Maths for Physics

April 15, 2022

Contents

Lecture 1

mar 01 mar 2022 12:30

1 Introduzione

Il corso si articola in due filoni principali:

- Analisi complessa
- Spazi funzionali, algebra operatoriale, spazi infiniti dimensionali
    - ◇ trasformata di Fourier
    - ◇ trasformata di Laplace
    - ◇ distribuzioni

Libri. vedi e-learning

2 Analisi complessa

2.1 Numeri complessi

Si vede un richiamo sui numeri complessi. Storicamente sono comparsi nel XVI secolo per la risoluzione di equazioni polinomiali di terzo grado. Con essi si trovano soluzioni algebriche che non hanno soluzioni nel campo reale. Un esempio è $x^2 + 1 = 0$.
In fisica si sono visti nell'elettromagnetismo: in elettrotecnica si utilizza l'impedenza; in meccanica quantistica, la funzione d'onda è un oggetto complesso, $\Psi \in \mathbb{C}$.

Definizione. Un numero complesso è una coppia ordinata (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ tali che siano definite l'addizione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

la moltiplicazione

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

e la relazione di equivalenza

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

con tale definizione è possibile dimostrare che l'insieme di tale coppie ordinate formano un campo (nel senso della definizione algebrica).

Teorema. L'insieme

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

è un campo abeliano rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione.

Osservazione.

- La proprietà commutativa e la proprietà associativa derivano da quelle dei numeri reali.
- Esiste l'identità additiva (detto zero per analogia con $\mathbb{R}$) ed è $(0, 0)$.
- Esiste l'opposto di (a, b) definito come

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

- Esiste l'identità moltiplicativa (detta uno) ed è $(1, 0)$.

- Esiste l'inverso di (a, b) definito come

$$(a, b) \cdot \frac{1}{(a, b)} = (1, 0)$$

Per trovare l'inverso si risolve

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \implies \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Dunque

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

Teorema. Il sottoinsieme

$$\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

è un campo a sua volta rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione. Esso è isomorfo ad $\mathbb{R}$: cioè esiste una mappa tra i due insiemi che ne preserva la struttura: $f(a, 0) \mapsto f(a)$.
Inoltre, $\mathbb{C}_0$ ha la stessa relazione di ordine di $\mathbb{R}$. Questo è importante perché $\mathbb{C}$ non ha nessuna relazione d'ordine e non è possibile introdurne una in maniera sensata.

Definizione. L'unità immaginaria è $(0, 1) = i$.
Si nota subito che multipli di i non hanno sempre parte immaginaria e dunque numeri che hanno solo parte immaginaria non formano un campo:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \in \mathbb{C}_0$$

Quindi la soluzione di $x^2 + 1 = 0$ risulta essere $x = (0, 1)$. Si nota che anche $(0, -1)$ risulta essere soluzione. In particolare, $(0, -1) = -i$.
Segue che $\pm i = \pm\sqrt{-1}$. Quindi $x^2 + 1 = 0$ ha soluzioni $x = \pm i$.

Definizione. Forma cartesiana. Considerato

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Inoltre, $a = \mathrm{Re}\{z\}$ e $b = \mathrm{Im}\{z\}$.

Definizione. La coniugazione complessa è un automorfismo (cioè una corrispondenza tra di un campo e se stesso che lascia invariate le relazioni). Considerato, $z = a + ib$, il suo complesso coniugato è

$$\overline{z} = a - ib = (a, -b)$$

Ne segue che

$$\overline{i} = -i, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

Le operazioni notevoli che si possono fare sono

$$z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}, \quad z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}\{z\}, \quad z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Piano complesso. di Argand-Gauss. Il piano ha due assi ortogonali su cui si rappresenta la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso. Ogni punto è individuato da coordinate cartesiane o da coordinate sferiche. In questo modo la somma di numeri complessi diventa la somma di vettori.

Definizione. In questo modo si può utilizzare la rappresentazione tramite le coordinate polari. Considerato

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\tan\theta = \frac{b}{a}$ a meno di 2π. L'angolo θ è detto anche argomento e si indica come

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \\ -\pi, & a < 0, b = 0 \end{cases}$$

tutto questo è definito a meno di $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione. Formula di Eulero. Per utilizzare tale formula, si vuole estendere ai numeri complessi, l'esponenziale definito per i numeri reali. Considerato $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ allora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

si assume che le proprietà della funzione esponenziale rimangano invariante sia per argomento reale che per argomento complesso. Quindi si ha $e^x \in \mathbb{R}$ e $e^{iy} \in \mathbb{C}$. Pertanto

$$e^{iy} = A(y) + iB(y)$$

si deriva una volta rispetto ad y e si assume che la derivata si comporti allo stesso modo anche con i numeri complessi. Quindi

$$\mathrm{d}_y e^{iy} = ie^{iy} = i(A(y) + iB(y)) = A'(y) + iB'(y) \implies \begin{cases} A(y) = B'(y) \\ B(y) = -A'(y) \end{cases}$$

derivando una seconda volta si ha

$$\mathrm{d}_y^2 e^{iy} = i(ie^{iy}) = -e^{iy} = -A(y) - iB(y) = A''(y) + iB''(y) \implies \begin{cases} A(y) = -A''(y) \\ B(y) = -B''(y) \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni differenziali da cui si può estrarre la soluzione; le condizioni al contorno sono $e^{i0} = 1$. Dunque

$$\begin{cases} A(0) = 1 \\ B(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A'(0) = 0 \\ B'(0) = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} A(y) = \cos y \\ B(y) = \sin y \end{cases}$$

questa è detta forma polare o di Eulero:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Dunque si è così estesa la definizione di esponenziale ai numeri complessi.
Si nota che

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

e considerato $|z| \ll 1$, cioè $x, y \ll 1$ si utilizza l'espansione in serie di Taylor per ottenere

$$e^z \approx (1 + x)(1 + iy) = 1 + x + iy = 1 + z$$

dunque l'espansione di Taylor funziona anche per i numeri complessi. In particolare

$$e^z = \lim_{z\to\infty} \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Osservazione. Considerato $z = re^{i\theta}$ segue $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Inoltre

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Da ciò si evince la formula di de Moivre. Considerato $n \in \mathbb{Z}$, segue

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Definizione. Così si può trovare anche la radice n-esima. La radice n-esima w di un numero complesso z è tale per cui $w^n = z$. Infatti

$$w = z^{\frac{1}{n}} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

per de Moivre. Inoltre, esistono n differenti radici di z se $|z| \neq 0$.

Esempio.

- La radice quadrata di $1 = 1e^{i0}$ risulta essere $e^{ik\pi}$, con $k \in \{0, 1\}$.
- La radice quadrata di $-1 = e^{i\pi}$ risulta essere $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}$ con $k \in \{0, 1\}$.

Equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Un'equazione di secondo grado su $\mathbb{C}$ si scrive come

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Teorema. Un'equazione di tale tipo ha sempre due soluzioni nel campo complesso. La natura delle soluzioni è dato dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Per $\Delta \geq 0$ si ha
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_{1,2} \in \mathbb{R}$$
- Per $\Delta < 0$ (cioè $-\Delta > 0$) si ha
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_{1,2} \in \mathbb{C}$$
e si ha $z_1 = \overline{z}_2$.

Logaritmo. Considerato

$$z = re^{i\varphi} = e^{\ln r}e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$$

Si può definire il logaritmo come

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

Il logaritmo ha valori diversi in base all'angolo: se tale angolo viene considerato con multipli di 2π, il numero z è sempre lo stesso, ma il suo logaritmo cambia. Il logaritmo è una funzione polidroma.
Dunque, bisogna fare una scelta del valore di φ in modo da renderlo univoco

$$\begin{cases} \varphi \in [0, \pi], & y > 0 \\ \varphi \in [-\pi, 0], & y < 0 \end{cases}$$

La funzione $\mathrm{Arg}(z)$ ha già le proprietà corrette, dunque si definisce il logaritmo in modo univoco come

$$\ln z = \ln r + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

Tuttavia, in questo modo la funzione non è più continua e si ha un branch cut. Il logaritmo è discontinuo per $x \in (-\infty, 0]$. Il branch cut risulta essere $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$.

Osservazione. Vale $\overline{\ln z} = \ln \overline{z}$. Infatti

$$\ln r - i\,\mathrm{Arg}(z) = \ln r + i\,\mathrm{Arg}(\overline{z})$$

dato che si ha

$$\overline{z} \rightsquigarrow \begin{cases} \overline{r} = r \\ \overline{\varphi} = -\varphi \end{cases}$$

Lecture 2

lun 07 mar 2022 12:30

2.2 Serie e successioni

Si vedrà la proiezione stereografica.
Si studiano le successione e le serie sul campo dei numeri complessi. Per poter definire la successione ad una serie è necessario definire un concetto di distanza. Su $\mathbb{C}$ questo è possibile perché è definita la norma $|z|$ che soddisfa le proprietà di distanza $d(a,b)$, per due $a, b \in \mathbb{C}$:

- $d(a,b) = d(b,a)$
- $d(a,b) = 0 \iff a = b$
- $\forall c \in \mathbb{C},\ d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$

Si definisce un concetto di distanza tra due numeri complessi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ come il numero reale $|z_1 - z_2|$.

Definizione. Successione convergente. La successione di numeri $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ con $z_k \in \mathbb{C}$ si dice convergere a $z \in \mathbb{C}$ se e solo se la successione dei numeri reali $|z_k - z| \to 0$, quando $k \to +\infty$.

Osservazione. Se si decompone un numero complesso nelle sue parti reale ed immaginaria allora

$$z_k - z = \mathrm{Re}(z_k - z) + i\,\mathrm{Im}(z_k - z)$$

ma

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_k - z) \leq |z_k - z| \leq |\mathrm{Re}(z_k - z)| + |\mathrm{Im}(z_k - z)| \\ \mathrm{Im}(z_k - z) \leq |z_k - z| \leq |\mathrm{Re}(z_k - z)| + |\mathrm{Im}(z_k - z)| \end{aligned}$$

Pertanto

$$|z_k - z| \to 0, \quad k \to +\infty \iff \mathrm{Re}(z_k - z) \to 0 \wedge \mathrm{Im}(z_k - z) \to 0, \quad k \to +\infty$$

Dove le successioni di parti reali ed immaginarie sono successioni di numeri reali.

Definizione. Successioni di Cauchy. Una successione di Cauchy è una successione successione $\{z_k\}_k$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \mid n, m > N_\varepsilon \implies |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Osservazione. Si nota che

- Se la successione $\{z_k\}$ è di Cauchy allora pure $\{\mathrm{Re}(z_k)\}$ e $\{\mathrm{Im}(z_k)\}$ sono successioni di Cauchy.
- Tutte le successioni convergenti in $\mathbb{C}$ sono di Cauchy.
- In $\mathbb{C}$ vale anche il viceversa perché è uno spazio metrico completo.

Definizione. Serie. La serie $\sum_n z_n$ con $z_n \in \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ se la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ convergenze a z. Le somme parziali sono

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Osservazione. Si osserva

- Condizione necessaria per la convergenza è $z_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Dunque $\text{Re}(z_n) \to 0$ e $\text{Im}(z_n) \to 0$ per $n \to +\infty$.
- Condizione sufficiente per la convergenza è la convergenza assoluta: se converge $\sum_n |z_n|$ su $\mathbb{R}$ allora converge anche $\sum_n z_n$ su $\mathbb{C}$.

Esempio. Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$$

con $\theta \in \mathbb{R}$. Si studia la convergenza assoluta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!}(i\theta)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}|i\theta|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}|\theta|^n = e^{|\theta|}$$

quindi la serie converge assolutamente su $\mathbb{R}$ a $e^{|\theta|}$ e quindi la serie originale converge in $\mathbb{C}$ a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n = e^{i\theta}$$

Questo è come si definisce l'esponenziale complesso.

Osservazione. Si può ricordare la formula di Eulero

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} i\frac{(i^2)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Si nota che riordinare i termini di una serie non ne cambia il valore se e solo se tale serie converge assolutamente, questo vale per il teorema delle serie di Riemann.

2.3 Serie di potenze

Definizione. Una serie di potenza è una quantità $S(z, z_0)$ dove z_0 è il centro della serie, $z, z_0 \in \mathbb{C}$ ed è definita come

$$S(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n \in \mathbb{C}$ costanti.
Si studia la sua convergenza per ogni valore fissato di z, cioè si studia la convergenza puntuale.
Si definisce l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid S(z, z_0) \text{ converge}\}$$

Osservazione. L'insieme E non è vuoto perché z_0 è suo elemento e la serie converge a $S(z_0, z_0) = a_0$.

Definizione. Raggio di convergenza. Si definisce l'insieme delle distanze

$$D = \{|z - z_0| \mid z \in E\}$$

Il raggio di convergenza è $R = \sup_{z \in E}|z - z_0| = \sup D$, cioè la maggiore distanza da z_0 per cui S converge.

Osservazione. Si osserva

- Una serie di potenze convergente in $\mathbb{C}$, converge in un cerchio di raggio R.
- Se la serie converge solo per $z = z_0$ allora $R = 0$.
- Se la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$ allora $R = +\infty$.

Definizione. Si vedono due definizioni per calcolare il raggio di convergenza. Una funziona solamente se un limite esiste.

- Vale
  $$R = \left(\lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$$
  questo si riduce a
  $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}$$
  quando quest'ultimo limite esiste.
- Vale
  $$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$
  quando il limite esiste.

Una volta trovato R, allora si può affermare che la serie converge per $|z - z_0| < R$ e diverge per $|z - z_0| > R$. Per $|z - z_0| = R$ la convergenza dipende dal caso particolare.

Esempio. Si consideri la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

essa è una particolare serie di potenze che ha $a_n = 1 \ \forall n$ e $z_0 = 0$. Si consideri la somma parziale n-esima:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Si studia la convergenza. Si utilizza il primo criterio

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1^{\frac{1}{n}}} = 1 \implies R = 1$$

Per il secondo criterio si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = 1 \implies R = 1$$

pertanto la serie ha raggio di convergenza pari ad 1. Infatti

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \iff |z| < 1$$

Se $|z| > 1$ allora
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$
Per $|z| = 1$ si può riscrivere $z = e^{i\theta}$ e per qualsiasi valore di $\theta \in \mathbb{R}$ si ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\theta} = \infty, \quad a_n = 1, \forall n$$
perché non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge solamente per $|z| < 1$.

Definizione. Una serie bilatera è la serie
$$S(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$
l'ultima uguaglianza è vera quando
$$c_n = \begin{cases} a_n, & n \geq 0 \\ b_n, & n < 0 \end{cases}$$
Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge con raggio R allora $|z - z_0| < R$.
Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ converge con raggio R' allora
$$\frac{1}{|z - z_0|} < R' \implies |z - z_0| > R'$$
pertanto, la regione di convergenza è l'intersezione tra le due. Per $R' < R$ si ha una corona circolare, per $R' > R$ si ha l'insieme vuoto.

Esempio. La funzione esponenziale è definita come
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
con $a_n = \frac{1}{n!}$ e $z_0 = 0$. Si calcola il suo raggio di convergenza:
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (n^n e^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n e^{-1} = +\infty$$
si utilizza la formula di Stirling $n! \sim n^n e^{-n}$. Quindi la funzione esponenziale converge in tutto $\mathbb{C}$.

Esempio. Si consideri la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} (in)^{in} z^n$$
essa ha $a_n = (in)^{in}$ e $z_0 = 0$. Si studia il raggio di convergenza con il primo criterio si utilizza il fatto che
$$|a_n| = \left|(in)^{in}\right| = \left|e^{in\ln(in)}\right| = \left|e^{in(\ln i + \ln n)}\right| = \left|e^{in(i\frac{\pi}{2} + \ln n)}\right| = \left|e^{-n\frac{\pi}{2}}\right|\left|e^{in\ln n}\right| = e^{-\frac{\pi}{2}n}$$
ricordando che $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Pertanto
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-\frac{\pi}{2}}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Osservazione. La derivata di una serie di potenze, con raggio di convergenza R, ha ancora raggio di convergenza R. Si definisce la derivata come

$$S'(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Si mostra avere lo stesso raggio di convergenza tramite il primo criterio

$$R' = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} = R$$

questo perché

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} k^{\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

Corollario. Una serie di potenze è infinitamente differenziabile all'interno del proprio raggio di convergenza.

Osservazione. I coefficienti di

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sono

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

2.4 Funzione complessa

Definizione. Una funzione complessa è una mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che associa un punto $z \in \mathbb{C}$ ad un punto $w = f(z) \in \mathbb{C}$.
Inoltre, vale

$$f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + i\,\mathrm{Im}(f(z))$$

e dato che qualsiasi numero complesso si può scrivere come $z = x + iy$ allora si può scrivere

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni reali.

Definizione. Continuità di una funzione. Una funzione $f(z)$ è continua in $z_0 \in \mathbb{C}$ se essa è definita in un intorno di z_0 e se esiste finito il limite

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Definizione. Limite. Il valore $f(z_0)$ è il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Osservazione. Come nel caso di $\mathbb{R}^2$, il limite deve essere indipendente dal cammino utilizzato.

Esempio. Si consideri

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$$

questo limite non esiste perché dipende dal cammino. Infatti, lungo l'asse reale si ha $y = 0$ e pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - iy}{x + iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

d'altra parte, lungo l'asse immaginario si ha $x = 0$ e quindi

$$\lim_{y\to 0} \frac{x - iy}{x + iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

Definizione. Continuità in un dominio. La funzione $f(z)$ è continua su di un dominio $D \subset \mathbb{C}$ se essa è continua $\forall z \in D$.

Definizione. Derivata di una funzione continua. La funzione $f(z)$ è differenziabile in z_0 se il limite

$$\mathrm{d}_z f(z_0) \equiv f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

esiste.

Osservazione. Dato che la derivata è definita come un limite, se il limite esiste, allora la derivata è indipendente dal cammino.

Definizione. Funzione olomorfa. Una funzione differenziabile su di dominio $D \subset \mathbb{C}$ è detta olomorfa su tale dominio.

Esempio. Una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ è

$$f(z) = z^3$$

infatti

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

posto $\Delta z \equiv z - z_0$, con $z_0 \in \mathbb{C}$, si ha

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3z_0^2 \Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = 3z_0^2$$

la derivata esiste ed è indipendente dall'incremento, quindi $f(z) = z^3$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

Esempio. La funzione $f(z) = \overline{z}$ non è olomorfa su $\mathbb{C}$. Questo perché

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} - \overline{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

ma, come visto, tale limite non esiste.

Lecture 3

mar 08 mar 2022 12:30

Proposizione. Valgono

- $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, quando $g(z) \neq 0$
- $\mathrm{d}_z(f \circ g)(z) = f'(g(z))g'(z)$
- Considerata $w = f(z)$ una funzione olomorfa in z_0 con $f'(z_0) \neq 0$, allora $z = f^{-1}(w)$ è olomorfa in $w_0 = f(z_0)$ e vale
$$(f^{-1}(w_0))' = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Si determina la differenziabilità di una funzione in termini pratici.

Condizioni di Cauchy-Riemann. Queste condizioni sono equivalenti alla definizione tramite il rapporto incrementale, ma sono più pratiche. Esse sono condizioni necessarie e sufficienti per verificare la differenziabilità di una funzione $f(z)$ in $z_0 \subset \mathbb{C}$.
In $\mathbb{C}$ la differenziabilità è legata alla derivabilità.

Teorema. Si consideri una funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $u,v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che u,v abbiano derivate parziali continue in un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0$. Allora le condizioni di Cauchy-Riemann sono

$$\partial_x f(z_0) = -i\,\partial_y f(z_0)$$

oppure, analogamente

$$\begin{aligned}\partial_x u(x_0,y_0) &= \partial_y v(x_0,y_0)\\ \partial_y u(x_0,y_0) &= -\partial_x v(x_0,y_0)\end{aligned}$$

ed esse sono necessarie e sufficienti per definire $f(z)$ differenziabile in z_0.

