2022.12.28-2

2022年12月28日 9:58

P207 4-2 2 (19) (31) (36)

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

解：原式 $=\int \tan\sqrt{1+x^2}\,d\left(\sqrt{1+x^2}\right)=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{9-(2x)^2}}+\frac{1}{8}\int\frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$

(36) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$

解：原式 $=-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ 或令 $x=a\sin\theta,\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$=-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C$

$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

P212 4-3 7, 22

7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}\,dx$

解：原式 $=-2\cos\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}-4\int\cos\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}dx$

$=-2\cos\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}-4\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}+4\int\sin\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}dx\right)$

$\Rightarrow 17\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}-8\sin\frac{x}{2}\cdot e^{-2x}+C$

原式 $=-e^{-2x}\left(\frac{2}{17}\cos\frac{x}{2}+\frac{8}{17}\sin\frac{x}{2}\right)+C$

22. $\int e^x\sin^2x\,dx$

22. $\int e^x \sin^2 x\,dx$

解：原式 $= \int e^x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}\int e^x \cdot \cos 2x\,dx$

其中 $\int e^x \cdot \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot e^x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot e^x dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot e^x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x \cdot e^x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot e^x dx\right)$

$\Rightarrow \frac{5}{4}\int e^x \cdot \cos 2x\,dx = e^x\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) + C$

$\Rightarrow \int e^x \cdot \cos 2x\,dx = e^x\left(\frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x\right) + C$

原式 $= \frac{e^x}{2} - e^x\left(\frac{1}{5}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x\right) + C$

P_{237}. 11. 12.

11. 若 $f \in C[0,1]$. 证明 $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

此题是 P_{272} 9(1). $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ 特例

Hölder 不等式：$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$

其中 $1 \leq p, q \leq +\infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

下证：9(1). $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

$\forall t \in \mathbb{R}$, 有 $\int_a^b (f(x) + t g(x))^2 dx \geq 0$ $(a<b)$

$\Leftrightarrow \int_a^b \left[t^2 g^2(x) + 2t f(x)g(x) + f^2(x)\right] dx \geq 0$

$\Leftrightarrow t^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$

$\Rightarrow \Delta = \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$

则 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

11题是这里取 $a=0$, $b=1$, $g(x) \equiv 1$ 的特例

12. 设 $f, g \in C[a,b]$，证明：

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 且 $f(x) \not\equiv 0$，$\forall x \in [a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

(2) 若 $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$，则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b]$

(3) 若 $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)\,dx$

则 $f(x) \equiv g(x)$，$\forall x \in [a,b]$

证：(1) 若 $f \in C[a,b]$，$f(x) \geqslant 0$，$f(x) \not\equiv 0$

则 $\exists\, x_0 \in [a,b]$ s.t. $f(x_0) \neq 0$

进而 $\exists\, U(x_0)$，$\forall x \in U(x_0) \cap [a,b]$，有 $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$

从而 $\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int_{[a,b]\setminus U(x_0)} + \int_{U(x_0)\cap[a,b]}\right) f(x)\,dx$

$$\geq 0 + \int_{\underbrace{U(x_0)\cap[a,b]}} \underbrace{\frac{|f(x_0)|}{2}}_{>0}\,dx$$

$$= 0 + \underbrace{\frac{|f(x_0)|}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{\left|U(x_0)\cap[a,b]\right|}_{>0} > 0$$

(2) 反证法. 若 $f(x) \not\equiv 0$，则由 (1) 知 $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

与已知 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ 矛盾. 所以 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b]$

(3) 记 $\varphi(x) = g(x) - f(x) \in C[a,b]$，则 $\varphi(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$

又 $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0$

由 (2) 知 $\varphi(x) \equiv 0$ $\forall x \in [a,b]$. 从而 $f(x) \equiv g(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

P272. 总五. 9. 15. 18(2)

9. (1) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

(2) $\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

证：(1) ✓

证：(1) √

(2) $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

$(1 \le p \le +\infty)$

下证 $p=2$ 的情形.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx = \int_a^b [f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)]dx$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx + 2\underline{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx} + \int_a^b g^2(x)dx$$

$$\overset{(1)}{\le} \int_a^b f^2(x)dx + 2\cdot\underline{\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \int_a^b g^2(x)dx$$

$$= \left[\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

15. $f, g \in C[a,b]$ 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号.

则 $\exists\, \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

证：不妨设 $g(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$

记 f 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m.

由 g 不变号，知 $m\cdot g(x) \le f(x)\cdot g(x) \le M\cdot g(x)$

从而 $\int_a^b m\cdot g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b M\cdot g(x)dx$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\cdot\int_a^b g(x)dx \quad (*)$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$. 则 $(*)$ 式知 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，结论成立.

若 $\int_a^b g(x)dx \ne 0$. 则 $(*)$ 式化为 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

由 f 的介值定理. 知 $\exists\, \xi \in [a,b]$, s.t.

$f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\quad}$

由 f 的介值定理. 知 $\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \qquad \square$$

18(2). 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha \geq 0)$

解: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})} \cdot \frac{1}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$

$$原式 = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

补充: 当 $f(x)$ 为奇函数时.

$$\int f(x)\,dx = \int -f(-x)\,dx = \int f(-x)\,d(-x)$$

当 $f(x)$ 为偶函数时.

$$\int f(x)\,dx = \int f(-x)\,dx = -\int f(-x)\,d(-x)$$

例1: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解: 定义域 $x>1$ 或 $x<-1$

当 $x>1$ 时. 令 $x = \sec\theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$原式 = \int \frac{\sec\theta \cdot \tan\theta\, d\theta}{\sec\theta \cdot \tan\theta}$$

$$= \int d\theta = \theta + C$$

$$= \arccos\frac{1}{x} + C.$$

当 $x<-1$ 时.

$$原式 = \arccos\frac{1}{-x} + C$$

综上所述.

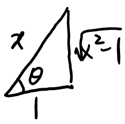
$$原式 = \arccos\frac{1}{|x|} + C$$

例2: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解: 定义域 $x>1$ 或 $x<-1$

当 $x>1$ 时. 令 $x = \sec\theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$原式 = \int \frac{\sec\theta \cdot \tan\theta\, d\theta}{\sec^2\theta \cdot \tan\theta}$$



$$= \int \cos\theta\, d\theta = \sin\theta + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

当 $x<-1$ 时.

$$原式 = -\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{-x} + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

综上所述:

原式 $= \arccos\frac{1}{|x|} + C$

综上所述

原式 $= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$