第一节 二维随机变量

- 二维随机变量的分布函数
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量
- 课堂练习
- 小结 布置作业

从本讲起，我们开始第三章的学习.

它是第二章内容的推广.

一维随机变量及其分布

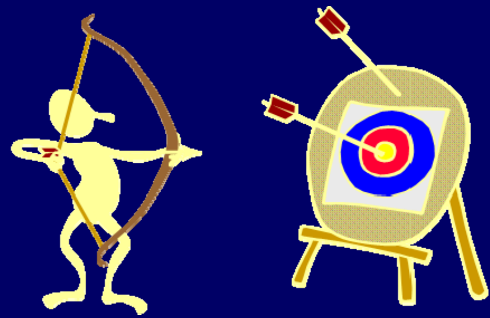
↓

多维随机变量及其分布

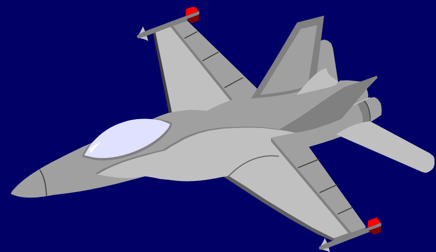
由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量 .

到现在为止，我们只讨论了一维*r.v*及其分布. 但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

在打靶时,命中点的位置是由一对*r .v* (两个坐标)来确定的.



飞机的重心在空中的位置是由三个r .v (三个坐标)来确定的等等.



我们需要研究的不仅仅是各个r.v.各自的性质， 更需要了解这些r.v.之间的相互依赖和制约关系，因此，我们应当将它们作为一个整体来进行研究。

定义

一般地，设E是一个随机试验，它的样本空间是

$S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e)$，$X_2=X_2(e)$，$\cdots$，$X_n=X_n(e)$

是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个n 维向量

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 叫做n**维随机向量**或**n维随机变量**。

以下重点讨论二维随机变量.

请注意与一维情形的对照 .

一、二维随机变量的分布函数

【定义1】设(X,Y)是二维随机变量，

如果对于任意实数 x, y，二元函数：

$$
\begin{aligned}
& F(x,y) \\
&= P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \\
&\triangleq P(X \le x, Y \le y)
\end{aligned}
$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，

或者称为随机变量X和Y的联合分布函数。

一维随机变量

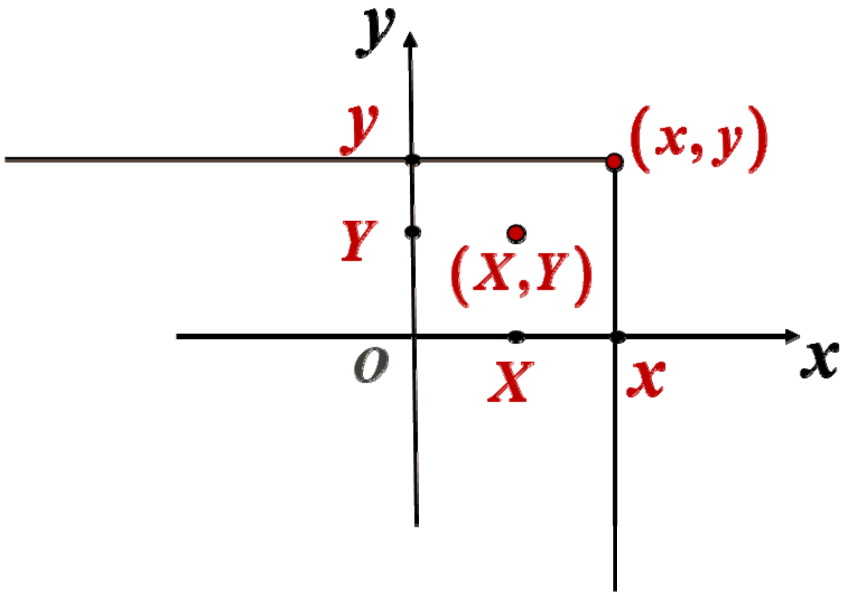
X的分布函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$-\infty < x < \infty$$

分布函数的函数值的几何解释

将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么分布函数$F(x,y)$在点(x,y)处的函数值就是随机点(X,Y)落在下图所示的点(x,y)左下方的无穷矩形域内的概率。

