課題研究bレポート

加納基晴

定理 1. 近似定理

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とする．

${}^\forall A_1 \in \sigma(\boldsymbol{X}), {}^\forall \varepsilon > 0$ に対して，ある $n \in \mathbb{N}, A_2 \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, Xn)$ が存在して $P(A_1 \triangle A_2) \leq 0$ となる．

(ただし $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$ *)*

Proof.

${}^\forall A_1 \in \sigma(\mathbf{X}), {}^\forall \varepsilon > 0$ を固定する．

$\mathscr{F}_0 = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} |\ {}^\forall \varepsilon > 0$ に対して, ${}^\exists B \in \mathscr{F}_0\ s.t.\ P(A \triangle B) \leq \varepsilon\}$ と定める．

$\mathscr{F}_0 \subset \mathcal{C}$ は明らかだから,$\mathcal{C}$ が σ 加法族であることを示せば, $\sigma(\mathscr{F}_0) \subset \mathcal{C}$ で, $\sigma(\mathscr{F}_0) = \sigma(\mathbf{X})$ であることから,

$A_1 \in \sigma(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$ なので,${}^\exists A_2 \in \mathscr{F}_0\ s.t.\ P(A_1 \triangle A_2) \leq \varepsilon$ となり、定理が成立するのがわかる．

- $\mathcal{C}$ が σ 加法族であること示す．

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$ $(\because\ \Omega \in\ \mathscr{F}_0)$

(ii) ${}^\forall A \in \mathcal{C}$ に対して, $A^c \in \mathcal{C}$

$\because {}^\forall \varepsilon > 0$ を固定する．このとき $B \in \mathcal{F}_0$ が取れて, $P(A \triangle B) \leq \varepsilon$ となる.$\mathcal{F}_0$ の定め方から，$B^c \in \mathcal{F}_0$ であって, $P(A^c \triangle B^c) = P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P((B - A) \cup (A - B)) = P(A \triangle B) \leq \varepsilon$

$\therefore A^c \in \mathcal{C}$

(iii) ${}^\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, {}^\forall \varepsilon > 0$ をとる．$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0$ を $P(A_n \triangle B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ となるようにとる．

また, 測度の上からの連続性から　ある $N \in \mathbb{N}$ が取れて, $P(\displaystyle\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ となる．

ここで, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示せれば, 単調性と劣加法性から,

$$P(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq P((\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{N} P(B_n \triangle A_n) + P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる．$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{F}_0$ であることから　$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ となる．

- $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示す．

$$\because\ \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \vee (\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^{N} B_n)$$

$$\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c))$$

$$\Rightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$
$$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \cap A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$
$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} ((B_n \cap A_n^c) \cup (A_n \cap B_n^c)) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$$
$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \triangle A_n) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$$
$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \qquad \therefore \bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$$

$(i) \sim (iii)$ より $\mathcal{C}$ は σ 加法族である.

□

定理 2. *Kolmogorov zero-one law*

$X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数とする.この時, $E \in \delta$であるとすれば $P(E)$ は $0, 1$ のいずれかの値をとる.

Proof.
$^\forall E \in \delta$をとる. $E \in \sigma(\mathbf{X})$, であるから, 定理 1 により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が取れて $P(E \triangle E_n) \to 0$ となる.このことから $P(E_n) \to P(E)$,
$P(E_n \cup E) \to P(E)$ がわかる.
$\because$
• $P(E_n) \to P(E)$
$P(E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E)$ から $P(E_n) - P(E) \leq P(E_n - E) \leq P(E_n \triangle E) \to 0\ (n \to \infty)$. 同様にして $P(E) - P(E_n) \leq P(E - E_n) \leq P(E_n \triangle E) \to 0$ がわかる.
• $P(E_n \cup E) \to P(E)$
$P(E \cup E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E) \leq P(E_n \triangle E) + P(E)$ から
$P(E \cup E_n) - P(E) \leq P(E_n \triangle E) \to 0\ (n \to \infty)$.また, $E \subset (E \cup E_n) \cup (E \triangle E_n)$ だから $P(E) - P(E \cup E_n) \leq P(E \triangle E_n) \to 0\ (n \to \infty)$
この時, $E \in \delta$だから, $E \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ である.つまり, E と E_nは独立であることがわかる.
$P(E \cap E_n) = P(E)P(E_n)$ であり.
各辺で $n \to \infty$ とすれば, $P(E) = P(E)^2$であるから, $P(E) = 0, 1$ となることがわかった. □

