第三节　条件分布

- 离散型随机变量的条件分布
- 连续型随机变量的条件分布
- 课堂练习
- 小结 布置作业

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念．

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

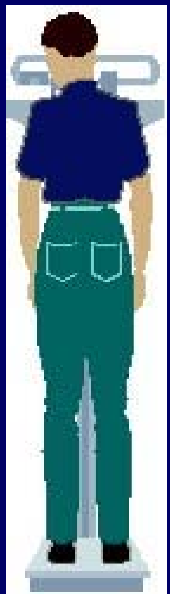
$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

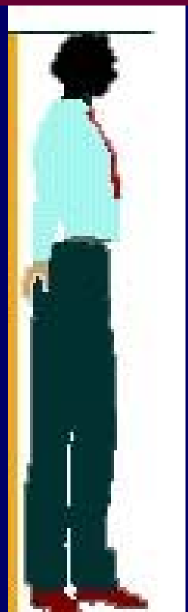
设有两个$r.v$ X,Y， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布.

这个分布就是条件分布.

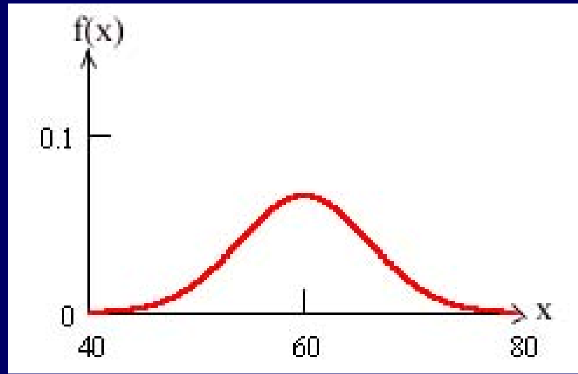
例如，考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以*X*和*Y*表示其体重和身高．则*X*和*Y*都是随机变量，它们都有一定的概率分布.



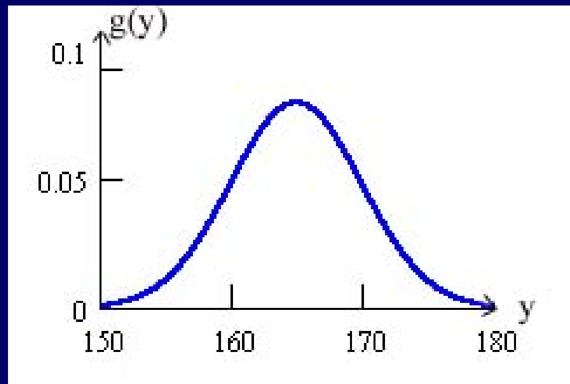
体重*X*



身高*Y*



体重*X*的分布



身高*Y*的分布

现在若限制 $1.7<Y<1.8$(米), 在这个条件下去求 X 的条件分布，这就意味着要从该校的学生中把身高在1.7米和1.8米之间的那些人都挑出来，然后在挑出的学生中求其体重的分布.

容易想象，这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样.

例如，在条件分布中体重取大值的概率会显著增加 .

一、离散型随机变量的条件分布

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j,

若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\quad , \quad i=1,2,\ldots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律**。

类似地，也可定义在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{X=x_i\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}\quad , \quad j=1,2,\ldots$$

条件分布是一种概率分布，具有概率分布的一切性质，如：

$$P\left\{X = x_i \middle| \ Y = y_j\right\} \geq 0 \qquad i = 1,2, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left\{X = x_i \middle| \ Y = y_j\right\} = 1$$

【例】从1,2,3,4中随机取一个数X，再从1,…,X中随机地取一个数Y，求X、Y的联合及边缘分布律.

解：首先确定X、Y的取值范围：X可能取1,2,3,4；Y可能的取值仍然是1,2,3,4，且Y≤X.

显然，有

$$P(X=i)=1/4,\quad i=1,2,3,4$$

$$P(Y=j \mid X=i)=1/i，当 j \le i$$

由乘法公式可得，X、Y的联合分布律为

$$P(X=i,Y=j) = P(X=i)\,P(Y=j \mid X=i) = \frac{1}{4i},\quad 1\le j\le i\le 4$$

X \ Y	1	2	3	4	$P(X=i)$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$P(Y=j)$	25/48	13/48	7/48	1/16	

显然，对每个给定的i，在 $X=i$ 条件下，Y 的条件分布律为 $P(Y=j \mid X=i)=1/i$，其中$1 \le j \le i \le 4$

X \ Y	1	2	3	4	$P(X=i)$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$P(Y=j)$	25/48	13/48	7/48	1/16	

当j=1时，在 $Y=j$ 条件下，X 的条件分布律为

$P(X=1\mid Y=1)=12/25$，$P(X=2\mid Y=1)=6/25$，

$P(X=3\mid Y=1)=4/25$，$P(X=4\mid Y=1)=3/25$，

当j=2时，在 $Y=j$ 条件下，X 的条件分布律为

$P(X=2\mid Y=2)=6/13$，$P(X=3\mid Y=2)=4/13$，$P(X=4\mid Y=2)=3/13$

当j=3时，在 $Y=j$ 条件下，X 的条件分布律为

$P(X=3\mid Y=3)=4/7$，$P(X=4\mid Y=3)=3/7$

当j=4时呢?