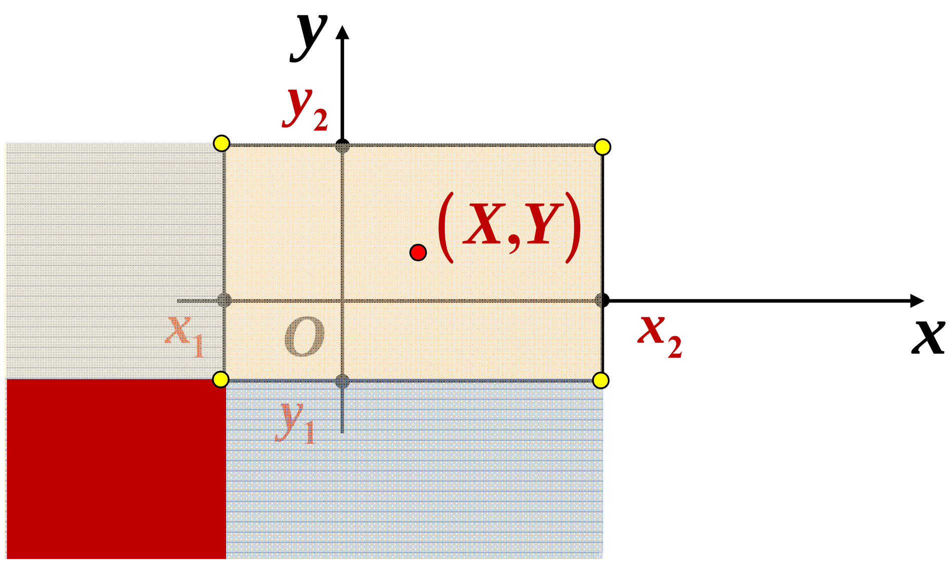


随机点(X,Y) 落在矩形域 $[x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2]$**内**

的概率为 $P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \quad \geq 0$$

非负性



分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是关于变量 x 和 y 的不减函数

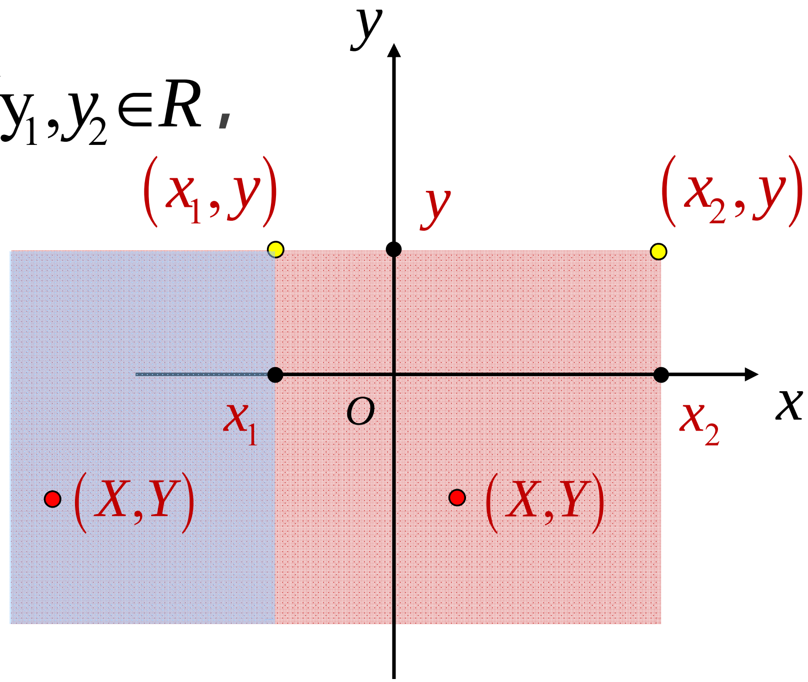
对任意固定的 $y\in R$ 及$\forall x_1,x_2\in R$，当 $x_1 < x_2$ 时

$$F(x_1,y)\le F(x_2,y)；$$

对任意固定的 $x\in R$ 及$\forall y_1,y_2\in R$，

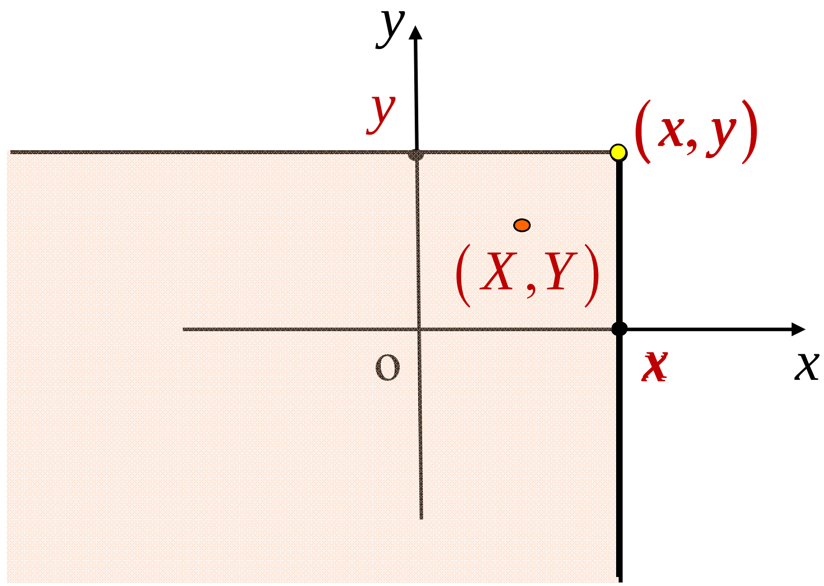
当 $y_1 < y_2$ 时

$$F(x,y_1)\le F(x,y_2)；$$



2. $0 \le F(x,y) \le 1$, **且对任意固定的** $y \in R$, $F(-\infty, y) = 0$,

对任意固定的 $x \in R$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.



