第一讲 例题

目录

一、例题

例 1

设连续函数$f(x)$满足方程：$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$, 求$f(x)$的表达式.

例 2

函数$f(x)$满足：$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，$f'(0)$存在，求$f(x)$.

例 3

设$F(x)$是奇函数，$f(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$, $a>0, a\neq 1$, 证明：$f(x)$是偶函数.

例 4

设对$\forall x\in R$, 有$f(\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, 证明：$f(x)$是周期函数.

例 5

已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n}=a$.

例 6

已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n}{n} = ab.$

例 7

设a为常数，数列$\{x_n\}$有递推公式:$x_{n+1} = x_n{}^2 + (1-2a)x_n + a^2$，问初值$x_1$取何值时数列收敛？并求数列极限。

例 8

求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i} - \ln n\right)$存在.

例 9

已知$f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1(n > 2 \in N)$，(1)求证：$f_n(x) = 0$在$(0,+\infty)$有唯一解$x_n$;
(2)求:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例 10

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}.$

例 11

已知$a_1 + \cdots + a_k = 0$. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right)$.

例 12

求：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(x\ln a\right)\ln\left(\dfrac{\ln(xa)}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$

例 13

若$f(0)=0$，且$f'(0)$存在，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}$.

例 14

设函数$f(x)$在$x=a$处可导，$f(a)\neq 0$，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\dfrac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

例 15

求：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$.

例 16

已知 $f(x)$在$[0,+\infty)$上有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)>0$，若$g(x)$是曲线 $y=f(x)$过切点$(x,f(x))$的切线在x轴上的截距，求：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf[g(x)]}{f(x)g(x)}$.

例 17

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+1}+\ldots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}\right)$.

例 18

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!}.$

例 19

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n+k})\sin\ln(1+\frac{k}{n}).$

例 20

求:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right).$

例 21

求:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}.$

例 22

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(n^3+1)}.$

Stolz 定理的证明

$(\frac{*}{\infty}$型$)$ 设$\{y_n\}$是严格单调增加的正无穷大量，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\ (a\in[-\infty,+\infty])$，

则有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a.$

例 23

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ \ (a\neq 0)$. 求:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$

例 24

求:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} \ \ (k>-1)$

例 25

求:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}dt}{x}$.

例 26

已知$f(x)\in C[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+\int_a^x f(t)dt]=A$, 求$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$.

例 27

设$f(x)\in C[a,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，求证：$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

例 28

已知$f(x)$在(a,b)内的每一点的左右极限都存在，且$f(\dfrac{x+y}{2})\leq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$,

求证：$f(x)$在(a,b)内连续

例 29

已知$\left|f(x)-f(y)\right|\le k\left|x-y\right|,\forall x,y\in R,0<k<1,$ 求证：（1）$f(x)$在R上连续；（2）$f(x)$有唯一不动点a;（3）若$x_{n+1}=f(x_n)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 30

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$，证明：在(a,b)内至少存在一个ξ，使得$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$. 其中p,q为大于零的常数.

例 31

已知$f(x)$在$[0,1]$内连续，$f(0)=f(1)$, 证明：对任意正整数n，存在$x_n\in[0,1]$，$s.t.\ f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$.

例 32

已知$f(x)$在$(0,1)$内连续，且存在两两互异的点$x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$，使得：$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta$，证明：对$\forall\lambda\in(\alpha,\beta)$, 存在$x_5,x_6\in(0,1)$, 使得$\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

二、习题

习题 1

已知$y=y(x)$满足$\lim\limits_{x\to+\infty}(y'+ky)=l,(k>0)$，求：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

习题 2

已知$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导且导数单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)$.

习题 3

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2})\right)$.

习题 4

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x)]$.

习题 5

设$f(x)$在$x=0$处二阶可导, 且$f'(0)=0$, $f''(0)=3$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x-1)-f(x)}{x^3}$.

习题 6

已知函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(x)f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, 且在$[a,b]$的任意子区间上$f(x)$不恒为零. 求证:$f(x)$在$[a,b]$上至多有一个零点.

习题 7

设$f_n(x)=e^{\frac{x}{n+1}}$, 正数列$\{u_n\}$满足：$\frac{n}{n+1}\int_0^{u_{n+1}} f_n(x)dx=u_n$, 求:$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.