補題 3. *Borel-Ccantelli Lamma*

(**I**), $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば, $P(A_n\ i.o.) = 0$ が成立する.
(**II**), $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$が独立かつ, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば, $P(A_n\ i.o.) = 1$ が成立する.

Proof.

(**I**)

$P(A_n\ i.o.) = P(\lim_{m\to\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m\to\infty}(\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n))$($\because$ 二つ目の等号は測度の連続性, 不等号には劣加法性を使った)

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ であるから $\lim_{m\to\infty}(\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)) = 0 \ \therefore P(A_n\ i.o.) = 0$

(**II**)

${}^\forall m \in \mathbb{N}$ に対して, $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$ を示せば, $P((A_n\ i.o.)^c) = P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$, つまり $P(A_n\ i.o.) = 1$ がわかる.

${}^\forall m \in \mathbb{N}$ を固定する.$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$は独立なので $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = \prod_{n=m}^{\infty} P({A_n}^c) = \prod_{n=m}^{\infty}(1 - P(A_n))$ である.ここで $\log(1-x) \leq -x\ (0 \leq x \leq 1)$ を使うと, $\log(\prod_{n=m}^{\infty}(1-P(A_n))) = \sum_{n=m}^{\infty}\log(1-P(A_n)) \leq -\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = -\infty$. よって $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0 \ ({}^\forall m \in \mathbb{N})$ が示せた. □

いくつか応用例を挙げる.

(例 1) コイントスを考える. $\mathbf{s}$ を長さ k の H, T (表, 裏) が要素の列とする. $A_n = \{\omega\,;(\omega_n, \ldots, \omega_{n+k-1}) = \mathbf{s}\}$ と定める.

命題 4. $P(A_n\ i.o.) = 1$

Proof. $B_1 = \{\omega\,;(\omega_1,\ldots,\omega_k) = \mathbf{s}\}, B_2 = \{\omega\,;(\omega_{k+1},\ldots,\omega_{2k}) = \mathbf{s}\}, \ \ldots$ とおく. このとき, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立となる. また,$\{B_n\ i.o.\} \subset \{A_n\ i.o.\}$ である ($\because\ B_l = A_{(l-1)k+1}$) . $P(B_n) = P(B_1) = \frac{1}{2^k} > 0$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$. 以上のことから定理 3(**II**) を使うと, $P(B_n\ i.o.) = 1 \leq P(A_n\ i.o.) \ \therefore P(A_n\ i.o.) = 1$ □

(例 2) 再び, コイントスを考える. $Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{が } H \text{ のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{が } T \text{ のとき}) \end{cases}$, $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ と定める.

命題 5. $P(Head) \neq \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n = 0\ i.o.) = 0$ となる.

Proof.

$P(Head) = p$ とおく.

$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) < \infty$ であることが示せれば, 定理 3(**I**) から $P(Z_n = 0\ i.o.) = 0$ がわかる. Stirling の近似公式から, 十分大きい n に対して, ${}_{2n}C_n = 2^{2n}\frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}$ (ただし $\delta_n \downarrow 0$) であり, また, $p \neq \frac{1}{2}$ なので $2^2p(1-p) < 1$ より, ある $0 < \lambda < 1$ が存在して $2^2p(1-p) < \frac{1}{\lambda}2^2p(1-p) < 1$ となる.$\delta_n \downarrow 0$ だから十分大きい n に対して は $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2p(1-p)} - 1$ が成立する.

