不定积分：

例 1. 设函数 $f(x)$ 具有可微的反函数 $g(x)$， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，试证明：

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

解：因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F'(x) = f(x)$.

故 $[xg(x) - F(g(x))]' = g(x) + xg'(x) - F'(g(x))g'(x) = g(x) + xg'(x) - f(g(x))g'(x)$.

又因为 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，则 $f(\mathrm{g}(x)) = x$，于是

$$[xg(x) - F(g(x))]' = g(x) + xg'(x) - xg'(x) = g(x),$$

故 $\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C$.

例 2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$，即 $F'(x) = f(x), x \in I$. 证明：若存在 $x_0 \in I$ 是 $f(x)$ 的间断点，则 x_0 必为 $f(x)$ 的第二类间断点.

证明：用反证法. 若 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，则 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 都存在. 于是，由洛必达法则有

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

因为 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，因此有下面两种情形：

（1）若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，则

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0},$$

也即 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 导数不存在，与 $F'(x_0) = f(x_0)$ 矛盾.

（2）若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$，则

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \neq f(x_0),$$

与 $F'(x_0) = f(x_0)$ 矛盾.

例 3. $\int \frac{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解：

$$\int \frac{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2 \mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3 + C.$$

例 4. $\int \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x = \int \arcsin(1-x)\mathrm{d}\arcsin(1-x) = \frac{1}{2}[\arcsin(1-x)]^2 + C.$

例 5. $\int \frac{(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{2-3x\cdot e^{x^2}}\mathrm{d}x.$

解：$\int \frac{(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{2-3x\cdot e^{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x\cdot e^{x^2})}{2-3x\cdot e^{x^2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(2-3x\cdot e^{x^2})}{2-3x\cdot e^{x^2}} = -\frac{1}{3}\ln|2-3x\cdot e^{x^2}| + C.$

例 6. $\int \sqrt{x^2+x}(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\mathrm{d}x.$

解： $\int \sqrt{x^2+x}(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\mathrm{d}x = \int [(x^2+x)\mathrm{e}^x]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}[(x^2+x)e^x] = \frac{2}{3}[(x^2+x)\mathrm{e}^x]^{\frac{3}{2}} + C$

例 7. $\int \frac{1+\ln x}{x^{-x}+x^x}\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{1+\ln x}{x^{-x}+x^x}\mathrm{d}x = \int \frac{x^x(1+\ln x)}{1+(x^x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x^x)^2}\mathrm{d}x^x = \arctan x^x + C.$

例 8. $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x.$

解：$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}\mathrm{d}\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x-\ln x} + C.$

例 9. $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x = \frac{x}{\ln x} - \int x\mathrm{d}\frac{1}{\ln x} - \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x = \frac{x}{\ln x} + C.$

例 10. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解：$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int [-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}]'\ln x\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int [\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}]\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$$

例 11. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解：

$$\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int \arccos x\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C.$$

例 12. $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

解：因为

$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2) - \int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + C$，故

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int [(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]'\arctan x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]\arctan x - \frac{1}{2}\int (\ln(1+x^2)-1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]\arctan x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}[x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x]$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2+1)(\ln(1+x^2)-1)]\arctan x + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \arctan x + C.$$

例 13. $\int (1+x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$

解：$\int (1+x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + \int x(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$

$$= \int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} - \int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

例 14. 求 $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x$， $n\ge 2$ 的递推公式.

解：$I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x=\int \sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x=I_{n-2}-\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

因为 $\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int \sin^{n-2}x\cos x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{1}{n-1}\int \sin^n x\mathrm{d}x$，故

$$I_n=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}(\sin^{n-1}x\cos x+I_n),$$

于是，$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\ \ (n\ge 2)$.

注： 积分的递推公式一般都由分部积分法来给出；类似的，像 $\int \sec^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \cos^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \tan^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \cot^n x\,\mathrm{d}\,x,\int \csc^n x\,\mathrm{d}\,x$ 都可以利用分部积分来得到相应的递推公式。

例 15. 求 $I_n=\int (1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解：当 $n=0$ 时，$I_0=\int \mathrm{d}x=x+C$.

当 $n\ge 1$ 时，$I_n=\int (1-x^2)^n\mathrm{d}x=\int (1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\mathrm{d}x=I_{n-1}-\int (1-x^2)^{n-1}x^2\mathrm{d}x$. 而

$$\int (1-x^2)^{n-1}x^2\mathrm{d}x=\int (1-x^2)^{n-1}x\cdot x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n}(1-x^2)^n\cdot x+\frac{1}{2n}\int (1-x^2)^n\mathrm{d}x,$$

于是，$I_n=I_{n-1}+\frac{x(1-x^2)^n}{2n}-\frac{1}{2n}I_n$.

移项后，可得 $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}+\frac{x(1-x^2)^n}{2n+1}$.

例 16. 求 $I_n=\int \frac{1}{(x^m+c)^n}\mathrm{d}x,\ n>1$ 的递推式，其中 m,c 均为不为零的实数，且 $m(n-1)\ne 1$.

解：$I_n=\int \frac{1}{(x^m+c)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2c}\int \frac{x^m+c-(x^m-c)}{(x^m+c)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2c}I_{n-1}-\frac{1}{2c}\int \frac{x^m-c}{(x^m+c)^n}\mathrm{d}x$.

因为 $\left(\frac{x}{(x^m+c)^{n-1}}\right)'=\frac{1}{(x^m+c)^{n-1}}-\frac{(n-1)mx^m}{(x^m+c)^n}=\frac{[1-(n-1)m]x^m+c}{(x^m+c)^n}$， 故

$$\int \frac{x^m-c}{(x^m+c)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-(n-1)m}\int \frac{[1-(n-1)m]x^m+c+[(n-1)m-2]c}{(x^m+c)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1-(n-1)m}\frac{x}{(x^m+c)^{n-1}}+\frac{(n-1)m-2}{1-(n-1)m}cI_n .$$

于是，$I_n=\frac{1}{2c}I_{n-1}-\frac{x}{2c[1-(n-1)m](x^m+c)^{n-1}}-\frac{(n-1)m-2}{2[1-(n-1)m]}I_n$.

