厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2022.01.02

得　分	
评阅人	

一、填空题：（每小题 4 分，共 24 分）

1. 曲线 $y=\ln(1+e^x)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\quad y=x \quad}$。

2. 反正弦曲线 $y=\arcsin x$ 的拐点是 $\underline{\quad (0,0) \quad}$。

七、（10 分）试求：(1)函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式；

(2)函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}$。

解法一：(1) 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，故

$$f(x)=(1+x)(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2+o(x^3))^2=(1+x)x^2(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))^2$$

$$=(1+x)x^2(1-x+\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x^2+o(x^2))=(1+x)x^2(1-x+\frac{11}{12}x^2+o(x^2))$$

$$=x^2(1-x^2+\frac{11}{12}x^2+o(x^2))=x^2(1-x^2+\frac{11}{12}x^2+o(x^2))=x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\text{。}$$

(2) $\because e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=[1+(-\dfrac{x^2}{2})+\dfrac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+o(x^4)]-[1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)]=\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)$，

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2-(x^2-\frac{1}{12}x^2+o(x^4))}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=1\text{。}$$

解法二：(1) 由 $f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)$，

$$f''(x)=2(x+1)^{-1}\ln(x+1)+2(x+1)^{-1}=\frac{2[\ln(1+x)+1]}{x+1},$$

$$f'''(x)=\frac{2[\ln(1+x)+1]}{x+1}=\frac{2(1+x)^{-1}(x+1)-2[\ln(1+x)+1]}{(x+1)^2}=\frac{-2\ln(1+x)}{(x+1)^2},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-2(x+1)^{-1}(x+1)^2+4(x+1)\ln(1+x)}{(x+1)^4}=\frac{-2+4\ln(1+x)}{(x+1)^3},$$

得 $f(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(0)=2$， $f'''(0)=0$， $f^{(4)}(0)=-2$。

故函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)=x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\text{。}$$

(2) 令 $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$，$h(x)=\cos x$，则

$g'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$，$g''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$，$g''(x)=(3x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$，

$g^{(4)}(x)=(3-3x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}+(3x-x^3)xe^{-\frac{x^2}{2}}=(-x^4+3)e^{-\frac{x^2}{2}}$，得 $g(0)=1$，$g'(0)=0$，$g''(0)=-1$，

$g'''(0)=0$，$g^{(4)}(0)=3$。故函数 $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=g(0)+g(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3+\frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)。$$

又 $h'(x)=-\sin x$，$h''(x)=-\cos x$，$h'''(x)=\sin x$，$h^{(4)}(x)=\cos x$，得 $h(0)=1$，$h'(0)=0$，

$h''(0)=-1$，$h'''(x)=0$，$h^{(4)}(0)=1$，故 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$。从而

$$e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)]-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]=\frac{1}{12}x^4+o(x^4)。$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2-(x^2-\frac{1}{12}x^2+o(x^4))}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=1$$ 。

八、(8 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有二阶导数且 $f''(x)\ge0$。现已知 $f(1)=-4$，$f'(1)=2$，证明：方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个实根。

证：由泰勒公式，存在 $\xi\in(1,x)$，使得 $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$，又根据题意，$f''(\xi)\ge0$，从而有 $f(x)\ge f(1)+f'(1)(x-1)=-4+2(x-1)=2x-6$，故有 $f(3)\ge0$，又 $f(1)=-4$，因此由闭区间连续函数的介值定理，知方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,3]$ 上有一个实根。另一方面，由 $f''(x)\ge0$，故 $f'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不减，即有 $f'(x)\ge f'(1)=2$，从而 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 单调递增，因此方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 的实根是唯一的。