第四章

振动与波动

机械振动：

物体在一定的位置附近做来回往复的运动。

振动：任何一个物理量在某个确定的数值附近作周期性的变化。

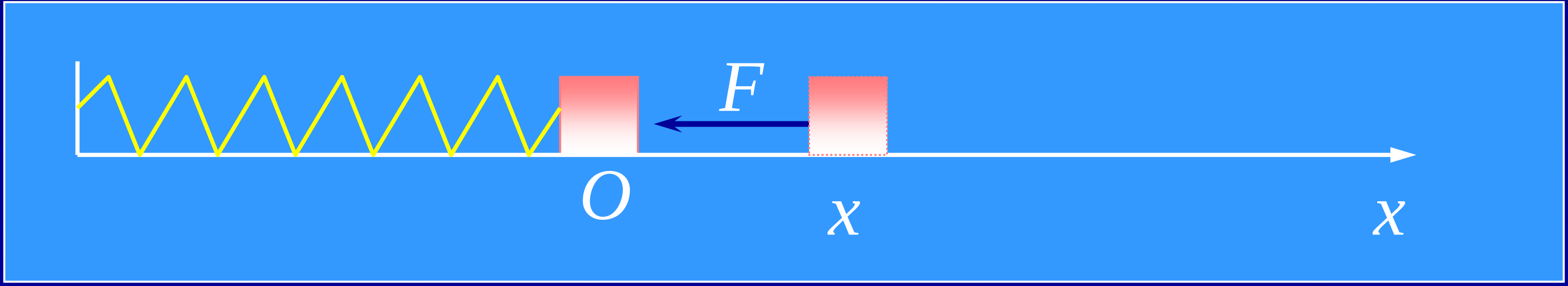
波动：振动状态在空间的传播。

任何复杂的振动都可以看做是由若干个简单而又基本的振动的合成。这种简单而又基本的振动形式称为**简谐运动**。

§4-1　简谐运动

4-1-1 简谐运动的基本特征

弹簧振子： 一根轻弹簧和一个刚体构成的一个振动系统。



根据胡克定律： $\vec{F} = -k\vec{x}$ （k为劲度系数）

（1） 在弹性限度内，弹性力F和位移x 成正比。

（2） 弹性力F和位移x 恒反向，始终指向平衡位置。

恢复力： 始终指向平衡位置的作用力

由牛顿第一定律：

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x$$

得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

令 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x}$$

简谐运动表达式： $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$

简谐运动：

物体的运动遵从余弦（或正弦）规律。

简谐运动的三项基本特征：

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

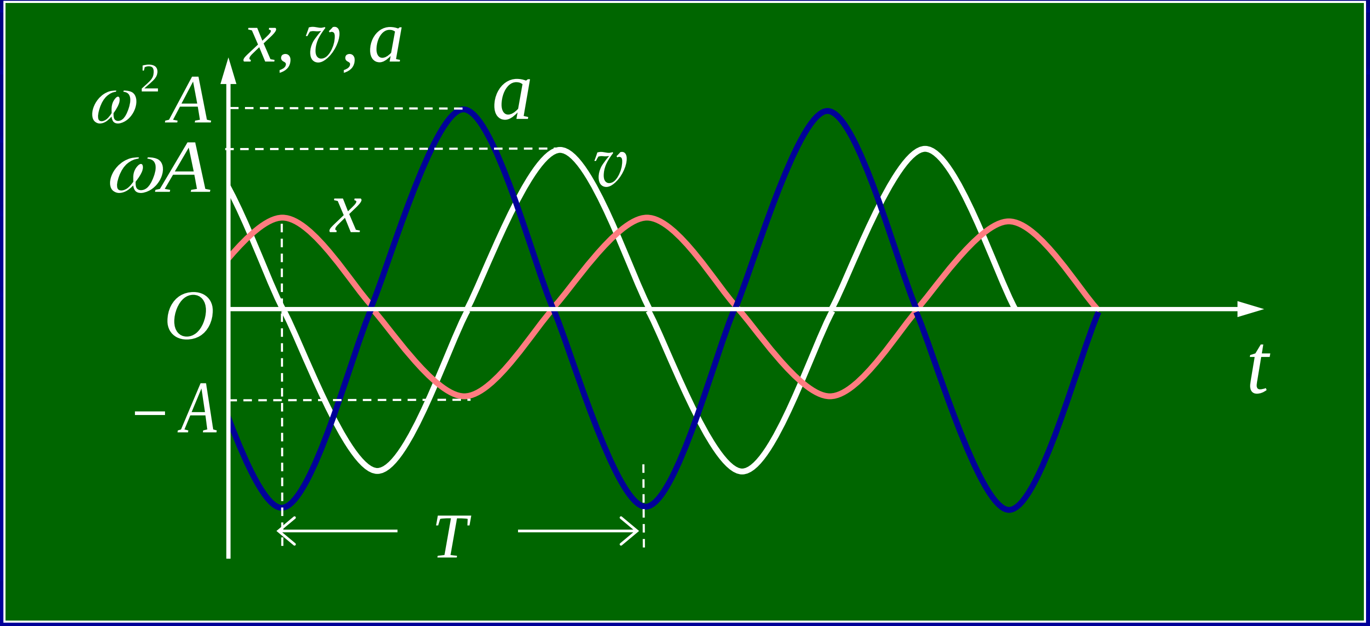
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

简谐运动的速度：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=v_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

简谐运动的加速度：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\omega^{2}A\cos(\omega t+\varphi)=a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)$$



4-1-2 描述简谐运动的物理量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A：**振幅**　（最大位移，$x = \pm A$ ）

ω：**角频率**　（圆频率）　$\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

频率 ν：单位时间内完成全振动的次数。

周期 T：完成一次全振动所经历的时间。

弹簧振子的频率: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

弹簧振子的周期: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

结论: 弹簧振子的振动频率和周期仅与振子本身的性质（k 和 m）有关，而与其他因素无关。

由振动系统本身的固有属性所决定的频率和周期称为**固有频率**和**固有周期**。

$(\omega t + \varphi)$：振动的"**相位**"。

φ：振动的"**初相位**"。

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=v_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$v_{\mathrm{m}}=\omega A$ 称为**速度幅**。

速度相位比位移相位超前π/2。

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\omega^{2}A\cos(\omega t+\varphi)=a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)$$

$a_{\mathrm{m}}=\omega^{2}A$ 称为**加速度幅**。

加速度与位移反相位。

比较：
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

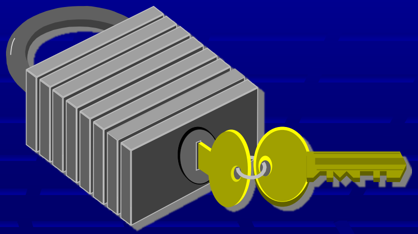
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

即
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

结论： 做简谐运动的质点，其加速度与位移恒成正比，而方向相反。

解题方法



由初始条件求解振幅和初相位：

设 $t = 0$时，振动位移：$x = x_0$

振动速度：$v = v_0$

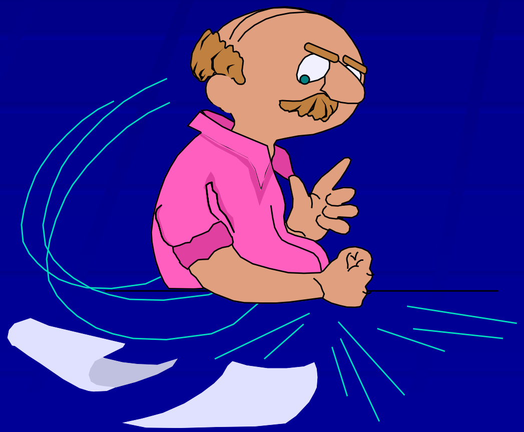
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad x_0 = A\cos\varphi$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad -\frac{v_0}{\omega} = A\sin\varphi$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

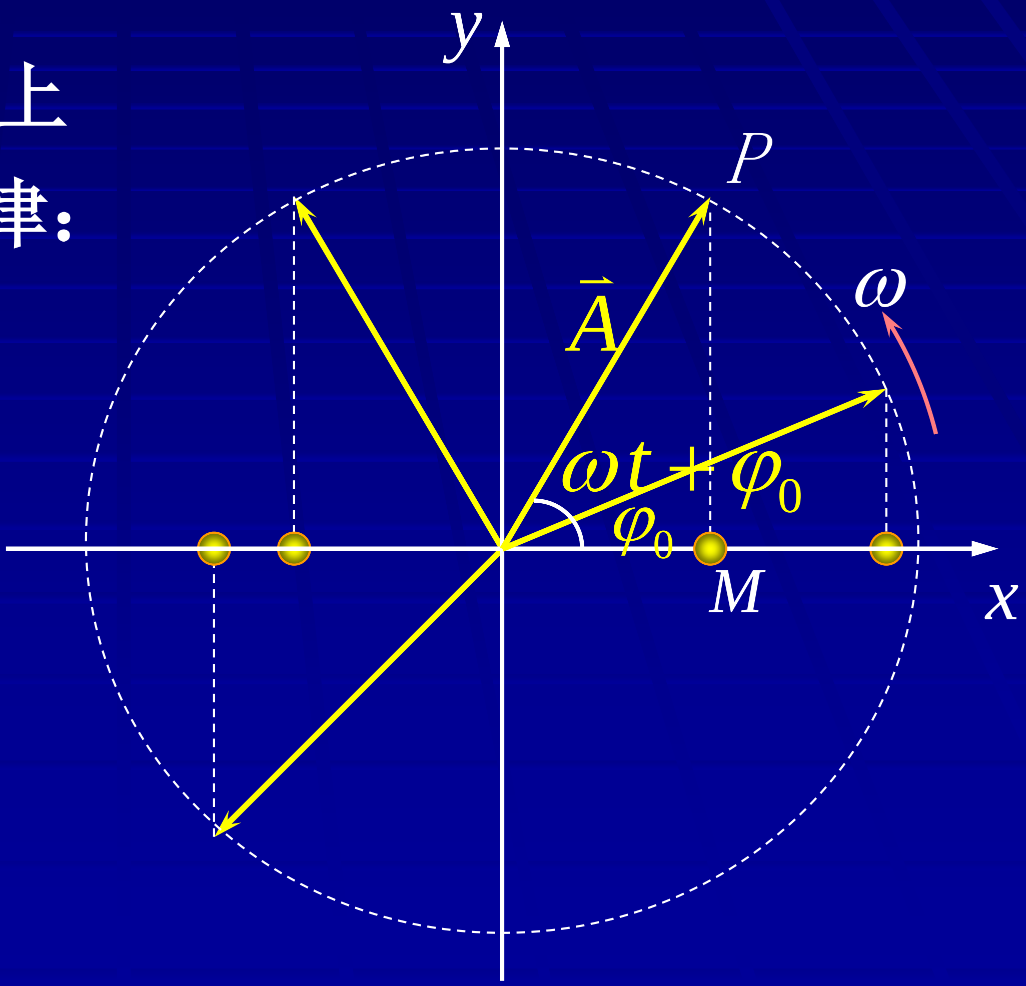


$$\tan\varphi = -\frac{v_o}{\omega x_o}$$

4-1-3 简谐运动的旋转矢量表示法

旋转矢量*A*在 *x* 轴上的投影点 *M* 的运动规律：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



