課題研究 レポート

M0T0

以下では $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ を確率空間とする.

1　末尾事象と infinte often

定義 1. 末尾事象 *(tail event)*
$X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とする.
$E \in \sigma(X_1, X_2, \ldots)$ が末尾事象 *(tail event)* であるとは
任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $E \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ が成立することである.
末尾加法族 *(tail σ-field)* δ を $\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ と定める.
定義から末尾加法族の元 $E \in \delta$ は末尾事象となる.

命題 2. $X_1, X_2 \ldots$ を確率変数とする. このとき $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ とすると,
任意の $B \in \mathfrak{B}_\infty$ に対して, $\{\boldsymbol{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ となる.

Proof.

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \subset \mathbb{R}^\infty |\, B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_1\}$$

と定める.
$S \in E$ を任意に固定する. このとき $n \in \mathbb{N}$ と $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_1$ がとれて, $S = B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \ldots$ となる. 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ について $\{X_k \in B_k\} \in \mathcal{F}$ なので $\{\mathbf{X} \in S\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\} \in \mathcal{F}$ が成立する.
ここで

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathfrak{B}_\infty |\ \{\mathbf{X} \in C\} \in \mathcal{F}\}$$

とすると、$\mathcal{C}$ は σ 加法族になる.
$\because$
$(i)\, \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^\infty\} = \Omega \in \mathcal{F},\, \{\mathbf{X} \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ つまり $\Omega, \emptyset \in \mathcal{C}$
$(ii)\, C \in \mathcal{C}$ とする. このとき $\{\mathbf{X} \in C^c\} = \{\mathbf{X} \in C\}^c \in \mathcal{F}$ となるから $C^c \in \mathcal{C}$
(iii) $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を任意にとる. $\left\{\mathbf{X} \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\mathbf{X} \in C_k\} \in \mathcal{F}$ となって, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{F}$ がわかる.
以上で $\mathcal{C}$ は E を含む σ 加法族であることがわかった. $\sigma(E) = \mathfrak{B}_\infty$ なので, $\mathcal{C} = \mathfrak{B}_\infty$ である.
つまり, 任意の $B \in \mathfrak{B}_\infty$ に対して, $B \in \mathcal{C}$ だから $\{\mathbf{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ が成立する. □

定理 3. 近似定理
$X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とする.

任意の $A_1 \in \sigma(\boldsymbol{X})$, $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}, A_2 \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が存在して $P(A_1 \triangle A_2) \leq 0$ となる. *(ただし $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$)*

Proof.
任意の $A_1 \in \sigma(\mathbf{X})$, $\varepsilon > 0$ を固定する.

$$\mathscr{F}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} |\ \text{任意の}\, \varepsilon > 0 \,\text{に対して}, P(A \triangle B) \leq \varepsilon \,\text{となる}\ B \in \mathscr{F}_0 \,\text{が存在する}\ \}$$

と定める.
任意の $A \in \mathscr{F}_0$ をとると, ある $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathfrak{B}_n$ が取れて, $A = \{(X_1, \ldots, X_n) \in B\}$ とかける.
このとき $X_1, X_2 \ldots$ は確率変数なので $A \in \mathcal{F}$ となる.
また定め方から $A \triangle A = \emptyset$ だから $P(A \triangle A) = 0$ である. よって, $A \in \mathcal{C}$ となる. つまり $\mathscr{F}_0 \subset \mathcal{C}$ が成立する.
ここで $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることを示せば, $\sigma(\mathscr{F}_0) \subset \mathcal{C}$ で, $\sigma(\mathscr{F}_0) = \sigma(\mathbf{X})$ であることから,
$A_1 \in \sigma(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$ なので, $P(A_1 \triangle A_2) \leq \varepsilon$ となるような $A_2 \in \mathscr{F}_0$ が存在することを示せる.

- $\mathcal{C}$ が σ 加法族であること示す.

  (i) $\Omega \in \mathcal{C}$ $(\because\ \Omega \in\ \mathscr{F}_0)$

  (ii) $A \in \mathcal{C}$ とすると, $A^c \in \mathcal{C}$

  $\because \varepsilon > 0$ を任意に固定する. このとき $B \in \mathcal{F}_0$ が取れて, $P(A \triangle B) \leq \varepsilon$ となる. $\mathcal{F}_0$ の定め方から,
  $B^c \in \mathcal{F}_0$ であって, $P(A^c \triangle B^c) = P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P((B - A) \cup (A - B)) = P(A \triangle B) \leq \varepsilon$
  $\therefore A^c \in \mathcal{C}$

  (iii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, \varepsilon > 0$ を任意にとる. $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0$ を $P(A_n \triangle B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ となるようにとる.
  また, 測度の上からの連続性からある $N \in \mathbb{N}$ が取れて, $P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる.
  ここで, $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示せれば, 単調性と劣加法性から,
  $$P(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq P((\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{N} P(B_n \triangle A_n) + P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$
  $\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる. $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{F}_0$ であることから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ となる.

- $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示す.

$$\begin{aligned}
\because\ \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \vee (\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^{N} B_n) \\
&\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c)) \\
&\Rightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{N} B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \cap A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N}((B_n \cap A_n^c) \cup (A_n \cap B_n^c)) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$$
$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N}(B_n \triangle A_n) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$$
$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{N}(B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \qquad \therefore \bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^{N} B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$$

$(i) \sim (iii)$ より $\mathcal{C}$ は σ 加法族である.

□

定理 4. *Kolmogorov zero-one law*

$X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数とする. この時, $E \in \delta$ であるとすれば $P(E)$ は 0, 1 のいずれかの値をとる.

