# 第五节 两个随机变量的函数的分布

- $Z = X + Y$ 的分布
- $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布
- 课堂练习
- 小结 布置作业

在第二章中，我们讨论了一维随机变量函数的分布，现在我们进一步讨论:

当随机变量 $X, Y$ 的联合分布已知时，如何求出它们的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布?

# 一、离散型随机变量函数的分布

**【例】** 设二维$r.v.(X,Y)$的概率分布为

| $Y \backslash p_{ij} \backslash X$ | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | $1/4$ | $1/6$ | $1/8$ |
| 0 | $1/4$ | $1/8$ | $1/12$ |

求 $X+Y, X-Y, XY, Y/X$ 的概率分布

**解** 根据$(X,Y)$的联合分布可得如下表格：

| $P$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(X,Y)$ | $(-1,-1)$ | $(-1,0)$ | $(1,-1)$ | $(1,0)$ | $(2,-1)$ | $(2,0)$ |
| $X+Y$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| $X-Y$ | $0$ | $-1$ | $2$ | $1$ | $3$ | $2$ |
| $XY$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $-2$ | $0$ |
| $Y/X$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $-1/2$ | $0$ |

| $P$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(X,Y)$ | (-1,-1) | (-1,0) | (1,-1) | (1,0) | (2,-1) | (2,0) |
| $X+Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $X-Y$ | 0 | -1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| $XY$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| $Y/X$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1/2 | 0 |

故得

| $X+Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/4$ | $1/12$ |

| $X-Y$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/4$ | $1/8$ |

| $P$ | 1/4 | 1/4 | 1/6 | 1/8 | 1/8 | 1/12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(X,Y)$ | (-1,-1) | (-1,0) | (1,-1) | (1,0) | (2,-1) | (2,0) |
| $X+Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $X-Y$ | 0 | -1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| $XY$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| $Y/X$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1/2 | 0 |

| $XY$ | -2 | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1/8 | 1/6 | 11/24 | 1/4 |

| $Y/X$ | -1 | -1/2 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1/6 | 1/8 | 11/24 | 1/4 |

设二维离散型随机变量 $(X, Y)$的分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \quad i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量$Z=g(X, Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{z_k=g(x_i,y_j)} P\{X=x_i, Y=y_j\} \quad k=1,2,\cdots$$

## 一、$Z=X+Y$ 的分布

例1　若 $X$、$Y$ 独立，$P(X=k)=a_k$ , $k=0$ , 1 , 2 ,…, $P(Y=k)=b_k$ , $k=0,1,2,\ldots$ ,求 $Z=X+Y$ 的概率函数.

解　$$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

由独立性

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \quad r=0,1,2,\ldots$$

## 具有可加性的两个离散分布

- 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立,

  则 $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$

- 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立,

  则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

**例** 若$X$和$Y$相互独立，它们分别服从参数为$\lambda_1, \lambda_2$的泊松分布，证明 $Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。

解： 依题意有 $P(X=i)=\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}, \quad i=0,1,2,\ldots$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!}, \quad j=0,1,2,\ldots$$

于是，$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i, Y=r-i)$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\mathrm{r-i}}}{(\mathrm{r-i})!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\boxed{\sum_{i=0}^{r}\frac{\mathrm{r}!}{\mathrm{i}!(\mathrm{r-i})!}\lambda_1^{\mathrm{i}}\lambda_2^{\mathrm{r-i}}}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\boxed{(\lambda_1+\lambda_2)^r},r=0,1,2,\ldots$$

即$Z$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

$Z=X+Y$的概率密度为:

$$\boxed{f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy}$$

由$X$和$Y$的对称性，$f_Z(z)$又可写成

$$\boxed{f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx}$$

以上两式就是**两个随机变量和的概率密度的一般公式**。

特别地，当$X$和$Y$独立时，设$(X,Y)$关于$X,Y$的边缘密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，则上述两式化为:

$$
\boxed{\begin{cases} f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \\ \\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \end{cases}}
$$

