課題研究bレポート

加納基晴

以下では $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ を確率空間とする.

1　末尾事象と infinte often

定義 1. 末尾事象 *(tail event)*
$X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とする.
$E \in \sigma(X_1, X_2, \ldots)$ が末尾事象 *(tail event)* であるとは $E \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \quad ({}^{\forall}n \in \mathbb{N})$
が成立することである.
末尾加法族 *(tail σ-field)* δ を $\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ と定める.
定義から末尾加法族の元 $E \in \delta$ は末尾事象となる.

定理 2. 近似定理
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間, $X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とする.
${}^{\forall}A_1 \in \sigma(\boldsymbol{X}), {}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}, A_2 \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, Xn)$ が存在して $P(A_1 \triangle A_2) \leq 0$ となる.
(ただし $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$ *)*

Proof.
${}^{\forall}A_1 \in \sigma(\mathbf{X}), {}^{\forall}\varepsilon > 0$ を固定する.
$\mathscr{F}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} |\ {}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して, ${}^{\exists}B \in \mathscr{F}_0\ s.t.\ P(A \triangle B) \leq \varepsilon\}$ と定める.
$\mathscr{F}_0 \subset \mathcal{C}$ は明らかだから,$\mathcal{C}$ が σ 加法族であることを示せば, $\sigma(\mathscr{F}_0) \subset \mathcal{C}$ で, $\sigma(\mathscr{F}_0) = \sigma(\mathbf{X})$ であることから,
$A_1 \in \sigma(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$ なので,${}^{\exists}A_2 \in \mathscr{F}_0\ s.t.\ P(A_1 \triangle A_2) \leq \varepsilon$ となり、定理が成立するのがわかる.
• $\mathcal{C}$ が σ 加法族であること示す.
　(i) $\Omega \in \mathcal{C}$ $(\because\ \Omega \in\ \mathscr{F}_0)$
　(ii) ${}^{\forall}A \in \mathcal{C}$ に対して, $A^c \in \mathcal{C}$
　　$\because {}^{\forall}\varepsilon > 0$ を固定する. このとき $B \in \mathcal{F}_0$ が取れて, $P(A \triangle B) \leq \varepsilon$ となる.$\mathcal{F}_0$ の定め方から, $B^c \in \mathcal{F}_0$
　　であって, $P(A^c \triangle B^c) = P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P((B - A) \cup (A - B)) = P(A \triangle B) \leq \varepsilon$
　　$\therefore A^c \in \mathcal{C}$
　(iii) ${}^{\forall}\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, {}^{\forall}\varepsilon > 0$ をとる. $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0$ を $P(A_n \triangle B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ となるようにとる.
　　また, 測度の上からの連続性から　ある $N \in \mathbb{N}$ が取れて, $P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる.
　　ここで, $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示せれば, 単調性と劣加法性から,

$$P(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq P((\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{N} P(B_n \triangle A_n) + P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる. $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{F}_0$ であることから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ となる.

• $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示す.

$$\begin{aligned}
\because\ \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \vee (\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^{N} B_n) \\
&\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c)) \\
&\Rightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \cap A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} ((B_n \cap A_n^c) \cup (A_n \cap B_n^c)) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \triangle A_n) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \qquad \therefore \bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

$(i) \sim (iii)$ より $\mathcal{C}$ は σ 加法族である.

□

定理 3. *Kolmogorov zero-one law*

$X_1, X_2, \dots$ を独立な確率変数とする.この時, $E \in \delta$であるとすれば $P(E)$ は $0, 1$ のいずれかの値をとる.

Proof.

$^\forall E \in \delta$をとる. $E \in \sigma(\mathbf{X})$, であるから,定理 1 により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,ある $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が取れて $P(E \triangle E_n) \to 0$ となる.このことから $P(E_n) \to P(E)$,

$P(E_n \cup E) \to P(E)$ がわかる.

$\because$

• $P(E_n) \to P(E)$

$P(E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E)$ から $P(E_n) - P(E) \leq P(E_n - E) \leq P(E_n \triangle E) \to 0\ (n \to \infty)$. 同様にして $P(E) - P(E_n) \leq P(E - E_n) \leq P(E_n \triangle E) \to 0$ がわかる.

• $P(E_n \cup E) \to P(E)$

$P(E \cup E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E) \leq P(E_n \triangle E) + P(E)$ から

$P(E \cup E_n) - P(E) \leq P(E_n \triangle E) \to 0\ (n \to \infty)$.また, $E \subset (E \cup E_n) \cup (E \triangle E_n)$ だから $P(E) - P(E \cup E_n) \leq P(E \triangle E_n) \to 0\ (n \to \infty)$

この時, $E \in \delta$だから, $E \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ である.つまり, E と E_nは独立であることがわかる.

$P(E \cap E_n) = P(E)P(E_n)$ であり.

