

## 第六节 (0-1)分布参数的区间估计

一、置信区间公式

二、典型例题



**例1** 设从一大批产品的100个样品中, 得一级品60个, 求这批产品的一级品率  $p$  的置信水平为0.95的置信区间.

- 非正态总体
- 0-1分布的区间估计



## 推导过程

因为(0-1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p),$$

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是一个样本, 因为容量  $n$  较大,

由中心极限定理知 
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

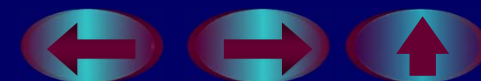
定理1 (独立同分布下的中心极限定理)

近似地用 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差:  $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2$

$$P \left\{ - \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} \text{ 的分布函数 } F_n(x) \text{ 对于任意 } x \text{ 满足 } \alpha,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$$



而不等式  $-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于  $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\bar{X}^2 < 0$ ,

记  $p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,

其中  $a = n + z_{\alpha/2}^2$ ,  $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$ ,  $c = n\bar{X}^2$ .

于是  $p$  的近似置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间是  
 $(p_1, p_2)$ .



# 一、置信区间公式

设有一容量 $n > 50$ 的大样本, 它来自 $(0-1)$ 分布的总体 $X$ ,  $X$ 的分布律为  $f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}$ ,  $x = 0, 1$ , 其中 $p$ 为未知参数, 现在来求 $p$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$$\left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$ ,  $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$ ,  $c = n\bar{X}^2$ .



## 二、典型例题

例1 设从一大批产品的100个样品中, 得一级品60个, 求这批产品的一级品率  $p$  的置信水平为0.95的置信区间.

解 一级品率  $p$  是(0-1)分布的参数,

$$n = 100, \quad \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$
$$1 - \alpha = 0.95, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

则  $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$

$$b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84,$$

$$c = n\bar{X}^2 = n\bar{x}^2 = 36,$$



于是

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.50,$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.69,$$

故 $p$  的置信水平为0.95的置信区间为(0.50, 0.69).



**例2** 设从一大批产品的120个样品中，得次品9个，求这批产品的次品率  $p$  的置信水平为0.90的置信区间.

**解**  $n = 120, \quad \bar{x} = \frac{9}{100} = 0.09, \quad 1 - \alpha = 0.90,$

则  $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 122.71,$

$$b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -24.31,$$

$$c = -n\bar{X}^2 = -n\bar{x}^2 = 0.972,$$



于是  $p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.056,$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.143,$$

$p$  的置信水平为0.90的置信区间为 (0.056, 0.143).