi$  (e medesimo per le sue derivate). Dunque

$$|T_f(\phi) - T_f(\phi_n)| = \int_K |f(x)| |\phi(x) - \phi_n(x)| dx \leq \sup_{x \in K} |\phi(x) - \phi_n(x)| \int_K |f(x)| dx$$

noto che  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformemente si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\phi(x) - \phi_n(x)| = 0$$

mentre

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

dato che  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . [r]

**Osservazione.** Il funzionale  $T_f$  così definito è molto simile al prodotto scalare di  $L^2(\mathbb{R})$  e coincide con esso quando  $f(x) \in \mathbb{R}$

$$T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = (f^*, \phi)$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato.

Alcuni autori usano

$$T_f(\phi) = (f, \phi)$$

Altri pongono il complesso coniugato nella definizione di  $T_f$ .

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \text{sgn}(x)$$

Essa non è continua, derivabile né integrabile in  $\mathbb{R}$ . Tuttavia,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  e si definisce la distribuzione associata

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx = - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx + \int_0^{+\infty} \phi(x) dx$$

Dato che  $f$  ha crescita algebrica, cioè  $|f(x)| \leq cx^k$ ,  $|x| \gg 1$ , bisogna richiedere  $\phi \in S(\mathbb{R})$  di modo che l'integrale sia ben definito. Segue che  $T_{\text{sgn}} \in S'(\mathbb{R})$  ed esso è una distribuzione temperata.

**Esempio.** La funzione di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

è similmente associata con la distribuzione temperata

$$T_\theta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\phi(x) dx = \int_0^{+\infty} \phi(x) dx$$

con  $T_\theta \in S'(\mathbb{R})$ .



**Osservazione.** Ogni funzione di classe  $C^\infty$  può essere intesa come una distribuzione. Le funzioni elementari seno, coseno, logaritmo e qualsiasi polinomio hanno distribuzioni temperate associate. La funzione esponenziale non ha una distribuzione temperata perché  $e^x \notin S(\mathbb{R})$ .

**Osservazione.** Una notevole catena di inclusioni è

$$D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$$

In particolare, ogni spazio è denso in ogni spazio che lo contiene.

### 6.2.2 Distribuzioni singolari

La maggior parte delle distribuzioni non si possono scrivere per mezzo dell'integrale che definisce le distribuzioni regolari. Pertanto, esse sono nuovi oggetti matematici detti distribuzioni singolari.

**Esempio.** L'esempio tipico di distribuzione singolare è la delta di Dirac. Essa associa alla funzione prova  $\phi(x)$  il proprio valore in  $x_0$ :

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$$

Infatti, esso è lineare

$$\delta_{x_0}(\phi_1 + \phi_2) = \phi_1(x_0) + \phi_2(x_0)$$

inoltre è continuo: data una successione  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $D(\mathbb{R})$  si ha

$$|\delta_{x_0}(\phi_n) - \delta_{x_0}(\phi)| = |\phi(x_0) - \phi(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

perché  $\phi_n$  converge uniformemente. Quindi  $\delta_{x_0}(\phi)$  è ben definita per  $\phi \in S(\mathbb{R})$ . Pertanto, essa è una distribuzione temperata  $\delta_{x_0} \in S'(\mathbb{R})$ .

In molti problemi fisici, è costume scrivere

$$\phi(x_0) = \delta_{x_0}(\phi) \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \phi(x) dx$$

come se esistesse una funzione  $\delta(x - x_0)$  tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0)$$

Tuttavia, una funzione del genere non esiste per ogni  $\phi$ .

**Osservazione.** Quando  $x_0 = 0$  si scrive  $\delta(x)$ , ma si intende  $\delta_0(\phi)$ .

**Esempio.** Si vede un esempio di valore principale. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

Non è possibile definire una distribuzione regolare associata. Tuttavia, si può definire una distribuzione temperata che si comporta come  $f(x)$  quasi ovunque tramite il valore principale:

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \equiv P\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

L'integrando è continuo in un intorno di  $x = 0$  dato che  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ . In questo modo si regolarizza  $\frac{1}{x}$ .  
Alternativamente, si può definire

$$T_\pm(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$$

così da spostare la singolarità dal cammino di integrazione. Con abuso di notazione, la distribuzione viene anche scritta come

$$T_\pm(\phi) = \int \frac{\phi(x)}{x \pm i0} dx$$

Pertanto

$$\begin{aligned} T_\pm(\phi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \phi(x) dx \mp i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \phi(x) dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2} \frac{\phi(x)}{x} dx \mp i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} \phi(\varepsilon y) dy \right], \quad x = \varepsilon y \\ &= P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy \phi(0) = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\phi(0) \\ \frac{1}{x \pm i0} &= P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x) \end{aligned}$$

Tale relazione vale per qualsiasi funzione di prova  $\phi$ .

In meccanica quantistica, questa formula permette di spiegare la propagazione di una particella.

**Esempio.** Il valore principale non è ben definito per funzioni che si comportano come

$$\frac{1}{x^2} \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

Si utilizza la parte finita (finite part) “fp”

$$T(\phi) = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2} dx \equiv \text{fp} \frac{1}{x^2}$$

e questo regolarizza anche  $\frac{1}{x^2}$ .

**Osservazione.** Spesso si denotano le distribuzioni come funzioni, cioè si scrive  $\delta(x)$  e  $\theta(x)$ , non bisogna dimenticare che, in verità, esse non sono funzioni: il loro effetto è unicamente determinato dal modo in cui agiscono sulle funzioni di prova.

**Osservazione.** A volte si parla di supporto di una distribuzione come la chiusura dell'insieme dei punti in cui  $T_f(\phi) \neq 0$ .

Per esempio

$$\text{supp}(\delta_{x_0}(\phi)) = x_0$$

### 6.3 Limiti di distribuzioni

La successione di distribuzioni  $\{T_n\} \in D'(\mathbb{R})$  converge ad una distribuzione  $T \in D'(\mathbb{R})$  sse  $\forall \phi \in D(\mathbb{R})$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\phi) = T(\phi)$$

Questo limite è chiamato limite in senso debole perché è definito considerando l'azione delle distribuzioni  $T_n$  sulle funzioni di prova. Questo significa che tale limite non implica la convergenza puntuale, né la convergenza uniforme, né convergenza in alcuna norma  $L^p$ .

**Esempio.** Si consideri la successione di distribuzioni regolari  $T_{f_n}$  associata a

$$f_n = e^{inx}, \quad f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

La successione  $\{f_n\}$  non converge in generale, ma converge solo per  $x = 2k\pi$ , perché  $f_n = f = 1$  [r]. Invece, si studia la successione delle distribuzioni  $\{T_{f_n}\}$

$$T_{f_n}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} e^{inx} \phi(x) dx = -\frac{1}{in} \int_{\mathbb{R}} e^{inx} \phi'(x) dx = \left[ \frac{e^{inx}}{in} \phi(x) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \iff \phi(x) \in S(\mathbb{R})$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}(\phi) = -\frac{1}{in} \cdot \text{numero finito} + 0 = 0$$

[r] Perciò la successione delle distribuzioni converge a zero anche se la successioni delle funzioni non converge.

**Esempio.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & \frac{1}{k} < x < \frac{2}{k} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

con  $k \geq 1$ . Tale successione converge puntualmente a zero. La successione delle distribuzioni associate converge alla funzione delta di Dirac:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{f_k}(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} \phi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_0) k \left( \frac{2}{k} - \frac{1}{k} \right) = \phi(x_0) = \delta_{x_0}(\phi)$$

dove  $x_0 \in [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}]$  è un punto trovato tramite il teorema del valor medio. Si è partiti da funzioni regolari e si è trovata una distribuzione singolare.

