第三节　正态总体方差的假设检验

- 单个总体的情况
- 两个总体的情况
- 课堂练习
- 小结　布置作业

一、单个总体的情况

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2,$ 均属未知，

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自**X**的样本，要求检验假设（显著性水平为 α）：

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

σ_0^2 为已知常数。

由于 s^2 是 σ^2 的无偏估计，当 H_0为真时，比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ 一般来说应在**1**附近摆动，而不应过分大于**1**或过分小于**1**。由于当 H_0为真时，$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$

依据：6.3定理二

我们取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量，如上所说知道上述检验问题的拒绝域具有以下的形式：

χ^2检验

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le k_1 \text{ 或 } \chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge k_2$$

此处的 k_1,k_2 值由下式确定：

$$\mathrm{P}\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0\text{为真}\}$$

$$=P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le k_1)\cup(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\}=\alpha$$

为计算方便起见，习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le k_1)\}=\frac{\alpha}{2},\qquad P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\}=\frac{\alpha}{2} \qquad \text{（3.1）}$$

故得 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

于是得拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \quad 或 \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

上述检验法为 χ^2 检验法。关于方差 σ^2 的单边检验法得拒绝域已在附表中给出。

5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

例 由以往管理生产过程的大量资料表明某自动机床产品的某个尺寸X服从正态分布，其标准差为$\sigma_0=10.00$毫米，并且把$\sigma_0=10.00$毫米定为机床精度的标准。为控制机床工作的稳定性，定期对其产品的标准差进行检验：每次随机地抽验9件产品，测量结果为$x_1,x_2,\ldots x_9$。试制定一种规则，以便能根据样本标准差s的值判断机床的精度（即标准差）有无变化（显著性水平为$\alpha=0.05$）？

解　依题意，所考虑的产品指标X服从正态分布。要根据s的值检验假设

$$H_0:\ \sigma = 10.00;\quad H_1:\ \sigma \neq 10.00$$

求检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8}{100}s^2 = 0.08s^2$

当H_0为真时，χ^2服从自由度为8的χ^2分布

对于$\alpha = 0.05$，

n \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954

则拒绝域为

$$W = \{0.08s^2 \le 2.180 \cup 0.08s^2 \ge 17.535\}$$

即　$$W = \{s \le 5.220 \cup s \ge 14.805\}$$

解　依题意，所考虑的产品指标X服从正态分布。要根据s的值检验假设

$$H_0: \ \sigma = 10.00; \quad H_1: \ \sigma \neq 10.00$$

求检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8}{100}s^2 = 0.08s^2$

当H_0为真时，χ^2服从自由度为8的χ^2分布

对于$\alpha=0.05$，

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.180$, 　$\chi^2_{0.025}(8) = 17.535$

则拒绝域为

$$W = \{0.08s^2 \le 2.180 \cup 0.08s^2 \ge 17.535\}$$

即 $$W = \{s \le 5.220 \cup s \ge 14.805\}$$

解 依题意，所考虑的产品指标X服从正态分布。要根据s的值检验假设

$$H_0:\ \sigma = 10.00;\quad H_1:\ \sigma \neq 10.00$$

求检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8}{100}s^2 = 0.08s^2$

当H_0为真时，χ^2服从自由度为8的χ^2分布

每当测得s的值小于5.220或大于14.805时，就认为机床的精度发生了变化。应引起注意，并分析原因。

α / n	0.995	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	01	0.005
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954

则拒绝域为

$$W = \{0.08s^2 \le 2.180 \cup 0.08s^2 \ge 17.535\}$$

即 $$W = \{s \le 5.220 \cup s \ge 14.805\}$$

例3 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ (小时^2)的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取26只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$小时^2）。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化（取 $\alpha=0.02$）？

解：$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

拒绝域为:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \quad 或 \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

n=26，α=0.02，即

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le 11.524 \quad 或 \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge 44.314$$

由观察值 $s^2 = 9200$ 得 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$

所以拒绝 H_0，认为这批电池寿命波动性较以往的

有显著的变化。

二、两个总体的情况

设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}$ 来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$y_1,y_2,\cdots,y_{n_2}$ 是来自总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本独立。其样本方差分别为 s_1^2,s_2^2 。且设 μ_1,μ_2, σ_1^2,σ_2^2均为未知，现在需要检验假设:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2.$$

