概率论作业

崔嘉祺

华东师范大学 20 级数学强基拔尖班

2023 年 12 月 9 日

摘要

这是华东师范大学数学专业研究生基础课“概率论”作业的个人解答。

目录

第二周

题目 1. 设 $\mathcal{A}$ 是集合 Ω 的子集族。$\mathcal{A}$ 既是 *Boole* 代数，又是单调类。证明：$\mathcal{A}$ 是 σ-代数。

证明. 由于 $\mathcal{A}$ 是 Boole 代数，故 $\Omega \in \mathcal{A}$, 且 $\mathcal{A}$ 对补封闭，只要证可列并封闭。

$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, 令 $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 由 Boole 代数的有限并封闭性质，$B_n \in \mathcal{A}$. 注意到有

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots,$$

记 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A$. 即有 $B_n \nearrow A$. 因为 $\mathcal{A}$ 是单调类，所以 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. 即 $\mathcal{A}$ 对可列并封闭。 □

第三周

题目 2. 设 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 是概率空间 Ω 上的两个独立的事件集。举例说明，如果 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 不是 π-系，则 $\sigma(\mathcal{A}_1)$ 与 $\sigma(\mathcal{A}_2)$ 不一定独立。

解. 令 Ω 是投掷两次骰子的结果的集合，$\mathcal{A}_1 = \{A, B\}, \mathcal{A}_2 = \{C\}$, 其中，$A$ 是第一次为 1, B 是第二次为 1, C 是两次之和为偶数。由于 $\varnothing \notin \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, 从而 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 都不是 π-系。

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12},\ \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{12}.$$

从而

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

即 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 相互独立。

而 $\sigma(\mathcal{A}_1)$ 中一定有 $A \cap B$, 即两次都是 1, $\sigma(\mathcal{A}_2)$ 中一定有 C, 而

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36},\ \mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = \frac{1}{36},$$

从而

$$\mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A \cap B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

即 $\sigma(\mathcal{A}_1)$ 与 $\sigma(\mathcal{A}_2)$ 不独立。 □

题目 3. 设 $\mathcal{A}$ 是 λ-系。证明：若 $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \varnothing$, 则 $A \cup B \in \mathcal{A}$.

证明. $B^c = \Omega - B \in \mathcal{A}$. 由于 $A \cap B = \varnothing$, 从而 $A \subset B^c$, 从而 $B^c - A = (A \cup B)^c = \Omega - (A \cup B) \in \mathcal{A}$, 从而 $A \cup B = \Omega - (A \cup B)^c \in \mathcal{A}$. □

题目 4. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ 是两个 σ-代数。定义

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 4 \sup_{A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2} \left| \mathbb{P}(A_1 A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \right|.$$

$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ 是表征 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 相依程度的一个量。证明：

(a) $0 \leq d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq 1$;

(b) 若 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 独立，则 $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 0$;

(c) $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 1$ 当且仅当存在 $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, 满足 $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

证明. (a) 首先，显然有 $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \geq 0$.

$\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$, 有 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$. 考虑 $|\mathbb{P}(A_1 A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|$:

1 若 $\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\geq 0$. 由单调性，$\mathbb{P}(A_1),\mathbb{P}(A_2)\geq\mathbb{P}(A_1A_2)$, 从而

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|&=\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\&\leq\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1A_2)^2\\&=\mathbb{P}(A_1A_2)\left(1-\mathbb{P}(A_1A_2)\right)\\&\leq\frac{1}{4}\left(\mathbb{P}(A_1A_2)+\left(1-\mathbb{P}(A_1A_2)\right)\right)^2\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2 若 $\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\leq 0$. 考虑 A_1^c: 有 $A_1^c\in\mathcal{F}_1$, 从而 $A_1^c\cap A_2\in\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1^cA_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)&=\mathbb{P}(A_1^c\mid A_2)\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\\&=\left(\mathbb{P}(A_1^c\mid A_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\right)\mathbb{P}(A_2)\\&=\left(\left(1-\mathbb{P}(A_1\mid A_2)\right)-\left(1-\mathbb{P}(A_1)\right)\right)\mathbb{P}(A_2)\\&=-\mathbb{P}(A_1\mid A_2)\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\&=-\left(\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\right)\\&\geq 0.\end{aligned}$$

从而同理有

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|&=-\left(\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\right)\\&=\mathbb{P}(A_1^cA_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\\&\leq\mathbb{P}(A_1^cA_2)-\mathbb{P}(A_1^cA_2)^2\\&\leq\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

