|  |
| --- |
| **厦门大学第十五届“景润杯”数学竞赛试卷**  **（非数学类，2018. 6. 3）** |

**一、填空题（本题共10小题，每小题3分，总计30分）**

1．1；

2．；

3．；

4．；

5．；

6.；

7. ；

8. ；

9. ；

10. .

二、（本题6分）求极限.

解：利用，得

，

即.

注意到，，

故.

三、（本题6分）设，讨论级数的敛散性.

解：，

故当，即时，级数收敛；

时，，级数发散.

四、（本题6分）计算定积分.

解：

；

于是，





.

**五、（本题6分）**设曲线为球面与平面的交线，求.

解：

由轮换对称性，

且，

故.

六、（本题6分）设函数在上连续，在内二阶可导. 证明：存在，使得

.

证明：因为



所以作辅助函数



**由于**在上满足拉格朗日中值定理，所以存在，使得



**由于**在上满足拉格朗日中值定理，所以存在，使得



上式代入上上式得

.

**七、（本题10分）设函数**在上连续，且单调增加，证明：

，

其中，并由此证明.

证明：因为在上单调增加，故，故



即.

由轮换对称性，有，，故



由于，则

.

又，故

.

八、（本题10分）设函数具有连续偏导数，且满足，，，求极限.

解：利用洛必达法则，





因为





故.

由两边对求导，则.

取，可得，故

.

于是，.

九、（本题10分）已知两条异面直线为和，求此二直线相切的最小球面方程.

解：直线的方向向量为，

则与的公垂线的方向向量为

.

过且平行于的平面方程为，即.

联立方程，解得，这是公垂线与的交点.

过且平行于的平面方程为，即.

联立方程，解得，这是公垂线与的交点.

于是，球面球心坐标为，半径为

.

故所求球面的方程为

十、（本题10分）设是对全体实数有定义的函数，满足方程. 证明：如果是二次连续可微函数，则必是一个常数.

证明：取，得出



对两端求导，得



再次两端求导，得



因此连续函数满足函数方程



令，得



又设，那么如果，则显然也有，因此从上式得



对所有成立，由此又得，因此，由于是任意的，故处处等于零。

从得



再由就得出必为一个常数.