# 厦门大学《大学物理》B1 课程
# 期中试题·答案

考试日期：2015.4　　信息学院自律督导部整理

一、（15 分）

一赛车沿半径为 $R$ 的圆形轨道作圆周运动，其行驶路程与时间的关系为 $s = at + bt^2$，式中 $a$、$b$ 均为常量。求该赛车：

（1）　任意时刻的速度 $\vec{v}(t)$；

（2）　任意时刻的加速度 $\vec{a}(t)$；

（3）　任意时刻的角速度 $\omega(t)$ 和角加速度 $\alpha(t)$；

解：（1）$\vec{v}(t) = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau} = (a + 2bt)\vec{\tau}$　；　　（5 分）

（2）$\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{n} = 2b\vec{\tau} + \dfrac{(a+2bt)^2}{R}\vec{n}$　；　　（3+3=6 分）

（3）$\omega(t) = \dfrac{v}{R} = \dfrac{(a+2bt)}{R}$　；　　（2 分）

$\alpha(t) = \dfrac{a_\tau}{R} = \dfrac{2b}{R}$　；　　（2 分）

# 庄某注释：

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{1}{R}\cdot(a\cdot t + b\cdot t^2)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\cdot R\cdot\cos\theta(t) + \vec{j}\cdot R\cdot\sin\theta(t) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = -\vec{i}\cdot\sin\theta(t) + \vec{j}\cdot\cos\theta(t) \quad ; \quad \vec{n} = -\vec{i}\cdot\cos\theta(t) - \vec{j}\cdot\sin\theta(t)$$

# Why?

二、（14 分）

当物体在空气中高速度飞行时，由空气阻力产生的**反向加速度大小与物体速度的平方成正比**，即 $a=-kv^2$，其中 $k$ 为常量。若物体**仅受空气阻力作用**沿 $x$ 轴方向作直线运动，且通过原点时的速度为 $v_0$，求在此后：

（1） 物体的速度为 $v$ 时，物体所在的位置 $x(v)$；

（2） 若物体经历时间 $2s$ 时，其速度变为 $\frac{v_0}{2}$，求常数 $k$。

解：（1）$\because a=-kv^2=\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dx}=\frac{vdv}{dx}$ ， （3 分）

$$\therefore \int_0^x -kdx=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} \qquad （2 分）$$

解得：$x(v)=\frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v}$ ； （2 分）

（2）$\because a=-kv^2=\frac{dv}{dt}$ ， （3 分）

$$\therefore \int_0^2 -kdt=\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v^2} \qquad （2 分）$$

解得：$k=\frac{1}{2v_0}$ （2 分）

**庄某注释 1**：可以延拓为“重力场中的曲线轨道情形”如下。

$$\vec{f}_{阻}=-\tilde{k}\cdot v^2\cdot\frac{\vec{v}}{v} \quad ; \quad 令\tilde{k}=k\cdot m \quad \Rightarrow$$

$$m\cdot\vec{g}-\tilde{k}\cdot v^2\cdot\frac{\vec{v}}{v}=m\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+k\cdot v\cdot\vec{v}=\vec{g}$$

**这是一个非线性问题！**

**庄某注释 2**：可以更一般地延拓为“重力场中的曲线轨道情形”如下。

$$\vec{f}_{阻} = -\tilde{k} \cdot v^n \cdot \frac{\vec{v}}{v} \quad ; \quad 令\tilde{k} = k \cdot m \quad \Rightarrow$$

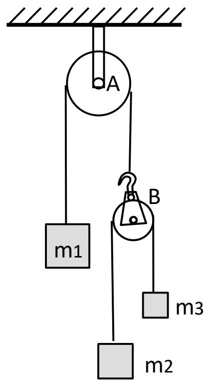
$$m \cdot \vec{g} - \tilde{k} \cdot v^n \cdot \frac{\vec{v}}{v} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + k \cdot v^{n-1} \cdot \vec{v} = \vec{g}$$

当 $n \neq 1$ 时，是一个非线性问题！

当 $n = 1$ 时，是一个线性问题！可以利用“U-V 法则”轻易搞定！

三、（15 分）




如图所示，图中 $A$ 为定滑轮，$B$ 为动滑轮，3 个物体质量分别为 $m_3=m$，$m_2=2m$，$m_1=4m$。设**不计滑轮和绳的质量**，且**忽略滑轮轴处的摩擦力，绳子与滑轮无相对滑动**，求：

