组合数学笔记

崔嘉祺
华东师范大学 20 级数学强基拔尖班

2023 年 6 月 13 日

摘要

平时 50%+ 期末 50%

周三下午 14：00-16：00 答疑

数学楼 227

周二交作业

教材：《组合数学》；冯荣权，宋春伟；北京大学出版社

若无特殊说明，后文出现的页码与标号都是指该教材的页码与标号

第二周：P19 习题一 3,11(a)(b)(c)　第三周：见微信群图片　第四周：P56 习题二 1,5,8　第五周：无
第六周：P56 习题二 2,6,9,12,13　第七周：P81 习题三 4　第八周：P81 习题三 2　第十周：P116 习题四 3(b)(d),5,10
第十一周：P117 习题四 9　第十二周：P118 习题四 11,12　第十四周：P139 习题五 4,5　第十五周：见微信群图片

目录

1 预备知识 **3**

1.1 什么是组合数学 . . . 3

1.1.1 计数 . . . 3

1.1.2 算两次 . . . 4

1.1.3 例子 . . . 5

1.2 初等计数方法 . . . 6

1.2.1 插空法 . . . 6

1.2.2 多重组合数 . . . 6

1.3 一些概念 . . . 9

1.3.1 多重集 . . . 9

1.3.2 十二重计数法 . . . 9

1.4 组合恒等式 . . . 9

1.4.1 二项式定理 . . . 9

1.4.2 范德蒙恒等式 . . . 10

1.4.3 朱世杰恒等式 . . . 11

1.4.4 多项式定理 . . . 13

1.4.5 Lucas 定理 . . . 13

1.4.6 例子 . . . 14

2 递推关系与生成函数 **18**

2.1 线性齐次递推关系 . . . 18

2.1.1 2 阶常系数线性齐次递推关系的解法 . . . 19

2.1.2 k 阶常系数线性齐次递推关系的解法 . . . 20

2.2 线性非齐次递推关系 . . . 25

2.2.1 多项式型线性非齐次递推关系的解法 26
2.3 生成函数 28
2.3.1 普通生成函数 28
2.3.2 指数型生成函数 36
2.3.3 Dirichlet 生成函数 41

3 容斥原理 **45**
3.1 容斥原理与计数 45
3.2 偏序集上的 Möbius 反演 50
3.3 容斥原理与生成函数 51

4 特殊计数序列 **57**
4.1 Catalan 数 57
4.2 Schröder 数 60
4.3 第一、二类 Stirling 数 61
4.3.1 第二类 Stirling 数 61
4.3.2 第一类 Stirling 数 66
4.4 分拆数 70

5 Pólya 计数定理 **77**
5.1 动机 77
5.2 一些代数 77
5.3 Pólya 计数问题 79
5.4 带权 Pólya 计数问题 85

6 相异代表系 **88**
6.1 相异代表系与 Hall 定理 88

1 预备知识

1.1 什么是组合数学

1.1.1 计数

1. 枚举法

2. 加法原理

3. 乘法原理

4. 容斥原理

定义 1.1.1. 排列数与组合数:

$$A_n^m = P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$
$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

例 1.1.2. 含数字 0 的四位数有多少？

解. 直接分类计数:

1. 含 3 个 0：1×9

2. 含 2 个 0：$C_3^2 \times 9 \times 9$

3. 含 1 个 0：$C_3^1 \times 9 \times 9 \times 9$

由加法原理相加即得。 □

解. 用容斥原理：

每位数都不是 0 的有 9^4 个，故答案为 $9000-9^4$ 个。 □

例 1.1.3. *100 以内与 6 互素的数的个数*

解. 用容斥原理：

2 的倍数有 50 个，3 的倍数有 33 个，$6=2\times 3$ 的倍数有 16 个，故答案为 $100-50-33+16$ 个。 □

注记 1.1.4. *不能直接对 6 用容斥原理，与 6 互素的数和被 6 整除的数不是互为补集。*

例 1.1.5. *100 以内与 2,3,5 互素的数的个数*

解. 用容斥原理：

2 的倍数有 50 个，3 的倍数有 33 个，5 的倍数有 20 个，2*3 的倍数有 16 个，2*5 的倍数有 10 个，3*5 的倍数有 6 个，2*3*5 的倍数有 3 个，故答案为 $100-50-33-20+16+10+6-3$ 个。 □

1.1.2 算两次

例 1.1.6. *10 块糖，每天至少吃一块，有多少种吃法*

解. 隔板法：10 块糖有 9 个空

一天吃完：C_9^0

两天吃完：C_9^1

$\cdots$

十天吃完：C_9^9

故一共有

$$C_9^0+C_9^1+\cdots+C_9^9=2^9$$

种吃法。 □

1.1.3 例子

例 1.1.7. 5 行 6 列的格，从左下走到右上，每次向右或向上，有多少走法

解. 一共需要向右 5 次，向上 4 次，顺序无关，共需要 9 次，只需要确定 4 次向上的时刻，故答案为 C_9^4 次。 □

例 1.1.8. 5 男 7 女坐成一排，两男不相邻，有多少坐法？坐成一圈有多少种坐法？

解. 分步：

先排女：7!

再插入男：A_8^5

共 $7! \times A_8^5$ 种坐法。

若坐成一圈，则少一个"空"，有 $6! \times A_7^5$ 种坐法。 □

例 1.1.9. 把字符串 *MISSISSIPPI* 重排，使得至少有两个 I 相邻。

解. 容斥原理：共 1M,4I,4S,2P

总共有 $C_{11}^1 \times C_{10}^4 \times C_6^4$ 种

不符合要求的有 $C_7^1 \times C_6^2 \times C_8^4$ 种

答案为 $C_{11}^1 \times C_{10}^4 \times C_6^4 - C_7^1 \times C_6^2 \times C_8^4$ 种。 □

例 1.1.10 (P20,9)**.** 不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 < 2012$ 有多少正整数解

解. 化为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 + x_{10} = 2012$，然后用隔板法。 □

1.2 初等计数方法

1.2.1 插空法

例 1.2.1 (经典例题)**.** 求 $x_1+\cdots+x_k=n$ 的正整数解的个数：C_{n-1}^{k-1}。

两种情况：

- 插空相同的东西
- 插空不同的东西

例 1.2.2 (P9 例 1.3.6)**.** 4 个 C，8 个 R，没有两个 C 相邻，求排列个数。

解. 先把 8 个 R 排好，把 4 个 C 插空：$1\times C_9^4$。 □

例 1.2.3. 4 个男，8 个女，没有两个男相邻，求排列个数。

解. 先把 8 个女排好，把 4 个男插空，此时有顺序：8 $\times 4!\times C_9^4$。 □

1.2.2 多重组合数

- 用 m 种颜色对 n 个物体染色，要求第 i 种颜色染 r_i 个物体，其中 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$：

$$C_n^{r_1}\times C_{n-r_1}^{r_2}\times C_{n-r_1-r_2}^{r_3}\times\cdots\times C_{r_m}^{r_m}.$$

定义 1.2.4. 称

$$\begin{aligned}&C_n^{r_1}\times C_{n-r_1}^{r_2}\times C_{n-r_1-r_2}^{r_3}\times\cdots\times C_{r_m}^{r_m}\\=&\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\frac{(n-r_1-r_2)!}{r_3!(n-r_1-r_2-r_3)!}\cdots\frac{r_m!}{r_m!}\\=&\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!}\end{aligned}$$

为多重组合数，记为

$$\binom{n}{r_1,\cdots,r_m}.$$

例 1.2.5. 把 $3n$ 个不同物体染成红绿蓝三色，每种颜色 n 个。

解. 直接用多重组合数：

$$\frac{(3n)!}{n!n!n!}$$

□

- 把 n 个不同物体分成 m 组，组不编号:

先把组编号化为上一种情况，再去掉组的编号。

例 1.2.6. 把 $3n$ 个不同物体分成三组，每组 n 个，组不编号:

解. 先把组编号化为上例，再去掉组的编号：

$$\frac{\frac{(3n)!}{n!n!n!}}{3!}$$

□

例 1.2.7 (P9 例 1.3.8)**.** 把集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 划分成 b_1 个 1-子集，b_2 个 2-子集，$\cdots$，b_k 个 k-子集，其中 $\sum_{i=1}^{k} ib_i=n$，有多少分法？

解. 先把每个 i-子集加上顺序，由 $\sum_{i=1}^{k} ib_i=n$ 直接用多重组合数：

$$\binom{n}{1,\cdots,1,2,\cdots,2,\cdots,k,\cdots,k},$$

其中有 b_i 个 i;

再去掉 b_i 个 i-子集间的顺序得：

$$\frac{\binom{n}{1,\cdots,1,2,\cdots,2,\cdots,k,\cdots,k}}{b_1!b_2!\cdots b_k!}.$$

□

例 1.2.8 (P20.8)**.** 至多 m 个 A 和至多 n 个 B 排一排，有多少排法（不计空排）？

解. [解一] i 个 A 和 j 个 B 排一排：$i+j$ 个位置选 i 个为 A，即

$$C_{i+j}^{i},$$

再对 i,j 求和并去掉空排：

$$(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_{i+j}^{i})-1.$$

□

解. [解二] 考虑将“至多”转化为确定的个数：

试建立题目中的排列方法与“$m+1$ 个 A 和 $n+1$ 个 B 排一排”的排列方法的对应：任意题目中的一个排列，最后一位若是 A，则先连续地补足 B 再补足 A；反之，最后一位若是 B，则先连续地补足 A 再补足 B。容易看出这是单射。例如 $m=3,n=5$ 时：

$$\mathrm{BABABB}\mapsto\mathrm{BABABB}\textcolor{red}{\mathrm{AABB}}.$$

反过来，任意新问题的一个排列，连续地从末尾去掉一次 A 和一次 B，得到一个原题目中的排列。例如：

$$\mathrm{ABABBA}\cancel{\mathrm{ABBB}}\mapsto\mathrm{ABABB}.$$

但注意，A$\cdots$AB$\cdots$B 与 B$\cdots$BA$\cdots$A 无原题目排列对应，

$$\cancel{\mathrm{AAAABBBBBB}}\mapsto 0\text{ 排列},$$

$$\cancel{\mathrm{BBBBBBAAAA}}\mapsto 0\text{ 排列}.$$

故总数为：

$$C_{m+n+2}^{m+1}-2.$$

□

注记 1.2.9. 由此两种方法，我们得到恒等式：

$$(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_{i+j}^{i})-1=C_{m+n+2}^{m+1}-2.$$

1.3 一些概念

定义 1.3.1. 集合，基数，幂集，笛卡尔积（卡积），映射，单射，满射，双射

定义 1.3.2. 记 $A^B = \{f : B \to A\}$，$\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$。

注记 1.3.3. 事实上，对任意集合 X，在 2^X 与 $\{0,1\}^X$ 之间有一个一一对应：将 $\forall\, U \subseteq X$ 对应到 $\chi_U(x) = \begin{cases} 0, & x \notin X; \\ 1, & x \in X. \end{cases}$ 。

1.3.1 多重集

将 3 个相同的苹果，2 个相同的梨分给 3 个小朋友甲乙丙，将计数问题转化为映射的计数问题：

$$\{\text{ 苹果，苹果，苹果，梨，梨 }\} \longrightarrow \{\text{ 甲，乙，丙 }\}$$

1.3.2 十二重计数法

P13 表 1.1

1.4 组合恒等式

1.4.1 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

- 对称性：

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i};$$

- 令 $x=y=1$：
$$2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i},$$
事实上，右式是加法原理（选 i 个有多少选法，再对 i 求和），左式是乘法原理（每一个是否被选）：从 n 个东西里选若干个，有多少选法；

- 令 $x=1,y=-1$：
$$0=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i},$$
这等价于
$$\sum_{i奇}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i偶}^{n}\binom{n}{i},$$
从而
$$\sum_{i奇}^{n}\binom{n}{i}=\#\{A\subset X|\,|A|\text{ 奇}\}$$
与
$$\sum_{i偶}^{n}\binom{n}{i}=\#\{B\subset X|\,|B|\text{ 偶}\}$$
之间有一一对应。

1.4.2 范德蒙恒等式

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i+j=k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}$$

证明. 计算 $(x+1)^{m+n}$ 中 x^k 的系数：

- 直接用二项式定理：$\binom{m+n}{k}$；
- 直接计算：

$$
\begin{aligned}
(x+1)^m \cdot (x+1)^n &= (\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i) \cdot (\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^{i+j} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} (\sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \binom{n}{j}) x^k.
\end{aligned}
$$

或用组合的方法看：前 m 个乘积里选 i 个 x, 后 n 个乘积里选 $k-i$ 个 x, 再对 i 从 0 到 k 求和。

□

- 令 $m=n=k$:

$$
\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{t}^2;
$$

- 令 $m=1$:

$$
\binom{n+1}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \binom{n}{j} = \binom{1}{0} \binom{n}{k} + \binom{1}{1} \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},
$$

该公式也能从组合的角度证明：从 $n+1$ 选 k 个，分两种情况：是否选择第 $n+1$ 个。

注记 1.4.1. 此乃杨辉三角：同行相邻两数相加等于下一行两数之间的数。

1.4.3 朱世杰恒等式

$$
\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}
$$

证明. 用归纳法:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+i}{n}+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k}{n+1}+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

□

注记 1.4.2. 这也是杨辉三角: 按左下右上的倾斜相加, 等于最下面数的右下角的数。从而我们可以得到一个新的证明:

证明. 将最上面的 1 变成它右下的 1, 从而能使用 "相邻数相加等于下一行二者之间的数", 用公式写出来就是以下的裂项计算:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}\\
=&\left[\binom{n+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}\right]+\left[\binom{n+2}{n+1}-\binom{n+1}{n+1}\right]+\cdots+\left[\binom{n+k+1}{n+1}-\binom{n+k}{n+1}\right]\\
=&\cancel{\binom{n+1}{n+1}}-\binom{n}{n+1}+\cancel{\binom{n+2}{n+1}}-\cancel{\binom{n+1}{n+1}}+\cdots+\binom{n+k+1}{n+1}-\cancel{\binom{n+k}{n+1}}\\
=&\binom{n+k+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}\\
=&\binom{n+k+1}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

还有一个纯组合的证明:

证明. 从 $\{1,2,\cdots,n+k+1\}$ 中选 $n+1$ 个数:

- 直接选有
$$\binom{n+k+1}{n+1};$$
- 设最大的数为 $n+i+1$, 有
$$\binom{n+i}{n},$$
再对 i 求和。

□

1.4.4 多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n}\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}.$$

1.4.5 Lucas 定理

设 p 是一个素数，把 m 和 n 写成 p 进制数：

$$m=\sum_{i=0}^{k}a_ip^i,n=\sum_{i=0}^{k}b_ip^i,$$

则

$$\binom{m}{n}\equiv\prod_{i=0}^{k}\binom{a_i}{b_i}(modp)$$

证明. 对 $\forall\ 1\le i\le p-1$,

$$p|\binom{p}{i}.$$

这是因为

$$p|p!=\binom{p}{i}\cdot i!(p-i)!,$$

且

$$p\nmid i!(p-i)!.$$

从而

$$(x+y)^p=x^p+x^p+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}x^iy^{p-i}\equiv x^p+x^p(modp).$$

