第一节　　　数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质
- 课堂练习
- 小结　布置作业

在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量X的概率分布，那么X的全部概率特征也就知道了.

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的. 而在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了.

因此，在对随机变量的研究中，确定某些数字特征是重要的．

在这些数字特征中，最常用的是

数学期望、方差、协方差和相关系数

概率论源于赌博？

- 15世纪末到16世纪初，赌博在欧洲盛行，于是有些数学家开始着手探讨赌博中出现各种情况的机遇或胜率，赌博中的这些计算方法，后来演变成了概率的古典定义.
- **1654年，巴黎一个名叫梅雷的赌徒要求当时著名的数学家帕斯卡解决“赌注分配问题”**

赌注分配问题

- 例如：甲、乙二人赌博，各出赌注30元，共60元，每局甲、乙胜的机会均等，都是1/2。约定：谁先胜满3局则他赢得全部赌注60元，现已赌完3局，甲2胜1负，而因故中断赌情，问这60元赌注该如何分给2人，才算公平？
  - 按2：1分配，即甲得40元，乙得20元？
  - ……
  - 正确的分法应考虑到如在这基础上继续赌下去，甲、乙最终获胜的机会如何
    - 至多再赌2局即可分出胜负，这2局有4种可能结果：甲甲、甲乙、乙甲、乙乙。前3种情况都是甲最后取胜，只有最后一种情况才是乙取胜，二者之比为3：1，故赌注的公平分配应按3：1的比例，即甲得45元，乙15元。
  - 引出了期望的概念，也就是现在常说的预期。

每局甲、乙胜的机会均等,

甲、乙最终获胜的可能性大小之比为 **3:1**

即甲应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而乙只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, 甲能“**期望**”得到的数目应为

$$60 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 45(\text{元}),$$

而乙能“**期望**”得到的数目, 则为

$$60 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 15(\text{元}),$$

若设随机变量 X 为：在甲胜2局B 胜1局的前提下, 继续赌下去甲最终所得的赌金.

则X 所取可能值为: **60** **0**

其概率分别为: $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

因而甲期望所得的赌金即为X的 “**期望**” 值,

等于 $60\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=45$(元).

即为 X **的可能值与其概率之积的累加.**

引例2　射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\dfrac{n_k}{n}$	$\dfrac{2}{90}$	$\dfrac{13}{90}$	$\dfrac{15}{90}$	$\dfrac{10}{90}$	$\dfrac{20}{90}$	$\dfrac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解　平均射中环数$=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}$$

$$+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

平均射中环数 $= \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\dfrac{n_k}{n}}$ 以频率为权的加权平均

随机波动

频率随机波动

“平均射中环数” 的稳定值 $=?$

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数” 等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

以概率为权的加权平均

定义1　设X是离散型随机变量，它的分布率是:

$$P\{X=x_k\}=p_k\ ,\ k=1,2,\ldots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量X的数学期望，记为 $E(X)$，

即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

请注意 :离散型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的级数的和.数学期望简称期望，又称为均值。

若$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ 收敛，则称$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 绝对收敛；

若 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 收敛，但 $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ 不收敛，则称 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 条件收敛；

若 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 绝对收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$一定收敛；

若 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 求和唯一.

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同 , 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变 , 之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值，它不应随可能值的排列次序而改变.

(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同. 当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时 , X 的期望值与算术平均值相等.