Dimostrazione. Si vede come le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie (f differenziabile implica condizioni). Se $f(z)$ è differenziabile allora esiste la derivata e quindi

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

questo limite esiste ed esso non dipende da $h \subset \mathbb{C}$, quindi non dipende nemmeno dal cammino verso 0. Pertanto, si può procedere sull'asse reale ed sull'asse immaginario. Dunque, sull'asse reale $h = h_x \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{h_x\to 0} \frac{f(z_0+h_x) - f(z_0)}{h_x}\\ &= \lim_{h_x\to 0} \frac{u(x_0+h_x,y_0) + iv(x_0+h_x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{h_x}\\ &= \partial_x u(x_0,y_0) + i\partial_x v(x_0,y_0)\end{aligned}$$

Mentre sull'asse immaginario $h = ih_y$, $h_y \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{h_y\to 0} \frac{f(z_0+ih_y) - f(z_0)}{ih_y}\\ &= \lim_{h_y\to 0} \frac{u(x_0,y_0+h_y) + iv(x_0,y_0+h_y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0+h_y)}{ih_y}\\ &= \frac{1}{i}\,\partial_y u(x_0,y_0) + \partial_y v(x_0,y_0)\end{aligned}$$

Dato che la derivata dev'essere indipendente del cammino, segue che le espressioni devono essere identiche:

$$\begin{cases}\partial_x u = \partial_y v\\ \partial_y u = -\partial_x v\end{cases}$$

Si vede come le condizioni di Cauchy-Riemann sono sufficienti. Si consideri $h = h_x + ih_y$ e la definizione di derivata come limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h_x,y_0+h_y) + iv(x_0+h_x,y_0+h_y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{h_x + ih_y}$$

Siccome u e v sono differenziabili in un intorno di z_0 allora per Taylor si ha

$$\begin{aligned}u(x_0+h_x,y_0+h_y) &= u(x_0,y_0) + h_x\,\partial_x u(x_0,y_0) + h_y\,\partial_y u(x_0,y_0) + o(|h|)\\ v(x_0+h_x,y_0+h_y) &= v(x_0,y_0) + h_x\,\partial_x v(x_0,y_0) + h_y\,\partial_y v(x_0,y_0) + o(|h|)\end{aligned}$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h_x\,\partial_x u + h_y\,\partial_y u + ih_x\,\partial_x v + ih_y\,\partial_y v}{h_x+ih_y} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h_x\,\partial_x u - h_y\,\partial_x v + ih_x\,\partial_x v + ih_y\,\partial_x u}{h_x+ih_y} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(h_x+ih_y)(\partial_x u + i\,\partial_x v)}{h_x+ih_y} = \partial_x u + i\,\partial_x v\end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza si applicano le condizioni di Cauchy-Riemann. Il limite esiste, è finito e non dipende da h. Pertanto

$$f'(z_0) = (\partial_x u + i\,\partial_x v)\big|_{(x_0,y_0)}$$

Osservazione. Le condizioni di Cauchy-Riemann permettono di scrivere le derivate di $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ in quattro modi equivalenti:

$$f'(z) = \begin{cases}\partial_x u + i\,\partial_x v \\ \partial_y u - i\,\partial_y v \\ \partial_x u - i\,\partial_y u \\ \partial_y u + i\,\partial_x u\end{cases}$$

Esempio. Si consideri la funzione $f(z)=z=x+iy$. Si ha $u(x,y)=x$ e $v(x,y)=y$. Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\begin{cases}\partial_x u = 1 \equiv \partial_y v = 1 \\ \partial_y u = 0 \equiv -\partial_x v = 0\end{cases}$$

Questo equivale in ogni punto $z\in\mathbb{C}$, quindi $f(z)=z$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.

Esempio. Si vede una funzione non olomorfa. Si consideri $f(z)=\overline{z}=x-iy$. Si ha $u(x,y)=x$ e $v(x,y)=-y$. Le condizioni diventano

$$\partial_x u = 1 \neq \partial_y v = -1$$

le condizioni non sono verificare per alcun $z\in\mathbb{C}$; pertanto, la funzione non è mai olomorfa.

Osservazione. Se una funzione contiene $\overline{z}$, allora essa non è mai olomorfa (anzi è antiolomorfa).

Definizione. Operatori differenziali in z e $\overline{z}$. Si definiscono due operatori differenziali rispetto a z e $\overline{z}$ come

$$\partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_x - i\,\partial_y), \quad \partial_{\overline{z}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_x + i\,\partial_y)$$

Teorema. Se una funzione $f(z)$ è olomorfa su di un dominio $D\subset\mathbb{C}$ allora

$$\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$$

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}} f(z) &= \frac{1}{2}(\partial_x f(z) + i\,\partial_y f(z)) = \frac{1}{2}(\partial_x(u(x,y)+iv(x,y)) + i\,\partial_y(u(x,y)+iv(x,y))) \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_x u + i\,\partial_x v + i\,\partial_y u - \partial_y v\right] = 0\end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza è data dal fatto che $f(z)$ è olomorfa e quindi segue valere le condizioni di Cauchy-Riemann.

Osservazione. Quando una funzione è derivabile nel campo complesso, allora è derivabile un numero infinito di volte (per cui è detta funzione analitica). Le funzioni u e v non sono qualsiasi, ma sono funzioni armoniche: hanno precise relazione tra le loro derivate.
Le condizioni di Cauchy-Riemann affermano che $\partial_x f(z) = -i\,\partial_y f(z)$, ma se $f(z)$ è olomorfa, allora ammette derivate seconde

$$\partial_x\partial_x f(z) = -i\,\partial_x\partial_y f(z) \iff \partial_x^2 f(z) = -i\,\partial_{xy}^2 f(z) = -i\,\partial_y\partial_x f(z) = -\partial_y^2 f(z)$$

dove nell'ultima uguaglianza si sono usate le condizioni di Cauchy-Riemann. Pertanto

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) f(z) = 0 \iff \nabla^2 f = 0$$

cioè f soddisfa l'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^2$, cioè f è una funzione armonica.

Esempio. Si consideri la funzione $f(z) = \mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. Tale funzione non è olomorfa perché dipende da $\overline{z}$ (propriamente, perché la derivata parziale rispetto $\overline{z}$ non è nulla).

Esercizio. Si mostri valere quanto affermato utilizzando u e v, mostrando la violazione delle condizioni di Cauchy-Riemann.

Esempio. Si consideri la funzione $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$. Essa è olomorfa solamente in $z = 0$ perché $\partial_{\overline{z}} z\overline{z} = z$.

Definizione. Anti-olomorfia. Una funzione $f(z)$ è detta anti-olomorfa se

$$\partial_z f(z) = 0$$

Osservazione. Si dimostra che se $f(z)$ è anti-olomorfa, allora $\overline{f}(z)$ è olomorfa.

Definizione. Polinomi a coefficienti complessi. Un polinomio a coefficienti complessi è una funzione del tipo

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

con $z, a_i \in \mathbb{C}$.

Osservazione. Esso è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ in quanto $\partial_{\overline{z}} P(z) = 0$.
Inoltre

$$\partial_z P(z) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k z^{k-1}$$

Invece, i polinomi del tipo

$$Q(z, \overline{z}) = \sum_{n,m=0}^{k} a_{nm} z^n \overline{z}^m$$

non sono olomorfi perché

$$\partial_{\overline{z}} Q(z, \overline{z}) \neq 0$$

Osservazione. Si consideri la funzione esponenziale $f(z) = e^z$. Non si sa come fare la derivata rispetto a $\overline{z}$ per verificare l'olomorfia, in quanto si è scritta la derivata solamente in funzione di x ed y. Posto $z = x + iy$ si ha

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i(e^x \sin y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\begin{cases} \partial_x u = e^x \cos y \equiv \partial_y v = e^x \cos y \\ \partial_y u = -e^x \sin y \equiv -\partial_x v = -e^x \sin y \end{cases}$$

Inoltre $\partial_z e^z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\,\partial_y)e^z$ si vede che $\partial_z e^z = e^z$.

Definizione. Si possono definire le funzioni trigonometriche come

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Esercizio. Svolgere la derivata del seno e del coseno, verificando il dominio di olomorfia (che è $\mathbb{C}$).

Definizione. Si possono definire le funzioni iperboliche come

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

2.5 Proiezione stereografica e punto all'infinito

Si introduce la nozione della proiezione stereografica di un punto all'infinito. Dato che $\mathbb{C}$ è rappresentabile con un piano, si possono avere infiniti in varie direzioni. Tuttavia, tutti i punti all'infinito sono uno solo punto e ciò si vede quando si considera il piano complesso come la proiezione di una sfera.
Il punto all'infinito estende $\mathbb{C}$ ed ha particolari proprietà.

I numeri complessi del piano $\mathbb{C}$ possono essere rappresentati come punti sulla superficie di una sfera

$$S^2 = \left\{(\xi, \eta, \zeta) \mid \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

Per proiettare un punto dalla sfera al piano si considera la retta che passa per il polo nord ed il punto della sfera. Il punto d'intersezione con il piano complesso è la proiezione $(x, y, 0) \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}$. [immagine]
La mappa si può ricavare considerando triangoli simili

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1 - \xi}$$

che implica

$$x = \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \xi}$$

Ricordando l'equazione della sfera si hanno le equazioni

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

si ha una mappa univoca tra ogni punto di $\mathbb{C}$ ad S^2, ma esiste un punto di S^2 che non è raggiungibile tramite tale mappa: $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1)$. Infatti quando $\zeta = 1$ si ha $x = y = \infty$. Questo punto è detto punto all'infinito.
Si definisce l'insieme di compattificazione di $\mathbb{C}$ come $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ed esso si può identificare con la sfera: $\hat{\mathbb{C}} \leftrightarrow S^2$. La sfera è detta sfera di Riemann.

Osservazione. La proiezione è fatta dal polo nord, tuttavia traslando la sfera verso il basso di un'unità, si può utilizzare la proiezione dal polo sud $(0, 0, -1)$. In questo caso, il punto all'infinito $z = \infty$ viene mappato ad un punto $w = z^{-1} = 0$ e viceversa.
Il polo nord della sfera originale è mappato al punto all'infinito, mentre il polo nord della sfera traslata è mappato a zero. Similmente per gli altri punti: l'emisfero superiore della sfera originale mappa i punti al di fuori della circonferenza unitaria, mentre l'emisfero superiore della sfera traslata mappa i punti all'interno della circonferenza unitaria.
La visualizzazione è più semplice se si considera la sfera unitaria centrata nell'origine: posta la proiezione dal polo nord, l'emisfero superiore mappa i punti oltre la circonferenza unitaria, mentre l'emisfero inferiore mappa quelli all'interno; il polo sud è mappato a zero, mentre il polo nord ad infinito. Tuttavia, ponendo la proiezione dal polo sud, i ruoli degli emisferi si scambiano e quindi il polo nord è mappato a zero ed il polo sud ad infinito. Per passare da una descrizione all'altra si utilizza la mappa di transizione definita da $w = z^{-1}$ e $z = w^{-1}$.
Per studiare una funzione $f(z)$ su $\mathbb{C}$ e comprendere il suo comportamento a $z = \infty$ si può studiare $f\left(\frac{1}{w}\right)$ intorno a $w = \frac{1}{z} = 0$.
Se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa o singolare in $w = 0$ allora $f(z)$ è olomorfa o singolare in $z = \infty$.

2.6 Singolarità

Si vedono le singolari delle funzioni olomorfe.

Definizione. Una funzione $f(z)$ olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ si dice intera.

Definizione. I punti in cui $f(z)$ non è intera, non è differenziabile o non è definita si dicono punti di singolarità.
Le singolarità sono classificate come

- Isolata. Un punto z_0 è un punto di singolarità isolata per una funzione $f(z)$ olomorfa (cioè differenziabile) se esiste un intorno D di z_0 di raggio ε definito come

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

  tale per cui f è olomorfa (e quindi definita) su D, ma $f(z_0)$ non è definita o non è differenziabile.

- Non isolata. Se tale intorno non esiste, allora la singolarità non è isolata. Si nota che basta anche solo un punto z_1 tale che $|z_0 - z_1| < \varepsilon$ con $f(z_1)$ non olomorfa per avere che $f(z_0)$ non è una singolarità isolata.

Singolarità isolata. Esistono tre tipi di singolarità isolate

- Rimovibile. Se $f(z_0)$ non è definita, ma esiste finito

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

  allora si estende $f(z)$ in z_0 definendo

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

  Dato che la singolarità è isolata, segue che la funzione $f(z)$ estesa diventa olomorfa in $D \cup \{z_0\}$.

- Polo di ordine k. Se esiste finito il limite
$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = a \neq 0$$
con $k\in\mathbb{N}$. Si dice che $f(z)$ ha un polo di ordine k. Per $k=1$ si ha un polo semplice, per $k=2$ si ha un polo doppio, etc.

- Essenziale. Essa è una singolarità che non si può rimuovere moltiplicando per alcuna potenza $(z-z_0)^k$.
Pertanto, il limite di $f(z)$ per $z\to z_0$ non esiste e $f(z)$ oscilla tanto più rapidamente quanto si è vicini a z_0; essa oscilla rapidamente in base al cammino. Tale funzione assume qualsiasi valore un numero infinito di volte in base al cammino con cui ci si avvicina. Successivamente si vedono due teoremi.

Esempio. Si consideri la funzione $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. Essa non è olomorfa in $z=0$. Tuttavia, esiste finito il limite
$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$
Dunque, definendo $f(0)=1$ allora $f(z)$ è olomorfa in $z=0$ e $\forall z\in\mathbb{C}$.

Osservazione. Si osserva che nelle vicinanze di un polo di ordine k si può scrivere $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, con $g(z)$ olomorfa e $\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0$.

Osservazione. Dato un polo di ordine n, il limite
$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=\infty, \quad \forall k<n$$
In particolare, per $k=0$ cioè $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ segue che la funzione diverge al polo.

Esempio. Si consideri la funzione
$$f(z)=\frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$$
In questo caso, i suoi poli sono gli zeri del denominatore (ma potrebbe non sempre essere così, bisogna fare il limite per essere sicuri): $z=1$ è un polo doppio, $z=-1$ e $z=4$ sono poli singoli.

Teorema. Weierstrass. Se z_0 è una singolarità essenziale di una funzione $f(z)$ allora
$$\forall\varepsilon,\delta>0, \forall c\in\mathbb{C}, \exists z \mid |z-z_0|<\delta, |f(z)-c|<\varepsilon$$
cioè avvicinandosi arbitrariamente alla singolarità essenziale, ci si può avvicinare arbitrariamente a qualsiasi numero complesso.

Teorema. Picard. In un intorno di z_0 singolarità essenziale di una funzione $f(z)$, tale funzione assume qualsiasi valore complesso un numero infinito di volte con eccezione al più di un valore.

Esempio. Si consideri la funzione $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Essa ha una singolarità essenziale in $z=0$. Dato $c\in\mathbb{C}$ con $c\neq 0$ e dato $\delta>0$, si può trovare z con $|z|<\delta$ tale che $e^{\frac{1}{z}}=c$. Infatti, posto $z=re^{i\theta}$ e $c=\rho e^{i\varphi}$, e considerato
$$c=e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{r}e^{-i\theta}}=e^{\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)}\equiv\rho e^{i\varphi}$$
Uguagliando fattore a fattore si ha
$$\begin{cases} e^{\frac{\cos\theta}{r}}=\rho \\ e^{i\frac{-\sin\theta}{r}}=e^{i\varphi}\end{cases} \implies \begin{cases}\frac{\cos\theta}{r}=\ln\rho \\ -\frac{\sin\theta}{r}=\varphi\end{cases} \implies \begin{cases}-\tan\theta=\frac{\varphi}{\ln\rho} \\ \varphi^2+\ln^2\rho=\frac{1}{r^2}\end{cases}$$

Studiando tale sistema, si afferma che esiste sempre una soluzione. Tuttavia, dato che $\rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi+2k\pi)}$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, segue che si può ridefinire $\varphi' = \varphi + 2k\pi$ e quindi la seconda equazione è

$$(\varphi')^2 + \ln^2 \rho = \frac{1}{r^2}$$

con φ' arbitrariamente grande. Pertanto, r dev'essere arbitrariamente piccolo per mantenere l'uguaglianza. Quindi $r < \delta$ ed $f(z)$ può assumere qualsiasi valore quando $r \to 0$. L'unico valore che non può assumere è $f(z) = 0$.

Definizione. Funzione meromorfa. Una funzione $f(z)$ è meromorfa se ha solo singolarità rimovibili o poli in un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Cioè non ha singolarità essenziali. Non si considerano le singolarità a $z = \infty$.

Lecture 4

ven 11 mar 2022 14:30

Osservazione. Si possono studiare le proprietà di singolarità di $f(z)$ in $z = \infty$ studiando le proprietà di $f(w)$ con $w = \frac{1}{z}$ in $w = 0$.
Grazie alla doppia mappa della proiezione stereografica

- i poli diventano zeri e viceversa
- le singolarità essenziali rimangono tali

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Gli zeri di tale funzione sono gli zeri di $A(z)$, mentre i poli sono gli zeri di $B(z)$ quando non ha fattori in comune con $A(z)$. Le singolarità sono $z = 1$ e $z = -\frac{2}{3}$. Si studia che tipo di polo sono

$$\lim_{z\to 1} (z-1)^3 \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2} = \frac{4}{5}$$

dunque $z = 1$ è un polo di ordine terzo. Per esercizio studiare la natura di $z = -\frac{2}{3}$.
Si osserva anche se il punto ad infinito $z = \infty$ è una singolarità. Si pone $z = \frac{1}{w}$ e si scrive

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w^8} + \frac{1}{w^4} + 2}{(\frac{1}{w} - 1)^3(\frac{3}{w} + 2)^2} = \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2}$$

Si studia $w = 0$:

$$\lim_{w\to 0} w^3 \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2} = \frac{1}{9}$$

dunque $w = 0$ è un polo di ordine terzo, pertanto $z = \infty$ è un polo di ordine terzo per $f(z)$.

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = e^z$$

Si ricorda essere una funzione su $\mathbb{C}$. Tuttavia, si deve comunque studiare $z = \infty$. Per quanto già visto, risulta immediato che

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$$

ha una singolarità essenziale in $\frac{1}{z} = w = 0$. Pertanto, $z = \infty$ è una singolarità essenziale per $f(z) = e^z$.

Singolarità non isolata. Esistono due tipi di singolarità non isolate:

- punto limite di una sequenza di singolarità isolate;
- punto di diramazione di una funzione a più valori (multivalued, come il logaritmo).

Esempio. Si vede un esempio per la prima categoria. Si consideri la funzione

$$f(z) = \tan\frac{1}{z} = \frac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}$$

la tangente sui numeri complessi è ancora definita come il rapporto tra seno e coseno, i quali sono definiti in termini della funzione esponenziale. Tuttavia, la funzione $f(z)$ non è definita in $z = 0$ ed ha dei poli nei punti z_k in cui $\cos\frac{1}{z}$ si annulla. Tali zeri sono

$$z_k = \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si dimostra essere dei poli semplici. Espandendo in serie di Taylor fino al secondo ordine attorno z_k si ha

$$f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z_k} + \mathrm{d}_z \sin\left(\frac{1}{z_k}\right)(z - z_k) + \dots}{\cos\frac{1}{z_k} + \mathrm{d}_z(\cos\frac{1}{z_k})(z - z_k) + \dots} \sim_{z_k} \frac{1 - \frac{1}{2z_k^4}(z - z_k)^2}{\frac{1}{z_k^2}(z - z_k) - \frac{1}{z_k^3}(z - z_k)^2} \sim_{z_k} \frac{z_k^2}{z - z_k}$$

Inoltre, la successione $\{z_k\}$ converge a

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} = 0$$

pertanto, in qualsiasi intorno di $z = 0$ si ha almeno un z_k e questo implica che $z = 0$ è una singolarità non isolata. Infatti, ogni z_k è una singolarità isolata, perché per ogni z_k esiste un intorno che non contiene altri z_k ed in cui la funzione è olomorfa escluso al più z_k stesso.

