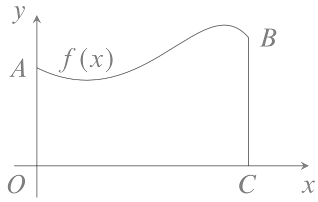
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$$



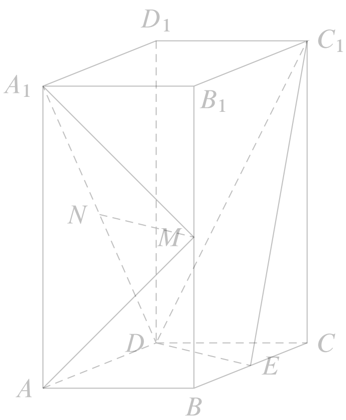
历届八一杯数学竞赛试题汇总

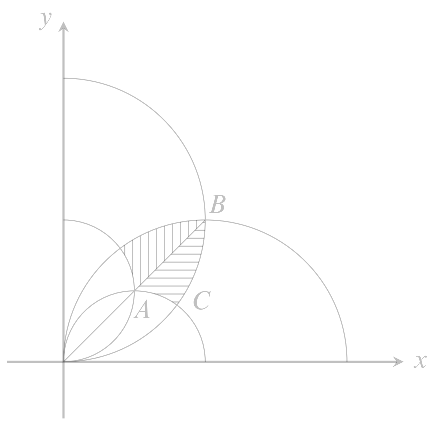
第一版

主编◎八一

最好的解决办法是自己给出

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$





b 站：八一考研数学竞赛
微信公众号：八一考研数学竞赛

前言

第一届八一杯网络大学生数学竞赛命题小组由 13 人完成；第二届八一赛网络大学生数学竞赛命题小组由 36 人完成，按全国大学数学竞赛考纲要求进行命制，并分成非数、数 A 高、数 A 低、数 B 高与数 B 低五个组；第三届八一杯网络大学生数学竞赛命题小组由 23 人完成，将数学组分成高低年级，第四届八一杯网络大学生数学竞赛命题小组由 22 人完成，延续第一届比赛模式；组织这一系列比赛是为了更好锻炼同学们竞赛能力，在竞赛中挑战自我，超越自我，成为更优秀的自己.

八一赛题是为了帮助更多有深爱数学竞赛的同学们提升数学能力特此汇总往届比赛试题 pdf 给大家练习，解答均在公众号 < 八一考研数学竞赛 > 专栏八一赛可找到!

针对八一不同赛题组别从三方面叙述其意义所在:

1. 非数组可作为全国大学生数学竞赛模拟练兵使用;
2. 数学组可作为数学专业考研、夏令营或者保研资格考试的同学助力;
3. 涵盖数学专业/非数考研的基础学科，利于考研提高解题能力.

历年八一赛延续第一届同样的命题趋势，主要有如下:

1. 试卷分三/五组：分别是非数组、数学 A 类与数学 B 类;
2. 题量上的分配原则：非数组与数学组不限，到时再确定题量!
3. 供题时间：从今天到正式比赛前三天均有效;
4. 命题要求：如下
   - 非数组尽可能保证在高数线代;
   - 数学低年级组主要包括解析几何、数分高代与常微分等;
   - 高年级在低年级组的要求下会增加高等概率论以及随机过程与实变的命题;
5. 比赛时间：每年的 8 月 1 号上午 9 点至晚上 8 点；比赛限时一天!!!
6. 比赛版权：归属于第一届八一杯数学竞赛组委会;
7. 命题发送方式：将已编辑好的题与解答（尽可能原创）以 PDF/Word/Axmath 形式发送至邮箱：hoganbin1995@outlook.com，并备注组别与署名，邮件主题为：第某届八一赛（某组别）供题与解答.

2023 年 5 月

八一. 编者

目　录

前 言 iii

第一章 第一届八一杯网络数学竞赛 1

1.1 非数组 …… 1
1.2 数学组 A 类 …… 8
1.3 数学组 B 类 …… 11

第二章 第二届八一杯网络数学竞赛 15

2.1 非数组 …… 15
2.2 数学组 A 类高年级 …… 40
2.3 数学组 A 类低年级 …… 48
2.4 数学组 B 类高年级 …… 56
2.5 数学组 B 类低年级 …… 64

第三章 第三届八一杯网络数学竞赛 73

3.1 非数组 …… 73
3.2 数学高年级组 …… 82
3.3 数学低年级组 …… 86

第四章 第四届八一杯网络数学竞赛 89

4.1 非数组 …… 89
4.2 数学组 A 类 …… 94
4.3 数学组 B 类 …… 101

第一届八一杯网络数学竞赛

1.1 非数组

绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：数学竞赛

第一届八一杯大学生网络数学竞赛试题

非数类，满分：140 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点

题号	一试							二试		满分
	一	二	三	四	五	六	七	A	B	
满分	40	10	10	10	10	10	10	20	20	140
得分										

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com, 逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 本卷分一试二试，其中一试二试满分为 100 与 40 分，两试得分总和为最终成绩.

数学 I 试题 (满分 100 分)

一、填空题 (本题满分 40 分，第 1-5 题每个 3 分，第 6-10 题每个 5 分，考生须全部作答)

1. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x\right)\left(\frac{2\mathrm{e}^x}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2\mathrm{e}^{\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=$__________.

2. 由 $x^y=y^x$ 确定的隐函数 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$=__________.

3. 求微分方程 $x^2(x-1)y'-x(x-2)y-y^2=0$ 的通解为__________.

4. 在曲面 $(xy+yz+xz)^2+(x-y+z)=0$ 上点 $(0,0,0)$ 处的切平面内，求一点 P 使得它到点 $M(1,2,3)$ 与点 $N(-2,3,-3)$ 的距离平方和最小值是__________.

5. 若 a,b 为正实数，求 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______，其中 $D=\left\{(x,y):0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\min\left\{\frac{a}{\cos x},\frac{b}{\sin x}\right\}\right\}$

6. (1) 设 $f(x)$ 是二阶可导函数，且 $f(1)=-1,f'(1)=-4$，存在二元函数 $z=z(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}z=4\left[f(x)+2x^3\right]y\mathrm{d}x+\left[3xf(x)-x^2f'(x)\right]\mathrm{d}y$$

求 $f(x)$=____ 和 $z(x,y)$=____.

(2) 求曲面 $y=4\left(x^2+y^2\right)^2+z^4$ 所围成的体积 $V=$__________.

7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)\int_{-1}^{\infty}\frac{(\cos x)^{2n}}{2^x}\mathrm{d}x\right)$=____，与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\csc\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}$=____.

8. 若 n 阶方阵 A 和 B 的秩分别是 r 和 $n-r$，求矩阵方程 $AXB=0$ 的通解__________.

9. (1) 找一幂级数 $f(x)$ 是____，使得它满足 $f''(x)+f(x)=0, f(0)=0, f'(0)=1$ 成立.

(2) 计算极限

$$\lim_{x\to0^+}\lim_{y\to+\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n2^m+1}\int_0^{x^2}\frac{\pi\left(\sqrt[4]{1+t}-1\right)\sin t^4}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}t}{x^2(x-\tan x)\ln\left(x^2+1\right)\left[\left(\dfrac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]}$$

10. (1) 计算三重积分

$$\iiint_\Omega\cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2\leqslant1$.

(2) 计算曲线积分

$$\int_L \mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\left[x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]$$

其中 L 为平面上从 $A(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线 $y=x^2$ 上的弧段.

微信公众号管理员. **八一** 供题

二、解答题 (本题满分 10 分)

已知 $F(n)$，且 $F(1)=F(2)=1$，对于 $F(n)$ 有 $F(n+1)=\alpha F(n)+\beta F(n-1)$.

(1) 求 $F(n)$ 的通项;

(2) 若 $\alpha=\beta=1$，求 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}\dfrac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}$.

华中科技大学. **郭晓光** 供题

三、解答题 (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 证明

$$\int_0^1\frac{f^{2020}(x)}{2018}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f^{2017}(x)}{2021}\,\mathrm{d}x\geq\int_0^1\frac{f^{2019}(x)}{2019}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f^{2018}(x)}{2020}\,\mathrm{d}x$$

中国科学技术大学. **向禹** 供题

四、解答题 (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，$n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n > 2$，并满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x}{2} = \frac{\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x}{3} = \cdots\cdots = \frac{\int_0^n f(x)\mathrm{d}x}{n}$$

(1) 证明：存在实数 T，使得关于 x 的方程：$f(x) = T$ 至少有 n 个不等实根;

(2) 设函数 $g(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，证明：存在实数 M，使得关于 x 的方程：

$$f'(x) = g'(x)[M - f(x)]$$

至少有 $n-1$ 个不等实根.

吉林大学. **董朔** 供题

五、解答题 (本题满分 10 分)

某曲面 D 上的任意一点与 $P_0(1,1,1)$ 所在的直线始终与直线 $x-1=y-1=z-1$ 的夹角为 θ_0 .

(1) 求曲面 D 的方程;

(2) 当 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{6}$ 时，球面 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 被曲面 D 所截的曲面为 Σ ，曲面 Σ 在平面 $z = 1$ 的上半部分为 Σ_1 ，下半部分为 Σ_2 .

- 当曲面 Σ_1 和 Σ_2 的电荷面密度均为 ρ 时，求 P_0 点处的电场强度 $\overrightarrow{E}$.
- 当曲面 Σ_1 带电荷密度为 ρ ，Σ_2 的电荷密度为 $-\rho$ ，求 P_0 处的电场强度 $\overrightarrow{E}$.

提示：点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 电荷 $+q$ 对点 $B(x,y,z)$ 产生电场 $\overrightarrow{E}$ 为 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\overrightarrow{r}|^3}\overrightarrow{r}$ ，其中 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$.

厦门大学. **酸奶** 供题

六、解答题(本题满分 10 分)

若有数列 $\{a_n\}$ 是一收敛数列且 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，使得 y 满足

$$xy''-y'+4x^3y=0$$

通解，对 $n\geqslant 4$，试证：$a_n=-\dfrac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$. 并求证在 $a_0=1,a_2=0$ 情况下通解为 $y=\cos x^2$，且求与之对应 y 在 $a_0=0,a_2=1$ 的通解.

剑桥大学. **面码** 供题

七、解答题(本题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$n\in N_+,a_1=2$，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{1}{2}(n+1)(a_n+1)-1$.

(1) 若设 $b_n\in\mathbb{R}\quad(n=1,2,3\cdots)$，其中 $\mathbb{R}$ 为实数集，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n^2}$ 收敛，试求解以下极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{b_k}{a_k}}{a_n}$$

(2) 若级数 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\right|<+\infty$，试求解以下极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{a_n}$.

吉林大学. **董朔** 供题

数学 II 试题（满分 40 分）

【注意】考生需要对 AB 两题进行作答，我们将按考生所给过程计算步骤分，全部做答完全正确计 40 分，二试作为非数组拔高题，可供考生进行挑战自己.

A.(本题满分 20 分)

等离子体是一种被电离的离子化的气体，通常被称为物质的第四态，它不仅广泛存在于我们的日常生活中，宇宙中更是有百分之九十九的物质以等离子态存在，假设现在有一种等离子体，完全由质子和电子组成，其中的电势满足泊松方程 $\nabla^2\Phi=-\frac{e}{\epsilon_0}(n_i-n_e)$, 电子的速度分布满足 $f_e(\vec{v})=n_i(\frac{1}{2\pi})^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}\vec{v}^2-e\Phi)}$ 其中 ϵ_0 为真空介电常数，n_i 和 n_e 分别为质子和电子密度。

(1) 求质子密度 n_i 和电子密度 n_e 之间的关系；

(2) 试在合适的坐标系中求出一级近似下 Φ 的表达式。

温馨提示：因为正负电荷的存在，所以等离子体的电势不满足库仑势 $\Phi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, 但是当电荷之间距离比较小的时候，可以认为它们产生的电势满足该式。

可能用到的公式:

$$\vec{v}^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$$

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

中国科学院大学. **李博** 供题

B.(本题满分 20 分)

(1) 求 $f(x)=\cos(\alpha x)\ (\alpha\neq\mathbb{Z})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数，并证明：

$$1=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\right)$$

(2) 定义 $\mathbf{G}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot t\,\mathrm{d}t$，并利用 (1) 中结论，证明：

① $\mathrm{e}^{\frac{2G}{\pi}-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{2m}\left(1-\dfrac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$；

② $\mathrm{e}^{\frac{4G}{\pi}}=\lim\limits_{m\to\infty}\left[\dfrac{3^3\cdot7^7\cdot11^{11}\cdots(4m-1)^{4m-1}}{1^1\cdot5^5\cdot9^9\cdots(4m-3)^{4m-3}}\right]^2\dfrac{(4m+3)^{2m+1}}{(4m+1)^{6m+1}}$.

注：如需要交换积分求和次序，默认一致收敛，不要求证明。

高等数学贴吧吧主.Renascence_5 供题

1.2 数学组 A 类

绝密 ⋆ 启用前 **试卷类型：数学竞赛**

第一届八一杯大学生网络数学竞赛试题

数学组 A 类，满分：100 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点

题号	一	二	三	四	五	六	总 分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com,, 逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校.

---

1. (本题 15 分) 从点 $P(1,\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 处引椭球面 $C: 2x^2+3y^2+4z^2=1$ 的切线，切点的轨迹在平面 yOz 上的投影为 Γ，试证明 Γ 为椭圆，并求 Γ 的中心，主方向与面积.