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙二人进行打靶，所得分数分别记为X_1, X_2，它们的分布率分别为

X_1	0	1	2
p_k	0	0.2	0.8

X_2	0	1	2
p_k	0.6	0.3	0.1

解：我们先来算X_1和X_2的数学期望，

$$E(X_1) = 0\times 0 + 1\times 0.2 + 2\times 0.8 = 1.8(\text{分})$$

$$E(X_2) = 0\times 0.6 + 1\times 0.3 + 2\times 0.1 = 0.5(\text{分})$$

实例2 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个,奖金各 5 千元; 三等奖 10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各100元; 五等奖1000个, 奖金各10 元.每张彩票的成本费为 0.3 元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X)=10000\times\frac{1}{10^5}+5000\times\frac{2}{10^5}+\cdots+0\times p_0$$

$$=0.5(\text{元}),$$

每张彩票平均可赚

$$2-0.5-0.3=1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000\times1.2=120000(\text{元}).$$

P93例5 分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验 N 个人的血，可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去化验，这就需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组，把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验，如果这混合血液呈阴性反应，就说明 k 个人的血都呈阴性反应，这样，这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性，则再对这 k 个人的血液分别进行化验，这样，k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p,且这些人的化验反应是相互独立的.试说明当p较小时,选取适当的k,按第二种方法可以减少化验的次数.并说明k取什么值时最适宜.

解 由于血液呈阳性反应的概率为 p,

所以血液呈阴性反应的概率为 $q=1-p$,

因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k,

k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1-q^k$.

设以 k 个人为一组时，组内每人的血化验的次数为 X，则 X 为一随机变量，且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+(1+\frac{1}{k})(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.

因此,只要选择 k 使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1,$$

则 N 个人平均需化验的次数 $< N$.

当 p 固定时,选取 k 使得

$$L=1-q^k+\frac{1}{k}$$ 小于1且取到最小值,

此时可得到最好的分组 方法.

P94例6 设$X \sim \pi(\lambda)$,求$E(X)$.

解 X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

麦克劳林展开式

X的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

即$E(X)=\lambda$

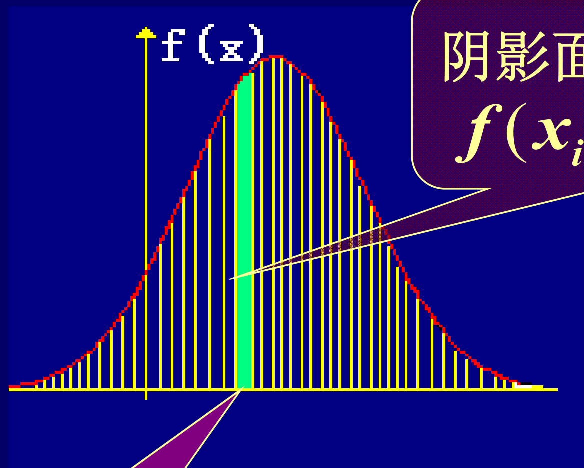
二、连续型随机变量的数学期望

设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$,在数轴上取很密的分点$x_0<x_1<x_2<\ldots$,则X落在小区间$[x_i, x_{i+1})$的概率是