（1） $B$ 相对 $A$ 的加速度；

（2） 各物体相对地面的加速度。

解：以竖直向下为参考方向，$B$ 相对 $A$ 的加速度为 $a'$，则：

$m_1$： $m_1g-T_1=m_1a_1$ ；

$m_2$： $m_2g-T_2=m_2a_2=m_2(a'-a_1)$ ；

$m_3$： $m_3g-T_2=m_3a_3=-m_3(a'+a_1)$ ；

又 $T_1=2T_2$ （2+2+2+1=7 分）

即：$\begin{cases}4mg-T_1=4ma_1\\2mg-T_2=2m(a'-a_1)\\mg-T_2=-m(a'+a_1)\end{cases}$ ，

解得： $a'=\dfrac{2g}{5}$ ——方向向下；

$a_1=\dfrac{g}{5}$ ——方向向下；

$a_2=\dfrac{g}{5}$ ——方向向下 ；

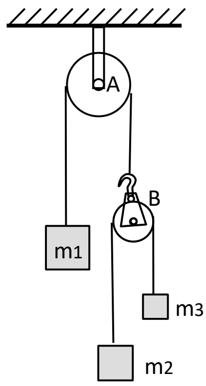
$a_3=-\dfrac{3g}{5}$ ——方向向上 ； （2*4=8 分）

14152 期中 **“滑轮题庄某注释”**

**（感慨人生！仅给吾人学生参考！）**

（15 分）

如图所示，图中 $A$ 为定滑轮，$B$ 为动滑轮，3 个物体质量分别为 $m_3=m$，$m_2=2m$，$m_1=4m$。设**不计滑轮和绳的质量**，且**忽略滑轮轴处的摩擦力，绳子与滑轮无相对滑动**，求：




（3） $B$ 相对 $A$ 的加速度；

（4） 各物体相对地面的加速度。

解：以竖直向下为参考方向，$B$ 相对 $A$ 的加速度为 $a'$，则：

$m_1$： $m_1g-T_1=m_1a_1$ ；

$m_2$： $m_2g-T_2=m_2a_2=m_2(a'-a_1)$ ；

$m_3$： $m_3g-T_2=m_3a_3=-m_3(a'+a_1)$ ；

又 $T_1=2T_2$ （2+2+2+1=7 分）

即：$\begin{cases}4mg-T_1=4ma_1\\2mg-T_2=2m(a'-a_1)\\mg-T_2=-m(a'+a_1)\end{cases}$ ，

?

解得： $a'=\dfrac{2g}{5}$ ——方向向下；

$a_1=\dfrac{g}{5}$ ——方向向下；

$a_2=\dfrac{g}{5}$ ——方向向下 ；

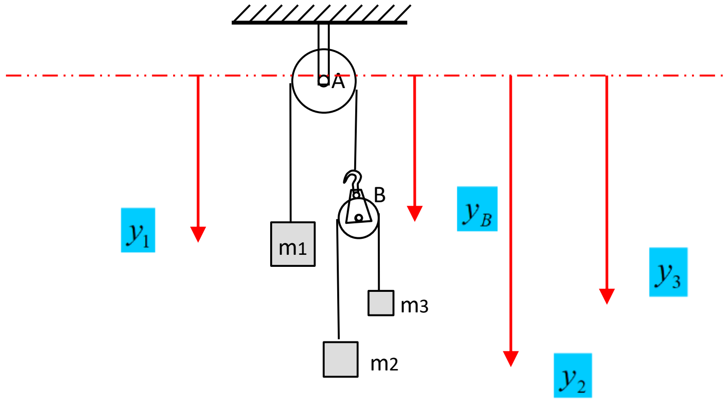
$a_3=-\dfrac{3g}{5}$ ——方向向上 ； （2*4=8 分）

**庄某注释 1**：皆以竖直向下为正方向，有

$$y_1+y_B+\pi\cdot R_A=L_1 \quad ; \quad y_2-y_B+y_3-y_B+\pi\cdot R_B=L_2$$

# 求二阶导数得到：

$$a_1+a_B=0 \quad ; \quad a_2+a_3-2\cdot a_B=0$$




**庄某注释 2**：皆以竖直向下为正方向，兹　　　　　　　按牛顿定律列方程, 有

$m_1:\quad m_1\cdot g-T_1=m_1\cdot a_1$

$m_2:\quad m_2\cdot g-T_2=m_2\cdot a_2$

$m_3:\quad m_3\cdot g-T_2=m_3\cdot a_3$

又因为不计滑轮和绳的质量, 所以有$T_1=2\cdot T_2$

**庄某注释 3**：

兹联立$m_2\cdot g-T_2=m_2\cdot a_2\quad;\quad m_3\cdot g-T_2=m_3\cdot a_3\quad\Rightarrow$得到