毛毛 供题

2. (本题 15 分) 证明：对于 n 阶实方阵 A, B，若 $E-A^TA$ 与 $E-B^TB$ 是半正定矩阵, 则

$$\left|E-A^TB\right|^2 \geqslant \left|E-A^TA\right|\left|E-B^TB\right|$$

武汉大学. 尚镇冰 供题

3. (本题 20 分) 设 S 为 R_n 的一个非空闭凸集，A 为 $\mathbb{R}$ 上 $n \times n$ 的矩阵.

(1) 证明：对 $\forall y \notin S$，存在唯一的一个 $\overline{x}$，使得 $\|y-\overline{x}\| = \inf\limits_{x\in S} \|y-x\|$

(2) 证明：对于 $y \notin S$，存在非零向量 p 以及 $\varepsilon > 0$，使得对 $\forall x \in S$，有 $p^T y \geqslant \varepsilon + p^T x$

(3) 证明：$Ax < 0$ 有解的充分必要条件是不存在非零向量 $p \geqslant 0$ 使得 $A^T p = 0$.

武汉大学. 王鹏辉 供题

4. (本题 15 分) 已知复系数多项式

$$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$$

证明：对多项式 $f(x)$ 的任意一根 z，都有

$$|z| \leqslant 2 \cdot \max\left\{|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \cdots, \sqrt[k]{|c_k|}\right\}$$

本本蛋蛋 供题

5. (本题 15 分) 设 $f(x) \in C^1[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 已知积分 $I = \int_0^{+\infty} t^{a+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$ 对某个常数 $a > -1$ 收敛, 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} t^a f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛, 并且等于 $-\dfrac{I}{a+1}$.

中国科学技术大学. 向禹 供题

6. (本题 20 分) 设 b_n 表示正整数 n 的最大素因子，以及单调递增的正实数列 $\{a_n\}$. 满足无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{na_n}$ 收敛, 问无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{na_{b_n}}$ 是否也是收敛的? 并证明你的结论.

山大附中. 王永喜 供题

1.3 数学组 B 类

绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：数学竞赛

第一届八一杯大学生网络数学竞赛试题

数学组 B 类，满分：100 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com,, 逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校.

---

1. (本题 15 分)P 为直线 $l: x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 上一点，从 P 点引椭球面 $C: 2x^2+3y^2+4z^2=1$ 的切线，切点构成的曲线 Γ 与 l 平行，求 P 点的坐标.

毛毛 供题

2. (本题 15 分) 设 A 是 $m\times n$，A^HA 的 n 个特征值为 $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n^2$. 证明:

$$\sigma_k^2=\max_{C_k}\min_{x\in C_k,x\neq 0}\frac{x^HA^HAx}{x^Hx}$$

其中 C_k 为 n 维线性空间 C^n 的任意 k 维子空间，A^H 为 A 的共轭转置矩阵.

武汉大学. 王鹏辉 供题

3. (本题 20 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ 满足

$$A^T A = I_{2n},\, A^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. 证明: $B = Q_1 + iQ_2$ 是酉矩阵 (即 $\overline{B}^T B = I_n$)

武汉大学. 尚镇冰 供题

4. (本题 15 分) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n}\cos nx$，求证

(1) $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)| \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}$;

(2) $f'(x)$ 存在;

(3) $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \left|f'(x)\right| \geqslant \dfrac{2}{\pi \mathrm{e}}$

高等数学贴吧小吧主.9899 供题

5. (本题 15 分) 已知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ 收敛, 常数 $p>0$, 证明: 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^{p+1}}{a_1+2^p a_2+\cdots+k^p a_k}$ 也收敛.

中国科学技术大学. 向禹 供题

6. (本题 20 分)

(1) 若 $r\in(-1,1)$，对 $\forall\theta\in\mathbb{R}$，试证：

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=1+2\sum_{k=1}^{+\infty}r^k\cos k\theta$$

(2) 设 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x^+)=f(x^-)$ 存在，试证：

$$\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]$$

若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，试证此收敛关于 $x\in\mathbb{R}$ 是一致的.

微信公众号管理员. 八一 供题

第二届八一杯网络数学竞赛

2.1 非数组

绝密 ⋆ 启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：数学竞赛

第二届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(非数类组，赛题 80 道)

比赛时间：2020 年 8 月 1 日上午 9 点至 2020 年 8 月 5 号晚上 8 点

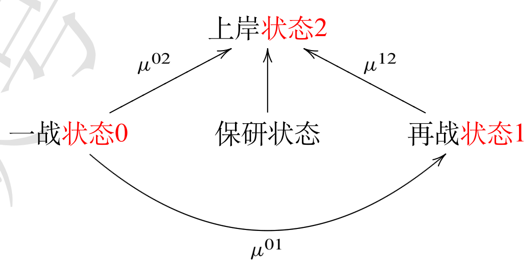
注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校；
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. 某同学意图考取国内双一流大学基础数学系研究生，假设该考研过程可以通过一个连续的马尔可夫模型来仿真，下面我们对这名同学的考研历程进行一次模拟：

(1) 假设考研有 3 种状系：“状态 0”：一战状态；“状态 1”：再战状态（不区分复试及保研考试，未通过状态，可以指代多次考研，此状态不可逆，即该同学学习记录和学信档案不可修改）；“状态 2”：上岸状态。其状态转换图如示



(2) 假设考生一旦选择考研便不会放弃，且默认考研周期为一年，且 $\mu^{01}=0.02, \mu^{02}=0.03, \mu^{12}=0.05$，$\mu$ 为固定常数;

(3) 设转换因子与概率的关系：$1-F(x)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}\mathrm{d}s}$，记为 tp_x^{ij}，表示由 i 到 j 的状态在 t 时间内的概率

要求计算如下问题：

(1) 求 2 年后，考生能去读研的概率多少?

(2) 若加入心态影响模型，其心态影响因子为 $\delta=0.1$，它对考生状态只进行简单数乘，即 $tp_x^{02}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}$；假设学生父母比较开明，承诺孩子考研一战上岸读研奖励 20000 元，再战上岸读研奖励 10000 元；假如他从未放弃考研梦想直到考研上岸为止，求他所获得奖励的数学期望.

河南郑州. **张** 供题

2. 设 n 是一个给定的正整数, $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数, 计算

$$\int_0^1 [nx]\frac{\ln x+\ln(1-x)}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x.$$

中国科学技术大学. **向禹** 供题

3. 计算如下 5 个不定积分

(1) $\displaystyle\int \arcsin x \ln x^{2020}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{2(\sec x+\tan x)-\cos x}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\csc x+\sec x+\tan x+\cot x}$

(4) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,(2020x+2019\sin x\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^3}\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{x\,(2-x)\,\mathrm{e}^x\cos 2x+\mathrm{e}^{2x}-x^4}{\left(\mathrm{e}^x\cos x+x^2\sin x\right)\sqrt{x^4-\mathrm{e}^{2x}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}}$

虚之花 供题

4. 设非负函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且有唯一的零点，试证明存在等差数组 $\xi<\eta<\zeta$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)+f'(\zeta)=0$

吉林大学. **周鸣君** 供题

5. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, $J_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$

(1) 求证：

$$I_{n+2}-I_n=\frac{2}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right),\quad J_{n+2}=J_n$$

并求解 J_n;

(2) 求 A 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}I_{2n}=A$;

(3) 求 B 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(I_{2n}-A\right)\cos n\pi=B$

刘力手 供题

6. 计算以下两题

(1) 若 $x>0, y>0, z>0$，求 $\dfrac{x^2+y^2+2z^2}{xy+4xz}$ 的最小值.

黄欣奕 供题

(2) 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln^n x-n\int_0^x\frac{\ln^{n-1}t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\right)$$

医生姐姐 供题

7. 设

$$f(x)=\int_0^x\left[1+\frac{x-t}{1!}+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^{nt}\,dt$$

求 $f^{(n)}(x)$.

布布 供题

8. 试证：

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)\cos t-f'(t)\sin t]\,dt\right|\leqslant\sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2+|f'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

并求等号成立的条件.

陕西. **匿名** 供题

9. 由方程 $x^2+5y^2+10z^2+2xy+2xz+2yz=1$ 确定的曲面

(1) 令

$$f(x,y,z)=x^2+5y^2+10z^2+2xy+2yz+2xz$$

求 $f(x,y,z)$ 对应的二次型矩阵 A 的特征方程，并判定 A 是否正定

(2) 假设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 A 对应的特征根，则经过正交变换后 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$ 后的标准形是怎样的，并求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 和 $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$；

(3) 在 (2) 的条件下求该曲面围成的区域的质量，其中密度 $\rho=x^2+y^2+z^2$(假定正交变换后 $dxdydz=dudvdw$)

刘力手 供题

10. 设 n 元列向量 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 为齐次线性方程组 $(A+E)X=0$ 的一个基础解系，n 元列向量 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_t$ 为齐次线性方程组 $(A-E)Y=0$ 的一个基础解系，求证：n 元列向量组 $X_1, X_2, \ldots, X_s, Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ 为齐次线性方程组 $(A^2-E)Z=0$ 的一个基础解系.

天津大学. **崔凯华** 供题

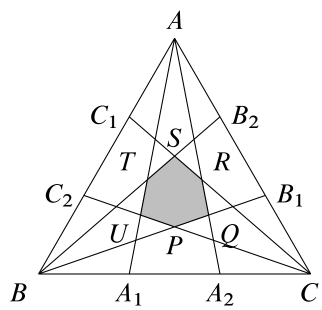
11. 设 n 阶矩阵 A 正定，$X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$，试证：二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\begin{vmatrix} A & X \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}$$

为正定二次型.

天津大学. **崔凯华** 供题

12. 如右图所示，在 $\triangle ABC$ 中，三等分线 $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ 围出六边形 $PQRSTU$，若在 $\triangle ABC$ 内选取一点，每个点被选中的概率相同，求选中的点落在六边形 $PQRSTU$ 内的概率.



清华大学. **严君啸** 供题

13. 计算积分

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3} \mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3\left(x^2+1\right)} \mathrm{d}x$

神琦冰河 供题

14. 设有实数 a，b，$c \in \mathbb{R}$ 满足

$$a+b+c=2020,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2020},$$

试计算：a, b, c 中有一个为 2020 的概率.

神琦冰河 供题

15. 设函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2-4x+5}+x\left[\frac{1}{x}\right]$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求 $f(x)$ 的所有渐近线.

刘力手 供题

16. 求证：$x>0$ 时

$$\int_0^x\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t<\frac{\arctan x}{x} \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$$

陕西. **匿名** 供题

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，并且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，证明

$$\int_0^1 (1-x^2) f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{6}{3\ln 2 - 2}\left(\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

陕西. **匿名** 供题

18. 设 n 为正整数，计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{1^2+2^2+\ldots+n^2}}$$

张博 供题

19. 计算极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$

上海. **周晨宇** 供题

20. 若记

$$I_1=(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}$$

$$I_2=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}$$

$$I_3=\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$I_4=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n+k+1]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}{\sqrt[n+k]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}$$

分别计算 $\lim\limits_{n\to\infty} I_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_2$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_3$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_4$.

上海. **周晨宇** 供题

21. 设

$$S_n=1+\frac{n-1}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}+\cdots+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}\cdots\frac{1}{2n},\quad n=1,2,\cdots$$

试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

上海. **周晨宇** 供题

22. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足以下条件：

① 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=2y\left(x^2-y^2-1\right)$$

② $f(1)=1$.

试完成如下题目：

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{3}{2}$ 且 $a_{n+1}=f(a_n)$

•证明：$\{a_n\}$ 是严格单调递增的发散数列；

•判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 的敛散性，若收敛，求其和；若发散，说明理由.

吉林大学. **董朔** 供题

23. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\sqrt{4n+1}\right]}{\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]}$$

其中 $[\cdot]$ 为 Gauss 取整符号.

韦磊 供题

24. 已知 $x, y, z \geqslant 0, x+y+z=t$，试求 $2\cos x+3\cos y+4\cos z$ 的最大值和最小值.

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

25. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n!)^n}{\mathrm{e}^{n^2}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}k!\right)^2}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

医生姐姐 供题

26. 某班级有 n 位同学，共参加了 m 个社团．每个社团中，该班学生的数目都是偶数；任意两个社团中，共同学生的数目是奇数．试证明: $m<n$

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

27. 设 A 是 n 阶实方阵，且其特征值表示为: $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ ，其中 $\lambda_j=a_j+ib_j$. 试证明:

(1) $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j=0$;

(2) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j=0$.

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

28. 求出使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 以及最小的数 β

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$$

华中科技大学. **大雄** 供题

29. 求极限

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

或者证明此极限不存在.

华中科技大学. **大雄** 供题

30. 设 m,n 为正整数，则

$$I=\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$$

四川大学. **胡辉** 供题

31. 计算

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{k}{n}+n\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

四川大学. **胡辉** 供题

32. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x$$

四川大学. **胡辉** 供题

33. 判断并证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin 1\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\cdots\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

biubiu 供题

34. 已知 $\left(2+\sqrt{2}\right)^n=A_n+\sqrt{2}B_n$，且 A_n,B_n 为整数，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$.

韦磊 供题

35. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

xionger 供题

36. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，且 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

(1) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$，求证：$S(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$，其中 $|x|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

(2) 计算

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_i^2}$$

刘力手 供题

37. 设曲线 $L: x^2+y^2=16$，取逆时针方向，求

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+xy+y^2}$$

刘力手 供题

38. 由方程

$$x^2+4y^2+9z^2+2xy+2xz+2yz=1$$

确定的曲面，求该曲面围成的区域的体积（提示：从二次型的角度思考）

刘力手 供题

39. 一个动点在平面内运动，其切向和法向的加速度都是非零常量，求其运动轨迹.

黄欣奕 供题

40. 证明：是否存在一个连续可微函数 $u(x)$(即 $u(x)\in C^1$), 使得

$$\int_0^1 \left(u'\right)^2(x)\mathrm{d}x = 9\int_0^1 (u)^2(x)\mathrm{d}x$$

成立，且满足 $u(0)=u(1)=0$. 如果成立请给出证明，如果不成立请给出反例.