**Osservazione.** La funzione delta di Dirac si può rappresentare in molti modi come limite di distribuzioni regolari. Alcuni esempi per  $\delta_0$  sono

$$f_n(x) = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \frac{1}{n\pi} \left( \frac{\sin(nx)}{x} \right)^2, \frac{1}{n\pi} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right\}$$

Esse iniziano ( $n = 1$ ) tutte da funzioni ad area unitaria, si opera uno riscalamento

$$f_n(x) = n f(nx)$$

e data una generica funzione di prova  $\phi$  si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy \rightarrow \phi(0) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy = \phi(0), \quad n \rightarrow \infty$$

dove  $y = nx$ . Quindi si può costruire la funzione delta di Dirac come limite di una qualsiasi funzione ad area unitaria.

## Lecture 23

### 6.4 Operazioni

Molte operazioni definite per le funzioni si possono estendere alle distribuzioni. L'idea è di permettere ad un'operazione di agire sulle funzioni di prova. Tipicamente, si definisce l'operazione per distribuzioni regolari, si "muove" l'operazione sulle funzioni di prova e si estende la definizione alle distribuzioni singolari.

ven 13 mag  
2022 14:30

### 6.4.1 Cambio di variabile

Le distribuzioni non sono definite puntualmente, ma si può comunque definire un concetto di cambio di variabile. Si consideri una distribuzione regolare  $T_f$  a cui è associata la funzione localmente integrabile  $f(x)$ ; inoltre, si consideri la funzione  $g(x) = f(u(x))$  con  $u(x)$  endomorfismo biunivoco di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  tale per cui  $u'(x) \neq 0$  (cioè  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Segue

$$T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(u(x))\phi(x) dx$$

Sfruttando il cambio di variabili

$$y = u(x), \quad dy = u'(x) dx, \quad x = u^{-1}(y)$$

si ha

$$T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\phi(x)}{|u'(x)|} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\phi(u^{-1}(y))}{|u'(u^{-1}(y))|} dy$$

dove il coefficiente di  $f(y)$  è la nuova funzione di prova. Dunque

$$T_g(\phi) = T_{f \circ u}(\phi) = T_f \left( \frac{\phi \circ u^{-1}}{|u' \circ u^{-1}|} \right)$$

L'azione di spostare l'operazione da  $f$  a  $\phi$  è ben definita:

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \frac{\phi \circ u^{-1}}{|u' \circ u^{-1}|} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

In generale, si estende il concetto anche alle distribuzioni singolari

$$(T \circ u)(\phi) = T \left( \frac{\phi \circ u^{-1}}{|u' \circ u^{-1}|} \right)$$

**Esempio.** Si trasla la funzione delta di Dirac. Considerati  $x_0 \in \mathbb{R}$  e la distribuzione  $\delta_{x_0}$ , si utilizza la formula precedente per trovare la distribuzione traslata di una quantità  $a$  tramite la funzione  $R_a(x) = u(x) = x + a$ :

$$(\delta_{x_0} \circ R_a)(\phi) = \delta_{x_0}(\phi \circ R_a^{-1}) = \delta_{x_0}(\phi(x - a)) = \phi(x_0 - a)$$

Oppure, equivalentemente

$$\delta_{x_0}(\phi \circ R_a^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0)\phi(x - a) dx = \phi(x_0 - a)$$

Quindi, la traslazione di  $\delta(x - x_0)$  di una quantità  $a$  corrisponde a

$$\delta(x - (x_0 - a)) = \delta(x - x_0 + a)$$

**Esempio.** Si dilata la funzione delta di Dirac. Considerati  $\lambda \in \mathbb{R}$  e la distribuzione  $\delta$ , si trova la distribuzione dilatata tramite la trasformazione  $D_\lambda(x) = \lambda x$ :

$$(\delta \circ D_\lambda)(\phi) = \delta \left( \frac{\phi \circ D_\lambda^{-1}}{|\lambda|} \right) = \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \frac{1}{|\lambda|}\phi(0) = \frac{\delta}{|\lambda|}$$

oppure, con abuso di notazione

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x)$$

**Esempio.** Per un cambio di variabile  $x \rightarrow u(x)$  con  $u$  monotona e con uno zero semplice in  $x_0$  (non polo!), si ottiene

$$\delta(u(x)) = \frac{\delta(x - u^{-1}(0))}{|u'(u^{-1}(0))|} = \frac{\delta(x - x_0)}{|u'(x_0)|}$$

Questo si può generalizzare per funzioni  $u(x)$  non monotone, ma con un numero finito di zeri semplici  $x_i$  con  $u'(\xi) \neq 0$ . Dunque

$$\delta(u(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|u'(x_i)|}$$

#### 6.4.2 Moltiplicazione per funzione $C^\infty$

Il prodotto di una distribuzione  $T$  per una funzione  $g \in C^\infty$  è definito come

$$(gT)(\phi) = T(g\phi)$$

La definizione è motivata dal caso di una distribuzione regolare  $T_f$ :

$$T_{gf}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\phi(x) dx = T_f(g\phi)$$

**Esempio.** Si vuole mostrare che

$$xP\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . La funzione identicamente costante 1 è localmente integrabile, dunque è elemento di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Quindi, ponendo  $T = P\left(\frac{1}{x}\right)$ , si ha

$$xT(\phi) = T(x\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\phi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = T_1(\phi)$$

dove si è utilizzato il fatto che, per una funzione  $\phi$  di classe  $C^\infty$ , l'integrale del valor principale è identico all'integrale ordinario.

**Esempio.** La soluzione generale dell'equazione algebrica  $xT = 1$  per  $T$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  è

$$T = P\left(\frac{1}{x}\right) + c\delta(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Infatti,  $x\delta(x) = 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  dato che

$$(x\delta)(\phi) = \delta(x\phi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)x\phi(x) dx = 0 \cdot \phi(0) = 0$$

#### 6.4.3 Complesso coniugato

Il complesso coniugato di una funzione  $f$  localmente integrabile definisce una distribuzione regolare  $T_{\bar{f}}$ :

$$T_{\bar{f}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)\phi dx = \overline{\left( \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\phi}(x) dx \right)} = \overline{(T_f(\bar{\phi}))}$$

Questo suggerisce di definire il complesso coniugato di una distribuzione arbitraria  $T$  come il funzionale lineare  $\bar{T}$  che agisce su di una funzione di prova come

$$\bar{T}(\phi) = \overline{(T(\bar{\phi}))}$$

#### 6.4.4 Derivata

Si consideri una funzione  $f$  tale per cui

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

Considerata una distribuzione regolare  $T_{f'} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , si può scrivere

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x) dx = [f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x) dx = -T_f(\phi')$$

dove il primo termine si annulla perché  $\phi \in C^\infty$  ha supporto compatto (cioè l'insieme in cui è diversa da zero è chiuso e limitato; in tutti gli altri punti, come l'infinito, la funzione  $\phi$  assume valore zero) ed ai termini di frontiera si annulla. Pertanto, questo suggerisce di definire la derivata  $T'$  di una distribuzione arbitraria  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  come

$$T'(\phi) = -T(\phi')$$

Inoltre, la derivata  $n$ -esima è

$$T^{(n)}(\phi) = (-1)^n T(\phi^{(n)})$$

**Esempio.** Si consideri la funzione di Heaviside,  $\theta$ . La sua derivata in  $x = 0$  non esiste. Tuttavia, la distribuzione  $T_\theta$  associata alla funzione  $\theta$  è differenziabile

$$T'_\theta(\phi) = -T_\theta(\phi') = - \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\phi'(x) dx = - \int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \delta$$

**Osservazione.** In generale, la derivata in senso di distribuzione si può applicare a qualsiasi funzione  $f$  con discontinuità di salto in  $x_0$ :

$$T'_f = T_{f'} + \text{disc}(f, x_0)\delta_{x_0}$$

dove  $\text{disc}(f, x_0) \equiv f(x_0^+) - f(x_0^-)$ .

