第一讲 例题及习题答案

目录

一、例题

例 1

设连续函数$f(x)$满足方程：$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$, 求$f(x)$的表达式.

解：记 $L(x)=f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$，分别取 x 为 $\frac{x}{2},\frac{x}{2^2},\dots\frac{x}{2^n}$ 可得：

$$L(\frac{x}{2})=f(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2^2})=\frac{x^2}{2^2},\dots\dots,L(\frac{x}{2^n})=f(\frac{x}{2^n})-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2^n})=\frac{x^2}{2^{2n}},$$

将这些式子相加得：

$$L(x)+\frac{1}{2}L(\frac{x}{2})+\frac{1}{2^2}L(\frac{x}{2^2})+\dots+\frac{1}{2^n}L(\frac{x}{2^n})=f(x)-\frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}})=x^2+\frac{x^2}{2^3}+\dots+\frac{x^2}{2^{3n}}$$

在上式中取 n 趋于无穷大，利用 $f(x)$ 在 0 点的连续性，即有：

$$f(x)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\lim_{n\to\infty}f(\frac{x}{2^{n+1}})=\frac{8}{7}x^2\Rightarrow f(x)=\frac{8}{7}x^2.$$

例 2

函数$f(x)$满足：$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，$f'(0)$存在，求$f(x)$.

解：取 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$，考虑导数：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)(1+f^2(x))}{\Delta x(1-f(x)f(\Delta x))}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+f^2(x))}{(1-f(x)f(\Delta x))}=f'(0)(1+f^2(x))$$

从而有：$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)\Rightarrow \arctan f(x)=f'(0)x\Rightarrow f(x)=\tan(f'(0)x)$.

例 3

设$F(x)$是奇函数，$f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$, $a>0, a\neq 1$, 证明：$f(x)$是偶函数.

解：直接验证 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$ 为奇函数即可.

例 4

设对$\forall x\in R$, 有$f(\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, 证明：$f(x)$是周期函数.

解：$f(1+x)=f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(\frac{1}{2}+x)-f^2(\frac{1}{2}+x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^2}-\left(f(\frac{1}{2}+x)-\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^2}-\left(f(\frac{1}{2}+x)-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^2}-f(x)+f^2(x)}=f(x)$$

注意到上述推导过程中用到了：$\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$，这个可从表达式看出。

例 5

已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n}=a.$

解：1）先证 $a=0$ 情形，用定义证明.

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可知 $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时有：$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

而又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2\cdots+a_{N_1}}{n}=0$，所以 $\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时有：$\left|\dfrac{a_1+a_2\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综上，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时有：

$$\left|\frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n}\right|<\left|\frac{a_1+a_2\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

由定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n}=0.$

2）一般情形下

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以有：$a_n=a+\alpha_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，因此由上面的结论：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n}=a+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_n}{n}=a.$$

例 6

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b,$ 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_1+\cdots+a_1b_n}{n}=ab.$

解：设 $a_n=a+\alpha_n$，$b_n=b+\beta_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，代入得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_1+\cdots+a_1b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nab+a(\beta_1+...+\beta_n)+b(\alpha_1+...+\alpha_n)+\alpha_n\beta_1+\cdots+\alpha_1\beta_n}{n}$$

$=ab+0+0+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n\beta_1+\cdots+\alpha_1\beta_n}{n}$，这里用了前一题的结论。而对最后一个极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 可知 α_n 有界，因此有：$\left|\dfrac{\alpha_n\beta_1+\cdots+\alpha_1\beta_n}{n}\right|\le M\dfrac{|\beta_1|+\cdots+|\beta_n|}{n}$，再使用前一题的结论得：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\beta_1|+\cdots+|\beta_n|}{n}=0$，从而由夹逼定理得：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n\beta_1+\cdots+\alpha_1\beta_n}{n}=0$。

例 7

设 a 为常数，数列 $\{x_n\}$ 有递推公式：$x_{n+1}=x_n{}^2+(1-2a)x_n+a^2$，问初值 x_1 取何值时数列收敛？并求数列极限。

解：递推公式可写为 $x_{n+1}=x_n+(x_n-a)^2$，因此数列单调增加，若数列收敛则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

也即对任意 n 应该有：$x_n+(x_n-a)^2\le a\Rightarrow(x_n-a)\cdot(x_n-a+1)\le 0\Rightarrow a-1\le x_n\le a$，

最后可验证当 $a-1\le x_1\le a$ 时数列单调有界收敛到 a.