各辺で $n \to \infty$ とすれば, $P(E) = P(E)^2$であるから, $P(E) = 0, 1$ となることがわかった. $\square$

定義 4. *infinite often*
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ とする. $\{A_n\ i.o.\}$ を $\{A_n\ i.o.\} = \lim_{m\to\infty} \bigcup_{n>m} A_n$ と定める.
$\{A_n\ i.o.\}$ は $\{\omega \mid \omega \in A_n$となる n が無限個存在する.$\}$ ともかける.
$\because\ \omega \in \lim_{m\to\infty} \bigcup_{n>m} A_n$ を任意にとる. 1 に対して $\omega \in A_{n_1}$ となる $n_1 \in \mathbb{N}$ をとる. 続いて n_1 に対して $\omega \in A_{n_2}$ となる $n_2 \in \mathbb{N}$ をとる. これを続ければ $\omega \in A_n$ となる n の列として $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が取れるので, $\omega \in \{\omega' \mid \omega' \in A_n$となる n が無限個存在する.$\}$ である.
$\omega \in \{\omega \mid \omega \in A_n$となる n が無限個存在する.$\}$ を任意にとる. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して
$\omega \in A_n$ となる $n > m$ が無限個存在する. よって $\omega \in \lim_{m\to\infty} \bigcup_{n>m} A_n$

補題 5. *Borel-Ccantelli Lamma*

(**I**), $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば, $P(A_n\ i.o.) = 0$ が成立する.
(**II**), $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が独立かつ, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば, $P(A_n\ i.o.) = 1$ が成立する.

Proof.

(**I**)
$P(A_n\ i.o.) = P(\lim_{m\to\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m\to\infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n))$($\because$ 二つ目の等号は測度の連続性, 不等号には劣加法性を使った)
$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ であるから $\lim_{m\to\infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)) = 0\ \ \therefore P(A_n\ i.o.) = 0$
(**II**)
$^\forall m \in \mathbb{N}$ に対して, $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$ を示せば, $P((A_n\ i.o.)^c) = P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$, つまり $P(A_n\ i.o.) = 1$ がわかる.
$^\forall m \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$は独立なので $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = \prod_{n=m}^{\infty} P({A_n}^c) = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))$ である. ここで $\log(1-x) \leq -x\ \ (0 \leq x \leq 1)$ を使うと, $\log(\prod_{n=m}^{\infty}(1 - P(A_n))) = \sum_{n=m}^{\infty} \log(1 - P(A_n)) \leq -\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = -\infty$. よって $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0\ \ (^\forall m \in \mathbb{N})$ が示せた. $\square$

いくつか応用例を挙げる.
(例 1) コイントスを考える. $\mathbf{s}$ を長さ k の H, T (表, 裏) が要素の列とする. $A_n = \{\omega\,; (\omega_n, \ldots, \omega_{n+k-1}) = \mathbf{s}\}$ と定める.

命題 6. $P(A_n\ i.o.) = 1$

Proof. $B_1 = \{\omega\,; (\omega_1, \ldots, \omega_k) = \mathbf{s}\}, B_2 = \{\omega\,; (\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{2k}) = \mathbf{s}\}$, ... とおく. このとき, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

独立となる．また,$\{B_n\ i.o.\} \subset \{A_n\ i.o.\}$ である ($\because\ B_l = A_{(l-1)k+1}$)． $P(B_n) = P(B_1) = \frac{1}{2^k} > 0$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$. 以上のことから定理 3(**II**) を使うと, $P(B_n\ i.o.) = 1 \leq P(A_n\ i.o.)$ $\therefore P(A_n\ i.o.) = 1$ □

(例 2) 再び, コイントスを考える．$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i が\ H\ のとき) \\ -1 & (\omega_i が\ T\ のとき) \end{cases}$, $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ と定める．

命題 7. $P(Head) \neq \frac{1}{2}$ とする．このとき $P(Z_n = 0\ i.o.) = 0$ となる．

Proof.

$P(Head) = p$ とおく．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) < \infty$ であることが示せれば, 定理 3(**I**) から $P(Z_n = 0\ i.o.) = 0$ がわかる．Stirling の近似公式から, 十分大きい n に対して, ${}_{2n}C_n = 2^{2n}\frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}$ (ただし $\delta_n \downarrow 0$) であり, また, $p \neq \frac{1}{2}$ なので $2^2p(1-p) < 1$ より, ある $0 < \lambda < 1$ が存在して $2^2p(1-p) < \frac{1}{\lambda}2^2p(1-p) < 1$ となる.$\delta_n \downarrow 0$ だから十分大きい n に対して は $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2p(1-p)} - 1$ が成立する．

以上で $N \in \mathbb{N}$ を, $n \geq N$ で $P(Z_{2n}) = {}_{2n}C_n\, p^n(1-p)^n = 2^{2n}\dfrac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}\, p^n(1-p)^n$ かつ $\delta_n < \dfrac{\lambda}{2^2p(1-p)} - 1$ を満たすようにとる．$a_n = 2^{2n}\dfrac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}\, p^n(1-p)^n$ とおく. $n \geq N$ において $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2^2\dfrac{1+\delta_{n+1}}{1+\delta_n}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\, p(1-p) \leq 2^2\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{\lambda}{2^2p(1-p)}p(1-p) = \lambda\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leq \lambda$ だから, $a_{n+1} \leq (1-\lambda)a_n \leq \cdots \leq (1-\lambda)^{n+1-N}a_N$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) = \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) \leq \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{n-N}a_N$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n} = 0) + a_N\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n = \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n} = 0) + a_N\frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty\ (\because\ 0 < \lambda < 1)$$

以上で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) < \infty$ がわかった． □

定理 8. $P(Head) = \frac{1}{2}$ とする．このとき $P(Z_n = 0\ i.o.) = 1$ となる．

Proof.

