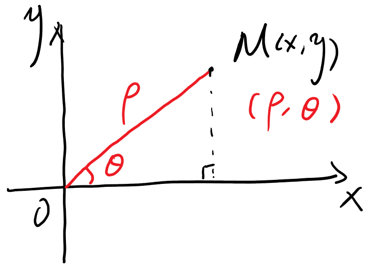
2022.12.21-2

2022年12月21日 9:48

作业：6-2：5(2)(3)，15(1)(3)，20，23，25，27，29

总六：6，7，9

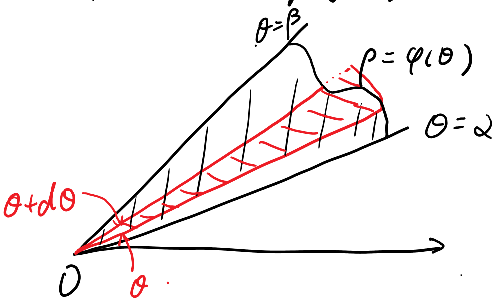
2. 极坐标情形



设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta]$，$\varphi(\theta)\geq 0$

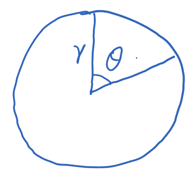
求由 $\rho=\varphi(\theta)$ 及 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$



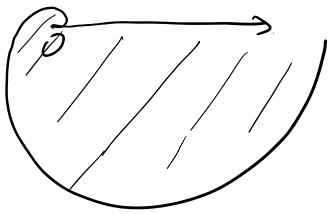
$$dA=\frac{1}{2}(\rho(\theta))^2d\theta$$

$$A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}(\rho(\theta))^2d\theta$$



$$\pi r^2\cdot\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$$

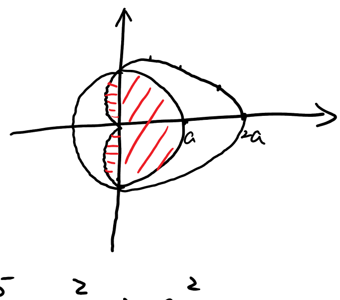
例4：求 $\rho=a\theta$ $(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围图形的面积.



解：$dA=\frac{1}{2}(a\theta)^2d\theta$

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2d\theta=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

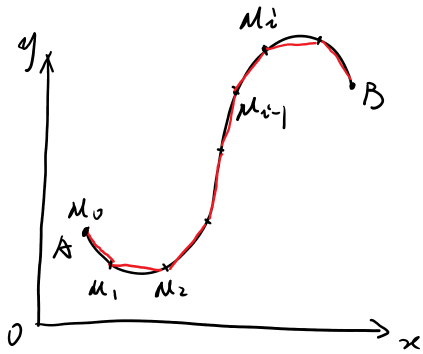
例5：求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $\rho=a$ $(a>0)$ 所围图形的面积.



解：$A=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{5}{4}\pi a^2-2a^2$$

二. 平面曲线的弧长



在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上依次任取分点 $A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}, M_i, \cdots, M_n=B$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{|M_{i-1}M_i|\}$

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{|M_{i-1}M_i|\}$

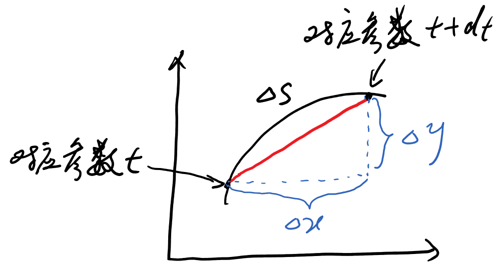
若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$ 存在，则称此极限为 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长

并称 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的.

· 光滑曲线：每点都具有切线，且切线随切点的移动而连续转动.

即 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 且 $\begin{matrix}\varphi,\psi\in C^1\\ \varphi'^2+\psi'^2\neq 0\end{matrix}$ 或 $L: y=f(x)$ 且 $f\in C^1$

· 定理：光滑曲线是可求长的.



· 若 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

且 $\varphi,\psi\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi'^2+\psi'^2\neq 0$

则 $\Delta S\approx\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

又 $\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t)=\varphi'(t_1)\,dt\approx\varphi'(t)\,dt=dx$

$\Delta y=\psi(t+dt)-\psi(t)=\psi'(t_2)\,dt\approx\psi'(t)\,dt=dy$

$\underline{ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}=\sqrt{(\varphi'(t)dt)^2+(\psi'(t)dt)^2}=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$

有 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$

· 若 $L: y=f(x)$. $f\in C^1[a,b]$, $x\in[a,b]$.

可视为 $\begin{cases}x=x\\ y=f(x)\end{cases}$ $(a\le x\le b)$

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

有 $S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

· 若 $L: \rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$.