例 8

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)$存在.

解：设 $s(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$，下面证明 $s(n)$ 单调有界，注意到不等式：

$$\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx\Rightarrow\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1),$$

可知 $s(n)-s(n-1)=\frac{1}{n}-\left[\ln n-\ln(n-1)\right]<0$，也即 $s(n)$ 单调递减，又由：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}>\sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)>\ln n$$

知 $s(n)$ 有界，命题得证。

例 9

已知$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1(n>2\in N)$，证明$f_n(x)=0$在$(0,+\infty)$有唯一解$x_n$，并求：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：可验证 $f_n(0)\cdot f_n(1)<0$，而且 $f_n'(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于零，因此 $f_n(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一解 x_n. 由 $f_n(x_n)=0$，$f_{n+1}(x_{n+1})=0$ 比较可知 $x_{n+1}<x_n$，由单调有界可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_n^{\ n+1}}{1-x_n}-1=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

例 10

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}.$$

解：当 $2\le k\le n-1$ 时，$(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}=(n+1-k)\dfrac{k!}{n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}\le\dfrac{2}{n^2}$，

所以 $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}\le\dfrac{2(n-2)}{n^2}+\dfrac{2}{n}$，由夹逼准则得：$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}=0.$

例 11

已知 $a_1+\cdots+a_k=0.$ 求 $\lim_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_k\sqrt{n+k}\right).$

解：不妨设 $a_1,a_2,...,a_i>0,\ a_{i+1},...,a_k\le 0$，显然 $a_1+a_2+...+a_i=-(a_{i+1}+...+a_k)$，

$$\left(a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_k\sqrt{n+k}\right)\le(a_1+...+a_i)\sqrt{n+k}+(a_{i+1}+...+a_k)\sqrt{n+1}=(a_1+...+a_i)(\sqrt{n+k}-\sqrt{n+1})$$

同理: $(a_1+...+a_i)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+k})\le\left(a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_k\sqrt{n+k}\right)$，由夹逼定理可得原式=0.

例 12

求：$\lim_{x\to0^+}\left[\ln\left(x\ln a\right)\ln\left(\dfrac{\ln(xa)}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$

解：原式$=\lim_{x\to0^+}[\ln x+\ln\ln a]\left[\ln\left(\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}\right)\right]=\lim_{x\to0^+}[\ln x+\ln\ln a]\left[\ln\left(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to0^+}[\ln x+\ln\ln a]\left[\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right]=2\ln a.$$

例 13

若$f(0)=0$，且$f'(0)$存在，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{1-\cos x\cdot\sqrt{cos2x}}$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{cos2x})}$$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{\cos x(1-\sqrt{cos2x})}{1-\cos x}}$$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{\cos x\cdot(1-\cos 2x)}{(1-\cos x)(1+\sqrt{cos2x})}}$$

$$=f'(0)\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot 2x^2}{\frac{1}{2}x^2(1+\sqrt{cos2x})}}=\frac{1}{3}f'(0)$$

例 14

设函数$f(x)$在$x=a$处可导，$f(a)\neq 0$，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

解：原式$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{(\ln f(x))'|_{x=a}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

例 15

求：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$.

解：$e=1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+o(\dfrac{1}{(n+1)!})$，代入上式得：

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin 2\pi n!e\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sin\left[2\pi n!(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o(\frac{1}{(n+1)!}))\right]\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sin\left[2\pi\frac{1}{(n+1)}+o(\frac{1}{(n+1)})\right]\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(2\pi\frac{1}{(n+1)}+o(\frac{1}{(n+1)})\right)=2\pi$$

例 16

已知 $f(x)$在$[0,+\infty)$上有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)>0$，若$g(x)$是曲线 $y=f(x)$过切点$(x,f(x))$的切线在x轴上的截距，求：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{xf[g(x)]}{f(x)g(x)}$.

