第四章　向量组的线性相关性

1. 设 $\boldsymbol{v}_1=(1,\ 1,\ 0)^T$，$\boldsymbol{v}_2=(0,\ 1,\ 1)^T$，$\boldsymbol{v}_3=(3,\ 4,\ 0)^T$，求 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 及 $3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$.

解　$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=(1, 1, 0)^T-(0, 1, 1)^T$

$=(1-0, 1-1, 0-1)^T$

$=(1, 0, -1)^T$.

$3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=3(1, 1, 0)^T+2(0, 1, 1)^T-(3, 4, 0)^T$

$=(3\times1+2\times0-3, 3\times1+2\times1-4, 3\times0+2\times1-0)^T$

$=(0, 1, 2)^T$.

2. 设 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$，求 $\boldsymbol{a}$，其中 $\boldsymbol{a}_1=(2, 5, 1, 3)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(10, 1, 5, 10)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(4, 1, -1, 1)^T$.

解　由 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$整理得

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{6}(3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3)$$

$$=\frac{1}{6}[3(2,5,1,3)^T+2(10,1,5,10)^T-5(4,1,-1,1)^T]$$

$$=(1, 2, 3, 4)^T.$$

3. 已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(3, 0, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(2, 3, 0, 1)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(2, 1, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, -2, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(4, 4, 1, 3)^T$,

证明 B 组能由 A 组线性表示，但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明　由

$$(A,B)=\begin{pmatrix}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\2&1&0&1&1&1\\3&2&1&2&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&3&2&2&0&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&2&-8&-1&7&-9\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&20&5&-15&25\\0&0&4&1&-3&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&-3&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(A)=R(A, B)=3$, 所以 B 组能由 A 组线性表示.

由

$$B=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(B)=2$. 因为 $R(B)\neq R(B, A)$, 所以 A 组不能由 B 组线性表示.

4. 已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 1, 0)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(-1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(3, 2, -1)^T$,

证明 A 组与 B 组等价.

证明　由

$$(B,A)=\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\0&2&2&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(B)=R(B, A)=2$. 显然在 A 中有二阶非零子式, 故 $R(A)\geq 2$, 又 $R(A)\leq R(B, A)=2$, 所以 $R(A)=2$, 从而 $R(A)=R(B)=R(A, B)$. 因此 A 组与 B 组等价.

5. 已知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$, $R(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=3$, 证明

(1) $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

证明 (1)由 $R(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=3$ 知 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 也线性无关. 又由 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$ 知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关, 故 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

(2)假如 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 则因为 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性相关, 矛盾. 因此 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $(-1, 3, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (1, 4, 1)^T$;

(2) $(2, 3, 0)^T, (-1, 4, 0)^T, (0, 0, 2)^T$.

解 (1)以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 因为

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=2$ 小于向量的个数, 从而所给向量组线性相关.

(2)以所给向量为列向量的矩阵记为 B. 因为

$$|B|=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{vmatrix}=22\neq 0,$$

所以 $R(B)=3$ 等于向量的个数, 从而所给向量组线性相无关.

7. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关？

$$\boldsymbol{a}_1=(a, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(1, a, -1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, -1, a)^T.$$

解　以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 由

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a(a-1)(a+1)$$

知，当 a=−1、0、1 时，$R(A)<3$，此时向量组线性相关.

8. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

解　因为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，故存在不全为零的数 λ_1，λ_2 使

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+\lambda_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=0,$$

由此得　$\boldsymbol{b}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\boldsymbol{a}_1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\boldsymbol{a}_2=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\boldsymbol{a}_1-(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})\boldsymbol{a}_2$,

设 $c=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，则

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(1+c)\boldsymbol{a}_2, c\in\mathbf{R}.$$

9. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 也线性相关，问 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是否一定线性相关？试举例说明之.

解　不一定.

例如，当 $\boldsymbol{a}_1=(1, 2)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, 4)^T, \boldsymbol{b}_1=(-1, -1)^T, \boldsymbol{b}_2=(0, 0)^T$ 时，有

$$a_1+b_1=(1,2)^T+b_1=(0,1)^T,\ a_2+b_2=(2,4)^T+(0,0)^T=(2,4)^T,$$

而 a_1+b_1, a_2+b_2 的对应分量不成比例，是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

(1)若向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是线性相关的，则 a_1 可由 $a_2, \cdots, a_m$ 线性表示.