华中科技大学. **大雄** 供题

41. 设 $x'Ax$ 为一 n 元正定二次型，计算反常 n 重积分

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x'Ax}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

刘大州 供题

42. 设 $f(x)\in L^2(0,\pi)$, 证明下面两个不等式不能同时成立

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\mathrm{d}x \le \frac{3}{4}$$

$$\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\mathrm{d}x \le \frac{3}{4}$$

华中科技大学. **大雄** 供题

43. 试说明下面积分的收敛性

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\ (0 < p \le 2)$$

华中科技大学. **大雄** 供题

44. 设 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

且满足 $a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n$，对任意数 b，求 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & \cdots & a_{2n}+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \cdots & a_{nn}+b \end{vmatrix}$$

天津大学. **崔凯华** 供题

45. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

天津大学. **崔凯华** 供题

46. 设 $A=\left[\left(a_i+b_j\right)^n\right]_{m\times m}$， $m>n$，求 $|A|$.

天津大学. **崔凯华** 供题

47. 设二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$$

记 $\alpha=\left[a_1,a_2,a_3\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left[b_1,b_2,b_3\right]^{\mathrm{T}}$

(1) 证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}}$；

(2) 若 α,β 正交且均为单位向量，证明：f 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2+y_2^2$.

天津大学. **崔凯华** 供题

48. 定义 Beta 函数

$$\mathrm{B}\left(p,q\right)=\int_0^1 t^{p-1}\left(1-t\right)^{q-1}\mathrm{d}t，\left(p,q>0\right)$$

已知

$$\mathrm{B}\left(p,q\right)=\frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)}，\Gamma\left(x+1\right)=x\Gamma\left(x\right)，\mathrm{B}\left(p,1-p\right)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

根据材料回答如下问题

(1) 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}$；

(2) 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^3}{1+x^7}\ln x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{49}\left(\sec\frac{\pi}{14}\tan\frac{\pi}{14}-\csc\frac{\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}\right)；$$

(3) 已知 $\sin\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$，计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{-\frac{2}{5}}\left(1-x\right)^{-\frac{3}{5}}}{x-y}\mathrm{d}x$ 以及二重积分

$$\int_1^{+\infty}\int_0^1\frac{x^{-\frac{2}{5}}\left(1-x\right)^{-\frac{3}{5}}}{\left(x-y\right)y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

神琦冰河 供题

49. 给定正整数 n，设 $P(x)$ 是一个整系数 n 次多项式，证明：

$$\max_{0\le x\le 1}|P(x)|>\frac{1}{\mathrm{e}^n}$$

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

50. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

xionger 供题

51. 数列 $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$ 是 100 个连续整数 1921 到 2020 的一个随机排列，定义部分和数列

$$S_1=a_1,S_2=a_1+a_2,\ldots,S_{100}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$$

求排列满足条件“数列 $\{S_n\}$ 的每一项 $S_i\ (1\leqslant i\leqslant 100)$ 均不是 3 的倍数”的概率.

清华大学. **严君啸** 供题

52. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2020^n\pi\mathrm{e})$ 极限不存在

武汉大学. **王鹏辉** 供题

53. 已知二阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}5&2\\1&0\end{bmatrix}$$

(1) 方阵 A 的幂可写成 $A^k=c_kA+d_kI,k>0$，试计算 c_k,d_k；

(2) 试将 A^{-1} 写成 I 与 A 的线性组合.

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

54. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2<R^2\right\}$ 上连续，且 $f(x,y,z)\geqslant 0,\max f(x,y,z)=M$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\iiint_\Omega f^n(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=M$$

四川大学. **胡辉** 供题

55. 设 p 和 q 为实数且 $p>0,q+\dfrac{p^2}{4}>0$. 设 $a_0=0,a_1=1,a_{n+2}=pa_{n+1}+aa_n\ (n\geqslant 0)$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1^2+\sqrt{a_2^2+\sqrt{a_4^2+\sqrt{\cdots+a_{2^{n-1}}^2}}}}.$$

xionger 供题

56. 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为连续可微的函数, 满足

$$f(x)=\int_{x-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\geqslant 1.$$

证明 f 在区间 $[1,\infty)$ 上具有有界变差, 即

$$\int_{1}^{\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

xionger 供题

57. 已知：当 $a_1+a_2+\cdots+a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$ 时有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_k)}=\frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_k)}.$$

根据材料回答以下问题

(1) 计算级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^4-1}\right)$$

(2) 计算积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x-2\cos x+1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}\mathrm{d}x.$$

神琦冰河 供题

58. 已知方程

$$y''-\frac{1}{x}y'+q(x)y=0$$

有两个特解 y_1 和 y_2，且 $y_1y_2=1$，求 $q(x)$ 及微分方程通解.

布布 供题

59. 求

$$f(x,y,z)=\iint_{\Sigma}\frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为闭区域 Ω 的边界曲面，$\vec{n}$ 为 Σ 上任意一点处的外法向量，$\vec{r}$ 为从点 (ξ,η,ζ) 指向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 的向量，其中 (ξ,η,ζ) 不在 Σ 上，r 为 $\vec{r}$ 的模长，θ 是的 $\vec{r},\vec{n}$ 的夹角

布布 供题

60. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$$

又 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=0$，试证：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

布布 供题

61. 证明

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin nx}{x}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

陕西. **匿名** 供题

62. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，且 $|f'(x)| < mf(x)$，其中 $0 < m < 1$，任取实数 a_0，定义 $a_n = \ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，试证：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

张博 供题

63. 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

64. 求微分方程 $y'' - \dfrac{2}{x}y' - y = 0$ 的通解.

分层流 供题

65. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\ln n\right)$$

黄欣奕 供题

66. 若 a_0 与 a_1 是任意常数，且 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{m}{n+1}a_{n-1}$，其中 $m\in N^*$.

(1) 证明：数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n^m}\right\}$ 收敛;

(2) 若 $a_0=a_1, m=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^m}$.

医生姐姐 供题

67. 给定实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，满足 $\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k>0\,(k=1,2,\cdots)$，令

$$f(x)=\frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)}$$

证明：$f^k(0)>0, k=1,2,\cdots$.

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

68. 已知有

$$I=\sqrt{1+8\sqrt{1+9\sqrt{1+10\sqrt{1+\cdots}}}}$$

$$J=\sqrt{81+91\sqrt{81+100\sqrt{81+109\sqrt{81+\cdots}}}}$$

$$K=\sqrt{8551+9\sqrt{10381+70\sqrt{12211+131\sqrt{14041+\cdots}}}}$$

计算 IJK，要求给出具体过程 (先给出推论再证明).

八一 供题

69. 设 $f(n)$ 表示 n 在二进制中各位数之和，计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(n)}{n(n+1)}$.

陕西. **匿名** 供题

70. 设 a,b,n 为正整数，令 $f(x)=\dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.

(1) 求证：当 $x=0$ 时，$x=\dfrac{a}{b}$ 时，$f^{(k)}(x)(0\leqslant k\leqslant 2n)$ 的取值为整数；

(2) 假设 π 是有理数. 试证：$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\mathrm{d}x$ 为整数，并由此证明 π 不可能是有理数.

刘大州 供题

71. 一同学会教室听数学分析课，假设他迟到的次数服从参数为 3 的泊松分布.(假设时间区间固定为一个月)

(1) 求他迟到次数的方差;

(2) 假如他的数学分析老师比较随和，导致该同学每月都不可能没有迟到，求他迟到的方差;

(3) 假设他的老师最近心情不太好，该同学只能选择性迟到，如果他没有迟到的概率为 0.3，求他迟到次数的方差.

河南郑州. **张** 供题

72. 已知 $X\sim N(0,1)$，$Y=\mathrm{e}^x$，试求

(1) Y 的 95% 分位点 P_{95};　　$(\phi(97.5\%)=1.96,\phi(95\%)=1.645)$

(2) P_{95} 对应的 Y 值.

(3) 定义第 (2) 的值为极端点，另一个定义为平均极端值，定义积分:

$$E(Y\wedge d)=\int_0^d yf(y)\,\mathrm{d}y+d\,(1\cdot F(y))$$

$$Q_{95}=P_{95}+\frac{E(y)-E(y\wedge P_{95})}{1-P_{95}}$$

求 Q_{95}.

河南郑州. **张** 供题

73. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$, 常数 $\alpha>0$ 使得 $\int_0^1\left|\frac{f'(x)}{\sin^\alpha x}\right|^2\mathrm{d}x<+\infty$. 试证明:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\sin^{\alpha+1/2}x}=0.$$

吉林大学. **周鸣君** 供题

74. 求常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2-y^2-y\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+2xy\end{cases}$$

的通解 $(x,y,z\in\mathbb{R})$.

黄欣奕 供题

75. 设 A、B 分别是复数域上的 n 级、m 级矩阵，证明：关于 X 的矩阵方程 $AX-XB=O$ 只有零矩阵解的充分必要条件是 A 与 B 无公共特征值.

黄欣奕 供题

76. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭黎曼可积，且广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在且收敛. 证明：存在分解 $f(x) = g(x)h(x)$ 满足：

(1) $g(x)$ 是单调函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

(2) 存在常数 M，使得任取 $A > a$，$h(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积，且有

$$\left|\int_a^A h(x)\mathrm{d}x\right| \le M$$

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

77. 证明：实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

的特征值都大于 0，且小于等于 $3+2\sqrt{2}$.

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

78. 设 $M = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$，如果实方阵 A 满足 $M = A^{\mathrm{T}}MA$，求证：$\det A = 1$

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

79. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$，证明：在区间 $(0,1)$ 上存在不同的三个点 ξ,η,θ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t + f(\xi)\ln\left(\sqrt{1+\xi^2}+\xi\right)\right]\theta \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\int_0^{\eta} f(t)\,\mathrm{d}t + f(\eta)\ln\left(\sqrt{1+\eta^2}+\eta\right)\right](1-\theta)\end{aligned}$$

成立.

吉林大学. **董朔** 供题

80. 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 内连续可微且无穷积分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 和 \quad \iiint_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

都收敛. 记

$$F(t)=\iiint_{B_t}(x+y+z)f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad t>0,$$

其中 $B_t=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$. 试证明

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{t^2}=0.$$

吉林大学. **周鸣君** 供题

2.2 数学组 A 类高年级

绝密★启用前 试卷类型：数学竞赛

第二届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(数学组 A 类高年级组，赛题 25 道)

比赛时间：2020 年 8 月 1 日上午 9 点至 2020 年 8 月 5 号晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. 在空间直角坐标系中，给定两条空间直线：

$$l_1:\begin{cases} x=3t-1\\ y=6t+2\\ z=2t\end{cases},l_2:\begin{cases} x=t+3\\ y=2t\\ z=-2t+1\end{cases}$$

证明：存在两族动直线（每族动曲线含有无穷多条），使得动直线始终与两条给定的空间直线相交且交角相等（交角取锐角），请选一族动直线所形成曲面来给出其曲面方程，并说明此二次曲面的类型.

本本蛋蛋 供题

2. 在空间直角坐标系中，给定两条空间直线：

$$l_1:\begin{cases} x=t\\ y=0\\ z=t+1\end{cases},l_2:\begin{cases} x=0\\ y=t\\ z=t-1\end{cases}$$

求同时过直线 l_1 与 l_2 的单叶旋转双曲面族.

（将曲面族的结果表示为 $P(x,y,z)\lambda^2+Q(x,y,z)\lambda+R(x,y,z)=0$ 的形式）

本本蛋蛋 供题

3. Suppose that $a_1 = a_2 = 1$, and

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n + \frac{1}{a_{n+1}}},\ n \geqslant 1.$$

Show that as $n \to \infty$,

$$a_n = n^{1/3} - \frac{2}{9n^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right),$$

where $\alpha = \ln 4 - \frac{1}{3} = 1.0529\cdots$.

白朗 供题

4. 设 A, B, C 均为 n 阶实对称半正定矩阵，满足 $ABC = CBA$。证明：ABC 也是半正定矩阵.

武汉大学. **尚镇冰** 供题

5. 设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，φ 在 V 的一组基下的表示矩阵为对角阵且主对角线上的元素各不相同，求 φ 的所有不变子空间.

刘大州 供题

6. 已知 $X \sim N(0,1)$，$Y = \mathrm{e}^x$，试求

(1) Y 的 95% 分位点 P_{95};　　$(\phi(97.5\%) = 1.96, \phi(95\%) = 1.645)$

(2) P_{95} 对应的 Y 值.

(3) 定义第 (2) 的值为极端点，另一个定义为平均极端值，定义积分:

$$E(Y \wedge d) = \int_0^d yf(y)\,\mathrm{d}y + d(1 \cdot F(y))$$

$$Q_{95}=P_{95}+\frac{E(y)-E(y\wedge P_{95})}{1-P_{95}}$$

求 Q_{95}.

河南郑州. **张** 供题

7. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布于 $[-1,1]$ 上的均匀分布, 求

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}\right|>\frac{1}{2}n\pi\right).$$

中国科学技术大学. **向禹** 供题

8. 考虑泊松随机事件流，以 $v(t)$ 表示长为 t 时间段内某事件发生的次数，记 $p_m(t)=P\{\nu(t)=m\}$ ，即 t 时间段内该事件发生 m 次的概率为 $p_m(t)(m=1,2,3,\cdots)$，证明：存在常数 $\lambda>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_m(t)=-\lambda p_m(t)+\lambda p_{m-1}(t),\quad p_0(0)=1,\,p_m(0)=0\,(m\geqslant 1)$$

并由此求出 $p_m(t)$ 的表达式.