以上で $N \in \mathbb{N}$ を, $n \geq N$ で $P(Z_{2n}) = {}_{2n}C_n\, p^n(1-p)^n = 2^{2n}\dfrac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}\ p^n(1-p)^n$ かつ $\delta_n < \dfrac{\lambda}{2^2p(1-p)} - 1$ を満たすようにとる. $a_n = 2^{2n}\dfrac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}\ p^n(1-p)^n$ とおく. $n \geq N$ において $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2^2\dfrac{1+\delta_{n+1}}{1+\delta_n}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\, p(1-p) \leq 2^2\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{\lambda}{2^2p(1-p)}p(1-p) = \lambda\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leq \lambda$ だから, $a_{n+1} \leq (1-\lambda)a_n \leq \cdots \leq (1-\lambda)^{n+1-N}a_N$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n}=0) = \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n}=0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z_{2n}=0) \leq \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n}=0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{n-N} a_N$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n}=0) + a_N \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n}=0) + a_N \frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty \ (\because\ 0<\lambda<1)$$
以上で $\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n=0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n}=0) < \infty$ がわかった. □

定理 6. $P(Head)=\frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n=0\ i.o.)=1$ となる.

Proof.
$n_1 < n_2 < \dots$ の自然数列とする. また, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して,$n_k < m_k < n_{k+1}$ となるように $m_1 < m_2 < \dots$ をとる. $C_k = \{Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k\} \bigcap \{Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k\}$ と定める.
$Y_i = -1, 1$ だから $-n \leq Z_n \leq n$ となることを使うと, $\omega \in C_k$ に対して,$Z_{m_k}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{n_k})(\omega) + (Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k})(\omega) \leq n_k - n_k = 0$
また $Z_{n_{k+1}}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) + (Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}})(\omega) \geq -m_k + m_k = 0$ よって,
$\omega \in C_k$ に対して $Z_{m_k}(\omega) \leq 0, Z_{n_{k+1}}(\omega) \geq 0$ であり, $Z_{n+1} = Z_n \pm 1$ となることから
$$C_k \subset \{Z_n = 0; n_k+1 \leq {}^{\exists}n \leq n_{k+1}\} = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\}$$
$$\{C_n\ i.o.\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n=0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_m+1}^{\infty} \{Z_n=0\} = \{Z_n = 0\ i.o.\}$$
Borel-Ccantelli Lamma から $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となれば $1 = P(C_n\ i.o.) \leq P(Z_n = 0\ i.o.)$ となる. つまり $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となるような自然数列 $\{n_k\}, \{m_k\}$ が取れることを示せばよい.

- ${}^{\forall}\alpha \in (0,1),\ {}^{\forall}k \in \mathbb{N}$ に対して,${}^{\exists}\varphi(k) \geq 1\ s.t.\ P(|Z_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$ となる.
  $(proof)$ ${}^{\forall}\alpha \in (0,1),\ {}^{\forall}k \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}j \in \mathbb{Z}$ を固定する,$P(Z_n = j) \to 0\ (n \to \infty)$ であるから, $\sum_{|j|<k} P(Z_n = j) \to 0\ (n \to \infty)$ となる. よって,$\varphi(k)$ を $\sum_{|j|<k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \leq \alpha$ となるように取れる. [証明終り]

