厦门大学第十四届“景润杯”数学竞赛试卷

（非数学类，2017.5.28）

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，总计 30 分）

1． $\int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x =$______________________.

2． $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}}{2})^n =$______________.

3． $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdots(n^2+(2n)^2)} =$_____________.

4． 曲线 $x^y = y^x$ 在 $(2,2)$ 点处的切线方程为___________________.

5． 设 $\Omega(t)$ 是由 $x^2+y^2+z^2 \le t^2$ 及 $z \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ 决定的区域， $f(t)$ 为连续函数，且 $f(1)=2$. 如果

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，那么 $F'(1)=$_________________.

6． 曲面 $z=x^2+y^2$ 上与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直的切平面方程为___________________.

7． 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 2 与 3，并设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ 均存在，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^{2n}$ 的收敛半径为__________.

8． 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(y-x)^2+2$ 的通解为________________________.

9． 设函数 $u(x,y)=(x+y^2)\mathrm{e}^{x+y}$，则 $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}=$______________________________.

10． 设 Σ 为平面 $y+z=5$ 被圆柱面 $x^2+y^2=25$ 所截的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=$_____________.

二、（**本题 6 分**）设 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f(\dfrac{x^2-y^2}{2},xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

三、(**本题 6 分**)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$. 证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{4})$.

四、（**本题 6 分**）设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-n$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

五、（**本题 6 分**）设 $f'(t)$ 在 $t=0$ 处连续，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}\int_{-x}^{x}[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t$.

六、(**本题 6 分**)已知椭球面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$0<c<a<b$），求过 x 轴并与曲面 Σ 的交线是圆的平面方程.

七、（**本题 10 分**）求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n)!}$ 的和.

八、（**本题 10 分**）设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$ 的上侧，函数 $f(x,y)$ 满足：

$$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,y)$.

九、（**本题 10 分**）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ $(x>0,y>0)$，证明:

$$I=\int_0^1\frac{f(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}f(2).$$

十、（**本题 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.