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$= f(x_i)\Delta x_i$$



阴影面积近似为 $f(x_i)\Delta x_i$

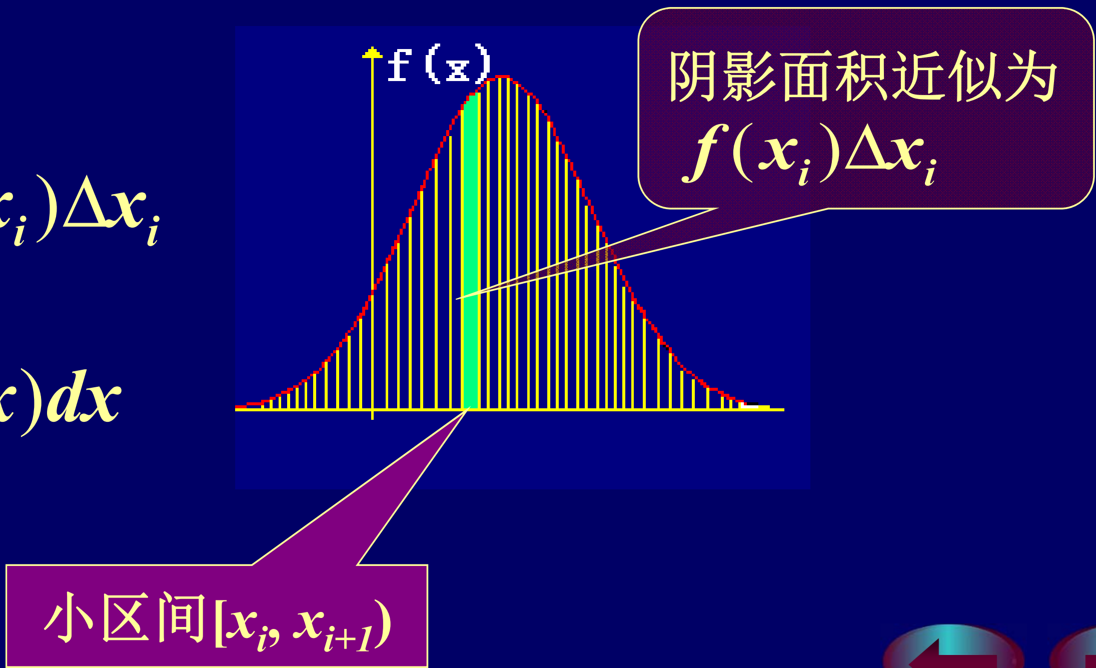
小区间$[x_i, x_{i+1})$

由于x_i与x_{i+1}很接近, 所以区间$[x_i, x_{i+1})$中的值可以用x_i来近似代替.

因此X与以概率 $f(x_i)\Delta x_i$ 取值x_i的离散型$r.v$近似, 该离散型$r.v$ 的数学期望是

$$\sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$$

这正是 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ 的渐近和式.



由此启发我们引进如下定义.

定义2　设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$,
如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛,则称此积分值为X的数学期望, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

请注意 : 连续型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的积分.

一些重要分布的数学期望

0-1分布	p	$E(X)=p$
二项分布	$b(n,p)$	$E(X)=np$
泊松分布	$\pi(\lambda)$	$E(X)=\lambda$
均匀分布	$U(a,b)$	$E(X)=(a+b)/2$
指数分布	$E(1/\theta)$	$E(X)=\theta$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$E(X)=\mu$

【要求】熟记结论，能熟练验证。

1. 0-1分布

$$\begin{array}{c|cc} X & 1 & 0 \\ \hline P & p & 1-p \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{EX=p}$$

2. 二项分布*B(n, p)*

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}，\quad k=0,1,\ldots n$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{令 l=k-1}}\ np\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^{l}p^l(1-p)^{n-1-l}$$

$$=np$$

3. 泊松分布

$$X \sim P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda;$$

$$\boldsymbol{e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}$$

麦克劳林展开式

4. 均匀分布U(a, b)

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$E(X)=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_a^b\right)=\frac{a+b}{2}$$

5. 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_0^{\infty}xde^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

分部积分法

6. 正态分布N(μ, σ²)

$$X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}}$$

$$\underline{\underline{令 t = \frac{x-\mu}{\sigma}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt;$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt$$

$$= \mu$$

三、随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说$g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

一种方法是，因为$g(X)$也是随机变量，故应有概率分布，它的分布可以由已知的X的分布求出来. 一旦我们知道了$g(X)$的分布，就可以按照期望的定义把$E[g(X)]$计算出来.

使用这种方法必须先求出随机变量函数$g(X)$的分布，一般是比较复杂的 .

那么是否可以不先求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$呢？

下面的定理指出，答案是肯定的.

【定理】设Y是随机变量X的函数:$Y=g(X)$ (g是连续函数)

(1) 当X为离散型时,它的分布率为$P(X=x_k)=p_k$;

$(k=1,2,\cdots)$,若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 当X为连续型时,它的密度函数为$f(x)$.若

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k, & X\text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X\text{连续型}\end{cases}$$

该公式的重要性在于: 当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X的分布就可以了. 这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

上述定理还可以推广到两个或两个以上随 机变量的函数的情况。

设Z是随机变量X,Y的函数$Z=g(X,Y)$(g是连续函数)

Z是一维随机变量,则

(1)若(X,Y)是二维连续型,概率密度为$f(x,y)$,则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

(2) 若(X,Y)是二维离散型,概率分布为

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{\text{ij}}$$

这里假定上两式右边的积分或级数都绝对收敛.