**Esempio.** Si vuole derivare la funzione  $\ln|x|$  in  $x = 0$ . Essa è localmente integrabile in un intorno di tale punto. Dunque in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  si ha

$$\begin{aligned} d_x \ln|x| &= T'(\phi) = - \int_{\mathbb{R}} \ln|x|\phi'(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln|x|\phi'(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) \ln \varepsilon + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} \phi(x) dx = P \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \phi(x) dx = P \left( \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Il primo addendo nel limite svanisce perché ha ordine di infinitesimo pari a  $\varepsilon$  grazie al teorema di Taylor.

#### 6.4.5 Convoluzione

Le distribuzioni non sono definite puntualmente. Quindi due distribuzioni non si possono moltiplicare tra loro. Tuttavia, il “prodotto” più naturale tra distribuzioni è la convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x')g(x - x') dx'$$

Se  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  allora  $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . La convoluzione tra funzioni soddisfa le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= f_2 * f_1 \\ (f_1 * f_2) * f_3 &= f_1 * (f_2 * f_3) \\ f_1 * (\lambda f_2 + \mu f_3) &= \lambda(f_1 * f_2) + \mu(f_1 * f_3) \\ (f_1 * f_2)' &= f_1' * f_2 = f_1 * f_2' \end{aligned}$$

qualora le espressioni esistano.

Applicando la convoluzione a distribuzioni regolari si ha

$$T_{f*g}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x+y) dx \right) dy$$

Si generalizza tale definizione a distribuzioni generiche. Si considerino due distribuzioni  $T$  ed  $S$  di cui almeno una elemento di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Si definisce l'operazione di convoluzione

$$(T_{f(y)} * S_{g(x)})(\phi) = T_f(S_g(\phi(x+y))) = \langle T(y), \langle S(x), \phi(x+y) \rangle \rangle$$

dove la notazione delle parentesi angolate è  $T(\phi) \equiv \langle T, \phi \rangle$ . L'elemento  $\langle S(x), \phi(x+y) \rangle$  è una funzione di  $y$  di classe  $C^\infty$  ed ha supporto compatto qualora pure  $S$  l'ha. Pertanto, tale elemento è una funzione di prova e la definizione precedente ha senso per una distribuzione arbitraria  $T$ . Se  $S$  non ha supporto compatto, ma  $T$  sì, allora l'azione di  $T$  sull'elemento sopracitato è ben definito anche se esso è solo una funzione di classe  $C^\infty$ .

Questa definizione di convoluzione implica le quattro proprietà suaccennate.

**Osservazione.** La funzione delta di Dirac è l'elemento identità per la convoluzione

$$\delta * T = T * \delta = T$$

infatti

$$\langle \delta * T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta(y) T(x) \phi(x+y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} T(x) \phi(x) dx = \langle T, \phi \rangle$$

#### 6.4.6 Esempi

Si vedono alcuni esempi di integrali con la funzione delta.

**Esempio.** Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \delta(\sin(\pi x)) \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$$

Operando un cambio di variabile si ha

$$u(x) \equiv \sin(\pi x), \quad u'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

da cui segue

$$u(x) = 0 \iff x = k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta(x-k)}{|\pi \cos(\pi k)|} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\delta(x-k)}{|\pi \cos(\pi k)|} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|(-1)^k \pi|} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 \right] = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

**Esempio.** Si vuole calcolare

$$I = \int_0^3 \frac{\delta(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Operando una sostituzione si ha

$$u(x) = (x-2)(x-4), \quad u'(x) = 2x-6$$

Pertanto

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\delta(x-2)}{|-2|} + \frac{\delta(x-4)}{|2|} \right) \frac{\chi_{[0,3]}(x)}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\chi_{[0,3]}(2)}{(2^2+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{\chi_{[0,3]}(4)}{(4^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{25} + 0 = \frac{1}{50} \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della funzione caratteristica dell'intervallo  $[0, 3]$ :

$$\chi_{[0,3]}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Esempio.** Si vuole calcolare

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y)}{(3x-4y+6)^2} dy dx$$

Si consideri

$$I' = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y-(1-x))}{(3x-4(1-x)+6)^2} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{(7x+2)^2} dx = \frac{1}{18}$$

Si vuole ricavare  $I$  da  $I'$ . Se  $y \in [0, 1]$  per ogni  $x \in [0, 1]$  allora si potrebbe estendere il dominio di integrazione di  $y$  ad  $\mathbb{R}$  e sfruttare la funzione delta: si pone  $y = 1 - x$  così che  $0 \leq y \leq 1$  per ogni  $x \in [0, 1]$  e si ottiene  $I = I'$ . Infatti, tale sostituzione è esattamente la condizione posta dalla funzione delta

$$\delta(1-x-y) = \delta(y-(1-x))$$

Tuttavia, se l'integrale originale fosse stato

$$I'' = \int_0^2 \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y)}{(3x-4y+6)^2} dy dx$$

allora non si sarebbe potuto usare  $I'$  perché esiste  $x \in [0, 2]$  tale che  $y = 1 - x \notin [0, 1]$ , cioè tale valore di  $y$  è fuori dal dominio di integrazione.

**Esempio.** Si calcola

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{(2x+y+z)^3} dz dy dx$$

La condizione posta dalla funzione delta risulta essere

$$\delta(1-x-y-z) = \delta(z-(1-x-y)) \implies z = 1-x-y$$

Per  $z \in [0, 1]$  si ha  $0 \leq 1-x-y \leq 1$ . Tuttavia, se  $x, y \in [0, 1]$  allora  $1-x-y \leq 1$ . Inoltre, la non negatività,  $1-x-y \geq 0$ , può essere soddisfatta qualora  $y \leq 1-x$ . Dunque

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{(2x+y+z)^3} dz dy dx + \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{(2x+y+z)^3} dz dy dx$$

Il secondo integrale è nullo perché non si soddisfa la condizione della funzione delta. Pertanto

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(1-x-y-z)}{(2x+y+z)^3} \chi_{[0,1]} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{[2x+y+(1-x-y)]^3} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x)^3} dy dx = \int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)^3} dx = \int_0^1 \frac{2}{(1+x)^3} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



## Lecture 24

lun 16 mag  
2022 12:30

### 7 Trasformata di Fourier

La serie di Fourier è

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

per funzioni  $L^2[a, b]$  con  $L = |b - a|$  e dove i coefficienti sono

$$c_n = \int_a^b \overline{\psi_n(x)} f(x) dx$$

Questo vale per funzioni con periodo  $L$ .

Ora si considera  $L \rightarrow \infty$ : la funzione diventa non periodica, ma comunque definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Per fare ciò si considera anche  $n \rightarrow \infty$  di modo che

$$\lim_{n, L \rightarrow \infty} \frac{2\pi n}{L} = p \in \mathbb{R}, \quad \text{finito}$$

Allora si può definire la trasformata di Fourier per ogni  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Tale trasformata si indica con

$$\mathcal{F}(f)(p), \quad p \mapsto \mathcal{F}(f)$$

oppure con

$$\hat{f}(p)$$

Essa è definita come

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx$$

La funzione viene pesata su semplici onde piane. Il fattore di normalizzazione varia in letteratura, perché esso si utilizza considerando anche l'anti-trasformata; in questo caso, si divide il fattore di normalizzazione equamente nella trasformata diretta e nell'anti-trasformata. Questa espressione è ben definita perché se  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $f(x)e^{-ipx} \in L^1(\mathbb{R})$  qualora  $p \in \mathbb{R}$ . Infatti

$$|\hat{f}(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ipx}| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$$

dove l'ultima disuguaglianza (quella con l'infinito) è vera perché  $f \in L^1$ .

