厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期末试题

考试日期：2017 年 1 月　　信息学院自律督导部

自律督导部

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

2. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}+x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int \sec^4 \mathrm{d}x$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

三、（8 分）求反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x$。

四、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，且满足：

$$f(x)=e^x+\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x\text{，试求 } f(x)\text{。}$$

五、计算下列极限：（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{k}{n})$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t}$

六、（9 分）求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 的通解。

七、（10 分）求微分方程 $y''-y=2(e^x+\cos x)$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解。

八、(10 分)有一向上凹的光滑曲线在原点与 x 轴相切，且该曲线在任一点(x,y)处的曲率为 e^{-y}，

求该曲线的方程 $(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$。

九、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，试证：对于任何的 $b>a>0$，

有 $b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ 。

十、（5 分）设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上连续，且对任意给定的 $x\in[0,a]$，均有 $f(x)\le\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，试证：$f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[0,a]$。