第四节　　区间估计

- 置信区间定义
- 置信区间的求法
- 单侧置信区间
- 课堂练习
- 小结　布置作业

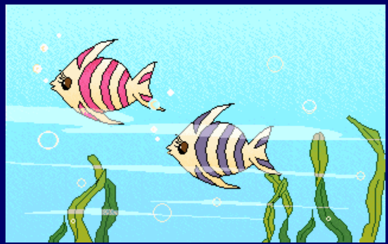
引言

前面，我们讨论了参数点估计．它是用样本算得的一个值去估计未知参数．但是，点估计值仅仅是未知参数的一个近似值，它没有反映出这个近似值的误差范围，使用起来把握不大．区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷．

区间估计按一定的可靠性程度对待估参数给出一个区间范围。

譬如，在估计湖中鱼数的问题中，若我们根据一个实际样本，得到鱼数 N 的极大似然估计为1000条.

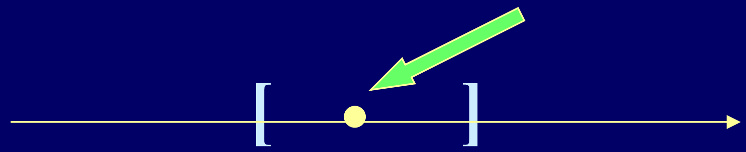
实际上，N的真值可能大于1000条，也可能小于1000条.

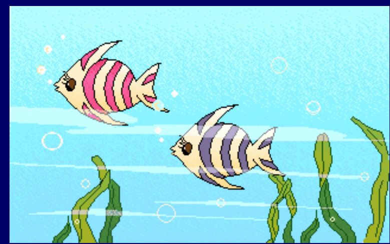


若我们能给出一个区间，在此区间内我们合理地相信 N 的真值位于其中. 这样对鱼数的估计就有把握多了.

也就是说，我们希望确定一个区间，使我们能以比较高的可靠程度相信它包含真参数值.

湖中鱼数的真值





这里所说的“可靠程度”是用概率来度量的，称为置信度或置信水平.

习惯上把置信水平记作 $1-\alpha$ ，这里α是一个很小的正数.

置信水平的大小是根据实际需要选定的.

例如，通常可取置信水平 $1-\alpha$=0.95或0.9等.

根据一个实际样本，由给定的置信水平，我们求出一个尽可能小的区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ ，使

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

称区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

一、 置信区间定义

设 θ 是一个待估参数，给定 $\alpha>0$, 若由样本 $X_1,X_2,\ldots X_n$ 确定的两个统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$
$$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad (\underline{\theta}<\overline{\theta})$$

满足

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平（置信度）为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限.

可见,

对参数θ作区间估计，就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量).

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad (\underline{\theta} < \overline{\theta})$$

一旦有了样本，就把 θ 估计在区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 内 .

