

第二节 边缘分布

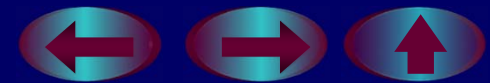
- 边缘分布函数
- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘概率密度
- 课堂练习
- 小结 布置作业



二维联合分布全面地反映了二维随机变量 (X,Y) 的取值及其概率规律. 而单个随机变量 X,Y 也具有自己的概率分布. 那么二者之间有什么关系呢?

- 由多维随机变量的联合分布是否能推出其中各个随机变量各自的分布?
- 反之, 由各个随机变量各自的分布能否得到它们的联合分布?

这一节里,我们就来探求这个问题.



一、边缘分布函数

二维随机变量 (X, Y) 作为一个整体, 具有分布函数 $F(x, y)$, 而 X 和 Y 都是随机变量, 也有各自的分布函数, 分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数.

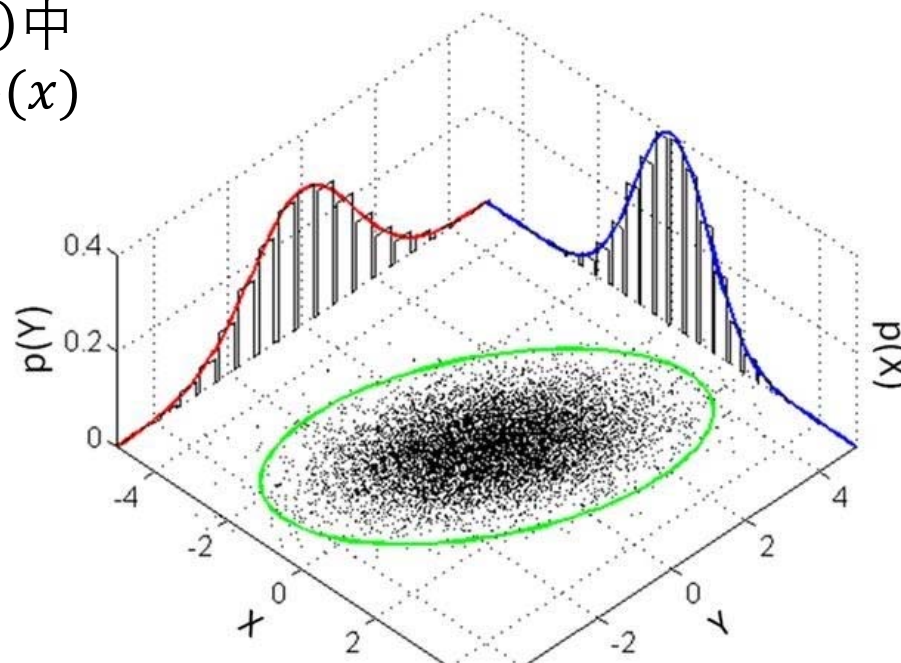
$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$



$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

在联合分布函数 $F(x, y)$ 中
令 $y \rightarrow \infty$, 就能得到 $F_X(x)$



$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y) \end{aligned}$$

在联合分布函数 $F(x, y)$ 中令 $x \rightarrow \infty$, 就能得到 $F_Y(y)$

二、离散型随机变量的边缘分布律

一般地, 对离散型 $r.v. (X, Y)$, X 和 Y 的联合分布律为

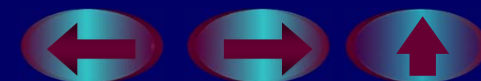
$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则 (X, Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_i.$$

$$\left(\{X = x_i\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X = x_i, Y = y_j\} \right) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$



(X, Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_{\cdot j} \\ (j = 1, 2, \dots)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{y_j \leq y} p_{\cdot j}$$



【例】从1,2,3,4中随机取一个数X，再从1,...,X中随机地取一个数Y，求X、Y的联合及边缘分布律.

解：首先确定X、Y的取值范围：X可能取1,2,3,4；Y可能的取值仍然是1,2,3,4，且 $Y \leq X$.