**Osservazione.** Nel caso di una funzione a più variabili

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

si ha

$$\hat{f}(\vec{p}) = \hat{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-i(\vec{p}, \vec{x})} dx_1, \dots, dx_n$$

dove  $(\vec{p}, \vec{x})$  è il prodotto interno (prodotto scalare euclideo). Lo spazio di  $p$  (oppure  $\vec{p}$ ) è detto spazio coniugato allo spazio delle  $\vec{x}$ , oppure spazio duale. In fisica, in particolare in meccanica quantistica, lo spazio  $p$  è lo spazio degli impulsi duale allo spazio delle posizioni, cioè delle  $x$ . I due spazi portano le stesse informazioni perché sono isomorfi.

**Esempio.** Si calcola la trasformata di Fourier di una gaussiana:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

Il parametro  $a$  determina la larghezza della gaussiana. Ne si calcola la trasformata

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+ipa^2)^2}{2a^2}} e^{-\frac{a^2 p^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2 p^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+ipa^2)^2}{2a^2}} dx$$

L'integrando è una funzione olomorfa e dunque si può spostare il percorso di integrazione nel piano complesso affinché sia parallela all'asse reale:  $\gamma(t) = t - ipa^2$ . Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+ipa^2)^2}{2a^2}} dx = \int_{\gamma} e^{-\frac{(z+ipa^2)^2}{2a^2}} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt = \sqrt{2\pi}a$$

Dunque

$$\hat{f}(p) = ae^{-\frac{a^2 p^2}{2}} = ae^{-\frac{p^2}{2a^{-2}}}$$

Essa è ancora una gaussiana (però in  $p$ ) la cui larghezza è il reciproco della larghezza originaria. Più la gaussiana originale è piccata e meno lo è quello della trasformata (e viceversa): questo si ritrova in meccanica quantistica con il principio di indeterminazione di Heisenberg.

**Esempio.** Si calcola la trasformata della funzione caratteristica dell'intervallo  $(-a, a)$ :

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} = \theta(x+a) - \theta(x-a)$$

dove  $\theta$  è la funzione di Heaviside. Dunque

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_a(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \chi_a(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ipx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{-ip} e^{-ipx} \right]_{-a}^a = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}p} (e^{ipa} - e^{-ipa}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ap)}{p} \end{aligned}$$

La larghezza del massimo centrale è  $pa = \pi$  cioè è proporzionale a  $\frac{1}{a}$  e si ottiene ancora quanto detto prima sui picchi.

**Esempio.** Si calcola la trasformata della funzione lorentziana:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

Il parametro  $a$  fornisce la semi-larghezza a metà altezza pari ad  $a$  stesso. Dunque, la trasformata è

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

Si utilizza il teorema dei residui perché si hanno delle singolarità in  $z = \pm ia$ . Come solito, si consideri un percorso costituito da  $[-R, R]$  e da una semi-circonferenza  $\gamma_R$  di raggio  $R$ . La posizione della semi-circonferenza dipende da  $p$ : per  $p < 0$  si utilizza il semi-piano positivo, per  $p > 0$  si utilizza il semi-piano negativo.

Se  $p > 0$ , allora il secondo lemma di Jordan garantisce  $\int_{\gamma_R} = 0$  per  $z \rightarrow -i\infty$ . Pertanto

$$\hat{f}(p) = -2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Res} \left[ \frac{e^{-ipz}}{z^2 + a^2}, -ia \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-pa}}{a}$$

Per  $p < 0$  si ha

$$\hat{f}(p) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Res} \left[ \frac{e^{-ipz}}{z^2 + a^2}, ia \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{pa}}{a}$$

Unendo le espressioni si ha

$$\hat{f}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|p|}}{a}$$

## 7.1 Proprietà in $L^1(\mathbb{R})$

**Linearità.** La trasformata di Fourier è un operatore lineare

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

**Continuità e limitatezza.** Come funzione di  $p$ , la trasformata è limitata, continua e si annulla all'infinito. Si mostra la limitatezza

$$|\hat{f}(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ipx}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 < \infty$$

Per mostrare la continuità, si osserva che

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \hat{f}(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx} dx$$

Dato che  $|f(x)e^{-ipx}| = |f(x)|$  per ogni  $p \in \mathbb{R}$ , si utilizza il teorema della convergenza dominata per scambiare il limite con l'integrale. Dunque

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \lim_{p \rightarrow p_0} e^{-ipx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ip_0x} f(x) dx = \hat{f}(p_0)$$

Infine

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \hat{f}(p) = 0$$

per il lemma di Riemann-Lebesgue

$$f \in L^1[a, b] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)e^{\pm inx} dx = 0$$

**Derivata.** Se  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$  allora la trasformata di Fourier della derivata  $k$ -esima esiste e vale

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(p) = (ip)^k \mathcal{F}(f)(p)$$

Infatti, per  $k = 1$  si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x)e^{-ipx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{(-ip)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx \\ &= ip \mathcal{F}(f)(p) = ip \hat{f}(p) \end{aligned}$$

Il caso  $n > 1$  si fa per induzione.

**Moltiplicazione.** Se  $|x|^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$  allora la trasformata di Fourier esiste e vale

$$\mathcal{F}(x^k f)(p) = i^k d_p^k \mathcal{F}(f)(p)$$

Infatti

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) e^{-ipx} dx = i^k d_p^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx = i^k d_p^k \mathcal{F}(f)(p)$$

Si ha una corrispondenza tra lo spazio delle posizioni e lo spazio degli impulsi. Nello spazio delle posizioni, l'applicazione della derivata  $d_x$  corrisponde a  $ip$ , mentre la moltiplicazione per  $x$  corrisponde all'applicazione della derivata  $i d_p$

**Trasformata della convoluzione.** Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  e la sua trasformata di Fourier esiste e vale

$$\mathcal{F}(f * g)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right) dx$$

Operando la sostituzione  $t = x - y$  si ha

$$\mathcal{F}(f * g)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ipt} g(t) dt \right) dy = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(p) \mathcal{F}(g)(p) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(p) \hat{g}(p)$$

Si nota che i due integrali si possono separare.

## 7.2 Trasformata di Fourier inversa

**Teorema.** Data  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $\hat{f}(p) \in L^1(\mathbb{R})$ , allora si può ricostruire  $f(x)$  da  $\hat{f}(p)$  tramite la formula di inversione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \hat{f}(p) dp$$

Questa è l'estensione al continuo (cioè  $p \in \mathbb{R}$ ) della serie di Fourier.

**Osservazione.** Risulta sufficiente che  $\hat{f}(p)$  si possa anti-trasformare quasi ovunque per definire  $f(x)$  quasi ovunque nel senso della norma  $L^1$ .

