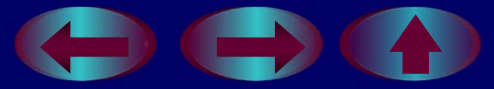
第二节　直方图和箱线图

一、直方图

二、箱线图

三、小结



一、直方图

例1 下面给出了84个伊特拉斯坎（Etruscan）人男子的头颅的最大宽度（mm），现在来画这些数据的“频率直方图”。

141	148	132	138	154	142	150	146	155	158	150	140
147	148	144	150	149	145	149	158	143	141	144	144
126	140	144	142	141	140	145	135	147	146	141	136
140	146	142	137	148	154	137	139	143	140	131	143
141	149	148	135	148	152	143	144	141	143	147	146
150	132	142	142	143	153	149	146	149	138	142	149
142	137	134	144	146	147	140	142	140	137	152	145

【步骤】

1. 找出最小值126，最大值158， 现取区间[124.5,159.5]；

区间的上限比最大的数据稍大，下限比最小的数据稍小
分点通常取比数据精度高一位，以避免数据落在分点上

2. 将区间[124.5， 159.5]等分为7个小区间，小区间的长度记成Δ, $\Delta=(159.5-124.5)/7=5$,

Δ称为组距；

当样本容量n较大时，k取10~20；当n<50时，则k取5~6；若k取得过大，则会出现某些小区间内频数为0的情况（一般应设法避免）

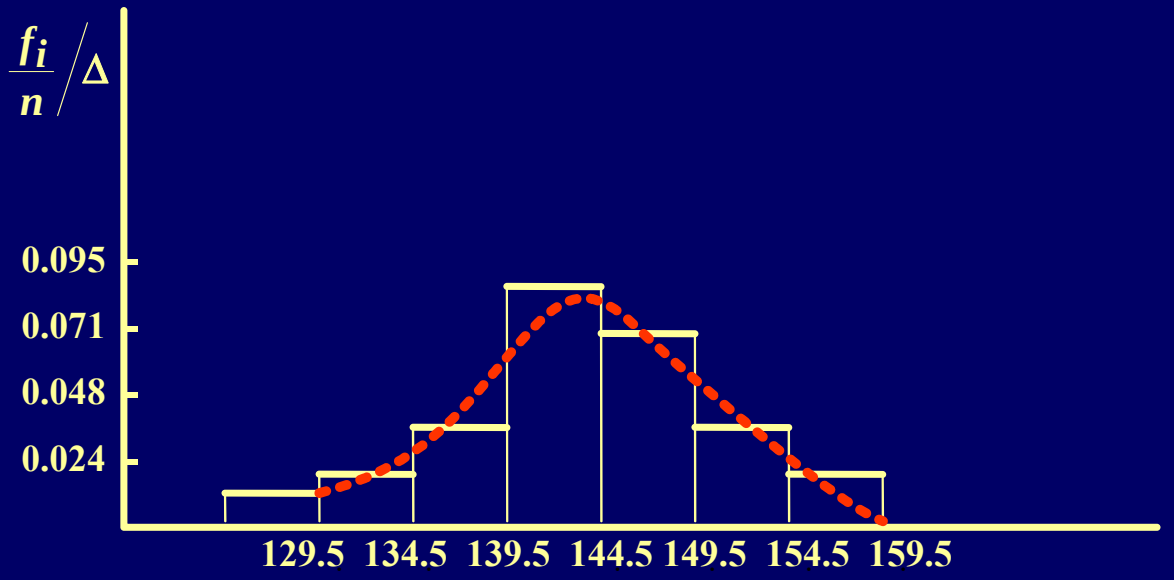
3. 小区间的端点称为组限,数出落在每个小区间的数据的频数 f_i, 算出频率f_i/n.

列表如下：

组 限	频 数	频 率	累计频率
124.5~129.5	1	0.0119	0.0119
129.5~134.5	4	0.0476	0.0595
134.5~139.5	10	0.1191	0.1786
139.5~144.5	33	0.3929	0.5715
144.5~149.5	24	0.2857	0.8572
149.5~154.5	9	0.1071	0.9643
154.5~159.5	3	0.0357	1.0000

现在自左向右依次在各个小区间上作以$\frac{f_i}{n}\Big/\Delta$为高的小矩形, 这样的图形叫频率直方图.

