厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2011 年 1 月　　信息学院自律督导部

1．（5 分）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解　$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{(\Delta x)^2}(e^{t^2}-1)dt}{(\Delta x)^3}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{(\Delta x)^4}-1)\cdot 2\Delta x}{3(\Delta x)^2}=\frac{2}{3}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{\Delta x}=0$$

2．（5 分）设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，求 $\int\frac{dx}{f(x)}$.

解　对 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$ 两边求导，得 $xf(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

故　$$\int\frac{dx}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

3．（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & x<0\text{或}x\ge 2\end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

解　当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0$；

当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x tdt=\dfrac{1}{2}x^2$；

当 $1\le x\le 2$ 时，$F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt$

$$=\frac{1}{2}+(2t-\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^x=\frac{1}{2}+(2x-\frac{1}{2}x^2)-\frac{3}{2}=2x-\frac{1}{2}x^2-1;$$

当 $x\ge 2$ 时， $F(x)=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)\mathrm{d}t+\int_2^x 0\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+(2t-\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}=1$.

于是， $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 1 \\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1\le x\le 2 \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$

4. （10 分）设 $I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x$，求证： $I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$，并求 $I_5=\int \tan^5 x\mathrm{d}x$.

证明： 当 $n\ge 2$ 时， $I_n+I_{n-2}=\int \tan^n x\mathrm{d}x+\int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x=\int \tan^{n-2}x\sec^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x+C$，

故 $I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$.

于是，

$$
\begin{aligned}
I_5&=\frac{1}{4}\tan^4 x-I_3=\frac{1}{4}\tan^4 x-(\frac{1}{2}\tan^2 x-I_1)\\
&=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\int \tan x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.
\end{aligned}
$$

5．计算下面的积分（每小题 5 分，共 4 题 20 分）

（1） $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；（2） $\int_0^{\pi/4}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$；

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$；（4） $\int_1^2[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}]\mathrm{d}x$.

解（1） $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int_1^4\frac{1}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^4=2\arctan 2-\frac{\pi}{2}$.

（2） $\int_0^{\pi/4}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}=\int_0^{\pi/4}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}x\,\mathrm{d}\tan x=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.（答案有误，应除以二）

（3）令 $x=\tan t$， $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,\mathrm{d}t=(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

（4） $\int_1^2[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}]\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\right]\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2}$

$$=-\frac{1}{\ln 2}+1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}+\frac{1}{\varepsilon}\right]=-\frac{1}{\ln 2}+1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln(1+\varepsilon)-\varepsilon}{\varepsilon\ln(1+\varepsilon)}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}+1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln(1+\varepsilon)-\varepsilon}{\varepsilon^2}=-\frac{1}{\ln 2}+1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{2\varepsilon}=-\frac{1}{\ln 2}+\frac{3}{2}.$$

6. (10 分) 设 $f(u)$ 是连续函数，求 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2}xf(t\mathrm{e}^x)\mathrm{d}t$ 关于 x 的导数。

解 令 $u=t\mathrm{e}^x$，则 $F(x)=\int_{\sin x\cdot \mathrm{e}^x}^{x^2\mathrm{e}^x}xf(u)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}u=x\mathrm{e}^{-x}\int_{\sin x\cdot \mathrm{e}^x}^{x^2\mathrm{e}^x}f(u)\mathrm{d}u$，于是，

$$F'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}\int_{\sin x\cdot \mathrm{e}^x}^{x^2\mathrm{e}^x}f(u)\mathrm{d}u+x\mathrm{e}^{-x}\cdot[(x^2+2x)\mathrm{e}^x f(x^2\mathrm{e}^x)-(\cos x+\sin x)\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x\sin x)]$$

$$=(1-x)\mathrm{e}^{-x}\int_{\sin x\cdot \mathrm{e}^x}^{x^2\mathrm{e}^x}f(u)\mathrm{d}u+(x^3+2x^2)f(x^2\mathrm{e}^x)-x(\cos x+\sin x)f(\mathrm{e}^x\sin x)$$

7. (10 分) 设 $g(x)$ 为正值连续函数，令 $f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|g(t)\mathrm{d}t,(a\ge 0)$，判别曲线 $y=f(x)$ 的图形在 $[-a,a]$ 上的凹凸性。

解 $f(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)g(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}(t-x)g(t)\mathrm{d}t$

$$=x\int_{-a}^{x}g(t)\mathrm{d}t-\int_{-a}^{x}tg(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}tg(t)\mathrm{d}t-x\int_{x}^{a}g(t)\mathrm{d}t,$$

则 $f'(x)=\int_{-a}^{x}g(t)\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)-xg(x)-\int_{x}^{a}g(t)\mathrm{d}t+xg(x)=\int_{-a}^{x}g(t)\mathrm{d}t+\int_{a}^{x}g(t)\mathrm{d}t$

$f''(x)=2g(x)>0$. 所以，曲线 $y=f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的.

8. (10 分) 证明当 $x\ge 0$ 时，有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

证明 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0,$$

于是，当 $x>0$ 时， $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}.$$

9．(10 分) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线有几条？请给出您的结论。

解 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)]=0$，所以，$y=0$ 是曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to0} y=\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)]=\infty$， 故 $x=0$ 为曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的铅直渐近线。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)+x\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{2x}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}{2}+\frac{1}{2}=1\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=0\,.$$

所以，曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线有三条，分别是 $y=0$， $x=0$， $y=x$.

10．(10 分) 设在 $[1,+\infty)$ 上处处有 $f''(x)\le0$， 且 $f(1)=2,\ f'(1)=-3$， 证明在 $(1,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根。

解 当 $x>1$ 时，

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-1)^2\le2-3(x-1)=5-3x\,,\quad \xi_1\in(1,x)\,.$$

因此， $f(2)\le5-6=-1<0$，因此，由连续函数的介值定理知，$f(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内至少存在一个实根.

又在 $[1,+\infty)$ 上处处有 $f''(x)\le0$，所以， $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少，于是当 $x>1$ 时， $f'(x)<f'(1)=-3<0$.

即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调减少． 因此，方程 $f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 内至多一个实根. 故在 $(1,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根.

11. 附加题(10 分)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

证： 令 $F(t)=\int_a^{t} g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_b^{t} f(x)\mathrm{d}x,\quad t\in[a,b]$，由题设条件知 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $F(a)=\int_a^{a} g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_b^{a} f(x)\mathrm{d}x=0,\quad F(b)=\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_b^{b} f(x)\mathrm{d}x=0$

所以 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，故至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

$F'(\xi)=f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x+g(\xi)\int_b^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$，即 $f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 证毕.