1. 若$a_1=\begin{bmatrix}1\\3\\4\\-2\end{bmatrix}$，$a_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\t\end{bmatrix}$，$a_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$线性相关，则 t 的值为______

【分析】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,按分量写出,即有

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+tx_2=0. \end{cases}$$

对系数矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&-1\\4&3&2\\-2&t&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-5&-10\\0&-5&-10\\0&t+4&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&t+4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&6-2(t+4)\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关$\Leftrightarrow[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$有非零解

$$\Leftrightarrow \text{秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3,$$

故 $6-2(t+4)=0$,即 $t=-1$.

2. 如果向量组$a_1 = \begin{bmatrix} k \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ k+5 \end{bmatrix}$线性无关，那么 k≠_____、_____、_____

令 $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$，向量组 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.

$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 2 & k & 3 \\ 3 & 3 & k+5 \end{vmatrix}$，将 $|A|$ 按第一行展开，那么可以得到：

$$|A| = k \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & k+5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & k+5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ k & 3 \end{vmatrix}$$

$$= k(k^2+5k-9) - 2(2k+1) + 3(6-3k)$$

$$= k(k^2+5k-9) - 4k - 2 + 18 - 9k$$

$$= k^3 + 5k^2 - 22k + 16$$

$$= k(k^2+5k-6) - 16(k-1)$$

$$= k(k+6)(k-1) - 16(k-1)$$

$$= (k^2+6k-16)(k-1)$$

$$= (k+8)(k-2)(k-1)$$

由于 $|A| \neq 0$，因此 $k \neq -8$、$k \neq 2$、$k \neq 1$