四、求函数项级数的和函数

例 1． 设$a_0=4$，$a_1=1, a_{n-2}=n(n-1)a_n, (n\geq 2)$，

（1）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$s(x)$；（2）求$s(x)$的极值。

解：（1）设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$s(x)$，其收敛区间为$(-R,R)$。

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=4+x+2x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots,\quad s(0)=4,\quad s'(0)=1$$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$s''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s(x)$$

所以 $s''(x)=s(x)$，解此二阶常系数线性齐次方程，其通解为

$$s(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

代入初值$s(0)=4$，$s'(0)=1$得 $s(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$，$x\in(-R,R)$；

（2）$s'(x)=\frac{5}{2}e^x-\frac{3}{2}e^{-x}, s''(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}>0,$

令$s'(x)=\frac{5}{2}e^x-\frac{3}{2}e^{-x}=0,$得惟一驻点$x=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5},$且$s''(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5})>0$，

和函数为$s(x)$在$x=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$处取极小值。

例 2. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的系数满足$a_0=2,\ na_n=a_{n-1}+n-1, n\geq 1$，求此幂级数的和函数$S(x)$.

解：设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，由条件$na_n=a_{n-1}+n-1$，有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=S(x)+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=S(x)+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=S(x)+x(\frac{x}{1-x})'=S(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

解此一阶线性微分方程，得$S(x)=ce^x+\frac{1}{1-x}$. 由$S(0)=2$，得$c=1$，故$S(x)=e^x+\frac{1}{1-x}$.

例 3. 设$a_0=1, a_1=-2, a_2=\frac{7}{2}$，当$n\geq 2$时，有$a_{n+1}=-(1+\frac{1}{n+1})a_n$，

(1) 证明：当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$收敛；

（2）求上述幂级数在$(-1,1)$内的和函数$S(x)$。

解:（1）$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})=1$, 所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1$，因此当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$收敛。

（2）$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_n x^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_n x^n$

当$n\geq 2$时，由

$$a_{n+1}=-(1+\frac{1}{n+1})a_n=(-1)\frac{n+2}{n+1}a_n=(-1)^2\frac{n+2}{n+1}\frac{n+1}{n}a_{n-1}$$

$$=(-1)^2\frac{n+2}{n}a_{n-1}=(-1)^3\frac{n+2}{n}\frac{n}{n-1}a_{n-2}=(-1)^3\frac{n+2}{n-1}a_{n-2}$$

$$=\cdots=(-1)^{n-1}\frac{n+2}{3}a_2=(-1)^{n-1}\frac{7}{6}(n+2).$$

即 $a_n=(-1)^{n-2}\frac{7}{6}(n+1)=(-1)^n\frac{7}{6}(n+1),\quad n\geq 3$

$$S(x)=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_n x^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{6}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

其中 $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(x^{n+1})'=[\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}]'=-[\frac{x^4}{1+x}]'$

$$=-\frac{4x^3+3x^4}{(1+x)^2}$$

故 $S(x)=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{4x^3+3x^4}{(1+x)^2}$.

例4. 证明：$x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7+\cdots=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

证明：记 $S(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7+\cdots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，则

$$S(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1-1)(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

即 $$S(x)=x+x^2S(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

两边求导，得

$$S'(x)=1+2xS(x)+x^2S'(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}$$

$$=1+2xS(x)+x^2S'(x)-xS(x),$$

则 $S'(x)=1+xS(x)+x^2S'(x)$，整理得

$$S'(x)-\frac{x}{1-x^2}S(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

解得 $$S(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}[\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\arcsin x+C]$$

注意到 $S(0)=0$，故 $C=0$，所以 $S(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

五、其他例子

例1. 设函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}, 0\le x\le 1.$

(1)证明：$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$,

(2)计算$\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

解：（1）由于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$在$[-1,1]$上收敛，所以$f(x)$，$f(1-x)$在$[0,1]$上都连续，且在$(0,1)$内可导.

