第三讲 例题及习题答案

目录

一、例题

例 1

$$\int \frac{\ln x+2}{x\ln x(1+x\ln^2 x)}dx$$

解： 注意到 $\left(x\ln^2 x\right)' = \ln^2 x + 2\ln x$，

原式 $=\int \frac{\ln x(\ln x+2)}{x\ln^2 x(1+x\ln^2 x)}dx = \int \frac{1}{x\ln^2 x(1+x\ln^2 x)}d(x\ln^2 x) = \int \frac{1}{u(1+u)}du$

$$=\int \frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}du = \ln u - \ln(1+u) + c = \ln\left(x\ln^2 x\right) - \ln\left(1+x\ln^2 x\right) + c$$

例 2

$$\int \frac{e^{\sin 2x}\sin^2 x}{e^{2x}}dx$$

解： 注意到 $\left(e^{\sin 2x-2x}\right)' = e^{\sin 2x-2x}\cdot 2(\cos 2x-1) = -4e^{\sin 2x-2x}\cdot \sin^2 x$，

原式 $= -\frac{1}{4}e^{\sin 2x-2x} + c$

例. $\int \frac{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 :

$$\int \frac{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2 \mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3 + C.$$

例. $\int \frac{1+\ln x}{x^{-x}+x^x}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{1+\ln x}{x^{-x}+x^x}\mathrm{d}x = \int \frac{x^x(1+\ln x)}{1+(x^x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x^x)^2}\mathrm{d}x^x = \arctan x^x + C.$

例. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

例. $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

解: 因为

$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)-\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}(x^2+1)+C$，故

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]'\arctan x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]\arctan x-\frac{1}{2}\int(\ln(1+x^2)-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]\arctan x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}[x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{2}[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]\arctan x+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\arctan x+C.$$

例 3

$$\int\frac{(\cos x-2x\sin x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\sin x}}dx$$

解: 原式$=\int\frac{\cos x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\sin x}}dx-\int\frac{2x\cdot\sin x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\sin x}}dx=\int e^{-\frac{x^2}{2}}d\sqrt{\sin x}-\int x\cdot\sqrt{\sin x}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=\sqrt{\sin x}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}-\int\sqrt{\sin x}de^{-\frac{x^2}{2}}-\int x\cdot\sqrt{\sin x}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\sin x}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c$$

例. $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x.$

解: $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}+\int\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}+C.$

例. $\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解: $\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x\,de^{x+\frac{1}{x}}$

$$=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}+C.$$

例 4

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx$$

解: 原式$=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$

$$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+c$$

例 5

$$\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}dx.$$

解: 原式$=\int\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}dx=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x+c$

例 6

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$$

解: 原式$=\int\frac{A(2\sin x+3\cos x)+B(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx$, 其中 A,B 满足:

$A(2\sin x+3\cos x)+B(2\sin x+3\cos x)'=\sin x-\cos x$, 整理比较同类项的系数得:

$A=-\frac{1}{13}, B=-\frac{5}{13}$，因此有：

原式$=-\frac{1}{13}x-\ln(2\sin x+3\cos x)+c$

例 7

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{\ln(6-x)+\ln x}dx$$

解： 令$u=6-x$，则有：

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{\ln(6-x)+\ln x}dx=\int_4^2 \frac{\ln(6-u)}{\ln u+\ln(6-u)}d(6-u)=\int_2^4 \frac{\ln(6-u)}{\ln(6-u)+\ln u}du\ ,$$

因此：原式$=\frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{\ln x}{\ln(6-x)+\ln x}+\frac{\ln(6-x)}{\ln(6-x)+\ln x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_2^4 dx=1.$

例 8

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

解： 令$u=-x$，则有：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 u}{1+e^{u}}\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\mathrm{d}x$

因此：原式$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\left[\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^{x}}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi-2}{8}$

例 9

$\int_{-\pi}^{\pi}\arctan e^x\mathrm{d}x.$（注：此题为例 10 解答做准备）

解： 原式$=\int_0^{\pi}\arctan \mathrm{e}^x+\arctan \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$（注意$\left(\arctan \mathrm{e}^x+\arctan \mathrm{e}^{-x}\right)'=0$）