$n_1 < n_2 < \ldots$ の自然数列とする．また, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して,$n_k < m_k < n_{k+1}$ となるように $m_1 < m_2 < \ldots$ をとる．$C_k = \{Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k\} \bigcap \{Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k\}$ と定める．

$Y_i = -1, 1$ だから $-n \leq Z_n \leq n$ となることを使うと, $\omega \in C_k$ に対して,$Z_{m_k}(\omega) = (Y_1 + \cdots + Y_{m_k})(\omega) = (Y_1 + \cdots + Y_{n_k})(\omega) + (Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k})(\omega) \leq n_k - n_k = 0$

また $Z_{n_{k+1}}(\omega) = (Y_1 + \cdots + Y_{m_k})(\omega) + (Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}})(\omega) \geq -m_k + m_k = 0$ よって,
$\omega \in C_k$ に対して $Z_{m_k}(\omega) \leq 0, Z_{n_{k+1}}(\omega) \geq 0$ であり, $Z_{n+1} = Z_n \pm 1$ となることから

$$C_k \subset \{Z_n = 0; n_k + 1 \leq {}^{\exists}n \leq n_{k+1}\} = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\}$$

$$\{C_n\ i.o.\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\{Z_n=0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=n_m+1}^{\infty}\{Z_n=0\} = \{Z_n=0\ i.o.\}$$

Borel-Ccantelli Lamma から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(C_n)=\infty$ となれば $1=P(C_n\ i.o.)\le P(Z_n=0\ i.o.)$ となる. つまり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(C_n)=\infty$ となるような自然数列 $\{n_k\},\{m_k\}$ が取れることを示せばよい.

- $^\forall\alpha\in(0,1),\ ^\forall k\in\mathbb{N}$ に対して,$^\exists\varphi(k)\ge 1\ s.t.\ P(|Z_{\varphi(k)}|<k)\le\alpha$ となる.

  $(proof)$ $^\forall\alpha\in(0,1),\ ^\forall k\in\mathbb{N},\ ^\forall j\in\mathbb{Z}$ を固定する,$P(Z_n=j)\to 0\ (n\to\infty)$ であるから,$\displaystyle\sum_{|j|<k}P(Z_n=j)\to 0\ (n\to\infty)$ となる. よって,$\varphi(k)$ を $\displaystyle\sum_{|j|<k}P(Z_{\varphi(k)}=j)\le\alpha$ となるように取れる. [証明終り]

$^\forall\alpha\in(0,1),\ ^\forall k\in\mathbb{N}$ を固定する. $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を上で示したものと同様にとる. n_k,m_k を $n_1=1$,
$m_k=n_k+\varphi(n_k),\ n_{k+1}=m_k+\varphi(m_k)$ とする.

$P(C_k)=P(Y_{n_k+1}+\cdots+Y_{m_k}\le -n_k)P(Y_{m_k+1}+\cdots+Y_{n_{k+1}}\ge m_k)$ ($\because$ $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は独立)

$P(Head)=\frac{1}{2}$ であるから, 対象性を使うと

$P(|Y_{n_k+1}+\cdots+Y_{m_k}|\ge n_k)=2P(Y_{n_k+1}+\cdots+Y_{m_k}\le -n_k)$

$P(\left|Y_{m_k+1}+\cdots+Y_{n_{k+1}}\right|\ge m_k)=2P(Y_{m_k+1}+\cdots+Y_{n_{k+1}}\ge m_k)$ となるから,

$$\begin{aligned}
P(C_k) &= \tfrac{1}{4}P(|Y_{n_k+1}+\cdots+Y_{m_k}|\ge n_k)P(\left|Y_{m_k+1}+\cdots+Y_{n_{k+1}}\right|\ge m_k)\ ,\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}\text{ の同一分布性から}\\
&= \tfrac{1}{4}P(|Y_1+\cdots+Y_{m_k-n_k}|\ge n_k)P(\left|Y_1+\cdots+Y_{n_{k+1}-m_k}\right|\ge m_k)\ ,\varphi(k)\text{ の定め方から,}\\
&= \tfrac{1}{4}P(\left|Y_1+\cdots+Y_{\varphi(n_k)}\right|\ge n_k)P(\left|Y_1+\cdots+Y_{\varphi(m_k)}\right|\ge m_k)\ge\tfrac{1}{4}(1-\alpha)^2
\end{aligned}$$

$$\because \sum_{|j|<k}P(Z_{\varphi(k)}=j)\underbrace{=}_{\{Z_{\varphi(k)}=j\}_{|j|<k}\text{は非交和}}P(\bigcup_{|j|<k}Z_{\varphi(k)}=j)=P(\left|Y_1+\cdots+Y_{\varphi(k)}\right|<k)\le\alpha \text{ なので}$$
$$P(\left|Y_1+\cdots+Y_{\varphi(k)}\right|\ge k)\ge 1-\alpha$$

