厦门大学第十六届“景润杯”数学竞赛试题解答（非数学专业类）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1． 空间直角坐标系中，在平面$\pi: x-y+z-1=0$上有一条直线L，其在平面$\pi_1: x+y+z-1=0$上的投影直线为$L_1:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\ 2x-5y+3z-4=0\end{cases}$，该直线$L$的方程为____________________。

答案： $\begin{cases}x-y+z-1=0,\\ 2x-5y+3z-4=0\end{cases}$.

分析：既然直线L_1是直线L在平面π_1上的投影直线，所求直线L一定在过直线L_1且垂直于平面π_1的平面π_2上. 直线L既在平面π上，又在平面π_1上，也就是在这两个平面的交线上.

因此，问题转化成求过直线L_1且垂直于平面π_1的平面.

解一：从直线L_1的方程看出，平面$2x-5y+3z-4=0$过直线L_1且垂直于平面π_1，所以，所求直线方程$L:\begin{cases}x-y+z-1=0,\\ 2x-5y+3z-4=0\end{cases}$.

解二：设过直线L_1的平面束方程为

$$\pi_2: \lambda(x+y+z+z-1)+\mu(2x-5y+3z-4)=0,$$

即 $$(\lambda+2\mu)x+(\lambda-5\mu)y+(\lambda+3\mu)z-\lambda-4\mu=0.$$

该平面π_2的法向量为$\vec{n}_1=(\lambda+2\mu,\lambda-5\mu,\lambda+3\mu)$. 由于$\pi_2\perp\pi_1$，故

$$\lambda+2\mu+\lambda-5\mu+\lambda+3\mu=0,$$

解得$\lambda=0$，故所求平面π_2的方程为$2x-5y+3z-4=0$.

所以，所求直线方程$L:\begin{cases}x-y+z-1=0,\\ 2x-5y+3z-4=0\end{cases}$.

评注：本题如果能观察到平面$2x-5y+3z-4=0$是过直线L_1且垂直于平面π_1的平面，问题就简单了。如果不能看出来，用平面束方程求解过已知直线的平面也比较方便.

2． $\int\frac{x^3\mathrm{e}^x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x=$________________ 。

答案： $(-\frac{x^3}{x+3}+x^2-2x+2)e^x+C$.

解： $\int\frac{x^3e^x}{(x+3)^2}dx=-\frac{x^3e^x}{x+3}+\int x^2e^x\,dx=-\frac{x^3e^x}{x+3}+(x^2-2x+2)e^x+C$

评注： 本题的解题思路是去分母，把带有分母的式子看成是某个函数的导数，然后进行分部积分法，可以去掉分母了。

类似地，$\int\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$ 也是常见的考题.

讲座中的题目 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$ 就是这种思路的，是两次应用了这种思路求解的.

3． 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x+y+1\}$，则 $\iint\limits_D(x+y+1)dxdy=$__________ 。

答案： 3π.

解：$\iint\limits_D(x+y+1)dxdy=(\bar{x}+\bar{y}+1)A=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)A=2\times\pi(1+\frac{1}{2})=3\pi.$

评注： 本题是应用了形心公式和二重积分的几何意义. 利用形心公式的技巧，也适用于三重积分，第一类曲线积分和第一类曲面积分.

4． $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx=$__________。

答案： $\frac{\pi^2}{4}$.

解： $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$

$$=\pi\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}+\frac{\cos^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x})dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

评注： 这里应用了常用的一些结论：

（1） $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$；

（2） $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$；

（3） $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$.

这些结论，在讲座中都有提到.

5．设 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\ (n\ge 1)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=$ ________。

答案： $\frac{1}{2}$.

解：$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}})=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}$.

因为 $a_n\ge n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，于是，$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$.

评注： 本题是利用采用的是“拆项相消”的求和技巧.

6．设 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}[(x+y)^2+(y+z)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________。

答案： $\frac{16}{15}\pi$.