从而由

$$(x+y)^{p^2}=((x+y)^p)^p\equiv(x^p+x^p)^p\equiv(x^p)^p+(y^p)^p=x^{p^2}+y^{p^2}(modp),$$

归纳地知，

$$(x+y)^{p^i}\equiv x^{p^i}+y^{p^i}(modp).$$

从而

$$\begin{aligned}(1+x)^m=(1+x)^{\sum_{i=0}^k a_ip^i}=\prod_{i=0}^k[(1+x)^{p^i}]^{a_i}\equiv\prod_{i=0}^k(1+x^{p^i})^{a_i}&=\prod_{i=0}^k\left[\sum_{r_i=0}^{a_i}\binom{a_i}{r_i}x^{r_ip^i}\right]\\&=\sum_{r_i=0}^{a_i}\left[\prod_{i=0}^k\binom{a_i}{r_i}x^{r_ip^i}\right]=\sum_{r_i=0}^{a_i}\left[\prod_{i=0}^k\binom{a_i}{r_i}x^{r_0+r_1p+\cdots+r_kp^k}\right](modp).\end{aligned}$$

上式倒数第二个等号事实上是分配律。而又 p 进制展开的唯一性，上式左端 x^n 的系数为 $\binom{m}{n}$，右端 x^n 的系数是当 $r_i=b_i$ 时取得，即

$$\prod_{i=0}^k\binom{a_i}{b_i},$$

从而

$$\binom{m}{n}\equiv\prod_{i=0}^k\binom{a_i}{b_i}(modp).$$

□

1.4.6 例子

例 1.4.3 (P20.8)**.** 还可以用朱世杰恒等式证明例 *1.2.8*得到的恒等式：

$$\sum_{j=0}^n C_{i+j}^i=C_{n+i+1}^{i+1},$$

$$\sum_{i=0}^{m} C_{n+i+1}^{i+1} = \sum_{i=0}^{m} C_{n+i+1}^{n} = \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{n} - C_{n}^{n} + C_{n+m+1}^{n} = C_{n+m+1}^{n+1} - 1 + C_{n+m+1}^{n} = C_{m+n+2}^{m+1} - 1,$$

即

$$(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} C_{i+j}^{i}) - 1 = C_{m+n+2}^{m+1} - 2.$$

例 1.4.4 (P21.11(d))**.** 证明恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} 2^{-k} = 2^{n}.$$

证明. 只要证:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} 2^{n-k} = 2^{2n}.$$

在 $\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$ 中至少选 $n+1$ 个，选法的个数为:

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

下面计算这个求和:

由恒等式:

$$2^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

取 $2n+1$ 得:

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k},$$

而右式:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} &= \binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\cdots+\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}+\cdots+\binom{2n+1}{2n+1} \\ &= \binom{2n+1}{2n+1}+\binom{2n+1}{2n}+\cdots+\binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n+1}+\cdots+\binom{2n+1}{2n+1} \\ &= 2\cdot\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}.$$

再考虑设第 $n+1$ 次选出的数为 $n+1+k$，前面 $n+k$ 个数中选 n 个，后面 $n-k$ 个数各自有选或不选两种情况，故选法个数为:

$$\binom{n+k}{n}2^{n-k},$$

从而总数为:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}2^{n-k}.$$

综上,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}2^{n-k}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}.$$

□

例 1.4.5 (P20.11(c))**.** 对 $\forall\ n\geq m$, 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=2^{m}\binom{n}{m}.$$

解. 有 n 对夫妻，从中选取 m 对，每对夫妻派一人参会，有多少选法。
算两次：

1. 先从 n 对夫妻中选取 m 对：$\binom{n}{m}$, 每对夫妻各有男女两种选法，总数为
$$2^m\binom{n}{m};$$

2. 对 $\forall\ 0 \le k \le n$, 先从 n 对夫妻选 k 个男性：$\binom{n}{k}$, 再在剩下 $n-k$ 对夫妻中选 $m-k$ 个女性：$\binom{n-k}{m-k} = \binom{n-k}{n-m}$, 故总数为
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}.$$

综上就有
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}.$$

□

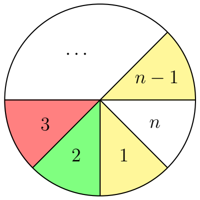
2 递推关系与生成函数

2.1 线性齐次递推关系

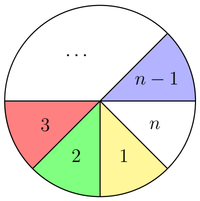
例 2.1.1. 将一个圆分为 n 个扇形，用 k 种颜色涂色，要求相邻的扇形颜色不同，有多少涂法？

解. 对 n 做递推：
设有 h_n 种涂法。先涂第 1 到 $n-1$ 个，有两种情况：

1. 第 1 和第 $n-1$ 块相同，这样的涂法有 h_{n-2} 种，此时第 n 块有 $k-1$ 种涂法；



2. 第 1 和第 $n-1$ 块不同，这样的涂法有 h_{n-1} 种，此时第 n 块有 $k-2$ 种涂法。



从而得到递推式：

$$h_n = (k-2)h_{n-1} + (k-1)h_{n-2}.$$

$\square$

定义 2.1.2. 称数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 k 阶常系数线性齐次递推关系，若对任意 $n \geq k$，成立

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k},$$

其中 a_i 是常数。

问题 2.1.3. 如何求解递推式？

2.1.1 2 阶常系数线性齐次递推关系的解法

定义 2.1.4. 对 2 阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n = ah_{n-1} + bh_{n-2},$$

称

$$\alpha^2 - a\alpha - b = 0$$

称为它的特征方程。

定理 2.1.5 (2 阶常系数线性齐次递推数列的通项公式)**.** 考虑特征方程的根的以下两种分布情况：

1. 若特征方程有两个不同的根 α_1, α_2, 则

   $$h_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$$

   是原递推关系式中 h_n 的通项公式，其中 λ, μ 是常数，可由两个初值确定；

2. 若特征方程有重根 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, 此时递推关系式为

   $$h_n = 2\alpha h_{n-1} - \alpha^2 h_{n-2},$$

   则设

   $$h_n = b_n \alpha^n,$$

带入递推关系式得，

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2},$$

它是等差数列，从而 $b_n = \lambda n + \mu$, 从而

$$h_n = (\lambda n + \mu)\alpha^n$$

是 h_n 的通项公式，其中 λ, μ 是常数，可由两个初值确定。事实上，当 $\alpha = 1$ 时，h_n 就是等差数列；

2.1.2 k 阶常系数线性齐次递推关系的解法

定义 2.1.6. 对 k 阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k},$$

称

$$\alpha^k - a_1\alpha^{k-1} - a_2\alpha^{k-2} \cdots - a_k\alpha^0 = 0,$$

称为它的特征方程。

定理 2.1.7 (k 阶常系数线性齐次递推数列的通项公式)**.** 递推数列

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k},$$

的特征方程

$$\alpha^k - a_1\alpha^{k-1} - a_2\alpha^{k-2} \cdots - a_k\alpha^0 = 0,$$

考虑特征方程的根的以下几种分布情况：

1. 若特征方程没有重根，设有 k 个不同的根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, 则

$$h_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_k\alpha_k^n,$$

是原递推关系式中 h_n 的通项公式，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是常数，可由 k 个初值确定：

$$\begin{cases} h_1=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k; \\ h_2=\lambda_1\alpha_1^2+\lambda_2\alpha_2^2+\cdots+\lambda_k\alpha_k^2; \\ \cdots \\ h_k=\lambda_1\alpha_1^k+\lambda_2\alpha_2^k+\cdots+\lambda_k\alpha_k^k. \end{cases}$$

而范德蒙行列式保证了以上方程组的解的唯一性；

2. 若特征方程有 k 重根，不妨先设根为 1，此时特征方程为

$$(\alpha-1)^k=0,$$

即

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\alpha^i=0,$$

递推关系式为：

$$h_{n+k}=C_k^1h_{n+k-1}+\cdots+(-1)^kh_n.$$

现在引进差分记号：

定义 2.1.8. 称

$$\triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$$

是函数 $f(x)$ 的差分。

归纳地可知，

$$\triangle^k f(x)=f(x+k)-C_k^1f(x+k-1)+C_k^2f(x+k-2)+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}f(x+1)+(-1)^kf(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^if(x+k-i).$$

由此，我们将数列看作定义域为 $\mathbb{N}^*$ 的函数，从而也可以对数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 做差分：

$$\triangle h_n = h_{n+1} - h_n.$$

此时，原递推关系式变成了

$$\triangle^k h_n = h_{n+k} - C_k^1 h_{n+k-1} + \cdots + (-1)^k h_n = 0,$$

即 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 k 阶差分为 0 的数列，它是次数低于 k 的多项式

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot n + \cdots + \lambda_k \cdot n^{k-1},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是常数，可由 k 个初值确定。

对一般的 k 重根 α, 设

$$h_n = b_n \alpha^n,$$

带入递推关系可得，b_n 是 $\alpha = 1$ 时的数列，是次数低于 k 的多项式，从而 h_n 的通项公式为

$$h_n = P_k(n)\alpha^n,$$

其中 P_k 是次数低于 k 的多项式；

3. 若特征方程有 t 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$, 重数分别为 $s_1, s_2, \cdots, s_t$, 则原递推关系式中 h_n 的通项公式为

$$h_n = P_1(n)\alpha_1^n + P_2(n)\alpha_2^n + \cdots + P_t(n)\alpha_t^n,$$

其中 P_i 是次数低于 s_i 的多项式，$1 \leq i \leq t$.

例 2.1.9. 由

$$\triangle^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i f(x+k-i),$$

且次数低于 k 的多项式的 k 阶差分为 0, 对 $\forall\ 1 \le j \le k-1$, 令 $f(x) = (k-x)^j$, 则

$$0 = \triangle^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i f(x+k-i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i (i-x)^j,$$

令 $x = 0$, 即得

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i i^j = 0.$$

例 2.1.10. 求解递推数列

$$h_n + h_{n-1} - 3h_{n-2} - 5h_{n-3} - 2h_{n-4} = 0$$

的通项公式，初值为 $h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2$.

解. 特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

解得有 3 重根 -1, 1 重根 2, 从而可设通项公式为

$$h_n = (an^2 + bn + c)(-1)^n + d \cdot 2^n,$$

结合初值可以解出 a, b, c, d, 从而通项公式为

$$h_n = (\frac{7}{9} - \frac{n}{3})(-1)^n + \frac{2}{9} \cdot 2^n.$$

□

例 2.1.11 (P25. 例 2.1.7)**.** 由字母 a,b,c 组成的长度为 n 的字符串，不得有两个连续的 a, 有多少组法。

解. 设组法有 h_n 个，分两种情况:

1. 最后一个不是 a, 是 b 或 c, 则前面 $n-1$ 个任意排，有 $2h_{n-1}$ 种;
2. 最后一个是 a, 则倒数第二个不是 a, 是 b 或 c, 前面 $n-2$ 个任意，有 $2h_{n-2}$ 种,

得到递推关系

$$h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2},$$

易得初值 $h_1 = 3, h_2 = 8$, 解得 h_n 的通项公式为

$$h_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$$

□

例 2.1.12 (P56 习题二 4). 用 $a(n,r)$ 表示从 $1,2,\cdots,n$ 中选取 r 个数使得任意两个都不相邻的取法数，求 $a(n,r)$ 的通项公式。

解. 分两种情况：

1. 选 1: 不能选 2, 后 $n-2$ 个数按要求选 $r-1$ 个，即 $a(n-2,r-1)$;
2. 不选 1: 后 $n-1$ 个按要求选 r 个，即 $a(n-1,r)$;

从而递推关系式为

$$a(n,r) = a(n-1,r) + a(n-2,r-1).$$

归纳地可知，

$$a(n,r) = \binom{n-r+1}{r}.$$

□

例 2.1.13. 设 $x_1 + x_2 = 1, x_1^2 + x_2^2 = 2$, 求 $x_1^7 + x_2^7$.

解. 设 $\sigma_1 = x_1 + x_2 = 1, \sigma_2 = x_1x_2 = \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2 - (x_1^2+x_2^2)\right) = -\frac{1}{2}$. 记 $s_n = x_1^n + x_2^n$, 注意到

$$s_n = x_1^n + x_2^n = (x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}) = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2},$$

解递推数列即得。 □

注记 2.1.14. $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}$ 乃 *Newton* 公式。

2.2 线性非齐次递推关系

例 2.2.1 (Hanoi 塔)**.** 有三根柱子和套在第一个柱子上的 n 个圆盘，尺寸自上而下递增，想要将圆盘转移到第二根柱子上，且顺序不变，规定每次移动一个圆盘，且大圆盘不能在小圆盘上面，求最少的步数。

解. 设 h_n 是移动步数，先将上面 $n-1$ 个挪到第三根柱子上，需要 h_{n-1} 步，将最大的移动到第二根，需要 1 步，再将第三根柱子上的 $n-1$ 个移动到第二根柱子，需要 h_{n-1} 步，故递推关系式为

$$h_n = 2h_{n-1} + 1.$$

显然 $h_1 = 1$, 而

$$h_n + 1 = 2h_{n-1} + 1 + 1 = 2(h_{n-1} + 1)$$

是关于 $\{h_n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ 的线性齐次递推式，解得

$$h_n = 2^n - 1.$$

□

例 2.2.2 (P29 例 2.2.4)**.** 平面上有 n 条直线，任意两条直线都不互相平行，且不存在三线共点，则这 n 条直线将平面分成多少个部分。

解. 设这 n 条直线将平面分成 h_n 个部分，第 n 条直线与前面 $n-1$ 条直线有 $n-1$ 个交点，它被分成 n 段，每段都把原来 a_{n-1} 块的某部分一分为二，增加了 n 个新区域，从而得到递推关系式

$$h_n = h_{n-1} + n.$$

求解通项公式：显然 $h_1 = 2$, 并且注意到差分

$$h_n = (h_n - h_{n-1}) + (h_{n-1} - h_{n-2}) + \cdots + (h_2 - h_1) + h_1 = n + n - 1 + \cdots + 1 + 2 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

□

定义 2.2.3. 称数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足常系数线性非齐次递推关系，若对任意 $n \geq k$，成立

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k} + f(n),$$

其中 a_i 是常数。

问题 2.2.4. 如何求解一般的线性非齐次递推关系？

解.

$$\text{线性非齐次递推关系的通解} = \text{线性非齐次递推关系的通解} + \text{线性非齐次递推关系的一个特解}$$

□

对于一般的 $f(n)$ 没有普适的求解特解的方法，我们现在关注当 $f(n)$ 是多项式的情况。

2.2.1 多项式型线性非齐次递推关系的解法

解. 若 $f(n)$ 是 t 次多项式，尝试设特解也是 t 次多项式

$$p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0,$$

其中 $p_0, p_1, \cdots, p_t$ 是待定系数，带入递推关系与初值求解。若无解，则设特解是 $t+1$ 次多项式，再次尝试。

□

例 2.2.5 (P28 例 2.2.2)**.** 求解线性非齐次递推关系

$$h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2} + 2n,$$

初值为 $h_0 = 1, h_1 = 0.$

解. 线性齐次递推

$$A_n = 6A_{n-1} - 9A_{n-2}$$

的通解为 $A_n = (an+b)3^n$.