以上で $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(C_k)\ge\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}(1-\alpha)^2=\infty$ となって, $P(Z_n=0\ i.o.)=1$ が示せた. □

2 独立確率変数に対する大数の法則

定理 9. $X_1,X_2,\ldots$ を独立確率変数とする.
このとき,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ が確率収束する $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ が概収束する　が成立する.

まず、補題を示す.

補題 10. $N\in\mathbb{N}$ を固定する. $X_1,X_2,\ldots,X_N$ を独立確率変数とし, $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とおく.
$^\forall\alpha>0$ に対して, $\displaystyle\sup_{1\le j\le N}P(|S_N-S_j|>\alpha)=c<1$ となるとき,
$\displaystyle P(\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)\le\frac{1}{1-c}P(|S_N|>\alpha)$ となる.

Proof.
$j^*(\omega)$ を $|S_j(\omega)|>2\alpha$ となる $1\le j\le N$ で一番小さいものとする. 存在しないときは 0 とする. ここで $\displaystyle\bigcup_{1\le j\le N}\{j^*=j\}=\emptyset$ であるとき $\displaystyle P(\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)=0$ なので,$\displaystyle P(\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)=0\le\frac{1}{1-c}P(|S_N|>$

$\alpha)$ が成立する. よって, $\bigcup_{1\le j\le N}\{j^*=j\}\ne\emptyset$ のときを考える.

$$P(|S_N|>\alpha,\ \sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)=\sum_{j=1}^{N}P(|S_N|>\alpha,\ j^*=j)\ge\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\le\alpha,\ j^*=j)$$

$\because$ • $\bigcup_{1\le j\le N}\{j^*=j\}=\{\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha\}$ を示せば, 一つ目の等号が成立する.

$(\subset)$

$\omega\in$ (左辺) とすれば, $1\le{}^{\exists}j\le N$ *s.t.* $j^*(\omega)=k$ だから $|S_k(\omega)|>2\alpha$ なので $\sup_{1\le j\le N}|S_j|\ge|S_k(\omega)|>2\alpha$ となって, $\omega\in$ (右辺)

$(\supset)$

$\omega\in$ (右辺) とすれば, $\sup_{1\le j\le N}|S_j(\omega)|>2\alpha$ であるから, ${}^{\exists}\{k_1,k_2,\dots,k_K\}\subset\{1,2,\dots,N\}$ *s.t.* $|S_{k_m}|>2\alpha$ $(m=1,2,\dots,K)$ となる. $j^{**}(\omega)=\min\{k_1,k_2,\dots,k_K\}$ とすれば $j^*(\omega)=j^{**}(\omega)$ となるから,$\omega\in$(左辺) となる.

• 各 k $\in\{1,2,\dots,N\}$ に対して, $\{|S_N|>\alpha\}\cap\{j^*=j\}\supset\{|S_N-S_j|\le\alpha\}\cap\{j^*=j\}$ となるのを示せば 2 つ目の不等号が示せる.

k $\in\{1,2,\dots,N\}$ を固定しておく.$\omega\in$(右辺) をとる. $|S_N(\omega)-S_j(\omega)|\le\alpha$ かつ $j^*(\omega)=j$ であるから,

$$\begin{aligned}|S_j(\omega)|-|S_N(\omega)|\le\alpha \text{ かつ } |S_j(\omega)|>2\alpha &\Leftrightarrow |S_j(\omega)|-\alpha\le|S_N(\omega)| \text{ かつ } |S_j(\omega)|>2\alpha\\ &\Rightarrow 2\alpha-\alpha=\alpha<|S_N(\omega)|\end{aligned}$$

以上で $\{|S_N|>\alpha\}\cap\{j^*=j\}\supset\{|S_N-S_j|\le\alpha\}\cap\{j^*=j\}$

$\{j^*=j\}=(\bigcap_{k=1}^{j-1}\{|S_k|>2\alpha\}^c)\cap\{|S_j|>2\alpha\}$ なので,$\{j^*=j\}\in\sigma(X_1,\dots,X_j)$, $\{|S_N-S_j|\le\alpha\}\in\sigma(X_{j+1},\dots,X_N)$ であるから, $\{j^*=j\}$ と $\{|S_N-S_j|\le\alpha\}$ は独立. 仮定から $P(|S_N-S_j|>\alpha)\le c$ なので $1-P(|S_N-S_j|>\alpha)=P(|S_N-S_j|\le\alpha)\ge1-c$

$$\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\le\alpha,\ j^*=j)=\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\le\alpha)P(j^*=j)\ge(1-c)\sum_{j=1}^{N}P(j^*=j)$$
$$=(1-c)P(\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)$$

$$(1-c)P(\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)\le\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\le\alpha,\ j^*=j)\le P(|S_N|>\alpha,\ \sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)$$
$$\le P(|S_N|>\alpha)\quad\therefore P(\sup_{1\le j\le N}|S_j|>2\alpha)\le\frac{1}{1-c}P(|S_N|>\alpha)$$ □

補題 8 を使って, 定理 7 の証明をする.