解： $\iiint\limits_{\Omega}[(x+y)^2+(y+z)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}[x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{4}{3}\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\times 2\pi\times 2\times\frac{1}{5}=\frac{16}{15}\pi.$$

评注： 本题应用三重积分的奇偶对称性和轮换对称性. 参见讲座课件

二、（本题 6 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$。

解一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)[1+\tan(\tan x)\tan(\sin x)]\tan(\tan x-\sin x)}{\left(x-\ln(1+x)\right)x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)}{\frac{1}{2}x^3}=2$$

解二： 利用拉格朗日中值定理，

$$\tan(\tan x)-\tan(\sin x)=\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x),$$

其中ξ介于$\tan x$和$\sin x$之间，且$\lim\limits_{x\to 0}\xi=0$.

所以，
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(e^x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\ln(1+x)})}{x(x-\ln(1+x))}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(x-\ln(1+x))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-\frac{1}{1+x}}=2.$$

评注： 解法一用了三角公式$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$和等价无穷小代换等方法.

解法二用的是拉格朗日中值定理和等价无穷小代换等方法.

三、（本题 6 分）计算定积分$I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\cos x}}dx$。

解： $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}\cdot e^{\frac{x}{2}}dx+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{\cos x})'\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}\cdot e^{\frac{x}{2}}dx+2\sqrt{\cos x}\cdot e^{\frac{x}{2}}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt[4]{2}}(e^{\frac{\pi}{8}}-e^{-\frac{\pi}{8}}).$$

评注： 本题先将积分分成两部分，其中一部分用分部积分. 积分后有一项和另一部分消掉.

讲座中的练习$\displaystyle\int\frac{\cos x+x\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$，全国大学生数学竞赛题$\displaystyle\int(1+x-\frac{1}{x})\ e^{x+\frac{1}{x}}dx$都是类似的题目.

四、（本题 8 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的一阶导数，且$f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2dx。$$

证明： 作辅助函数 $F(t)=\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{(t-a)^2}{2}\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^t[f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x$，则

$$F'(t)=f^2(t)-(t-a)\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

因为 $f(t)=f(a)+\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x$，故由 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$f^2(t)=[\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x]^2\le\int_a^t 1^2\mathrm{d}x\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x=(t-a)\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

故 $F'(t)\le 0$，即 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减，于是，$F(b)\le F(a)=0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

评注： 本题用的方法是构造辅助函数，利用单调性证明不等式。辅助函数构造的方法很常规，通过移项，使不等式一端为 0，然后将区间的某个端点设为自变量，例如 b.

通常，要建立函数和它的导函数之间的联系，会用到关系式 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

本题还用到了常见的 Cauchy-Schwartz 不等式 $(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

五、（本题 8 分）已知函数 $f(x)$ 具有四阶导数，且 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le M$。求证：$\forall x\ne a$，有

$$\left|f''(a)-\frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2}\right|\le\frac{M}{12}(x-a)^2。$$

证明： 由泰勒公式，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}(x-a)^4,$$

$$f(2a-x)=f(a)+f'(a)(a-x)+\frac{f''(a)}{2}(a-x)^2+\frac{f'''(a)}{6}(a-x)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}(a-x)^4,$$

其中 ξ_1 介于 x 和 a 之间，ξ_2 介于 $2a-x$ 和 a 之间.

$$f(x)+f(2a-x)=2f(a)+f''(a)(x-a)^2+\frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_1)}{24}(x-a)^4.$$

$\forall x\ne a$，有

$$f''(a)-\frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2}=-\frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)}{24}(x-a)^2,$$

故
$$\left|f''(a)-\frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2}\right|\le\frac{\left|f^{(4)}(\xi_1)\right|+\left|f^{(4)}(\xi_2)\right|}{24}(x-a)^2$$

$$\le \frac{M}{12}(x-a)^2 .$$

评注：本题也是比较常规的做法。

一般情况，如果题目中的已知条件和要证明的式子含有二阶及以上的导数，肯定会想到泰勒公式或者反复应用罗尔定理.

利用泰勒公式，展开点的选取很重要，通常会选取端点，区间的中点，极值点，以及某些已知函数值或导数值的点。选择极值点是因为该点处导数为零这个信息。至于展开的阶数，应该根据条件中导数的最高阶数。

从题目上看，因为题目出现了 $f(a)$ 和 $f''(a)$，所以，所有函数在 $x=a$ 点展开是很显然的，题目只有 4 阶导数，所以都展开到 4 阶。

六、（本题 8 分）设数列 $\{u_n\}$ 满足：$0<u_n<1$ 且

$$u_1+(1-u_1)u_2+(1-u_1)(1-u_2)u_3+\sum_{n=4}^{\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})u_n=1。$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证明：用反证法.