综上，无论如何都有 $|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|\leq\frac{1}{4}$. 从而

$$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=4\sup_{A_1\in\mathcal{F}_1,A_2\in\mathcal{F}_2}|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|\leq 4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

(b) 若 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 独立，则 $\forall A_1\in\mathcal{F}_1,A_2\in\mathcal{F}_2$,

$$\mathbb{P}(A_1A_2)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

从而

$$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=4\sup_{A_1\in\mathcal{F}_1,A_2\in\mathcal{F}_2}|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|=0.$$

(c) 充分性：此时，取 $A\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$, 使得 $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$.

$$\left|\mathbb{P}(A)-\left(\mathbb{P}(A)\right)^2\right|=\frac{1}{4},$$

则 $d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 能取到上界 $4\cdot\frac{1}{4}=1$, 必有

$$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=1.$$

<u>必要性</u>：要让 $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 1$, 则 (a) 的证明中的不等式要同时取等号，即 $\exists A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$, 使得 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$, 并且均值不等式

$$\mathbb{P}(A_1A_2) - \mathbb{P}(A_1A_2)^2 \leq \frac{1}{4}$$

取等，当且仅当 $\mathbb{P}(A_1A_2) = \frac{1}{2}$.

综上，存在 $A = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, 满足 $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

□

第四周

题目 5. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 中两个独立的事件簇，均为 π-系。证明：$\sigma(\mathcal{A})$ 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。

证明. $\forall A\in\mathcal{A}$, A 与 $\mathcal{B}$ 独立，由于 $\mathcal{B}$ 是 π-系，从而 A 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。由 A 的任意性，$\mathcal{A}$ 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。

$\forall B\in\sigma(\mathcal{B})$, B 与 $\mathcal{A}$ 独立，由于 $\mathcal{A}$ 是 π-系，从而 B 与 $\sigma(\mathcal{A})$ 独立。由 B 的任意性，$\sigma(\mathcal{A})$ 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。 $\square$

第五周

题目 6. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间，$f : \Omega \to \mathbb{R}$. 若 $|f|$ 是可测函数，则 f 是否一定是可测函数？

解. 不一定。设 E 是一个不可测集，定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin E; \\ -1, & x \in E. \end{cases}$$

从而 $|f| = 1$, 是常值函数，可测。但是，

- 若 $a \leq -1$, $f^{-1}((-\infty, a)) = \varnothing$.
- 若 $-1 < a \leq 1$, $f^{-1}((-\infty, a)) = E$.
- 若 $a > 1$, $f^{-1}((-\infty, a)) = \mathbb{R}$.

从而 f 不可测。 □

题目 7. 设 ξ, η 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的两个随机变量，$A \in \mathcal{F}$. 证明：函数

$$\zeta(\omega) = \xi(\omega)\chi_A + \eta(\omega)\chi_{\overline{A}}$$

也是随机变量。

证明. $\xi, \eta, \chi_A, \chi_{\overline{A}}$ 都是随机变量，即 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的可测函数。可测函数的四则运算仍然是可测函数。从而 $\zeta = \xi \cdot \chi_A + \eta \cdot \chi_{\overline{A}}$ 是可测函数，是随机变量。 □

题目 8. 设 ξ, η 是同一概率空间上的取值为 $1, 2, \cdots, N$ 的两个随机变量，且 $\sigma(\xi) = \sigma(\eta)$. 证明：存在 $1, 2, \cdots, N$ 的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_N$, 使得对每个 $j = 1, 2, \cdots, N$, 有

$$\{\omega \mid \xi = j\} = \{\omega \mid \eta = i_j\}.$$

证明. 记 $A_i = \xi^{-1}(i), B_i = \eta^{-1}(i) \in \mathcal{F}$. $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^N A_i = \bigsqcup_{i=1}^N B_i$.