黄欣奕 供题

9. 设有 n 阶对称阵 $A,Q\in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ 有标准正交列. 这时称 $B=Q^TAQ$ 是 A 的 r 部分. 设 A 的特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ ，设 B 的特征值为 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_r$，求证：$\mu_i\geqslant\lambda_i$ 且 $\mu_{r-i+1}\leqslant\lambda_{n-i+1},(i=1,2,\cdots r)$

武汉大学. **宣源昊** 供题

10. 设 $A \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(A)=0$，试证：

(1) $\exists P \in GL(n,\mathbb{R})$, s.t. $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0 .

(2) $\exists P \in O(n,\mathbb{R})$, s.t. $P^{T}AP$ 的对角元素都是 0.

武汉大学. **宣源昊** 供题

11. 数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 是 100 个连续整数 1921 到 2020 的一个随机排列，定义部分和数列

$$S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, \ldots, S_{100}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$$

求排列满足条件“数列 $\{S_n\}$ 的每一项 S_i $(1 \leqslant i \leqslant 100)$ 均不是 3 的倍数”的概率.

清华大学. **严君啸** 供题

12. 设 $M=\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$，如果实方阵 A 满足 $M=A^{\mathrm{T}}MA$，求证：$\det A=1$

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

13. 求 $\det\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{n\times n}$

武汉大学. **王鹏辉** 供题

14. 若 a_0 与 a_1 是任意常数，且 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{m}{n+1}a_{n-1}$，其中 $m\in N^*$.

(1) 证明：数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n^m}\right\}$ 收敛;

(2) 若 $a_0=a_1, m=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^m}$.

医生姐姐 供题

15. 求解边界问题

$$\begin{cases} y''+\dfrac{1}{4x^2}y=f(x) \\ y(t)=0, y(t+1)=0 \quad (t>0) \end{cases}$$

八一 供题

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，并且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明

$$\int_0^1(1-x^2)f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{6}{3\ln 2-2}\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

陕西. **匿名** 供题

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$, 常数 $\alpha>0$ 使得 $\int_0^1\left|\dfrac{f'(x)}{\sin^\alpha x}\right|^2\mathrm{d}x<+\infty$. 试证明:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\sin^{\alpha+1/2}x}=0.$$

吉林大学. **周鸣君** 供题

18. 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 内连续可微且无穷积分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 和 \quad \iiint_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

都收敛. 记

$$F(t)=\iiint_{B_t}(x+y+z)f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad t>0,$$

其中 $B_t=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$. 试证明

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{t^2}=0.$$

吉林大学. **周鸣君** 供题

19. 求解 SDE

$$\mathrm{d}X_t=-aX_t^2\mathrm{d}t+bX_t\mathrm{d}W_t,\quad t\geqslant 0$$
$$X_0=x_0.$$

其中 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 为布朗运动.

东南大学. **丁凯** 供题

20. 设 $f\in\mathscr{L}^2([0,T];\mathbb{R})$. 使用 Itô 公式证明

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}W_s}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^T f^2(s)\,\mathrm{d}s}$$

东南大学. **丁凯** 供题

21. Let X be a Banach space and $T \in \mathcal{L}(X)$ such that $\|T\| < 1$. Show that $I - T$ is an isomorphism. Show that $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converges in $\mathcal{L}(X)$ and $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

Qaycoc 供题

22. 设 $2 \leqslant p < \infty, u \in C_c^{\infty}(U)$. 证明存在常数 C, 使得

$$\|Du\|_{L^p(U)} \leqslant C\|u\|_{L^p(U)}^{\frac{1}{2}}\|D^2 u\|_{L^p(U)}^{\frac{1}{2}}$$

东南大学. **丁凯** 供题

23. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 i.i.d. 服从几何分布的样本, 具体而言

$$\mathcal{P}(X_1 = x_1) = \theta(1-\theta)^{x_1 - 1}, 0 < \theta < 1, x_1 = 1, 2, \cdots$$

(1) 求 θ^{-1}, θ^{-2} 的 UMVUE.
(2) 求 θ 的 UMVUE.

东南大学. **丁凯** 供题

24. A scientist wishes to apply Bayesian linear regression to a data set with responses $Y \in \mathbb{R}^n$ and design matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$. The model with parameter $\beta \in \mathbb{R}^p$ assumes

$$Y | X, \beta \sim N\left(X\beta, \sigma^2 I\right)$$

We only observe a subset $O \subset \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ of the entries in the design matrix, so that the data consist of Y, and $X_O = \left(X_{i,j}; (i,j) \in O\right)$. We consider the entries observed, O, to be fixed and independent of X and Y. Furthermore, we assume that $X_{i,j} \sim \text{Bernoulli}\left(\pi_j\right)$ independently for all $i = 1, \cdots, n$ and $j = 1, \cdots, p$.

The prior distribution makes all the parameters independent, with $\beta \sim N\left(0, \sigma_\beta^2 I\right)$ and $\pi_j \sim \text{Uniform}([0,1])$ for each $j = 1, \cdots, p$.

(1) Define the two steps of the Expectation-Maximisation algorithm for finding the maximum a posteriori(MAP) estimator of the parameters (β, π), with the unobserved covariates $X_U = \left(X_{i,j}; (i,j) \notin O\right)$ as latent variables.

(2) Write down the conditional distribution of X_u given $Y, X_O,\ \beta, m$.

(3) The E-step in the algorithm of part (1) yields a function $Q\left(\beta, \pi | \beta^{(t)}, \pi^{(t)}\right)$, where $(\beta^{()t)}), \pi^{(}t))$ is the value of the parameters at iteration t. Prove that this function is of the form

$$-(\beta - d)^T A(\beta - d) + \sum_{j=1}^{p} r_j \log \pi_j + q_j \log\left(1 - \pi_j\right) + \text{ constants}$$

for some coefficients $d \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{p\times p}, r \in \mathbb{R}^p$ and $q \in \mathbb{R}^p$. Write an expression for A as an expectation and prove that it is positive definite. Explain how the computational cost of finding the coefficients depends on the number of unobserved covariates in each row of X.

(4) Given the output of the E-step, solve the M-step.[You may express your answer in terms of the coefficients d, (r_j), and (q_j), defined in part (3).]

剑桥大学.**Merrick** 供题

25. We are given a Phylogenetic tree,a binary tree in which the leaves represent n animal species and the internal nodes represent ancestors of those species. Every node v is associated to a random variable X_v taking values in $\{\text{A}, \text{G}, \text{T}, \text{C}\}^k$, where each entry represents a DNA base present in a specific site of the genome. We define an evolutionary model parametrised by a Markov kernel K in the space $\{\text{A}, \text{G}, \text{T}, \text{C}\}$. The distribution of $\{X_v; v \text{ a node in the tree }\}$ satisfies the global Markov property on the tree.The conditional distribution of X_v, given its parent $X_{p(v)}$ on the tree is

$$\mu\left(X_v | X_{p(v)}\right) = \prod_{i=1}^{k} K\left(X_{p(v)}(i), X_v(i)\right)$$

The distribution of X_v for the root node v_0 is uniform on $\{\text{A}, \text{G}, \text{T}, \text{C}\}^k$.

Suppose we observe the value of X_v, for every leaf v of the tree. Derive the Expectation Maximisation update for the maximum likelihood estimate of K. If any quantity cannot be derived analytically, specify an algorithm to compute it, and justify your choice.

剑桥大学.**Merrick** 供题

2.3 数学组 A 类低年级

绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：数学竞赛

第二届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(数学组 A 类低年级组，赛题 25 道)

比赛时间：2020 年 8 月 1 日上午 9 点至 2020 年 8 月 5 号晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. 在空间直角坐标系中，设双叶双曲面

$$\Gamma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=\frac{z^2}{c^2}$$

（其中 $a>b>0$ ）. 该双曲面是否存在切锥面使得切口曲线（所有切点所构成的曲线）为圆？若存在，请求出双叶双曲面的切锥面顶点的轨迹；若不存在，请说明理由.

注：若曲面 S 外一点 P ，过该点作曲面的切线，切线族形成的曲面 S_P 称为曲面以 P 为顶点的切锥面.

本本蛋蛋 供题

2. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

xionger 供题

3. 已知 $X \sim E(\theta)$，试求以下问题：

(1) 求 θ 的极大似然估计 $x < 500$ 的数据丢失;

(2) 求 θ 的极大似然估计 $x > 1000$ 的数据丢失;

(3) 若 $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}$，求 θ 的极大似然估计 $x < 500$ 和 $x > 1000$ 的数据丢失;

河南郑州. **张** 供题

4. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$$

记 $\alpha = [a_1, a_2, a_3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, b_3]^{\mathrm{T}}$

(1) 证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 α, β 正交且均为单位向量，证明：f 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2 + y_2^2$.

天津大学. **崔凯华** 供题

5. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非零矩阵, 且满足 $A_i^2 = A_i\ (i = 1, 2, \cdots, n), A_iA_j = 0\ (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$

(1) 证明：$A_i(i = 1, 2, \cdot, n)$ 都可对角化;

(2) 求数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}A_1P, P^{-1}A_2P, \cdots, P^{-1}A_nP$ 为对角矩阵.

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

6. 设 M 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间，如果 M 中的矩阵两两可以交换，求证 M 的维数最大是 $[\frac{n^2}{4}] + 1$.

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

7. 设 A 是一个 5×4 阶的实矩阵，并且 A 有非零奇异值 $1,2,3,4$，试依次计算

(1) $\det\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$;

(2) $\operatorname{trace}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$;

(3) $\dim N\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$;

(4) $\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

8. Let F be a C^2 function on $[0,\infty)$. If $F\geqslant 0$, and F'' is bounded above by $L\geqslant 0$ then there is a constant $C>0$ that $C>0$ that depends on L such that

$$\int_0^{\infty} F(t)\mathrm{d}t \geqslant C\cdot F(0)^{3/2}$$

白朗 供题

9. 若 $x(t),g(t)$ 为区间 $[t_0,t_1]$ 上的非负连续实函数，$f(t)$ 为 $[t_0,t_1]$ 上的可积函数，$f(t)\geqslant 0$，有

$$x(t)\leq g(t)+\int_{t_0}^{t} f(\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

试证：

$$x(t)\leq g(t)+\int_{t_0}^{t} f(\tau)g(\tau)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau$$

黄欣奕 供题

10. 设 V 是 n 维欧氏空间，设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$ 满足如下条件：如果非负实数 $\lambda_1\cdots\lambda_m$ 使得 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，那么必有 $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$，试证：存在向量 $\alpha\in V$ 使得 $(\alpha,\alpha_i)>0, i=1,\cdots,m$

武汉大学. **王鹏辉** 供题

11. 计算积分

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$

神琦冰河 供题

12. 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}, x\in[0,+\infty)$，试证：$f(x)\in C[0,+\infty)$ 且 $f(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$ 但 $f'(0)$ 不存在.

biubiu 供题

13. 求解方程

$$x^4y''-x^3y'^3+3x^2yy'^2-\left(3xy^2+2x^3\right)y'+2x^2y+y^3=0$$

八一 供题

14. 设 $f(x) \in L^2(0,\pi)$, 证明下面两个不等式不能同时成立

$$\int_0^{\pi} |f(x)-\sin x|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{\pi} |f(x)-\cos x|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{3}{4}$$

华中科技大学. **大雄** 供题

15. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2<R^2\right\}$ 上连续，且 $f(x,y,z)\geqslant 0, \max f(x,y,z)=M$，试证:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\iiint_{\Omega} f^n(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=M$$

四川大学. **胡辉** 供题

16. 设 p 和 q 为实数且 $p>0, q+\dfrac{p^2}{4}>0$. 设 $a_0=0, a_1=1, a_{n+2}=pa_{n+1}+aa_n\ (n\geqslant 0)$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1^2+\sqrt{a_2^2+\sqrt{a_4^2+\sqrt{\cdots+a_{2^{n-1}}^2}}}}.$$

xionger 供题

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭黎曼可积，且广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在且收敛. 证明：存在分解 $f(x)=g(x)h(x)$ 满足:

(1) $g(x)$ 是单调函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

(2) 存在常数 M，使得任取 $A > a$，$h(x)$ 在 $[a, A]$ 上可积，且有

$$\left|\int_a^A h(x)\mathrm{d}x\right| \le M$$

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

18. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$，证明：在区间 $(0,1)$ 上存在不同的三个点 ξ, η, θ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t + f(\xi)\ln\left(\sqrt{1+\xi^2}+\xi\right)\right]\theta \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\int_0^{\eta} f(t)\,\mathrm{d}t + f(\eta)\ln\left(\sqrt{1+\eta^2}+\eta\right)\right](1-\theta)\end{aligned}$$

成立.

吉林大学. **董朔** 供题

19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$，且 $n \geqslant 3$ 时，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

(1) 令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$，求证：$S(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$，其中 $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

(2) 计算

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i^2}$$

刘力手 供题

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足

$$f(0)=2f'(0),\quad f'(1)+f(1)=0,\quad 2f'(x)+xf(x)\neq 0$$

试证：

$$4f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+\left(\xi^2+1\right)f(\xi)=0$$

四川大学. **胡辉** 供题

21. 证明

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)\cos t-f'(t)\sin t]\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2+|f'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

陕西. **匿名** 供题

22. 设 $V_1,V_2,\ldots,V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的 m 个真子空间，证明: 在 V 中必存在一个向量 α，它不属于任何一个 V_i.

刘大州 供题

23. 求

$$f(x,y,z)=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为闭区域 Ω 的边界曲面，n 为 Σ 上任意一点处的外法向量，r 为连结点 (x,y,z) 与点 (ξ,η,ζ)，(x,y,z) 不在 Σ 上，r 为 $\boldsymbol{r}$ 的模，θ 为 r,n 的夹角.