解　设 $a_1=e_1=(1, 0, 0, \cdots, 0)$, $a_2=a_3=\cdots=a_m=\mathbf{0}$, 则 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关，但 a_1 不能由 $a_2, \cdots, a_m$ 线性表示.

(2)若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m+\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_m b_m=0$$

成立，则 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 亦线性相关.

解　有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m+\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_m b_m=\mathbf{0},$$

原式可化为

$$\lambda_1(a_1+b_1)+\cdots+\lambda_m(a_m+b_m)=\mathbf{0}.$$

取 $a_1=e_1=-b_1$, $a_2=e_2=-b_2$, $\cdots$, $a_m=e_m=-b_m$, 其中 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 为单位坐标向量，则上式成立，而 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 均线性无关.

(3)若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 全为 0 时，等式

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m+\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_m b_m=0$$

才能成立，则 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 亦线性无关.

解　由于只有当$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$全为 0 时，等式

$$由\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，所以只有当$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$全为 0 时，等式

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m)=\boldsymbol{0}$$

成立. 因此$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$线性无关.

取$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\cdots=\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，取$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$为线性无关组，则它们满足以上条件，但$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关.

(4)若$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$亦线性相关，则有不全为 0 的数，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=0,\ \lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=0$$

同时成立.

解　$\boldsymbol{a}_1=(1, 0)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, 0)^T, \boldsymbol{b}_1=(0, 3)^T, \boldsymbol{b}_2=(0, 4)^T$,

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=-2\lambda_2,$$

$$\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=-(3/4)\lambda_2,$$

$\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$，与题设矛盾.

11. 设$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$，证明向量组$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$线性相关.

证明　由已知条件得

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}_4-\boldsymbol{a}_1,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\\&=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4\end{aligned}$$

$=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4+\boldsymbol{a}_1,$

从而　　$\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{0},$

这说明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

12. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证明　已知的 r 个等式可以写成

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

上式记为 $B=AK$. 因为 $|K|=1\neq 0$, K 可逆, 所以 $R(B)=R(A)=r$, 从而向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

(1) $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, -1, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(9, 100, 10, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(-2, -4, 2, -8)^T$;

解　由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的分量不成比例, 故 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 是一个最大无关组.

(2) $\boldsymbol{a}_1^T=(1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2^T=(4, -1, -5, -6)$, $\boldsymbol{a}_3^T=(1, -3, -4, -7)$.

解　由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -5 & -4\\ 3 & -6 & -7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -9 & -5\\ 0 & -9 & -5\\ 0 & -18 & -10\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -9 & -5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1{}^T, \boldsymbol{a}_2{}^T, \boldsymbol{a}_3{}^T)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1{}^T$ 与 $\boldsymbol{a}_2{}^T$ 的分量不成比例, 故 $\boldsymbol{a}_1{}^T, \boldsymbol{a}_2{}^T$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1{}^T, \boldsymbol{a}_2{}^T$ 是一个最大无关组.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

(1) $\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}$;

解　因为

$$\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-3r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

解　因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

15. 设向量组

$$(a, 3, 1)^T, (2, b, 3)^T, (1, 2, 1)^T, (2, 3, 1)^T$$

的秩为 2, 求 a, b.

解　设 $\boldsymbol{a}_1=(a, 3, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, b, 3)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, 2, 1)^T, \boldsymbol{a}_4=(2, 3, 1)^T$.

因为

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b-6 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a & b-5 \end{pmatrix},$$

而 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2, b=5$.

16. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

证法一　记 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, $E=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. 由已知条件知, 存在矩阵 K, 使

$$E=AK.$$

两边取行列式, 得

$$|E|=|A||K|.$$

可见$|A|\neq 0$，所以$R(A)=n$，从而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

证法二　因为$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，所以

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\leq R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n),$$

而$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)=n$, $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\leq n$，所以$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=n$，从而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

17. 设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$是一组$n$维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一$n$维向量都可由它们线性表示.

证明　必要性：设$\boldsymbol{a}$为任一n维向量. 因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关，而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}$是$n+1$个$n$维向量，是线性相关的，所以$\boldsymbol{a}$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，且表示式是唯一的.

