厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期末试题

考试日期：2015 年 1 月　　信息学院自律督导部

一、计算下列各题:（每小题 4 分，共 36 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\Lambda+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$。

2．求 $f(x)=\int_{\cos x}^{x^2}e^t dt$ 的导数。

3．求由曲线 $y=-x^3$， $x=1$， $x=2$， $y=0$ 所围成的图形面积。

4．计算广义积分 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$。

5．计算定积分 $\int_0^1\left[x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x^2\right)+\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\right]dx$。

6．求不定积分 $\int\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$。

二、计算下列各题:（每小题 5 分，共 30 分）

1． 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin x\cdot e^{(x-t)^2}dt}{x^2}$。

2. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\cos x-\cos^3 x}+\frac{x\sin|x|}{2+\cos x}\right]dx$。

3．设函数$y=y(x)$由方程$\int_0^{y^2} e^{t^2}dt+\int_{x^3}^{0}\cos t^2 dt=1$决定，求$\frac{dy}{dx}$。

4．求曲线$f(x)=\int_0^x \sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$相应于$0\le x\le \pi$的一段弧的长度。

6. 设物体作直线运动，已知其瞬时速度$v(t)=t^2$(米/秒)，其受到与运动方向相反的阻力$F(t)=5v(t)$（牛顿），求物体在时间间隔$[0,1]$（单位秒）内克服阻力所作的功。

三、计算下列各题:（每小题 6 分，共 24 分）

1.设$a>0$，求直线$y=-\frac{x}{a^3}+\frac{1}{a^2}$与$x$轴，$y$轴所围三角形绕直线$x=a$旋转一周所得旋转体的体积。

2. 设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数， 且当$x\neq 0$时满足函数方程:

四、证明题:（每小题 5 分，共 10 分；其中第 2 题和第 3 题任选一题）

1．设$f(x)$可导，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$，证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$。

2. 证明：$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln(\sin 2x)-\ln 2\right]dx$，并利用此等式计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$。

3．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在$[a,b]$上单调不减的连续函数（$a<b$），证明：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\le(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx。$$