Proof.
$E \in \delta$ を任意とる. $E \in \sigma(\mathbf{X})$ であるから, 定理 3 により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が取れて $P(E \triangle E_n) \to 0$ となる. このことから $P(E_n) \to P(E)$, $P(E_n \cup E) \to P(E)$ がわかる.
$\because$
• $P(E_n) \to P(E)$

$$P(E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E)$$

から

$$P(E_n) - P(E) \leq P(E_n - E) \leq P(E_n \triangle E) \to 0 \ (n \to \infty)$$

同様にして

$$P(E) - P(E_n) \leq P(E - E_n) \leq P(E_n \triangle E) \to 0$$

がわかる.
• $P(E_n \cup E) \to P(E)$

$$P(E \cup E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E) \leq P(E_n \triangle E) + P(E)$$

から

$$P(E \cup E_n) - P(E) \leq P(E_n \triangle E) \to 0 \ (n \to \infty)$$

また, $E \subset (E \cup E_n) \cup (E \triangle E_n)$ だから

$$P(E) - P(E \cup E_n) \leq P(E \triangle E_n) \to 0 \ (n \to \infty)$$

この時, $E \in \delta$ だから, $E \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ である. つまり, E と E_n は独立である.
$P(E \cap E_n) = P(E)P(E_n)$ だから, 各辺で $n \to \infty$ とすれば, $P(E) = P(E)^2$. つまり $P(E) = 0, 1$ となることがわかった.

□

定義 5. *infinite often*
$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ とする. $\{A_n\ i.o.\}$ を $\{A_n\ i.o.\} = \lim_{m \to \infty} \bigcup_{n > m} A_n$ と定める.

$\{A_n\ i.o.\}$ は $\{\omega \mid \omega \in A_n$となる n が無限個存在する.$\}$ ともかける.
$\because \omega \in \lim_{m\to\infty} \bigcup_{n>m} A_n$ を任意にとる. 1 に対して $\omega \in A_{n_1}$ となる $n_1 \in \mathbb{N}$ をとる. 続いて n_1 に対して $\omega \in A_{n_2}$ となる $n_2 \in \mathbb{N}$ をとる. これを続ければ $\omega \in A_n$ となる n の列として $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が取れるので, $\omega \in \{\omega' \mid \omega' \in A_n$となる n が無限個存在する.$\}$ である.
$\omega \in \{\omega \mid \omega \in A_n$となる n が無限個存在する.$\}$ を任意にとる. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して
$\omega \in A_n$ となる $n > m$ が無限個存在する. よって $\omega \in \lim_{m\to\infty} \bigcup_{n>m} A_n$

補題 6. *Borel-Cantelli Lamma*

(**I**), $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば, $P(A_n\ i.o.) = 0$ が成立する.

(**II**), $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立かつ $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば, $P(A_n\ i.o.) = 1$ が成立する.

Proof.
(**I**)

$$P(A_n\ i.o.) = P(\lim_{m\to\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m\to\infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n))$$

($\because$ 二つ目の等号は測度の連続性, 不等号には劣加法性を使った)
$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ であるから $\lim_{m\to\infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)) = 0 \ \therefore P(A_n\ i.o.) = 0$
(**II**)
任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$ を示せば

$$P((A_n\ i.o.)^c) = P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$$

つまり $P(A_n\ i.o.) = 1$ がわかる.
任意の $m \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立なので

$$P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = \prod_{n=m}^{\infty} P({A_n}^c) = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))$$

である. ここで $\log(1-x) \leq -x\ (0 \leq x \leq 1)$ を使うと

$$\log(\prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))) = \sum_{n=m}^{\infty} \log(1 - P(A_n)) \leq -\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = -\infty$$

よって $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} {A_n}^c) = 0$ が示せた. □

いくつか応用例を挙げる.
(例 1) コイントスを考える. $\mathbf{s}$ を長さ k の H, T (表, 裏) が要素の列とする. $A_n = \{\omega\ ; (\omega_n, \ldots, \omega_{n+k-1}) = \mathbf{s}\}$ と定める.

命題 7. $P(A_n\ i.o.) = 1$

Proof.

$B_1 = \{\omega\ ; (\omega_1, \ldots, \omega_k) = \mathbf{s}\}, B_2 = \{\omega\ ; (\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{2k}) = \mathbf{s}\},\ \ldots$ とおく.

このとき, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立となる.

$\because$ 任意に $i, j \in \mathbb{N}, (i \neq j)$ をとる. B_i, B_j が独立であることを示したい.

考えている確率はコイントスなので, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ とかくと,

$$P(B_i \cap B_j) = P((\omega_{k(i-1)+1}, \ldots, \omega_{ki}) = \mathbf{s}, (\omega_{k(j-1)+1}, \ldots, \omega_{kj}) = \mathbf{s})$$

$$= \prod_{m=1}^{k} P(\omega_{k(i-1)+m} = s_m) \prod_{l=1}^{k} P(\omega_{k(j-1)+l} = s_l) = P((\omega_{k(i-1)+1}, \ldots, \omega_{ki}) = \mathbf{s}) P((\omega_{k(j-1)+1}, \ldots, \omega_{kj}) = \mathbf{s})$$

$$= P(B_i)P(B_l)$$

また,$\{B_n\ i.o.\} \subset \{A_n\ i.o.\}$ である. ($\because\ B_l = A_{(l-1)k+1}$) また, $P(B_n) = P(B_1) = \dfrac{1}{2^k} > 0$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$. 以上のことから補題 6(**II**) を使うと, $P(B_n\ i.o.) = 1 \leq P(A_n\ i.o.)$ $\therefore P(A_n\ i.o.) = 1$ □

(例 2) 再び, コイントスを考える. $Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{が}\ H\ \text{のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{が}\ T\ \text{のとき}) \end{cases}$ $, Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ と定める.

命題 8. $P(Head) \neq \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n = 0\ i.o.) = 0$ となる.

Proof.

$P(Head) = p$ とおく.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) < \infty$ であることが示せれば, 補題 6(**I**) から $P(Z_n = 0\ i.o.) = 0$ がわかる.

Stirling の近似公式から, 十分大きい n に対して, ${}_{2n}C_n = 2^{2n}\dfrac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}$(ただし $\delta_n \downarrow 0$) であり, また, $p \neq \dfrac{1}{2}$ なので $2^2 p(1-p) < 1$ より, ある $0 < \lambda < 1$ が存在して $2^2 p(1-p) < \dfrac{1}{\lambda} 2^2 p(1-p) < 1$ となる.