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) &= \xi^{-1}(\{0\}, \{1\}, \cdots, \{N\}, \{1, 2\}, \cdots, \{N-1, N\}, \cdots, \{1, 2, \cdots, N\}) \\ &= \{\varnothing, A_1, \cdots, A_N, A_1 \cup A_2, \cdots, A_{N-1} \cup A_N, \cdots, A_1 \cup \cdots \cup A_N\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\eta) &= \eta^{-1}(\{0\}, \{1\}, \cdots, \{N\}, \{1, 2\}, \cdots, \{N-1, N\}, \cdots, \{1, 2, \cdots, N\}) \\ &= \{\varnothing, B_1, \cdots, B_N, B_1 \cup B_2, \cdots, B_{N-1} \cup B_N, \cdots, B_1 \cup \cdots \cup B_N\}. \end{aligned}$$

从而必须有 $\{A_1, \cdots, A_N\} = \{B_1, \cdots, B_N\}$. 从而存在 $1, 2, \cdots, N$ 的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_N$, 使得 $A_j = B_{i_j}, \forall j = 1, 2, \cdots, N$. 此时，

$$\{\omega \mid \xi = j\} = A_j = B_{i_j} = \{\omega \mid \eta = i_j\}.$$

□

题目 9. 证明：随机变量 X 连续，当且仅当 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

证明. 必要性：X 连续，Φ_X 连续。$\forall \varepsilon > 0, \forall x$,

$$\Phi_X(x+\varepsilon) - \Phi_X(x) = \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) - \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(x < X \le x+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由 Φ_X 与概率的连续性即得

$$0 = \mathbb{P}(X = x).$$

充分性：$\forall \varepsilon > 0, \forall x$,

$$\Phi_X(x+\varepsilon) - \Phi_X(x) = \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) - \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(x < X \le x+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由概率的连续性，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\Phi_X(x+\varepsilon) - \Phi_X(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\mathbb{P}(x < X \le x+\varepsilon)\right) = \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

即 Φ_X 在 x 处连续。由 x 的任意性，Φ_X 连续。 $\square$

第六周

题目 10. 证明：如果随机变量 $X=Y(a.e.)$, 且 $\mathbb{E}[X]$ 存在，则 $\mathbb{E}[Y]$ 也存在，并且 $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]$.

证明. 由 $X=Y(a.e.)$, 从而 $\mathbb{P}(X=Y)=1$, 从而 $\mathbb{P}(Y-X=0)=1, \forall x\neq 0, \mathbb{P}(Y-X=x)=0$, 从而

$$\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y-X]=\int_\Omega (Y-X)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}=\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\,\mu_{Y-X}=\int_{\mathbb{R}} x\cdot\mathbb{P}(Y-X=x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}\,x=0,$$

即 $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[X]$. □

题目 11. 设 X, Y 是独立的非负随机变量。证明：$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY]=\int_\Omega XY\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}=\int_{\mathbb{R}^+} x\cdot\mathbb{P}(XY=x)\,\mathrm{d}\,x&=\int_{\mathbb{R}^+} x\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^+}\mathbb{P}\left(X=\frac{x}{y},Y=y\right)\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x\\
&=\int_{\mathbb{R}^+} x\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^+}\mathbb{P}\left(X=\frac{x}{y}\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x\\
&=\int_{\mathbb{R}^+}\mathbb{P}\left(Y=y\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^+} x\cdot\mathbb{P}\left(yX=x\right)\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y\\
&=\int_{\mathbb{R}^+}\mathbb{P}\left(Y=y\right)\cdot\mathbb{E}[yX]\,\mathrm{d}\,y\\
&=\int_{\mathbb{R}^+}\mathbb{P}\left(Y=y\right)\cdot y\cdot\mathbb{E}[X]\,\mathrm{d}\,y\\
&=\mathbb{E}[X]\cdot\int_{\mathbb{R}^+} y\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)\mathrm{d}\,y\\
&=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

□

题目 12. 证明积分的绝对连续性：设 X 是可积的（$\mathbb{E}[X]<\infty$）随机变量。证明：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得 $\forall A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(A)<\delta$, 都有 $\mathbb{E}[\chi_A|X|]<\varepsilon$.

证明. 非负可测函数可以由简单函数逼近：存在简单函数列 $X_n\nearrow|X|$. 故 $\forall\varepsilon>0$, 存在 X_N, 使得 $|X|-X_N<\frac{\varepsilon}{2}$. X_N 是简单函数，有界，设为 $X_N<M$. 从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_A|X|]=\int_\Omega\chi_A\cdot|X|\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}=\int_A|X|\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}&\\
=\int_A(|X|-X_N)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}+\int_A X_N\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}&\\
<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\mathbb{P}(A)+M\cdot\mathbb{P}(A).&
\end{aligned}$$

于是只要取 $\delta=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+2M}$, $\forall A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(A)<\delta$, 就有

$$\mathbb{E}[\chi_A|X|]<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\mathbb{P}(A)+M\cdot\mathbb{P}(A)<\varepsilon.$$

□

第七周

题目 13. 设随机变量 X 服从以 $\lambda>0$ 为参数的指数分布，X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求 X 的矩生成函数 $M_X(z)$, 并求 X 的 k 阶矩 $\mathbb{E}[X^k]$, $k\geq 1$.

