厦门大学第十六届“景润杯”数学竞赛试题解答（非数学专业类）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1． 空间直角坐标系中，在平面$\pi: x-y+z-1=0$上有一条直线L，其在平面$\pi_1: x+y+z-1=0$上的投影直线为$L_1:\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 2x-5y+3z-4=0 \end{cases}$，该直线$L$的方程为______________________。

解：平面$2x-5y+3z-4=0$过直线L_1且垂直于平面π_1，所以，所求直线方程$L:\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x-5y+3z-4=0 \end{cases}$.

答案：$\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x-5y+3z-4=0 \end{cases}$.

2． $\displaystyle\int \frac{x^3 e^x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x =$________________ 。

解：$\displaystyle\int \frac{x^3 e^x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = -\frac{x^3 e^x}{x+3} + \int x^2 e^x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^3 e^x}{x+3} + (x^2-2x+2)e^x + C$

答案：$(-\dfrac{x^3}{x+3} + x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

3． 设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le x+y+1\}$，则$\displaystyle\iint_D (x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$___________ 。

解：$\displaystyle\iint_D (x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\bar{x}+\bar{y}+1)A = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)A = 2\times\pi(1+\frac{1}{2}) = 3\pi.$

答案：3π.

4． $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x =$_____________。

答案：$\dfrac{\pi^2}{4}$.

解：$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$

$$= \pi\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x} + \frac{\cos^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x})\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

5． 设$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\ (n\geq 1)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=$____________。

答案：$\dfrac{1}{2}$.

解：$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_{k+2}})=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_{n+2}}$.

因为$a_n\geq n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，于是，$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$.

6． 设Ω为球体$x^2+y^2+z^2\leq 1$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}[(x+y)^2+(y+z)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____________。

答案：$\dfrac{16}{15}\pi$.

解：
$$\iiint\limits_{\Omega}[(x+y)^2+(y+z)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}[x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\frac{4}{3}\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\times 2\pi\times 2\times\frac{1}{5}=\frac{16}{15}\pi.$$

二、（本题 6 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$。

解一：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)[1+\tan(\tan x)\tan(\sin x)]\tan(\tan x-\sin x)}{\left(x-\ln(1+x)\right)x}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)}{\frac{1}{2}x^3}=2$$

解二：利用拉格朗日中值定理，
$$\tan(\tan x)-\tan(\sin x)=\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x),$$
其中ξ介于$\tan x$和$\sin x$之间，且$\lim\limits_{x\to 0}\xi=0$.

所以，
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\ln(1+x)})}{x(x-\ln(1+x))}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(x-\ln(1+x))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-\frac{1}{1+x}}=2.$$

三、（本题 6 分）计算定积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$。

解：$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{\cos x})'\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+2\sqrt{\cos x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\sqrt[4]{2}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}}).$$

四、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数，且 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x。$$

证明：作辅助函数 $F(t)=\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{(t-a)^2}{2}\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^t[f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x$，则

$$F'(t)=f^2(t)-(t-a)\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

因为 $f(t)=f(a)+\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x$，故由 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$f^2(t)=[\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x]^2\le\int_a^t 1^2\mathrm{d}x\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x=(t-a)\int_a^t[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

故 $F'(t)\le 0$，即 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减，于是，$F(b)\le F(a)=0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

五、（本题 8 分）已知函数 $f(x)$ 具有四阶导数，且 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le M$。 求证：$\forall x\ne a$，有

$$\left|f''(a)-\frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2}\right|\le\frac{M}{12}(x-a)^2 。$$

证明：由泰勒公式，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}(x-a)^4 ,$$

$$f(2a-x)=f(a)+f'(a)(a-x)+\frac{f''(a)}{2}(a-x)^2+\frac{f'''(a)}{6}(a-x)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}(a-x)^4 ,$$

其中ξ_1介于x和a之间，ξ_2介于$2a-x$和a之间.

$$f(x)+f(2a-x)=2f(a)+f''(a)(x-a)^2+\frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_1)}{24}(x-a)^4 .$$

$\forall x\ne a$，有

$$f''(a)-\frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2}=-\frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)}{24}(x-a)^2 ,$$

故
$$\left|f''(a)-\frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2}\right|\le\frac{\left|f^{(4)}(\xi_1)\right|+\left|f^{(4)}(\xi_2)\right|}{24}(x-a)^2$$
$$\le\frac{M}{12}(x-a)^2 .$$

六、（本题 8 分）设数列$\{u_n\}$满足：$0<u_n<1$且

$$u_1+(1-u_1)u_2+(1-u_1)(1-u_2)u_3+\sum_{n=4}^{\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})u_n=1 。$$

证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明：用反证法.

假设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 因此存在正整数 N，当$n>N$时，$0<u_n<\frac{1}{2}$.

注意到，当$0<x<\frac{1}{2}$时，$-\ln(1-x)<2x$. 因此，当$n>N$时，$-\ln(1-u_n)<2u_n$，从而由比较审敛法，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-u_n)]$收敛.

另一方面，由题意得

$$-(1-u_1)+(1-u_1)u_2+(1-u_1)(1-u_2)u_3+\sum_{n=4}^{\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})u_n=0 ,$$

从而其部分和极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})(1-u_n)=0$.

因此，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-u_n)]$ 的前 n 项和 $S_n=-\ln[(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n)]$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\ln[(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n)]=\infty,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-u_n)]$ 发散的，矛盾.

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

七、（本题 8 分）设曲线 L 为 $x^2+y^2=2x\ (y\ge 0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段有向弧，求连续函数 $f(x)$，使得 $f(x)=x^2+\int_L y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y$.