**Dimostrazione.** Si dimostra il teorema per funzioni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Questo spazio è denso in  $L^1$  ed  $L^2$ , pertanto si può usare una base di tale spazio per costruire qualsiasi funzione. Si consideri la successione  $\{f_n(p)\}$  delle funzioni

$$f_n(p) = e^{-\frac{\pi^2 p^2}{n^2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Per ogni  $p$  si ha il limite puntuale  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = 1$ . Per ipotesi  $\hat{f}(p) \in L^1(\mathbb{R})$  e si ha

$$\left| f_n(p) \hat{f}(p) e^{ipx} \right| \leq \left| \hat{f}(p) \right|, \quad \forall p, x, n$$

perciò  $f_n(p) \hat{f}(p) e^{ipx} \in L^1(\mathbb{R})$ . Ricordando che

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

si può usare il teorema della convergenza dominata per calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) f_n(p) e^{ipx} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} dp \quad (\star)$$

D'altra parte, per il teorema di Fubini si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) f_n(p) e^{ipx} dp &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ipt} dt \right) f_n(p) e^{ipx} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_n(p) e^{-ip(t-x)} dp \right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{f}_n(t-x) dt \end{aligned}$$

Se  $f(p)$  è gaussiana, allora anche  $\hat{f}_n(t)$  è gaussiana e si ha

$$\hat{f}_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 t^2}{4\pi^2}}$$

La successione  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_n(t) \right\}$  converge a  $\delta(t)$  in senso di distribuzione, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{f}_n(f-x) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t-x) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t-x) = f(x)$$

Confortando questo con  $(\star)$  si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} dp$$

Estendendo da  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  a  $f \in L^1(\mathbb{R})$  è più complicato ma la dimostrazione segue in modo simile.

**Osservazione.** Si ricordi che gli elementi di  $L^1(\mathbb{R})$  sono classi di equivalenza di funzioni identiche quasi ovunque. Segue non avere senso affermare che il teorema di inversione valga puntualmente. Tuttavia, la formula di inversione è una funzione continua in  $x$ . Quindi, data  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $\hat{f}(p) \in L^1(\mathbb{R})$ , segue esistere una funzione continua nella classe d'equivalenza di  $f$  stessa. Dunque, scegliendo  $f$  continua, allora il teorema di inversione diventa valido puntualmente.

In generale, se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora non è garantito che  $\hat{f}(p) \in L^1(\mathbb{R})$ . Dunque, il teorema d'inversione va modificato tramite un limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \hat{f}(p) e^{ipx} dp$$

## Lecture 25

Tale limite può esistere anche se  $\hat{f}$  non è integrabile in tutto  $\mathbb{R}$ . Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  è regolare a tratti, cioè di classe  $C^1(\mathbb{R})$  allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \hat{f}(p) e^{ipx} dp = \begin{cases} f(x), & f \text{ continua in } x \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & f \text{ discontinua con salto in } x \end{cases}$$

Da notare la similitudine con la serie di Fourier per funzioni periodiche.

**Esempio.** Si consideri la funzione caratteristica  $\chi_a(x)$  dell'intervallo  $(-a, a)$ . La sua trasformata è

$$\hat{\chi}_a(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ap)}{p}$$

Dunque  $\hat{\chi}_a \notin L^1(\mathbb{R})$ . Tuttavia, il limite

$$I(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\sin(ap)}{p} e^{ipx} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ip(a+x)}}{2ip} - \frac{e^{-ip(a-x)}}{2ip} dp = \frac{1}{\pi} I_1 - \frac{1}{\pi} I_2$$

[r] calcoli. Si può utilizzare il valore principale di Cauchy

$$I_1(R) = P \int_{-R}^R \frac{e^{ip(a+x)}}{2ip} dp = i\pi \frac{1}{2\pi i} e^{ip(a+x)} \Big|_{p=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & a+x > 0 \\ -\frac{1}{2}, & a+x < 0 \end{cases}$$

In base al segno di  $a+x$  bisogna cambiare come si sceglie il percorso di integrazione usato per il teorema dei residui. Analogamente

$$I_2(R) = P \int_{-R}^R \frac{e^{ip(x-a)}}{2ip} dp = \pi i \frac{1}{2\pi i} e^{ip(x-a)} \Big|_{p=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x-a > 0 \\ -\frac{1}{2}, & x-a < 0 \end{cases}$$

Unendo tutto quanto

$$I(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} [I_1(R) - I_2(R)] = \frac{\text{sgn}(a+x) - \text{sgn}(a-x)}{2} = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ \frac{1}{2}, & |x| = a \\ 1, & |x| < a \end{cases}$$

### 7.2.1 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$

Una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  non è necessariamente elemento di  $L^1(\mathbb{R})$ , quindi la trasformata  $\hat{f}(p)$  può non esistere. Tuttavia, dato  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{f}$  esiste sempre. Inoltre,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$  e dunque si può estendere la trasformata di Fourier per continuità. Per esempio, si può scrivere una qualsiasi funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  in termini di un sistema ortonormale completo di  $L^2(\mathbb{R})$  composto da funzioni di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ :

$$\{u_n\} = \left\{ \sqrt{2^n n!} \sqrt{n} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Si studiano le proprietà della trasformata di Fourier per una funzione  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Teorema.** La trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  mappa  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in sé in maniera univoca.

**Dimostrazione.** Si utilizza il fatto

$$\begin{cases} \mathcal{F}(f^{(n)})(p) = (ip)^n \mathcal{F}(f)(p) \\ \mathcal{F}(x^n f) = i^n d_p^n \mathcal{F}(f)(p) \end{cases}$$

da cui segue

$$(ip)^k \partial_p^q \mathcal{F}(f)(p) = \mathcal{F}(\partial_x^k [(-ix)^q f(x)]), \quad \forall k, q \in \mathbb{N}$$

Dato che  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , segue che

$$\partial_x^k [(-ix)^q f(x)] \in L^1(\mathbb{R})$$

quindi la sua trasformata è ben definita. D'altra parte

$$p^k \partial_p^q \mathcal{F}(f)(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

poiché

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^k d_p^q \hat{f}(p) = 0, \quad \forall p, q$$

Quindi

$$\mathcal{F}(f)(p) = \hat{f}(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

perciò

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Dato che il teorema di inversione garantisce che la mappa  $\mathcal{F}$  è invertibile, allora per ogni  $x$  si ha una corrispondenza biunivoca

$$f(x) \leftrightarrow \mathcal{F}(f)(p)$$

**Teorema.** Le funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  soddisfano le identità di Plancherel:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(p) \hat{g}(p) dp = (\hat{f}, \hat{g}) \\ \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(p)|^2 dp = \|\hat{f}\|_2^2 \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Si utilizza la formula di inversione ed il teorema di Fubini:

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(p) \hat{g}(p) dp = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(p) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} g(x) dx \right) dp = \int_{\mathbb{R}} \overline{\left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \hat{f}(p) dp \right)} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) g(x) dx =$$

[r]

**Osservazione.** La trasformata di Fourier per  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  è una mappa biunivoca che preserva la norma  $L^2$ , cioè è un isomorfismo. Risulta possibile estenderla a  $[r]$ . Infatti si ha

$$\|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f)\|_2 = \|f_n - f\|_2$$

Visto che  $L^2(\mathbb{R})$  è completo, segue potersi definire la trasformata di Fourier di  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_n), \quad f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Questa estensione è unica. Pertanto, la trasformata di Fourier è un isomorfismo da  $L^2(\mathbb{R})$  a  $L^2(\mathbb{R})$ . Anche in  $L^2(\mathbb{R})$  valgono

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2, \quad (\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) = (f, g)$$

cioè la trasformata di Fourier preserva la norma ed il prodotto scalare.

**Osservazione.** Per una generica funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , la trasformata di Fourier non è definita da

$$\mathcal{F}(f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx \quad (\star)$$

perché tale integrale potrebbe non convergere. La trasformata è data dal limite della successione delle funzioni  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}(f)(p) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) e^{-ipx} dx \right|^2 dp = 0$$

Se  $f \in (L_1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$ , allora la trasformata  $\hat{f}$  si può definire quasi ovunque tramite  $(\star)$ .

