一、正项级数的敛散性

例1. 设 $p>0, x_1=\frac{1}{4}, x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}\ (n=1,2,\cdots)$,

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛并求和.

解：由 $x_{n+1}^p=x_n^p(1+x_n^p)$ 可得 $\frac{1}{x_{n+1}^p}=\frac{1}{x_n^p(1+x_n^p)}=\frac{1}{x_n^p}-\frac{1}{1+x_n^p}$，即 $\frac{1}{1+x_n^p}=\frac{1}{x_n^p}-\frac{1}{x_{n+1}^p}$.

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 的前 n 项和为

$$S_n=(\frac{1}{x_1^p}-\frac{1}{x_2^p})+(\frac{1}{x_2^p}-\frac{1}{x_3^p})+\cdots+(\frac{1}{x_n^p}-\frac{1}{x_{n+1}^p})=\frac{1}{x_1^p}-\frac{1}{x_{n+1}^p}.$$

因为数列 $\{x_n\}$ 单调增加，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在或为无穷大.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 A，则由 $x_{n+1}^p=x_n^p(1+x_n^p)$ 两边求极限得 $A^p=A^p(1+A^p)$，可推出 $A=0$，矛盾！

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 的和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x_1^p}-\frac{1}{x_{n+1}^p})=\frac{1}{x_1^p}=4^p$.

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解：记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的前 n 项和为

$$S_n=\frac{a_1}{2\cdot3}+\frac{a_2}{3\cdot4}+\frac{a_3}{4\cdot5}+\cdots+\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$=(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3})+(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4})+(\frac{a_3}{4}-\frac{a_3}{5})+\cdots+(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2})$$

$$=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\frac{a_3-a_2}{4}+\frac{a_4-a_3}{5}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-\frac{a_n}{n+2}$$
$$=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

注意到，

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$<1+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n.$$

故 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$，所以，$\lim\frac{a_n}{n+2}=0$.

从而，$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

例3. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的正数列，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$ 收敛的充要条件是 $\{u_n\}$ 有界.

证明：充分性.

因为 $\{u_n\}$ 是单调增加有界的正数数列，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$ 为正项级数，且通项

$$1-\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}\le\frac{u_{n+1}-u_n}{u_1}.$$

级数的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{u_1}$ 的前 n 项和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_1}=\frac{u_{n+1}}{u_1}-1$.

由于数列 $\{u_n\}$ 单调有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{u_{n+1}}{u_1}-1)$ 存在，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{u_1}$ 收敛. 由比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$ 收敛.

必要性. 用反证法. 如果数列 $\{u_n\}$ 无界，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$.

则对于任意的正整数 n_0，存在 $N>n_0$，使得当 $n>N$ 时，有 $u_n>2u_{n_0}$，即 $\frac{u_{n_0}}{u_n}<\frac{1}{2}$.

则 $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}(1-\frac{u_k}{u_{k+1}})\ge\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}(1-\frac{u_k}{u_{k+1}})\ge\frac{1}{u_n}\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\frac{1}{u_n}(u_n-u_{n_0})=1-\frac{u_{n_0}}{u_n}>\frac{1}{2}$.

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$发散．于是，数列$\{u_n\}$有界.

例4. 已知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛.

提示： $k!>(k/2)^k$, $\forall k\in N^+$

证明：对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\cdot\cdots\cdot ka_k}}{\sqrt[k]{k!}}.$$

应用不等式$k!\geq(\frac{k}{2})^k$ $(k\in N^*)$与几何平均数小于等于算术平均数，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\cdot\cdots\cdot ka_k}}{\sqrt[k]{k!}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{ia_i}{k}=2\sum_{i=1}^{n}a_i(i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}).$$

由于

$$i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}=i(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(i+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})$$

$$<i(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n})$$

$$=i(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=i(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i}-\frac{1}{n})$$

$$<\frac{1}{i}+1\leq 2.$$

故$S_n\leq 4\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故其部分和$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$有界, 即$\{S_n\}$有界.