结论：

投影点*M*的运动为简谐振动。

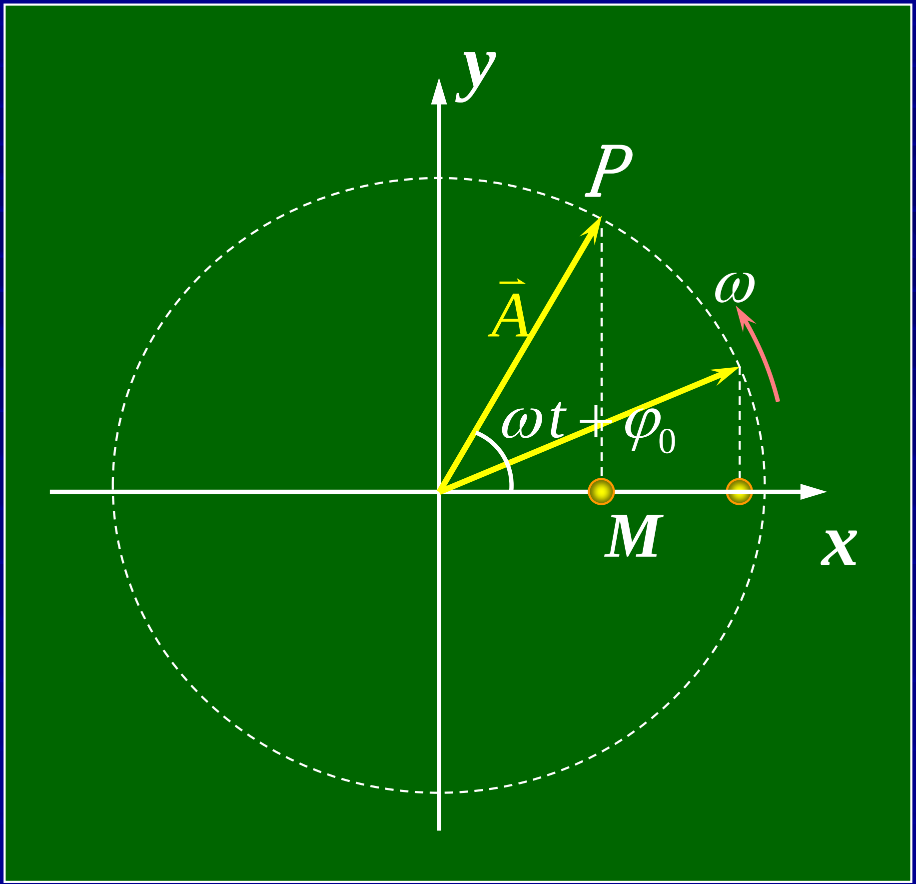
- 旋转矢量的模*A*：振幅

- 旋转矢量*A*的角速度ω：角频率

- 旋转矢量*A*与 *x* 轴的夹角($\omega t+\varphi$)：　相位

- $t=0$ 时， *A*与*x* 轴的夹角φ：初相位。

- 旋转矢量*A*旋转一周，*M*点完成一次全振动。



周期：　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

例1 一质点沿x 轴作简谐振动，振幅为12 cm，周期为2s。当t = 0时, 位移为6 cm，且向x 轴正方向运动。求:(1)振动方程；(2)t = 0.5 s时，质点的位置、速度和加速度；(3)如果在某时刻质点位于x = -6 cm，且向 x 轴负方向运动，从该位置回到平衡位置所需要的时间。

解： 设简谐振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

已知：A =12 cm， T = 2 s， $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\, s^{-1}$

$$x = 0.12\cos(\omega t + \varphi)$$

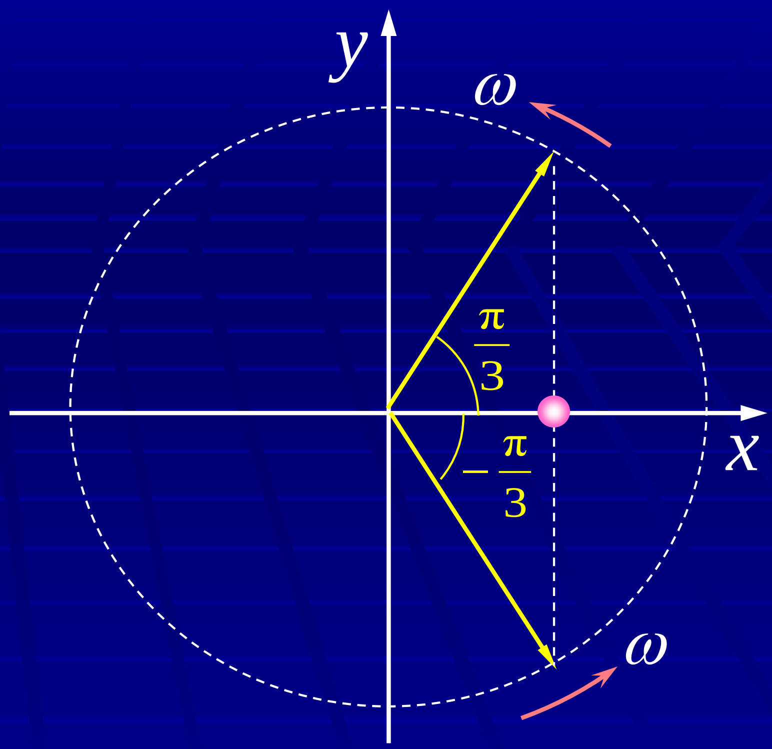
初始条件： $t = 0$ 时， $x_0 = 0.06$ m， $v_0 > 0$

$$0.06 = 0.12 \cos \varphi$$

$$\frac{1}{2} = \cos\varphi \rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$v_0 = -\omega A \sin\varphi > 0$$

$$\rightarrow \quad \sin\varphi < 0 \qquad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$



振动方程： $x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

$$v\Big|_{t=0.5}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=0.5}=-0.12\pi\sin(\pi t-\frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5}=-0.189\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

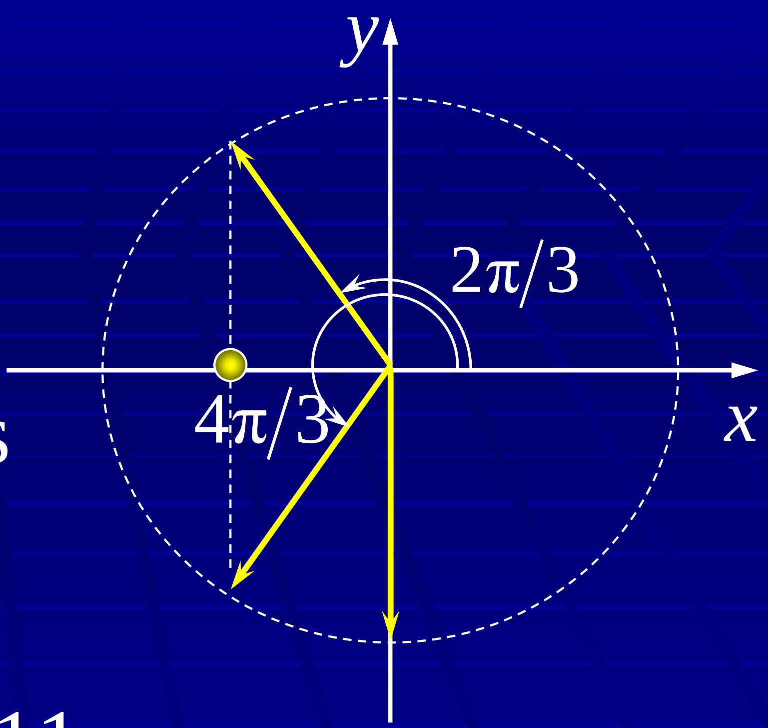
$$a\Big|_{t=0.5}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=0.5}=-0.12\pi^{2}\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5}=-0.103\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

设在某一时刻 t_1，　x = - 0.06 m

代入振动方程： $$-0.06=0.12\cos(\pi t_1-\pi/3)$$

$$\cos(\pi t_1-\pi/3)=-\frac{1}{2}$$

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad 或 \quad \frac{4\pi}{3}$$



$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t_1 = 1\text{s}$$

$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t_2 = \frac{11}{6}\text{s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6}\text{s}$$

例2　两质点做同方向、同频率的简谐振动，振幅相等。当质点1在 $x_1 = A/2$ 处，且向左运动时，另一个质点2在 $x_2 = -A/2$ 处，且向右运动。求这两个质点的相位差。

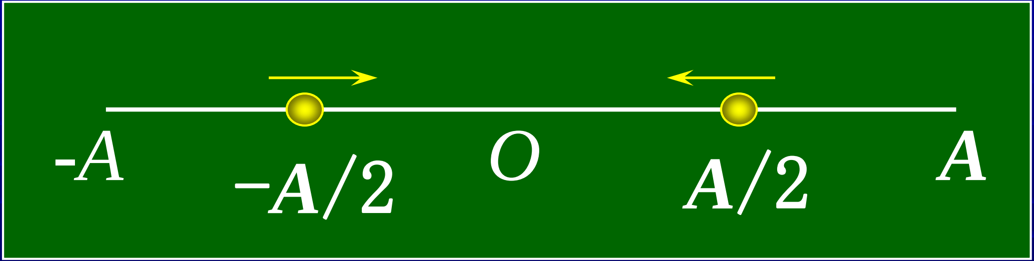
解：

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$A/2 = A\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \rightarrow \omega t + \varphi_1 = \pm \pi/3$$

$$v_1 = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_1) < 0$$

$$\sin(\omega t + \varphi_1) > 0 \qquad \omega t + \varphi_1 = \pi/3$$



$$-A/2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\rightarrow \quad \omega t + \varphi_2 = \pm 2\pi/3$$

$$v_2 = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_2) > 0$$

$$\rightarrow \quad \sin(\omega t + \varphi) < 0$$

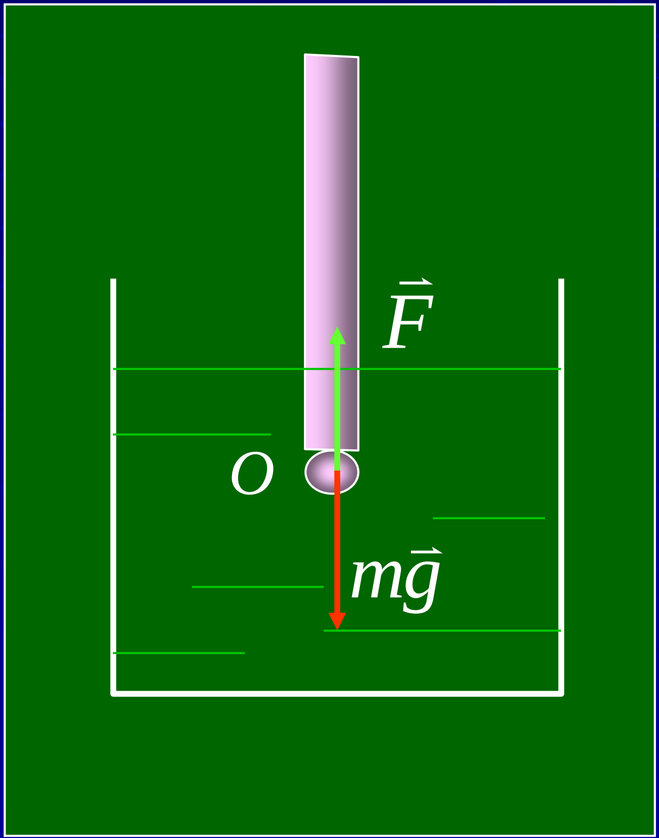
$$\omega t + \varphi_2 = -2\pi/3$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \frac{\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = \pi$$