Esempio. Si vede un esempio per la seconda categoria. Si consideri la funzione

$$f(z) = \sqrt{z} \equiv w$$

La funzione $f(z) = w(z)$ è la funzione ("funzione" non nel senso di Analisi I, bensì di relazione che può associare ad un punto del dominio *più valori* in un codominio) inversa di $z(w) = w^2$, tuttavia, w^2 non è (in generale) iniettiva. La mancanza di iniettività implica che $f(z)$ sia una funzione a molteplici valori. Infatti $\forall z \mid z = re^{i\theta}$ si possono definire (almeno) due valori di $w(z)$:

$$w_0(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad w_1(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+\pi}$$

e tutti i numeri $w_{0k}(z)$ e $w_{1k}(z)$ che sono rotazioni di $2k\pi$ dei due valori riportati. Si escludono queste molteplici soluzioni scegliendo $\theta \in (-\pi, \pi]$. Le due soluzioni sono chiamate rami (branches).
Ciò è analogo alla situazione sui numeri reali $y(x) = x^2$ che ha per soluzione $x(y) = \pm\sqrt{y}$. Tuttavia, mentre da un lato (quello reale) la scelta di uno dei due rami (positivo o negativo) implica che $y(x)$ sia differenziabile per $x \neq 0$; dall'altro (quello complesso) non è così: $z = 0$ è una singolarità ed è impossible definire $w_0(z)$ e $w_1(z)$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in modo che w_0 e w_1 siano olomorfe (oltretutto, esse non sono nemmeno continue).
Infatti, scegliendo un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$, si ha

$$w_0(z_0) = \sqrt{r_0}e^{i\frac{\theta_0}{2}}$$

Si consideri un cammino chiuso Γ_α intorno a z_0 che non include non l'origine, ed un secondo cammino chiuso Γ_β che la contiene. La fase dei punti di Γ_α varia tra due valori di θ, uno massimo

ed uno minimo. La distanza tra i due angoli risulta essere $\Delta\theta < 2\pi$, proprio perché non si include l'origine (in questo caso l'origine è il punto di singolarità perché $f(x) = \sqrt{z}$ non è olomorfa in $z = 0$ dato che non è ivi derivabile). Sul piano complesso di $f(z) = \sqrt{z} = w$ (cioè quello che ha assi $\mathrm{Re}\,(w)$ e $\mathrm{Im}\,(w)$), il valore di w oscilla tra un massimo ed un minimo per poi tornare al valore di partenza.
Invece, sul cammino Γ_β la fase varia di 2π, perché è inclusa l'origine, cioè il punto di singolarità. Infatti, si passa da θ a $\theta + 2\pi$ e dunque

$$w_0(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \to \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = w_1(z)$$

Pertanto, sul piano complesso di w, la curva Γ_β non è più una chiusa, bensì collega le due soluzioni w_0 e w_1: percorrendo una curva chiusa (nel piano di z, del dominio) che contiene $z = 0$ (cioè la singolarità), si passa su di un altro ramo della funzione (nel piano di w, del codominio). Una rotazione di 4π risulta essere l'identità. Dunque, i rami possibili sono solo due. Pertanto, il punto $z = 0$ è un punto di diramazione.
Dato che

$$w_1(z) = -w_0(z)$$

segue che la funzione non è continua in $z = 0$. A questo punto si introduce il branch cut cioè l'esclusione di una regione del piano complesso (inteso come dominio) per rendere impossibile la costruzione di curve chiuse che permettano di passare da un branch all'altro.
Pertanto, su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ risulta che $\sqrt{z}$ sia ben definita e su tale insieme, $w_0(z)$ e $w_1(z)$ sono funzioni olomorfe, continue e ad un solo valore (single-valued).

Osservazione. L'analisi complessa dà informazioni solamente sul numero di branch cut e su quale punto si ha la diramazione, ma non permette di stabilire come dev'essere posto nel piano complesso.
Il branch cut è arbitrariamente posizionato, ma deve contenere il punto di diramazione ed impedire di poter girare intorno ad esso. Una volta fissata la scelta, allora il valore di tutti i rami è fissato.

2.7 Superfici di Riemann.

Una volta fissata la disposizione del cut, tutti i valori della funzione in tutti i rami sono fissati sapendo il valore in un punto. Considerata

$$f(z) = \sqrt{z}$$

definendo il taglio $(-\infty, 0]$ e ponendo $\sqrt{1} = 1$, si ha completamente determinato $f(z)$, $w_0(z)$ e $w_1(z)$.
Questo implica l'esistenza di (almeno) una descrizione alternativa in cui non sono presenti tagli ed in cui le funzioni a valori multipli diventano a singola variabile ed olomorfe. Si arrivare a tale descrizione estendendo il dominio con molteplici copie del dominio stesso $D \subset \mathbb{C}$.

Esempio. Lo stesso punto $z \in \mathbb{C}$ si può immaginare abbia due diverse immagini, $f_1(z)$ ed $f_2(z)$, sotto la stessa funzione $f(z)$. Raddoppiando $\mathbb{C}$ si avrebbero due copie, z_1 e z_2, con $f_1(z_1)$ e $f_2(z_2)$ dove f_1 ed f_2 sono funzioni ad un valore (single valued).

Definizione. Il nuovo dominio formato da molteplici copie del dominio complesso si chiama superficie di Riemann e corrisponde ad un'estensione di $\mathbb{C}$. Le copie di $\mathbb{C}$ devono essere connesse lungo il branch cut. In questo modo, attraversando il precedente cut, si passa da un ramo all'altro.
In generale, sono presenti tante copie di $D \subset \mathbb{C}$ quanti sono i branches (eventualmente infiniti come per il logaritmo).

Esempio. Si consideri
$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)}$$
Basta estendere il dominio di θ a $(-\pi, 3\pi]$. In questo modo si copre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ due volte. Si definisce $D_0 = (-\pi, \pi]$ e $D_1 = (\pi, 3\pi]$. Con una rotazione di 2π si passa da D_0 a D_1 e viceversa; con una rotazione di 4π si ha l'identità.
La funzione così definita ha un singolo valore ovunque perché $D_0 \cup D_1$ contiene più copie di $\mathbb{C}$.

Lecture 5

lun 14 mar 2022 12:30

2.8 Integrazione

Le proprietà di olomorfia di $f(z)$ su $\mathbb{C}$ possono essere determinate da condizioni di Cauchy-Riemann.
Sul campo complesso, le proprietà di differenziabilità sono collegate alle proprietà di integrabilità.

Definizione. Una curva è una mappa continua
$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$
I valori $z_a = \gamma(a)$ e $z_b = \gamma(b)$ sono gli estremi della curva.

Definizione. Una curva ha orientazione positiva se il verso di percorrenza è antiorario. Essa ha orientazione negativa se ha verso orario.

Definizione. La curva con orientazione opposta è data dalla mappa tale per cui
$$-\gamma : [a, b] \to D, \quad t \mapsto \gamma(a + b - t)$$
che viene detta $-\gamma$.

Definizione. Una curva semplice è una curva che non interseca se stessa, cioè è una mappa iniettiva:
$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), \quad \forall t_1 \neq t_2$$

Definizione. Una curva chiusa è una curva γ tale per cui
$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

Definizione. Una curva di Jordan è una curva semplice e chiusa. Gli unici due punti coincidenti sono gli estremi.

Teorema. Ogni curva di Jordan divide il piano complesso in due regioni. Se la curva è orientata positivamente, allora la regione interna è a sinistra; mentre se è orientata negativamente, allora la regione interna è a destra.

Definizione. Una curva regolare a tratti (piecewise regular) è una curva $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ tale per cui $x(t)$ e $y(t)$ sono continue per $t \in [a, b]$ e per cui esiste una partizione di $[a, b]$ in cui $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ sono continue e non simultaneamente nulle.

Esempio. Un rettangolo sul piano complesso è una curva regolare a tratti.

Esempio. La funzione
$$\gamma(t) = e^{(\rho+i\omega)t} = e^{\rho t}\cos(\omega t) + ie^{\rho t}\sin(\omega t)$$
con $t \in [0, 2\pi]$, e $\rho, \omega \in \mathbb{R}$. Tale curva è la spirale logaritmica.

Definizione. Una curva è omotopa ad un'altra se si può deformare in maniera continua nell'altra.
Due curve γ_1 e γ_2 su di un dominio $D \subset \mathbb{C}$ con gli stessi estremi $[a, b]$ sono omotope se esiste una mappa γ continua che manda una curva nell'altra.
La mappa

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to D \subset \mathbb{C}$$

è tale che $\gamma(t, u) \in D$, $\forall t \in [a, b]$ e $\forall u \in [0, 1]$ e si ha

$$\gamma(t, 0) = \gamma_1(t), \quad \gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$$

inoltre

$$\gamma(a, u) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad \gamma(b, u) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$$

Per ogni valore di u si ha una curva sul dominio e variandola si passa da γ_1 a γ_2.

Definizione. Dominio semplicemente connesso. Due curve chiuse γ_1 e γ_2 sono omotope se $\forall u \in [0, 1]$, $\gamma(a, u) = \gamma(b, u)$, $\gamma(t, 0) = \gamma_1(t)$ e $\gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$. Dunque, il dominio D (su cui sono definite γ_i) è semplicemente connesso se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto.
Questo vale a dire che ogni curva chiusa può essere deformata in un unico punto e ciò è possibile se non sono presenti fori nel dominio.

Definizione. Integrale. Considerata una curva regolare a tratti

$$\gamma : [a, b] \to D \subset \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

con $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dato un dominio $D \subset \mathbb{C}$ ed una funzione $f(z)$ con $z = \gamma(t)$ continua $\forall z = \gamma(t) \in D$ e $\forall t \in [a, b]$, si definisce l'integrale di linea di $f(z)$ lungo γ come

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

dove $\gamma'(t) = \mathrm{d}_t\gamma(t) = x'(t) + iy'(t)$. Pertanto,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]\,[x'(t) + iy'(t)]\,\mathrm{d}t$$

dove $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Questo implica che

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b ux' - vy'\,\mathrm{d}t + i\int_a^b uy' + vx'\,\mathrm{d}t$$

cioè si è scritto l'integrale complesso come due integrali reali di linea.

Esempio. Si consideri

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

sulla curva

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]$$

Dunque, l'integrale è

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 x^2 + y^2\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 x^2 + y^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t\,(1 + i) = 2(1 + i)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1 + i)$$

Lecture 6

mar 15 mar 2022 12:30

Osservazione. Il fatto che l'integrale complesso si può scrivere come somma di due integrali reali di linea implica che l'integrale è un operatore lineare ed i cammini possono essere sommati:

$$\int_\gamma af(z)+bg(z)\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z, \quad \forall a,b\in\mathbb{C}$$

Inoltre

$$\int_{\gamma_1} f(z) + \int_{\gamma_2} f(z) = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)$$

quando $\gamma_1(b)=\gamma_2(a)$, cioè i percorsi hanno un estremo in comune. Queste proprietà permettono di scrivere

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Osservazione. L'integrale è indipendente dalla parametrizzazione scelta per una curva γ. Si passa da $\gamma_1(t)$, con $t\in[a,b]$, ad un'altra parametrizzazione $\gamma_2(\tau)$, con $\tau\in[\alpha,\beta]$. Si definisce la funzione $t(\tau)$ la parametrizzazione che è una mappa di classe C^1, da $[\alpha,\beta]\to[a,b]$ tale che $\gamma_1(t(\tau))=\gamma_2(\tau)$.
Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\gamma_1(t(\tau)))\,\gamma_1'(t(\tau))\,t'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

dove $\mathrm{d}t = t'(\tau)\mathrm{d}t$. Applicando la parametrizzazione si ottiene

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma_2(\tau))\,\gamma_2'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

notando che $\gamma_2'(\tau)=\gamma_1'(t(\tau))\,t'(\tau)$.

Definizione. La lunghezza di una curva è

$$L=\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Teorema. Disuguaglianza di Darboux. Lemma di stima. Considerata una curva $\gamma(t)$ regolare a tratti di lunghezza L ed una funzione $f(z)$ continua e limitata su γ (limitata cioè $|f(z)|\le M$ quando valutata su gamma); allora vale

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le ML$$

Dimostrazione. Infatti

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b M|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = ML$$

Esempio. Si consideri la curva

$$\gamma(\theta)=Re^{i\theta}, \quad y'(\theta)=Rie^{i\theta}, \quad \theta\in[0,2\pi)$$

e la funzione $f(z)=\frac{1}{z}$. Dunque

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i$$

Definizione. Valore principale. Il valore principale di un integrale generalizza il concetto di integrale improprio. Se la funzione $f(z)$ è continua su di una curva $\gamma(t)$, con $t \in [a, b]$ escluso un punto $\xi \in \gamma(t)$, allora si considera una circonferenza di raggio ε intorno a ξ. Tale circonferenza interseca la curva un due punti $\gamma(\xi')$ e $\gamma(\xi'')$. [immagine] Pertanto, si possono definire gli integrali

$$I_\alpha = \int_a^{\xi'} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, \mathrm{d}t, \quad I_b = \int_{\xi''}^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, \mathrm{d}t$$

Se I_a e I_b esistono per $\varepsilon \to 0$ allora $I_a + I_b$ è l'integrale improprio di $f(z)$ lungo γ. Altrimenti, se entrambi $I_x \to \pm\infty$, per $\varepsilon \to 0$, ma $\lim_{\varepsilon \to 0} I_a + I_b = \alpha \in \mathbb{C}$ è finito, allora si definisce il valore principale (principal value, PV) di tale integrale come

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{\xi'(\varepsilon)} f(z)\, \mathrm{d}t + \int_{\xi''(\varepsilon)}^b f(z)\, \mathrm{d}t$$

Osservazione. Qualora le singolarità fossero più di una $\xi_1, \xi_2, \ldots$, allora il valore principale è

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=0}^n \int_{\xi_j''}^{\xi_{j+1}'} f(z)\, \mathrm{d}z$$

dove $\xi_0'' \equiv a$ e $\xi_{n+1}' \equiv b$

Esempio. Si consideri la funzione $f(z) = (z - x)^{-n}$, con $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$; e la curva $\gamma(t) = t$. La funzione ha una singolarità per $z = x$. Pertanto

$$I_a = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{1-n} \left[\frac{1}{(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right], & n > 1 \\ \ln \varepsilon - \ln(x - a), & n = 1 \end{cases}$$

$$I_b = \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right], & n > 1 \\ \ln(b - x) - \ln \varepsilon, & n = 1 \end{cases}$$

Allora, il valore principale è

$$\int_\gamma (z-x)^{-n}\, \mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right], & n > 1 \text{ e dispari} \\ \ln \frac{b-x}{a-x}, & n = 1 \end{cases}$$

Nel caso di n pari, il valore principale non è definito perché non esiste il limite della somma.

2.8.1 Integrali di linea e forme differenziali

Definizione. Una forma differenziale è

$$\omega \equiv P(x, y)\, \mathrm{d}x + Q(x, y)\, \mathrm{d}y$$

dove P, Q sono funzioni di classe C^1 su $D \subset \mathbb{R}^2$.

Esempio. L'esempio più semplice è il differenziale stesso

$$\mathrm{d}f = \partial_x f(x, y)\, \mathrm{d}x + \partial_y f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

Definizione. L'integrale di una forma differenziale ω su di una curva γ regolare a tratti

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

risulta essere

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\, \mathrm{d}t$$

Scrivendo $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$, si può associare una funzione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ alla forma differenziale

$$\omega = u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) = (u + iv)\,\mathrm{d}x + i(u + iv)\,\mathrm{d}y = f(z)\,\mathrm{d}x + if(z)\,\mathrm{d}y = f(z)\,\mathrm{d}z$$

pertanto, l'integrale diventa

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Teorema. di Green. Considerata una forma differenziale ω definita su di un dominio S racchiuso da una curva di Jordan γ con orientazione positiva; allora

$$\int_\gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint_S \partial_x Q(x, y) - \partial_y P(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dimostrazione. Si dimostra separatamente che

$$\int_\gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x = \iint_S -\partial_y P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\int_\gamma Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint_S \partial_x Q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

così vale pure la somma membro a membro.
Si consideri una curva γ che limita una regione

$$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

Le funzioni g_1 e g_2 sono funzioni di classe $C^1([a, b])$. Si definisce la curva

$$\gamma \equiv \bigcup_i \gamma_i$$

ciascuna γ_i è parametrizzata come

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: z(t) = t + ig_1(t), \quad t \in [a, b] \\
\gamma_2 &: z(t) = b + it, \quad t \in [g_1(b), g_2(b)] \\
-\gamma_3 &: z(t) = t + ig_2(t), \quad t \in [a, b] \\
-\gamma_4 &: z(t) = a + it, \quad t \in [g_1(a), g_2(a)]
\end{aligned}$$

L'integrale su ciascuna curva è

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x, y_1(x))\,\mathrm{d}x \\
&\int_{\gamma_2} P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_4} P(x, y)\,\mathrm{d}x = 0 \\
&\int_{\gamma_3} P(x, y)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\gamma_3} P(x, y)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x, g_1(x)) - P(x, g_1(x))\,\mathrm{d}x$$

Allora stesso tempo

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \partial_y P(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \partial_y P(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_a^b P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

La dimostrazione dell'integrale di Q è analoga:

$$\int_\gamma Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{S_2} \partial_x Q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

si utilizza una figura simile, ma ruotata di 90°.

Teorema. di Cauchy. In generale, un integrale di linea dipende dal cammino particolare γ. Per le funzioni olomorfe, l'integrale sul cammino prescinde dal cammino, ma dipende solamente dagli estremi.
Esistono due versioni di questo teorema, quella di Cauchy è meno generale.
Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa su di un dominio D semplicemente connesso, ed una curva chiusa γ su D; allora

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Osservazione. Esiste una generalizzazione di questo teorema dovuta a Goursat che non richiede l'ipotesi che f sia derivabile su di un dominio semplicemente connesso, bensì basta assumere che γ sia omotopa ad un punto.
Pertanto

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

anche su domini molteplicitamente (contrapposto a semplicemente) connessi se γ è omotopa ad un punto.

Dimostrazione. di Cauchy. Una curva generica si può scrivere come unione di curve semplici. Pertanto, si assume che γ sia semplice. Si utilizza il teorema di Green applicandolo ai due reali seguenti

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_\gamma (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y) \\ &\overset{\text{Green}}{=} \iint_S -\partial_y u - \partial_x v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_S -\partial_y v + \partial_x u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}$$

dove nel primo integrale si pone $P = u$, $Q = -v$ e nel secondo integrale si pone $P = v$, $Q = u$. Dato che $f(z)$ è olomorfa, seguono valere le condizioni di Cauchy-Riemann, pertanto entrambi gli integrali sono nulli.

Osservazione. Per la dimostrazione si è richiesto che u e v siano funzioni di classe C^1; ma il teorema vale più in generale.

Corollario. L'integrale di una funzione $f(z)$ olomorfa sul dominio D semplicemente connesso non dipende dal cammino particolare γ.

Dimostrazione. Si considerino due curve γ_1 e γ_2 in D con medesimi estremi. Definita la curva $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ e per il teorema di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \iff& \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ \iff& \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \iff \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Visto che il cammino non è importante, allora si scrivono solamente gli estremi di integrazione

$$\int_A^B f(z)\,\mathrm{d}z$$

Osservazione. In generale, se D non è semplicemente connesso allora il teorema non vale.

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \quad a \in \mathbb{C}$$

olomorfa solo su $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Per ogni curva chiusa γ_2 che non contiene a si ha

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

per Goursat. Integrando sulla curva γ_1, circonferenza di raggio R, che racchiude a si ha

$$\gamma_1(t) = a + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi), \qquad \gamma_1'(t) = iRe^{it}$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + Re^{it} - a} iRe^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

Più avanti si vede come la formula integrale di Cauchy permette di scrivere una funzione in base a come si espande attorno alle sue singolarità.

Lecture 7

ven 18 mar 2022 14:30

Teorema. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa su di un dominio D. Per un punto arbitrario $z_0 \in D$ si può sempre definire la primitiva

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z')\,\mathrm{d}z'$$

Inoltre, anche $F(z)$ è una funzione olomorfa e vale

$$F'(z) = f(z)$$

Dimostrazione. Si calcola

$$\begin{aligned}F'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(z')\,\mathrm{d}z' - \int_{z_0}^{z} f(z')\,\mathrm{d}z'\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z')\,\mathrm{d}z'\end{aligned}$$

Ponendo $z' = z + \zeta'$ allora

$$F(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z + \zeta')\,\mathrm{d}\zeta'$$

Dato che $f(z)$ è olomorfa, essa è continua, pertanto

$$f(z+\zeta') = f(z) + g(z,\zeta')$$

dove $g(z,\zeta')$ è una funzione tale per cui

$$\lim_{\zeta'\to 0} g(z,\zeta') = 0$$

Dunque

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(z) + g(z,\zeta')\,\mathrm{d}\zeta' = f(z) + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h g(z,\zeta')\,\mathrm{d}\zeta'$$

La funzione g è continua e quindi limitata sulla curva di integrazione. Per la disuguaglianza di Darboux si può scrivere

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\int_0^h g(z,\zeta')\,\mathrm{d}\zeta'\right| \le \lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\right|\left|h\max_{\gamma_{0,h}} g(z,\zeta')\right| = \lim_{h\to 0}\left|\max_{\gamma_{0,h}} g(z,\zeta')\right| = 0$$

dove $\gamma_{0,h}$ è una curva tra 0 ad h. Quindi

$$F'(z) = f(z)$$

Corollario. Due primitive di $f(z)$ differiscono per una costante.