设特解为 $B_n = cn + d$, 带入递推关系得 $B_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$. 带入初值，得

$$h_n = \left(-\frac{n}{6} - \frac{1}{2}\right)3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}.$$

□

注记 2.2.6. 求解时应该将齐次的通解 A_n 与特解 B_n 求出后，再对 $h_n = A_n + B_n$ 带入初值。

例 2.2.7. 求解线性非齐次递推关系

$$h_n = 6h_{n-1} - 5h_{n-2} + 2n,$$

初值为 $h_0 = 1, h_1 = 0$.

解. 线性齐次递推

$$A_n = 6A_{n-1} - 9A_{n-2}$$

的通解为 $A_n = (an+b)3^n$.

设特解为 $B_n = cn + d$, 带入递推关系发现无解！再设特解为 $B_n = cn^2 + dn + e$, 此时有解。 □

注记 2.2.8. 例 *2.2.5*与例 *2.2.7*为何不同？因为他们的特征方程不同：

例 *2.2.5*的特征方程为

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0,$$

它的根为

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3.$$

例 *2.2.7*的特征方程为

$$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0,$$

它的根为

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 5.$$

例 2.2.7的特征方程的根有 1, 它的齐次方程的通解就带有一次。

2.3 生成函数

2.3.1 普通生成函数

定义 2.3.1. 对数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, 称

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

是 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

普通生成函数适用于

- 线性递推;
- 多重集的 n-组合问题;
- 递推关系有卷积。

例 2.3.2. 递推式

$$h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2},$$

其中初值为 $h_0 = 1, h_1 = 3$. 求它的生成函数 $f(x)$.

解. 由递推关系,

$$\sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(2h_{n-1} + 2h_{n-2})x^n = 2x\sum_{n=2}^{\infty} h_{n-1}x^{n-1} + 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} h_{n-2}x^{n-2} = 2x\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n + 2x^2\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n,$$

即

$$f(x)-1-3x=2x(f(x)-1)+2x^2f(x),$$

解得

$$f(x)=\frac{1+3x}{1-2x-2x^2}.$$

□

例 2.3.3 (P34 例 2.3.10)**.** 给定 k, 设 h_n 是方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$$

的非负正数解的个数，由隔板法知，

$$h_n=\binom{n+k-1}{n},$$

求 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数的闭形式。

解. 注意到 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$h(x)=\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)}_{k\text{个}}=(1+x+x^2+\cdots)^k=\frac{1}{(1-x)^k}.$$

这是因为

$$h(x)=\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)}_{k\text{个}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_k=n\\ t_i\text{是非负整数}}}x^{t_1+t_2+\cdots+t_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_k=n\\ t_i\text{是非负整数}}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n.$$

□

例 2.3.4 (P35 例 2.3.12)**.** 从而数量不限的苹果，香蕉，橘子和梨中，选取 n 个水果，其中苹果偶数个，香蕉的数量是 5 的倍数，橘子最多 4 个，梨最多 1 个，求取法 h_n.

证明. 同理例 2.3.3,$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n.$$

这是因为

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{t_1+t_2+t_3+t_4=n\\ t_1\text{是偶数}\\ t_2\text{是5的倍数}\\ 0\le t_3\le 4\\ 1\le t_4\le 1}}x^{t_1+t_2+t_3+t_4}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{t_1+t_2+t_3+t_4=n\\ t_1\text{是偶数}\\ t_2\text{是5的倍数}\\ 0\le t_3\le 4\\ 1\le t_4\le 1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}h_nx^n.$$

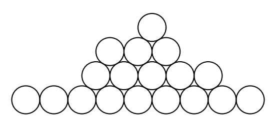
从而 $h_n=\binom{n+1}{n}=n+1$. □

性质 2.3.5. 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 分别是 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函数，则

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}x^n$$

是 $\{\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}x^n\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函数，称 $\{\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}x^n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的卷积，记为 $\{a_n\}*\{b_n\}$.

例 2.3.6 (P42 例 2.3.33)**.** 用硬币垒成一个“喷泉”如下：每行的硬币都连续摆在一起，除最下一行外，每枚硬币恰好置于其下面一行的两枚硬币之间。



令 f_n 表示最下一行有 n 枚硬币的垒法总数，求 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

解. 首先 $f_0=1$. 对 $n\geq 1$,

1. 若只有一行：只有一种；

2. 若不止一行：倒数第二行可以有 k 枚硬币，其中 $1 \le k \le n-1$，且这 k 枚硬币有 $n-k$ 种垒法，

于是

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)f_k + 1 = \sum_{k=0}^{n}(n-k)f_k + 1 - n.$$

即 $\{f_n - 1 + n\} = \{f_n\} * \{n\}$, 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f_n - 1 + n)x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} n x^n),$$

设 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为 $f(x)$, 则

$$f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = f(x) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} n x^n),$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)' = \frac{x}{(1-x)^2},$$

从而

$$f(x) - \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = f(x) \cdot \frac{x}{(1-x)^2},$$

解得

$$f(x) = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}.$$

□

注记 2.3.7. 如何计算 f_n 的通项公式？

用待定系数法计算：

$$\frac{1-2x}{1-3x+x^2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}} - 1}{x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - 1}{x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}},$$

做幂级数展开得

$$\frac{1-2x}{1-3x+x^2}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}-1}{x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}-1}{x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^n+\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{x}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^n+\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^n\right]x^n,$$

即

$$f_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{x}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^n+\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^n.$$

例 2.3.8 (Catalan 括号串，P45 例 2.3.42)**.** 考虑如下定义的合法括号串：n 个左括号与 n 个右括号排成一排，要求在任何一个位置，其左边的左括号不比右括号少。令 f_n 是合法括号串总数，求 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函数。

解. 显然有

1. $f_1=1:()$;
2. $f_2=2:(()),()()$;
3. $f_3=5:((())),(()()),()(()),(())(),()()()$,

定义 $f_0=1$.

考虑本原括号串：在除最后一个位置，其左边的左括号严格少于右括号。

$$(()())\ \checkmark\quad(())()\ \times$$

令 g_n 是本原括号串总数。而在每一个合法括号串最左边加一个左括号最右边加一个右括号是本原括号串，每一个本原括号串去掉最左的左括号和最右的右括号是合法括号串，

$$(())()\longleftrightarrow((())())$$

从而 $g_n=f_{n-1}$, $g_1=f_1$. 设 k 为一个合法括号串第一次到达左右括号数相等左右括号数，则 $1\le k\le n$, 且 $n\ge 1$ 时，

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}g_kf_{n-k}=\sum_{k=1}^{n}f_{k-1}f_{n-k}.$$

记 f 是 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数，令 $b_0=0$, $b_k=f_{k-1}$, 则 $n\geq 1$ 时，

$$f_n=\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}f_{n-k}=\sum_{k=1}^{n} b_k f_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k},$$

即 $\{f_n\}=\{b_n\}*\{f_n\}$, 从而

$$\begin{aligned}
f(x)-f_0=f(x)-1=\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k}\right)x^n+b_0 f_n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k}\right)x^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) f(x) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} f_{k-1} x^k\right) f(x)=x\left(\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}x^{k-1}\right) f(x)=x\left(\sum_{k=0}^{n} f_k x^k\right) f(x)=xf^2(x),
\end{aligned}$$

解得

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x},$$

由初值 $f(0)=1$ 可以确定，

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

□

例 2.3.9 (P20.11(b)). 证明组合恒等式：$\forall\, n,m>0$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}=0.$$

证明. 取定 N,M, 令 $a_n=(-1)^n\binom{N}{n}$, $b_n=\binom{n+M-1}{n}$, 则 $\{c_n\}=\{a_n\}*\{b_n\}$ 的通项公式为

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{N}{k}\binom{n+M-1-k}{n-k},$$

而

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (1-x)^N \cdot \frac{1}{(1-x)^M} = (1-x)^{N-M}.$$

从而当 $n > N - M$ 时，$c_n = 0$, 特别地，$c_{N-M+1} = 0$, 即

$$c_{N-M+1} = \sum_{k=0}^{N-M+1} (-1)^k \binom{N}{k} \binom{N-M+1+M-1-k}{N-M+1-k} = \sum_{k=0}^{N-M+1} (-1)^k \binom{N}{k} \binom{N-k}{N-M+1-k} = 0,$$

换记号, 令 $N = n$, $N - M + 1 = m$, 即得,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k} = 0.$$

□

性质 2.3.10. 设数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为 $f(x)$, 它的前 n 项和数列为 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, 则 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为 $\frac{f(x)}{1-x}$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{f(x)}{1-x}.$$

证明. 直接计算：

$$\frac{f(x)}{1-x} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \cdot x^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_m) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m.$$

□

例 2.3.11 (P34 例 2.3.10). 续例 *2.3.3*, 由性质 *2.3.10*, 用朱世杰恒等式，对 k 归纳即知，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1+i}{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1+i}{i} x^n = \frac{\frac{1}{(1-x)^{k-1}}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

例 2.3.12. 求 $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$ 的通项公式。

解. 通过求 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数求 $S_n=\sum_{k=0}^{n}kq^k$ 的通项公式。由例 2.3.11,

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2-1}{n}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x},$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}nq^nx^n=\frac{1}{(1-qx)^2}-\frac{1}{1-qx},$$

从而由性质 2.3.10可知,$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$\frac{\frac{1}{(1-qx)^2}-\frac{1}{1-qx}}{1-x},$$

裂项并展开为幂级数即得 $S_n=\sum_{k=0}^{n}kq^k$ 的通项公式。 □

例 2.3.13 (P20.9)**.** 不等式

$$x_1+x_2+\cdots+x_9<2012$$

的非负整数解有多少个？

解. 对 $\forall\ 0\le n\le 2011$, 由隔板法可知，不等式

$$x_1+x_2+\cdots+x_9=n$$

的非负整数解有

$$a_n=\binom{n+9-1}{n}$$

个，即求 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的前 n 项和数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的第 2011 项。由例 2.3.11知，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函数为 $\frac{1}{(1-x)^9}$, 且由性质 2.3.10,$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函数为

$$\frac{\frac{1}{(1-x)^9}}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^{10}},$$

从而将 $\frac{1}{(1-x)^{10}}$ 展开为幂级数后，x^{2011} 项的系数即为 S_{2011}. □

2.3.2 指数型生成函数

定义 2.3.14. 对数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, 称

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} x^n$$

是 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数。

性质 2.3.15. 若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x)$, 则数列 $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $(x\,\mathrm{D})f(x)$, 这里用 $x\,\mathrm{D}$ 表示 $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

性质 2.3.16. 若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, 则它的移项数列 $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$.

例 2.3.17. 设数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推关系 $h_{n+2} = h_{n+1} + h_n$, 初值为 $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, 求数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数。

解. 由递推关系,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+2}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+1}}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} x^n,$$

由移项性质 2.3.16, 即

$$f''(x) = f'(x) + f(x),$$

解常微分方程即知,

$$f(x) = c_1 \cdot e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 \cdot e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x},$$

带入初值确定 c_1, c_2 即可。 □

定义 2.3.18. 数列 $\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的卷积，记为 $\{a_n\} *_e \{b_n\}$.

性质 2.3.19. 设数列 $\{c_n\} = \{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\} = \{a_n\} *_e \{b_n\}$, 其中 $\{a_n\}$, $\{a_n\}$, $\{a_n\}$ 的指数型生成函数分别为 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, 则 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

证明. 直接计算:

$$f(x)\cdot g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_kb_{n-k}}{k!(n-k)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!a_kb_{n-k}}{k!(n-k)!}}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}}{n!}x^n.$$

□

例 2.3.20 (P36 例 2.3.14)**.** 令 B_n 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上所有划分的个数，求 B_n 的指数型生成函数。

解. 考虑任意划分中含 n 的子集，它的元素个数为 k, 剩下 $k-1$ 个元素是从集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中取的，自然也是它的一个划分，从而

$$B_n=\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k-1}B_{n-k}+1,$$

约定 $h_0=1$ 即有

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}B_{n-k},$$

整理得

$$B_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}B_{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_{n-k}\cdot 1,$$

即 $\{B_{n+1}\}=\{B_n\}*_e\{1\}$. 设 $\{B_n\}$ 的指数型生成函数为 $h(x)$, 则由移项性质 2.3.16,

$$h'(x)=h(x)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right)=h(x)e^x,$$

解常微分方程得,

$$h(x)=e^c\cdot e^{e^x},$$

带入初值 $h_0=1$ 计算即得,

$$h(x)=e^{e^x-1}.$$

□

例 2.3.21 (错位排列问题)**.** 求排列 $\sigma:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $\forall\ 1\le i\le n$, $\sigma(i)\neq i$ 的个数的数列 $\{d_n\}$ 的指数型生成函数。

解. 考虑不动点个数为 k 的排列，全排列共用 $n!$ 个，从而

$$n!=d_n+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot d_{n-k}\cdot 1,$$

从而 $\{n!\}=\{d_n\}*_e\{1\}$, 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=d(x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,$$

即

$$\frac{1}{1-x}=d(x)\cdot e^x,$$

即

$$d(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

□

例 2.3.22 (P57.7)**.** 对 *Fibonacci* 数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, 证明若 $k|m$, 则 $f_k|f_m$.

证明. 由二阶齐次线性递推关系的解法与初值 $f_1=f_2=1$ 可知，Fibonacci 数列的通项公式为

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

- 对 $\forall\,n$, $a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 是整数: 寻找特征方程, 它以 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 为根, 它就是 Fibonacci 数列的特征方程 $\lambda^2-\lambda-1=0$, 只是初值不同，从而数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足递推关系

  $$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,$$

  且初值 $a_0=2,a_1=1$ 是整数，从而对 $\forall\,n$, a_n 是整数。

对 $\forall k$, 令 $b_n = f_{kn} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]^n$, 即证 $b_1|b_n$. 寻找特征方程，它以 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ 为根，从而数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足递推关系

$$b_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] b_{n-1} - (-1)^k b_{n-2},$$

而初值为 $b_0 = f_0 = 0, b_1 = f_k$, b_1 都整除 b_0, b_1, 从而由递推关系，b_1 整除 b_0, b_1 的任意整系数线性相加，即 $b_1|b_n$. □

例 2.3.23 (P58.15)**.** 令 $D_k(n)$ 表示 S_n 中恰好有 k 个不动点的置换的个数，证明

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} D_k(n)\frac{x^n y^k}{n!} = \frac{e^{-x(1-y)}}{1-x}.$$

证明. 记号同例 2.3.21, 可知 $D_k(n) = C_n^k \cdot d_{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot d_{n-k}$, 从而

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} D_k(n)\frac{x^n y^k}{n!} = \sum_{n\geq k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot d_{n-k} \cdot \frac{x^n y^k}{n!} \overset{n-k=m}{=} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{x^k y^k}{k!} \cdot \frac{d_m x^m}{m!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m x^m}{m!}\right) = e^{xy} \cdot \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-x(1-y)}}{1-x}.$$

□

指数型生成函数可以解决多重集的 n-排列问题

定理 2.3.24. 有 k 个符号 $t_1, t_2, \cdots, t_k$, 多重集 $S = \{\infty \cdot t_1, \infty \cdot t_2, \cdots, \infty \cdot t_k\}$, 规则 P 是关于 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的彼此无关的条件，将由 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 组成的满足 P 的 n-排列数记为 h_n, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} x^n = f_1(x) f_2(x) \cdots f_k(x),$$

其中

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(i)}}{n!} x^n,$$

其中 $a_n^{(i)}$ 是全部由 t_i 组成的满足 P 的 n-排列数，从而 $a_n^{(i)} \in \{0, 1\}$.