显然，有

$$P(X=i)=1/4, \quad i=1,2,3,4$$

$$P(Y=j | X=i)=1/i, \quad \text{当 } j \leq i$$

由乘法公式可得，X、Y的联合分布律为

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) P(Y=j | X=i) = \frac{1}{4i}, \quad 1 \leq j \leq i \leq 4$$

【例】从1,2,3,4中随机取一个数X，再从1,...,X中随机地取一个数Y，求X、Y的联合及边缘分布律.

解：

由联合分布可以确定边缘分布！

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) P(Y=j | X=i) = \frac{1}{4i}, \quad 1 \leq j \leq i \leq 4$$

X \ Y	1	2	3	4	<i>P(X=i)</i>
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
<i>P(Y=j)</i>	25/48	13/48	7/48	1/16	

我们常将边缘分布律写在联合分布律表格的边缘上，由此得出边缘分布这个名词.

【例】袋中装有2只白球及3只黑球，现分别进行有放回和不放回摸球，定义下列随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第1次摸出白球} \\ 0, & \text{第1次摸出黑球} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{第2次摸出白球} \\ 0, & \text{第2次摸出黑球} \end{cases}$$

求X、Y的联合及边缘分布律.

表 1 有放回摸球的概率分布

$\eta \backslash \xi$	0	1	$p_2(y_j)$
0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_1(x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

表 2 不放回摸球的概率分布

$\eta \backslash \xi$	0	1	$p_2(y_j)$
0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_1(x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

由边缘分布一般不能唯一确定联合分布！

三、连续型随机变量的边缘概率密度

对连续型随机变量 (X, Y) ,

设 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x, y)$

由于

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

则 (X, Y) 关于 X 的**边缘概率密度**为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

(X, Y) 关于 Y 的**边缘概率密度**为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

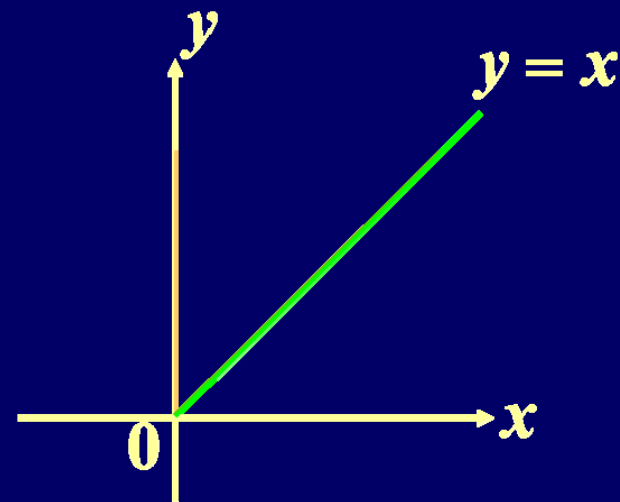
在求连续型 $r.v$ 的边缘密度时，往往要求联合密度在某区域上的积分. 当联合密度函数是分片表示的时候，在计算积分时应特别注意积分限.



(P85 8) 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度.



暂时固定

解: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

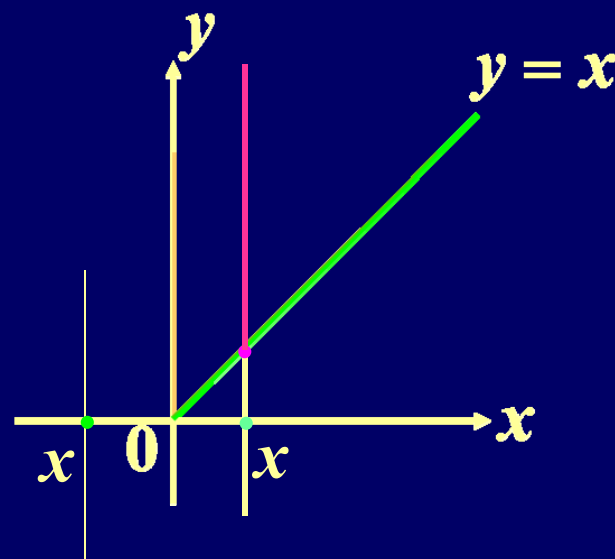
当 $x \leq 0$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= e^{-y} \Big|_x^{+\infty} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

