第二节　正态总体均值的假设检验

- 单个正态总体 均值的检验
- 两个正态总体均值差的检验
- 基于成对数据的检验

小结　布置作业

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

1. σ^2已知，关于μ的检验（Z检验）

在上一小节中已讨论过正态总体$N(\mu,\sigma^2)$, 当σ^2已知时关于$\mu=\mu_0$的检验问题.在这些检验问题中，我们都是利用H_0在为真时服从$N(0,1)$分布的统计量$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$来确定拒绝域。这种检验法常称为 **Z** 检验法（***u*** 检验法）。

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

1. σ^2已知，关于μ的检验（Z检验）

双边假设检验 $H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu\neq\mu_0$,

选择统计量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$,

当H_0成立时，$U\sim N(0,1)$

依据：6.3定理一

对于给定的检验水平 $\alpha\ (0<\alpha<1)$,

由标准正态分布分位数的定义知：

$$P\{|U|\geq u_{\alpha/2}\}=\alpha$$

因此，检验的拒绝域为 $W_1=\{|u|\geq u_{\alpha/2}\}$,

右边检验的问题写成以下的形式：

$$H_0: \mu \le \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$$

取显著性水平为α ，现在来求这个问题的拒绝域.
因为 H_0中的 μ 全部都比 H_1中的要小,从直观上看,
较合理的检验法应是：若观测值 $\overline{x}$与 μ_0的差$\overline{x}-\mu_0$
过分大，即 $\overline{x}-\mu_0 > k$，则我们拒绝H_0而接受H_1,
因此拒绝域的形式为 $\overline{x}-\mu_0 \ge k$（k 待定）.

由标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的单调性得到

$$\mathrm{P}\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\}$$

$$= P_{\mu \le \mu_0}(\bar{x} - \mu_0 \ge k)$$

$$= P_{\mu \le \mu_0}\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{\mu_0 + k - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 + k) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{\mu \le \mu_0} = \Phi\left(\frac{\mu - (\mu_0 + k)}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{\mu \le \mu_0}$$

$$\le \Phi\left(\frac{\mu_0 - (\mu_0 + k)}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{-k}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

所以要控制 $P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} \le \alpha$，只需

令
$$\Phi\left(\frac{-k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

即得 $k = (\sigma/\sqrt{n})z_\alpha$，从而得右边检验问题的拒绝域为

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$$

即
$$\overline{x} - \mu_0 \ge (\sigma/\sqrt{n})z_\alpha$$

详见课本P189 表8-1

例 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2), \mu = 40cm/s, \sigma = 2cm/s.$

现在用新方法生产了一批推进器。从中随机取n=25只，测得燃烧率的样本均值为

$$\bar{x} = 41.25cm/s.$$

设在新方法下总体均方差仍为 **2cm/s**，问这批推进器的燃烧率是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著的提高？取显著性水平 $\alpha = 0.05.$

解:提出假设: $H_0: \mu = \mu_0 = 40 \quad H_1: \mu > \mu_0$

取统计量 $U = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq U_{0.05} = 1.645$

否定域为 **W:** $\boxed{U > U_{0.05}}$ **=1.645**

代入 σ**=2**, n**=25**，并由样本值计算得统计量U的实测值

U=3.125>1.645

落入否定域

故拒绝H_0，即认为这批推进器的燃料率较以往生产的有显著的提高。

2. σ^2 未知，关于 μ 的检验（**t检验**）

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 未知，我们来求检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

的拒绝域（显著性水平为 α）。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自正态总体**X** 的样本，

由于 σ^2 未知，现在不能利用 $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域了。

注意到 s^2是σ^2 的无偏估计，我们用 s 来代替σ，采用 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 作为检验统计量。当

依据：6.3定理三

$|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0, 拒绝域的形式为

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq k$$

已知当 H_0为真时，$\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故由

P {拒绝 $H_0|H_0$为真}$=P_{\mu_0}\left\{\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq k\right\}=\alpha$ ，

得 $k = t_{\alpha/2}(n-1)$ ，即拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，当 σ^2 未知时，关于 μ 的单边检验得拒绝域在课本**P189** 表**8-1**已给出。

上述利用 t 统计量得出得检验法称为 t 检验法。在实际中，正态总体的方差常为未知，所以我们常用 t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题。

例 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

10.4	10.6	10.1	10.4	10.5	10.3	10.3	10.2
10.9	10.6	10.8	10.5	10.7	10.2	10.7	

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma = 0.15$,

要检验假设

$$H_0: \mu = 10.5, \quad H_1: \mu \neq 10.5,$$

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$,

则$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10.48-10.5}{0.15/\sqrt{15}} = -0.516,$$

查表得 $z_{0.05} = 1.645$,

于是 $$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -0.516 < z_{0.05} = 1.645,$$

故接受H_0, 认为该机工作正常.

