第四节 相互独立的随机变量

- 随机变量相互独立的定义
- 课堂练习
- 小结 布置作业

一、随机变量相互独立的定义

两事件A,B独立的定义是：
若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件A,B独立．

用随机变量来刻画事件

令事件$A=\{X\le x\}$，$B=\{Y\le y\}$

$$P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$$

就可以得到随机变量X和Y相互独立的定义.

随机变量相互独立的定义

设X, Y是两个随机变量，若对任意的x，y，有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称**X和 Y相互独立**。

用分布函数表示，即 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

表明：两个随机变量相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 。

一般地，边缘分布不能确定联合分布；

但当X和Y相互独立时，边缘分布可以确定联合分布。

二、离散型随机变量独立性的判定

若 (X, Y)是离散型随机变量，

则上述独立性的定义等价于：

对(X, Y)的所有可能取值(x_i, y_j)，都有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

则称X和Y相互独立。

【例】设（X，Y）的联合概率分布率为

$X \backslash Y$	0	1
0	7/15	7/30
1	7/30	1/15

判断X与Y是否独立

解 先求边缘分布，见表

显然 $$P(X=0,Y=0)=\frac{7}{15}\neq P(X=0)P(Y=0)$$

故X与Y不独立

此外，由条件分布律的定义：

$$\begin{cases} P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \\ P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \end{cases}$$

可知，当X与Y相互独立时，

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = p_{i\cdot}$$

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = p_{\cdot j}$$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	7/15	7/30	21/30
1	7/30	1/15	9/30
$p_{\cdot j}$	21/30	9/30	

也可用此条件判别离散型随机变量(X,Y)的两个分量X与Y是否相互独立.

例 已知随机变量X和Y各自的分布律为：

X	-1	0	1
p_i	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
p_j	1/2	1/2

并且$P\{XY=0\}=1$。

求：(1) X和Y的联合分布；

(2) 判断X, Y是否相互独立。

解：(1) 由$P\{XY=0\}=1$，可得$P\{XY\neq 0\}=0$，

则有$P\{X=-1, Y=1\}=P\{X=1, Y=1\}=0$

(X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(2) 由上表知：

$$P\{X=0\}\times P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\neq 0$$

$$P\{X=0,Y=0\}=0$$

故 X ,Y 不是相互独立的。

三、连续型随机变量独立性的判定

设X, Y是两个随机变量，若对任意的x, y，有

$$F(x, y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称X和Y相互独立。

两边同时求偏导数

$$f(x, y)=\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x, y)=\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_X(x)F_Y(y)$$

$$=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}\bullet\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$$

$$=f_X(x)f_Y(y)$$

若 (X,Y)是连续型$r.v$，则上述独立性的定义等价于：

对任意的 x, y, 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

几乎处处成立，则称 X 和 Y 相互独立 .

其中 $f(x,y)$是X和Y的联合密度,$f_X(x), f_Y(y)$

分别是X的边缘密度和Y 的边缘密度 .

这里“几乎处处成立”的含义是：在平面上除去面积为 0 的集合外，处处成立.

我们已经知道，设 (X,Y)是连续型$r.v$，若对任意的x,y,有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

几乎处处成立，则称X,Y相互独立.

由条件密度的定义：
$$\begin{cases} f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} \end{cases}$$

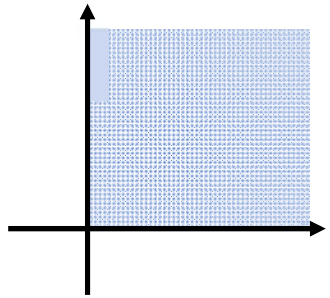
可知，当X与Y相互独立时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=f_Y(y),\quad f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$$

也可用此条件判别二维连续型$r.v(X,Y)$的两个分量X与Y是否相互独立.

【例】设（X，Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)} & x\ge 0\ ,y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



求（1）(X, Y)的边缘密度，

（2）判断X、Y是否独立。

解 边缘密度函数为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\ (x,y)dy$

当 $x\ge 0$ 时 $f_X(x)=\int_0^{+\infty} 6e^{-2x-3y}dy=2e^{-2x}$

当 $x<0$ 时 $f_X(x)=0$

所以， $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & (x\ge 0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$

同理可得 $f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & (y\geq 0)\\ 0, & (y<0)\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & (x\geq 0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & (x\geq 0, y\geq 0)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

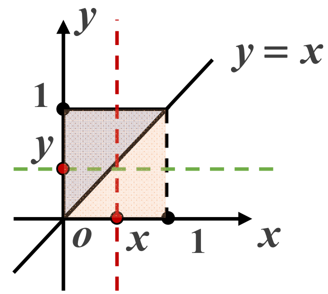
$$=f(x,y)$$

所以 X 与 Y 相互独立。

例 若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况又怎样?