移项后，可得

$$I_n=\frac{(n-1)m-1}{c(n-1)m}I_{n-1}+\frac{1}{c(n-1)m}\cdot\frac{x}{(x^m+c)^{n-1}},\ (n>1).$$

例 17. 求 $I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x,\ n\geq 2$ 的递推式.

解：$I_n=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x=I_{n-2}+\int\frac{\cos x}{\sin^n x}\cdot\cos x\mathrm{d}x$，其中

$$\int\frac{\cos x}{\sin^n x}\cdot\cos x\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}\cdot\cos x-\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-2}x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}\cdot\cos x-\frac{1}{n-1}I_{n-2},$$

故 $I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x},\ n\geq 2.$

定积分及其应用：

一、掌握定积分的概念和性质

例 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}\ln[1+(\frac{k}{n})^2]==\int_0^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

$$=x\ln(1+x^2)\Big|_0^2-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\ln 5-4+2\arctan 2.$$

例 19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$.

解：用夹逼准则。注意到 $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leq\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$，又

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\,|_0^1=\frac{2}{\pi}$,

所以由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\dfrac{2}{\pi}$.

例 20. 证明：$\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\ln n$

证明：由

$$\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

可得 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\int_1^n\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n$。

注：再由夹逼准则和上述的不等式，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$。

例 21. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 且 $f(x)>0$，证明：

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x\ 。$$

证明：因为 $f(x)$，$\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以它们在 $[a,b]$ 可积，因此

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)$$

其中 $\xi_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$， $i=1,2,\ldots,n$ 。

又 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\ge(f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\ldots\cdot f(\xi_n))^{\frac{1}{n}}$， 从而

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\right)\ge\ln[(f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\ldots\cdot f(\xi_n))^{\frac{1}{n}}]$$

即有 $\ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\right)\ge\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)$ （注：这个不等式也可以利用函数 $\ln x$ 的凸性来给出），

由极限的性质以及复合函数极限运算法则，有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)=\ln[\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i))]=\lim_{n\to\infty}[\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i))]\ge\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)]=\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x$$

得证。

注：对于上述的不等式，事实上我们有更一般结论：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，其值域为 I。函数 $\varphi(u)$ 在 I 上二阶可导，且对于 I 上任意的一点 u 都有 $\varphi''(u)\ge 0$。证明 Jensen 不等式：$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}x$。

证明：因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以由积分中值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

由 Taylor 公式，存在 ξ 在 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 之间，使得

$$\varphi(f(x))=\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))\,(f(x)-f(x_0))+\frac{\varphi''(\xi)}{2}(f(x)-f(x_0))^2$$

因为 $\varphi''(\xi)\ge 0$，所以有

$$\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))\,(f(x)-f(x_0))\le \varphi(f(x))$$

两边从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b \varphi(f(x_0))\,\mathrm{d}x+\varphi'(f(x_0))\int_a^b f(x)-f(x_0)\,\mathrm{d}x\le \int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

整理得

$$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)=\varphi(f(x_0))\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

若取 $\varphi(u)=-\ln u$，由 Jensen 不等式，就可以得到例 21 的结果。

例 22、证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

证明一：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos t-\sin t}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^2}\mathrm{d}t$. 于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}](\sin x-\cos x)\mathrm{d}x\le 0,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

证明二：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x\quad(0\le\xi_1\le\frac{\pi}{4}\le\xi_2\le\frac{\pi}{2})$$

$$=(\frac{1}{1+\xi_1^2}-\frac{1}{1+\xi_2^2})(1-\sqrt{2})\le 0,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

说明：一般来说，证明积分估值不等式要用定积分的可比性性质，以及根据不等式对被积函数进行适当的放大和缩小，另外有时要注意对积分做一些适当的变量代换。

例 23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f'(x)>0,\ x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1\frac{f(\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{f(\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

证明 作变量替换 $x=\sin t$，得 $\int_0^1\frac{f(\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos(\sin t))\mathrm{d}t$.

令 $x=\cos t$，则 $\int_0^1\frac{f(\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin(\cos t))\mathrm{d}t$.

因为 $f'(x)>0$，$x\in[0,1]$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 又注意到 $u\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\sin u\le u$，故有 $\cos(\sin t)\ge\cos t\ge\sin(\cos t)$，因此有

$$f(\cos(\sin t))\ge f(\cos t)\ge f(\sin(\cos t))$$

故 $\int_0^1\frac{f(\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{f(\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

二. 定积分的计算

例 24. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}\,x$

解：$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}\,x \overset{x=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan t)+\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t))]\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan t)+\ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例 25. $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\mathrm{d}x$

解：因为$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\mathrm{d}x$，所以

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}+\frac{f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}.$$

例 26. 见课件解答。

例 27. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

解：$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}+\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}(-\arctan(\cos x))\big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}$$

例 28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}\,x.$

解：$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}\,x$，

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}\,x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}\,x]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)-\ln 2\,\mathrm{d}\,x$$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\mathrm{d}\,t-\frac{\pi}{4}\ln 2==\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}\,t-\frac{\pi}{4}\ln 2$，因此$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}\,x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$。

例. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x]=\frac{\pi}{4}$$

例 29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x$

解：因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}+\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}。$$

例. $\dfrac{\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}}$

解：令 $t^2=\sin u$，则 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos u}\frac{\cos u}{2\sqrt{\sin u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin u}}\mathrm{d}u$，

令 $t^2=\tan u$，则 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos u\cdot\frac{\sec^2 u}{2\sqrt{\tan u}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{\sin u\cos u}}\mathrm{d}u$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\sin 2u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin u}}\mathrm{d}u$，故 $\dfrac{\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}}=\sqrt{2}$.

