**厦门大学第13届“景润杯”数学竞赛评分标准（非数学类）**

**一、填空题（本大题共10小题，每小题3分，总计30分）**

1．；2．；3．；4．第一类间断点；5．； 6．；7．；8．；9．0；10. .

**二、（本题6分）**设函数在点处可导，且它的图形在点处切

线方程为，求极限.

解：由于曲线在点处的切线方程为，所以有

.

做变量代换，令，，则

.

于是，







**三、（本题6分）**设上定义的函数在处连续且对任意，.证明：为常数.

证：构造数列，任取,，

显然对于，



由夹逼定理可得.

由题设条件，则



则有，由的任意性得.

**四、（本题6分）**求曲面所围区域的体积.

证明：做积分变换：，则所围的区域就变换成



所以 .

再利用球坐标 令，







其中：，



.

故 .

**五、（本题6分）**求幂级数的收敛半径，并讨论端点的收敛性.

解法1：因为 ，由可知，



所以，幂级数的收敛半径都是1.

当时，有，由于级数发散，得级数发散.

当时，原级数是一个交错级数.

因为单调减少，且. 由莱布尼兹判别法，可知原级数在时收敛.

综上可知，原级数的收敛半径为1，收敛域为.

解法2：设，因为，由stolz定理得 .

所以, 幂级数的收敛半径都是1.

当时，有，由于级数发散，得级数发散.

当时，原级数是交错级数.

因为单调减少，且. 由莱布尼兹判别法，可知原级数在时收敛.

故原级数的收敛半径为1，收敛域为.

**六、（本题8分）**设在上二阶可导，，，且时，，求证：时，．

证明：作辅助函数.

当时，，因此，在上单调减少.

由，可得时，.

作辅助函数.

当时，，所以，函数在上单调减少.

故当时，，即.

**七、（本题8分）**设在上可导且，证明：

.

证明 作变量替换，得.

令，则

因为，，则在上单调增加. 由于在内单调减少，所以在内单调减少.

又因为， 所以当时，.

故.

**八、（本题10分）**已知函数满足及，

（1）试证：；

（2）级数是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：（1）由于，即，是一阶线性微分方程，所以它的通解为



由，得，即

当时，，即.

令，则，即.

（2）令，

当时，，故.

于是，级数为交错级数.

由于当时，，则单调减少，



由交错级数的莱布尼兹定理知，级数收敛.

此外，



由级数发散，得级数发散.

故级数条件收敛.

**九、（本题10分）**设,除外连续,且有连续的偏导数.当时, , 且，，逆时针方向, 为任意正实数, 试证明：

（1）； （2）存在连续可微的函数，使得时，.

证：（1）的参数方程为，则



（2）由（1），，且有

，.

令，. 则当时，有.

于是对任意一条包含原点的封闭曲线，有



故沿任何封闭光滑曲线一定有，由积分与路径无关的等价条件知，存在一个函数，使得当时，，

即，从而得

.

**十、（本题10分）**设椭圆及直线. 求

（1）上的点到的最大距离和最小距离；

（2）函数的表达式；

（3）曲线，直线和围成的平面图形的面积.

解：（1）首先求过椭圆上某一点的一条切线，使此切线与平行，则它需满足：，解此方程组得.



点到的距离分别为



，



因此上的点到的最大距离和最小距离



（2）当时，；当时，；当时，. 所以



（3）由于由曲线，直线和所围成的平面图形是角形域，故采用极坐标计算的面积.



曲线的极坐标方程为，直线的极坐标方程为，直线的极坐标方程为，所以的面积