由于s_1^2, s_2^2 的独立性及 $(n_i-1)s_i^2/\sigma_i^2 \sim \chi(n_i-1), i=1,2$

得知 $$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1) \qquad （3.2）$$

依据：6.3定理四（1）

故当 H_0为真时，即当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时有

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

***F* 检验**

我们取 $F = s_1^2 / s_2^2$ 作为检验统计量。当 H_0为真时 $E(s_1^2) = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = E(s_2^2)$，而当 H_1 为真时由于 $E(s_1^2) = \sigma_1^2 > \sigma_2^2 = E(s_2^2)$，故 $F = s_1^2 / s_2^2$有偏大的趋势，因此拒绝域的形式为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq k. \qquad (3.3)$$

6	$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2 未知)	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geqslant F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \leqslant F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

于是拒绝域为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1) \qquad \textbf{(3.4)}$$

上述检验法称为**F**检验法。关于σ_1^2, σ_2^2 的另外两个检验问题的拒绝域在附表中给出。

例4　试对例2中的数据作方差的假设检验

（取 $\alpha = 0.01$ ）

例2　在平炉进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率，试验是在同一只平炉上进行的。每炼一炉钢时除操作方法外，其它条件都尽可能做到相同。先用标准方法炼一炉，然后用建议的新方法炼一炉，以后交替进行，各炼了10炉，其得率分别为

标准方法　78.1　72.4　76.2　74.3　77.4　78.4　76.0　75.5　76.7　77.3

新方法　79.1　81.0　77.3　79.1　80.0　79.1　79.1　77.3　80.2　82.1

$(\alpha = 0.005)$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
9	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{0.005}(10-1,10-1) = 6.54$$

或 $$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-0.005}(10-1,10-1) = \frac{1}{F_{0.005}(10-1,10-1)}$$

$$= \frac{1}{6.54} = 0.153.$$

现在 $s_1^2 = 3.325, s_2^2 = 2.225, s_1^2 / s_2^2 = 1.49$

即有 $0.153 < s_1^2 / s_2^2 < 6.54$

故接受H_0，认为两总体方差相等。

例　有两批同类型电子元件，从两批电子元件中各抽取若干作电阻测试，测得结果如下（单位：Ω）

第一批　0.140，0.138，0.143，0.141，0.144，0.137，0.139

第二批　0.135，0.140，0.142，0.136，0.138，0.141

假定电子元件的电阻服从正态分布，取显著性水平$\alpha=0.05$，问两批电子元件的电阻的方差有无显著差异？

解 依题意，两总体*X*和*Y*服从正态分布

$N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2$ 未知

（1）需检验假设 H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$; H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

计算可知

$$n_1 = 7 \quad \bar{x} = 0.1403 \quad s_1^2 = 0.002563^2$$

$$n_2 = 6 \quad \bar{y} = 0.1387 \quad s_2^2 = 0.002805^2$$

因而 $$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.835$$

对给定的α＝0.05，查表得

$$F_{0.025}(6,5) = 6.98, \quad F_{0.025}(5,6) = 5.99$$

对给定的α＝0.05，查表得

$$F_{0.025}(6,5)=6.98,\quad F_{0.025}(5,6)=5.99$$

于是 $$F_{0.975}(6,5)=\frac{1}{F_{0.025}(5,6)}=\frac{1}{5.99}=0.167$$

由于 $$F_{0.975}(6,5)<F<F_{0.025}(6,5)$$

故接受H_0，即认为两批电子元件的电阻的方差无显著差异。

例 自动车床加工某种零件，其直径 X（单位：mm ）服从正态分布，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$要求 $\boldsymbol{\sigma^2 = 0.09}$. 某天开工后，随机抽取30件，算得样本方差为 $s^2 = 0.1344$ ，检验这天加工的零件是否符合要求？(取显著性水平 $\alpha = 0.05$)

解 根据题目要求，本题检验假设为

$$H_0: \sigma^2 = 0.09\ ;\quad H_1:\ \sigma^2 \neq 0.09\ .$$

则取统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) = \chi^2(29)$$

拒绝域为 $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(29) = 45.722,$

由样本值算得

$$\chi^2 = \frac{29 \times 0.1344}{0.09} \approx 43.3 < 45.722 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(29)$$

