

## 二次型 - 单项选择题

1. 已知二次型  $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$

的秩为 2, 则  $c$  的值为 ( ).

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4

2. 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 且  $A \sim B$  ( $A$  合同于  $B$ ), 则 ( ).

- (A)  $A$  与  $B$  有相同的特征值                      (B)  $\det(A) = \det(B)$   
(C)  $A$  与  $B$  相似                      (D)  $r(A) = r(B)$



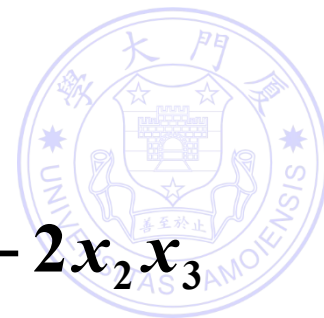
3. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  合同于( ).

(A)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B)  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D)  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



#### 4. 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 - 2x_2x_3$$

的正,负惯性指数都是 1,则  $a = ( \quad )$ .

- (A) -2      (B) -1      (C) 1      (D) 2

5. 二次型  $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$  的

规范形是(  $\quad$  ).

(A)  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$       (B)  $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$

(C)  $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$       (D)  $z_1^2 - z_2^2$



6. 二次型  $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  的秩  $r$  及正惯性指数  $p$  分别为 ( ).

- (A)  $r=3, p=2$                       (B)  $r=3, p=1$   
(C)  $r=2, p=2$                       (D)  $r=2, p=1$

7. 若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$$

是正定的, 则  $t$  的取值范围是( ).

- (A)  $-\infty < t < -\sqrt{2}$                       (B)  $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$   
(C)  $\sqrt{2} < t < 2\sqrt{2}$                       (D)  $-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$



8. 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 则  $A$  是半正定矩阵的充分必要条件是( ).

(A)  $A$  的顺序主子式全大于或等于零

(B)  $A$  的正惯性指数小于  $n$

(C)  $A$  的特征值均大于等于零, 且其中至少一个为零

(D)  $r(A) < n$



9. 设  $n$  元二次型  $f(x) = x^T A x$ , 其中  $A^T = A$ . 如果

该二次型通过可逆线性变换  $x = Cy$  可化为  $f = y^T B y$ ,

则下述结论中不正确的是 ( ).

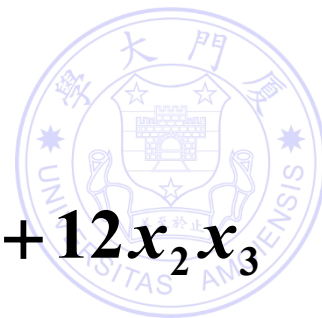
- (A)  $A$  与  $B$  合同      (B)  $A$  与  $B$  等价  
(C)  $A$  与  $B$  相似      (D)  $r(A) = r(B)$

## 10. 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + 3x_3)^2 + (x_1 + 3x_2 + ax_3)^2$$

正定的充要条件是 ( ).

- (A)  $a < -1$       (B)  $a \neq -1$       (C)  $a \neq 1$       (D)  $a > 1$



## 11. 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 10x_1x_2 + 12x_1x_3 + 12x_2x_3$$

的秩为( ).

- (A) 3      (B) 2      (C) 1      (D) 0

## 12. 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$$

的秩为 2, 则  $a, b$  应满足条件( ).

- (A)  $a \neq b$       (B)  $a = b = 1$       (C)  $a = b, a \neq \pm 1$       (D)  $a = b = -1$



### 13. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则  $A$  与  $B$  ( ).

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似

(D) 不合同且不相似





14. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 下列命题中正确的是( ).

- (A) 若  $A$  合同于  $B$ , 则  $A$  相似于  $B$
- (B) 若  $A$  相似于  $B$ , 则  $A$  合同于  $B$
- (C) 若  $A$  合同于  $B$ , 则  $A$  与  $B$  等价
- (D) 若  $A$  与  $B$  等价, 则  $A$  合同于  $B$

15. 设  $A, B$  为同阶可逆矩阵, 则( ).

- (A)  $AB=BA$
- (B) 存在可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = B$
- (C) 存在可逆矩阵  $C$ , 使  $C^T AC = B$
- (D) 存在可逆矩阵  $P$  和  $Q$ , 使  $PAQ = B$



16. 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2$

的正惯性指数为( ).

(A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3



17. 下列矩阵中与  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  合同的是( ).

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



18. 设二次型  $f(x) = x^T A x$ , 其中  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵. 若二次型  $f(x)$  的秩为  $r$ , 符号差为  $s$ , 则( ).

(A)  $r, s$  同为奇数或同为偶数, 且  $|s| \leq r$

(B)  $r, s$  同为奇数或同为偶数, 且  $|s| > r$

(C)  $r, s$  的奇偶性不同, 且  $|s| \leq r$

(D)  $r, s$  的奇偶性不同, 且  $|s| > r$



19. 设  $A, B$  均为  $n$  阶实对称矩阵, 则  $A$  与  $B$  合同的充分必要条件是( ).

(A)  $r(A)=r(B)$

(B)  $A, B$  具有相同的特征值

(C)  $A, B$  都合同于对角矩阵

(D)  $A, B$  具有相同的正负惯性指数



20. 设二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ , 其中, 其中

$A^T = A$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 则  $f$  为正定二次型

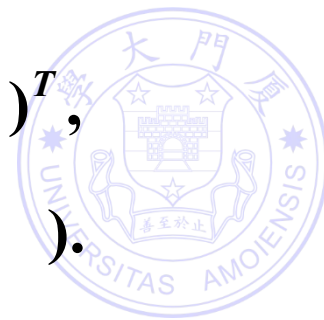
的充分必要条件是( ).

(A)  $f$  的负惯性指数是 0

(B) 存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q = E$

(C)  $f$  的秩为  $n$

(D) 存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $A = C^T C$



21.二次型  $f = x^T A x$ , 其中  $A^T = A$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 则  $f$  为正定二次型的充分必要条件是( ).

(A) 存在  $n$  阶矩阵  $C$ , 使得  $A = C^T C$

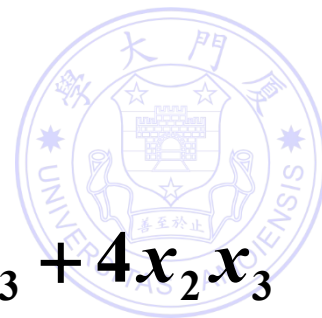
(B) 存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,

其中  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$

(C)  $A$  的行列式  $\det(A) > 0$

(D) 对任意  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $x_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ,

使得  $x^T A x > 0$



## 22. 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$$

为正定二次型,则  $\lambda$  的取值范围是( ).

(A)  $-2 < \lambda < 1$

(B)  $-2 < \lambda < 2$

(C)  $\lambda < -2$

(D)  $\lambda > 2$