【P96例10】

某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量。他们估计出售一件产品可获利m元，而积压一件产品导致n元的损失。再者，他们预测销售量Y(件)服从指数分布，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-y/\theta}, & y>0, \\ 0, & y\le 0.\end{cases}\quad \theta>0,$$

问若要获得利润的数学期望最大，应生产多少件产品(m,n,θ均为已知)?

解： 设生产 x 件,则获利 Q 是 x 的函数：

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & \text{若 } Y < x, \\ mx, & \text{若 } Y \geq x. \end{cases}$$

显然，Q是Y的函数，也是一个随机变量

$$E(Q) = \int_0^{+\infty} Q f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^{x} [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y + \int_x^{+\infty} mx \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= (m + n)\theta - (m + n)\theta \mathrm{e}^{-x/\theta} - nx,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} E(Q) = (m + n)\mathrm{e}^{-x/\theta} - n = 0,$ 得 $x = -\theta \ln(\dfrac{n}{m + n}).$

又 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} E(Q) = \dfrac{-(m + n)}{\theta} \mathrm{e}^{-x/\theta} < 0,$

因此，当 $x = -\theta \ln(\dfrac{n}{m + n})$ 时，$E(Q)$ 取得最大值.

四、数学期望的性质

1. 设C是常数，则$E(C)=C$;

2. 若k是常数，则$E(kX)=kE(X)$;

3. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;

推广： $$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

请注意:
由$E(XY)=E(X)E(Y)$不一定能推出X,Y独立

4. 设X、Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$;

推广： $$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$（诸X_i相互独立时）

性质1,2请同学自己证明，我们来证性质3和4。

证　设二维随机变量（X,Y）的概率密度$f(x,y)$.其边缘概率密度为$f_X(x), f_Y(y)$,于是有

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,(-\infty<x<\infty)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx,(-\infty<x<\infty)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

性质3得证。

又若X,Y相互独立,

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\bullet\int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y)$$ 性质4得证

五、数学期望性质的应用

【例】 求二项分布的数学期望

若 $X\sim B(n,p)$,

则X表示n重贝努里试验中的“成功” 次数.

现在我们来求X的数学期望 .

【解法1：期望的定义式】 见PPT P37

【解法2：期望性质3】

$X\sim B(n,p)$，则X表示n重贝努里试验中的“成功” 次数.

若设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$ $i=1,2, \ldots, n$

则 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

因为 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

可见，服从参数为n和p的二项分布的随机变量X的数学期望是 np.

【例】把数字1,2,…,n任意地排成一列，如果数字k恰好出现在第k个位置上，则称为一个巧合，求巧合个数的数学期望.

解: 设巧合个数为X,　　引入

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{数字}k\text{恰好出现在第}k\text{个位置上}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad k=1,2,\dots,n$$

则 $$X=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

由于 $$E(X_k)=P(X_k=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

故 $$E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

【P99 例12】一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以X表示停车的次数，求(X)。(设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立)

解　引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{在第}i\text{站没有人下车} \\ 1 & \text{在第}i\text{站有人下车} \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots 10$$

易知　$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

按题意

$$P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i=1,2,\cdots 10$$

由此 $$E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i=1,2,\cdots 10$$

进而 $$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$
$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784\text{次}$$

本题是将X分解成数个随机变量之和,然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望的和来求数学期望的,此方法具有一定的意义.

七、小结

这一讲，我们介绍了随机变量的数学期望，它反映了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

接下来的一讲中，我们将向大家介绍随机变量另一个重要的数字特征：

方差