**卷积公式**

当随机变量$X$和$Y$相互独立时，可直接用卷积公式来求$Z=X+Y$的概率密度。

【P77 例2】设随机变量X,Y相互独立，且概率密度均为:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{10-t}{50}, & 0\le t\le 10,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求Z=X+Y概率密度。

解：因为X,Y独立，所以和分布概率密度可由卷积公式计算:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

计算积分思路:

1.被积函数非零区域D;

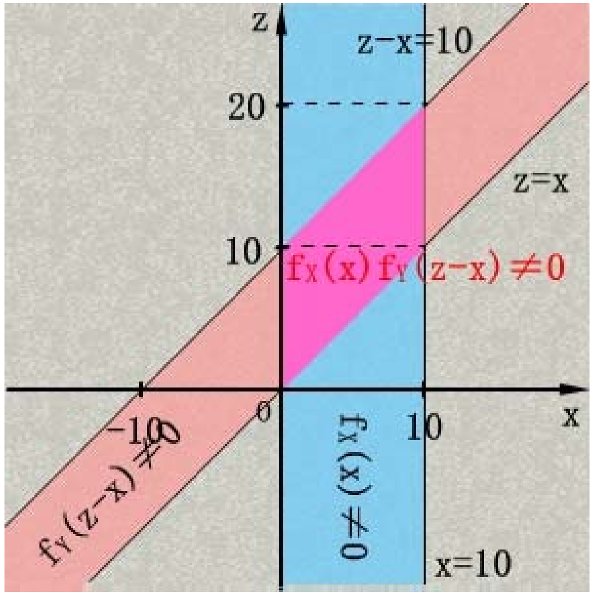
2.对z的取值进行分段，分别计算x在D上的积分，求得z的分段函数.

① 由边缘概率密度确定$f_X(x)f_Y(z-x)$的表达式,
及其非零区域：

由题目条件得:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$$f_Y(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le z-x\le 10,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$




故得:

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}\cdot\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le x\le 10, x\le z\le 10+x\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

② 计算卷积:

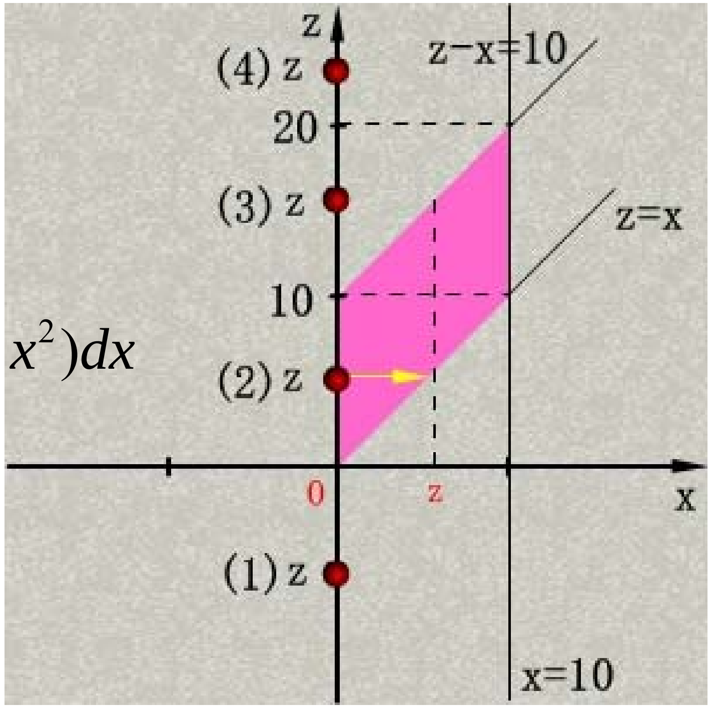
对**z**的取值进行分段，分别计算**x**在**D**上的积分，求得**z**的分段函数.