解：
$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 2dy=2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 2dx=2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<y<x<1$时，有$f(x,y)=0$，但$f_X(x)f_Y(y)>0$

故 X和 Y不独立。

【例】设（X, Y)服从矩形域

$$\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

上的均匀分布，求证 X 与 Y 独立。

解：$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a\le x\le b\ ,c\le y\le d\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当$a\le x\le b$时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{b-a}$$

于是 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

连续型随机变量独立性的判定

例 甲乙两人约定中午12时30分在某地会面。如果甲来到的时间在12:15到12:45之间是均匀分布。乙独立地到达，而且到达时间在12:00到13:00之间是均匀分布。试求先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率。又甲先到的概率是多少?

解：设X为甲到达时刻，Y为乙到达时刻，以12时为起点，以分为单位，依题意可知：

$$X \sim U(15,45),\quad Y \sim U(0,60)$$

连续型随机变量独立性的判定

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 15<x<45\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由独立性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1800}, & 15<x<45,0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所求为$P(|X-Y|\le 5)$，$P(X<Y)$

甲先到的概率

先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率

连续型随机变量独立性的判定

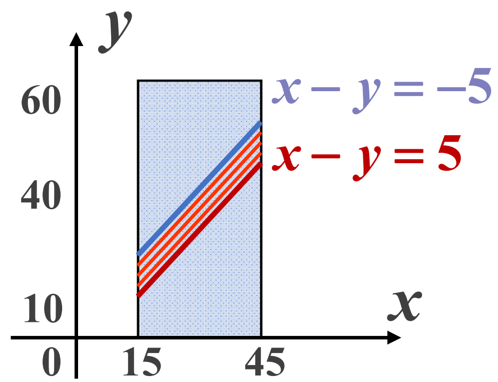
解一：

$$P(|X-Y|\le 5)$$

$$=P(-5\le X-Y\le 5)$$

$$=\int_{15}^{45}\left[\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{1800}dy\right]dx$$

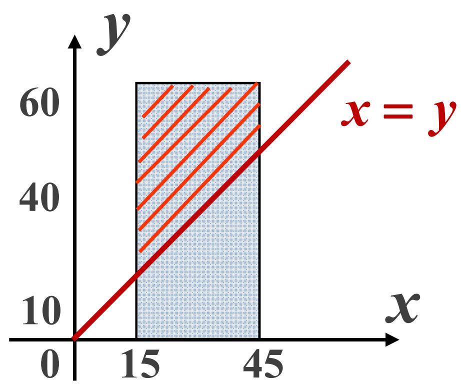
$$=1/6.$$



$$P(X<Y)$$

$$=\int_{15}^{45}\left[\int_{x}^{60}\frac{1}{1800}dy\right]dx$$

$$=1/2.$$



连续型随机变量独立性的判定

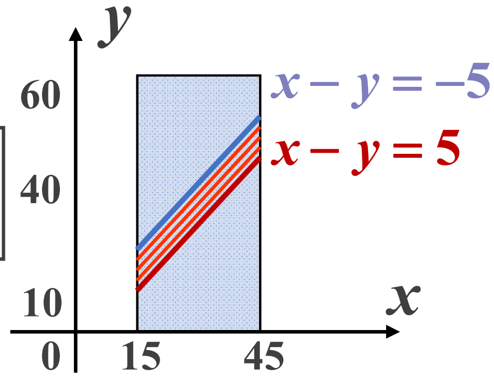
解二： $P(|X-Y|\leq 5)$

$$= \iint_{|x-y|\leq 5} \frac{1}{1800} dxdy$$

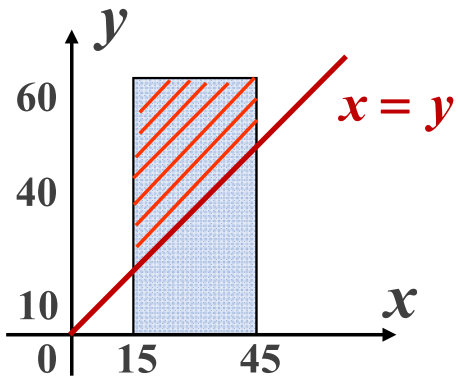
被积函数为常数，
直接求面积

$$= \frac{1}{1800}[60\times 30 - 2(10\times 30 + 30\times 30/2)]$$

$$= 1/6.$$



$$P(X<Y)=P(X>Y)=1/2$$



连续型随机变量独立性的判定

类似的问题

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船，试求其中一艘船要等待码头空出的概率。

连续型随机变量独立性的判定

类似的问题

在某一分钟的任何时刻，信号进入收音机是等可能的。若收到两个互相独立的这种信号的时间间隔小于0.5秒，则信号将产生互相干扰。求发生两信号互相干扰的概率。

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维随机变量的分布函数

对于任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，n元函数：

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

称为n维随机变量$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的分布函数。

n 维随机变量的相互独立

定义： n 维随机变量的 k 维边缘分布

设$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的分布函数$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$已知，