Proof.

$(\Leftarrow)$ 概収束するならば確率収束するので成立する.

$(\Rightarrow)$ $\sum_{k=1}^{n}X_k$ は確率収束するとする. ここで $\sum_{k=1}^{n}X_k$ が概収束しないと仮定する.(背理法)

ここで実数列 $\{s_n\}$ が収束しないとすれば $\{s_n\}$ は Cauchy 列でないので

${}^{\exists}\varepsilon>0$ *s.t.* ${}^{\forall}N\in\mathbb{N},\ {}^{\forall}n,m\ge N\wedge|s_n-s_m|>\varepsilon$ であるから,

${}^{\exists}\varepsilon>0$ *s.t.* ${}^{\forall}m\in\mathbb{N},\ \sup_{n>m}|s_n-s_m|>\varepsilon$ となる. $\sum_{k=1}^{n}X_k$ はほとんど確実に Cauchy 列でないから,

${}^{\exists}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}\delta\in(0,1]$ *s.t.* $\left[{}^{\forall}m\in\mathbb{N},\ P\left(\sup_{n>m}|\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{m}X_k|>\varepsilon\right)\ge\delta\right]$ となる. この $\varepsilon,\ \delta$ を固定する.

$\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束するので $\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k \xrightarrow{P} 0$ となる.

$\because$ $\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{P}{\to} s$ とすると, $P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - s + s - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| + \left|s - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|s - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$
$\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_{k=1}^{m} X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0\ (m,\ N \to \infty)$ となるから.

よって, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, ${}^{\forall}m,\ N \geq M\ (m < N)$ に対して,$P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ で,
$P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0\ (m,\ N \to \infty)$ この $m,\ N$ を固定する.

$C_{m,N} = \sup_{m<n\leq N} P\left(\left|\sum_{k=n}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とおくと, $C_{m,N} < 1$ かつ $C_{m,N} \to 0\ (m,\ N \to \infty)$ となる.

ここで補題 8 を使うと,
$P\left(\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とかけて, まず $N \to \infty$ とすると,
単調性から, $\lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\lim_{N\to\infty}\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{m<n}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right)$
$\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ だから,
$\lim_{m\to\infty} P\left(\sup_{m<n}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = 0$ これは ${}^{\forall}m \in \mathbb{N},\ P\left(\sup_{n>m}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) \geq \delta > 0$ に矛盾する. 背理法により $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束することがわかった. □

系 11.
$E[X_k] = 0\ ({}^{\forall}k \in \mathbb{N})$, $\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] < \infty$ とする. このとき $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束する.

Proof.
$X_1, X_2, \ldots$ は独立なので,$\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束することを示せば定理 8 から $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束する.
$\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] = s^2$ (ただし $s \geq 0$) とする. ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して Chebyshev の不等式から
$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right]$ となる. $E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right] \to 0\ (n \to \infty)$ を示したい.
$E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^2\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + s^2$
$= E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + s^2$ ここで,$X_1, X_2, \ldots$ は独立だから

$\displaystyle\sum_{i<j} E\left[X_i X_j\right] = \sum_{i<j} E\left[X_i\right] E\left[X_j\right]$ が成立する．また $E[X_k]=0$ $({}^\forall k \in \mathbb{N})$ なので

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[{X_k}^2\right] - 2s\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right] + s^2 \to s^2 - 2s^2 + s^2 = 0 \ (n \to \infty)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束することがわかったので $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束する． □

定理 12. 独立確率変数に対する大数の法則

$X_1, X_2, \dots$ を独立確率変数とする．$E\left[X_k\right]=0,\ E\left[X_k^2\right] < \infty \ \left({}^\forall k \in \mathbb{N}\right)$ であるとする．正数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $b_n \uparrow \infty$ かつ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ を満たすとき，$\displaystyle\frac{X_1+\cdots+X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ が成立する．

証明の前に一つ補題を示す．

補題 13. *Kronecker's Lemma*

$x_1, x_2, \dots$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \to s < \infty$ を満たす実数列とする．このとき，$b_n \uparrow \infty$ となる整数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が取れて，$\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ となる．

Proof.