❶ $0 \le z < 10$

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{10-x}{50} \cdot \frac{10-z+x}{50} dx$$

$$= \frac{1}{2500}\int_0^z (100-10z+zx-x^2)dx$$

$$= \frac{600z-60z^2+z^3}{15000}$$

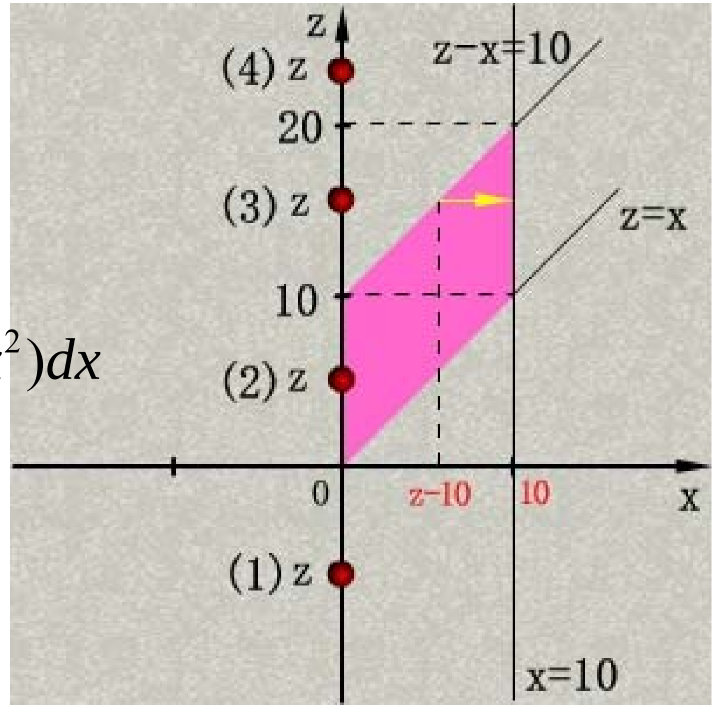


❷ $10 \le z < 20$

$$f_Z(z) = \int_{z-10}^{10} \frac{10-x}{50} \cdot \frac{10-z+x}{50} dx$$

$$= \frac{1}{2500} \int_{z-10}^{10} (100-10z+zx-x^2) dx$$

$$= \frac{(20-z)^3}{15000}$$




❸ $z < 0$或$z \ge 20$

因为 $f_X(x) f_Y(z-x) = 0,$

所以 $f_Z(z) = 0.$

综上可得:

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{600z-60z^2+z^3}{15000}, & 0\le z<10,\\ \dfrac{(20-z)^3}{15000}, & 10\le z<20,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

□

P77 例1 若$X$和$Y$是两个相互独立的随机变量，具有相同的分布 $N(0,1)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<\infty$$

解　由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot e^{-(x^2-zx)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

令 $t=x-\frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$$

可见，$Z=X+Y$ 服从正态分布 $N(0,2)$.

$$\Downarrow$$

若$X$和$Y$独立，具有相同的分布 $N(0,1)$，则$Z=X+Y$服从正态分布 $N(0,2)$.

若$X$和$Y$独立，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，结论又如何呢?

用类似的方法可以证明:

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

# 正态分布的可加性

更一般地，可以证明：

有限个独立正态变量的线性组合仍然服从正态分布.

即若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，且相互独立

则它们的和 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 仍然服从正态分布

且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

# Γ分布的可加性

- 伽玛分布是统计学的一种连续概率函数。

服从参数为 $\alpha,\theta$ 的 Γ 分布，记成 $X\sim\Gamma(\alpha,\theta)$

$X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x<=0\end{cases}\qquad \alpha>0,\theta>0.$$

