第二节　　　方差

- 方差的定义
- 方差的计算
- 方差的性质
- 切比雪夫不等式
- 课堂练习
- 小结　布置作业

上一节我们介绍了随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

例如，某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：

测量结果的均值都是 a

甲仪器测量结果

较好

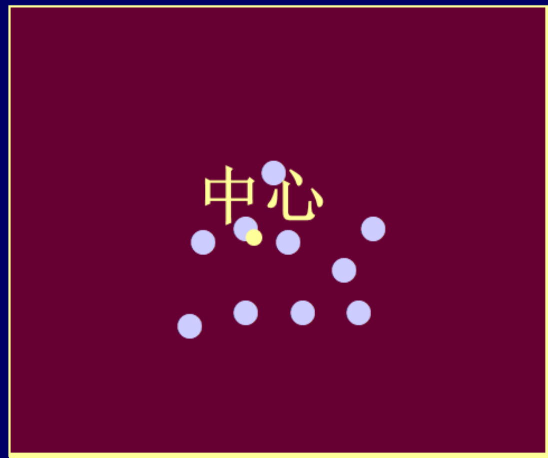
乙仪器测量结果

若让你就上述结果评价一下两台仪器的优劣，你认为哪台仪器好一些呢？

因为乙仪器的测量结果集中在均值附近

又如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图:

甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近 .

由此可见,研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的.那么,用怎样的量去度量这个偏离程度呢?容易看到

$$E\{|X-E(X)|\}$$

能度量随机变量与其均值E(X)的偏离程度. 但由于上式带有绝对值,运算不方便,通常用量

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

来度量随机变量X与其均值E(X)的偏离程度.

这个数字特征就是我们这一讲要介绍的

方差

一、方差的定义

设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，称$E\{[X-E(X)]^2\}$为 X 的方差. 记为D(X)或Var(X)，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

方差的算术平方根$\sqrt{D(X)}$称为X的标准差或均方差记为$\sigma(X)$，它与X具有相同的量纲。

方差刻划了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度 .

若X的取值比较集中，则方差D(X)较小；

若X的取值比较分散，则方差D(X)较大.

因此，D（X）是刻画X取值分散程度的一个量，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。

二、方差的计算

由定义知，方差是随机变量 X 的函数

$$g(X)=[X-E(X)]^2$$

的数学期望 .

$$D(X)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx,\end{cases}$$

X为离散型，分布率 $P\{X=x_k\}=p_k$

X为连续型，X概率密度$f(x)$

计算方差的一个简化公式

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

展开

证：$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$

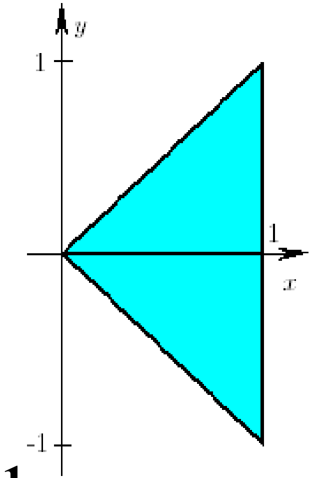
利用期望性质

$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$

$=E(X^2)-[E(X)]^2$

【例】设(X, Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, |y|<x \\ 0, & 其它\end{cases}$

求$D(X)$及$D(Y)$.



解：记D：$|y|<x$，$0<x<1$，如图，则

$$E(X)=\iint\limits_D xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}xdydx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\iint\limits_D yf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}ydydx=0$$

$$E(X^2)=\iint\limits_D x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}x^2dydx=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$

$$E(Y^2)=\iint\limits_D y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}y^2dydx=\frac{2}{3}\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{10},\ D(Y)=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}.$$

例: 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

且 $D(X)=1/18$, 求 a, b 及 $E(X)$.

解: 由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+b \overset{\text{令}}{=} 1$,

而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{4}+\frac{b}{3},$$

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}-\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)^2 \overset{a=2-2b}{=\!=\!=\!=}$

$\frac{2+2b-b^2}{36} \overset{\text{令}}{=} \frac{1}{18}$, 解得 $b=0$, $a=2$, $E(X)=2/3$

或 $b=2$, $a=-2$, $E(X)=1/3$.

