

課題研究bレポート

加納基晴

定理 1. 近似定理

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間, X_1, X_2, \dots を確率変数列とする.

$\forall A_1 \in \sigma(\mathbf{X}), \forall \varepsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}, A_2 \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が存在して $P(A_1 \Delta A_2) \leq \varepsilon$ となる.

(ただし $A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$)

Proof.

$\forall A_1 \in \sigma(\mathbf{X}), \forall \varepsilon > 0$ を固定する.

$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), \mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists B \in \mathcal{F}_0 \text{ s.t. } P(A \Delta B) \leq \varepsilon\}$ と定める.

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{C}$ は明らかだから, \mathcal{C} が σ 加法族であることを示せば, $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{C}$ で, $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathbf{X})$ であることから, $A_1 \in \sigma(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$ なので, $\exists A_2 \in \mathcal{F}_0 \text{ s.t. } P(A_1 \Delta A_2) \leq \varepsilon$ となり, 定理が成立するのがわかる.

• \mathcal{C} が σ 加法族であることを示す.

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$ ($\because \Omega \in \mathcal{F}_0$)

(ii) $\forall A \in \mathcal{C}$ に対して, $A^c \in \mathcal{C}$

$\because \forall \varepsilon > 0$ を固定する. このとき $B \in \mathcal{F}_0$ が取れて, $P(A \Delta B) \leq \varepsilon$ となる. \mathcal{F}_0 の定め方から, $B^c \in \mathcal{F}_0$ であって, $P(A^c \Delta B^c) = P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P((B - A) \cup (A - B)) = P(A \Delta B) \leq \varepsilon$

$\therefore A^c \in \mathcal{C}$

(iii) $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, \forall \varepsilon > 0$ をとる. $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0$ を $P(A_n \Delta B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ となるようにとる.

また, 測度の上からの連続性から ある $N \in \mathbb{N}$ が取れて, $P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

ここで, $\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示せば, 単調性と劣加法性から,

$$P(\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq P((\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^N P(B_n \Delta A_n) + P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n)$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる. $\bigcup_{n=1}^N B_n \in \mathcal{F}_0$ であることから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ となる.

• $\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \Delta A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$ を示す.

$$\because \omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \Delta \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \vee (\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^N B_n)$$

$$\Leftrightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c))$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\omega \in \bigcup_{n=1}^N B_n \cap \bigcap_{n=1}^N A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{n=1}^N B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \cap A_n^c) \vee (\omega \in (\bigcup_{n=1}^N A_n \cap B_n^c) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N ((B_n \cap A_n^c) \cup (A_n \cap B_n^c)) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \triangle A_n) \vee \omega \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^N (B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n \quad \therefore \bigcup_{n=1}^N B_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\bigcup_{n=1}^N B_n \triangle A_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

(i) \sim (iii) より \mathcal{C} は σ 加法族である.

□

定理 2. Kolmogorov zero-one law

X_1, X_2, \dots を独立な確率変数とする. この時, $E \in \delta$ であるとすれば $P(E)$ は 0, 1 のいずれかの値をとる.

Proof.

$\forall E \in \delta$ とする. $E \in \sigma(\mathbf{X})$, であるから, 定理 1 により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が取られて $P(E \triangle E_n) \rightarrow 0$ となる. このことから $P(E_n) \rightarrow P(E)$,

$P(E_n \cup E) \rightarrow P(E)$ がわかる.

\therefore

$$\bullet P(E_n) \rightarrow P(E)$$

$P(E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E)$ から $P(E_n) - P(E) \leq P(E_n - E) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 同様にして $P(E) - P(E_n) \leq P(E - E_n) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$ がわかる.

$$\bullet P(E_n \cup E) \rightarrow P(E)$$

$P(E \cup E_n) \leq P((E_n - E) \cup E) \leq P(E_n - E) + P(E) \leq P(E_n \triangle E) + P(E)$ から

$P(E \cup E_n) - P(E) \leq P(E_n \triangle E) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). また, $E \subset (E \cup E_n) \cup (E \triangle E_n)$ だから $P(E) - P(E \cup E_n) \leq P(E \triangle E_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

この時, $E \in \delta$ だから, $E \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ である. つまり, E と E_n は独立であることがわかる.

$P(E \cap E_n) = P(E)P(E_n)$ であり.

各辺で $n \rightarrow \infty$ とすれば, $P(E) = P(E)^2$ であるから, $P(E) = 0, 1$ となることがわかった.