$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$

$y=\rho(\theta)\sin\theta$

$$dx=(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)\,d\theta$$

$$dy=(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)\,d\theta$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}\,d\theta$$

有 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}\,d\theta$

例16：求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 相应于 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 的一段弧的长度.

解：$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,dx=\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx=4$$

例7：求 $\rho=a\theta\ (a>0)$ 相应于 $0\le\theta\le 2\pi$ 一段的弧长

解：$ds=\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}\,d\theta=\sqrt{a^2+a^2\theta^2}\,d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$

$$s=\int_{0}^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$\int\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\theta\sqrt{1+\theta^2}-\int\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\theta\sqrt{1+\theta^2}-\int\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\int\frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

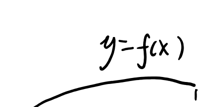
……

三. 体积

1. 旋转体的体积

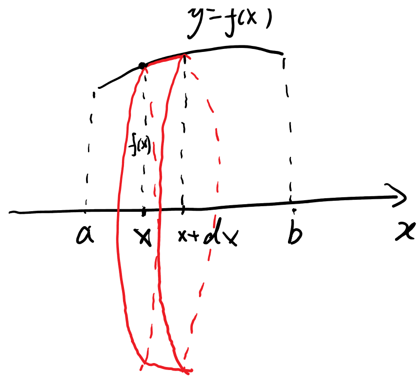
圆柱：矩形绕它的一条边
圆锥：直角三角形绕它的直角边
圆台：直角梯形绕它的直角腰
球体：半圆绕它的直径

} 旋转体



球体：半圆绕它的直径

由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成



$$dV = \pi (f(x))^2 dx$$

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

例8：求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体(旋转椭球体)的体积

解：可看作是上半椭圆 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周

$$dV = \pi \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx$$

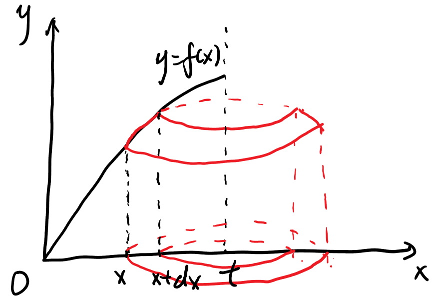
$$V = \int_{-a}^{a} \pi \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

当 $a=b$ 时，得球体积，$\frac{4}{3}\pi a^3$

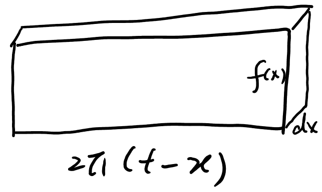
☆ 柱壳法

例9：$f\in C[0,+\infty)$，$f(x)\geq 0$ 且 $f(0)=0$

$V(t)$ 表示 $y=f(x)$，$x=t$ $(t>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积。求证：$V''(t)=2\pi f(t)$



证：$dV = 2\pi(t-x)f(x)dx$



$$V(t) = \int_0^t 2\pi(t-x)f(x)dx$$

$$= \int_0^t 2\pi t f(x)dx - \int_0^t 2\pi x f(x)dx$$

$$= t\int_0^t 2\pi f(x)dx - \int_0^t 2\pi x f(x)dx$$

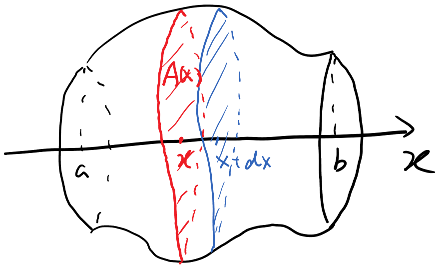
$$= t\int_0^t 2\pi f(x)dx - \int_0^t 2\pi x f(x)dx$$

$$V'(t) = \int_0^t 2\pi f(x)dx + t\cdot 2\pi f(t) - 2\pi t f(t) = \int_0^t 2\pi f(x)dx$$

$$V''(t) = 2\pi f(t) \qquad \square$$

2. 平行截面积为已知的立体的体积

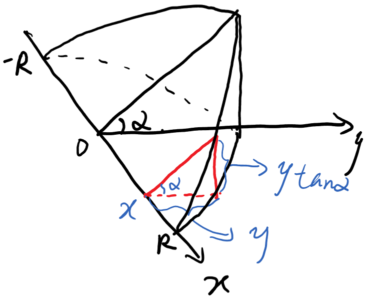
设 $A(x) \in C[a,b]$



$$dV = A(x)dx$$

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

例10：一平面经过半径为R的圆柱体的底面中心，并与底面交成角α，求这平面截圆柱体所得立体的体积。



解：$A(x) = \frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha = \frac{1}{2}y^2\cdot\tan\alpha$

由 $x^2+y^2=R^2$，有 $A(x) = \frac{1}{2}(R^2-x^2)\cdot\tan\alpha$

$$dV = A(x)dx = \frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

$$V = \int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\, dx = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$