3. $F(x,y) = F(x+0, y)$, $F(x,y) = F(x, y+0)$.　　右连续性

二、二维离散型随机变量

【定义2】如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)是离散型随机变量。

设二维离散型随机变量(X,Y)可能取的值是(x_i,y_j), $i,j=1,2,\cdots$,

记 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$,

$i,j=1,2,\cdots$

称之为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，或随机变量X和Y的联合分布律。

一维随机变量 X
离散型 X 的分布律

$P(X=x_k)=p_k$,

$k=1,2,\ldots$

$$\begin{cases} p_k \ge 0, \quad k=1,2,\ldots \\ \sum_k p_k = 1 \end{cases}$$

二维离散型随机变量(X,Y)的分布律具有性质

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,\cdots \\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

也可用表格来表示随机变量X和Y 的联合分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$					
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$					

【例】一个口袋中有三个球， 依次标有数字1， 2， 2， 从中任取一个， 不放回袋中， 再任取一个， 设每次取球时， 各球被取到的可能性相等.以X、Y分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字， 求 (X,Y)的联合分布列.

解：(X,Y)的可能取值为(1， 2)， (2， 1)， (2， 2).

$$P\{X=1,\ Y=2\}=(1/3)\times(2/2)=1/3,$$

$$P\{X=2,\ Y=1\}=(2/3)\times(1/2)=1/3,$$

$$P\{X=2,\ Y=2\}=(2/3)\times(1/2)=1/3,$$

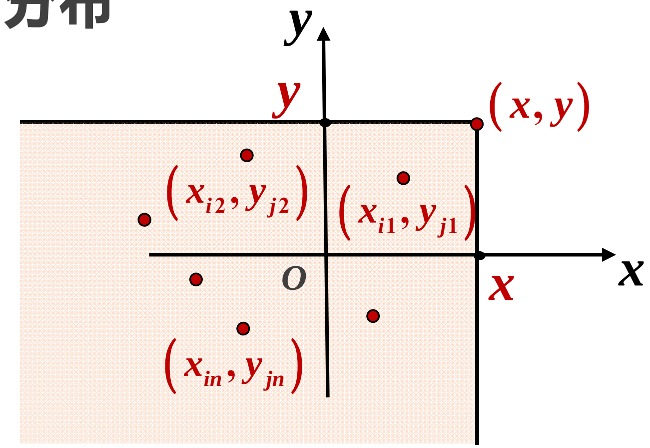
X \ Y	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

由联合概率分布律可以确定联合分布函数：

离散型随机变量X和Y的联合分布

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

其中，和式是对一切满足$x_i\le x,\ y_j\le y$的p_{ij}求和。



【例1】把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X ,Y) 的分布律 .

解：（ X, Y ）可取值 (0,3) , (1,1) , (2,1) , (3,3)

$$P\{X=0, Y=3\} = (1/2)^3 = 1/8$$

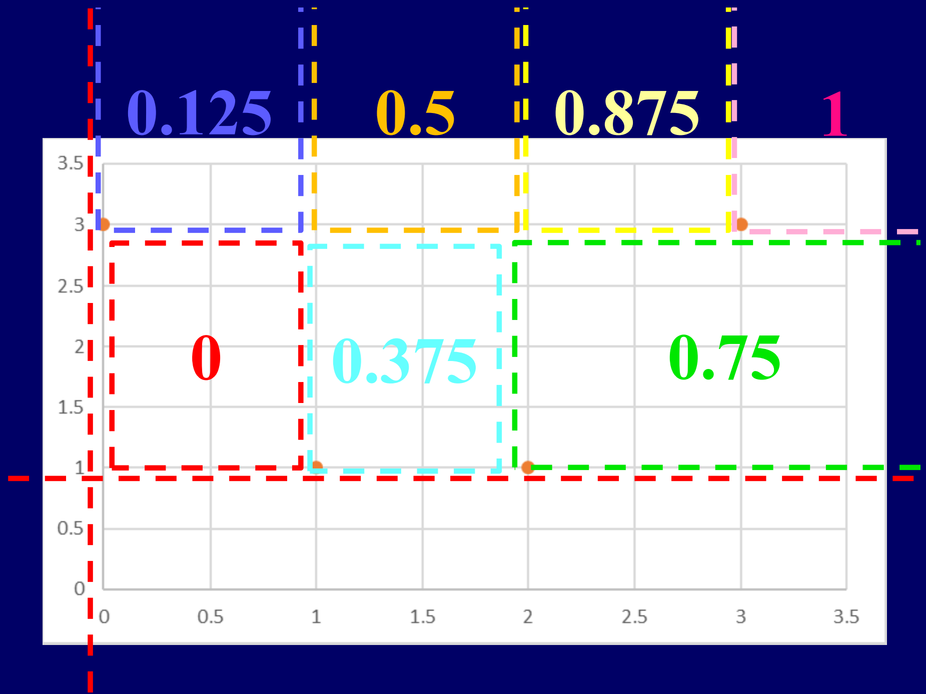
$$P\{X=1, Y=1\} = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3/8$$

$$P\{X=2, Y=1\} = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 3/8$$

$$P\{X=3, Y=3\} = (1/2)^3 = 1/8.$$

$X \backslash Y$	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

【例2】把一枚均匀硬币抛掷三次，设*X*为三次抛掷中正面出现的次数，而 *Y* 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (*X* ,Y) 的分布律 .

