例 1. 设$\{u_n\}$是单调增加有界的整数数列，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$收敛.

证明：因为$\{u_n\}$是单调增加有界的整数数列，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$为正项级数，且通项$1-\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}\le\frac{u_{n+1}-u_n}{u_1}$.

级数的$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{u_1}$的前$n$项和为$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_1}=\frac{u_{n+1}}{u_1}-1$.

由于数列$\{u_n\}$单调有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{u_{n+1}}{u_1}-1)$存在，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{u_1}$收敛.

由比较审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$收敛.

例 2. 证明：级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$是条件收敛的.

证明, 显然, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\ge\frac{1}{\sqrt{n-1}}$，而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}}$收敛, 所以$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|$发散.

记S_n为级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$的前$n$项和，则

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

则$S_{2n}=(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}})$单调减少，且

$$S_{2n}>(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}>-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

即数列$\{S_{2n}\}$单调减少有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}})=S$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，即级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$为条件收敛.

例 3. 设$a>0$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$的敛散性.

解：$\frac{1}{a^{\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n\ln a}}=\frac{1}{n^{\ln a}}$,

故当$\ln a>1$，即$a>\mathrm{e}$时，级数收敛；

$0<a\le\mathrm{e}$时，$\ln a\le1$，级数发散.

例4. 根据α的取值，讨论正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^{\mathrm{n}}]^{\alpha}$的敛散性。

解：记$v_n=\mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^{\mathrm{n}}$，则由等价无穷小的常用公式和麦克劳林展开式

$$v_n=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\mathrm{n}\ln(1+\frac{1}{n})}=\mathrm{e}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{n}\ln(1+\frac{1}{n})-1}]\sim\mathrm{e}[1-\mathrm{n}\ln(1+\frac{1}{n})]$$
$$=\mathrm{e}\{1-\mathrm{n}[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{n^2})]\}=\frac{\mathrm{e}}{2n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n})\sim\frac{\mathrm{e}}{2n}\quad(n\to\infty)$$

所以正项级数的通项$u_n=(v_n)^{\alpha}\sim(\frac{\mathrm{e}}{2n})^{\alpha}=(\frac{\mathrm{e}}{2})^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}\quad(n\to\infty)$

故当$\alpha>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$\alpha\le1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散 。

例 5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（$a_n>0$），$p>1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}[n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)a_n]=1$，试讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性.

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-\frac{1}{2}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^pn^{-\frac{1}{2}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)a_n=1$.

故由正项级数比较审敛法的极限形式，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$有相同的敛散性。

故当$p-\frac{1}{2}>1$，即$p>\frac{3}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$1<p\le\frac{3}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

例6. 如果$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+\cdots$与$v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2+\cdots$是收敛的常数项级数，证明：级数$(u_1-v_1)^p+(u_2-v_2)^p+\cdots+(u_n-v_n)^p+\cdots$是收敛的，其中$p$是大于等于 2 的整数.

证明：因为$p=2$时，$(u_n-v_n)^2\le 2(u_n^2+v_n^2)$，而$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+\cdots$与$v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2+\cdots$都是收敛的，故

$$(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2+\cdots$$

是收敛的。

当$p>2$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n-v_n|^p}{(u_n-v_n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}|u_n-v_n|^{p-2}=0$，由级数

$$(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2+\cdots$$

收敛，可得级数$(u_1-v_1)^p+(u_2-v_2)^p+\cdots+(u_n-v_n)^p+\cdots$是绝对收敛的，即.级数$(u_1-v_1)^p+(u_2-v_2)^p+\cdots+(u_n-v_n)^p+\cdots$是收敛的.

例 7. 已知函数$y(x)$满足$y'=x+y$及$y(0)=1$，

（1）试证：$y(-\frac{1}{n})>1-\frac{1}{n}\,(n=1,2,\text{L}\ )$；

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[ny(-\frac{1}{n})-n+1]$是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：（1）由于$y'=x+y$，即$y'-y=x$，是一阶线性微分方程，所以它的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}[\int x\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=C\,\mathrm{e}^{x}-x-1.$$

由 $y(0)=1$，得 $C=2$，即 $y=2\mathrm{e}^{x}-x-1$.

当 $x>0$ 时，$y(-x)+x-1=2(\mathrm{e}^{-x}+x-1)>0$，即 $y(-x)-1+x>0$.

令 $x=\frac{1}{n},n=1,2,\mathrm{L}$，则 $y(-\frac{1}{n})-1+\frac{1}{n}>0$，即 $y(-\frac{1}{n})>1-\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$.

