厦门大学第十五届“景润杯”数学竞赛试卷

（非数学类，2018.6.3）

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，总计 30 分）

1．1；

2．$\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$；

3．$\frac{x}{1+x\cos x}+C$；

4．$\sqrt{2}$；

5．$\frac{3\pi}{4}$；

6．$\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$；

7．$x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|\le 1$；

8．$\cos x-\sin x$；

9．$\frac{4}{15}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\pi R^5$；

10．$-2\pi^2$.

二、（本题 6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\int_0^1(1+\sin\frac{\pi}{2}t)^n\mathrm{d}t]^{\frac{1}{n}}$.

解：利用 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<1\,(0<x<\frac{\pi}{2})$，得

$$[\int_0^1(1+t)^n\mathrm{d}t]^{\frac{1}{n}}<[\int_0^1(1+\sin\frac{\pi}{2}t)^n\mathrm{d}t]^{\frac{1}{n}}<(\int_0^1 2^n\mathrm{d}t)^{\frac{1}{n}}=2,$$

即 $[\frac{2^{n+1}-1}{n+1}]^{\frac{1}{n}}<[\int_0^1(1+\sin\frac{\pi}{2}t)^n\mathrm{d}t]^{\frac{1}{n}}<2$.

注意到，$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{2^{n+1}-1}{n+1}]^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n+1}{n}}[\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{n+1}]^{\frac{1}{n}}=2$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}[\int_0^1(1+\sin\frac{\pi}{2}t)^n\mathrm{d}t]^{\frac{1}{n}}=2$.

三、（本题 6 分）设 $a>0$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$ 的敛散性.

解：$\frac{1}{a^{\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n\ln a}}=\frac{1}{n^{\ln a}}$，

故当 $\ln a>1$，即 $a>\mathrm{e}$ 时，级数收敛；

$0<a\le\mathrm{e}$ 时，$\ln a\le 1$，级数发散.

四、（本题 6 分）计算定积分 $I=\int_0^1\arctan x\cdot\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

解：$\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$；

于是，$\int_0^1\arctan x\cdot\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1\arctan x[x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x]'\mathrm{d}x$

$=[x\ln(1+x^2)-2x]\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\ln(1+x^2)-2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\arctan^2 x\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{4}(\ln 2-2)+\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)\Big|_0^1+\ln(1+x^2)\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{4}(\ln 2-2)+\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}\ln^2 2+\ln 2$.

五、（本题 6 分）设曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，求 $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$.

解：$\int_\Gamma(x+y+z)^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+2\int_\Gamma(xy+yz+zx)\mathrm{d}s=0$

由轮换对称性，$\int_\Gamma xy\mathrm{d}s=\int_\Gamma yz\mathrm{d}s=\int_\Gamma zx\mathrm{d}s$

且 $\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=a^2\int_\Gamma\mathrm{d}s=2\pi a^3$，

故 $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}\cdot 2\pi a^3=-\frac{\pi a^3}{3}$.

六、（本题 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

证明：因为 $f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\left[f(b)-f(\frac{a+b}{2})\right]-\left[f(\frac{a+b}{2})-f(a)\right]$

$$=\left[f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})-f(\frac{a+b}{2})\right]-\left[f(a+\frac{b-a}{2})-f(a)\right]$$

所以作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(\frac{a+b}{2})$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上满足拉格朗日中值定理，所以存在 $\eta\in(a,\frac{a+b}{2})$，使得

$$\varphi(\frac{a+b}{2})-\varphi(a)=\varphi'(\eta)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)=\frac{b-a}{2}\left[f'(\eta+\frac{b-a}{2})-f'(\eta)\right]$$

由于 $f'(x)$ 在 $[\eta,\eta+\frac{b-a}{2}]$ 上满足拉格朗日中值定理，所以存在 $\xi\in(\eta,\eta+\frac{b-a}{2})$，使得

$$f'(\eta+\frac{b-a}{2})-f'(\eta)=\frac{b-a}{2}f''(\xi)$$

上式代入上上式得

$$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi),\quad \left(\xi\in(\eta,\eta+\frac{b-a}{2})\subset(a,b)\right).$$

七、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，证明：

$$\iint_D yf(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $D=[a,b]\times[a,b]$，并由此证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，故 $[f(x)-f(y)](x-y)\ge0$，故

$$\iint_D[f(x)-f(y)](x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge0$$

即 $\iint_D[xf(x)+yf(y)-xf(y)-yf(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge0$.