例3 质量为m的比重计，放在密度为ρ的液体中。已知比重计圆管的直径为d。试证明，比重计推动后，在竖直方向的振动为简谐振动，并计算周期。

解：

取平衡位置为坐标原点



平衡时： $$mg - F = 0$$

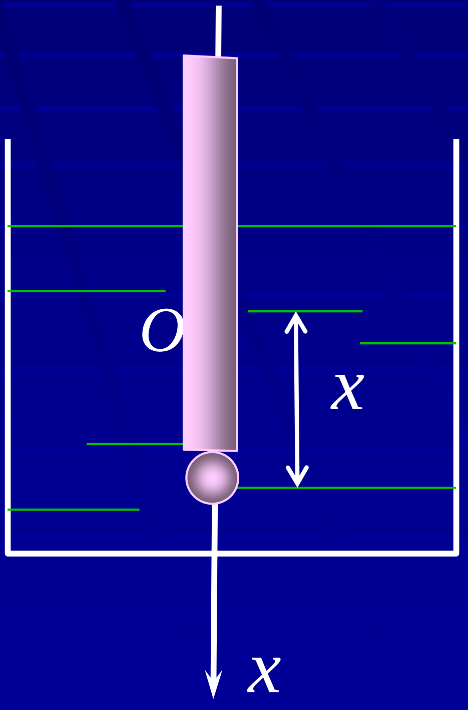
浮力： $$F = \rho V g$$

其中V为比重计的排水体积

$$mg-\left[V+\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 x\right]\rho\, g=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$mg-\rho Vg-\rho\, g\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2 x=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\pi d^2\rho\, g}{4m}x$$



$$\omega=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho\, g}{m}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho\, g}}$$

例4 一轻弹簧一端固定，另一端连一定质量的物体。整个振动系统位于水平面内。今将物体沿平面向右拉长到 $x_0 = 0.04$ m 处释放，试求：（1）简谐振动方程；（2）物体从初始位置运动到第一次经过$A/2$处时的速度。

解： $x_0 = 0.04\text{m} \quad, v_0 = 0 \quad, \omega = 6.0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

振幅： $A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \dfrac{v_0^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}} = x_0 = 0.04\text{ m}$

$$\varphi = \arctan\frac{-v_0}{\omega x_0} \rightarrow \varphi = 0$$

得 $x = 0.04\cos(6.0t)$

$$x = A\cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad \omega t = \arccos\frac{x}{A}$$

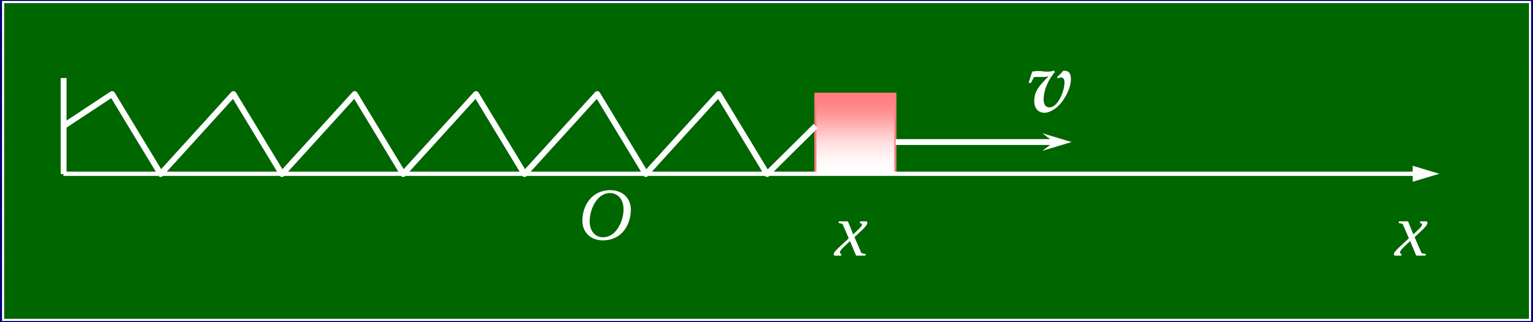
$$\omega t = \arccos\frac{A/2}{A} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}(\text{或}\frac{5\pi}{3})$$

按题意：$x = A \rightarrow x = +\frac{A}{2}, \omega t = \frac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega \sin(\omega t) = -0.04 \times 6.0 \times (\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= -0.208\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

4-1-4 简谐运动的能量



振子动能： $$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

振子势能： $$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

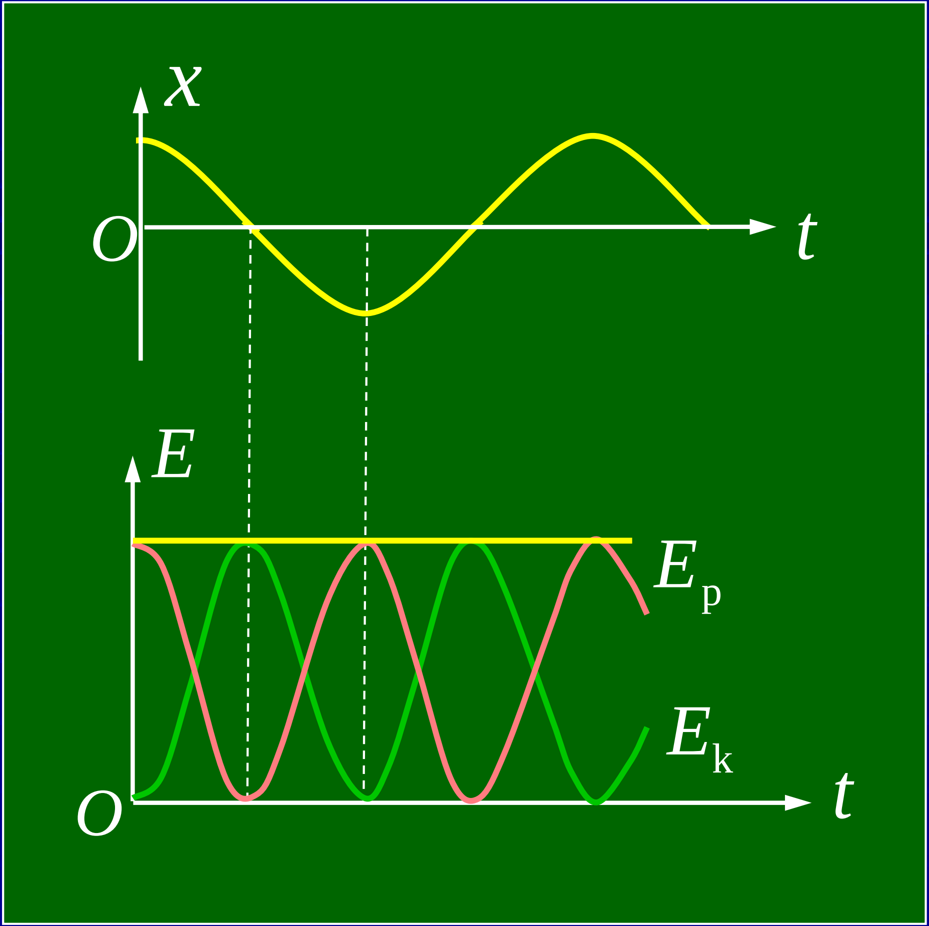
$$m\omega^2=k$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$m\omega^2 = k$$



谐振系统的总机械能：

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}$$

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{m}}^2$$

结论：

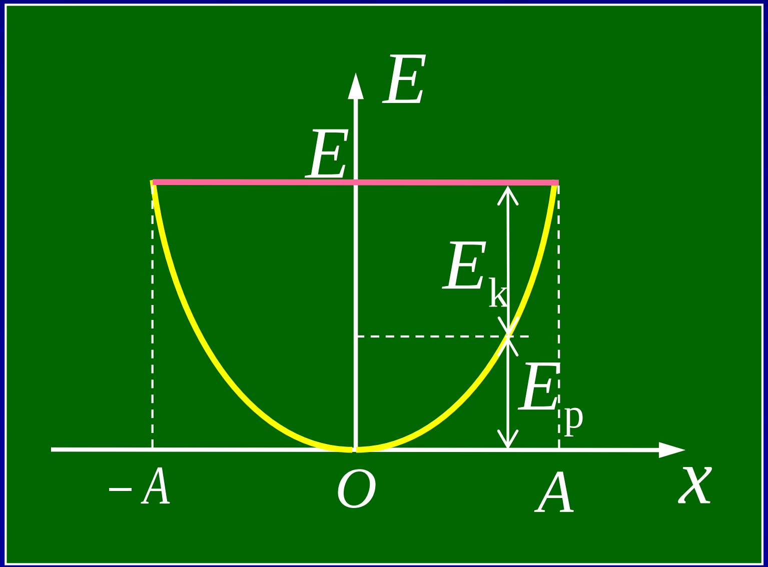
（1） 振子在振动过程中，动能和势能分别随时间变化，但任一时刻总机械能保持不变。

（2） 动能和势能的变化频率是弹簧振子振动频率的两倍。

（3）频率一定时，谐振动的总能量与振幅的平方成正比。（适合于任何谐振系统）

弹性势能 $$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = E - E_p$$



例5 当简谐振动的位移为振幅的一半时，其动能和势能各占总能量的多少？ 物体在什么位置时其动能和势能各占总能量的一半？

解：

$$E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}kA^2$$

当 $x = A/2$ 时：

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E$$

$$E_\mathrm{k} = E - E_\mathrm{p} = \frac{3}{4}E$$

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2 \qquad x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A = \pm 0.707A$$

