第二讲 例题及习题

目录

一、例题

例 1

已知$f(x)$可导，则函数$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$在$x=0$可导的充要条件是：__________.

例 2

已知$f(x)$在$x=0$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(x+1)}{x^2}=2$, 求$f'(0)$.

例 3

若$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a$, 证明$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

例 4

设$L(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$, 求$L(1)$.

例 5

设$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$, 求$y^{(n)}(0)$.

例 6

求$(e^x\sin x)^{(n)}$.

例 7

已知$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$f(a)=f(b)$, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

例 8

$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导且$f(0)=f'(0)$, $f(\frac{1}{2})=0$. 求证: $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

例 9

函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 求证：对$\forall x\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,b)$,

使得 $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

例 10

函数$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$\int_a^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$.

例 11

$f(x)$在$[a,b]$可导, $f(a)=f(b)=1$, 证明$\exists\xi,\eta\in(a,b)$, $s.t.\ e^{\xi-\eta}(f(\xi)+f'(\xi))=1$.

例 12

$f(x)$在$[0,1]$上可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证: 对$\forall a>0, b>0$, $\exists\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$,

使得: $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

例 13

$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0,\ f'_+(a)>0,$ 求证：$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f''(\xi)<0.$

例 14

$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0,\ \min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1,$ 求证：$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8.$

例 15

已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1),\ \ f(0)=0,$ 求证：

对$\forall n,m\in N^*,\exists\xi\in(0,1),\ n\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=m\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$

例 16

$f(x),g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$g''(x)\neq 0,\forall x\in(a,b),\ f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0.$

求证：$\exists\xi\in(a,b),\ \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}.$

达布定理

设$f(x)$在$[a,b]$上可导，则对$\forall C: f'(a)<C<f'(b),$ 都存在$\xi\in(a,b)$ 使得$f'(\xi)=C.$

例 17

设$f(x),\ g(x)$在$[a,b]$上有可导，$g'(x)\neq 0,$ 求证：对任意$C,\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)}<C<\dfrac{f'(b)}{g'(b)},$

都存在$\xi\in(a,b),$ 使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C.$

例 18

设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且在$(a,+\infty)$内可微，如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$,
则$\exists\xi\in(a,+\infty)$, $s.t.\ f'(\xi)=0.$

例 19

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且在$(-\infty,+\infty)$内可微，如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$,
则$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$, $s.t.\ f'(\xi)=0.$

二、练习

习题 1

$f(x)$在$[a,b]$上有三阶连续导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(b)+f'(a))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

习题 2

$f(x)$在$[a,b]$有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$, 求证 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

习题 3

$f(x), g(x)$在$[a,b]$上有一阶导数，$g'(x)\neq 0$, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$, $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}$