（2）令 $f(x)=\frac{1}{x}y(-x)-\frac{1}{x}+1=\frac{2(\mathrm{e}^{-x}-1)}{x}+2$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{2(\mathrm{e}^{-x}-1+x)}{x}>0$，故 $u_n=ny(-\frac{1}{n})-n+1=f(\frac{1}{n})>0$.

于是，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[ny(-\frac{1}{n})-n+1]$ 为交错级数.

由于当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{2(-x\mathrm{e}^{-x}+1-\mathrm{e}^{-x})}{x^2}=\frac{2(\mathrm{e}^{x}-1-x)}{x^2\mathrm{e}^{x}}>0$，则 u_n 单调减少，

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2(\mathrm{e}^{-x}-1+x)}{x}=\lim_{x\to0^+}2(1-\mathrm{e}^{-x})=0$$

由交错级数的莱布尼兹定理知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[ny(-\frac{1}{n})-n+1]$ 收敛.

此外，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}u_n\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2(\mathrm{e}^{-x}-1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}2\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=1$.

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}[ny(-\frac{1}{n})-n+1]\right|$ 发散.

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[ny(-\frac{1}{n})-n+1]$ 条件收敛.

例 8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

证明：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可得 $f(0)=f'(0)=0$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f'(x)}{x}\right|=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}|f''(x)|=\dfrac{1}{2}|f''(0)|$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}|f''(0)|$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

例 9. （略）

例 10. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,(u_n>0)$ 是正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=p$ 时，证明：当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，当 $p<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。由此判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(1-\dfrac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$ 的敛散性。

证明：由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=p$，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N,$ 当 $n>N$ 时，有

$$p-\varepsilon<\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}<p+\varepsilon,$$

当 $r>1$ 时，取 ε 使 $p-\varepsilon=r>1$，则有 $r\ln n<\ln\dfrac{1}{u_n}$，即 $u_n<\dfrac{1}{n^r}$，$n>N,r>1$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ 收敛，由比较判别法得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

当 $r<1$ 时，取 ε 使 $p+\varepsilon=r<1$，则有 $r\ln n>\ln\dfrac{1}{u_n}$，即 $u_n>\dfrac{1}{n^r}$，$n>N,r<1$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ 发散，由比较判别法得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

下面判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(1-\dfrac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$ 的敛散性。

令 $u_n=(1-\dfrac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2\ln(1-\frac{2\ln n}{n^2})}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\,\frac{2\ln n}{n^2}}{\ln n}=2>1$，

由上述所给的判别法得$\sum_{n=2}^{\infty}(1-\frac{2\ln n}{n^2})^{n^2}$收敛。

例 11.判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3+\sqrt{5})^n$的收敛性.

解：$(3+\sqrt{5})^n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n$

$$=M_n-(3-\sqrt{5})^n,$$

其中M_n为偶数, 所以,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3+\sqrt{5})^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3-\sqrt{5})^n,$$

因为$0\le\sin\pi(3-\sqrt{5})^n\le\pi(3-\sqrt{5})^n$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\pi(3-\sqrt{5})^n$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3-\sqrt{5})^n$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3+\sqrt{5})^n$收敛.

二、数项级数求和

例 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=$____________.

答案：$\frac{\pi}{2}$（见 PPT）.

例 2. 证明级数$\pi^2+\frac{\pi^4}{3!}+\frac{\pi^6}{5!}+\cdots+\frac{\pi^{2n}}{(2n-1)!}+\cdots$收敛，并求和.

答案：$\frac{\pi}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$，见 PPT.

例 3. 设$y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，求$y^{(n)}(0)$.

解：因为 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$

当 $x \neq 0$ 时， $y = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

当 $x = 0$ 时， $y|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}\Big|_{x=0} = 1$

因此，对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$， $y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$，

另一方面，根据函数的麦克劳林级数， $y = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$，

比较两式的系数可得 $y^{(n)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}, & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$.

例4. 设 $a_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x| \mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots$，试求 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n}$ 的值.

解：令 $x = n\pi - t$，则 $a_n = n\pi \int_0^{n\pi} |\sin t| \mathrm{d}t - a_n$，所以，

$$a_n = \frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi} |\sin t| \mathrm{d}t = \frac{n\pi}{2} \cdot n \int_0^{\pi} \sin t \mathrm{d}t = n^2\pi .$$

记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$，则当 $|x| < 1$ 时，

$$S(x) = x(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n)' = x[x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)']' = x[x(\frac{x}{1-x})']'$$

$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} .$$

因此， $S(\frac{1}{2}) = 6$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = 6\pi$.

例5. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n)!}$ 的和.

解：考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

记$u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$， 令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0$，

故幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$的收敛域为幂级数$(-\infty,+\infty)$.