假设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. 因此存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$0<u_n<\frac{1}{2}$.

注意到，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$-\ln(1-x)<2x$. 因此，当 $n>N$ 时，$-\ln(1-u_n)<2u_n$，从而由比较审敛法，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-u_n)]$ 收敛.

另一方面，将已知等式中的所有项移到等式右边，得

$$(1-u_1)-(1-u_1)u_2-(1-u_1)(1-u_2)u_3-\sum_{n=4}^{\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})u_n=0,$$

从而其部分和极限 $\lim_{n\to\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})(1-u_n)=0$.

因此，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-u_n)]$ 的前 n 项和 $S_n=-\ln[(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n)]$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\ln[(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n)]=\infty,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-u_n)]$ 发散的，矛盾.

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

评注：本题不难得到$\lim\limits_{n\to\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})(1-u_n)=0$. 利用取对数，将连乘变成和式进行讨论。

七、（本题 8 分）设曲线L为$x^2+y^2=2x\ (y\ge 0)$上从$O(0,0)$到$A(2,0)$的一段有向弧，求连续函数$f(x)$，使得$f(x)=x^2+\int_L y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y$.

解：设$A=\int_L y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y$，$D$为曲线$L$与线段$\overline{AO}$围成的区域，则

$$A=\int_{L+\overline{AO}} y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}} y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y.$$

注意到，$\int_{\overline{AO}} y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y=0$. 应用格林公式，得

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D [y^2+f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D [y^2+x^2+A]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\mathrm{d}r+\frac{\pi}{2}A\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{2}A\\&=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}A,\end{aligned}$$

故$A=\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$，所以，$f(x)=x^2+\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$.

评注：本题较为简单. 应用格林公式，是通常的方法.

八、（本题 8 分）求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$的和数。

解一：因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^n n!(2n+1)!!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n(2n+1)!!}$.

作幂级数$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，记$u_n(x)=\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}x^2=\dfrac{1}{2}x^2$，所以，幂级数$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$的收敛半径为$\sqrt{2}$.

当$|x|<\sqrt{2}$时，$s(x)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=x+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1-1)(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$

$$=x+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2s(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

两边求导数，得 $s'(x)=1+xs(x)+\frac{1}{2}x^2s'(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{2n}$

$$=1+xs(x)+\frac{1}{2}x^2s'(x)-\frac{x}{2}s(x)$$

$$=1+\frac{x}{2}s(x)+\frac{1}{2}x^2s'(x),$$

即 $s'(x)-\frac{x}{2-x^2}s(x)=\frac{2}{2-x^2}$.

于是， $s(x)=e^{\int\frac{x}{2-x^2}dx}[\int\frac{2}{2-x^2}e^{-\int\frac{x}{2-x^2}dx}dx+C]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}[2\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}[2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C]。$$

注意到 $s(0)=0$，故 $s(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\sqrt{2}s(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$.

解二：作幂级数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$， 记 $u_n(x)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$。

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}x^2=\frac{1}{4}x^2$，所以，幂级数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛半径为 2.

当 $|x|<2$ 时， $s'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

$$=1+\frac{x}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$=1+\frac{x}{4}(xs(x))'$$

得 $$s'(x)=1+\frac{x}{4}[s(x)+xs'(x)]$$

$$=1+\frac{x}{4}s(x)+\frac{1}{4}x^2s'(x),$$

即 $s'(x)-\frac{x}{4-x^2}s(x)=\frac{4}{4-x^2}$.

于是，$s(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x}[\int\frac{4}{4-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}[\int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}[4\arcsin\frac{x}{2}+C]。$$

注意到 $s(0)=0$，故 $s(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\frac{x}{2}$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=s(1)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

解三： $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x$，

所以，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{4-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\cos^2 x}\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

评注：解法一和解法二都是常规的解法. 构造幂级数，利用幂级数求出和函数，最后代入自变量的值，就可以求得常数项级数的和。

用解法一和解法二，很关键的是如何求和函数。一般是通过逐项求导或积分或建立微分方程求解。如何建立微分方程，可参见讲座中的一道题和课本上的 $(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林公式的推导.