${}^{\forall}\alpha \in (0,1),\ {}^{\forall}k \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を上で示したものと同様にとる. n_k, m_k を $n_1 = 1$,
$m_k = n_k + \varphi(n_k),\ n_{k+1} = m_k + \varphi(m_k)$ とする.
$P(C_k) = P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k) P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ ($\because$ $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は独立)
$P(Head) = \frac{1}{2}$ であるから, 対象性を使うと
$P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) = 2P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k)$
$P(\left|Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}\right| \geq m_k) = 2P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ となるから,
$P(C_k) = \frac{1}{4} P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) P(\left|Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}\right| \geq m_k)$,$\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の同一分布性から
$= \frac{1}{4} P(|Y_1 + \dots + Y_{m_k - n_k}| \geq n_k) P(\left|Y_1 + \dots + Y_{n_{k+1} - m_k}\right| \geq m_k)$,$\varphi(k)$ の定め方から,
$= \frac{1}{4} P(\left|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(n_k)}\right| \geq n_k) P(\left|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(m_k)}\right| \geq m_k) \geq \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$
$\because \sum_{|j|<k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \underbrace{=}_{\{Z_{\varphi(k)}=j\}_{|j|<k}\text{は非交和}} P(\bigcup_{|j|<k} Z_{\varphi(k)} = j) = P(\left|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(k)}\right| < k) \leq \alpha$ なので

$P(\left|Y_1+\cdots+Y_{\varphi(k)}\right|\geq k)\geq 1-\alpha$

以上で $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(C_k)\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}(1-\alpha)^2=\infty$ となって, $P(Z_n=0\ i.o.)=1$ が示せた. $\square$

定理 7. $X_1,X_2,\ldots$ を独立確率変数とする.
このとき,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ が確率収束する $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ が概収束する　　が成立する.

まず、補題を示す.

補題 8. $N\in\mathbb{N}$ を固定する. $X_1,X_2,\ldots,X_N$ を独立確率変数とし, $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とおく.
${}^{\forall}\alpha>0$ に対して, $\displaystyle\sup_{1\leq j\leq N}P(|S_N-S_j|>\alpha)=c<1$ となるとき,
$\displaystyle P(\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)\leq\frac{1}{1-c}P(|S_N|>\alpha)$ となる.

Proof.
$j^*(\omega)$ を $|S_j(\omega)|>2\alpha$ となる $1\leq j\leq N$ で一番小さいものとする. 存在しないときは 0 とする. ここで $\displaystyle\bigcup_{1\leq j\leq N}\{j^*=j\}=\emptyset$ であるとき $\displaystyle P(\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)=0$ なので,$\displaystyle P(\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)=0\leq\frac{1}{1-c}P(|S_N|>\alpha)$ が成立する. よって, $\displaystyle\bigcup_{1\leq j\leq N}\{j^*=j\}\neq\emptyset$ のときを考える.

$$P(|S_N|>\alpha,\ \sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)=\sum_{j=1}^{N}P(|S_N|>\alpha,\ j^*=j)\geq\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\leq\alpha,\ j^*=j)$$

$\because$ • $\displaystyle\bigcup_{1\leq j\leq N}\{j^*=j\}=\{\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha\}$ を示せば, 一つ目の等号が成立する.

($\subset$)

$\omega\in$ (左辺) とすれば, $1\leq{}^{\exists}j\leq N\ s.t.\ j^*(\omega)=k$ だから $|S_k(\omega)|>2\alpha$ なので $\displaystyle\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|\geq|S_k(\omega)|>2\alpha$ となって, $\omega\in$ (右辺)

($\supset$)

$\omega\in$ (右辺) とすれば, $\displaystyle\sup_{1\leq j\leq N}|S_j(\omega)|>2\alpha$ であるから, ${}^{\exists}\{k_1,k_2,\ldots,k_K\}\subset\{1,2,\ldots,N\}\ s.t.$ $|S_{k_m}|>2\alpha\ (m=1,2,\ldots,K)$ となる. $j^{**}(\omega)=\min\{k_1,k_2,\ldots,k_K\}$ とすれば $j^*(\omega)=j^{**}(\omega)$ となるから,$\omega\in$(左辺) となる.