$\delta_n \downarrow 0$ だから十分大きい n に対して は $\delta_n < \dfrac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$ が成立する.

ここで $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ で

$$P(Z_{2n}) =_{2n} C_n\ p^n (1-p)^n = 2^{2n}\frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}\ p^n (1-p)^n$$

かつ $\delta_n < \dfrac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$ を満たすようにとる.

$a_n = 2^{2n}\dfrac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}\ p^n(1-p)^n$ とおく. $n \geq N$ において

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^2 \frac{1+\delta_{n+1}}{1+\delta_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} p(1-p) \leq 2^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} p(1-p) = \lambda\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \lambda$$

だから $a_{n+1} \leq (1-\lambda)a_n \leq \cdots \leq (1-\lambda)^{n+1-N} a_N$ が成立する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) = \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) \leq \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{n-N} a_N$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n}=0) + a_N \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^{N} P(Z_{2n}=0) + a_N \frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty \ (\because\ 0<\lambda<1)$$

以上で $\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n=0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n}=0) < \infty$ がわかった. $\square$

定理 9. $P(Head) = \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n = 0\ i.o.) = 1$ となる.

Proof.

$n_1 < n_2 < \dots$ の自然数列とする. また, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して,$n_k < m_k < n_{k+1}$ となるように $m_1 < m_2 < \dots$ をとる.

$$C_k = \{Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k\} \bigcap \{Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k\}$$

と定める.

$Y_i = -1, 1$ だから $-n \leq Z_n \leq n$ となることを使うと, 任意の $\omega \in C_k$ に対して,

$$Z_{m_k}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{n_k})(\omega) + (Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k})(\omega) \leq n_k - n_k = 0$$

また

$$Z_{n_{k+1}}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) + (Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}})(\omega) \geq -m_k + m_k = 0$$

つまり任意の $\omega \in C_k$ に対して $Z_{m_k}(\omega) \leq 0$, $Z_{n_{k+1}}(\omega) \geq 0$ が成立する. $Z_{n+1} = Z_n \pm 1$ となることから

$$C_k \subset \{\omega \in \Omega; Z_n(\omega) = 0 \text{ となる } n \in \mathbb{N} \text{ が少なくとも一つ存在する.(ただし } n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1})\}$$

$$= \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\}$$

よって

$$\{C_n\ i.o.\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_m+1}^{\infty} \{Z_n = 0\} = \{Z_n = 0\ i.o.\}$$

Borel-Cantelli Lamma から $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となれば $1 = P(C_n\ i.o.) \leq P(Z_n = 0\ i.o.)$ となる.

つまり $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となるような自然数列 $\{n_k\}, \{m_k\}$ が取れることを示せばよい.

- 任意の $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $P(|Z_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$ となる $\varphi(k) \geq 1$ がとれる.

$(proof)$ 任意の $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ を固定する, $P(Z_n = j) \to 0\ (n \to \infty)$ であるから,
$\sum_{|j|<k} P(Z_n = j) \to 0\ (n \to \infty)$ となる. よって,$\varphi(k)$ を $\sum_{|j|<k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \leq \alpha$ となるように取れる.
[証明終り]

任意に $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を上で示したものと同様にとる.

n_k, m_k を $n_1 = 1, m_k = n_k + \varphi(n_k)$, $n_{k+1} = m_k + \varphi(m_k)$ とする.

$P(C_k) = P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k)P(Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ ($\because$ $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は独立)
$P(Head) = \frac{1}{2}$ であるから, 対象性を使うと

$$P(|Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k}| \geq n_k) = P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \geq n_k) + P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k)$$
$$= P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k) + P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k) = 2P(Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k} \leq -n_k)$$

同様にして $P(\left|Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}}\right| \geq m_k) = 2P(Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ となるから

$$P(C_k) = \frac{1}{4}P(|Y_{n_k+1} + \cdots + Y_{m_k}| \geq n_k)P(\left|Y_{m_k+1} + \cdots + Y_{n_{k+1}}\right| \geq m_k)$$

$\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の同一分布性から

$$= \frac{1}{4}P(|Y_1 + \cdots + Y_{m_k-n_k}| \geq n_k)P(\left|Y_1 + \cdots + Y_{n_{k+1}-m_k}\right| \geq m_k)$$

$\varphi(k)$ の定め方から

$$= \frac{1}{4}P(\left|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(n_k)}\right| \geq n_k)P(\left|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(m_k)}\right| \geq m_k) \geq \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$$

$\because$ $\{Z_{\varphi(k)} = j\}_{\{|j|<k\}}$ は非交和だから

$$\sum_{|j|<k} P(Z_{\varphi(k)} = j) = P(\bigcup_{|j|<k} Z_{\varphi(k)} = j) = P(\left|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(k)}\right| < k) \leq \alpha$$

よって $P(\left|Y_1 + \cdots + Y_{\varphi(k)}\right| \geq k) \geq 1 - \alpha$

以上で $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 = \infty$ となって, $P(Z_n = 0\ i.o.) = 1$ が示せた. □

2 独立確率変数に対する大数の法則

定理 10. $X_1, X_2, \ldots$ を独立確率変数とする.
このとき,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束する. $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が概収束する.

まず補題を示す.

補題 11. $N \in \mathbb{N}$ を固定する. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ を独立確率変数とし, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく.
任意の $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\sup_{1\leq j\leq N} P(|S_N - S_j| > \alpha) = c < 1$ となるとき,
$\displaystyle P(\sup_{1\leq j\leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \frac{1}{1-c}P(|S_N| > \alpha)$ が成立する.

Proof.
$j^*(\omega)$ を $|S_j(\omega)| > 2\alpha$ となる $1 \leq j \leq N$ で一番小さいものとする. 存在しないときは 0 とする.
ここで $\displaystyle\bigcup_{1\leq j\leq N} \{j^* = j\} = \emptyset$ であるとき $\displaystyle P\left(\sup_{1\leq j\leq N} |S_j| > 2\alpha\right) = 0$ なので
$\displaystyle P\left(\sup_{1\leq j\leq N} |S_j| > 2\alpha\right) = 0 \leq \frac{1}{1-c}P(|S_N| > \alpha)$ が成立する.

