

Options lookback et sensibilités

Simulation & probabilités numériques

M2 Probabilités Finance

Rapport de projet pour le 29/04/2022

Mouad JALLOULI
Khalil IBRAHIMI

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Présentation du sujet	2
1.2	Un mot sur les options lookback	2
1.3	Sensibilités	2
1.3.1	Delta	2
1.3.2	Gamma	3
2	Calcul de sensibilités	3
2.1	Différences finies	3
2.1.1	Différences finies à pas constant	3
2.1.2	Approche par différences finies à pas décroissant	4
2.2	Méthode du processus tangent	4
2.3	Calcul de Malliavin	5
2.3.1	Introduction	5
2.3.2	Éléments de calcul de Malliavin	6
2.3.3	Hypothèses préliminaires	7
2.3.4	Localisation et processus dominant	7
2.3.5	Choix de la fonction localisante	8
2.3.6	Poids Martingale	8
3	Simulation et résultats numériques	10
3.1	Simulation du mouvement brownien géométrique	10
3.2	Simulation du max/min d'un processus	10
3.3	Réduction de variance	11
3.4	Implémentation C++	11
3.5	Résultats	11
3.5.1	Delta	11
3.5.2	Gamma	13
4	Conclusion	15

1 Introduction

1.1 Présentation du sujet

- ▷ Étudier et implémenter la méthode de calcul du delta (et du gamma) par calcul de Malliavin proposée par [BGK03] pour différentes options de type lookback de votre choix.
- ▷ Calculer également le delta par la méthode du flot, par différences finies : à pas fixe, à pas décroissant. Dans le second cas on choisira avec soin la constante "c" qui gouverne le pas de différence finie. On pourra ajouter des réducteurs de variance.
- ▷ Comparer le poids de Malliavin avec celui obtenu par l'approche martingale dans [Gob04].
- ▷ Calculer le gamma par différences finies, par une approche mixte (différences finies sur la méthode du flot) et comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. On propose d'ajouter une méthode de réduction de variance.

Références : [BGK03], [Fou+99], [Gob04].

1.2 Un mot sur les options lookback

Une option lookback (regarder en arrière) une option exotique qui est basée sur la valeur optimale d'un actif pendant toute sa durée d'exercice. Avec ce type, l'acheteur de l'option est donc sûr d'avoir le meilleur prix pour lui durant la durée de vie de l'option. En effet, le payoff est une fonction des valeurs maximales et minimales que peuvent prendre les actifs durant la durée de vie de l'option. Les contrats d'options lookback, comme les options vanilles, disposent d'un certain prix d'exercice "strike", qui peut être flottant ou fixe.

L'option lookback à "floating strike" entre en vigueur (cours du jour) dès la date de conclusion de l'opération, mais son prix d'exercice n'est connu qu'à la date d'échéance. En effet, soit S_{max}, S_{min} , respectivement, les valeurs maximales et minimales prises par S pendant la durée d'exercice, les payoff des calls et puts lookback, de maturité T , portés sur un actif S , sont définis par : $LCall_{float} = (S_T - S_{min})^+$ et $LPut_{float} = (S_{max} - S_T)^+$.

Pas besoin de noter que ces options sont toujours exercées et leur prix est naturellement plus élevé que celui des options vanilles.

Quant au option lookback à fixed strike égal à K , Le gain de l'acheteur de l'option à l'échéance est déterminé par comparaison du prix d'exercice et du cours le plus favorable atteint pendant la durée de vie de l'option. En effet, le payoff est la différence entre la valeur optimale de l'actif et le strike : $LCall_{fixed} = (S_{max} - K)^+$ et $LPut_{fixed} = (K - S_{min})^+$.

1.3 Sensibilités

1.3.1 Delta

En finance, le Δ d'une option mesure la sensibilité de la valeur théorique d'une option à une variation d'une unité de la valeur sous-jacente. Le calcul du delta est essentiel pour la couverture de l'option. Il varie entre 1 et -1 et il est calculé via la dérivée première du prix de l'option V par rapport au sous-jacent S :

$$\Delta := \frac{\partial V}{\partial S} \quad (1.1)$$

1.3.2 Gamma

Le Γ d'une option sert à indiquer la sensibilité d'un delta. Il permet d'évaluer à un instant précis les fluctuations du delta selon les variations du sous-jacent. Autrement dit, il représente la convexité de son prix en fonction du sous-jacent. Si le calcul du Δ est la base de la couverture, le Γ donne idée sur les besoins de rebalancement du portefeuille pour une couverture en Δ . Il est défini comme la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au sous-jacent :

$$\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (1.2)$$

2 Calcul de sensibilités

Avant de parler sensibilité, il est tout d'abord indispensable de définir le cadre de la modélisation choisi pour le problème. En effet, afin de décrire la dynamique de l'actif S sur lequel les options lookback seront contracté, on a fait le choix de considérer le modèle de Black & Scholes avec une distribution log-normale. Ainsi :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = x, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.1)$$

sous la probabilité risque-neutre, tel que r représente le taux d'intérêt sans risque, σ la volatilité de l'actif et T la maturité de l'option. Théoriquement, le prix des différents options lookback est l'espérance sous la probabilité risque-neutre du payoff actualisé. Pour un payoff $\phi(x, S_T, \min_{t \in [0, T]} S_t, \max_{t \in [0, T]} S_t)$, on a le prix donné par : $V = \mathbb{E}[e^{-rT} \phi]$.

Afin de calculer les deux sensibilités Δ et Γ abordés dans 1.3, on se propose d'approcher les valeurs de Δ et Γ via Monte Carlo :

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}[e^{-rT} \phi], \quad \Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbb{E}[e^{-rT} \phi] \quad (2.2)$$

2.1 Différences finies

En manière générale, les méthodes aux différences finies sont une classe de techniques numériques permettant de résoudre des équations différentielles. Le coeur de cette classe de méthodes est l'approchement des dérivées avec des différences finies. Ceci coïncide avec notre besoin d'approcher les deux dérivés Δ et Γ .

Soit $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$, I un intervalle de \mathbb{R} non vide, $F : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\forall x \in I, F(x, Z) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$. Soit la fonction prix $f(x) = \mathbb{E}[F(x, Z)]$.

Supposant qu'on peut simuler Z à coût raisonnable et en plus la quantité $\frac{\partial F}{\partial x}(x, Z)$ existe. En plus supposant que conditions des théorèmes de l'inversion de l'espérance et la dérivation sont satisfaites. Dans ce cas là, on peut calculer $f'(x)$ via une méthode de Monte-Carlo tel que $f'(x) = \mathbb{E}[\frac{\partial F}{\partial x}(x, Z)]$. Dans le cas contraire ou on ne dispose pas d'une formule fermée pour $\frac{\partial F}{\partial x}(x, Z)$, on propose de l'approcher par la méthode des différences finies. En fonction de la nature du "pas" adopté pour la méthode des différences finies, deux cas de figures s'imposent : Approche à pas constant et à pas décroissant.

2.1.1 Différences finies à pas constant

On retrouve la démonstration du résultat clé sur lequel repose l'approche par différences finies à pas constant dans [Pag16] :

Proposition 2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que F vérifie $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall x' \in]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[, \|F(x, Z) - F(x', Z)\|_2 \leq C_{F,Z}|x - x'|$. Encore, Supposons que f deux fois dérivable, avec une dérivée seconde lipschitzienne continue sur $]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[$. Soit $(Z_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d de vecteurs aléatoires de même distribution que Z . Alors $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:

$$\left\| f'(x) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{F(x + \varepsilon, Z_k) - F(x - \varepsilon, Z_k)}{2\varepsilon} \right\|_2 \leq [f'']_{lip} \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{C_{F,Z}}{\sqrt{M}} \quad (2.3)$$

De plus si f est trois fois dérivable sur $]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[$ avec une dérivée troisième bornée, alors on peut remplacer $[f'']_{lip}$ par $\frac{1}{3} \sup_{|\xi - x| \leq \varepsilon} |f^{(3)}(\xi)|$.

Recommandation numérique 2.1. [Pag16] recommande le choix $M = M(\varepsilon)$ pour un ε fixé tel que $M(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-4})$.

2.1.2 Approche par différences finies à pas décroissant

Remarquons que dans la méthode à pas constant la méthode des différences finies à pas constant, le biais qui correspond à $[f'']_{lip} \frac{\varepsilon^2}{2}$ ne s'estompe jamais. Par conséquent, l'augmentation de la précision du calcul de sensibilité, nécessite de le reprendre depuis le début avec un nouveau ε . En effet, on propose une version récursive de la procédure de différence finie à pas constant en considérant des ε qui vont vers 0. Ainsi on considère l'estimateur suivant :

$$\widehat{f'(x)}_M = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{F(x + \varepsilon_k, Z_k) - F(x - \varepsilon_k, Z_k)}{2\varepsilon_k} \quad (2.4)$$

On peut ramener cet estimateur à une version à l'aide de la formule suivante :

$$\widehat{f'(x)}_{M+1} = \widehat{f'(x)}_M + \frac{1}{M+1} \left(\frac{F(x + \varepsilon_{M+1}, Z_{M+1}) - F(x - \varepsilon_{M+1}, Z_{M+1})}{2\varepsilon_{M+1}} - \widehat{f'(x)}_M \right) \quad (2.5)$$

Toujours dans [Pag16], on démontre que l'erreur quadratique vérifie l'inégalité suivante :

$$\|f'(x) - \widehat{f'(x)}_M\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{\frac{[f'']_{lip}^2}{4M} \left(\sum_{k=1}^M \varepsilon_k^2 \right) + C_{F,Z}^2} \quad (2.6)$$

Remarque 2.1. Pour pouvoir prétendre à une vitesse de $\frac{1}{\sqrt{M}}$ comme pour Monte Carlo, il faut avoir $\sum_{k=1}^M \varepsilon_k^2 = O(M)$ quand $M \rightarrow +\infty$. On aurait pu choisir $\varepsilon_k = o\left(k^{-\frac{1}{4}}\right)$ mais faute d'instabilité numérique [Pag16] recommande de choisir $\varepsilon_k = o\left(k^{-\frac{1}{4}+\delta}\right)$ pour $\delta > 0$ très petit.

Proposition 2.2. Sous les hypothèses ci-dessus et si $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ alors l'estimateur $\widehat{f'(x)}_M$ converge ps vers $f'(x)$ quand $M \rightarrow +\infty$.

2.2 Méthode du processus tangent

Le principe de la méthode du processus tangent s'intéresse à la dérivation des espérances via la différentiabilité de la trajectoire de notre processus selon sa valeur initiale. On utilisera cette technique pour le calcul de sensibilité.

Définition 2.1. On se place dans un cadre général. Soit X_t une diffusion d -dimensionnelle solution de l'équation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (2.7)$$

avec $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$ et W un mouvement brownien en dimension r .

Le processus tangent $(Y_t)_{t \geq 0}$ est la première dérivée du flot $(X_t^x)_{t \geq 0}$ par rapport à x .

Théorème 2.1. Si b et σ sont deux fonctions C_b^1 , alors $\forall t > 0$, $x \rightarrow X_t^x$ est différentiable p.s et le processus tangent $Y_t(x) = \nabla X_t^x$ est solution de l'EDS suivante :

$$dY_t(x) = b'(t, X_t)Y_t dt + \sigma'(t, X_t)Y_t dW_t, Y_0 = \mathbb{1} \quad (2.8)$$

Proposition 2.3. Méthode du Processus Tangent

Soit g une fonction C_1^b , X_t suivant (2.7), alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}(g(X_t^x)) = \mathbb{E}(g'(X_t^x)Y_t) \quad (2.9)$$

Ainsi, on peut inverser le signe de l'espérance et la dérivée. En plus, dériver par rapport à x revient à une multiplication par le "poids" Y .

2.3 Calcul de Malliavin

2.3.1 Introduction

Le calcul de Malliavin est un ensemble de techniques et de concepts mathématiques qui étendent le domaine mathématique du calcul des variations des fonctions déterministes aux processus stochastiques. Il s'agit d'une approche très utilisée pour le calcul des sensibilités d'options exotiques. L'article [BGK03] détaille une méthode de calcul de Δ et Γ fondée sur une technique qui ressemble à l'intégration par partie et qui est basée sur le calcul de Malliavin.

Revenons au but du projet : approximer Δ et Γ

$$\Delta = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}[\phi], \quad \Gamma = e^{-rT} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbb{E}[\phi] \quad (2.10)$$

tel que ϕ un payoff de l'option lookback donné sous le contexte présenté en 2.1. Une question s'impose : Que fait-on si la fonction Φ est irrégulier en la valeur initiale ? On sera dans l'impossibilité d'utiliser une estimation de l'espérance de la dérivée. Encore, que fait-on pour éviter les problèmes de biais relatifs à l'utilisation de différences finies ? La réponse à ces deux questions est le calcul Malliavin.

Ainsi, [BGK03] propose une approche pour le calcul de Δ et Γ :

$$\Delta = e^{-rT} \mathbb{E}[\Phi H_\Delta], \quad \Gamma = e^{-rT} \mathbb{E}[\Phi H_\Gamma] \quad (2.11)$$

avec H_Δ , H_Γ des variables aléatoires \mathbb{L}^2 appelés *poids de Malliavin* de Δ et Γ .

Tout d'abord et afin de simplifier la compréhension de la suite du rapport, commençant par survoler quelques principales idées de la théorie du calcul de Malliavin apportées dans [BGK03].

2.3.2 Éléments de calcul de Malliavin

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R}^d)$. Pour chaque $h \in \mathcal{H}$, on définit l'intégrale de Wiener par rapport au brownien W dans \mathbb{R}^d par $W(h) := \int_0^T h(t) dW_t$.

Soit S l'ensemble des variables aléatoires dont la forme est $f(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n))$ tel que $f \in C_b^\infty$:

$$S := \{F = f(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n)), f \in C_b^\infty, h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathcal{H}\} \quad (2.12)$$

Définition 2.2. Soit $F \in S$, on définit la dérivée au sens de Malliavin de F par le processus $DF = \{D_t F, 0 \leq t \leq T\}$ de carré intégrable sur $\Omega \times [0, T]$ avec

$$D_t F := (\nabla f)(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n)) \cdot h(t) \quad (2.13)$$

et $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^*$.

L'opérateur $D : S \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$ qui à F associe DF est appelé opérateur de dérivée de Malliavin.

Cet opérateur D est fermé ("Closable") en tant qu'application linéaire de S dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$. Nous notons $\mathbb{D}^{1,2}$ son domaine de fermeture et on peut définir alors l'adjoint de D par $\delta := D^*$. L'opérateur δ est appelé opérateur de divergence et on définit son domaine de fermeture $\text{dom}(\delta)$ comme étant l'ensemble de processus u de carré intégrable vérifiant

$$|\mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}}]| \leq C(u) \|F\|_2, \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2} \quad (2.14)$$

tel que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ le produit scalaire canonique sur \mathcal{H} et $C(u)$ est une constante dépendant de u et

Ainsi pour $u \in \text{dom}(\delta)$, on définit la quantité suivante

$$\delta(u) := \int_0^T u_t \delta B_t \quad (2.15)$$

appelée l'intégrale de Skorokhod du processus u . L'idée est de voir cette intégrale comme une extension de l'intégrale d'Ito à des processus non adaptés.

Si u s'écrit sous la forme $u = \sum_{i=1}^n F_i h_i$ avec pour tout $i \in [1, n]$, $(F_i, h_i) \in S \times \mathcal{H}$, on obtient une expression simplifiée de l'intégrale de Skorokhod

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^n F_i W(h_i) - \langle DF_i, h_i \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.16)$$

Toujours d'après [BGK03] on retient deux propriétés 2.4 et 2.5 ci-dessous qui nous seront utiles pour le calcul de sensibilités Δ^* et Γ .

Proposition 2.4. Chain rule property : Soit $f \in C_b^1$ et $F = (F_1, F_2, \dots, F_q)^*$ un vecteur aléatoire d'éléments de $\mathbb{D}^{1,2}$, alors $f(F)$ est un élément de $\mathbb{D}^{1,2}$ dont la dérivée est

$$D(f(F)) = (\nabla f(F)) \cdot DF \quad (2.17)$$

Cette règle reprend l'esprit du calcul différentiel ordinaire.

On définit l'intégrale de Skorokhod d'un processus multiplié par une variable aléatoire.

Proposition 2.5. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $u \in \text{dom}(\delta)$ Skorokhod-intégrable, alors

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.18)$$

2.3.3 Hypothèses préliminaires

Hypothèse 2.1. (S)

En posant $M^x := \max_{t \in [0, T]} S_t^x$ et $m := \min_{t \in [0, T]} S_t^x$, il existe $a > 0$ tel que $\Phi(x, M^x, m^x, S_T^x)$ ne dépend pas de M (resp. m) si $M < xe^a$ (resp. $m > xe^{-a}$).

Afin de calculer Δ et Γ , il faut les exprimer sous la forme $\mathbb{E}[\Phi^x G]$ avec G une variable aléatoire qui jouera le rôle d'un poids. Cette idée de poids est une notion pivot pour le calcul Malliavin. En effet, l'auteur dans [BGK03] reprend l'exemple 1.1 afin de mettre en garde contre la difficulté d'exprimer Δ et Γ sous la forme $\mathbb{E}[\Phi^x G]$ si $f(x) \neq 0$.

Ainsi, on reprend l'hypothèse (S) concernant le support ci-dessus.

Pour un tel a vérifiant (S), l'article [BGK03] lui associe une fonction de localisation Ψ régulière, à dérivées bornées et telle que $\mathbf{1}_{]-\infty, a/2]} \leq \Psi \leq \mathbf{1}_{]-\infty, a]}$.

Exemple 2.1. Appliquons cela à une option put lookback à strike fixe K de payoff $LP_{fixed} = (K - m^x)^+$. Soit $a = \log(K/x)$, alors l'hypothèse (S) est vérifiée si $K > x$. Ce qui est évident pour une "option".

De même, pour une option call lookback à strike fixe K de payoff $LC_{fixed} = (M^x - K)^+$ sous la condition $K < x$, $a = \log(x/K)$ convient.

2.3.4 Localisation et processus dominant

Cette partie s'intéresse à la formule explicite des de Malliavin. Pour ce faire, on introduit la notion de processus dominant comme il est détaillé dans [BGK03] mais en dimension $d = 1$.

Définition 2.3. Un processus Y croissant adapté continu à droite est dit processus dominant si

- il satisfait l'inégalité suivante : $\forall t \in [0, T], |rt + \sigma W_t| \leq Y_t$
- il existe une suite $(\alpha_q)_{q \geq 0}$ positive tendant vers $+\infty$ telle que $\forall t \in [0, T], \mathbb{E}[Y_t^q] \leq C_q t^{\alpha_q}$

D'abord, prenons un exemple d'un processus dominant cité dans [BGK03].

Proposition 2.6. Le processus extrême $Y_t := \max_{0 \leq s \leq t} [rs + \sigma W_s] - \min_{0 \leq s \leq t} [rs + \sigma W_s]$ est un processus dominant.

En adoptant ce processus dominant, On se retrouve avec un résultat de [BGK03] concernant le delta et le gamma.

Théorème 2.2. Soit $x = S^0$ et sous l'hypothèse (S) , pour tout processus dominant Y , nous avons les résultats suivants :

1. Delta :

$$\Delta = e^{-rT} \mathbb{E}[\phi(x, M, m, S_T) H_\Delta] \quad (2.19)$$

avec $H_\Delta = \frac{1}{x} \delta \left(\frac{\Psi(Y)}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} \sigma^{-1} \right)$

2. Gamma :

$$\Gamma = e^{-rT} \mathbb{E}[\phi(x, M, m, S_T) H_\Gamma] \quad (2.20)$$

avec $H_\Gamma = \frac{1}{x^2} \delta \left(\delta \left(\frac{\Psi(Y)}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} \sigma^{-1} \right) \frac{\Psi(Y)}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} \sigma^{-1} \right) - \frac{1}{x^2} \delta \left(\frac{\Psi(Y)}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} \sigma^{-1} \right)$

On retrouve la formule de la quantité $\delta \left(\frac{\Psi(Y)}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} \sigma^{-1} \right)$ dans l'appendix B de [BGK03].

$$\delta \left(\frac{\Psi(Y)}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} \sigma^{-1} \right) = \frac{\int_0^T \Psi(Y_t) \sigma^{-1} dW_t}{\int_0^T \Psi(Y_t) dt} + \frac{\int_0^T ds \Psi'(Y_s) \sigma^{-1} \int_0^s \Psi(Y_t) \mathcal{D}_t Y_s dt}{(\int_0^T \Psi(Y_t) dt)^2} \quad (2.21)$$

Quant à la preuve des résultats, on la retrouve dans l'appendix A.

Soit τ_M (resp. τ_m) le temps d'atteinte du maximum M (resp. minimum m).

L'idée derrière ce calcul vient du fait que l'hypothèse (S) crée une "non-smoothness" (de type $\mathbf{1}_{t \leq \tau_M}$ and $\mathbf{1}_{t \leq \tau_m}$). Pour pouvoir appliquer une formule d'intégration par parties, il faut se débarrasser des indicatrices et c'est le rôle du processus localisant, qu'on essaie d'enlever en introduisant un processus de localisation $\Psi(Y_t)$

La quantité $\mathcal{D}_t(Y_s)$ est telle qu'en prenant Y comme étant le processus extrême défini à la proposition (2.6). Selon un résultat de Nulart et al. (1988) on a $\mathcal{D}_t(Y_s) = \sigma(\mathbf{1}_{t \leq \tau_M} - \mathbf{1}_{t \leq \tau_m})$.

2.3.5 Choix de la fonction localisante

Nous aurions besoin d'une fonction localisante Ψ afin de se débarrasser des indicatrices. Pour cela on retient le choix pris dans [Kur02], un article qui traite le delta d'une option barrière multidimensionnelle via le calcul de Malliavin ou on croise le même problème d'indicatrices. [Kur02] introduit la fonction créneau suivante :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le réel de localisation $a > 0$ étant fixé, on définit Ψ tel que

$$\Psi(x) = \varphi\left(\frac{a-2x}{a}\right) \quad (2.22)$$

2.3.6 Poids Martingale

Pour cette partie, on passe à [Gob04] qui propose d'étudier la méthode du poids martingale. La vocation de cette méthode est de fournir un alternatif simple au calcul Malliavin, en utilisant le calcul stochastique standard (calcul d'Ito, théorie des martingales...)

Dans cet article, la méthode du poids martingale procède de la même manière que dans calcul Malliavin en cherchant un poids comme une variable aléatoire H telle que

$$\Delta = e^{-rT} \mathbb{E}[\Phi H] \quad (2.23)$$

H est le poids martingale de Δ .

Soit un processus X solution de l'EDS (2.7) et on suppose que les coefficients b et σ de la diffusion sont réguliers. Dans la suite, notre objectif sera d'obtenir une forme explicite du poids H afin de calculer notre Δ .

D'abord, on introduit une hypothèse de régularité afin de garantir l'existence et l'unicité d'une solution pour l'EDS 2.7.

Hypothèse 2.2. (H)

Les coefficients b, σ sont supposés bornés, de classe C^1 par rapport à la variable x et à dérivées partielles uniformément bornées. b, b', σ, σ' satisfont une propriété de Hölder-continuité : Il existe $\eta > 0$ tel $|b(t, x) - b(s, y)| \leq C(|t - s|^{\eta/2} + |y - x|^\eta)$, uniformément en s, t, x, y . De même pour b', σ, σ' .

De plus, pour $a_0 > 0$, on a $\xi \sigma^2(t, x) \geq a_0 |\xi|^2$ pour tout $(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Dans [Gob04] on part du cas des options barrières dont le payoff dépend d'un temps d'arrêt pour appliquer ses résultats sur les options lookback. Cela vient de l'hypothèse (S) qui fait intervenir un temps d'arrêt défini comme ci-dessous. En effet, dans la même philosophie du calcul Malliavin, soit :

- a_0 le paramètre associé à l'hypothèse de localisation (S) dans 2.3.3.
- $D := \{y : |y - x| < a_0\}$ et soit le temps de sortie de D $\tau_0 := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}$.
- $D' = \{y : |y - x| < a\}$ et $\tau'_t = \inf\{s \geq t : X_s \notin D'\}$.

Soit une fonction \tilde{f} et un payoff lookback ϕ . On profite du caractère markovien de la solution X de l'EDS 2.7 pour écrire $\mathbb{E}[\phi | \mathcal{F}_{\tau_0 \wedge T}] = \tilde{f}(\tau_0 \wedge T, X_{\tau_0 \wedge T})$.

Ensuite, soit $v(t, y) := \mathbb{E}[\tilde{f}(\tau_0 \wedge T, X_{\tau_0 \wedge T}) | X_t = y]$ et on a tel que $0 < a < a_0$.

Toujours en utilisant la propriété Markov forte de X on se retrouve avec $v(t, y) = \mathbb{E}[v(\tau'_t \wedge T, X_{\tau'_t \wedge T}) | X_t = y]$ pour tout $(t, y) \in [0, T] \times D'$. Ainsi la fonction valeur v est de classe $C^{1,2}([0, T] \times D', \mathbb{R})$. Ce résultat de régularité de v va nous être utile dans le lemme ci-dessous.

Soit Y le processus tangent de X telqu'il est défini en 2.2.

Lemme 2.1. Si l'hypothèse (H) est satisfaite et soit $N_t = v'(t, X_t)Y_t$ pour $t \leq T/2$ et $t \leq \tau'_0$. Alors le processus N défini par $N = (N_{\tau'_0 \wedge t})_{0 \leq t \leq T/2}$ est une martingale à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Remarque 2.2. Dans la suite, la formule de Δ se retrouve en s'appuyant sur le caractère martingale du processus N , d'où vient le nom de la méthode : "poids martingale".

Avant de passer au calcul du poids martingale et afin de localiser, introduisant d'abord le processus adapté $(h_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$h_t = \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{1}_{t \leq \tau}}{d^2(X_t, \partial D')(T/2-t)} \quad \text{telque } \tau = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \frac{ds}{d^2(X_s, \partial D')(T/2-s)} = \lambda\} \quad (2.24)$$

Notons que le paramètre $\lambda > 0$ est arbitraire et de h à support compact tel que

$$h_t = 0 \text{ pour } t \geq \tau'_0 \wedge T/2 \text{ et } \int_0^T h_t dt = 1 \quad (2.25)$$

On arrive finalement au théorème de représentation de Δ par le poids martingale.

Théorème 2.3. *Sous condition de vérifier les hypothèses **(H)** et **(S)**, on a*

$$\Delta = \mathbb{E} \left[\phi(M, m, X_T) \left[\int_0^T h_s \sigma^{-1}(X_s) Y_s dW_s \right] \right] \quad (2.26)$$

3 Simulation et résultats numériques

3.1 Simulation du mouvement brownien géométrique

On opte pour un schéma exact pour simuler le mouvement brownien géométrique. ainsi, Soit un pas $h = T/N$ ou N est le nombre de pas, T la maturité :

$$\bar{S}_{(k+1)h}^N = \bar{S}_{kh}^N \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sqrt{h} \sigma Z_{k+1} \right), \quad (0 \leq k \leq N-1) \quad (3.1)$$

tel que $(Z_k)_{k \geq 1}$ une suite de lois normales $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes.

3.2 Simulation du max/min d'un processus

Dans ce contexte d'option lookback, on aura également besoin de simuler $\max_{0 \leq t \leq T} S_t$ et $\min_{0 \leq t \leq T} S_t$ d'un processus. Pour cela, on utilisera les résultats concernant le pont brownien dont on trouve la démonstration dans [Pag16]. Soit le pont brownien sur $[0, T]$ défini par :

$$Y_t^{W,T} := W_t - \frac{t}{T} W_T, \quad \forall t \in [0, T]$$

On dispose du résultat suivant (8.2.3 [Pag16])

$$\mathcal{L} \left(\bar{S}_t^N \mid \bar{S}_{kh}^N = x_k, \quad k = 0, \dots, N \right) = \mathcal{L} \left(\max_{0 \leq k \leq N} (G_{x_k, x_{k+1}}^{N,k})^{-1} (1 - U_k) \right)$$

avec \bar{S} le schéma d'Euler authentique de S , $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de lois uniformes indépendantes et G définie par :

$$(G_{x,y}^{N,k})^{-1} (1 - u) = \frac{1}{2} \left(x + y + \sqrt{(x - y)^2 - 2T\sigma^2(t_k^N, x) \ln(u)/N} \right) \quad (3.2)$$

où $t_k^N = kh$ et $\sigma^2(t_k^N, x) = \sigma^2 x$.

La simulation du minimum reprend la même méthode, en remplaçant G par F définie ci-dessous :

$$(F_{x,y}^{N,k})^{-1} (1 - u) = \frac{1}{2} \left(x + y - \sqrt{(x - y)^2 - 2T\sigma^2(t_k^N, x) \ln(u)/N} \right) \quad (3.3)$$

3.3 Réduction de variance

On propose d'utiliser une méthode de réduction de variance. On utilisera La méthode antithétique. En remarquant que $g(W) \stackrel{d}{=} g(-W)$ pour un payoff $g(W)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{g(W)+g(-W)}{2}\right] &= \mathbb{E}[g(W)] \\ \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{g(W)+g(-W)}{2}\right] &< \mathbb{V}\text{ar}[g(W)]\end{aligned}$$

3.4 Implémentation C++

On procède par un pattern "observateur". En effet, afin de recevoir des mises à jour sur l'état de la simulation, les objets de la classe "IObserver" s'abonnent à un objet de la classe "IEngine".

Le fichier "Martingale.h" contient l'implémentation des différentes classes et méthodes nécessaires pour obtenir le poids martingale [Gob04].

Le fichier "Malliavin.h" contient des différentes classes et méthodes pour obtenir les poids [BGK03].

Le fichier "FiniteDifferenceTangentProcess.h" contient les classes et méthodes nécessaires pour les approches :

- Différences finies.
- Différences finies à pas décroissant.
- Processus tangent.

3.5 Résultats

On présente ci-dessous les résultats numériques du calcul de Delta et Gamma des options call lookback à strike fixe en utilisant la méthode antithétique. Les paramètres requis sont :

- $S_0 = 100$
- $r = 5\%$
- $\sigma = 25\%$
- $K = 120$
- $T = 1$ an

En utilisant la formule fermée on retrouve :

- Prix = 9.70021
- Delta = 0.657979
- Gamma = 0.0277962

3.5.1 Delta

On obtient les valeurs suivantes pour 20 000 simulations :

- Sans réduction de variance

Method	Steps	Mean	Variance	IC
Finite difference	252	0.639297	0.449819	[0.630002,0.648592]
Decreasing Finite difference	252	0.632704	0.340313	[0.624619,0.640789]
Tangent process	252	0.627258	0.458873	[0.61787,0.636646]
Localized Malliavin	252	0.662874	6.72728	[0.626927,0.698821]
Martingale	252	34.8652	132159	[29.8269,39.9036]

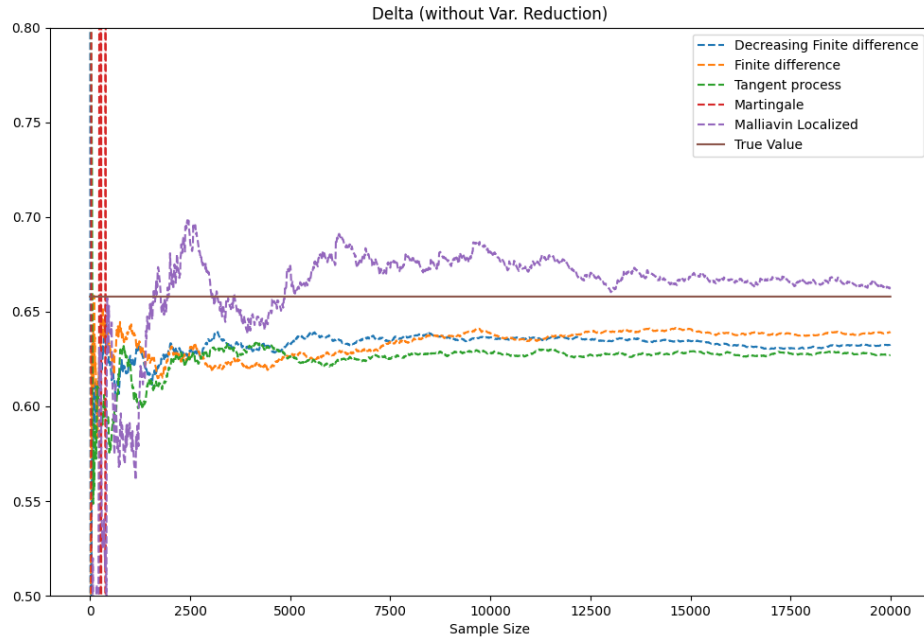


FIGURE 1 – Delta pour $h=1/252$ sans réduction de variance

— Avec réduction de variance

Method	Steps	Mean	Variance	IC
Finite difference	252	0.626828	0.0719346	[0.623111,0.630545]
Decreasing Finite difference	252	0.632165	0.0411197	[0.629355,0.634975]
Tangent process	252	0.631215	0.0742562	[0.627439,0.634992]
Loc. Malliavin	252	0.630798	2.59383	[0.608477,0.653119]
Martingale	252	36.848	69551.6	[33.1929,40.5031]

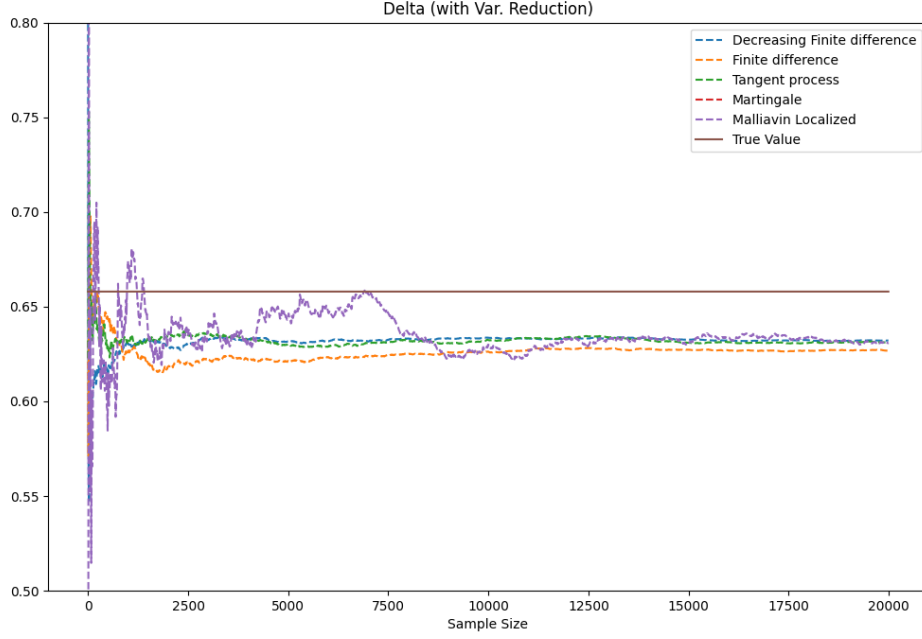


FIGURE 2 – Delta pour $h=1/252$ avec réduction de variance

Comme prévu dans la théorie de la méthode des différences finies et le processus tangent, on remarque un biais ne disparaît pas. Par contre et contrairement à ce qu'a été prouvé tout en haut, on note que le même biais existe pour la méthode par le calcul de Malliavin. Cette dernière représente aussi une variance particulièrement plus grande que celles des différences finies et le processus tangent. Nous n'arrivons pas à trouver l'erreur numérique derrière ce biais. Néanmoins, note qu'on arrive à diminuer le biais en diminuant le pas de simulation.

Concernant la méthode du poids martingale, on retrouve des grandes valeurs loin de la valeur théorique. Pareil, Nous n'arrivons pas à trouver l'erreur numérique derrière ce problème.

Finalement, On note l'effet positif de la réduction de variance dans le deuxième graphe pour les deux méthodes.

3.5.2 Gamma

— Sans réduction de variance

Method	Steps	Mean	Variance	IC
Finite difference	252	0.0277682	0.0203053	[0.0257933,0.0297431]
Finite difference et Tangent Process	252	0.0267669	0.0145613	[0.0250945,0.0284393]

— Avec réduction de variance

Method	Steps	Mean	Variance	IC
Finite difference	252	0.0277564	0.010369	[0.0263451,0.0291676]
Finite difference et Tangent Process	252	0.0278892	0.00779876	[0.0266653,0.0291131]

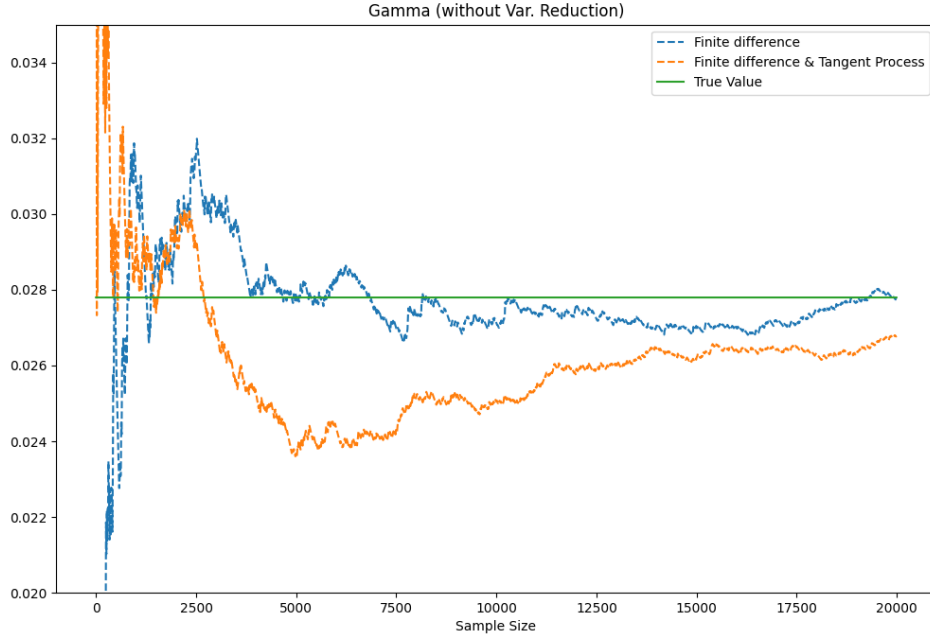


FIGURE 3 – Gamma pour $h=1/252$ sans réduction de variance

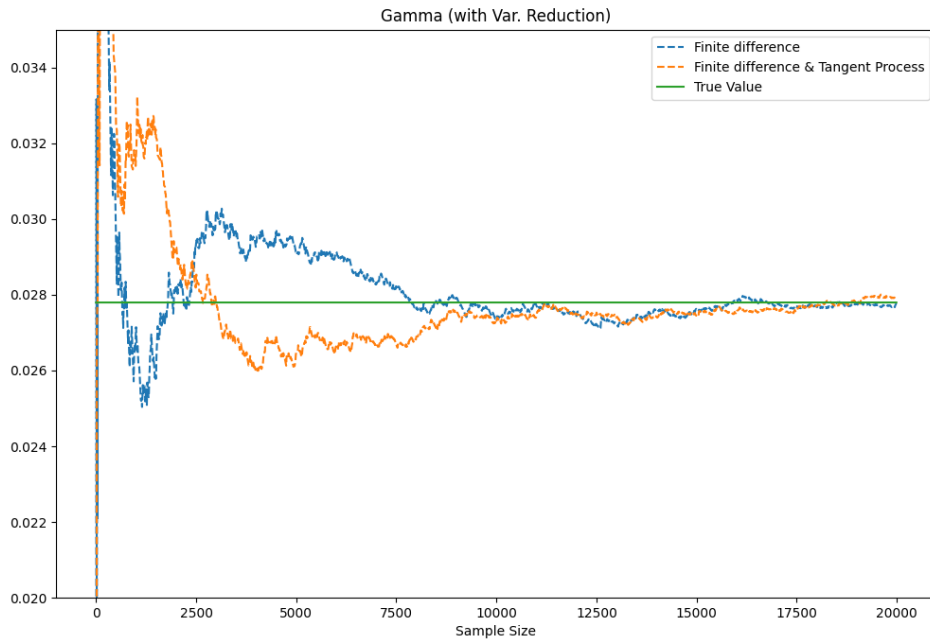


FIGURE 4 – Gamma pour $h=1/252$ avec réduction de variance

Pour le Gamma, la méthode de différences finies d'ordre 2 et de différence finie d'ordre 1 combinée à l'utilisation du processus tangent semblent converger sans difficulté vers la valeur obtenue via la formule fermée. On note encore une fois l'effet positif de la réduction de variance dans le deuxième graphe pour les deux méthodes.

4 Conclusion

Ce sujet met en exergue la difficulté du calcul des grecques pour des options exotiques "path-dependent". Pour le cas des options lookback sujet de notre projet, les méthodes simples des différences finies et le processus Tangent marchent bien, mais souffrent d'un biais non négligeable. D'autres méthodes plus complexes existent, comme les méthodes du poids de Malliavin ou du poids Martingale qui, au moins théoriquement, sont sans biais mais souffrent d'une variance plus importante. Notre point de vue est d'opter pour les méthodes classiques comme la méthode de différences finies à pas décroissant couplé avec une méthode de réduction de variance et un pas le plus petit possible.

Références

- [BGK03] Guillaume BERNIS, Emmanuel GOBET et Arturo KOHATSU-HIGA. "Monte Carlo Evaluation of Greeks for Multidimensional Barrier and Lookback Options". In : *Mathematical Finance* 13.1 (2003), p. 99-113.
- [Fou+99] Eric FOURNIÉ et al. "Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance". In : *Finance stoch.* 3.4 (1999), p. 391-412.
- [Gob04] Emmanuel GOBET. "Revisiting the Greeks for European and American options". In : *Stochastic processes and applications to mathematical finance* (2004), p. 53-71.
- [Kur02] David KURTZ. "Calcul du delta d'une option barrière multidimensionnelle via le calcul de Malliavin". In : *math-fi.com* 3.4 (2002), p. 14.
- [Pag16] Gilles PAGÈS. *Introduction to Numerical Probability for Finance*. 2016.