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$收敛.

例5. 设 $a_n>0,(n=1,2,\cdots), S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$, 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha\le 1$ 且级数 $S_n\to+\infty(n\to\infty)$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

证明：令 $f(x)=x^{1-\alpha}$， $x\in[S_{n-1},S_n]$. 将 $f(x)$ 在区间 $[S_{n-1},S_n]$ 上用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in[S_{n-1},S_n]$，使得 $f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$，即

$$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n.$$

（1）当 $\alpha>1$ 时，$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\ge(\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$, 即 $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\le\frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}})$.

因为 $\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\}$ 的前 n 项和有界，从而 $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}})$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛.

（2）当 $\alpha=1$ 时，因为 $a_n>0$， S_n 单调增加，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{1}{S_{n+p}}(S_{n+p}-S_n)=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

因为 $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$，对于任意正整数 n，存在 $p\in N$，使得 $S_{n+p}>2S_n$，即 $\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$.

于是 $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散.

(3) 当 $\alpha<1$，由 $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\ge\frac{a_n}{S_n}$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

例6. 设 $f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}+x-r$, 其中 $r>0$.

(1) 证明: $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有惟一的零点 x_n;

(2) 求 r 为何值时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，为何值时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

证明 (1)因为 $x>0$ 时，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $f_n(x)$ 连续，且 $f_n'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}+1>0$，所以 $f_n(x)$ 严格增。又因为

$$f_n(0)=-r<0,\quad f_n(r)=\sqrt[n]{r}>0,$$

根据零点定理，$f_n(x)$ 在 $(0,r)(\subset(0,+\infty))$ 内有唯一的零点 x_n。

(2)当 $0<r<1$ 时，$f_n(r^n)=\sqrt[n]{r^n}+r^n-r>0$。又由 $f_n(x)$ 严格增可知 $0<x_n<r^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收敛，由比较判别法可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

当 $r>1$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，所以只要 n 充分大，就有

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-r<0。$$

由 $f_n(x)$ 严格增可知 $x_n>\frac{1}{n}>0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

当 $r=1$ 时，因为

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right)=\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n}-1=\frac{1}{2n}\left(1-2n+2n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)=\frac{1}{2n}(1-2n(1-\alpha)),$$

其中 $\alpha=\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}(0<\alpha<1)$。由于

$$\begin{aligned}2n(1-\alpha)&=2n\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}}=\frac{2n-1}{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}}\\&>\frac{n}{1+1+\cdots+1}=\frac{n}{n}=1,\end{aligned}$$

故 $f_n\left(\frac{1}{2n}\right)<0$。由 $f_n(x)$ 严格增可知 $x_n>\frac{1}{2n}>0$，由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

综上所述，当 $0<r<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；当 $r\geqslant1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

例7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})<0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

七、证 (1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$,则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geqslant N$,有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\quad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},\quad a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),$$

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$,则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geqslant N$,有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$,于是

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

例8. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为满足 $\mathrm{e}^{a_n}=a_n+\mathrm{e}^{b_n}(n\geq 1)$ 的 n 个实数列,已知 $a_n>0\,(n\geq 1)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$ 也收敛.

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。因 $a_n>0$,且

$$b_n=\ln(\mathrm{e}^{a_n}-a_n)=\ln\left(1+a_n+\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)-a_n\right)$$

$$=\ln\left(1+\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)\right)\sim\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)\sim\frac{a_n^2}{2}\quad(n\to\infty),$$

故 $b_n>0$,且 $\frac{b_n}{a_n}\sim\frac{a_n}{2}$,于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$ 收敛。

例9. 已知 $0<a_n<1,n=1,2,\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=q$ (有限或 $+\infty$) .

(1) 证明:当 $q>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 证明:当 $q<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

由此判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$ 的敛散性.