解：过点$(x,f(x))$的切线为：$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，得截距为：$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$，

由泰勒公式得：$f(x)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),\ f'(x)=f''(0)x+o(x)$，代入$g(x)$的表达式得：

$g(x)=x-\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)}=\frac{1}{2}x+o(x)$，于是有：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{xf[g(x)]}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{xf[\frac{1}{2}x+o(x)]}{f(x)(\frac{1}{2}x+o(x))}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{4}x^2+o(x^3)}{(\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2))(\frac{1}{2}x+o(x))}=\frac{1}{2}$$

例 17

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{\sin\pi}{n+1}\right)$.

解：

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\dots+\frac{\sin\pi}{n+1}<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{\sin\pi}{n+1}<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\dots+\frac{\sin\pi}{n}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\ldots+\frac{\sin\pi}{n+1}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\ldots+\frac{\sin\pi}{n}\right]$

由定积分的定义和夹逼准则: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{\sin\pi}{n+1}\right)=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{1}{\pi}$.

例 18

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!}$.

解: 注意到: $\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o(\left(\frac{1}{n}\right)^3)\right]^{\frac{1}{3}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\frac{1}{n}$, 原式可写为:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{2}{n}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{\int_0^1\ln x dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}e^{-1}$$

例 19

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n+k})\sin\ln(1+\frac{k}{n})$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n+k})\sin\ln(1+\frac{k}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left[\frac{1+\frac{k+1}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right]\sin\ln(1+\frac{k}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln\left[1+\frac{k+1}{n}\right]-\ln\left[1+\frac{k}{n}\right]\right]\sin\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^{\ln 2}\sin x dx=1-\cos\ln 2$$

例 20

求:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right)$.

解：因为 $\sin\frac{k}{n^2}=\frac{k}{n^2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3+o(\frac{k^3}{n^6})$，所以有：

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}(1+n)n}{n^2}+o(\frac{1}{n})\right)=\frac{1}{2}$$

例 21

求：$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$.

解：

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan'(\xi)(\tan x-\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)}{\left(x-\ln(1+x)\right)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)\cdot 2}{\left(x-\ln(1+x)\right)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^2x}=2$$

例 22

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(n^3+1)}$.

解：利用 $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)[(k+1)^2-(k+1)+1]}{(k+1)(k^2-k+1)}$，错项相消得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(n^3+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\left[(n+1)^2-(n+1)+1\right]}{n(n+1)\cdot 3}=\frac{2}{3}.$$

Stolz 定理的证明

($\frac{*}{\infty}$ 型) 设 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量，且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\ (a\in[-\infty,+\infty])$，

则有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a.$

证明: 只证明a为有限数时的情形.

对$\forall\varepsilon>0$, 由$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$可知存在$N_1$, 当$n>N_1$时$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right|<\varepsilon$, 即:

$$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\varepsilon \Rightarrow (a-\varepsilon)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<(a+\varepsilon)(y_n-y_{n-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_n-x_{n-1}+\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)+\ldots+\left(x_{N_1+1}-x_{N_1}\right)+x_{N_1}}{y_n}$$

$$\le\frac{x_{N_1}}{y_n}+\frac{(a+\varepsilon)\left[\left(y_n-y_{n-1}\right)+\ldots+\left(y_{N_1+1}-y_{N_1}\right)\right]}{y_n}=\frac{x_{N_1}-(a+\varepsilon)y_{N_1}}{y_n}+(a+\varepsilon)$$

因为: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}-(a+\varepsilon)y_{N_1}}{y_n}=0$, 所以存在$N_2$, 当$n>N_2$时$\frac{x_{N_1}-(a+\varepsilon)y_{N_1}}{y_n}<\varepsilon$,

取$N=\max\{N_1,N_2\}$, 当$n>N$时, 就有$a-2\varepsilon<\frac{x_n}{y_n}<a+2\varepsilon$, 也即:

$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<2\varepsilon$, 由极限的定义可知: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=a.$

例 23

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ \ (a\neq0)$. 求:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

解: 由 Stolz 定理

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{a_n}}=a$.