§4-2 简谐运动的合成和分解

4-2-1 简谐运动的合成

1. 两个同方向、同频率的简谐运动的合成

某一质点在直线上同时参与两个独立的同频率的简谐运动，其振动表达式分别表示为：

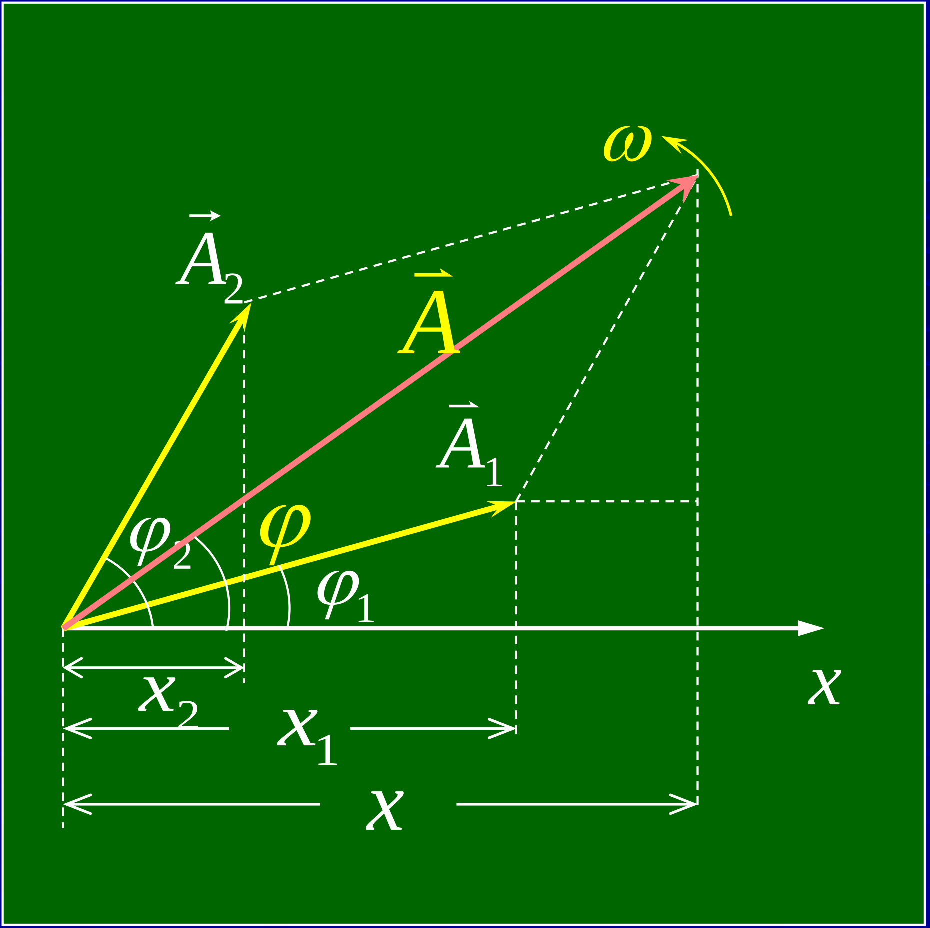
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



结论：

一个质点参与两个在同一直线上频率相同的简谐运动，其合成运动仍为简谐运动。

$$A=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

(1)　若：　$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

则：　$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$

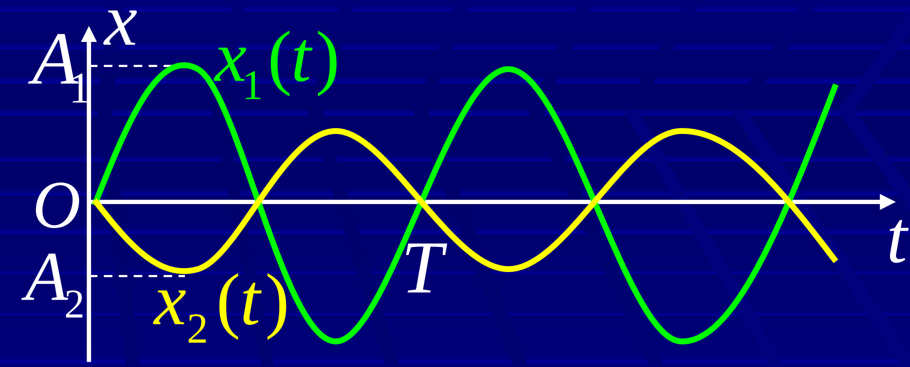
(2)　若：　$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

则：　$A=\sqrt{A_1^2+A_2^1-2A_1A_2}=|A_1-A_2|$

例6　两个同方向的简谐振动曲线(如图所示)

（1）求合振动的振幅；

（2）求合振动的振动方程。

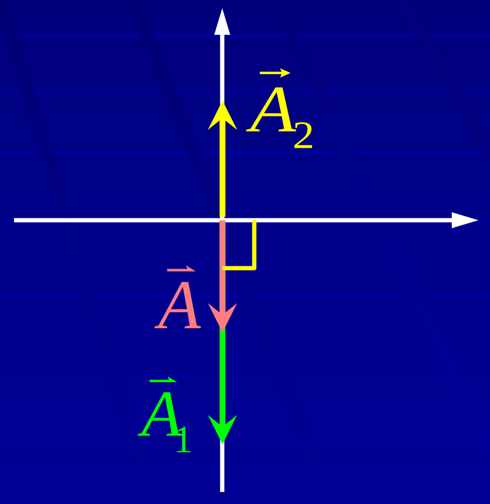


解： $A = |A_2 - A_1|$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_1 \cos\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$A_2 \cos\varphi_2 = 0 \qquad \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$



由矢量图：$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$　　$x = |A_2 - A_1| \cos(\dfrac{2\pi}{T} t - \dfrac{\pi}{2})$

2. 两个同方向不同频率简谐运动的合成

$\vec{A}_2$相对于$\vec{A}_1$的转动角速度：

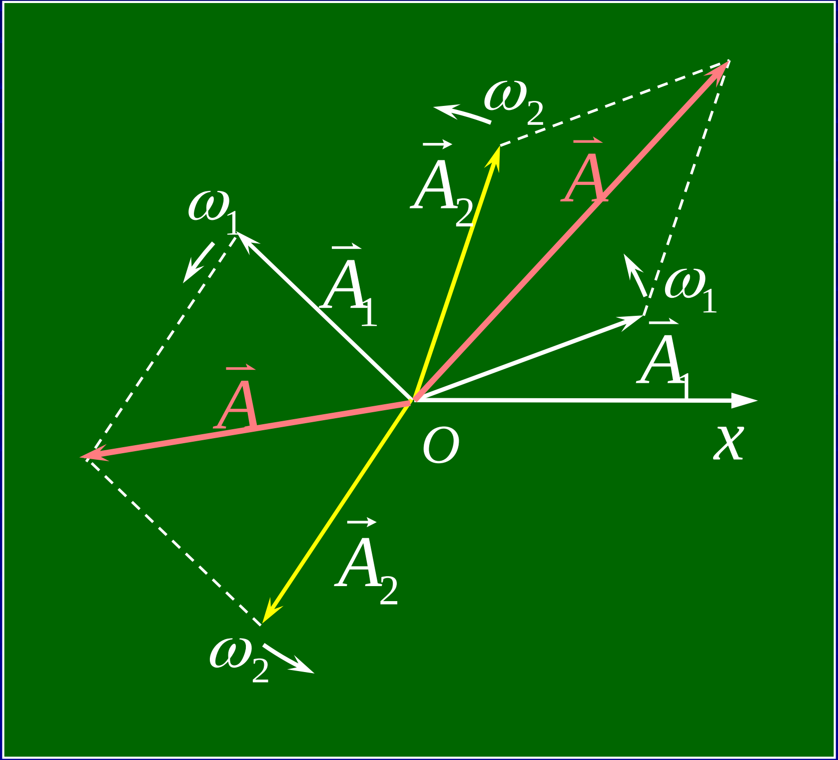
$$\omega_2-\omega_1$$

两矢量同向重合时：

合振动振幅 $\vec{A}$极大

两矢量反向重合时：

合振动振幅 $\vec{A}$极小



拍： 合振动的振幅时强时弱的现象

拍的周期： $$T=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

拍的频率： $$\nu=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$$

从解析式来分析：

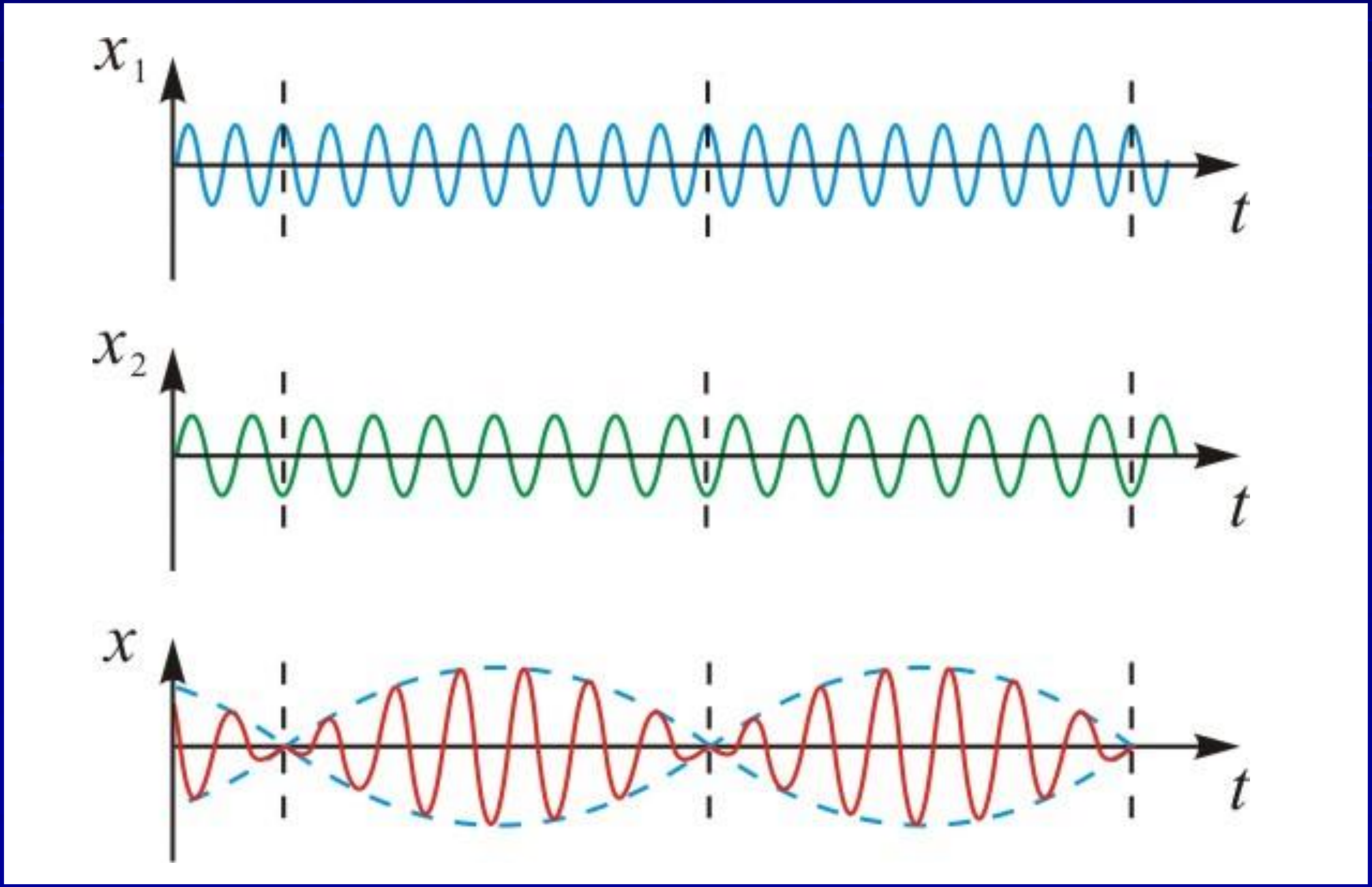
$$x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi) \qquad x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega_1 t+\varphi)+A\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$=2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