对$\forall x\in(0,1)$，有

$$f'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

将上式中x的换成$1-x$得，

$$f'(1-x)=-\frac{1}{1-x}\ln(x),$$

记$F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$，则$F(x)$在$(0,1)$内可导，且

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=0,\ x\in(0,1)$$

从而$F(x)=C$，$x\in(0,1)$，即

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=C,x\in(0,1),$$

由于$f(x)$，$f(1-x)$在$[0,1]$上都连续，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0,\quad \lim_{x\to0^+}f(1-x)=f(1)=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\lim_{x\to0^+}\ln x\ln(1-x)=-\lim_{x\to0^+}x\ln x=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0.$$

则$\lim_{x\to0^+}F(x)=\frac{\pi^2}{6}$，故$C=\frac{\pi^2}{6}$，

所以，$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6},x\in(0,1)$.

（2）令$2-x=t$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -(\ln 2)^2 - \int_1^2 \frac{\ln(1-\frac{t}{2})}{t}\mathrm{d}t$$

$$= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{2^n n}\mathrm{d}t$$

$$= -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}.$$

由 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}, x\in(0,1)$ 可得 $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2$.

所以，$\int_0^1 \frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -(\ln 2)^2+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\ln^2 2 = -\frac{1}{2}\ln^2 2+\frac{\pi^2}{12}$.

例2. 求$(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)^3$中$x^{20}$的系数.

解：当$|x|<1$时，

$$(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)^3 = (\frac{x}{1-x})^3 = \frac{1}{2}x^3(\frac{1}{1-x})''$$

$$= \frac{1}{2}x^3(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'' = \frac{1}{2}x^3\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n+1}$$

所以x^{20}的系数为$\frac{1}{2}\times 19\times 18 = 171$.

例3. 利用级数求广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解：当$x>0$时，$\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = x\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{e}^{-x})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x\mathrm{e}^{-(n+1)x}$.

所以，
$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(n+1)x}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

例4. 证明：$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

证明：因为

$$\frac{1}{x^x} = \mathrm{e}^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x\ln x)^n$$

所以，$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1(-x\ln x)^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x$.

令 $\ln x = -t$，则 $x = \mathrm{e}^{-t}$，故

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-nt}(-t)^n(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$$

令 $u = (n+1)t$，则

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-nt}(-t)^n(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}},$$

所以，$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

例1. 试求出所有的可微函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$，满足 $f'(\frac{1}{x}) = \frac{x}{f(x)}\ (x>0)$.

提示： 令 $F(x) = f(x)f(\frac{1}{x})$，由已知条件，可得

$$F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C,$$

从而 $f(\frac{1}{x}) = \frac{C}{f(x)}$.

两边求导，得 $f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{Cf'(x)}{f^2(x)}$，即 $f'(x) = \frac{1}{Cx}f(x)$，解得

$$f(x) = C_1\mathrm{e}^{\int\frac{1}{Cx}\mathrm{d}x} = C_1 x^{\frac{1}{C}}.$$

由 $f(\frac{1}{x}) = \frac{C}{f(x)}$ 令 $x=1$，得 $f(1) = \sqrt{C}$，故 $C_1 = \sqrt{C}$，从而 $f(x) = \sqrt{C}x^{\frac{1}{C}}$.

例2. 求满足函数方程 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$

的可微函数 $f(x)$.

解：见 PPT

例3. 求解微分方程 $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}$.

解：已知 $y''+3y'+2y=0$ 的通解 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$，应用常数变易法求解.

参看书上的做法。

例4. 求解微分方程$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$的通解.

解：易看出方程有一特解 $y=x$，利用常数变易法求解。参看书上的解法.

例 5. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求：（1） $f(x)$ 的表达式；　（2） $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

解：（1）由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf(x^2+y^2)+2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(x^2+y^2)+2(5x^2+y^2)f'(x^2+y^2)+4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf(x^2+y^2)+2y(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(x^2+y^2)+2(x^2+5y^2)f'(x^2+y^2)+4y^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)$$

由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$$f(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2f''(x^2+y^2)=0$$

令 $u=x^2+y^2, v=f(u)$，则

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0 \quad （欧拉方程）$$

再令 $u=\mathrm{e}^t$，则方程转化为二阶常系数线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0$，

其通解为 $v=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{-t}=\dfrac{1}{u}(c_1+c_2\ln u)$，即

$$f(u)=\frac{1}{u}(c_1+c_2\ln u).$$

由 $f(1)=0, f'(1)=1$ 得 $c_1=0, c_2=1$，所以 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, (x\geq 1)$

（2）由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，且

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}\begin{cases} >0, & 1<x<\mathrm{e}, \\ =0, & x=\mathrm{e}, \\ <0, & x>\mathrm{e} \end{cases},.$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值为 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例6. 如果对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 Ω，都有 $\oiint\limits_{\Omega} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在，求 $f(x)$.