引例　设某厂生产的灯泡使用寿命**X~N**（μ，**100²**），现随机抽取**5**只，测量其寿命如下：

1455，1502，1370，1610，1430

如果要求有**95%**的把握判断μ在**1473.4**左右，

则由定理一可知

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

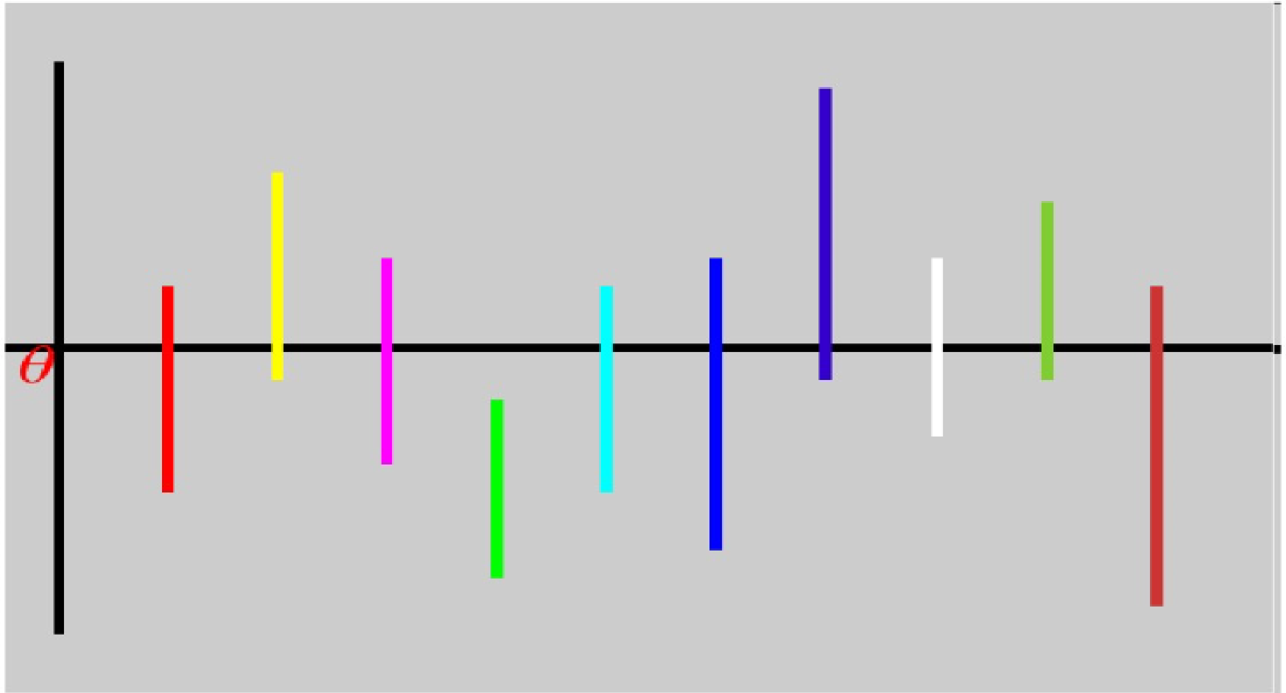
由 $P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<\varepsilon\right\}=0.95 \longrightarrow$ 查表得 $\varepsilon=1.96$

Φ(ε)=0.975

$$\longrightarrow \bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

即区间(1385.74, 1561.05)以1-α的概率包含着参数μ的真值；
而不能说“参数μ以1-α的概率落入随机区间(1385.74, 1561.05)”

例如　若$\alpha = 0.01$, 反复抽样1000次,
则得到的1000个区间中不包含θ真值的约为10个.



若反复抽样多次，每个样本值(容量n)按构造的区间上下界统计量可确定出一个区间。在这么多的区间中,包含θ的约占99% ,不包含θ的约仅占1%.

若抽样得到某个区间(a,b),则该区间属于那些包含θ的区间的可信程度为99%，或“该区间包含θ”这一陈述的可信程度为99%.

这里有两个要求:

100(1-α)%

1. 要求 θ 以很大的可能被包含在区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 内，就是说，概率 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 要尽可能大.

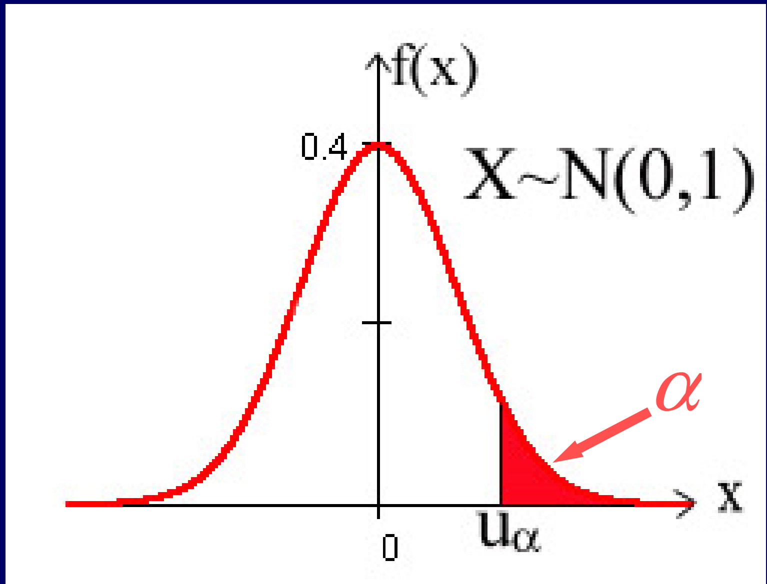
即要求估计尽量可靠.

2. 估计的精度要尽可能的高. 如要求区间长度 $\overline{\theta}-\underline{\theta}$ 尽可能短，或能体现该要求的其它准则.

