第二讲 例题及习题答案

目录

一、例题

例 1

已知$f(x)$可导，则函数$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$在$x=0$可导的充要条件是：__________.

解： $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ 在$x=0$可导 $\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ 存在 $\Leftrightarrow$

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)+f(x)|\sin x|}{x}=f'(0)+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}$ 存在 $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}\Leftrightarrow f(0)=-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

例 2

已知$f(x)$在$x=0$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(x+1)}{x^2}=2$, 求$f'(0)$.

解： 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(x+1)}{x^2}=2$，也即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}-\dfrac{1}{2}=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=\dfrac{5}{2}$，再由连续性可知 $f(0)=-1$,最后得

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{5}{2}$

方法二：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(x+1)}{x^2}=2$ 可得：$\dfrac{xf(x)+\ln(x+1)}{x^2}=2+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为无穷小，整理上式可得：$f(x)=2x-\dfrac{\ln(1+x)}{x}+x\cdot\alpha(x)$，按定义求导即可。

例 3

若$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求$f'(0)$.

解： $f(2x)-f(x)=ax+x\alpha(x)$，

$f(x)-f(\frac{x}{2})=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}x\alpha(\frac{1}{2}x)$，……，$f(\frac{1}{2^{n-1}}x)-f(\frac{x}{2^n})=\frac{1}{2^n}ax+\frac{1}{2^n}x\alpha(\frac{1}{2^n}x)$，……

左右相加取极限得： $f(2x)-f(0)=2ax+x\beta(x)$，其中 $\lim_{x\to 0}\beta(x)=0$。依导数定义即可求出： $f'(0)=a$.

例 4

设$L(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$，求$L(1)$.

解： 设 $f(x)=(1-x^m)^n=(1-x)^n(1+x+x^2+...+x^{m-1})^n$，$L(1)=f^{(n)}(1)$，由莱布尼兹公式可得： $f^{(n)}(1)=(-1)^n\cdot n!\cdot m^n$

例 5

设$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$，求$y^{(n)}(0)$.

解： 原式变为： $y\sqrt{1-x^2}=\arcsin x$，两边求导得： $y'\sqrt{1-x^2}-y\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，

整理得： $(1-x^2)y'-xy=1$，等式两边求 n-1 阶导得：

$$(1-x^2)y^{(n)}-2(n-1)xy^{(n-1)}-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}-xy^{(n-1)}-(n-1)y^{(n-2)}=0$$

取 $x=0$，得递推公式： $y^{(n)}(0)=(n-1)^2y^{(n-2)}(0)$，由 $y(0)=0,\quad y'(0)=1$可得：

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ 4^m(m!)^2 & n=2m+1\end{cases}.$$

例 6

求$(e^x\sin x)^{(n)}$.

解： 方法一：直接求到 4 阶导数即可发现规律：

$$(e^x\sin x)^{(n)}=\begin{cases}(-1)^m 2^{2m}e^x\sin x, & n=4m\\ (-1)^m 2^{2m}e^x(\sin x+\cos x), & n=4m+1\\ (-1)^m 2^{2m+1}e^x\cos x, & n=4m+2\\ (-1)^m 2^{2m+1}e^x(\cos x-\sin x), & n=4m+3\end{cases}$$

方法二：由欧拉公式：$\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，可得$e^x\sin x=\dfrac{e^{(1+i)x}-e^{(1-i)x}}{2i}$，求导得：

$$\left(e^x\sin x\right)^{(n)}=\frac{(1+i)^n e^{(1+i)x}-(1-i)^n e^{(1-i)x}}{2i}.$$

例 7

已知$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$f(a)=f(b)$, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$,

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}.$$

解： 求解以$y=f(x)$为未知函数的微分方程：$y'=\dfrac{y-f(a)}{b-a}$，得

通解:$(y-f(a))e^{\frac{-x}{b-a}}=C$. 令$F(x)=(f(x)-f(a))e^{\frac{-x}{b-a}}$，由罗尔定理即可证明结论.