解：设 $A=\int_L y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y$， D 为曲线 L 与线段 $\overline{AO}$ 围成的区域，则

$$A=\int_{L+\overline{AO}}y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}}y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D[y^2+f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故
$$A=\iint_D[y^2+x^2+A]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r+\frac{\pi}{2}A$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{2}A$$
$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}A,$$

故 $A=\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$，所以， $f(x)=x^2+\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$.

八、（本题 8 分）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ 的和数。

解一：因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^n n!(2n+1)!!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n(2n+1)!!}$.

作幂级数 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，记 $u_n(x)=\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}x^2=\dfrac{1}{2}x^2$，所以，幂级数 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的收敛半径为 $\sqrt{2}$.

当 $|x|<\sqrt{2}$ 时， $s(x)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=x+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1-1)(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$

$$=x+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2 s(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

两边求导数，得 $s'(x)=1+xs(x)+\frac{1}{2}x^2 s'(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{2n}$

$$=1+xs(x)+\frac{1}{2}x^2 s'(x)-\frac{x}{2}s(x)$$

$$=1+\frac{x}{2}s(x)+\frac{1}{2}x^2 s'(x),$$

即 $s'(x)-\frac{x}{2-x^2}s(x)=\frac{2}{2-x^2}$.

于是，$s(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{2-x^2}\mathrm{d}x}[\int\frac{2}{2-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{2-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}[2\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}[2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C]。$$

注意到 $s(0)=0$，故 $s(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\sqrt{2}s(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$.

解二：作幂级数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，记 $u_n(x)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$。

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}x^2=\frac{1}{4}x^2$，所以，幂级数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛半径为 2.

当 $|x|<2$ 时，$s'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

$$=1+\frac{x}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$=1+\frac{x}{4}(xs(x))'$$

得 $$s'(x)=1+\frac{x}{4}[s(x)+xs'(x)]$$

$$=1+\frac{x}{4}s(x)+\frac{1}{4}x^2 s'(x),$$

即 $s'(x)-\frac{x}{4-x^2}s(x)=\frac{4}{4-x^2}$.

于是， $s(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x}[\int\frac{4}{4-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}[\int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}[4\arcsin\frac{x}{2}+C]。$$

注意到 $s(0)=0$，故 $s(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\frac{x}{2}$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=s(1)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

解三： $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x$，

所以， $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{4-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\cos^2 x}\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

九、（本题 8 分）设 $u=f(r)$， $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中 f 具有连续的二阶导数，且 $\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=1$，试求函数 $f(r)$，使得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

解：由 $\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=1$，知 $\lim_{x\to1}\ln[1+f(x)]=0$，即 $f(1)=0$.

因为 $\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$，

则 $f'(1)=1$.

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})^2+f'(r)\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= f''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + f'(r)\frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + f'(r)\frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r)\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} + f'(r)\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

代入方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，可得

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0.$$

设$P=f'(r)$，则$P'(r)+\frac{2}{r}P(r)=0$，故$P(r)=\frac{C_1}{r^2}$，从而 $f(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$.

由 $f(1)=0$， $f'(1)=1$，得$C_1=C_2=1$，故 $f(r)=1-\frac{1}{r}$.

十、（本题 8 分）设$|x_1|<1$， $x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$，求：（1） $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)$；（2） $\lim\limits_{n\to\infty}x_1x_2\cdots x_n$ 。

解：设$x_1=\cos\alpha$，则容易证明$x_n=\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}, n=1,2,\cdots$.

事实上， $n=1$时，结论显然成立.

设$n=k$时，结论成立. 则当$n=k+1$时， $x_{k+1}=\sqrt{\frac{1+x_k}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2^k}$，结论也成立.

故$x_n=\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}, n=1,2,\cdots$.

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to\infty}4^n\cdot\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{2^{n-1}})^2=2\alpha$.

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}x_1x_2\cdots x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

十一、（本题 8 分）已知 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可导，$g'(x)\neq 0$，且$\frac{f'(a)}{g'(a)}\neq\frac{f'(b)}{g'(b)}$。求证：对任意位于$\frac{f'(a)}{g'(a)}$和$\frac{f'(b)}{g'(b)}$之间的数$C$，都$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$。

证明：不妨设$\frac{f'(a)}{g'(a)}<C<\frac{f'(b)}{g'(b)}$。

令 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}, x\neq a,\\ \frac{f'(a)}{g'(a)}, x=a\end{cases}$， $G(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}, x\neq b,\\ \frac{f'(b)}{g'(b)}, x=b\end{cases}$.

所以，$F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

因为 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}<C<\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$，所以 C 位于 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间或位于 $\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间。

若 C 位于 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间，则 C 位于 $F(a)$ 与 $F(b)$ 之间.

由零点定理，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $F(\eta)=\dfrac{f(\eta)-f(a)}{g(\eta)-g(a)}=C$。

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,\eta)$，使得 $\dfrac{f(\eta)-f(a)}{g(\eta)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$.

同理，若 C 位于 $\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 之间，则 C 位于 $G(a)$ 与 $G(b)$ 之间.

由零点定理，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $G(\eta)=\dfrac{f(\eta)-f(b)}{g(\eta)-g(b)}=C$。

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(\eta,b)$，使得 $\dfrac{f(\eta)-f(b)}{g(\eta)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$.

证明二：因为 $g'(x)\neq 0$，故由达布定理知，$g'(a)$ 与 $g'(b)$ 同号，故

$$[f'(a)-Cg'(a)][f'(b)-Cg'(b)]=g'(a)g'(b)[\frac{f'(a)}{g'(a)}-C][\frac{f'(b)}{g'(b)}-C]<0.$$

作辅助函数 $F(x)=f(x)-Cg(x)$，于是，

$$F'(a)F'(b)=[f'(a)-Cg'(a)][f'(b)-Cg'(b)]<0,$$

由达布定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C.$$