故

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



暂时固定

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

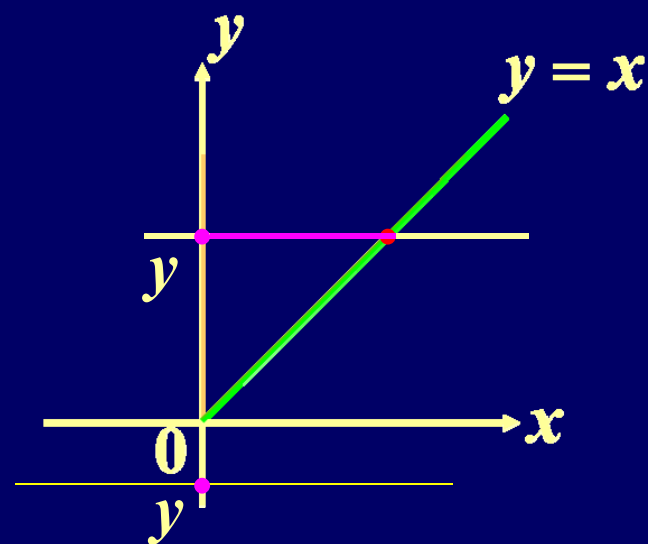
当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0$

当 $y > 0$ 时,

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$



【P66 例2】设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

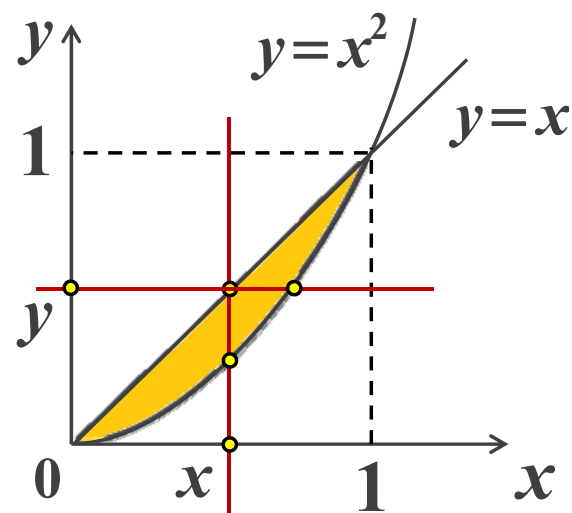
$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求两个边缘密度。

解: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

$$= \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意上下限的顺序



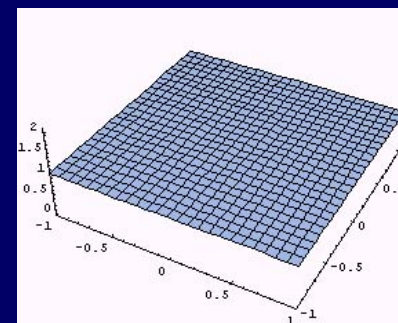
注意上下限的顺序

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

四、常见的二维分布——二维均匀分布

设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A .若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

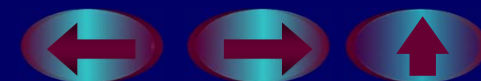


则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

几何含义：向平面上有界区域 G 上任投一质点，若质点落在 G 内任一小区域 B 的概率与小区域的面积成正比，而与 B 的形状及位置无关. 则质点的坐标 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

$$\because \iint_G dx dy = A$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{A} dx dy = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy = 1$$