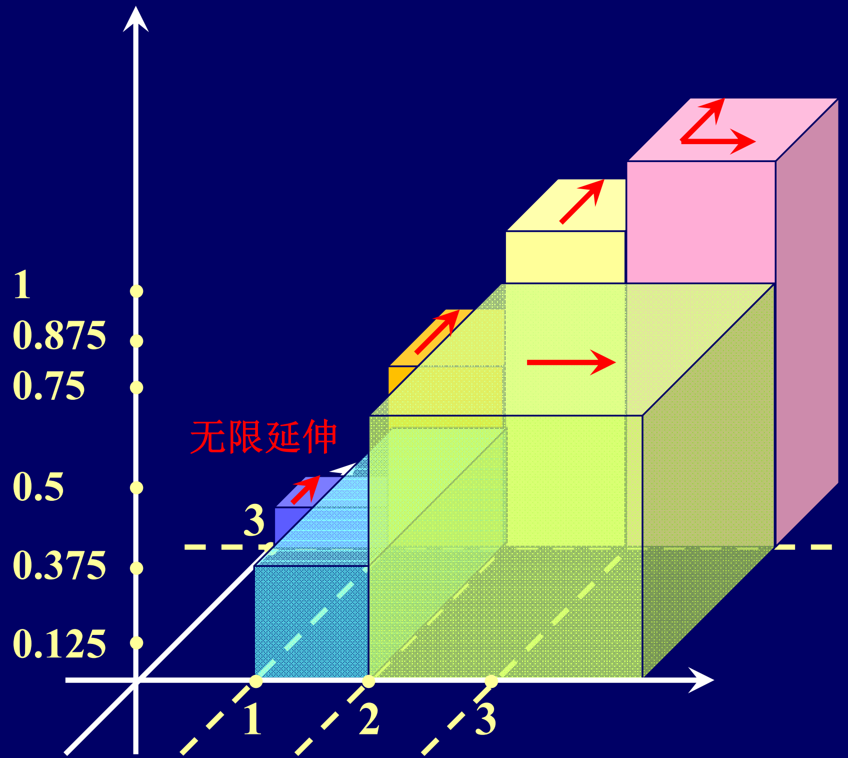


X \ *Y*	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

【例2】把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X, Y) 的分布律 .

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<1\text{或 }(0\le x<1\text{且}y<3) \\ 0.125, & 0\le x<1\text{且}y\ge 3 \\ 0.375, & 1\le x<2\text{且}1\le y<3 \\ 0.5, & 1\le x<2\text{且}y\ge 3 \\ 0.75, & 2\le x\text{且}1\le y<3 \\ 0.875, & 2\le x<3\text{且}y\ge 3 \\ 1, & x\ge 3\text{且}y\ge 3 \end{cases}$$

$X \backslash Y$	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8


1
0.875
0.75
0.5
0.375
0.125
无限延伸
3
1
2
3

三、二维连续型随机变量

定义3 对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$,如果存在非负可积的函数 $f(x,y)$,使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量,函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度,或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

一维随机变量 X

连续型

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$-\infty < x < +\infty$$

X 的概率密度函数

$f(x) \quad x \in R$

$$f(x) \geq 0$$

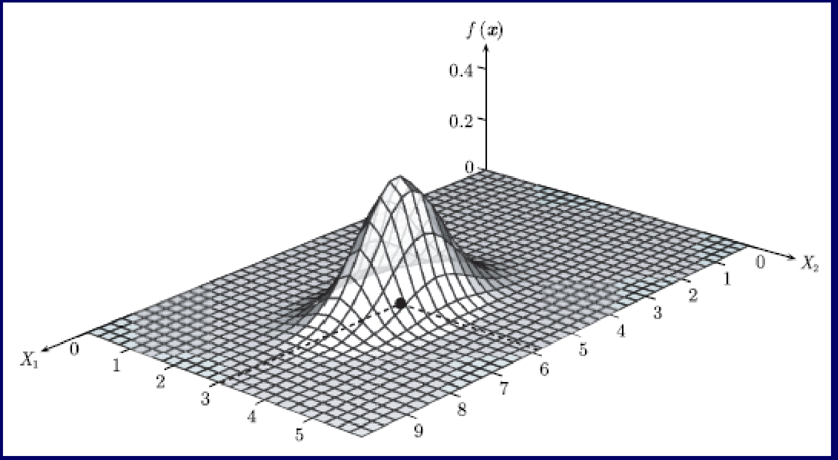
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度具有性质

1. $f(x,y) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

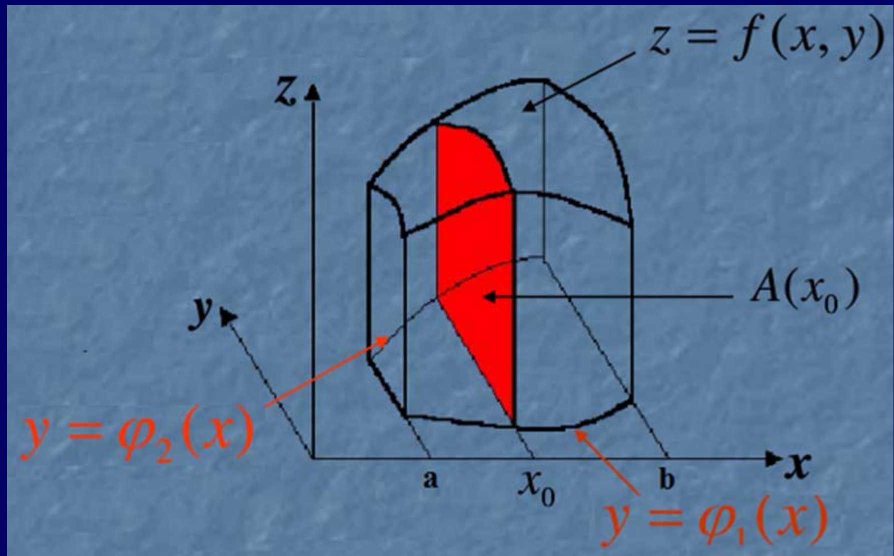
$$\left(\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = 1\right)$$