一些重要分布的数学期望和方差

0-1分布 p	$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
二项分布 $b(n,p)$	$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$E(X)=\lambda$	$D(X)=\lambda$
均匀分布 $U(a,b)$	$E(X)=(a+b)/2$	$D(X)=(b-a)^2/12$
指数分布 $E(1/\theta)$	$E(X)=\theta$	$D(X)=\theta^2$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$E(X)=\mu$	$D(X)=\sigma^2$

【要求】熟记结论，能熟练验证。

【P101 例2】

设随机变量X具有(0—1）分布，其分布率为

$$P\{X=0\}=1-p,\quad P\{X=1\}=p$$

求D(X) .

解 $$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

由公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

因此,0-1分布

$$E(X)=p, D(X)=p(1-p)$$

【P101 例3】 设$X \sim \pi(\lambda)$，求$D(X)$。

解 X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0$$

上节已算得 $E(X)=\lambda$, 而

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

麦克劳林展开式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

因此,泊松分布

$$E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$$

由此可知，泊松分布的 数学期望与方差相等，等于 λ。泊松分布的 分布率中只含一个参数λ,只要知道λ,泊松分布就被确定了.

二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= E[X(X-1)+X] \\
&= E[X(X-1)] + E(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\
&\quad + np \\
&= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np \\
&= (n^2 - n)p^2 + np
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2 \\
&= np(1-p).
\end{aligned}
$$

【P101 例4】设$X \sim U(a,b)$，求$D(X)$。

解　X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

上节已求得$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$。方差为

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

因此,均匀分布

$$E(X)=\frac{a+b}{2},D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

【P101 例5】设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

分部积分法

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

因此, $D(X)=\theta^2$

由此可知,指数分布

E（X）$=\theta$，D（X）$=\theta^2$

正态分布 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$,得

分部积分法

$$\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u$$

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \right)$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

三、方差的性质

1. 设C 是常数, 则 $D(C)=0$;

2. 若 C 是常数, 则 $D(CX) = C^2 D(X)$,

$$D(X+C) = D(X) ;$$

3. 设 X 与 Y 是两个随机变量，则

$$D(X+Y) = D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

若X,Y相互独立，则 $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$

4. $D(X)=0 \quad \Leftrightarrow \quad P\{X= C\}=1$，这里C=E(X)

性质2

证明 $D(aX+b)=E\left\{\left[(aX+b)-E(aX+b)\right]^2\right\}$

$$=E\left\{(aX+b)-\left[aE(X)+b\right]\right\}^2$$

$$=E\left\{a\left[X-E(X)\right]\right\}^2$$

$$=E\left\{a^2\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

$$=a^2E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

$$=a^2D(X)$$

性质3

证明

$$2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=2E\{XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)\}$$

$$=2\{E(XY)-E(Y)E(X)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)\}$$

$$=2\{E(XY)-E(X)E(Y)\}$$

$$=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

若 X,Y 相互独立, 由数学期望的性质4得

$$\boldsymbol{D(X+Y)=D(X)+D(Y)}$$

此性质可以推广到有限多个相互独立的随机变量之和的情况.

下面我们举例说明方差性质的应用．

【P103 例6】 设$X\sim B(n,p)$，求E(X)和D(X).

解 $X\sim B(n,p)$，则X表示n重努里试验中的“成功”次数．

若设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$ $i=1,2,\ldots,n$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是n次试验中“成功”的次数

可知X_i是0－1分布，所以

$$E(X_i)=p,\ D(X_i)=p(1-p)\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

由于$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立

于是
$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)$$

若$X\sim B(n,p)$,则

$$E(X)=np, D(X)=np(1-p)$$

例7 设$X \sim N(0,1)$,求$E(X)$和$D(X)$.

解 X的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty<x<+\infty$$

于是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2\phi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

若$X \sim N(0,1)$,则$E(X)=0, D(X)=1$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N$（0,1）

$E(Z)=0, D(Z)=1$

而$X=\sigma Z+\mu$,由数学期望和方差的性质得

$$E(X)=E(\sigma Z+\mu)=\sigma E(Z)+E(\mu)=\mu$$

$$D(X)=D(\sigma Z+\mu)=\sigma^2 D(Z)=\sigma^2$$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$

这就是说，正态分布的概率密度中的两个参数μ和σ^2分别是该分布的数学期望和方差，因而正态分布完全可由它的数学期望和方差所确定。

例如，若$X \sim N(1,3), Y \sim N(2,4)$，且$X$和$Y$相互独立，

则$Z = 2X - 3Y$也服从正态分布，而$E(Z) = -4$，

$D(X) = 48$，故有$Z \sim N(-4,48)$

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2,\cdots n$，且它们相互独立，

则它们的线性组合：$C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

$(C_1, C_2, \cdots C_n$是不全为0的常数)仍然服从正态分布.