• 各 k $\in\{1,2,\ldots,N\}$ に対して, $\{|S_N|>\alpha\}\cap\{j^*=j\}\supset\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}\cap\{j^*=j\}$ となるのを示せば 2つ目の不等号が示せる.

k $\in\{1,2,\ldots,N\}$ を固定しておく.$\omega\in$(右辺) をとる. $|S_N(\omega)-S_j(\omega)|\leq\alpha$ かつ $j^*(\omega)=j$ であるから,

$$|S_j(\omega)|-|S_N(\omega)|\leq\alpha \text{ かつ } |S_j(\omega)|>2\alpha\Leftrightarrow|S_j(\omega)|-\alpha\leq|S_N(\omega)| \text{ かつ } |S_j(\omega)|>2\alpha$$
$$\Rightarrow 2\alpha-\alpha=\alpha<|S_N(\omega)|$$

以上で $\{|S_N|>\alpha\}\cap\{j^*=j\}\supset\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}\cap\{j^*=j\}$

$\displaystyle\{j^*=j\}=(\bigcap_{k=1}^{j-1}\{|S_k|>2\alpha\}^c)\cap\{|S_j|>2\alpha\}$ なので,$\{j^*=j\}\in\sigma(X_1,\ldots,X_j)$, $\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}\in\sigma(X_{j+1},\ldots,X_N)$ であるから, $\{j^*=j\}$ と $\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}$ は独立. 仮定から $P(|S_N-S_j|>\alpha)\leq c$ なので $1-P(|S_N-S_j|>\alpha)=P(|S_N-S_j|\leq\alpha)\geq 1-c$

$$\sum_{j=1}^{N} P(|S_N - S_j| \leq \alpha,\ j^* = j) = \sum_{j=1}^{N} P(|S_N - S_j| \leq \alpha) P(j^* = j) \geq (1-c) \sum_{j=1}^{N} P(j^* = j)$$
$$= (1-c) P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha)$$

$$(1-c) P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \sum_{j=1}^{N} P(|S_N - S_j| \leq \alpha,\ j^* = j) \leq P(|S_N| > \alpha,\ \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha)$$
$$\leq P(|S_N| > \alpha) \quad \therefore P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \qquad \square$$

補題 8 を使って, 定理 7 の証明をする.

Proof.

($\Leftarrow$) 概収束するならば確率収束するので成立する.

($\Rightarrow$) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束するとする. ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が概収束しないと仮定する.(背理法)

ここで実数列 $\{s_n\}$ が収束しないとすれば $\{s_n\}$ は Cauchy 列でないので

${}^{\exists}\varepsilon > 0\ s.t.\ {}^{\forall}N \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}n, m \geq N \wedge |s_n - s_m| > \varepsilon$ であるから,

${}^{\exists}\varepsilon > 0\ s.t.\ {}^{\forall}m \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sup_{n>m} |s_n - s_m| > \varepsilon$ となる. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ はほとんど確実に Cauchy 列でないから,

${}^{\exists}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta \in (0,1]\ s.t.\ \left[{}^{\forall}m \in \mathbb{N},\ P\left(\displaystyle\sup_{n>m} |\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k| > \varepsilon\right) \geq \delta\right]$ となる. この $\varepsilon,\ \delta$ を固定する.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束するので $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k \xrightarrow{P} 0$ となる.

$\because\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} s$ とすると, $P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - s + s - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq$
$P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| + \left|s - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left\{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|s - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$
$\leq P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0\ (m,\ N \to \infty)$ となるから.

よって, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, ${}^{\forall}m,\ N \geq M\ (m < N)$ に対して,$P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ で,

$P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0\ (m,\ N \to \infty)$ この $m,\ N$ を固定する.

$C_{m,N} = \displaystyle\sup_{m<n\leq N} P\left(\left|\sum_{k=n}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とおくと, $C_{m,N} < 1$ かつ $C_{m,N} \to 0\ (m,\ N \to \infty)$ となる.

ここで補題 8 を使うと,

$P\left(\displaystyle\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とかけて, まず $N \to \infty$ とすると,

単調性から, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\lim_{N\to\infty}\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{m<n}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right)$

$\leq \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ だから,

$\lim_{m\to\infty} P\left(\sup_{m<n}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = 0$ これは ${}^{\forall}m \in \mathbb{N},\ P\left(\sup_{n>m} |\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k| > \varepsilon\right) \geq \delta > 0$ に矛盾する．背理法により $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束することがわかった． □

系 9.