充分性：已知任一n维向量都可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，故单位坐标向量组$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，于是有

$$n=R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\leq R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\leq n,$$

即$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=n$，所以$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

18. 设向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关，且$\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$，证明存在某个向量$\boldsymbol{a}_k$ $(2\leq k\leq m)$，使$\boldsymbol{a}_k$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$线性表示.

证明　因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关，所以存在不全为零的

数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0},$$

而且$\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$不全为零. 这是因为，如若不然，则$\lambda_1\boldsymbol{a}_1=\mathbf{0}$，由$\boldsymbol{a}_1\neq\mathbf{0}$知$\lambda_1=0$，矛盾. 因此存在$k(2\leq k\leq m)$，使

$$\lambda_k\neq 0, \lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_m=0,$$

于是

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{a}_k=-(1/\lambda_k)(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}),$$

即$\boldsymbol{a}_k$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$线性表示.

19. 设向量组B: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$能由向量组$A$: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$线性表示为

$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)K$，其中$K$为$s\times r$矩阵，且$A$组线性无关. 证明$B$组线性无关的充分必要条件是矩阵$K$的秩$R(K)=r$.

证明　令$B=(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$，则有$B=AK$.

必要性：设向量组B线性无关.

由向量组B线性无关及矩阵秩的性质，有

$$r=R(B)=R(AK)\leq\min\{R(A), R(K)\}\leq R(K),$$

及

$$R(K)\leq\min\{r, s\}\leq r.$$

因此$R(K)=r$.

充分性：因为$R(K)=r$，所以存在可逆矩阵C，使$KC=\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$

为 K 的标准形. 于是

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)C=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)KC=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r).$$

因为 C 可逆, 所以 $R(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r$, 从而 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

20. 设

$$\begin{cases} \beta_1= \quad\ \ \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n \\ \beta_2=\alpha_1 \quad\ \ +\alpha_3+\cdots+\alpha_n \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1} \end{cases},$$

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价.

证明　将已知关系写成

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

将上式记为 $B=AK$. 因为

$$|K|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0,$$

所以 K 可逆, 故有 $A=BK^{-1}$. 由 $B=AK$ 和 $A=BK^{-1}$ 可知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可相互线性表示. 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价.

21. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}$，且向量组 $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(1)记 $P=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})$，求 3 阶矩阵 B，使 $AP=PB$;

解　因为

$$\begin{aligned}AP&=A(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})\\&=(A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x})\\&=(A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, 3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x})\\&=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2)求$|A|$.

解　由 $A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}$，得 $A(3\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{x}$, $A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，故 $3\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，即方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $R(A)<3$, $|A|=0$.

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$;

解　对系数矩阵进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&-3/4&-1/4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases} x_1=-4x_3 \\ x_2=(3/4)x_3+(1/4)x_4 \end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(4, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-16, 3)^T$；

取$(x_3, x_4)^T=(0, 4)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1=(-16, 3, 4, 0)^T, \xi_2=(0, 1, 0, 4)^T.$$

(2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0 \\ 8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0 \end{cases}.$

解　对系数矩阵进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/19 & -1/19 \\ 0 & 1 & 14/19 & -7/19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases} x_1=-(2/19)x_3+(1/19)x_4 \\ x_2=-(14/19)x_3+(7/19)x_4 \end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(19, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-2, 14)^T$；

取$(x_3, x_4)^T=(0, 19)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(1, 7)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1=(-2, 14, 19, 0)^T, \xi_2=(1, 7, 0, 19)^T.$$

(3) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

解　原方程组即为

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}.$$

取 $x_1=1, x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$，得 $x_n=-n$；

取 $x_2=1, x_1=x_3=x_4=\cdots=x_{n-1}=0$, 得 $x_n=-(n-1)=-n+1$;

$\cdots$;

取 $x_{n-1}=1, x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0$, 得 $x_n=-2$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1=(1, 0, 0, \cdots, 0, -n)^T,$$
$$\xi_2=(0, 1, 0, \cdots, 0, -n+1)^T,$$
$$\cdots,$$
$$\xi_{n-1}=(0, 0, 0, \cdots, 1, -2)^T.$$

23. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 B, 使 $AB=\mathbf{0}$, 且 $R(B)=2$.