例 24

求$:\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\ \ (k>-1)$

解：记 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$，$b_n=n^{k+1}$，则由 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n^k+n^{k-1}(n-1)+\ldots+n(n-1)^{k-1}+(n-1)^k)}=\frac{1}{k+1}.$$

例 25

求$:\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}dt}{x}.$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\cos\frac{2}{x}}{4\frac{1}{x^2}}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{2}{x}}{4}=\dfrac{1}{4}$。

例 26

已知$f(x)\in C[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+\int_a^x f(t)dt]=A$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt.$

解：注意到：$\left[e^x\int_a^x f(t)dt\right]'=e^x\int_a^x f(t)dt+e^x f(x)$，所以有：

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\int_a^x f(t)dt}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\int_a^x f(t)dt\right]=A,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

例 27

设$f(x)\in C[a,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，求证：$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

解：设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，显然存在 X ，当 $x>X$ 时有：$|f(x)-A|<1$，

又由闭区间上连续函数的性质，$f(x)$ 在 $[a,X]$ 上有：$|f(x)|\le M_1$，

综上，取 $M=\max\{M_1,|A-1|,|A+1|\}$，此时对 $\forall x\in[a,+\infty)$ 有：$|f(x)|\le M$ 。

例 28

已知$f(x)$在(a,b)内的每一点的左右极限都存在，且$f(\frac{x+y}{2})\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$，

求证：$f(x)$在(a,b)内连续

解：对 $\forall x\in(a,b)$，由极限的保号性：

$$\lim_{y\to x^+}f(\frac{x+y}{2})\le\lim_{y\to x^+}\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

也即有：

$$f(x+0)\le\frac{f(x)+f(x+0)}{2}\Rightarrow f(x+0)\le f(x)$$

同理可得：$f(x-0)\le f(x)$

另一方面：$f(x)=f(\frac{x+h+x-h}{2})\le\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$，两边取极限：

$$\lim_{h\to0^+}f(x)\le\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}\Rightarrow 2f(x)\le f(x+0)+f(x-0)$$

综上：$f(x)=f(x+0)=f(x-0)$

例 29

已知$\left|f(x)-f(y)\right|\le k\left|x-y\right|,\forall x,y\in R,0<k<1,$ 求证：(1)$f(x)$在R上连续；(2)$f(x)$有唯一不动点a;（3）若$x_{n+1}=f(x_n)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

解：1）对$\forall x_0\in R$，$0\le\left|f(x)-f(x_0)\right|\le k\left|x-x_0\right|$，两边取极限，由夹逼定理即得：

$\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)-f(x_0)\right|=0$，从而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

2）取$x_0=0$，考虑序列$x_{n+1}=f(x_n)$，我们有以下不等式成立：

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|\le k\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\ldots\le k^n\left|x_1-x_0\right|$$

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^n\left|x_1-x_0\right|$收敛，进一步有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$绝对收敛，因此：

极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-x_{k-1}\right)$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对$x_{n+1}=f(x_n)$两边取极限即得：

$a=f(a)$，a即为不动点。

唯一性：若另有b也为不动点，则有$\left|a-b\right|=\left|f(a)-f(b)\right|\le k\left|a-b\right|$，因 0 < k < 1，所以 b=a.

3）$\left|x_n-a\right|=\left|f(x_{n-1})-f(a)\right|\le k\left|x_{n-1}-a\right|\le\ldots\le k^n\left|x_0-a\right|$，对上式取极限得：

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-a\right|=0$，也即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

例 30

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$，证明：在(a,b)内至少存在一个ξ，使得$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$. 其中p,q为大于零的常数.

解：将结论写为：$\dfrac{p}{p+q}f(c)+\dfrac{q}{p+q}f(d)=f(\xi)$，并注意到左边是两个函数值的加权平均，其必介于函数在$[c,d]$上的最小值最大值之间。

例 31

已知$f(x)$在$[0,1]$内连续，$f(0)=f(1)$, 证明：对任意正整数n，存在$x_n\in[0,1]$,
$s.t.\ \ f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$.

