

# 課題研究bレポート

加納基晴

## 定理 1. 近似定理

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間,  $X_1, X_2, \dots$  を確率変数列とする.

$\forall A_1 \in \sigma(\mathbf{X}), \forall \varepsilon > 0$  に対して, ある  $n \in \mathbb{N}, A_2 \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が存在して  $P(A_1 \Delta A_2) \leq \varepsilon$  となる.

(ただし  $A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$ )

*Proof.*

$\forall A_1 \in \sigma(\mathbf{X}), \forall \varepsilon > 0$  を固定する.

$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists B \in \mathcal{F}_0 \text{ s.t. } P(A \Delta B) \leq \varepsilon\}$  と定める.

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{C}$  は明らかだから,  $\mathcal{C}$  が  $\sigma$  加法族であることを示せば,  $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{C}$  で,  $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathbf{X})$  であることから,  $A_1 \in \sigma(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$  なので,  $\exists A_2 \in \mathcal{F}_0 \text{ s.t. } P(A_1 \Delta A_2) \leq \varepsilon$  となり, 定理が成立するのがわかる.

•  $\mathcal{C}$  が  $\sigma$  加法族であることを示す.

(i)  $\Omega \in \mathcal{C}$  ( $\because \Omega \in \mathcal{F}_0$ )

(ii)  $\forall A \in \mathcal{C}$  に対して,  $A^c \in \mathcal{C}$

$\because \forall \varepsilon > 0$  を固定する. このとき  $B \in \mathcal{F}_0$  が取れて,  $P(A \Delta B) \leq \varepsilon$  となる.  $\mathcal{F}_0$  の定め方から,  $B^c \in \mathcal{F}_0$  であって,  $P(A^c \Delta B^c) = P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P((B - A) \cup (A - B)) = P(A \Delta B) \leq \varepsilon$

$\therefore A^c \in \mathcal{C}$

(iii)  $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, \forall \varepsilon > 0$  をとる.  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0$  を  $P(A_n \Delta B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$  となるようにとる.

また, 測度の上からの連続性から ある  $N \in \mathbb{N}$  が取れて,  $P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  となる.

ここで,  $\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$  を示せば, 単調性と劣加法性から,

$$P(\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq P((\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^N P(B_n \Delta A_n) + P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  となる.  $\bigcup_{n=1}^N B_n \in \mathcal{F}_0$  であることから  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$  となる.

•  $\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$  を示す.

$$\because \omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \vee (\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^N B_n)$$

$$\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c))$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \cap \bigcap_{n=1}^N A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \cap A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N ((B_n \cap A_n^c) \cup (A_n \cap B_n^c)) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \triangle A_n) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \quad \therefore \bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より  $\mathcal{C}$  は  $\sigma$  加法族である.

□

## 定理 2. Kolmogorov zero-one law

$X_1, X_2, \dots$  を独立な確率変数とする. この時,  $E \in \delta$  であるとすれば  $P(E)$  は 0, 1 のいずれかの値をとる.

*Proof.*

$\forall E \in \delta$  とする.  $E \in \sigma(\mathbf{X})$ , であるから, 定理 1 により各  $n \in \mathbb{N}$  に対して, ある  $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が取られて  $P(E \triangle E_n) \rightarrow 0$  となる. このことから  $P(E_n) \rightarrow P(E)$ ,

$P(E_n \cup E) \rightarrow P(E)$  がわかる.

$\therefore$

- $P(E_n) \rightarrow P(E)$

$P(E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E)$  から  $P(E_n) - P(E) \leq P(E_n - E) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 同様にして  $P(E) - P(E_n) \leq P(E - E_n) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$  がわかる.

- $P(E_n \cup E) \rightarrow P(E)$

$P(E \cup E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E) \leq P(E_n \triangle E) + P(E)$  から

$P(E \cup E_n) - P(E) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). また,  $E \subset (E \cup E_n) \cup (E \triangle E_n)$  だから  $P(E) - P(E \cup E_n) \leq P(E \triangle E_n) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

この時,  $E \in \delta$  だから,  $E \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$  である. つまり,  $E$  と  $E_n$  は独立であることがわかる.