Corollario. Il valore di un integrale è il valore della primitiva agli estremi

$$\int_A^B f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A)$$

2.8.2 Forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$

La forma differenziale dopo aver usare le condizioni di Cauchy-Riemann si può scrivere come

$$\omega = f(z)\,\mathrm{d}x + (-v+iu)\,\mathrm{d}y$$

Definizione. Una forma differenziale

$$\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

si dice chiusa se e solo se

$$\partial_y P = \partial_x Q$$

Definizione. Una forma differenziale è esatta se

$$\omega = \mathrm{d}g = \partial_x g(x,y)\,\mathrm{d}x + \partial_y g(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Osservazione. Ogni forma chiusa è anche esatta

$$\partial_x\partial_y g(x,y) = \partial_y\partial_x g(x,y)$$

Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa con primitiva

$$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

con $U, V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si può scrivere il differenziale di $f(z)$

$$\omega = f(z)\,\mathrm{d}z = F'(z)\,\mathrm{d}z = \partial_x(U+iV)\,\mathrm{d}x + \partial_y(U+iV)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(U+iV) = \mathrm{d}F$$

Quindi $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$ è esatta. Inoltre, segue che l'integrale su di una curva in un insieme semplicemente connesso è nullo

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Ogni forma differenziale chiusa è esatta su di un insieme semplicemente connesso.
Ogni forma differenziale $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$ con $f(z)$ funzione olomorfa può essere scritta come $\mathrm{d}F$ dove F è la primitiva di F e quindi ω è esatta. In fisica, questi concetti si applicano ai campi vettoriali

$$\vec{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

L'integrale di linea su un campo vettoriale è

$$\int_\gamma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_\gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

allora la condizione di chiusura corrisponde al campo vettoriale irrotazionale: $\nabla \times \vec{A} = 0$.
La forma esatta implica valere

$$\vec{A} = \nabla V$$

dove V è un campo scalare (quindi $\vec{A}$ è un campo vettoriale conservativo). Pertanto, su di un dominio semplicemente connesso, le due condizioni coincidono: una forma differenziale chiusa è esatta, cioè un campo irrotazionale è anche conservativo.

Esempio. Il lavoro svolto da una forza conservativa non dipende dal cammino. Considerato il campo $\vec{F}$, si associa una forma differenziale ω chiusa. Dato che $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso, segue esiste un campo scalare U detto energia potenziale per cui $\vec{F} = \nabla U$. Inoltre, il lavoro tra i due punti è

$$\int_A^B F_x(x, y)\,\mathrm{d}x + F_y(x, y)\,\mathrm{d}y = U(B) - U(A)$$

2.8.3 Formula integrale di Cauchy

Teorema. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa su di un dominio D semplicemente connesso; e si consideri una curva di Jordan γ con orientazione positiva. Per ogni z_0 nella regione interna a γ si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Dimostrazione. Dato che D è semplicemente connesso allora si può deformare in modo continuo la curva γ di modo da ottenere una circonferenza γ_ε di raggio ε attorno a z_0. Inoltre, gli integrali su tali due percorsi sono uguali per il teorema di Cauchy. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \\
&= f(z_0) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \\
\implies \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + \varepsilon e^{i\theta} - z_0} i\varepsilon e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i f(z_0)
\end{aligned}$$

Il secondo integrale nel limite tende a zero quando ε tende a zero perché l'integrale di una funzione $f(z)$ continua tende a zero per la lunghezza dell'intervallo di integrazione tendente a zero.

Osservazione. Questo teorema permette di costruire i valori di $f(z)$ all'interno della regione delimitata da γ partendo dai valori su γ stessa. Questa proprietà è detta olografia.

Corollario. Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in z_0, allora essa è ivi differenziabile infinite volte e le derivate si possono scrivere come

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

Dimostrazione. Bisogna derivare n volte la formula integrale di Cauchy rispetto a z_0, utilizzando il fatto che

$$\mathrm{d}^n_{z_0} \frac{1}{z-z_0} = \frac{n!}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Dato che l'integrale è finito, allora f è differenziabile n volte in z. Si può scambiare l'ordine di integrazione e derivazione perché l'integrando e la sua derivata sono continui. Inoltre, l'integrazione avviene in un insieme compatto.

La formula integrale di Cauchy è un caso particolare per curve semplici e chiuse. Se la curva non è semplice, allora essa si può avvolgere più volte attorno a z_0.

Definizione. Il winding number, il numero di avvolgimenti è

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

e si ha

$$n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z$$

Esempio. Si consideri la circonferenza γ di raggio r e centro z_0, percorsa k volte. La curva è

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2k\pi)$$

Mentre il numero di avvolgimenti è

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2k\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} \, \mathrm{d}t = k$$

Teorema. Considerata una curva $\gamma(t)$ chiusa, $t \in [a, b]$ e considerato $z_0 \notin \gamma$, si ha $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Si definisce l'integrale

$$F(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, \mathrm{d}t$$

esso è tale per cui $F(a) = 0$. La sua derivata rispetto s è

$$F'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}$$

Inoltre, la seguente derivata è

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_s(e^{-F(s)}(\gamma(s) - z_0)) &= -e^{-F(s)} F'(s) + e^{-F(s)} \gamma'(s) \\ &= e^{-F(s)} \left[-\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} (\gamma(s) - z_0) + \gamma'(s) \right] = 0 \end{aligned}$$

Pertanto

$$e^{-F(b)}(\gamma(b) - z_0) = e^{-F(a)}(\gamma(a) - z_0)$$

Dato che $\gamma(a) = \gamma(b)$ in quanto la curva è chiusa si ha

$$e^{-F(b)} = e^{-F(a)}$$

Inoltre, $F(a) = 0$ e dunque

$$e^{-F(b)} = 1 \implies F(b) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tuttavia

$$F(b) = \int_0^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, \mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i n(\gamma, z_0) \implies k = n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$$

Definizione. Una funzione $f(z)$ olomorfa su di un cerchio C_R di raggio R attorno a $z_0 \in \mathbb{C}$ è analitica, cioè si può espandere in serie di potenze (quindi è anche derivabile infinite volte):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{n!} \mathrm{d}_z^n f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

Il raggio R è il raggio di convergenza. La serie di potenze così scritta è la serie di Taylor.

Teorema. di Morera. Il teorema di Cauchy garantisce che per una funzione $f(z)$ olomorfa su D semplicemente connesso si abbia

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

dove γ è una curva di Jordan. Il teorema di Morera afferma che se una funzione ha tale proprietà, allora è olomorfa.
Si consideri una funzione $f(z)$ su di un dominio D semplicemente connesso e tale che

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

dove γ è una curva semplice chiusa contenuta in D. Allora $f(z)$ è olomorfa.

Dimostrazione. Si consideri un punto $z_0 \in D$ e due cammini γ, γ' da z_0 a $z \in D$. Si definisce la funzione

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$$

che vale per ogni z in un intorno di z_0 contenuto in D. Inoltre vale

$$\int_{\gamma_{z_0,z} - \gamma'_{z_0,z}} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

per ipotesi. Si consideri il punto $z + h$ e si consideri la curva Γ che parta da z_0, passi per $z + h$, per z per poi ritornare a z_0. Pertanto

$$0 = \int_\Gamma f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta = F(z + h) + \int_{\gamma_{z+h,z}} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta - F(z)$$

Dato che f è continua su D, segue F è differenziabile e che il rapporto incrementale è

$$F'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta = f(z)$$

dove l'ultima uguaglianza è motivata nello stesso modo della dimostrazione dell'esistenza della primitiva di una funzione olomorfa (cioè il teorema e la sua dimostrazione ad inizio lezione).
Dato che ciò vale $\forall z_0 \in D$ allora $F(z)$ è olomorfa e quindi analitica. Pertanto, tutte le derivate sono funzioni olomorfe, in particolare $F'(z) = f(z)$.

Proposizione. Si vede un utile risultato. Considerata una circonferenza

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

vale

$$I_n = \int_C (z - z_0)^n \,\mathrm{d}z = 2\pi i \delta_{n,-1}$$

con $n \in \mathbb{Z}$ e dove δ è il delta il Kronecker.

Dimostrazione. Considerato $n \geq 0$, segue che I_n è nullo per il teorema di Cauchy. Considerato $n < 0$ e $m = -n > 0$, si ha

$$I_n = I_{-m} = \int_C \frac{1}{(z - z_0)^m} \,\mathrm{d}z$$

Per $m = 1$ si ha

$$I_{-1} = \int_C \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z \frac{2\pi i}{2\pi i} = n(\gamma, z_0) 2\pi i = 2\pi i$$

dove $n(C, z_0)$ è il numero di avvolgimenti. Per $m > 1$ si ha

$$I_{-m} = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_0)^m} = \partial_{z_0}^{m-1} \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \partial_{z_0}^{m-1} 2\pi i = 0$$

Dunque, segue la tesi.

Lecture 8

lun 21 mar 2022 12:30

Ulteriori proprietà delle funzioni olomorfe si possono dedurre dalla formula integrale di Cauchy

Teorema. Valor medio. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa su di un dominio $D \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Vale

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta$$

che è il valor medio della funzione sulla circonferenza.

Dimostrazione. Si applica la formula integrale di Cauchy con $z_0 = a$ e $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Pertanto

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{a + re^{i\theta} - a} ire^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta$$

Definizione. Dato uno spazio topologico S (un insieme in cui sono definiti degli insiemi aperti e sia chiusa l'operazione di unione) ed un punto $z_0 \in S$. Dicasi z_0 punto di bordo di S se ogni intorno di z_0 contiene sia punti di S che del suo complementare S^c.
L'insieme dei punti di bordo è la frontiera ∂S.

Teorema. Massimo modulo. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa e non identicamente costante su di un dominio D limitato tale che f sia continua sul suo bordo. Allora $|f(z)|$ raggiunge il proprio valore massimo sulla frontiera di D.
Se $f(z) \neq 0$ in D, allora anche il minimo di $|f(z)|$ è sulla frontiera di D.

Dimostrazione. Si consideri un disco

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$$

dove f non sia identicamente costante. Per ogni circonferenza

$$C_0 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + re^{i\theta}, r, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

di centro z_0 contenuta in $D(z_0, R)$, per il teorema del valor medio si ha

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0 + re^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta\right| \leq \max_{\theta\in[0,2\pi)}\left|f(z_0 + re^{i\theta}\right|$$

Esiste un valore di r per cui l'uguaglianza è stretta. Se valesse l'uguaglianza (e quindi vale per ogni r, θ), allora una funzione olomorfa di modulo costante, è una funzione costante, che non è contemplato per ipotesi. Pertanto, esiste un punto z_1 su tale circonferenza in z_0 tale per cui $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. Per l'arbitrarietà di z_0, questo vale ogni punto di $D(z_0, R)$, e dunque il massimo non può essere un punto interno dell'insieme D. Tuttavia, una funzione continua su di un insieme compatto ha un massimo. Pertanto, tale massimo si deve trovare nella chiusura di D, ma visto che non è interno, segue che esso è sulla frontiera.
Per dimostrare che il minimo è anch'esso sul bordo qualora $f(z) \neq 0$ in D, si studia $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Senza l'ipotesi aggiuntiva su $|f|$, vien da sé che il minimo del modulo è nel punto z in cui $f(z) = 0$ (si nota che il modulo è non negativo).

Teorema. di Liouville. Una funzione $f(z)$ olomorfa e limita su $\mathbb{C}$ (cioè intera e limitata) è costante.

Dimostrazione. La limitatezza garantisce l'esistenza di un numero reale M tale per cui $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si consideri una circonferenza in z_0 di raggio R: $\gamma(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$. Per la formula integrale di Cauchy si scrive la derivata prima di f in z_0

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,\mathrm{d}z\right| = \frac{1}{2\pi R}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})e^{-i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0 + Re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi M}{R} = \frac{M}{R} \end{aligned}$$

dato che $f(z)$ è intera (e quindi olomorfa su $\mathbb{C}$) si può scegliere R arbitrariamente grande, pertanto

$$\lim_{R\to\infty}|f'(z_0)| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{M}{R} = 0$$

Dato che la derivata di f è nulla per ogni punto del piano complesso, segue che f è identicamente costante ovunque.

Teorema. fondamentale dell'algebra. Un polinomio complesso (cioè un polinomio con coefficienti complessi) di grado n ha n radici complesse.

Dimostrazione. Si consideri il polinomio

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

Per $n = 0$ la tesi è immediata, perché ci sono zero radici in $\mathbb{C}$. Si consideri $n \geq 1$. La funzione $\frac{1}{P(z)}$ tende a zero per $z \to \infty$. Se $P(z)$ non si annullasse, allora $\frac{1}{P(z)}$ sarebbe una funzione olomorfa in tutto $\mathbb{C}$. Inoltre, grazie al limite precedente, essa sarebbe limitata (oltre a non essere costante). Tuttavia, ciò contraddice il teorema di Liouville. Pertanto, esiste almeno una radice α_1. Scrivendo $z \equiv z - \alpha_1 + \alpha_1$ in $P(z)$ ed espandendo le potenze si ha

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j (z - \alpha_1)^j$$

con c_j funzioni di a_j ed α_1. Dato che $P(\alpha_1) = 0$ segue $c_0 = 0$ e si può fattorizzare il polinomio

$$P(z) = (z - \alpha_1) P_{n-1}(z) = (z - \alpha_1) \sum_{j=0}^{n-1} c_j (z - \alpha_1)^j$$

Ripetendo quanto fatto, ottenendo ogni volta la relazione

$$P_{n-j}(z) = (z - \alpha_j) P_{n-j}(z)$$

Fino ad arrivare a

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i) P_0(z)$$

dove $P_0(z)$ un polinomio di ordine zero, cioè una costante. Confrontando con i coefficienti a_n si ottiene $P_0(z) = a_n$. Dunque, si sono ottenute n radici per un polinomio di grado n.

Teorema. di unicità. Tutti gli zeri di una funzione olomorfa sono punti isolati.
Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su un dominio $D \subset \mathbb{C}$ tale che $f(z_n) = 0$ per ogni elemento della successione $\{z_n\}$ in D, con $z_n \neq z_0$ punto di convergenza della successione. Allora $f(z) = 0$, $\forall z \in D$.

Dimostrazione. Per olomorfia, esiste un disco D_0 centrato in z_0 in cui $f(z)$ si può scrivere come serie di Taylor intorno z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

dato che f è continua e $f(z_n) = 0$, si ha

$$f(z_0) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

Si scrive $f(z)$ con una funzione $g(z)$ olomorfa

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} = f'(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0) + \dots$$

Dato che g è continua, segue

$$f'(z_0) = g(z_0) = \lim_{n \to \infty} g(z_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

Ripendendo tale procedimento per $g(z)$, si ottiene $g'(z_0) = f''(z_0) = 0$. Continuando ad infinitum, si mostra che tutti i coefficienti della serie di Taylor sono nulli e dunque $f(z) \equiv 0$.
Si considera $z_1 \in \partial D_0$, $z_1 \in D$. Dato che $f(z_1) = 0$, segue esistere una sequenza $\{z_n\}$ e si può trovare un disco D_1 che si sovrappone parzialmente con D_0 e sul quale $f(z) = 0$, $\forall z \in D_0 \cap D_1$. In quanto D è un insieme connesso, si può estendere la procedura fino a coprire tutto D.

Osservazione. Risulta cruciale che $z_0 \in D$. Altrimenti, la funzoine

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

è olomorfa su $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ ed è nulla su tutti i punti della successione $z_n = \frac{1}{n\pi}$. La successione converge a zero, ma esso non è un punto di D. Il teorema non si può applicare, infatti tale funzione non è identicamente nulla in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Corollario. Se la funzione $f(z)$ olomorfa è nulla in un aperto contenuto nel dominio D allora essa è nulla su tutto il dominio.

2.9 Serie di Laurent

L'olomorfia e l'analiticità sono proprietà strettamente collegate nell'insieme dei numeri complessi: una funzione olomorfa si può scrivere come serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

per ogni $z_0 \in D$ in cui $f(z_0)$ sia olomorfa e per ogni disco $|z - z_0| < R$ interamente contenuto in D, si ha

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} \, \mathrm{d}z$$

dove γ è una curva chiusa, semplice e positivamente orientata che contiene z_0.

Osservazione. La funzione $f(z)$ è analitica perch può essere differenziabile infinite volte.

Osservazione. Questo fatto non accade nell'insieme dei numeri reali. Esso è una differenza importante tra analisi reale ed analisi complessa.

Esempio. La serie di Taylor di una funzione reale è

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Se essa converge in un intorno di x_0 e la somma coincide con $f(x)$ allora la funzione $f(x)$ è analitica. Tuttavia, esistono funzioni di classe C^∞ che non sono analitiche:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Essa è differenziabile infinite volte, ma ha una serie di Taylor attorno a x_0 che è identicamente nulla. Tuttavia, $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$ in un intorno di x_0. Pertanto, $f(x)$ non è analitica.

Lecture 9

mar 22 mar 2022 12:30

Per domini non semplicemente connessi è possibile dare una rappresentazione in serie per una funzione olomorfa su di un anello. Risulta tipico utilizzare questo tipo di serie con singolarità isolate. La serie che si ottiene è una serie bilatera e si chiama serie di Laurent.

Teorema. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su di un anello

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è il centro e $r < R$ sono i raggi. Su tale insieme si può rappresentare la funzione $f(z)$ come

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

I coefficienti d_n sono dati da

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

dove γ è una curva semplice, chiusa, con orientazione positiva all'interno di K contenente z_0. Il primo addendo della serie è detto parte regolare, il secondo addendo è detto parte principale.

Osservazione. In generale si ha

$$d_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

perché la serie non contiene più potenze solamente positive. Quindi i coefficienti non si possono scrivere in termini di semplici derivate (z_0 può essere una singolarità).

Proposizione. Si vede un corollario del teorema di Cauchy. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su di un dominio D (non necessariamente semplicemente connesso). Si consideri un insieme di curve chiuse semplici, orientate positivamente, γ, γ_i, che non intersecano tra loro. Sia γ una curva che contenga ogni γ_i e sia $S \subset D$ un insieme semplicemente connesso limitato da γ e γ_i. Vale

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dimostrazione. Per ogni curva interna a γ, si aggiungono due segmenti orientati. Il primo, $\overline{AB}_i$, dalla curva interna alla curva γ; il secondo, $\overline{CD}_i$, in verso opposto. Tali segmenti si posizionano in modo che A sia infinitamente vicino a D e medesimo per B con C. A questo punto, per l'orientazione positiva delle curve, si costruisce la frontiera

$$\Gamma = -\gamma + \sum_i \overline{CD}_i + \gamma_i + \overline{AB}_i$$

Essa limita l'insieme semplicemente connesso $S \subset D$. Per il teorema di Cauchy segue

$$\begin{aligned} 0 \equiv \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_i \int_{\overline{AB}_i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\overline{CD}_i} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Gli integrali sui segmenti aggiunti sono uguali ed opposti, perché infinitesimamente vicini. La tesi segue immediatamente.

Dimostrazione. Si consideri un punto z nell'anello K ed una curva $\widetilde{\gamma}$ semplice chiusa in K che circonda z. Inoltre, siano γ e Γ due circonferenze di centro z_0 che definiscono una corona circolare in K contenente z e $\widetilde{\gamma}$. Per la formula integrale di Cauchy, si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z'$$

Nella regione delimitata dalle curve Γ, γ, $\widetilde{\gamma}$, la funzione integranda è olomorfa. Si applica la proposizione precedente. Nel caso in esame si ha

$$\int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z' - \int_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z' - \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z' = 0$$

Utilizzando la formula integrale di Cauchy precedente si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z' - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z'$$

Si calcola l'integrale su Γ. Si riscrive la frazione integranda

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z'-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}} = \frac{1}{z'-z_0}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n$$

Si utilizza la serie geometrica in quanto vale $|z - z_0| < |z' - z_0|$ (cioè un generico punto all'interno della regione delimitata dalle curve Γ, γ e $\widetilde{\gamma}$ è più vicino al centro di un punto che si trova su Γ, cioè sulla circonferenza più esterna). Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z'-z}\,\mathrm{d}z' &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z'-z_0}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n \mathrm{d}z' \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty \int_\Gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z' = \sum_{n=0}^\infty d_n(z-z_0)^n\end{aligned}$$

Si è ottenuta la parte regolare.
Si calcola l'integrale su γ. Dato che $|z - z_0| > |z' - z_0|$, segue potersi scrivere

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{z'-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale e ponendo $k = n + 1$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,\mathrm{d}z' &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty \int_\gamma \frac{f(z')}{(z-z_0)^{n+1}}(z'-z_0)^n\,\mathrm{d}z' \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^\infty \int_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{-k+1}}\frac{1}{(z-z_0)^k}\,\mathrm{d}z' = -\sum_{k=1}^\infty \frac{d_{-k}}{(z-z_0)^k}\end{aligned}$$

Si è ottenuta la parte principale.
Dato che $f(z)$ è olomorfa sull'anello K, si possono deformare continuamente le curve Γ e γ fino a farle coincidere. A tal punto si ottengono le espressioni nella tesi per $f(z)$ e per i coefficienti d_n.

