厦门大学第十七届“景润杯”数学竞赛试卷

（非数学类，2020.10.17）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 已知 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=$____________________。

2. 已知曲线 $\Gamma: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的周长为 l，则 $\oint\limits_{\Gamma}(x+2y)^2 \mathrm{d}s=$____________________。

3. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^a$ 收敛，则 a 的取值范围是__________________。

4. 在极坐标系下，曲线 $C: \rho=a(1-\cos\theta)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的切线为 L，则在直角坐标系，L 的方程是__________________________。

5. 已知 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma \mathrm{e}^x$ 的一个特解。则 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$______________________。

6. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$，$f^{(50)}(0)=$__________________。

答案：1. $\ln a$；　2. $4l$；　3. $a>\dfrac{1}{3}$；　4. $x+y-a=0$；　5. 14；　6. 2^{25}.

二、解答题：

1.（10 分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)-x$，$g'(x)=2\mathrm{e}^x+1-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\dfrac{g(x)}{1+x}-\dfrac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x.$

解：由已知条件，得 $f''(x)=g'(x)-1=2\mathrm{e}^x+1-f(x)-1=2\mathrm{e}^x-f(x)$，即

$$f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x.$$

该方程的通解为 $f(x)=\mathrm{e}^x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

由 $f(0)=0$，$f'(0)=g(0)=2$，可得 $C_1=-1$，$C_2=1$，所以，$f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x+\sin x.$

$$\int_0^{\pi}[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}[\frac{f'(x)+x}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-\frac{f(0)}{1+0}-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1+\pi}-\pi+\ln(1+\pi).$$

2.（10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint\limits_{\Omega_n}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω_n 为球体 $x^2+y^2+z^2\le n^2$，$[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

解：记 $V_k: k-1\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le k$，则

$$\iiint\limits_{\Omega_n}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\iiint\limits_{V_k}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{4}{3}\pi\cdot[k^3-(k-1)^3]$$

$$=\frac{4}{3}\pi[-1^3-2^3-\cdots-(n-1)^3-n^3+n^4]$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint\limits_{\Omega_n}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{n^3}+(\frac{2}{n})^3+\cdots+(\frac{n}{n})^3])$$

$$=\frac{4}{3}\pi(1-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x)=\pi.$$

3.（12 分）设空间曲面 S 是以 $A(5,-3,-2)$ 为顶点，且与球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ 相切的圆锥面，Ω 是由球面 Σ 和圆锥面 S 所围成的空间区域.

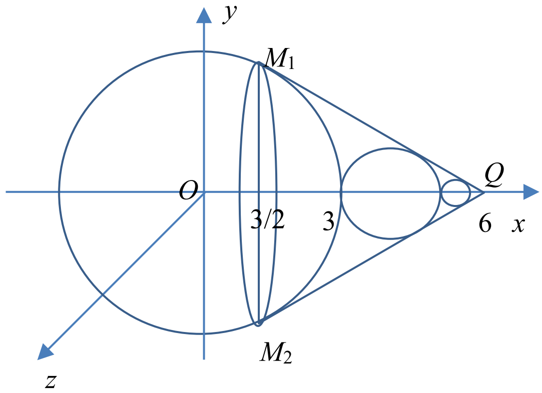
（1）求立体 Ω 的体积；

（2）在空间区域 Ω 内，与球面 Σ 和圆锥面 S 都相切的球面记为 S_1，与球面 S_1 和圆锥面 S 都相切的球面记为 S_2，…，与球面 S_{n-1} 和圆锥面 S 都相切的球面记为 S_n，…。设球面 S_n 的半径为 r_n，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})r_n$。

解：球面Σ的方程可改写为$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$，该球面的球心到圆锥面顶点$A$的距离为

$$d=\sqrt{(5-1)^2+(-3+1)^2+(-2-2)^2}=6.$$

问题所讨论的球面和圆锥面可换成球心在原点，半径为 3 的球面Σ'，和顶点在$Q'(6,0,0)$并与球面Σ'相切的圆锥面S'（见右图）.



（1）在平面直角坐标系Oxy中，过点$Q(6,0)$作圆$L:x^2+y^2=9$的切线，切点分别为M_1,M_2。

将平面图形QM_1M_2绕x轴旋转一周得旋转体，则

$$V_\Omega=V_{旋转体}=\frac{\pi}{3}(\frac{3}{2}\sqrt{3})^2\times\frac{9}{2}-\int_{\frac{3}{2}}^{3}\pi(9-x^2)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi.$$

（2）注意到$\dfrac{r_1}{3}=\dfrac{3-r_1}{6}$，即$2r_1=3-r_1\Rightarrow r_1=1$.

一般地，$\dfrac{r_n}{3}=\dfrac{3-2r_1-2r_2-\cdots-2r_{n-1}-r_n}{6}$，于是，$2r_n=(3-2r_1-2r_2-\cdots-2r_{n-1})-r_n$，即

$$r_n=\frac{1}{3}(3-2r_1-2r_2-\cdots-2r_{n-1}).$$

由数学归纳法，可得$r_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$，故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})r_n=3\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{3^n}$.