则$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的$k(1 \le k \le n)$维边缘分布函数就随之确定。

例如：

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$关于$X_1$的1维边缘分布函数为

$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$关于$\left(X_1, X_2\right)$的2维边缘分布函数为

$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty)$

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维随机变量相互独立

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$,有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的

n 维随机变量的相互独立

定义：两组多维随机变量相互独立

设随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$的分布函数为$F_1(x_1, x_2, \cdots x_m)$,

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数为$F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$,

$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数为

$F(x_1, x_2, \cdots x_m, y_1, y_2, \cdots y_n)$,

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$,有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是相互独立。

n 维随机变量的相互独立

定理

设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立，

则$X_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 和$Y_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立。

又若h, g是连续函数，

则$h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立。

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维离散型随机变量的分布律

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$所有可能取值为$(x_{1i_1},x_{2i_2},\cdots,x_{ni_n})$, $i_j=1,2,\cdots$,

$P(X_1=x_{1i_1},X_2=x_{2i_2},\cdots,X_n=x_{ni_n})$, $j=1,2,\cdots n$, $i_j=1,2,\cdots$,

称为n维离散型随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布律。

定义：n 维连续型随机变量的概率密度

若存在非负可积函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

使得对于任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$有

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(x_1,x_2,\cdots x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度函数。

n 维随机变量的相互独立

前面关于n维随机变量独立性的定义和定理，
只需将其中的“分布函数”替换为“分布律”或“密度函数”，
就全部都可以适用于离散型或连续型n维随机变量。

四、小结

这一讲，我们由两个事件相互独立的概念引入两个随机变量相互独立的概念. 给出了各种情况下随机变量相互独立的条件，希望同学们牢固掌握 .

第五节 两个随机变量的函数的分布（上）

- $Z = X + Y$ 的分布
- M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布
- 课堂练习
- 小结 布置作业

在第二章中，我们讨论了一维随机变量函数的分布，现在我们进一步讨论:

当随机变量 X, Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布?

一、离散型随机变量函数的分布

【例】设二维$r.v.(X,Y)$的概率分布为

$Y \backslash p_{ij} \backslash X$	-1	1	2
-1	$1/4$	$1/6$	$1/8$
0	$1/4$	$1/8$	$1/12$

求 $X+Y, X-Y, XY, Y/X$ 的概率分布

解 根据(X,Y)的联合分布可得如下表格：

P	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/8$	$1/8$	$1/12$
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,0)	(1,-1)	(1,0)	(2,-1)	(2,0)
$X+Y$	-2	-1	0	1	1	2
$X-Y$	0	-1	2	1	3	2
XY	1	0	-1	0	-2	0
Y/X	1	0	-1	0	-1/2	0

P	1/4	1/4	1/6	1/8	1/8	1/12
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,0)	(1,-1)	(1,0)	(2,-1)	(2,0)
$X+Y$	-2	-1	0	1	1	2
$X-Y$	0	-1	2	1	3	2
XY	1	0	-1	0	-2	0
Y/X	1	0	-1	0	-1/2	0

故得

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	1/4	1/4	1/6	1/4	1/12

$X-Y$	-1	0	1	2	3
P	1/4	1/4	1/8	1/4	1/8

P	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/8$	$1/8$	$1/12$
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,0)	(1,-1)	(1,0)	(2,-1)	(2,0)
$X+Y$	-2	-1	0	1	1	2
$X-Y$	0	-1	2	1	3	2
XY	1	0	-1	0	-2	0
Y/X	1	0	-1	0	-1/2	0

XY	-2	-1	0	1
P	$1/8$	$1/6$	$11/24$	$1/4$

Y/X	-1	-1/2	0	1
P	$1/6$	$1/8$	$11/24$	$1/4$

设二维离散型随机变量 (X, Y)的分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \quad i, j=1,2,\cdots$$

则随机变量$Z = g(X, Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{z_k=g(x_i,y_j)} P\{X=x_i, Y=y_j\} \quad k=1,2,\cdots$$

一、$Z = X + Y$ 的分布

例1　若 X、Y 独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0$, 1 , 2 ,…, $P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\dots$,求 $Z=X+Y$ 的概率函数.

解

$$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i)P(Y=r-i)$$

由独立性

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\dots+a_rb_0 \quad r=0,1,2,\dots$$

具有可加性的两个离散分布

- 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立,

  则 $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$

- 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立,

  则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

例 若X和Y相互独立，它们分别服从参数为λ_1,λ_2的泊松分布，证明 $Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。

解： 依题意有 $P(X=i)=\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{\,i}}{i!},\quad i=0,1,2,\ldots$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{\,j}}{j!},\quad j=0,1,2,\ldots$$

于是，$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{i}}{i!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^{i}\lambda_2^{r-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\ r=0,1,2,\ldots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.