解 显然 B 的两个列向量应是方程组 $AB=\mathbf{0}$ 的两个线性无关的解. 因为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & -5/8 & -11/8 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 $AB=\mathbf{0}$ 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=(1/8)x_3-(1/8)x_4 \\ x_2=(5/8)x_3+(11/8)x_4 \end{cases}.$$

取 $(x_3, x_4)^T=(8, 0)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T=(1, 5)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T=(0, 8)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T=(-1, 11)^T$.

方程组 $AB=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\xi_1=(1, 5, 8, 0)^T, \xi_2=(-1, 11, 0, 8)^T.$$

因此所求矩阵为$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 11\\ 8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1=(0,1,2,3)^T,\ \xi_2=(3,2,1,0)^T.$$

解　显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},\ \text{即}\begin{cases}x_1=3k_2\\x_2=k_1+2k_2\\x_3=2k_1+k_2\\x_4=3k_1\end{cases},\ (k_1,k_2\in\mathbf{R}),$$

消去 k_1, k_2 得

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0\\x_1-3x_3+2x_4=0\end{cases},$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: }\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases},\ \text{II: }\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}.$$

求: (1)方程 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解　(1)由方程 I 得$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\end{cases}$.

取$(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(0, 0)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(-1, 1)^T$.

因此方程 I 的基础解系为

$\xi_1=(0, 0, 1, 0)^T$, $\xi_2=(-1, 1, 0, 1)^T$.

由方程 II 得 $\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_3-x_4 \end{cases}$.

取 $(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$，得 $(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$；

取 $(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$，得 $(x_1, x_2)^T=(-1, -1)^T$.

因此方程 II 的基础解系为

$\xi_1=(0, 1, 1, 0)^T$, $\xi_2=(-1, -1, 0, 1)^T$.

(2) I 与 II 的公共解就是方程

$$\text{III: } \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的解. 因为方程组 III 的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 III 同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=2x_4 \end{cases}.$$

取 $x_4=1$，得 $(x_1, x_2, x_3)^T=(-1, 1, 2)^T$，方程组 III 的基础解系为

$\xi=(-1, 1, 2, 1)^T$.

因此 I 与 II 的公共解为 $\boldsymbol{x}=c(-1, 1, 2, 1)^T$, $c\in\mathbf{R}$.

26. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, E 为 n 阶单位矩阵, 证明

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

证明　因为 $A(A-E)=A^2-A=A-A=\mathbf{0}$，所以 $R(A)+R(A-E)\le n$.

又 $R(A-E)=R(E-A)$，可知

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=R(E)=n,$$

由此 $R(A)+R(A-E)=n$.

27. 设 A 为 n 阶矩阵($n\ge 2$), A^*为 A 的伴随阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n & 当R(A)=n \\ 1 & 当R(A)=n-1 \\ 0 & 当R(A)\le n-2 \end{cases}.$$

证明　当 $R(A)=n$ 时, $|A|\ne 0$，故有

$$|AA^*|=||A|E|=|A|\ne 0, |A^*|\ne 0,$$

所以 $R(A^*)=n$.

当 $R(A)=n-1$ 时, $|A|=0$，故有

$$AA^*=|A|E=\mathbf{0},$$

即 A^*的列向量都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解. 因为 $R(A)=n-1$，所以方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只含一个解向量，即基础解系的秩为 1. 因此 $R(A^*)=1$.

当 $R(A)\le n-2$ 时，A 中每个元素的代数余子式都为 0，故 $A^*=O$，从而 $R(A^*)=0$.

28. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$;

解　对增广矩阵进行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases}x_1=-x_3-8\\x_2=\ \ x_3+13\\x_4=\qquad 2\end{cases}.$$

当 $x_3=0$ 时，得所给方程组的一个解 $\eta=(-8, 13, 0, 2)^{\mathrm{T}}$.

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=\ \ x_3\\x_4=0\end{cases}.$$

当 $x_3=1$ 时，得对应的齐次方程组的基础解系 $\xi=(-1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6\end{cases}$.

解　对增广矩阵进行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&9/7&-1/2&1\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases}x_1=-(9/7)x_3+(1/2)x_4+1\\x_2=(1/7)x_3-(1/2)x_4-2\end{cases}.$$

当 $x_3=x_4=0$ 时，得所给方程组的一个解

$$\eta=(1, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1=-(9/7)x_3+(1/2)x_4 \\ x_2=(1/7)x_3-(1/2)x_4 \end{cases}.$$

分别取$(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T, (0, 1)^T$，得对应的齐次方程组的基础解系

$$\xi_1=(-9, 1, 7, 0)^T.\ \xi_2=(1, -1, 0, 2)^T.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知η_1, η_2, η_3是它的三个解向量. 且

$$\eta_1=(2, 3, 4, 5)^T,\ \eta_2+\eta_3=(1, 2, 3, 4)^T,$$

求该方程组的通解.