$P(E \cap E_n) = P(E)P(E_n)$  であり.

各辺で  $n \rightarrow \infty$  とすれば,  $P(E) = P(E)^2$  であるから,  $P(E) = 0, 1$  となることがわかった.

□

## 補題 3. Borel-Cantelli Lemma

(I),  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  について,  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$  ならば,  $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$  が成立する.

(II),  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$  について,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が独立かつ,  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  ならば,  $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$  が成立する.

*Proof.*

(I)

$P(A_n \text{ i.o.}) = P(\lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n))$  ( $\because$  二つ目の等号は測度の連続性, 不等号には劣加法性を使った)

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$  であるから  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)) = 0 \therefore P(A_n \text{ i.o.}) = 0$   
(II)

$\forall m \in \mathbb{N}$  に対して,  $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = 0$  を示せば,  $P((A_n \text{ i.o.})^c) = P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = 0$ , つまり  $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$  がわかる.

$\forall m \in \mathbb{N}$  を固定する.  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は独立なので  $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty} P(A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))$  である. ここで  $\log(1-x) \leq -x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を使うと,  $\log(\prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))) = \sum_{n=m}^{\infty} \log(1 - P(A_n)) \leq -\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = -\infty$ . よって  $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = 0$  ( $\forall m \in \mathbb{N}$ ) が示せた.  $\square$

いくつか応用例を挙げる.

(例 1) コイントスを考える.  $\mathbf{s}$  を長さ  $k$  の H, T (表, 裏) が要素の列とする.  $A_n = \{\omega; (\omega_n, \dots, \omega_{n+k-1}) = \mathbf{s}\}$  と定める.

**命題 4.**  $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$

*Proof.*  $B_1 = \{\omega; (\omega_1, \dots, \omega_k) = \mathbf{s}\}$ ,  $B_2 = \{\omega; (\omega_{k+1}, \dots, \omega_{2k}) = \mathbf{s}\}$ , ... とおく. このとき,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は独立となる. また,  $\{B_n \text{ i.o.}\} \subset \{A_n \text{ i.o.}\}$  である ( $\because B_l = A_{(l-1)k+1}$ ).  $P(B_n) = P(B_1) = \frac{1}{2^k} > 0$  なので  $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$ . 以上のことから定理 3(II) を使うと,  $P(B_n \text{ i.o.}) = 1 \leq P(A_n \text{ i.o.}) \therefore P(A_n \text{ i.o.}) = 1$   $\square$

(例 2) 再び, コイントスを考える.  $Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{ が } H \text{ のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{ が } T \text{ のとき}) \end{cases}$ ,  $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$  と定める.

**命題 5.**  $P(\text{Head}) \neq \frac{1}{2}$  とする. このとき  $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 0$  となる.

*Proof.*

$P(\text{Head}) = p$  とおく.

$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) < \infty$  であることが示せれば, 定理 3(I) から  $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 0$  がわかる. Stirling の近似公式から, 十分大きい  $n$  に対して,  ${}_{2n}C_n = 2^{2n} \frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}$  (ただし  $\delta_n \downarrow 0$ ) であり, また,  $p \neq \frac{1}{2}$  なので  $2^2 p(1-p) < 1$  より, ある  $0 < \lambda < 1$  が存在して  $2^2 p(1-p) < \frac{1}{\lambda} 2^2 p(1-p) < 1$  となる.  $\delta_n \downarrow 0$  だから十分大きい  $n$  に対しては  $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$  が成立する.