三、反常积分

例 30. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}x$.

解：

$$\int\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}x=\int\frac{-2x}{(x^2+\frac{1}{2})^2}(-\frac{1}{2x})\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}+\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\cdot\frac{-2x^2-1}{2x^2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}+\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}+2\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2+\frac{1}{2}}+2\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

于是，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+\frac{1}{2}}+2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$

例 31. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx.$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx.$

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_0^1\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt.$

于是，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_0^1[\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}]dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$

说明：计算反常积分主要是先判别奇点，然后按奇点分区间计算，另外，也要注意不要随意拆分项，除非拆出去的项是极限存在的。

例 32. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$。

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,dx^{-1}=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_{0^+}^{+\infty}+\int_0^{+\infty}x^{-1}d\sin^2 x=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{x}dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)\overset{t=2x}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$。

说明：对反常积分，作变量代换(要求单调)是不会影响其敛散性的。

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+e^2}dx$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+e^2}dx=\int_0^{e}\frac{\ln x}{x^2+e^2}dx+\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+e^2}dx$

令 $x=\frac{e^2}{t}$，则 $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+e^2}dx=\int_e^0\frac{\ln\frac{e^2}{t}}{\frac{e^4}{t^2}+e^2}\cdot(-\frac{e^2}{t^2})dt=\int_0^e\frac{2-\ln t}{t^2+e^2}dt$，

所以，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+e^2}dx=2\int_0^e\frac{1}{x^2+e^2}dx=\frac{2}{e}\arctan\frac{x}{e}\Big|_0^e=\frac{\pi}{2e}.$

五、变上限积分

例 33. 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t,(x>0)$，求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

解：因为 $[f(x)+f(\frac{1}{x})]'=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})=\frac{\ln x}{1+x}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\ln x}{x}$.

故 $f(x)+f(\frac{1}{x})-[f(1)+f(1)]=\int_1^x[f(t)+f(\frac{1}{t})]'\mathrm{d}t$，因为 $f(1)=0$，所以

$$f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

例 34. 见课件解答。

例 35. 证明变上限积分的周期性质：

（1）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的奇函数，且是以 $2T$ 为周期的周期函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 $2T$ 为周期的周期函数；

（2）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的以 $2T$ 为周期的周期函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 能表示成线性函数与以 $2T$ 为周期的周期函数之和.

证明：（1）因为 $F(x+2T)=\int_0^{x+2T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+2T} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{-T}^{T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

所以，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 $2T$ 为周期的周期函数.

（2）设 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-kx$，则.

$$g(x+2T)=\int_0^{x+2T} f(t)\mathrm{d}t-k(x+2T)$$
$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+2T} f(t)\mathrm{d}t-k(x+2T)$$
$$=g(x)+\int_0^{2T} f(t)\mathrm{d}t-2kT.$$

取 $k=\frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)\mathrm{d}t$，则 $g(x+2T)=g(x)$，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=g(x)+kx$.

故结论得证.

例 36. 设函数 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

解：因为 $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，作变换 $u=t-\pi$，则 $f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数，故只要计算一个周期.

当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时， $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=\cos x-\cos(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$；

当 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$ 时， $f(x)=\int_x^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$.

容易得到， $f(x)$ 的最大值与最小值分别为 $\sqrt{2}$ ， $2-\sqrt{2}$.

注：也可以通过求驻点来得到最大值和最小值。

例 37. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且 $f(x)>0$. 函数

$$F(x)=\int_{-t}^{t}\left|x-u\right|f(u)\mathrm{d}u,-t\le x\le t,\ \ t>0.$$

（1）证明 $F'(x)$ 是严格单调增加的函数，曲线 $y=F(x)$ 是向上凹的；

（2）证明：当 $f(x)$ 是偶函数时， $F'(x)$ 是奇函数；

（3）当 $f(x)$ 是偶函数时，求函数 $F(x)$ 的最小值点；

（4）当 $f(x)$ 是偶函数时，把函数 $F(x)$ 最小值作为 t 的函数，使它等于 $f(t)-t^2-1$，试求函数 $f(x)$.

证明：（1） $F(x)=\int_{-t}^{x}(x-u)f(u)\mathrm{d}u+\int_{x}^{t}(u-x)f(u)\mathrm{d}u$

$$=x\int_{-t}^{x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{-t}^{x}uf(u)\mathrm{d}u+\int_{x}^{t}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_{x}^{t}f(u)\mathrm{d}u$$

于是，

$$F'(x)=\int_{-t}^{x}f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_{x}^{t}f(u)\mathrm{d}u+xf(x)=\int_{-t}^{x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{x}^{t}f(u)\mathrm{d}u.$$

$$F''(x)=2f(x)>0,$$

故 $F'(x)$ 是严格单调增加的函数，曲线 $y=F(x)$ 是向上凹的.

（2）当 $f(x)$ 是偶函数时，令 $v=-u$ ，则

$$F'(-x)=\int_{-t}^{-x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{-x}^{t}f(u)\mathrm{d}u=-\int_{t}^{x}f(-v)\mathrm{d}v+\int_{x}^{-t}f(-v)\mathrm{d}v$$

$$=\int_{x}^{t}f(v)\mathrm{d}v-\int_{-t}^{x}f(v)\mathrm{d}v=-F'(x),$$

所以 $F'(x)$ 是奇函数.

（3）当 $f(x)$ 是偶函数时，

$F'(0)=\int_{-t}^{0} f(u)\mathrm{d}u-\int_{0}^{t} f(u)\mathrm{d}u=-\int_{t}^{0} f(-v)\mathrm{d}u-\int_{0}^{t} f(u)\mathrm{d}u=\int_{0}^{t} f(v)\mathrm{d}v-\int_{0}^{t} f(u)\mathrm{d}u=0$，

且 $F''(0)=2f(0)>0$，故函数 $F(x)$ 的最小值点为 $x=0$.