Osservazione. Il valore minimo ed il valore massimo dei raggi r ed R sono

$$R = \left(\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}|d_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}, \quad n \geq 0$$

cioè la parte regolare è una serie di potenze centrata in z_0 e convergente nel disco $|z - z_0| < R$. Allora stesso modo la parte principale si può intendere come una serie di potenze nella variabile $w = \frac{1}{z-z_0}$ convergente sul disco $|w| < \frac{1}{r}$ dove

$$r = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}|d_{-k}|^{\frac{1}{k}}, \quad n \geq 1$$

L'intersezione delle due regioni dà $r < |z - z_0| < R$. La serie converge uniformemente sull'anello K e su ogni suo sotto-anello.

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{12}{z(z+1)(2-z)}$$

Essa ha tre poli semplici in $z = -1, 0, 2$. Inoltre, essa è olomorfa in tre regioni:

- $0 < |z| < 1$
- $1 < |z| < 2$
- $2 < |z| < \infty$

Si calcola la serie di Laurent in ogni regione. Una metodologia comoda a tal fine è decomporre la funzione in frazioni elementari (tramite la decomposizione in fratti semplici) e scrivere ciascuna frazione come una serie geometrica. Dunque, per trovare le serie di Laurent conviene scrivere

$$f(z) = \frac{4}{z}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z}\right)$$

In quanto $|z| < 1$, segue

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n, \qquad \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

Pertanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[4(-1)^n + 2^{-n+1}\right] z^{n-1}$$

Il raggio più piccolo è $r = 0$, mentre il raggio più grande è $R = 1$ perché qualsiasi numero sotto radice n-esima tende ad 1.
Nella seconda regione si ha $\frac{|z|}{2} < 1$, ma $|z| > 1$, dunque

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

mentre la serie geometrica già utilizzata per l'altro addendo è ancora valida. Pertanto, la serie di Laurent risulta essere

$$f(z) = \frac{4}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \frac{2}{z} + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

Nell'ultima regione, la serie geometrica del primo addendo è identica al caso precedente, mentre per il secondo addendo si ha

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

La serie di Laurent corrispondente è

$$f(z) = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n+2}}$$

che converge per $|z| > 2$.

Serie di Laurent e singolarità isolate. I poli ed i coefficienti delle espansioni sono strettamente connessi. Il numero di potenze negative determina la natura del polo. Per un numero infinito di potenze negative si ha una singolarità essenziale.
Considerata una singolarità isolata z_0 di una funzione $f(z)$, esiste un anello

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

in cui $f(z)$ è olomorfa e, dunque, esiste l'espansione in serie di Laurent. La forma della serie contiene informazioni sulla natura della singolarità:

- Se z_0 è una singolarità rimovibile, allora la parte principale è assente. La serie di Laurent coincide con la serie di Taylor. Questo perché sostituendo la funzione con la sua serie di Taylor in un intorno di z_0, si rimuove tale punto di singolarità.

- Se z_0 è un polo di ordine k, allora la parte principale della serie di Laurent contiene solamente i primi k termini
$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$
cioè $d_{-k} = 0$, $\forall k > n$ e $d_{-n} \neq 0$. Anche gli altri d_{-k}, $k < n$, possono essere nulli.

- Se z_0 è una singolarità essenziale, allora la parte principale della serie di Laurent contiene infinite potenze negative
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

Esempio. Si consideri la funzione
$$f(z) = \frac{1}{z^5 (z+1)}$$
Essa ha un polo semplice in $z = -1$ ed un polo di ordine quinto in $z = 0$. In un intorno di $z = 0$ si ha $|z| < 1$ e dunque
$$f(z) = \frac{1}{z^5} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-5} = \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k$$
La parte principale si ferma a $d_{-5} = 1$ e si conferma che $z = 0$ è difatti un polo di ordine quinto. Si studia il punto $z = -1$. Si pone $u = z + 1$ e come nel caso precedente, si riscrive la parte non singolare come una serie geometrica
$$f(u) = \frac{1}{u} \frac{1}{(u-1)^5} = -\frac{1}{u} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n \right)^5 = -\frac{1}{u} - 5 - 15u - 35u^2 + \dots$$
In questo caso, la parte principale contiene solamente il termine d_{-1} confermando che $z = -1$ è un polo semplice.

Esempio. La funzione $e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità isolata essenziale in $z = 0$ ed è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La sua serie di Laurent in $z = 0$ è
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$
e converge per $0 < |z| < \infty$. Tutti i coefficienti d_k per $k > 0$ svaniscono. Si ha un numero infinito di potenze negative attorno a $z = 0$. Si calcola il raggio di convergenza
$$R = \left(\lim_{n \to \infty} |d_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} = \frac{1}{0} = \infty$$
perché $d_n = 0$ per $n \geq 0$. Invece
$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{d_{-n-1}}{d_{-n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$
Pertanto $e^{\frac{1}{z}}$ su $0 < |z| < \infty$ e la singolarità essenziale in $z = 0$ implica un numero finito di d_{-k}.

Lecture 10

lun 28 mar 2022 12:30

2.10 Prolungamento analitico

Si una funzione $f(z)$ olomorfa già definita su di un dominio $D \subset \mathbb{C}$ in un altro dominio $D' \subset D$. Data $f(z)$, $z \in D$, si vuole trovare una funzione olomorfa $g(z)$, $z \in D'$ tale che

$$f(z) = g(z) \iff z \in D \cap D'$$

Si può definire l'estensione

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ g(z), & z \in D' \end{cases}$$

Questa funzione estesa è olomorfa su $D \cup D'$ e si riduce a $f(z)$ su D.

Definizione. La funzione $\widetilde{f}(z)$ è detta prolungamento analitico di $f(z)$.

Teorema. Se $\widetilde{f}(z)$ esiste, allora è unica.

Dimostrazione. Siano $\widetilde{f}_1(z)$ e $\widetilde{f}_2(z)$ due prolungamenti analitici di $f(z)$ che la estendono da D a $D' \supset D$. Si definisce una funzione olomorfa su D'

$$\widetilde{h}(z) = \widetilde{f}_1(z) - \widetilde{f}_2(z)$$

La funzione $\widetilde{h}$ è nulla in D. Allora, per il teorema di unicità, $\widetilde{h}$ si annulla su tutto il dominio D'.

Osservazione. [immagine] Si considerino due insiemi Ω, Ω_1 e Ω_2 con $\Omega \cap \Omega_1 \neq \emptyset$, $\Omega \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. La prima intersezione implica che la funzione $f(z)$ ha prolungamento $\widetilde{f}_1(z)$ in Ω_1. Allo stesso modo, la seconda intersezione implica che la funzione $f(z)$ ha prolungamento $\widetilde{f}_2(z)$ in Ω_2.
Qualora $\Omega \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2) \neq \emptyset$, segue che il prolungamento è unico e $\widetilde{f}_1(z) = \widetilde{f}_2(z)$, $\forall z \in \Omega \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Tuttavia, qualora $\Omega \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2) = \emptyset$, segue che il prolungamento analitico può non essere più unico e si ha

$$\widetilde{f}_1(z) \neq \widetilde{f}_2(z), \quad \forall z \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Pertanto, $f(z)$ estesa è una funzione polidroma in $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Questo succede se nella regione delimitata dai tre insieme è presente una singolarità.

Osservazione. L'unicità della continuazione analitica è un risultato fondamentale dell'analisi complessa. Una funzione $f(z)$ olomorfa su di un insieme aperto Ω è univocamente determinata per quanto piccolo sia Ω. Questo non risulta essere vero su $\mathbb{R}^n$.
Infatti, su $\mathbb{R}$, una funzione $g(x)$ di classe C^∞ su di un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ può essere estesa all'intervallo $[a, c]$, con $c > b$ in modi diversi. Risulta sufficiente trovare una funzione $\widetilde{g}(x)$ di classe C^∞ tale che tutte le sue derivate in b coincidano con quelle di $g(b)$:

$$\mathrm{d}_x^n \widetilde{g}(b) = \mathrm{d}_x^n g(b)$$

Questo può essere fatto in infiniti modi diversi. Il ragionamento analogo vale per $\mathbb{R}^n$.

Si vuole trovare il massimo dominio D' di olomorfia a cui poter estendere una funzione $f(z)$ olomorfa sul dominio $D \subset D'$. Esistono diversi modi per calcolare la continuazione (prolungamento) analitica ed ognuno di essi è valido in un sotto-dominio del massimo dominio possibile. I tipi di prolungamento sono

- Estensione per serie di potenze.
- Rappresentazione integrale.
- Espressione analitica.

Estensione per serie di potenze. Si utilizza il metodo di Weierstrass detto anche estensione per cerchi. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa su di un disco D_0 centrato nell'origine (qualora non lo fosse, si può sempre traslare l'argomento della funzione). Si supponga che tale funzione abbia una singolarità z_0 sulla frontiera di D_0. Si sceglie un punto $z_1 \in D_0$ e si rappresenta la funzione come una serie di Taylor centrata in z_1, il cui raggio di convergenza può essere al più $r_1 = |z_1 - z_0|$, cioè la distanza tra il centro z_1 e il punto singolare z_0. Sia tale serie di Taylor $f_1(z)$. Per costruzione $f(z) = f_1(z)$, $\forall z \in D_0 \cap D_1$ (dove D_1 è il disco in cui converge la serie di Taylor). Se D_1 non è completamente contenuto in D_0, allora f_1 fornisce un prolungamento analitico di f. Si può ripetere la costruzione per $z_2 \in D_1$. Continuando, si può costruire un'estensione olomorfa della funzione f fino al massimo dominio di olomorfia.

Esempio. Si consideri la serie geometrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Essa converge per $|z| < 1$. Pertanto, il suo dominio di olomorfia è $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. La funzione definita sul disco D ha un unico punto di singolari sulla frontiera di D: $z = 1$. Si applica il metodo di Weierstrass. Si consideri $z = \frac{i}{2}$. Si estende la funzione ad disco di raggio $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (cioè la distanza da 1):

$$f(z) = f\left(\frac{i}{2}\right) + f'\left(\frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) + \ldots = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} + \frac{1}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^2}\left(z - \frac{i}{2}\right) + \ldots$$

Così si è esteso il dominio di olomorfia. Continuando, si può arrivare al dominio massimo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Tuttavia, il metodo di Weierstrass non è l'unico metodo per questa funzione. Infatti, la funzione $\frac{1}{1-z}$ ha un polo semplice in $z = 1$ e dunque è olomorfa altrove.

Esempio. Si vede una funzione il cui dominio massimo è quello di partenza. Si consideri al funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

Il raggio di convergenza è

$$R = \left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} = 1$$

Infatti, $a_k = 0$ per k dispari e $a_k = 1$ per k pari. Dunque, la serie converge per $|z| < 1$. La disuguaglianza stretta deriva dal fatto che la serie diverge per $z = 1$. Tuttavia, tale punto non è l'unica singolari. Se z_0 è una 2^k-esima radice dell'unità, allora $z_0^{2^k} = 1$. Pertanto, $z_0^{2^k} = \left(z_0^{2^k}\right)^{2^{n-k}} = 1$ per $n \geq k$. Pertanto

$$f(z_0) = z_0 + z_0^2 + z_0^4 + \ldots + z_0^{2^{k-1}} + \sum_{n=k}^{\infty} 1 = \infty$$

Pertanto, la serie diverge per ogni

$$z_{p_k} = e^{\frac{2\pi i}{2^k} p_k}, \quad p_k \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\right\}$$

per ogni $k \in N$. Quindi, per $k \to \infty$, le singolarità sono dense sulla circonferenza unitaria che è una frontiera naturale per la funzione f. Dunque $|z| < 1$ definisce il massimo dominio di $f(z)$.

Rappresentazione integrale. Si scrive la funzione in termini di un integrale. Si consideri la funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

olomorfa sul disco unitario centrato nell'origine:

$$R = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n+1|^{\frac{1}{n}}} \right]^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln(n+1)} \right)^{-1} = 1$$

Utilizzando il fatto che

$$\frac{1}{1+n} = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$$

si può scrivere la funzione come

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (tz)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (tz)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1-tz} \,\mathrm{d}t$$

con $|z| < 1$. L'ultimo integrale ha senso anche oltre il disco unitario. Infatti, l'unica singolarità dell'integrando è $t = \frac{1}{z}$, che si trova sull'intervallo di integrazione $[0,1]$ sse $z \in [1, \infty)$. Come conseguenza, la funzione diviene definita su $D = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ dove è continua e per il teorema di Morera è ivi olomorfa. Questo è atteso perché $f(z)$ è una funzione di solo z e non $\overline{z}$. In questo esempio, si può semplicemente svolgere l'integrale trovando

$$f(z) = -\frac{\ln(1-z)}{z}$$

che è olomorfa in D.

Esempio. Si vede la funzione Γ di Eulero:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \,\mathrm{d}t$$

Dato che

$$\left| t^{z-1} \right| = \left| e^{(z-1)\ln t} \right| = e^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln t} = t^{\mathrm{Re}(z)-1}$$

segue che l'integrale esiste in $t = 0$ solamente per $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Infatti, per $t \sim \infty$, l'integrale è dominato dall'esponenziale ed è integrabile. Per $t \sim 0$, l'integrale

$$\int_0^a t^\alpha \,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \bigg|_{t=0}^{t=a}$$

converge in $t = 0$ per $\alpha > -1$. Per Morera si dimostra che $\Gamma(z)$ è olomorfa

$$\int_\gamma \Gamma(z) \,\mathrm{d}z = \int_\gamma \mathrm{d}z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t \int_\gamma t^{z-1} \,\mathrm{d}z = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t \cdot 0 = 0$$

La funzione gamma è la generalizzazione dell'operazione di fattoriale ai numeri complessi. Infatti

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t = 1$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z \,\mathrm{d}t = -e^{-t} t^z \big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} \,\mathrm{d}t = z\Gamma(z)$$

Da cui $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. In $z = 0$, la funzione è singolare

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t$$

che diverge. Si può estendere la funzione al più a $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N} \cup \{0\})$. Infatti

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

Il secondo integrale è ben definito per $\mathrm{Re}\,(z) < 0$ dato che non ha singolarità in $[1, \infty)$. Nel primo integrale, si può espandere l'esponenziale in serie di Taylor attorno $t = 0$ e integrare termine a termine

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z-1+n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{z+n}}{z+n}\bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}\end{aligned}$$

Si ottiene la rappresentazione

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

che è definita su $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N} \cup \{0\})$. Inoltre, si vede che $z = -n$ sono dei poli semplici. Infatti,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \Gamma(z+n+1) \prod_{k=0}^n \frac{1}{z+k}$$

Dato che $\Gamma(1) = 1$ segue

$$\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z+n+1) \prod_{k=0}^n \frac{1}{z+k} = \Gamma(1) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{-n+k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{n-k} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0 < \infty$$

Pertanto, $z = -n$, con $n \in \mathbb{N}$, è un polo semplice.

Lecture 11

mar 29 mar 2022 12:30

2.11 Residui

Si generalizza il teorema di Cauchy al caso in cui l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

si calcoli su di una curva chiusa γ che circonda delle singolarità di $f(z)$.

Definizione. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa con una singolarità isolata nel punto z_0. Dicasi residuo di f in z_0, il coefficiente d_{-1} della serie di Laurent di f centrata in z_0:

$$d_{-1} \equiv \mathrm{Res}[f, z_0]$$

Si consideri una curva γ chiusa, semplice e positivamente orientata nel dominio D di olomorfia della funzione $f(z)$, e tale per cui circonda solamente la singolarità z_0 e nessun'altra. Allora l'integrale di f lungo γ è dato da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \equiv \mathrm{Res}[f, z_0]$$

Proposizione. Il risultato precedente è indipendente da γ come ci si aspetta dal teorema di Cauchy.

Dimostrazione. La serie di Laurent della funzione $f(z)$ attorno z_0 è

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n$$

e converge sull'anello

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$$

Si considera una curva γ in K e si sostituisce la serie di Laurent nella formula integrale del residuo:

$$\mathrm{Res}[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \int_\gamma (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z$$

Si ricorda che

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = 2\pi i \delta_{k,-1} = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1 \end{cases}$$

dove δ è il delta di Kronecker. Pertanto, l'espressione per il residuo diventa

$$\mathrm{Res}[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n 2\pi i \delta_{n,-1} = d_{-1}$$

Osservazione. Il residuo può essere zero. Per esempio, $d_{-1} = 0$, ma $d_{-n} \neq 0$ con $n > 1$.

Esempio. Si consideri la funzione vista verso la fine della lezione 9:

$$f(z) = \frac{1}{z^5(z+1)}$$

Osservando le sue serie di Laurent, si nota che il residuo in zero è

$$\mathrm{Res}[f, 0] = 1$$

Mentre in -1 è

$$\mathrm{Res}[f, -1] = -1$$

Esempio. Per la funzione $f(z) = \Gamma(z)$ il residuo è

$$\mathrm{Res}[f, -k] = \frac{(-1)^k}{k!}$$

dove $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione. Se z_0 è un polo di ordine n, allora si può calcolare il residuo come

$$\mathrm{Res}[f, z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \mathrm{d}_z^{n-1} \left[(z - z_0)^n f(z)\right]$$

Infatti, una funzione con un polo di ordine n in z_0 si può scrivere, in un intorno di z_0, come

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

dove $g(z)$ è olomorfa e non si annulla in z_0. Si usa l'espansione in serie di Taylor per $g(z)$ e si ottiene la serie di Laurent per $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-n}$$

Il coefficiente di $(z - z_0)^{-1}$ corrisponde a $k = n - 1$ ed il residuo è

$$\frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \mathrm{d}_z^{n-1} g(z_0)$$

Dato che $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, si ottiene la tesi.

Proposizione. Un'altra formula utile per il residuo di un polo semplice z_0 di una funzione della forma

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

dove h è olomorfa, g ha uno zero semplice in z_0, e $h(z_0) \neq 0$. Allora, il residuo di f in $z = z_0$ è dato da

$$\text{Res}[f, z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Quando $g'(z) = z - z_0$ allora il residuo è $\text{Res}[f, z_0] = h(z_0)$.

Dimostrazione. L'espansione in serie di Laurent di $f(z)$ si ottiene tramite Taylor, espandendo le funzioni

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = h(z_0) + h'(z_0)(z - z_0) + \dots \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \\ &= g'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}g''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

ricordando che $g(z_0) = 0$. Pertanto

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} \sim \frac{1}{z - z_0} \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

da cui la tesi.

Residuo all'infinito. Una funzione $f(z)$ può avere una singolarità in $z = \infty$. Se la singolarità è un punto isolato, si può definire il residuo della funzione in infinito. Si consideri una circonferenza

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$$

con R grande abbastanza da contenere tutte le altre possibili singolarità di $f(z)$. Si definisce il residuo di $f(z)$ all'infinito come

$$\text{Res}[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

dove $-\gamma$ descrive la circonferenza γ, ma percorsa in senso opposto (questo perché la serie di Laurent, e quindi d_{-1} cioè il residuo, è definita per curve di Jordan orientate positivamente; dunque, cambiando l'orientazione cambia anche l'interno e l'esterno della curva: il punto all'infinito che si trova all'esterno di γ, diventa un punto all'interno di $-\gamma$; la visualizzazione risulta più semplice quando si considera la sfera di Riemann al posto del piano complesso per sé). Il punto all'infinito può essere mappato a $w = 0$ tramite $w = \frac{1}{z}$. Il residuo diventa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \mathrm{d}w$$

dove γ' è una circonferenza di centro $w = 0$ e raggio $\frac{1}{R}$ con orientazione positiva. Per costruzione, γ' contiene solamente la singolarità $w = 0$. Il residuo di $f(z)$ in $z = \infty$ è dato dal residuo di $w = 0$ della funzione

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

Osservazione. Si nota che $\text{Res}[f, \infty]$ può non essere nullo anche se $f(z)$ è regolare a $z = \infty$ (cioè non è un polo).