よって $\displaystyle\bigcup_{1\leq j\leq N}\{j^*=j\}\neq\emptyset$ のときを考える.

$P(|S_N|>\alpha,\ \displaystyle\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)=\sum_{j=1}^{N}P(|S_N|>\alpha,\ j^*=j)\geq\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\leq\alpha,\ j^*=j)$ が成立する.

$\because$ • $\displaystyle\bigcup_{1\leq j\leq N}\{j^*=j\}=\{\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha\}$ を示せば, 一つ目の等号が成立する.

($\subset$)

$\omega\in$ (左辺) を任意にとる. このとき $j^*(\omega)=k$ となる $j\in\{1,\ldots,N\}$ が存在するから, $|S_k(\omega)|>2\alpha$ より $\displaystyle\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|\geq|S_k(\omega)|>2\alpha$ となって, $\omega\in$ (右辺)

($\supset$)

$\omega\in$ (右辺) を任意にとる. このとき $\displaystyle\sup_{1\leq j\leq N}|S_j(\omega)|>2\alpha$ であるから,
$K\in\{1,2,\ldots,N\}$, $\{k_1,k_2,\ldots,k_K\}\subset\{1,2,\ldots,N\}$ が存在して $|S_{k_m}|>2\alpha$ $(m=1,2,\ldots,K)$ となる. $j^{**}(\omega)=\min\{k_1,k_2,\ldots,k_K\}$ とすれば $j^*(\omega)=j^{**}(\omega)$ となるから $\omega\in$(左辺) となる.

• 各 $k\in\{1,2,\ldots,N\}$ に対して, $\{|S_N|>\alpha\}\cap\{j^*=j\}\supset\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}\cap\{j^*=j\}$ となるのを示せば２つ目の不等号が示せる.

$k\in\{1,2,\ldots,N\}$ を任意に固定しておく. $\omega\in$(右辺) をとる. $|S_N(\omega)-S_j(\omega)|\leq\alpha$ かつ $j^*(\omega)=j$ であるから

$$
\begin{aligned}
|S_j(\omega)|-|S_N(\omega)|\leq\alpha \text{ かつ } |S_j(\omega)|>2\alpha &\Leftrightarrow |S_j(\omega)|-\alpha\leq|S_N(\omega)| \text{ かつ } |S_j(\omega)|>2\alpha\\
&\Rightarrow 2\alpha-\alpha=\alpha<|S_N(\omega)|
\end{aligned}
$$

以上で $\{|S_N|>\alpha\}\cap\{j^*=j\}\supset\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}\cap\{j^*=j\}$

$\{j^*=j\}=(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{j-1}\{|S_k|>2\alpha\}^c)\cap\{|S_j|>2\alpha\}$ なので,$\{j^*=j\}\in\sigma(X_1,\ldots,X_j)$,
$\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}\in\sigma(X_{j+1},\ldots,X_N)$ であるから, $\{j^*=j\}$ と $\{|S_N-S_j|\leq\alpha\}$ は独立である.
仮定から $P(|S_N-S_j|>\alpha)\leq c$ なので $1-P(|S_N-S_j|>\alpha)=P(|S_N-S_j|\leq\alpha)\geq 1-c$ となる. よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\leq\alpha,\ j^*=j)&=\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\leq\alpha)P(j^*=j)\\
&\geq(1-c)\sum_{j=1}^{N}P(j^*=j)=(1-c)P(\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)
\end{aligned}
$$

となる. まとめると

$$
(1-c)P(\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)\leq\sum_{j=1}^{N}P(|S_N-S_j|\leq\alpha,\ j^*=j)\leq P(|S_N|>\alpha,\ \sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)\leq P(|S_N|>\alpha)
$$

が成立する.

$\therefore P(\sup_{1\leq j\leq N}|S_j|>2\alpha)\leq\frac{1}{1-c}P(|S_N|>\alpha)$ □

補題 11 を使って, 定理 10 の証明をする.

Proof.
($\Leftarrow$) 概収束するならば確率収束するので成立する.

$(\Rightarrow)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束するとする. ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が概収束しないと仮定する.(背理法)
ここで実数列 $\{s_n\}$ が収束しないとすれば $\{s_n\}$ は Cauchy 列でないので
ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N$ に対して,$|s_n - s_m| > \varepsilon$ が成立する.
また, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $\sup_{n>m} |s_n - s_m| > \varepsilon$ となる.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ はほとんど確実に Cauchy 列でないから,
ある $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, 1]$ が存在して, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して,
$\displaystyle P\left(\sup_{n>m} |\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k| > \varepsilon\right) \geq \delta$ が成立する.
この ε, δ を固定する.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率収束するので $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k \xrightarrow{P} 0$ となる.
$\because \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} S$ とすると,

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - S + S - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - s\right| + \left|S - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - S\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|S - \sum_{k=1}^{m} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

$$\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} X_k - S\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_{k=1}^{m} X_k - S\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0 \ (m,\ N \to \infty)$$

となる.
よって, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m,\ N \geq M$ $(m < N)$ に対して
$\displaystyle P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ かつ $\displaystyle P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0 \ (m,\ N \to \infty)$ この $m,\ N$ を固定する.
$\displaystyle C_{m,N} = \sup_{m<n\leq N} P\left(\left|\sum_{k=n}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とおくと, $C_{m,N} < 1$ かつ $C_{m,N} \to 0 \ (m,\ N \to \infty)$ となる.
ここで補題 11 を使うと,
$\displaystyle P\left(\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とかけて, まず $N \to \infty$ とすると,
単調性から

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\lim_{N\to\infty}\sup_{m<n\leq N}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{m<n}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

であり

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^{N} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

だから $\lim_{m\to\infty} P\left(\sup_{m<n}\left|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) = 0$

これは任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $P\left(\sup_{n>m} |\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{m} X_k| > \varepsilon\right) \geq \delta > 0$ となることに矛盾する.