$E[X_k] = 0\ ({}^{\forall}k \in \mathbb{N}),\ \sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] < \infty$ とする．このとき $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束する．

Proof.

$X_1, X_2, \ldots$ は独立なので，$\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束することを示せば定理 8 から $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束する．

$\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] = s^2$ (ただし $s \geq 0$) とする．${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して Chebyshev の不等式から

$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right]$ となる．$E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right] \to 0\ (n \to \infty)$ を示したい．

$E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^2\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + s^2$

$= E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + s^2$ ここで，$X_1, X_2, \ldots$ は独立だから

$\sum_{i<j} E\left[X_i X_j\right] = \sum_{i<j} E\left[X_i\right] E\left[X_j\right]$ が成立する．また $E[X_k] = 0\ ({}^{\forall}k \in \mathbb{N})$ なので

$= \sum_{k=1}^{n} E\left[{X_k}^2\right] - 2s\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right] + s^2 \to s^2 - 2s^2 + s^2 = 0\ (n \to \infty)$

$\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束することがわかったので $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束する． □

定理 10. 独立確率変数に対する大数の法則

$X_1, X_2, \ldots$ を独立確率変数とする．$E\left[X_k\right] = 0,\ E\left[X_k^2\right] < \infty\ \left({}^{\forall}k \in \mathbb{N}\right)$ であるとする．正数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $b_n \uparrow \infty$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ を満たすとき，$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ が成立する．

証明の前に一つ補題を示す．

補題 11. *Kronecker's Lemma*

$x_1, x_2, \ldots$ を $\sum_{k=1}^{n} x_k \to s < \infty$ を満たす実数列とする．このとき，$b_n \uparrow \infty$ となる整数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が取れて，$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ となる．

Proof.

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k,\ r_0 = s$ とおく．このとき $x_n = r_{n-1} - r_n,\ n = 1, 2, \ldots$．また，$\sum_{k=1}^{n} b_k x_k =$

$\sum_{k=1}^{n} b_k(r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} r_k - \sum_{k=1}^{n} b_k r_k = \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) r_k + b_1 s - b_n r_n$ となるから

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)|r_k| + b_1|s| + b_n|r_n| \quad (\because \text{三角不等式}, b_n \text{は単調増加なので} b_{n+1}-b_n \ge 0)$$

ここで $^\forall\varepsilon > 0$ をとる. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ は収束するから r_k の定め方から $N \in \mathbb{N}$ を $^\forall n \ge N$ に対して, $|r_k| \le \varepsilon$ となるように取れる. この N を固定する. $\tilde{r} := \max\{|r_1|, \ldots, |r_{N-1}|, \varepsilon\}$ とする. $n > N$ において,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)|r_k| \le \sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1}-b_k)|r_k| + \varepsilon\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1}-b_k) \le \tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N)$ よって

$\displaystyle\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n}\right| \le \frac{1}{b_n}(\tilde{r}(b_N-b_1) + \varepsilon(b_n-b_N) + b_1|s| + b_n\varepsilon) \to \varepsilon$ つまり $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n}\right| \le \varepsilon$ となるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n}\right| \le \varepsilon$ がわかった. ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば,$\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ が示された. □

この補題を使って定理 10 を証明する.

Proof.

Kronecker's Lemma により, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{b_k}$ がほとんど確実に収束すれば,$\displaystyle\frac{1}{b_k}\sum_{k=1}^{n} b_k\frac{X_k}{b_k} = \frac{1}{b_k}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ となる.

仮定から, $X_1, X_2, \ldots$ は独立確率変数, $\displaystyle E\left[\frac{X_k}{b_k}\right] = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ であるから, 系 9 から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{b_k}$ は概収束する. $\displaystyle\therefore \frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ □

定理 12. $X_1, X_2, \ldots$ を L_d $(d \ge 0)$ 上に分布する確率変数列とする.
このとき L_d に含まれる状態は全て再帰的または全て非再帰的である.