证明:由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$,则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N,$ 当 $n>N$ 时,有

$$q-\varepsilon<\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<q+\varepsilon，$$

当$r>1$时，取ε使$q-\varepsilon=r>1$，则有$r\ln n<\ln\frac{1}{a_n}$，即 $a_n<\frac{1}{n^r}$， $n>N,r>1$，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$收敛，由比较判别法得$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$收敛, 从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

当$r<1$时，取ε使$q+\varepsilon=r<1$，则有$r\ln n>\ln\frac{1}{a_n}$，即 $a_n>\frac{1}{n^r}$， $n>N,r<1$，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$发散，由比较判别法得$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$发散, 从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

下面判断级数$\sum_{n=2}^{\infty}(1-\frac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$的敛散性。

令$a_n=(1-\frac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2\ln(1-\frac{2\ln n}{n^2})}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{2\ln n}{n^2}}{\ln n}=2>1$，

由上述所给的判别法得$\sum_{n=2}^{\infty}(1-\frac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$收敛。

例10. 证明下列结论：

(1) 设在$[1,+\infty)$上$f(x)\geq 0$且单调减少，$a_n=f(n)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同敛散. **—积分判别法**

(2) 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$ $(p>0,q>0)$

则该级数当$p>1$时收敛，当$p<1$时发散；

当$p=1$时，只有在$q>1$时该级数才收敛.

证 (1) 由题设条件可得 $a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant a_n$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k+1} \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 故当正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时，积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，其和为 $+\infty$，从而 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$，该积分发散.

(2) 当 $p>1$ 时，因$\dfrac{1}{n^p \ln^q n} < \dfrac{1}{n^p}$，此时 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛，因此该级数收敛.

当 $p<1$ 时. 取 r 使得 $p<r<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^p \ln^q n}\Big/\dfrac{1}{n^r}\right) = \infty$. 因正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^r}$ 发散，由比较法的极限形式可知该级数发散.

当 $p=1$ 时，用积分判别法，取 $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^q x}$，则该级数与积分 $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}$ 同敛散. 而该积分只在 $q>1$ 时收敛 $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x} = \dfrac{\ln^{1-q} x}{1-q}\Big|_2^{+\infty}$. 因此只有在 $q>1$ 时此级数才收敛.

评注 本例题(2)中的级数可以作为正项级数用比较法判断敛散的参照.

二、判别任意项级数的敛散性

例1. 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\sqrt{n^2+2}\pi)$ 是否收敛. 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

例2. 对常数 p，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛、何时条件收敛、何时发散.

解 令 $a_n = \tan(\sqrt{n^2+2}\pi)$，则

$$a_n = \tan(\sqrt{n^2+2}\pi) = \tan(\sqrt{n^2+2}-n)\pi = \tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}。$$

显然$\{a_n\}$单调递减，且 $a_n \to 0(n\to\infty)$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛。又

$$a_n = \tan(\sqrt{n^2+2}\pi) = \tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n} > \frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n} > \frac{2\pi}{(n+1)+n} > \frac{1}{n}。$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(\sqrt{n^2+2}\pi)$ 条件收敛。

例2. 对常数 p，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{p}}$ 何时绝对收敛、何时条件收敛、何时发散.

解 令 $a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}(n>0)$，则

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}=\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)n^p}\sim\frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}。$$

故当 $p+\frac{1}{2}>1\left(即\ p>\frac{1}{2}\right)$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则原级数绝对收敛；当 $p+\frac{1}{2}\leqslant 1\left(即\ p\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则原级数非绝对收敛。

当 $0<p+\frac{1}{2}\leqslant 1\left(即 -\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时显然 $a_n\to 0(n\to\infty)$。令

$$f(x)=x^p(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}),\quad x>0。$$

由于

$$f'(x)=x^{p-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\left[p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right],$$

且 $x^{p-1}>0$，$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>0$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\left[p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right]=p+\frac{1}{2}>0,$$

所以 x 充分大时 $f(x)$ 单调增加，于是 n 充分大时，$a_n=\frac{1}{f(n)}$ 单调减少，应用莱布尼茨判别法推知 $-\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时原级数条件收敛。