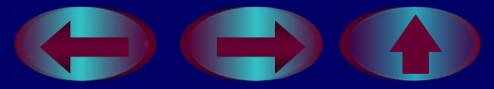
图 6-1 频率直方图



- 小矩形的面积等于数据落在该小区间的频率；当n很大时，频率接近于概率；
- 每个小区间的小矩形面积接近于概率密度曲线之下该小区间之上的曲边梯形的面积。因此，一般说来，直方图的外轮廓曲线接近于总体X的概率密度曲线；
- 该图接近于正态分布

直方图与条形图的区别*

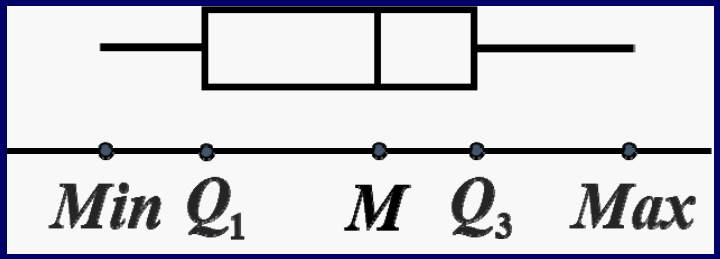
1. 条形图是用条形的长度(横置时)表示各类别频数的多少，其宽度(表示类别)则是固定的；直方图是用面积表示各组频数的多少，矩形的高度表示数据的分布，宽度则表示各组的组距，因此其高度与宽度均有意义。
2. 由于分组数据具有连续性，直方图的各矩形通常是连续排列，而条形图则是分开排列。
3. 条形图主要用于展示分类数据，而直方图则主要用于展示数值型数据。



二、箱线图

箱线图，也称箱须图、箱形图、盒图

- 由箱子和直线组成
- 基于5个数：最小值*Min*、第一四分位数Q_1、中位数M、第三四分位数Q_3和最大值*Max*
- 反映一组或多组连续型数据分布的中心位置和散布范围
- 揭示数据间的离散程度、异常值以及分布差异等



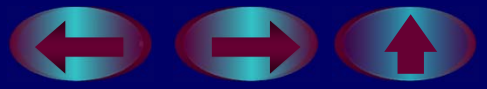
【定义】设有容量为n的样本观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$，

样本p分位数$(0 < p < 1)$记为x_p，

它具有以下的性质

⑴ 至少有np个观察值小于或等于x_p；

⑵ 至少有$n(1-p)$个观察值大于或等于x_p.



样本 p 分位数可按以下法则求得. 将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 按从小到大的顺序排列成 $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$.

1^o 若np不是整数, 则只有一个数据满足定义中的两点要求, 这一数据位于大于np的最小整数处, 即为位于$[np]+1$处的数.

2^o 若np是整数, 就取位于$[np]$和$[np]+1$处的中位数.

综上,

$$x_p = \begin{cases} x_{([np]+1)}, & \text{当 } np \text{ 不是整数,} \\ \dfrac{1}{2}[x_{(np)} + x_{(np+1)}], & \text{当 } np \text{ 是整数.} \end{cases}$$

特别, 当 $p=0.5$时, 0.5分位数 $x_{0.5}$也记为Q_2或M称为样本中位数　即有

$$x_{0.5}=\begin{cases} x_{([\frac{n}{2}]+1)}, & \text{当}np\text{不是整数,} \\ \frac{1}{2}[x_{(\frac{n}{2})}+x_{(\frac{n}{2}+1)}], & \text{当}np\text{是整数.} \end{cases}$$

0.25分位数 $x_{0.25}$ 称为第一四分位数 又记为Q_1

0.75分位数 $x_{0.75}$ 称为第三四分位数 又记为Q_3.

【例2】设有一组容量为18的样本如下（已经排过序）

122 126 133 140 145 145 149 150 157

162 166 175 177 177 183 188 199 212

求样本分位数：$x_{0.2}$, $x_{0.25}$, $x_{0.5}$.