□

補題 3. Borel-Cantelli Lemma

(I), $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば, $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$ が成立する.

(II), $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ について, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が独立かつ, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば, $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$ が成立する.

Proof.

(I)

$P(A_n \text{ i.o.}) = P(\lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n))$ (\because 二つ目の等号は測度の連続性, 不等号には劣加法性を使った)

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ であるから $\lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)) = 0 \therefore P(A_n \text{ i.o.}) = 0$
(II)

$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して, $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = 0$ を示せば, $P((A_n \text{ i.o.})^c) = P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = 0$, つまり $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$ がわかる.

$\forall m \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は独立なので $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty} P(A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))$ である. ここで $\log(1-x) \leq -x$ ($0 \leq x \leq 1$) を使うと, $\log(\prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n))) = \sum_{n=m}^{\infty} \log(1 - P(A_n)) \leq -\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = -\infty$. よって $P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = 0$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) が示せた. \square

いくつか応用例を挙げる.

(例 1) コイントスを考える. s を長さ k の H, T (表, 裏) が要素の列とする. $A_n = \{\omega; (\omega_n, \dots, \omega_{n+k-1}) = s\}$ と定める.

命題 4. $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$

Proof. $B_1 = \{\omega; (\omega_1, \dots, \omega_k) = s\}, B_2 = \{\omega; (\omega_{k+1}, \dots, \omega_{2k}) = s\}, \dots$ とおく. このとき, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は独立となる. また, $\{B_n \text{ i.o.}\} \subset \{A_n \text{ i.o.}\}$ である ($\because B_l = A_{(l-1)k+1}$). $P(B_n) = P(B_1) = \frac{1}{2^k} > 0$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$. 以上のことから定理 3(II) を使うと, $P(B_n \text{ i.o.}) = 1 \leq P(A_n \text{ i.o.}) \therefore P(A_n \text{ i.o.}) = 1$ \square

(例 2) 再び, コイントスを考える. $Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_i \text{ が } H \text{ のとき}) \\ -1 & (\omega_i \text{ が } T \text{ のとき}) \end{cases}$, $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ と定める.

命題 5. $P(\text{Head}) \neq \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 0$ となる.

Proof.

$P(\text{Head}) = p$ とおく.

$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) < \infty$ であることが示せれば, 定理 3(I) から $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 0$ がわかる. Stirling の近似公式から, 十分大きい n に対して, ${}_{2n}C_n = 2^{2n} \frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}}$ (ただし $\delta_n \downarrow 0$) であり, また, $p \neq \frac{1}{2}$ なので $2^2 p(1-p) < 1$ より, ある $0 < \lambda < 1$ が存在して $2^2 p(1-p) < \frac{1}{\lambda} 2^2 p(1-p) < 1$ となる. $\delta_n \downarrow 0$ だから十分大きい n に対しては $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$ が成立する.

以上で $N \in \mathbb{N}$ を, $n \geq N$ で $P(Z_{2n}) = {}_{2n}C_n p^n (1-p)^n = 2^{2n} \frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$ かつ $\delta_n < \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} - 1$ を満たすようにとる. $a_n = 2^{2n} \frac{1+\delta_n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$ とおく. $n \geq N$ において $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^2 \frac{1+\delta_{n+1}}{1+\delta_n} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$
 $p(1-p) \leq 2^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{\lambda}{2^2 p(1-p)} p(1-p) = \lambda \sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \lambda$ だから, $a_{n+1} \leq (1-\lambda)a_n \leq \dots \leq (1-\lambda)^{n+1-N} a_N$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) &= \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) \leq \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{n-N} a_N \\
&\leq \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + a_N \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^N P(Z_{2n} = 0) + a_N \frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty \quad (\because 0 < \lambda < 1) \\
\text{以上で } \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n = 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{2n} = 0) < \infty \text{ がわかった。} \quad \square
\end{aligned}$$

定理 6. $P(\text{Head}) = \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$ となる.

Proof.

$n_1 < n_2 < \dots$ の自然数列とする. また, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, $n_k < m_k < n_{k+1}$ となるように $m_1 < m_2 < \dots$ をとる. $C_k = \{Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k\} \cap \{Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k\}$ と定める.