当 $\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$ 时

$$x = 2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi\right)$$

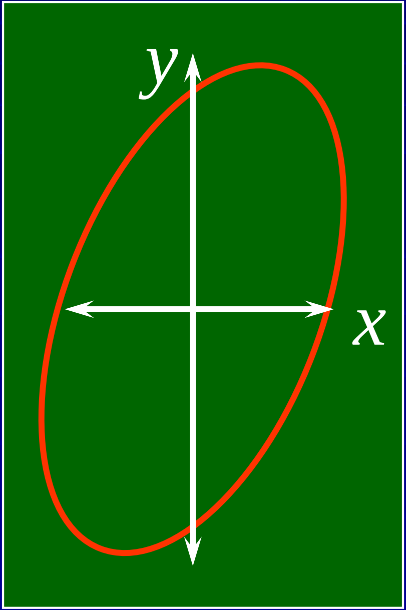


3. 相互垂直的简谐运动的合成

- 两个同频率相互垂直简谐运动的合成

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 = \cos(\omega t + \varphi_2)$$



$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

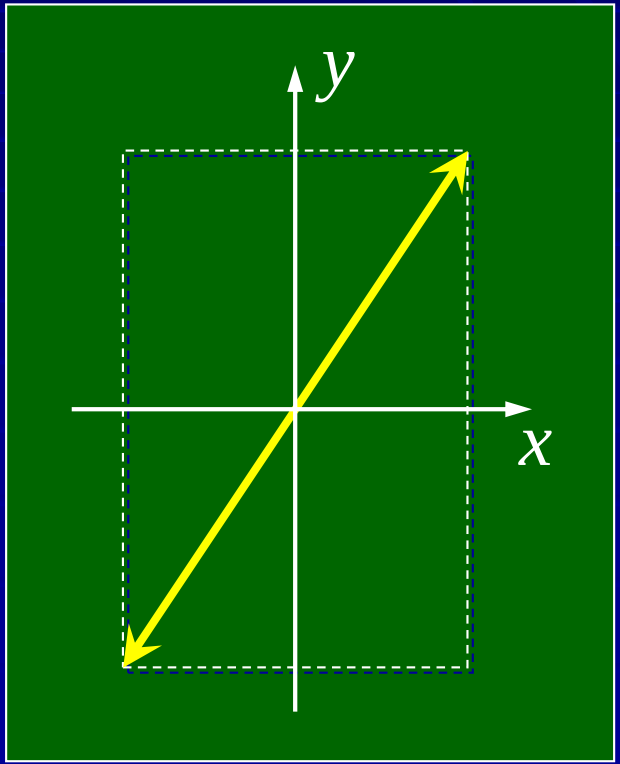
结论：两相互垂直同频率简谐运动的合成其振动轨迹为一椭圆（又称“椭圆振动”）。椭圆轨迹的形状取决于振幅和相位差。

讨论： $\varphi_2-\varphi_1=0$（或 $2k\pi$）时

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

$$\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

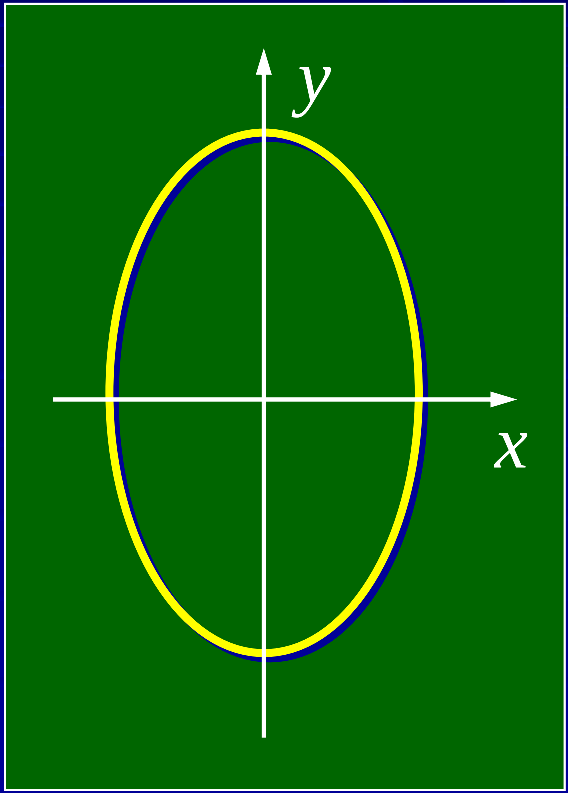
$$y=\frac{A_2}{A_1}x \quad 斜率\ \frac{A_2}{A_1}>0$$



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

当： $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}\left[\text{或}\,(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$



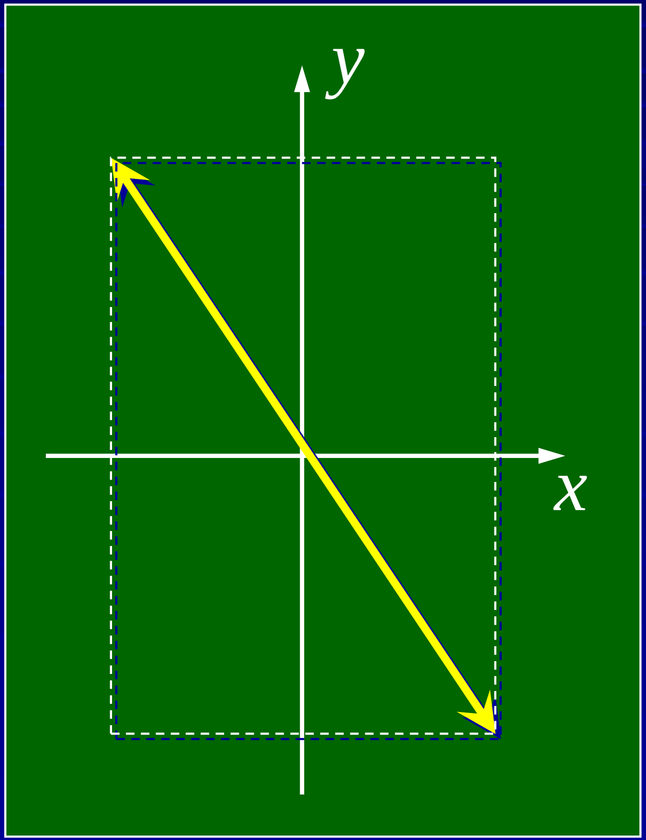
结论： 质点振动轨迹为正椭圆

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

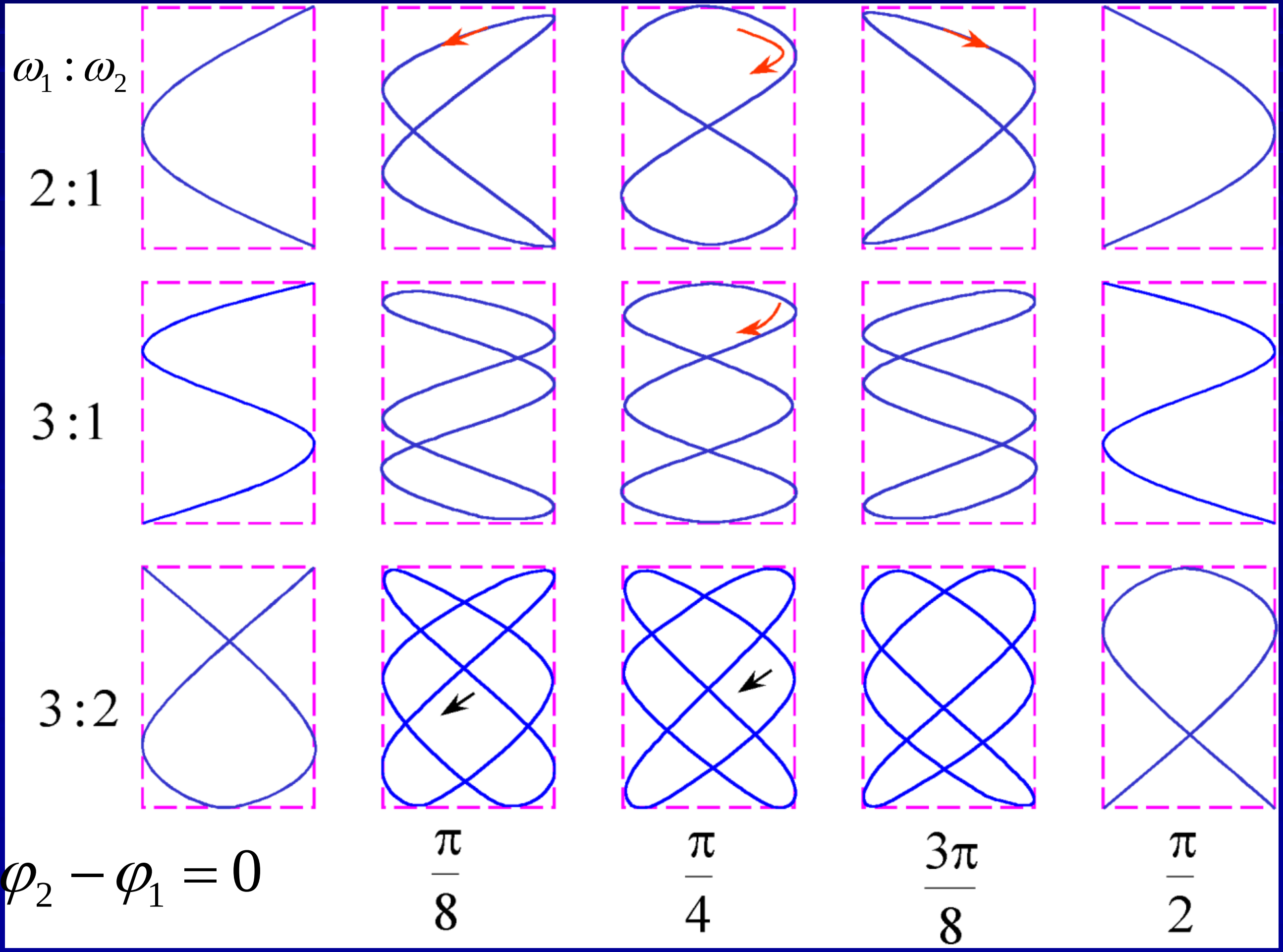
$$\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$