$r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k,\ r_0 = s$ とおく．このとき $x_n = r_{n-1} - r_n,\ n = 1, 2, \dots$．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k x_k =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} r_k - \sum_{k=1}^{n} b_k r_k = \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) r_k + b_1 s - b_n r_n$ となるから

$\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)|r_k| + b_1|s| + b_n|r_n|$ $(\because$ 三角不等式，b_n は単調増加なので $b_{n+1} - b_n \ge 0)$

ここで ${}^\forall\varepsilon > 0$ をとる．$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ は収束するから r_k の定め方から $N \in \mathbb{N}$ を ${}^\forall n \ge N$ に対して，$|r_k| \le \varepsilon$ となるように取れる．この N を固定する．$\tilde{r} := \max\{|r_1|, \dots, |r_{N-1}|, \varepsilon\}$ とする．$n > N$ において，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)|r_k| \le \sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1} - b_k)|r_k| + \varepsilon\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) \le \tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N)$ よって

$\displaystyle\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n}\right| \le \frac{1}{b_n}(\tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N) + b_1|s| + b_n\varepsilon) \to \varepsilon$ つまり $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n}\right| \le \varepsilon$ となるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n}\right| \le \varepsilon$ がわかった．ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$\displaystyle\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ が示された． □

この補題を使って定理 10 を証明する．

Proof.

Kronecker's Lemma により，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{b_k}$ がほとんど確実に収束すれば，$\displaystyle\frac{1}{b_k}\sum_{k=1}^{n} b_k\frac{X_k}{b_k} = \frac{1}{b_k}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ となる．

仮定から，$X_1, X_2, \dots$ は独立確率変数，$\displaystyle E\left[\frac{X_k}{b_k}\right] = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ であるから，系 9 から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{b_k}$ は概収束する．$\displaystyle\therefore \frac{X_1+\cdots+X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ □

3　再帰状態と格子状に分布する確率変数

以下では $X_1, X_2, \ldots$ を独立同一分布に従う確率変数列とする.

定義 14. 再帰状態 *(recurrent state)*
$x \in \mathbb{R}$ とする. x が再帰状態 *(recurrent state)* であるとは, x の任意の開近傍 I に対して $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ となることである.

定義 15. 格子上に分布する確率変数
X が格子 $L_d = \{nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $(d > 0)$ 上に分布するとは, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X = nd) = 1$ かつ
$^{\exists} l > d\ s.t. \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X = nl) = 1$ とならないことである.
X が格子上に分布しないとき, $L_0 = \mathbb{R}$ とかいて, X は L_0 上に分布するという.

定理 16. $X_1, X_2, \ldots$ を L_d $(d \geq 0)$ 上に分布する確率変数列とする.
このとき L_d に含まれる状態は全て再帰的または全て非再帰的である.

Proof.
$G = \{x \in L_d |\ x$ は再帰的 $\}$ とおくと, G は閉集合となる.(G が空のときは全ての状態が非再帰的なので $G \neq \emptyset$ とする.)
$\because {}^{\forall}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ をとって $x_n \to x$ とする. このとき $x \in G$ を示したい.
x の開近傍 I を任意にとる.I に対して n を十分大きく取れば $x_n \in I$ となる. この n を固定する.I は x_n の近傍でもあるから,$P(S_n \in I\ i.o.) = 1\ \ \therefore x \in G$
$y \in \mathbb{R}$ が y の任意の近傍 I に対して $k \in \mathbb{N}$ が存在して $P(S_k \in I) > 0$ となるとき y は候補状態であるとする.
x が再帰的かつ y が候補状態 $\Rightarrow$ $x - y$ は再帰的である.
$^{\forall}\varepsilon > 0$ をとって, $k \in \mathbb{N}$ を $P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ を満たすようにとる.
x は再帰的より $P(\displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} \{|S_n - x| < \varepsilon\}) = 1$ となるから,
$0 = P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\}) \geq P(|S_k - y| < \varepsilon, \displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\})$
$= P(|S_k - y| < \varepsilon) P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(|S_k - y| < \varepsilon) P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_n - (x-y)| \geq 2\varepsilon\})$
$\because {}^{\forall}\omega \in \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}$ をとると,$^{\exists} m \in \mathbb{N}\ s.t.$
$^{\forall} n \geq m,\ |S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega) - (x-y)| \geq 2\varepsilon$ となる. $2\varepsilon \leq |S_{k+n}(\omega) - x| + |S_k(\omega) - y| < |S_{k+n}(\omega) - x| + \varepsilon$
から $\varepsilon \leq |S_{k+n}(\omega) - x|$ $({}^{\forall} n \geq m)$, $N = k + m$ とおけば,
$^{\forall} n \geq N$ に対して, $|S_n(\omega) - x| \geq \varepsilon$ なので $\omega \in \displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\}$
$\therefore \displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\} \supset \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}$
また $X_1, X_2, \ldots$ は独立なので, S_k と $S_{k+n} - S_k = \displaystyle\sum_{m=k+1}^{k+n} X_m$ は独立. 同一分布性から
$P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_{k+n} - S_k - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{|S_n - (x-y)| \geq 2\varepsilon\})$ も成立する.