例 8

$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导且$f(0)=f'(0)$, $f(\frac{1}{2})=0$. 求证:$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}.$$

解： 求解以$y=f(x)$为未知函数的微分方程：$y''=\dfrac{3y'}{1-2x}$，构造辅助函数:

$$F(x)=f'(x)(1-2x)^{\frac{3}{2}}。$$

由拉格朗日中值定理得$\exists x_1\in(0,\frac{1}{2})$, $s.t.\ f'(x_1)=\dfrac{f(0)-f(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}$，也即

$f'(x_1)=-2f(0)=-2f'(0)$，由介值定理，存在$x_2\in(0,x_1)$, $s.t.\ f'(x_2)=0$，

马上可验证: $F(x_2)=F(\frac{1}{2})=0$，应用罗尔定理即可得结论。

例 9

函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，求证：对$\forall x\in[a,b]$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

解: 构造函数 $F(t)=f(t)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b)$，显然 $F(a)=F(b)=F(x)=0$，应用罗尔定理两次：存在 $\xi\in(a,b)$，s.t. $F''(\xi)=0$，也即：$f''(\xi)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}\cdot 2=0$，

整理便得：$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

例 10

函数$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

解: 将函数 $f(x)$ 在中点 $x=c=\frac{a+b}{2}$ 展开得：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-c)^2$，

积分得：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-c)^2dx$，整理得：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+0+\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b(x-c)^2dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

例 11

$f(x)$在$[a,b]$可导，$f(a)=f(b)=1$，证明$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，$s.t.\ e^{\xi-\eta}(f(\xi)+f'(\xi))=1$.

解： 将结论写成：$e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))=e^{\eta}$，左边可理解成$\left[e^{x}f(x)\right]'\Big|_{x=\xi}$．

考虑函数：$g(x)=e^{x}f(x)$，则$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)=e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))(b-a)$，

另一方面：$g(b)-g(a)=e^{b}-e^{a}=e^{\eta}\cdot(b-a)$，与上式比较消掉$(b-a)$即得结论。

例 12

$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$，求证：对$\forall a>0,b>0$, $\exists\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$,

使得：$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

解： 由介值定理：$\exists\, x_0\in(0,1)$, $s.t.$ $f(x_0)=\dfrac{a}{a+b}$，分别在$[0,x_0],[x_0,1]$使用拉格朗日定

理得：$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$, $f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}$，代入即证

例 13

$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, $f_+'(a)>0$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $f''(\xi)<0.$

解： 由$f(a)=f(b)=0$可得：存在$x_1\in(a,b)$，s.t. $f'(x_1)=0$，进一步有：

$f'(x_1)-f'(a)=f''(\xi)(x_1-a)$，也即$f''(\xi)=\dfrac{f'(x_1)-f'(a)}{(x_1-a)}<0$.

例 14

$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，求证：$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geq 8.$

解： 由题设条件知，$f(x)$在$[0,1]$上的最小值点只能在$[0,1]$区间内取到，即存在

$c\in(0,1)$，使得$f(c)=\min\limits_{0\leq x\leq 1}\{f(x)\}=-1$，由费尔马定理得$f'(c)=0$。由泰勒公式

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

令 $x=0$，则 $f(0)=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$，$(0<\xi_1<c)$ ①

令 $x=1$，则 $f(1)=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$，$(c<\xi_2<1)$ ②

当 $0<c\le\frac{1}{2}$ 时，由①式，$0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2\le -1+\frac{1}{8}f''(\xi_1)$，即 $f''(\xi_1)\ge 8$，取 $\xi=\xi_1$；

当 $\frac{1}{2}<c<1$ 时，由②式，$0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2\le -1+\frac{1}{8}f''(\xi_2)$，即 $f''(\xi_2)\ge 8$，$\xi=\xi_2$，

综上所述就有：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)\ge 8$.

例 15

已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(x)\ne 0,\forall x\in(0,1)$，$f(0)=0$，求证：

对$\forall n,m\in N^*,\exists\xi\in(0,1)$，$n\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=m\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

解： 设 $F(x)=f^m(1-x)\cdot f^n(x)$，由 $F(0)=F(1)=0$ 使用罗尔定理即得结论。

例 16

$f(x),g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$g''(x)\ne 0,\forall x\in(a,b)$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$.

求证：$\exists\xi\in(a,b)$，$\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

解： 设 $H(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$，由 $H(a)=H(b)=0$ 使用罗尔定理立得结论。

达布定理

设$f(x)$在$[a,b]$上可导，则对$\forall C: f'(a)<C<f'(b)$，都存在$\xi\in(a,b)$ 使得$f'(\xi)=C$.

