微分方程解答

例 1.求方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=(\ln x)y^2$.

解： 这是伯努利方程.

方程两边同乘$-y^{-2}$，原方程化为$-y^{-1}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y^{-1}=-\ln x$.

令$z=y^{-1}$，则$\dfrac{dz}{dx}=-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$. 于是，原方程化为$\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-\ln x$（一阶线性非齐次方程）.

由一阶线性非齐次方程的通解公式，得

$$
\begin{aligned}
z&=e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}[\int(-\ln x)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+C]\\
&=x[-\int\frac{\ln x}{x}dx+C]\\
&=x(-\frac{1}{2}\ln^2 x+C).
\end{aligned}
$$

故原方程的通解为$y^{-1}=x(-\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C)$，即$y=\dfrac{1}{x(-\frac{1}{2}\ln^2 x+C)}$, $x>0$，其中C为任意常数.

例 2. 求方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}=xe^{y}$的通解.

解： 方程两边同乘$-e^{-y}$，原方程化为$-e^{-y}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}e^{-y}=-x$.

令$z=e^{-y}$，则$\dfrac{dz}{dx}=-e^{-y}\dfrac{dy}{dx}$. 于是，原方程化为$\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-x$（一阶线性非齐次方程）.

由一阶线性非齐次方程的通解公式，得

$$
\begin{aligned}
z&=e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}[\int(-x)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+C]\\
&=|x|[-\int x\cdot\frac{1}{|x|}dx+C]
\end{aligned}
$$

于是，当$x>0$时，$z=x[-x+C]=-x^2+Cx$；

当$x<0$时，$z=-x[x+C]=-x^2-Cx$；

故原方程的通解为$e^{-y}=Cx-x^2$，即$y=-\ln(Cx-x^2)$，其中C为任意常数.

例 3. 求微分方程$y^3dx+2(x^2-xy)dy=0$的通解.

解： 令$x=t^2$，则$dx=2tdt$. 于是，原方程化为$2ty^3dt+2(t^4-t^2y)dy=0$，

整理后，可得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{(\frac{y}{t})^3}{1-(\frac{y}{t})^2}$（齐次方程）.

令$u=\dfrac{y}{t}$，则$y=ut$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u+t\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，于是原方程可化为$u+t\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u^3}{1-u^2}$.

移项后，可得$(u-\dfrac{1}{u})\mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$.

两边积分，$\int(u-\dfrac{1}{u})\mathrm{d}u=\int\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$，即$u^2-2\ln u=2\ln t+C$.

将$u=\dfrac{y}{t}$，$y=tu$代入，得$\dfrac{y^2}{t^2}=2\ln y+C$，即$y^2=x(\ln y^2+C)$.

故原方程的通解为$y^2=x(\ln y^2+C)$，其中C为任意常数.

例 4. 求微分方程$x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2y=x^2$的通解.

解： 设$x>0$，令$x=\mathrm{e}^t$，则$x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=D(D-1)y=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

因此，原方程化为下列二阶常系数线性非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\mathrm{e}^{2t} \qquad (*)$$

方程（*）的特征方程为$r^2-r-2=0$，特征根为$r_1=-1$，$r_2=2$.

方程（*）对应的齐次方程的通解为$Y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{2t}$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

因$\alpha=2$为单重特征根，故可设方程（*）的特解为$y^*=at\mathrm{e}^{2t}$.

将$y^*=at\mathrm{e}^{2t}$代入方程（*），可得$a(4+4t)\mathrm{e}^{2t}-a(1+2t)\mathrm{e}^{2t}-2at\mathrm{e}^{2t}=\mathrm{e}^{2t}$，即$a=\dfrac{1}{3}$.

于是，方程（*）的一个特解为$y^*=\dfrac{1}{3}t\mathrm{e}^{2t}$.

方程（*）的通解为$y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{3}t\mathrm{e}^{2t}$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

于是，$y=\dfrac{C_1}{x}+C_2x^2+\dfrac{1}{3}x^2\ln x$.

当$x<0$时，令$t=-x$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

故原方程化为$t^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2y=t^2$.

由上面的推导可得$y=\dfrac{C_1}{t}+C_2t^2+\dfrac{1}{3}t^2\ln t$，即$y=-\dfrac{C_1}{x}+C_2x^2+\dfrac{1}{3}x^2\ln(-x)$.

综上可得，原方程的通解为$y=\dfrac{C_1}{x}+C_2x^2+\dfrac{1}{3}x^2\ln|x|$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

例 5. 求方程$4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$的通解.

解： 原方程可化为$x^3y'''-x^2y''+xy'=\dfrac{1}{4x}$，这是一个欧拉方程.

设$x>0$，令$x=\mathrm{e}^t$，则

$$xy'=Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad x^2y''=D(D-1)y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$x^3y'''=D(D-1)(D-2)=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

于是，原方程可写成$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$,

整理可得，$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$ (*)

方程（*）对应的齐次方程的特征方程为$r^3-4r^2+4r=0$，特征根为$r_1=0,\ r_2=r_3=2$.

于是，方程（*）对应的齐次方程的通解为$Y=C_1+(C_2+C_3t)\mathrm{e}^t$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

因为$\alpha=-1$不是方程（*）的特征根，故可设方程（*）的特解为$y^*=a\mathrm{e}^{-t}$，代入方程（*），可得

$$-a\mathrm{e}^{-t}-4a\mathrm{e}^{-t}-4a\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t},$$

解得$a=-\dfrac{1}{36}$，即$y^*=-\dfrac{1}{36}\mathrm{e}^{-t}$.

于是，方程（*）的通解为$y=C_1+(C_2+C_3t)\mathrm{e}^t-\dfrac{1}{36}\mathrm{e}^{-t}$，其中$C_1,C_2,C_3$为任意常数.

故原方程的通解为$y=C_1+(C_2+C_3\ln x)x^2-\dfrac{1}{36x}$，其中$C_1,C_2,C_3$为任意常数.

当$x<0$时，令$x=-u$，则方程化为$u^3\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}u^3}-u^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}+u\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=-\dfrac{1}{4u}$.

令$u=\mathrm{e}^t$，方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$.

类似地，该方程的通解为 $y=C_1+(C_2+C_3t)\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{36}\mathrm{e}^{-t}$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

故原方程的通解为 $y=C_1+(C_2+C_3\ln(-x))x^2-\dfrac{1}{36x}$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

综上，可得原方程的通解为 $y=C_1+(C_2+C_3\ln|x|)x^2-\dfrac{1}{36x}$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

练习

1. 求方程 $(2+x)^2y''-2(2+x)y'+2y=\dfrac{1}{2+x}$ 满足 $y(0)=0,\ y'(0)=0$ 的特解.