$y=-\dfrac{A_2}{A_1}x$ ，斜率：$-\dfrac{A_2}{A_1}>0$

结论：质点做线振动

李萨如图形

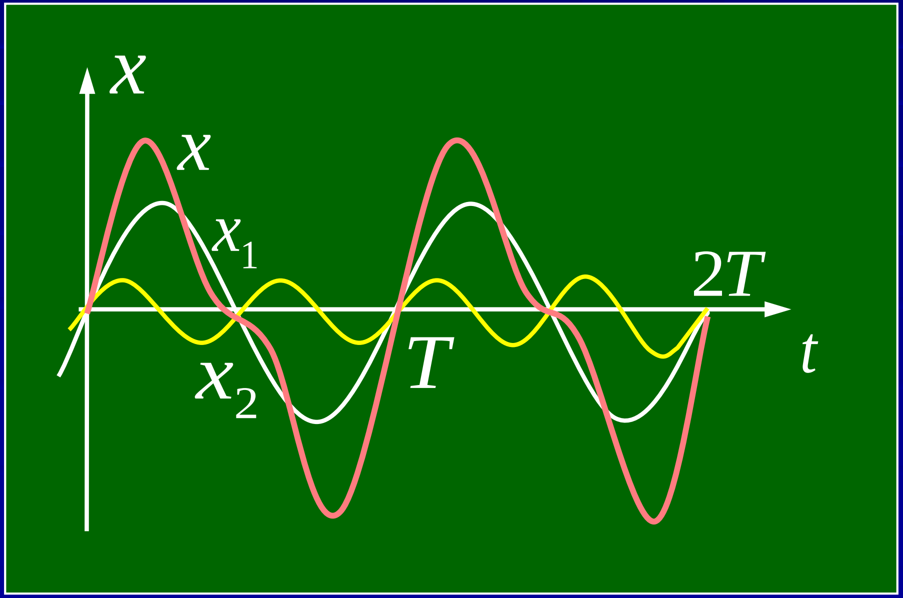


$\omega_1 : \omega_2$
2 : 1
3 : 1
3 : 2
$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{\pi}{2}$

4-2-2　简谐运动的分解

两个频率比为**1:2**的简谐运动的合成

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos\omega t + A_2\cos 2\omega t$$



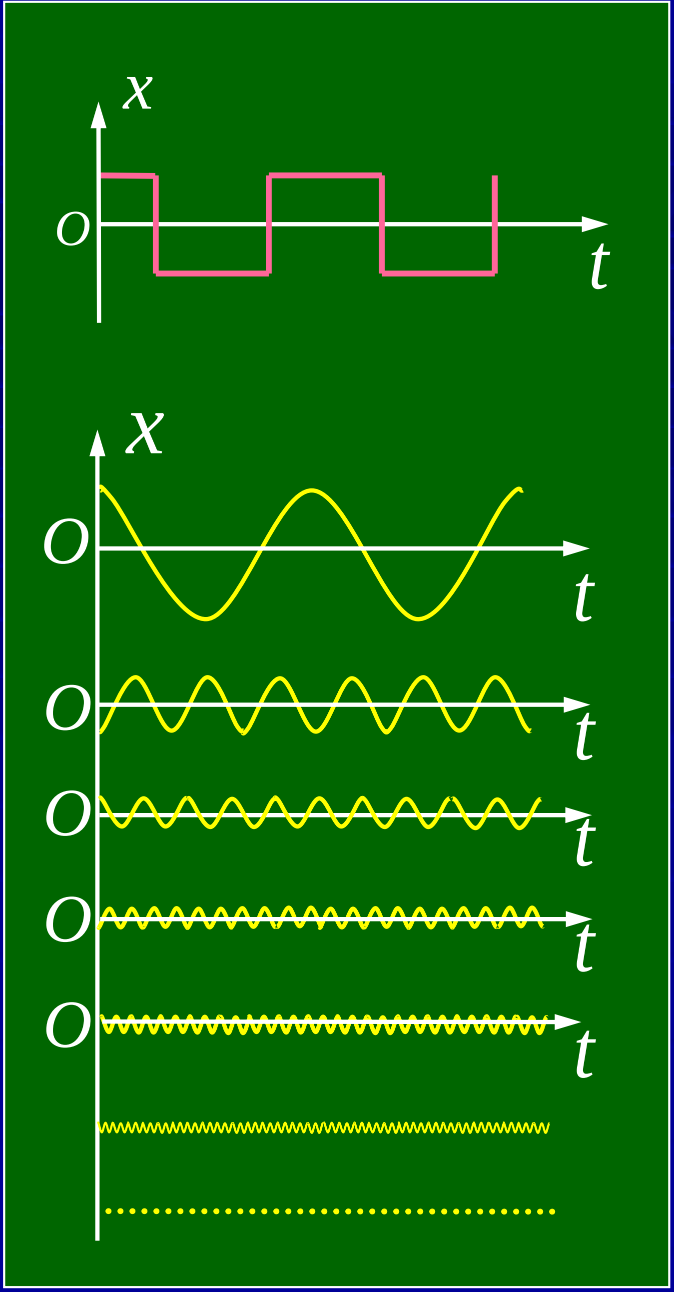
如果将一系列角频率是某个基本角频率 ω（亦称主频）的整数倍的简谐运动叠加，则其合振动仍然是以 ω 为角频率的周期性振动，但一般不再是简谐运动。

一个以ω为频率的周期性函数 $f(t)$，可以用傅里叶级数的余弦项表示为：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$$

ω：主频

$n\omega$：n 次谐频



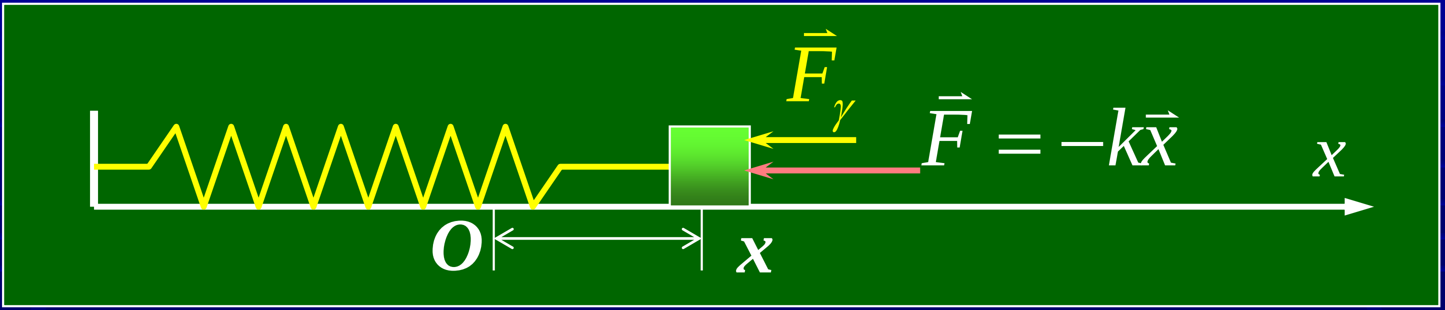
§4-3 阻尼振动、受迫振动和共振

4-3-1 阻尼振动

阻尼振动：振动系统在恢复力和阻力作用下发生的减幅振动。

$$F_\gamma = -\gamma v = -\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

γ ：阻尼系数



动力学方程 $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

令 $$\omega_0^2=\frac{k}{m},2\beta=\frac{\gamma}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