几何上表示：空间中的一个曲面 $z=f(x,y)$ 与 xoy 平面之间的空间区域的体积为 1。

3．设 G 是 xOy 平面上的区域，则有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy;$$



二重积分是二元函数在空间上的积分，其本质是求曲顶柱体体积，计算方法是化为二次积分。

计算二重积分需要注意以下几点:

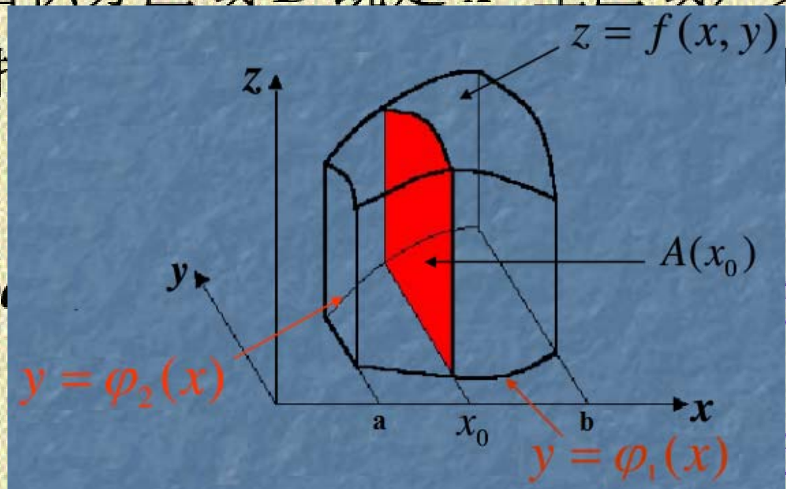
(1) 在计算二重积分时，首先根据已知条件确定积分区域 **D** 是 **x--**型还是 **y--**型区域，由此确定将二重积分化为先 **y** 后 **x** 的二次积分还是先 **x** 后 **y** 的二次积分。 $D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$ $D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$

(2) 当积分区域 **D** 既是 **x--**型区域，又是 **y--**型区域时，扌 … 尤有两种积分顺序:

$\iint_D f(x,y)$ … y 后 x

… x 后 y

$\psi_1(y)$



二重积分的计算法http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5309/530902.htm

【P63 例2】设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求分布函数$F(x,y)$;

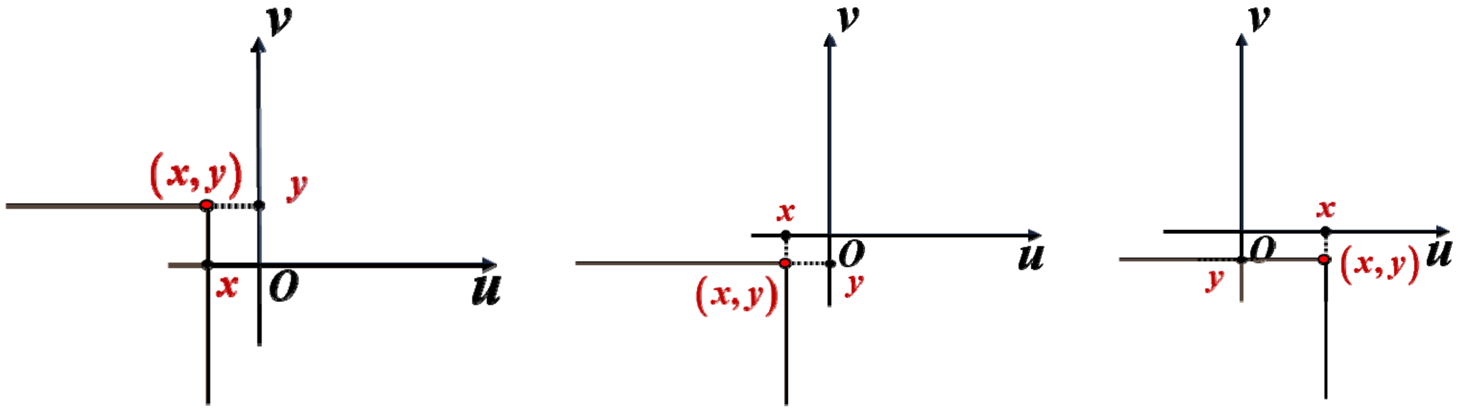
(2) 求概率$P\{Y\leq X\}$.

解: (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

积分区域 $D=\{(u,v)\mid -\infty<u\leq x,-\infty<v\leq y\}$

$f(u,v)\neq 0$ 区域$\{(u,v)\mid u>0,v>0\}$

当 $x\leq 0$或$y\leq 0$ 时, $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv=0$

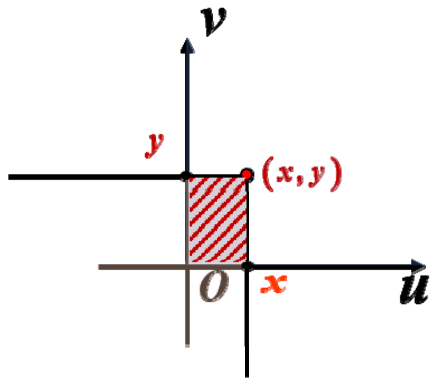


【P63 例2】设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求分布函数$F(x,y)$;

(2) 求概率$P\{Y\le X\}$.