$Y_i = -1, 1$ だから $-n \leq Z_n \leq n$ となることを使うと, $\omega \in C_k$ に対して, $Z_{m_k}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{n_k})(\omega) + (Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k})(\omega) \leq n_k - n_k = 0$

また $Z_{n_{k+1}}(\omega) = (Y_1 + \dots + Y_{m_k})(\omega) + (Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}})(\omega) \geq -m_k + m_k = 0$ よって, $\omega \in C_k$ に対して $Z_{m_k}(\omega) \leq 0, Z_{n_{k+1}}(\omega) \geq 0$ であり, $Z_{n+1} = Z_n \pm 1$ となることから

$$\begin{aligned}
C_k &\subset \{Z_n = 0; n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}\} = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\} \\
\{C_n \text{ i.o.}\} &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \{Z_n = 0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_m+1}^{\infty} \{Z_n = 0\} = \{Z_n = 0 \text{ i.o.}\}
\end{aligned}$$

Borel-Cantelli Lemma から $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となれば $1 = P(C_n \text{ i.o.}) \leq P(Z_n = 0 \text{ i.o.})$ となる. つまり

$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ となるような自然数列 $\{n_k\}, \{m_k\}$ が取れることを示せばよい.

• $\forall \alpha \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N}$ に対して, $\exists \varphi(k) \geq 1$ s.t. $P(|Z_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$ となる.

(proof) $\forall \alpha \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}$ を固定する, $P(Z_n = j) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから, $\sum_{|j| < k} P(Z_n = j) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる. よって, $\sum_{|j| < k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \leq \alpha$ となるように取れる. [証明終り]

$\forall \alpha \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N}$ を固定する. $\{\varphi(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を上で示したものと同様に取る. n_k, m_k を $n_1 = 1, m_k = n_k + \varphi(n_k), n_{k+1} = m_k + \varphi(m_k)$ とする.

$P(C_k) = P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k) P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ ($\because \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は独立)

$P(\text{Head}) = \frac{1}{2}$ であるから, 対象性を使うと

$P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) = 2P(Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k} \leq -n_k)$

$P(|Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}| \geq m_k) = 2P(Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}} \geq m_k)$ となるから,

$P(C_k) = \frac{1}{4} P(|Y_{n_k+1} + \dots + Y_{m_k}| \geq n_k) P(|Y_{m_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}| \geq m_k), \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の同一分布性から

$= \frac{1}{4} P(|Y_1 + \dots + Y_{m_k - n_k}| \geq n_k) P(|Y_1 + \dots + Y_{n_{k+1} - m_k}| \geq m_k), \varphi(k)$ の定め方から,

$= \frac{1}{4} P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(n_k)}| \geq n_k) P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(m_k)}| \geq m_k) \geq \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2$

$\because \sum_{|j| < k} P(Z_{\varphi(k)} = j) \stackrel{\text{非交和}}{=} P\left(\bigcup_{|j| < k} Z_{\varphi(k)} = j\right) = P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(k)}| < k) \leq \alpha$ なので

$$P(|Y_1 + \dots + Y_{\varphi(k)}| \geq k) \geq 1 - \alpha$$
 以上で $\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 = \infty$ となって, $P(Z_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$ が示せた. □

定理 7. X_1, X_2, \dots を独立確率変数とする.

このとき,

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ が確率収束する} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n X_k \text{ が概収束する} \quad \text{が成立する.}$$

まず、補題を示す.

補題 8. $N \in \mathbb{N}$ を固定する. X_1, X_2, \dots, X_N を独立確率変数とし, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ とおく.

$\forall \alpha > 0$ に対して, $\sup_{1 \leq j \leq N} P(|S_N - S_j| > \alpha) = c < 1$ となるとき,

$$P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \text{ となる.}$$

Proof.

$j^*(\omega)$ を $|S_j(\omega)| > 2\alpha$ となる $1 \leq j \leq N$ で一番小さいものとする. 存在しないときは 0 とする. ここで

$\bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} = \emptyset$ であるとき $P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = 0$ なので, $P(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = 0 \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha)$ が成立する. よって, $\bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} \neq \emptyset$ のときを考える.

$$P(|S_N| > \alpha, \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) = \sum_{j=1}^N P(|S_N| > \alpha, j^* = j) \geq \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j)$$

$\therefore \bullet \bigcup_{1 \leq j \leq N} \{j^* = j\} = \{ \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha \}$ を示せば, 一つ目の等号が成立する.

(C)

$\omega \in (\text{左辺})$ とすれば, $1 \leq j^* \leq N$ s.t. $j^*(\omega) = k$ だから $|S_k(\omega)| > 2\alpha$ なので $\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| \geq |S_k(\omega)| > 2\alpha$ となって, $\omega \in (\text{右辺})$

(D)

$\omega \in (\text{右辺})$ とすれば, $\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j(\omega)| > 2\alpha$ であるから, $\exists \{k_1, k_2, \dots, k_K\} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ s.t.