解：利用高斯公式，得

$$\iiint\limits_V[f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

其中 V 是由 Ω 所围成的区域.

由 V 的任意性，知 $(1-x)f(x)+xf'(x)-\mathrm{e}^{2x}=0$，即

$$f'(x)+\frac{1-x}{x}f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.$$

解得 $$f(x)=\mathrm{e}^{\int(1-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}[\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\mathrm{e}^{\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\mathrm{e}^{x-\ln x}[\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+C]=C\mathrm{e}^{x-\ln x}+\mathrm{e}^{2x-\ln x}$$

$$=\frac{Ce^x+e^{2x}}{x}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to0^+}(Ce^x+e^{2x})=0$，即 $C=-1$，所以，

$$f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}.$$

例9. 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x\ (n=1,2,\cdots)$，且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

解：由 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$，可得

$$u_n(x)=e^{\int dx}[\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+C]=\frac{e^x}{n}x^n+Ce^x.$$

由 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $C=0$，即 $u_n(x)=\frac{e^x}{n}x^n$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，易知该级数的收敛域为 $[-1,1)$，则当 $|x|<1$ 时

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x).$$

故函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数为 $-e^x\ln(1-x)$.

例10. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\varphi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 确定，且 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\varphi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切，求函数 $\varphi(t)$.

解：由参数方程可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{2+2t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{(1+t)^3}.$$

于是，$\dfrac{1}{4}\dfrac{(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，即 $\varphi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\varphi'(t)=3(1+t)$.

解得
$$\varphi'(t)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}[\int 3(1+t)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1]$$
$$=(1+t)[3t+C_1]$$
$$=3t^2+(C_1+3)t+C_1.$$

$\varphi(t)=t^3+\dfrac{1}{2}(C_1+3)t^2+C_1t+C_2$。

由 $y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$ 可得 $y'=2t\mathrm{e}^{-t^4}$.

依题意，$y(1)=\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$，$y'(1)=2\mathrm{e}^{-1}$.

故
$$\begin{cases}\varphi(1)=1+\dfrac{1}{2}(C_1+3)+C_1+C_2=\dfrac{3}{2\mathrm{e}}\\ \dfrac{\varphi'(1)}{4}=3+(C_1+3)+C_1=2\mathrm{e}^{-1}\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}C_2=\dfrac{3}{2\mathrm{e}}-1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{-1}+3=2\\ C_1=\mathrm{e}^{-1}-3\end{cases}$$

所以，$\varphi(t)=t^3+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}t^2+(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-3)t+2$.

例 12. 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求

（1）$f(x)$ 的表达式；（2）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t$。（其中 $n=2,3,\cdots$ $n=2,3,\Lambda$）

解：（1）由于 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t \underline{\underline{令u=t-x}} \int_{-x}^0(u+x)f(u)du=\int_{-x}^0 tf(t)dt+x\int_{-x}^0 f(t)dt$

所以题设中的等式为 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 tf(t)dt+x\int_{-x}^0 f(t)dt$

上式两边求导得 $1=f(x)-xf(-x)+\int_{-x}^0 f(t)dt+xf(-x)$

即 $1=f(x)+\int_{-x}^0 f(t)dt$，对此式两边再求导得 $f'(x)+f(-x)=0$ (*)

对 (*) 两边再求导得 $f''(x)-f'(-x)=0$，在（*）式中用 $-x$ 替换 x，得

$f'(-x)+f(x)=0$，代入上式即得二阶常系数齐次线性方程

$$f''(x)+f(x)=0$$

它的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，由 $1=f(x)+\int_{-x}^{0}f(t)dt$ 和 $f'(-x)+f(x)=0$ 得，，$f(0)=1,\ f'(0)=-f(0)=-1$，将其代入通解中和 $f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$ 中，求得 $C_1=1$，$C_2=-1$，故

$$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t=2^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\cos(t+\frac{\pi}{4})|^n\,\mathrm{d}t\ \underline{\underline{令x=t+\frac{\pi}{4}}}\ 2^{\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}|\cos x|^n\,\mathrm{d}x$

$$=2^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|^n\,\mathrm{d}x=2^{\frac{n}{2}+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}, & n=3,5,7,\cdots\\ 2^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