设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$， 注意到

$$S(x)+S'(x)+S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}=\mathrm{e}^{x}.$$

且$S(0)=1,\ S'(0)=0$.

由$r^2+r+1=0$得$r_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故方程$S(x)+S'(x)+S''(x)=0$的通解为$S_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$.

注意到：$\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}$为方程$S(x)+S'(x)+S''(x)=\mathrm{e}^{x}$的一个特解，故$S(x)+S'(x)+S''(x)=\mathrm{e}^{x}$的通解为$S(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}$.

由$S(0)=C_2+\dfrac{1}{3}=1$得$C_2=\dfrac{2}{3}$.由$S'(0)=-\dfrac{1}{2}C_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_1+\dfrac{1}{3}=0$得$C_1=0$.于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

取$x=1$，可得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n)!}=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}.$

三、函数项级数的敛散性

例 1. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^{n}}{2n-1}]x^{2n-1}$的收敛域。

解：由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^{n}}{2n-1}]x^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}x^{2n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2n-1}x^{2n-1}$，

容易算出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}x^{2n-1}$的收敛域为$[-1,1]$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域为$[-1,1]$，它们的公共收敛域为$[-1,1]$。

所以原幂级数的收敛域为$[-1,1]$。

例 2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$的收敛半径，并讨论端点的收敛性.

解法 1：因为 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}<\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}<1$，由$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$可知，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}=1$$

所以，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$的收敛半径都是 1.

当 $x=1$ 时，有 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n}$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，得级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$发散.

当$x=-1$时，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$是一个交错级数.

因为$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$单调减少，且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=0$. 由莱布尼兹判别法，

可知原级数在$x=-1$时收敛.

综上可知，原级数的收敛半径为 1，收敛域为$[-1,1)$.

解法 2：设$u_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$，因为$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}]=+\infty$，由 stolz

定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$.

所以，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$的收敛半径都是 1.

当 $x=1$ 时，有 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{n}$，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，得级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$发散.

当$x=-1$时，原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$是交错级数.

因为$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=0$．由莱布尼兹判别法，

可知原级数在$x=-1$时收敛.

故原级数的收敛半径为 1，收敛域为$[-1,1)$.

例 3. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})]x^n$的收敛域。

解：记$a_n=1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})$，当$n\to\infty$时，

$$a_n=1-n\ln(1+\frac{1}{n})=1-n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})]=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2n}$$

$$a_{n+1}\sim\frac{1}{2(n+1)}$$

所以$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2(n+1)}}{\frac{1}{2n}}=1$，

因此所给幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$，从而收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，所给幂级数为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})]$，因为

$1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{2n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})]$ 发散.

当 $x=-1$ 时，所给幂级数为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})]$，因为

$\lim_{n\to\infty}[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})]=0$，令 $f(x)=1-x\ln(1+\dfrac{1}{x}),\quad x\geq 1$

而 $f'(x)=[1-x\ln(1+\dfrac{1}{x})]'=\ln(\dfrac{x}{x+1})-\dfrac{1}{1+x}<0$，所以 $1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 单调减少趋于 0，所以由交错级数的莱布尼茨判别法知

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})]$ 收敛。综上所述，收敛域为 $[-1,1)$.

例4. 讨论级数 $1-\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^x}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^x}+\cdots$ 在哪些 x 处收敛？在哪些 x 处发散？

解：$x=1$ 时，级数为收敛的交错级数。

$x>1$ 时，$S_{2n}=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2^x}(1+\dfrac{1}{2^x}+\cdots+\dfrac{1}{n^x})$，

因为 $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1})$ 不存在，而 $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2^x}+\cdots+\dfrac{1}{n^x})$ 存在，所以，$\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ 不存在. 故原级数发散。

$x<1$ 时，考虑加括号的级数

$$1-[(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4^x}-\frac{1}{5})+\cdots]=1-\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}).$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}(\dfrac{1}{(2n)^x}-\dfrac{1}{2n+1})$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(2n)^x}-\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{(2n)^x}}=1$.

又$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}=\frac{1}{2^x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}$发散，所以原级数发散.

例5. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域.

提示： 用根式判别法.

解：令$t=\mathrm{e}^{-x}$，原级数改写为$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}t^n$.

因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}=\mathrm{e}^{-1}$，故收敛半径为$R=\mathrm{e}$.

当$t=\pm\mathrm{e}$时，因为$(1+\frac{1}{n})^{-n^2}\mathrm{e}^n=[\frac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}]^n>1$，所以，当$n\to\infty$时，通项不趋于 0.

因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}t^n$的收敛域为$(-1,1)$.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域为$(0,+\infty)$.