2022.12.19-1

2022年12月19日 7:51

作业：5-4：1(4)(6)(8)

总五：18(2)

6-2：1(2)(3)，2(4)，6

总六：5

二、无界函数的反常积分

定义2：设 $f\in C(a,b]$，在点 a 的右邻域内无界

取 $t>a$，若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$ 存在

则称此极限为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分

记作 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

类似地，若 $f\in C[a,b)$，而在 b 点的左邻域内无界，则定义 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除了点 c $(a<c<b)$ 处连续，而在点 c 的邻域内无界，则定义

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$$

这里任何一个极限不存在，就称反常积分发散。

定义中的无界点常称为瑕点（奇点），无界函数的反常积分又称为瑕积分。

· 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，由 N-L 公式，有

若 b 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to b^-} F(x)\Big|_a^t = F(b^-)-F(a)$

若 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to a^+} F(x)\Big|_t^b = F(b)-F(a^+)$

若 a、b 都为瑕点，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b^-)-F(a^+)$

若瑕点 $c\in(a,b)$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b)-F(c^+)+F(c^-)-F(a)$$

$$\neq F(b)-F(a)$$

例4：求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$

解：a 为瑕点

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a^-} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

例5：求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

解：$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \cancel{-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -1-1=-2}$

$x=0$ 是瑕点

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{0^+}^1 = +\infty \text{ 发散}$$

例6：证明 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geq 1$ 时发散。

证：当 $p=1$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_{a^+}^b = +\infty \text{ 发散}$$

$\int_a \frac{}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_{a^+} = +\infty$ 发散.

当 $p \neq 1$ 时.

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{a^+}^{b} = \begin{cases} +\infty, & p>1 \text{ 发散} \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1 \end{cases}$$

☆

例7：设 $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求 $\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$

解、$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) + C$

$x=0$ 与 $x=2$ 是 $f(x)$ 的瑕点.

$$\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx + \int_{0}^{2} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx + \int_{2}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$= \Big[\arctan f(x)\Big]_{-1}^{0^-} + \Big[\arctan f(x)\Big]_{0^+}^{2^-} + \Big[\arctan f(x)\Big]_{2^+}^{3}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\arctan\frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}\right) = \arctan\frac{32}{27} - 2\pi$$

例8：求 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

解：令 $t = \frac{1}{x}$，则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{t^4}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

从而 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx\right)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ $\quad 1 \quad 0^+$

说明：1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx \xlongequal{t=x-\frac{1}{x}} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2+2}$$

2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx$

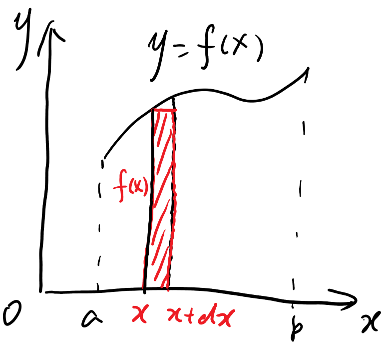
§2. 几何应用

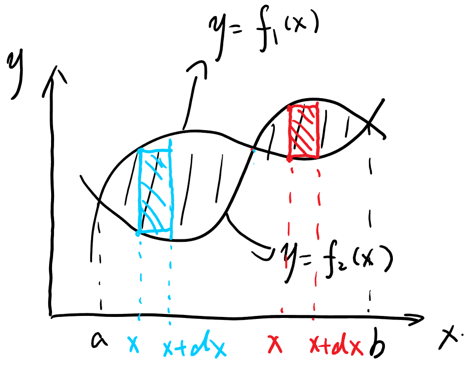
一. 平面图形的面积.

1. 直角坐标情形

$$dA = f(x)\,dx$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$





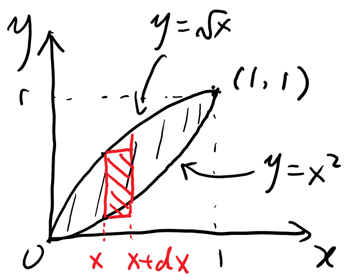
$dA=\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\cdot dx$

$dA=\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$

$\Rightarrow dA=|f_1(x)-f_2(x)|dx$

$$\underline{A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx}$$

例1：求 $y^2=x$，$y=x^2$ 所围成的图形的面积



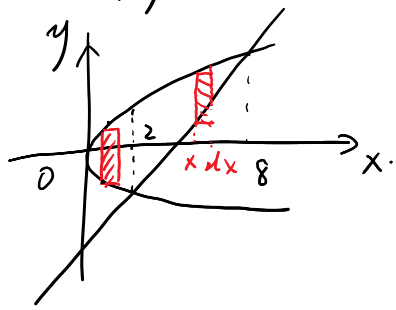
解：$dA=(\sqrt{x}-x^2)\,dx.$

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$$

联立 $\begin{cases} y^2=x \\ y=x^2 \end{cases}$ 得交点 $(0,0),(1,1)$

例2：求 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围的图形的面积.

解：联立 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点 $(2,-2)$，$(8,4)$



法一：

以 x 为积分变量.

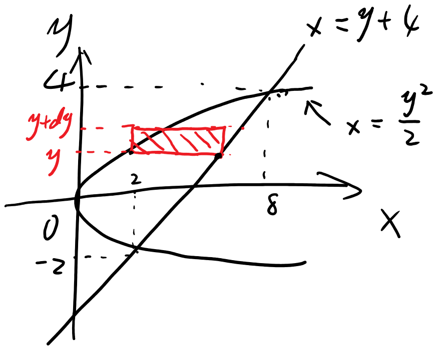
$$dA_1=2\sqrt{2x}\cdot dx$$

$$dA_2=(\sqrt{2x}-(x-4))\cdot dx$$

$$A=\int_0^2 2\sqrt{2x}\,dx+\int_2^8(\sqrt{2x}-(x-4))\,dx$$

法二：

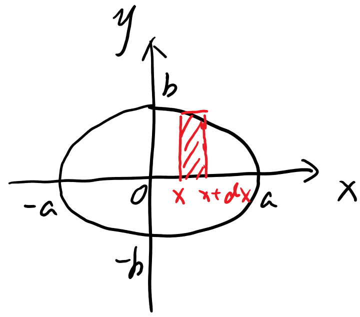
以 y 为积分变量：



$$dA=\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\cdot dy$$

$$A=\int_{-2}^4\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy=18$$

例3：求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积 $(a,b>0)$



解：$A=4\int_0^a y\,dx=4\int_0^a y(x)\,dx$

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

当 $x=0$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$；当 $x=a$ 时，$\theta=0$

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)\,d\theta=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\pi ab$$

当 $a=b$ 时. 圆面积 πa^2