且$C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2)$

例 设 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$，求 $D(2X^3+5)$.

解 $D(2X^3+5) = D(2X^3) + D(5) = 4D(X^3)$

$= 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$

$$E(X^6) = (-2)^6 \times \frac{1}{3} + 0^6 \times \frac{1}{2} + 1^6 \times \frac{1}{12} + 3^6 \times \frac{1}{12} = \frac{493}{6},$$

$$[E(X^3)]^2 = \left[(-2)^3 \times \frac{1}{3} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{12} + 3^3 \times \frac{1}{12}\right]^2 = \frac{1}{9},$$

故 $D(2X^3+5) = 4[E(X^6) - (E(X^3))^2] = \dfrac{2954}{9}$.

例8 设活塞的直径(以cm计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$,气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X和Y相互独立.任取一支活塞,任取一只气缸,求活塞能装入气缸的概率.

解 按题意需求 $P\{X < Y\}$,即求 $P\{X - Y < 0\}$.

由于 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$

故有 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$

$$= P\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\}$$

$$= \Phi(\frac{0.10}{0.05}) = \Phi(2) = 0.9772$$

四、切比雪夫不等式

定理 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$,方差$D(X)=\sigma^2$,则对于任意正数ε 有不等式

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或 $$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- 切比雪夫不等式在概率估计方面起着重要作用
  - 给出了概率$P\{\,|X-E(X)|\geq\varepsilon\,\}$的最小上界和$P\{\,|X-E(X)|<\varepsilon\,\}$的最大下界。
  - 表明随机变量“几乎所有”值都会“接近”平均,并且以量化方式描述了究竟“几乎所有”是多少,“接近”又有多接近。

我们只就连续型随机变量的情况来证明.

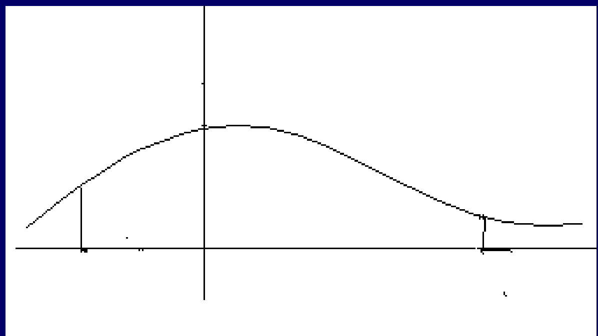
证　设X的概率密度为$f(x)$，则有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx$$

$$|X-\mu|\geq\varepsilon \Rightarrow \frac{|X-\mu|}{\varepsilon}\geq 1$$

$$\leq\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



$$P\{|X-E(X)|\geq \varepsilon\}\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

由切比雪夫不等式可以看出，若 σ^2越小，则事件$\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$的概率越大，即随机变量X集中在期望附近的可能性越大.

当方差已知时，切比雪夫不等式给出了$r.v\ X$与它的期望的偏差不小于 ε 的概率的最小上界估计 .

如取 $\varepsilon = 3\sigma$

$$P\{|X-E(X)|\geq 3\sigma\}\leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}\approx 0.111$$

可见，对任意分布，只要期望和方差 σ^2 存在，则 $r.v\ X$ 取值偏离$E(X)$超过 3σ 的概率小于1/9 .

【类推】

- 与平均相差2个标准差以上的值，数目不多于1/4
- 与平均相差3个标准差以上的值，数目不多于1/9
- 与平均相差4个标准差以上的值，数目不多于1/16
- ……
- 与平均相差k个标准差以上的值，数目不多于$1/k^2$

- 切比雪夫不等式对任何分布的随机变量都适用

【对比】

当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，

3σ准则

$$P(|X-\mu| \le 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

故有： $P(|X - E(x)| \ge 3\sigma) \approx 0.0026$

例 设某电网有10000盏电灯，夜间每一盏灯开灯的概率都是0.7。假设电灯开、关时间彼此独立，试估计夜晚同时开着的电灯数在6800与7200盏之间的概率。

解 用X表示在夜晚开着的电灯的盏数，则X服从参数$n=10000, p=0.7$的二项分布。

$$P\{6800 < X < 7200\} = \sum_{k=6801}^{7199} C_{10000}^{k} (0.7)^{k} (0.3)^{10000-k}$$