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Il residuo all'infinito è

$$\operatorname{Res}[f, \infty] = \operatorname{Res}\left[-\frac{1}{w^2}w, 0\right] = -1$$

Esempio. La funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $z = \infty$. Dalla serie di Laurent di $g(w)$ in $w = 0$ si ha

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+2)!}$$

Dunque, $\operatorname{Res}[f, \infty] = \operatorname{Res}[g, 0] = -1$.

Teorema. dei residui. Si consideri una funzione $f(z)$ olomorfa su di un dominio D semplicemente connesso tranne per singolarità isolate ai punti z_k. Se $\gamma \subset D$ è una curva chiusa, semplice e positivamente orientata che circonda tutte le singolarità di $f(z)$ allora

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k]$$

Corollario. Quando γ non è semplice oppure non è positivamente orientata, allora la tesi del teorema diventa

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} n(\gamma, z_j) \operatorname{Res}[f, z_j]$$

dove $n(\gamma, z_j)$ è l'indice con segno degli avvolgimenti.

Dimostrazione. Si consideri γ_j curve semplici, chiuse e positivamente orientate all'interno di γ, ognuno circondando solo una singolarità z_j. Allora, per il (corollario del) teorema di Cauchy si ha

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k]$$

cioè la tesi.

Osservazione. Il teorema dei residui permette di calcolare l'integrale di una funzione olomorfa lungo una curva chiusa conoscendo i valori dei residui di tale funzione alle singolarità all'interno della curva. Pertanto, l'integrale dipende solamente dalle proprietà locali della funzione.

Corollario. La somma di tutti i residui, anche di quello all'infinito, è nulla. Infatti, data una funzione $f(z)$ con singolarità isolate in $\hat{\mathbb{C}}$, si ha

$$\operatorname{Res}[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k] = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k]$$

Osservazione. Il teorema dei residui si può applicare quando la curva γ racchiude un numero finito di singolarità isolate. Questo perché la nozione di residuo si fonda sull'esistenza della serie di Laurent per la funzione alla singolarità, ed il residuo può essere definito solamente per singolarità isolate.
Qualora le singolarità fossero infinite, esisterebbe un punto di accumulazione per le singolarità e dunque esisterebbe una singolarità non isolata. Per le stesse ragioni, il teorema dei residui non si può direttamente applicare ad integrali che coinvolgono funzioni a più valori. Tuttavia, focalizzandosi su di un singolo ramo della funzione, allora la funzione stessa si può intendere come una tipica funzione olomorfa. Pertanto, fin quando la curva di integrazione non varca un branch cut, si può comunque applicare il teorema dei residui.

2.11.1 Risoluzione di integrali tramite il metodo dei residui

Il metodo dei residui permette di calcolare integrali di linea di funzioni olomorfe e fornisce un metodo per risolvere integrali di funzioni reali.

Nota. Da questo punto in avanti, si sottintende che tutte le curve chiuse siano anche semplici e positivamente orientate, salvo altrimenti specificato.

Integrali trigonometrici. Si vuole calcolare un integrale nella forma

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Si esprimono coseno e seno in termini della funzione esponenziale e si operano le sostituzioni $z = e^{i\theta}$ e $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ (e non $\overline{z} = e^{-i\theta}$). Pertanto, l'integrale precedente si può interpretare come un integrale di linea sulla circonferenza unitaria nel piano complesso. Pertanto, ricordando

$$\sin\theta \equiv \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos\theta \equiv \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

da cui si ottiene $f(\cos\theta, \sin\theta) = f(z)$, e calcolando

$$\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta \implies -i\frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{d}\theta$$

si ottiene

$$I = -i\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z}, z_k\right]$$

dove z_k sono le singolarità della funzione integranda $\frac{f(z)}{z}$ contenute all'interno della circonferenza.

Integrali sull'intero asse reale. Il teorema dei residui permette di calcolare integrali della forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathbb{R}$$

L'idea è di considerare un integrale complesso che si riduce a quello precedente nel limite appropriato. Si supponga che $f(z)$, con $z \in \mathbb{C}$, abbia un numero singolarità finite che non si trovino sull'asse reale, cioè con $\mathrm{Im}\,(z_k) \neq 0$. Allora si definisce l'integrale sul piano complesso

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

dove Γ_R è una curva chiusa composta dal segmento reale $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza γ_R di raggio R centrata nell'origine. Quest'ultima dev'essere tale da racchiudere tutte le singolarità del semipiano in cui si trova. Dato che $I(R)$ è un integrale calcolato su di una curva chiusa ed $f(z)$ ha solamente singolarità isolate, per il teorema dei residui segue

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \pm 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f, z_k]$$

dove z_k sono i punti singolari di f contenuti in Γ_R, la cui orientazione determina il segno (l'integrale reale è percorso da sinistra verso destra, dunque se γ_R si trova nel semipiano delle parti immaginarie positive, allora Γ_R è positivamente orientata; viceversa altrimenti).
Qualora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

si può recuperare l'integrale reale I tramite

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

I residui di f non sono sensibili alla forma della curva Γ_R e dunque si ha

$$I = \pm 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f, z_k]$$

dove z_k ed il segno sono come sopra.
La condizione sul limite dell'integrale su γ_R può essere garantita dai due lemmi di Jordan (cercando in fonti diverse da Zaffaroni, ho trovato solamente il secondo come lemma di Jordan, peraltro in forma più generale).

Lemma. Se la funzione $f(z)$ è continua su γ_R e ivi il suo valore assoluto diminuisce più velocemente di $|z|^{-1}$ per $z \to \infty$, cioè

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0 \overset{?}{\iff} |f(\gamma_R)| \in o(|z|^{-1})$$

allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Lemma. Sia $f(z)$ una funzione della forma

$$f(z) = e^{i\alpha z} g(z), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sia $g(\gamma_R)$ una funzione continua e tale per cui

$$\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$$

Per $\alpha > 0$, sia la curva γ_R nel semipiano complesso superiore. Altrimenti, per $\alpha < 0$, sia γ_R nel semipiano inferiore (questo di modo che la parte immaginaria di $z \in \gamma_R$ si combini con la i e la α ad esponente così da garantire un segno negativo). Allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Per $\alpha = 0$ si può applicare la disuguaglianza di Darboux dove $M = \max g(\gamma_R)$ (?).

Esempio. Si considerino due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ tali che $\deg Q(x) - \deg P(x) > 1$. Vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right]$$

dove z_k sono le singolarità dell'integrando contenute in Γ_R. La prima uguaglianza è garantita dalla differenza nel grado dei polinomi da cui si può applicare il primo lemma.

Esempio. Se l'integrale non può essere esteso a tutto l'asse reale a causa di singolarità ivi presente, si può calcolare l'integrale aggiungendo un logaritmo e scegliendo il branch cut dal lato opposto alla singolarità. La curva Γ_R dev'essere costruita in modo da collegare due circonferenze nell'origine, una grande γ_R ed una piccola, tramite due segmenti, uno sopra ed uno sotto il branch cut. Supponendo che i polinomi siano come sopra, vale

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} \ln z, z_k\right]$$

dove z_k sono le singolarità contenute in Γ_R.

Lecture 12

lun 04 apr 2022 12:30

2.12 Valore principale di Cauchy

Risulta comune avere a che fare con integrali di funzioni che presentano singolarità sulla curva di integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$. La funzione $f(x)$ è regolare in x_0 e tende a zero abbastanza velocemente per assicurare la convergenza dell'integrale. Propriamente integrali di questo tipo non sono ben definiti, dato che sono divergenti, tuttavia è possibile dare una prescrizione su come definirli. Un modo per far senso di tali integrali è tramite il valore principale di Cauchy:

$$P \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx$$

I due integrali sono entrambi divergenti per $\varepsilon \to 0$, però la prescrizione è scelta in modo tale che le loro divergenti si cancellano esattamente.
Si calcola l'integrale precedente come un integrale complesso utilizzando il teorema dei residui. Si suppone che il prolungamento di f al piano complesso è olomorfo in $z = x_0$ e presenta singolarità isolate solo al di fuori dell'asse reale. Il cammino Γ_R utilizzato è costituito da due semicirconferenze centrate in x_0: la più grande γ_R, la più piccola γ_ε; le due sono collegate con segmenti che percorrono l'asse reale. Il cammino Γ_R è orientato positivamente. Pertanto si ha

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{z - z_0}, z_k\right]$$

Dove z_k sono le singolarità contenute in Γ_R. Se

$$\lim_{|z| \to \infty} |z f(z)| = 0$$

allora, il primo lemma di Jordan è soddisfatto. Si mostra che nei limiti $\varepsilon \to 0$ e $R \to \infty$, l'integrale $I(R)$ si riduce a quanto definito come valore principale di Cauchy. Pertanto

$$I(R) = \int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx + \int_{\gamma_R} \frac{f(x)}{x - x_0} \, dx$$

Nei due limiti, gli integrali su $[-R, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, R]$ diventano il valore principale di Cauchy. Per il primo lemma di Jordan, l'integrale su γ_R scompare per $R \to \infty$. Dunque bisogna calcolare il contributo di γ_ε per $\varepsilon \to 0$. Dato che $f(z)$ è olomorfa in x_0, si può utilizzare la propria espansione in serie di Taylor

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z = x_0)}{n!} \int_{\gamma_\varepsilon} (z - x_0)^{n-1} \, dz$$

Si scambia la sommatoria con l'integrale perché la serie di Taylor converge uniformemente. Parametrizzando la semicirconferenza γ_ε come $z - x_0 = \varepsilon e^{i\theta}$, con $\theta \in [\pi, 0]$, si ha

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (z - x_0)^{n-1} \, dz = \varepsilon^{n-1} \int_{\pi}^{0} e^{i\theta(n-1)} i\varepsilon e^{i\theta} \, d\theta = i\varepsilon^n \int_{\pi}^{0} e^{i\theta n} \, d\theta$$

L'unico termine che non si annulla nel limite $\varepsilon \to 0$ è quello per $n = 0$. Pertanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = f(x_0)(-\pi i) = -\pi i f(x_0)$$

Dunque si ottiene

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} I(R) = P \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz - i\pi f(x_0) = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{z - z_0}, z_k\right]$$

Esempio. Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$$

Dato che l'integrando è pari, si può scrivere

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}P\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{i}{4}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{i}{4}2i\,\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

dove si intende il primo integrale come un numero complesso z ed il secondo come $\overline{z}$. L'ultimo integrale non è definito per $x = 0$ [r], però si può fare uso del valore principale

$$I = \frac{1}{2}P\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(P\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

Inoltre

$$P\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \pi i e^{i\theta} + \sum_k \mathrm{Res}\big[e^{iz}, z_k\big] = \pi i$$

[r] Pertanto

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(P\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right) = \frac{\pi}{2}$$

Lecture 13

mar 05 apr 2022 12:30

3 Proprietà delle mappe

Una funzione $f(z)$ può essere vista come una mappa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ (endomorfismo?).
Si consideri un insieme aperto $\Omega \subset D$ dominio di olomorfia di f. Si studia il comportamento locale della funzione. In Ω, la funzione è olomorfa e quindi analitica. Pertanto, essa si può espandere in serie di Taylor attorno ogni punto di Ω. Quindi, il comportamento locale di f è determinato dai primi termini della sua serie di Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Posto m il primo indice per cui $a_m \neq 0$, segue che il comportamento locale è determinato da

$$f(z) - f(z_0) \sim a_m (z - z_0)^m + \dots$$

Si hanno due casi

- Sia $m = 1$, cioè la derivata prima esiste ed è diversa da zero, $f'(z_0) \neq 0$.
- Vale $m > 1$.

Teorema. Quando è soddisfatto il primo punto, allora esiste un insieme aperto U in un intorno di z_0 tale che

- la mappa $f : U \to f(U)$ è univoca;
- l'insieme $f(U)$ è aperto, da cui f è detta mappa aperta;
- la funzione f possiede una inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ olomorfa;
- la funzione f è una mappa conforme, cioè preserva gli angoli tra curve.

Definizione. Se le rette L ed L' hanno un angolo θ tra loro in U e segue che $f(L)$ e $f(L')$ hanno rette tangenti che si intersecano con un angolo θ in $f(U)$; allora gli angoli tra le curve si preservano.

Dimostrazione. Dimostrazione del teorema. Tramite una traslazione in U ed $f(U)$ si può sempre avere $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$. Si consideri un intorno circolare $U = B(0, \varepsilon)$ (aperto) di raggio ε centrato in 0. Se ε è arbitrariamente piccolo, si ha $f \sim \widetilde{f} = a_1 z$, con $a_1 = f'(0)$. Quindi, il punto $z = \rho e^{i\varphi}$ viene mappato in

$$\widetilde{f}(z) = \rho(a_1)e^{i(\varphi+\beta)}, \quad a_1 = |a_1|e^{i\beta}$$

Dato che $0 \leq \rho \leq \varepsilon$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, segue che $\widetilde{f}(U)$ è un cerchio aperto di raggio $|1|\varepsilon$ (secondo punto del teorema). Inoltre, la mappa $\widetilde{f}$ è biunivoca (primo punto del teorema). Dato che $a_1 \neq 0$, allora $\widetilde{f}$ è invertibile e l'inversa è $\widetilde{f}^{-1}(w) = \frac{w}{a_1}$. Inoltre, $a_1 \neq 0$ e quindi l'inversa è olomorfa (punto tre).
Si dimostra l'ultimo punto. La mappa $\widetilde{f}$ manda la semiretta

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \varphi\}$$

nella semiretta

$$\widetilde{f}(L) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \varphi + \beta\}$$

e similmente per L'.
Se la funzione f è completa, cioè estendo il comportamento locale, allora f manda rette in curve, ma le tangenti alle curve preservano gli angoli.

Osservazione. Dato che f^{-1} è olomorfa, essa si può espandere in serie di Taylor attorno a $w_0 = f(z_0)$ e si ha

$$f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (w - w_0)^k$$

i coefficienti b_k sono ricavati dalla formula di Lagrange

$$b_0 = z_0, \quad b_n = \frac{1}{n!} \mathrm{d}_z^{n-1} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n \Bigg|_{z=z_0}, \quad n \geq 1$$

Teorema. Nel caso $m > 1$, esiste un insieme aperto U tale che

- la funzione f è una mappa m a 1 ?[r];
- l'insieme $f(U)$ è aperto;
- la funzione f scala gli angoli di un fattore m.

Dimostrazione. Si considera un intorno circolare $B(0, \varepsilon)$ e $\widetilde{f}(z) = a_m z^m$, con $m > 1$ e $a_m = |a_m|e^{i\beta}$. Segue che $z = \rho e^{i\varphi} \in U$ viene mappato in

$$\widetilde{f}(z) = \rho^m |a_m| e^{i(m\varphi+\beta)}$$

Dividendo l'intorno circolare in settori circolari identici con angolo al centro di $\frac{2\pi}{m}$, segue che ogni settore viene mappato in un settore di angolo 2π, cioè un cerchio completo, con raggio $\varepsilon^m |a_m|$. Pertanto, $\widetilde{f}$ mappa insiemi aperti in insiemi aperti, con una mappa m a 1.

3.1 Proprietà globali

Il comportamento locale delle mappe permette di trarre conclusioni sulle proprietà globali.

Teorema. Open mapping theorem. Ogni funzione f olomorfa, non costante, mappa insiemi aperti in insiemi aperti.

Dimostrazione. Considerato un insieme Ω aperto, per ogni $z_0 \in \Omega$ si può trovare un intorno U di z_0 in cui $f(U)$ è un insieme aperto. Questo si può fare sia quando $f'(z_0) = 0$ (caso $m > 1$) sia quando $f'(z_0) \neq 0$ (caso $m = 1$). Dunque, l'insieme $f(\Omega)$ contiene un intorno aperto di un qualsiasi $f(z_0)$ e perciò, essendo un insieme di aperti un aperto, allora $f(\Omega)$ è aperto. Questo non vale se la funzione è costante: si mappa tutto $\mathbb{C}$ in un punto che non è un insieme aperto.

Teorema. Se la funzione f è olomorfa e biunivoca, allora $f'(z) \neq 0$, $\forall z$, ed esiste l'inversa f^{-1} che è pure olomorfa. Questo implica che f è una mappa conforme.

Dimostrazione. Se la funzione f è biunivoca, allora non può essere una costante (perché è strettamente monotona). Allora $f'(z_0) \neq 0$, $\forall z_0 \in \Omega$. Dunque valgono tutte le proprietà del caso $m = 1$.

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = z^2, \quad f'(z) = 2z$$

La derivata non è nulla per ogni $z \neq 0$. In tal caso, la funzione f è una mappa biunivoca e conforme, con inversa olomorfa. Altrimenti, cioè per $z = 0$, si ha che $f(0) = a_2(z-0)^2$ (cioè la prima derivata non nulla è la seconda); dunque $m = 2$ e si raddoppiano gli angoli: la funzione f non è biunivoca, ma è 2 a 1. [r]

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Essa non è olomorfa in $z = 0$. Dato che $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, segue che f è una mappa conforme in qualsiasi $z \neq 0$. Un raggio con angolo θ

$$L_\theta = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \mid \rho \in (0, \infty) \right\}$$

viene mappato in

$$f(L_\theta) = L_{-\theta} = \left\{ z = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \mid \rho \in (0, \infty) \right\}$$

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(z) = e^z$$

Dato che $f'(z) = e^z$, si ha una mappa conforme ovunque con f olomorfa e biunivoca la cui inversa è olomorfa a sua volta (questa caratteristica di f e della sua inversa è detta bi-olomorfia). Linee di costante x vengono mappate in cerchi, mentre linee costanti in y sono mappate a raggi uscenti dall'origine. In tutti i punti con $z \neq 0$, gli angoli vengono preservati. In $z = 0$ la mappa non è conforme perché e^z ha una singolarità essenziale all'infinito. Inoltre, ivi la mappa non è biunivoca perché $e^{z+2\pi i n} = e^z$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi, una qualsiasi retta orizzontale di spessore 2π (da $-\pi i$ a πi) è mappata a tutto il piano complesso. Questo è evidente dal fatto che la funzione inversa è polidroma: $g(w) = \ln w$. Restringendosi in un qualsiasi insieme aperto semplicemente connesso $f(\Omega)$ che non contiene l'origine, segue che g è a singolo valore ed è olomorfa.

3.2 Trasformazioni lineari fratte

Le trasformazioni lineari fratte sono trasformazioni conformi del tipo

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

e $ad - bc \neq 0$. Esse sono mappe conformi per ogni $z_0 \neq -\frac{d}{c}$. Inoltre, vale

$$F'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

Sono casi particolari:

- traslazioni $w = z + \alpha$
- dilatazioni $w = \beta z$
- inversioni $w = \frac{1}{z}$

Qualsiasi trasformazione F lineare fratta può essere scritta come combinazione lineare delle tre trasformazioni precedenti.
Sia $c = 0$, allora

$$F(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$$

Il fattore di z è la dilatazione, mentre il termine noto aggiunto è la traslazione.
Sia $c \neq 0$. Si può scrivere

$$F(z) = \frac{bc + ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}$$

Si ha una traslazione $\frac{d}{c}$, poi una dilatazione $\frac{c^2}{bc+ad}$, poi una inversione $\frac{1}{z}$ ed infine una traslazione $\frac{a}{c}$.

Osservazione. Conviene estendere $F(z)$ alla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Si definisce

$$F\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

e $F(\infty) = \frac{a}{c}$ così che quando $c = 0$ si ha ∞.
Le trasformazioni lineari fratte sono le uniche mappe biunivoche ed olomorfe (cioè bi-olomorfe) di $\hat{\mathbb{C}}$ su $\hat{\mathbb{C}}$: esse sono automorfismi di $\hat{\mathbb{C}}$, cioè trasformano uno spazio in se stesso. Esse mappano rette in rette e cerchi in cerchi (le rette sulla sfera di Riemann sono cerchi che passano per il punto all'infinito, quindi basta dire che le trasformazioni mappano cerchi in cerchi).

Teorema. Date due terne di numeri complessi, esiste una sola trasformazione lineare fratta che abbia $w_i = F(z_i)$.

Dimostrazione. Si consideri la terna (z_1, z_2, z_3). La si mappa in $(0, 1, \infty)$ tramite la mappa cross-ratio:

$$B(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

Si ha che $z_1 \to 0$, $z_2 \to 1$, $z_3 \to \infty$. Tale mappa può essere scritta in termini di w. Dunque vale

$$B(w, w_1, w_2, w_3) = B(z, z_1, z_2, z_3)$$

da cui si può ricavare w così da mappare $(z_i) \to (w_i)$.