**Osservazione.** Dato

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})) \subset L^2(\mathbb{R})$$

e considerato che ognuno di tali spazi è denso in quello che lo contiene, segue poter rimpiazzare la successione di funzioni  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  con una successione di funzioni  $f_n \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$  convergenti a  $f$  in norma  $L^2$ .

Per esempio, si può utilizzare

$$f_R(x) = \chi_R(x) f(x)$$

dove  $\chi_R$  è la funzione caratteristica dell'intervallo  $[-R, R]$ . In questo modo  $f_R(x) \in L_1(\mathbb{R})$  e si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}(f)(p) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(x) e^{-ipx} dx \right|^2 dp = 0$$

Dunque, la trasformata di Fourier si può definire tramite

$$\mathcal{F}(f)(p) = \hat{f}(p) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(x) e^{-ipx} dx$$

**Esempio.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + ia}, \quad a > 0$$

Essa non è elemento di  $L^1(\mathbb{R})$ , ma  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Quindi si studia

$$K(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \frac{1}{x + ia} e^{-ipx} dx$$

perché così diventa elemento di  $L^1(\mathbb{R})$ ? [r].

Se  $\lim_{R \rightarrow \infty} K(R)$  esiste finito, allora si può definire la trasformata

$$\mathcal{F}(f)(p) = \lim_{R \rightarrow \infty} K(R)$$

Per cui si può usare il teorema dei residui

$$I(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-ipz}}{z+ia} dz$$

Se  $p > 0$  allora si chiude il percorso nel semi-piano inferiore e si ha

$$I(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \frac{e^{-ipx}}{x+ia} + \int_{\gamma_R^+} = -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{-ipz}}{z+ia}, -ia \right] = -\sqrt{2\pi} i e^{-pa}$$

Se  $p < 0$  allora si chiude nel semi-piano superiore e si ha

$$I(R) = 0$$

perché è presente alcun polo. Pertanto, il risultato finale è

$$I(R) = -\sqrt{2\pi} i e^{-pa} \theta(p)$$

dove  $\theta$  è la funzione di Heaviside. Dunque

$$\lim_{R \rightarrow \infty} K(R) = \mathcal{F}(f)(p) = -\sqrt{2\pi} i e^{-pa} \theta(p)$$

### 7.2.2 Trasformata di Fourier per una distribuzione

Si parte da distribuzioni regolari  $T_g$ . Si definisce la trasformata di Fourier  $T_{\hat{g}}$  di una funzione  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tramite il modo con cui agisce sulle funzioni di prova  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  nel modo seguente

$$\langle T_{\hat{g}}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(p) \phi(p) dp = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ipx} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(p) dp = \int_{\mathbb{R}} g(x) \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \phi(p) dp \right] dx = \langle T_g, \hat{\phi} \rangle$$

[r] dove il termina tra parentesi è  $\hat{\phi}(p)$ .

Estendendo la definizione a distribuzioni singolari in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  si ha

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$$

La definizione è sensata: data  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , segue  $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e quindi  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è invariante sotto  $\mathcal{F}$ . Perciò la trasformata di Fourier è un'operazione lineare, biunivoca e bi-continua da  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Osservazione.** Non è possibile definire la trasformata di Fourier  $\hat{T}$  per qualunque distribuzione. Per esempio se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  allora la trasformata di  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  non è necessariamente elemento di  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Pertanto, non vale più

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$$

**Esempio.** Si calcola la trasformata di Fourier della funzione delta di Dirac

$$\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-i \cdot 0} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi(x) dx = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi \right\rangle$$

Dunque

$$\mathcal{F}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



Utilizzando la formula d'inversione si ha

$$F(1)(p) = \sqrt{2\pi}\delta(p)$$

cioè si ha un'altra rappresentazione integrale della funzione delta di Dirac:

$$\delta(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} dx$$

Tale integrale non esiste in senso proprio, ma solo in senso di distribuzione, cioè applicato ad una distribuzione di prova.

**Esempio.** Si calcola la trasformata di

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|x|a}}{a}, \quad a > 0$$

Dunque

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|x|a}}{a} dx = \frac{1}{2a} \left[ \int_0^\infty e^{-x(a+ip)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x(ip-a)} dx \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{a+ip} + \frac{1}{a-ip} \right) = \frac{1}{a^2+p^2} \end{aligned}$$

cioè la funzione lorentziana. Infatti, si è già visto che

$$\mathcal{F} \left( \frac{1}{x^2+a^2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|p|a}}{a}$$

Quindi, considerato  $f_1(x)$  e  $f_2(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$  allora

$$\hat{f}_1(p) = f_2(p), \quad \hat{f}_2(p) = f_1(p)$$

Facendo la trasformata di Fourier due volte si ritorna della funzione di partenza. Attenzione che non si fa la trasformata e poi l'anti-trasformata:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f_1)(p))(x) = f_1(x)$$

**Esempio.** Si calcola la trasformata di Fourier di

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ax)}{x}, \quad f_2(x) = \chi_a(x)$$

[r] indice 1 o 2 e calcoli. Quindi

$$I(R) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{2} \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i} e^{-ipz} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz(a-p)}}{2\pi iz} dz - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iz(p+a)}}{2\pi iz} dz = I_1(R) - I_2(R)$$

L'integrale  $I_1$  ha due casi:  $a-p > 0$  e  $a-p < 0$ . Per il caso  $a-p > 0$  si utilizza un percorso nel semi-piano positivo costituito da due semi-circonferenze:

$$I_1(R) = \int_{-R}^R + \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\epsilon} = 0$$

per il teorema dei residui. Si ha

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz(a-p)}}{2\pi iz} dz = -\frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{iz(a-p)}}{2\pi iz}, 0 \right] = -\pi i \frac{1}{2\pi i} = -\frac{1}{2}$$

Quindi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = \frac{1}{2}$$

Per il caso  $a - p < 0$  si ha

$$I_1(R) = \int_{-R}^R + \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\epsilon} = 0$$

da cui

$$\int_{\gamma_\epsilon} = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{iz(a-p)}}{2\pi i z}, 0 \right] = \frac{1}{2}$$

Pertanto risulta

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = -\frac{1}{2}$$

Allo stesso modo, per  $I_2$  si ha

$$I_2(R) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & a + p > 0 \\ \frac{1}{2}, & a + p < 0 \end{cases}$$

Unendo tutto quanto si ha

$$\hat{f}_1(p) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) - I_2(R) = \begin{cases} 0, & p > a \\ 1, & -a < p < a \\ 0, & p < -a \end{cases}$$

Si è già visto che

$$\hat{\chi}_a(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ap)}{p} = f_2(p)$$

Dunque

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f_1)(p))(x) = f_1(x) = \chi_a(x)$$

Questo si può vedere anche da

$$\mathcal{F}(f)(p) = \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx$$

Applicando l'anti-trasformata si ha

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)(p))(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt = \mathcal{F}(\hat{f}(-x)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(p))(-x)$$

Pertanto

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(p))(x) = f(x) \iff f(-x) = f(x)$$

[r]

**Osservazione.** Vale

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x) = \overline{\mathcal{F}(f)(x)}$$

Table 1: Tabella riassuntiva  
Spazio  $x$  | Spazio  $p$

$e^{-\frac{x^2}{a^2}}$	$ae^{-\frac{a^2 p^2}{2}}$
$\chi_a(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ap)}{p}$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ax)}{x}$	$\chi_a(p)$
$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a x }}{a}$	$\frac{1}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a p }}{a}$
$\frac{1}{x+ia}$	$-i\sqrt{2\pi} e^{-pa} \theta(p)$
$-i\sqrt{2\pi} e^{-xa} \theta(x)$	$\frac{1}{p+ia}$

**Osservazione.** Utilizzando le seguenti proprietà, si possono ridurre molte trasformate di Fourier di funzioni generiche ad uno dei casi noti.