解： 令 $F(x)=f(x)-Cx$，则有：$F'(a)<0$，$F'(b)>0$，由导数的定义：

$F'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$，根据极限的保号性可知$\exists x_1\in(a,b)$，$s.t.\ F(x_1)<F(a)$，同

理：$\exists x_2 \in (a,b),\ s.t.\ F(x_2) < F(\text{b})$，总之 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值在开区间 (a,b) 内取得，设在 ξ 处取得，则马上有 $F'(\xi)=0$，结论得证。

例 17

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有可导，$g'(x)\neq 0$，求证：对任意 C，$\dfrac{f'(a)}{g'(a)} < C < \dfrac{f'(b)}{g'(b)}$，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = C.$

解： 令 $F(x) = f(x) - Cg(x)$，$g'(a), g'(b)$ 同号，否则由达布定理必存在某个 $g'(x)=0$，与题意不符。不妨设 $g'(x)>0$，显然：$F'(a) = f(a) - Cg(a) < 0$，$F'(b) = f(b) - Cg(b) > 0$，由达布定理可知道存在 $\xi\in(a,b)$，s.t. $F'(\xi)=0$，也即 $F'(\xi) = f'(\xi) - Cg'(\xi) = 0$。

例 18

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且在 $(a,+\infty)$ 内可微，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$，则 $\exists\xi\in(a,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)=0.$

解： 构造函数 $F(x) = \begin{cases} f(\dfrac{1}{1-x}+a-1), & x\neq 1 \\ f(a), & x=1 \end{cases}$，可验证该函数在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=f(a)$，由罗尔定理：$\exists\xi_1\in(0,1),\ s.t.\ F'(\xi_1)=0$，也即：

$$F'(\xi_1) = f'(\frac{1}{1-\xi_1}+a-1)\frac{1}{(1-\xi_1)^2} = 0 \Rightarrow f'(\frac{1}{1-\xi_1}+a-1) = 0$$，令 $\xi = \dfrac{1}{1-\xi_1}+a-1$ 即得结论.

例 19

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且在 $(-\infty,+\infty)$ 内可微，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$，则 $\exists\xi\in(-\infty,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)=0.$

解： 构造函数 $F(x)=\begin{cases} f(\tan x), & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ A, & x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2} \end{cases}$，可验证该函数在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内可导，$F(-\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2})=A$，由罗尔定理：$\exists\xi_1\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ F'(\xi_1)=0$，也

即：$F'(\xi_1)=f'(\tan\xi_1)\sec^2\xi_1=0\Rightarrow f'(\tan\xi_1)=0$，令 $\xi=\tan\xi_1$ 即得结论.

二、练习

习题 1

$f(x)$在$[a,b]$上有三阶连续导数，求证：$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.$

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(b)+f'(a))-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

解：记 $R=f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(b)+f'(a))=\int_a^b f'(x)dx-(b-a)\dfrac{f'(a)+f'(b)}{2}$

$=\int_a^b[f'(x)-p(x)]dx$，其中 $p(x)=f'(a)+\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)$.

设 $g(x)=f'(x)-p(x)$，显然其满足 $g(a)=g(b)=0$，由例 9 的结论（插值函数的误差）

得：$g(x)=\dfrac{g''(\xi_1)}{2}(x-a)(x-b)=\dfrac{f'''(\xi_1)}{2}(x-a)(x-b)$，代入积分立得：

$R=-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$.

证明 2：分部积分法

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f'(x)(x-a)\Big|_a^b-\int_a^b f''(x)(x-a)\mathrm{d}x$$

$$= f'(b)(b-a) - f''(x)(x-a)(x-b)\Big|_a^b + \int_a^b (x-b)(f'''(x)(x-a) + f''(x))\mathrm{d}x$$

$$= f'(b)(b-a) + \int_a^b (x-b) f''(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f'''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

$$= f'(b)(b-a) + \int_a^b (x-b) df'(x) + f'''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

$$= (f'(b) + f'(a))(b-a) + \int_a^b f'(x)dx + f'''(\xi)\frac{(b-a)^3}{6}$$

移项后，即得结论。

习题 2

$f(x)$在$[a,b]$有二阶导数，$f'(a) = f'(b) = 0$，求证 $\exists \xi \in (a,b),\ s.t.$

$$\left|f''(\xi)\right| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b) - f(a)\right|$$

解：分别在点 a,b 处泰勒展开： $f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$，

$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$，两式相减得：

$$f(b) - f(a) = \frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2 - \frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{4(f(b) - f(a))}{(b-a)^2}\right| = \left|\frac{f''(\xi_2)}{2} - \frac{f''(\xi_1)}{2}\right| <= \frac{\left|f''(\xi_1)\right| + \left|f''(\xi_2)\right|}{2} = \left|f''(\xi)\right|,$$

最后一步用到了导数的介值定理。

习题 3

$f(x), g(x)$在$[a,b]$上有一阶导数，$g'(x) \neq 0$， 求证：$\exists \xi \in (a,b), \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)}$

解：令 $F(x) = f(x)g(x) - f(a)g(x) - g(b)f(x)$，应用罗尔定理立得。