

第三讲 例题及习题

目录

第三讲 例题及习题	1
一、 例题	2
例 1	2
例 2	2
例 3	2
例 4	2
例 5	2
例 6	2
例 7	3
例 8	3
例 9	3
例 10	3
例 11	3
例 12	3
例 13	3
例 14	4
例 15	4
例 16	4
例 17	4
例 18	4
例 19	4
例 20	4
例 21	5
例 22	5
例 23	5
例 24	5
例 25	5
例 26	5
二、 习题	5
习题 1	5
习题 2	6
习题 3	6
习题 4	6
习题 5	6

一、例题

例 1

$$\int \frac{\ln x + 2}{x \ln x (1 + x \ln^2 x)} dx$$

例 2

$$\int \frac{e^{\sin 2x} \sin^2 x}{e^{2x}} dx$$

例 3

$$\int \frac{(\cos x - 2x \sin x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\sin x}} dx$$

例 4

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{\ln(6-x) + \ln x} dx$$

例 5

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx$$

例 6

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx$$

例 7

$$\int \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} dx.$$

例 8

$$\int_{-\pi}^{\pi} \arctan e^x dx.$$

例 9

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

例 10

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$$

例 11

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx, (a > 0, b > 0)$$

例 12

$$\text{已知 } k > 0, \text{ 求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + k^2 \cos^2 x) dx$$

例 13

$$\text{已知 } n \in N^+, \text{ 求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

例 14

求 $\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分

例 15

已知 $\int \frac{1}{(a+b\cos x)^2} dx = \frac{A \sin x}{a+b\cos x} + B \int \frac{1}{(a+b\cos x)} dx$ (a, b 为常数), 求实数 A, B .

例 16

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

例 17

$f(x)$ 具有可微的反函数 $g(x)$, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 试证明:

$$\int g(x) dx = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

例 18

若 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称, 且 $a < T < b$. 证明: $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx$.

例 19

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导数, 证明: $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \geq \frac{[f(b) - f(a)]^2}{b - a}$.

例 20

已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续, $\int_0^1 f(x) dx = 1$. 证明: $\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \geq \frac{4}{\pi}$.

例 21

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) > 0$. 求证: $\ln\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx$

例 22

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 求证: $\left(\int_a^b f(x) dx\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$.

例 23

已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有连续导数, $f'(x) > 0$. 求证: $\left|\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx\right| \leq \frac{2[f(2\pi) - f(0)]}{n}$.

例 24

已知 $f(x)$ 连续, $f(x) \geq 0$, $\int_{-a}^b xf(x) dx = 0$. 求证: $\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx, \forall a > 0, b > 0$.

例 25

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b xf(x) dx = 0$. 求证: $\exists \xi \neq \eta \in (a, b), f(\xi) = f(\eta) = 0$.

例 26

已知 $y = f(x)$ 可导, 单调递增, $f(0) = 0$. 设其反函数为 $x = g(y)$, 求证:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy \geq ab, \forall a > 0, b > 0.$$

二、习题

习题 1

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + \cos x e^{\sin x})} dx$$

习题 2

$$\text{求} \int_0^1 \sin(\ln x) \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx, (a > 0, b > 0)$$

习题 3

$$\int \frac{1+x^2 \sin x}{(1+x \cos x)^2} dx$$

习题 4

$$\text{已知} f(x) \text{在} [0, \pi] \text{上连续, } \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0.$$

求证: $\exists \xi \neq \eta \in (0, \pi), f(\xi) = f(\eta) = 0$.

习题 5

$$\text{求} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx$$