厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷答案

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2021.01.05

五、（12 分）已知标准正态分布密度函数为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，

(1) 求该函数的单调区间、极值、最值；(2) 判定该函数图形的凹凸性，并求其拐点。

解：$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$y''=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$。

(1) 令 $y'=0$，得 $x=0$ 为唯一的可疑极值点。当 $x<0$ 时，$y'>0$，该函数单调增加；当 $x>0$ 时，$y'<0$，该函数单调减少。又 $y''(0)<0$，因此 $x=0$ 为极大值点，同时也是最大值点。又因为 $y>0$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，所以该函数没有最小值。综上所述，该函数的单调增加区间为 $(-\infty,0)$，单调减少区间为 $(0,+\infty)$，极大值和最大值为 $y(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，没有极小值和最小值。

(2) 令 $y''=0$，得 $x=\pm1$。注意到当 $x<-1$ 或者 $x>1$ 时，$y''>0$，因此 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 的图形是向上凹的；注意到当 $-1<x<1$ 时，$y''<0$，因此 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间 $(-1,1)$ 的图形是向上凸的。其拐点为（$\pm1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）。