解 由于方程组中未知数的个数是 4，系数矩阵的秩为 3，所以对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量，且由于η_1，η_2，η_3均为方程组的解，由非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1-\eta_3)=(3, 4, 5, 6)^T$$

为其基础解系向量，故此方程组的通解:

$$\boldsymbol{x}=k(3, 4, 5, 6)^T+(2, 3, 4, 5)^T,\ (k\in\mathbf{R}).$$

30. 设有向量组 A: $\boldsymbol{a}_1=(\alpha, 2, 10)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(-2, 1, 5)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(-1, 1, 4)^T$，及 $\boldsymbol{b}=(1, \beta, -1)^T$，问$\alpha, \beta$为何值时

(1)向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

(2)向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一;

(3)向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

解 $$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1&-2&\alpha&1\\1&1&2&\beta\\4&5&10&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&-2&\alpha&1\\0&-1&1+\alpha&\beta+1\\0&0&4+\alpha&-3\beta\end{pmatrix}.$$

(1)当 $\alpha=-4,\ \beta\neq0$ 时, $R(A)\neq R(A,\boldsymbol{b})$，此时向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示.

(2)当 $\alpha\neq-4$ 时, $R(A)=R(A,\boldsymbol{b})=3$，此时向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}$ 线性相关，故向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一.

(3)当 $\alpha=-4,\ \beta=0$ 时, $R(A)=R(A,\boldsymbol{b})=2$，此时向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一.

当 $\alpha=-4,\ \beta=0$ 时,

$$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1&-2&-4&1\\1&1&2&0\\4&5&10&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组 $(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c+1\\-3c-1\\c\end{pmatrix},\ c\in\mathbf{R}.$$

因此 $\boldsymbol{b}=(2c+1)\boldsymbol{a}_3+(-3c-1)\boldsymbol{a}_2+c\boldsymbol{a}_1$,

即 $\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1+(-3c-1)\boldsymbol{a}_2+(2c+1)\boldsymbol{a}_3,\ c\in\mathbf{R}$.

31. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)^T$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$, $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)^T$，证明三直线

$$\begin{aligned} &l_1: a_1x+b_1y+c_1=0,\\ &l_2: a_2x+b_2y+c_2=0, \ (a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1, 2, 3)\\ &l_3: a_3x+b_3y+c_3=0, \end{aligned}$$

相交于一点的充分必要条件为：向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关.

证明　三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1\\ a_2x+b_2y=-c_2\\ a_3x+b_3y=-c_3 \end{cases}$$

有唯一解. 上述方程组可写为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$. 因此三直线相交于一点的充分必要条件为 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 唯一线性表示，而 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 唯一线性表示的充分必要条件为向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关.

32. 设矩阵 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$，其中 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$，求方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解　由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ 知 $\eta=(1, 1, 1, 1)^T$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解.

由 $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$ 得 $\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，知 $\xi=(1, -2, 1, 0)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关知 $R(A)=3$，故方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次

方程 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系中含一个解向量. 因此$\xi=(1, -2, 1, 0)^T$是方程 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系.

方程 $Ax=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=c(1, -2, 1, 0)^T+(1, 1, 1, 1)^T, c\in\mathbf{R}.$$

33. 设η^*是非齐次线性方程组 $Ax=\boldsymbol{b}$ 的一个解, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r},是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1)η^*, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}线性无关;

(2)η^*, $\eta^*+\xi_1$, $\eta^*+\xi_2$, $\cdots$, $\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

证明 (1)反证法, 假设η^*, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}线性相关. 因为ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}线性无关, 而η^*, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}线性相关, 所以η^*可由ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}线性表示, 且表示式是唯一的, 这说明η^*也是齐次线性方程组的解, 矛盾.

(2)显然向量组η^*, $\eta^*+\xi_1$, $\eta^*+\xi_2$, $\cdots$, $\eta^*+\xi_{n-r}$与向量组η^*, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}可以相互表示, 故这两个向量组等价, 而由(1)知向量组η^*, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}线性无关, 所以向量组η^*, $\eta^*+\xi_1$, $\eta^*+\xi_2$, $\cdots$, $\eta^*+\xi_{n-r}$也线性无关.