（4）由题意，$F(0)=-\int_{-t}^{0} uf(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{t} uf(u)\mathrm{d}u=f(t)-t^2-1$，两边对 t 求导，则有

$$(-t)f(-t)(-1)+tf(t)=f'(t)-2t,$$

由于 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(t)-2tf(t)-2t=0$，注意到 $f(0)=1$，解得 $f(t)=2\mathrm{e}^{t^2}-1$.

例 38. .设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域连续，$f(0)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}$。

解：先把相应的变上限积分变成标准型，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}$

用罗比达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}=1+\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}=1+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}\cdot\lim_{x\to 0}f(x)$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}\cdot\lim_{x\to 0}f(x)=1+\frac{1}{f(0)}\cdot f(0)=2。$$

例 39. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ 确定，试写出 $y(x)$ 的二阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

解：对方程 $x=\int_1^{y-x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ 两边对 x 求导，则 $1=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}(y'-1)$，故 $y'=1+\mathrm{e}^{(y-x)^2}$.

$$y''=2(y-x)(y'-1)\mathrm{e}^{(y-x)^2}=2(y-x)\mathrm{e}^{2(y-x)^2}.$$

对方程 $x=\int_1^{y-x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ 两边取 $x=0$，得 $y=1$，所以，$y'(0)=1+\mathrm{e}$，$y''(0)=2\mathrm{e}^2$，故 $y(x)$ 的二阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式为 $y(x)=1+(1+\mathrm{e})x+\mathrm{e}^2x^2+o(x^2)$.

例 40. 设 $y(x)=\int_0^x |\cos t|\mathrm{d}t$，

（1）证明：当 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，$2n \le y(x) \le 2(n+1)$；

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$。

（1）证明：$y'(x)=|\cos x|\ge 0$，因此 $y(x)=\int_0^x |\cos t|\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 非减，因此当 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，

$$2n=n\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t \le y(x) \le \int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2(n+1)$$

（2）解：由（1）得，当 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，$2n \le y(x) \le 2(n+1)$，即当

$n \le \dfrac{x}{\pi} \le n+1$ 时，$2n \le y(x) \le 2(n+1)$，因此 $2(\dfrac{x}{\pi}-1) \le 2n \le y(x) \le 2(n+1) \le 2(\dfrac{x}{\pi}+1)$

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，都有 $2(\dfrac{x}{\pi}-1) \le y(x) \le 2(\dfrac{x}{\pi}+1)$，即有

$$2(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}) \le \frac{y(x)}{x} \le 2(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{x})$$

由夹逼准则，得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{\pi}$。

例 41. 设函数 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\,\mathrm{d}t$，试求 $f(x)$，并计算积分

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|f(t)|^n\ \mathrm{d}t$。

解：做变量代换 $u=x-t$，有 $x=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(-u)\,\mathrm{d}u$，两边对 x 求导，得

$$1=f(x)+\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(I)}$$

再次求导得

$$0=f'(x)+f(-x) \qquad \text{(II)}$$

又一次求导得

$$0=f''(x)-f'(-x) \qquad \text{(III)}$$

由(II)式，得

$$0=f'(-x)+f(x) \qquad \text{(IV)}$$

结合(III)和(IV)，得到

$$f''(x)+f(x)=0$$

由(II)和(III)， $f(0)=1, f'(0)=-1$。解得 $f(x)=\cos x-\sin x$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\cos t-\sin t|^n\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin(t-\frac{\pi}{4})|^n\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{x=\frac{\pi}{4}-t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，则由例 14，得到 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\ \ (n\ge 2)$. 又 $I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1$，从而得

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t=I_n=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n=2m\\ \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} & n=2m-1\end{cases}.$$

六、定积分的证明题

例 42. 若连续 $f(x)$ 关于 x=T 对称，证明： $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_T^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2T-b}f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明：右端= $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_T^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^{2T-b}f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_T^b f(2T-u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_T^b f(u)\,\mathrm{d}u=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$。

例 43. 证明： $\int_0^x \mathrm{e}^{xt}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t.$

分析：事实上，是要证明 $\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}-\frac{u^2}{4}}\mathrm{d}u.$ 即要做变换使得 $xt-t^2=\frac{x^2}{4}-\frac{u^2}{4}$，由此可得

$(t-\frac{x}{2})^2=\frac{u^2}{4}$， 即 $t=\frac{x}{2}\pm\frac{u}{2}$.

证明：做变换 $t=\frac{x}{2}+\frac{u}{2}$， 于是 $\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-x}^x \mathrm{e}^{\frac{x^2-u^2}{4}}\mathrm{d}u$. 因为被积函数是偶函数，故

$$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{x^2-u^2}{4}}\mathrm{d}u=\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{x^2-t^2}{4}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t.$$

例 44. 设 $f(x)$ 是连续函数，证明 $\int_1^4 f(\frac{2}{x}+\frac{x}{2})\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f(\frac{2}{x}+\frac{x}{2})\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

分析：做变换使得 $\frac{2}{x}=\frac{t}{2}$，即 $t=\frac{4}{x}$，此时 $\frac{x}{2}=\frac{2}{t}$.

证明：做变换 $t=\frac{4}{x}$，则

$$\int_1^4 f(\frac{2}{x}+\frac{x}{2})\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_4^1 f(\frac{t}{2}+\frac{2}{t})\frac{t\ln\frac{4}{t}}{4}(-\frac{4}{t^2})\mathrm{d}t$$

$$=\int_4^1 f(\frac{t}{2}+\frac{2}{t})\frac{t\ln\frac{4}{t}}{4}(-\frac{4}{t^2})\mathrm{d}t=\int_1^4 f(\frac{t}{2}+\frac{2}{t})\frac{\ln 4-\ln t}{t}\mathrm{d}t$$

故 $\int_1^4 f(\frac{2}{x}+\frac{x}{2})\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f(\frac{2}{x}+\frac{x}{2})\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

例 45. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调可导，$f(0)=0,\ f(a)=b$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab.$$

证明：做变换 $x=f(t)$，则有 $\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a g(f(t))f'(t)\mathrm{d}t$.