解： 令 $u=2+x$，则原方程化为 $u^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-2u\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+2y=\dfrac{1}{u}$.

令 $u=\mathrm{e}^t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=\mathrm{e}^{-t}$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+2y=\mathrm{e}^{-t} \qquad (*)$$

对应齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_2=2$.

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

因为 $\lambda=-1$ 不是特征根，故设方程（*）的特解为 $y^*=a\mathrm{e}^{-t}$，代入方程（*），得

$$a\mathrm{e}^{-t}+3a\mathrm{e}^{-t}+2a\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}\Rightarrow a=\frac{1}{6}.$$

故方程（*）的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

于是，原方程的通解为 $y=C_1u+C_2u^2+\dfrac{1}{6u}=C_1(x+2)+C_2(x+2)^2+\dfrac{1}{6(x+2)}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

由 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，得 $\begin{cases}2C_1+4C_2+\dfrac{1}{12}=0\\ C_1+4C_2-\dfrac{1}{24}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{8}\\ C_2=\dfrac{1}{24}\end{cases}$.

故所求的特解为 $y=-\dfrac{1}{8}(x+2)+\dfrac{1}{24}(x+2)^2+\dfrac{1}{6(x+2)}$.

例 6. 求微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$ 满足 $y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2$ 的特解.

解： 令 $x=\sin t$，则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y''=(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2})\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

代入方程，得

$$\cos^2 t\cdot(\frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2})-\sin t\cdot\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0.$$

特征方程$r^2+1=0$，特征根$r=\pm i$，故该方程的通解为$y=C_1\cos t+C_2\sin t$，其中C_1,C_2为任意常数.

于是，原方程的通解为$y=C_1\sqrt{1-x^2}+C_2x$，其中C_1,C_2为任意常数.

由$y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2$可得$\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$，则所求方程的特解为$y=\sqrt{1-x^2}+2x.$

练习:

1. 求微分方程$\cos^4 x\cdot y''+\cos^2 x\cdot(2-\sin 2x)y'+y=\tan x$的通解.

解: 令$t=\tan x$，则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y''=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^4 x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

代入方程，可得

$$2\sin x\cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(2-2\sin x\cos x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t.$$

特征方程为$r^2+2r+1=0$，特征根为$r_{1,2}=-1$.

对应齐次线性方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$的通解为$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

因为$\lambda=0$不是特征根，故可设$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t$的特解为$y^*=at+b$，代入方程（*），得

$$2a+at+b=t,$$

解得$a=1$，$b=-2$.　因此，$y^*=t-2$.

方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t$的通解为$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}+t-2$.

故原方程的通解为$y=(C_1+C_2\tan x)\mathrm{e}^{-\tan x}+\tan x-2$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

2. 解方程$(y-x)\sqrt{1+x^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+y^2)^{\frac{3}{2}}$.

解： 令$y=\tan u$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\cos^2u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

于是，原方程化为

$$(\sin u-x\cos u)\sqrt{1+x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1.$$

令$x=\tan t$，则$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\cos^2t\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，则方程化为

$$(\sin u\cos t-\sin t\cos u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=1,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\sin(u-t).$$

令$p=u-t$，则$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=1-\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=1-\sin p$，即$\dfrac{\mathrm{d}p}{1-\sin p}=\mathrm{d}u$，两边积分，可得

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{1-\sin p}=\int\mathrm{d}u.$$

注意到，

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{1-\sin p}=\int\frac{\mathrm{d}p}{(\cos\frac{p}{2}-\sin\frac{p}{2})^2}$$

$$=2\int\frac{1}{(1-\tan\frac{p}{2})^2}\frac{1}{2\cos^2\frac{p}{2}}\mathrm{d}p$$

$$=2\int\frac{1}{(1-\tan\frac{p}{2})^2}\mathrm{d}\tan\frac{p}{2}=\frac{2}{1-\tan\frac{p}{2}}+C.$$

故 $$u=\frac{2}{1-\tan\frac{p}{2}}+C.$$

因此，原方程的通解为 $\arctan y=\dfrac{2}{1-\tan(\dfrac{\arctan y-\arctan x}{2})}+C$，其中 C 为任意常数.

例 7. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ 的通解.

解： 令 $u=x+y$，则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{1}{u^2}$，即 $(1-\dfrac{1}{u^2+1})\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

两边积分，可得 $u-\arctan u=x+C$.

于是，原方程的通解为 $y=\arctan(x+y)+C$，其中 C 为任意常数.

例 8. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2(\dfrac{y+2}{x+y-1})^2$ 的通解.

解： 原方程可改写为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2(\dfrac{y+2}{x-3+y+2})^2$，令 $Y=y+2,\ X=x-3$，则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=2(\frac{Y}{X+Y})^2=2(\frac{\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}})^2,$$

这是一个齐次方程，令 $u=\dfrac{Y}{X}$，则 $u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=2\dfrac{u^2}{(1+u)^2}$，移项后得

$$(\frac{1}{u}+\frac{2}{1+u^2})\mathrm{d}u=-\frac{1}{X}\mathrm{d}X.$$

两边积分，可得 $\ln|u|+2\arctan u=-\ln|X|+C$，即

$$\ln|uX|+2\arctan u=C,$$

故原方程的通解为 $\ln|y+2|+2\arctan\dfrac{y+2}{x-3}=C$，其中 C 为任意常数.

例 9. 求微分方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$ 的通解.

解： 令 $u=y\cos x$，则 $u'=y'\cos x-y\sin x$，$u''=y''\cos x-2y'\sin x-y\cos x$，于是，$u''+4u=\mathrm{e}^x$.

特征方程$r^2+4=0$，特征根为$r=\pm 2i$.

于是，对应的齐次线性方程$u''+4u=0$的通解为$u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，其中C_1,C_2为任意常数.

因为$\lambda=1$不是特征根，故可设方程$u''+4u=\mathrm{e}^x$的特解为$u^*=a\mathrm{e}^x$，代入方程，可得

$$a\mathrm{e}^x+4a\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x,$$

于是，$a=\dfrac{1}{5}$.

故$u''+4u=\mathrm{e}^x$的通解为$u=C_1\cos 2x+C_2'\sin 2x+\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^x$，其中$C_1,C_2'$为任意常数.

所以，微分方程$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$的通解为

$$y=\frac{C_1\cos 2x+C_2'\sin 2x}{\cos x}+\frac{1}{5\cos x}\mathrm{e}^x,$$

即 $y=C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x}+C_2\sin x+\dfrac{1}{5\cos x}\mathrm{e}^x$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

练习:

1. 求解下列微分方程：(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\cot\dfrac{y^2}{x}$; (2)$2yy'=\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\dfrac{x^2+y^2}{x}-2x$.