Esempio. Si vuole mappare

$$(1,2,7) \to (1,2,3)$$

Dunque, si trova

$$w = \frac{7z-4}{2z+1}$$

Osservazione. La mappa cross-ratio è invariante per trasformazione lineari fratte, cioè

$$B(F(z), F(z_1), F(z_2), F(z_3)) = B(z, z_1, z_2, z_3)$$

Dimostrazione. A CASA non a caso.

Osservazione. L'insieme delle trasformazioni F forma un gruppo (in senso algebrico). Si associa ad

$$F = \frac{az+b}{cz+d}$$

la matrice

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La trasformazione inversa e la composizione di altre trasformazioni con F seguono dalle regole delle matrici. Dato che si può riscalare $\hat{F} \to \lambda\hat{F}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, senza cambiare F, segue che si può normalizzare $\hat{F}$ di modo che

$$ad - bc = 1$$

Così che il gruppo delle trasformazioni di F è il gruppo $SL(2,\mathbb{C})$ di matrici 2×2 complesse a determinante unitario. Più in dettaglio, visto che $\det \hat{F} = 1$ non fissa il segno di a, b, c, d segue che il gruppo è

$$\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$$

dove I è l'identità.

Teorema. Riemann mapping theorem. Ogni insieme aperto Ω semplicemente connesso e strettamente contenuto in $\mathbb{C}$ (cioè sottoinsieme proprio di $\mathbb{C}$) può essere mappato in modo conforme (cioè con una mappa f olomorfa) sul cerchio unitario aperto (cioè senza frontiera).

Corollario. Tutte le regioni costituite da sottoinsiemi propri aperti di $\mathbb{C}$ semplicemente connessi sono conformemente equivalenti.

Esempio. Si consideri di mappare il semipiano superiore $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ sul disco unitario. Si utilizza la mappa

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i}, \quad f'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

La derivata è non nulla sul semipiano superiore, dunque ivi f è una mappa conforme. Si vedono alcuni punti sulla frontiera:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(+\infty) = 1$$

Mentre per un punto nel semipiano si ha

$$f(i) = 0$$

cioè viene mappato all'interno del cerchio. Dunque

$$f(\mathrm{Im}\,(z) > 0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

3.3 Applicazioni fisiche

Definizione. Si definisce il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. La funzione armonica $u(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 u = 0$$

Il problema di Dirichlet è il problema di trovare una funzione u armonica in un inseme aperto Ω, continua nella sua chiusura $\overline{\Omega}$ (in alcuni testi, tale condizione significa essere c-armonica) che assuma i valori opportuni sul bordo

$$u\big|_{\partial\Omega} = u(\partial\Omega) = g$$

dove g è una funzione reale su $\partial\Omega$.
La soluzione del problema di Dirichlet su Ω semplicemente connesso è unica. Infatti, si considerino due soluzioni u_1 ed u_2 con

$$u_1(\partial\Omega) = u_2(\partial\Omega) = g$$

La loro differenza è su $\partial\Omega$ è $u_1 - u_2 = 0$. Tuttavia, tale differenza è ancora una funzione armonica perché differenza di funzioni armoniche su Ω. Una funzione armonica è la parte reale di una funzione olomorfa. Per il teorema del massimo modulo segue che $u_1 - u_2$ ha massimo e minimo su $\partial\Omega$. Tuttavia, $u_1 - u_2$ ha massimo e minimo nullo su $\partial\Omega$, e dunque $u_1 - u_2$ è identicamente nulla in Ω e pertanto $u_1 = u_2$.

Teorema. Non chiesta all'esame.
Se $u(z)$ è c-armonica sul disco unitario, allora

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \,\mathrm{Ker}(\theta, z) \,\mathrm{d}\theta$$

dove il nucleo è il kernel di Poisson

$$\mathrm{Ker}(\theta, z) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right)$$

In forma polare esso si scrive

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})(1 - r^2)}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} \,\mathrm{d}\theta$$

Quindi, mappando il disco unitario su qualsiasi altro dominio conformemente equivalente, si trovano le soluzioni del problema di Dirichlet utilizzando le mappe conformi.

3.3.1 Fluidodinamica

L'elemento infinitesimo del fluido 2D è caratterizzato dalla velocità $\vec{v}(x, y, t)$. Nel caso di fluido ideal, cioè stazionario $\vec{v}(x, y)$, incomprimibile $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ed irrotazionale $\nabla \times \vec{v} = 0$. Le ultime due condizioni sono le condizioni di Riemann-Cauchy (se scritte per due dimensioni). Pertanto, la soluzione si può scrivere come una funzione olomorfa

$$f(z) = v_1(x, y) - iv_2(x, y)$$

Se il dominio Ω è semplicemente connesso, allora per il teorema della primitiva, la funzione $f(z)$ ammette primitiva $\chi(z)$ olomorfa con $\chi'(z) = f(z)$. La primitiva $\chi(z)$ è detto potenziale complesso del fluido e si indica

$$\chi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Dove ϕ è il potenziale scalare, mentre ψ è la funzione di flusso. Dato che

$$v_1(x, y) - iv_2(x, y) = f(z) = \partial_x\phi - i\,\partial_y\phi$$

Si ha che $\vec{v} = \nabla\phi$. Inoltre, le linee a potenziale costante $\phi(x, y) = \text{cost}$ sono curve equipotenziali; mentre le linee con $\psi(x, y) = \text{cost}$ sono le linee di flusso. La velocità è tangente alle linee di flusso e perpendicolare alle curve equipotenziali.
Il problema tipico è quello di trovare le equazioni del moto in Ω dato $\partial\Omega$ cioè il bordo in cui il fluido si muove. Questo è un problema di Dirichlet.

Caso primo. Flusso costante in cui $f(z) = a \in \mathbb{R}$. Si ha un moto orizzontale perché la velocità è costante sulle x. Si ha un potenziale complesso

$$\chi(z) = az + c$$

con c costante arbitraria.

Caso secondo. Flusso attorno un unitario. Si può utilizzare una mappa

$$g(z) = z + \frac{1}{z}, \quad g : e^{it} \to g(e^{it}) = 2\cos t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Inoltre, $g(z)$ mappa sia l'interno del disco che l'esterno su $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Oltretutto, $g(z)$ mappa l'asse reale a $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Le linee equipotenziali sono mappate in rette orizzontali, mentre le linee di flusso in rette verticali. [r]

3.3.2 Elettrostatica

Risulta analogo a quanto visto, $\vec{v} \to \vec{E}(x, y)$. Si ha $\nabla \times \vec{E} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

Lecture 14

ven 08 apr 2022 14:30

4 Spazi vettoriali

Si vuole estendere le definizione usate sugli spazi euclidei in modo astratto così da poterle usare con spazi con infinite dimensioni.

4.1 Spazi vettoriali

Definizione. Lo spazio vettoriale V su di un campo F è un insieme con due operazioni, la somma di vettori e la moltiplicazione di un vettore per un elemento di F (elemento detto scalare)

$$\vec{v} + \vec{w} \in V, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$$
$$\lambda\vec{v} \in V, \quad \forall \vec{v} \in V, \lambda \in F$$

La soma di vettori è commutativa ed associativa con inverso ed l'elemento identità $\vec{0} \in V$. Il prodotto di vettori per elementi di F è distributivo con l'elemento identità $1 \in F$. Gli elementi di V sono detti vettoriali. Le operazione precedenti definiscono una struttura lineare in V.

Definizione. Un sottoinsieme $W \subset V$ chiuso rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare, cioè il vettore somma ed il vettore prodotto sono ancora vettori di W ed tale spazio è chiamato sottospazio di V.

Definizione. Dati n vettori u_k, essi sono linearmente indipendenti se

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies a_k = 0, \forall k$$

Altrimenti i vettori sono linearmente dipendenti ed esiste una combinazione lineare non banale che dà il vettore nullo.

Definizione. Un insieme di vettori linearmente indipendenti $\{u_k\}$ è detto massimale se ogni insieme che contiene propriamente $\{u_k\}$ è lineare linearmente dipendente.
Un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti sono una base di V. Considerata una base $\{u_k\}$ di V, ogni vettore $\vec{v} \in V$ si può esprimere come una combinazione lineare dei vettori della base

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{u}_k, \quad v_k \in F$$

Gli scalari nell'espressione precedente sono le componenti (o coordinate) del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\{u_k\}$.

Osservazione. La dimensione dello spazio può essere infinita. Se è finita, allora tutte le basi hanno lo steso numero di vettori e tale numero è la dimensione dello spazio vettoriale V.

Esempio. La dimensione di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{C}^n$ è n. Uno spazio con dimensione infinita è uno spazio di funzioni, come l'insieme dei polinomi a coefficienti complessi nella variabile z. Infatti, la somma e la moltiplicazione (per uno scalare) sono operazioni chiuse. L'insieme di tutti i monomi $S = \left\{1, z, z^2\right\}$ è una base. Ogni polinomio è una combinazione lineare finita di monomi e tale combinazione è il vettore nullo sse tutti i coefficienti sono nulli.

4.2 Metrica, norma e prodotto scalare

Sugli spazi vettoriali si possono aggiungere struttura che permettono di specificare il concetto di distanza, limite e continuità in maniera astratta.

Definizione. La metrica, o distanza, in un insieme M è una mappa $d : M \to \mathbb{R}$ con le proprietà per ogni due elementi $a, b \in M$:

- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- $d(a, b) + d(b, c) \implies d(a, c), \forall c \in M$

Definizione. Uno spazio vettoriale in cui è possibile definire una metrica è uno spazio metrico. La distanza permette di definire le nozioni di sottoinsiemi aperti e chiusi (cioè si definisce una topologia) e definire le nozioni di limite e continuità.

Definizione. In $\mathbb{C}^n$ si estende la distanza euclidea con la distanza hermitiana

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|v_i - w_i\right|^2}, \quad v_i, w_i \in \mathbb{C}$$

Definizione. Una topologia è la collezione τ di tutti i sottoinsiemi aperti in X. Essa contiene $\emptyset$ ed X. Inoltre, dev'essere chiusa rispetto ad un numero finito di intersezioni e rispetto un numero infinito di unioni.

Osservazione. La topologia non è unica. Infatti, un esempio su $\mathbb{R}$ è la seguente topologia

$$\tau = \{V_i \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in V_i, \exists \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V_i\}$$

Tuttavia, si può definire un'altra topologia

$$\tau' = \{\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}\}$$

L'intervallo $(0, 1)$ in questa topologia non è aperto.

Definizione. Sugli spazi metrici è intuitivo introdurre una topologia metrica utilizzando gli intorni circolari, ma si ha bisogno del concetto di distanza.
L'intorno circolare (open ball) di raggio r centrata in $a \in M$ è

$$B(a,r) = \{b \in M \mid d(b,a) < r\}$$

Definizione. Ogni sottoinsieme $X \subset M$ è aperto se, per ogni $a_0 \in X$, esiste un intorno circolare $B(a_0, r) \subset X$.

Osservazione. Ogni spazio metrico è uno spazio topologico. Uno spazio topologico è un insieme in cui è definita una tipologia (tramite gli intorni circolari).

Definizione. Un insieme chiuso è un insieme il cui complementare è aperto.

Definizione. L'esistenza di una topologia permette di definire la nozione di limite di una successione. Una successione $\{a_n\}$ in uno spazio metrico M converge ad un elemento $a \in M$ sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid n > n_0 \implies d(a_n, a) < \varepsilon$$

Oppure, si può utilizzare la definizione di limite in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$$

Osservazione. La convergenza di una serie si trova tramite la convergenza della successione delle somme parziali.

Osservazione. Un insieme chiuso contiene tutti i propri punti di accumulazione.
Il più piccolo insieme chiuso che contiene l'insieme X è la chiusura di tale insieme $\overline{X}$.

Definizione. Un insieme Z è denso in Y se la propria chiusura è Y cioè $\overline{Z} = Y$.

Definizione. Un insieme K in uno spazio metrico X è compatto sse ogni successione $\{x_n\} \subset K$ ha una sotto-successione convergente ad un punto di K.

Definizione. Una mappa $f : X \to Y$ tra due spazi topologici è continua se la controimmagine di ogni aperto in Y contenente $f(x_0)$ è un aperto in X contenente x_0.
Per gli spazi metrici, tale definizione si può riformulare tramite gli intorni circolari

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Definizione. Una successione $\{x_n\}$ è di Cauchy sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \mid n, m > n_\varepsilon \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Teorema. In uno spazio metrico, ogni successione convergente è di Cauchy (quindi lo spazio è completo?).

Dimostrazione. Si utilizza la disuguaglianza triangolare

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$$

Dato che la successione $\{x_n\}$ converge ad x, allora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0 \mid n > n_0 \implies d(x_0, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e dato lo stesso per $\{x_m\}$ si ha

$$n, m > 0 \implies d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Definizione. Uno spazio metrico completo è uno spazio metrico in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti.

4.3 Spazi normati

Definizione. La norma di un vettore $\vec{v} \in V$ di uno spazio vettoriale V è una mappa

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$$

che soddisfa per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\lambda \in F$, le condizioni

- $\|\vec{v}\| \geq 0$; $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$, condizione di positività
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$
- $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$, disuguaglianza triangolare

Definizione. Uno spazio vettoriale dotato di norma è detto spazio normato.

Proposizione. Gli spazi normati sono spazi metrici.
Dato che si può sempre definire una distanza

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

Proposizione. Per la convergenza in uno spazio normato si può usare

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{v}_n - \vec{v}\| = 0$$

Esempio. L'insieme $\mathbb{R}$ è normato rispetto $\|x\| = |x|$.

Esempio. Si possono definire norme differenti. La norma euclidea

$$\|\vec{v}\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

La norma quadrata?

$$\|\vec{v}\|_2 = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots\}$$

Esse sono norme differenti. Gli insiemi aperti indotti dalla topologia metrica sono differenti. Per la norma euclidea, gli intorni circolari sono cerchi; per l'altra norma, gli intorni circolari sono quadrati.
Tuttavia, la topologia indotta è identica. Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{C}^n$ definiscono la stessa nozione di insiemi aperti. Questo è vero per tutti gli spazi vettoriali reali e complessi a dimensione finita in quanto sono isomorfi ad uno dei due precedenti.

Definizione. L'isomorfismo tra due spazi normati è l'esistenza di una mappa biunivoca

$$f : (X, \|\cdot\|_x) \to (Y, \|\cdot\|_y)$$

che preserva la struttura lineare della/e la? norma, cioè

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w}) \\ \|f(\vec{v})\|_y &= \|\vec{v}\|_x \end{aligned}$$

Esempio. Si consideri l'insieme $C(K)$ delle funzioni continue su di insieme compatto K. Esso è uno spazio vettoriale con infinite dimensioni in cui si può definire la norma superiore

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

Osservazione. Tramite la norma superiore, si può definire il concetto di convergenza uniforme.

Definizione. Una successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ad una funzione f in K insieme compatto sse

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\sup} = 0$$

Osservazione. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

Esempio. Si consideri l'insieme delle funzioni continua $C(K)$, dove $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Si definiscono due norme. La norma superiore

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

La norma L_1

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

Si dimostra che la convergenza con la norma superiore implica la convergenza con la norma L_1. Se $\|f-g\|_{\sup} \to 0$ allora

$$\|f-g\|_1 = \int_0^1 |f-g| \,\mathrm{d}x \le \sup_{x\in K} |f-g| \int_0^1 \mathrm{d}x \le \|f-g\|_{\sup} \to 0$$

Le due norme non sono equivalenti. Si consideri la successione di funzioni $f_n(x)$ che hanno valore zero per $0 < x < \frac{1}{2n+1}$ e $\frac{1}{2n-1} < x < 1$, valore 1 in $\frac{1}{2n}$ e in mezzo si raccordano in modo lineare. Dunque

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]\frac{1}{2} = \frac{1}{4n^2-1} \to 0$$

Mentre con la norma superiore si ha

$$\|f_n\|_{\sup} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$$

La successione converge a due punti diversi in base alla norma. Si ha un concetto diverso di limite di successioni e di distanza. Infatti, siano

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}, \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\|f-g\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} - 0 \right| = 1$$

Invece

$$\|f-g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} - 0) \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

Definizione. Uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale normato e completo.

Esempio. Alcuni esempi di spazi di Banach sono $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, $C(K)$, con K compatto, quando si considera la norma superiore.

Lecture 15

mar 11 apr 2022 12:30

Definizione. Una prodotto scalare (o prodotto interno, en. dot/scalar/inner product) in uno spazio vettoriale complesso è una mappa

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \vec{v}, \vec{w} \mapsto (\vec{v}, \vec{w})$$

Essa soddisfa le proprietà di linearità, hermiticità (simmetria coniugata) e positività

- $(\vec{w}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{u}) = \lambda(\vec{w}, \vec{v}) + \mu(\vec{w}, \vec{u})$
- $(\vec{w}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{w})}$, si nota che la coniugazione è un'operazione involutoria
- $(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$. Inoltre $(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0$

per ogni $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Osservazione. Le prime due proprietà implicano l'anti-linearità della prima entrata del prodotto scalare

$$(\lambda\vec{v} + \mu\vec{u}, \vec{w}) = \overline{\lambda}(\vec{v}, \vec{w}) + \overline{\mu}(\vec{u}, \vec{w})$$

Definizione. Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è detto spazio pre-Hilbert. (La rimozione del prefisso si ottiene quando lo spazio è completo).

Osservazione. Uno spazio pre-Hilbertiano è anche uno spazio normato in quanto si può definire la norma in termini del prodotto scalare

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$$

Proposizione. Ogni prodotto scalare soddisfa la disuguaglianza di Schwarz

$$|(\vec{v}, \vec{w})|^2 \leq (\vec{v}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w}), \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$$

Dimostrazione. Si consideri un numero complesso

$$\lambda = \rho e^{-i\theta}, \quad \theta = \arg[(\vec{v}, \vec{w})]$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Per la proprietà di positività segue

$$(\vec{v} + \lambda\vec{w}, \vec{v} + \lambda\vec{w}) \geq 0$$

Espandendo tale espressione tramite le proprietà di linearità e anti-linearità si ha

$$(\vec{v}, \vec{v}) + \rho^2(\vec{w}, \vec{w}) + \rho\left[(\vec{v}, \vec{w})e^{-i\theta} + (\vec{w}, \vec{v})e^{i\theta}\right] \geq 0$$

Gli addendi tra parentesi quadre sono uno il coniugato complesso dell'altro. Pertanto, usando l'ipotesi su θ e la proprietà di hermiticità si ha

$$\begin{aligned}(\vec{v}, \vec{v}) + \rho^2(\vec{w}, \vec{w}) + \rho\left[|(\vec{v}, \vec{w})|e^{i\theta}e^{-i\theta} + |(\vec{v}, \vec{w})|e^{-i\theta}e^{i\theta}\right] &\geq 0 \\ (\vec{v}, \vec{v}) + \rho^2(\vec{w}, \vec{w}) + 2\rho|(\vec{v}, \vec{w})| &\geq 0\end{aligned}$$

Il primo membro della disequazione rappresenta una parabola in ρ. Affinché la relazione sia soddisfatta, il discriminante dev'essere non positivo

$$\Delta = |(\vec{v}, \vec{w})|^2 - (\vec{v}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w}) \leq 0$$

da cui segue la tesi.

4.4 Spazi di Hilbert finito-dimensionali

Definizione. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale completo dotato di prodotto scalare.

Definizione. Uno spazio di Hilbert reale di un numero finito di dimensioni è detto spazio Euclideo, come $\mathbb{R}^n$ in cui il prodotto scalare si può scrivere come

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Uno spazio di Hilbert complesso di un numero finito di dimensioni è detto spazio Hermitiano, come $\mathbb{C}^n$ in cui il prodotto scalare si può scrivere come

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i w_i$$

Definizione. Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ finito-dimensionale sono ortogonali qualora

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Proposizione. Vettori ortogonali sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Si considerino due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ortogonali e si consideri la loro combinazione lineare $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = 0$. Dunque

$$0 = (\vec{v}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}) + \beta(\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v})$$

L'uguaglianza dev'essere soddisfatta per $\vec{v}$ (in generale per ogni coppia di vettori ortogonali), pertanto $\alpha = 0$. Lo stesso si può fare per $\vec{w}$. Si nota che

$$(\vec{v}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{v}) = (\vec{v}, 0\vec{u}) = 0(\vec{v}, \vec{u}) = 0$$

Dato che $\alpha = \beta = 0$, allora l'unica combinazione lineare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ che dà il vettore nullo è quella banale, quindi per definizione i due vettori sono linearmente indipendenti.