注意到 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，故 $g(f(t))=t$，则

$$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a tf'(t)\mathrm{d}t=tf(t)\Big|_0^a-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=af(a)-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

故 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab.$

第一积分中值定理：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $g(x)\ge 0$，证明：存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。

证明：分两种情况进行证明。

（1）若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$，令 $G(x)=\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x$，$x\in[a,b]$，则 $G'(x)=g(x)\ge 0$，从而 $G(x)$ 非减，又 $G(a)=G(b)=0$，因此 $G(x)\equiv 0$，故有 $g(x)=G'(x)\equiv 0$，这样此时结论显然成立。

（2）若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m，注意到

$$m\cdot g(x)\le f(x)g(x)\le M\cdot g(x)$$

从而 $$m\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\le M\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

因此 $$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x} \le M$$

由介值定理，可知存在$\xi \in [a,b]$使得 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x}$，得证。

注：如果此题的题设“$g(x) \ge 0$”改为“$g(x) > 0$”，则原结论中的“$\xi \in [a,b]$”可改为“$\xi \in (a,b)$”。下面给予证明：令$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}\,x$，$G(x) = \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}\,x$，$x \in [a,b]$，利用柯西中值定理，得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(b)} \overset{\text{柯西中值定理}}{=} \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi)，得证。$$

例 46. 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$连续，且$g'(x) \ge 0$，证明：存在$\xi \in [a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}\,x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}\,x。$$

证明：观察等式的右端（应该用的是变上限积分和分部积分），考虑变上限积分$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}\,x$，$x \in [a,b]$。则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,F(x) = g(x)\cdot F(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$$

$$= g(b)\cdot F(b) - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad （注意到g'(x) \ge 0，利用第 8 题的结论）$$

$$\overset{\text{利用积分第一中值定理}}{=} g(b)\cdot F(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \xi \in [a,b]$$

$$= g(b)\cdot F(b) - F(\xi)[g(b) - g(a)]$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}\,x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}\,x。$$

例 47. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，当$0 \le x < 1$时，有$0 < f(1) < f(x)$，且 $f'(x) < f(x)$. 证明：存在惟一的点$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = \int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t$.

证明：作辅助函数$F(x) = f(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 由于

$$F(0) = f(0) - \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = f(0) > 0,$$

$$F(1) = f(1) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 [f(1) - f(t)]\mathrm{d}t < 0,$$

由零点定理，存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t.$

又 $F'(x)=f'(x)-f(x)<0$，即 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调减少，故 ξ 是惟一的.

注： 构造函数时有时需要用变上限积分。

例 48.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：在 (a,b) 内至少存在两个不同的点 ξ,η，使得 $f(\xi)=f(\eta)=0.$

证明：作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(a)=F(b)=0$. 由于

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xF'(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=0$. 由拉格朗日中值定理，存在 $c\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b F(x)dx-\int_a^a F(x)dx=F(c)(b-a),$$

即 $F(c)=0$.

于是，由罗尔定理及 $F(a)=F(c)=F(b)=0$，存在 $\xi\in(a,c),\ \eta\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi)=F'(\eta)=0,$$

即 $f(\xi)=f(\eta)=0.$

总结：证明含有一个中值的等式，题设中含有积分式的，多用积分中值定理+罗尔定理+闭区间连续函数的性质，另外，积分中值定理事实上是被积函数的原函数的微分中值定理，因此构造函数要用变上限积分。

例 49. 见课件，利用罗尔定理和积分中值定理。

例 50. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 有连续的二阶导数且 $f(0)=0$，$a>0$，证明：存在 $\xi\in[-a,a]$，使得 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x$。

证明：设函数 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 处取得最大值 M 和最小值 m，（要证

$$a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x \Leftrightarrow f''(\xi)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

只需要证 $m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x\le M$ 即可。）

由泰勒公式，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2$ 其中 $\eta=\eta(x)$ 在 0

和 x 之间。又注意到 $\frac{m}{2}x^2\le\frac{f''(\eta)}{2}x^2\le\frac{M}{2}x^2\quad \forall x\in[-a,a]$，所以

$$f'(0)x+\frac{m}{2}x^2\le f(x)\le f'(0)x+\frac{M}{2}x^2$$

从而 $$\int_{-a}^{a}f'(0)x+\frac{m}{2}x^2\,\mathrm{d}\,x\le\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}\,x\le\int_{-a}^{a}f'(0)x+\frac{M}{2}x^2\,\mathrm{d}\,x$$

即有 $$\frac{a^3}{3}m\le\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}\,x\le\frac{a^3}{3}M$$

整理得 $$m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}\,x\le M$$

由介值定理，存在 $\xi\in[-a,a]$，使得 $f''(\xi)=\frac{3}{\mathrm{a}^3}\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}\,x$，得证。

例 51. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个正值的连续函数，记 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x),\ M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{(m+M)^2}{4Mm}(b-a)^2.$$

证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个正值的连续函数，所以 $M\ge m>0$，且 $\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\le 0$.于是，$\int_a^b\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\mathrm{d}x\le 0$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+mM\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le(m+M)(b-a).$$ 故

$$2\sqrt{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot mM\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+mM\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le(m+M)(b-a),$$

两边平方，得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{(m+M)^2}{4Mm}(b-a)^2.$

例 52. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数，对任何 $x,y\in[0,1]$，有 $yf(x)+xf(y)\le 1$. 证明：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{4}.$

证明：令 $x=\sin t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t$；令 $x=\cos t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\sin t\mathrm{d}t$，故

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t]\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

例 53.设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可导函数且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，证明：对于每个 $\alpha \in (0,1)$，有

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{8}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|.$$

证法一：记 $M = \max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$，$g(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$，那么，$g(0) = g(1) = 0$，$\max_{0\le t\le 1}|g(t)|$ 必在某个驻点 $t_0 \in (0,1)$ 取到，即 $g'(t_0) = f(t_0) = 0$.