$P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ なので $P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{|S_n - (x-y)| \geq 2\varepsilon\}) = 0$ つまり
$P(\{|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon\}\ i.o.) = 1 \quad I_\varepsilon = (x-y-2\varepsilon, x-y+2\varepsilon)$ とおけば,$P(|S_n| \in I_\varepsilon\ i.o.) = 1$
$\varepsilon > 0$ は任意だったから $x - y$ は再帰的である.
$x \in G$ は候補状態である $\because {}^\forall x \in G$ をとる. x の開近傍 I を任意にとる. $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ であるから,${}^\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $P(S_k \in I) = 0$ であるとすれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I) < \infty$ より Borel-Ccantelli Lamma から $P(S_k \in I\ i.o.) = 0$ これは $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ に矛盾する. よって ${}^\exists m \in \mathbb{N}\ s.t.\ P(S_k \in I) > 0$ となる.
よって $x - x = 0 \in G$ である. このことから G は群である.G が $\mathbb{R}$ 上で閉なので G は $\mathbb{R}$ 上の閉部分群である. 全ての候補状態 y に対して $0 - y = y \in G$ となる.
• $d > 0$ のとき $P(X_1 = nd) > 0$ かつ $P(X_1 = (n+1)d) > 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在しないとき
$0 \in G$ なので 0 は候補状態なので $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X_1 = (2d)n) = 1$ となって, d の最大性に反する. よってある $n \in \mathbb{Z}$ が取れて $nd, (n+1)d \in G$ となる. G は群なので $(n+1)d - nd = d \in G$ このことから $L_d \subset G$ である.
• $d = 0$ のとき このとき G に対して ${}^\exists l > 0\ s.t.\ G = \{nl | n \in \mathbb{Z}\}$ となると仮定する (背理法). 候補状態は G の元なので $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X_1 = nl) = 1$ となり, これは $d = 0$ に矛盾する. よって $G = \mathbb{R} = L_0$
以上で $d \geq 0$ に対して $L_d = G$ となり, L_d の全ての状態は再帰的となる. □

定理 17. $X_1, X_2, \ldots$ を L_d 上に分布する確率変数列とする *(ただし $d \geq 0$)*.
(i) もし, 有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ が存在して $J \cap L_d \neq \emptyset$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in J) < \infty$ を満たせば, 再帰状態は存在しない.
(ii) もし, 有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ で $0 < {}^\forall\varepsilon < \frac{||J||}{2}$ に対して, ${}^\exists x \in \mathbb{R}\ s.t.\ I = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset J$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるものが存在すれば, L_d の全ての状態は再帰状態である.

Proof.
(i) $J \cap L_d \neq \emptyset$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in J) < \infty$ を満たす有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ がとれたとする. Borel-Canteli's Lemma から $P(S_n \in J\ i.o.) = 0$ となって, L_d は少なくとも再帰的でない状態が含まれる.
$\because x \in Ld \cap J$ をとれば, x の開近傍 $I \subset J$ がとれて, $P(S_n \in I\ i.o.) \leq P(S_n \in J\ i.o.) = 0$ となって x は再帰的でない L_d の元である.
定理 12 から L_d の元は全て再帰状態にはならない. つまり再帰状態は存在しない.

(ii) 長さ l の有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ で $0 < {}^\forall\varepsilon < \frac{l}{2}$ に対して, ${}^\exists x \in \mathbb{R}\ s.t.\ I = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset J$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるものがとれたとする. $0 \in L_d$ なので,0 が再帰的であることがわかれば定理 12 から L_d の全ての状態が再帰的である. $A_k = \begin{cases} \{S_k \in I,\ S_{n+k} \notin I\ n = 1, 2, \ldots\} & (k \geq 1) \\ \{S_n \notin I\ n = 1, 2, \ldots\} & (k = 0) \end{cases}$ と定めると, $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{S_n \notin I\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ となる.
$\because (\subset) {}^\forall\omega \in$ (左辺) とする. このとき ${}^\exists m \in \mathbb{N}$ がとれて, $S_n(\omega) \notin I\ ({}^\forall n > m)$ となる. $1 \leq i \leq m-1$ の中で $S_i(\omega) \in I$ となるものが存在するときその最大値を k とすれば, $S_k(\omega) \in I,\ S_n(\omega) \notin I\ ({}^\forall n \geq k)$ が成立する.

よって, $\omega \in A_k$ となる. $S_i \notin I$ $(1 \leq {}^\forall i \leq m-1)$ のときは, $\omega \in \{S_n \notin I\ n=1,2,\dots\} = A_0$ 以上で $\omega \in$ (右辺)

$(\supset)$ ${}^\forall\omega \in$ (右辺) とする. ${}^\exists k \in \mathbb{N}$ $s.t.$ $\omega \in A_k$ となる.

$k \geq 1$ のとき $\omega \in A_k \subset \{S_{n+k} \notin n=1,2,\dots\} = \displaystyle\bigcap_{n=k+1}^{\infty} \{S_n \notin I\}$, $k=0$ のとき $\omega \in A_0 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \{S_n \notin I\}$

定め方から $A_0, A_1, \dots$ は非交和なので, $P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{S_n \notin I\}) = P(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$

$k \geq 1$ のとき, $P(A_k) \geq P(S_k \in I,\ |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)$

$\because \omega \in \{S_k \in I\} \cap \{|S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots\}$ を任意にとる.

