

全国大学生数学竞赛试题选 (微分方程与空间解析几何)

一、过三条直线 $L_1: \begin{cases} x=0 \\ y-z=2 \end{cases}$, $L_2: \begin{cases} x=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ 与 $L_3: \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y-z=0 \end{cases}$ 的圆柱面方程为_____。

(第十三届全国大学生数学竞赛预赛试题)

二、设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界连续函数, 证明: 方程 $y'' + 14y' + 13y = f(x)$ 的每一个解在 $[0, +\infty)$ 上都是有界函数。(第十三届全国大学生数学竞赛预赛试题)

三、微分方程 $\frac{dy}{dx} x \ln x \sin y + \cos y (1 - x \cos y) = 0$ 的通解为_____。(第十四届全国大学生数学竞赛预赛试题)

四、设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数, 满足 $3[3 + f^2(x)]f'(x) = 2[1 + f^2(x)]^2 e^{-x^2}$, 且 $f(0) \leq 1$ 。证明: 存在常数 $M > 0$, 使得 $x \in [0, +\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$ 。(第十一届全国大学生数学竞赛预赛试题)

五、已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t \, dt = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____。(第九届全国大学生数学竞赛预赛试题)

六、设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程。(第七届全国大学生数学竞赛预赛试题)

七、已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该微分方程是_____。(第六届全国大学生数学竞赛预赛试题)

八、求通过直线 $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 的两个互相垂直的平面 π_1, π_2 , 使其中一个平面过点 $(4, -3, 1)$ 。

(第四届全国大学生数学竞赛预赛试题)

九、求直线 $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离。(第二届全国大学生数学竞赛预赛试题)

十、已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程。(第一届全国大学生数学竞赛预赛试题)