厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2012 年 1 月　　信息学院自律督导部

1、求下列各题积分：（每题 5 分，共 20 分）

（1）$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$

（3）$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$　　（4）$\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{1+\cos 2x}+|x|\sin x)\mathrm{d}x$

解：（1）$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}(\frac{x}{2})=-2\int \frac{\mathrm{d}(\cos\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}}=-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$

(2) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int \ln^2 x\mathrm{d}(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\ln^2 x+2\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\int \ln x\mathrm{d}(\frac{1}{x})$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}-2[\frac{1}{x}\ln x-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x]=-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}+\mathrm{c}.$$

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \underline{\underline{x=\sin t}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\csc^2 t-1]\mathrm{d}t$

$$=-(\cot t+t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(4)　$\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{1+\cos 2x}+|x|\sin x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$

$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=4\sqrt{2}$

2、（10 分）设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(1-\frac{2}{t^2+1})'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}<0$，所以 $t<0$.

又 $t<0$ 对应于 $x<1$. 因此 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 $(-\infty,1]$.

3、（10 分）设函数 $f(x), \mathrm{g}(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{g}(x)}{1-\cos x}=1, \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}^2(x)}=2$

试问: $x=0$ 是否是 $f(x)$ 的极值点？如果是极值点，是极大还是极小？其极值为多少？

解：由题设条件 $\mathrm{g}(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $\mathrm{g}(0)=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{g}(x)=\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\dfrac{\mathrm{g}(x)}{1-\cos x}=0,$

同理 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g^2(x)\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}^2(x)}=0$。 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}^2(x)}=2$，由极限的保号性，在 $x=0$ 的某个邻域 $\mathrm{U}(0,\delta)$ 内，有 $\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}^2(x)}=\dfrac{f(x)-f(0)}{\mathrm{g}^2(x)}>0$, 由此得 对 $\forall x\in \mathrm{U}(0,\delta)$，有

$f(x)>f(0)$，由极值的定义， $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值，其极小值为 0.

4、（10 分）求函数 $y=\ln x$ 的最大曲率.

解： $y'=\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{x^2}$, 由曲率公式，得

$$k(x)=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x^2[1+\frac{1}{x^2}]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}}\quad(x>0)$$

$$k'(x)=\frac{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}-3x^2[1+x^2]^{\frac{1}{2}}}{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{1+x^2}[1-2x^2]}{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}}=0\quad \text{解得 } x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

当 $x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $k'(x)>0$, 当 $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $k'(x)<0$ ，所以当 $k(x)$在$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$处取最大值，最大值为

$k(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$。

5、（10 分）求函数 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 的凹凸区间及拐点**.**

解： $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}, y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$。令 $y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=1$，不存在二阶不可导点。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	+	0	$-$
y	$\cap$	$\ln 2$	$\cup$	$\ln 2$	$\cap$

凸区间有 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，凹区间是 $(-1,1)$，两个拐点是 $(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$。

6、（10 分）求函数 $f(x)=\int_0^{e^x}\dfrac{t^4-16}{1+t}\mathrm{d}t$ 的最小值.

解：因为 $f'(x)=[\int_0^{e^x}\dfrac{t^4-16}{1+t}\mathrm{d}t]'=\dfrac{e^{4x}-16}{1+e^x}e^x$，令 $f'(x)=0$，得到驻点 $x=\ln 2$.

当 $x\le\ln 2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处取得最小值，

$$\min f(x)=\int_0^2\frac{t^4-16}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{(t^4-1)-15}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^2(t^2+1)(t-1)\mathrm{d}t-15\int_0^2\frac{15}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}-15\ln 3$$

7、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0<f'(x)<1, x\in(0,1), f(0)=0$，证明

$$[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x]^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

证：令 $F(t)=[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x]^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x$

$$F'(t)=2f(t)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^3(t)=f(t)[2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)]$$

因为 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 严格递增，因此 $f(x)>f(0)=0$，

令 $g(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)$，$g'(t)=2f'(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)(1-f'(t))>0$，

所以 $g(x)$ 严格递增，因此 $g(x)>g(0)=0$。于是 $F'(t)>0$，从而 $F(1)>F(0)=0$,即

$[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x]^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$。

8、（10 分）已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A\ne 0$. 设 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(0)$.

解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A\ne 0$，得 $f(0)=0$，$\varphi(0)=\int_0^1 f(0\cdot t)\mathrm{d}t=f(0)=0,$

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t\ \underline{\underline{u=xt}}\ \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du,$$

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

9、（10 分）(1) 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x$ (n为自然数)；

(2) 利用 $\Gamma(s)$ 函数的性质，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{(n+1)-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(\mathrm{n}+1)=\mathrm{n}!$

(2) 作变量代换 $x^n=t, dx=\dfrac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{1}{n}\mathrm{t}^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{t}^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})=\Gamma(\frac{1}{n}+1)$$

由于$\Gamma(s)$在$(0,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma(\frac{1}{n}+1)=\Gamma(1)=1$.

附加题：（10 分）

设$f(x)\ge 0$且$f''(x)\le 0$ 对$x\in[a,b]$成立，证明: $f(x)\le\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad x\in[a,b]$.

证明：将$f(x)$在点$t\in[a,b]$处展成一阶泰勒式

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-t)^2，\qquad \xi在x与t之间$$

因为$f''(x)\le 0$，于是 $f''(\xi)\le 0$，则 $f(x)\le f(t)+f'(t)(x-t)$，两边在$[a,b]$上关于t积分

得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dt}\le\int_a^b f(t)\mathrm{dt}+\int_a^b f'(t)(x-t)\mathrm{dt}$$
$$f(x)(b-a)\le\int_a^b f(t)\mathrm{dt}+\int_a^b f'(t)(x-t)\mathrm{dt}$$
$$f(x)(b-a)\le\int_a^b f(t)\mathrm{dt}+f(t)(x-t)\Big|_a^b+\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$$
$$f(x)(b-a)\le 2\int_a^b f(t)\mathrm{dt}+f(b)(x-b)-f(a)(x-a)$$

因为$f(x)\ge 0$, 所以$f(b)\ge 0$, $f(a)\ge 0$, 且$x\ge a$, $b-x\ge 0$，因此

$f(b)(x-b)-f(a)(x-a)\le 0$，故 $f(x)(b-a)\le 2\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$，即$f(x)\le\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.