由泰勒公式，得

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}g''(\xi)(t-t_0)^2$$

$$= g(t_0) + \frac{1}{2}f'(\xi)(t-t_0)^2，\xi \text{ 介于 } t \text{ 与 } t_0 \text{ 之间.}$$

分别取 $t=0$ 和 $t=1$，可得

$$0 = g(t_0) + \frac{1}{2}f'(\xi_1)t_0^2，\ 0 < \xi_1 < t_0；$$

$$0 = g(t_0) + \frac{1}{2}f'(\xi_2)(1-t_0)^2，\ t_0 < \xi_2 < 1.$$

如果 $0 < t_0 \le \frac{1}{2}$，则 $|g(t_0)| = \frac{1}{2}|f'(\xi_1)|t_0^2 \le \frac{1}{8}M$；

如果 $\frac{1}{2} < t_0 < 1$，则 $|g(t_0)| = \frac{1}{2}|f'(\xi_2)|(1-t_0)^2 \le \frac{1}{8}M$.

于是，对于每个 $\alpha \in (0,1)$，有 $|g(\alpha)| \le |g(t_0)| \le \frac{1}{8}M$，即 $\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{8}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$.

证法二：记 $M = \max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$，作辅助函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[0,1]$, 则 $F(0) = F(1) = 0,$ 由泰勒公式知，存在 $0 < \xi_1 < x < \xi_2 < 1$，使得

$$F(0) = F(x) + F'(x)(-x) + \frac{F''(\xi_1)}{2}x^2$$

$$F(1)=F(x)+F'(x)(1-x)+\frac{F''(\xi_1)}{2}(1-x)^2$$

从而 $F(x)=-\frac{F''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)-\frac{F''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2$，因此

$$|F(x)|=|\frac{F''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{F''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2|\le\frac{M}{2}x(1-x)\le\frac{1}{8}M.$$

即有 $\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{8}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.$

例 54、设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可导函数且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.$$

证法一：记 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|$，那么有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-\frac{a+b}{2})=f(x)(x-\frac{a+b}{2})\bigg|_a^b-\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

于是，$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\le M\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M$，即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.$$

证法二：记 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|$，作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[a,b],$ 则 $F(a)=0,$ $F(b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x,$ $F'(a)=F'(\mathrm{b})=0,$ 由泰勒公式知，存在 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$，使得

$$F(\frac{a+b}{2})=F(a)+F'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{F''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$F(\frac{a+b}{2})=F(b)-F'(b)\frac{b-a}{2}+\frac{F''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

从而 $F(b)=\frac{F''(\xi_1)-F''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$，因此

$$|F(b)|=\frac{|F''(\xi_1)-F''(\xi_2)|}{2}(\frac{b-a}{2})^2\le\frac{|F''(\xi_1)|+|F''(\xi_2)|}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$$

即有$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|$.

例 55. 设$\left|f(x)\right|\le\pi$， $f'(x)\ge m>0\ (a<x<b)$，证明：$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}.$

证明：因为 $f'(x)\ge m>0\ (a<x<b)$，所以 $f(x)$ 在$[a,b]$上严格单调增加，从而有反函数.

设 $f(a)=\alpha$， $f(b)=\beta$， φ 为 f 的反函数，则$0<\varphi'(t)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m}$.

由$\left|f(x)\right|\le\pi$，则$-\pi<\alpha<\beta<\pi$. 作变换$t=f(x)$，即 $x=\varphi(t)$，于是

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_\alpha^\beta\sin t\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{m}\int_0^\pi\sin t\mathrm{d}t=\frac{2}{m}.$$

例 56. 设函数 $y=f(x)$ 在区间$[0,1]$上有连续的导数，且$0<f'(x)\le 1$， $f(0)=0$，证明不等式

$$\left(\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u\right)^2\ge\int_0^1 f^3(u)\mathrm{d}u.$$

证明：由$0<f'(x)\le 1$知函数 $y=f(x)$ 在区间$[0,1]$上单调增加，又 $f(0)=0$，故当$0<x\le 1$时， $f(x)>0$.

构造辅助函数$F(x)=\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2-\int_0^x f^3(u)\mathrm{d}u$，于是，

$$F'(x)=2f(x)\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-f^2(x)].$$

记$g(x)=2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-f^2(x)$，因为

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))\ge 0,$$

又$g(0)=0$，故当$0<x\le 1$时， $g(x)\ge 0$，即$F'(x)\ge 0$.

因此，由$F(0)=0$可得$F(x)\ge 0\ \ (0\le x\le 1)$. 取$x=1$，即可得$\left(\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u\right)^2\ge\int_0^1 f^3(u)\mathrm{d}u.$

例 57. 设 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$连续，证明：$(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x)^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x$。

证明：作辅助函数 $\varphi(x)=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-(\int_a^x f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t)^2$ ，$x\in[a,b]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且注意到

$$\varphi'(x)=f^2(x)\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t+g^2(x)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-2f(x)\cdot g(x)\cdot\int_a^x f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x f^2(x)\cdot g^2(t)+g^2(x)\cdot f^2(t)-2f(x)\cdot g(x)\cdot f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x[f(x)\cdot g(t)-g(x)\cdot f(t)]^2\mathrm{d}t\geq 0$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 非减，因此 $\varphi(b)\geq\varphi(a)=0$，得证。