例 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

10.4	10.6	10.1	10.4	10.5	10.3	10.3	10.2
10.9	10.6	10.8	10.5	10.7	10.2	10.7	

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 依题意 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0: \mu = 10.5$, $H_1: \mu \neq 10.5$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s = 0.237$,

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{10.48 - 10.5}{0.237/\sqrt{15}}\right| = 0.327,$$ t分布表

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448 > |t| = 0.327$,

故接受H_0, 认为金属棒的平均长度无显著变化.

例　　某日用化工厂用一种设备生产香皂，其厚度要求为$5cm$，今欲了解设备的工作性能是否良好，随机抽取 10 块香皂，测得平均厚度为$5.3cm$，标准差为$0.3cm$，试分别以0.01, 0.05的显著性水平检验设备的工作性能是否合乎要求。

解：根据题意，香皂的厚度指标可以认为是服从正态分布的，但总体方差未知。这是一个总体均值的双边检验问题。

（1）提出假设：H_0：$\mu = 5$（合乎质量要求），

H_1：$\mu \neq 5$ （不合乎质量要求）。

（2）建立检验统计量。

由题目的条件，检验统计量为：$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1} / \sqrt{n}}$。

同样的检验数据，检验的结论不同，这似乎是矛盾的。其实不然，当在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时接受原假设，只能是认为在规定的显著性水平下，尚不能否定原假设。接受 H_0，并不意味着有绝对的把握保证 H_0 为真。我们从此例看到，在 95% 的置信水平上否定原假设，但是却不能在 99% 的置信水平上否定原假设。

（4）计算实际检验量的值：

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{5.3 - 5}{0.3 / \sqrt{10}} = 3.16$$

。

（5）当 $\alpha = 0.01$ 时，$3.16 \in (-3.2498,\ 3.2498)$，落入接受域，故接受原假设 H_0，认为在 $\alpha = 0.01$ 的显著性水平下，设备的工作性能尚属良好。当 $\alpha = 0.05$ 时，$3.16 \in (2.2622,\ \infty)$，落入了拒绝域，因此要拒绝原假设 H_0，认为在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下，设备的性能与良好的要求有显著性差异。

二. 两个正态总体均值差的检验（t 检验）

我们还可以用t检验法检验具有相同方差的两个正态总体均值差的假设。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$的样本，$y_1, y_2, \cdots, y_{n_2}$是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本且设两样本独立。又分别记它们的样本均值为 $\overline{x}, \overline{y}$, 记样本方差为$s_1^2, s_2^2$。设 μ_1, μ_2, σ^2 均为未知，要特别引起注意的是，在这里假设两总体的方差是相等的。

现在来求右边检验问题：

$$H_0:\mu_1-\mu_2\le\delta, H_1:\mu_1-\mu_2>\delta.$$

（ δ 为已知常数）的拒绝域，取显著性水平为

$\alpha=0.05$ 引用下述 t 统计量作为检验统计量：

$$t=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

依据：6.3定理四（2）

其中

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

当 H_0 为真时，已知$t \sim t(n_1+n_2-2)$ 与单个总体的 t 检验法相仿，其拒绝域的形式为

$$t=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\geq k.$$

$$\mathbf{P}\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0\text{为真}\}$$

$$=P_{\mu_1-\mu_2\leq\delta}\left\{\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\geq k\right\}=\alpha$$

可得 $k = t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$. 于是得拒绝域为

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2).$$

类似地，均值差的双边检验问题：

由 $P\{H_0$ 为真, 拒绝 $H_0\}$

$$= P_{\mu_1 - \mu_2 = \delta}\left\{\left|\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right| \geq k\right\} = \alpha$$

可得 $k = t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$. 故得拒绝域为

$$t = \frac{|(\bar{x} - \bar{y}) - \delta|}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2).$$

关于均值差的双边检验问题的拒绝域在书**P189**表**8-1**中给出。常用的是 $\delta = 0$ 的情况。

当两种正态总体的方差均为已知时，我们可用**Z**检验法来检验两正态总体均值差的假设问题。

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

依据：6.3定理一

例　　在一项社会调查中，要比较两个地区居民的人均年收入。根据以往的资料，甲、乙两类地区居民人均年收入的标准差分别为$\sigma_1 = 5365$元和$\sigma_2 = 4740$元。现从两地区的居民中各随机抽选了100户居民，调查结果为：甲地区人均年收入$\bar{X}_1 = 30090$元，乙地区人均年收入为$\bar{X}_2 = 28650$元。试问，当$\alpha = 0.05$时，甲、乙两类地区居民的人均年收入水平是否有显著性的差别。