证明. 求 m_1 个 t_1,m_2 个 t_2,$\cdots$,m_k 个 t_k 的排列数，$m_1+m_2+\cdots+m_k=n$. 先由多重组合数得出所有排列数 $\binom{n}{m_1,\cdots,m_k}$, 再让它满足条件 P:$\binom{n}{m_1,\cdots,m_k}a_{m_1}^{(1)}a_{m_2}^{(2)}\cdots a_{m_k}^{(k)}$, 从而

$$h_n=\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n}\binom{n}{r_1,\cdots,r_m}a_{m_1}^{(1)}a_{m_2}^{(2)}\cdots a_{m_k}^{(k)},$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n}\frac{\binom{n}{r_1,\cdots,r_m}}{n!}a_{m_1}^{(1)}a_{m_2}^{(2)}\cdots a_{m_k}^{(k)}x^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_k!}a_{m_1}^{(1)}a_{m_2}^{(2)}\cdots a_{m_k}^{(k)}x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_k}\\&=\sum_{m_1,\cdots,m_k=0}^{\infty}\frac{a_{m_1}^{(1)}}{m_1!}x^{m_1}\cdot\frac{a_{m_2}^{(2)}}{m_2!}x^{m_2}\cdots\frac{a_{m_k}^{(k)}}{m_k!}x^{m_k}\\&=\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{a_{m_1}^{(1)}}{m_1!}x^{m_1}\cdot\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{a_{m_2}^{(2)}}{m_2!}x^{m_2}\cdots\sum_{m_k=0}^{\infty}\frac{a_{m_k}^{(k)}}{m_k!}x^{m_k}\\&=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_k(x).\end{aligned}$$

□

例 2.3.25 (P49 例 2.3.49)**.** 用红白蓝三色对一行 n 列的方格涂色，要求红色偶数个格，有多少涂色方法？

解. 设有 h_n 种方法，由定理 2.3.24, 白蓝无要求，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n}{n!}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\right)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x\right)^2=\frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)}{n!}x^n,$$

即 $h_n=\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)$. □

例 2.3.26 (P50 例 2.3.50)**.** 求每位数字都是奇数，1 和 3 出现偶数次，求这样的 n 位数的个数。

解. 由定理 2.3.24, $t_1=1,t_2=3,\cdots,t_5=9$, 对 t_3,t_4,t_5 没有约束，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n}{n!}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)^3\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\right)^2=e^{3x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right)}{n!}x^n,$$

即 $h_n=\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right)$. □

2.3.3 Dirichlet 生成函数

定义 2.3.27. 对数列 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$，称

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n}{n^s}$$

是 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数。

定义 2.3.28 (乘性卷积)**.** 设两个数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，它们的乘性卷积 $\{a_n\}*_d\{b_n\}=\{c_n\}$ 定义为

$$c_n=\sum_{kl=n}a_kb_l.$$

注记 2.3.29. $(\{所有数列\},+,*_d)$ 是一个交换环，乘法结合律和交换律容易验证，零元是全零数列，单位元为

$$\delta_1(n)=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n>1,\end{cases}$$

全 1 数列的逆为

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1;\\ (-1)^t, & n\text{可以写成}t\text{个不同一次素因子分解};\\ 0, & n\text{有平方素因子},\end{cases}$$

称它为 *Möbius* 函数。

定义 2.3.30 (积性函数)**.** 若函数 $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $(m,n)=1$,

$$f(mn)=f(m)f(n),$$

则称 f 是积性函数。

例 2.3.31. δ_1, $\mathbb{1}$, μ 都是积性函数。

命题 2.3.32. 若 f,g 是两个积性函数，则 $f*_d g$ 也是积性函数。

证明. 设 $(m,n)=1$,

$$\begin{aligned} f*_d g(m)f*_d g(n) = \sum_{t|m} f(t)g(\frac{m}{t})\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{t|m,d|n} f(t)g(\frac{m}{t})f(d)g(\frac{n}{d}) &= \sum_{t|m,d|n} f(t)f(d)g(\frac{m}{t})g(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{t|m,d|n} f(td)g(\frac{mn}{td}) \\ &= \sum_{l|mn} f(l)g(\frac{mn}{l}) = f*_d g(mn), \end{aligned}$$

其中第一个换行处的等号是因为 $(m,n)=1$, 从而 $\forall\, t|m, d|n$, $(t,d)=1$ 且 $(\frac{m}{t},\frac{n}{d})=1$，这与第二个换行处的等号一样可由素因子分解直接得到。 □

命题 2.3.33. 若 f,g 是两个积性函数，则 $f=g$ 当且仅当对任意素数 p 与非负整数 s, $f(p^s)=g(p^s)$.

证明. 对任意 $n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_r^{s_r}$,

$$f(n)=f(p_1^{s_1})f(p_2^{s_2})\cdots f(p_r^{s_r}),$$

$$g(n)=g(p_1^{s_1})g(p_2^{s_2})\cdots g(p_r^{s_r}),$$

即证。 □

例 2.3.34. 证明 $\mathbb{1}*_d \mu=\delta_1$.

证明. 首先,

$$\mathbb{1}*_d \mu(1)=1\cdot 1=1=\delta_1(1).$$

对任意素数 p 与正整数 s,

$$\mathbb{1}*_d \mu(p^s)=\sum_{d|p^s}\mu(d)\cdot\mathbb{1}(\frac{p^s}{d})=\sum_{i=0}^{s}\mu(p^i)=\mu(1)+\mu(p)=1+(-1)=0=\delta_1(p^s),$$

由命题 2.3.33即证。 □

性质 2.3.35. 设 $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ 与 $g(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}$ 分别是数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的 *Dirichlet* 生成函数，则 $f(s)g(s)$ 是数列 $\{a_n\}*_d\{b_n\}$ 的生成函数。

定理 2.3.36 (Möbius 反演)**.** 设两个数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若 $a_n=\sum_{d|n}b_d$, 则

$$b_n=\sum_{d|n}\mu(d)a_{\frac{n}{d}}.$$

证明. 注意到

$$\{a_n\}=\{b_n\}*_d\{\mathbb{1}\},$$

由注记 2.3.29与例 2.3.34,

$$\{b_n\}=\{b_n\}*_d\{\delta_1\}=\{b_n\}*_d\{\mathbb{1}\}*_d\{\mu\}=\{a_n\}*_d\{\mu\}.$$

□

例 2.3.37 (P54 例 2.3.63)**.** 一个由 0 和 1 排成的序列称为本原的, 若它不能写成多余一个完全相同的子列的并置, 如 <u>0011</u> <u>0011</u> <u>0011</u> 不是本原的。令 f_n 表示长度为 n 的本原序列的个数，求 f_n 的显式表达式。

解. 设 a_n 是长度为 n 的所有序列的数量，则 $a_n=2^n$. 对任意一个长度为 n 的序列，它一定能唯一地写成 d 个本原序列的并置，其中 $d\geq 1, d|n$, 它自己是本原的当且仅当 $d=1$, 从而

$$a_n=\sum_{d|n}f_d,$$

由 Möbius 反演（定理 2.3.36）,

$$f_n=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})a_d=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})2^d.$$

□

例 2.3.38 (Euler 函数)**.** *Euler* 函数定义为：

$$\varphi(n)=|\{1\leq i\leq n\mid (i,n)=1\}|,$$

即不大于 n 且与 n 互素的数的个数。记 $X_n=\{1\leq i\leq n\mid(i,n)=1\},Y_n=\{1,2,\cdots,n\}$,

$$Y_n=\bigsqcup_{d|n}\{1\leq i\leq n\mid(i,n)=d\},$$

而注意到

$$\{1\leq i\leq n\mid(i,n)=d\}=\{1\leq i\leq n\mid(\frac{i}{d},\frac{n}{d})=1\}=\{dj\mid(j,\frac{n}{d})=1,1\leq j\leq\frac{n}{d}\}$$

与集合

$$\{j\mid(j,\frac{n}{d})=1,1\leq j\leq\frac{n}{d}\}$$

有一一对应，且

$$\left|\{j\mid(j,\frac{n}{d})=1,1\leq j\leq\frac{n}{d}\}\right|=\varphi(\frac{n}{d}),$$

从而

$$n=|Y_n|=\left|\bigsqcup_{d|n}\{1\leq i\leq n\mid(i,n)=d\}\right|=\sum_{d|n}|\{1\leq i\leq n\mid(i,n)=d\}|=\sum_{d|n}\left|\{j\mid(j,\frac{n}{d})=1,1\leq j\leq\frac{n}{d}\}\right|=\sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d}),$$

由 *Möbius* 反演（定理 *2.3.36*),

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

3 容斥原理

3.1 容斥原理与计数

定理 3.1.1 (容斥原理).

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

命题 3.1.2.

$$\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}-\sum_{i<j}\chi_{A_i\cap A_j}+\sum_{i<j<k}\chi_{A_i\cap A_j\cap A_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}.$$

证明. 对 $\forall\, x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 不妨设 $x\in A_1,A_2,\cdots,A_k$, $x\notin A_{k+1},A_{k+2},\cdots,A_n$. 记 $A_I=\bigcap_{i\in I}A_i$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}-\sum_{i<j}\chi_{A_i\cap A_j}+\sum_{i<j<k}\chi_{A_i\cap A_j\cap A_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\sum_{1\le|I|\le n}(-1)^{|I|-1}\chi_{A_I},$$

从而 $x\in A_I$ 当且仅当 $I\subset\{1,2,\cdots,n\}$, 于是

$$\sum_{1\le|I|\le n}(-1)^{|I|-1}\chi_{A_I}(x)=\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\cdot 1=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}C_k^r=-\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r+1=(1+x)^k|_{x=-1}+1=1,$$

即

$$\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x)=1=\sum_{1\le|I|\le n}(-1)^{|I|-1}\chi_{A_I}(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}-\sum_{i<j}\chi_{A_i\cap A_j}+\sum_{i<j<k}\chi_{A_i\cap A_j\cap A_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}\right)(x),$$

即

$$\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}-\sum_{i<j}\chi_{A_i\cap A_j}+\sum_{i<j<k}\chi_{A_i\cap A_j\cap A_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}.$$

□

容斥原理的证明. 只需要注意到 $\forall\ B \subset X$,

$$|B| = \sum_{x\in X} \chi_B(x),$$

再由命题 3.1.2即证。 □

定理 3.1.3 (容斥原理)**.** 设 X 是一个集合，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个性质，$X_I = \{x \in X \mid x\text{满足性质}P_i, \forall\ i \in I\}$, 则

$$|(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c| = \sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|I|} |X_I|\,.$$

例 3.1.4. 求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18,$$

的整数解的个数，其中要求 $1 \le x_1$, $-2 \le x_2$, $0 \le x_3$, $3 \le x_4$.

解. 做换元

$$\begin{cases} y_1 = x_1; \\ y_2 = x_2 + 3; \\ y_3 = x_3 + 1; \\ y_4 = x_4 - 2. \end{cases}$$

问题转换为求方程

$$y_1 + (y_2 - 3) + (y_3 - 1) + (y_4 + 2) = 18$$

即

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$$

的正整数解的个数，由隔板法即知，有 C_{19}^3 组解。 □

例 3.1.5. 求方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20,$$

的整数解的个数，其中要求 $1 \le y_1 \le 5$, $1 \le y_2 \le 7$, $1 \le y_3 \le 6$, $1 \le y_4 \le 7$.

解. 令

$$\begin{cases} P_1 : y_1 \geq 6; \\ P_2 : y_2 \geq 8; \\ P_3 : y_3 \geq 7; \\ P_4 : y_4 \geq 8, \end{cases}$$

同理例 3.1.4, 求出 $|X_I|, I \subset \{1,2,3,4\}$, 用容斥原理 3.1.3即知。 □

例 3.1.6 (P63 例 3.1.9)**.**

例 3.1.7 (错位排列问题)**.** 令 $X = \{\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列$\}$, $S = \{\sigma \in X \mid \sigma(i) \neq i, \forall\ 1 \leq i \leq n\}$. 令

$$\begin{cases} P_1 : \sigma(1) = 1; \\ P_2 : \sigma(2) = 2; \\ \cdots \\ P_n : \sigma(n) = n, \end{cases}$$

从而

$$|S| = \sum_{I \subset \{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|I|} |X_I| .$$

而注意到 $\forall\ I \subset \{1,2,\cdots,n\}$,

$$|X_I| = (n - |I|)!,$$

从而

$$|S| = \sum_{I \subset \{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|I|} |X_I| = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t C_n^t (n-t)!.$$

例 3.1.8 (P20.11.(b))**.** 证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k} = 0.$$

解. 令 $X = \{\{1,2,\cdots,n\}\text{的}m\text{元子集}A\}$,

$$\begin{cases} P_1 : 1 \in A; \\ P_2 : 2 \in A; \\ \cdots \\ P_n : n \in A, \end{cases}$$

则 $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c = \varnothing$, 而注意到 $\forall\ I \subset \{1,2,\cdots,n\}$,

$$|X_I| = \binom{n-|I|}{m-|I|},$$

由容斥原理定理 3.1.3,

$$0 = |(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c| = \sum_{I \subset \{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|I|} |X_I| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k}.$$

□

例 3.1.9. 证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^j = \begin{cases} 0, & j < n; \\ n!, & j = n. \end{cases}$$

解. 令 $X = \{1,2,\cdots,n\}^{\{1,2,\cdots,j\}}$,

$$\begin{cases} P_1 : 1 \notin Imf; \\ P_2 : 2 \notin Imf; \\ \cdots \\ P_n : n \notin Imf, \end{cases}$$

则 $(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n)^c=\begin{cases}\varnothing, & j<n;\\ \{1,2,\cdots,n\}^{\{1,2,\cdots,n\}}, & j=n,\end{cases}$, 从而

$$|(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n)^c|=\begin{cases}0, & j<n;\\ n!, & j=n.\end{cases}$$

而注意到 $\forall\ I\subset\{1,2,\cdots,n\}$,

$$|X_I|=\left|(\{1,2,\cdots,n\}-I)^{\{1,2,\cdots,j\}}\right|=(n-|I|)^j\,,$$

由容斥原理定理 3.1.3,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^j=\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}}(-1)^{|I|}\,|X_I|=|(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n)^c|=\begin{cases}0, & j<n;\\ n!, & j=n.\end{cases}$$