以上で  $N \in \mathbb{N}$  を,  $n \geq N$  で  $P(Z_{2n}) = {}_{2n}C_n p^n (1-p)^n = 2^{2n} \frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$  かつ  $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$  を満たすようにとる.  $a_n = 2^{2n} \frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$  とおく.  $n \geq N$  において  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^2 \frac{1+\delta_{n+1}}{1+\delta_n} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$   
 $p(1-p) \leq 2^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} p(1-p) = \lambda \sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \lambda$  だから,  $a_{n+1} \leq (1-\lambda)a_n \leq \dots \leq (1-\lambda)^{n+1-N} a_N$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) &= \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) \leq \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{n-N} a_N \\
&\leq \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + a_N \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + a_N \frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty \quad (\because 0 < \lambda < 1) \\
\text{以上で } \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) < \infty \text{ がわかった。} \quad \square
\end{aligned}$$

**定理 6.**  $P(\text{Head}) = \frac{1}{2}$  とする. このとき  $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$  となる.

*Proof.*

$n_1 < n_2 < \dots$  の自然数列とする. また, 各  $k \in \mathbb{N}$  に対して,  $n_k < m_k < n_{k+1}$  となるように  $m_1 < m_2 < \dots$  をとる.  $C_k = \{Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k\} \cap \{Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k\}$  と定める.

$Y_i = -1, 1$  だから  $-n \leq Z_n \leq n$  となることを使うと,  $\omega \in C_k$  に対して,  $Z_{m_k}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{n_k})(\omega) + (Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k})(\omega) \leq n_k - n_k = 0$

また  $Z_{n_{k+1}}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) + (Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}})(\omega) \geq -m_k + m_k = 0$  よって,  $\omega \in C_k$  に対して  $Z_{m_k}(\omega) \leq 0, Z_{n_{k+1}}(\omega) \geq 0$  であり,  $Z_{n+1} = Z_n \pm 1$  となることから

$$\begin{aligned}
C_k &\subset \{Z_n = 0; n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}\} = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\} \\
\{C_n \text{ i.o.}\} &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_m+1}^{\infty} \{Z_n = 0\} = \{Z_n = 0 \text{ i.o.}\}
\end{aligned}$$

Borel-Cantelli Lemma から  $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$  となれば  $1 = P(C_n \text{ i.o.}) \leq P(Z_n = 0 \text{ i.o.})$  となる. つまり

$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$  となるような自然数列  $\{n_k\}, \{m_k\}$  が取れることを示せばよい.

•  $\forall \alpha \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N}$  に対して,  $\exists \varphi(k) \geq 1$  s.t.  $P(|Z_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$  となる.

(proof)  $\forall \alpha \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}$  を固定する,  $P(Z_n = j) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから,  $\sum_{|j| < k} P(Z_n = j) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる. よって,  $\sum_{|j| < k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \leq \alpha$  となるように取れる. [証明終り]

$\forall \alpha \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N}$  を固定する.  $\{\varphi(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  を上で示したものと同様に取る.  $n_k, m_k$  を  $n_1 = 1, m_k = n_k + \varphi(n_k), n_{k+1} = m_k + \varphi(m_k)$  とする.

$P(C_k) = P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k) P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$  ( $\because \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  は独立)

$P(\text{Head}) = \frac{1}{2}$  であるから, 対象性を使うと

$P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) = 2P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k)$

$P(|Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}| \geq m_k) = 2P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$  となるから,

$P(C_k) = \frac{1}{4} P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) P(|Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}| \geq m_k), \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  の同一分布性から

$= \frac{1}{4} P(|Y_1 + \dots + Y_{m_k - n_k}| \geq n_k) P(|Y_1 + \dots + Y_{n_{k+1} - m_k}| \geq m_k), \varphi(k)$  の定め方から,

$= \frac{1}{4} P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(n_k)}| \geq n_k) P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(m_k)}| \geq m_k) \geq \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2$

$\because \sum_{|j| < k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \stackrel{\text{非交和}}{=} P\left(\bigcup_{|j| < k} Z_{\varphi(k)} = j\right) = P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$  なので

$$P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(k)}| \geq k) \geq 1 - \alpha$$
 以上で  $\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 = \infty$  となって,  $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$  が示せた. □

**定理 7.**  $X_1, X_2, \dots$  を独立確率変数とする.

このとき,

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ が確率収束する} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n X_k \text{ が概収束する} \quad \text{が成立する.}$$

まず、補題を示す.

**補題 8.**  $N \in \mathbb{N}$  を固定する.  $X_1, X_2, \dots, X_N$  を独立確率変数とし,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  とおく.

