作业：5-3：1(20)(22)(24)，2，7(2)(6)(9)(11)

5-4：1(2)

总五：4，9，10，15

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad 令\ \underline{x=\varphi(t)}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(-x)=f(x) \\ 0, & f(-x)=-f(x) \end{cases} \qquad 偶倍奇零.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx \cancel{\overset{t=\sqrt[3]{x^2}}{=\!=}} \int_1^1 \frac{1}{1+t}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx = 2\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}} \overset{t=\sqrt[3]{x}}{=\!=} 6\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

例14：设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，证明：

1). $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

2) $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx \qquad (n\in N)$

证明：1) 记 $\phi(t)=\int_t^{t+T} f(x)dx$

则 $\phi'(t) = f(t+T) - f(t) \equiv 0$

故 $\phi(t)\equiv C \quad (C为常数)$

从而 $\phi(a)=\phi(0)$，即 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

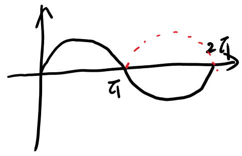
2) $\int_a^{a+nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx$

$\overset{1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^T f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$

$k=0 \quad {}_0 f(x)dx = n\int_0 f(x)dx$ □

例5：求 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx \qquad (n\in N^+)$

解：原式 $= n\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ （以π为周期）



$= n\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx$

$=\sqrt{2}n\int_0^{\pi}|\sin(\frac{\pi}{4}+x)|\,dx = \sqrt{2}n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,dt$

$=\sqrt{2}n\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt = \sqrt{2}n\int_0^{\pi}\sin t\,dt = 2\sqrt{2}n$

例6：求 $\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx$

解：$x^2-3x+3 = (x-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$，令 $x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u \quad (|u|<\frac{\pi}{2})$

则 $(x^2-3x+3)^2 = (\frac{3}{4}\sec^2 u)^2 = \frac{9}{16}\sec^4 u$，$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\,du$

当 $x=0$ 时，$u=-\frac{\pi}{3}$；当 $x=3$ 时，$u=\frac{\pi}{3}$

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{3}{4}\tan^2 u+\frac{3\sqrt{3}}{2}\tan u+\frac{9}{4})\frac{16}{9}\cos^4 u\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\,du$

$=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{3}{4}\tan^2 u+\frac{3\sqrt{3}}{2}\tan u+\frac{9}{4})\cos^2 u\,du$

$=\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\frac{3}{4}\tan^2 u+\frac{9}{4})\cos^2 u\,du$ （偶倍奇零）

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin^2 u+3\cos^2 u)\,du$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2+\cos 2u)\,du = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}+1$

例7：设 f 为连续函数，求 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x+t)\,dt$

解：$\int_0^x f(x+t)\,dt \xlongequal{u=x+t} \int_x^{2x} f(u)\,du$

解：$\int_0^x f(x+t)dt \xlongequal{u=x+t} \int_x^{2x} f(u)du$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x+t)dt = \frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(u)du = 2f(2x) - f(x)$$

二. 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[\int u(x)v'(x)dx\right]_a^b$$

$$= \left[u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\right]_a^b$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

即 $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

法则：反对幂指三，前者为 $u(x)$，后者为 $v'(x)$.

例8：求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\, dx$

解：$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - 0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例9：设 $f\in C^2[0,1]$，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$.

求 $\int_0^1 x f''(2x)dx$

解：$\int_0^1 xf''(2x)dx = \frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}(f(2)-f(0)) = 2$$

例10：设 $f\in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$.

试证：$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$

证：$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$

$= (x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b (2x-a-b)f'(x)dx$

$= 0 - 0 - (2x-a-b)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b 2\cdot f(x)dx$

$= 2\int_a^b f(x)dx$ $\square$

---

§4 反常积分

引言：反常积分 —— 积分区间为无穷区间

或被积函数为无界函数

一. 无穷限的反常积分

定义1：设 $f\in C[a,+\infty)$，取 $b>a$. 若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

存在. 则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限反常积分.

记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

这时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；如果上述极限不存在. 就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

类似地，若 $f\in C(-\infty,b]$，则定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

若 $f\in C(-\infty,+\infty)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x) + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

这里只要有一个极限不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散

· 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)\ ;\quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

由 N-L 公式，有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

$$= F(0) - F(-\infty) + F(+\infty) - F(0) = F(+\infty) - F(-\infty)$$

例1：求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

注意：对于反常积分，只有在收敛的前提下，才能使用"偶倍奇零"！

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \cancel{0} \quad (偶倍奇零)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty \quad 发散$$

例2：求 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \quad (p>0)$

解：$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}te^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{p}\cdot(-\frac{1}{p})e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

例3：证明 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

证：当 $p=1$ 时

$$\int^{+\infty}\frac{dx}{\ } = \ln|x|\Big|^{+\infty} = +\infty \quad 发散$$

当 $p\neq 1$ 时：

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1 \quad 发散\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \quad 收敛\end{cases}$$ □

二. 无界函数的反常积分.

$\frac{1}{x}$ $(0,1]$

$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

定义2：设 $f\in C(a,b]$，在点 a 的右邻域内无界.

取 $t>a$. 若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$ 存在.

则称此极限为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分