□

例 3.1.10 (P65 例 3.1.11). 在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有排列中，有多少不含以下任意一个二元子序列？

$$12,23,\cdots,(n-1)n.$$

解. 令

$$\begin{cases}P_1:\text{含有子序列}12;\\ P_2:\text{含有子序列}23;\\ \cdots\\ P_{n-1}:\text{含有子序列}(n-1)n,\end{cases}$$

对 $\forall\ 1\le k\le n-1$, 将子序列 $k(k+1)$ 看成一个元素，从而

$$|X_k|=(n-1)!.$$

对 $I\subset\{1,2,\cdots,n\}$, $|I|=2$, 分两种情况：

1. 若 $I=\{k,k+1\}$, 则将子序列 $k(k+1)(k+2)$ 看成一个元素，从而此时，

$$|X_I|=(n-2)!;$$

2. 若 $I=\{k,j\}$, $|k-j|\geq 2$, 则将子序列 $k(k+1)$ 与 $j(j+1)$ 各自看成一个元素，从而此时，

$$|X_I|=(n-2)!.$$

同理，归纳地可知，对 $\forall\ I\subset\{1,2,\cdots,n\}$, $|I|=k$,

$$|X_I|=(n-k)!.$$

从而由容斥原理定理 3.1.3, 符合要求的排列的个数为

$$|(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_{n-1})^c|=\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}}(-1)^{|I|}\,|X_I|=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!.$$

□

3.2 偏序集上的 Möbius 反演

例 3.2.1 (P75 例 3.2.15)**.** *Euler* 函数

$$\varphi(n)=|\{k\mid 1\leq k\leq n,\gcd(k,n)=1\}|,$$

即不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数。求它的计算公式。

解. 对 $\forall\, d|n$, 记

$$A_d=\{k\mid 1\leq k\leq n,\gcd(k,n)=d\},$$

则

$$|A_d|=|\{k\mid 1\leq k\leq n,\gcd(k,n)=d\}|=\left|\left\{\frac{k}{d}\mid 1\leq\frac{k}{d}\leq\frac{n}{d},\gcd\left(\frac{k}{d},\frac{n}{d}\right)=1\right\}\right|=\varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

注意到 $\{A_d\}_{d|n}$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个分划，从而

$$n=\sum_{d|n}|A_d|=\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\varphi(d).$$

由 Möbius 反演（定理 2.3.36），

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

设 n 有素因数分解

$$n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{a_i},$$

且若 d 有大于 1 次的素因子，则 $\mu(d)=0$, 从而

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{k=0}^{r}\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\},|I|=k}(-1)^k\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}=n\sum_{k=0}^{r}\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\},|I|=k}\left(\prod_{i\in I}\left(-\frac{1}{p_i}\right)\cdot 1^{r-k}\right)=n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

□

3.3 容斥原理与生成函数

命题 3.3.1. 设 $\{a_n\}=\{b_n\}*_e\{1\}$, 则 $\forall\ n$,

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k a_k.$$

证明. 计算

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k a_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\sum_{l=0}^{k}C_k^l b_l=\sum_{l\le k\le n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^lb_l=\sum_{l=0}^{n}b_l\sum_{k=l}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^l.$$

从而归结为证明

$$\sum_{k=l}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^l=\begin{cases}1, & n=l;\\ 0, & n>l.\end{cases}$$

计算

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^l = \sum_{k=l}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{l!(k-l)!} &= \frac{n!}{l!(n-l)!}\sum_{k=l}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-l)!(k-l)!} \\
&\overset{k-l=m}{=} C_n^l\sum_{m=0}^{n-l}(-1)^{n-l-m}C_{n-l}^m \\
&= (-1)^{n-l}C_n^l\sum_{m=0}^{n-l}(-1)^mC_{n-l}^m \\
&= \begin{cases} 1, & n=l; \\ (-1)^{n-l}C_n^l(1+x)^{n-l}|_{x=-1}, & n>l \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & n=l; \\ 0, & n>l. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

命题 3.3.2. 设 $\forall\ n$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{N} C_k^n b_k,$$

则 $\forall\ n$,

$$b_n = \sum_{k=n}^{N}(-1)^{k-n}C_k^n a_k.$$

证明. 直接计算

$$\sum_{k=n}^{N}(-1)^{k-n}C_k^n a_k = \sum_{k=n}^{N}(-1)^{k-n}C_k^n\sum_{k=0}^{N}C_k^n b_k = \sum_{h\le k\le l\le N}(-1)^{k-n}C_k^n N C_k^n b_k = \sum_{l=n}^{N} b_l\sum_{k=n}^{l}(-1)^{k-n}C_k^n C_l^k.$$

从而归结为证明

$$\sum_{k=n}^{l}(-1)^{k-n}C_k^nC_l^k=\begin{cases}1, & l=n;\\ 0, & l>n.\end{cases}$$

计算

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{l}(-1)^{k-n}C_k^nC_l^k&=\sum_{k=n}^{l}(-1)^{k-n}\frac{k!}{n!(k-n)!}\frac{l!}{k!(l-k)!}=\frac{l!}{n!(l-n)!}\sum_{k=n}^{l}(-1)^{k-n}\frac{(l-k)!}{(l-n)!(k-n)!}\\
&\overset{k-n=m}{=}C_l^n\sum_{m=0}^{l-n}(-1)^{l-n-m}C_{l-n}^m\\
&=(-1)^{l-n}C_l^n\sum_{m=0}^{l-n}(-1)^mC_{l-n}^m\\
&=\begin{cases}1, & l=n;\\ (-1)^{l-n}C_l^n(1+x)^{l-n}|_{x=-1}, & l>n\end{cases}\\
&=\begin{cases}1, & l=n;\\ 0, & l>n.\end{cases}\end{aligned}$$

□

定理 3.3.3 (容斥原理)**.** 设 X 是一个集合，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 n 个性质，$X_I=\{x\in X\mid x\text{满足性质}P_i,\forall\ i\in I\}$，$g_m=\sum_{|I|=m}|X_I|$，$Y_J=\{x\in X\mid x\text{恰好满足性质}P_j,\forall\ j\in J\}$，$Y_r=\{x\in X\mid x\text{恰好满足}r\text{条性质}\}=\bigsqcup_{|J|=r}Y_J$，$e_r=|Y_r|$. 计算 Y_J 中的元素在 X_I 中出现的次数：给定 $y\in Y_J$，

$$y\in X_I\Longleftrightarrow I\subset J,|I|=m,1\leq m\leq|J|,$$

从而

$$g_m=\sum_{r=m}^{n}C_r^me_r.$$

由命题 *3.3.2*,

$$e_m = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} C_k^m g_k.$$

定理 3.3.4. 记号同定理 *3.3.3*, 设 $E(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k$, $G(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k x^k$ 分别是 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的生成函数，则

$$E(x+1) = G(x).$$

证明. 直接计算

$$E(x+1) = \sum_{k=0}^{n} e_k (x+1)^k = \sum_{k=0}^{n} e_k \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^m = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=m}^{n} e_k C_k^m \right) x^m = \sum_{m=0}^{n} g_m x^m = G(x).$$

□

例 3.3.5 (P81 习题三 3)**.** 证明

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{2n-i}{n} (x-1)^i.$$

例 3.3.6. 由定理 *3.3.3*, 令

$$X = \{\{1,2,\cdots,2n\}\text{的}n\text{元子集}A\},$$

性质

$$\begin{cases} P_1 : 1 \in A; \\ P_2 : 2 \in A; \\ \cdots \\ P_n : n \in A, \end{cases}$$

则先从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中取 i 个，再从 $\{n+1,n+2,\cdots,2n\}$ 中取 $n-i$ 个，得

$$e_i = |Y_i| = \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}^2,$$

先从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中取 i 个，再从剩下 $2n-i$ 个数中取 $n-i$ 个，得

$$g_i=\sum_{|I|=i}|X_I|=\binom{n}{i}\binom{2n-i}{n-i}=\binom{n}{i}\binom{2n-i}{n}.$$

由定理 *3.3.4*,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2x^i=E(x)=G(x-1)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{2n-i}{n}(x-1)^i.$$

例 3.3.7 (P82 习题三 6)**.** 证明 *Möbius* 反演公式的变形：设函数列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$a_n(x)=\sum_{d|n}b_{\frac{n}{d}}(x^d),$$

则

$$b_n(x)=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})a_d(x^{\frac{n}{d}}).$$

证明. 直接计算

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})a_d(x^{\frac{n}{d}})&=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})\sum_{l|d}b_{\frac{d}{l}}(x^{\frac{nl}{d}})\overset{\frac{d}{l}=t}{=}\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})\sum_{t|d}b_t(x^{\frac{n}{t}})=\sum_{t,d:t|d|n}\mu(\frac{n}{d})b_t(x^{\frac{n}{t}})\\&=\sum_{t:t|n}\sum_{d:l|d}\mu(\frac{n}{d})b_t(x^{\frac{n}{t}})=\sum_{t:t|n}b_t(x^{\frac{n}{t}})\sum_{d:l|d}\mu(\frac{\frac{n}{t}}{\frac{d}{t}})\overset{\frac{d}{t}=s}{=}\sum_{t:t|n}b_t(x^{\frac{n}{t}})\sum_{s|\frac{n}{t}}\mu(s),\end{aligned}$$

其中，设 $\frac{n}{t}$ 有素因数分解

$$\frac{n}{t}=\prod_{i=1}^{r}p_i^{a_i},$$

则

$$\sum_{s|\frac{n}{t}}\mu(s)=-C_r^1+C_r^2-C_r^3+\cdots+(-1)^{r-1}C_r^{r-1}+(-1)^rC_r^r=(1-1)^r=0,$$

除非 $r=0$, 即 $\frac{n}{t}=1$, 此时，$\sum_{s|\frac{n}{t}}\mu(s)=\mu(1)=1$. 综上，

$$\sum_{s|\frac{n}{t}}\mu(s)=\begin{cases}1, & \frac{n}{t}=1;\\ 0, & \frac{n}{t}>1\end{cases}=\begin{cases}1, & n=t;\\ 0, & n>t.\end{cases}$$

从而，

$$\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})a_d(x^{\frac{n}{d}})=\sum_{t:t|n}b_t(x^{\frac{n}{t}})\sum_{s|\frac{n}{t}}\mu(s)=b_n(x).$$

$\square$

4 特殊计数序列

4.1 Catalan 数

例 4.1.1. 两个基本模型：

- 同理例 *2.3.8,* 设有 n 个 0 和 n 个 1 排成一列，要求从初始位置到任意位置，0 的个数不少于 1 的个数，求排列数；
- *P57* 习题二 *9,* 单位圆周上有 $2n$ 个等距分布的点，求将这些点结对相连使得线段都不相交的的方法数。

已经求得，它们的生成函数为

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x},$$

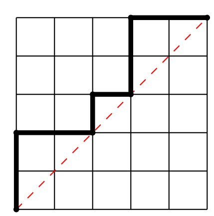
由 *Taylor* 展开，

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^n}{2x},$$

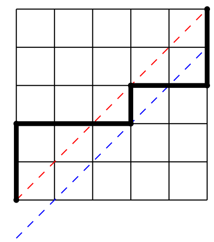
从而，

$$c_n=(-1)^n\cdot 2^{2n+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}=2^{2n}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{(n+1)!}=2^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(n+1)!}=2^n\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)!2\cdot 4\cdots 2n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

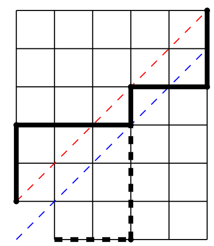
例 4.1.2. 或者用更直观的方法：考虑 $n+1$ 阶的平面方格，从左下角走到右上角，记 0 表示向上一格，1 表示向右一格，从而要求不能走到对角线的下方。



考虑非法的走法，它总会碰到次对角线，



将路径第一次碰到次对角线之前的部分沿着次对角线翻折，



从而得到了非法的走法与 $n+2$ 行 n 列的方格从左下到右上的走法的一一对应，从而合法的走法数为

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

注记 4.1.3. 这是 *P85* 注 *4.1.5* 的几何版本的叙述。

例 4.1.4 (P86 例 4.1.6)**.** 考虑 n 个非结合的二元加法运算，由 n 对括号决定顺序，有多少加括号的方式？例如 $n=3$ 时，

$$((a+(b+c))+d)$$

是一种顺序。忽视右括号，将加号视为右括号，得到括号串

$$((a+(b+c\cancel{)}\cancel{)}+d\cancel{)} \longrightarrow (()()).$$

反之，对括号串，在右括号的位置替换成加号，添加字母与右括号，

$$(()()) \longrightarrow ((+(++ \longrightarrow ((a+(b+c))+d).$$

这得到了加括号的方式与第一个基本模型的一一对应。

例 4.1.5 (P116 习题四 1). 由数 $1, 2, \cdots, 2n$ 构成矩阵

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix},$$

其中要求

$$x_{11} < x_{12} < \cdots < x_{1n},$$

$$x_{21} < x_{22} < \cdots < x_{2n},$$

且 $\forall\ 1 \leq i \leq n$,

$$x_{1i} < x_{2i},$$

这样的矩阵有 C_n 个。将 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$ 的位置标为 1, $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}$ 的位置标为 0, 要想能构造出这样的矩阵，必须在每一位之前 0 的数量不少于 1 的数量，才能选出第二行的元素，这就是第一个基本模型。

例 4.1.6 (P116 习题四 3(a)). 长度为 n 的非减正整数序列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的个数，要求 $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $a_i \leq i$. 令 a_i 是第 i 个 0 前面 1 的个数 $+1$, 再补齐 1, 例如

$$1124556 \longrightarrow 00101101001011,$$

反之也有

$$01001100011011 \longrightarrow 1224446$$

由此得到了 $a_1a_2\cdots a_n$ 与第一个基本模型的一一对应。

例 4.1.7 (P116 习题四 3(c)). 长度为 n 的非负整数序列 $c_1c_2\cdots c_n$ 的个数，要求 $c_1 = 0, \forall\ 1 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq c_{i+1} \leq c_i + 1$. 在例 *4.1.6*中，令 $c_i = i - a_i \geq 0$, 由 $a_i \leq a_{i+1}$, 即有

$$i - c_i \leq i + 1 - c_{i+1},$$

即

$$0 \leq c_{i+1} \leq c_i + 1,$$

反之也能从 $c_1c_2\cdots c_n$ 得到 $a_1a_2\cdots a_n$, 从而这也得到了 $c_1c_2\cdots c_n$ 与第一个基本模型的一一对应。

例 4.1.8 (P116 习题四 3(b)). 长度为 $n-1$ 的递增正整数序列 $a_1a_2\cdots a_{n-1}$ 的个数，要求 $\forall\ 1 \le i \le n-1$, $a_i \le 2i$. 令 a_i 是第 $i+1$ 个 0 的位置 -1, 由此可以得到 $a_1a_2\cdots a_n$ 与第一个基本模型的一一对应。

例 4.1.9. 甲乙两个乒乓球运动员比赛，比赛过程中甲不落后，最终比分为 $11:6$, 有多少情况？

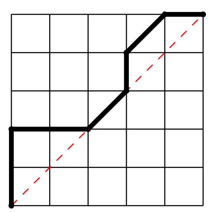
解. 最后一局一定是甲赢。考虑 11 行 7 列的平面格点，甲赢向上，乙赢向右，不要求甲不落后时，无要求，有 C_{16}^6 种情况；同理例 4.1.2, 用类似的翻折反射的方法可知，不合规的情况有 C_{16}^5 种，故总数为 $C_{16}^6 - C_{16}^5$. □

例 4.1.10. 甲乙两个乒乓球运动员比赛，比赛过程中甲一直领先，最终比分为 $11:6$, 有多少情况？

解. 最后一局一定是甲赢。考虑 11 行 7 列的平面格点，甲赢向上，乙赢向右，不要求甲一直领先时，无要求，有 C_{16}^6 种情况；若甲一直领先，则第一局一定甲赢，转化为例 4.1.2中的 10 行 7 列的平面格点的情形，用类似的翻折反射的方法可知，不合规的情况有 C_{15}^5 种，故总数为 $C_{16}^6 - C_{15}^5$. □

4.2 Schröder 数

定义 4.2.1. 仍然考虑 $n+1$ 阶的平面格点，除了向右和向上以外，还可以沿对角线向右上，



从左下到右上，且不能走到对角线的下方的走法的数量称为 *Schröder* 数，记为 S_n.