【例】对一群体的吸烟及健康状况进行调查，随机变量X和Y:

$$X=\begin{cases}0, & 健康\\ 1, & 一般\\ 2, & 不健康\end{cases},\quad Y=\begin{cases}0, & 不吸烟\\ 1, & 一天吸烟不超过15支\\ 2, & 一天吸烟超过15支\end{cases}$$

根据调查结果，(X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表:

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0.35	0.04	0.025	0.415
1	0.025	0.15	0.04	0.215
2	0.020	0.10	0.25	0.370
$P\{Y=y_j\}$	0.395	0.290	0.315	

X的条件分布律:

x	0	1	2
$P\{X=x\mid Y=0\}$	$\boxed{0.886}$	0.063	0.061
$P\{X=x\mid Y=1\}$	0.138	$\boxed{0.517}$	0.345
$P\{X=x\mid Y=2\}$	0.079	0.127	$\boxed{0.794}$

【例】对一群体的吸烟及健康状况进行调查，随机变量X和Y:

$$X=\begin{cases}0, & 健康\\ 1, & 一般\\ 2, & 不健康\end{cases},\quad Y=\begin{cases}0, & 不吸烟\\ 1, & 一天吸烟不超过15支\\ 2, & 一天吸烟超过15支\end{cases}$$

Y的条件分布律：

y	0	1	2
$P\{Y=y\|X=0\}$	0.843	0.096	0.060
$P\{Y=y\|X=1\}$	0.116	0.698	0.186
$P\{Y=y\|X=2\}$	0.054	0.270	0.676

X的条件分布律：

x	0	1	2
$P\{X=x\|Y=0\}$	0.886	0.063	0.061
$P\{X=x\|Y=1\}$	0.138	0.517	0.345
$P\{X=x\|Y=2\}$	0.079	0.127	0.794

二、连续型随机变量的条件分布

设(X,Y)是二维连续型$r.v$，由于对任意x，y，$P\{X=x\}=0$，$P\{Y=y\}=0$ ，所以不能直接用条件概率公式得到条件分布.

给定y，对于任意固定的ε>0，对于任意x，

考虑条件概率：

$$P\{X \le x | Y = y\} = \lim_{\varepsilon \to 0+} P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$$

$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \le y + \varepsilon\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} \left(\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x, y)\, dy \right) dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\, dy} \approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx}{\varepsilon \cdot f_Y(y)} (\varepsilon \to 0+)$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \boxed{\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}} dx$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}}$$

定义2 设 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$,若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度. 记为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件分布函数. 记为

$$P\{X\le x|Y=y\}\text{或}F_{X|Y}(x|y)$$

即

$$P\{X \le x | Y = y\} = F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

类似地,可以定义

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy$$

【例】设(X,Y)的概率密度是

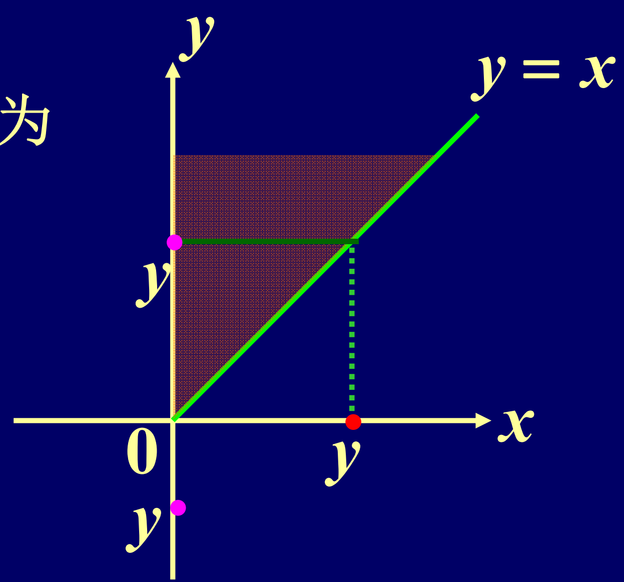
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x\mid y)$、$P\{X>\frac{1}{4}\mid Y=\frac{1}{2}\}$ 及 $P\{0\leq X\leq \frac{1}{2}|Y\leq 1\}$.

