第二章　矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3 \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases},$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解　由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}.$$

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2 \\ y_2 = 2z_1 + z_3 \\ y_3 = -z_2 + 3z_3 \end{cases},$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解　由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 3\\ 12 & -4 & 9\\ -10 & -1 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

所以有$\begin{cases}x_1=-6z_1+z_2+3z_3\\ x_2=12z_1-4z_2+9z_3\\ x_3=-10z_1-z_2+16z_3\end{cases}$.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$, 求$3AB-2A$及$A^TB$.

解 $3AB-2A=3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$=3\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 13 & 22\\ -2 & -17 & 20\\ 4 & 29 & -2\end{pmatrix},$$

$$A^TB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积:

(1)$\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 7 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 7 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times7+3\times2+1\times1\\ 1\times7+(-2)\times2+3\times1\\ 5\times7+7\times2+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\ 6\\ 49\end{pmatrix}$.

(2)$(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$;

解 $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10).$

(3) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1\ 2)$;

解 $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1\ 2)=\begin{pmatrix}2\times(-1) & 2\times2\\1\times(-1) & 1\times2\\3\times(-1) & 3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\-1 & 2\\-3 & 6\end{pmatrix}.$

(4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -7 & 8\\20 & -5 & -6\end{pmatrix}.$

(5) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

解

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\quad a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$


知否大学
做学霸还是学渣你自己选择

5. 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，问:

(1)$AB=BA$ 吗?

解　$AB\neq BA$.

因为$AB=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$，　所以$AB\neq BA$.

(2)$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗?

解　$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

因为$A+B=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$，

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\14&29\end{pmatrix},$$

但
$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix},$$

所以$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

(3)$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

解　$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

因为$A+B=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix},$$

而
$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix},$$

故$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

6. 举反列说明下列命题是错误的:

(1)若 $A^2=0$，则 $A=0$；

解 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=0$，但 $A\neq 0$.

(2)若 $A^2=A$，则 $A=0$ 或 $A=E$；

解 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=A$，但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$.

(3)若 $AX=AY$，且 $A\neq 0$，则 $X=Y$.

解 取

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $AX=AY$，且 $A\neq 0$，但 $X\neq Y$.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$，求 $A^2, A^3, \cdots, A^k$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$,

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots$,

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}.$$

8. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 A^k.

解 首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2\\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix},$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3\\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4\\ 0 & 0 & \lambda^5\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots$,

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 k 时成立，则 $k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix},$$

由数学归纳法原理知:

$$A^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

9. 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

证明　因为 $A^T=A$，所以

$$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB,$$

从而 B^TAB 是对称矩阵.

10. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　充分性：因为 $A^T=A$，$B^T=B$，且 $AB=BA$，所以

$$(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB,$$

即 AB 是对称矩阵.

必要性：因为 $A^T=A$，$B^T=B$，且 $(AB)^T=AB$，所以

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA.$$

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. $|A|=1$，故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$;

解 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. $|A|=1\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

解 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$. $|A|=2\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ -13 & 6 & -1\\ -32 & 14 & -2\end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{pmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

解 $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$，由对角矩阵的性质知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

解 $X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

解 $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

解 $X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6 & 6\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$

解 $X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\ 2x_1+2x_2+5x_3=2\\ 3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$;

解 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$

从而有 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$

解　方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

故有 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$

14. 设 $A^k=O$ (k 为正整数), 证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明　因为 $A^k=O$, 所以 $E-A^k=E$. 又因为

$$E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

所以 $$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E,$$

由定理 2 推论知 $(E-A)$ 可逆, 且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证明　一方面, 有 $E=(E-A)^{-1}(E-A)$.

另一方面, 由 $A^k=O$, 有

$$E=(E-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$

$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)$,

故 $(E-A)^{-1}(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)$,

两端同时右乘$(E-A)^{-1}$，就有

$$(E-A)^{-1}(E-A)=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

15. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1} 及$(A+2E)^{-1}$.

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A=2E\text{，即 }A(A-E)=2E,$$

或 $A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E$,

由定理 2 推论知 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A-6E=-4E\text{，即}(A+2E)(A-3E)=-4E,$$

或 $(A+2E)\cdot\frac{1}{4}(3E-A)=E$

由定理 2 推论知$(A+2E)$可逆，且$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$，两端同时取行列式得

$$|A^2-A|=2,$$

即 $|A||A-E|=2$,

故 $|A|\neq0$,

所以 A 可逆，而 $A+2E=A^2$, $|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq0$，故 $A+2E$ 也可逆.

由 $\quad A^2-A-2E=O\Rightarrow A(A-E)=2E$

$$\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E),$$

又由 $\quad A^2-A-2E=O\Rightarrow(A+2E)A-3(A+2E)=-4E$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E,$$

所以 $\quad (A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$,

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A).$$

16. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

解 因为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，所以

$$|(2A)^{-1}-5A^*|=|\frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1}|=|\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}|$$
$$=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A^{-1}|=-8|A|^{-1}=-8\times2=-16.$$

17. 设矩阵 A 可逆，证明其伴随阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证明 由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，得 $A^*=|A|A^{-1}$，所以当 A 可逆时，有

$$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}\neq0,$$

从而 A^* 也可逆.