34. 设η_1, η_2, $\cdots$, η_s是非齐次线性方程组 $Ax=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解, k_1, k_2, $\cdots$, k_s为实数, 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$$

也是它的解.

证明　因为$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$都是方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解, 所以

$$A\eta_i=\boldsymbol{b}\ (i=1, 2, \cdots, s),$$

从而

$$A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s$$
$$=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

因此$\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是方程的解.

35. 设非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵的秩为$r$, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$是它的$n-r+1$个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},\ (其中\ k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

证明　因为$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$均为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解, 所以$\xi_1=\eta_2-\eta_1$, $\xi_2=\eta_3-\eta_1, \cdots, \xi_{n-r}=\eta_{n-r+1}-\eta_1$均为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解.

用反证法证: $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关.

设它们线性相关, 则存在不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-r}$, 使得

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1(\eta_2-\eta_1)+\lambda_2(\eta_3-\eta_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)=\boldsymbol{0},$$

亦即

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r})\eta_1+\lambda_1\eta_2+\lambda_2\eta_3+\cdots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r+1}=\boldsymbol{0},$$

由$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$线性无关知

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r})=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0,$$

矛盾. 因此$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的一

个基础解系.

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意解，则 $\boldsymbol{x}-\eta_1$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $\boldsymbol{x}-\eta_1$ 可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表出，设

$$\boldsymbol{x}-\eta_1=k_2\xi_1+k_3\xi_2+\cdots+k_{n-r+1}\xi_{n-r}$$
$$=k_2(\eta_2-\eta_1)+k_3(\eta_3-\eta_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1),$$
$$\boldsymbol{x}=\eta_1(1-k_2-k_3\cdots-k_{n-r+1})+k_2\eta_2+k_3\eta_3+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}.$$

令 $k_1=1-k_2-k_3\cdots-k_{n-r+1}$，则 $k_1+k_2+k_3\cdots-k_{n-r+1}=1$，于是

$$\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}.$$

36. 设

$$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in\mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=0\},$$
$$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in\mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=1\},$$

问 V_1, V_2 是不是向量空间？为什么？

解　V_1 是向量空间，因为任取

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T\in V_1, \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in V_1, \lambda\in\in\mathbf{R},$$

有　$a_1+a_2+\cdots+a_n=0,$

$b_1+b_2+\cdots+b_n=0,$

从而　$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0,$

$\lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n=\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0,$

所以　$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T\in V_1,$

$\lambda\alpha=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^T\in V_1.$

V_2 不是向量空间，因为任取

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_1, \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in V_1,$$

有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1,$

$b_1+b_2+\cdots+b_n=1,$

从而 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2,$

所以 $\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T \notin V_1.$

37. 试证: 由 $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

证明 设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, 由

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq0,$$

知 $R(A)=3$, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 因此由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

38. 由 $\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_1,由 $\boldsymbol{b}_1=(2, -1, 3, 3)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_2, 试证 $V_1=V_2$.

证明 设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $B=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. 显然 $R(A)=R(B)=2$, 又由

$$(A, B)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(A, B)=2$，所以 $R(A)=R(B)=R(A, B)$，从而向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价. 因为向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价，所以这两个向量组所生成的向量空间相同，即 $V_1=V_2$.

39. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2, 1, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(3, 1, 2)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $\boldsymbol{v}_1=(5, 0, 7)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 由

$$|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

知 $R(A)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_1$，则

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_2+2x_3=7 \end{cases},$$

解之得 $x_1=2, x_2=3, x_3=-1$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_2$，则

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-9 \\ -x_1+x_2+x_3=-8 \\ 3x_2+2x_3=-13 \end{cases},$$

解之得 $x_1=3, x_2=-3, x_3=-2$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$.

40. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^T,\ \boldsymbol{a}_2=(1,0,-1)^T,\ \boldsymbol{a}_3=(1,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{b}_1=(1,2,1)^T,\ \boldsymbol{b}_2=(2,3,4)^T,\ \boldsymbol{b}_3=(3,4,3)^T.$$

求由基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵 P.

解 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是三维单位坐标向量组，则

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1},$$

于是 $$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix},$$

由基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$