例4：求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}\, dx$

解：令 $e^{-x} = \sin t$，$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

即 $x = -\ln \sin t$，$dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$

当 $x = 0$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$；当 $x = \ln 2$ 时，$t = \frac{\pi}{6}$

原式 $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc t - \sin t) dt$

$= \left[\ln|\csc t - \cot t| + \cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

例5：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$

解：原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$

$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$

例6：设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$，求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$

解：已知 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$

有 $f'(x) = e^{-x^2+2x}$，$f(0) = 0$

此时 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$

$= \frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx$

$= 0 - 0 - \frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx$

$= -\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{-(x-1)^2+1} dx$

$= -\frac{e}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{-(x-1)^2} dx$

$$= -\frac{e}{3}\int_0^1 (x-1)\, e \qquad dx$$

$$\xlongequal{u=(x-1)^2} \frac{e}{6}\int_0^1 u e^{-u}\, du \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{6}(e-2)$$

☆例7：若 $f \in C[0,1]$，试证：$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

证：令 $t = \pi - x$，则 $dx = -dt$

故 $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\cdot(-dt)$

$$= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,dt$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt - \int_0^\pi t f(\sin t)\,dt$$

有 $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ （可直接用）

又 $\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx$

其中 $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx \xlongequal{t=\pi-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt$

所以 $\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

从而 $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

例8：P255. 7(13). $I_m = \int_0^\pi x \sin^m x\,dx \quad (m \in N^+)$

解：法一：由例7，得 $I_m = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ （P253. 例12）

法二：$I_m = \int_0^\pi x\sin^m x\,dx$

$$= -x\cos x \sin^{m-1} x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\left(\sin^{m-1}x + (m-1)x\sin^{m-2}x\cos x\right)dx$$

$$= 0 - 0 + \int_0^\pi \sin^{m-1}x\, d(\sin x) + (m-1)\int_0^\pi x\sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= (m-1)\cdot(I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

例9：求可微函数 $f(x)$ 使之满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$

解：方程两边同时对x求导，得

$$2f(x)\cdot f'(x)=f(x)\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

当$f(x)\neq 0$时，有$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}$

故$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+C$

注意到$f(0)=0$，有$C=\frac{1}{2}\ln 3$

所以$f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+\frac{1}{2}\ln 3$.

或$f(x)\equiv 0$.

例10：求多项式$f(x)$使它满足

$$\int_0^1 f(xt)dt+\int_0^x f(t-1)dt=x^3+2x$$

解：令$u=xt$，则$\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x f(u)\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$

从而$\int_0^x f(u)du+x\int_0^x f(t-1)dt=x^4+2x^2$

求导，得$f(x)+\int_0^x f(t-1)dt+xf(x-1)=4x^3+4x$

再求导，得$f'(x)+f(x-1)+f(x-1)+xf'(x-1)=12x^2+4$

已知$f(x)$为多项式，由上式知$f(x)$为二次多项式.

设$f(x)=ax^2+bx+c$.

代入上式，知$a=3$，$b=4$，$c=1$.

故$f(x)=3x^2+4x+1$.

例11：证明$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$

证：令$f(x)=e^{x^2-x}$，则$f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$，无不可导点

令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{2}$.

$f(0)=1$，　$f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$，　$f(2)=e^2$

故 $\min\limits_{[0,2]} f(x) = e^{-\frac{1}{4}}$，$\max\limits_{[0,2]} f(x) = e^2$

所以 $\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}} dx \le \int_0^2 e^{x^2-x} dx \le \int_0^2 e^2 dx$

例12：证明 $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$

证：令 $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt$

则 $f'(x) = x \cdot 2\sin x\cos x + x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) \equiv 0$

因此 $f(x) \equiv C$. $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

又 $f(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\sqrt{t}\, dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t})\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$

例13：设 $f \in C[0,1]$，$\searrow$，试证 $\forall q \in [0,1]$，有

$$\int_0^q f(x)dx \ge q\int_0^1 f(x)dx$$

证：当 $q=0, 1$ 时，结论成立.

当 $0<q<1$ 时.

$\int_0^q f(x)dx - q\int_0^1 f(x)dx$

$= \int_0^q f(x)dx - q\int_0^q f(x)dx - q\int_q^1 f(x)dx$

$= (1-q)\int_0^q f(x)dx - q\int_q^1 f(x)dx$

$= (1-q)\cdot q\, f(\xi_1) - q\cdot(1-q)\cdot f(\xi_2)$ $\xi_1 \in (0,q)$, $\xi_2 \in (q,1)$

$= (1-q)\cdot q\cdot(f(\xi_1) - f(\xi_2)) \ge 0$

例14：设 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(x)>0$. 试证：

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \ge (b-a)^2$$

证：设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \cdot \int_a^x \frac{dt}{f(t)} - (x-a)^2$ $(x \ge a)$

则 $F'(x)=f(x)\cdot\int_a^x\frac{dt}{f(t)}+\int_a^x f(t)dt\cdot\frac{1}{f(x)}-2(x-a)$ $\quad 2(x-a)=2\int_a^x dt$

$$=\int_a^x\left[f(x)\cdot\frac{1}{f(t)}+f(t)\cdot\frac{1}{f(x)}-2\right]dt$$

$$=\int_a^x\frac{[f(x)-f(t)]^2}{f(x)f(t)}dt\geq 0$$

故 $F(x)$ ↑，所以 $F(x)\geq F(a)=0$

特别地 $F(b)\geq 0$

例15：设 $f\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$。

若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

(1) 在 (a,b) 内，$f(x)>0$

(2) $\exists\,\xi\in(a,b)$，s.t. $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$

(3) $\exists\,\eta\in(a,b)$ 且 $\eta\neq\xi$，s.t. $f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$

证：(1) 已知 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在。

则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(2x-a)}{x-a}\cdot(x-a)\right]=0$

进而 $\lim\limits_{u\to a^+}f(u)=\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$

因为 $f\in C[a,b]$，所以 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$

又 $f'(x)>0$ ↑，因此 $f(x)>f(a)=0 \quad \forall x\in(a,b]$

(2) 设 $F(x)=x^2$，$\quad g(x)=\int_a^x f(t)dt$

由 Cauchy 中值定理，知 $\exists\,\xi\in(a,b)$，s.t.

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$

(3). $f(\xi)=f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)$ η介于ξ与a之间.

代入(2)中.

例16：设 $f\in C^2[a,b]$，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记 $M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M(b-a)^3}{24}$

证：$f(x)$在 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处的~~带~~ Lagrange 型余项的 Taylor 公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

即 $f(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\quad\left(\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0\right)$$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\int_a^b|f''(\xi)|\cdot\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^2dx$$

$$\le\frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{M(b-a)^3}{24}$$