解:（1）令$u=\dfrac{y^2}{x}$，则$y^2=xu$，于是，$2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

原方程化为$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\cot u$，移项后可得$\dfrac{\sin u}{\cos u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分你，可得$-\ln|\cos u|+\ln|C|=\ln|x|$，即$\ln|x\cos u|=\ln|C|$或$x\cos u=C$.

故原方程的通解为$x\cos\dfrac{y^2}{x}=C$，其中C为任意常数.

（2）令$u=\dfrac{x^2+y^2}{x}$，则$xu=x^2+y^2$，两边对x求导，可得$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

于是，原方程可化为$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x+\mathrm{e}^u+u-2x$，即$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u$，移项后，可得$\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分，得$-\mathrm{e}^{-u}=\ln|x|+C$。

故原方程的通解为$-\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{x}}=\ln|x|+C$，其中$C$为任意常数.

例 10. 已知$y''+p(x)y'-y\cos^2 x=0$有两个互为倒数的解，求$p(x)$及该方程的通解.

解: 不妨设方程$y''+p(x)y'-y\cos^2 x=0$的两个互为倒数的解为$y_1(x)$和$y_2(x)=\dfrac{1}{y_1(x)}$.

于是，$y_2'(x)=-\dfrac{y_1'(x)}{(y_1(x))^2}$，$y_2''(x)=-\dfrac{y_1''(x)y_1(x)-2(y_1'(x))^2}{(y_1(x))^3}$.

将 $y_2(x)=\dfrac{1}{y_1(x)}$ 代入方程，得

$$-\frac{y_1''(x)y_1(x)-2(y_1'(x))^2}{(y_1(x))^3}+p(x)(-\frac{y_1'(x)}{(y_1(x))^2})-\frac{1}{y_1(x)}\cos^2 x=0,$$

整理后，得

$$-y_1''(x)y_1(x)+2(y_1'(x))^2-p(x)y_1'(x)y_1(x)-y_1^2(x)\cos^2 x=0$$

或 $$-y_1(x)(y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+y_1(x)\cos^2 x)+2(y_1'(x))^2=0$$

因为 $y_1''+p(x)y_1'-y_1\cos^2 x=0$，故

$$-2y_1^2(x)\cos^2 x+2(y_1'(x))^2=0,$$

即 $$y_1'(x)\pm y_1(x)\cos x=0.$$

于是，$y_1(x)=Ce^{\mp\int\cos x\mathrm{d}x}=Ce^{\mp\sin x}$.

故 $y_1(x)=e^{\sin x}$ 和 $y_2(x)=e^{-\sin x}$ 都是方程的解.

由 $y_1(x)=e^{\sin x}$，可得 $y_1'(x)=e^{\sin x}\cos x$，$y_1''(x)=e^{\sin x}\cos^2 x-e^{\sin x}\sin x$，

代入方程，得 $e^{\sin x}\cos^2 x-e^{\sin x}\sin x+p(x)e^{\sin x}\cos x-e^{\sin x}\cos^2 x=0$，解得 $p(x)=\tan x$.

原方程的通解为 $y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

例 11. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xy}{x^2+y}$ 的通解.

解： 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{2y}x=\dfrac{1}{2x}$，或 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}x^2=1$.

令 $z=x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}z=1$，该方程的通解为

$$z=e^{-\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}[\int e^{\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]=y[\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y+C]=y[\ln|y|+C].$$

故原方程的通解为 $x^2=y[\ln|y|+C]$，其中 C 为任意常数.

例 12. 求微分方程 $y''+(4x+e^{2y})(y')^3=0\,(y'\neq 0)$ 的通解.

解: 注意到$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

因此，原方程改写成$\dfrac{y''}{(y')^3}+4x=-\mathrm{e}^{2y}$，于是，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-4x=\mathrm{e}^{2y}$.

该方程的特征方程为$r^2-4=0$，特征根为$r=\pm 2$..

则方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-4x=0$的通解为$x=C_1\mathrm{e}^{2y}+C_2\mathrm{e}^{-2y}$.

因为$\lambda=2$是单重特征根，故可设方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-4x=\mathrm{e}^{2y}$的一个特解为$x^*=ay\mathrm{e}^{2y}$，代入方程，可得

$$4ay\mathrm{e}^{2y}+4a\mathrm{e}^{2y}-4ay\mathrm{e}^{2y}=\mathrm{e}^{2y},$$

解得 $a=\dfrac{1}{4}$.

故原方程的通解为$x=C_1\mathrm{e}^{2y}+C_2\mathrm{e}^{-2y}+\dfrac{1}{4}y\mathrm{e}^{2y}$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

练习:

1. 求方程$y''+(x+\mathrm{e}^{2y})y'^3=0$的通解.

解: 注意到$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

因此，原方程改写成$\dfrac{y''}{(y')^3}+x=-\mathrm{e}^{2y}$，于是，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-x=\mathrm{e}^{2y}$.

该方程的特征方程为$r^2-1=0$，特征根为$r=\pm 1$.

则方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-x=0$的通解为$x=C_1\mathrm{e}^{y}+C_2\mathrm{e}^{-y}$.

因为$\lambda=2$不是特征根，故可设方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-x=\mathrm{e}^{2y}$的一个特解为$x^*=a\mathrm{e}^{2y}$，代入方程，可得

$$4ay\mathrm{e}^{2y}-a\mathrm{e}^{2y}=\mathrm{e}^{2y},$$

解得 $a=\dfrac{1}{3}$.

故原方程的通解为$x=C_1\mathrm{e}^{y}+C_2\mathrm{e}^{-y}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2y}$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

2. 设函数$y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数且$y'\neq 0$，$y=y(x)$的反函数$x=x(y)$满足微分方程

$\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$, 求原方程满足初始条件 $y(0)=0,\ \ y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的特解.

解: 注意到, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{(\dfrac{dx}{dy})^3}$.

原方程可改写成 $-\dfrac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{(\dfrac{dx}{dy})^3}-y=\sin x$, 即 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=\sin x$.

该方程的特征方程为 $r^2-1=0$, 特征根为 $r=\pm 1$.

方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

因为特征根是实数, 可设 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=\sin x$ 的特解为 $y^*=a\cos x+b\sin x$, 代入方程可得

$$-a\cos x-b\sin x-(a\cos x+b\sin x)=\sin x\ ,$$

解得 $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$.

于是, 原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$, 其中 $C_1,\ C_2$ 为任意常数.

由 $y(0)=0,\ \ y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 可得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

解得　　$C_1=1$, $C_2=-1$.

故所求特解为 $y=e^x-e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$.

例 13. 验证函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 是微分方程 $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ 的一个解, 并求该方程的通解.

