厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期末试题

考试日期：2014年1月　　信息学院自律督导部

自律督导部

一、计算下列各题（共70分）

1、计算下列积分（每题6分，共24分）：

（1）$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

（2）$\int \dfrac{1-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{-2}^{3}\left|x^2+2|x|-3\right|\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

3、求下列极限（每小题5分，共10分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}}{n}$；

（2）设 $F(x)=x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2-x^2}\,\mathrm{d}t$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$

5、(8分)若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & x>0\end{cases}$，对 $x\in(-\infty,+\infty)$，求 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

6、（8分）设 $f(x)=x^2+x+\sin^3 x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\cos^3 x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

二、应用题（第一小题 12 分，第二题 6 分，共 18 分）

1．过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积 A；(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积.

2．一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比，即 $F=kv^2$，其中 v 为物体的运动速度，k 为比例常数。计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时，克服介质阻力所作的功.（注：题目中的 a 和 c 均为正的常数）.

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

1．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x$.

2．设函数 $f(x)$ 是 $[0,3]$ 上的连续, 在 $(0,3)$ 内可导，且有 $\dfrac{1}{3}\int_0^1 xf(x)dx=f(3)$，试证：必有 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{1}{\xi}f(\xi)$.

四、附加题（10 分）

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b xf(x)dx=a\int_a^{\xi} f(x)dx+b\int_{\xi}^b f(x)dx$