可靠度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度.

- 置信区间越小，估计越精确，但置信水平会降低；相反，置信水平越大，估计越可靠，但精确度会降低，置信区间会较长。
- 通常，对于固定的样本容量，不能同时做到精确度高（置信区间小），可靠程度也高（1- α大）。
- 如果不降低可靠性，而要缩小估计范围，则必须增大样本容量，增加抽样。

标准正态分布的上 α 分位点 Z_α



$$U \sim N(0,1)$$

$$\Downarrow$$

$$P(U > Z_\alpha) = \alpha$$

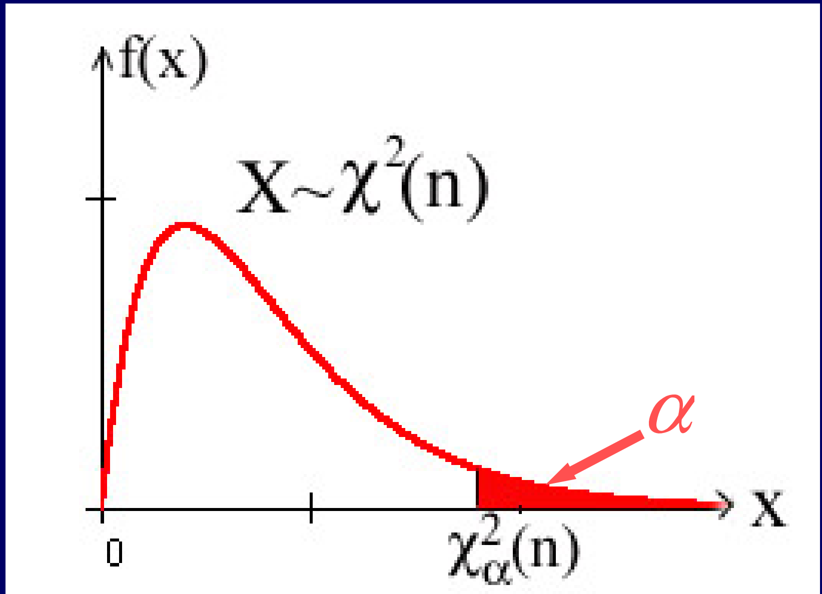
$$Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$$

t分布的上 α 分位点 t_α

$$t_{1-\alpha} = -t_\alpha$$

当$n > 45$时，$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$

自由度为n的 χ^2 分布的上 α 分位数 $\chi_\alpha^2(n)$



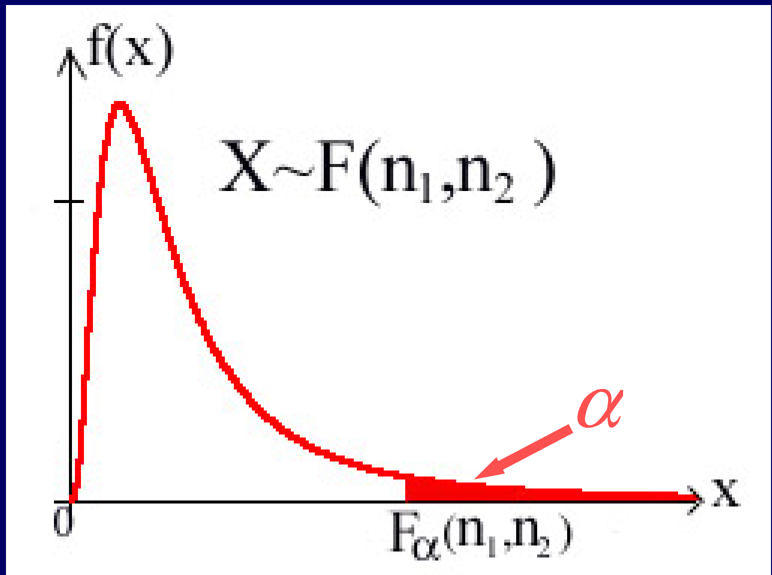
$$\chi^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\Downarrow$$

$$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$$

当$n > 40$时，$\chi_\alpha^2(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$

自由度为n_1,n_2的F分布的上α分位数 $F_\alpha(n_1,n_2)$



$$F \sim F(n_1,n_2)$$

$$\Downarrow$$

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$$

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

二、置信区间的求法

在求置信区间时，要查表求分位点.

