厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2015 年 1 月　　信息学院自律督导部

一、计算下列各题：（每小题 4 分，共 36 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\Lambda+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$。

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\left[\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{p+1}$。

2．求 $f(x)=\int_{\cos x}^{x^2}e^t dt$ 的导数。

解：$f'(x)=2xe^{x^2}+e^{\cos x}\cdot\sin x$。

3．求由曲线 $y=-x^3$，$x=1$，$x=2$，$y=0$ 所围成的图形面积。

解：图形面积 $A=\int_1^2 x^3 dx=\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_1^2=\dfrac{15}{4}$。

4．计算广义积分 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$。

解：原式 $=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\left[-2xe^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=2$。

5．计算定积分 $\int_0^1\left[x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x^2\right)+\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\right]dx$。

解：原式 $=\int_0^1 x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x^2\right)dx+\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u du+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos u du=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

6．求方程 $\dfrac{dy}{dx}=2^{x+y}$ 的通解。

解一：$\dfrac{dy}{dx}=2^{x+y}$，$2^{-y}dy=2^x dx$，$\int 2^{-y}dy=\int 2^x dx$，

得原方程的通解：$-\dfrac{2^{-y}}{\ln 2}=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C_1$，　即 $2^{-y}+2^x+C=0$，其中 C,C_1 为任意常数。

解二：令 $u=x+y$，则 $y'=u'-1$，从而原方程化为 $u'=2^u+1$，

分离变量积分：$\int \frac{1}{2^u+1}du = \int dx$，$\ln 2^u - \ln(2^u+1) = \ln 2^x + C_1$，把 $u = x+y$ 代入

得原方程的通解：$2^{-y} + 2^x + C = 0$，其中 C, C_1 为任意常数。

7．求不定积分 $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$。

解：原式 $= \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right] dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$

$= \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$。

8．求方程 $y' - \frac{1}{x}y = x$ 的通解。

解：$\because P(x) = -\frac{1}{x}$，$Q(x) = x$，$\therefore$ 原方程的通解是

$$y = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

$$= \left[\int x e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx + C \right] \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} = \left[\int x e^{-\ln x} dx + C \right] \cdot e^{\ln x} = (x+C)x = x^2 + Cx \text{。}$$

9．已知 $y_1 = 1$，$y_2 = 1+x$，$y_3 = 1+x^2$ 都是微分方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2$ 的解，求此方程的通解。

解：$\because y_1 = 1$，$y_2 = 1+x$，$y_3 = 1+x^2$ 是原方程的解，$\therefore y_2 - y_1 = x$，$y_3 - y_1 = x^2$ 是其对应的齐次方程的两个线性无关的特解，于是原方程的通解是

$$y = y_1 + C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1) = 1 + C_1x + C_2x^2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

二、计算下列各题：（每小题 5 分，共 30 分）

1．　求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin x \cdot e^{(x-t)^2} dt}{x^2}$。

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \int_0^x e^{u^2} du}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{u^2} du}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{1} = 1$。

2. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{\cos x - \cos^3 x} + \frac{x\sin|x|}{2+\cos x} \right] dx$。

解：$\because \sqrt{\cos x - \cos^3 x}$ 是偶函数，$\frac{x\sin|x|}{2+\cos x}$ 是奇函数，

$\therefore$ 原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=\left[-\frac{4}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$。

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{y^2}e^{t^2}dt+\int_{x^3}^0\cos t^2dt=1$ 决定，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：对方程两边关于 x 求导，得 $e^{y^4}\cdot 2yy'-\cos(x^6)\cdot 3x^2=0$，所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2\cos(x^6)}{2ye^{y^4}}$。

4. 求微分方程 $y''=2y^3$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 的特解。

解：令 $p(y)=y'$，则 $y''=pp'$。于是原方程化为 $pp'=2y^3$，

对该方程分离变量积分得 $\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^4+C_1$，其中 C_1 为待定常数。

Q $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$，即 $y|_{x=0}=1,\ \ p|_{y=1}=y'|_{x=0}=1>0$，

