景润杯试题选（微分方程和空间解析几何）答案

一、设直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$在$xoy$平面的投影直线为$L_1$，在$yoz$平面的投影直线为$L_2$，试问$L_1$与$L_2$是否异面？若异面，请求出公垂线段的长度及公垂线方程。(第八届景润杯试题)

答案：异面，公垂线长度$\dfrac{1}{3}$，公垂线方程$\begin{cases}2x-4y+5z-2=0\\4x+y+z+1=0.\end{cases}$.

二、求一条曲线，使它通过点$(0,1)$，且其上任一点$P(x,y)$处的切线和法线在x轴上截下的线段长度为y^2+1。(第八届景润杯试题)

答案：$y=\mathrm{e}^{\pm x}$或$y^2=\pm 2x+1\left(x\neq\mp\dfrac{1}{2}\right).$

三、设$f(x)$可微，且满足$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求

（1）$f(x)$的表达式；(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t$。(其中$n=2,3,\cdots$)（第十一届景润杯试题）

答案：(1) $f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$；

(2) $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t=\begin{cases}2^{\frac{n+1}{2}}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} & n=3,5,7,\cdots\\[2ex] 2^{\frac{n+1}{2}}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

四、已知椭球面$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$0<c<a<b$），试求过$x$轴并与曲面$\Sigma$的交线是圆的平面方程。(第十四届景润杯试题)

答案：$y+\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}z=0$或$y-\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}z=0$.

五、已知两条异面直线为$L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{1}$和$L_2:\begin{cases}x=z-2\\y=1\end{cases}$，求此二直线相切的最小球面方程。(第十五届景润杯试题)

答案：$(x-\dfrac{2}{3})^2+(y-\dfrac{1}{6})^2+(z-\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{25}{4}.$

六、微分方程 $y''+(y')^2+4=0$ 的通解为________________。（第十九届景润杯试题）

答案：$e^y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 或 $y=\ln(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，其中 C_1， C_2 为任意常数.

七、已知平面 Π 与平面 $\Pi_1:13x-5y-10z+13=0$ 关于平面 $\Pi_2:x-2y+3z+1=0$ 对称，则平面 Π 的方程为________________________.（第十九届景润杯试题）

答案：$2x-y-z+2=0$.

八、已知 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解，则 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$__________________。（第十七届景润杯试题）

答案：14.