均匀分布的边缘分布是否还是均匀分布？

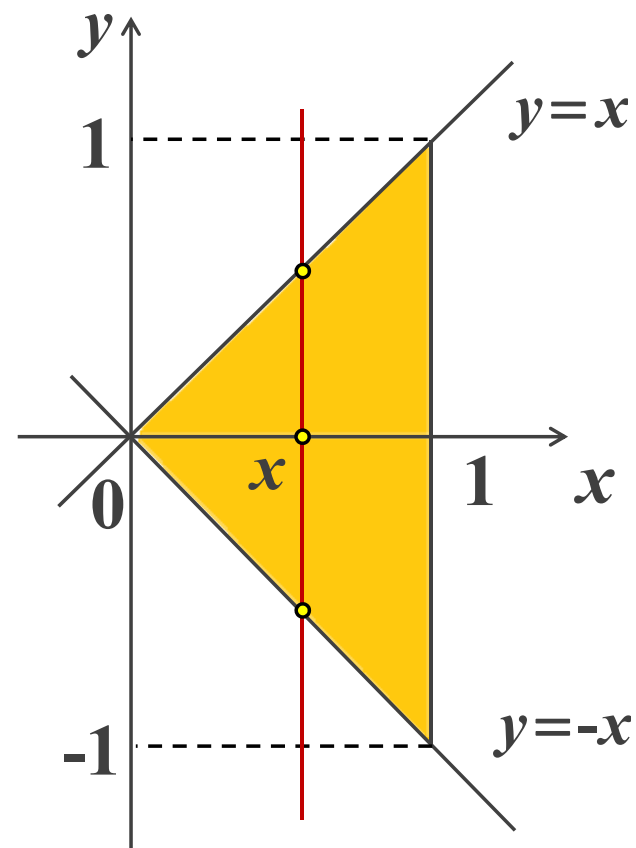
【例】设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求两个边缘密度。

解：

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x}^x 1 dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



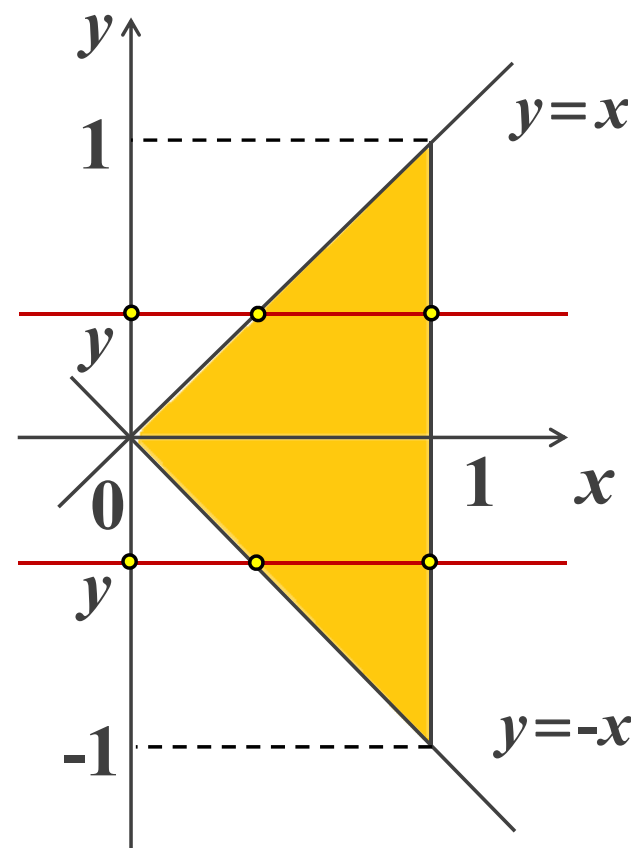
【例】设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求两个边缘密度。

解：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 1 dx = 1 - y, & 0 < y < 1, \\ \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & -1 < y \leq 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