- $\mathcal{F}(f^{(n)}) = (ip)^n \mathcal{F}(f)$
- $\mathcal{F}(x^n f) = i^n d_x^n \mathcal{F}(f)$
- $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

**Esempio.** Si calcola la trasformata di

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} d_x \frac{1}{1+x^2}$$

cioè una derivata della funzione lorentziana. Pertanto

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}\left(d_x \frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2} ip \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2} ip \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}$$

**Esempio.** Si calcola

$$\mathcal{F}\left(\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

[r] calcoli

**Esempio.** Si trova la soluzione  $g(x)$  dell'equazione integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(t-x)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}, \quad 0 < a < b$$

Si può scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) \frac{1}{(t-x)^2 + a^2} dt = \left(g * \frac{1}{t^2 + a^2}\right)(x)$$

Pertanto

$$\left(g * \frac{1}{t^2 + a^2}\right)(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

Si utilizza la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\left(g * \frac{1}{t^2 + a^2}\right)(x) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + b^2}\right) \iff \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(g) \mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2 + a^2}\right)(x) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + b^2}\right)$$

[r] calcoli

## Lecture 26

**Esempio.** Si risolve l'equazione del calore per una sbarra di lunghezza infinita. La funzione temperatura  $u(x, t)$  deve soddisfare l'equazione

$$\partial_t u = k \partial_x^2 u$$

con  $t \geq 0$  e  $u(x, 0) = f(x)$ . Si utilizza la trasformata di Fourier

$$\hat{u}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} u(x, t) dx$$

A  $t = 0$  si ha

$$\hat{u}(p, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx = \hat{f}(p)$$

ven 20 mag  
2022 14:30

ricordando  $u(x, 0) = f(x)$ . Applicando la trasformata di Fourier all'intera equazione del calore si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] &= k\mathcal{F}[\partial_x^2 u(x, t)] \\ \partial_t \hat{u}(p, t) &= k(ip)^2 \hat{u}(p, t)\end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -kp^2 dt \implies \ln \hat{u}(p, t) = -kp^2 t + C(p)$$

dove  $C(p)$  è una costante che dipende solamente da  $p$ . Dunque, la soluzione è

$$\hat{u}(p, t) = A(p)e^{-kp^2 t}$$

Considerato

$$\hat{u}(p, 0) = \hat{f}(p) = A(p)$$

si ha

$$\hat{u}(p, t) = \hat{f}(p)e^{-kp^2 t} = \hat{f}(p) \cdot \hat{g}(p)$$

Questa espressione si può intendere come il prodotto di due trasformate:

$$\mathcal{F}(f)(p), \quad \hat{g}(p) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right)$$

Pertanto

$$\hat{u}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left(f * \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right)$$

Si utilizza l'anti-trasformata:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(p, t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f * g]] \\ u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}} dz\end{aligned}$$

Questa è la soluzione. [r]

**Esempio.** Si risolve

$$-y''(x) + y(x) = f(x)$$

con  $f(x)$  funzione arbitraria. La soluzione si può sempre separare come

$$y(x) = y_0(x) + y_P(x)$$

cioè la somma della soluzione dell'equazione omogenea associata ed una soluzione particolare. Per l'equazione omogenea si ha

$$y_0''(x) = y_0(x) \implies y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

Si studia la soluzione particolare. Si applica la trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}-\mathcal{F}(y_P''(x))(p) + \mathcal{F}(y_P(x))(p) &= \mathcal{F}(f(x))(p) \\ -(ip)^2 + 1 \mathcal{F}(y_P) &= \mathcal{F}(f) \\ \hat{y}_P(p) &= \frac{\hat{f}(p)}{1 + p^2}\end{aligned}$$

Posto

$$\hat{g}(p) = \frac{1}{1 + p^2}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$$

si ha

$$\hat{y}(p)_P = \hat{f}(p) \cdot \hat{g}(p)$$

Come prima si ha

$$y_P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x-z|} dz = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-|x-z|} dx$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + y_P(x)$$

**Esempio.** Si calcola la trasformata di Fourier della distribuzione singolare

$$T_{\pm} = \frac{1}{x \pm i0}$$

Dunque

$$\hat{T}_+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \frac{1}{x + i\varepsilon} dx$$

Si ha un polo in  $z = -i\varepsilon$ . Quindi si sceglie un percorso costituito dall'intervallo  $[-R, R]$  e, se  $p > 0$  allora il percorso va chiuso sotto, altrimenti sopra. Per il lemma di Jordan, l'integrale sulla semi-circonferenza tende a zero per  $R \rightarrow \infty$ .

Per  $p > 0$  si ha

$$I(R) = \int_{-R}^R = -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \text{Res} \left[ \frac{e^{-ipz}}{z + i\varepsilon} \right] = -i\sqrt{2\pi} e^{-p\varepsilon} \rightarrow -i\sqrt{2\pi}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Per  $p < 0$  si ha

$$I(R) = 0$$

perché il percorso non racchiude alcun polo. Pertanto, la trasformata di Fourier della funzione è

$$\hat{T}_+ = -i\sqrt{2\pi}\theta(p)$$

Operando l'anti-trasformata si ottiene una rappresentazione integrale della distribuzione  $T_+$ :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{T}_+) = T_+ = -i\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{ipx} \theta(p) dp = -i \int_0^\infty e^{ipx} dp$$

Da cui risulta

$$\frac{i}{x + i0} = iT_+ = \int_0^\infty e^{ipx} dp$$

**Trasformata di Fourier di segnali periodici** Una funzione  $x(t)$  periodica di periodo  $T$  si può espandere in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

Si definisce  $\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T}$  e si ottiene

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\omega_0 t}$$

I coefficienti di Fourier sono

$$a_n = (e^{in\omega_0 t}, x(t)) = \int_0^T e^{-in\omega_0 t} x(t) dt$$

Si applica la trasformata di Fourier

$$\hat{x}(\omega) \equiv \mathcal{F}(x(t)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathcal{F}(e^{in\omega_0 t}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega - \omega_0 n)t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta(\omega - \omega_0 n)$$

La trasformata di Fourier estrae le frequenze presenti nel segnale periodico.

**Esempio.** Si consideri una funzione periodica

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} A [e^{i\omega_0 t} e^{i\varphi} + e^{-i\omega_0 t} e^{-i\varphi}]$$

Dunque, la trasformata di tale funzione è

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2} A [e^{i\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\varphi} \delta(\omega + \omega_0)]$$

La funzione contribuisce con le frequenze  $\pm\omega_0$  con moduli  $\frac{1}{2} A e^{\pm i\varphi}$ .

## 8 Operatori lineari in spazi finito-dimensionali

Dati due spazi vettoriali complessi  $X$  e  $Y$  con

$$\dim(X) < \infty, \quad \dim(Y) < \infty$$

Si definisce operatore lineare la mappa  $A : X \rightarrow Y$  tale che

$$A(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda A(\vec{v}) + \mu A(\vec{w}), \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Si utilizza la notazione  $A(x)$  per indicare l'effetto dell'operatore su  $x \in X$ . Si usa anche la notazione  $Ax$  perché ogni operatore lineare in spazi finito-dimensionali si può rappresentare con una matrice e dunque la notazione suggerisce un prodotto matrice-vettore.

**Esempio.** Il nucleo o kernel di un insieme è

$$\text{Ker}(A) \equiv \{x \in X \mid Ax = 0\} \subset X$$

L'immagine di un insieme è

$$\text{Im}(A) \equiv \{y \in Y \mid y = Ax\} \subset Y$$

**Esempio.** Una qualsiasi matrice  $m \times n$ ,  $A_{ij}$ , è un operatore lineare da  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{C}^m$ .