计算量太大。下面用切比雪夫不等式估计概率

设某电网有10000盏电灯，夜间每一盏灯开灯的概率都是0.7。假设电灯开、关时间彼此独立，试估计夜晚同时开着的电灯数在6800与7200盏之间的概率。

$X \sim b(n,p) \Rightarrow E(X)=np, D(X)=np(1-p)$

用X表示在夜晚开着的电灯的盏数，

则X服从参数n=10000, p=0.7的二项分布。

$\mu = E(X) = np = 7000$ 平均有7000盏灯开着

$\sigma^2 = D(X) = np(1-p) = 2100$

$$P\{6800 < X < 7200\} = P\{-200 < X - 7000 < 200\}$$

$$= P\{|X-\mu| < 200\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{200^2} = 1 - \frac{2100}{40000} \approx 0.95$$

【例】在每次试验中，事件A发生的概率为 0.5,

（1）利用切比雪夫不等式估计在1000次独立试验中，事件A发生的次数在400~600之间的概率；

（2）要使事件A出现的频率在0.35~0.65之间的概率不小于0.95，至少需要多少次重复试验?

解：（1）X表示1000次独立试验中事件A发生的次数，

则$X \sim B(1000,0.5)$，$E(X)=1000*0.5=500$，

$D(X)=1000*0.5*0.5=250$，

由切比雪夫不等式，可得

$P\{400<X<600\}=P\{400-500<X-500<600-500\}$

$=P\{|X-E(X)|<100\}\geq 1-\frac{D(X)}{100^2}=1-\frac{250}{100^2}=0.975$

【例】在每次试验中，事件A发生的概率为 0.5,
要使事件A出现的频率在0.35~0.65之间的概率不小于0.95，至少需要多少次独立试验?

解：设需要做n次独立试验，则X~B(n,0.5)，要使

$P\{0.35<\frac{X}{n}<0.65\}=P\{0.35n-0.5n<X-0.5n<0.65n-0.5n\}$

$=P\{|X-0.5n|<0.15n\}\geq 0.95$成立，

由切比雪夫不等式，可知只需

$P\{|X-0.5n|<0.15n\}\geq 1-\frac{D(X)}{(0.15n)^2}=1-\frac{0.25n}{(0.15n)^2}=1-\frac{1}{0.09n}\geq 0.95$

即 $n\geq 222.2$，故至少需要223次独立试验。

【例】随机掷6个骰子，试利用切比雪夫不等式估算：6个骰子出现的点数总和大于9且小于33点的概率。

解：设X_i为第i个骰子出现的点数，i=1,2,…,6，它们相互独立；设X为6个骰子出现的点数之和，即$X=\sum_{i=1}^{6} X_i$

显然，$E(X_i)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$，

$D(X_i)=\frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

则$E(X)=E(\sum_{i=1}^{6} X_i)=6E(X_i)=21$，

$D(X)=D(\sum_{i=1}^{6} X_i)=6D(X_i)=\frac{35}{2}$

由切比雪夫不等式，可得

$P\{9<X<33\}=P\{|X-21|<12\}\geq 1-\frac{35/2}{12^2}\approx 0.878$

一机床加工长为50cm的零件，由于随机扰动，零件长度有一定误差。统计表明，零件的长度的均方差为0.25cm。按要求，零件的实际长度在49.25cm到50.75cm之间算合格，试用切比雪夫不等式估计该机床加工这种零件的合格率的范围。

设X表示零件的长度，X 的分布未知。

由题设，可以认为 $\mu = E(X) = 50$ cm

又，均方差 $\sigma = 0.25$ cm

由切比雪夫不等式 $P\{49.25 < X < 50.75\}$

$$= P\{|X - 50| < 0.75\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(0.75)^2} = 1 - \frac{(0.25)^2}{(0.75)^2} = \frac{8}{9} = 0.89$$

六、小结

这一讲，我们介绍了随机变量的方差.

它是刻划随机变量取值在其中心附近离散程度的一个数字特征 .

下一讲，我们将介绍刻划两$r.v$间线性相关程度的一个重要的数字特征：

协方差、相关系数