厦门大学第十四届“景润杯”数学竞赛试卷（非数学类）

评分标准

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，总计 30 分）

1．$\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+\frac{1}{2}\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})+C$；2．$\sqrt{15}$；3．$25\mathrm{e}^{-4+2\arctan 2}$；

4．$y=x$；5．2π；6．$2x+2y-z-2=0$；7．$\frac{2}{3}$；8．$y=x+\tan(x+C)$；

9．$[x+y^2+2ny+m+n(n-1)]\mathrm{e}^{x+y}$；10. $125\sqrt{2}\pi$.

二、（本题 6 分）设 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f(\frac{x^2-y^2}{2},xy)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解：$\frac{\partial g}{\partial x}=xf_1+yf_2$，$\frac{\partial g}{\partial y}=-yf_1+xf_2$，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=f_1+x(xf_{11}+yf_{12})+y(xf_{21}+yf_{22})=f_1+x^2f_{11}+2xyf_{12}+y^2f_{22};$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_1-y(-yf_{11}+xf_{12})+x(-yf_{21}+xf_{22})=-f_1+y^2f_{11}-2xyf_{12}+x^2f_{22};$$

于是，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)f_{11}+(x^2+y^2)f_{22}=(x^2+y^2)(f_{11}+f_{22})=x^2+y^2$.

三、（本题 6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$.证明：存在 $\xi\in[0,\frac{3}{4}]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$.

证明：作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{4})$，

于是，$F(0)+F(\frac{1}{4})+F(\frac{1}{2})+F(\frac{3}{4})$

$=f(0)-f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})-f(\frac{3}{4})+f(\frac{3}{4})-f(1)=0$.

分两种情况讨论：

（1）在$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$中存在$a$，使得$F(a)=0$，取$\xi$为$a$，此时$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$.

（2）若$F(0)$，$F(\frac{1}{4})$，$F(\frac{1}{2})$，$F(\frac{3}{4})$全不为零，取$x_1=0$.

因为$F(x_1)\neq 0$，因为$F(0)+F(\frac{1}{4})+F(\frac{1}{2})+F(\frac{3}{4})=0$，故在$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$中存在$x_2$，使得$F(x_2)F(x_1)<0$.

由函数$F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{4})$的连续性，存在$\xi\in(x_1,x_2)\subset[0,1]$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$.

四、（本题 6 分）设函数$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-n$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$.

由麦克劳林公式得，$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2$，其中$\xi$介于$0$和$x$之间.

因此，当$x>0$时，$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+g(x)$，其中$|g(x)|\le\frac{1}{8}x^2$.

于是，$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{k}{2n^2}+g(\frac{k}{n^2})]=\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\sum\limits_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n^2})$

注意到$\left|g(\frac{k}{n^2})\right|\le\frac{k^2}{8n^4}$，故$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n^2})\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\left|g(\frac{k}{n^2})\right|\le\frac{1}{8n}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{8n}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{8n}\cdot\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n^2})=0$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

五、（本题 6 分）设$f'(t)$在$t=0$处连续，求$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_{-x}^{x}[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t$.

解：因为$f'(t)$在$t=0$处连续，从而可取充分小的$x>0$，使得$f(t)$在$[-2x,2x]$上连续. 由积分中值定理得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_{-x}^{x}[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}[f(\xi+x)-f(\xi-x)]\cdot 2x$$

其中$-x\le\xi\le x$.

由微分中值定理，存在$\eta\in(\xi-x,\xi+x)$，使得$f(\xi+x)-f(\xi-x)=f'(\eta)2x$.

于是，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}\int_{-x}^{x}[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0^+}4f'(\eta)=4f'(0).$

六、（本题 6 分）已知椭球面$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$0<c<a<b$），试求过$x$轴并与曲面$\Sigma$的交线是圆的平面方程.

解：设所求的平面方程为$y+\lambda z=0$，它与椭球面的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y+\lambda z=0\end{cases}.$$

因为该交线关于原点对称，因此圆心在原点上.

又$(a,0,0)$和$(-a,0,0)$在交线上，故圆的半径为a. 因此交线上的点与原点的距离为a.

