厦门大学第十六届“景润杯”数学竞赛试卷

（非数学类，2019.6.1）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1．　空间直角坐标系中，在平面$\pi: x-y+z-1=0$上有一条直线L，其在平面$\pi_1: x+y+z-1=0$上的投影直线为$L_1:\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 2x-5y+3z-4=0 \end{cases}$，该直线$L$的方程为____________________。

2．　$\int \frac{x^3 e^x}{(x+3)^2} dx =$__________________________ 。

3．　设$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le x+y+1\}$，则$\iint\limits_D (x+y+1) dxdy =$__________ 。

4．　$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx =$____________。

5．　设$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ $(n \ge 1)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} =$____________。

6．　设Ω为球体$x^2+y^2+z^2 \le 1$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega} [(x+y)^2+(y+z)^2] dxdydz =$____________。

二、（本题 6 分）求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)\left(e^x-1\right)}$。

三、（本题 6 分）计算定积分$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\cos x}} dx$。

四、（本题 8 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的一阶导数，且$f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x) dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 (x-a)^2 dx。$$

五、（本题 8 分）已知函数$f(x)$具有四阶导数，且$\left|f^{(4)}(x)\right| \le M$。求证：$\forall x \ne a$，有

$$\left| f''(a) - \frac{f(x)+f(2a-x)-2f(a)}{(x-a)^2} \right| \le \frac{M}{12}(x-a)^2。$$

六、（本题 8 分）设数列$\{u_n\}$满足：$0<u_n<1$且

$$u_1+(1-u_1)u_2+(1-u_1)(1-u_2)u_3+\sum_{n=4}^{\infty}(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_{n-1})u_n=1。$$

证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

七、（本题 8 分）设曲线L为$x^2+y^2=2x\ (y\geq 0)$上从$O(0,0)$到$A(2,0)$的一段有向弧，求连续函数$f(x)$，使得$f(x)=x^2+\int_L y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-xy^2)\mathrm{d}y$。

八、（本题 8 分）求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$的和数。

九、（本题 8 分）设$u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中f在$(0,+\infty)$上具有连续的二阶导数，且$\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+f(x)]}{x-1}=1$，试求函数$f(r)$，使得$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

十、（本题 8 分）设$|x_1|<1$，$x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$，求：（1）$\lim_{n\to\infty}4^n(1-x_n)$；（2）$\lim_{n\to\infty}x_1x_2\cdots x_n$。

十一、（本题 8 分）已知$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可导，$g'(x)\neq 0$，且$\frac{f'(a)}{g'(a)}\neq\frac{f'(b)}{g'(b)}$。求证：对任意位于$\frac{f'(a)}{g'(a)}$和$\frac{f'(b)}{g'(b)}$之间的数$C$，都$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$。