记$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，因为调和级数发散，所以，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=+\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}})=1,$$

$\therefore\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛域为$(-1,1)$。

当$x\in(-1,1)$时，

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i})x^i=\sum_{i=2}^{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i-1})x^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}x^i$$

$$=x\sum_{i=1}^{n-1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i})x^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}x^i$$

$$=x(S_n(x)-a_nx^n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}x^i\ .$$

注意到$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}x^i=\ln(1-x),-1\le x<1$，于是，我们有$S(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})r_n=3S(3)=\frac{9(\ln 3-\ln 2)}{2}.$$

4. （8 分）求$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}x^2\right\}$.

解：$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{x(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3}))}=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})}$

$$=\mathrm{e}\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)^2+o(\frac{1}{x^2})\right]$$

$$=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2x}+\frac{11\mathrm{e}}{24x^2}+o(\frac{1}{x^2}),$$

故$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}x^2\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{11\mathrm{e}}{24}+x^2\left(o(\frac{1}{x^2})\right)\right\}=\frac{11\mathrm{e}}{24}$.

5. （8 分）假设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且满足$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x)$，其中对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，恒有$g(x)\ge 0$. 证明：$|f(x)|$有界.

证明：记$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$，$F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=-2xg(x)[f'(x)]^2$.

当$x\ge 0$时，$F'(x)\le 0$；当$x\le 0$时，$F'(x)\ge 0$.

故$F(x)\le F(0)=[f(0)]^2+[f'(0)]^2$，从而

$$|f(x)|\le\sqrt{F(x)}\le\sqrt{[f(0)]^2+[f'(0)]^2}.$$

故$|f(x)|$有界.

6. （8 分）设函数$f(x,y)$在闭区域$D:x^2+y^2\le 1$上有二阶偏导数，且$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

求$\iint_D(x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则有

$$\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (r\cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y})r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1 r\left[\int_0^{2\pi} (r\cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y})\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r$$

记$L_r: x^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，于是，

$$\oint_{L_r}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y}\mathrm{d}(r\cos\theta)+\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}\mathrm{d}(r\sin\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi}(r\cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y})\mathrm{d}\theta,$$

因此，$\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 r\left[\oint_{L_r}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}r$

记$L_r: x^2+y^2=r^2$所围成的区域为D_r，利用格林公式，可得

$$\oint_{L_r}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_r}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2}).$$

故 $\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 r\left[\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2})\right]\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

7.（10 分）已知函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0, f(1)=1$。正数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。

求证：存在不同$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$ 使得$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1$。

证明：$\because f(0)=0, f(1)=1, 0<\lambda_1<1$，由介值定理，存在$a\in(0,1)$，使得$f(a)=\lambda_1$.

因为$\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，由介值定理，故存在$b\in(a,1)$，使得$f(b)=\lambda_1+\lambda_2$.

在$[0,a]$，$[a,b]$，$[b,1]$中分别应用拉格朗日中值定理，存在满足$0<\xi_1<a<\xi_2<b<\xi_3<1$的$\xi_1,\xi_2,\xi_3$，使得

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi_1)=\frac{\lambda_1}{a},\quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi_2)=\frac{\lambda_2}{b-a},\quad \frac{f(1)-f(b)}{1-b}=f'(\xi_3)=\frac{\lambda_3}{1-b}.$$

于是，$\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\dfrac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=a+b-a+1-b=1$.

8.（10 分）已知 $\lambda>1$ 为常数，$\{A_n\}$ 为有界数列. 假设 $u_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且满足

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{a}{n}+\frac{A_n}{n^{\lambda}},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明：若 $a>0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛；若 $a\le 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散.

解：（1）若 $a>0$ 时，$\exists N, n>N, \dfrac{a}{2n}>\dfrac{A_n}{n^{\lambda}}$，即 $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}>1+\dfrac{a}{2n}, n=N+1,N+2,\cdots$，

也即 $u_{n+1}<u_n, n=N+1,N+2,\cdots$.

又因为 $\dfrac{u_N}{u_{n+1}}=\dfrac{u_N}{u_{N+1}}\dfrac{u_{N+1}}{u_{N+2}}\cdots\dfrac{u_n}{u_{n+1}}>(1+\dfrac{a}{2N})(1+\dfrac{a}{2(N+1)})\cdots(1+\dfrac{a}{2n})$，

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{a}{2n})$ 发散可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{a}{2N})(1+\dfrac{a}{2(N+1)})\cdots(1+\dfrac{a}{2n})=\infty$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

由莱布尼茨判别法知，级数 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，即 $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

（2）若 $a=0$ 时，因 $\lambda>1,\{A_n\}$ 有界，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{A_n}{n^{\lambda}})$ 收敛，即 $\dfrac{u_1}{u_{n+1}}=(1+\dfrac{A_1}{1^{\lambda}})(1+\dfrac{A_2}{2^{\lambda}})\cdots(1+\dfrac{A_n}{n^{\lambda}})$

收敛于一个正数.

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散.

（3）若 $a<0$ 时，$\exists N, n>N, \dfrac{a}{2n}<\dfrac{A_n}{n^{\lambda}}\Rightarrow\dfrac{u_n}{u_{n+1}}<1+\dfrac{a}{2n}<1$，即当 $n>N$ 时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散.