在实数域上伽玛函数定义为：

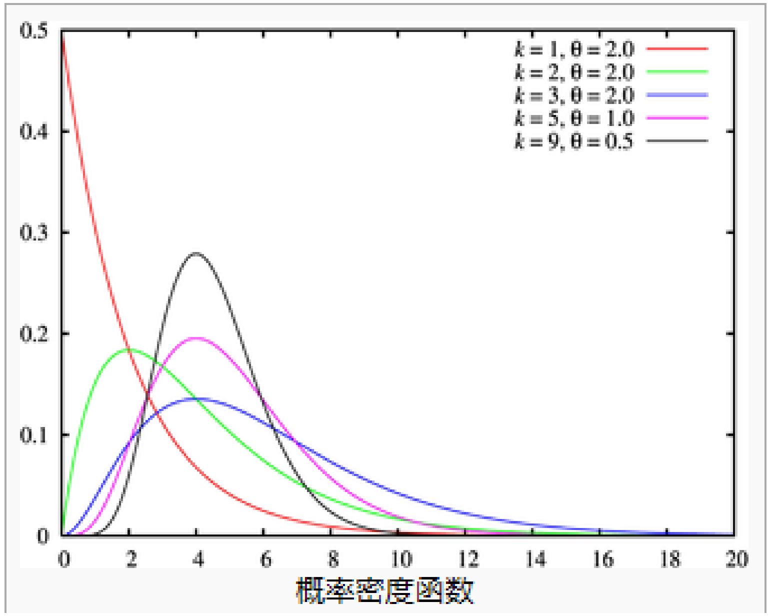
$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

- 参数α称为形状参数，θ称为尺度参数；
- 随机变量X为等到第α件事发生所需的等候时间。

其中Gamma函数之特征

$$\begin{cases}\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)! & \text{if } \alpha \text{ is } \mathbb{Z}^+\\ \Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) & \text{if } \alpha \text{ is } \mathbb{Z}^+\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\end{cases}$$

Gamma




概率密度函数

# Γ分布的可加性

**P78** **例 3** 设随机变量 $X,Y$ 相互独立，且分别服从参数为 $\alpha,\theta;\beta,\theta$ 的 Γ 分布(分别记成 $X\sim\Gamma(\alpha,\theta)$，$Y\sim\Gamma(\beta,\theta)$)．

试证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\alpha+\beta,\theta$ 的 Γ 分布，即 $X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$．

【证】 $X,Y$ 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad \alpha>0,\theta>0.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^\beta\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}e^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad \beta>0,\theta>0.$$

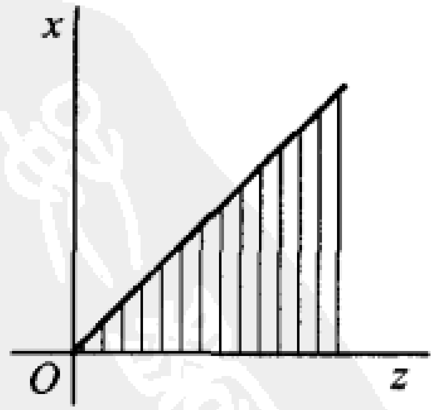
由(5. 4)式 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx.$$

【证（续）】

易知仅当

$$\begin{cases} x>0, \\ z-x>0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x>0, \\ x<z. \end{cases}$$




时上述积分的被积函数不等于零，于是(参见图 3—11)知当 $z<0$ 时 $f_Z(z)=0$，而当 $z>0$ 时有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)/\theta} dx \\ &= \frac{e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} dx \ (\text{令 } x = zt) \\ &= \frac{z^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \xlongequal{\text{记成}} A z^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta}, \end{aligned}$$

【证（续）】

$$f_Z(z)=\frac{z^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \xlongequal{\text{记成}} Az^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta},$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad \alpha>0,\theta>0.$$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f_Z(z)dz=\int_0^{\infty}Az^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}dz$$

$$=A\theta^{\alpha+\beta}\int_0^{\infty}(z/\theta)^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}d(z/\theta)$$

$$=A\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta),$$

在实数域上伽玛函数定义为：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

即有 $A=\dfrac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}$.

于是 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}z^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即 $X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$.

## 二、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 $X$，$Y$ 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，我们来求 $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数.

