第五节
正态总体均值与方差的区间估计

- 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况
- 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况
- 课堂练习
- 小结　布置作业

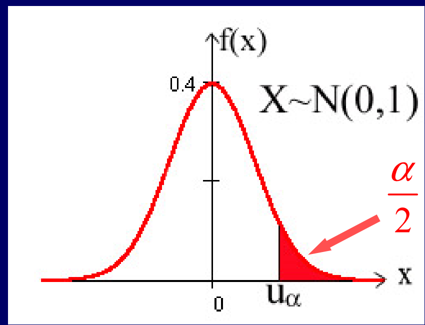
一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,并设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体的样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知

U-统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$



$Z_{1-\alpha/2}=-Z_{\alpha/2}$

可得到μ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2})\text{ 或 }(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2})$$

定理 1 (样本均值的分布)

— 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$是样本均值，则有

本的

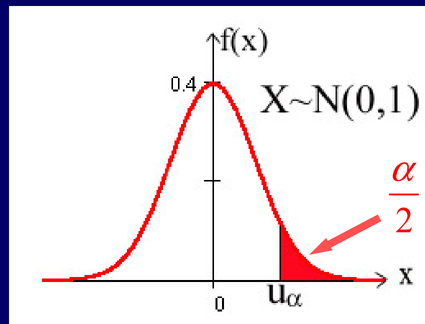
样本

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad 即 \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

1. 均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知

U-统计量 $$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



$$Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2}$$

可得到μ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right) \text{ 或 } \left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$$

例1 某车间生产滚珠，从长期实践中知道，滚珠直径X可以认为服从正态分布，从某天的产品中随机抽取6个，测得直径为（单位：cm）

14.6，15.1，14.9，14.8，15.2，15.1

若已知方差为0.06，试求该天平均直径EX的置信区间：$\alpha=0.05$；$\alpha=0.01$。

【解】由题设知X~N（μ，0.06）

构造U-统计量，得EX的置信区间为

$$\left(\bar{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

而 $\bar{x} = 14.95,\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}} = 0.1$

$$(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2})$$

当α=0.05时，$u_{0.025} = 1.96$

所以，EX的置信区间为（14.754，15.146）

当α=0.01时，$u_{0.005} = 2.58$

所以，EX的置信区间为（14.692，15.208）

置信水平提高，置信区间扩大，估计精确度降低。

例2 假定某地一旅游者的消费额X服从正态分布N（μ，σ²），且标准差σ=12元，今要对该地旅游者的平均消费额EX加以估计，为了能以95%的置信度相信这种估计误差小于2元，问至少要调查多少人？

解 由题意知：消费额X~N（μ，12²），设要调查n人。

由 $1-\alpha=0.95$ 得 $\alpha=0.05$ 查表得 $u_{\alpha/2}=1.96$

即 $P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<1.96\right\}=0.95$

而 $\left|\bar{X}-\mu\right|<2 \longrightarrow 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2$ $\quad(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2})$

解得 $n=\left(\dfrac{1.96\times12}{2}\right)^2=138.29$ 至少要调查139人

样本容量n固定，置信水平$1-\alpha$增大，置信区间长度增大，可信程度增大，区间估计精度降低.

置信水平$1-\alpha$固定，样本容量n增大，置信区间长度减小，可信程度不变，区间估计精度提高.

2° σ^2 为未知

此分布不依赖于任何未知参数

T-统计量 $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t_{1-\alpha/2} = -t_{\alpha/2}$$

定理 3 (样本均值的分布)

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$和S^2 分别为样本均值和样本方差，则有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

或 $$(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

2° σ^2 为未知

此分布不依赖于任何未知参数

T-统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$t_{1-\alpha/2} = -t_{\alpha/2}$

由 $P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

或 $$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

例3 某厂生产的一种塑料口杯的重量X被认为服从正态分布，今随机抽取9个，测得其重量为（单位：克）：21.1，21.3，21.4，21.5，21.3，21.7，21.4，21.3，21.6。试用95%的置信度估计全部口杯的平均重量。