考虑按照对角线方向移动的步数 d 计数，每一次对角线方向的移动可以等效为一次向上和一次向右，此时需要 $2n-d$ 次移动，其中有 d 次对角线方向的移动，$2(n-d)$ 次沿格线的移动，各自的选法有 $\binom{2n-d}{d}$ 与 C_{n-d} 种，从而，

$$S_n = \sum_{d=0}^{n} \binom{2n-d}{d} C_{n-d}.$$

4.3 第一、二类 Stirling 数

定义 4.3.1. 记 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$.

4.3.1 第二类 Stirling 数

定义 4.3.2. *称把 $[n]$ 拆分成 k 个非空集合的不交并的拆分数为第二类 Stirling 数，记为 $S(n,k)$.*

考虑映射 $f : [n] \to [k]$, 若 f 是满射，则它给出了一种有顺序的拆分方式，故满射的数量为 $k!S(n,k)$. 令 $X = [k]^{[n]}$, Z 是 X 中的满射的集合，

$$\begin{cases} P_1 : 1 \notin Imf; \\ P_2 : 2 \notin Imf; \\ \cdots \\ P_k : k \notin Imf, \end{cases}$$

由容斥原理定理 3.1.3,

$$|Z| = |(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k)^c| = \sum_{I \subset [k]} (-1)^{|I|} |X_I|.$$

又 $X_I = ([k] - I)^{[n]}$, 则 $|X_I| = (k - |I|)^n$, 从而

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}|Z| = \frac{1}{k!}\sum_{I \subset [k]} (-1)^{|I|} |X_I| = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (k-j)^n. \tag{1}$$

注记 4.3.3. *这个模型也可以解释例 3.1.9.*

定理 4.3.4. *$\{S(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,k)}{n!} x^n = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^k}{k!}.$$

证明一. 由公式 1,

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}C_k^j(k-j)^n=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n,$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}C_k^j\sum_{n=0}^{\infty}j^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}C_k^j\,\mathrm{e}^{jx}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\mathrm{e}^x)^j(-1)^{k-j}=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!}.$$

□

证明二. 由于

$$k!S(n,k)=\left|\{f:[n]\to[k]\mid f\text{是满射}\}\right|,$$

又

$$\{f:[n]\to[k]\mid f\text{是满射}\}=\bigsqcup_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\{f:[n]\to[k]\mid\forall 1\le i\le k,\left|f^{-1}(i)\right|=n_i\},$$

而

$$\left|\{f:[n]\to[k]\mid\forall 1\le i\le k,\left|f^{-1}(i)\right|=n_i\}\right|=\binom{n}{n_1,\cdots,n_k}.$$

故

$$k!S(n,k)=\left|\bigsqcup_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\{f:[n]\to[k]\mid\forall 1\le i\le k,\left|f^{-1}(i)\right|=n_i\}\right|=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\cdots,n_k}=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!},$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!S(n,k)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!}x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}=\left(\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1!}x^{n_1}\right)\cdot\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{1}{n_2!}x^{n_2}\right)\cdots\left(\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k!}x^{n_1}\right)=(\mathrm{e}^x-1)^k,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n!}x^n=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!}.$$

□

引理 4.3.5. 第二类 *Stirling* 数满足递推关系：

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

证明. 考虑 n:

- 若 n 作为单点集称为划分的一个子集，此时是将 $[n-1]$ 划分为 $k-1$ 个无交非空子集，有 $S(n-1,k-1)$ 种划分；
- 若 n 不被划分为一个单点集，将 $[n-1]$ 划分为 k 个无交非空子集，有 $S(n-1,k)$ 种划分，此时将 n 加入任何一个子集都是一个满足假设的划分，有 k 种选择，此时有 $kS(n-1,k)$ 种划分，

从而，

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

□

定义 4.3.6. 记 $m(m-1)\cdots(m-k+1) = (m)_k$.

定理 4.3.7.

$$m^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(m)_k.$$

证明一. 记 $X_{n,m} = [m]^{[n]}$, $Y_{n,m}$ 是 $X_{n,m}$ 中的单射的集合，$Z_{n,m}$ 是 $X_{n,m}$ 中的满射的集合，$X_{n,m}(k)$ 是 $X_{n,m}$ 中的像的元素个数为 k 的映射的集合。有

$$X_{n,m} = \bigsqcup_{k=1}^{n} X_{n,m}(k).$$

定义映射 $Z_{n,k} \times Y_{k,m} \to X_{n,m}(k)$

$$(g,h) \mapsto h \circ g,$$

它是满射。又注意到，k 个元素的子集的顺序不会影响复合映射，从而，

$$|X_{n,m}(k)| = \frac{1}{k!}\,|Z_{n,k}| \cdot |Y_{k,m}| = \frac{1}{k!} \cdot k!S(n,k) \cdot (m)_k = S(n,k)(m)_k,$$

从而,

$$m^n = |X_{n,m}| = \left|\bigsqcup_{k=1}^{n} X_{n,m}(k)\right| = \sum_{k=1}^{n} |X_{n,m}(k)| = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(m)_k.$$

$\square$

证明二. 注意到,

$$X_{n,m}(k) = \bigsqcup_{J\subset[m],|J|=k} Z_{n,J},$$

从而,

$$|X_{n,m}(k)| = \left|\bigsqcup_{J\subset[m],|J|=k} Z_{n,J}\right| = \sum_{J\subset[m],|J|=k} |Z_{n,J}| = \binom{m}{k} k!S(n,k) = (m)_k S(n,k),$$

从而,

$$m^n = |X_{n,m}| = \left|\bigsqcup_{k=1}^{n} X_{n,m}(k)\right| = \sum_{k=1}^{n} |X_{n,m}(k)| = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(m)_k.$$

$\square$

证明三. 直接用归纳法，$n=1$ 时显然成立，设 $n-1$ 时成立，由递推式（引理 4.3.5），

$$
\begin{aligned}
m^n = m^{n-1}m = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)(m)_k m &= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)(m)_k\left[(m-k)+k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)\left[(m-k)(m)_k + k(m)_k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)\left[(m)_{k+1} + k(m)_k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)(m)_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)k(m)_k \\
&= \sum_{k=2}^{n} S(n-1,k-1)(m)_k + \sum_{k=1}^{n-1} kS(n-1,k)(m)_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)\right](m)_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(m)_k.
\end{aligned}
$$

□

注意到，$(x)_k$ 是关于 x 的 k 次多项式，从而 $\{(x)_1,(x)_2,\cdots,(x)_n\}$ 是线性空间 $\mathbb{C}[x]_n=\{p\in\mathbb{C}[x]\mid \deg p\leq n, p(0)=0\}$ 的一组基，由定理 4.3.7, 可以得到基变换：

$$
\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1,1) & S(1,2) & \cdots & S(1,n) \\ S(2,1) & S(2,2) & \cdots & S(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(n,1) & S(n,2) & \cdots & S(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x)_1 \\ (x)_2 \\ \vdots \\ (x)_n \end{bmatrix}.
$$

由第二类 Stirling 数的组合意义，当 $k>n$ 时，$S(n,k)=0$, 从而过度矩阵是下三角阵，即

$$\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1,1) & & & \\ S(2,1) & S(2,2) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ S(n,1) & S(n,2) & \cdots & S(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x)_1 \\ (x)_2 \\ \vdots \\ (x)_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

4.3.2 第一类 Stirling 数

定义 4.3.8. 记 $c(n,k)$ 是置换群 S_n 中恰好可以写成 k 个不相交的轮换的乘积的置换的个数，其中，不动点也看作一个轮换，称为无符号的第一类 *Stirling* 数。

引理 4.3.9. 有递推式:

$$c(n,k)=(n-1)c(n-1,k)+c(n-1,k-1).$$

证明. 考虑 n:

- 若 $\sigma(n)=n$, 则 n 是不动点，是一个轮换，从而前面要将 S_{n-1} 分解成 $k-1$ 个不相交的轮换，有 $c(n-1,k-1)$ 个;
- 若 n 不是不动点，无视 n, 得到将 S_{n-1} 分解成 k 个不相交的轮换，将 n 插入前 $n-1$ 个数任何一个数后面即可，有 $(n-1)c(n-1,k)$ 个,

从而,

$$c(n,k)=(n-1)c(n-1,k)+c(n-1,k-1).$$

□

定理 4.3.10.

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)x^k = x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

证明. 直接用归纳法，$n=1$ 时显然成立，设 $n-1$ 时成立，由递推式（引理 4.3.9），

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} c(n,k)x^k &= \sum_{k=1}^{n}[(n-1)c(n-1,k)+c(n-1,k-1)]x^k \\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{n} c(n-1,k)x^k + \sum_{k=1}^{n} c(n-1,k-1)x^k \\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} c(n-1,k)x^k + x\sum_{k=2}^{n} c(n-1,k-1)x^{k-1} \\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} c(n-1,k)x^k + x\sum_{l=1}^{n-1} c(n-1,l)x^l \\
&= (n-1)\cdot x(x+1)\cdots(x+n-2) + x\cdot x(x+1)\cdots(x+n-2) \\
&= (x+n-1)x(x+1)\cdots(x+n-2) \\
&= x(x+1)\cdots(x+n-1).
\end{aligned}$$

□

定义 4.3.11. 称 $s(n,k)=(-1)^{n-k}c(n,k)$ 为第一类 *Stirling* 数。

定理 4.3.12.

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n.$$

证明. 在定理 4.3.10中，用 $-x$ 替换 x 得，

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)(-x)^k = -x(-x+1)\cdots(-x+n-1),$$

等式两边同时乘 $(-1)^n$ 得，

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^n c(n,k)(-x)^k = x(x-1)\cdots(x-n+1),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}c(n,k)x^k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(-1)^{2k}c(n,k)x^k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n}c(n,k)(-x)^k=x(x-1)\cdots(x-n+1),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}s(n,k)x^k=x(x-1)\cdots(x-n+1)=(x)_n.$$

□

注意到，由第一类 Stirling 数的组合意义，当 $k>n$ 时，$s(n,k)=0$, 由定理 4.3.12，我们又可以得到基变换

$$\begin{bmatrix}(x)_1\\(x)_2\\\vdots\\(x)_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s(1,1)&&&\\s(2,1)&s(2,2)&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\s(n,1)&s(n,2)&\cdots&s(n,n)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\x^2\\\vdots\\x^n\end{bmatrix}. \tag{3}$$

记

$$A=\begin{bmatrix}s(1,1)&&&\\s(2,1)&s(2,2)&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\s(n,1)&s(n,2)&\cdots&s(n,n)\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}S(1,1)&&&\\S(2,1)&S(2,2)&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\S(n,1)&S(n,2)&\cdots&S(n,n)\end{bmatrix},$$

由公式 2与公式 3, 即得以下命题:

定理 4.3.13.

$$AB=BA=I.$$

推论 4.3.14.

$$\sum_{l=1}^{n}s(i,l)S(l,j)=\delta_{ij},$$

$$\sum_{l=1}^{n} S(i,l)s(l,j) = \delta_{ij}.$$

定理 4.3.15. 记 $A(x), B(x)$ 分别是数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数，则以下命题等价：

1. $\forall\ n \geq 0,\ b_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)a_i$;

2. $\forall\ n \geq 0,\ a_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)b_i$;

3. $B(x) = A(\mathrm{e}^x - 1)$, 也即 $A(x) = B(\ln(1+x))$.

证明. 1 ⇔ 2: 若 2 成立，由推论 4.3.14,

$$\sum_{j=0}^{n} S(n,j)a_j = \sum_{j=0}^{n} S(n,j)\sum_{i=0}^{j} s(j,i)b_i = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{j=i}^{n} S(n,j)s(j,i) = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} S(n,j)s(j,i) = \sum_{i=0}^{n} b_i\delta_{ni} = b_n,$$

即 1 成立。1 ⇒ 2 同理。

1 ⇔ 3: 由 $\{S(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数（定理 4.3.4），

$$A(\mathrm{e}^x - 1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{n=0}^{\infty} S(n,i)\frac{x^n}{n!} = sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{n=i}^{\infty} S(n,i)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} S(n,i)a_i\frac{x^n}{n!},$$

且

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!},$$

即知成立。 □

推论 4.3.16. $\{s(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n,k)}{n!}x^n = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

证明. 令 $a_n = s(n,k), b_n = \delta_{nk}$, 则

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) b_i.$$

注意到 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $B(x) = \frac{x^k}{k!}$, 由定理 4.3.15, $\{s(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$A(x) = B(\ln(1+x)) = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

□

4.4 分拆数

定义 4.4.1. 对正整数 n,

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k,$$

其中 k 是正整数，$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k \geq 1$ 是整数，称为 n 的一个分拆，令 $p(n)$ 代表 n 的所有分拆的个数，$p(n,k)$ 是将 n 拆成 k 个部分的分拆数。这也等价于，固定 $k, m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数，关于 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的方程

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \cdots + m_k t_k = n$$

的非负整数解的个数。

定理 4.4.2. $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$\widetilde{p}(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

证明. 注意到，$\forall\, n \geq 0$, $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (x^i)^j$ 对 x^n 的每一个贡献，对应了 n 的一个分拆:

$$n = 1 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 + 3 \cdot t_3 + \cdots,$$

从而

$$\widetilde{p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n=\sum(x^1)^{t_1}(x^2)^{t_2}(x^3)^{t_3}\cdots=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^{2\times 2}+\cdots)(1+x^3+x^{2\times 3}+\cdots)\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}.$$

□

定义 4.4.3. 对正整数 n,

$$n=r_1+r_2+\cdots+r_k,$$

其中 k 是正整数，$r_1>r_2>\cdots>r_k$ 是正整数，称为 n 的一个互异分拆，令 $b(n)$ 代表 n 的所有互异分拆的个数。

定理 4.4.4. $\{b(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$\widetilde{b}(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i).$$

证明. 同理定理 4.4.2的证明即知，

$$\widetilde{b}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n=(1+x)(x+x^2)(1+x^3)\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$$

□

定理 4.4.5. 对任意 n, 奇分拆（分拆的每一个元素都是奇数）的个数 a_n 与互异分拆的数量相等，即 $a_n=b_n$.

