作业：5-2：8(6)(7)(11)(12)，11(2)，14

5-3：1(6)(8)(10)(12)

记 $\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_b^x f(t)\,dt\right) = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\phi(\varphi(x)) = \phi'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt + \int_{\psi(x)}^a f(t)\,dt\right)$$

$$= f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) - f(\psi(x))\cdot\psi'(x)$$

☆例1：求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$

解：$\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt = e^{-\xi^2}(1-\cos x) = e^{-\cos^2\theta}(1-\cos x)$. $(0<\theta<x)$

当 $x\to 0$ 时. $\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt \to 0$

这是 $\frac{0}{0}$ 型. 应用 L'Hospital 法则

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \dfrac{1}{2e}$

例2：确定 a. b. c 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,dt} = C \quad (C\neq 0)$$

解：$\lim \int^x l\ (1+t^2)dt = \lim\left[\dfrac{\int_b^x \ln(1+t^2)dt}{\quad}\cdot(ax-\sin x)\right]$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \ln(1+t^2)dt = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\int_b^x \ln(1+t^2)dt}{ax-\sin x}\cdot(ax-\sin x)\right]$

$$= \frac{1}{c}\cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow b=0$ （几何意义、面积）

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \ln(1+t^2)dt} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2} = c$ $(*)$

$\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a-\cos x}{x^2}\cdot x^2\right) = c\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow a = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

所以 $c \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

例3：设 $f\in C[0,+\infty)$，且 $f(x)>0$.

证明 $F(x) = \frac{\int_0^x t f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单增.

证：即要证 $F'(x)>0$　$\forall x\in(0,+\infty)$

$\frac{d}{dx}\int_0^x t f(t)dt = xf(x)$.　$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$

$$F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x t f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

其中分子 $= xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x t f(t)dt$

$= f(x)\left(\underline{x\int_0^x f(t)dt} - \int_0^x t f(t)dt\right)$

$= f(x)\left(\underline{\int_0^x x f(t)dt} - \int_0^x t f(t)dt\right)$

$= f(x)\int_0^x (xf(t) - tf(x))dt$

$$= f(x)\int_0^x (xf(t) - tf(x))\,dt$$

$$= f(x)\int_0^x \underbrace{f(t)}_{>0}\,\underbrace{(x-t)}_{>0}\,dt > 0 \qquad (x>0)$$

从而 $F'(x) > 0$ □

定理2：设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=\!=} [F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b$

称这个公式为 Newton-Leibniz 公式，也称为

微积分基本公式

证明：由定理1. 知 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

则 $F(x) - \int_a^x f(t)\,dt = C_0$

令 $x = a$. 确定 $C_0 = F(a)$

因此 $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

令上式中的 $x = b$. 得 $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ □

说明：设 $f \in C[a,b]$，且 $F'(x) = f(x)$，有

$$\underbrace{\underbrace{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = \underbrace{F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a)}_{\text{微分中值定理}}}_{N\text{-}L\text{公式}}$$

$\boxed{\xi \in (a,b)}$

例4：求 $\int_0^1 x^2\,dx$

例4：求 $\int_0^1 x^2 dx$

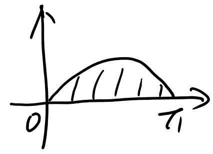
解：$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$

例5：求 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

解：$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi}{12}$

例6：求 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的面积.

解：$A = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = \cos 0 - \cos\pi = 2$



☆ 例7：设 $f(x) = x^2 - x\int_0^2 f(x)dx + 2\int_0^1 f(x)dx$. 求 $f(x)$.

解：设 $\int_0^1 f(x)dx = a$，$\int_0^2 f(x)dx = b$

则 $f(x) = x^2 - bx + 2a$

$a = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - bx + 2a)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b}{2}x^2 + 2ax\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$

$b = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 - bx + 2a)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b}{2}x^2 + 2ax\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$

即 $\begin{cases} a = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a \\ b = \frac{8}{3} - 2b + 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$

故 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

例8：求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$ 的递推式. $(n\in N^+)$

例10. 求 $I_n = \int_0 \frac{\quad}{\sin x}$ 的递推公式. [illegible]

解: $I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2(n-1)x}{\sin x} dx$

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx - \sin 2(n-1)x}{\sin x} dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x \cdot \sin x}{\sin x} dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n-1)x\, dx = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{2n-1}$$

所以 $I_n = I_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{2n-1} \quad n = 2, 3, \cdots$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2$$

例9: 设 f 的一阶导数连续, $f(1) = 0$. $\int_1^{x^3} f'(t)\,dt = \ln x$. 求 $f(e)$

解: 法一:

$$\ln x = \int_1^{x^3} f'(t)\,dt = f(x^3) - f(1) = f(x^3)$$

故 $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\ln x \Rightarrow f(e) = \frac{1}{3}$

法二:

$\int_1^{x^3} f'(t)\,dt = \ln x$ 左右两边同时对 x 求导. 得

$$f'(x^3) \cdot 3x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x^3) = \frac{1}{3x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x}$$

$$f(e) = \underline{f(e) - f(1)} + f(1) = \underline{\int_1^e f'(x)\,dx} + f(1)$$

$$= \int_1^e \frac{1}{3x} dx + f(1) = \frac{1}{3}$$

---

§3 定积分的换元及分部

一. 定积分的换元

定理1: $f \in C[a, b]$. 函数 $x = \varphi(t)$ 满足:

定理1：$f \in C[a,b]$，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

1) $\varphi \in C^{1}[\alpha,\beta]$，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$

2) φ 的值域为 $[a,b]$

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$　（令 $x=\varphi(t)$）

证明：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

则 $\frac{d}{dx}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

说明 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ 的一个原函数.

因此由 N-L 公式，有

$$\int_a^b f(x) = F(b)-F(a)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \quad \square$$

例1：求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(a>0)$

解：设 $x=a\sin t$，则 $dx = a\cos t\,dt$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2$$

例2：求 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

解：令 $t=\sqrt{2x+1}$，即 $x=\frac{t^2-1}{2}$，则 $dx = t\,dt$

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=3$

$$原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\, t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)\Big|_1^3 = \frac{22}{3}$$

☆ 例3：$f \in C[-a,a]$ （偶倍奇零）

1) 若 f 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

2) 若 f 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

证：$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

$$\overset{x=-t}{=} \int_a^0 -f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\overset{换元}{=} \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \big(f(-x)+f(x)\big)\,dx$$

$$= \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(-x)=f(x) \\ 0, & f(-x)=-f(x) \end{cases}$$ □

例4：$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x}{1+x^6}\,dx = 0$ （奇函数）