【解】 (1) 因为 $np = 18 \times 0.2 = 3.6,$

$x_{0.2}$位于第$[3.6]+1=4$处, 即有 $x_{0.2} = x_{(4)} = 140.$

(2) 因为 $np = 18 \times 0.25 = 4.5,$

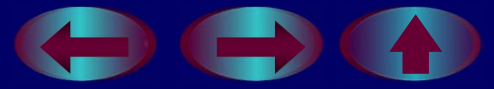
$x_{0.25}$位于第$[4.5]+1=5$处, 即有 $x_{0.25} = 145$

(3) 因为 $np = 18 \times 0.5 = 9,$ $x_{0.5}$是这组数中间两个数的平均值, 即有 $x_{0.5} = \frac{1}{2}(157+162) = 159.5.$

数据集的箱线图是由箱子和直线组成的图形，它是基于以下五个数的图形概括：最小值 Min，第一四分位数 Q_1，中位数 M，第三四分位数 Q_3 和最大值 Max. 它的作法如下：

(1) 画一水平数轴，在轴上标上 Min，Q_1，M，Q_3，Max. 在数轴上方画一个上、下侧平行于数轴的矩形箱子，箱子的左右两侧分别位于 Q_1，Q_3 的上方.

在 M 点的上方画一条垂直线段. 线段位于箱子内部.



（2）自箱子左侧引一条水平线直至最小值Min，在同一水平高度自箱子右侧引一条水平线直至最大值Max.

如图所示：

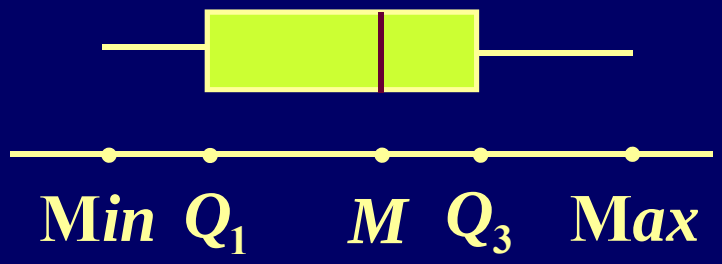
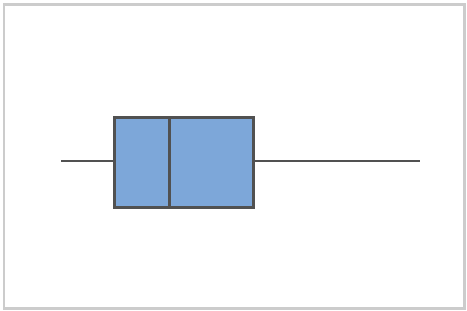
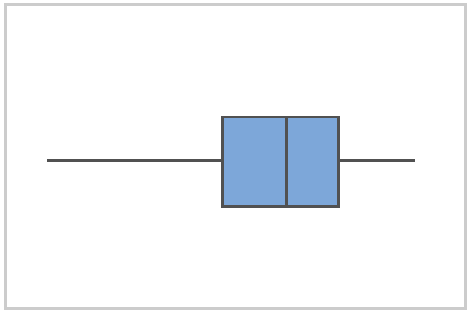


图 6-2



右偏斜



左偏斜

箱线图形象地放映出数据集的以下重要特性：

1）中心位置：即数据集的中心；

2）散布程度：区间较短时表明落在该区间的点较集中，反之较为分散；

3）对称性：若中位数位于箱子的中间位置，则数据分布较为对称；若Min离M的距离较Max离M的距离大，则表明数据分布向左倾斜，反之向右倾斜；而且能看出分布尾部的长短。

【例3】以下是8个病人的血压（收缩压，mmHg）数据（已经过排序），试作出箱线图.

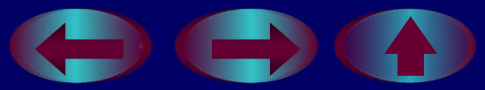
102　110　117　118　122　123　132　150

【解】　因为$np=8\times0.25=2,$　故

$$Q_1=\frac{1}{2}(110+117)=113.5.$$

因为$np=8\times0.5=4,$　故

$$x_{0.5}=Q_2=\frac{1}{2}(118+122)=120.$$



因为$np=8\times0.75=6,$ 故

$$x_{0.75}=Q_3=\frac{1}{2}(123+132)=127.5.$$

Min $=102.$ **Max** $=150,$

作出箱线图如图所示.