### 1. M = max(X,Y) 的分布函数

$$M \le z \Leftrightarrow \begin{cases} X \le z \\ Y \le z \end{cases}$$

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(X\le z, Y\le z)$$

由于 $X$ 和 $Y$ 相互独立,于是得到 $M=\max(X,Y)$ 的分布函数为:

$$F_M(z)=P(X\le z)P(Y\le z)$$

即有 $F_M(z)=F_X(z)\,F_Y(z)$

2. $N = \min(X,Y)$ 的分布函数

$$F_N(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$
$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$N > z \Leftrightarrow \begin{cases} X > z \\ Y > z \end{cases}$$

由于 $X$ 和 $Y$ 相互独立,于是得到 $N = \min(X,Y)$ 的分布函数为:

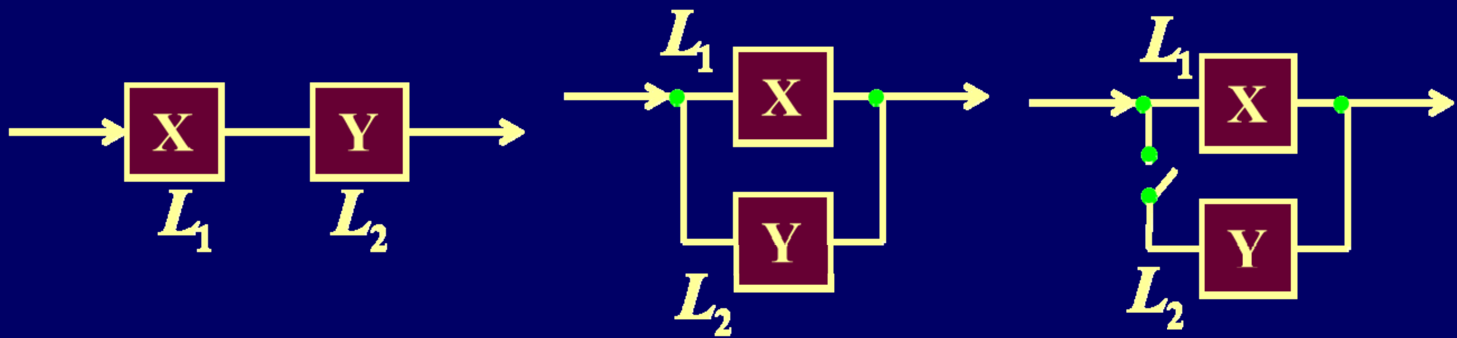
$$F_N(z) = 1 - P(X > z)\, P(Y > z)$$

即有 $F_N(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$

【P81 例5】设系统 L 由两个相互独立的子系统$L_1, L_2$连接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统$L_1$损坏时, 系统$L_2$开始工作) , 如下图所示. 设$L_1, L_2$的寿命分别为*X*,*Y*，已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中$\alpha>0, \beta>0$且$\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种连接方式写出*L*的寿命*Z*的概率密度.

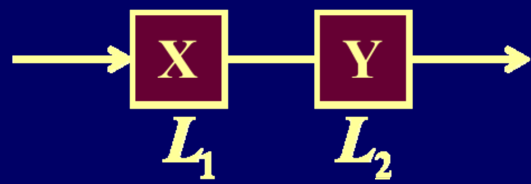


解：(i) 串联的情况

由于当系统$L_1, L_2$中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作，所以此时 L 的寿命为 $\boldsymbol{Z} = \min(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

因为 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$




当$x \le 0$时，$F_X(x) = 0$

当$x > 0$时，$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}$

所以 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

类似地， 可求得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

于是，$Z=\min(X,Y)$的分布函数为

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

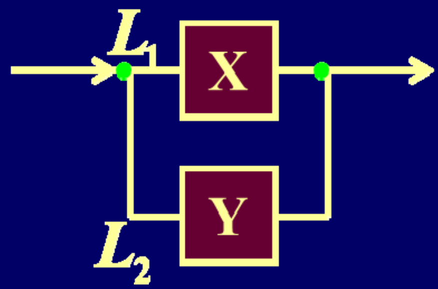
$Z=\min(X,Y)$的概率密度为

$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

(ii) 并联的情况

由于当且仅当系统$L_1, L_2$都损坏时, 系统 L 才停止工作，所以此时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$

