第一次小测（翔安）答案

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(1+n)-\ln n}{1+\dfrac{k}{n}}$.

解：原式= $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\ln 2$.

2. 已知：$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，求 $P_n(-1)$，$P_n(1)$.

解：$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x-1)^n(x+1)^n=\dfrac{1}{2^n n!}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left[(x-1)^n\right]^{(k)}\left[(x+1)^n\right]^{(n-k)}$

注意到上面的求和中仅当 $k=0$ 时不含 $(x+1)$ 因子，因此有 $P_n(-1)=\dfrac{1}{2^n n!}(-2)^n n!=(-1)^n$，

同理可求得：$P_n(1)=1$.

3. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x)^{\sqrt{5}}}{(\sin x)^{\sqrt{5}}+(\cos x)^{\sqrt{5}}}dx$

解：注意到 $\sin x$，$\cos x$ 关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称，做变换 $u=\dfrac{\pi}{2}-x$ 则有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^{\sqrt{5}}}{(\sin x)^{\sqrt{5}}+(\cos x)^{\sqrt{5}}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\left(\sin(\frac{\pi}{2}-u)\right)^{\sqrt{5}}}{\left(\sin(\frac{\pi}{2}-u)\right)^{\sqrt{5}}+\left(\cos(\frac{\pi}{2}-u)\right)^{\sqrt{5}}}d(\frac{\pi}{2}-u)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos u)^{\sqrt{5}}}{(\cos u)^{\sqrt{5}}+(\sin u)^{\sqrt{5}}}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{\sqrt{5}}}{(\cos x)^{\sqrt{5}}+(\sin x)^{\sqrt{5}}}dx$$

因此有：原式=$\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{(\sin x)^{\sqrt{5}}}{(\sin x)^{\sqrt{5}}+(\cos x)^{\sqrt{5}}}+\dfrac{(\cos x)^{\sqrt{5}}}{(\cos x)^{\sqrt{5}}+(\sin x)^{\sqrt{5}}}\right)dx=\dfrac{\pi}{4}$