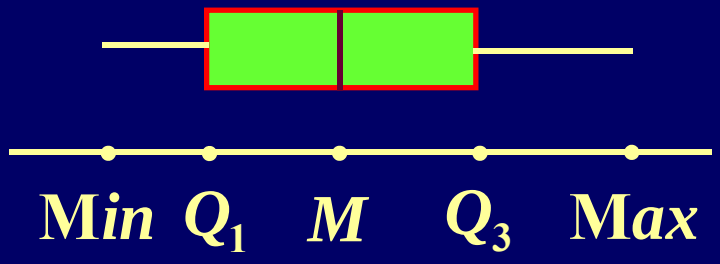


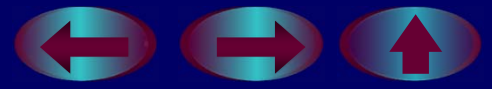
图 6-3

【例4】下面分别给出了25个男子和25个女子的肺活量（以升计.数据应经过排序）

女子组 2.7 2.8 2.9 3.1 3.1 3.1 3.2 3.4 3.4
3.4 3.4 3.4 3.5 3.5 3.5 3.6 3.7 3.7
3.7 3.8 3.8 4.0 4.1 4.2 4.2

男子组 4.1 4.1 4.3 4.3 4.5 4.6 4.7 4.8 4.8
5.1 5.3 5.3 5.3 5.4 5.4 5.5 5.6 5.7
5.8 5.8 6.0 6.1 6.3 6.7 6.7

试分别画出这两组数据的箱线图.



【解】 女子组 $\mathbf{Min}=2.7.\ \mathbf{Max}=4.2, M=3.5,$

因 $np=\mathbf{25\times0.25=6.25},\ Q_1=\mathbf{3.2.}$

因 $np=\mathbf{25\times0.75=18.75},\ Q_3=\mathbf{3.7.}$

男子组 $\mathbf{Min}=4.1, \mathbf{Max}=6.7, M=5.3,$

因 $np=\mathbf{25\times0.25=6.25},\ Q_1=\mathbf{4.7.}$

因 $np=\mathbf{25\times0.75=18.75},\ Q_3=\mathbf{5.8.}$

作出箱线图如图所示.

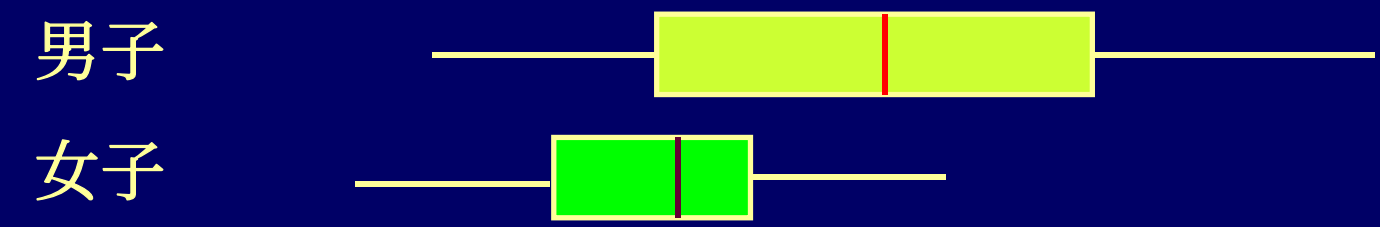


图 6-4

箱线图特别适用于比较两个或两个以上数据集的性质；因此将几个数据集的箱线图画在同一个数轴上。

下图可以看出：
1）男子的肺活量要比女子的大；
2）男子肺活量较女子肺活量为分散。

作出箱线图如图所示.

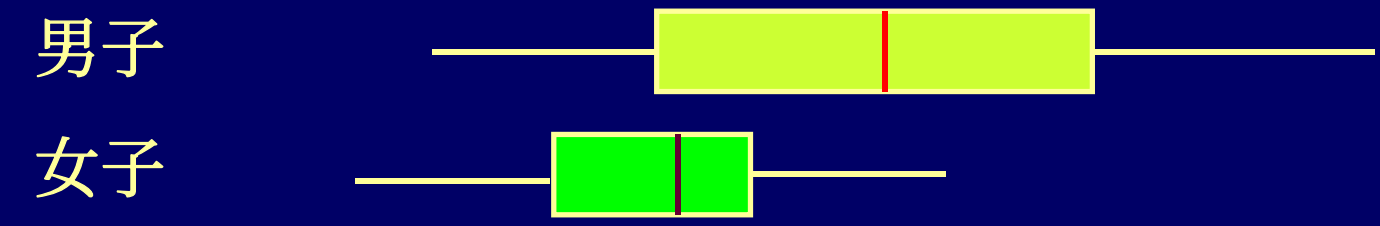


图 6-4

疑似异常值

在数据集中，某一个观察值不寻常地大于或小于该数据集中的其他数据,称为疑似异常值.