布布 供题

24. 一同学会教室听数学分析课，假设他迟到的次数服从参数为 3 的泊松分布.(假设时间区间固定为一个月)
(1) 求他迟到次数的方差;
(2) 假如他的数学分析老师比较随和，导致该同学每月都不可能没有迟到，求他迟到的方差;
(3) 假设他的老师最近心情不太好，该同学只能选择性迟到，如果他没有迟到的概率为 0.3，求他迟到次数的方差.

河南郑州. **张** 供题

25. Let $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ be a contingency table. A zero-inflated Poisson model makes the entries of Y independent, and the distribution of $Y_{i,j}$ a mixture of a point mass at 0 with weight π_j, and a Poisson distribution with mean $\mu_{i,j} = \alpha_i\beta_j$ with weight $1-\pi_j$.
Let the prior distribution of the parameters be $\alpha_i \sim$ Gamma $(1,1)$ for $i = 1,\cdots,n$, and $\beta_j \sim$ Gamma$(1,1)$, $\pi_j \sim$ Beta$(1,1)$ for $j = 1,\ldots,p$, with all parameters independent a priori.
We would like to sample the posterior distribution of the parameters $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_p)$, and $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_p)$ given observations Y.Introduce auxiliary variables and define a Gibbs sampler such that the distributions required at each step may be sampled easily, and specify these distributions.

剑桥大学.**Merrick** 供题

2.4 数学组 B 类高年级

绝密★启用前 试卷类型：数学竞赛

第二届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(数学组 B 类高年级组，赛题 25 道)

比赛时间：2020 年 8 月 1 日上午 9 点至 2020 年 8 月 5 号晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. 在空间直角坐标系中,已知椭球面 S : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 与直线 PQ 相离,且已知点的坐标分别为 $P(x_1,y_1,z_1)$ 与 $Q(x_2,\ y_2,\ z_2)$，过直线 PQ 作椭球面 S 的两个切平面，两个切点为 X_1 与 X_2 . 请用如上已知量表示出直线 PQ 垂直于直线 X_1X_2 的条件.

本本蛋蛋 供题

2. 在平面 π 上取定平面直角坐标系，已知一个椭圆的方程为 $x^2+8y^2+4xy+6x+20y+4=0$. 求 γ 的内接三角形 (即三个顶点都在 γ 上的三角形) 的面积的最大值.

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

3. 某班级有 n 位同学，共参加了 m 个社团. 任意两个社团中，共同学生的数目恰好都是 k 个 $(k>0)$. 试证明: $m<n$

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

4. 已知 2 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}5&2\\1&0\end{bmatrix}$$

(1) 方阵 A 的幂可写成 $A^k=c_kA+d_kI,k>0$，试计算 c_k,d_k；
(2) 试将 A^{-1} 写成 I 与 A 的线性组合.

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

5. 假设 A,B 和 M 是 $n\times n$ 的实矩阵，满足 $AM=MB$，并且矩阵 A 和矩阵 B 有相同的特征多项式. 试证明：对于任意 n 阶实矩阵 X 满足

$$\det(A-MX)=\det(B-XM)$$

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

6. 设 $A\in M_n(\mathbb{R}),\operatorname{tr}(A)=0$，试证：
(1) $\exists P\in GL(n,\mathbb{R})$, s.t. $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0 .
(2) $\exists P\in O(n,\mathbb{R})$, s.t. P^TAP 的对角元素都是 0.

武汉大学. **宣源昊** 供题

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 i.i.d. 服从几何分布的样本, 具体而言

$$\mathcal{P}(X_1=x_1)=\theta(1-\theta)^{x_1-1},0<\theta<1,x_1=1,2,\cdots$$

(1) 求 θ^{-1},θ^{-2} 的 UMVUE.
(2) 求 θ 的 UMVUE.

东南大学. **丁凯** 供题

8. 计算以下不定积分

(1) $\displaystyle\int \arcsin x \ln x^{2020} \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{2(\sec x+\tan x)-\cos x}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\csc x+\sec x+\tan x+\cot x}$

(4) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,(2020x+2019\sin x\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^3}\mathrm{d}x$

虚之花 供题

9. 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为连续可微的函数, 满足

$$f(x)=\int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t,\quad x\geqslant 1.$$

证明 f 在区间 $[1,\infty)$ 上具有有界变差, 即

$$\int_1^{\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

xionger 供题

10. 假设 $y_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y''+A_1(t)y'+A_2(t)y=0$$

的解，这里 $A_1(t),A_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续. 试证：方程的通解可表示为

$$y=y_1\left(C_1\int\frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}A_1(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+C_2\right)$$

其中 C_1,C_2 为任意常数，$t_0,t\in[a,b]$.

八一 供题

11. 给定正整数 n，设 $P(x)$ 是一个整系数 n 次多项式，证明：

$$\max_{0\le x\le 1}|P(x)|>\frac{1}{\mathrm{e}^n}$$

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

12. Let F be a C^2 function on $[0,\infty)$. If $F\geqslant 0$, and F'' is bounded above by $L\geqslant 0$ then there is a constant $C>0$ that $C>0$ that depends on L such that

$$\int_0^{\infty}F(t)\mathrm{d}t\geqslant C\cdot F(0)^{3/2}$$

白朗 供题

13. 设 p 和 q 为实数且 $p>0,q+\dfrac{p^2}{4}>0$. 设 $a_0=0,a_1=1,a_{n+2}=pa_{n+1}+aa_n\ (n\geqslant 0)$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1^2+\sqrt{a_2^2+\sqrt{a_4^2+\sqrt{\cdots+a_{2^{n-1}}^2}}}}.$$

xionger 供题

14. 判断并证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin n^2\right|}{n}$ 的敛散性.

biubiu 供题

15. 求证：

$$\cot x = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\ (x \neq k\pi, k \in Z)$$

韦磊 供题

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，并且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，证明

$$\int_0^1 (1-x^2) f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{6}{3\ln 2 - 2}\left(\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

陕西. **匿名** 供题

17. 设 $x'Ax$ 为一 n 元正定二次型，计算反常 n 重积分

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x'Ax} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

刘大州 供题

18. 若记

$$I_1 = (n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}$$

$$I_2 = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$$

$$I_3 = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$I_4 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n+k+1]{n+1} - \sqrt[n+k]{n}}{\sqrt[n+k]{n+1} - \sqrt[n+k]{n}}$$

分别计算 $\lim\limits_{n\to\infty} I_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_2$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_3$，$\lim\limits_{n\to\infty} 1_4$.

上海. **周晨宇** 供题

19. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n!)^n}{\mathrm{e}^{n^2}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k!\right)^2}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

医生姐姐 供题

20. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}, x\in[0,+\infty)$，试证：$f(x)\in C[0,+\infty)$ 且 $f(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$ 但 $f'(0)$ 不存在.

biubiu 供题

21. 设 n 元列向量 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 为齐次线性方程组 $(A+E)X=0$ 的一个基础解系，n 元列向量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_t$ 为齐次线性方程组 $(A-E)Y=0$ 的一个基础解系，求证：n 元列向量组 $X_1,X_2,\ldots,X_s,Y_1,Y_2,\ldots,Y_t$ 为齐次线性方程组 $(A^2-E)Z=0$ 的一个基础解系.

天津大学. **崔凯华** 供题

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$, 常数 $\alpha>0$ 使得 $\int_0^1\left|\frac{f'(x)}{\sin^{\alpha}x}\right|^2\mathrm{d}x<+\infty$. 试证明:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\sin^{\alpha+1/2}x}=0.$$

吉林大学. **周鸣君** 供题

23. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭黎曼可积，且广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在且收敛. 证明：存在分解 $f(x)=g(x)h(x)$ 满足：

(1) $g(x)$ 是单调函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

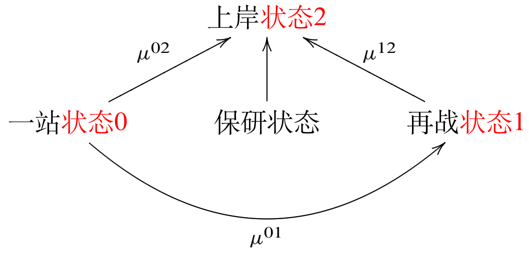
(2) 存在常数 M，使得任取 $A>a$，$h(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积，且有

$$\left|\int_a^A h(x)\mathrm{d}x\right|\le M$$

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

24. 某同学意图考取国内双一流大学基础数学系研究生，假设该考研过程可以通过一个连续的马尔可夫模型来仿真，下面我们对这名同学的考研历程进行一次模拟：

(1) 假设考研有 3 种状系：“状态 0”：一站状态；“状态 1”：再战状态（不区分复试及保研考试，未通过状态，可以指代多次考研，此状态不可逆，即该同学学习记录和学信档案不可修改）；“状态 2”：上岸状态。其状态转换图如示



(2) 假设考生一旦选择考研便不会放弃，且默认考研周期为一年，且 $\mu^{01}=0.02,\mu^{02}=0.03,\mu^{12}=0.05$，$\mu$ 为固定常数;

(3) 设转换因子与概率的关系：$1-F(x)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_{x+s}\mathrm{d}s}$，记为 tp_x^{ij}，表示由 i 到 j 的状态在 t 时间内的概率

要求计算如下问题：

(1) 求 2 年后，考生能去读研的概率多少？

(2) 若加入心态影响模型，其心态影响因子为 $\delta = 0.1$，它对考生状态只进行简单数乘，即 $tp_x^{02}(t)e^{-\delta t}$；假设学生父母比较开明，承诺孩子考研一战上岸读研奖励 20000 元，再战上岸读研奖励 10000 元；假如他从未放弃考研梦想直到考研上岸为止，求他所获得奖励的数学期望.

河南郑州. **张** 供题

25. Let (X, τ) be a compact Hausdörff topological space. Show that any strictly weaker topology on X is compact but not Hausdörff, and any strictly stronger topology is Hausdörff but not compact.

Qaycoc 供题

2.5 数学组 B 类低年级

绝密 ⋆ 启用前 试卷类型：数学竞赛

第二届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(数学组 B 类低年级组，赛题 25 道)

比赛时间：2020 年 8 月 1 日上午 9 点至 2020 年 8 月 5 号晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. 在空间直角坐标系中，设椭球面 $S:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，由椭球面的中心引三条相互正交的动射线，三条射线分别交曲面于点 M_1, M_2, M_3，动平面 Π 始终过这三点. 记点 H 为原点在动平面上的垂足，求动点 H 在空间中所形成的轨迹.

本本蛋蛋 供题

2. 设 A、B 分别是复数域上的 n 级、m 级矩阵，证明：关于 X 的矩阵方程 $AX-XB=O$ 只有零矩阵解的充分必要条件是 A 与 B 无公共特征值.

黄欣奕 供题

3. 求 $\det\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{n\times n}$

武汉大学. **王鹏辉** 供题

4. 设有 n 阶对称阵 $A, Q \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ 有标准正交列. 这时称 $B = Q^T AQ$ 是 A 的 r 部分. 设 A 的特征值为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ，设 B 的特征值为 $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_r$，求证：$\mu_i \geqslant \lambda_i$ 且 $\mu_{r-i+1} \leqslant \lambda_{n-i+1}, (i = 1, 2, \cdots r)$

武汉大学. **宣源昊** 供题

5. 设 M 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间，如果 M 中的矩阵两两可以交换，求证 M 的维数最大是 $[\frac{n^2}{4}] + 1$.

华中科技大学.**MatNoble365** 供题

6. 设函数 $u(x, y)$ 在 $\Omega = [0, 1]^2$ 上连续，且

$$\iint_\Omega \left|\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

则

$$\left(\int_0^1 |u(x, 0)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \leq 5\iint_\Omega |u(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\iint_\Omega |u(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_\Omega \left|\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

fly 供题

7. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导，并且满足对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有 $|f(x)| \leqslant 1$，$|f'''(x)| \leqslant 1$，证明对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有 $|f'(x)|^3 \leqslant \frac{9}{8}$.

欧阳 供题

8. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$ 的上侧，求函数 $f(x,y)$ 使满足

$$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint_{\Sigma} x\left(z^2+\mathrm{e}^z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(z^2+\mathrm{e}^z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

欧阳 供题

9. 设 $n\leqslant 1$，记 $I=[0,1]$，对任何 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in I^n$，令 $V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_j^k)$ 是以 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为元素的 n 阶 Vandermonde 行列式 (即它的第 k 行是 $x_1^{k-1},x_2^{k-1},\ldots,x_n^{k-1}(k=1,2,\cdot,n)$，令

$$M_n=\max_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in I^n}|V(x_1,x_2,\ldots,x_n)|$$

证明：当 $n\to\infty$ 时数列 $M_n^{\frac{1}{n(n-1)}}(n\geqslant 2)$ 收敛.

fly 供题

10. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足以下条件：

① 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=2y\left(x^2-y^2-1\right)$$

② $f(1)=1$.

试完成如下题目：

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{3}{2}$ 且 $a_{n+1}=f(a_n)$

•证明：$\{a_n\}$ 是严格单调递增的发散数列；

•判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 的敛散性，若收敛，求其和；若发散，说明理由.

吉林大学. **董朔** 供题

11. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 发散.

biubiu 供题

12. 已知在方程 $y'+a(x)y=f(x)$ 中，$c\in(0,a(x)]$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，求证: 这个方程的每个解当 $x\to+\infty$ 时都趋于零.

八一 供题

13. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$$

又 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=0$，试证:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

布布 供题

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，且 $|f'(x)|<mf(x)$，其中 $0<m<1$，任取实数 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，试证：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

张博 供题

15. 给定实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，满足 $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k > 0\,(k = 1, 2, \cdots)$，令

$$f(x) = \frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)}$$

证明：$f^k(0) > 0, k = 1, 2, \cdots$.