$\therefore C_1$=0，从而 $p=y^2$，即 $y'=y^2$。

解方程 $y'=y^2$， 得其解 $-y^{-1}=x+C$，其中 C 为待定常数。

Q $y|_{x=0}=1$，$\therefore C=-1$。所以原方程满足初始条件的特解是 $x+y^{-1}-1=0$。

5．求曲线 $f(x)=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$ 相应于 $0\le x\le\pi$ 的一段弧的长度。

解： $f(x)=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$， $f'(x)=\sqrt{\sin x}$，于是这段弧的长度

$$L=\int_0^{\pi}ds=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin udu=4。$$

6. 设物体作直线运动，已知其瞬时速度 $v(t)=t^2$(米/秒)，其受到与运动方向相反的阻力 $F(t)=5v(t)$（牛顿），求物体在时间间隔 $[0,1]$（单位秒）内克服阻力所作的功。

解：依题意得功微元 $dw=F(t)ds(t)=F(t)\cdot v(t)dt=5v^2(t)dt=5t^4dt$，其中 $s(t)$ 为位移函数，所以物体在时间间隔 $[0,1]$（单位秒）内克服阻力所作的功

$$W=\int_0^1dw=\int_0^1 5t^4dt=\left[t^5\right]_0^1=1\text{（焦耳）}。$$

三、计算下列各题：(每小题 6 分，共 24 分)

1．求微分方程 $\frac{dy}{dx}+x(x+y)-x^3(x+y)^2=-1$ 的通解。

解：令 $u=x+y$，则 $y'=u'-1$，代入原方程得伯努利方程

$$u'+xu=x^3u^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ①$$

又当$u\neq 0$时，令$z=u^{-1}$，则$z'=-u^{-2}u'$，即$u^{-2}u'=-z'$ 。于是方程①化为

$$z'-xz=-x^3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ②$$

解方程②得其通解 $z=\left[\int -x^3e^{-\int xdx}dx+C\right]e^{\int xdx}=\left[\int -x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+C\right]e^{\frac{1}{2}x^2}$

$$=\left[\int -x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+C\right]e^{\frac{1}{2}x^2}=x^2+2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}\text{。}$$

所以原方程的通解是

$$\left(x+y\right)^{-1}=x^2+2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}\text{，即 } y=\frac{1}{x^2+2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}}-x\text{，其中}C\text{为任意常数。}$$

显然当$u=0$时，即$y=-x$是原方程的解。

2．设$a>0$，求直线$y=-\frac{x}{a^3}+\frac{1}{a^2}$与$x$轴，$y$轴所围三角形绕直线$x=a$旋转一周所得旋转体的体积。

解一：以y为积分变量，则$y\in\left[0,\frac{1}{a^2}\right]$，体积微元$dv=\left[\pi a^2-\pi\left(a^3y\right)^2\right]dy=\left[\pi a^2-\pi a^6y^2\right]dy$，

所以旋转体的体积

$$V=\int_0^{\frac{1}{a^2}}dv=\int_0^{\frac{1}{a^2}}\left[\pi a^2-\pi a^6y^2\right]dy=\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\text{。}$$

解二：以x为积分变量，则$x\in[0,a]$，体积微元$dv=2\pi(a-x)\left(-\frac{x}{a^3}+\frac{1}{a^2}\right)dx$，

所以旋转体的体积

$$V=\int_0^a dv=\int_0^a 2\pi(a-x)\left(-\frac{x}{a^3}+\frac{1}{a^2}\right)dx$$

$$=\frac{2\pi}{a^3}\int_0^a(a-x)^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{a^3}\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}\text{。}$$

3. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\sin x$ 的一个特解为 $y=e^x+2e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$ 试确定α,β,γ，并求出该方程的通解。

解：$y=e^x+2e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,\ y'=e^x+4e^{2x}-\frac{3}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x,$

$$y''=e^x+8e^{2x}-\frac{3}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x,$$

把 y,y',y'' 代入原方程，比较恒等式中 $e^x,e^{2x},\cos x,\sin x$ 系数得方程组：

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=0,\\ 8+4\alpha+2\beta=0,\\ -\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{3}{5}\beta=0,\\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta=\gamma,\end{cases}$$ 解此方程组得 $\alpha=-3$， $\beta=2$， $\gamma=2$。