【定义】设 $0<\alpha<1$，对随机变量X，称满足

$$P(X > x_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P(X \le x_\alpha) = 1-\alpha$$

的点 x_α 为X的概率分布的上 α 分位点.

$$P(a < X < b) = 1-\alpha$$

$$\Updownarrow$$

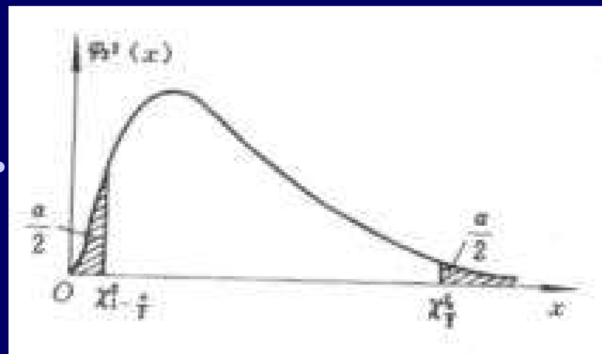
【方案1】 $P(X<b) - P(X<a) = 1-\alpha$

双侧对称的置信区间 $\Downarrow$

$$P(X<b) = 1-\alpha/2,\ P(X<a) = \alpha/2$$

若 X 为连续型随机变量，则有

$$a = x_{1-\alpha/2}, \quad b = x_{\alpha/2}.$$



所求置信区间为 $(x_{1-\alpha/2}, x_{\alpha/2})$

$$P(a < X < b) = 1 - \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P(X < b) - P(X < a) = 1 - \alpha$$

【方案2】

双侧不对称的置信区间（右偏）$\Downarrow$

$$P(X < b) = 1 - \alpha/3, \quad P(X < a) = 2\alpha/3$$

$$a = x_{1-2\alpha/3}, \quad b = x_{\alpha/3}.$$

所求置信区间为 $(x_{1-2\alpha/3}, x_{\alpha/3})$

例1 设$X_1,\ldots X_n$是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2已知，求参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

明确问题,是求什么参数的置信区间？置信水平是多少？

解 选 μ的点估计为 $\overline{X}$，

寻找未知参数的一个良好估计.

取 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

寻找一个待估参数和估计量的函数，要求其分布为已知.

有了分布，就可以求出U取值于任意区间的概率.

例1 设$X_1,\ldots X_n$是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2已知，求参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解 选 μ的点估计为 $\overline{X}$，

取 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

明确问题,是求什么参数的置信区间?置信水平是多少?

寻找
估计
其分

定理 1 (样本均值的分布)

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$是样本均值，则有

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}) \qquad \text{即} \qquad \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

对于给定的置信水平，根据U的分布，确定一个区间，使得U取值于该区间的概率为置信水平.