解：(X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} ye^{-y}, y>0, \\ 0, \qquad y\leq 0. \end{cases}$$



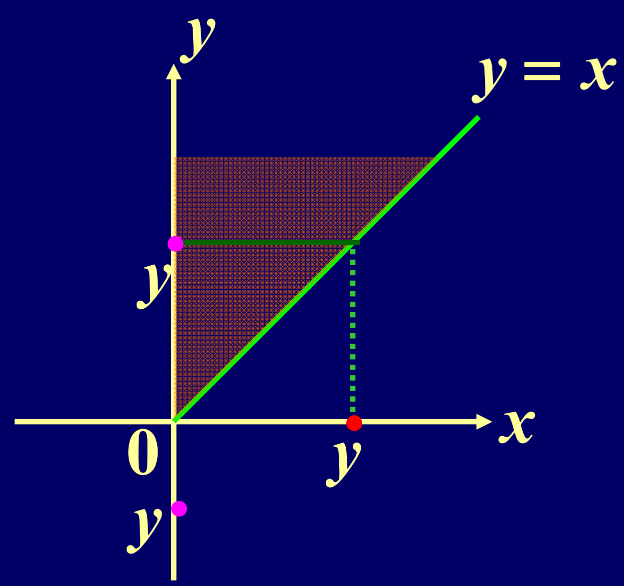
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

当 $y>0$ 时，若 $0<x<y$,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{\mathrm{y}}$$

若 $y\le 0$ 或 $y\ge x$,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{0}{ye^{-y}}=0$$



综上，当 $y>0$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{y}}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $y>0$ 时,

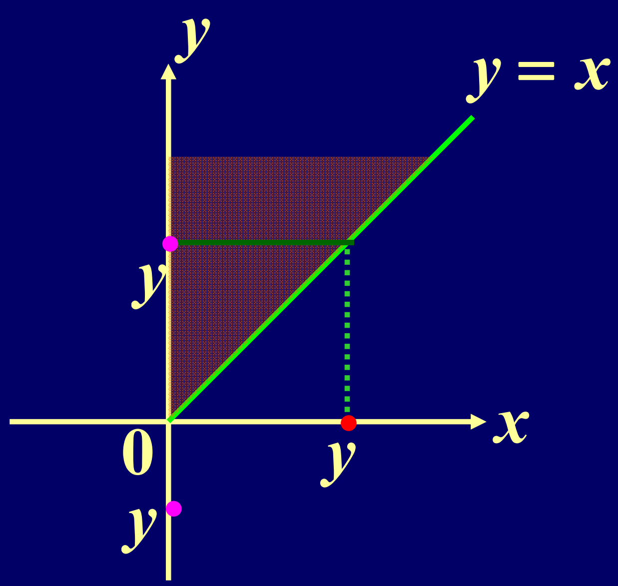
$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$P\{X>\tfrac{1}{4}|Y=\tfrac{1}{2}\}$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})dx$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2dx$$

$$=\frac{1}{2}$$



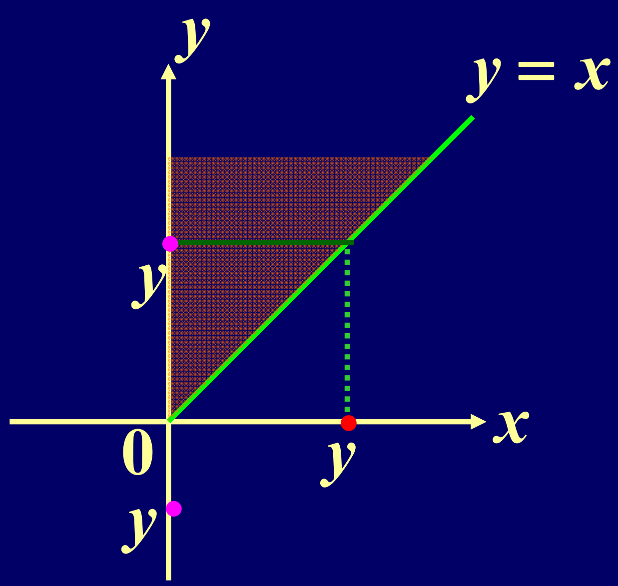
$$P\{0\le X\le \tfrac{1}{2}\mid Y\le 1\}$$

$$=\frac{P\{0\le X\le \frac{1}{2}, Y\le 1\}}{P\{Y\le 1\}}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dx \int_x^1 e^{-y}\,dy}{\int_0^1 ye^{-y}\,dy}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(e^{-1}-e^{-x})dx}{-[ye^{-y}]_0^1+\int_0^1 e^{-y}\,dy}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}}{1-2e^{-1}}$$



例 设数X在区间 (0, 1) 均匀分布，当观察到 $X=x$ $(0<x<1)$时，数Y在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值，求Y的概率密度。

解： 依题意，X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于任意给定的值 x $(0<x<1)$，在$X=x$ 的条件下Y的条件概率密度为

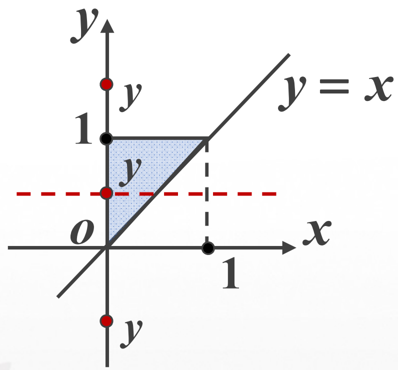
$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

X和Y的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

已知边缘密度、条件密度，求联合密度



于是得Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

四、小结

这一节，我们介绍了条件分布的概念和计算，并举例说明对离散型和连续型随机变量如何计算条件分布．请课下通过练习进一步掌握.