解: 设 $y=\dfrac{\sin x}{x}$, 则

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ ,$$

$$y''=\frac{-x\sin x\cdot x^2-(x\cos x-\sin x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}\ .$$

于是， $y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}+\frac{2}{x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}=0$

故 $y=\frac{\sin x}{x}$ 是微分方程 $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ 的一个解.

为求出方程的另一个特解，用常数变易法。

令 $y=u(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$，于是，

$$y'=u'(x)\cdot\frac{\sin x}{x}+u(x)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$y''=u''(x)\frac{\sin x}{x}+2u'(x)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+u(x)\cdot\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3},$$

代入方程，得

$$u''(x)\frac{\sin x}{x}+2u'(x)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+u(x)\cdot\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$$
$$+\frac{2}{x}(u'(x)\frac{\sin x}{x}+u(x)\frac{x\cos x-\sin x}{x^2})+u(x)\frac{\sin x}{x}=0,$$

整理，得

$$u''(x)\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{x}\cos x\cdot u'(x)=0,$$

整理，得 $u''(x)+\frac{2\cos x}{\sin x}\cdot u'(x)=0$

记 $z=u'(x)$，原方程变成 $z'(x)+\frac{2\cos x}{\sin x}z(x)=0$，其通解为

$$z(x)=C_1\mathrm{e}^{-\int\frac{2\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{\sin^2 x}.$$

于是，$u'(x)=\frac{C_1}{\sin^2 x}$，故 $u(x)=-C_1\cot x+C_2$.

故 $y=\frac{\sin x}{x}(-C_1\cot x+C_2)$，即 $y=-C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}$.

原方程的通解为 $y=\frac{1}{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

例 14. 求微分方程 $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ 的通解.

解一： 方程对应的齐次方程 $y''+3y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，特征根为 $r_1=-1$， $r_2=-2$.

故 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

设方程的解为 $y=v_1(x)\mathrm{e}^{-x}+v_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$，则

$$y'=v_1'e^{-x}-v_1e^{-x}+v_2'e^{-2x}-2v_2e^{-2x}.$$

令 $v_1'e^{-x}+v_2'e^{-2x}=0$，于是 $y'=-v_1e^{-x}-2v_2e^{-2x}$，则

$$y''=-v_1'e^{-x}+v_1e^{-x}-2v_2'e^{-2x}+4v_2e^{-2x},$$

代入原方程，得

$$-v_1'e^{-x}+v_1e^{-x}-2v_2'e^{-2x}+4v_2e^{-2x}+3(-v_1e^{-x}-2v_2e^{-2x})+2(v_1e^{-x}+v_2e^{-2x})=\frac{1}{1+e^x},$$

整理后，得

$$-v_1'e^{-x}-2v_2'e^{-2x}=\frac{1}{1+e^x}.$$

联立方程，

$$\begin{cases} v_1'e^{-x}+v_2'e^{-2x}=0 \\ -v_1'e^{-x}-2v_2'e^{-2x}=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} v_1'=\dfrac{e^x}{1+e^x} \\ v_2'=-\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} \end{cases}.$$

两边积分，可得

$$\begin{cases} v_1=\ln(1+e^x)+C_1 \\ v_2=-e^x+\ln(1+e^x)+C_2 \end{cases}.$$

原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-e^{-x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)$, 其中 C_1，C_2 为任意常数.

解二： 令 $y'+2y=u$, 则原方程化为 $u'+u=\dfrac{1}{1+e^x}$.

其通解为
$$u=e^{-\int dx}[\int e^{\int dx}\frac{1}{1+e^x}dx+C_1]$$

$$=e^{-x}[\int\frac{e^x}{1+e^x}dx+C_1]=e^{-x}\ln(1+e^x)+C_1e^{-x}.$$

于是，$y'+2y=e^{-x}\ln(1+e^x)+C_1e^{-x}$，其通解为

$$y=e^{-\int 2dx}[\int[e^{-x}\ln(1+e^x)+C_1e^{-x}]e^{\int 2dx}dx+C_2]$$

$$=e^{-2x}[\int[e^{-x}\ln(1+e^x)+C_1e^{-x}]e^{2x}dx+C_2]$$

$$=C_2e^{-2x}+C_1e^{-x}+(e^{-2x}+e^{-x})\ln(1+e^x)-e^{-x}.$$

其中C_1，C_2为任意常数.

练习：

1. 解方程 $y''+y=\csc x$.

解： 方程对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r=\pm i$.

故 $y''+y=0$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

用常数变易法，令 $y''+y=\csc x$ 的解为 $y=v_1\cos x+v_2\sin x$，则

$$y'=v_1'\cos x-v_1\sin x+v_2'\sin x+v_2\cos x,$$

令 $v_1'\cos x+v_2'\sin x=0$，则 $y'=-v_1\sin x+v_2\cos x$，于是，

$$y''=-v_1'\sin x-v_1\cos x+v_2'\cos x-v_2\sin x,$$

代入方程，得

$$-v_1'\sin x-v_1\cos x+v_2'\cos x-v_2\sin x+v_1\cos x+v_2\sin x=\csc x,$$

整理后，得 $-v_1'\sin x+v_2'\cos x=\csc x$.

联立方程，$\begin{cases} v_1'\cos x+v_2'\sin x=0 \\ -v_1'\sin x+v_2'\cos x=\csc x \end{cases}$，解得 $\begin{cases} v_1'=-1 \\ v_2'=\cot x \end{cases}$.

两边积分，得 $\begin{cases} v_1=-x+C_1 \\ v_2=\ln|\sin x|+C_2 \end{cases}$.

故原方程的通解为 $y=-x\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|+C_1\cos x+C_2\sin x$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数.

2. 已知方程 $y''-2(1+\tan^2 x)y=0$ 有一个解 $y=\tan x$, 求其通解.

解： 用常数变易法. 设方程 $y''-2(1+\tan^2 x)y=0$ 的解为 $y=v(x)\tan x$.

则 $$y'=v'(x)\tan x+v(x)\sec^2 x,$$

$$y''=v''\tan x+2v'(x)\sec^2 x+2v(x)\sec^2 x\tan x.$$

代入方程，得

$$v''\tan x+2v'\sec^2 x+2v\sec^2 x\tan x-2\sec^2 x\cdot v\tan x=0,$$

即 $$v''\tan x+2v'\sec^2 x=0.$$

记 $p=v'$，则 $p'+\dfrac{2}{\sin x\cos x}p=0$，则

$$p=C_1\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x}=C_1\mathrm{e}^{-2\int\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}\tan x}=C_1\mathrm{e}^{-2\ln\tan x}=\frac{C_1}{\tan^2 x}.$$

由 $p=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\dfrac{C_1}{\tan^2 x}$，可知 $v=\displaystyle\int\frac{C_1}{\tan^2 x}\mathrm{d}x=C_1\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=C_1(-\cot x-x)+C_2$.