第一四分位数Q_1与第三四分数Q_3之间的距离

$$Q_3 - Q_1 = IQR$$

称为四分位数间距.

若数据小于$Q_1 - 1.5IQR$或大于$Q_3 + 1.5IQR$,则认为它是疑似异常值.

修正箱线图

(1′) 同(1)；

(2′) 计算$IQR = Q_3 - Q_1$, 若一个数据小于$Q_1 - 1.5IQR$或大于$Q_3 + 1.5IQR$, 则认为它是一个疑似异常值. 画出疑似异常值，并以* 表示;

(3′) 自箱子左侧引一水平线段直至数据集中除去疑似异常值后的最小值，又自箱子右侧引一水平线直至数据集中除去疑似异常值后的最大值.

【例5】下面给出了某医院21个病人的住院时间（以天计），试画出修正箱线图（数据已经过排序）.

1 2 3 3 4 4 5 6 6 7 7 9 9

10 12 12 13 15 18 23 55

【解】 $\mathbf{Min}=1,\ \mathrm{Max}=55,\ \mathrm{M}=7,$

因 $21\times0.25=5.25,$ 得 $Q_1=4,$

又 $21\times0.75=15.75,$ 得 $Q_3=12,$

$IQR=Q_3-Q_1=8,$

$Q_3+1.5IQR=12+1.5\times8=24,$

$Q_1-1.5IQR=4-12=-8.$

观察值55 > 24, 故55 是疑似异常值, 且仅此一个疑疑似异常值.

作出修正箱线图如图所示.

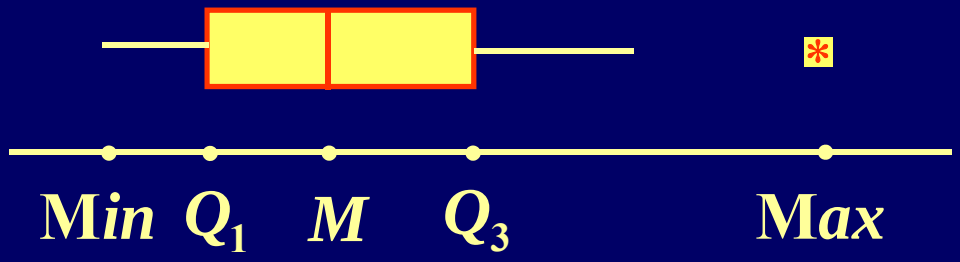
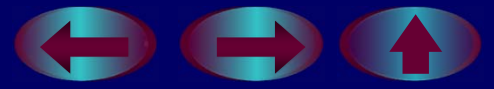


图 6-5

疑似异常值的产生

1. 数据的测量、记录或输入计算机时的错误；
2. 数据来自不同的总体；
3. 数据是正确的，但它只体现小概率事件。

- 当出现的原因无法解释时，对数据集作分析时尽量选用稳健的方法，使得疑似异常值对结论的影响较小，如：采用中位数而不是平均值来描述数据集的中心趋势。



三、小结

1.频率直方图作图步骤

(1) 找出最小值和最大值；

(2) 将选定区间分为k个小区间；

(3) 算出频率f_i/n. 在各个小区间上作以$\frac{f_i}{n}\Big/\Delta$为高的小矩形.

2.箱线图作图步骤

(1) 画一水平数轴，在轴上标上Min，Q_1，M，Q_3，Max. 在数轴上方画一个上、下侧平行于数轴的矩形箱子,箱子的左右两侧分别位于Q_1，Q_3的上方.

在M点的上方画一条垂直线段.线段位于箱子内部.

(2)自箱子左侧引一条水平线Min ;在同一水平高度自箱子右侧引一条水平线直至最大值.