解：令$\varphi(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$，显然它在$[0,\frac{n-1}{n}]$内连续，计算得：

$\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(\frac{k}{n}+\frac{1}{n})-f(\frac{k}{n})\right)=0$，若存在$\varphi(\frac{k}{n})=0$，则结论显然成立。若不存在

$\varphi(\frac{k}{n})=0$，则必能找到符号相异的两个$\varphi(\frac{k_1}{n}),\varphi(\frac{k_2}{n})$，由零点定理，结论也成立。

例 32

已知$f(x)$在$(0,1)$内连续，且存在两两互异的点$x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$, 使得：
$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta$, 证明：对$\forall\lambda\in(\alpha,\beta)$, 存在$x_5,x_6\in(0,1)$,
使得$\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

解：（单参数化）令$g(t)=\frac{f(x_1+t(x_3-x_1))-f(x_2+t(x_4-x_2))}{x_1+t(x_3-x_1)-(x_2+t(x_4-x_2))}$，不妨设

$x_1<x_2$，$x_3<x_4$，则有$g(t)$在区间$[0,1]$上连续，且$g(0)=\alpha$，$g(1)=\beta$，由介值定理立得结论。

解法二：考虑二元函数$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$，容易看出其在区域：$0<x<1,\ \ x<y<1$内连续，不妨设$x_1<x_2$，$x_3<x_4$（否则交换顺序），由介质定理立得结论。

二、习题

习题 1

已知$y=y(x)$满足$\lim\limits_{x\to+\infty}(y'+ky)=l,(k>0)$，求：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{kx}y(x)}{e^{kx}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{kx}(k\cdot y(x)+y'(x))}{ke^{kx}}=\dfrac{l}{k}$.

习题 2

已知$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导且导数单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)$.

解：由条件知：$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(a)=A-f(a)$，所以有：

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}f'(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^{2x}f'(t)dt-\int_a^x f'(t)dt\right)=0$$

不妨设$f'(x)$单调不减，则有：

$2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f'(t)dt\le xf'(x)\le\int_x^{2x}f'(t)dt$，由夹逼定理即得：$\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$

习题 3

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln(1+\dfrac{1}{n^2})+\ln(1+\dfrac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\dfrac{n}{n^2})\right)$.

解：因为 $\ln(1+\dfrac{k}{n^2})=\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{1}{2(1+\xi)^2}\left(\dfrac{k}{n^2}\right)^2=\dfrac{k}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2})\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}+\lim_{n\to\infty}n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

习题 4

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x].$$

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{1}{\xi}[\arctan(x+1)-\arctan x]$ $(\xi\in(\arctan x,\ \arctan(x+1)))$

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{1}{1+\eta^2}$ $(\eta\in(x,\ x+1))=\dfrac{2}{\pi}$.

习题 5

设$f(x)$在$x=0$处二阶可导，且$f'(0)=0,\ f''(0)=3$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^x-1)-f(x)}{x^3}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^x-1)-f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi)(e^x-1-x)}{x^3}$ $\quad(\xi\in(x,\ e^x-1))$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{x}$ $\quad(\xi\in(x,\ e^x-1))$

$=\dfrac{3}{2}$

习题 6

已知函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(x)f''(x)\ge0,\ \forall x\in[a,b]$，且在$[a,b]$的任意子区间上$f(x)$不恒为零．求证：$f(x)$在$[a,b]$上至多有一个零点.

解：用反证法，设$x_1,\ x_2$是$f(x)$的两个零点，因为不恒为零，所以 $f(x)$ 在开区间$(x_1,\ x_2)$内必有最值，不妨设在c处取得最大值，显然有：$f(c)>0,\ \ f'(c)=0$

由保号性知：存在 c 的某个邻域$(c-\delta,\ c+\delta)$在该邻域内 $f(x)>0$，且至少存在一点 d 使得 $f(d)<f(c)$，

由泰勒公式：$f(d)=f(c)+f''(\xi)(d-c)^2 \Rightarrow f''(\xi)<0\ \ (\xi\in(c,d))$

从而：$f(\xi)f''(\xi)<0$，与题设矛盾，所以 $f(x)$在$[a,b]$上至多有一个零点。

习题 7

设$f_n(x)=e^{\frac{x}{n+1}}$，正数列$\{u_n\}$满足：$\dfrac{n}{n+1}\int_0^{u_{n+1}} f_n(x)dx=u_n$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解：由条件知：$\dfrac{u_{n+1}}{n+1}=\ln(1+\dfrac{u_n}{n})$，设新数列$a_n=\dfrac{u_n}{n}$，也即有$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，容易证明该数列单调下降且大于零，因此极限存在，两边取极限即可得：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}(Stolz)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln(1+a_n)}{a_n-\ln(1+a_n)}=2(\text{注意到}a_n\text{是无穷小，由泰勒展开可得})$$