解法三方法比较巧妙，利用了计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 的公式（公式见课本），然后逐项积分。

九、（本题 8 分）设 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中 f 具有连续的二阶导数，且 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=1$，试求函数 $f(r)$，使得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

解： 由 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=1$，知 $\lim_{x\to 1}\ln[1+f(x)]=0$，即 $f(1)=0$.

因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$,

则 $f'(1)=1$.

又 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=f'(r)\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)^2+f'(r)\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=f''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)\frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)\frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

代入方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，可得

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0.$$

设 $P=f'(r)$，则 $P'(r)+\dfrac{2}{r}P(r)=0$，故 $P(r)=\dfrac{C_1}{r^2}$，从而 $f(r)=-\dfrac{C_1}{r}+C_2$.

由 $f(1)=0$， $f'(1)=1$，得 $C_1=C_2=1$，故 $f(r)=1-\dfrac{1}{r}$.

评注：本题不难，是一道综合性的题目．利用复合函数的求导，得到微分方程。利用极限式子得到初始条件．最后是解微分方程．

十、（本题 8 分）设 $|x_1|<1$， $x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$，求：（1） $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)$；（2） $\lim\limits_{n\to\infty}x_1x_2\cdots x_n$。

解：设 $x_1=\cos\alpha$，则容易证明 $x_n=\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}, n=1,2,\cdots$.

事实上， $n=1$时，结论显然成立.

设 $n=k$ 时，结论成立．则当 $n=k+1$时， $x_{k+1}=\sqrt{\dfrac{1+x_k}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}}{2}}=\cos\dfrac{\alpha}{2^k}$，结论也成立.

故 $x_n=\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}, n=1,2,\cdots$.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to\infty}4^n\cdot\dfrac{1}{2}(\dfrac{\alpha}{2^{n-1}})^2=2\alpha$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_1x_2\cdots x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdots\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

评注：这个题目关键在于求数列的通项，后面简单。

十一、（本题 8 分）已知 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$g'(x)\neq 0$，且 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}\neq\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$。求证：对任意位于 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 和 $\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ 之间的数 C，都 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$。

证明一：不妨设 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}<C<\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$。

令 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)},x\neq a,\\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)},x=a\end{cases}$，$G(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)},x\neq b,\\ \dfrac{f'(b)}{g'(b)},x=b\end{cases}$.

所以，$F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

因为 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}<C<\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$，所以 C 位于 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间或位于 $\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间。

若 C 位于 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间，则 C 位于 $F(a)$ 与 $F(b)$ 之间.

由零点定理，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $F(\eta)=\dfrac{f(\eta)-f(a)}{g(\eta)-g(a)}=C$。

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,\eta)$，使得 $\dfrac{f(\eta)-f(a)}{g(\eta)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$.

同理，若 C 位于 $\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间，则 C 位于 $G(a)$ 与 $G(b)$ 之间.

由零点定理，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $G(\eta)=\dfrac{f(\eta)-f(b)}{g(\eta)-g(b)}=C$。

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(\eta,b)$，使得 $\dfrac{f(\eta)-f(b)}{g(\eta)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$.

证明二：因为 $g'(x)\neq 0$，故由达布定理知，$g'(a)$ 与 $g'(b)$ 同号，故

$$[f'(a)-Cg'(a)][f'(b)-Cg'(b)]=g'(a)g'(b)[\frac{f'(a)}{g'(a)}-C][\frac{f'(b)}{g'(b)}-C]<0.$$

作辅助函数 $F(x)=f(x)-Cg(x)$，于是，

$$F'(a)F'(b)=[f'(a)-Cg'(a)][f'(b)-Cg'(b)]<0,$$

由达布定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C.$$

评注：本题的解法都是构造辅助函数，证法一用的是柯西中值定理和零点定理；证法二用的是达布定理（见课件），这个定理课本上没有，但竞赛上经常会用到.