1、

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 都是 n 维向量，下列命题中错误的是

(A) 如果$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\\ \boldsymbol{\beta}_{s-1}\end{bmatrix}$线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 如果秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(C) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关.

(D) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

[　　]

【分析】 当 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出时，并不能保证每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s-1)$ 都不能用其余的向量线性表出. 例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3)^{\mathrm{T}}$，虽然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的. 所以(D) 不正确.

关于(A)，由$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\\ \boldsymbol{\beta}_{s-1}\end{bmatrix}$线性相关$\xrightarrow{\text{定理 3.2 推论 4}}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关$\xrightarrow{\text{定理 3.2 推论 3}}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

关于(B)，
$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\\&=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\leqslant s-1<s.\end{aligned}$$
或者，由 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性表出，据定理 3.5 亦知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

对于(C)，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$. 此时必有 $k_s=0$，否则 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出. 于是 $k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$ 不全为 0，而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 必线性相关.

2、已知 n 维向量 a_1, a_2, a_3 线性无关，证明 $3a_1 + 2a_2,\ a_2 - a_3, 4a_3 - 5a_1$ 线性无关

【证】（用定义，重组）

设 $k_1(3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(4\boldsymbol{\alpha}_3 - 5\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}$，　　(1)

即 $(3k_1 - 5k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (2k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (-k_2 + 4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$.　　(2)

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} 3k_1 - 5k_3 = 0, \\ 2k_1 + k_2 = 0, \\ -k_2 + 4k_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

因为 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$，齐次方程组(3)只有零解

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0.$$

故向量组 $3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 - 5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

【证法二】（用秩）令 $\boldsymbol{\beta}_1 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = 4\boldsymbol{\alpha}_3 - 5\boldsymbol{\alpha}_1$，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

因为矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 3$，即 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，亦即 $3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 - 5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

3、已知向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，试用 a_1，a_2，a_3 线性表示 β。

解： 设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

求解上述方程组，方程组的增广矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2 - r_3 \\ r_3/2}]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解得方程组得解 $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1$，线性表示式为 $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.