故$Z = \max(X, Y)$的分布函数为




$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

于是$Z = \max(X, Y)$的概率密度函数为

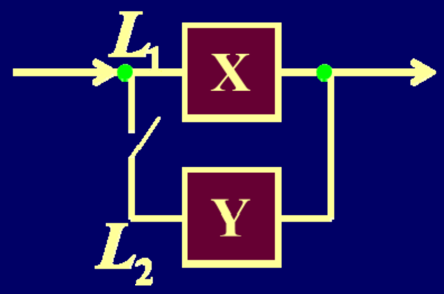
$$f_{\max}(z) = F'_{\max}(z)$$

$$= \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

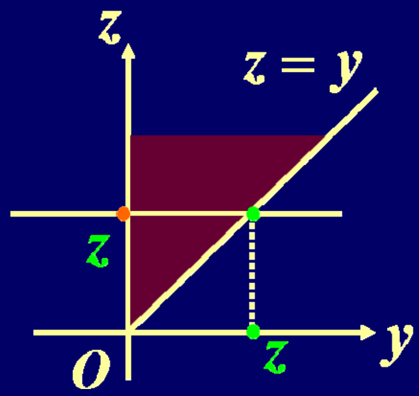
(iii) 备用的情况

由于当系统$L_1$损坏时，系统$L_2$才开始工作，因此整个系统 L 的寿命为 $Z=X+Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$




当且仅当$\begin{cases} y>0, \\ z-y>0, \end{cases}$ 即0<y<z时，上述积分的被积函数不等于零.




当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0.$

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy.$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}).$$

于是$Z = X + Y$的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是 $n$ 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(z)$ $(i=1,\ldots,n)$

用与二维时完全类似的方法，可得

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别地，当$X_1, \dots, X_n$相互独立且具有相同分布函数 $F(x)$ 时，有

$$F_M(z) = [F(z)]^n,$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

当$X_1, \dots, X_n$相互独立且具有相同概率密度函数 $f(x)$ 时，有

$$f_M(z) = n[F(z)]^{n-1}f(z),$$

$$f_N(z) = n[1 - F(z)]^{n-1}f(z).$$

**【例】设$X_1$，$X_2$，…，$X_n$相互独立，且都服从(0,1)上的均匀分布，试求$U=\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$及$V=\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的密度函数。**

**解：$X_i$~U(0,1)，其概率密度及分布函数为**

$$f(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

**因此，$U$的分布函数为**

$$F_U(u)=[F(u)]^n=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ u^n, & 0<u<1,\\ 1, & u\ge 1.\end{cases}$$

**故，$U$的概率密度为**

$$f_U(u)=F'_U(u)=\begin{cases}nu^{n-1}, & 0<u<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

**而$V$的分布函数为**

$$F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n = \begin{cases} 0, & v \le 0, \\ 1 - (1 - v)^n, & 0 < v < 1, \\ 1, & v > 1. \end{cases}$$

**故$V$的概率密度为**

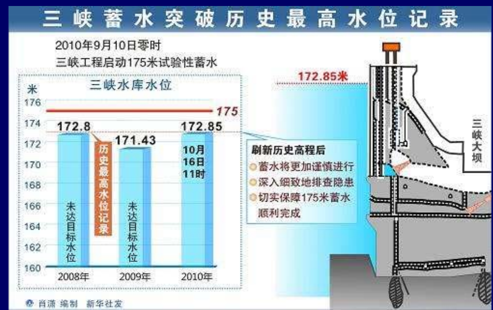
$$f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} n(1 - v)^{n-1}, & 0 < v < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