例 10

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x.$$

解： 原式

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{x}}{1+\cos^{2}x}+\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{-x}}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^{2}}{4}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^{2}}{4}(-\arctan(\cos x))\mid_{0}^{\pi}=\frac{\pi^{3}}{8}$$

例 11

$$\int_{0}^{1}\frac{x^{a}-x^{b}}{\ln x}dx,(a>0,b>0)$$

解： 原式$=\int_{0}^{1}\int_{b}^{a}x^{y}dydx=\int_{b}^{a}\int_{0}^{1}x^{y}dxdy=\int_{b}^{a}\frac{1}{y+1}dy=\ln\frac{1+a}{1+b}$

例 12

已知$k>0$，求$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^{2}x+k^{2}\cos^{2}x)dx$

解： 记$I(k)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^{2}x+k^{2}\cos^{2}x)dx$，则有:

$$I'(k)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2k\cos^{2}x}{\sin^{2}x+k^{2}\cos^{2}x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2k}{\tan^{2}x+k^{2}}dx=\frac{\pi}{k+1}\quad（令 u=\tan x）$$

$$\Rightarrow I(k)=\pi\ln(1+k)+c$$

令$k=1$，得$c=-\pi\ln 2$，所以: $I(k)=\pi\ln\frac{1+k}{2}$

例 13

已知$n\in N^{+}$，求$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$

解：

例. 求 $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x$， $n\geq 2$ 的递推公式.

解： $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x=\int \sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x=I_{n-2}-\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$.因为

$\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int \sin^{n-2}x\cos x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{1}{n-1}\int \sin^n x\mathrm{d}x$， 故

$$I_n=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}(\sin^{n-1}x\cos x+I_n),$$

于是， $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\ \ (n\geq 2)$.

注： 积分的递推公式一般都由分部积分法来给出； 类似的， 像 $\int \sec^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \cos^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \tan^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \cot^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \csc^n x\,\mathrm{d}\,x$ 都可以利用分部积分来得到相应的递推公式。

例. 求 $I_n=\int (1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解：当 $n=0$ 时， $I_0=\int \mathrm{d}x=x+C$.

当 $n\geq 1$时， $I_n=\int (1-x^2)^n\mathrm{d}x=\int (1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\mathrm{d}x=I_{n-1}-\int (1-x^2)^{n-1}x^2\mathrm{d}x$. 而

$$\int (1-x^2)^{n-1}x^2\mathrm{d}x=\int (1-x^2)^{n-1}x\cdot x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n}(1-x^2)^n\cdot x+\frac{1}{2n}\int (1-x^2)^n\mathrm{d}x,$$

于是， $I_n=I_{n-1}+\frac{x(1-x^2)^n}{2n}-\frac{1}{2n}I_n$.

移项后，可得 $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}+\frac{x(1-x^2)^n}{2n+1}$.

例. 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x,\ n>1$ 的递推公式.

解： $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot[\sin(n-1)x+\sin(n+1)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}I_{n-1}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}I_{n-1}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot[\sin nx\cos x+\cos nx\sin x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(I_{n-1}+I_n)+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos nx\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(I_{n-1}+I_n)-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}\cos^n x$$

$$=\frac{1}{2}(I_{n-1}+I_n)-\frac{1}{2n}[\cos nx\cos^n x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x]$$

故 $I_n=\frac{1}{2}I_{n-1}+\frac{1}{2n}, n>1.$

例 14

求 $\sum_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分

解： 由 $(n+1)^{-\frac{2}{3}}<\int_n^{n+1}x^{-\frac{2}{3}}dx<n^{-\frac{2}{3}}\implies\int_1^{10^9+1}x^{-\frac{2}{3}}dx<\sum_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}<1+2^{-\frac{2}{3}}+\int_2^{10^9}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$\implies 2997.000001...<\sum_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}<2997.9\quad\implies$ 整数部分 2997

例 15

已知 $\int\frac{1}{(a+b\cos x)^2}dx=\frac{A\sin x}{a+b\cos x}+B\int\frac{1}{(a+b\cos x)}dx$ (a,b 为常数), 求实数 A,B.

例 16

$$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

例 17

$f(x)$ 具有可微的反函数 $g(x)$, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，试证明：

$\int g(x)\mathrm{d}x=xg(x)-F(g(x))+C.$

解：因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F'(x)=f(x)$.