解：这是两个总体均值之差的显著性检验，没有涉及到方向，所以是双边检验。由于两个样本均为大样本且总体方差已知，因而可用检验统计量：

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

（1）提出假设：　　　　　　H_0： $\mu_1 = \mu_2$

H_1： $\mu_1 \neq \mu_2$

（2）根据子样计算实际检验量的值

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(30090 - 28650)}{\sqrt{\frac{5365^2}{100} + \frac{4740^2}{100}}} = 2.05$$

（3）当 $\alpha = 0.05$ 时，查正态分布表得 $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ 。

（4）因为 $z = 2.05 > 1.96$，故拒绝 H_0，认为甲、乙两类地区居民的人均年收入有显著性差异。

例　　某车间比较用新、旧两种不同的工艺流程组装一种电子产品所用的时间是否有差异，已知两种工艺流程组装产品所用的时间服从正态分布，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$。第一组有 10 名技工用旧工艺流程组装产品，平均所需时间 $\bar{X}_1=27.66$ 分钟，子样标准差 $s_1=12$ 分钟，另一组有 8 名技工用新工艺流程组装产品，平均所需时间 $\bar{X}_2=17.6$ 分钟，标准差 $s_2=10.5$ 分钟。试问用新、旧两种不同工艺流程组装电子产品哪一种工艺方法所需时间更少？（$\alpha=0.05$）

解：由题意知，总体方差 σ_1^2,σ_2^2 未知，但两者相等。故用 t 作检验统计量

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

1、提出假设，若 $\mu_1-\mu_2=0$，则表示两种工艺方法在所需时间上没有显著差异；若 $\mu_1-\mu_2>0$，则表示用新工艺方法所需时间少，所以，单边右检验：

$$H_0：\ \mu_1-\mu_2\le 0，\quad H_1：\ \mu_1-\mu_2>0。$$

2、由已知条件，$\overline{X}_1=27.66$，$\overline{X}_2=17.6$，$s_1^2=12$，$s_2^2=10.5$，$n_1=10$，$n_2=8$，计算检验量的值：

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(10-1)12^2+(8-1)10.5^2}{10+8-2}=129.23，$$

$$S_w=\sqrt{129.23}=11.37。$$

$$t=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(27.66-17.6)-0}{11.37\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}=1.867。$$

3、当 $\alpha=0.05$ 时，t 的自由度为 $n_1+n_2-2=10+8-2=16$，查 $t-$分布表，临界值为 $t_{0.05}(16)=1.7459$，拒绝域为 $(1.7459,\ \infty)$，因 $1.867\in(1.7459,\ \infty)$ 落入拒绝域，所以拒绝 H_0，接受 H_1，认为新工艺流程组装产品所用时间更少。

三、基于成对数据的检验（ t 检验 ）

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同的条件下作对比试验, 得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为**逐对比较法**.

例 有两台光谱仪I_x , I_y ,用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y(\%)$	0.10	0.09	−0.12	0.18	−0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异? $(\alpha=0.01)$

解 本题中的数据是成对的, 即对同一试块测出一对数据, 我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素, 如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的. [这也表明不能将光谱仪I_x 对9个试块的测量结果(即表中第一行)看成是一个样本, 同样也不能将表中第二行看成一个样本, 因此不能用表8.1中第4栏的检验法作检验.

而同一对中两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的. 这样, 局限于各对中两个数据来比较就能排除种种其他因素, 而只考虑单独由仪器的性能所产生的影响.

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$,

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 来自正态总体 $N(\mu_d, \sigma^2)$,

这里 μ_d, σ^2 均为未知. 若两台机器的性能一样,

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布, 其均值为零.

要检验假设 $H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 样本方差 s^2,

按表8.1中第二栏中关于单个正态分布均值的 t 检验, 知拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\bar{d} - 0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

由 $n = 9$, $t_{\alpha/2}(8) = t_{0.005}(8) = 3.3554$, $\bar{d} = 0.06$,

$s = 0.1227$, 可知 $|t| = 1.467 < 3.3554$, 所以接受 H_0,

认为这两台仪器的测量结果无显著的差异.

三、小结

在这一节中我们学习了正态总体均值的检验法，有以下两种：单个正态总体均值的检验以及两个正态总体均值差的检验.

表 8－1　正态总体均值、方差的检验法(显著性水平为 α)

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
1	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$
2	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha-2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2 已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
7	$\mu_D\leqslant 0$ $\mu_D\geqslant 0$ $\mu_D=0$ (成对数据)	$t=\dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D>0$ $\mu_D<0$ $\mu_D\neq 0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$