背理法により $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束することがわかった. □

系 12.

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $E[X_k] = 0$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] < \infty$ であるとする.

このとき $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束する.

Proof.

$X_1, X_2, \ldots$ は独立なので,$\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束することを示せば定理 10 から $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束する.

$\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] = s^2$ (ただし $s \geq 0$) とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して Chebyshev の不等式から

$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right]$ となる. $E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right] \to 0 \ (n \to \infty)$ を示したい.

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - s\right|^2\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^2\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + s^2 = E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right] - 2sE\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + s^2$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{ここで, } X_1, X_2, \ldots \text{ は独立だから} \\ \sum_{i<j} E\left[X_i X_j\right] = \sum_{i<j} E\left[X_i\right] E\left[X_j\right] \text{ が成立する. また } E[X_k] = 0 \text{ なので}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[{X_k}^2\right] - 2s\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right] + s^2 \to s^2 - 2s^2 + s^2 = 0 \ (n \to \infty)$$

$\sum_{k=1}^{n} X_k$ が確率収束することがわかったので $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束する. □

定理 13. 独立確率変数に対する大数の法則

$X_1, X_2, \ldots$ を独立確率変数とする. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E\left[X_k\right] = 0,\ E\left[X_k^2\right] < \infty$ であるとする.

正数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $b_n \uparrow \infty$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ を満たすとき,$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ が成立する.

証明の前に一つ補題を示す.

補題 14. *Kronecker's Lemma*

$x_1, x_2, \ldots$ を $\sum_{k=1}^{n} x_k \to s$ *(ただし* s *は有限値)* を満たす実数列とする.

このとき, $b_n \uparrow \infty$ となる整数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が取れて, $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ となる.

Proof.

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k,\ r_0 = s$ とおく. このとき $x_n = r_{n-1} - r_n,\ n = 1, 2, \ldots$. また,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = \sum_{k=1}^{n} b_k (r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} r_k - \sum_{k=1}^{n} b_k r_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) r_k + b_1 s - b_n r_n$$

となるから

$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + b_1 |s| + b_n |r_n|$ ($\because$ 三角不等式, b_n は単調増加なので $b_{n+1} - b_n \geq 0$)

ここで $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ は収束するから r_k の定め方から $N \in \mathbb{N}$ を任意の $n \geq N$ に対して, $|r_k| \leq \varepsilon$ となるように取れる. この N を固定する. $\tilde{r} := \max\{|r_1|, \ldots, |r_{N-1}|, \varepsilon\}$ とする. $n > N$ において

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| \leq \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \leq \tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon (b_n - b_N)$$

よって

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n} (\tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon (b_n - b_N) + b_1 |s| + b_n \varepsilon) \to \varepsilon$$

つまり $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon$ となるから $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon$ がわかった.

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば, $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0$ が示された. □

この補題 14 を使って定理 13 を証明する.

Proof.

Kronecker's Lemma により, $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{b_k}$ がほとんど確実に収束すれば, $\frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{X_k}{b_k} = \frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ となる.

仮定から, $X_1, X_2, \ldots$ は独立確率変数, $E\left[\frac{X_k}{b_k}\right] = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$ であるから, 補題 14 から $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{b_k}$ は概収束する. $\therefore \frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ □

3 再帰状態と格子状に分布する確率変数

以下では $X_1, X_2, \ldots$ を独立同一分布に従う確率変数列とする. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ と定める.

定義 15. 再帰状態 *(recurrent state)*

$x \in \mathbb{R}$ とする. x が再帰状態 *(recurrent state)* であるとは, x の任意の開近傍 I に対して $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ となることである.

定義 16. 格子上に分布する確率変数

X が格子 $L_d = \{nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $(d > 0)$ 上に分布するとは, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X = nd) = 1$ かつ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X = nl) = 1$ と

なる $l > d$ が存在しないことである.
X が格子上に分布しないとき, $L_0 = \mathbb{R}$ とかいて, X は L_0 上に分布するという.

定理 17.
$X_1, X_2, \ldots$ を L_d $(d \geq 0)$ 上に分布する確率変数列とする. このとき L_d に含まれる状態は全て再帰的または全て非再帰的である.

Proof.
$G = \{x \in L_d |\ x$ は再帰的 $\}$ とおくと, G は閉集合となる.(G が空のときは全ての状態が非再帰的なので $G \neq \emptyset$ とする.)
$\because$ 任意に $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ をとって $x_n \to x$ とする. このとき $x \in G$ を示したい.
x の開近傍 I を任意にとる.I に対して n を十分大きく取れば $x_n \in I$ となる. この n を固定する.I は x_n の近傍でもあるから,$P(S_n \in I\ i.o.) = 1\ \therefore x \in G$
$y \in \mathbb{R}$ が候補状態であるとは y の任意の近傍 I に対して, ある自然数 $k \in \mathbb{N}$ が存在して
$P(S_k \in I) > 0$ が成立することをいう.
「x が再帰的かつ y が候補状態 $\Rightarrow$ $x - y$ は再帰的」が成立することを示したい.
$\because$
$\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき y は候補状態だから, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ となる.
x は再帰的より $P(\displaystyle\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > m} \{|S_n - x| < \varepsilon\}) = 1$ となるから

$$0 = P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\})$$
$$\geq P(|S_k - y| < \varepsilon,\ \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\})$$
$$= P(|S_k - y| < \varepsilon) P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(|S_k - y| < \varepsilon) P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - (x - y)| \geq 2\varepsilon\})$$