湖南师范大学. **李思瑶** 供题

16. 设 A、B 分别是复数域上的 n 级、m 级矩阵，证明：关于 X 的矩阵方程 $AX - XB = O$ 只有零矩阵解的充分必要条件是 A 与 B 无公共特征值.

黄欣奕 供题

17. 证明是否存在一个连续可微函数 $u(x)$(即 $u(x) \in C^1$), 使得

$$\int_0^1 (u')^2(x)\mathrm{d}x = 9\int_0^1 (u)^2(x)\mathrm{d}x$$

成立，且满足 $u(0) = u(1) = 0$. 如果成立请给出证明，如果不成立请给出反例.

华中科技大学. **大雄** 供题

18. 设曲线 $L: x^2 + y^2 = 16$，取逆时针方向，求

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + xy + y^2}$$

刘力手 供题

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

xionger 供题

20. 设数列 $\{u_n\}_0^\infty$ 满足 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，证明：$u_n=0,\forall n\geqslant 0$.

biubiu 供题

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足

$$f(0)=2f'(0),\quad f'(1)+f(1)=0,\quad 2f'(x)+xf(x)\neq 0$$

试证：

$$4f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+\left(\xi^2+1\right)f(\xi)=0$$

四川大学. **胡辉** 供题

22. 定义 Beta 函数

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t,\ (p,q>0)$$

已知

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

根据材料回答如下问题

(1) 证明：$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}$；

(2) 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^3}{1+x^7}\ln x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{49}\left(\sec\frac{\pi}{14}\tan\frac{\pi}{14}-\csc\frac{\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}\right);$$

(3) 已知 $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$，计算积分 $\int_0^1\frac{x^{-\frac{2}{5}}(1-x)^{-\frac{3}{5}}}{x-y}\mathrm{d}x$ 以及二重积分

$$\int_1^{+\infty}\int_0^1\frac{x^{-\frac{2}{5}}(1-x)^{-\frac{3}{5}}}{(x-y)\,y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

神琦冰河 供题

23. 设 $n\in\mathbb{N},x_0=0,x_i>0$，其中 $i=12,\cdots,n$，且满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$

韦磊 供题

24. 已知 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$，试证：$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 连续，且 $\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛以及 $\int_0^{2\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$ 发散.

韦磊 供题

25. 设 $e^{e^x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，求

(1) 求 a_0,a_1,a_2,a_3;

(2) 证明：$\dfrac{e}{(C\ln n)^n}\leqslant a_n\leqslant\left(\dfrac{e}{\ln n}\right)^n, n\geqslant 2$ 其中 $C\geqslant e$ 是常数.

biubiu 供题

第三届八一杯网络数学竞赛

3.1 非数组

绝密★启用前　　　　试卷类型：数学竞赛

第三届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(非数类组，满分：200 分，考试时间：11 个小时)

比赛时间：2021 年 8 月 1 日上午 9 点至晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目＋昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. 填空题 (本题满分 10 分，每空 2 分)

(1) 若曲线 γ 参数方程为 $\gamma(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos t, \sin t)$，$t \geqslant 0$，试计算 $\oint_\gamma \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}s$=__________，$\oint_\gamma (-y, x) \cdot \mathrm{d}(x, y)$=__________.

(2) 设 $y = y(x)$ 是由 $y^2(x-y) = x^2$ 所确定，则 $\int \frac{3y-y^2}{2x-3y}\mathrm{d}x$=__________.

(4) 计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n+1}{2^{n+1}}\left[\frac{(x+1)^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{x}\right]\mathrm{d}x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(4) 计算定积分的值

$$\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+2^{\sin x}\right)\left(1+2^{\cos x}\right)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(5) 求函数 $z = x + y + 4\sin x \sin y$ 的极大值__________，以及极小值__________.

八一供题

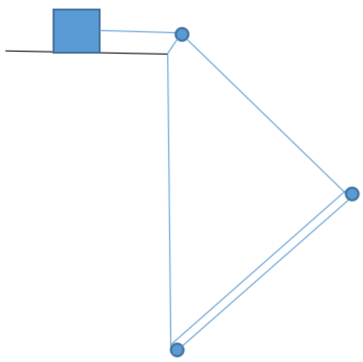
2. (本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}, \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}, \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

证明：对每个实数 $\alpha \in [-12, 18]$，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = \alpha$.(提示：参考第十一届非数决赛第四题)

八一 供题

3. (本题 10 分) 某同学为了完成物理实验，自己制作了一套运动系统。如下图所示，一根轻杆铰接在墙上，杆长为 R，杆的旋转角速度为 ω，墙高为 H，穿过滑轮连接一个物体，地面光滑。但是由于芯片故障，预设角速度大小未知，经过多次统计学检测，该杆每次单独完成转动的角速度恒定，即杆每次都是以匀速转动。全程不考虑刚体转动.



(1) 请计算该物体的速度与加速度（提示：可以利用导数的定义来考虑这个问题）；
(2) 经过多次检验，角速度大小服从伽马分布 (α, θ)，θ 服从泊松分布，试探索合分布试什么分布；
(3) 在对 θ 进行参数修正时，采取极大似然估计，求在 ω 服从伽马分布时的方 θ 的方差.

河南郑州张 供题

4. (本题 10 分) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

杨浩帆 供题

5. (本题 10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数,n 是一个正整数. 假设

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2021,\quad \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 10511855594.$$

(1) 证明: 存在唯一的 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [0,1]$, 使得 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 并且对任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$, 我们都有

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k).$$

其中 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 的定义如 (1) 中所示.

袁诚 供题

6. (本题 10 分) 计算下列不定积分

(1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int\frac{2021+\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int\frac{(\sin x+\cos x)\left(4-2\sin 2x-\sin^2 2x\right)}{\sin^3 2x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int x\{x\}[x]\mathrm{d}x$，其中 $[x]$ 是不大于 x 最大整数，$\{x\}=x-[x]$.

虚之花 供题

7. (本题 10 分) 求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n+1}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\sqrt{k}}\right)$$

董朔 供题

8. (本题 10 分) 设 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，其中 $f(u)$ 在 $u\in(0,+\infty)$ 内二阶可导，并且有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1+s^2+t^2}$$

且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$。根据上述信息回答下列问题：

(1) 定义：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{\ln x}=k(\neq0)$，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-k\ln x]=b$，则我们把

$$y=k\ln x+b$$

称作是 $g(x)$ 的渐近对数曲线方程，求 $\dfrac{f'(x)}{x}$ 的渐近对数曲线方程.

(2) 求 $f'(x)$ 在 $(0,1]$ 上的平均值.(一个函数在半开半闭区间上的平均值等于这个函数在闭区间上的平均值，端点处没有定义也可以自动视为连续)

刘力手 供题

9. (本题 10 分) 设 $x_1 = \frac{c}{2} \geqslant -2$，定义

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c + x_n^2\right),\ n \in \mathbb{N}_+.$$

试讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛情况.

白朗 供题

10. (本题 10 分) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 恒有不等式 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 成立，求 a 和 b 的取值范围.

亦可 供题

11. (本题 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > a_{n+1} > 0, n = 1, 2, \cdots$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n-1}\right)$ 收敛并求出它的值.

杨浩帆 供题

12. (本题 10 分) 记 Ω_n 为 n 维欧式空间中半径为 R 的 n 维球即

$$\Omega_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant R^2\right\}$$

为简化问题，通常作如下处理，已知 Ω_n 的体积 V_n 和表面积 S_n 满足关系: 当 Ω_n 半径由 R 增加到 $R+\Delta R$ 时，其体积 V_n 的增量 ΔV_n 的线性主部为 $S_n\Delta R$, 且以 $\dfrac{S_n}{V_n}$ 与维数 n 作图得到的散点位于一直线上，请运用微积分的相关知识并类比圆和球解决以下问题:

(1) 设 $f(x)$ 是 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的连续函数，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

并由此求 $n\to\infty$ 时 $\dfrac{V_n}{V_{n-1}}$ 的等价无穷小量;

(2) 推导 V_n 和 S_n 的通项公式;

(3) 若 $g(x)$ 在 Ω_n 上连续，求

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{R\to0^+}\frac{\sqrt{n}}{S_{n+1}}\iint_{\Omega_n}\cdots\int g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

亦可 供题

13. (本题 10 分) 求极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^x\sin^k\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x},k\in\mathbb{N}^+$$

皮皮皮 供题

14. (本题 10 分) 若 $f \in C^2[0,1]$，有 $f''(x) = e^{x^2}$，且满足

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = 0$$

求 $f(0)$.

焓 供题

15. (本题 10 分) 已知 $f_1(x) = x$，定义 $f_n(x) = x^{f_{n-1}(x)} (n > 1, x > 0)$

(1) 确定 x 的范围，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 收敛；

(2) 对于项数为 n 的数列，记 $y_k = \max\{z_1, z_2, \ldots, z_k\} (k = 1, 2, \ldots, n)$, 即 y_n 为 z_n 的控制数列。若

$$a_n = \lim_{x\to 0} f_n(x), (a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_n) = n * 2^n$$

(i) 若 c_n 为 b_n 的控制数列，S_n 为 b_n 前 n 项和，T_n 为 C_n 前 n 项和, 请说明 T_n 是否为 S_n 的控制数列?

(ii) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_{2n} + S_{2n}}{4^n}$.

亦可 供题

16. (本题 10 分) 若 $f(x)$ 是具有三阶连续导数的函数，并且对所有的 x, $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ 为正值. 假设对任意 x, 有 $f'''(x) \leqslant f(x)$, 证明: 对任意 x, $f'(x) < 2f(x)$.

xyz 供题

17. (本题 10 分) 设 A, B 是 n 级正定矩阵. 求 $\dfrac{|A+B|^2}{|AB|}$ 的最小值.

xyz 供题

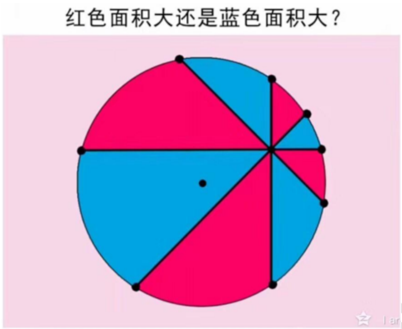
18. (本题 10 分) 设函数 $f, g : [a,b] \to [a,b]$, f, g 都是连续的，对任意的 $x \in [a,b]$, 有 $f \circ g(x) = g \circ f(x)$, 并且 f 是单调函数，证明存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = g(\xi) = \xi$.

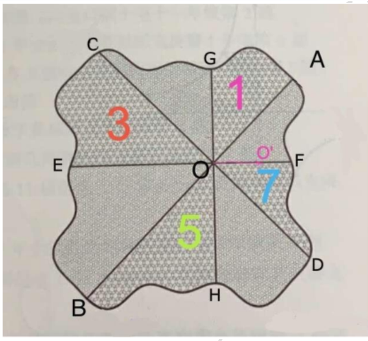
孙建峰 供题

19. (本题 10 分) 求函数 $y = \sin(\mu \arccos x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开公式.$(0 < \mu < 1)$

黄欣奕 供题

20. (本题 10 分) 前段时间有一道“小学奥数题”出现在微博、知乎、QQ 空间等各大平台，如图 1, 根据多种解法都可以得到红色面积与蓝色面积相等。我们不妨采用多元函数知识对结论进行推广：对于任意满足条件的封闭图形：假定曲线光滑，所围成的封闭区域有 4 条对称轴 (南北、东西、东北西南、西北东南), 在其中任取一内点 O, 作平行于对称轴的 4 条直线, 将图形分成 8 个区域, 如图 2 .





(1) 以该图形 4 条对称轴的交点为原点, 分别以东西向、南北向的对称轴为 x, y 轴, 建立直角坐标系, 设 O 点坐标为 (x, y), 区域 1 、3 、5 、7 面积之和为

$$f(x,y)=S_1(x,y)+S_3(x,y)+S_5(x,y)+S_7(x,y)$$

证明：当 O 以单位速度水平向右移动时, 区域 1 面积的变化

$$\left.\frac{\partial S_1}{\partial x}\right|_O=\frac{|OA|}{\sqrt{2}}-|OG|$$

并据此得到 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_O$ 的表达式.

(2) 设图 2 中封闭图形的面积为 $\mathcal{S}$, 证明：$f(x,y)\equiv\dfrac{\mathcal{S}}{2}$.

皮皮皮 供题

3.2 数学高年级组

第三届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(数学高年级组，满分：100 分，考试时间：11 个小时)

比赛时间：2021 年 8 月 1 日上午 9 点至晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校；
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. (本题 15 分) 已知椭球面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (其中 $a>b>c>0$), 过椭球面 Σ 外一点 $P\,(x_0,y_0,z_0)$ 作椭球面的切锥面 Σ', 记切口曲线为 C. 是否存在一张椭圆抛物面 Σ_0 使其与椭球面和切锥面均切于 C ? 若存在请给出椭圆抛物面 Σ_0 的方程, 若不存在, 请说明理由.(提示：〖抛〗物切面的方程与切锥面的方程很相似.)

本本蛋蛋 供题

2. (本题 15 分) 设 $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ ，满足:

$$A^2+B^2+2AB=O_2$$

$$\det(A^2-B^2)=0$$

求证:

$$\det(\operatorname{tr}(A)A-\operatorname{tr}(B)B)=0$$

吴昊 供题

3. (本题 15 分) 对 $z \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$，关于函数 $\psi(z) := \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ 的等式成立：

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\log\psi(z)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log|\psi(z)|).$$

白朗 供题

4. (本题 15 分) 设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数族. 若存在 $M>0$ 使得

$$|f_\alpha(x)| \leqslant M, \qquad x\in[a,b], \alpha\in I,$$

证明对 $[a,b]$ 中的任一可数集 E, 总有函数列 $\{f_{\alpha_n}(x)\}$, 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(x)\}, \qquad x\in E.$$

袁诚 供题

5. (本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可微,$f(a)=f(b)=0$ 且存在常数 $M>0$ 使得

$$|f'(x)| \leqslant M \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

(1) 证明不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{4}$$

且分母 4 不能再用更大的数代替;

(2) 进一步, 若 $f(x)$ 还满足 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则对任意 $x\in[a,b]$, 有:

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{16};$$

且分母 16 不能再用更大的数代替. 提示: 对 $f(x)$ 在 (a,b) 的零点进行分类讨论.