$|S_{k_m}| > 2\alpha$ ($m = 1, 2, \dots, K$) となる. $j^{**}(\omega) = \min \{k_1, k_2, \dots, k_K\}$ とすれば $j^*(\omega) = j^{**}(\omega)$ となるから, $\omega \in (\text{左辺})$ となる.

• 各 $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して, $\{|S_N| > \alpha\} \cap \{j^* = j\} \supset \{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \cap \{j^* = j\}$ となるのを示せば 2 つ目の不等号が示せる.

$k \in \{1, 2, \dots, N\}$ を固定しておく. $\omega \in (\text{右辺})$ をとる. $|S_N(\omega) - S_j(\omega)| \leq \alpha$ かつ $j^*(\omega) = j$ であるから,
 $|S_j(\omega)| - |S_N(\omega)| \leq \alpha$ かつ $|S_j(\omega)| > 2\alpha \Leftrightarrow |S_j(\omega)| - \alpha \leq |S_N(\omega)|$ かつ $|S_j(\omega)| > 2\alpha$
 $\Rightarrow 2\alpha - \alpha = \alpha < |S_N(\omega)|$

以上で $\{|S_N| > \alpha\} \cap \{j^* = j\} \supset \{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \cap \{j^* = j\}$

$\{j^* = j\} = (\bigcap_{k=1}^{j-1} \{|S_k| > 2\alpha\}^c) \cap \{|S_j| > 2\alpha\}$ なので, $\{j^* = j\} \in \sigma(X_1, \dots, X_j)$,

$\{|S_N - S_j| \leq \alpha\} \in \sigma(X_{j+1}, \dots, X_N)$ であるから, $\{j^* = j\}$ と $\{|S_N - S_j| \leq \alpha\}$ は独立. 仮定から $P(|S_N - S_j| > \alpha) \leq c$ なので $1 - P(|S_N - S_j| > \alpha) = P(|S_N - S_j| \leq \alpha) \geq 1 - c$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) &= \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha) P(j^* = j) \geq (1-c) \sum_{j=1}^N P(j^* = j) \\
&= (1-c) P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) \\
(1-c) P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) &\leq \sum_{j=1}^N P(|S_N - S_j| \leq \alpha, j^* = j) \leq P(|S_N| > \alpha, \sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha) \\
&\leq P(|S_N| > \alpha) \quad \therefore P\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right) \leq \frac{1}{1-c} P(|S_N| > \alpha) \quad \square
\end{aligned}$$

補題 8 を使って, 定理 7 の証明をする.

Proof.

(\Leftarrow) 概収束するならば確率収束するので成立する.

(\Rightarrow) $\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束するとする. ここで $\sum_{k=1}^n X_k$ が概収束しないと仮定する.(背理法)

ここで実数列 $\{s_n\}$ が収束しないとすれば $\{s_n\}$ は Cauchy 列でないので

$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \wedge |s_n - s_m| > \varepsilon$ であるから,

$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}, \sup_{n > m} |s_n - s_m| > \varepsilon$ となる. $\sum_{k=1}^n X_k$ はほとんど確実に Cauchy 列でないから,

$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1]$ s.t. $\left[\forall m \in \mathbb{N}, P\left(\sup_{n > m} \left| \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^m X_k \right| > \varepsilon\right) \geq \delta \right]$ となる. この ε, δ を固定する.

$\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束するので $\sum_{k=1}^N X_k - \sum_{k=1}^m X_k \xrightarrow{P} 0$ となる.

$$\begin{aligned}
&\because \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} s \text{ とすると, } P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - s + s - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \\
&P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - s\right| + \left|s - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^N X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|s - \sum_{k=1}^m X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\leq P\left(\left|\sum_{k=1}^N X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_{k=1}^m X_k - s\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (m, N \rightarrow \infty) \text{ となるから.}
\end{aligned}$$

よって, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall m, N \geq M$ ($m < N$) に対して, $P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ で,

$P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0$ ($m, N \rightarrow \infty$) この m, N を固定する.

$C_{m,N} = \sup_{m < n \leq N} P\left(\left|\sum_{k=n}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とおくと, $C_{m,N} < 1$ かつ $C_{m,N} \rightarrow 0$ ($m, N \rightarrow \infty$) となる.