Proposizione. Considerata una base ortonormale $\{\vec{e}_i\}$, cioè i vettori sono ortogonali tra loro e di lunghezza unitaria:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

Si hanno le proprietà

- Si possono esprimere le coordinate di un vettore $\vec{v}$ rispetto a tale base tramite la scrittura

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{e}_k, \quad v_k \equiv (\vec{e}_k, \vec{v})$$

- Il prodotto scalare di due vettori si può scrivere in termini delle loro coordinate

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{v}_k w_k$$

- La norma di un vettore si ottiene tramite l'identità di Parseval

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2$$

  Essa generalizza il teorema di Pitagora.

Proposizione. In uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ finito-dimensionale si può costruire una base ortonormale a partire da una base qualsiasi tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Dimostrazione. Considerato un vettore non nullo di riferimento $\vec{u}$, si può sempre scomporre un vettore $\vec{v}$ in una componente parallela a $\vec{u}$:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

ed una parte ad esso ortogonale $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel$. La scomposizione è sempre unica. Questi passaggi si possono iterare su vettori di una base qualsiasi $\{\vec{u}_k\}$. Ogni vettore k-esimo della nuova base è il vettore k-esimo della base originale a cui si sottraggono le sue proiezioni (cioè la componente parallela) sui vettori precedenti della base nuova:

$$\vec{v}_k = \vec{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\vec{v}_j, \vec{u}_k)}{\|\vec{v}_j\|^2}\vec{v}_j$$

Da cui la normalizzazione segue immediatamente

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}$$

Pertanto, la base $\{\vec{e}_k\}$ è ortonormale.

4.5 Spazi di Hilbert

Si generalizza la nozione di base ortonormale per spazi di Hilbert con un numero infinito di dimensioni. Si studia il caso particolare degli spazi separabili, cioè gli spazi che contengono un sottoinsieme denso e numerabile.

Definizione. Un insieme di vettori $\{\vec{e}_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, è un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ infinito-dimensionale sse

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Tali vettori sono linearmente indipendenti.

Definizione. Un sistema ortonormale è completo sse ogni vettori $\vec{v} \in \mathcal{H}$ si può scrivere come

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \vec{e}_i, \quad v_i = (\vec{e}_i, \vec{v}) \in \mathbb{C}$$

Un sistema ortonormale completo è detto base di Hilbert.

Osservazione. La definizione precedente è resa possibile dalla nozione di limite aggiunta alla struttura lineare delle combinazioni lineari. Tale definizione equivale a

$$\vec{v} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \iff \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i - \vec{v} \right\| = 0$$

Definizione. La scrittura della definizione precedente è unica ed è chiamata serie di Fourier di $\vec{v}$ dove i termini v_i sono detti coefficienti di Fourier di $\vec{v}$ rispetto la base $\{\vec{e}_k\}$.

Teorema. Una serie del tipo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \vec{e}_i$$

converge sse

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$$

cioè, nel contesto degli spazi vettoriali, il vettore ha lunghezza finita rispetto la distanza euclidea. ?

Dimostrazione. Una serie converge sse converge la successione delle proprie somme parziali. Si considerino

$$\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i, \quad y_n = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

Segue

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 &= \left\| \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i, \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j \right) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\alpha}_i \alpha_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i|^2 = y_n - y_m \end{aligned}$$

dove $n > m$ e ricordando che $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$. Segue che $\vec{x}_n$ è una successione di Cauchy sse y_n è una successione di Cauchy. Dato che $\mathcal{H}$ ed $\mathbb{R}$ sono insiemi completi, allora ogni successione di Cauchy è convergente (e vale ovviamente il viceversa). Pertanto, $\vec{x}_n$ converge sse y_n converge.

Proposizione. Una base di Hilbert possiede le seguenti proprietà:

- La base è l'insieme massimale di vettori ortogonali: $\forall i, (\vec{v}, \vec{e}_i) = 0 \implies \vec{v} = \vec{0}$.
- Vale l'identità di Parseval: $\|\vec{v}\| = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2$, dove v_k sono i coefficienti di Fourier.
- $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ si ha $(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{v}_k w_k$.

Proposizione. L'insieme delle successioni $\vec{z} = \{z_n\}$ di numeri complessi, con $n \in \mathbb{N}$, tali che $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$, è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(\vec{z}, \vec{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}_n w_n$$

Tale spazio è detto $\ell^2(\mathbb{C})$. Intuitivamente, esso è il limite per $n \to \infty$ dello spazio Hermitiano $\mathbb{C}^n$.

Dimostrazione. Innanzitutto, si mostra che ℓ^2 è uno spazio vettoriale, cioè si mostra che

$$\vec{v}, \vec{w} \in \ell^2 \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{C} \implies \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in \ell^2$$

Vale l'identità

$$|a + b|^2 \le 4 \max\left(|a|^2, |b|^2 \right) \le 4(|a|^2 + |b|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda v_i + \mu w_i|^2 \le 4 \left(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 + |\mu|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 \right) < \infty$$

dove v_i e w_i sono le componenti di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
Si mostra che il prodotto scalare è finito per ogni due vettori. Vale l'identità

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

Pertanto

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{v}_i \vec{w} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\overline{v}_i + w_i)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} (\overline{v}_i - w_i)^2 \right) < \infty$$

Le due sommatorie di destra sono limitate grazie a quanto dimostrato precedentemente; infatti, se $\vec{v} \in \ell^2$ allora $\overline{\vec{v}} \in \ell^2$, dunque pure $\overline{\vec{v}} \pm \vec{w} \in \ell^2$ perché esso è uno spazio vettoriale, quindi è chiuso rispetto la somma.
Si mostra che ℓ^2 è completo. Si consideri una successione di Cauchy $\vec{z}_k = \{z_{nk}\}$ in ℓ^2 (dove k è l'indice in ℓ^2, mentre n è l'indice in $\mathbb{C}$). Dato che

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{k' \to \infty} \|\vec{z}_k - \vec{z}_{k'}\|^2 = \lim_{k \to \infty} \lim_{k' \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk} - z_{nk'}|^2 = 0$$

Fissato n, la successione $(\vec{z}_k)_n$, con $k \in \mathbb{N}$, è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ (cioè la successione della componente n-esima del vettore $\vec{z}_k$ è una successione di Cauchy). Dato che $\mathbb{C}$ è completo, segue che la successione $(\vec{z}_k)_n$ converge al limite $z_n \in \mathbb{C}$ per $k \to \infty$.
Sia $\vec{z} = \{z_n\}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \lim_{k' \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk} - z_{nk'}|^2 &= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k' \to \infty} |z_{nk} - z_{nk'}|^2 \\ &= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk} - z_n|^2 = \lim_{k \to \infty} \|\vec{z}_k - \vec{z}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

quindi $\vec{z}_k \to \vec{z}$ rispetto la norma di ℓ^2. Si mostra che $\vec{z} \in \ell^2$. Per ogni k vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n - z_{nk}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |z_{nk}|^2$$

La seconda sommatoria del secondo membro è finita (cioè converge) perché $\vec{z}_k \in \ell^2$. La prima sommatoria del secondo membro è finita anch'essa per qualche k in quanto può essere arbitrariamente piccola per k grande abbastanza. Questo mostra che ℓ^2 è completo.

Esempio. Più in generale, gli spazi $\ell^p(\mathbb{R})$ oppure $\ell^p(\mathbb{C})$ con $p \in [1, \infty)$ tali per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

sono solamente dotati di norma, quindi sono spazi di Banach detti spazi delle successioni (sequence spaces).

Osservazione. Utilizzando la disuguaglianza di Minkowski per le serie, si ha

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Esempio. Gli spazi di successioni ℓ^p sono spazi di Banach, costituiti da successioni limitate e dotati di norma superiore

$$\sup_{0 \leq n \leq \infty} |x_n| < \infty$$

5 Spazi funzionali

Il tipico esempio di prodotto scalare su spazi di Hilbert infinito-dimensionali è quello delle funzioni definite in un intervallo $[a, b]$:

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f}(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

La norma L^1 rientra in questa categoria.

Integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue. Prima di studiare gli spazi funzionali, si rivedono le differenze tra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue. Informalmente, entrambi sono il limite di approssimazioni di una funzione $f(x)$ tramite delle funzioni costanti a tratti. L'integrale di Riemann è il limite delle somme di Riemann

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\overline{x}_i), \quad \overline{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

cioè si partiziona l'asse x e si approssima l'area della funzione con tanti rettangoli divisi verticalmente.
Invece, l'integrale di Lebesgue risulta essere il limite delle somme

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f_i \, \mu(f^{-1}([f_{i+1} - f_i]))$$

dove $\mu(X)$ è la misura dell'insieme X. Con Lebesgue si partiziona l'asse y e si approssima l'area sempre con rettangoli, però ora divisi orizzontalmente. Tuttavia, con la misura di Lebesgue, la controimmagine di un intervallo non è necessariamente un intervallo a sua volta.

Esempio. Si vede una differenza tra i due integrali. Si consideri la funzione caratteristica dei numeri razionali ristretta a $[0, 1]$:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Essa non è Riemann integrabile perché presenta una quantità non numerabile di discontinuità. D'altra parte, per Lebesgue, l'insieme dei numeri razionali ha misura nulla (perché numerabile) e pertanto l'integrale di tale funzione sul proprio dominio è nullo a sua volta.

Lecture 16

mar 12 apr 2022 12:30

5.1 Spazio $L^1_\omega(\Omega)$

Lo spazio $L^1_\omega(\Omega)$ è lo spazio di funzioni complesse Lebesgue-integrabili definite in un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$) la cui norma è

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| \omega(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

La funzione positiva $\omega(x)$ è la densità di misura di integrazione. Quando la densità è banale, $\omega(x) \equiv 1$, allora lo spazio è semplicemente $L^1(\Omega)$. Lo spazio $L^1_\omega(\Omega)$ è uno spazio di Banach.

Osservazione. Lo spazio di funzioni continue $C([a, b])$ dotato della norma L^1 non è uno spazio di Banach perché non è completo: le successioni di Cauchy convergono, ma non ad un elemento dello spazio, cioè non convergono ad una funzione continua. Per questo si considerano le funzioni Lebesgue-integrabili per definire uno spazio completo e non le funzioni continue.

Esempio. Si vede un esempio dell'incompletezza di $C([a,b])$. Una successione di funzioni continue $f_n(x)$ converge alla funzione $f(x)$ rispetto la norma L^1 sse

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \implies \|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

Si consideri la successione di Cauchy

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -\frac{1}{k} \\ \frac{kx+1}{2}, & -\frac{1}{k} < x < \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{k} \le x \le 1 \end{cases}$$

con $[a,b] = [-1,1]$. Essa è una successione di Cauchy in quanto la norma tra due elementi può essere resa arbitrariamente piccola

$$\|f_k - f_l\|_1 = \int_{-1}^1 |f_x - f_l| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right|$$

per valori grandi di k ed l. Tuttavia, il limite della successione è

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

e tale funzione limite non è di certo continua e quindi non appartiene a $C([a,b])$.

Osservazione. Affinché lo spazio $L^1_\omega(\Omega)$ sia uno spazio di Banach, bisogna dimostrare la positività, la linearità e la disuguaglianza triangolare della norma L^1_ω. La linearità e la disuguaglianza triangolare seguono dalle proprietà degli integrali. Tuttavia, la positività richiede

$$\int_\Omega |f(x)|\omega(x) \,\mathrm{d}x = 0 \iff f(x) \equiv 0$$

Questo è vero per l'integrale di Riemann, ma non più per l'integrale di Lebesgue: basta che f sia nulla quasi ovunque e l'integrale è comunque zero, ma f non è identicamente nulla. Pertanto, la condizione di positività richiede che $f(x) = 0$ quasi ovunque. A questo punto, lo spazio $L^1_\omega(\Omega)$ è uno spazio normato. Ora rimane solo da verificarne la completezza.

Teorema. di Riesz-Fischer. Lo spazio $L^1_\omega(\Omega)$ è completo (quindi è uno spazio di Banach).

Dimostrazione. Si mostra che le successioni di Cauchy convergono ad un elemento interno dello spazio. Si consideri f_n una successione di Cauchy in L^1_ω. Per la condizione di Cauchy, si trova una sotto-successione f_{n_i} tale che

$$\left\|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\right\|_1 \le \frac{1}{2^i}$$

Questo si può fare perché dato che due elementi di una successione di Cauchy sono arbitrariamente vicini, allora si possono scegliere con accortezza alcuni elementi di tale successione di modo che distino meno di 2^{-i}.
Si considerino le funzioni

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right|$$

La funzione limite

$$g_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

esiste per ogni x perché la successione g_k è monotona (limiti di successioni monotone esistono sempre, ma possono essere sia finiti che infiniti). Si applica il teorema della convergenza monotona (nella seconda uguaglianza di seguito) per controllare che tale funzione limite sia finita

$$\|g_\infty\|_1 = \int_\Omega |g_\infty(x)|\omega(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left\|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right\|_1 \leq \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} = 1$$

Dato che $\|g_\infty\|_1 \leq 1$, allora $g_\infty(x)$ è finita quasi ovunque. Quindi, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$$

converge quasi ovunque perché converge assolutamente (infatti, g_k è la serie dei moduli). Quindi, scrivendo ogni termine f_{n_k} per mezzo della serie telescopica precedente, si ha

$$f_{n_{k+1}}(x) \equiv f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$$

da cui si conclude che la sotto-successione $\{f_{n_k}\}_k$ converge anch'essa quasi ovunque. Si definisce $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ quando tale limite esiste, e $f(x) = 0$ altrimenti. Ogni termine della sotto-successione è limitato da una funzione L^1

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + g_\infty(x)$$

dato che g_∞ è il limite di una successione monotona crescente. Il membro di destra è Lebesgue-integrabile in norma L^1_ω. Dunque, per il teorema della convergenza dominata, pure f è Lebesgue-integrabile in norma L^1_ω, cioè $f \in L^1_\omega$.
Lo stesso si può dire della successione originale. Infatti

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1, \quad \forall k$$

Il primo addendo tende a zero per la condizione di Cauchy. Il secondo addendo tende a zero perché $f_{n_k} \to f$ in norma L^1_ω. Pertanto, pure $f_n \to f$ in norma L^1_ω. Dunque $L^1_\omega(\Omega)$ è completo.

Osservazione. Tale dimostrazione vale per la definizione di L^1_ω tramite gli integrali di Lebesgue perché si è fatto uso di due teoremi che si applicano solamente a tale tipo di integrali.

5.2 Spazio $L^p_\omega(\Omega)$

Lo spazio $L^p_\omega(\Omega)$ è lo spazio di funzioni a valori complessi definite in un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$) tali che la potenza p-esima del modulo sia L-integrabile

$$\int_\Omega |f(x)|^p \omega(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

con $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$.

Osservazione. Le funzioni uguali quasi ovunque sono considerate identiche tramite classi di equivalenza. Pertanto, lo spazio $L^p_\omega(\Omega)$ è definito come lo spazio delle classi di equivalenza di funzioni L-integrabili che sono identiche quasi ovunque.

Proposizione. Lo spazio $L^p_\omega(\Omega)$ è uno spazio di Banach con norma L^p_ω

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \omega(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

La dimostrazione della completezza deriva dalla generalizzazione del teorema di Riesz-Fischer.

Proposizione. Siano p e q coniugati:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Allora vale

- disuguaglianza di Hölder:
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$$
- disuguaglianza di Minkowski:
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$$

5.3 Spazio di Hilbert $L^2_\omega(\Omega)$

Tra tutti i possibili valori di p, il caso $p=2$ è particolare in quanto $L^2_\omega(\Omega)$ è anche uno spazio di Hilbert: è normato (quindi è uno spazio di Banach), possiede un prodotto scalare ed è completo. Tale spazio è l'unico in cui si può definire il prodotto scalare

$$(f,g)=\int_\Omega \overline{f}(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

La norma L^2_ω risulta essere

$$\|f\|_2=[(f,f)]^{\frac{1}{2}}=\left(\int_\Omega |f(x)|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Gli elementi di tale spazio sono le funzioni tipicamente dette quadrato-integrabili.
In meccanica quantistica, la funzione d'onda è un'ampiezza di probabilità. La probabilità risulta essere il quadrato dell'ampiezza e dato che dev'essere finita perché misurabile, allora lo spazio delle funzioni d'onda è uno spazio L^2, uno spazio di Hilbert.

Esercizio. Dimostrare che $L^2_\omega(\Omega)$ è uno spazio vettoriale: positività, linearità e disuguaglianza triangolare.

Esempio. Lo spazio $L^2_\omega(\Omega)$ contiene sia funzioni continua (di $C(\Omega)$) sia funzioni discontinue, con singolarità

$$f(x)\sim\frac{1}{(x-x_0)^\alpha},\quad x_0\in\Omega$$

Tale funzione è quadrato-integrabile sse

$$\int |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\sim\int\frac{1}{(x-x_0)^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x<\infty$$

e tale funzione è integrabile qualora $\alpha<\frac{1}{2}$.
Allo stesso modo, una funzione

$$f(x)\sim\frac{1}{x^\beta}$$

è integrabile per $x\to\infty$ qualora $\beta>1$.

Esempio. Sia $0 \leq a \leq b < \infty$. Si dimostra che $L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$. Si utilizza la disuguaglianza di Hölder. Considerati $p = q = 2$ e $g(x) \equiv 1$ si ha

$$\|f \cdot 1\|_1 \leq \|f\|_2 \|1\|_2 \iff \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \left(\int_a^b |1|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \sqrt{b-a}$$

Pertanto, se $f \in L^2([a,b])$, cioè $\|f\|_2 < \infty$, allora $\|f\|_1 < \infty$, cioè $f \in L^1([a,b])$.
Infatti, se $a = 0$, allora l'integrabilità di una funzione in $x = 0$ richiede che $f \sim x^{-\alpha p}$ abbia $p\alpha < 1$. Se $p = 2$, allora $\alpha < \frac{1}{2}$. Quando $p = 1$, si ha $\alpha < 1$ che è sempre verificato quando $\alpha < \frac{1}{2}$.
Inoltre, si dimostra che $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$. Basta considerare

$$f(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \to \infty$$

Una funzione di questo tipo è integrabile in L^2 in quanto

$$|f(x)|^2 \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \to \infty$$

ma non è integrabile in L^1.
Analogamente si dimostra che $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$. Infatti, basta considerare

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0$$

Essa è integrabile in L^1, ma non in L^2.

Osservazione. SI nota che $L^p_\omega(\Omega)$, con $p \neq 2$, non è uno spazio di Hilbert perché non è possibile definire un prodotto scalare. Infatti, se $f, g \in L^p_\omega(\Omega)$, $p \neq 2$, non è detto che

$$\int_\Omega \overline{f}(x) g(x) \omega(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

Per esempio, si considerino $p = 1$ e $f, g \in L^1$ tali che

$$f \sim g \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to \infty$$

Dunque, si ha

$$\int_\Omega \overline{f}(x) g(x) \, \mathrm{d}x \sim \int_\Omega \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

Ma tale funzione non è integrabile in $x = 0$.

Osservazione. Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare non è necessariamente uno spazio di Hilbert: esso dev'essere anche completo.

Esempio. Si consideri lo spazio delle funzioni continue su di un intervallo $C([a,b])$. Il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f}(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

è ben definito ed induce la norma L^2. Tuttavia, $C([a,b])$ non è completo rispetto la norma L^2. Infatti, si considerino l'intervallo $[0,1]$ e la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Essa è una successione di Cauchy. Infatti

$$
\begin{aligned}
(\|f_n - f_m\|_2)^2 &= \int_0^1 \left(\overline{f_n(x) - f_m(x)}\right)(f_n(x) - f_m(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - 1\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \left|1 - 2n\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 + 2m\left(x - \frac{1}{2}\right)\right|^2 \mathrm{d}x + \\
&+ \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}} \left|-1 + 2m\left(x - \frac{1}{2}\right)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}}^{1} 0\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(m-n)^2}{6n^3} - \frac{(m-n)^3}{6mn^3} = \frac{1}{6m} + \frac{m}{6n^2} - \frac{1}{3n} \\
&\leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m} + \frac{m}{n^2}\right) \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\|f_n - f_m\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \to 0, \quad m, n \to \infty
$$

Pertanto, la successione $f_n(x)$ è una successione di Cauchy. Tuttavia, la funzione limite in norma L^2 risulta essere

$$
f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}
$$

La funzione $f(x)$ è discontinua e pertanto non appartiene a $C([0,1])$. Ciò mostra che tale insieme non è completo. Questo implica che, in generale, $C([a,b])$ non è completo.