当 $x>0, y>0$ 时,



$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

$$=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2u+v)}dudv$$

$$=\int_{0}^{y} e^{-v}dv\cdot\int_{0}^{x} 2e^{-2u}du$$

$$=-\left[e^{-v}\right]_0^y(-\left[e^{-2u}\right]_0^x)=\left(1-e^{-y}\right)\left(1-e^{-2x}\right)$$

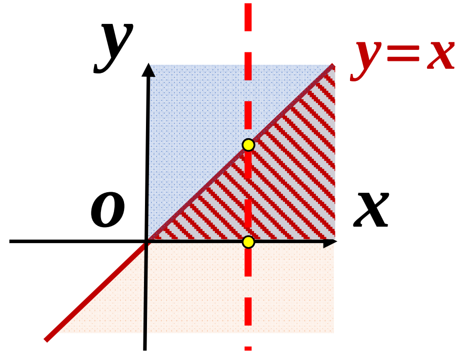
$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

【P63 例2】设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求分布函数$F(x,y)$;

(2) 求概率$P\{Y\le X\}$.

(2) $P\{Y \le X\}$



$$= \iint\limits_{y\le x} f(x,y)\,dxdy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} dx \int_0^{x} e^{-(2x+y)}\,dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_0^{x} e^{-y}\,dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(-\left[e^{-y}\right]\Big|_0^{x}\right)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx - 2\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \left[-e^{-2x}\right]\Big|_0^{+\infty} - \frac{2}{3}\left[-e^{-3x}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$= 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

【P63 例2】设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求分布函数$F(x,y)$;

(2) 求概率$P\{Y\le X\}$.

(2') $P\{Y\le X\}$

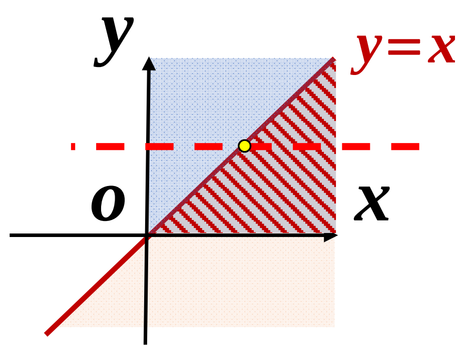
$$=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)dxdy$$

$$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{+\infty} e^{-(2x+y)}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_y^{+\infty} e^{-2x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\left[-e^{-2x}\right]\Big|_y^{+\infty}\right)dy=\int_0^{+\infty}e^{-y}e^{-2y}dy$$

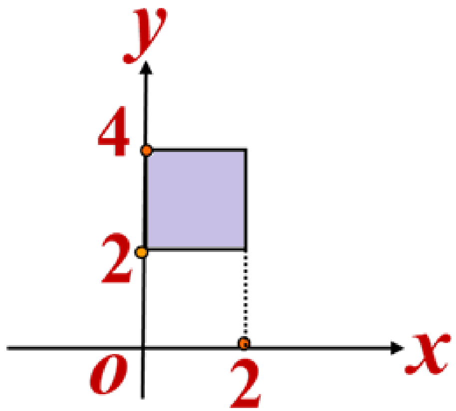
$$=\left[-\frac{1}{3}e^{-3y}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}.$$



(P84 3) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(1) 确定常数 k;

(2) 求概率 $P\{X<1,Y<3\}$.



解 (1) $1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy$

$$=k\int_0^2 dx\int_2^4 (6-x-y)dy$$

$$=k\int_0^2\left[(6-x)y-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_2^4 dx$$

$$=2k\int_0^2(3-x)dx=2k\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^2=8k$$

故 $k=1/8$.

(P84 3) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(1) 确定常数 k;

(2) 求概率 $P\{X<1, Y<3\}$.