ここで補題 8 を使うと,

$P\left(\sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とかけて, まず $N \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned}
&\text{単調性から, } \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{m < n \leq N} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{m < n} \left|\sum_{k=m+1}^n X_k\right| > \varepsilon\right) \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-C_{m,N}} P\left(\left|\sum_{k=m+1}^N X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ だから,}
\end{aligned}$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{m < n} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right| > \varepsilon \right) = 0$ これは $\forall m \in \mathbb{N}, P \left(\sup_{n > m} \left| \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^m X_k \right| > \varepsilon \right) \geq \delta > 0$ に矛盾する.

背理法により $\sum_{k=1}^n X_k$ は概収束することがわかった. \square

系 9.

$E[X_k] = 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), $\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] < \infty$ とする. このとき $\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束する.

Proof.

X_1, X_2, \dots は独立なので, $\sum_{k=1}^n X_k$ が確率収束することを示せば定理 8 から $\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束する.

$\sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2] = s^2$ (ただし $s \geq 0$) とする. $\forall \varepsilon > 0$ に対して Chebyshev の不等式から

$P \left(\left| \sum_{k=1}^n X_k - s \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E \left[\left| \sum_{k=1}^n X_k - s \right|^2 \right]$ となる. $E \left[\left| \sum_{k=1}^n X_k - s \right|^2 \right] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示したい.

$$E \left[\left| \sum_{k=1}^n X_k - s \right|^2 \right] = E \left[\left| \sum_{k=1}^n X_k \right|^2 \right] - 2sE \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] + s^2$$

$$= E \left[\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j \right] - 2sE \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] + s^2 \quad \text{ここで, } X_1, X_2, \dots \text{ は独立だから}$$

$\sum_{i < j} E[X_i X_j] = \sum_{i < j} E[X_i] E[X_j]$ が成立する. また $E[X_k] = 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) なので

$$= \sum_{k=1}^n E[X_k^2] - 2s \sum_{k=1}^n E[X_k] + s^2 \rightarrow s^2 - 2s^2 + s^2 = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\sum_{k=1}^n X_k$ が確率収束することがわかったので $\sum_{k=1}^n X_k$ は確率収束する. \square

定理 10. 独立確率変数に対する大数の法則

X_1, X_2, \dots を独立確率変数とする. $E[X_k] = 0, E[X_k^2] < \infty$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) であるとする. 正数列

$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $b_n \uparrow \infty$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} E \left[\frac{X_k^2}{b_k^2} \right] < \infty$ を満たすとき, $\frac{X_1 + \dots + X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ が成立する.

証明の前に一つ補題を示す.

補題 11. Kronecker's Lemma

x_1, x_2, \dots を $\sum_{k=1}^n x_k \rightarrow s < \infty$ を満たす実数列とする. このとき, $b_n \uparrow \infty$ となる整数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が取れて,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \rightarrow 0 \quad \text{となる.}$$

Proof.

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k, \quad r_0 = s \quad \text{とおく. このとき } x_n = r_{n-1} - r_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{また, } \sum_{k=1}^n b_k x_k =$$

$$\sum_{k=1}^n b_k (r_{k-1} - r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} r_k - \sum_{k=1}^n b_k r_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) r_k + b_1 s - b_n r_n \quad \text{となるから}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + b_1 |s| + b_n |r_n| \quad (\because \text{三角不等式, } b_n \text{ は単調増加なので } b_{n+1} - b_n \geq 0)$$

ここで $\forall \varepsilon > 0$ をとる. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ は収束するから r_k の定め方から $N \in \mathbb{N}$ を $\forall n \geq N$ に対して, $|r_k| \leq \varepsilon$ となるように取れる. この N を固定する. $\tilde{r} := \max\{|r_1|, \dots, |r_{N-1}|, \varepsilon\}$ とする. $n > N$ において,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| \leq \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) |r_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \leq \tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N) \quad \text{よって}$$

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n} (\tilde{r}(b_N - b_1) + \varepsilon(b_n - b_N) + b_1 |s| + b_n \varepsilon) \rightarrow \varepsilon \quad \text{つまり} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon \quad \text{となるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{b_n} \right| \leq \varepsilon \quad \text{がわかった. ここで } \varepsilon \downarrow 0 \quad \text{とすれば, } \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k \rightarrow 0 \quad \text{が示された.} \quad \square$$

この補題を使って定理 7 を証明する.

Proof.

Kronecker's Lemma により, $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{b_k}$ がほとんど確実に収束すれば, $\frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^n b_k \frac{X_k}{b_k} = \frac{1}{b_k} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ となる. \square