Proof.

$G = \{x \in L_d |\ x \text{は再帰的}\}$ とおくと, G は閉集合となる.(G が空のときは全ての状態が非再帰的なので $G \neq \emptyset$ とする.)

$\because {}^\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ をとって $x_n \to x$ とする. このとき $x \in G$ を示したい.

x の開近傍 I を任意にとる.I に対して n を十分大きく取れば $x_n \in I$ となる. この n を固定する.I は x_n の近傍でもあるから,$P(S_n \in I\ i.o.) = 1\ \therefore x \in G$

$y \in \mathbb{R}$ が y の任意の近傍 I に対して $k \in \mathbb{N}$ が存在して $P(S_k \in I) > 0$ となるとき y は候補状態であるとする.

x が再帰的かつ y が候補状態 $\Rightarrow$ $x - y$ は再帰的である.

$^\forall\varepsilon > 0$ をとって, $k \in \mathbb{N}$ を $P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ を満たすようにとる.

x は再帰的より $\displaystyle P(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n>m}\{|S_n - x| < \varepsilon\}) = 1$ となるから,

$$0 = P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - x| \ge \varepsilon\}) \ge P(|S_k - y| < \varepsilon, \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \ge 2\varepsilon\})$$

$$= P(|S_k - y| < \varepsilon)P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \ge 2\varepsilon\}) = P(|S_k - y| < \varepsilon)P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - (x-y)| \ge 2\varepsilon\})$$

$\displaystyle\because {}^\forall\omega \in \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \ge 2\varepsilon\}$ をとると,$^\exists m \in \mathbb{N}\ s.t.$

$^\forall n \ge m,\ |S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega) - (x-y)| \ge 2\varepsilon$ となる. $2\varepsilon \le |S_{k+n}(\omega) - x| + |S_k(\omega) - y| < |S_{k+n}(\omega) - x| + \varepsilon$

から $\varepsilon \le |S_{k+n}(\omega) - x|$ $(^\forall n \ge m),\ N = k + m$ とおけば,

$^\forall n \ge N$ に対して, $|S_n(\omega) - x| \ge \varepsilon$ なので $\displaystyle\omega \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - x| \ge \varepsilon\}$

$$\therefore \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - x| \geq \varepsilon\} \supset \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}$$

また $X_1, X_2, \ldots$ は独立なので, S_k と $S_{k+n} - S_k = \displaystyle\sum_{m=k+1}^{k+n} X_m$ は独立. 同一分布性から

$P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - (x-y)| \geq 2\varepsilon\})$ も成立する.

$P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ なので $P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}) = 0$ つまり

$P(\{|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon\}\ i.o.) = 1$ $\quad I_\varepsilon = (x-y-2\varepsilon, x-y+2\varepsilon)$ とおけば,$P(|S_n| \in I_\varepsilon\ i.o.) = 1$

$\varepsilon > 0$ は任意だったから $x - y$ は再帰的である.

$x \in G$ は候補状態である $\because$ $^\forall x \in G$ をとる. x の開近傍 I を任意にとる. $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ であるから,$^\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $P(S_k \in I) = 0$ であるとすれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I) < \infty$ より Borel-Ccantelli Lamma から $P(S_k \in I\ i.o.) = 0$ これは $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ に矛盾する. よって $^\exists m \in \mathbb{N}\ s.t.\ P(S_k \in I) > 0$ となる.

よって $x - x = 0 \in G$ である. このことから G は群である.G が $\mathbb{R}$ 上で閉なので G は $\mathbb{R}$ 上の閉部分群である. 全ての候補状態 y に対して $0 - y = y \in G$ となる.