袁诚 供题

6. (本题 15 分) 若在 $t \in (0,\pi)$ 上定义函数列 $\{a_n(t)\}_{n\in N}$, $\{b_n(t)\}_{n\in N}$ (其中 N 为正整数)

$$a_n(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)(1+\cos((2n+1)t))$$

$$b_n(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)(1+\cos((2n+1)x))\mathrm{d}x$$

(1) 对任意的

$$t_0 \in A := \{t \in (0,\pi) : t/\pi \in R\backslash Q\}$$

将集合 $\{a_n(t_0)\}_{n\in N}$ 的闭包 $\overline{\{a_n(t_0)\}_{n\in N}}$ 记为 I_{t_0} ， 证明 $\cap_{t_0\in A} I_{t_0} = \{0\}$.

(2) (a) 证明如下估计

$$a_n(t) = O(n); b_n(t) = O(n) \quad (n \in N)$$

(b) 证明

$$\sup_{n\in N}\sup_{t\in R}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kt)}{k}\right| < \infty$$

尤江城 供题

7. (本题 10 分)For $t \in \mathbb{R}$ and $f \in L^1(\mathbb{R})$, we have the Fourier transform

$$\mathcal{F}_t(f) = \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{d}x$$

where $\mathrm{d}x$ refers to the Lebesgue measure, and we denote the map $f \mapsto \hat{f}$ by $\mathcal{F}$. The inverse is given as follows. If $f, \hat{f} \in L^1$, and

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}x,$$

then $f(x) = g(x)$ a.e. It follows that, if $f \in L^1$ and $\hat{f}(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$, then $f = 0$ a.e. (you can use this without proving it). Use integration theory to prove the following problems.

(1) Define the convolution on L^1 by

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Prove that if $f, g \in L^1$, then $f * g \in L^1$ and more precisely,

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1.$$

(For this reason, L^1 can be called a Banach algebra.)

(2) A complex homomorphism of L^1 is a linear map $\varphi : L^1 \to \mathbb{C}$ with an additional property

$$\varphi(f * g) = \varphi(f)\varphi(g).$$

Prove that $\mathcal{F}_t$ is an *injective* complex homomorphism and deduce the following identities (hold almost everywhere) without using any knowledge of integration theory:

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h, \quad (f, g, h \in L^1)$$

(3) Prove that if φ is a complex homomorphism on L^1, then for any $f \in L^1$, we have $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_1$ (note this obviously holds for the Fourier transform at a point t). [Hint: use the fact that L^1 is complete.]

(4) Prove that for $f \in L^1$, the translate map $T_f(y)$ defined by

$$y \mapsto f(x-y)$$

is uniformly continuous. [Hint: use the fact that C_c (all continuous functions with compact support) is dense in L^1. What does it imply when a continuous function has compact support?]

(5) Prove that to every non-trivial complex homomorphism φ on L^1, there corresponds a $t \in \mathbb{R}$ such that $\varphi(f) = \hat{f}(t)$. [Hint: start from the duality of L^1 and L^∞.]

introverted 供题

3.3 数学低年级组

第三届八一杯大学生网络数学竞赛试题

(数学低年级组，满分：100 分，考试时间：11 个小时)

比赛时间：2021 年 8 月 1 日上午 9 点至晚上 8 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校；
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. (本题 15 分) 证明：若二次曲面

$$\Gamma : a\left(x^2+2yz\right)+b\left(y^2+2xz\right)+c\left(z^2+2xy\right)=1$$

的参数满足如下条件:

$$ab+bc+ca=0,$$

该二次曲面则为旋转曲面.

本本蛋蛋 供题

2. (本题 15 分)

(1) 设 $A_n=(a_{ij})_{n\times n}, n\geqslant 3$，其中 $a_{ij}=(i-j)^2$，求 $\operatorname{rank}(A_n)$；

(2) 若给定 $n\geqslant k+1, k\in\mathbb{N}*$, 设 $A_n=(a_{ij})_{n\times n}, (n\geqslant k+1)$，其中 $a_{ij}=(i-j)^k$，试求 $\operatorname{rank}(A_n)$.

吴昊 供题

3. (本题 15 分) 先判断敛散性，给出严格的说理叙述过程；如果收敛，进一步求值:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{|\sin x|}}\mathrm{d}x$$

孙建峰 供题

4. (本题 15 分) 设 $f(x)\in C[a,b]$ (即 f 在 $[a,b]$ 上连续)，且对任意 $x\in(a,b)$ 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=0$$

(1) 求证: 若 $f(x)\in C^2[a,b]$ (即 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导)，则对任意 $x\in(a,b)$ 有 $f^{(2)}(x)=0$;

(2) 在不假设 $f(x)\in C^2[a,b]$ 条件下，求证 $f(x)\in C^2[a,b]$, 并求出 $f(x)$ 表达式 (提示：利用闭区间上的连续函数可以在闭区间上取到最值)

李家欢 供题

5. (本题 15 分) 设二阶可导的函数 $y=f(x)$ 是满足 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 当中 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=0$ 的特解，于是回答下列问题:

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$;

(2) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$;

(3) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x}f(x)\mathrm{d}x$.

刘力手 供题

6. (本题 15 分)

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_0=1,a_1=0,a_{n+2}=-\frac{(n+1)a_{n+1}+5a_n}{(n+1)(n+2)}$$

求幂级数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(2) 已知函数序列 $\{x_n(t)\}$ 满足

$$x_0(t)=\sin t,\begin{cases} x_n''(t)+x_n(t)=-2x_{n-1}'(t)\\ x_n(0)=0,x_n'(0)=0\end{cases}\quad(n\geqslant 1)$$

求和函数 $f(t,\varepsilon)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x_n(t)\varepsilon^n(0<\varepsilon<1)$.

黄欣奕 供题

7. (本题 10 分) Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}(n \geqslant 2)$ is a matrix satisfying the ineguality $||Ax||_2 \geqslant C||x||_2$ for some constant $C > 0$ and all $x \in \mathbb{R}^n$. Prove that there is a $\delta >$ such that $A + E$ is nonsingular for all matrices E satisfies $||E||_2 < \delta$.

韦磊 供题

8. (附加题 10 分) 玩家 A 和玩家 B 玩游戏，规则如下：首先玩家 A 选取实数集 $\mathbb{R}$ 上的闭区间 W_1，其次玩家 B 选取 W_1 的闭子区间 L_1，且满足 L_1 的区间长度不超过 W_1 的一半。然后，玩家 A 选取 L_1 的闭子区间 W_2，同样满足 W_2 的区间长度不超过 L_1 的一半。依此类推，得到一个闭区间套

$$W_1 \supset L_1 \supset W_2 \supset L_2 \supset \cdots \supset W_n \supset L_n \supset \cdots$$

根据闭区间套定理，必定会存在一个点 $x \in \mathbb{R}$，若 x 为有理数，则玩家 A 获胜，若 x 为无理数，则玩家 B 获胜。问最终谁能获胜?

欧阳翟 供题

第四届八一杯网络数学竞赛

4.1 非数组

绝密★启用前 试卷类型：数学竞赛

第四届八一杯大学生网络数学竞赛试题

非数类，满分：150 分，考试时间：8 小时

比赛时间：2022 年 8 月 1 日上午 9 点至 2022 年 8 月 1 号下午 5 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. (本题 10 分) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义函数

$$f(\alpha)=\prod_{k=1}^{20220801}\left(8\sin^4\left(\alpha+\frac{k\pi}{20220801}\right)+1\right).$$

求 $f(\alpha)$ 的最大值 M 与最小值 m, 并证明 M 与 m 均为有理数.

郑元问 供题

2. (本题 10 分) 试求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x$$

Gustakovich 供题

3. (本题 10 分) 计算以下积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x\cdot\tan x}{\csc x\cdot\sec x\cdot\cot x}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{\left(1+x^{2}\right)\left(5+8x+5x^{2}\right)+\sqrt{\left(1+2x+3x^{2}\right)\left(3+2x+x^{2}\right)}}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+x^{3}}{\left(1+x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}(x+1)}\left(\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(x+\sin x+2022\right)\mathrm{d}x$

虚之花 供题

4. (本题 10 分) 设 $L:\begin{cases} x^{2}+y^{2}+z^{2}=4 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ 试证明:

$$\int_{L}\sqrt{x}\,\mathrm{d}s\geqslant\frac{5\pi}{3}$$

李嘉旻 供题

5. (本题 10 分) 已知

$$a_{n}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(x^{2n}\right)-(\tan x)^{2n}}{\left(1-\prod\limits_{k=1}^{2n}\cos kx\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\cos^{k}x-1\right)\right)},\ b_{n}=\frac{n!}{2^{n}}a_{n}$$

求无穷级数和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_{n}$.

赵佳明 供题

6. (本题 10 分) 设二阶连续可导函数 $a(x)$ 满足

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant a''(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

试证明:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{4/5}} \sum_{N<n\leqslant 2N} \cos a(n) = 0$$

李嘉旻 供题

7. (本题 10 分) 利用坐标变换证明: 空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ 截椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所得截口曲线必为椭圆或圆.

郑元问 供题

8. (本题 10 分)(1) 计算定积分

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1+x^2}{1+x^4} \arctan x \mathrm{d}x$$

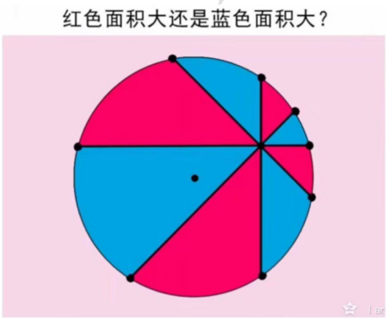
(2) 记 $z(x,y) = f\left(\mathrm{e}^{-x}\cos y, \mathrm{e}^{-x}\sin y\right)$, $f(u,v)$ 关于每个变量都具有二阶连续偏导数, 并且有 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2+v^2$, 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} z)$.

刘力手 供题

9. (本题 10 分) 分析级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^b}(a,b>0)$ Cauchy 乘积的敛散性。

海若 供题

10. (本题 10 分) 记曲线 1 : $x^n+y^n=1$ 在第一象限与 x 轴和 y 轴围成的面积为 S_n，记曲线 2 : $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=1$ 在第一象限与 x 轴和 y 轴围成的面积为 T_n，S_3 和 T_3 可见如下图所示。求极限: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(1-S_n)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(2^{2n}T_n-\sqrt{\pi n}\right)$



赵佳明 供题

11. (本题 25 分) 计算

$$\frac{\dfrac{\displaystyle\int_0^{\infty}\cos\frac{3\sqrt{3}}{4}x^3\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\infty}\sin 16x^3\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{2^{-n}}{2n+1}}{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)\ln x}\ln\left(\frac{1+2x^{2\sqrt{2}}+x^{4\sqrt{2}}}{1+2x^{\sqrt{2}}+x^{2\sqrt{2}}}\right)\mathrm{d}x}+\dfrac{21\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}}{\displaystyle\lim_{t\to 0+}\int_{-2022}^{2022}\frac{t\cos x}{x^2+t^2}\mathrm{d}x}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left[n\left(\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x\right)-\frac{1}{2}\right]}$$

海若 供题

12. (本题 25 分) 设函数 $f\in C(-\infty,+\infty)$ 的周期为 1.

(1) 试求极限

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^1 f\left(\frac{1}{tx}\right)\mathrm{d}t$$

(2) 证明: $x\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{1}{tx}\right)\mathrm{d}t$ 的某右邻域的一个渐进为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)\left\{\frac{1}{x}\right\}^{n+1}}{\left[\frac{1}{x}\right]^{n+2}}\int_0^1 f\left(\left\{\frac{1}{x}\right\}t\right)t^n\mathrm{d}t+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 f(v)v^n\mathrm{d}v\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}\mathrm{e}^{-\left[\frac{1}{x}\right]t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$$

官协 供题

4.2 数学组 A 类

绝密★启用前 **试卷类型：数学竞赛**

第四届八一杯大学生网络数学竞赛试题

数学组 A 类，满分：150 分，考试时间：8 小时

比赛时间：2022 年 8 月 1 日上午 9 点至 2022 年 8 月 1 号下午 5 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. (本题 10 分) 在空间直角坐标系中, 给定三个点 $A(3,2,1)$, $B(1,4,3)$, $C(2,1,4)$. 过点 A 并与单位球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 相切的圆锥面为 Γ_A, 过点 B 并与单位球面 S 相切的圆锥面为 Γ_B, 过点 C 并与单位球面 S 相切的圆锥面为 Γ_C. 已知 Γ_A 与 Γ_B 的截口曲线落在平面 α (截口曲线落于平面不用证明, 下同), 已知 Γ_B 与 Γ_C 的截口曲线落在平面 β, 已知 Γ_A 与 Γ_C 的截口曲线落在平面 γ. 证明: 平面 α,β,γ 交于同一条直线.

