微分方程练习题

1. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=(\ln x)y^2$ 的通解.
2. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}=x\mathrm{e}^y$ 的通解.
3. 求微分方程 $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.
4. 求微分方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2y=x^2$ 的通解.
5. 求方程 $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$ 的通解.
6. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$ 的通解.
7. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$ 的通解.
8. 求微分方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$ 的通解.
9. 求解微分方程 $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.
10. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{x^2+y}$ 的通解.

11. 验证函数 $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ 是微分方程 $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ 的一个解，并求该方程的通解.

12. 已知方程 $y''+p(x)y'-y\cos^2 x=0$ 有两个互为倒数的解，求 $p(x)$ 及该方程的通解.

13. 解下列微分方程：(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\cot\dfrac{y^2}{x}$；(2) $2yy'=\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\dfrac{x^2+y^2}{x}-2x$.

14. 求微分方程 $x(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解.

15. 求微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$ 满足 $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

16. 求微分方程 $\cos^4 x\cdot y''+\cos^2 x\cdot(2-\sin 2x)y'+y=\tan x$ 的通解.

17. 解方程 $(y-x)\sqrt{1+x^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+y^2)^{\frac{3}{2}}$.

18. 求方程 $y''+(x+\mathrm{e}^{2y})y'^3=0$ 的通解.

19. 求微分方程 $y''+(4x+\mathrm{e}^{2y})(y')^3=0\ \ (y'\neq 0)$ 的通解.

20. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数且 $y'\neq 0$， $y=y(x)$ 的反函数满足微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^3=0$， 求原方程满足初始条件 $y(0)=0$， $y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的特解.

21. (1) 解方程 $y''+y=\csc x$；(2) 已知方程 $y''-2(1+\tan^2 x)y=0$ 有一个解是 $y=\tan x$， 求其通解.

22. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且其反函数存在且为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x-1)\mathrm{e}^x+1$ ，求 $f(x)$.

23. 已知 $f(x)$ 可微，且满足 $\int_1^2 \frac{f(t)}{t^3 f(t)+t}\mathrm{d}t=f(x)-1$ ，求 $f(x)$.

24. 设 $f(x)=\cos x-\int_0^x uf(x-u)\mathrm{d}u$ ，其中 $f(u)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

25. 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ ，求 $f(x)$.

26. 设函数 $f(u)$ 有连续的一阶导数， $f(2)=1$，且函数 $z=xf(\frac{y}{x})+yf(\frac{y}{x})$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2$， $x>0$， $y>0$，求 z 的表达式.

27. 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$ ，求 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的微分方程，并求其通解.

28. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ ， $y\in(-\infty,+\infty)$ 。成立 $f(x+y)=f(x)\mathrm{e}^y+f(y)\mathrm{e}^x$，且 $f'(0)$ 存在， $f'(0)=a\neq 0$，求 $f(x)$.

29. 设函数 $f(x)$ 可导，且对于任意 $x, y, xy\neq 1$，都有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1-xy})$ ，求 $f(x)$.

30. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且对于任意的 x, y ，都有 $f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$ ，求 $f(x)$.

31. 设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''<0$，曲线上任一点处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ ，且曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求 $y=y(x)$ 的最大值.

32. 设初值问题$\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(2x^2+1)y=x^2, x\geq 1 \\ y(1)=y_1 \end{cases}$，讨论$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

33. 设$y(x)$在区间$[0,+\infty)$上存在连续的一阶导数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}(y'(x)+y(x))=0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

34. 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续且有界. 是证明：微分方程$y''+5y'+4y=f(x)$的任意一个解在$[a,+\infty)$上有界.

35. 设函数$p(x)$与$q(x)$在$[a,b]$上连续，$q(x)<0$，并设$y=y(x)$是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$满足初始条件$y(a)=y(b)=0$的解，是证明：

$y(x)\equiv 0, \in[a,b]$.