解 由题设可知：口杯的重量X~N（μ，σ²）

由抽取的9个样本，可得 $S=0.18 \quad \bar{x}=21.4 \quad n=9$

由 $1-\alpha=0.95$ 得 $\alpha=0.05$ 查表得 $t_{0.025}(8)=2.306$

$$t_{\alpha/2}(8)\times\frac{S}{\sqrt{n}}=2.306\cdot\frac{0.18}{\sqrt{9}}=0.13836 \qquad (\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

全部口杯的平均重量的置信区间为（21.26，21.54）

例2' 假定某地一旅游者的消费额X服从正态分布 N（μ，σ²），样本标准差S=12元，求 该地旅游者的平均消费额EX的置信水平为0. 95的置信区间（ $\bar{x}=80 \quad n=25$ ）

解 由题设可知：平均消费额X~N（μ，σ²）

$$S=12 \quad \bar{x}=80 \quad n=25$$

由 $1-\alpha=0.95$ 得 $\alpha=0.05$ 查表得 $t_{0.025}(24)=2.064$

$$t_{\alpha/2}(24)\times\frac{S}{\sqrt{n}}=2.064\times\frac{12}{\sqrt{25}}=4.9536 \quad (\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

平均消费额的置信区间为（75.0464，84.9536）

估计误差为 $2\times4.9536=9.9072>2$

精确度降低 ——原因：样本容量减少

在实际应用中，方差未知的均值的区间估计较有应用价值。

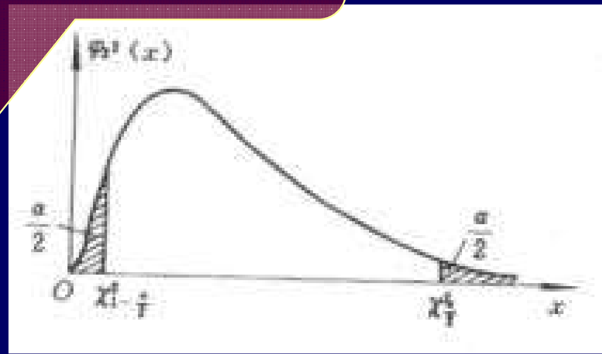
未知参数

2. 方差σ^2的置信区间

此分布不依赖于任何未知参数

σ^2的点估计量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



$-\alpha$

定理 2 (样本方差的分布)

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，则有

(1) $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(2) $\overline{X}$与S^2独立.

由

$$P\{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sigma} < \sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到标准差 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

例4 设某灯泡的寿命X~N（μ，σ²）， μ，σ²未知，现从中任取5个灯泡进行寿命试验，得数据10.5，11.0，11.2，12.5，12.8（单位：千小时），求置信水平为90%的σ²的区间估计。

解 样本方差及均值分别为 $S^2=0.995 \quad \bar{x}=11.6$

由 $1-\alpha=0.9$ 得 $\alpha=0.1$ 查表得

$$\chi^2_{1-0.05}(4)=0.711 \qquad \chi^2_{0.05}(4)=9.488$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}(4)}=\frac{4\times0.995}{0.711}=5.5977 \qquad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.05}(4)}=0.4195$$

σ²的置信区间为（0.4195，5.5977） $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

正态总体均值已知，对方差的区间估计*

如果总体X~N（μ，σ²），其中μ已知，σ²未知

由 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 构造χ^2-统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

查χ^2- 分布表，确定双侧分位数 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n),\chi^2_{\alpha/2}(n)$

从而得σ²的置信水平为1-α的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

例题 已知某种果树产量服从N（218，σ^2），随机抽取6棵计算其产量为（单位：公斤）

221，191，202，205，256，236

试以95%的置信水平估计产量的方差。

解 计算 $\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\mu\right)^2=2931$

查表 $\chi^2_{1-0.05/2}(6)=1.24, \chi^2_{0.05/2}(6)=14.45$

果树方差的置信区间为 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$

$$\left(\frac{2931}{14.45},\frac{2931}{1.24}\right)=(202.84,2363.71)$$