由轮换对称性，有 $\iint_D xf(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D yf(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint_D xf(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D yf(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$2\iint_D[yf(y)-xf(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge0$$

由于 $\iint_D xf(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则

$$\iint_D yf(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

又 $\iint_D xf(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{d}y=(b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$，故

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

八、（本题 10 分）设函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f(tu,tv)=t^2 f(u,v)$，$f(1,2)=0$，$f_u'(1,2)=3$，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x[1+f(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}\mathrm{d}t$.

解：利用洛必达法则，

$$I=\lim_{x\to 0}[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^3)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]}{\ln(1+x^3)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]}{\ln(1+x^3)}}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]}{\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f_1'(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)(1-\cos x)+f_2'(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{6}f_1'(1,2)+\frac{1}{2}f_2'(1,2)$$

故 $I=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}f_1'(1,2)+\frac{1}{2}f_2'(1,2)}$.

由 $f(tu,tv)=t^2 f(u,v)$ 两边对 t 求导，则 $f_1'(tu,tv)u+f_2'(tu,tv)v=2tf(u,v)$.

取 $t=1,u=1,v=2$，可得 $f_1'(1,2)+2f_2'(1,2)=2f(1,2)$，故

$$f_2'(1,2)=\frac{1}{2}[2f(1,2)-f_1'(1,2)]=\frac{1}{2}[0-3]=-\frac{3}{2}.$$

于是，$I=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{2})}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

九、（本题 10 分）已知两条异面直线为 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x=z-2\\ y=1\end{cases}$，求此二直线相切的最小球面方程.

解：直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}$，

则 L_1 与 L_2 的公垂线的方向向量为

$$\vec{s}=(2,2,1)\times(1,0,1)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}.$$

过 L_1 且平行于 $\vec{s}$ 的平面方程为 $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0$，即 $x-2y+2z-1=0$.

联立方程 $\begin{cases} x-2y+2z-1=0 \\ x=z-2 \\ y=1 \end{cases}$，解得 $(x,y,z)=(-1,1,2)$，这是公垂线与 L_2 的交点.

过 L_2 且平行于 $\vec{s}$ 的平面方程为 $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0$，即 $x+4y-z-1=0$.

联立方程 $\begin{cases} x-2y+2z-1=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{1} \end{cases}$，解得 $(x,y,z)=(\frac{7}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$，这是公垂线与 L_1 的交点.

于是，球面球心坐标为 $\frac{1}{2}(-1+\frac{7}{3},1-\frac{2}{3},2-\frac{4}{3})=(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{3})$，半径为

$$r=\sqrt{(\frac{2}{3}-\frac{7}{3})^2+(\frac{1}{6}+\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3}+\frac{4}{3})^2}=\frac{5}{2}.$$

故所求球面的方程为 $(x-\frac{2}{3})^2+(y-\frac{1}{6})^2+(z-\frac{1}{3})^2=\frac{25}{4}$.

十、（本题 10 分）设 $f(x)$ 是对全体实数有定义的函数，满足方程 $2f(x+1)=f(x)+f(2x)$. 证明：如果 $f(x)$ 是二次连续可微函数，则 $f(x)$ 必是一个常数.

证明：取 $x=0,x=1$，得出

$$f(0)=f(1)=f(2)$$

对 $2f(x+1)=f(x)+f(2x)$ 两端求导，得

$$2f'(x+1)=f'(x)+2f'(2x)$$

再次两端求导，得

$$2f''(x+1)=f''(x)+4f'(2x)$$

因此连续函数 $F(x)=f''(x)$ 满足函数方程

$$2F(x+1)=F(x)+4F(2x)$$

令 $2x=y$，得

$$F(y)=\frac{1}{2}F(\frac{y}{2}+1)-\frac{1}{4}F(\frac{y}{2})$$

又设 $a\ge 2, I=[-a,a], M=\max\limits_{y\in I}|F(y)|$，那么如果 $y\in I$，则显然也有 $\frac{y}{2}\in I,\frac{y}{2}+1\in I$，因此从上式得

$$|F(y)|\le\frac{1}{2}M+\frac{1}{4}M$$

对所有 $y \in I$ 成立，由此又得 $0 \le M \le \frac{3}{4}M$，因此 $M = 0$，由于 $a \ge 2$ 是任意的，故 $F(y)$ 处处等于零。

从 $f''(y) = F(y) = 0$ 得

$$f(y) = Ay + B$$

再由 $f(0) = f(1) = f(2)$ 就得出 $f(y)$ 必为一个常数.