厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期末试题

考试日期：2013 年 1 月　　信息学院自律督导部

自律督导部

一．求下列极限（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{[x+\ln(1-x)]\sin^2 x}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{2n}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\Lambda+\sqrt{n^2})$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^t dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

二、计算下列积分（每小题 4 分，共 16 分）

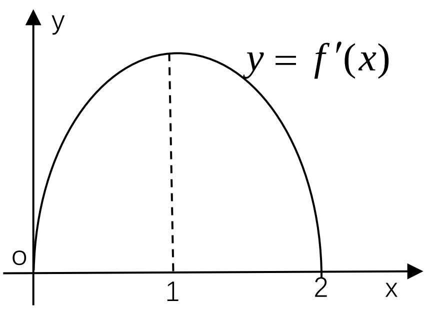
1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

2. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{|x|\sin x}{1+x^4}+1\right)dx$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$.

三、解答题（每题 6 分，共 36 分）



1．设 $y=f'(x)$ 的图像为如图所示的二次抛物线，且 $f(x)$ 的极小值为 2，极大值为 6，试求 $f(x)$.

2. $\int f'(\sqrt{x})dx = x(e^{\sqrt{x}}+1)+c$，求 $f(\sin x)$.

3. 求曲线 $y = x - 2\arctan x$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线以及在 $x=1$ 处的曲率半径.

4. 已知 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{2x} xf(t)dt + 2\int_x^0 tf(2t)dt = 2x^3(x-1)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值。

5. 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \le 2x$ 与 $y \ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积。

6. 6. 一个半径为 4 米，高为 8 米的倒圆锥形水池，里面有 6 米深的水，试问要把池内的水全部抽完，需作多少功。

四、证明题 （任选 4 题，共 32 分）

1. (8 分) 证明$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$，并求其值。

2. (8 分)设 $f(x)$ 在$[0,b]$上连续且单调减少，若$0<a<b$，

证明：$a\int_0^b f(x)dx<b\int_0^a f(x)dx$.

3. (8 分) 证明：$\sin x\le x-\frac{1}{3\pi}x^3$，$0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

4. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

(1) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f'(x)(a-x)dx$，其中$a$为参数；

(2) $|\int_0^1 f(x)dx|\le\frac{1}{4}M$，其中 M 是$|f'(x)|$在$[0,1]$上的最大值.

5. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间$[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明至少

存在一点$\xi\in[-a,a]$，使得$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{a^3}{3}f''(\xi)$。

五、附加题（10 分）

设 $f(x)$ 在区间[0,2]上连续导数，且 $f(0)=f(2)=1$，若 $|f'(x)|\le 1$，证明：

$$1\le\int_0^2 f(x)dx\le 3$$