厦门大学第十五届“景润杯”数学竞赛试卷

（非数学类，2018. 6. 3）

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，总计 30 分）

1．$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}})=$____________________.

2．$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 [\frac{\mathrm{e}^{y^2}}{y}-\mathrm{e}^{x^2}]\mathrm{d}y=$__________________.

3．$\int \frac{1+x^2\sin x}{(1+x\cos x)^2}\mathrm{d}x=$____________________.

4. $\dfrac{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}}=$________________________.

5．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=$____________________.

6．$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+\mathrm{e}^2}\mathrm{d}x=$____________________.

7. 函数 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的幂级数展开式为__________________________.

8.设 $f(x)$ 的二阶导数存在，且 $f'(x)=f(\pi-x)$， $f(0)=1$，则 $f(x)=$__________________.

9. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2\}$， $\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$_____________________.

10. $\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y=$______________________.

二、（本题 6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\int_0^1(1+\sin\frac{\pi}{2}t)^n\mathrm{d}t]^{\frac{1}{n}}$.

三、（本题 6 分）设 $a>0$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$ 的敛散性.

四、（本题 6 分）计算定积分 $I=\int_0^1\arctan x\cdot\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

五、（本题 6 分）设曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，求 $\int_{\Gamma}xy\mathrm{d}s$.

六、（本题 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

七、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，证明：

$$\iint\limits_D yf(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $D=[a,b]\times[a,b]$，并由此证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

八、(本题 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f(tu,tv)=t^2 f(u,v)$，$f(1,2)=0$，$f_u'(1,2)=3$，求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x[1+f(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}\mathrm{d}t$.

九、（本题 10 分）已知两条异面直线为 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x=z-2\\ y=1\end{cases}$，求与此二直线相切的最小球面方程.

十、(本题 10 分)设 $f(x)$ 是对全体实数有定义的函数，满足方程 $2f(x+1)=f(x)+f(2x)$. 证明：如果 $f(x)$ 是二次连续可微函数，则 $f(x)$ 必是一个常数.