当 $p+\frac{1}{2}\leqslant 0$ 时 $a_n\nrightarrow 0(n\to\infty)$，故 $p\leqslant-\frac{1}{2}$ 时原级数发散。

例3. 若对于任意的趋向于0的序列 $\{x_n\}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 都是收敛的，试证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

六、【参考证明】：反证法. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，必有$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$，则存在自然数$m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$，使得

$$\sum_{i=1}^{m_1}|a_i|\ge 1,\quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_i|\ge k\left(k=2,3,\cdots\right)$$

取$x_i=\dfrac{1}{k}\operatorname{sgn}a_i\left(m_{k-1}\le i\le m_k\right)$，则

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}a_ix_i=\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}\frac{|a_i|}{k}\ge 1.$$

由此可知，存在数列$\{x_n\}\to 0\left(n\to\infty\right)$，使得$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$发散，矛盾. 所以$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

例4. 讨论级数 $1-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{6^p}+\cdots$ 的敛散性（p为常数）.

解 当$p=\dfrac{1}{2}$时，原式$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，由于此为交错级数，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$单调减少且收敛于0，由莱布尼茨判别法得$p=\dfrac{1}{2}$时原级数收敛。

当$p\le 0$时，原级数的通项$a_n\not\to 0$，所以原级数发散。

当$p>\dfrac{1}{2}$时，考虑加括号（两项一括）的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{(2n)^p}\right). \quad ②$$

由于$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\dfrac{1}{(2n)^p}$（在$p>\dfrac{1}{2}$时）与$\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$同阶，而$\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$与$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$同阶，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以$p>\dfrac{1}{2}$时，加括号的级数②发散，因而原级数也发散。

当$0<p<\dfrac{1}{2}$时，原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{(2n)^p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

因为$\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}>0$，而且当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$与$\dfrac{1}{(2n)^p}$等价，而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^p}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$发散。而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\dfrac{1}{(2n)^p}\right)$发散。

例5. 设函数 $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数，$|f'(x)|<mf(x)$，其中 $0<m<1$. 任取实数 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}),n=1,2,\cdots$

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

六、证明 因

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n-1}|&=|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})|\\&=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_n-a_{n-1})\right| \quad (\xi\text{ 介于 }a_n,a_{n-1}\text{ 之间})\\&<m\,|a_{n-1}-a_{n-2}|<m^2\,|a_{n-2}-a_{n-3}|<\cdots<m^{n-1}\,|a_1-a_0|,\end{aligned}$$

而 $0<m<1$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛。

例6. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数，

(1) 若 $n\geq 2$，计算 I_n+I_{n-2}；

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性与条件收敛性.

五、解 (1) $I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(1+\tan^2x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n-1}.$$

(2) 由于 $0<x<\frac{\pi}{4}$，所以 $0<\tan x<1$，$\tan^{n+2}x<\tan^n x<\tan^{n-2}x$。从而 $I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$，于是 $I_{n+2}+I_n<2I_n<I_{n-2}+I_n$。故

$$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)},\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^p<I_n^p<\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^p.$$

当 $p>1$ 时，$|(-1)^p I_n^p|=I_n^p<\frac{1}{2^p(n-1)^p}(n\geqslant 2)$，由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^p}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^p I_n^p$ 绝对收敛。

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于 $\{I_n^p\}$ 单调减少，并趋近于 0，由莱布尼茨判别法，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 收敛。而 $I_n^p>\frac{1}{2^p(n+1)^p}\geqslant\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n+1}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n I_n^p|$ 发散。因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 条件收敛。

当 $p\leqslant 0$ 时，$|I_n^p|\geqslant 1$，由级数收敛的必要条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 发散。

例7. 已知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})n^{\lambda}$，其中实数 $\lambda\in[0,1]$，试对 λ 讨论该级数的绝对收敛、条件收敛与发散性.