对给定的置信水平 $1-\alpha$,

取双侧对称的置信区间

查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$,

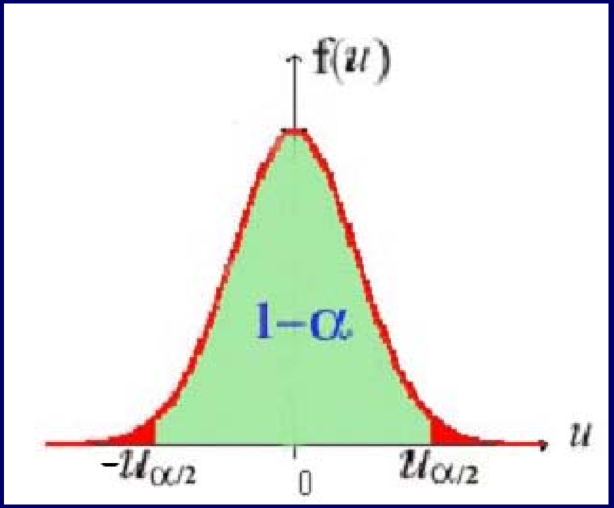
使

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

对给定的置信水平 $1-\alpha$,

查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$, 使

$$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

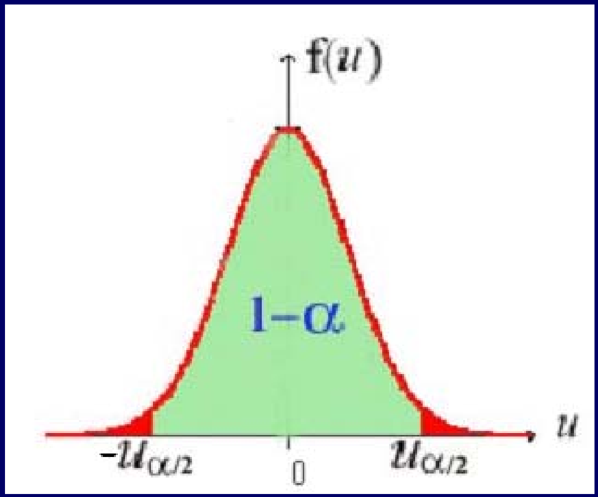


从中解得

$$P\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}$$

$$=1-\alpha$$



于是所求μ 的 置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

也可简记为

$$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2})$$

从例1解题的过程，我们归纳出求置信区间的一般步骤如下:

1. 明确问题, 是求什么参数的置信区间? 置信水平$1-\alpha$是多少?

2. 寻找参数θ的一个良好的点估计

$$T(X_1,X_2,\ldots X_n)$$

3. 寻找一个待估参数 θ和估计量 T 的函数 $U(T,\theta)$,且其分布为已知.

4. 对于给定的置信水平 $1-\alpha$，根据 $U(T,\theta)$ 的分布，确定常数 a, b，使得

$$P(a < U(T,\theta) < b) = 1-\alpha$$

5. 对 “$a<U(T,\theta)<b$”作等价变形,得到如下形式:

$$\boxed{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}}$$

即
$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$$

于是 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 就是 θ 的100$(1-\alpha)$%的置信区间.

可见，确定区间估计很关键的是要寻找一个

枢轴量

待估参数θ和估计量T的函数$U(T,\theta)$, 且$U(T,\theta)$

的分布为已知, 不依赖于任何未知参数 .

而这与总体分布有关，所以，总体分布的形式是

否已知，是怎样的类型，至关重要.

需要指出的是，给定样本，给定置信水平，置信区间也不是唯一的.

对同一个参数，我们可以构造许多置信区间.

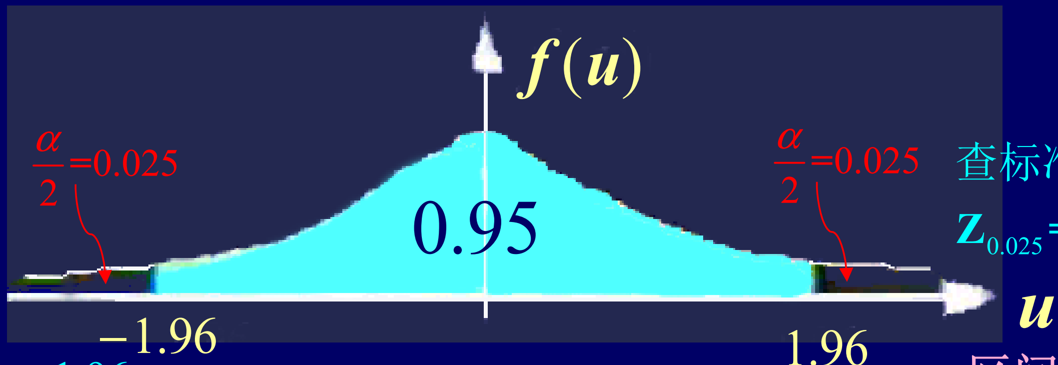
例如，设 $X_1, \ldots, X_n$ 是取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2已知，求参数μ的置信水平为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间.

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

由标准正态分布表，对任意a、b，我们可以求得 $P(a<U<b)$.