$S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega) \leq -2\varepsilon$ または $2\varepsilon \leq S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega),\ n=1,2,\dots)$

I の定め方から, $x - \varepsilon < S_k < x + \varepsilon$ だから

$\Rightarrow S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) \leq (x+\varepsilon) - 2\varepsilon$ または $2\varepsilon + (x-\varepsilon) \leq S_{n+k}(\omega),\ n=1,2,\dots)$

$\Leftrightarrow S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) \leq x - \varepsilon$ または $x + \varepsilon \leq S_{n+k}(\omega),\ n=1,2,\dots)$

$\Leftrightarrow S_k(\omega) \in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega) \notin I,\ n=1,2,\dots) \Leftrightarrow \omega \in A_k$

$P(S_k \in I,\ |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots) = P(S_k \in I)P(|S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)$ $\because$ 独立性

$= P(S_k \in I)P(|S_n| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)$ $\because$ 同一分布性

$P(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \{S_n \notin I\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) \geq P(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

$\geq P(A_0) + P(|S_n| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots) \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I)$ ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \in I) = \infty$ であるから

$P(|S_n| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots) = 0$. 以上で $0 < {}^\forall\varepsilon < \dfrac{l}{2}$, $P(|S_n| \geq 2\varepsilon,\ n=1,2,\dots) = 0$ となる $(*)$

$0 < {}^\forall\varepsilon < \dfrac{l}{2}$ を新しく固定する. $I = (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ として, $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ を先と同様にとる. $I_\delta = (-\delta, \delta)$ (ただし, $\delta < \varepsilon$) とする. ${}^\forall k \geq 1$ として $A_k = \displaystyle\lim_{\delta\uparrow\varepsilon} \{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n=1,2,\dots\}$ となるから

$P(A_k) = P(\displaystyle\lim_{\delta\uparrow\varepsilon} \{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n=1,2,\dots\})$ 連続性から

$\quad = \displaystyle\lim_{\delta\uparrow\varepsilon} P(\{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n=1,2,\dots\})$

$P(S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n=1,2,\dots) \leq P(S_k \in I_\delta,\ |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\ n=1,2,\dots)$ となる.

$\because$ $\omega \in \{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n=1,2,\dots\}$ を任意のとる.

$-\delta < S_k(\omega) < \delta,\ S_{n+k}(\omega) \leq -\varepsilon$または $\varepsilon \leq S_{n+k}(\omega)$ $(n=1,2,\dots)$ となる.

$S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega) \leq -\varepsilon - S_k(\omega) < -\varepsilon + \delta$ または $\varepsilon - \delta < \varepsilon - S_k(\omega) \leq S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)$

よって $|S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)| \geq \varepsilon - \delta$ $\therefore$ $\omega \in \{S_k \in I_\delta,\ |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\ n=1,2,\dots\}$

独立性と同一分布性から

$P(S_k \in I_\delta,\ |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\ n=1,2,\dots) = P(S_k \in I_\delta)P(|S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\ n=1,2,\dots)$

$\quad = P(S_k \in I_\delta)P(|S_n| \geq \varepsilon - \delta\ n=1,2,\dots) = 0$

$\because 0 < \dfrac{\varepsilon - \delta}{2} < \dfrac{l}{2}$ なので $(*)$ より $P(|S_n| \geq \varepsilon - \delta\ n=1,2,\dots) = 0$

以上で $P(A_k) = 0$ $({}^\forall k \geq 1)$ となる.

$0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$ だから $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{l}{2}$ なので $P(A_0) = P(S_n \notin I\ n=1,2,\dots) = P(|S_n| \geq \varepsilon\ n=1,2,\dots) = 0$ これまでのことから $0 < {}^\forall\varepsilon < \frac{l}{2}$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して, $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$

よって,0 は再帰的となる. $\therefore L_d$ の全ての状態は再帰的である. □

系 18.

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して,
$L_d \cap I \neq \emptyset$ を満たす全ての有界区間 I に対して, $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ か
$L_d \cap I \neq \emptyset$ を満たす全ての有界区間 I に対して, $P(S_n \in I\ i.o.) = 0$ のいずれかが成立する.

Proof.
$L_d \cap I \neq \emptyset$ となる全ての有界区間 I に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるとき, 定理 13 から L_d の全ての状態は再帰的である. つまり $L_d \cap I \neq \emptyset$ となる任意の有界区間 I とすれば, ${}^{\forall}x \in L_d \cap I$ として $P(S_n \in I\ i.o.) \geq P(S_n = x\ i.o.) = 1$ $(\because\ x$ は再帰的) となる.
$L_d \cap I \neq \emptyset$ となる有界区間 I が存在して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) < \infty$ となるとき, 定理 13 から再帰状態は存在しない. よって任意の有界区間 I $(L_d \cap I \neq \emptyset)$ に対して I を含む開区間 J とすれば $P(S_n \in I\ i.o.) \leq P(S_n \in J\ i.o.) = 0$ ($\because$ J は L_d のある元の開近傍) $\square$