

1.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{而} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$

所以有

$$A^2 = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 3A \cdot A = 3^2 A$$

归纳有:

$$A^n = 3^{n-1} A$$

3.

$$\text{解:} \quad AX + E = A^2 + X$$

$$AX - X = A^2 - E$$

$$(A-E)X = (A-E)(A+E)$$

因为

$$A-E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A-E| = -1, \text{ 故 } A-E \text{ 可逆}$$

所以有

$$(A-E)^{-1}(A-E)X = (A-E)^{-1}(A-E)(A+E)$$

$$X = A+E$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$