需要指出的是，当$X_1, \ldots, X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，常称

$$M=\max(X_1,\ldots,X_n)，N=\min(X_1,\ldots,X_n)$$

为极值．

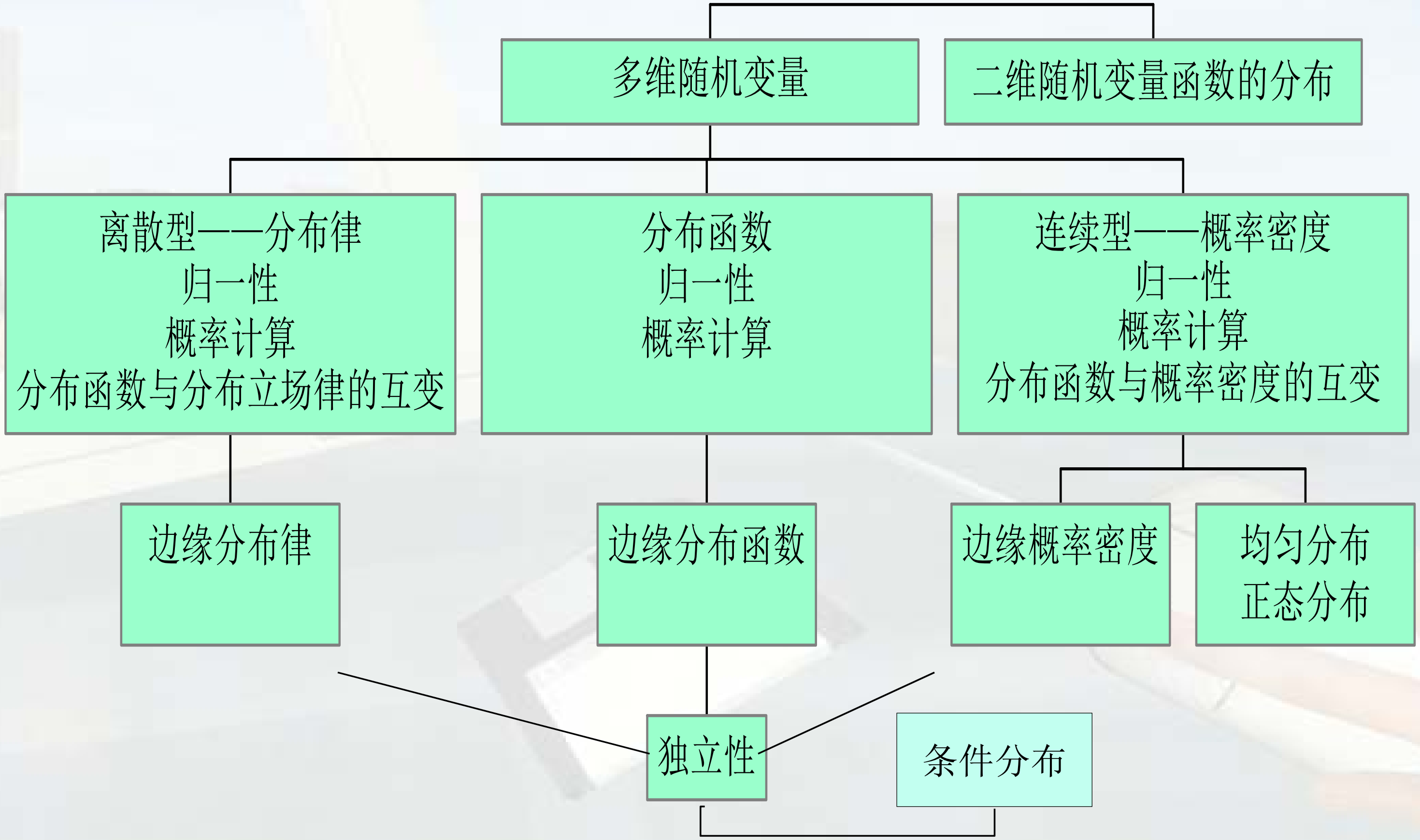
由于一些灾害性的自然现象，如地震、洪水等等都是极值，研究极值分布具有重要的意义和实用价值.




## 四、小结

在这一节中,我们讨论了两个随机变量的函数的分布的求法.

# 小结


多维随机变量
二维随机变量函数的分布
离散型——分布律
归一性
概率计算
分布函数与分布立场律的互变
分布函数
归一性
概率计算
连续型——概率密度
归一性
概率计算
分布函数与概率密度的互变
边缘分布律
边缘分布函数
边缘概率密度
均匀分布
正态分布
独立性
条件分布