$\because$
任意の $\omega \in \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}$ をとる.
ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq m$ に対して, $|S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega) - (x - y)| \geq 2\varepsilon$ となる.
この m を固定する. 任意の $n \geq m$ に対して
$2\varepsilon \leq |S_{k+n}(\omega) - x| + |S_k(\omega) - y| < |S_{k+n}(\omega) - x| + \varepsilon$ から $\varepsilon \leq |S_{k+n}(\omega) - x|$ となる.
ここで $N = k + m$ とおけば, $n \geq N$ に対して, $|S_n(\omega) - x| \geq \varepsilon$ なので $\omega \in \displaystyle\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\}$
$\therefore \displaystyle\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - x| \geq \varepsilon\} \supset \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}$
また $X_1, X_2, \ldots$ は独立なので, S_k と $S_{k+n} - S_k = \displaystyle\sum_{m=k+1}^{k+n} X_m$ は独立である.
また同一分布性から

$$P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_{k+n} - S_k - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) = P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - (x - y)| \geq 2\varepsilon\})$$

も成立する.
$P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ なので $P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{|S_n - (x - y)| \geq 2\varepsilon\}) = 0$ つまり

$P(\{|S_n-(x-y)|<2\varepsilon\}\ i.o.)=1\quad I_\varepsilon=(x-y-2\varepsilon,x-y+2\varepsilon)$ とおけば,$P(|S_n|\in I_\varepsilon\ i.o.)=1$
$\varepsilon>0$ は任意だったから $x-y$ は再帰的である.

$x\in G$ は候補状態である
$\because x\in G$ を任意にとる. x の開近傍 I を任意にとる. $P(S_n\in I\ i.o.)=1$ である. 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $P(S_k\in I)=0$ であるとすると $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(S_k\in I)<\infty$ より Borel-Cantelli Lamma から $P(S_k\in I\ i.o.)=0$
これは $P(S_n\in I\ i.o.)=1$ に矛盾する. よって $P(S_k\in I)>0$ となる $m\in\mathbb{N}$ が存在する.
よって $x-x=0\in G$ である. このことから G は群である. G が $\mathbb{R}$ 上で閉なので G は $\mathbb{R}$ 上の閉部分群である. 全ての候補状態 y に対して $0-y=y\in G$ となる.
● $d>0$ のとき
$P(X_1=nd)>0$ かつ $P(X_1=(n+1)d)>0$ となる $n\in\mathbb{Z}$ が存在しないと仮定する.(背理法)
このとき $0\in G$ は候補状態なので $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}P(X_1=(2d)n)=1$ となって, d の最大性に反する. よってある $n\in\mathbb{Z}$ が取れて $nd,(n+1)d\in G$ となる. G は群なので $(n+1)d-nd=d\in G$ このことから $L_d\subset G$ である.
● $d=0$ のとき
このとき G に対して, ある $l>0$ が存在して, $G=\{nl|n\in\mathbb{Z}\}$ となると仮定する (背理法).
候補状態は G の元なので $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}P(X_1=nl)=1$ となり, これは $d=0$ に矛盾する. よって $G=\mathbb{R}=L_0$
以上で $d\geq 0$ に対して $L_d=G$ となり, L_d の全ての状態は再帰的となる. □

定理 18. $X_1,X_2,\ldots$ を L_d 上に分布する確率変数列とする *(ただし $d\geq 0$)*.
(i) もし, 有界区間 $J\subset\mathbb{R}$ が存在して $J\cap L_d\neq\emptyset$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\in J)<\infty$ を満たせば, 再帰状態は存在しない.
(ii) もし, 有界区間 $J\subset\mathbb{R}$ で任意の $\varepsilon\in(0,\dfrac{||J||}{2})$ に対して, ある $x\in\mathbb{R}$ が存在して $I=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset J$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\in I)=\infty$ となれば, L_d の全ての状態は再帰状態である.

Proof.
(i) $J\cap L_d\neq\emptyset$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\in J)<\infty$ を満たす有界区間 $J\subset\mathbb{R}$ が存在することを仮定する.
Borel-Canteli Lemma から $P(S_n\in J\ i.o.)=0$ となって, L_d は少なくとも再帰的でない状態が含まれる.
$\because x\in L_d\cap J$ をとれば, x の開近傍 $I\subset J$ がとれて, $P(S_n\in I\ i.o.)\leq P(S_n\in J\ i.o.)=0$ となって x は再帰的でない L_d の元である.
定理 17 から L_d の元は全て再帰状態にはならない. つまり再帰状態は存在しない.

(ii) 長さ l の有界区間 $J\subset\mathbb{R}$ で任意の $\varepsilon\in(0,\dfrac{l}{2})$ に対して, ある $x\in\mathbb{R}$ が存在して, $I=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset J$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\in I)=\infty$ となるものがとれたとする. $0\in L_d$ なので, 0 が再帰的であることがわかれば
定理 17 から L_d の全ての状態が再帰的である.

$$A_k=\begin{cases}\{S_k\in I,\ S_{n+k}\notin I\ n=1,2,\ldots\} & (k\geq 1)\\ \{S_n\notin I\ n=1,2,\ldots\} & (k=0)\end{cases}$$

と定めると, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{S_n\notin I\}=\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$ となる.

$\because$ $(\subset)$ $\omega\in$ (左辺) とする. このときある $m\in\mathbb{N}$ がとれて, 任意の $n>m$ に対して, $S_n(\omega)\notin I$ となる.
$1\le i\le m-1$ の中で $S_i(\omega)\in I$ となるものが存在するときその最大値を k とすれば,
$S_k(\omega)\in I,\ S_n(\omega)\notin I\ (n\ge k)$ が成立する. よって, $\omega\in A_k$ となる.
任意の $i\in\{1,\dots,m-1\}$ に対して, $S_i\notin I$ のときは, $\omega\in\{S_n\notin I\ n=1,2,\dots\}=A_0$ 以上で $\omega\in$ (右辺)
$(\supset)$ $\omega\in$ (右辺) とする. このとき $k\in\mathbb{N}$ が存在して $\omega\in A_k$ となる.
$k\ge1$ のとき $\omega\in A_k\subset\{S_{n+k}\notin n=1,2,\dots\}=\bigcap_{n=k+1}^{\infty}\{S_n\notin I\}$
$k=0$ のとき $\omega\in A_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{S_n\notin I\}$ $\qquad\therefore\omega\in$ (左辺)