所以，接受 H_0 .即认为零件直径的方差符合要求。

例5 研究机器A和机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的管子18 只，测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$ ；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(mm^2)$ 。设两样本相互独立，且设由机器A,机器B生产的管子的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，这里 $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 均未知。作假设检验:(取 $\alpha = 0.1$)

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

解： 此处

$$n_1=18, n_2=13, F_\alpha(18-1,13-1)=F_{0.1}(17,12)=1.96$$

由（3.4）式拒绝域为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\geq 1.96.$$

现在

$$s_1^2=0.34, s_2^2=0.29, s_1^2/s_2^2=1.17<1.96$$

故接受 H_0.

三、课堂练习

某机器加工某种零件，规定零件长度为100cm，标准差不超过2cm。每天定时检查机器的运行情况。某日抽取10个零件，测得平均长度 $\overline{x}=101$ cm，样本标准差 $s=2cm$ ，问该日机器工作是否正常 $(\alpha=0.05)$?

解：设加工零件长度为 $X, X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$ 均未知。

(1)检验假设 $H_{01}: \mu = \mu_0 = 100, H_{11}: \mu \neq \mu_0 = 100$,

这是t—检验，当 H_{01} 成立时，统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域为 $W = \{(x_1, \cdots, x_n) : |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

对 $\bar{x} = 101, n = 10, S^2 = 2^2$

计算得

$$t = \frac{101 - 100}{2}\sqrt{10} = 1.5811$$

对 $(\alpha=0.05)$，由t—分布表查得 $t_{0.025}(9)=2.2622.$ 。

因为 $|t|=1.5811<2.2622$ 。接受假设 H_{01}，即认为

$\mu=100$ 。

(2)检验假设 $H_{02}:\sigma^2=\sigma_0^2\le 2^2, H_{12}:\sigma^2>\sigma_0^2=2^2$，

这是 χ^2 检验问题;

当 H_{02} 成立时，

统计量

$$\chi_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi_\alpha^2(n-1)$$

计算得 $\chi_n^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9\times 2^2}{2^2} = 9$ 由 $(\alpha = 0.05)$ ，查

得 $\chi_{0.05}^2(9) = 16.9$ ，因为 $\chi_n^2 = 9 < 16.9$ ，

故接受假设 H_{02} ，即认为 $\sigma^2 < 2^2$ 。

综合（1），（2）可以认为该日机器工作状态正常。

四、小结

在这一节中我们学习了正态总体方差的检验法，有以下两种：单个正态总体方差的检验以及两个正态总体方差的检验.

5	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ （μ 未知）	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \leqslant \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \geqslant \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \leqslant \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ （μ_1, μ_2 未知）	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geqslant F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \leqslant F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

【课堂练习】 某灯泡厂在采用一项新工艺的前后，分别抽取10个灯泡进行寿命试验。计算得到：采用新工艺前灯泡寿命的样本均值为2460(h)，样本标准差为56(h)；采用新工艺后灯泡寿命的样本均值为2550(h)， 样本标准差为48(h)。设灯泡的寿命服从正态分布，由此检验采用新工艺前后灯泡寿命的方差有无显著变化？

（取显著性水平$\alpha = 0.01$）

解 设采用新工艺前、后的灯泡寿命分别用 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, 表示 $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$.

检验假设为 H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$; $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

取统计量 $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2}$

在 H_0 成立时,

$$F \sim F(n_x - 1, n_y - 1) = F(9, 9)$$

对显著性水平 $\alpha = 0.01$ ，查表得

$$F_{1-\alpha/2}(n_x - 1, n_y - 1) = \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_y - 1, n_x - 1)}$$

$$= \frac{1}{F_{0.005}(9,9)} = \frac{1}{6.54} \approx 0.15.$$

$$\boldsymbol{F_{\alpha/2}(n_x - 1, n_y - 1) = F_{0.005}(9,9) = 6.54.}$$

H_0 的拒绝域为，

$$F=\frac{S_x^2}{S_y^2}<0.15 \quad 或 \quad F=\frac{S_x^2}{S_y^2}>6.54.$$

由样本值得 $F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}=\dfrac{56^2}{48^2}\approx 1.36.$

于是，$0.15<F<6.54,$

所以，接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为采用新工艺前、后灯泡寿命的方差不变。