ω_0 ：无阻尼时振子的固有频率

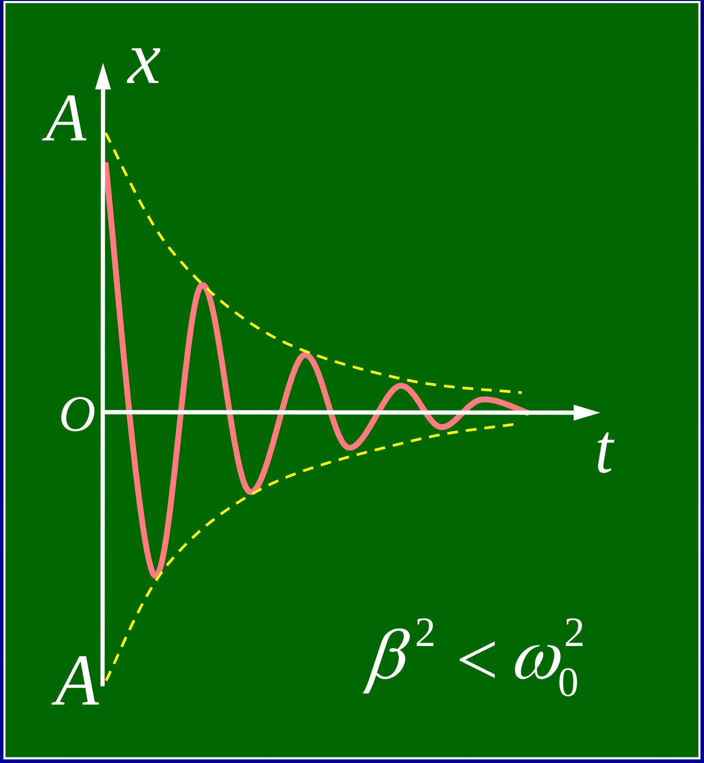
β ：阻尼因子

方程解： $x = Ae^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi\right)$

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

周期： $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

角频率： $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$



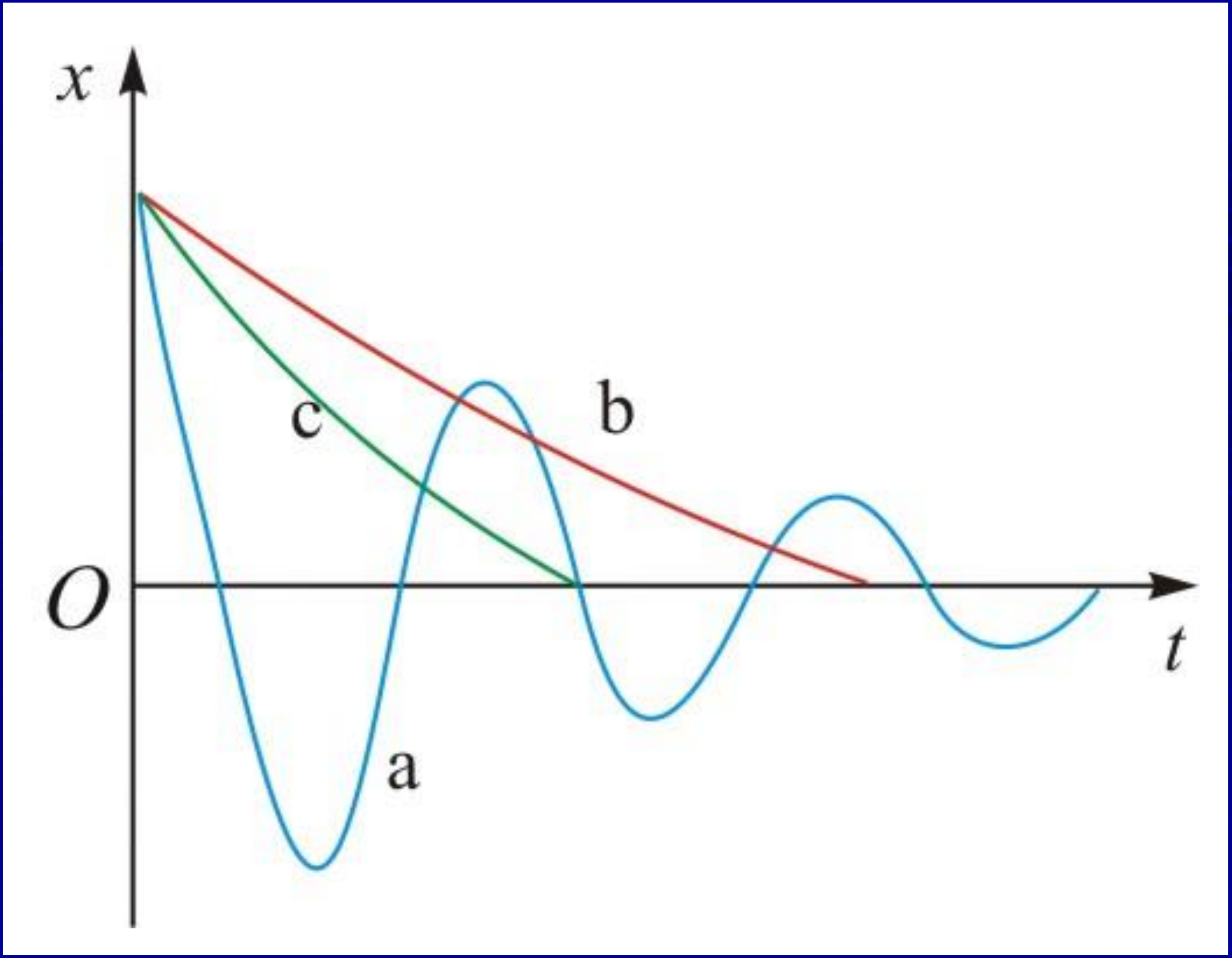
$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi\right)$$

讨论：

1. 阻尼较小时（$\beta^2 < \omega_0^2$），振动为减幅振动，振幅 $A\mathrm{e}^{-\beta t}$ 随时间按指数规律迅速减少。阻尼越大，减幅越迅速。振动周期大于自由振动周期。

2. 阻尼较大时（$\beta^2 > \omega_0^2$），振动从最大位移缓慢回到平衡位置，不作往复运动。

3. 当（$\beta^2 = \omega_0^2$）时，为“临界阻尼”情况。是质点不做往复运动的一个极限。



a： 小阻尼　**b：** 过阻尼　**c：** 临界阻尼

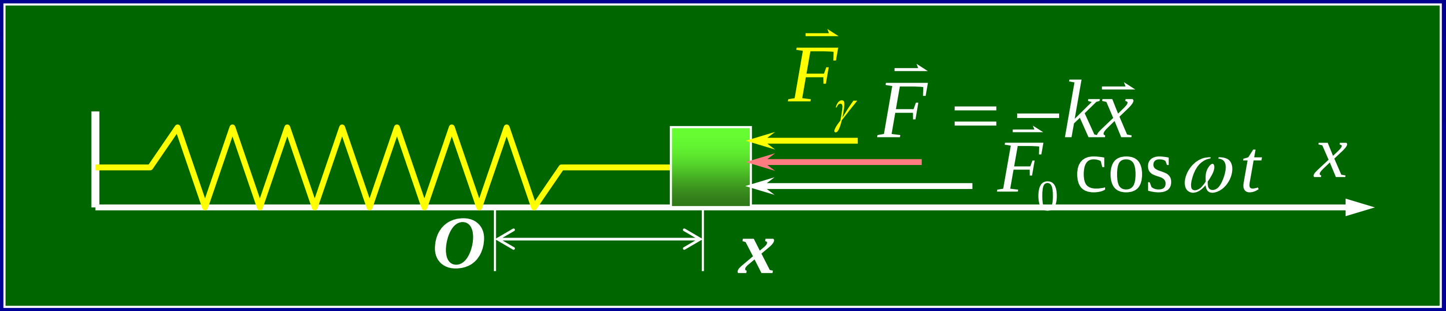
4-3-2 受迫振动和共振

1. 受迫振动

受迫振动： 系统在周期性的驱动力持续作用下所发生的振动。

驱动力： 周期性的外力

设： $F = F_0 \cos \omega t$



由牛顿第二定律 $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_0\cos\omega t$$

令 $$\omega_0^2=\frac{k}{m},\ 2\beta=\frac{\gamma}{m},\ f_0=\frac{F_0}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t$$

方程的解：

$$x=A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0\right)+A\cos(\omega t+\varphi)$$

稳定后的振动表达式： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

结论：受迫振动的频率与驱动力的频率相等。

受迫振动的振幅：
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

受迫振动的初相位：
$$\varphi = \arctan\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

结论：稳态响应的振幅与外力幅值成正比。

2. 共振

共振：当驱动力的频率为某一特定值时，受迫振动的振幅将达到极大值的现象。

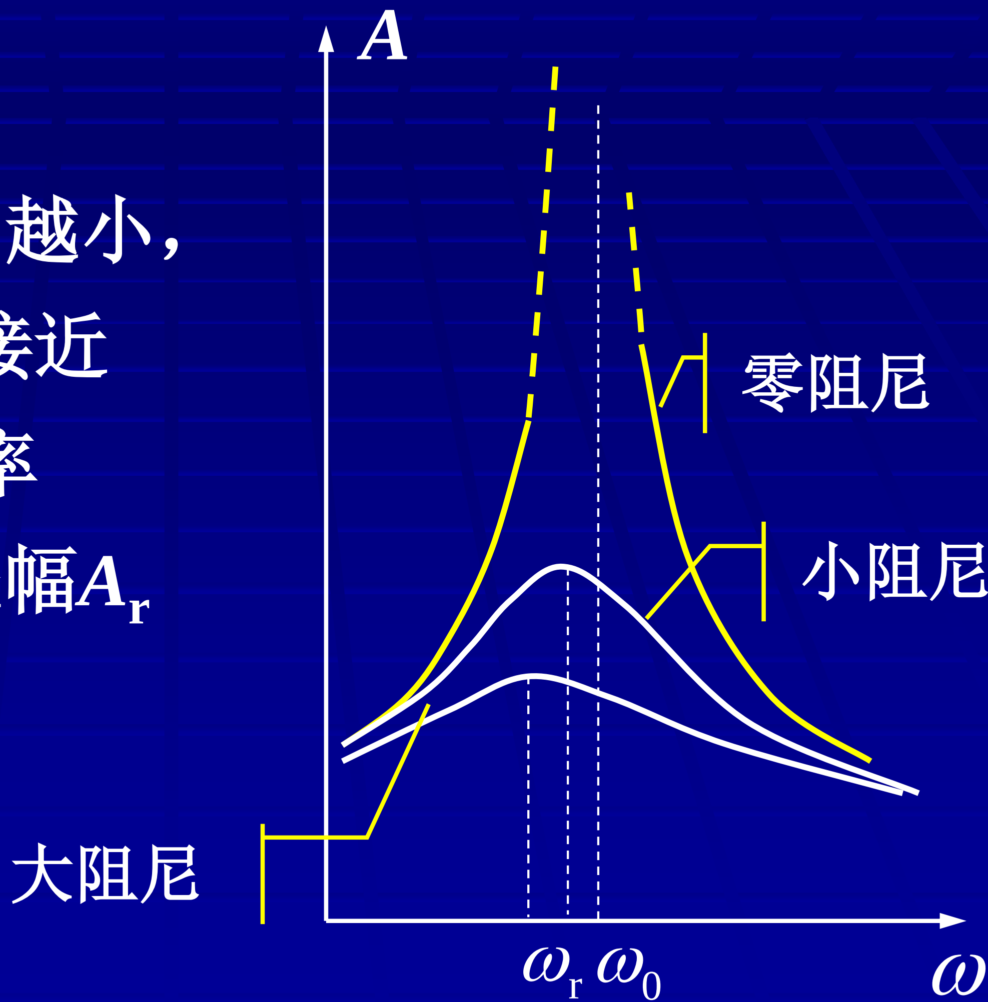
求极值： $$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\right)=0$$

共振频率： $$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$ ω_0为固有频率

共振振幅： $$A_r=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

结论：

阻尼系数 β 越小，共振角频率ω_r越接近于系统的固有频率ω_0，同时共振振幅A_r也越大。



受迫振动的速度： $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

速度幅： $v_{max}=\omega A=\dfrac{\omega f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$

$\omega=\omega_0$ 时，速度幅极大

在速度共振条件下稳态振动的初相位为 $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

$$v=\omega A\cos\omega t$$

结论：速度和驱动力有相同的相位。即策动力对振动系统始终做正功。

速度共振又称能量共振！


1940年，Tacoma Narrows大桥在通车4个月零6天后因大风引起扭转振动，又因振动频率接近于大桥的共振频率而突然坍塌。

例7　一物体悬挂在弹簧下做阻尼振动。开始时其振幅为120 mm，经过2.4分钟后，振幅减为60 mm。问：（1）如振幅减至30 mm时需要经历多长时间；（2）阻尼系数为多少？

解：　阻尼振动方程　$x = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \mathrm{e}^{\beta t} = \frac{A_0}{A}$$

$$\beta = \frac{\ln(A_0/A)}{t} = \frac{\ln(120/60)}{2.4\times 60} = 4.81\times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

取两不同的时刻 t_1和 t_2 $\beta=\frac{\ln(A_0/A_1)}{t_1}=\frac{\ln(A_0/A_2)}{t_2}$

$$t_2=\frac{\ln(A_0/A_2)}{\ln(A_0/A_1)}t_1=\frac{\ln(120/30)}{\ln(120/60)}\times 2.4\times 60\ \mathrm{s}=288\ \mathrm{s}$$

$A_o \rightarrow A_2$ $t_2=288\ \mathrm{s}$

$A_o \rightarrow A_1$ $t_1=2.4\times 60\ \mathrm{s}=144\ \mathrm{s}$

$$\Delta t=t_2-t_1=144\ \mathrm{s}$$

§4-4　非线性振动 混沌

4-4-1　非线性振动

设一个质点和一个理想弹簧构成一个振动系统

弹性力：$F_{\mathrm{s}}(x)$　阻力：$F_{\mathrm{f}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)$　驱动力：$F_{\mathrm{p}}(t)$

系统的运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+F_{\mathrm{s}}(x)+F_{\mathrm{f}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=F_{\mathrm{p}}(t)$$

令 $$f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},t\right)=\frac{F_{\mathrm{s}}(x)}{m}+\frac{F_{\mathrm{f}}}{m}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{F_{\mathrm{p}}(t)}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},t\right)=0$$

二阶线性微分方程:

$f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},t\right)$ 是一个关于 $x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的一次幂函数

二阶非线性微分方程:

$f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},t\right)$ 是一个关于 $x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的二次或高次幂函数