$\forall \alpha > 0$  に対して,  $\sup_{1 \leq j \leq N} P(|S_N - S_j| > \alpha) = c < 1$  となるとき,

$$P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \text{ となる.}$$

*Proof.*

$j^*(\omega)$  を  $|S_j(\omega)| > 2\alpha$  となる  $1 \leq j \leq N$  で一番小さいものとする. 存在しないときは 0 とする. ここで

$\bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} = \emptyset$  であるとき  $P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = 0$  なので,  $P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = 0 \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha)$  が成立する. よって,  $\bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} \neq \emptyset$  のときを考える.

$$P(|S_N| > \alpha, \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = \sum_{j=1}^N P(|S_N| > \alpha, j^* = j) \geq \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j)$$

$\therefore \bullet \bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} = \{ \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha \}$  を示せば, 一つ目の等号が成立する.

(C)

$\omega \in (\text{左辺})$  とすれば,  $1 \leq j^* \leq N$  s.t.  $j^*(\omega) = k$  だから  $|S_k(\omega)| > 2\alpha$  なので  $\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| \geq |S_k(\omega)| > 2\alpha$  となって,  $\omega \in (\text{右辺})$

(D)

$\omega \in (\text{右辺})$  とすれば,  $\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j(\omega)| > 2\alpha$  であるから,  $\exists \{k_1, k_2, \dots, k_K\} \subset \{1, 2, \dots, N\}$  s.t.

$|S_{k_m}| > 2\alpha$  ( $m = 1, 2, \dots, K$ ) となる.  $j^{**}(\omega) = \min \{k_1, k_2, \dots, k_K\}$  とすれば  $j^*(\omega) = j^{**}(\omega)$  となるから,  $\omega \in (\text{左辺})$  となる.

• 各  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  に対して,  $\{|S_N| > \alpha\} \cap \{j^* = j\} \supset \{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \cap \{j^* = j\}$  となるのを示せば 2 つ目の不等号が示せる.

$k \in \{1, 2, \dots, N\}$  を固定しておく.  $\omega \in (\text{右辺})$  をとる.  $|S_N(\omega) - S_j(\omega)| \leq \alpha$  かつ  $j^*(\omega) = j$  であるから,  
 $|S_j(\omega)| - |S_N(\omega)| \leq \alpha$  かつ  $|S_j(\omega)| > 2\alpha \Leftrightarrow |S_j(\omega)| - \alpha \leq |S_N(\omega)|$  かつ  $|S_j(\omega)| > 2\alpha$   
 $\Rightarrow 2\alpha - \alpha = \alpha < |S_N(\omega)|$

以上で  $\{|S_N| > \alpha\} \cap \{j^* = j\} \supset \{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \cap \{j^* = j\}$

$\{j^* = j\} = (\bigcap_{k=1}^{j-1} \{|S_k| > 2\alpha\}^c) \cap \{|S_j| > 2\alpha\}$  なので,  $\{j^* = j\} \in \sigma(X_1, \dots, X_j)$ ,

$\{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \in \sigma(X_{j+1}, \dots, X_N)$  であるから,  $\{j^* = j\}$  と  $\{|S_N - S_j| \leq \alpha\}$  は独立. 仮定から  $P(|S_N - S_j| > \alpha) \leq c$  なので  $1 - P(|S_N - S_j| > \alpha) = P(|S_N - S_j| \leq \alpha) \geq 1 - c$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) &= \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha) P(j^* = j) \geq (1-c) \sum_{j=1}^N P(j^* = j) \\
&= (1-c) P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) \\
(1-c) P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) &\leq \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) \leq P(|S_N| > \alpha, \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \\
&\leq P(|S_N| > \alpha) \quad \therefore P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \quad \square
\end{aligned}$$

補題 8 を使って, 定理 7 の証明をする.

*Proof.*

( $\Leftarrow$ ) 概収束するならば確率収束するので成立する.