Gli elementi di  $X = \mathbb{C}^n$  sono  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  sono mappati in  $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}^m$  tramite la relazione

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = A_{ij} x_j$$

Si usa la notazione di Einstein: gli indici ripetuti (da una stessa parte dell'equazione) implica una sommatoria su tale indice. Vien da sé che la sommatoria va da 1 alla dimensione dello spazio di  $x$ .

Questo prodotto corrisponde al prodotto riga per colonna

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Considerando una base  $\{u_i\}$  di  $X$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ed una base  $\{u'_i\}$  di  $Y$  ( $i = 1, \dots, m$ ), segue

$$x = x_i u_i, \quad y = y_i u'_i \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Si applica l'operatore  $A$  su un vettore della base di  $X$ , così si ottiene un vettore di  $Y$  che si può scrivere in termini della base di  $Y$ :

$$A(u_j) = A_{ij} u'_i$$

Facendo lo stesso per un generico vettore  $x \in X$  si ha

$$A(x) = A(x_j u_j) = x_j A_{ij} u'_i = y_i u'_i$$

dove  $x_j A_{ij} \equiv y_i$ . Dunque

$$y_i = A_{ij} x_j$$

Se  $X$  e  $Y$  sono spazi di Hilbert, allora si possono definire le basi ortonormali  $\{e_j\}$  e  $\{e'_i\}$  e si può trovare la matrice  $A$  come proiezione sugli elementi della base

$$A_{ij} = (e'_i, A e_j)$$

**Osservazione.** Lo spazio degli operatori lineari da  $X$  a  $Y$  è uno spazio vettoriale complesso:

$$(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2)(x) = \mu_1 A_1(x) + \mu_2 A_2(x), \quad \forall \mu_{1,2} \in \mathbb{C}, \quad \forall A_{1,2} \text{ op. lin.}$$

Tale spazio è denotato dalla scrittura  $\text{End}(X, Y)$  (end per endomorfismo) ed esso è isomorfo allo spazio  $\text{Mat}(m, n)$  delle matrici  $m \times n$  con

$$m = \dim(Y), \quad n = \dim(X)$$

## 8.1 Spazio duale

**Definizione.** Un funzionale lineare è un operatore lineare  $\alpha$  da uno spazio vettoriale  $X$  a  $\mathbb{C}$ :

$$x \mapsto \alpha(x)$$

**Definizione.** Lo spazio vettoriale di tutti i funzionali lineari su  $X$  si chiama spazio duale di  $X$  indicato come  $X^*$ .

**Osservazione.** Per ogni base  $\{u_i\}$  di  $X$ , esiste la base duale  $\{u_k^*\}$  in  $X^*$ :

$$u_j^*(u_k) = \delta_{jk}$$

Questo vale qualora lo spazio vettoriale ammetta prodotto scalare. Inoltre  $\dim X^* = \dim X$  e i due spazi sono isomorfi.

**Osservazione.** Un vettore  $x \in X$  è rappresentato da un vettore colonna, mentre un funzionale lineare  $x^* \in X^*$  è rappresentato da un vettore riga dei complessi coniugati  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .

**Osservazione.** L'insieme dei funzionali lineari è uno spazio vettoriale

$$X^* = \text{End}(X, \mathbb{C})$$

isomorfo a  $\text{Mat}(1, n)$ .

**Osservazione.** Se  $X$  è uno spazio di Hilbert, allora per ogni  $x \in X$  si può definire un funzionale lineare associato

$$\alpha_x(x') = (x, x') = (\bar{x}_1 \quad \dots \quad \bar{x}_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base ortonormale  $\{e_k\}$  si ha

$$(x, x') = \bar{x}_k e_k^* x_{k'} e_{k'} = \bar{x}_k x_k$$

Quindi

$$(\alpha_x)_k = \bar{x}_k$$

## 8.2 Operatore aggiunto

**Definizione.** Dato un operatore lineare  $A$  su uno spazi  $\mathcal{H}$  di Hilbert, si definisce l'operatore aggiunto (adjoint)  $A^\dagger$  (il simbolo è una daga, dagger) come

$$(v, A^\dagger w) = (Av, w), \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

Scegliendo una base ortonormale di  $\mathcal{H}$  allora  $A$  è una matrice e vale

$$(Av)_i = A_{ij}v_j, \quad (A^\dagger w)_i = (A^\dagger)_{ij}w_j$$

Dunque

$$(v, A^\dagger w) = \bar{v}_i A_{ij}^\dagger w_j, \quad (Av, w) = \overline{A_{ij}v_j} w_i = w_i \bar{A}_{ij} \bar{v}_j = w_j \bar{A}_{ji} \bar{v}_i$$

Dato che le due espressioni devono essere uguali per definizione, segue

$$A_{ij}^\dagger = \bar{A}_{ji}$$

L'operatore aggiunto è il complesso coniugato dell'operatore trasposto:

$$A^\dagger = (A^\top)^*$$

**Proposizione.** Le proprietà dell'operatore aggiunto sono

$$\begin{aligned} (A^\dagger)^\dagger &= A \\ (A^\dagger)^{-1} &= (A^{-1})^\dagger \\ (\alpha A + \beta B)^\dagger &= \bar{\alpha} A^\dagger + \bar{\beta} B^\dagger, \quad \forall A, B \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, \quad \forall A, B \end{aligned}$$

## 8.3 Operatore autoaggiunto o hermitiano

**Definizione.** L'operatore  $A$  è autoaggiunto o hermitiano sse

$$A^\dagger = A \iff (Av, w) = (v, A^\dagger w)$$

**Definizione.** L'operatore  $A$  è anti-hermitiano sse

$$A^\dagger = -A$$

**Osservazione.** In meccanica quantistica, la misura può essere fatta solo agli autovalori degli operatori hermitiani perché sono reali. Qualsiasi processo di misura in meccanica quantistica è basato sugli operatori hermitiani.

**Osservazione.** Se l'operatore  $A$  è un operatore hermitiano reale allora  $\bar{A} = A$ , allora

$$A^\dagger = (A^\top)^* = A^\top = A$$

cioè l'operatore è simmetrico.

## 8.4 Operatori unitari

**Definizione.** Un operatore unitario  $U$  è un operatore tale per cui

$$U^\dagger = U^{-1}$$

cioè l'aggiunto è uguale all'inverso

$$UU^\dagger = UU^{-1} = I$$



**Osservazione.** Gli operatori unitari preservano i prodotti scalari e quindi le norme (e dunque le probabilità in meccanica quantistica):

$$(Uv, Uw) = (v, U^\dagger U w) = (v, U^{-1} U w) = (v, w)$$

Un operatore unitario è un isomorfismo di  $\mathcal{H}$  in se stesso

**Teorema.** Un operatore unitario mappa basi ortonormali in basi ortonormali.

**Dimostrazione.** Si consideri un operatore unitario  $U$  e una base ortonormale  $\{e_i\}$  di  $\mathcal{H}$ . Allora i vettori

$$e'_i = U e_i$$

formano un sistema ortonormale

$$(e'_i, e'_j) = (U e_i, U e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

**Esempio.** La rotazione in  $\mathbb{R}^2$  è rappresentata da una matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

che è un operatore ortogonale ed un operatore unitario.

**Esempio.** Una matrice unitaria  $2 \times 2$  complessa generale è

$$U = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

che dipende da un parametro reale  $\varphi$  e da due numeri complessi  $a$  e  $b$  tali per cui  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .