

課題研究 レポート

加納基晴

以下では (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする.

1 末尾事象と infinite often

定義 1. 末尾事象 (*tail event*)

X_1, X_2, \dots を確率変数列とする.

$E \in \sigma(X_1, X_2, \dots)$ が末尾事象 (*tail event*) であるとは

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $E \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ が成立することである.

末尾加法族 (*tail σ -field*) δ を $\delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ と定める.

定義から末尾加法族の元 $E \in \delta$ は末尾事象となる.

命題 2.

X_1, X_2, \dots を確率変数とする. このとき $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$ とすると,

任意の $B \in \mathfrak{B}_\infty$ に対して, $\{\mathbf{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ となる.

Proof.

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \subset \mathbb{R}^\infty \mid B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}_1\}$$

と定める.

$S \in E$ を任意に固定する. このとき $n \in \mathbb{N}$ と $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}_1$ がとれて, $S = B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \dots$ となる. 各 $k = 1, 2, \dots, n$ について $\{X_k \in B_k\} \in \mathcal{F}$ なので $\{\mathbf{X} \in S\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\} \in \mathcal{F}$ が成立する.

ここで

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathfrak{B}_\infty \mid \{\mathbf{X} \in C\} \in \mathcal{F}\}$$

とすると、 \mathcal{C} は σ 加法族になる.

\therefore

(i) $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^\infty\} = \Omega \in \mathcal{F}$, $\{\mathbf{X} \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ つまり $\Omega, \emptyset \in \mathcal{C}$

(ii) $C \in \mathcal{C}$ とする. このとき $\{\mathbf{X} \in C^c\} = \{\mathbf{X} \in C\}^c \in \mathcal{F}$ となるから $C^c \in \mathcal{C}$

(iii) $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を任意にとる. $\left\{\mathbf{X} \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\mathbf{X} \in C_k\} \in \mathcal{F}$ となって, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k \in \mathcal{F}$ がわかる. 以上で \mathcal{C} は E を含む σ 加法族であることがわかった. $\sigma(E) = \mathfrak{B}_\infty$ なので, $\mathcal{C} = \mathfrak{B}_\infty$ である.

つまり, 任意の $B \in \mathfrak{B}_\infty$ に対して, $B \in \mathcal{C}$ だから $\{\mathbf{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ が成立する. \square

定理 3. 近似定理

X_1, X_2, \dots を確率変数列とする.

任意の $A_1 \in \sigma(\mathbf{X})$, $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$, $A_2 \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が存在して $P(A_1 \triangle A_2) \leq \varepsilon$ となる. (ただし $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$)

Proof.

任意の $A_1 \in \sigma(\mathbf{X})$, $\varepsilon > 0$ を固定する.

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} \mid \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, } P(A \triangle B) \leq \varepsilon \text{ となる } B \in \mathcal{F}_0 \text{ が存在する} \}$$

と定める.

任意の $A \in \mathcal{F}_0$ をとると, ある $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}_n$ が取れて, $A = \{(X_1, \dots, X_n) \in B\}$ とかける.

このとき X_1, X_2, \dots は確率変数なので $A \in \mathcal{F}$ となる.

また定め方から $A \triangle A = \emptyset$ だから $P(A \triangle A) = 0$ である. よって, $A \in \mathcal{C}$ となる. つまり $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{C}$ が成立する.

ここで \mathcal{C} が σ 加法族であることを示せば, $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{C}$ で, $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathbf{X})$ であることから,

$A_1 \in \sigma(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$ なので, $P(A_1 \triangle A_2) \leq \varepsilon$ となるような $A_2 \in \mathcal{F}_0$ が存在することを示せる.

- \mathcal{C} が σ 加法族であることを示す.

$$(i) \Omega \in \mathcal{C} \quad (\because \Omega \in \mathcal{F}_0)$$

$$(ii) A \in \mathcal{C} \text{ とすると, } A^c \in \mathcal{C}$$

$\because \varepsilon > 0$ を任意に固定する. このとき $B \in \mathcal{F}_0$ が取れて, $P(A \triangle B) \leq \varepsilon$ となる. \mathcal{F}_0 の定め方から,

$$B^c \in \mathcal{F}_0 \text{ であって, } P(A^c \triangle B^c) = P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P((B - A) \cup (A - B)) = P(A \triangle B) \leq \varepsilon$$

$$\therefore A^c \in \mathcal{C}$$

$$(iii) \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, \varepsilon > 0 \text{ を任意にとる. } \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0 \text{ を } P(A_n \triangle B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \text{ となるようにとる.}$$

また, 測度の上からの連続性からある $N \in \mathbb{N}$ が取れて, $P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

ここで, $\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示せば, 単調性と劣加法性から,

$$P(\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq P((\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^N P(B_n \triangle A_n) + P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ となる. } \bigcup_{n=1}^N B_n \in \mathcal{F}_0 \text{ であることから } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C} \text{ となる.}$$

- $\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示す.

$$\begin{aligned} \because \omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \vee (\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^N B_n) \\ &\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c)) \\ &\Rightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\ &\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \cap A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N ((B_n \cap A_n^c) \cup (A_n \cap B_n^c)) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
& \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \triangle A_n) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
& \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \quad \therefore \bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より \mathcal{C} は σ 加法族である. □

定理 4. *Kolmogorov zero-one law*

X_1, X_2, \dots を独立な確率変数とする. この時, $E \in \delta$ であるとすれば $P(E)$ は 0, 1 のいずれかの値をとる.

Proof.

$E \in \delta$ を任意とる. $E \in \sigma(\mathbf{X})$ であるから, 定理 3 により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が取れて $P(E \triangle E_n) \rightarrow 0$ となる. このことから $P(E_n) \rightarrow P(E)$, $P(E_n \cup E) \rightarrow P(E)$ がわかる.

\therefore

- $P(E_n) \rightarrow P(E)$

$$P(E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E)$$

から

$$P(E_n) - P(E) \leq P(E_n - E) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

同様にして

$$P(E) - P(E_n) \leq P(E - E_n) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$$

がわかる.

- $P(E_n \cup E) \rightarrow P(E)$

$$P(E \cup E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E) \leq P(E_n \triangle E) + P(E)$$

から

$$P(E \cup E_n) - P(E) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

また, $E \subset (E \cup E_n) \cup (E \triangle E_n)$ だから

$$P(E) - P(E \cup E_n) \leq P(E \triangle E_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

この時, $E \in \delta$ だから, $E \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ である. つまり, E と E_n は独立.

$P(E \cap E_n) = P(E)P(E_n)$ だから, 各辺で $n \rightarrow \infty$ とすれば, $P(E) = P(E)^2$. つまり $P(E) = 0, 1$ となることがわかった. □

定義 5. *infinite often*

$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ とする. $\{A_n \text{ i.o.}\}$ を $\{A_n \text{ i.o.}\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n > m} A_n$ と定める.

$\{A_n \text{ i.o.}\}$ は $\{\omega \mid \omega \in A_n \text{ となる } n \text{ が無限個存在する.}\}$ ともかける.

$\therefore \omega \in \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n > m} A_n$ を任意にとる. 1 に対して $\omega \in A_{n_1}$ となる $n_1 \in \mathbb{N}$ をとる. 続いて n_1 に対して $\omega \in A_{n_2}$ となる $n_2 \in \mathbb{N}$ をとる. これを続けければ $\omega \in A_n$ となる n の列として $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が取れるので, $\omega \in \{\omega' \mid \omega' \in A_n \text{ となる } n \text{ が無限個存在する.}\}$ である.
 $\omega \in \{\omega \mid \omega \in A_n \text{ となる } n \text{ が無限個存在する.}\}$ を任意にとる. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\omega \in A_n$ となる $n > m$ が無限個存在する. よって $\omega \in \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n > m} A_n$

補題 6. Borel-Cantelli Lemma

(I), $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば, $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$ が成立する.

(II), $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が独立かつ, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば, $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$ が成立する.

Proof.

(I)

$$P(A_n \text{ i.o.}) = P\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)\right)$$

(\therefore 二つ目の等号は測度の連続性, 不等号には劣加法性を使った)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \text{ であるから } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)\right) = 0 \therefore P(A_n \text{ i.o.}) = 0$$

(II)

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = 0$ を示せば

$$P((A_n \text{ i.o.})^c) = P\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = 0$$

つまり $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$ がわかる.

任意の $m \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は独立なので

$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = \prod_{n=m}^{\infty} P(A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))$$

である. ここで $\log(1-x) \leq -x$ ($0 \leq x \leq 1$) を使うと

$$\log\left(\prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))\right) = \sum_{n=m}^{\infty} \log(1 - P(A_n)) \leq -\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = -\infty$$

よって $P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = 0$ が示せた. □

いくつか応用例を挙げる.

(例 1) コイントスを考える. s を長さ k の H, T (表, 裏) が要素の列とする. $A_n = \{\omega \mid (\omega_n, \dots, \omega_{n+k-1}) = s\}$ と定める.

命題 7. $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$

Proof.

$B_1 = \{\omega; (\omega_1, \dots, \omega_k) = \mathbf{s}\}, B_2 = \{\omega; (\omega_{k+1}, \dots, \omega_{2k}) = \mathbf{s}\}, \dots$ とおく.

このとき, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は独立となる.

\therefore 任意に $i, j \in \mathbb{N}, (i \neq j)$ をとる. B_i, B_j が独立であることを示したい.

考えている確率はコイントスなので,

$$\begin{aligned} P(B_i \cap B_j) &= P((\omega_{k(i-1)+1}, \dots, \omega_{ki}) = \mathbf{s}, (\omega_{k(j-1)+1}, \dots, \omega_{kj}) = \mathbf{s}) \\ &= \prod_{m=1}^k P(\omega_{k(i-1)+m} = s_m) \prod_{l=1}^k P(\omega_{k(j-1)+l} = s_l) = P((\omega_{k(i-1)+1}, \dots, \omega_{ki}) = \mathbf{s}) P((\omega_{k(j-1)+1}, \dots, \omega_{kj}) = \mathbf{s}) \\ &= P(B_i) P(B_j) \end{aligned}$$

また, $\{B_n \text{ i.o.}\} \subset \{A_n \text{ i.o.}\}$ である ($\because B_l = A_{(l-1)k+1}$). $P(B_n) = P(B_1) = \frac{1}{2^k} > 0$ なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty. \text{ 以上のことから補題 6(II) を使うと, } P(B_n \text{ i.o.}) = 1 \leq P(A_n \text{ i.o.}) \therefore P(A_n \text{ i.o.}) = 1 \quad \square$$

(例 2) 再び, コイントスを考える. $Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{ が } H \text{ のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{ が } T \text{ のとき}) \end{cases}, Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ と定める.

命題 8. $P(\text{Head}) \neq \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 0$ となる.

Proof.

$P(\text{Head}) = p$ とおく.

$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) < \infty$ であることが示せれば, 補題 6(I) から $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 0$ がわかる.

Stirling の近似公式から, 十分大きい n に対して, ${}_2C_n = 2^{2n} \frac{1 + \delta_n}{\sqrt{\pi n}}$ (ただし $\delta_n \downarrow 0$) であり, また, $p \neq \frac{1}{2}$ な

ので $2^2 p(1-p) < 1$ より, ある $0 < \lambda < 1$ が存在して $2^2 p(1-p) < \frac{1}{\lambda} 2^2 p(1-p) < 1$ となる.

$\delta_n \downarrow 0$ だから十分大きい n に対しては $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$ が成立する.

ここで $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ で

$$P(Z_{2n}) = {}_2C_n p^n (1-p)^n = 2^{2n} \frac{1 + \delta_n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$$

かつ $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$ を満たすようにとる.

$a_n = 2^{2n} \frac{1 + \delta_n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$ とおく. $n \geq N$ において

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^2 \frac{1 + \delta_{n+1}}{1 + \delta_n} \sqrt{\frac{n}{n+1}} p(1-p) \leq 2^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} p(1-p) = \lambda \sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \lambda$$

だから $a_{n+1} \leq (1 - \lambda) a_n \leq \dots \leq (1 - \lambda)^{n+1-N} a_N$ が成立する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) = \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) \leq \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{n-N} a_N$$

$$\leq \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + a_N \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + a_N \frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty \quad (\because 0 < \lambda < 1)$$

以上で $\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) < \infty$ がわかった。 □

定理 9. $P(\text{Head}) = \frac{1}{2}$ とする。このとき $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$ となる。

Proof.

$n_1 < n_2 < \dots$ の自然数列とする。また、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $n_k < m_k < n_{k+1}$ となるように $m_1 < m_2 < \dots$ をとる。

$$C_k = \{Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k\} \cap \{Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k\}$$

と定める。

$Y_i = -1, 1$ だから $-n \leq Z_n \leq n$ となることを使うと、 $\omega \in C_k$ に対して、

$$Z_{m_k}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{n_k})(\omega) + (Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k})(\omega) \leq n_k - n_k = 0$$

また

$$Z_{n_{k+1}}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) + (Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}})(\omega) \geq -m_k + m_k = 0$$

よって $\omega \in C_k$ に対して $Z_{m_k}(\omega) \leq 0$, $Z_{n_{k+1}}(\omega) \geq 0$ であり、 $Z_{n+1} = Z_n \pm 1$ となることから

$$C_k \subset \{Z_n = 0; n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}\} = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\}$$

$$\{C_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_m+1}^{\infty} \{Z_n = 0\} = \{Z_n = 0 \text{ i.o.}\}$$

Borel-Cantelli Lemma から $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となれば $1 = P(C_n \text{ i.o.}) \leq P(Z_n = 0 \text{ i.o.})$ となる。

つまり $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となるような自然数列 $\{n_k\}, \{m_k\}$ が取れることを示せばよい。

• 任意の $\alpha \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $P(|Z_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$ となる $\varphi(k) \geq 1$ がとれる。

(proof) 任意の $\alpha \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ を固定する、 $P(Z_n = j) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから、

$$\sum_{|j| < k} P(Z_n = j) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ となる。よって、} \varphi(k) \text{ を } \sum_{|j| < k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \leq \alpha \text{ となるように取れる。}$$

[証明終り]

任意に $\alpha \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ を固定する。 $\{\varphi(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を上で示したものと同様にとる。

n_k, m_k を $n_1 = 1, m_k = n_k + \varphi(n_k)$, $n_{k+1} = m_k + \varphi(m_k)$ とする。

$$P(C_k) = P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k) P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k) \quad (\because \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ は独立})$$

$P(\text{Head}) = \frac{1}{2}$ であるから、対象性を使うと

$$P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) = P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \geq n_k) + P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k)$$

$$= P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k) + P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k) = 2P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k)$$

同様にして $P(|Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}}| \geq m_k) = 2P(Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ となるから

$$P(C_k) = \frac{1}{4}P(|Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k}| \geq n_k)P(|Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}}| \geq m_k)$$

$\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の同一分布性から

$$= \frac{1}{4}P(|Y_1 + \cdots + Y_{m_k-n_k}| \geq n_k)P(|Y_1 + \cdots + Y_{n_{k+1}-m_k}| \geq m_k)$$

$\varphi(k)$ の定め方から

$$= \frac{1}{4}P(|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(n_k)}| \geq n_k)P(|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(m_k)}| \geq m_k) \geq \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$$

$$\because \sum_{|j| < k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \quad \underbrace{=}_{\{Z_{\varphi(k)}=j\}_{|j|<k} \text{は非交和}} \quad P\left(\bigcup_{|j| < k} Z_{\varphi(k)} = j\right) = P(|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha \text{ なので}$$

$$P(|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(k)}| \geq k) \geq 1 - \alpha$$

以上で $\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 = \infty$ となつて、 $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$ が示せた。 □

2 独立確率変数に対する大数の法則

定理 10. X_1, X_2, \dots を独立確率変数とする。

このとき、

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ が確率収束する} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n X_k \text{ が概収束する}.$$

まず、補題を示す。

補題 11. $N \in \mathbb{N}$ を固定する。 X_1, X_2, \dots, X_N を独立確率変数とし、 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく。

任意の $\alpha > 0$ に対して、 $\sup_{1 \leq j \leq N} P(|S_N - S_j| > \alpha) = c < 1$ となるとき、

$$P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \text{ が成立する}.$$

Proof.

$j^*(\omega)$ を $|S_j(\omega)| > 2\alpha$ となる $1 \leq j \leq N$ で一番小さいものとする。存在しないときは 0 とする。

ここで $\bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} = \emptyset$ であるとき $P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) = 0$ なので

$$P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) = 0 \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \text{ が成立する}.$$

よつて $\bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} \neq \emptyset$ のときを考える。

$$P(|S_N| > \alpha, \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = \sum_{j=1}^N P(|S_N| > \alpha, j^* = j) \geq \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) \text{ が成立する}.$$

$\because \bullet \bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} = \left\{ \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha \right\}$ を示せば、一つ目の等号が成立する。

(\subset)

$\omega \in (\text{左辺})$ とすれば, $1 \leq \exists j \leq N$ s.t. $j^*(\omega) = k$ だから $|S_k(\omega)| > 2\alpha$ なので $\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| \geq |S_k(\omega)| > 2\alpha$ となって, $\omega \in (\text{右辺})$

(\supset)

$\omega \in (\text{右辺})$ とすれば, $\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j(\omega)| > 2\alpha$ であるから,

$K \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\{k_1, k_2, \dots, k_K\} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ が存在して $|S_{k_m}| > 2\alpha$ ($m = 1, 2, \dots, K$) となる. $j^{**}(\omega) = \min\{k_1, k_2, \dots, k_K\}$ とすれば $j^*(\omega) = j^{**}(\omega)$ となるから $\omega \in (\text{左辺})$ となる.

• 各 $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して, $\{|S_N| > \alpha\} \cap \{j^* = j\} \supset \{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \cap \{j^* = j\}$ となるのを示せば 2 つ目の不等号が示せる.

$k \in \{1, 2, \dots, N\}$ を任意に固定しておく. $\omega \in (\text{右辺})$ をとる. $|S_N(\omega) - S_j(\omega)| \leq \alpha$ かつ $j^*(\omega) = j$ であるから

$$\begin{aligned} |S_j(\omega)| - |S_N(\omega)| &\leq \alpha \text{ かつ } |S_j(\omega)| > 2\alpha \Leftrightarrow |S_j(\omega)| - \alpha \leq |S_N(\omega)| \text{ かつ } |S_j(\omega)| > 2\alpha \\ &\Rightarrow 2\alpha - \alpha = \alpha < |S_N(\omega)| \end{aligned}$$

以上で $\{|S_N| > \alpha\} \cap \{j^* = j\} \supset \{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \cap \{j^* = j\}$

$\{j^* = j\} = (\bigcap_{k=1}^{j-1} \{|S_k| > 2\alpha\}^c) \cap \{|S_j| > 2\alpha\}$ なので, $\{j^* = j\} \in \sigma(X_1, \dots, X_j)$,

$\{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \in \sigma(X_{j+1}, \dots, X_N)$ であるから, $\{j^* = j\}$ と $\{|S_N - S_j| \leq \alpha\}$ は独立.

仮定から $P(|S_N - S_j| > \alpha) \leq c$ なので $1 - P(|S_N - S_j| > \alpha) = P(|S_N - S_j| \leq \alpha) \geq 1 - c$ となる. よって

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) &= \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha) P(j^* = j) \\ &\geq (1 - c) \sum_{j=1}^N P(j^* = j) = (1 - c) P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \end{aligned}$$

となる. まとめると

$$(1 - c) P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) \leq P(|S_N| > \alpha, \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq P(|S_N| > \alpha)$$

が成立する.

$$\therefore P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \frac{1}{1 - c} P(|S_N| > \alpha)$$

□

補題 11 を使って, 定理 10 の証明をする.

Proof.

(\Leftarrow) 概収束するならば確率収束するので成立する.

(\Rightarrow) $\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束するとする. ここで $\sum_{k=1}^n X_k$ が概収束しないと仮定する.(背理法)

ここで実数列 $\{s_n\}$ が収束しないとすれば $\{s_n\}$ は Cauchy 列でないので

ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N$ に対して, $|s_n - s_m| > \varepsilon$ が成立する.

また, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $\sup_{n > m} |s_n - s_m| > \varepsilon$ となる.

$\sum_{k=1}^n X_k$ はほとんど確実に Cauchy 列でないから,
ある $\varepsilon > 0, \delta \in (0, 1]$ が存在して, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して,
 $P\left(\sup_{n>m} \left|\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \geq \delta$ が成立する.
この ε, δ を固定する.

$\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束するので $\sum_{k=1}^N X_k - \sum_{k=1}^m X_k \xrightarrow{P} 0$ となる.

$\therefore \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} S$ とすると,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - S + S - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - S\right| + \left|S - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^N X_k - S\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|S - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\ &\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - S\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_{k=1}^m X_k - S\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (m, N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる.

よって, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m, N \geq M$ ($m < N$) に対して

$P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ かつ $P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0$ ($m, N \rightarrow \infty$) この m, N を固定する.

$C_{m,N} = \sup_{m < n \leq N} P\left(\left|\sum_{k=n}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とおくと, $C_{m,N} < 1$ かつ $C_{m,N} \rightarrow 0$ ($m, N \rightarrow \infty$) となる.

ここで補題 9 を使うと,

$P\left(\sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とかけて, まず $N \rightarrow \infty$ とすると,

単調性から

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{m < n} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

であり

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

だから $\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\sup_{m < n} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) = 0$

これは任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $P\left(\sup_{n>m} \left|\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \geq \delta > 0$ となることに矛盾する.

背理法により $\sum_{k=1}^n X_k$ は概収束することがわかった. □

系 12.

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $E[X_k] = 0$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] < \infty$ であるとする.

このとき $\sum_{k=1}^n X_k$ は概収束する.

Proof.

X_1, X_2, \dots は独立なので, $\sum_{k=1}^n X_k$ が確率収束することを示せば定理 10 から $\sum_{k=1}^n X_k$ は概収束する.

$\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] = s^2$ (ただし $s \geq 0$) とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して Chebyshev の不等式から

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k - s\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left|\sum_{k=1}^n X_k - s\right|^2\right] \text{ となる. } E\left[\left|\sum_{k=1}^n X_k - s\right|^2\right] \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \text{ を示したい.}$$

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n X_k - s\right|^2\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^2\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] + s^2 = E\left[\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] + s^2$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{ここで, } X_1, X_2, \dots \text{ は独立だから} \\ \sum_{i<j} E[X_i X_j] = \sum_{i<j} E[X_i] E[X_j] \text{ が成立する. また } E[X_k] = 0 \text{ なので} \end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n E[X_k^2] - 2s \sum_{k=1}^n E[X_k] + s^2 \rightarrow s^2 - 2s^2 + s^2 = 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

$\sum_{k=1}^n X_k$ が確率収束することがわかったので $\sum_{k=1}^n X_k$ は概収束する. □

定理 13. 独立確率変数に対する大数の法則

X_1, X_2, \dots を独立確率変数とする. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E[X_k] = 0$, $E[X_k^2] < \infty$ であるとする.

正数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $b_n \uparrow \infty$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ を満たすとき, $\frac{X_1 + \dots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ が成立する.

証明の前に一つ補題を示す.

補題 14. *Kronecker's Lemma*

x_1, x_2, \dots を $\sum_{k=1}^n x_k \rightarrow s$ (ただし s は有限値) を満たす実数列とする.

このとき, $b_n \uparrow \infty$ となる整数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が取れて, $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \rightarrow 0$ となる.

Proof.

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$, $r_0 = s$ とおく. このとき $x_n = r_{n-1} - r_n$, $n = 1, 2, \dots$ また,

$$\sum_{k=1}^n b_k x_k = \sum_{k=1}^n b_k (r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} r_k - \sum_{k=1}^n b_k r_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) r_k + b_1 s - b_n r_n$$

となるから

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + b_1 |s| + b_n |r_n| \quad (\because \text{三角不等式, } b_n \text{ は単調増加なので } b_{n+1} - b_n \geq 0)$$

ここで $\forall \varepsilon > 0$ をとる. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ は収束するから r_k の定め方から $N \in \mathbb{N}$ を任意の $n \geq N$ に対して, $|r_k| \leq \varepsilon$ となるように取れる. この N を固定する. $\tilde{r} := \max\{|r_1|, \dots, |r_{N-1}|, \varepsilon\}$ とする. $n > N$ において

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| \leq \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \leq \tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N)$$

よって

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n} (\tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N) + b_1 |s| + b_n \varepsilon) \rightarrow \varepsilon$$

つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon$ となるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon$ がわかった.

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば, $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \rightarrow 0$ が示された. □

この補題 14 を使って定理 13 を証明する.

Proof.

Kronecker's Lemma により, $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{b_k}$ がほとんど確実に収束すれば, $\frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^n b_k \frac{X_k}{b_k} = \frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ となる.

仮定から, X_1, X_2, \dots は独立確率変数, $E \left[\frac{X_k}{b_k} \right] = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} E \left[\frac{X_k^2}{b_k^2} \right] < \infty$ であるから, 補題 14 から $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{b_k}$ は概収束する. $\therefore \frac{X_1 + \dots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ □

3 再帰状態と格子状に分布する確率変数

以下では X_1, X_2, \dots を独立同一分布に従う確率変数列とする. $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ と定める.

定義 15. 再帰状態 (recurrent state)

$x \in \mathbb{R}$ とする. x が再帰状態 (recurrent state) であるとは, x の任意の開近傍 I に対して $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 1$ となることである.

定義 16. 格子上に分布する確率変数

X が格子 $L_d = \{nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ($d > 0$) 上に分布するとは, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} P(X = nd) = 1$ かつ

$\exists l > d \text{ s.t. } \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(X = nl) = 1$ とならないことである.

X が格子上に分布しないとき, $L_0 = \mathbb{R}$ とかいて, X は L_0 上に分布するという.

定理 17.

X_1, X_2, \dots を L_d ($d \geq 0$) 上に分布する確率変数列とする. このとき L_d に含まれる状態は全て再帰的または全て非再帰的である.

Proof.

$G = \{x \in L_d \mid x \text{ は再帰的} \}$ とおくと, G は閉集合となる. (G が空のときは全ての状態が非再帰的なので $G \neq \emptyset$ とする.)

\therefore 任意に $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ をとって $x_n \rightarrow x$ とする. このとき $x \in G$ を示したい.

x の開近傍 I を任意にとる. I に対して n を十分大きく取れば $x_n \in I$ となる. この n を固定する. I は x_n の近傍でもあるから, $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 1 \therefore x \in G$

$y \in \mathbb{R}$ が候補状態であるとは y の任意の開近傍 I に対して, ある自然数 $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$P(S_k \in I) > 0$ が成立することをいう.

「 x が再帰的かつ y が候補状態 $\Rightarrow x - y$ は再帰的」が成立することを示したい.

\therefore

$\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき y は候補状態だから, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ となる.

x は再帰的より $P(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > m} \{|S_n - x| < \varepsilon\}) = 1$ となるから

$$\begin{aligned} 0 &= P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\}) \\ &\geq P(|S_k - y| < \varepsilon, \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) \\ &= P(|S_k - y| < \varepsilon) P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(|S_k - y| < \varepsilon) P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) \end{aligned}$$

\therefore

任意の $\omega \in \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}$ をとる.

ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq m$ に対して, $|S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega) - (x - y)| \geq 2\varepsilon$ となる.

この m を固定する. 任意の $n \geq m$ に対して

$2\varepsilon \leq |S_{k+n}(\omega) - x| + |S_k(\omega) - y| < |S_{k+n}(\omega) - x| + \varepsilon$ から $\varepsilon \leq |S_{k+n}(\omega) - x|$ となる.

ここで $N = k + m$ とおけば, $n \geq N$ に対して, $|S_n(\omega) - x| \geq \varepsilon$ なので $\omega \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\}$

$$\therefore \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\} \supset \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}$$

また X_1, X_2, \dots は独立なので, S_k と $S_{k+n} - S_k = \sum_{m=k+1}^{k+n} X_m$ は独立.

また同一分布性から

$$P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - (x - y)| \geq 2\varepsilon\})$$

も成立する.

$P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ なので $P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) = 0$ つまり

$P(\{|S_n - (x - y)| < 2\varepsilon\} \text{ i.o.}) = 1 \quad I_\varepsilon = (x - y - 2\varepsilon, x - y + 2\varepsilon)$ とおけば, $P(|S_n| \in I_\varepsilon \text{ i.o.}) = 1$

$\varepsilon > 0$ は任意だったから $x - y$ は再帰的である.

$x \in G$ は候補状態である

$\therefore x \in G$ を任意にとる. x の開近傍 I を任意にとる. $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 1$ である. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$P(S_k \in I) = 0$ であるとする $\sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I) < \infty$ より Borel-Cantelli Lemma から $P(S_k \in I \text{ i.o.}) = 0$

これは $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 1$ に矛盾する. よって $P(S_k \in I) > 0$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する.

よって $x - x = 0 \in G$ である. このことから G は群である. G が \mathbb{R} 上で閉なので G は \mathbb{R} 上の閉部分群である. 全ての候補状態 y に対して $0 - y = y \in G$ となる.

• $d > 0$ のとき

$P(X_1 = nd) > 0$ かつ $P(X_1 = (n+1)d) > 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在しないと仮定する.(背理法)

このとき $0 \in G$ は候補状態なので $\sum_{n \in \mathbb{Z}} P(X_1 = (2d)n) = 1$ となって, d の最大性に反する. よってある $n \in \mathbb{Z}$ が取れて $nd, (n+1)d \in G$ となる. G は群なので $(n+1)d - nd = d \in G$ このことから $L_d \subset G$ である.

• $d = 0$ のとき

このとき G に対して, ある $l > 0$ が存在して, $G = \{nl | n \in \mathbb{Z}\}$ となると仮定する (背理法).

候補状態は G の元なので $\sum_{n \in \mathbb{Z}} P(X_1 = nl) = 1$ となり, これは $d = 0$ に矛盾する. よって $G = \mathbb{R} = L_0$

以上で $d \geq 0$ に対して $L_d = G$ となり, L_d の全ての状態は再帰的となる. \square

定理 18. X_1, X_2, \dots を L_d 上に分布する確率変数列とする (ただし $d \geq 0$).

(i) もし, 有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ が存在して $J \cap L_d \neq \emptyset$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in J) < \infty$ を満たせば, 再帰状態は存在しない.

(ii) もし, 有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ で任意の $\varepsilon \in (0, \frac{\|J\|}{2})$ に対して, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して $I = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset J$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となれば, L_d の全ての状態は再帰状態である.

Proof.

(i) $J \cap L_d \neq \emptyset$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in J) < \infty$ を満たす有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ が存在することを仮定する.

Borel-Cantelli Lemma から $P(S_n \in J \text{ i.o.}) = 0$ となって, L_d は少なくとも再帰的でない状態が含まれる.

$\therefore x \in L_d \cap J$ をとれば, x の開近傍 $I \subset J$ がとれて, $P(S_n \in I \text{ i.o.}) \leq P(S_n \in J \text{ i.o.}) = 0$ となって x は再帰的でない L_d の元である.

定理 17 から L_d の元は全て再帰状態にはならない. つまり再帰状態は存在しない.

(ii) 長さ l の有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ で任意の $\varepsilon \in (0, \frac{l}{2})$ に対して, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $I = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset J$

かつ $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるものがとれたとする. $0 \in L_d$ なので, 0 が再帰的であることがわかれば

定理 17 から L_d の全ての状態が再帰的である.

$$A_k = \begin{cases} \{S_k \in I, S_{n+k} \notin I \text{ } n = 1, 2, \dots\} & (k \geq 1) \\ \{S_n \notin I \text{ } n = 1, 2, \dots\} & (k = 0) \end{cases}$$

と定めると, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{S_n \notin I\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ となる.

$\therefore (\subset) \omega \in (\text{左辺})$ とする. このときある $m \in \mathbb{N}$ がとれて, 任意の $n > m$ に対して, $S_n(\omega) \notin I$ となる.

$1 \leq i \leq m-1$ の中で $S_i(\omega) \in I$ となるものが存在するときその最大値を k とすれば,

$S_k(\omega) \in I, S_n(\omega) \notin I \text{ } (n \geq k)$ が成立する. よって, $\omega \in A_k$ となる.

任意の $i \in \{1, \dots, m-1\}$ に対して, $S_i \notin I$ のときは, $\omega \in \{S_n \notin I \mid n = 1, 2, \dots\} = A_0$ 以上で $\omega \in$ (右辺)
 (⊃) $\omega \in$ (右辺) とする. このとき $k \in \mathbb{N}$ が存在して $\omega \in A_k$ となる.

$k \geq 1$ のとき $\omega \in A_k \subset \{S_{n+k} \notin I \mid n = 1, 2, \dots\} = \bigcap_{n=k+1}^{\infty} \{S_n \notin I\}$, $k = 0$ のとき $\omega \in A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{S_n \notin I\}$
 定め方から A_0, A_1, \dots は非交和なので

$$P\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{S_n \notin I\}\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$$

$k \geq 1$ のとき

$$P(A_k) \geq P(S_k \in I, |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots)$$

$\because \omega \in \{S_k \in I\} \cap \{|S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots\}$ を任意にとる.

$S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega) \leq -2\varepsilon$ または $2\varepsilon \leq S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega), n = 1, 2, \dots)$

I の定め方から, $x - \varepsilon < S_k < x + \varepsilon$ だから

$\Rightarrow S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) \leq (x + \varepsilon) - 2\varepsilon$ または $2\varepsilon + (x - \varepsilon) \leq S_{n+k}(\omega), n = 1, 2, \dots)$

$\Leftrightarrow S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) \leq x - \varepsilon$ または $x + \varepsilon \leq S_{n+k}(\omega), n = 1, 2, \dots)$

$\Leftrightarrow S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) \notin I, n = 1, 2, \dots) \Leftrightarrow \omega \in A_k$

$P(S_k \in I, |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots) = P(S_k \in I)P(|S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots) \quad \because$ 独立性
 $= P(S_k \in I)P(|S_n| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots) \quad \because$ 同一分布性

$$P\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{S_n \notin I\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) \geq P(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ \geq P(A_0) + P(|S_n| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots) \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I) \quad \text{ここで, } \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I) = \infty \text{ であるから}$$

$P(|S_n| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots) = 0$. 以上で $0 < \forall \varepsilon < \frac{l}{2}, P(|S_n| \geq 2\varepsilon, n = 1, 2, \dots) = 0$ となる (*)

$0 < \forall \varepsilon < \frac{l}{2}$ を新しく固定する. $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ として, $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ を先と同様にとる. $I_\delta = (-\delta, \delta)$ (ただし, $\delta < \varepsilon$) とする. $\forall k \geq 1$ として $A_k = \lim_{\delta \uparrow \varepsilon} \{S_k \in I_\delta, S_{n+k} \notin I \mid n = 1, 2, \dots\}$ となるから

$P(A_k) = P(\lim_{\delta \uparrow \varepsilon} \{S_k \in I_\delta, S_{n+k} \notin I \mid n = 1, 2, \dots\})$ 連続性から

$$= \lim_{\delta \uparrow \varepsilon} P(\{S_k \in I_\delta, S_{n+k} \notin I \mid n = 1, 2, \dots\})$$

$P(S_k \in I_\delta, S_{n+k} \notin I \mid n = 1, 2, \dots) \leq P(S_k \in I_\delta, |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta \mid n = 1, 2, \dots)$ となる.

$\because \omega \in \{S_k \in I_\delta, S_{n+k} \notin I \mid n = 1, 2, \dots\}$ を任意にとる.

$-\delta < S_k(\omega) < \delta, S_{n+k}(\omega) \leq -\varepsilon$ または $\varepsilon \leq S_{n+k}(\omega) (n = 1, 2, \dots)$ となる.

$S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega) \leq -\varepsilon - S_k(\omega) < -\varepsilon + \delta$ または $\varepsilon - \delta < \varepsilon - S_k(\omega) \leq S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)$

よって $|S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)| \geq \varepsilon - \delta \quad \therefore \omega \in \{S_k \in I_\delta, |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta \mid n = 1, 2, \dots\}$

独立性と同一分布性から

$$P(S_k \in I_\delta, |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta \mid n = 1, 2, \dots) = P(S_k \in I_\delta)P(|S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta \mid n = 1, 2, \dots) \\ = P(S_k \in I_\delta)P(|S_n| \geq \varepsilon - \delta \mid n = 1, 2, \dots) = 0$$

$\because 0 < \frac{\varepsilon - \delta}{2} < \frac{l}{2}$ なので (*) より $P(|S_n| \geq \varepsilon - \delta \mid n = 1, 2, \dots) = 0$

以上で $P(A_k) = 0 (\forall k \geq 1)$ となる.

$0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$ だから $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{l}{2}$ なので $P(A_0) = P(S_n \notin I \mid n = 1, 2, \dots) = P(|S_n| \geq \varepsilon \mid n = 1, 2, \dots) = 0$ これまでのことから $0 < \forall \varepsilon < \frac{l}{2}, I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して, $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 1$

よって, 0 は再帰的となる. $\therefore L_d$ の全ての状態は再帰的である. \square

系 19.

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, 次の (i), (ii) のいずれかが成立する.

(i) $L_d \cap I \neq \emptyset$ を満たす全ての有界区間 I に対して, $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 1$

(ii) $L_d \cap I \neq \emptyset$ を満たす全ての有界区間 I に対して, $P(S_n \in I \text{ i.o.}) = 0$

Proof.

$L_d \cap I \neq \emptyset$ となる全ての有界区間 I に対して $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となると, 定理 17 から L_d の全ての状態は再帰的である. つまり $L_d \cap I \neq \emptyset$ となる任意の有界区間 I とすれば, $\forall x \in L_d \cap I$ として $P(S_n \in I \text{ i.o.}) \geq P(S_n = x \text{ i.o.}) = 1$ ($\because x$ は再帰的) となる.

$L_d \cap I \neq \emptyset$ となる有界区間 I が存在して $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) < \infty$ となると, 定理 17 から再帰状態は存在しない. よって任意の有界区間 I ($L_d \cap I \neq \emptyset$) に対して I を含む开区間 J とすれば $P(S_n \in I \text{ i.o.}) \leq P(S_n \in J \text{ i.o.}) = 0$ ($\because J$ は L_d のある元の開近傍) \square

定義 20.

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が系 18 (i) を満たすとき, 再帰的という. また, 系 18 (ii) を満たすとき, 非再帰的という.

定理 21.

$E[X_1] = 0$ となると, S_1, S_2, \dots は再帰的となる.

証明の前にまず命題を一つ示す.

命題 22.

I が長さ a の区間であるとき, $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq a)$ となる.

Proof.

I を長さ a の任意の区間としてとる. $N := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \in I\}}$ とおくと, N は和 S_1, S_2, \dots の中で I に含まれるものを数えたものとなる.

$n^*(\omega) := \begin{cases} S_n(\omega) \in I \text{ となる最小の } n \in \mathbb{N} \\ \infty \end{cases}$ (もし $S_n(\omega) \notin I, n = 1, 2, \dots$) とおく.

$\{n^* = k\}$ 上では $1_{\{S_n \in I\}} = 0$ ($\forall n < k$), $1_{\{S_k \in I\}} = 1$ となるから,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=1}^{k-1} 1_{\{S_n \in I\}} + 1_{\{S_k \in I\}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{\{S_n \in I\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_{k+n} \in I\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_{k+n} - S_k \in I - S_k\}} \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_{k+n} - S_k \in [-a, a]\}} \end{aligned}$$

$\because \forall \omega \in \{n^* = k\}$ に対して, $I - S_k(\omega) \subset [-a, a]$ となる. つまり $1_{\{I - S_k(\omega)\}} \leq 1_{[-a, a]}$ が成立する.

なぜなら, $\bar{I} = [I_1, I_1 + a]$ とかくと ($I_1 \in \mathbb{R}$)

$-I_1 - a \leq -S_k(\omega) \leq -I_1$ であって, $I - I_1 - a = [-a, 0], I - I_1 = [0, a]$ であるから,

$I - S_k(\omega) \subset [-a, a]$ だから, $1_{\{I - S_k\}} \leq 1_{[-a, a]}$ となる.

$\{n^* = k\} \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k)$ なので, $\{n^* = k\}$ と $\{S_{k+n} - S_k \in [-a, a]\}$ は独立となる.

$$\begin{aligned}
\int_{\{n^*=k\}} N(\omega) P(d\omega) &\leq \int_{\{n^*=k\}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{(S_{k+n} - S_k)(\omega) \in [-a, a]\}} \right) P(d\omega) \quad \text{単調収束定理から,} \\
&= P(n^* = k) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n^*=k\}} 1_{\{S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega) \in [-a, a]\}} P(d\omega) = P(n^* = k) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\{n^* = k\} \cap \{S_{k+n} - S_k \in [-a, a]\}) \\
&= P(n^* = k) + \sum_{n=1}^{\infty} P(n^* = k) P(S_{k+n} - S_k \in [-a, a]) \quad (\because \text{独立性から}) \quad \text{また同一分布性から} \\
&= P(n^* = k) + P(n^* = k) \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq a) \quad \text{ここで両辺 } k \text{ で和をとると, 左辺は単調収束定理を使って,} \\
\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{n^*=k\}} N(\omega) P(d\omega) &= \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n(\omega) \in I\}} P(d\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) \quad \text{となって,} \\
\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq a) \quad \text{が成立する.} \quad \square
\end{aligned}$$

命題 21 を使って, 定理 20 を証明する.

Proof.

$$\forall M \in \mathbb{N} \text{ をとる. } \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) = \sum_{k=-M}^{M-1} \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in (k, k+1)) \quad \text{命題 21 より}$$

$$\leq \sum_{k=-M}^{M-1} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1)) = 2M(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1)) \quad \text{つまり}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1) - (*)$$

大数の強法則から $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ (\because 概収束 \Rightarrow 確率収束) となる. $\forall \varepsilon > 0$ をとる. このとき

$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $P(|S_n| < \varepsilon n) > \frac{1}{2}$ ($\forall n > m$) となる. $M \in \mathbb{N}$ を $\varepsilon(m+1) < M$ となるようにとれば,

$$P(|S_n| < M) \geq P(|S_n| < \varepsilon(m+1)) > \frac{1}{2} \quad \text{となる.}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \sum_{n=m+1}^{\infty} P(|S_n| < M) > \frac{1}{2} \left(\frac{M}{\varepsilon} - m \right) \quad \text{から} \quad \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{m}{4M}$$

$$(*) \text{ から } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1) \geq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \frac{1}{4\varepsilon} \quad \text{となり, } \varepsilon \downarrow 0 \text{ とすれば,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1) = \infty \quad \text{となる.} \quad \text{ここで } 0 < \forall \delta < \frac{1}{2} \text{ に対して, } \frac{1}{N} < \delta \text{ となる } N \in \mathbb{N} \text{ をとって,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) = \sum_{k=-MN}^{N(M-1)} \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in (\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N})) \leq 2MN(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq \frac{1}{N})) \quad \text{となって,}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < \frac{1}{\delta}) \geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq \frac{1}{N}) \geq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{MN} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \frac{1}{4\varepsilon N} \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \downarrow 0) \quad \text{だから,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < \frac{1}{\delta}) = \infty \quad \text{となる.} \quad \text{このことから, 定理 17(ii) より } L_d \text{ の全ての元は再帰的.}$$

系 18 から $\{S_n\}_n^{\infty}$ は再帰的となる. □

例

コイントスを考える.

$$P(\text{Head}) = \frac{1}{2}, \quad Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{が } H \text{ のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{が } T \text{ のとき}) \end{cases}, \quad Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n \text{ とする.}$$

このとき Y_1, Y_2, \dots は独立同一分布に従い, L_1 上に分布する. $E[Y_1] = 0$ なので, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は再帰的になる.
また, 定理 8, $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$ となることから, 系 18 により $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は再帰的になることがわかる.