定め方から $A_0,A_1,\dots$ は非交和なので

$$P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{S_n\notin I\})=P(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(A_k)$$

$k\ge1$ のとき

$$P(A_k)\ge P(S_k\in I,\ |S_{n+k}-S_k|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)$$

$\because\omega\in\{S_k\in I\}\cap\{|S_{n+k}-S_k|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots\}$ を任意にとる.
$S_k(\omega)\in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega)-S_k(\omega)\le-2\varepsilon$ または $2\varepsilon\le S_{n+k}(\omega)-S_k(\omega),\ n=1,2,\dots)$
(このとき I の定め方から, $x-\varepsilon<S_k<x+\varepsilon$ だから)
$\Rightarrow S_k(\omega)\in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega)\le(x+\varepsilon)-2\varepsilon$ または $2\varepsilon+(x-\varepsilon)\le S_{n+k}(\omega),\ n=1,2,\dots)$
$\Leftrightarrow S_k(\omega)\in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega)\le x-\varepsilon$ または $x+\varepsilon\le S_{n+k}(\omega),\ n=1,2,\dots)$
$\Leftrightarrow S_k(\omega)\in I$ かつ $(S_{n+k}(\omega)\notin I,\ n=1,2,\dots)$
$\Leftrightarrow\omega\in A_k$

独立性と同一分布性から

$$\begin{aligned}P(S_k\in I,\ |S_{n+k}-S_k|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)&=P(S_k\in I)P(|S_{n+k}-S_k|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)\\&=P(S_k\in I)P(|S_n|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)\end{aligned}$$

が成立する. よって

$$P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m}\{S_n\notin I\})=\sum_{k=0}^{\infty}P(A_k)\ge P(A_0)+\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

$$\ge P(A_0)+P(|S_n|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)\sum_{k=1}^{\infty}P(S_k\in I)$$

ここで, $\sum_{k=1}^{\infty}P(S_k\in I)=\infty$ であるから $P(|S_n|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)=0$ が示せた.
以上で任意の $\varepsilon\in(0,\frac{l}{2})$ に対して $P(|S_n|\ge2\varepsilon,\ n=1,2,\dots)=0$ となる $(*)$

$\varepsilon \in (0, \dfrac{l}{2})$ を新しく固定する. $I = (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ として, $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ を先と同様にとる. $I_\delta = (-\delta, \delta)$ (ただし, $\delta < \varepsilon$) とする. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $A_k = \lim_{\delta \uparrow \varepsilon} \{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n = 1, 2, \dots\}$ となるから

$$P(A_k) = P(\lim_{\delta \uparrow \varepsilon} \{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n = 1, 2, \dots\})$$

連続性から

$$= \lim_{\delta \uparrow \varepsilon} P(\{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n = 1, 2, \dots\})$$

$P(S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n = 1, 2, \dots) \le P(S_k \in I_\delta,\ |S_{n+k} - S_k| \ge \varepsilon - \delta\ n = 1, 2, \dots)$ となる.
$\because\ \omega \in \{S_k \in I_\delta,\ S_{n+k} \notin I\ n = 1, 2, \dots\}$ を任意にとる.
$-\delta < S_k(\omega) < \delta,\ S_{n+k}(\omega) \le -\varepsilon$または $\varepsilon \le S_{n+k}(\omega)$ $(n = 1, 2, \dots)$ となる.
$S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega) \le -\varepsilon - S_k(\omega) < -\varepsilon + \delta$ または $\varepsilon - \delta < \varepsilon - S_k(\omega) \le S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)$
よって $|S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)| \ge \varepsilon - \delta \quad \therefore\ \omega \in \{S_k \in I_\delta,\ |S_{n+k} - S_k| \ge \varepsilon - \delta\ n = 1, 2, \dots\}$
独立性と同一分布性から

$$P(S_k \in I_\delta,\ |S_{n+k} - S_k| \ge \varepsilon - \delta\ n = 1, 2, \dots) = P(S_k \in I_\delta) P(|S_{n+k} - S_k| \ge \varepsilon - \delta\ n = 1, 2, \dots)$$
$$= P(S_k \in I_\delta) P(|S_n| \ge \varepsilon - \delta\ n = 1, 2, \dots) = 0$$

$\because 0 < \dfrac{\varepsilon - \delta}{2} < \dfrac{l}{2}$ なので $(*)$ より $P(|S_n| \ge \varepsilon - \delta\ n = 1, 2, \dots) = 0$
以上で $P(A_k) = 0$ $(k \ge 1)$ となる.
$0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$ だから $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{l}{2}$ なので $P(A_0) = P(S_n \notin I\ n = 1, 2, \dots) = P(|S_n| \ge \varepsilon\ n = 1, 2, \dots) = 0$ 以上から任意の $\varepsilon \in (0, \frac{l}{2}),\ I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して, $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$ よって, 0 は再帰的となる. $\therefore L_d$ の全ての状態は再帰的である. □

系 19.
$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, 次の (i), (ii) のいずれかが成立する.
(i) $L_d \cap I \ne \emptyset$ を満たす全ての有界区間 I に対して, $P(S_n \in I\ i.o.) = 1$
(ii) $L_d \cap I \ne \emptyset$ を満たす全ての有界区間 I に対して, $P(S_n \in I\ i.o.) = 0$

Proof.
$L_d \cap I \ne \emptyset$ となる全ての有界区間 I に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) = \infty$ となるとき, 定理 17 から L_d の全ての状態は再帰的である. つまり $L_d \cap I \ne \emptyset$ となる任意の有界区間 I とすれば, $x \in L_d \cap I$ を任意にとって $P(S_n \in I\ i.o.) \ge P(S_n = x\ i.o.) = 1$ ($\because$ x は再帰的) となる.
$L_d \cap I \ne \emptyset$ となる有界区間 I が存在して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) < \infty$ となるとき, 定理 17 から再帰状態は存在しない. よって任意の有界区間 I ($L_d \cap I \ne \emptyset$) に対して I を含む開区間 J とすれば $P(S_n \in I\ i.o.) \le P(S_n \in J\ i.o.) = 0$ ($\because$ J は L_d のある元の開近傍) □

定義 20.
$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が系 18 (i) を満たすとき, 再帰的という. また, 系 18 (ii) を満たすとき, 非再帰的という.