于是，原方程的通解为 $y=C_1(1+x\tan x)+C_2\tan x$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

3. 求方程 $(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$ 的通解.

解： 易知 $y=x$ 是该方程的一个特解.

设方程 $(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$ 的为 $y=u(x)x$，代入方程，可得

$$(x^2\ln x)(xu''+2u')-x(xu'+u)+xu=0,$$

整理后，得

$$x\ln x\cdot u''+(2\ln x-1)u'=0,$$

即 $$u''+\frac{2\ln x-1}{x\ln x}u'=0.$$

令 $p=u'$，则 $p'+\dfrac{2\ln x-1}{x\ln x}p=0$，于是，

$$p=C_1\mathrm{e}^{-\int(\frac{2}{x}-\frac{1}{x\ln x})\mathrm{d}x}=C_1\mathrm{e}^{-\ln x^2+\ln(\ln x)}=C_1\frac{\ln x}{x^2},$$

于是，$u'=C_1\dfrac{\ln x}{x^2}$，则 $u=C_1\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x+C_2=C_1(-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x})+C_2$.

于是，原方程的通解为 $y=C_1(\ln x+1)+C_2x$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

例 15. 求微分方程 $(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解： 记 $P(x,y)=(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}),\ Q(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(-\frac{x}{y^2})\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

所以，方程为全微分方程.

于是，$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^y \mathrm{d}y+\int_0^x (1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x$$

$$=x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}-1.$$

故原方程的通解为$x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C$，其中$C$为任意常数.

例 16. 求微分方程$(x^2-y^2-2y)\mathrm{d}x+(x^2+2x-y^2)\mathrm{d}y=0$的通解.

解： 将原方程改成写成$(x^2-y^2)\mathrm{d}(x+y)+2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$.

两边同除x^2-y^2，得

$$\mathrm{d}(x+y)+\frac{2}{x^2-y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0.$$

注意到，$\mathrm{d}\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|=\frac{2}{x^2-y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$，即$\mathrm{d}(x+y+\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|)=0$.

故原方程的通解为$x+y+\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|=C$，其中$C$为任意常数.

例 17. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\infty,+\infty)$，成立

$f(x+y)=f(x)\mathrm{e}^y+f(y)\mathrm{e}^x$，且$f'(0)$存在，$f'(0)=a\neq 0$，求$f(x)$.

解： 在等式$f(x+y)=f(x)\mathrm{e}^y+f(y)\mathrm{e}^x$中，令$x=y=0$，则可得$f(0)=0$.

于是，
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\mathrm{e}^{\Delta x}+f(\Delta x)\mathrm{e}^x-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}+\mathrm{e}^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}+\mathrm{e}^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=f(x)+\mathrm{e}^x f'(0),$$

故
$$f'(x)-f(x)=a\mathrm{e}^x.$$

有一阶线性非齐次方程的通解公式，得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}[\int a x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=ax\mathrm{e}^{x}+C\mathrm{e}^{x}.$$

由 $f(0)=0$, 得 $C=0$. 故 $f(x)=ax\mathrm{e}^{x}$.

练习

1. 设函数 $f(x)$ 可导，且对于任意的 $x, y, xy\neq 1$，都有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1-xy})$, 求 $f(x)$.

解: 令 $x=y=0$，由 $f(0)+f(0)=f(\frac{0+0}{1-0\times 0})=f(0)$，得 $f(0)=0$.

固定 y，方程 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1-xy})$ 两边对 x 求导，得

$$f'(x)=f'(\frac{x+y}{1-xy})\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=f'(\frac{x+y}{1-xy})\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$

固定 x，方程 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1-xy})$ 两边对 y 求导，得

$$f'(y)=f'(\frac{x+y}{1-xy})\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2}=f'(\frac{x+y}{1-xy})\cdot\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

于是，我们有 $\frac{f'(y)}{1+x^2}=\frac{f'(x)}{1+y^2}$，即 $(1+x^2)f'(x)=(1+y^2)f'(y)$.

由于 x, y 可任意选取，因此，对任意的 x，有 $(1+x^2)f'(x)=k$，其中 k 为常数.

因此，$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}$，两边积分，得 $f(x)=k\arctan x+C$.

因为 $f(0)=0$，得 $C=0$.

故所求函数为 $f(x)=k\arctan x$.

2. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且对于任意的 x, y，都有 $f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$, 求 $f(x)$.

解: 令 $x=y=0$，则 $f^2(0)-f^2(0)=f(0)f(0)$, 故 $f(0)=0$.

方程 $f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$ 对 x 求导，得

$$2f(x)f'(x)=f'(x+y)f(x-y)+f(x+y)f'(x-y).$$

上式两边对 y 求导，得

$$0=f''(x+y)f(x-y)-f'(x+y)f'(x-y)+f'(x+y)f'(x-y)-f(x+y)f''(x-y),$$

即 $$f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y)=0.$$

故 $$\frac{f''(x+y)}{f(x+y)}=\frac{f''(x-y)}{f(x-y)}.$$

因为 x, y 任意，因此，对于任意的 x，$\dfrac{f''(x)}{f(x)}=k$，k 为常数.

情形一　$k=0$ 时，$\dfrac{f''(x)}{f(x)}=0$，即 $f''(x)=0$，此时 $f(x)=ax+b$.

由 $f(0)=0$ 知 $b=0$，因此，$f(x)=ax$，a 为任意常数.

情形二　$k>0$ 时，$f''(x)-kf(x)=0$，则 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{k}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{k}x}$.

由 $f(0)=0$ 知，$C_2=-C_1$，则 $f(x)=C_1(\mathrm{e}^{\sqrt{k}x}-\mathrm{e}^{-\sqrt{k}x})$，其中 C_1 为任意常数.

情形三　$k<0$ 时，$f''(x)-kf(x)=0$，则 $f(x)=C_1\cos\sqrt{k}x+C_2\sin\sqrt{k}x$.

由 $f(0)=0$ 知，$C_1=0$，则 $f(x)=C_2\sin\sqrt{k}x$，其中 C_2 为任意常数.

例 18. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，其反函数存在且为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x-1)\mathrm{e}^x+1,$$

求 $f(x)$.

解： 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

由 $f(x)$ 的反函数存在，则 $f(x)$ 是单调的. 令 $x=0$，则 $\int_0^{f(0)} g(t)\mathrm{d}t=0$.