设(x,y,z)为交线上任意一点，则$x^2+y^2+z^2=a^2$，

即 $$a^2\left(1-\frac{\lambda^2 z^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+\lambda^2 z^2+z^2=a^2,$$

可得$\left(\lambda^2-\dfrac{\lambda^2 a^2}{b^2}-\dfrac{a^2}{c^2}+1\right)z^2=0$，

故$\lambda^2=\dfrac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\dfrac{b^2}{b^2-a^2}$，即$\lambda=\pm\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}$.

于是，所求的平面方程为$y+\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}z=0$或$y-\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}z=0$.

七、（本题 10 分）求数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n)!}$的和.

解：考虑幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

记$u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$，令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0$，

故幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$的收敛域为幂级数$(-\infty,+\infty)$.

设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$，注意到

$$S(x)+S'(x)+S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}=\mathrm{e}^x.$$

且 $S(0)=1,\ S'(0)=0$.

由 $r^2+r+1=0$ 得 $r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故方程 $S(x)+S'(x)+S''(x)=0$ 的通解为

$S_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

注意到：$\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$ 为方程 $S(x)+S'(x)+S''(x)=\mathrm{e}^x$ 的一个特解，故 $S(x)+S'(x)+S''(x)=\mathrm{e}^x$ 的通解为

$S(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$.

由 $S(0)=C_2+\frac{1}{3}=1$ 得 $C_2=\frac{2}{3}$.由 $S'(0)=-\frac{1}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_1+\frac{1}{3}=0$ 得 $C_1=0$.于是，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

取 $x=1$，可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\mathrm{e}.$

八、(**本题 10 分**) 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\ge 0)$ 的上侧，函数 $f(x,y)$ 满足：

$$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint_{\Sigma}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,y)$.

解：$a=\iint_{\Sigma}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$f(x,y)=2(x-y)^2+a.$$

设 Σ_1 为 $z=0$，$(x,y)\in D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 的下侧. Ω 是由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域.

于是，

$$\begin{aligned}a=&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&-\iint_{\Sigma_1}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由高斯公式，得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}[z^2+\mathrm{e}^z+z^2+\mathrm{e}^z+f(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_{\Omega}[2z^2+f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[2z^2+2(x-y)^2+a]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[2(x^2+y^2+z^2)+a]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r+a\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 1^3$$

$$=\frac{4}{5}\pi+\frac{2}{3}\pi a.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\times\pi\times 1^2=2\pi.$$

故 $a=\frac{4}{5}\pi+\frac{2}{3}\pi a-2\pi.$ 解得 $a=\frac{18\pi}{5(2\pi-3)}$.

于是， $f(x,y)=2(x-y)^2+\frac{18\pi}{5(2\pi-3)}$.

九、（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ $(x>0,y>0)$，证明: $I=\int_0^1\frac{f(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}f(2)$.

证明：令 $x=\tan t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(1+\tan t)}{\sec^2 t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(1+\tan t)\mathrm{d}t$.

令 $u=\frac{\pi}{4}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(1+\tan t)\mathrm{d}t=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 f(1+\tan(\frac{\pi}{4}-u))\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u})\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\frac{2}{1+\tan u})\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\frac{2}{1+\tan t})\mathrm{d}t.$$

于是， $2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(1+\tan t)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\frac{2}{1+\tan t})\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(1+\tan t)+f(\frac{2}{1+\tan t})]\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}f(2).$$

故 $I=\int_0^1\frac{f(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}f(2)$.

十、（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

证明一：因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，故 $\int_0^{\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$ 可积.

$$\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$ 上必取得最大值和最小值. 设最小值点和最大值点分别为 $\xi_{n,k}^{(1)}$， $\xi_{n,k}^{(2)}$，且 $\xi_{n,k}^{(1)},\xi_{n,k}^{(2)}\in[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$，则

$$f(\xi_{n,k}^{(1)})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x\le\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x\le f(\xi_{n,k}^{(2)})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x .$$

因为 $\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{2}{n}$，

故
$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}^{(1)})\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x\le\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}^{(2)}) ,$$

注意到 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积，于是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}^{(1)})=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}^{(2)})=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}^{(1)})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}^{(2)})=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x .$$

由夹逼极限准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x .$$

证明二：因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，故 $\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$ 可积.

$$\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$ 上连续，且 $|\sin nx|\ge 0$，由积分第一中值定理，存在 $\xi_{n,k}\in[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$，使得

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=f(\xi_{n,k})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x .$$

因为 $\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{2}{n}$，

故
$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}) ,$$

注意到 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积，于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k})=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$，

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x .$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.