$$(m_2-m_3)\cdot g=m_2\cdot a_2-m_3\cdot a_3$$

兹联立$m_1\cdot g-T_1=m_1\cdot a_1\quad;\quad m_2\cdot g-T_2=m_2\cdot a_2\quad;\quad T_1=2\cdot T_2\quad\Rightarrow$得到

$$(m_1-2\cdot m_2)\cdot g=m_1\cdot a_1-2\cdot m_2\cdot a_2$$

兹联立方程组得到

$$a_1+a_B=0\quad;\quad a_2+a_3-2\cdot a_B=0$$

$$(m_2-m_3)\cdot g=m_2\cdot a_2-m_3\cdot a_3$$

$$(m_1-2\cdot m_2)\cdot g=m_1\cdot a_1-2\cdot m_2\cdot a_2$$

注意到$m_3=m$, $m_2=2m$, $m_1=4m$，容易解得

$$a_B=-\frac{1}{5}\cdot g$$——方向向上!

$$a_1=\frac{1}{5}\cdot g$$——方向向下!

$$a_2 = \frac{1}{5} \cdot g$$——方向向下！

$$a_3 = -\frac{3}{5} \cdot g$$——方向向上！

**注释完毕。**

四、（14 分）

设火箭从地面沿竖直向上发射时，其初始质量为$M_0$，当燃料耗尽后火箭质量变为$M_1$。若火箭向后喷气的相对速度大小为$v_r$，**不计重力及空气阻力**，试求：

（1） 当**燃料耗尽时火箭获得的速度**的大小；

（2） 假定火箭喷气的相对速度$v_r = 2.5 \times 10^3 m/s$，欲使燃料耗尽时火箭获得第一宇宙速度$v_1 = 7.9 \times 10^3 m/s$，则火箭的质量$\dfrac{M_0}{M_1}$比应为多大？

解：（1）设 $t$ 时刻火箭的动量为：$m\vec{v}$，

$t + \Delta t$ 时刻火箭的动量为：$(m - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(v - v_r)$

根据动量守恒定律有：$mv = (m - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(v - v_r)$， （4）？

**略去二阶无限小量** $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$ 得：$m\mathrm{d}v = -v_r \mathrm{d}m$

$$\Rightarrow \int_0^v \mathrm{d}v = -v_r \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mathrm{d}m}{m} \quad \Rightarrow \quad v = v_r \ln \frac{M_0}{M_1}$$ ； （4 分）

（2）$\because 7.9 \times 10^3 = 2.5 \times 10^3 \ln \dfrac{M_0}{M_1}$ ，$\therefore \dfrac{M_0}{M_1} \approx 23.6$ 。 （6 分）

五、（15 分）

一质量为 $m=2kg$ 的质点在合力 $\vec{F}=3\vec{i}-2t\vec{j}\,(\mathrm{N})$ 的作用下，在 $xoy$ 平面内运动。设 $t=0$ 时质点所在的位置为坐标原点，此时质点的速度为 $\vec{v}_0=\vec{i}-\vec{j}\ (\mathrm{m/s})$。求：

（1） $t=1\ (s)$ 时质点的动量 $\vec{P}$；

（2） $t=1\ (s)$ 时质点**相对坐标原点的角动量** $\vec{L}_0$；

（3）在 $t=0$ 至 $t=1\ (s)$ 时间内**合外力对质点的冲量** $\vec{I}$；

解：质点加速度： $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}=\dfrac{3}{2}\vec{i}-t\vec{j}$ ，　　（2 分）

$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{3}{2}\vec{i}-t\vec{j}$ 　$\Rightarrow$

$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}d\vec{v}=\int_0^t(\dfrac{3}{2}\vec{i}-t\vec{j})dt$ 　$\Rightarrow$ 　$\vec{v}=(1+\dfrac{3}{2}t)\vec{i}-(1+\dfrac{t^2}{2})\vec{j}$ ；　（2 分）

$\int_0^{\vec{r}}d\vec{r}=\int_0^t[(1+\dfrac{3}{2}t)\vec{i}-(1+\dfrac{t^2}{2})\vec{j})]dt$ 　$\Rightarrow$ 　$\vec{r}=(t+\dfrac{3}{4}t^2)\vec{i}-(t+\dfrac{t^3}{6})\vec{j}$ ；　（2 分）