总结： 证明类似例 56、57 的积分不等式，一般考虑利用单调性+积分中值定理或者微分中值定理，构造函数有时要考虑变上限积分。

例 58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right)^2\leq 1.$$

证明：由柯西不等式，有

$$\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}\sin\lambda x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}\cos\lambda x\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\leq\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2\mathrm{d}x\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2\sin^2\lambda x\mathrm{d}x+\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2\mathrm{d}x\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2\cos^2\lambda x\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)(\sin^2\lambda x+\cos^2\lambda x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1.$$

例 59.证明：(1)对于任意的 $x,y\geq 0$，$p,q>1$，且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，都成立不等式：

$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q};$$

(2)对于满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的 $p,q>1$，成立以下 Holder 不等式：

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明：(1)法一： 利用条件极值。

设 $f(x,y)=\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$，下面来求 $f(x,y)$ 在条件 $xy=a\ (a>0)$ 的最小值，也就是求 $g(x)=f(x,ax^{-1})=\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{a^q}{q}x^{-q}\ (x>0)$ 的最小值。由 $g'(x)=x^{p-1}-\dfrac{a^q}{x^{q+1}}=0$，得唯一可疑极值点 $x_0=a^{\frac{1}{p}}$，又因为 $g''(x)=(p-1)x^{p-2}+\dfrac{a^q(q+1)}{x^{q+2}}>0$，因此 x_0 是极小值点，从而也是最小值点，所以 $f(x,y)$ 在曲线 $xy=a\ (a>0)$ 取到最小值 $g(x_0)=a$ 。换句话说，在曲线 $xy=a\ (a>0)$ 上，$f(x,y)\ge a=xy$，由 a 的任意性，从而有当 $x,y>0$，$f(x,y)\ge xy$。又因为 $f(x,0)\ge 0,\ f(0,y)\ge 0$，因此当 $x,y\ge 0$ 时，$f(x,y)\ge xy$。

法二、先来证明一个结论：(证明方法和例 45 类似)

(设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导且严格单调增加，$f(0)=0,$ ，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，证明：$a,b>0,$

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x\ge ab.$$

证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f^{-1}(b)} t\mathrm{d}f(t)=tf(t)\Big|_0^{f^{-1}(b)}+\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=bf^{-1}(b)-\int_a^{f^{-1}(b)} f(t)\mathrm{d}t\ge ab\ )$$

先取结论中的 $f(x)=x^{p-1}$，则 $g(x)=x^{\frac{1}{p-1}}$，因此由结论，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t\ge xy.$$

进一步整理得，$\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\ge xy.$

(2) 利用(1)的结论。取

$$A(x)=\frac{|f(x)|^p}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}},\qquad B(x)=\frac{|g(x)|^q}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$$

则由(1)的结论，有 $AB \le \dfrac{A^p}{p}+\dfrac{B^q}{q}$，故有 $\int_a^b A(x)\cdot B(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b \dfrac{[A(x)]^p}{p}\mathrm{d}x+\int_a^b \dfrac{[B(x)]^q}{q}\mathrm{d}x$，整理一下就可得我们要证的 Holder 不等式。

例 60. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$ 且对任意给定的 x，均有 $|f'(x)|\le|f(x)|$，试证：$f(x)\equiv 0$。

证：只需证 $|f(x)|\equiv 0, \forall x\in[0,+\infty]$. 由 $|f'(x)|\le|f(x)|$，得

$$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{dt}\right| \le \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{dt} \le \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{dt}$$

令 $F(x)=e^{-x}\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t, x\in[0,+\infty)$，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$F(x)\ge 0$，且对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，有 $F'(x)=e^{-x}[|f(x)|-\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t]\le 0$，从而 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不增，因此 $F(x)\le F(0)=0$，故 $F(x)\equiv 0, x\in[0,+\infty)$，即有 $\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\equiv 0, x\in[0,+\infty)$，求导得 $f(x)\equiv 0$。

例 61. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且有二阶导数，$f(a)<0$，$f(b)<0$，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=0.$ 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

证法一：因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必取得最大值，设 $f(\eta)$ 为最大值，显然 $f(\eta)\ge 0$（若不然，如果 $f(\eta)<0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\le f(\eta)(b-a)<0$），因此 $\eta\in(a,b)$.

由费马引理知，$f'(\eta)=0$.

应用泰勒公式，存在 $\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$，使得

$$f(a)=f(\eta)+f'(\eta)(a-\eta)+\frac{f''(\xi)}{2!}(a-\eta)^2=f(\eta)+\frac{f''(\xi)}{2!}(a-\eta)^2,$$

即 $f''(\xi)=\dfrac{2[f(a)-f(\eta)]}{(a-\eta)^2}<0$.

证法二：作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t, x\in[a,b]$, 则 $F(a)=F(b)=0$,

$F'(a)<0, F'(\mathrm{b})<0$, 由罗尔定理得，存在 $a<\xi_0<b$，使得 $F'(\xi_0)=0$, 再次用这个定理，得，存在 $a<\xi_1<\xi_0<\xi_2<b$，使得

$$F''(\xi_1)=\frac{F'(\xi_0)-F'(a)}{\xi_0-a}>0, F''(\xi_2)=\frac{F'(\mathrm{b})-F'(\xi_0)}{b-\xi_0}<0,$$

再次用罗尔定理，得一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'''(\xi)=\dfrac{F''(\xi_2)-F''(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,$即 $f''(\xi)<0$.

例 62. 设函数 $f''(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)>0\ \ (0<x<1)$，证明：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4.$$

证明：如果广义积分$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$发散，则结论显然成立，以下假设$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$收敛.

因为 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，则 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上必取得最大值，即存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $f(x)\le f(x_0)\ (x\in[0,1])$. 由 $f(0)=f(1)=0$， $f(x)>0\ \ (0<x<1)$，知$x_0\in(0,1)$ 且 $f(x_0)>0$.