定理 21.
$E[X_1] = 0$ となるとき, $S_1, S_2, \dots$ は再帰的となる.

証明の前にまず命題を一つ示す.

命題 22.
I が長さ a の区間であるとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n \in I\right) \leq 1+\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|S_n\right| \leq a\right)$ となる.

Proof.
I を長さ a の任意の区間としてとる. $N:=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \in I\}}$ とおくと, N は和 $S_1, S_2, \ldots$ の中で I に含まれるものの個数を数えたものとなる.
$$n^*(\omega):=\begin{cases} S_n(\omega) \in I \text{ となる最小の } n \in \mathbb{N} & \\ \infty & (\text{もし } S_n(\omega) \notin I\ , n=1,2, \ldots) \end{cases} \text{ とおく.}$$
$\{n^*=k\}$ 上では, $n<k$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対しては $1_{\{S_n \in I\}}=0$, また $1_{\{S_k \in I\}}=1$ となるから

$$N=\sum_{n=1}^{k-1} 1_{\{S_n \in I\}}+1_{\{S_k \in I\}}+\sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{\{S_n \in I\}}=1+\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_{k+n} \in I\}}=1+\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_{k+n}-S_k \in I-S_k\}} \leq 1+\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_{k+n}-S_k \in[-a, a]\}}$$

$\because$ 任意に $\omega \in\{n^*=k\}$ をとる. このとき $I-S_k(\omega) \subset[-a, a]$ となる. つまり $1_{\{I-S_k(\omega)\}} \leq 1_{[-a, a]}$ が成立する.
なぜなら, $\bar{I}=[I_1, I_1+a]$ とかくと $(I_1 \in \mathbb{R})$
$-I_1-a \leq-S_k(\omega) \leq-I_1$ であって, $I-I_1-a=[-a, 0]$, $I-I_1=[0, a]$ であるから,
$I-S_k(\omega) \subset[-a, a]$ だから, $1_{\{I-S_k\}} \leq 1_{[-a, a]}$ となる.

$\{n^*=k\} \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ なので, $\{n^*=k\}$ と $\{S_{k+n}-S_k \in[-a, a]\}$ は独立となる.

$$\int_{\{n^*=k\}} N(\omega) P(d \omega) \leq \int_{\{n^*=k\}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{(S_{k+n}-S_k)(\omega) \in[-a, a]\}}\right) P(d \omega)$$

単調収束定理から,

$$=P(n^*=k)+\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n^*=k\}} 1_{\{S_{k+n}(\omega)-S_k(\omega) \in[-a, a]\}} P(d \omega)=P(n^*=k)+\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{n^*=k\} \cap\{S_{k+n}-S_k \in[-a, a]\}\right)$$

独立性から

$$=P(n^*=k)+\sum_{n=1}^{\infty} P(n^*=k) P(S_{k+n}-S_k \in[-a, a])$$

同一分布性から

$$=P(n^*=k)+P(n^*=k) \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq a)$$

ここで両辺 k で和をとると, 左辺は単調収束定理を使って,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{n^*=k\}} N(\omega) P(d \omega)=\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n(\omega) \in I\}} P(d \omega)=\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I)$$

となって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in I) \leq 1+\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq a)$ が成立する. □

命題 22 を使って, 定理 21 を証明する.

Proof.
$M \in \mathbb{N}$ を任意にとる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) = \sum_{k=-M}^{M-1} \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in (k, k+1))$$

命題 22 より

$$\leq \sum_{k=-M}^{M-1} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1)) = 2M(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1))$$

つまり $\overline{\lim_{M \to \infty}} \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1) - (*)$ が成立する.
大数の強法則から $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ ($\because$ 概収束 $\Rightarrow$ 確率収束) となる. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき
$m \in \mathbb{N}$ が存在して, $P(|S_n| < \varepsilon n) > \frac{1}{2}$ $(n > m)$ となる. $M \in \mathbb{N}$ を $\varepsilon(m+1) < M$ となるようにとれば,
$P(|S_n| < M) \geq P(|S_n| < \varepsilon(m+1)) > \frac{1}{2}$ となる.
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \sum_{n=m+1}^{\infty} P(|S_n| < M) > \frac{1}{2}(\frac{M}{\varepsilon} - m)$ から $\frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{m}{4M}$
$(*)$ から $1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1) \geq \overline{\lim_{M \to \infty}} \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \frac{1}{4\varepsilon}$ となり, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば,
$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq 1) = \infty$ となる. ここで任意の $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ を固定する. $\frac{1}{N} < \delta$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) = \sum_{k=-MN}^{N(M-1)} \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in (\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N})) \leq 2MN(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq \frac{1}{N}))$$

となって

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < \frac{1}{\delta}) \geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \leq \frac{1}{N})$$

$$\geq \overline{\lim_{M \to \infty}} \frac{1}{MN} \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < M) \geq \frac{1}{4\varepsilon N} \to \infty \ (\varepsilon \downarrow 0)$$

だから, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < \frac{1}{\delta}) = \infty$ となる. このことから, 定理 18(ii) より L_d の全ての元は再帰的である. よって系 19 から $\{S_n\}_n^{\infty}$ は再帰的となる. $\square$

例
コイントスを考える.
$P(Head) = \frac{1}{2},\ Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{が } H \text{ のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{が } T \text{ のとき}) \end{cases}$, $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ とする.
このとき $Y_1, Y_2, \ldots$ は独立同一分布に従い,L_1 上に分布する. $E[Y_1] = 0$ なので, 定理 21 により $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は再帰的になる. また, 定理 9 が従うので, $P(Z_n = 0\ i.o.) = 1$ より, 系 19 から $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は再帰的になることがわかる.