



厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型 (理工类 A 卷)

考试时间 2018.11.24

一、计算下列极限：(每小题 5 分，共 25 分)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x);$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

$$= \frac{2}{1 + 1} = 1$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{\frac{1}{\tan x - x}};$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x^3)}{\tan x - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\tan x - x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sec^2 x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\tan^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2}} = e^3$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x + \sin x};$

解：方法一：当 $|x| > 2$ 时， $|\frac{\arctan x}{x + \sin x}| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{|x| - 1} \leq \frac{\pi}{x}$ ，又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x} = 0$ ，因此由夹逼准则，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x + \sin x} = 0。$$

方法二：因为 $|\sin x| \leq 1$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ，进而得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = 0,$$

又 $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$ ，因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x + \sin x} = 0。$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2+x^4) + \ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1) \cdot \arcsin x^2};$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^4+x^8)}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+x^8}{x^2 \cdot x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 2$

5. 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$ 。

解: 注意到

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2n},$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$, 因此由夹逼准则, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}.$$

二、(本题 6 分) 求函数 $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + (\sec x)^x$ 的一阶导数。

解: $y' = \sqrt{1-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (e^{x \ln \sec x})'$
 $= 2\sqrt{1-x^2} + e^{x \ln \sec x} (\ln \sec x + x \cdot \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x)$
 $= 2\sqrt{1-x^2} + (\sec x)^x (\ln \sec x + x \cdot \tan x)$

三、(本题 10 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, 证明

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限值。

解: 先证 $1 \leq x_n \leq 2$, 用归纳法。

当 $n=1$ 时, $1 \leq x_1 = \sqrt{2} \leq 2$;

假设当 $n=k$ 时, $1 \leq x_k \leq 2$ 。则当 $n=k+1$ 时, 由 $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$, 得 $1 \leq x_{k+1} \leq 2$, 得证。

下证 $\{x_n\}$ 为单调数列。令 $f(x) = \sqrt{2+x}$, $x \in [1, 2]$, 则 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为单调增加函数。又

$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$, 因此 $\{x_n\}$ 为单调递增数列。

由有界单调准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

最后求此极限值。令 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 则 $1 \leq a \leq 2$ 。又由 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $a = \sqrt{2+a}$, 解得 $a = 2$ 。

四、(本题 10 分) 设方程 $\ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x}$ 确定了隐函数

$y = y(x)$, 求此隐函数在点 $(1, 0)$ 处的一阶导数和二阶导数。

解: 方程的两边对 x 求导, 得

$$\frac{2x + 2y \cdot y'}{x^2 + y^2} = 2 \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{xy' - y}{x^2}$$

整理得 $x + y \cdot y' = xy' - y$, 解得 $y' = \frac{x+y}{x-y}$

在 $y' = \frac{x+y}{x-y}$ 两边对 x 求导, 得

$$y'' = \frac{(1+y') \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (1-y')}{(x-y)^2} = \frac{-2y + 2xy'}{(x-y)^2} = \frac{-2y + 2x \cdot \frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}。$$

代入得 $y'|_{(1,0)} = 1$, $y''|_{(1,0)} = 2$ 。

五、(本题 10 分) 计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 < t < 2\pi)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的

一阶导数和二阶导数。

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\cos t \cdot (1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos t} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}$$

六、(本题 10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} b(1 + \sin x) + a + 2 & x > 0 \\ e^{ax} - 1 & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处可导, 求 a, b 。

解: 只考虑 $x=0$ 就行。因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [b(1 + \sin x) + a + 2] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{ax} - 1) = 0, \text{ 得 } a + b + 2 = 0。$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上可导, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1 - 0}{x - 0}, \text{ 得 } a = b, \text{ 联立解得 } a = b = -1。$$

七、(本题 9 分) 求函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{|x^2 - 3x + 2|}$ 的间断点, 并判断其间断点类型 (说明理由)。

解: 间断点为 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 。注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln |x|}{|x^2 - 3x + 2|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^2 - 3x + 2|} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

所以 $x=0$ 为第一类间断点中的可去间断点。

因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln |x|}{|x^2 - 3x + 2|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{|x - 2|} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln |x|}{|x - 1|} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(1+x-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln |x|}{|x^2 - 3x + 2|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{|x - 2|} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln |x|}{|x - 1|} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1+x-1)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{1 - x} = -1$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点。

注意到 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x \ln |x|} = \frac{0}{2 \cdot \ln 2} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, 因此 $x=2$ 为第二类间断点中的无穷

间断点。

八、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域上单调、二阶可导, 其反函数为 $g(x)$ 。已

知 $f(0)=1$, $f'(0)=2$, $f''(0)=3$, 求 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的一阶导数和二阶导数。

解: 注意到 $f(g(x)) = x$, 两边对 x 求导, 得

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \text{①}$$

上式两边再对 x 求导, 可得

$$f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x) = 0 \quad ②$$

$$\text{上式由①②, 求得 } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad g''(x) = -\frac{f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2}{f'(g(x))} \text{ (或 } = \frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3} \text{),}$$

把 $x=1$, $g(1)=0$ 代入, 得

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2},$$

$$g''(1) = -\frac{f''(g(1)) \cdot (g'(1))^2}{f'(g(1))} = -\frac{f''(0) \cdot (g'(1))^2}{f'(0)} = -\frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8}.$$

九、(本题共 10 分, 第一小题 4 分, 第二小题 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且有 $f(0)=0$, $f(1)+f(2)=2$, $f(3)=4$ 。证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in [1,2]$, 使得 $f(\xi)=1$;

(2) 至少存在一点 $\eta \in (0,3)$, 使得 $f'(\eta)=1$ 。

证明: (1) 因为函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 所以在 $[1,2]$ 可取到最大值 M 和最小值 m 。

又因为 $m \leq \frac{f(1)+f(2)}{2} = 1 \leq M$, 所以由介值定理, 至少存在一点 $\xi \in [1,2]$, 使得 $f(\xi)=1$ 。

(2) 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - x$, $x \in [0,3]$, 根据题意, $\varphi(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $\varphi(0) = f(0) - 0 = 0$, $\varphi(\xi) = f(\xi) - \xi \leq 0$, $\varphi(3) = f(3) - 3 = 1$ 。注意到 $\varphi(\xi) \leq 0 < \varphi(3)$, 所以由介值定理, 存在 $x_0 \in [\xi, 3] \subseteq [1, 3]$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$ 。(或者注意到 $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) = 0$, 类似(1)的证明对函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上用介值定理, 存在 $x_0 \in [1,3]$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$)

从而由罗尔定理, 至少存在一点 $\eta \in (0, x_0) \subset (0, 3)$, 使得 $\varphi'(\eta) = 0$, 即有 $f'(\eta) = 1$ 。