( $\Rightarrow$ )  $\sum_{k=1}^n X_k$  は確率収束するとする. ここで  $\sum_{k=1}^n X_k$  が概収束しないと仮定する.(背理法)

ここで実数列  $\{s_n\}$  が収束しないとすれば  $\{s_n\}$  は Cauchy 列でないので

$\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $\forall N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \wedge |s_n - s_m| > \varepsilon$  であるから,

$\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $\forall m \in \mathbb{N}, \sup_{n > m} |s_n - s_m| > \varepsilon$  となる.  $\sum_{k=1}^n X_k$  は Cauchy 列でないから,

$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1]$  s.t.  $\left[ \forall m \in \mathbb{N}, P\left(\sup_{n > m} \left| \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^m X_k \right| > \varepsilon\right) \geq \delta \right]$  となる. この  $\varepsilon, \delta$  を固定する.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n X_k \text{ は確率収束するので } \sum_{k=1}^N X_k - \sum_{k=1}^m X_k \xrightarrow{P} 0 \text{ となる. なぜなら } \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} s \text{ とすると,} \\
P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - s + s - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - s\right| + \left|s - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \\
&\leq P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^N X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|s - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_{k=1}^m X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0 \ (m, N \rightarrow \infty) \text{ となるから.}
\end{aligned}$$

よって, ある  $M \in \mathbb{N}$  が存在して,  $\forall m, N \geq M$  ( $m < N$ ) に対して,  $P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$  で,

$$P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0 \ (m, N \rightarrow \infty) \text{ この } m, N \text{ を固定する.}$$

$C_{m,N} = \sup_{m < n \leq N} P\left(\left|\sum_{k=n}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$  とおくと,  $C_{m,N} < 1$  かつ  $C_{m,N} \rightarrow 0$  ( $m, N \rightarrow \infty$ ) となる.

ここで補題 8 を使うと,

$$P\left(\sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{1 - C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \square$$

**定理 9.** 独立確率変数に対する大数の法則

$X_1, X_2, \dots$  を独立確率変数とする.  $E[X_k] = 0, E[X_k^2] < \infty$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ ) であるとする. 正数列

$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $b_n \uparrow \infty$  かつ  $\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\frac{X_k^2}{b_k^2}\right] < \infty$  を満たすとき,  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$  が成立する.

証明の前に一つ補題を示す.

**補題 10.** *Kronecker's Lemma*

$x_1, x_2, \dots$  を  $\sum_{k=1}^n x_k \rightarrow s < \infty$  を満たす実数列とする. このとき,  $b_n \uparrow \infty$  となる整数列  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が取れて,  
 $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \rightarrow 0$  となる.

*Proof.*

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k, \quad r_0 = s \text{ とおく. このとき } x_n = r_{n-1} - r_n, \quad n = 1, 2, \dots \text{ また, } \sum_{k=1}^n b_k x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n b_k (r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} r_k - \sum_{k=1}^n b_k r_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) r_k + b_1 s - b_n r_n \text{ となるから} \\ \left| \sum_{k=1}^n b_k x_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + b_1 |s| + b_n |r_n| \quad (\because \text{三角不等式, } b_n \text{ は単調増加なので } b_{n+1} - b_n \geq 0) \end{aligned}$$

ここで  $\forall \varepsilon > 0$  をとる.  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  は収束するから  $r_k$  の定め方から  $N \in \mathbb{N}$  を  $\forall n \geq N$  に対して,  $|r_k| \leq \varepsilon$  となるように取れる. この  $N$  を固定する.  $\tilde{r} := \max\{|r_1|, \dots, |r_{N-1}|, \varepsilon\}$  とする.  $n > N$  において,  
 $\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| \leq \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \leq \tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N)$  よって  
 $\left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n} (\tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N) + b_1 |s| + b_n \varepsilon) \rightarrow \varepsilon$  つまり  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon$  となるから  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon$  がわかった. ここで  $\varepsilon \downarrow 0$  とすれば,  $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \rightarrow 0$  が示された.  $\square$

この補題を使って定理 7 を証明する.

*Proof.*

Kronecker's Lemma により,  $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{b_k}$  がほとんど確実に収束すれば,  $\frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^n b_k \frac{X_k}{b_k} = \frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{a.s.} 0$  となる.  $\square$