可见，均匀分布的边缘分布不一定是一维均匀分布！

四、常见的二维分布——二维正态分布

若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

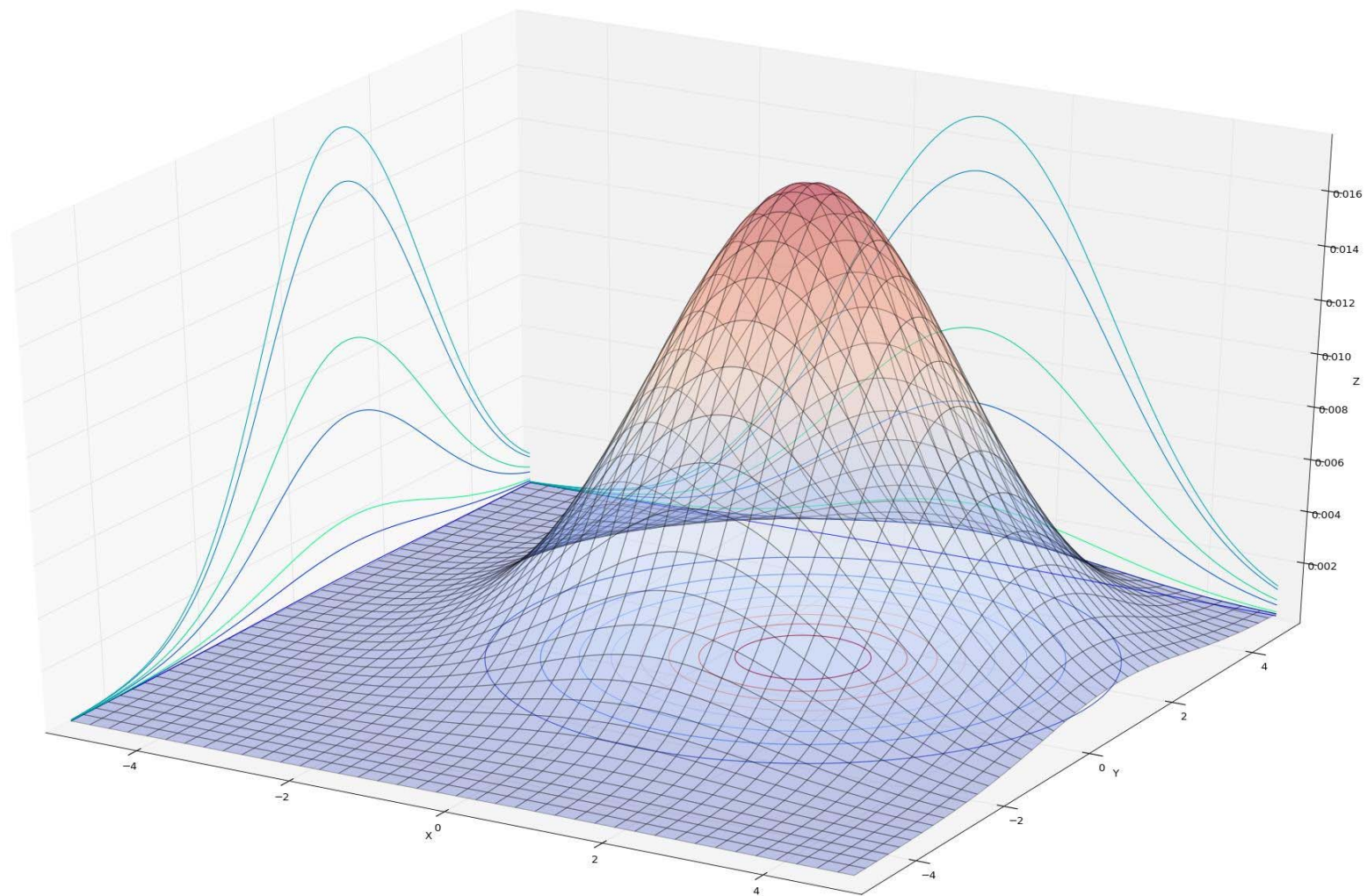
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