如果 $f(0)>0$，因为 $g(f(0))=0$，且 $g(t)$ 也是单调的，故 $g(t)$ 在区间 $(0, f(0))$ 上不变号，则 $\int_0^{f(0)} g(t)\mathrm{d}t\neq 0$.

同理，如果 $f(0)<0$，$\int_0^{f(0)} g(t)\mathrm{d}t\neq 0$.

故 $f(0)=0$.

方程 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x-1)\mathrm{e}^x+1$ 两边对 x 求导，则

$$g(f(x))f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x,$$

即 $$xf'(x)+f(x)=x\mathrm{e}^x.$$

于是，$(xf(x))' = xe^x$，故 $xf(x) = (x-1)e^x + C$，即当 $x \neq 0$ 时，$f(x) = \dfrac{(x-1)e^x + C}{x}$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)e^x + C}{x} = 0$.

于是，$\lim\limits_{x\to 0}((x-1)e^x + C) = 0$. 故 $C = 1$.

因此，$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x + C}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

此时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{1} = 0.$

例 19. 试确定函数 $u(t)$，使得 $\dfrac{du(t)}{dt} = u(t) + \int_0^1 u(s)ds, u(0) = 1.$

解： 记 $b = \int_0^1 u(s)ds$. 则 $\dfrac{du(t)}{dt} - u(t) = b$.

由一阶线性非齐次方程的通解公式，得

$$u(t) = e^{-\int(-1)dt}[\int be^{\int(-1)dt}dt + C] = e^t(-be^{-t} + C) = -b + Ce^t.$$

由 $u(0) = 1$，则 $1 = -b + C$，故 $b = 1 + A$.

于是，$u(t) = -b + (1+b)e^t$.

两边积分，则 $\int_0^1 u(t)dt = -b + (1+b)\int_0^1 e^t dt$，即 $b = -b + (1+b)(e-1)$.

故 $b = \dfrac{e-1}{3-e}$.

所以，$u(t) = \dfrac{2e^t - t + 1}{3-e}$.

例 20. 设 $f(x) = \cos x - \int_0^x uf(x-u)du$, 其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

解： 令 $x = 0$，则 $f(0) = \cos 0 = 1$.

作变换 $t = x - u$，则

$$f(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)f(t)dt = \cos x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt.$$

两边求导，得 $f'(x) = -\sin x - \int_0^x f(t)dt$，令 $x = 0$，得 $f'(0) = 0$.

再次求导，得 $f''(x) + f(x) = -\cos x$.

该方程的特征方程为$r^2+1=0$，特征根为$r=\pm i$.

对应的齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$的通解为$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

由于$\lambda=0$，$\omega=1$，$\lambda+i\omega=i$为特征根，故设其特解为$y^*=x(a\cos x+b\sin x)$.

代入方程，得

$$2(-a\sin x+b\cos x)+x(-a\cos x-b\sin x)+x(a\cos x+b\sin x)=-\cos x,$$

比较系数，得$a=0,\ b=-\dfrac{1}{2}$.

所以，$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\sin x$.

由 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，则$\begin{cases}C_1=1\\C_2=0\end{cases}$.

因此，$f(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x.$

例 21. 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

解: 令$u=t-x$，则

$$\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0(u+x)f(u)\mathrm{d}u=\int_{-x}^0 uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u,$$

因此，$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^0 uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u$.

方程两边对x求导，得

$$1=f(x)-(-x)f(-x)(-1)+\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)(-1),$$

整理后，得 $f(x)+\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u=1$.

令$x=0$，得 $f(0)=1$.

再次求导，得 $f'(x)-f(-x)(-1)=0$，即 $f'(x)+f(-x)=0$.

令$x=0$，得 $f'(0)=-f(0)=-1$.

再次求导，得 $f''(x)-f'(-x)=0$，即 $f''(x)+f(x)=0$.

特征方程为$r^2+1=0$，则$r=\pm i$.

则 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

由 $f(0)=1$， $f'(0)=-1$，有$\begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-1 \end{cases}$.

因此， $f(x)=\cos x-\sin x$.

练习

1. 已知 $f(x)$ 可微，且满足$\int_1^x \frac{f(t)}{t^3 f(t)+t}\mathrm{d}t = f(x)-1$, 求 $f(x)$.

解： 令 $x=1$，可得 $f(1)=1$.

方程$\int_1^x \frac{f(t)}{t^3 f(t)+t}\mathrm{d}t = f(x)-1$两边求导，得

$$\frac{f(x)}{x^3 f(x)+x} = f'(x)$$

记 $y=f(x)$，则方程可改写为$\frac{y}{x^3 y+x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=x^3$.

这是伯努利方程. 令$u=x^{-2}$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-2x^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，于是方程可化为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}u=-2$.

由一阶线性非齐次方程的通解公式，

$$u=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}[\int(-2)\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]=\frac{1}{y^2}(-\frac{2}{3}y^3+C),$$

即 $$x^{-2}=\frac{1}{y^2}(-\frac{2}{3}y^3+C).$$

由 $f(1)=1$，得$1=-\frac{2}{3}+C$，即$C=\frac{5}{3}$.

因此，$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{2}{3}f^3(x)=\frac{5}{3}$ （$f(x)$为隐函数）.

2. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $(1+x)y=\int_0^x[2y+(1+t)^2y''(t)]\mathrm{d}t-\ln(1+x)$ 所确定的，其中 $x\geq 0$ 且 $y'|_{x=0}=0$，试求函数 $y(x)$.

解： 令 $x=0$，可得 $y=0$.

方程$(1+x)y=\int_0^x[2y+(1+t)^2y''(t)]\mathrm{d}t-\ln(1+x)$ 两边对 x 求导数，得

$$(1+x)y'+y=2y+(1+x)^2y''-\frac{1}{1+x},$$

整理，得

$$(1+x)^2y''-(1+x)y'+y=\frac{1}{1+x}.$$

作换元$1+x=\mathrm{e}^u$，则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u},$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u})\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(-\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2})\mathrm{e}^{-u}$$

$$=-\mathrm{e}^{-2u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\mathrm{e}^{-2u}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}.$$

代入方程，得

$$-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+y=\mathrm{e}^{-u},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+y=\mathrm{e}^{-u}.$$

其通解为 $y=(C_1+C_2u)\mathrm{e}^u+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-u}$.

于是，$y=(C_1+C_2\ln(x+1))(1+x)+\frac{1}{4(1+x)}$.

由 $y(0)=y'(0)=0$，得$\begin{cases}0=C_1+\frac{1}{4}\\C_1+C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}C_1=-\frac{1}{4}\\C_2=\frac{1}{2}\end{cases}$.

故 $y(x)=[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(x+1)](1+x)+\frac{1}{4(1+x)}$.

3. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$，求 $f(x)$.

解: 令 $x=0$， $f'(0)=f(\frac{\pi}{2})$.

对 $f'(x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$两边求导，得

$$f''(x)=-f'(\frac{\pi}{2}-x)=-f(x),$$

即 $f''(x)+f(x)=0$，于是， $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

代入原方程，得$-C_1\sin x+C_2\cos x=C_1\sin x+C_2\cos x$，即$C_1=0$，所以，$f(x)=C_2\sin x$.

例 22. 设函数$f(u)$有连续的一阶导数，$f(2)=1$，且函数$z=xf(\frac{y}{x})+yf(\frac{y}{x})$满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2,\ x>0,\ y>0,$$

求z的表达式.

解： 由$z=xf(\frac{y}{x})+yf(\frac{y}{x})$求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})+xf'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+yf'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}+f(\frac{y}{x})+yf'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x},$$

代入方程$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2$，得

$$f(\frac{y}{x})+(x+y)f'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+(x+y)f'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}+f(\frac{y}{x})=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2,$$

即

$$2f(\frac{y}{x})+f'(\frac{y}{x})(1-\frac{y^2}{x^2})=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2.$$

令$u=\frac{y}{x}$，则方程化为$2f(u)+f'(u)(1-u^2)=u-u^2$，即

$$\begin{cases} f'(u)+\dfrac{2}{1-u^2}f(u)=\dfrac{u}{1+u},\ u\neq\pm1, \\ f(2)=1. \end{cases}.$$

由一阶线性非齐次方程的通解公式，有

$$\begin{aligned} f(u)&=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u}[\int\frac{u}{1+u}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+C] \\ &=\frac{u-1}{u+1}[\int\frac{u}{u+1}\frac{u+1}{u-1}\mathrm{d}u+C] \\ &=\frac{u-1}{u+1}[\int\frac{u}{u-1}\mathrm{d}u+C] \\ &=\frac{u-1}{u+1}[\int(1+\frac{1}{u-1})\mathrm{d}u+C] \\ &=\frac{u-1}{u+1}[u+\ln|u-1|+C]. \end{aligned}$$

由$f(2)=1$，则$\frac{1}{3}[2+C]=1$，解得$C=1$.

故 $$f(u)=\frac{u-1}{u+1}[u+\ln|u-1|+1]$$

故 $$z=(x+y)\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}(\frac{y}{x}+\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|+1),$$

即 $$z=(y-x)(\frac{y}{x}+\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|+1).$$

练习：

1. 设 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数，且满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的微分方程，并求其通解.

解： $$y'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)+\mathrm{e}^{-2x}[f_u(x,x)+f_v(x,x)].$$

因为 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，故 $f_u(x,x)+f_v(x,x)=x^2$，于是，

$$y'(x)=-2y(x)+x^2\mathrm{e}^{-2x}.$$

因此，$y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的微分方程为 $y'+2y=x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

由一阶线性非齐次方程的通解公式，有

$$y=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}[\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$
$$=\mathrm{e}^{-2x}[\int x^2\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{-2x}(\frac{1}{3}x^3+C).$$

因此，所求的通解为 $y=\frac{1}{3}x^3\mathrm{e}^{-2x}+C\mathrm{e}^{-2x}$，其中 C 为任意常数.

2. 设一元函数 $u=f(r)$ 当 $r>0$ 时具有连续的二阶导数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，又 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 满足 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$，试求 $u=f(r)$ 的表达式.

解： 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$，同理，$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$.

于是，

$$u_x=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r),$$

$$u_{xx}=\frac{r-x\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}f'(r)+\frac{x}{r}f''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

同理，$u_{yy}=\dfrac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\dfrac{y^2}{r^2}f''(r)$，$u_{zz}=\dfrac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\dfrac{z^2}{r^2}f''(r)$.

由$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$，可得

$$\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}f'(r)+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}f''(r)=0,$$

即 $$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0.$$

由一阶线性齐次方程的通解公式，得 $f'(r)=C_1\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{r}\mathrm{d}r}=\dfrac{C_1}{r^2}$，

再次积分，得 $f(r)=-\dfrac{C_1}{r}+C_2$.

由 $f(1)=0$， $f'(1)=1$，有$\begin{cases}-C_1+C_2=0\\ C_1=1\end{cases}$，解得$C_1=C_2=1$，故 $f(r)=1-\dfrac{1}{r}$.

例 23. 设初值问题$\begin{cases}x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(2x^2+1)y=x^2,x\geq 1,\\ y(1)=y_1.\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

解： 由一阶线性非齐次方程的通解公式，有

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2x^2+1}{x}\mathrm{d}x}[\int x\mathrm{e}^{-\int\frac{2x^2+1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$
$$=x\mathrm{e}^{x^2}[\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C].$$

记$F(x)$为函数e^{-x^2}的原函数，则$y=x\mathrm{e}^{x^2}[F(x)+C]$.

由$y(1)=y_1$，有$y_1=\mathrm{e}[F(1)+C]$，则$y_1=\mathrm{e}[F(1)+C]C=\dfrac{y_1}{\mathrm{e}}-F(1)$，

因此，$y=x\mathrm{e}^{x^2}[F(x)-F(1)+\dfrac{y_1}{\mathrm{e}}]=x\mathrm{e}^{x^2}[\int_1^x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t+\dfrac{y_1}{\mathrm{e}}]$.

因为 $$\lim_{x\to+\infty}(\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+y_1\mathrm{e}^{-1})=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+y_1\mathrm{e}^{-1}$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+y_1\mathrm{e}^{-1}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+y_1\mathrm{e}^{-1},$$

如果$y_1\neq\mathrm{e}(\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2})$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}(\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+y_1\mathrm{e}^{-1})\neq 0$，而$\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{x^2}=+\infty$，故

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\infty.$$

如果 $y_1=\mathrm{e}(\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{\pi}}{2})$，则由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t+\frac{y_1}{\mathrm{e}}}{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x^2}-2\mathrm{e}^{-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\frac{1}{x^2}-2}=-\frac{1}{2}.$$

例 24. 设 $y(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上存在连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y'(x)+y(x))=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

解： 记 $q(x)=y'(x)+y(x)$，任取一点 $x_0\in[0,+\infty)$，记 $y_0=y(x_0)$.

于是，由一阶线性非齐次方程的通解公式，有

$$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}[\int q(x)\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{-x}[\int q(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C].$$

记 $F(x)$ 为 $q(x)\mathrm{e}^x$ 的原函数，则 $y=\mathrm{e}^{-x}[F(x)+C]$.

由 $y_0=y(x_0)$ 可得，$y_0=\mathrm{e}^{-x_0}[F(x_0)+C]$，则 $C=y_0\mathrm{e}^{x_0}-F(x_0)$.