所以原方程为 $y''-3y'+2y=2\sin x$，其对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解得其特征根 $r_1=1,r_2=2$，于是该方程的通解是 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$。

4. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数， 且当 $x\neq 0$ 时满足函数方程：

$f(x)=\int_0^{x^2}f(\frac{t}{x})dt-\int_0^x tf(t)dt+x\int_0^1(1-f(x))dx$， 求 $f(x)$。

解：记 $a=\int_0^1(1-f(x))dx$，则当 $x\neq 0$ 时，

$$f(x)=\int_0^{x^2}f(\frac{t}{x})dt-\int_0^x tf(t)dt+ax=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt+ax,$$

即 $f(x)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt+ax$，（$x\neq 0$）。

$\because$ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\therefore$ 上式的右端函数 $x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt+ax$ 是连续的，并且可导。

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，并有

$f(x)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt+ax$， $x\in(-\infty,+\infty)$。. . . . . ①

上式两边对 x 两次求导可得：

$f'(x)=\int_0^x f(t)dt+a$，（同理， $f'(x)$ 可导）. . . . . ②

$f''(x)=f(x)$，

从而， $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$。 由积分方程①可得： $f(0)=0$，从而有

$$C_1+C_2=0 \text{ . . . . ③}$$

由积分方程②可得： $f'(0)=a=\int_0^1(1-f(x))dx$，即 $f'(0)=\int_0^1(1-C_1e^x-C_2e^{-x})dx$。

（或 $f'(1)=\int_0^1 f(x)dx+a=1$），于是有

$$C_1 e - C_2 e^{-1} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{④}$$

联立③、④得 $\quad C_1 = \dfrac{e}{e^2+1}$，$C_2 = -\dfrac{e}{e^2+1}$。所以 $f(x) = \dfrac{e}{e^2+1}(e^x - e^{-x})$。

四、证明题：（每小题 5 分，共 10 分；其中第 2 题和第 3 题任选一题）

1．设 $f(x)$ 可导，$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$，证明：$\exists\ \xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

证：Q $f(x)$ 可导，$\therefore\ f(x)$ 连续。于是由积分中值定理，$\exists\ \xi_1 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$，使得

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \dfrac{1}{2} f(\xi_1)$。又已知 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$，所以 $f(1) = f(\xi_1)$。

Q $f(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上满足罗尔定理的条件，$\therefore \exists\ \xi \in (\xi_1, 1) \subset (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

2. 证明：$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin 2x) - \ln 2]dx$，并利用此等式计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$。

证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin 2x) - \ln 2]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(2\sin x\cos x) - \ln 2]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)]dx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$,

Q $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$,

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin 2x) - \ln 2]dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$。

于是 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \dfrac{1}{2}\pi\ln 2$

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx \overset{u=2x}{=} \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)du = \dfrac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du\right]$

Q $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du \overset{v=\pi-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)du$,

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$。于是得

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = -\dfrac{1}{2}\pi\ln 2$。

3．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上单调不减的连续函数（$a < b$），证明：

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx。$$

证：作辅助函数

$$F(x)=\left(x-a\right)\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^x f(t)dt\cdot\int_a^x g(t)dt\text{，}$$

Q $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，$\therefore$ $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。于是

$$F'(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt+\left(x-a\right)f(x)g(x)-f(x)\int_a^x g(t)dt-g(x)\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_a^x [f(t)g(t)+f(x)g(x)-f(x)g(t)-f(t)g(x)]dt=\int_a^x\left[f(x)-f(t)\right]\cdot\left[g(x)-g(t)\right]dt\text{，}$$

Q $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减，

$\therefore$ $f(x)-f(t)\geq 0$， $g(x)-g(t)\geq 0$， $t\in\left[a,x\right]$。于是有

$F'(x)=\int_a^x\left[f(x)-f(t)\right]\cdot\left[g(x)-g(t)\right]dt\geq 0$， $x\in\left[a,b\right]$，从而可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减。

又 $F(a)=0$，所以 $F(b)\geq F(a)=0$，即不等式成立。