厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期末试题

考试日期：2011 年 1 月　　信息学院自律督导部

自律督导部

1.（5 分）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

2. （5 分）设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，求 $\int\dfrac{dx}{f(x)}$.

3. （10 分）设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & x<0或x\ge 2\end{cases}$ ，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

4. （10 分）设 $I_n=\int\tan^n xdx$，求证：$I_n=\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$，并求 $I_5=\int\tan^5 xdx$.

5．计算下面的积分（每小题 5 分，共 6 题 30 分）

（1）$\int_1^4\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

（2）$\int_0^a\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$；

(3) $\int_0^{\pi/4}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^2[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}]\mathrm{d}x$.

6. (5 分) 设 $f(u)$ 是连续函数，求 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2}xf(t\mathrm{e}^x)\mathrm{d}t$ 关于 x 的导数。

7. (5 分) 设 $g(x)$ 为正值连续函数，令 $f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|g(t)dt,(a\geq 0)$, 判别 $f(x)$ 的图形在 $[-a,a]$ 上的凹凸性。

8. (10 分) 证明当 $x\geq 0$ 时，有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

9. (10 分) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线有几条？请给出您的结论。

10. (10 分) 设在 $[1,+\infty)$ 上处处有 $f''(x)\leq 0$，且 $f(1)=2, f'(1)=-3$，证明在 $(1,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根。

11． 附加题(10 分)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$