本本蛋蛋 供题

2. (本题 10 分) 设 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 、$f_3(x)$ 是复系数多项式, 试证明: 当 $n\geqslant 3$ 时方程

$$(f_1(x))^n+(f_2(x))^n=(f_3(x))^n$$

没有两两互素的解。

李家欢 供题

3. (本题 10 分) 设 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的连续可导函数, 且满足 $\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t = 0$, 则

$$\int_0^{2\pi} x'(t)^2\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{2\pi} x(t)^2\mathrm{d}t$$

等号成立当且仅当 $x(t) = a\cos t + b\sin t$.

八一 供题

4. (本题 10 分) 设 $\alpha\in(0,1)$, $A_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(k^\alpha\right)$, $B_n = \sum_{k=1}^{n}\cos\left(2k^\alpha\right)$. 令 $\gamma = \max\{\alpha, 1-\alpha\}$.

(1) 证明：$\exists A>0$, 使得 $|A_n|\le An^\gamma$.

(2) 证明：取 $\beta>\gamma$, 那么 $\exists B>0$, 使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}A_k\left(\frac{1}{k^\beta}-\frac{1}{(k+1)^\beta}\right)\right|\le A + A(\gamma+B)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^{1+\beta-\gamma}}.$$

(3) 证明：若 $\delta>\gamma$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n^\alpha\right)}{n^\delta}$ 收敛.

Gustakovich 供题

5. (本题 10 分) 设 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{Z}, d = \gcd(a_1, \cdots, a_n)$. 证明: 存在 n 阶整系数可逆矩阵 P, 使得 $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^n$.

Gustakovich 供题

6. (本题 10 分) 设 $y = y(x)$ 满足常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y, x), x \in [a, b]$$

其中 $f = f(u, v) : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$，关于 u 可微且偏导数连续，关于 v 连续. 且对 $\forall u \in \mathbb{R}$, $v \in [a, b]$，有 $\dfrac{\partial f(u, v)}{\partial u} \geq 0$，且在任意区间上不恒为 0，

$$\lim_{u \to \infty} \inf \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} > 0, \lim_{u \to -\infty} \inf \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} > 0$$

求证：对 $\forall c$，$d \in [a, b]$ $(c < d)$，满足 $y(c) = y(d)$ 的解唯一.

常杰 供题

7. (本题 10 分) 设下列非负函数 $\alpha(t),\phi(t)\in C[0,+\infty),\psi(t)\in C(0,+\infty)$, 其中函数 $\psi(t)$ 在瑕点 $t=0$ 处积分收敛, $M(t)\in L[0,+\infty)$ 并且局部有界, 即对任意的实数 $-\infty<a<b<+\infty$, 存在常数 $C_{a,b}$ 使得

$$M(t)\leqslant C_{a,b},\quad \forall a\leqslant t\leqslant b$$

如果函数 $M(t)$ 满足

$$M(t)\leqslant \alpha(t)+\int_0^t M(t-s)\phi(t)\psi(s)\mathrm{d}s,\forall t>0$$

和

$$\int_x^t \phi(s)\psi(t-s)\psi(s-x)\mathrm{d}s=H(x)G(t)=f(x,t)\neq 0,H(x)G(t)\in C[0,+\infty)^2$$

注: 这样的函数是存在的, 如以下就满足上述要求

$$\int_u^t \frac{1}{(1+s)\sqrt{t-s}\sqrt{s-u}}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{\sqrt{1+t}\sqrt{1+u}}$$

证明: 固定任意的 $t\in[0,+\infty)$ 均有

$$M(t)\leqslant\alpha(t)+\phi(t)\left(\int_0^t\alpha(s)\psi(t-s)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(\alpha(x)+\phi(x)\int_0^x\alpha(s)\psi(x-s)\mathrm{d}s\right)f(x,t)e^{\int_x^t\phi(u)f(u,u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}x\right)$$

并且结论无法再改进.

官协 供题

8. (本题 10 分) 给定 n 阶可微函数 $w_i, f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 并定义增量为 t 的差分算子 Δ 如下:

$$\Delta^0 f(x) := f(x),\ \Delta f(x) := f(x+t) - f(x),\ \Delta^{1+k} f(x) := \Delta\{\Delta^k f(x)\}\ (k \in \mathbb{N}_+).$$

其中 $\Delta(rf(x)) = r\Delta f(x)$($r$ 是任一不依赖于 x 的常数). 计算 $\Delta^k f(x) (k \in \mathbb{N}_+)$, 并求行列式:

$$\Phi_t(x) := \begin{vmatrix} \Delta\{w_1(x)f_1(x)\} & \Delta\{w_1(x)f_2(x)\} & \cdots & \Delta\{w_1(x)f_n(x)\} \\ \Delta^2\{w_2(x)f_1(x)\} & \Delta^2\{w_2(x)f_2(x)\} & \cdots & \Delta^2\{w_2(x)f_n(x)\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^n\{w_n(x)f_1(x)\} & \Delta^n\{w_n(x)f_2(x)\} & \cdots & \Delta^n\{w_n(x)f_n(x)\} \end{vmatrix}.$$

记 $c = \dfrac{n(n+1)}{2}$, 请证明 $\lim\limits_{t \to 0} \Phi_t(x) t^{-c}$ 存在并求之.

注: 用含 w_i 和 f_i 的行列式表示 $\Phi_t(x)$ 和极限.

白朗 供题

9. (本题 10 分) 对 $1 \le p \le 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x$$

是 $L^p(\mathbb{R})$ 到 $L^q(\mathbb{R})$ 的有界线性单射, 且为 $L^2(\mathbb{R})$ 到自身的满射. 我们要说明 $p \neq 2$ 时这一般是不成立的, 即此时 Fourier 变换不一定是满射. 本题中我们考虑 $p = 1$.

(1) 证明对所有 $0 < a < b < +\infty$, 成立

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \right| < 4.$$

(2) 证明对所有奇函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 成立

$$\left| \int_a^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi \right| < 4 \| f \|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

以此证明存在奇函数 $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ 使得不存在 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 使得 $\hat{f} = g$.

Pikel 供题

10. (本题 10 分) Assume A is a measurable subset in $\mathbb{R}^d$. Assume a sequence $\{f_n\} \in L^1(A, dx)$, $f(x) \in L^1(A, dx)$, satisfies

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{pointwisely.}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1(A)} = \|f\|_{L^1(A)}.$$

Show that

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f, \quad \text{in } L^1 - \text{ sense}$$

袁诚 供题

11. (本题 25 分) In this Problem, we want to show the local existence of the solution for nonlinear Klein-Gordan equation in $3+1$ dimensions.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u + V(x)u = u^3; \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Where potential $V(x)$ is rapidly decreasing, Furthermore, we write $B_0^2 := -\Delta + m^2$ for convenience. Hence we can write the equation by

$$\begin{cases} u_{tt} + B_0^2 u = -V(x)u + u^3; \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases} \tag{4.2}$$

We also assume initial data $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3), u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

(a) Show that the Klein-Gordan equation is equivalent with the below system

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B_0^2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}); \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Where,

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -Vu + u^3 \end{pmatrix}.$$

(b) One can check the solution of system (3) is find a fixed point for operator T, where

$$Tv(t) = U(t)\boldsymbol{u}_0 + \int_0^t U(t-s)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

Where $U(t)$ is a family of operator dependent of t. Please write the expression of $U(t)$.*Hint: Applying semi-group.*

(c) Let $\boldsymbol{X}_0 = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$. Show that there exists *maximal* positive number T_-, T^+ which depend on the $\boldsymbol{X}_0$ norm of the initial data, such that the initial value problem (3) has a unique solution of class $C\left((-T_-, T^+); \boldsymbol{X}_0\right)$ in the sense of a fixed point of T defined in (4).

Hint:We start it by show the local existence of the solution. For $T > 0$ sufficiently small (which is depending essentially on the $\boldsymbol{X}_0$ norm of $\boldsymbol{u}_0$), the mapping T maps a closed ball $C\left([0,T); \boldsymbol{X}_0\right)$ to itself, and is a strict contraction.

(d) If T^+ is finite, show that $||\boldsymbol{u}(\cdot,t)||_{\boldsymbol{X}_0}$ is unbounded near T^+.

袁诚 供题

12. (本题 25 分) Throughout, fix $p \in (0, 1)$. In this exercise we try to establish some striking facts of L^p-space with respect to the Lebesgue measure m on $[0, 1]$.

(1) The elements of L^p consists of measurable functions $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ satisfying

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f|^p \mathrm{d}m < \infty.$$

Show that L^p is a complex vector space and it admits a metric $d(f, g) = \Delta(f - g)$. ($f = g$ means f and g coincide almost everywhere.) [Hint: prove that the inequality $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ holds for all $a, b \geq 0$ first.]

(2) Show that the map $\gamma : L^p \to L^1$ given by $f \mapsto |f|^p$ is uniformly continuous. The topology of L^1 is given by the L^1-norm $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f|\mathrm{d}m$. The topology of L^p is given by d.

(3) We show that L^p really *lacks* convex sets and derive some important results. For convenience we use balls $B_R = \{f \in L^p : \Delta(f) < R\}$.

(a) Show that the only non-empty convex open set of L^p is L^p itself by completing details of the following arguments. Let V be a non-empty open convex subset of L^p. Without loss of generality we can assume that $0 \in V$. There exists some $R > 0$ such that $B_R \subset V$. Pick any $f \in L^p$. Show that f can be written in the form

$$f = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n)$$

where $g_1, \ldots, g_n \in B_R \subset V$. Conclude that $f \in V$ and that $L^p = V$. [Hint: you may use the fact that $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^t |f|\mathrm{d}m$ is continuous. Consider finding a big enough n and decomposing $[0, 1]$ into n suitably small segments.]

(b) Deduce that a continuous linear map $\Lambda : L^p \to \mathbb{C}$ can only be the zero map.

(c) Using the result of (a) or (b), show that L^p is not normable.

introveted 供题

4.3　数学组 B 类

绝密 ⋆ 启用前　　　　试卷类型：数学竞赛

第四届八一杯大学生网络数学竞赛试题

数学组 B 类，满分：150 分，考试时间：8 小时

比赛时间：2022 年 8 月 1 日上午 9 点至 2022 年 8 月 1 号下午 5 点

注意事项:1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com，另外为了批阅方便最好统一使用比赛专用答题纸与草稿纸提交；逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;
4. 每题暂不设置分值，祝各位都能给出满意的答卷.

---

1. (本题 10 分) 在空间直角坐标系中, 若空间中的曲线上每一点与顶点 M 以直线连结, 于是得到一个锥面, 称之为曲线关于点 M 的射影锥面. 平面 xOy 上的曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t, b\sin t, 0\}$ 记为 L, 平面 xOz 上是否存在动点 P, 使得曲线 L 关于点 P 的射影锥面 Σ 为圆锥面? 若存在, 请给出动点 P 的轨迹方程; 若不存在, 请说明理由.

本本蛋蛋 供题

2. (本题 10 分) 设 P 是由所有 $[0,1]$ 上有界函数构成的线性空间, 设 A 是 P 的有限维子空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 中一序列, 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于 $x\in P$, 证明: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 x。

李家欢 供题

3. (本题 10 分) 设

$$f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

且 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 是双射. 求 f 在 $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ 上的极值, 并证明这些极值尽在 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ 上取到.

Gustakovich 供题

4. (本题 10 分) 设 A, B 均为正定矩阵, 且 $A^n - B^n > 0$ 对于某个自然数 n 成立, 则 $A - B$ 亦正定.

羽 供题

5. (本题 10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbf{F}), A_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbf{F}), A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{F})$. $f_1.f_2$ 为 A_1, A_2 的特征多项式. 证明: 若 $(f_1, f_2) = 1$, 则 $A \sim \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$.

Gustakovich 供题

6. (本题 10 分) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n-1)!!]^{\frac{1}{2n}}}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)!!\right]^{\frac{1}{n^2}}}$$

退后 供题

7. (本题 10 分) 设 $f:[a,b]\to[a,b]$, 且

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$$

(1) 证明 f 存在不动点;

(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 构造数列 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+f(x_n)}{2}, n=1,2,\cdots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛;

(3) 若 $|f(x)-f(y)|<|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$, 证明 f 不动点存在且唯一;

(4) 设 $M\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集, 设 $g:M\to M$ 且 $|g(x)-g(y)|<|x-y|,\forall x,y\in M$. 证明: g 不动点存在且唯一.

谭宇 供题

8. (本题 10 分) 设 $p>0$, 试就 p 的取值讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^p}$$

的敛散性 (收敛时应当确定是否绝对收敛).

郑元问 供题

9. (本题 10 分) 特征值:

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定, 其特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是一组正交单位向量, 证明:

$$\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^2\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\right)$$

进而有: $1 \leqslant \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\right) \leqslant \dfrac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实对称, 其特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & a\end{bmatrix}$, 其特征值 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n+1}$ 证明:

$$\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \mu_{n+1}$$

海若 供题

10. (本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数且满足 $f(0)f(1) \geqslant 0$, 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x + 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

退后 供题

11. (本题 25 分) 规定 $0!!=(-1)!!=1$, 请证明: 对于 $n \geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{n+\frac{4}{\pi}-1}} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}}.$$

白朗 供题

12. (本题 25 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{x},\quad a_{n+1}=\sqrt{x}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right),\quad (x>1, n\in\mathbb{N}_+)$

(1) 证明：存在函数 $C_0(x), C_1(x), C_2(x)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x^n\left[x^n\left[x^n\left[\frac{a_n}{(\sqrt{x})^n}-C_0(x)\right]+C_1(x)\right]+C_2(x)\right]$$

存在.

(2) 在问题 (1) 的前提下, 设 $f(x)=C_0(x)C_1(x)+C_0^3(x)C_2(x)$, 并且已知常数 a,b,c,A,B,C,D 满足

$$\lim_{x\to+\infty} x^c\left[x^b\left[x^a[f(x)-A]+B\right]+C\right]=D$$

求 $(A+B+C+D)^{abc}$.

H 供题