因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以

$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A.$$

又 $A=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*=|A|(A^{-1})^*$，所以

$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A=|A|^{-1}|A|(A^{-1})^*=(A^{-1})^*.$$

18. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明:

(1)若$|A|=0$，则$|A^*|=0$;

(2)$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明

(1)用反证法证明. 假设$|A^*|\neq 0$，则有 $A^*(A^*)^{-1}=E$，由此得

$$A=A\,A^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O,$$

所以 $A^*=O$，这与$|A^*|\neq 0$ 矛盾，故当$|A|=0$ 时，有$|A^*|=0$.

(2)由于 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，则 $AA^*=|A|E$，取行列式得到

$$|A||A^*|=|A|^n.$$

若$|A|\neq 0$，则$|A^*|=|A|^{n-1}$;

若$|A|=0$，由(1)知$|A^*|=0$，此时命题也成立.

因此$|A^*|=|A|^{n-1}$.

19. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$AB=A+2B$，求 B.

解 由 $AB=A+2E$ 可得$(A-2E)B=A$，故

$$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AB+E=A^2+B$，求 B.

解　由 $AB+E=A^2+B$ 得

$$(A-E)B=A^2-E,$$

即

$$(A-E)B=(A-E)(A+E).$$

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $(A-E)$ 可逆，从而

$$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

21. 设 $A=\mathrm{diag}(1, -2, 1)$, $A^*BA=2BA-8E$, 求 B.

解　由 $A^*BA=2BA-8E$ 得

$$\begin{aligned}
&(A^*-2E)BA=-8E,\\
&B=-8(A^*-2E)^{-1}A^{-1}\\
&\quad=-8[A(A^*-2E)]^{-1}\\
&\quad=-8(AA^*-2A)^{-1}\\
&\quad=-8(|A|E-2A)^{-1}\\
&\quad=-8(-2E-2A)^{-1}\\
&\quad=4(E+A)^{-1}\\
&\quad=4[\mathrm{diag}(2, -1, 2)]^{-1}\\
&\quad=4\mathrm{diag}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})\\
&\quad=2\mathrm{diag}(1, -2, 1).
\end{aligned}$$

22. 已知矩阵 A 的伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 求 B.

解　由$|A^*|=|A|^3=8$，得$|A|=2$.

由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 得

$$AB=B+3A,$$

$$B=3(A-E)^{-1}A=3[A(E-A^{-1})]^{-1}A$$

$$=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

23. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，求 A^{11}.

解　由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{11}=A=P\Lambda^{11}P^{-1}$.

$$|P|=3,\quad P^*=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix},$$

而
$$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix},$$

故
$$A^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}.$$

24. 设 $AP=P\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$，

求$\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

解　$\varphi(\Lambda)=\Lambda^8(5E-6\Lambda+\Lambda^2)$

$$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)[\mathrm{diag}(5,5,5)-\mathrm{diag}(-6,6,30)+\mathrm{diag}(1,1,25)]$$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)\mathrm{diag}(12,0,0)=12\mathrm{diag}(1,0,0).$

$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

$=\frac{1}{|P|}P\varphi(\Lambda)P^*$

$$=-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

25. 设矩阵 A、B 及 $A+B$ 都可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆阵.

证明 因为

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1},$$

而 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 是三个可逆矩阵的乘积，所以 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 可逆，即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

26. 计算 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解 设 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}$，

则 $\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix}$，

而 $A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix}$，

$$A_2B_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix},$$

所以 $$\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix},$$

即 $$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}.$$

27. 取 $A=B=-C=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，验证 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=4,$$

而 $$\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,$$

故 $$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}.$$

28. 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&&\\4&-3&&\\&&2&0\\&&2&2\end{pmatrix}$（其中空白处为 O），求 $|A^8|$ 及 A^4.

解 令 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，

则 $$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},$$

故 $$A^8=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}A_1^8&O\\O&A_2^8\end{pmatrix},$$

$$|A^8|=|A_1^8||A_2^8|=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16}.$$

$$A^4=\begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 & & \\ 0 & 5^4 & \multicolumn{2}{c}{O} \\ & & 2^4 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{O} & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

29. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆，求

(1) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$;

解　设 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AC_3 & AC_4 \\ BC_1 & BC_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得
$$\begin{cases} AC_3=E_n \\ AC_4=O \\ BC_1=O \\ BC_2=E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=A^{-1} \\ C_4=O \\ C_1=O, \\ C_2=B^{-1} \end{cases}$$

所以
$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$.

解　设 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD_1 & AD_2 \\ CD_1+BD_3 & CD_2+BD_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得
$$\begin{cases} AD_1=E_n \\ AD_2=O \\ CD_1+BD_3=O \\ CD_2+BD_4=E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1=A^{-1} \\ D_2=O \\ D_3=-B^{-1}CA^{-1}, \\ D_4=B^{-1} \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$

30. 求下列矩阵的逆阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

解 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

于是 $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

解 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$