解 令 $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}(n>0)$，则

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}=\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)n^p}\sim\frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}。$$

故当 $p+\frac{1}{2}>1\left(即\ p>\frac{1}{2}\right)$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则原级数绝对收敛；当 $p+\frac{1}{2}\leqslant1\left(即\ p\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则原级数非绝对收敛。

当 $0<p+\frac{1}{2}\leqslant1\left(即-\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时显然 $a_n\to0(n\to\infty)$。令

$$f(x)=x^p(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}),\quad x>0。$$

由于

$$f'(x)=x^{p-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\left[p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right],$$

且 $x^{p-1}>0$，$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>0$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\left[p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right]=p+\frac{1}{2}>0,$$

所以 x 充分大时 $f(x)$ 单调增加，于是 n 充分大时，$a_n=\dfrac{1}{f(n)}$ 单调减少，应用莱布尼茨判别法推知 $-\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时原级数条件收敛。

当 $p+\frac{1}{2}\leqslant0$ 时 $a_n\not\to0(n\to\infty)$，故 $p\leqslant-\frac{1}{2}$ 时原级数发散。

三、求幂级数的收敛域与和函数

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-(-1)^n}x^n$ 的收敛域.

解　令 $a_n=\dfrac{1}{n-(-1)^n}$，则 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-(-1)^{n+1}}{n-(-1)^n}=1$。

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-(-1)^n}$，因为 $\dfrac{1}{n-(-1)^n}\sim\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-(-1)^n}$ 发散，即 $x=1$ 时原级数发散。

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}=-\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}\cdot(-1)^n$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}。$$

令 $f(n)=\dfrac{n}{n^2-1}$，则 $f'(x)=\dfrac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}<0(x\geqslant 2)$，故 $f(x)$ 严格递减，因此 $f(n)$ 单减。且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}$ 收敛。而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$ 也收敛，即 $x=-1$ 时级数收敛。所以收敛域为 $[-1,1)$。

例2. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 8^n}{n\ln(n^3+n)}x^{3n-2}$ 的收敛域.

解　令 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n 8^n}{n\ln(n^3+n)}x^{3n-2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}8^{n+1}\cdot n\cdot\ln(n^3+n)\cdot x^{3n+1}}{(n+1)\ln[(n+1)^3+(n+1)]\cdot(-1)^n 8^n\cdot x^{3n-2}}\right|=8|x|^3。$$

若 $8|x|^3<1$，即 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$，级数收敛，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，原级数为 $4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n^3+n)}$，收敛。

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n\ln(n^3+n)}$。因为

$$\frac{4}{n\ln(n^3+n)}>\frac{4}{n\ln n^4}=\frac{1}{n\ln n}\quad(n\geqslant 2),$$

而 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty$。故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n\ln(n^3+n)}$ 发散。

综上得收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$。

例3. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n$ 的收敛域.

解　令 $a_n=\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+1}+(-2)^{n+1})}{n(3^n+(-2)^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+(-2)\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}=3,$$

所以幂级数的收敛半径 $R=3$。当 $x=3$ 时，原幂级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}$。因为 $\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}>\frac{1}{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，由比较判别法知 $x=3$ 时原幂级数发散。当 $x=-3$ 时，原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(3^n+(-2)^n)}。$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 为莱布尼茨型级数，收敛；令 $b_n=\frac{2^n}{n(3^n+(-2)^n)}$，由于 $b_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}(3^n+(-2)^n)}{(n+1)\cdot 2^n(3^{n+1}+(-2)^{n+1})}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{3+(-2)\left(\frac{-2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1。$$

例4. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ 的收敛半径及和函数.

因

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty(n\to\infty),$$

由施笃兹定理(见第 1 章内容要点)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n}\right)=1.$$

于是收敛半径为 1，收敛域为 $(-1,1)$.

由于 $u(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，其系数 $a_n=1(n=0,1,2,\cdots)$；$v(x)=-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，其系数 $b_0=0,b_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$.