故 $[xg(x)-F(g(x))]'=g(x)+xg'(x)-F'(g(x))g'(x)=g(x)+xg'(x)-f(g(x))g'(x)$.

又因为 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，则 $f(\mathrm{g}(x))=x$，于是

$$[xg(x)-F(g(x))]'=g(x)+xg'(x)-xg'(x)=g(x),$$

故 $\int g(x)\mathrm{d}x=xg(x)-F(g(x))+C$.

例 18

若$f(x)$关于$x=T$对称，且$a<T<b$. 证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x.$

解： 右端$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x$

$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x$

$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x-\int_T^b f(2T-u)\mathrm{d}u$

$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x-\int_T^b f(u)\mathrm{d}u==\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

例 19

已知$f(x)$在$[a,b]$上具有连续导数，证明：$\int_a^b[f'(x)]^2dx\geq\dfrac{[f(b)-f(a)]^2}{b-a}.$

例 20

已知$f(x)$在$[0,1]$上具有连续，$\int_0^1 f(x)dx=1$. 证明：$\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\geq\dfrac{4}{\pi}.$

例 21

已知$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)>0$. 求证：$\ln(\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x)\geq\dfrac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x$

证明：因为 $f(x)$，$\ln f(x)$在$[a,b]$上连续，所以它们在$[a,b]$可积，因此

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}\,x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)$$

其中 $\xi_i=a+\frac{b-a}{n}i$， $i=1,2,\ldots,n$ 。

又 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\geq(f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\ldots\cdot f(\xi_n))^{\frac{1}{n}}$， 从而

$$\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i))\geq\ln[(f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\ldots\cdot f(\xi_n))^{\frac{1}{n}}]$$

即有 $\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i))\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)$（注：这个不等式也可以利用函数 ln*x* 的凸性来给出），由极限的性质以及复合函数极限运算法则，有

$$\ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x)=\ln[\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i))]=\lim_{n\to\infty}[\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i))]\geq\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)]=\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

得证。

例 22

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 求证： $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

例 23

已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有连续导数， $f'(x)>0$. 求证: $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leq\frac{2[f(2\pi)-f(0)]}{n}.$

例 24

已知 $f(x)$ 连续， $f(x)\geq0,\int_{-a}^{b}xf(x)dx=0$. 求证: $\int_{-a}^{b}x^2f(x)dx\leq ab\int_{-a}^{b}f(x)dx,\forall a>0,b>0.$

例 25

已知$f(x)$在$[a,b]$上连续,$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$. 求证：$\exists\xi\neq\eta\in(a,b), f(\xi)=f(\eta)=0.$

解：证明：作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(a)=F(b)=0$．由于

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xF'(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=0$．由拉格朗日中值定理，存在 $c\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b F(x)dx-\int_a^a F(x)dx=F(c)(b-a),$$

即 $F(c)=0$.

于是，由罗尔定理及 $F(a)=F(c)=F(b)=0$，存在 $\xi\in(a,c)$, $\eta\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi)=F'(\eta)=0,$$

即 $f(\xi)=f(\eta)=0.$

例 26

已知$y=f(x)$可导，单调递增，$f(0)=0$. 设其反函数为$x=g(y)$，求证：

$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(y)dy\geq ab, \forall a>0, b>0.$

解：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f^{-1}(b)} t\mathrm{d}f(t)=tf(t)\Big|_0^{f^{-1}(b)}+\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

$=bf^{-1}(b)-\int_a^{f^{-1}(b)} f(t)\mathrm{d}t\geq ab$（分情况讨论：$a\geq f^{-1}(b), a\leq f^{-1}(b)$）

注：若取 $f(x)=x^{p-1}$,，即为著名的 Young 不等式：$ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$（$p,q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$）

二、习题

习题 1

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})} dx$$

习题 2

求$\int_0^1 \sin(\ln x)\frac{x^a - x^b}{\ln x}dx, (a>0, b>0)$

解：参考例 11

习题 3

$$\int \frac{1+x^2\sin x}{(1+x\cos x)^2} dx$$

习题 4

已知$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0.$

求证：$\exists \xi \neq \eta \in (0,\pi), f(\xi) = f(\eta) = 0.$

解：参考例 25

习题 5

求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} dx$

解：$\frac{\pi}{4}$，解答参考例 7