证明一. 同理定理 4.4.2的证明即知，$\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$\widetilde{a}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}.$$

又

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-x^{2i}}{1-x^i}=\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i})}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i-1})}=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}},$$

即 $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数相等，从而 $a_n=b_n$. □

证明二. 对任意有一个奇分拆，把每个奇数的倍数按 2 的幂展开求和，再用分配律展开，即得一个互异分拆：

$$30=5\cdot 3+2\cdot 5+5\cdot 1=(4+1)3+(2)5+(4+1)1=4\cdot 3+1\cdot 3+2\cdot 5+4\cdot 1+1\cdot 1=12+3+10+4+1.$$

反之，任意一个互异分拆，把每个数的最大的 2 的幂次提出来，再合并同类项，即得一个奇分拆：

$$26=8+12+6=8\cdot 1+4\cdot 3+2\cdot 3=8\cdot 1+(4+2)\cdot 3=8\cdot 1+6\cdot 3.$$

这样得到了奇分拆与互异分拆之间的一一对应，故二者数量相等。 □

定义 4.4.6. 记 n 的偶数个项的互异分拆的个数为 $p_e(n)$, 奇数个项的互异分拆的个数为 $p_o(n)$, 有 $b_n=p_e(n)+p_o(n)$.

定理 4.4.7.

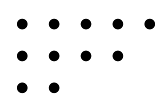
$$\sum_{n=0}^{\infty}[p_e(n)-p_o(n)]x^n=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k).$$

证明. 注意到，在乘积展开式中，若 n 的互异分拆的部分的个数为偶数，则它对 x^n 的贡献为 1; 若 n 的互异分拆的部分的个数为奇数，则它对 x^n 的贡献为 -1, 从而 x^n 的系数为 $p_e(n)-p_o(n)$. □

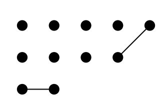
定义 4.4.8. 对一个互异分拆，把每一项用它个数的点排成一行，称为分拆的 *Ferrers* 图。例如分拆

$$11=5+4+2$$

对应的 *Ferrers* 图为



其中最后一行称为底，底的点的个数记为 b; 最右上角的点与某个点的最长的 45° 角的线段称为坡，坡的点的个数记为 s.

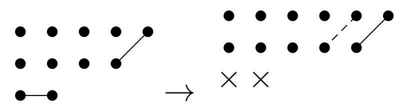


定理 4.4.9. 记 $\omega(m)=\frac{3m^2-m}{2}=\sum_{k=0}^{m-1}(3k+1)$ 称为五角数，则

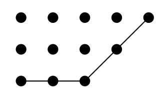
$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(x^{\omega(m)}+x^{\omega(-m)}).$$

证明. 在 Ferrers 图上定义两种变换：

1. 变换 A：若 $b\le s$, 则把底移到右上使它称为与原来的坡平行的新坡，原来的坡就不是坡了，

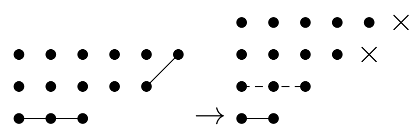
   除非 $b=s$ 且底与坡有公共点，此时变换后的图不是 Ferrers 图，

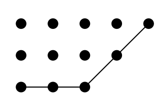
   此时，

   $$n=b+(b+1)+\cdots+(b+(b-1))=\frac{3b^2-b}{2}=\omega(b).$$

2. 变换 B：若 $b>s$, 则把坡移到图的最下面使它称为一个新底，

   除非 $b=s+1$ 且底与坡有公共点，

此时，

$$n=(s+1)+(s+2)+\cdots+(s+s)=\frac{3s^2+s}{2}=\omega(-s).$$

当 n 不是两种例外情况时，AB 两种变换给出了奇互异拆分与偶互异拆分之间的一一对应，此时，$p_e(n)-p_o(n)=0$; 当 $n=\omega(b)$ 时，展开式中 $x^n=x^{\omega(b)}$ 的系数为

$$\prod_{i=0}^{b-1}(-x)^{b+i}=(-1)^b\prod_{i=0}^{b-1}(-x)^{b+i}=(-1)^b x^{\sum_{i=0}^{b-1}(b+i)}=(-1)^b x^{\omega(b)}=(-1)^b x^n,$$

由定理 4.4.7, 即有 $p_e(n)-p_o(n)=(-1)^b$; 同理，当 $n=\omega(-s)$ 时，$p_e(n)-p_o(n)=(-1)^s$. 综上，

$$p_e(n)-p_o(n)=\begin{cases}0, & n\neq\omega(b),\omega(-s);\\ (-1)^b, & n=\omega(b);\\ (-1)^s, & n=\omega(-s).\end{cases}$$

从而

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)=\sum_{n=0}^{\infty}[p_e(n)-p_o(n)]x^n=1+\sum_{b=1}^{\infty}(-1)^b x^{\omega(b)}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s x^{\omega(-s)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(x^{\omega(m)}+x^{\omega(-m)}).$$

□

定理 4.4.10. 对 $n<0$, 令 $p(n)=0$, 则 $\forall\, n\geq 1$, 有

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}(p(n-\omega(n))+p(n-\omega(-m))).$$

证明. 由定理 4.4.2与定理 4.4.9,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(x^{\omega(m)}+x^{\omega(-m)})\right)=\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)\right)\left(\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}\right)=1,$$

展开即得，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(p(n-\omega(n))+p(n-\omega(-m)))x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[p(n)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(p(n-\omega(n))+p(n-\omega(-m)))\right]x^n = 1,$$

从而 $\forall\ n \geq 1$，

$$p(n)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(p(n-\omega(n))+p(n-\omega(-m))) = 0,$$

即

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}(p(n-\omega(n))+p(n-\omega(-m))).$$

$\square$

注记 4.4.11. $p(n)$ 是群 S_n 的共轭类的个数。

例 4.4.12. 对正整数 n，

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k,$$

要求分拆 $r \geq r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k \geq 1$ 是整数，分拆数记为 $q_r(n)$. 同理定理 *4.4.2*, $\{q_r(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$\widetilde{q_r}(x) = \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-x^i}.$$

例 4.4.13. 对正整数 n，

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_r,$$

要求分拆的项数 r 固定，分拆数记为 $h_r(n)$. 考虑 *Ferrers* 图。定义 *Ferrers* 图的对偶图，即将它沿对对角线翻转得到的图

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

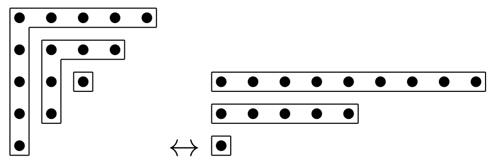
该例要求它的 *Ferrers* 图必须有 r 行，从而它的对偶图必须有 r 列，这就转化为例 *4.4.12*的情况，但要求分拆中必有一项 r，从而 $h_r(n)=p_r(n-r)$，从而 $\{h_r(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为

$$\widetilde{h_r}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}h_r(n)x^n=\sum_{n=r}^{\infty}p_r(n-r)x^n=\frac{x^r}{\prod_{i=1}^{r}(1-x^i)}.$$

例 4.4.14.

$$n\text{的自共轭分拆的个数}=n\text{的各部分为奇数的互异分拆的个数},$$

其中自共轭分拆指的是 *Ferrers* 图的对偶图与自身相等的分拆。只要注意到有一一对应：



即得。

5 Pólya 计数定理

5.1 动机

考虑染色问题: 用 m 种颜色给 n 个物体染色, 记 A, B 分别是物体与颜色的集合, 一种染色方法事实上就是一个映射 $f: A \to B$. 考虑两种极端情况:

1. A 的元素各不相同，有 B^A 种方法;
2. A 的元素完全相同，转化为求
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$
的非负整数解的个数。

Pólya 计数问题就是研究有一定的对称性的计数问题。

5.2 一些代数

引理 5.2.1. $\forall\ \sigma \in S_n$, 则 σ 一定可以分解成若干个不相交的轮换的乘积，且在交换顺序的意义下，该分解唯一。

引理 5.2.2. $\forall\ \sigma, g \in S_n$, 设 $\sigma = (i_{1_1}, i_{1_2}, \cdots, i_{1_{r_1}})(i_{2_1}, i_{2_2}, \cdots, i_{2_{r_2}}) \cdots (i_{k_1}, i_{k_2}, \cdots, i_{k_{r_k}})$, 其中 $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$, 则
$$g\sigma g^{-1} = (g(i_{1_1}), g(i_{1_2}), \cdots, g(i_{1_{r_1}}))(g(i_{2_1}), g(i_{2_2}), \cdots, g(i_{2_{r_2}})) \cdots (g(i_{k_1}), g(i_{k_2}), \cdots, g(i_{k_{r_k}})).$$

定义 5.2.3. $\forall\ \sigma \in S_n$, $\forall\ 1 \le i \le n$, 记 $l_i(\sigma)$ 是 σ 的不相交的轮换分解中 i-轮换的个数，称 $(l_1(\sigma), l_2(\sigma), \cdots, l_n(\sigma))$ 为 σ 的轮换型，记为 $\mathrm{type}(\sigma)$, 也可简记为 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$, 且显然有
$$1 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + \cdots + n \cdot l_n = n,$$
从而 σ 可以被分解为 $l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ 个不相交的轮换。

引理 5.2.4. 设 $\sigma, \tau \in S_n$, 则 σ 与 τ 共轭，当且仅当 $\mathrm{type}(\sigma) = \mathrm{type}(\tau)$.

定义 5.2.5. 群作用，轨道 O_x, 可迁，稳定子群 H_x

定理 5.2.6 (Lagrange)**.** 若 $H \leq G$, 则 $|H| \cdot |G/H| = |G|$.

例 5.2.7. 若 $H \leq G$, 则 $G \times G/H \to G/H$

$$(g, g'H) \mapsto gg'H$$

是群作用。

命题 5.2.8. 设 $G \times X \to X$ 是群作用，H_x 是 $x \in X$ 的稳定子群，则 $\forall\, x \in X$, 映射 $O_x \to G/H_x$

$$gx \mapsto gH_x$$

是一一对应，从而

$$|O_x| = |G/H_x| = \frac{|G|}{|H_x|}.$$

命题 5.2.9. 设 $G \times X \to X$ 是群作用，则

$$X = \bigsqcup O_x,$$

从而，

$$|X| = \left|\bigsqcup O_x\right| = \sum |O_x|\,.$$

推论 5.2.10. 设 $G \times X \to X$ 是群作用，由命题 *5.2.8*与命题 *5.2.9*,

$$|X| = \sum |O_x| = \sum \frac{|G|}{|H_x|} = |G| \sum \frac{1}{|H_x|}.$$

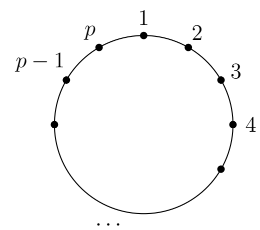
例 5.2.11. 考虑染色问题：用 m 种颜色给 n 个物体染色，记 A, B 分别是物体与颜色的集合，一种染色方法事实上就是一个映射 $f : A \to B$. 记 $X = B^A = \{\phi : A \to B\}$, 有群作用 $G \times A \to A$, $\forall\, g \in G$, 这个作用事实上给出了映射 $g : A \to A$. 定义群作用 $G \times X \to X$

$$(g, \phi) \mapsto \phi \circ g^{-1},$$

可以验证，这是一个群作用。

5.3 Pólya 计数问题

例 5.3.1. 设 p 是素数，考虑在圆桌周围有 p 个有序位置，坐男女（只区分性别）。



记 $\sigma = (12\cdots p)$, $G = \langle\sigma\rangle$, $A = \{1, 2, \cdots, p\}$, $B = \{男，女\}$, $X = B^A$. 定义群作用 $G \times X \to X$

$$(g, x) \mapsto x \circ g^{-1},$$

则 $\forall\ x \in X$,

1. x 是全坐男或全坐女，则 x 是不动点，$H_x = G$, $O_X = \{x\}$;

2. x 有男有女，此时任意转动都会改变座次（这由 p 是素数保证），则 $H_x = \{e\}$, $O_x = \{\sigma^k x \mid 1 \leq k \leq p\}$, $|O_x| = p$.

注意到有 $|X| = 2^p$, 且

$$X = \bigsqcup O_x = \left(\bigsqcup_{x \in I} O_x\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{x \in II} O_x\right),$$

由 $|X| = \sum |O_x|$, 从而

$$|X| = \left|\bigsqcup O_x\right| = \left|\left(\bigsqcup_{x \in I} O_x\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{x \in II} O_x\right)\right| = \sum_{x \in I} O_x + \sum_{x \in II} O_x,$$

即有

$$2^p = 2 + (n-2)p,$$

其中 n 是轨道数，从而

$$n = 2 + \frac{2^p - 2}{p},$$

即为坐法数。

例 5.3.2. 设 p 是素数，考虑在圆桌周围有 p^2 个有序位置，坐男女（只区分性别）。记 $\sigma=(12\cdots p^2)$, $G=\langle\sigma\rangle$, $A=\{1,2,\cdots,p^2\}$, $B=\{男，女\}$, $X=B^A$. 定义群作用 $G\times X\to X$

$$(g,x)\mapsto x\circ g^{-1},$$

则 $\forall\ x\in X$,

1. x 是全坐男或全坐女，则 x 是不动点，$H_x=G$, $O_X=\{x\}$;
2. $x(a+pb)=x(a)$, 即可以分为 p 个相同的 p 个座次的坐法，则 $H_x=\{\sigma^{kp}\mid 1\le k\le p\}$, $O_x=\{\sigma^{kp}x\mid 1\le k\le p\}$, $|O_x|=p$, 由例 5.3.1, 这样的轨道有 $\frac{2^p-2}{p}$ 个；
3. 任意转动都会改变座次，则 $H_x=\{e\}$, $O_x=\{\sigma^kx\mid 1\le k\le p^2\}$, $|O_x|=p^2$.