（1）当 $t=1\ (s)$ 时， $\vec{v}_1=\dfrac{5}{2}\vec{i}-\dfrac{3}{2}\vec{j}$ ，

$\Rightarrow$质点的动量： $\vec{P}_1=m\vec{v}_1=5\vec{i}-3\vec{j},(kg\cdot m/s)$；　（3 分）

（2）当 $t=1\ (s)$ 时， $\vec{r}_1=\dfrac{7}{4}\vec{i}-\dfrac{7}{6}\vec{j}$ ，

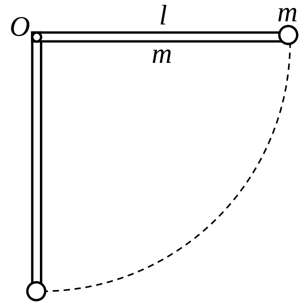
$\Rightarrow$质点的角动量： $\vec{L}_1=\vec{r}_1\times\vec{P}_1=(\dfrac{7}{4}\vec{i}-\dfrac{7}{6}\vec{j})\times(5\vec{i}-3\vec{j})=\dfrac{7}{12}\vec{k},(kg\cdot m^2/s)$；　（3 分）

（3）当 $t=0$ 时，质点的动量： $\vec{P}_0=m\vec{v}_0=2\vec{i}-2\vec{j},(kg\cdot m/s)$；

合外力对质点的冲量： $\vec{I}=\vec{P}_1-\vec{P}_0=3\vec{i}-\vec{j},(kg\cdot m/s)$ 　（3 分）

六、（15 分）

如图，长为 $l$、质量 $m$ 的均匀细杆一端固连着一质量为 $m$ 的小球，另一端可绕过 $O$ 点的水平轴在竖直面内无摩擦地转动，系统自水平位置以零初速开始释放。求：




（1） 细杆在水平位置时的角加速度 $\alpha$；

（2） 当细杆摆动到竖直位置时的角速度 $\omega$；

（3） 细杆由水平位置摆动到竖直位置的过程重力矩所做的功。

解：杆与小球相对转轴的转动惯量：$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$

（1） 根据定轴转动定律有：

$$M_0 = J\alpha = mg\cdot\frac{l}{2} + mgl = \frac{4}{3}ml^2\cdot\alpha \quad ,$$

解得：$\alpha = \frac{9g}{8l}, rad/s^2$ ； （3+2=5 分）

（2） 细杆下摆过程机械能守恒：

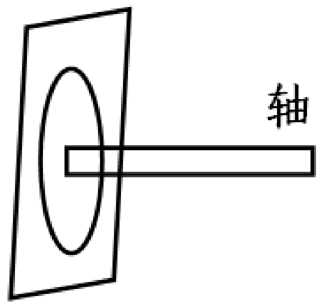
$$mg\cdot\frac{l}{2} + mgl = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2\omega^2 - 0 \quad ,$$

解得：$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}, rad/s$ （3+2=5 分）

（3） 重力矩所做的功：

$$W_G = -\Delta E_p = E_1 - E_2 = (mg\cdot\frac{l}{2} + mgl) - 0 = \frac{3}{2}mgl, (J)$$ （3+2=5 分）

七、（12 分）




以力 F 将一块木板紧压在旋转的轮子上，木板与轮子之间的滑动摩擦系数为$\mu$，轮子的初角速度为$\omega_0$。已知轮子的半径为 $R$，质量为 $m$，可看作均质圆盘。若轴的质量忽略不计，且该压力 F 均匀分布在轮面上，问转过多少角度时轮子停止转动？

解：轮子表面单位面积受正压力 $n=\dfrac{F}{\pi R^2}$

取轮子上一半径为 r、宽为 dr 的圆环所受压力：$dF=\dfrac{F}{\pi R^2}2\pi rdr$

环上所受摩擦力：$df=\mu dF=\mu\dfrac{F}{\pi R^2}2\pi rdr=\mu\dfrac{2F}{R^2}rdr$ （3 分）

摩擦力 $df$ 对轴的力矩：$dM=2\mu\dfrac{F}{R^2}r^2dr$ （3 分）

轮子受总力矩：$M=\int_0^R 2\mu\dfrac{F}{R^2}r^2dr=\dfrac{2}{3}\mu FR$ （3 分）

由动能定理：$M\varphi=\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$， （3 分）

所以$\varphi=\dfrac{3mR\omega_0^2}{8\mu F}$

八、