由拉格朗日中值定理，知存在$\xi_1\in(0,x_0)$， $\xi_2\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{f(x_0)}{x_0}\text{；}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=-\frac{f(x_0)}{1-x_0}.$$

于是，
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{|f(x_0)|}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\ge\frac{1}{|f(x_0)|}\int_\alpha^\beta|f''(x)|\mathrm{d}x$$

$$\ge\frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{|f(x_0)|}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}.$$

因为$x_0\in(0,1)$，则 $x_0(1-x_0)=\dfrac{1}{4}-(x_0-\dfrac{1}{2})^2\le\dfrac{1}{4}$. 故$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4.$

例 63. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明：

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证法一：因为 $f(a)=f(b)=0$，则 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=-\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t$.

于是，$|f(x)|\le|f'(x)|(x-a)$，$|f(x)|\le|f'(x)|(b-x)$.

故 $$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

$$\le \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|(t-a)\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|(b-t)\mathrm{d}t$$

$$\le \max_{a\le x\le b}|f'(t)|[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)\mathrm{d}t]$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\le x\le b}|f'(t)|.$$

所以，$\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)| \ge \dfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

证法二：记 $M = \max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$，令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$，则 $F'(x) = f(x)$，$F'(a) = F'(b) = 0$。由 Taylor 公式，得

$$F(\frac{a+b}{2}) = F(a) + F'(a)\cdot(\frac{b-a}{2}) + \frac{F''(\xi)}{2}\cdot(\frac{b-a}{2})^2$$
$$F(\frac{a+b}{2}) = F(b) + F'(b)\cdot(\frac{a-b}{2}) + \frac{F''(\eta)}{2}\cdot(\frac{b-a}{2})^2$$

因此有 $F(b) = [\dfrac{F''(\xi)}{2} - \dfrac{F''(\eta)}{2}]\cdot(\dfrac{b-a}{2})^2$，从而

$$|F(b)| \le \frac{|F''(\xi)| + |F''(\eta)|}{2}\cdot(\frac{b-a}{2})^2 \le M\frac{(b-a)^2}{4},$$ 得证。

例 64. 设质点在时间 $t=0$ 开始做直线运动，至 $t=1$ 时停止，期间走过路程为 1，试证必有某个时刻 t 的加速度的绝对值大于等于 4.

证法一：设 $s(t)$ 表示时刻 t 走过的路程，则 $s'(0) = s'(1) = 0$.

由于 $t=0$ 时刻至 $t=1$ 时刻走过路程为 1，则有 $\int_0^1 s'(t)\mathrm{d}t = 1$. 而

$$\int_0^1 s'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 s'(t)(t-\frac{1}{2})'\mathrm{d}t$$

$$= (t-\frac{1}{2})s'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 s''(t)(t-\frac{1}{2})\mathrm{d}t = -\int_0^1 s''(t)(t-\frac{1}{2})\mathrm{d}t,$$

即 $-\int_0^1 s''(t)(t-\dfrac{1}{2})\mathrm{d}t = 1$.

现在用反证法，设任意时刻的加速度的绝对值均小于 4，即 $|s''(t)| < 4\,(0\le t\le 1)$，则

$$\left|-\int_0^1 s''(t)(t-\frac{1}{2})\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |s''(t)|\left|t-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}t < 4\int_0^1 \left|t-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}t = 1,$$

与 $-\int_0^1 s''(t)(t-\frac{1}{2})\mathrm{d}t = 1$ 矛盾，故必有某个时刻 t 的加速度的绝对值大于等于 4.

证法二：作辅助函数 $s(x)=\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}\,t, x\in[0,1]$, 则 $s(0)=0, s(1)=1, s'(0)=s'(1)=0$, 由泰勒公式知，存在 $0<\xi_1<\frac{1}{2}<\xi_2<1$，使得

$$s(\frac{1}{2}) = s(0)+s'(0)\cdot\frac{1}{2}+\frac{s''(\xi_1)}{2}(\frac{1}{2})^2$$

$$s(\frac{1}{2}) = s(1)+s'(1)\cdot(-\frac{1}{2})+\frac{s''(\xi_2)}{2}(-\frac{1}{2})^2$$

可得 $\frac{|s''(\xi_1)|+|s''(\xi_1)|}{2}\ge 4$，由介值定理，得存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|s''(\xi)|\ge 4$.

例 65. 若直线 $x=0$， $x=a$， $y=0$ 和正连续曲线 $y=f(x)$ 围成区域的形心的 x 坐标是 $g(a)$，证明： $f(x)=\frac{Ag'(x)}{[x-g(x)]^2}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}}$，其中 A 是常数.

证明：由已知条件，形心的 x 坐标为 $g(a)=\frac{\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\mathrm{d}x}$，即 $\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

两边对 a 求导，得 $af(a)=g'(a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + g(a)f(a)$，移项后可得

$$\frac{f(a)}{\int_0^a f(x)\mathrm{d}x} = \frac{g'(a)}{a-g(a)} = \frac{g'(a)-1}{a-g(a)} + \frac{1}{a-g(a)}.$$

两边积分，可得 $\ln\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = -\ln(a-g(a)) + \int\frac{1}{a-g(a)}\mathrm{d}a + C$，故

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^C}{a-g(a)}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{a-g(a)}\mathrm{d}a},$$

故 $$f(a) = [\frac{\mathrm{e}^C}{a-g(a)}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{a-g(a)}\mathrm{d}a}]' = -\frac{\mathrm{e}^C[1-g'(a)]}{(a-g(a))^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{a-g(a)}\mathrm{d}a} + \frac{\mathrm{e}^C}{[a-g(a)]^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{a-g(a)}\mathrm{d}a}$$

$$= \frac{Ag'(a)}{(a-g(a))^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{a-g(a)}\mathrm{d}a}$$，其中 $A=\mathrm{e}^C$.