厦门大学

Xiamen University

高等数学强化与提高

第五讲 空间解析几何题目

厦门大学数学科学学院 庄平辉

1. 设 P 是球内一定点, A, B, C是球面上三个动点,

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \frac{\pi}{2},$$

以PA, PB, PC为棱作平行六面体, 记与P相对的顶点为 Q, 求 Q 的轨迹 .

2. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是三维空间中的两个非零向量，且 $|\vec{b}| = 1,$

$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3},$ 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|\vec{a} + x\vec{b}| - |\vec{a}|}{x}.$

3. 以O为圆心的单位圆上有相异两点 P、Q, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角为 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$, 设 a, b 为正常数, 求极限

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta^2}\left(|a\overrightarrow{OP}| + |b\overrightarrow{OQ}| - |a\overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{OQ}|\right).$$

4. 有一束平行于直线 $L: x = y = -z$ 的平行光照射到不透明的球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 上，求 S 在该平行光的照射下在 xoy 平面留下的阴影部分的边界曲线方程.

5. 已知直线 $L_1: \dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$，$L_2: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$，试求 L_1 与 L_2 的公垂线的方程.

6. 平面通过两直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-5}{1}$ 和 $L_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ 的公垂线 L，且平行于向量 $c = (1, 0, -1)$，求此平面的方程.

7. 已知曲面 $x^2-2y^2+z^2-4yz-8zx+4xy-2x+8y-4z-2=0$ 与某一平面的交线的对称中心在坐标原点, 求该平面的方程.

8. 试求过点 $A(-2,0,0)$ 和 $B(0,-2,0)$, 且与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 交成抛物线的平面方程.

9. 试求顶点在原点，且三个坐标轴的正半轴都在其上的圆锥面方程.

10. 已知椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (c<a<b)$.

试求过 x 轴与椭球面的交线是圆的平面.

11. 将边长为6的正方形$ABCD$用平行于AB的线段EF、GH三等分（图1）并折成正三棱柱，将此三棱柱放在空间直角系中（图2）.

（1）求线段PQ绕z轴旋转所形成的旋转曲面方程；

（2）过点P、Q分别作平行于xOy面的两平面，求此两平面与（1）中旋转曲面所围成的立体的体积.

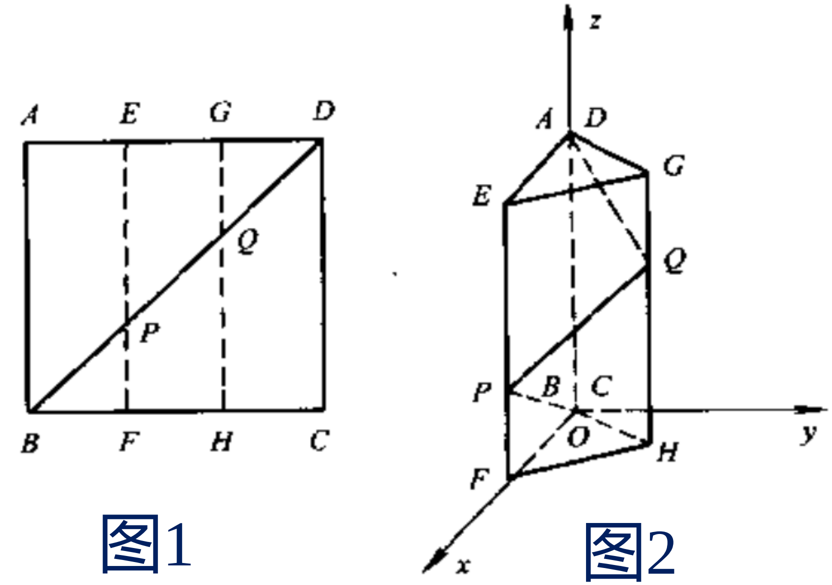

图1　图2

12. 试求通过三条直线:

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases},\begin{cases} x=0 \\ x+y-z=-2 \end{cases},\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y-z=0 \end{cases}$$

的圆柱面方程.

13. 过椭球面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 外一定点 (x_0,y_0,z_0) 作其切平面, 再过原点作切平面的垂线, 求垂足的轨迹方程.

14. 与曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1(a,b,c>0)$ 相切的三个互相垂直的平面的交点在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 上.

15. 设有两条直线 $L_1: x=y=z$, $L_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}$,

问：(1) L_1与L_2何时异面？(2)若L_1与L_2不重合，求直线

L_2绕直线 L_1旋转一周所得曲面Σ的方程，并且指出类型.

16. 设

$$L_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, L_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

证明：直线 L_1与L_2共面的充要条件是 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$