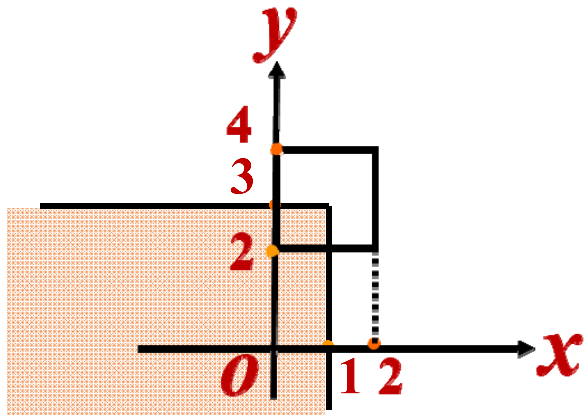
(2) $P\{X<1, Y<3\}$

$$= \int_{-\infty}^{1} dx \int_{-\infty}^{3} f(x,y)\,dy$$

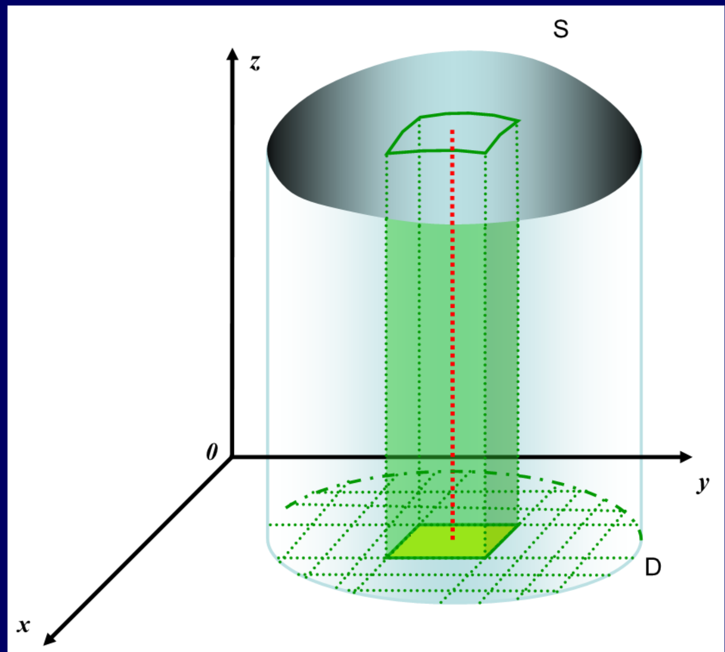
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 dx \int_2^3 (6-x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left[(6-x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_2^3 dx$$

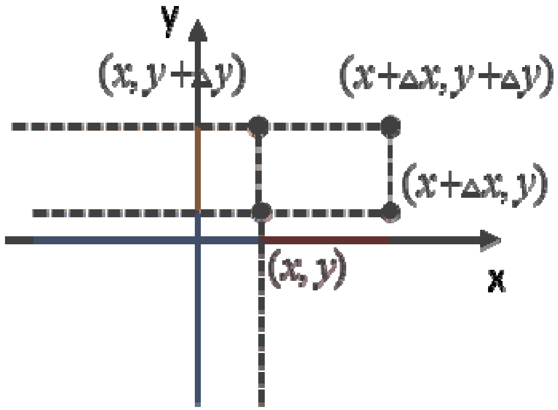
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(\frac{7}{2}-x\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}$$



4．在 $f(x,y)$ 的连续点，$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$



由性质(4)，在f(x,y)的连续点处有



$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[F(x+\Delta x, y+\Delta y) -$$

$$F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

这表示若f(x,y)在点(x,y)连续，则当△x,△y很小时，

$$P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y)\Delta x \Delta y$$

即(X,Y)落在小长方形$(x, x+\Delta x] \times (y, y+\Delta y]$ 内的概率近似地等于 $f(x, y)\Delta x \Delta y$

❖偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y = y_0$，与曲面相截得一条曲线，其方程为

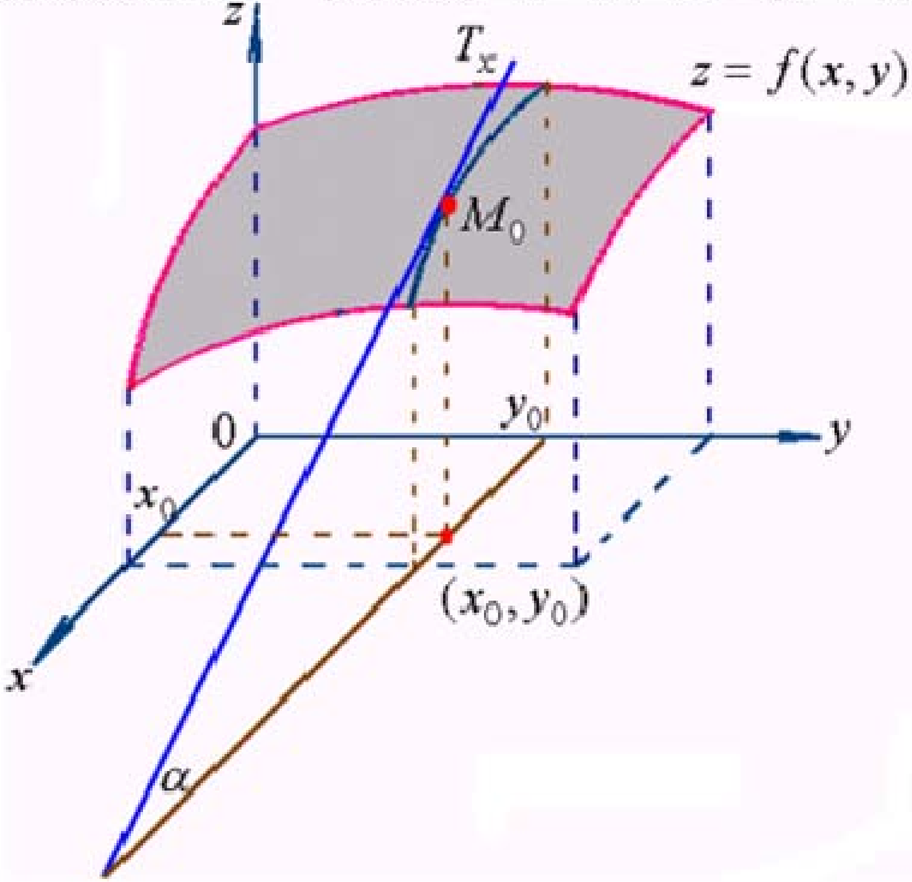
$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$$

而偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 显然就是导数

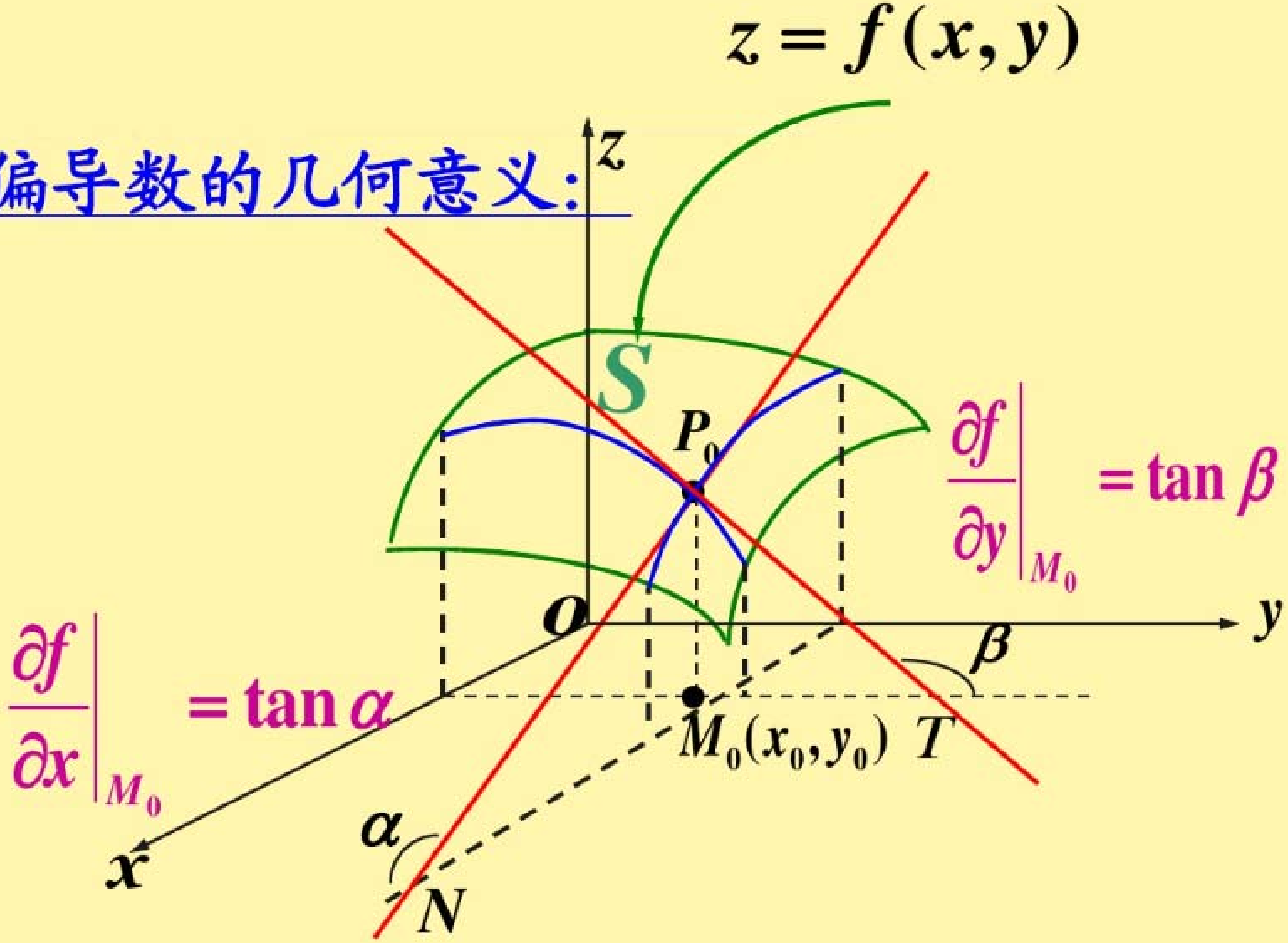
$$\left.\frac{d}{dx} f(x, y_0)\right|_{x = x_0}$$

在几何上，它代表该曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率

$$tg\,\alpha = f_x(x_0, y_0)$$



偏导数的几何意义:



$z = f(x, y)$
z
S
P_0
$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = \tan\beta$
O
y
β
$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = \tan\alpha$
$M_0(x_0, y_0)$
T
x
α
N

二阶偏导数的几何含义

曲线的曲率（**curvature**）：数学上表明曲线在某一点的弯曲程度的数值，曲率越大，表示曲线的弯曲程度越大。

【定义】针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，通过微分来定义，表明曲线偏离直线的程度。

- 曲率的倒数就是曲率半径。曲率半径是最适合正常截面或其组合的圆的半径。

曲面在 p 附近的弯曲程度由曲面在p处沿着任意方向的曲率决定，

即由 x方向的曲率 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ， y方向的曲率 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

以及 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 是曲率算子（二阶算子）在 （$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$） 上的取值

决定，而且这三个量是有区别的，即不能平行地看作三个数。

二阶偏导数的计算

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

定理 如果二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

五、小结

在这一节中，我们与一维情形相对照，介绍了二维随机变量的分布函数，离散型随机变量的分布律以及连续型随机变量的概率密度函数.