例13. 求一条曲线，使它通过 $(0,1)$，且其上任一点 $P(x,y)$ 处的切线和法线在 x 轴上截下的线段长度为 y^2+1. **第八届景润杯数学竞赛**

解:设所求曲线为$y=f(x)$,则曲线上任一点$P(x,y)$处的切线方程和法线方程分别为 $Y-y=y'(X-x)$和 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x),(y'\neq 0)$,

它们与x轴的交点分别为$A\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$和$B(x+yy',0)$. 由题意,

$|AB|=y^2+1$,即$\left|yy'+\dfrac{y}{y'}\right|=y^2+1$或$yy'+\dfrac{y}{y'}=\pm(y^2+1)$,显然$y\neq 0$,于是

$(y')^2\mp\left(y+\dfrac{1}{y}\right)y'+1=0$或$(y'\mp y)\left(y'\mp\dfrac{1}{y}\right)=0$,因此

$y'=\pm y$或$y'=\pm\dfrac{1}{y}$,解得$y=e^{\pm x}+c_1$或$y^2=\pm 2x+c_2(y\neq 0)$,

又因为所求曲线经过点$(0,1)$,于是$c_1=0,c_2=1$.但$y\neq 0$,故所求曲线为

$$y=e^{\pm x}或y^2=\pm 2x+1\left(x\neq\mp\frac{1}{2}\right).$$

例13. 设函数 $f(x), g(x)$ 具有连续的二阶导数，曲线积分

$$\int [y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)]\mathrm{d}x + 2[yg(x) + f(x)]\mathrm{d}y = 0,$$

其中 C 为 xoy 平面上任意简单闭曲线.

(1) 求使 $f(0) = g(0) = 0$ 的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式;

(2) 计算沿任一条曲线 Γ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的曲线积分

$$\int [y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)]\mathrm{d}x + 2[yg(x) + f(x)]\mathrm{d}y.$$

解：（1）由题设知条件知 $\dfrac{\partial[y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)]}{\partial y} = \dfrac{\partial\{2[yg(x) + f(x)]\}}{\partial x}$，

即 $2yg'(x) + 2f'(x) = 2yf(x) + 2e^x + 2g(x)$，将其改写为下式

$$y[g'(x) - f(x)] + [f'(x) - g(x) - e^x] = 0, \quad (x,y) \in R^2$$

由此得 $\begin{cases} g'(x) - f(x) = 0 \\ f'(x) - g(x) - e^x = 0 \end{cases}$， $(x,y) \in R^2$

方程组的第一式两边求导后代入第二式，得

$$g''(x) - f'(x) = 0 \Rightarrow g''(x) - g(x) - e^x = 0, \qquad (1)$$

解此一阶常系数线性方程：对应齐次方程的通解为 $C_1e^{-x} + C_2e^x$

设非齐次方程组的特解为 $y^* = Axe^x$，代入（1）得 $A = \dfrac{1}{2}$，所以 $y^* = \dfrac{1}{2}xe^x$.

因此 $g(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + \dfrac{1}{2}xe^x$.从而

$$f(x) = g'(x) = [C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{2}xe^x]' = -C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x$$

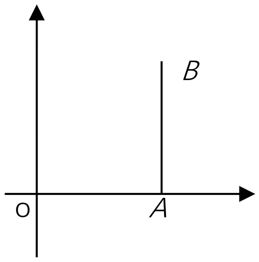
将 $f(0) = g(0) = 0$ 分别代入得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + C_2 + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = -\frac{1}{4};$$

故 $g(x)=\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{2}xe^{x}$， $f(x)=-\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x}$.

（2） $\int_{\Gamma}[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)]dx+2[yg(x)+f(x)]dy$

$$=\int_{\overline{OA}}[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)]dx+2\int_{\overline{AB}}[yg(x)+f(x)]dy$$



$$=2\int_{\overline{AB}}[yg(x)+f(x)]dy=2\int_0^1[yg(1)+f(1)]dy$$

$$=g(1)+2f(1)=-\frac{1}{4}e^{-1}+\frac{7}{4}e\ .$$