● $d > 0$ のとき $P(X_1 = nd) > 0$ かつ $P(X_1 = (n+1)d) > 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在しないとき

$0 \in G$ なので 0 は候補状態なので $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X_1 = (2d)n) = 1$ となって, d の最大性に反する. よってある $n \in \mathbb{Z}$ が取れて $nd, (n+1)d \in G$ となる. G は群なので $(n+1)d - nd = d \in G$ このことから $L_d \subset G$ である.

● $d = 0$ のとき このとき G に対して $^\exists l > 0\ s.t.\ G = \{nl | n \in \mathbb{Z}\}$ となると仮定する (背理法). 候補状態は G の元なので $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X_1 = nl) = 1$ となり, これは $d = 0$ に矛盾する. よって $G = \mathbb{R} = L_0$

以上で $d \geq 0$ に対して $L_d = G$ となり, L_d の全ての状態は再帰的となる. □

定理 13. *$X_1, X_2, \ldots$ を L_d 上に分布する確率変数列とする (ただし $d \geq 0$).*

(i) もし, 有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ が存在して $J \cap L_d \neq \emptyset$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in J) < \infty$ を満たせば, 再帰状態は存在しない.

(ii) もし, 有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ で $0 < {}^\forall\varepsilon < \frac{||J||}{2}$ に対して, $^\exists x \in \mathbb{R}\ s.t.\ I = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset J$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるものが存在すれば, L_d の全ての状態は再帰状態である.

Proof.

(i) $J \cap L_d \neq \emptyset$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in J) < \infty$ を満たす有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ がとれたとする. Borel-Canteli's Lemma から $P(S_n \in J\ i.o.) = 0$ となって, L_d は少なくとも再帰的でない状態が含まれる.

$\because x \in Ld \cap J$ をとれば, x の開近傍 $I \subset J$ がとれて, $P(S_n \in I\ i.o.) \leq P(S_n \in J\ i.o.) = 0$ となって x は再帰的でない L_d の元である.

定理 12 から L_d の元は全て再帰状態にはならない. つまり再帰状態は存在しない.

(ii) 長さ l の有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ で $0 < {}^\forall\varepsilon < \frac{l}{2}$ に対して, $^\exists x \in \mathbb{R}\ s.t.\ I = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset J$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるものがとれたとする. $0 \in L_d$ なので,0 が再帰的であることがわかれば定理

12 から L_d の全ての状態が再帰的である． $A_k = \begin{cases} \{S_k \in I,\ S_{n+k} \notin I\ n=1,2,\dots\} & (k \geq 1) \\ \{S_n \notin I\ n=1,2,\dots\} & (k=0) \end{cases}$ と定める

と, $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{S_n \notin I\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ となる.

$\because$ $(\subset)^{\forall}\omega \in$ (左辺) とする．このとき $^{\exists}m \in \mathbb{N}$ がとれて, $S_n(\omega) \notin I$ ($^{\forall}n > m$) となる．$1 \leq i \leq m-1$ の中で $S_i(\omega) \in I$ となるものが存在するときその最大値を k とすれば, $S_k(\omega) \in I,\ S_n(\omega) \notin I$ ($^{\forall}n \geq k$) が成立する．よって, $\omega \in A_k$ となる．$S_i \notin I$ ($1 \leq {}^{\forall}i \leq m-1$) のときは, $\omega \in \{S_n \notin I\ n=1,2,\dots\} = A_0$ 以上で

$\omega \in$ (右辺)

$(\supset)$ $^{\forall}\omega \in$ (右辺) とする．$^{\exists}k \in \mathbb{N}$ $s.t.$ $\omega \in A_k$ となる.

$k \geq 1$ のとき $\omega \in A_k \subset \{S_{n+k} \notin n=1,2,\dots\} = \displaystyle\bigcap_{n=k+1}^{\infty} \{S_n \notin I\}$, $k=0$ のとき $\omega \in A_0 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \{S_n \notin I\}$

定め方から $A_0, A_1, \dots$ は非交和なので, $P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{S_n \notin I\}) = P(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$ □