厦门大学《高等数学Ⅰ-1》期中试题·答案

考试日期：2011.11　　信息学院自律督导部整理

1．求下列函数的极限：（每小题 4 分，共 16 分）

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{(\sqrt{1+x}-1)[\ln(1+x)-x]}$

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$　　（4） $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^2+x)\ln(1+\dfrac{1}{x})-x-\dfrac{1}{x^2}\cos x]$

解：（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+x\sin x}{x^2}=4$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{(\sqrt{1+x}-1)[\ln(1+x)-x]}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x[\ln(1+x)-x]}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln(1+x)-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{(1+x)^{-1}-1}=-2$

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to 0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}=e^2$

（4） $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^2+x)\ln(1+\dfrac{1}{x})-x-\dfrac{1}{x^2}\cos x]=\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})-x]+\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{x})-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\cos x$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}+1-0=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^{-1}-1}{2t}+1=\dfrac{1}{2}$

2．求下列数列的极限：（每小题 4 分，共 8 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1})$

解：（1） $\because 3\le(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\le 3\sqrt[n]{3}\to 3\quad n\to\infty$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$

（2）法一、由拉格朗日定理，知$\exists\xi\in(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n})$，使得 $n^2(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{1}{1+\xi^2}\cdot\dfrac{n}{n+1}$，

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1})=1$

法二、$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan x-\arctan\dfrac{x}{1+x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x^2)^{-1}-(2x^2+2x+1)^{-1}}{2x}=1$$

3．（10分）设数列$\{x_n\}$满足$x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=1,2,3,\ldots$，

（1）试证明此数列极限存在，并求出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）试求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

（1）**证明：**由归纳假设知，$0<x_n\le 1, n=1,2,3,\ldots$，又$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$，由单调有界准则可知此数列极限存在；令$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则由$x_{n+1}=\sin x_n$，得$a=\sin a$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$；

（2）**解：**$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$。

4．（10分）求函数$f(x)=(x-2)\div[1-e^{\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}}]+\cos\dfrac{1}{x}$的间断点，并判断其类型。

解：其间断点为$x=0, x=1, x=2, x=3$。

Q $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$都不存在且不为$\infty$，$\therefore x=0$是振荡间断点；

Q $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\cos 1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-1+\cos 1$，$\therefore x=1$是跳跃间断点；

Q $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-1)}{x-3}+\cos\dfrac{1}{2}=1+\cos\dfrac{1}{2}$，$\therefore x=2$是可去间断点；

Q $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\infty$，$\therefore x=3$是无穷间断点。

5．（6分）求函数$y=\ln|\sec x+\tan x|+x^x+\arctan\sqrt{x^2-1}$的导数$\dfrac{dy}{dx}$和微分$dy|_{x=2}$。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\sec x+x^x(\ln x+1)+\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$；$dy|_{x=2}=(\sec 2+4\ln 2+4+\dfrac{\sqrt{3}}{6})dx$

6．（10分）已知$f(x)=x^2\cos 2x+\ln(1-x)$，试求$f^{(20)}(x)$。

解：$f^{(20)}(x)=(x^2\cos 2x)^{(20)}+(\ln(1-x))^{(20)}$

$$=C_{20}^0(\cos 2x)^{(20)}x^2+C_{20}^1(\cos 2x)^{(19)}\cdot 2x+C_{20}^2(\cos 2x)^{(18)}\cdot 2-19!\cdot(1-x)^{-20}$$

$$=2^{20}(x^2\cos 2x+20x\sin 2x-95\cos 2x)+19!\cdot(1-x)^{-20}$$

7.（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x} & x>0\\ e^{ax}-1 & x\le 0\end{cases}$ **在** $x=0$ **处可导，试求出** a **和** b **。**

解： 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \text{ 以及 } \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x}=0 \text{ 以及 } \lim_{x\to 0^+}\frac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x^2}=a$$