注意到有 $|X|=2^{p^2}$, 且

$$X=\bigsqcup O_x=\left(\bigsqcup_{x\in I}O_x\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{x\in II}O_x\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{x\in III}O_x\right),$$

由 $|X|=\sum|O_x|$, 从而

$$|X|=\left|\bigsqcup O_x\right|=\left|\left(\bigsqcup_{x\in I}O_x\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{x\in II}O_x\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{x\in II}O_x\right)\right|=\sum_{x\in I}O_x+\sum_{x\in II}O_x+\sum_{x\in III}O_x,$$

即有

$$2^{p^2}=2+p\cdot\frac{2^p-2}{p}+\left(n-2-\frac{2^p-2}{p}\right)p^2,$$

其中 n 是轨道数，从而

$$n=2+\frac{2^p-2}{p}+\frac{2^{p^2}-2^p}{p^2},$$

即为坐法数。

引理 5.3.3 (Burnside)**.** 设群 G 作用在 X 上，$\forall\ g \in G$，令 $\psi(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$，则这个作用的轨道的个数为

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\psi(g)| \, .$$

证明. 算两次：计算有序对 (g, x) 的个数，其中，$g \in G$, $x \in X$, 且 $gx = x$:

1. 先遍历 $g \in G$, 个数为 $\sum_{g \in G} |\psi(g)|$;
2. 先遍历 $x \in X$, 个数为 $\sum_{x \in X} |H_x|$, 其中，H_x 是 x 的稳定子群。

由命题 5.2.8,

$$\sum_{g \in G} |\psi(g)| = \sum_{x \in X} |H_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O_x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|}. \tag{4}$$

又因为 G 的轨道给出了 X 的一个划分，且

$$\sum_{y \in O_x} \frac{1}{|O_y|} = \sum_{y \in O_x} \frac{1}{|O_x|} = |O_x| \cdot \frac{1}{|O_x|} = 1,$$

从而

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} = \sum_{x\text{是轨道代表元}} \sum_{y \in O_x} \frac{1}{|O_y|} = \sum_{x\text{是轨道代表元}} 1$$

是轨道的个数，从而由式 (4), 群 G 的作用的轨道个数为

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\psi(g)| \, .$$

□

例 5.3.4. 设 p 是素数，考虑正 p 边形周围有 p 个有序位置，坐男女（只区分性别）。记 $G = D_p = \{\langle r, s\rangle \mid r^p = s^2 = 1, rs = sr^{p-1}\} = \{r^i, sr^j \mid 1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq p\}$ 是二面体群，$A = \{1, 2, \cdots, p\}$, $B = \{$男，女$\}$, $X = B^A$. 有 $|X| = 2^p$. 定义群作用 $G \times X \to X$

$$(g, x) \mapsto x \circ g^{-1},$$

由 *Burnside* 引理（引理 *5.3.3*),

1. $|\psi(e)| = |X| = 2^p$;

2. $\forall\ 1 \le i \le p-1$, $\psi(r^i)$ 只有全男全女两种，即 $|\psi(r^i)| = 2$;

3. $\forall\ 1 \le j \le p$, 注意到 p 一定是奇数，$\psi(sr^j)$ 要求坐法关于反射的轴对称，有 $\left|B^{\{1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\}}\right| = 2^{\frac{p-1}{2}}$ 种，而位于轴上的顶点有男女两种坐法，故 $|\psi(sr^j)| = 2 \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} = 2^{\frac{p+1}{2}}$,

从而坐法数即轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\psi(g)| = \frac{1}{2p}\left(|\psi(e)| + \sum_{i=1}^{p-1}\left|\psi(r^i)\right| + \sum_{j=1}^{p}\left|\psi(sr^j)\right|\right) = \frac{1}{2p}\left(2^p + (p-1)\cdot 2 + p\cdot 2^{\frac{p+1}{2}}\right).$$

定理 5.3.5 (Pólya)**.** 用 m 种颜色给 n 个物体染色，记 A, B 分别是物体与颜色的集合，$G \le S_n$, 则 G 在 B^A 上的作用的轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{l_1(g)+l_2(g)+\cdots+l_n(g)}.$$

证明. 用 m 种颜色给 n 个物体染色，记 A, B 分别是物体与颜色的集合，一种染色方法事实上就是一个映射 $f : A \to B$. 记 $X = B^A = \{\phi : A \to B\}$, 由 Cayley 定理，任意群 G 都是某个对称群的子群。有群作用 $G \times A \to A$, $\forall\ g \in G$, 这个作用事实上给出了映射 $g : A \to A$. 定义群作用 $G \times X \to X$

$$(g, \phi) \mapsto \phi \circ g^{-1}.$$

$\forall\ g \in G$, 注意到，$gf = f$, 当且仅当，f 在 g 在 A 上的轨道有相同染色，例如：$g = (123)(45)(6)(7)$, 则 f 要在 $123, 45, 6, 7$ 位置分别染相同颜色。从而

$$|\psi(g)| = m^{g\ \text{在}\ A\ \text{上的作用的轨道数}}.$$

又注意到,$\forall\ g \in G$, 事实上,g 给出了 A 的一个置换,设 $\mathrm{type}(g) = (l_1(g), l_2(g), \cdots, l_n(g))$ 为 g 的轮换型,则 g 在 A 上的作用的轨道数 $=$ $l_1(g) + l_2(g) + \cdots + l_n(g)$, 从而,

$$|\psi(g)| = m^{l_1(g)+l_2(g)+\cdots+l_n(g)}.$$

最后，由 Burnside 引理（引理 5.3.3），即得作用的轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\psi(g)|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}m^{l_1(g)+l_2(g)+\cdots+l_n(g)}.$$

□

例 5.3.6 (P131 例 5.3.4). 考虑允许重复的组合问题：x 是正整数，从 x 种不同物体中可以任意重复地选取 n 个，由隔板法知，选法数为 $\binom{n+x-1}{n}$. 这也是一个映射问题：设 A 是一个 n 元集合，B 是一个 x 元集合，A 中元素全部相同，B 中元素各不相同，则每一种选法对应一个从 A 到 B 的映射。考虑 $B^{\{1,2,\cdots,n\}}$, S_n 在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上有自然的置换群作用，而一个 A 到 B 的映射就是 S_n 作用在 $B^{\{1,2,\cdots,n\}}$ 的一个轨道。由 *Pólya* 计数定理（定理 *5.3.5*），选法数即轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in S_n}x^{l_1(\sigma)+l_2(\sigma)+\cdots+l_n(\sigma)}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k,$$

其中，$c(n,k)$ 是 S_n 中可以分解为 k 个不交轮换的置换的个数（即无符号的第一类 *Stirling* 数（定义 *4.3.8*）），从而

$$\binom{n+x-1}{n}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k=x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

这也得到了定理 *4.3.10.*

例 5.3.7. 求 3 阶简单图的个数（同构意义下）。

解. 记 $G=S_3$, $A=\{a,b,c\}$ 是三个顶点互相连线对应的三条边，$B=\{$黑，白$\}$，即两点连线则将连线的边染成黑，否则染成白。

1. $g\in G$ 是单位元，它的不动点是全部 B^A, $|\psi(g)|=2^3$;

2. g 是对换，如 $g=(12)$, 则不动点要求 13 的边与 23 的边有相同染色，即有 $|\psi(g)|=2^2$;

3. g 是三轮换，则不动点要求每个边染色相同，即有 $|\psi(g)|=2^1$,

由 Burnside 引理（引理 5.3.3），即得作用的轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\psi(g)|=\frac{1}{6}(1\cdot 2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2^1)=4,$$

就是同构意义下，3 阶简单图的个数。 □

例 5.3.8 (P125 例 5.2.9)**.** *给三维空间中正方体的顶点染色，有 m 种颜色，记 A,B 分别是顶点与颜色的集合。考虑三维空间中正方体的旋转群，记为 G. G 中的元素有以下几类：*

1. 单位元，有 1 个；

2. 绕相对两面的中点的连线旋转 $180°$, 有 3 个；

3. 绕相对两面的中点的连线旋转 $90°$, 有 6 个；

4. 绕相对两棱的中点的连线旋转 $180°$, 有 6 个；

5. 绕相对两顶点的连线旋转 $120°$, 有 8 个，

它在正方体上有自然作用。考虑 G 在 B^A 上的作用，记 ψ_i 是 G 的第 i 类元素的不动点，则

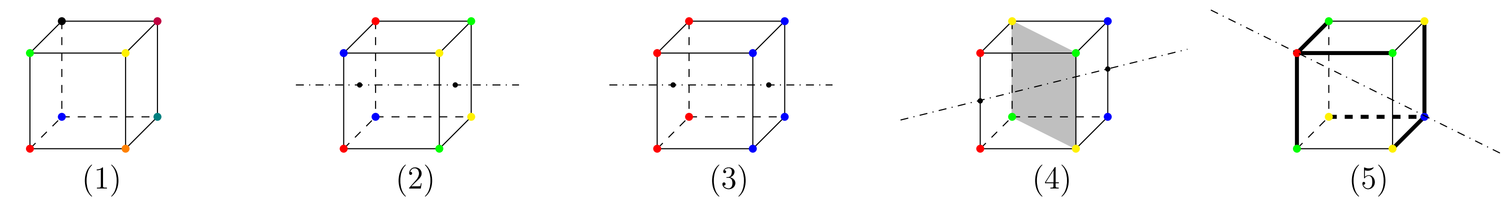
1. 随意染色，$|\psi_1|=m^8$;

2. 转轴穿过的两个面的对角顶点颜色相同，$|\psi_2|=m^4$;

3. 转轴穿过的两个面的四个顶点颜色相同，$|\psi_3|=m^2$;

4. 转轴穿过的两个的两条棱的顶点颜色相同，与转轴垂直的对角截面的对角顶点颜色相同，$|\psi_4|=m^4$;

5. 转轴穿过的两个顶点随意染色，与它们分别相连的三个顶点颜色相同，$|\psi_5| = m^4$，



从而由 *Burnside* 引理（引理 *5.3.3*），染色方式即作用的轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\psi(g)| = \frac{1}{24}(1\cdot m^8 + 3\cdot m^4 + 6\cdot m^2 + 6\cdot m^4 + 8\cdot m^4).$$

5.4 带权 Pólya 计数问题

考虑染色问题：用 m 种颜色给 n 个物体染色，若对每种颜色的个数有要求，如何解决？

引理 5.4.1 (带权 Burnside)**.** 设 $O_1, O_2, \cdots, O_N$ 是群 G 作用在集合 X 上的全部轨道，w 是一个权函数，它在各轨道上取常值（即一个轨道集上的函数），则所有轨道上的权的和为

$$\sum_{i=1}^{N} w(O_i) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in\psi(g)} w(x).$$

证明. 类似 Burnside 引理（引理 5.3.3）的证明，算两次：记

$$Y = \{(g,x) \mid gx = x\},$$

计算 $\sum_{(g,x)\in Y} w(x)$:

1. 一方面，先遍历 $g \in G$，

$$\sum_{(g,x)\in Y} w(x) = \sum_{g\in G}\sum_{x\in\psi(g)} w(x);$$

2. 另一方面，先遍历 $x \in X$,

$$\sum_{(g,x)\in Y} w(x) = \sum_{x\in X}\sum_{g\in H_x} w(x) = \sum_{x\in X} |H_x| \cdot w(x),$$

由命题 5.2.8,

$$\sum_{(g,x)\in Y} w(x) = \sum_{x\in X} |H_x| \cdot w(x) = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|O_x|} \cdot w(x) = |G| \sum_{x\in X} \frac{w(x)}{|O_x|},$$

由 $X = \bigsqcup_{i=1}^N O_i$,

$$\sum_{(g,x)\in Y} w(x) = |G| \sum_{x\in X} \frac{w(x)}{|O_x|} = |G| \sum_{i=1}^N \sum_{x\in O_i} \frac{w(x)}{|O_x|} = |G| \sum_{i=1}^N w(O_i) \sum_{x\in O_i} \frac{1}{|O_x|},$$

其中,

$$\sum_{x\in O_i} \frac{1}{|O_x|} = |O_i| \frac{1}{|O_i|} = 1,$$

从而

$$\sum_{(g,x)\in Y} w(x) = |G| \sum_{i=1}^N w(O_i) \sum_{x\in O_i} \frac{1}{|O_x|} = |G| \sum_{i=1}^N w(O_i).$$

综上,

$$\sum_{g\in G}\sum_{x\in\psi(g)} w(x) = \sum_{(g,x)\in Y} w(x) = |G| \sum_{i=1}^N w(O_i),$$

即

$$\sum_{i=1}^N w(O_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}\sum_{x\in\psi(g)} w(x).$$

□

回到问题，用 m 种颜色给 n 个物体染色，记 A, B 分别是物体与颜色的集合，设 $A = \{1, 2, \cdots, n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, 权函数 $w, \forall\ 1 \le i \le m$, 记 $w(b_i) = w_i$. 一种染色方法事实上就是一个映射 $f : A \to B$, 定义

$$w(f) = \prod_{i=1}^n w(f(i)).$$

由于 w 在同一轨道上取常值，于是 w 作为 B^A 上的函数是 G 不变的，即 w 也是定义在 G 作用在 B^A 的轨道集上的权函数。从这开始没听懂记 $O_1, O_2, \cdots, O_s$ 是 G 作用在 B^A 上的轨道。$\forall\, g \in G$, 设 $\langle g\rangle$ 在 A 上作用的轨道为 $O_1^g, O_2^g, \cdots, O_t^g$, 记 $l_j = \left|O_j^g\right|$, 由带权乘法原理，

$$\sum_{f\in\psi(g)} w(f) = (w_1^{l_1} + w_2^{l_1} + \cdots + w_m^{l_1})(w_1^{l_2} + w_2^{l_2} + \cdots + w_m^{l_2})\cdots(w_1^{l_t} + w_2^{l_t} + \cdots + w_m^{l_t}),$$

从而由带权 Burnside 引理（引理 5.4.1），

$$\sum_{i=1}^{s} w(O_i) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{f\in\psi(g)} w(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(w_1^{l_1} + w_2^{l_1} + \cdots + w_m^{l_1})(w_1^{l_2} + w_2^{l_2} + \cdots + w_m^{l_2})\cdots(w_1^{l_t} + w_2^{l_t} + \cdots + w_m^{l_t}).$$

展开等式左边即得：

定理 5.4.2. 记 $N_{k_1,k_2,\cdots,k_m}$ 是 B^A 中恰好把 A 中 k_i 个元素映为 b_i 的 G 轨道条数，其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, 则

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} N_{k_1,k_2,\cdots,k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m} = \sum_{i=1}^{s} w(O_i) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(w_1^{l_1} + w_2^{l_1} + \cdots + w_m^{l_1})(w_1^{l_2} + w_2^{l_2} + \cdots + w_m^{l_2})\cdots(w_1^{l_t} + w_2^{l_t} + \cdots + w_m^{l_t}).$$

6 相异代表系

6.1 相异代表系与 Hall 定理

定义 6.1.1. 设 $S_1, S_2, \cdot, S_m$ 是一族集合，它们的一个相异代表系是指一个向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 满足

1. $\forall\ 1 \le i \le m$, 有 $x_i \in S_i$;

2. $\forall\ 1 \le i < j \le m$, 有 $x_i \neq x_j$.

对任意 $J \subset \{1, 2, \cdots, m\}$, 记

$$S(J) = \bigcup_{j \in J} S_j$$

是下标集。

定理 6.1.2 (Hall)**.** 有限集族 $S_1, S_2, \cdot, S_m$ 有相异代表系，当且仅当对任意 $J \subset \{1, 2, \cdots, m\}$, 有

$$|S(J)| \geq |J|\,.$$