景润杯试题选（微分方程和空间解析几何）

一、设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 在 xoy 平面的投影直线为 L_1，在 yoz 平面的投影直线为 L_2，试问 L_1 与 L_2 是否异面？若异面，请求出公垂线段的长度及公垂线方程。(第八届景润杯试题)

二、求一条曲线，使它通过点 $(0,1)$，且其上任一点 $P(x,y)$ 处的切线和法线在 x 轴上截下的线段长度为 y^2+1。(第八届景润杯试题)

三、设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求

（1） $f(x)$ 的表达式；（2） $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t$。(其中 $n=2,3,\cdots$)（第十一届景润杯试题）

四、已知椭球面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$0<c<a<b$），试求过 x 轴并与曲面 Σ 的交线是圆的平面方程。(第十四届景润杯试题)

五、已知两条异面直线为 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x=z-2\\ y=1\end{cases}$，求此二直线相切的最小球面方程。(第十五届景润杯试题)

六、微分方程 $y''+(y')^2+4=0$ 的通解为________________。(第十九届景润杯试题)

七、已知平面 Π 与平面 $\Pi_1:13x-5y-10z+13=0$ 关于平面 $\Pi_2:x-2y+3z+1=0$ 对称，则平面 Π 的方程为________________________.（第十九届景润杯试题）

八、已知 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\mathrm{e}^x$ 的一个特解，则 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$__________________。(第十七届景润杯试题)