它们都在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 由幂级数的乘法，则有

$$u(x)v(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,$$

即原幂级数的和函数为 $\frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

例5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间与和函数.

解 令 $a_n=\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)^3}=+\infty,$$

于是,原级数的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$。因为

$$\frac{n^3}{(n+1)!}=\frac{n^3+1-1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)+1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n$$

$$=-\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+(-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2e^{-x}+(e^{-x}-1+x)+\frac{1}{x}\left(e^{-x}-1+x-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)。$$

综上所述,和函数 $S(x)=\begin{cases}e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0。\end{cases}$

例6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$ $(|x|<1)$ 的和函数.

解 因为

$$\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x^{2^n}+1-1}{(x^{2^n}+1)(x^{2^n}-1)}=\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1},$$

所以级数的部分和函数为

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2^k}}{x^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{x^{2^k}-1}-\frac{1}{x^{2^{k+1}}-1}\right]=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

由于$|x|<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1},\quad |x|<1$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x}{x-1},\quad |x|<1$$

例7. 已知 $a_1=1,a_2=1,a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，试求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径与和函数

解 显然 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$. 为求收敛半径要考察$\frac{a_{n+1}}{a_n}$. 由归纳法定义，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}},$$

命

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n},n=1,2,\cdots,$$

有

$$b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n},n=1,2,\cdots.$$

设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，记为 β，则有 $\beta=1+\frac{1}{\beta}$，得

$$\beta^2-\beta-1=0.$$

解得 $\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 或 $\beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. 但因一切 $b_n>0$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在, 则极限值必非负. 故若

$$\lim_{n\to\infty}b_n(\text{存在})=\beta,$$

则
$$\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})>\frac{3}{2}.$$

注意到 $\beta-1=\frac{1}{\beta}$, 所以

$$b_{n+1}-\beta=1+\frac{1}{b_n}-\beta=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-b_n}{\beta b_n}, \tag{8.52}$$

$$|b_{n+1}-\beta|<\frac{2}{3}|b_n-\beta|<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^n|b_1-\beta|,n=1,2,\cdots.$$

其中 b_1 与 β 为确定的数, 当 $n\to\infty$ 时 $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$. 由夹逼定理知的确

$$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\beta,$$

即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\beta,$$

收敛半径 $R=\frac{1}{\beta}$, 收敛区间 $\left(-\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta}\right)$.

下面求和函数. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n,-\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\beta}.$$

则
$$\begin{aligned}S(x)&=a_1x+a_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n\\&=x+x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})x^{n+2}\\&=x+x^2+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-x\right)\\&=x+x^2+x^2S(x)+x(S(x)-x),\end{aligned}$$

解得 $S(x)$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2},-\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\beta}, \tag{8.53}$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

下面说一下幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域也是 $-\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\beta}$. 若不然, 设在 $x=\frac{1}{\beta}$ 处 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$

亦收敛. 则此级数在点 $x=\frac{1}{\beta}$ 处左连续，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{\beta}^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 存在. 而按式(8.53)两边命 $x\to\frac{1}{\beta}^-$ 取极限，右边极限不存在，矛盾. 同理可知 $x=-\frac{1}{\beta}$ 处级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 亦不收敛.

例8. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的收敛半径与和函数

解：记 $S(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7+\cdots=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，则

$$S(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1-1)(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

即 $$S(x)=x+x^2S(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

两边求导，得

$$S'(x)=1+2xS(x)+x^2S'(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}$$

$$=1+2xS(x)+x^2S'(x)-xS(x),$$

则 $S'(x)=1+xS(x)+x^2S'(x)$，整理得

$$S'(x)-\frac{x}{1-x^2}S(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

解得 $$S(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}[\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\arcsin x+C]$$

注意到 $S(0)=0$，故 $C=0$，所以 $S(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

四、求数项级数的和

例1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ 的和.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n!(n+2)+(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!+(n+1)!}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$$

它的前 n 项和为

$$S_n=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}.$$

故原级数的和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$.