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,\ 1)$$

例如，由 $P(-1.96\le U\le 1.96)=0.95$



查标准正态分布表

$Z_{0.025}=1.96$

$Z_{0.975}=-Z_{0.025}=-1.96$

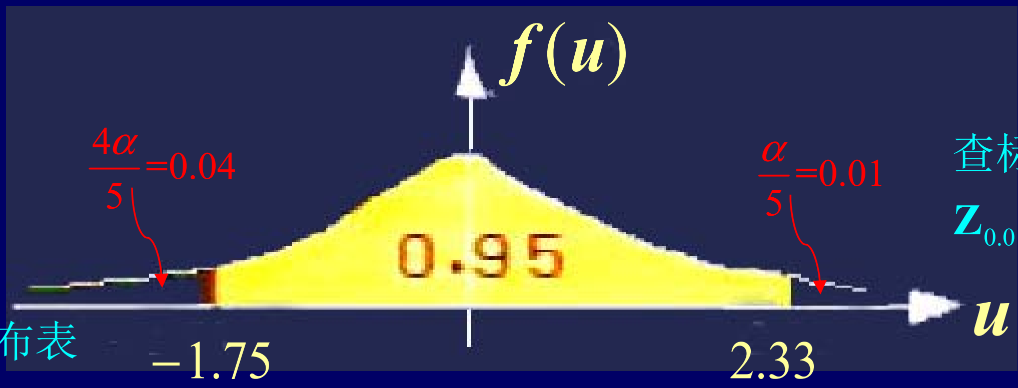
区间长度：**3.92**

我们得到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha=$ **0.95** 的

置信区间为

$$[\bar{X}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{X}+1.96\sigma/\sqrt{n}]$$

由 $P(-1.75 \le U \le 2.33)=0.95$



查标准正态分布表

$Z_{0.01}=2.33$

查标准正态分布表

$Z_{0.96}= -Z_{0.04}= -1.75$

区间长度：**4.08**

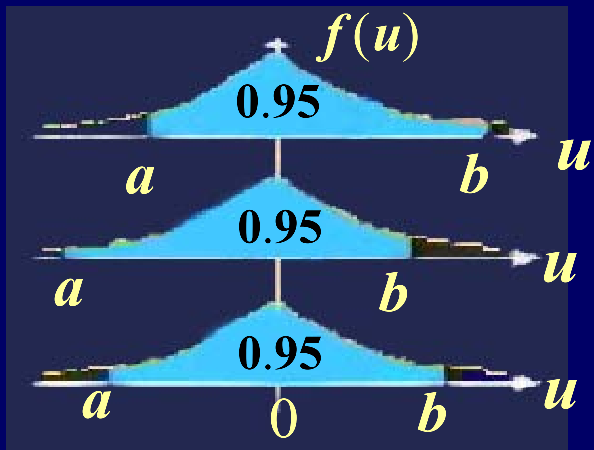
我们得到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha=$ **0.95** 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-1.75\sigma/\sqrt{n},\ \bar{X}+2.33\sigma/\sqrt{n}\right]$$

这个区间比前面一个要长一些.

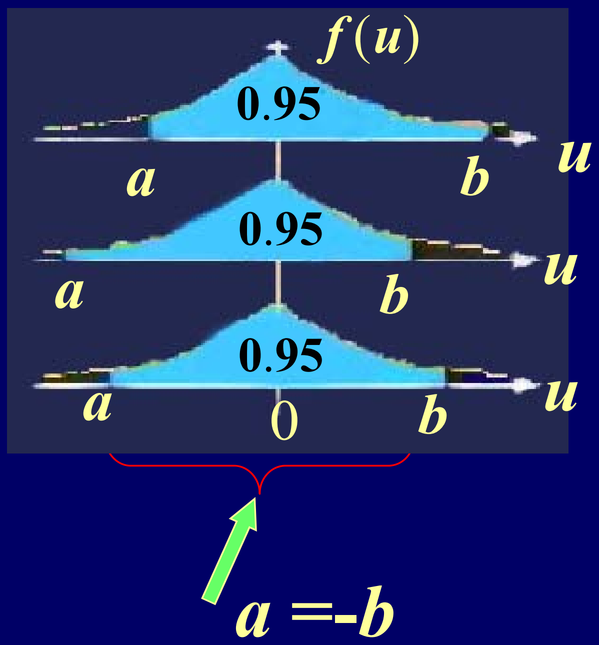
类似地，我们可得到若干个不同的置信区间.

任意两个数a和b，只要它们的纵标包含$f(u)$下95%的面积，就确定一个95%的置信区间.