故 $a+b=2$ 以及 $a=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin x+2\ln(1-x)}{x^2}=-1$，$\therefore a=-1, b=3.$

8.（10 分）设函数 $y=f(x)$ **的极坐标式为** $\rho=a\theta$ **，求** $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi}$ **及** $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=0}$ **。**

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin\theta+a\theta\cos\theta}{a\cos\theta-a\theta\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi}=\left.\dfrac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\pi}=\pi$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\theta^2+2}{a(\cos\theta-\theta\cos\theta)^3}，\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=0}=\frac{2}{a}。$$

9.（10 分）设函数 $f(x)$ **和** $g(x)$ **都是二阶可导，并且** $g(x)$ **为** $f(x)$ **的反函数，已知** $f(0)=1,$

$f'(0)=2, f''(0)=8$**，求** $g'(1)$ **及** $g''(1)$ **。**

解： 由 $f(g(x))=x$，两边对 x 求导，可得 $\quad f'(g(x))\cdot g'(x)=1 \qquad$（1）

把 x=1 代入（1）式，得 $g'(1)=\dfrac{1}{2}$；

再次对（1）式两边 x 求导，得 $f''(g(x))\cdot(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)=0 \quad$（2）

把 x=1 代入（2）式，得 $g''(1)=-1$。

10.（10 分）以下两题任选其一（仅做一题）

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)+f(2)=0$，证明：至少存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$。

（2）设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f(2)=2$，证明：至少存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$。

附加题 （10 分）

依次求解下列问题

（1）　证明方程 $\mathrm{e}^x+x^{2\mathrm{n}+1}=0$ 有唯一的实根 x_{n} $(\mathrm{n}=0,1,2,L)$；

（2）　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值 A;

（3）　证明当 $\mathrm{n}\to\infty$ 时，x_n-A 与 $\dfrac{1}{\mathrm{n}}$ 是同阶无穷小。

解：（1）Q $f(1)+f(2)=0$，由介值定理，知 $\exists\xi_1\in[1,2]$，使得 $f(\xi_1)=0$。

令 $\varphi(x)=e^{-x}f(x)$，$x\in[0,2]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $\varphi(0)=\varphi(\xi_1)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=f(\xi)$。

（2）令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，$x\in[1,2]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $\varphi(1)=\varphi(2)=\dfrac{1}{2}$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$。

证：（1）令 $f_{\mathrm{n}}(x)=\mathrm{e}^x+x^{2\mathrm{n}+1}$，则 $f_{\mathrm{n}}(0)=1>0$，$f_{\mathrm{n}}(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1<0$，

由连续函数的零点定理知，对任意给定的自然数 n，均存在 $x_{\mathrm{n}}\in(-1,0)$，使得 $f_{\mathrm{n}}(x_{\mathrm{n}})=0$，

又因为 $\dfrac{df_{\mathrm{n}}(x)}{dx}=\mathrm{e}^x+(2\mathrm{n}+1)x^{2\mathrm{n}}>0,\quad x\in R$，所以函数 $f_{\mathrm{n}}(x)$ 关于 x 严格单调增加，

故函数 $f_n(x)=\mathrm{e}^x+x^{2\mathrm{n}+1}$ 有唯一的实根 x_{n}，即对任意给定的自然数 n，方程 $\mathrm{e}^x+x^{2\mathrm{n}+1}=0$ 有唯一的实根 x_{n}。

（2）由于 $\mathrm{e}^{x_n}+x_n^{2n+1}=0$，即 $x_n=-\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}$，因为 $|x_{\mathrm{n}}|\le 1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{2n+1}=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}=e^0=1$，故 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$。

（3）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-A}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}+1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{x_n}{2n+1}}{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$，故 x_n-A 与 $\dfrac{1}{\mathrm{n}}$ 是同阶无穷小。

上式用到了 $\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}-1\sim\dfrac{x_n}{2n+1}\quad(n\to\infty)$ 的等价无穷小代换。