例2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$ 的和.

解：$\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\arctan\dfrac{n}{n+1}-\arctan\dfrac{n-1}{n}$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$ 的前 n 项和

$$S_n=\arctan\frac{1}{2}+\left(\arctan\frac{2}{3}-\arctan\frac{1}{2}\right)+\left(\arctan\frac{3}{4}-\arctan\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=\arctan\frac{n}{n+1}.$$

故原级数的和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

例3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$ 的和.

解：$\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\arctan(n+1)-\arctan n$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$ 的前 n 项和

$$S_n = \arctan 2 - \arctan 1 + (\arctan 3 - \arctan 2) + \cdots + (\arctan(n+1) - \arctan n)$$

$$= \arctan \frac{n}{n+1}.$$

故原级数的和 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

例4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)+(-1)^n}{2^n n}$ 的和.

七、**【参考解析】**：令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}, \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n,$$

$$\int_0^x \left[\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, |x| < 1,$$

$$f(x) = \left[\frac{x^2}{1-x}\right]'' = \left[\frac{2x - x^2}{(1-x)^2}\right]' = \frac{2}{(1-x)^3}, |x| < 1,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{3}{2}$$

于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)+(-1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 8 - \ln\frac{3}{2}$$

例5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}$ 的和.

解：$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n^4+n^2+1)} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{n-1}{n^2-n+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n^2-n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\frac{n}{n^2+n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)!}\frac{1}{n^2+n+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=1+\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-2)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}.$$

五、求初等函数关于x的幂级数展开式

例1. 设函数 $f(x)=\dfrac{7+2x}{2-x-x^2}$ 在区间 $(-1,1)$ 上关于 x 的幂级数展式为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

（1）试求 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$;

（2）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{(a_n-2)(a_{n+1}-2)}$ 收敛，并求该级数的和.

八、**【参考解析】**: 令 $f(x)=\dfrac{7+2x}{2-x-x^2}$

$$=\frac{2x+7}{(1-x)(2+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{2+x},$$

通分得 $7+2x=A(2+x)+B(1-x)$，取 $x=1$ 可得 $A=3$，取 $x=-2$ 可得 $B=1$，所以

$$f(x)=\frac{3}{1-x}+\frac{1}{2+x}.$$

(1) 下面用两种方法求 a_n . **方法 1**: $|x|<1$ 时

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}3x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n,$$

于是 $a_n=3+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\ (n=0,1,2,\cdots)$.

方法 2：由于 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$，所以

$$f^{(n)}(x) = -3\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{2+x}\right)^{(n)}$$

$$= -3(-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(2+x)^{n+1}},$$

于是 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 3 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$.

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(a_n - 2)\cdot(a_{n+1} - 2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n - 2} - \frac{1}{a_{n+1} - 2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{a_0 - 2} - \frac{1}{a_1 - 2}\right) + \left(\frac{1}{a_1 - 2} - \frac{1}{a_2 - 2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n - 2} - \frac{1}{a_{n+1} - 2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_0 - 2} - \frac{1}{a_{n+1} - 2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

所以原级数收敛,其和为 $-1/3$.

例2. 求函数 $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} + \arctan\frac{1+x}{1-x}$ 关于 x 的幂级数展式.

(江苏省2017年竞赛题)

八、【参考解析】: 令 $F(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, $G(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$,

则 $\displaystyle\int_0^x F(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^x\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x$

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}x^{2n}\left(|\,x\,|<1\right)$$

两边求导得 $\displaystyle F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n-1}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n+1}(|\,x\,|<1)$$

由于 $\displaystyle G'(x)=\frac{1}{1+((1+x)\,/\,(1-x))^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}$

$$=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(|\,x\,|<1)$$

两边求积分得

$$G(x)=G(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(|x\,|<1)$$

所以 $f(x)$ 关于 x 的幂级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n((n+1)+\frac{1}{2n+1})x^{2n+1}$$

$$(|\,x\,|<1)$$