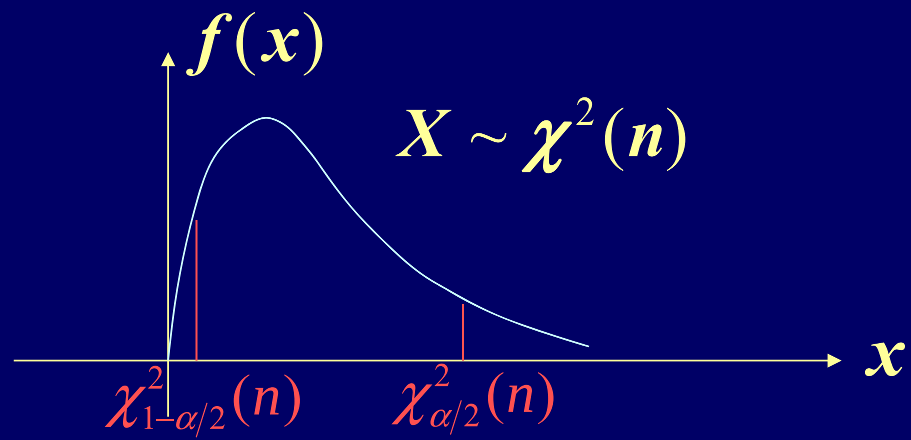


我们总是希望置信区间尽可能短.

在概率密度为单峰且对称的情形，当$a=-b$时求得的置信区间的长度为最短.



即使在概率密度不对称的情形，如 χ^2分布，F分布，习惯上仍取对称的分位点来计算未知参数的置信区间.



我们可以得到未知参数的的任何置信水平小于 1 的置信区间，并且置信水平越高，相应的置信区间平均长度越长.

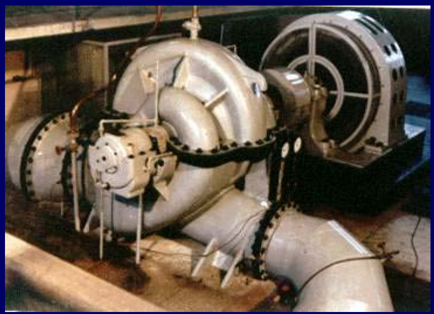
也就是说，要想得到的区间估计可靠度高，区间长度就长，估计的精度就差. 这是一对矛盾.

实用中应在保证足够可靠的前提下，尽量使得区间的长度短一些 .

三、单侧置信区间

上述置信区间中置信限都是双侧的，但对于有些实际问题，人们关心的只是参数在一个方向的界限.

例如对于设备、元件的使用寿命来说，平均寿命过长没什么问题，过短就有问题了.



这时, 可将置信上限取为+∞ ，而只着眼于置信下限，这样求得的置信区间叫单侧置信区间.

于是引入单侧置信区间和置信限的定义:

定义 设 θ 是一个待估参数，给定 $\alpha > 0$,
若由样本$X_1, X_2, \ldots X_n$确定的统计量

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

对于任意 $\theta \in \Theta$, 满足

$$P\{\theta \geq \underline{\theta}\} = 1 - \alpha$$

则称区间$[\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间. $\underline{\theta}$ 称为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

若由样本$X_1,X_2,\dots X_n$确定的统计量

$$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

对于任意 $\theta\in\Theta$，满足

$$P\{\theta\le\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称区间$(-\infty,\overline{\theta}]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间. $\overline{\theta}$ 称为 θ的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

例2　从一批灯泡中随机抽取5只作寿命试验，测得寿命X（单位：小时）如下：

1050，1100，1120，1250，1280

设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命均值μ的置信水平为0.95的单侧置信下限.

解　μ的点估计取为样本均值$\overline{X}$，方差σ^2未知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

定理 3 (样本均值的分布)

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$和S^2 分别为样本均值和样本方差，则有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

解 μ的点估计取为样本均值 $\overline{X}$ ，方差 σ^2未知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

对给定的置信水平 $1-\alpha$，确定分位点 $t_\alpha(n-1)$

使 $$P\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_\alpha(n-1)\} = 1-\alpha$$

即 $$P\{\mu \ge \overline{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$

于是得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$[\overline{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \infty]$$

即 μ 的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限为

$$\bar{X}-t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

1050，1100，1120，1250，1280

$n=5$，$\bar{X}=1160, S=99.75$

$\alpha=0.05$查t分布表

$t_{0.05}(4)=2.1318$

将样本值代入得

=1064.9

μ 的置信水平为0.95的单侧置信下限是

1065小时

请自己画一张表，将各种情况下的区间估计加以总结.（详见P172）

四、小结

这一讲，我们介绍了区间估计.

同学们可通过练习，掌握各种求未知参数的置信区间的具体方法.