$(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$

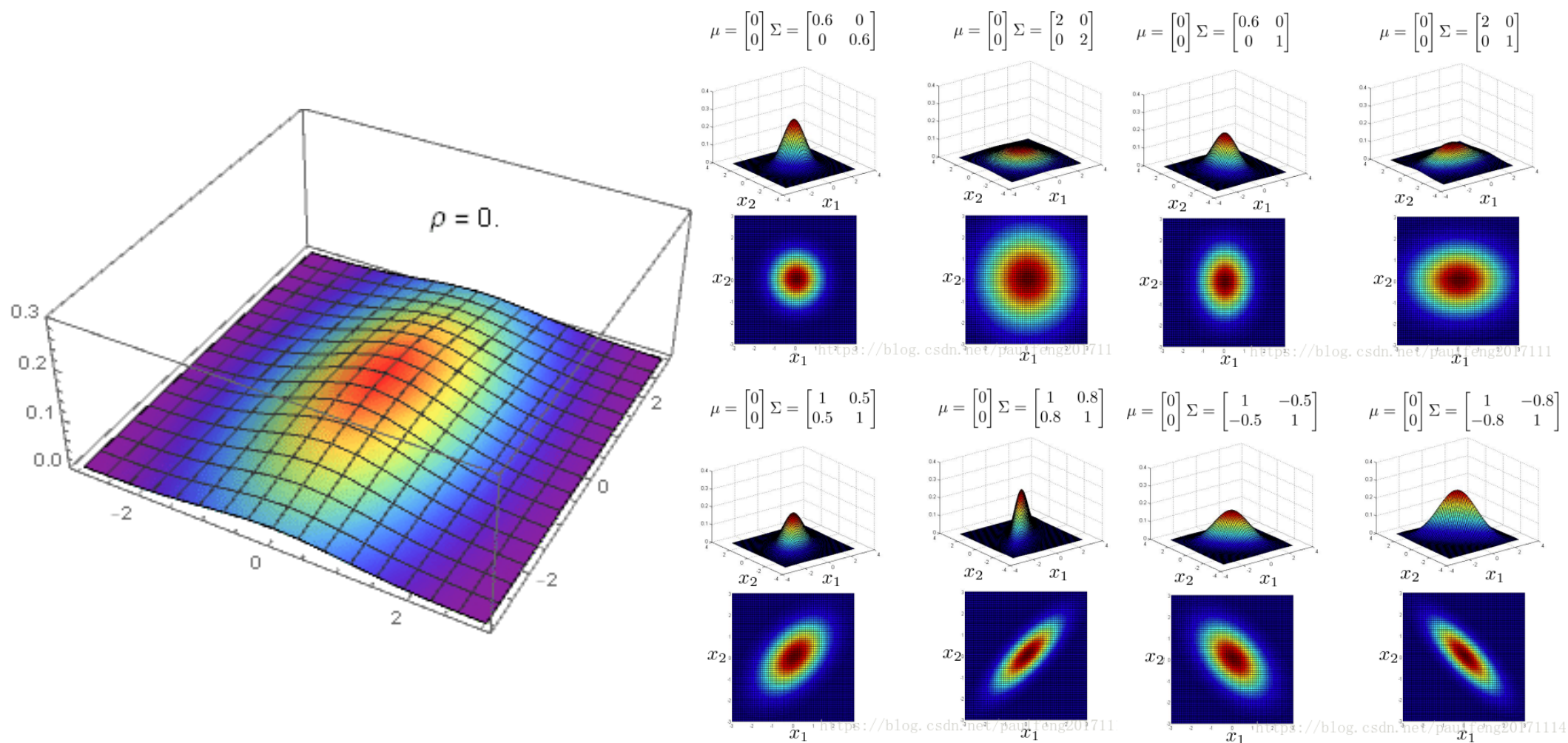
其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$.

则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布。

记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.



【拓展】 二元正态分布可视化 (python) <https://www.geek-share.com/detail/2717602160.html>



【拓展】 透彻理解高斯过程Gaussian Process (GP) (matlab) <https://blog.csdn.net/paulfeng20171114/article/details/80276061>

例

试求二维正态随机变量的边缘概率密度

解:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} dy \\ &\quad \text{因为 } \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \rho^2 \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \\ f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2} dy \end{aligned}$$

例 试求二维正态随机变量的边缘概率密度

解:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} dy$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right), \quad \text{又 } dt = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2} dy$$

则有

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \text{即 } X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$\text{同理, } f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad \text{即 } Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

$(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$

其中, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

可见, 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布, 并且不依赖于参数 ρ 。

也就是说, 对于给定的 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$, 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布, 但它们的边缘分布却都是一样的。

此例也表明, 由边缘分布一般不能确定联合分布。

例5. 设 (X, Y) 概率密度为下列表达式, 求其边缘密度.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y) \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

解:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sin x \sin y dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty) \end{aligned}$$

同理,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (-\infty < y < +\infty)$$

即 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ 但 (X, Y) 不服从二维正态分布.

五、小结

1. 在这一讲中，我们与一维情形相对照，介绍了二维随机变量的边缘分布.

2. 请注意联合分布和边缘分布的关系:

由联合分布可以确定边缘分布;

但由边缘分布一般不能确定联合分布.