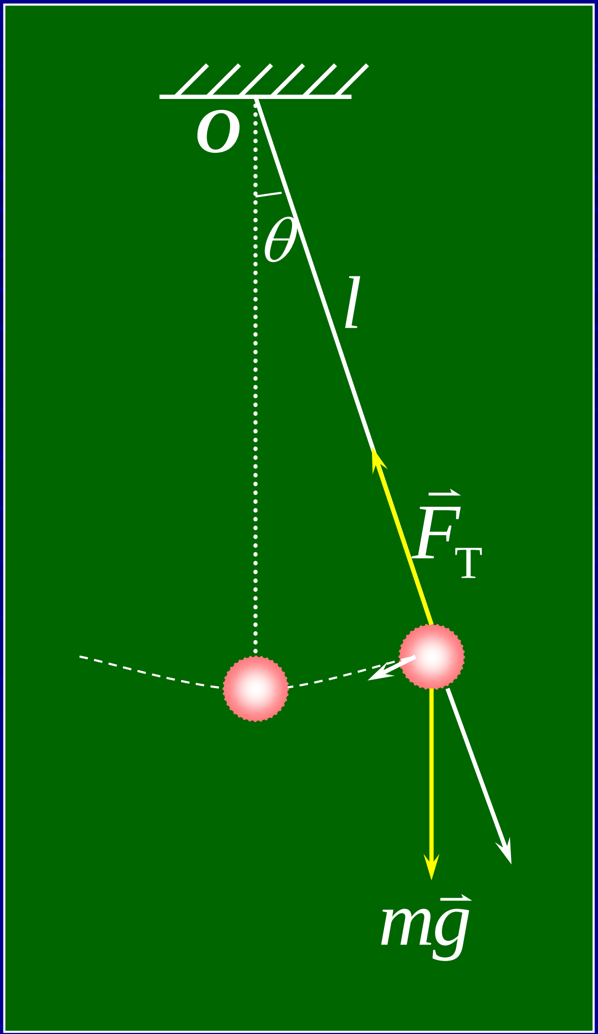
单摆

$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\because \quad s = l\theta$$

$$-mg\sin\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$



$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

θ很小，（< 5°） $\therefore \sin\theta \approx \theta$

得线性方程： $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$ 简谐运动

若θ不是很小，则 $\sin\theta$至少要保留至第二项。

得非线性方程： $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta - \frac{g}{l}\frac{\theta^3}{3!} = 0$$

相图法：即运用一种几何的方法来讨论非线性问题。

相平面：

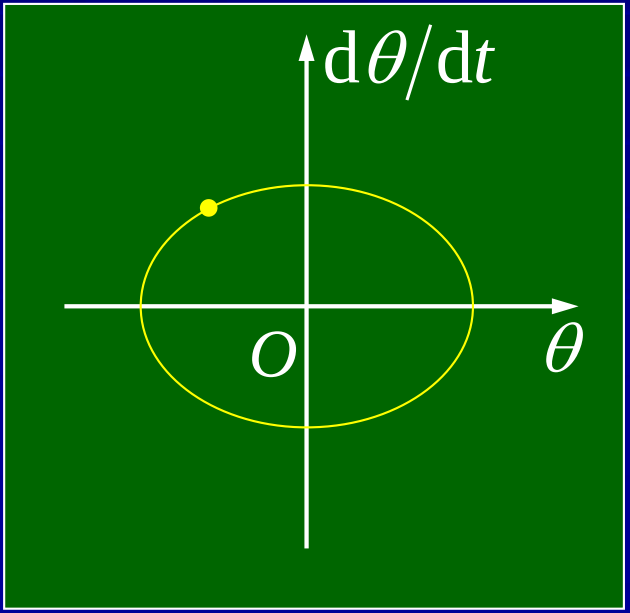
将质点的位置（或角位置）作为横坐标轴；

将质点的速度（或角速度）作为纵坐标轴。

相：某种运动状态

相点　：在相平面内表征运动状态的一个点。

相迹（相图）：　相点的运动轨迹（反映运动状态的变化）。



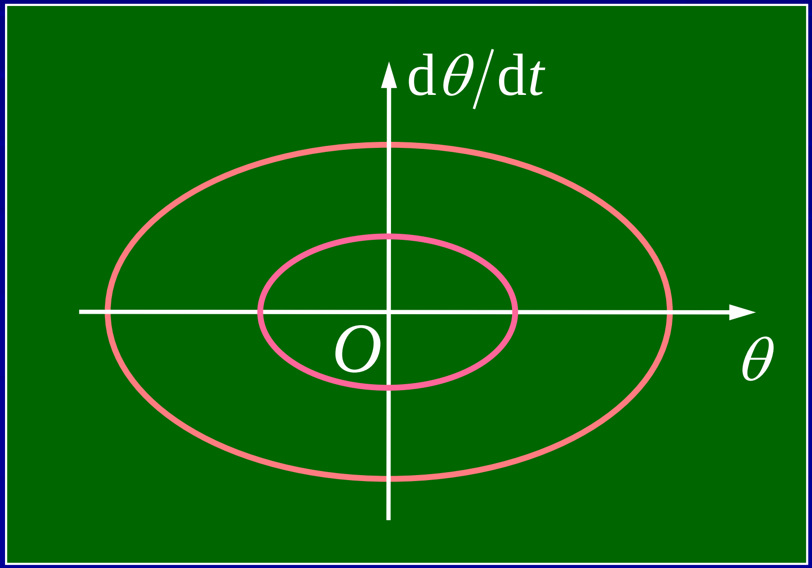
单摆做小角度摆动：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$

一次积分后

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\omega^2\theta^2=C$$

$$\frac{(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)^2}{C}+\frac{\theta^2}{C/\omega^2}=1$$



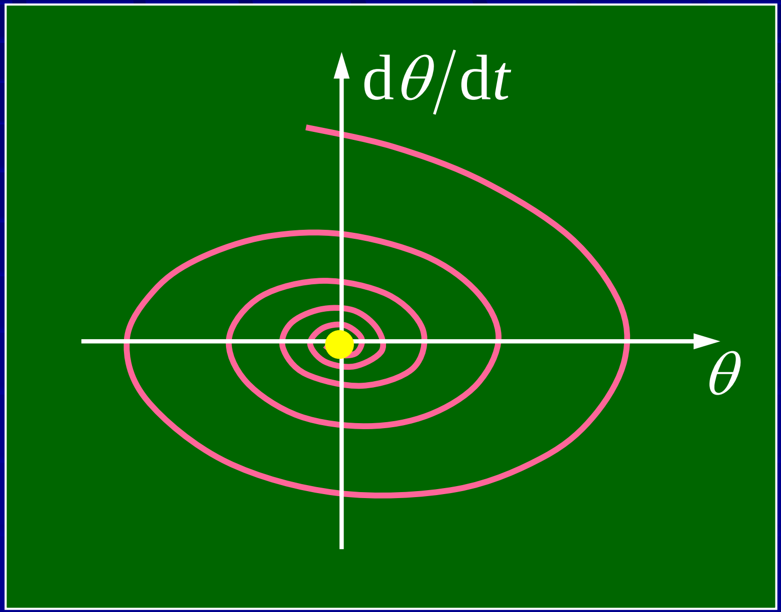
单摆作小角度摆动时，其相迹为一正椭圆。

封闭的相迹表示运动是周期性的往复运动。

小角度阻尼摆动：

相图：

一条向内旋进的螺旋线，曲线最终趋向中心点。

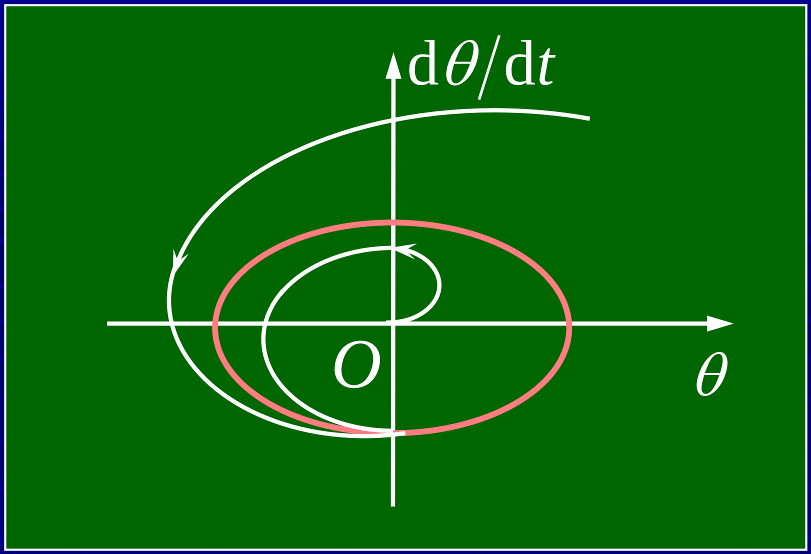


吸引子：对应着系统的稳定状态（中心点）。

小角度受迫摆动：

吸引子（极限环）：

对应着系统的稳定状态（椭圆）。

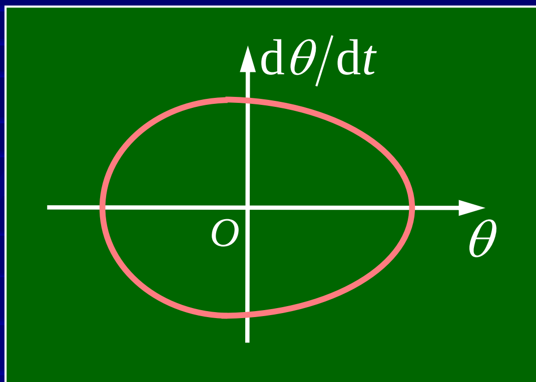


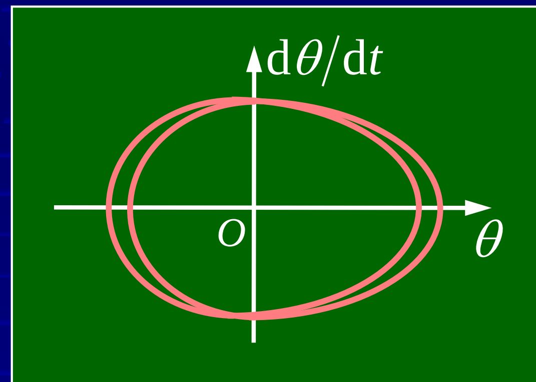
较大角度受迫摆动：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\sin\theta=f_0\cos\omega t$$

设：$\omega_0^2=1$　　$\beta=0.25$　　$\omega=2/3$

改变驱动力：





$f_0 = 1.065$

四周期振动

$f_0 = 1.01$

单周期振动

$f_0 = 1.055$

双周期振动

$f_0 = 1.093$

混沌

非线性动力学方程对初始条件特别敏感，初始条件略微改变，将导致系统最终的运动状态与原来的完全不同。出现了**混沌**运动 。

4-4-2 混沌

混沌：发生在确定性系统中的貌似随机的不规则运动。

混沌是非线性动力系统的固有特性，也是非线性系统普遍存在的现象。