因此，$\quad y=\mathrm{e}^{-x}[F(x)+y_0\mathrm{e}^{x_0}-F(x_0)]$，

即 $\quad y=\mathrm{e}^{-x}[\int_{x_0}^x q(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+y_0\mathrm{e}^{x_0}]$.

于是，利用广义的洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^x q(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+y_0\mathrm{e}^{x_0}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{q(x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty} q(x)=0.$$

例 25. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续且有界，试证明：微分方程 $y''+5y'+4y=f(x)$ 的任意一个解在 $[a,+\infty)$ 上有界.

解： 对应的齐次方程 $y''+5y'+4y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}$.

用常数变易法求 $y''+5y'+4y=f(x)$ 的解.

设方程 $y''+5y'+4y=f(x)$ 的解为 $y=v_1(x)\mathrm{e}^{-x}+v_2(x)\mathrm{e}^{-4x}$，于是，

$$y'=v_1'\mathrm{e}^{-x}-v_1\mathrm{e}^{-x}+v_2'\mathrm{e}^{-4x}-4v_2\mathrm{e}^{-4x},$$

令 $v_1'\mathrm{e}^{-x}+v_2'\mathrm{e}^{-4x}=0$，则 $y'=-v_1\mathrm{e}^{-x}-4v_2\mathrm{e}^{-4x}$，

$$y''=v_1\mathrm{e}^{-x}-v_1'\mathrm{e}^{-x}+16v_2\mathrm{e}^{-4x}-4v_2'\mathrm{e}^{-4x},$$

代入方程 $y''+5y'+4y=f(x)$，得

$$v_1\mathrm{e}^{-x}-v_1'\mathrm{e}^{-x}+16v_2\mathrm{e}^{-4x}-4v_2'\mathrm{e}^{-4x}+5(-v_1\mathrm{e}^{-x}-4v_2\mathrm{e}^{-4x})+4(v_1\mathrm{e}^{-x}+v_2\mathrm{e}^{-4x})=f(x),$$

化简得

$$v_1'\mathrm{e}^{-x}+4v_2'\mathrm{e}^{-4x}=-f(x).$$

求解方程组

$$\begin{cases} v_1'\mathrm{e}^{-x}+v_2'\mathrm{e}^{-4x}=0 \\ v_1'\mathrm{e}^{-x}+4v_2'\mathrm{e}^{-4x}=-f(x) \end{cases},$$

可得 $$\begin{cases} v_1'=\dfrac{1}{3}f(x)\mathrm{e}^{x} \\ v_2'=-\dfrac{1}{3}f(x)\mathrm{e}^{4x} \end{cases}.$$

于是，$$\begin{cases} v_1=\dfrac{1}{3}\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C_1 \\ v_2=-\dfrac{1}{3}\int f(x)\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C_2 \end{cases}.$$

原方程的通解为

$$y=[\frac{1}{3}\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C_1]\mathrm{e}^{-x}+[-\frac{1}{3}\int f(x)\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C_2]\mathrm{e}^{-4x}.$$

注意到，$F_1(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$ 为 $f(x)\mathrm{e}^{x}$ 的一个原函数，$F_2(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$ 是 $f(x)\mathrm{e}^{4x}$ 的一个原函数.

则 $$y=[\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C_1]\mathrm{e}^{-x}+[-\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C_2]\mathrm{e}^{-4x}.$$

设 x_0 为 $[a,+\infty)$ 上任意一点，且 $y(x_0)=y_0$， $y'(x_0)=y_0'$，则

$$y_0=C_1\mathrm{e}^{-x_0}+C_2\mathrm{e}^{-4x_0},$$

$$y_0'=-C_1\mathrm{e}^{-x_0}-4C_2\mathrm{e}^{-4x_0},$$

于是，$C_1=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x_0}(4y_0+y_0')$，$C_2=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{4x_0}(y_0+y_0')$.

于是， $$y(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4x}(y_0+y_0')\mathrm{e}^{4x_0}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(4y_0+y_0')\mathrm{e}^{x_0}$$

$$-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$$

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续且有界，设 $|f(x)|\le M, x\in[a,+\infty)$，于是，

当 $x>x_0$ 时，

$$\left|\mathrm{e}^{-4x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t\right|\le \mathrm{e}^{-4x}\int_{x_0}^{x}\left|f(t)\mathrm{e}^{4t}\right|\mathrm{d}t\le M\mathrm{e}^{-4x}\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t$$

$$=M\mathrm{e}^{-4x}\cdot\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{4x_0})=\frac{M}{4}(1-\mathrm{e}^{4(x_0-x)})\le\frac{M}{4},$$

在有界闭区间 $[a,x_0]$ 上，$\mathrm{e}^{-4x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t$ 为连续函数，故有界.

因此，$\mathrm{e}^{-4x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

同理，$\mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

故微分方程 $y''+5y'+4y=f(x)$ 的任意一个解在 $[a,+\infty)$ 上有界.

例 26. 设函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$q(x)<0$，并设 $y=y(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 满足初始条件 $y(a)=y(b)=0$ 的解，试证明：$y(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

证明： 用反证法. 设 $y(x)\not\equiv 0, x\in[a,b]$，即存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $y(x_1)\ne 0$.

不妨设 $y(x_1)>0$，那么 $y(x)$ 在 (a,b) 上取得最大值 $M>0$，设 x_0 为最大值点.

因此，有 $y'(x_0)=0$，$y(x_0)=M>0$.

又因为 $y''(x_0)+p(x_0)y'(x_0)+q(x_0)y(x_0)=0$，则 $y''(x_0)=-q(x_0)y(x_0)>0$.

于是 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极小值，矛盾.

因此，不存在点 $x_1\in(a,b)$，使得 $y(x_1)>0$.

类似地，可以证明，不存在点 $x_1\in(a,b)$，使得 $y(x_1)<0$.

故 $y(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

例 27. 设 $y=y(x)$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 的任意一个解，试证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$ 都存在.

证明： 因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}>0$，所以，$y=y(x)$ 单调增加.

任取一点 x_0，当 $x>x_0$ 时，对方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 两边从 x_0 到 x 积分，得

$$y(x)=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$<y(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=y(x_0)+\arctan x-\arctan x_0$$

$$<y(x_0)+\frac{\pi}{2}-\arctan x_0\,.$$

即函数 $y(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加，且有上界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$ 存在.

当 $x<x_0$ 时，

$$y(x)=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$>y(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=y(x_0)+\arctan x-\arctan x_0$$

$$>y(x_0)-\frac{\pi}{2}-\arctan x_0\,.$$

即函数 $y(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上有下界， $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$ 存在.