证明. $\forall z<\lambda$,

$$M_X(z)=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX}]=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{zx}\,\mathrm{d}\,\mu_X=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{zx}\cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{+\infty}\lambda\,\mathrm{e}^{(z-\lambda)x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\lambda}{\lambda-z}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[X^k]\cdot z^k}{k!}=M_X(z)=\frac{\lambda}{\lambda-z}=\frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{k!}{\lambda^k}\cdot z^k}{k!}.$$

即 $\mathbb{E}[X^k]=\frac{k!}{\lambda^k}$, $k\geq 1$. □

题目 14. 是 X 是服从标准正态分布的随机变量，求 X 的矩生成函数，并求 X 的 k 阶矩，$k\geq 1$.

证明. 标准正态分布 X 的概率密度函数

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

对任意奇数 $k\geq 1$, $x^k\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 是奇函数，故

$$\mathbb{E}[X^k]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^k\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x=0.$$

对任意偶数 $k\geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^k\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^{k-1}\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{k-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(k-1)x^{k-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x\\&=(k-1)\mathbb{E}[X^{k-2}].\end{aligned}$$

递归地，$\mathbb{E}[X^k]=(k-1)!!\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x=(k-1)!!$.

从而

$$M_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[X^k]\cdot z^k}{k!}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l-1)!!z^{2l}}{(2l)!}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l-1)!!z^{2l}}{2^l l!(2l-1)!!}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z^2}{2}\right)^l}{l!}=\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}.$$

□

证明.

$$M_X(z)=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX}]=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{zx}\,\mathrm{d}\,\mu_X=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{zx}\cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{zx-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x.$$

其中，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{zx-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{2}} \,\mathrm{d}(x-z) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} .$$

综上，$M_X(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{zx-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}$. 从而，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k] \cdot z^k}{k!} = M_X(z) = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^2}{2}\right)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{2^l l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!z^{2l}}{2^l(2l-1)!!l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!z^{2l}}{(2l)!}.$$

即

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} 0, & k = 2l-1, \\ (k-1)!!, & k = 2l, \end{cases} \quad l \geq 1.$$

□

题目 15. 设 X 是 *Bernoulli* 随机变量，$\mathbb{P}(X=1) = p \in (0,1)$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. 求 X 的矩生成函数。

证明.

$$M_X(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX}] = \int_\Omega \mathrm{e}^{zX} \,\mathrm{d}\, \mathbb{P} = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{zx} \,\mathrm{d}\, \mu_X = \mathrm{e}^{z\cdot 0} \cdot \mathbb{P}(X=0) + \mathrm{e}^{z\cdot 1} \cdot \mathbb{P}(X=1) = p \cdot \mathrm{e}^z + 1 - p.$$

□

第八周

题目 16. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是两两独立的随机变量。$\forall n$, $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ 是一个常数，且 $\sigma^2(X_n) \le C$ 有界。记 $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. 则有 $\mathbb{E}[|S_n - \mu|^2] \to 0$.

证明.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_n - \mu|^2] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}^{n}\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] - 2\mu\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] + \mu^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] + \frac{n^2-n}{n^2}\mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \frac{1}{n}\mu.\end{aligned}$$

$$\sigma^2(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]^2 = \mathbb{E}[X_n^2] - \mu^2 \le C.$$

$$\mathbb{E}[|S_n - \mu|^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \frac{1}{n}\mu \le \frac{1}{n^2}n(C+\mu^2) - \frac{1}{n}\mu = \frac{1}{n}(C+\mu^2-\mu) \to 0.$$

□

题目 17. 设连续型随机变量 X 的分布密度函数是

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2\log|x|}, & |x| \ge 2; \\ 0, & |x| < 2. \end{cases}$$

证明：$\mathbb{E}[|X|] = +\infty$, 而 $n\mathbb{P}(|X| \ge n) \to 0$.

证明.

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x|\, f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}\,x = 2\int_2^\infty \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}\log x = 2\log\log x|_2^\infty = +\infty.$$

$$n\mathbb{P}(|X| \ge n) = n\left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_n^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x\right) = 2n\int_n^\infty \frac{1}{x^2\log x}\,\mathrm{d}\,x.$$

令 $t = \log x$.

$$\begin{aligned}n\mathbb{P}(|X| \ge n) = 2n\int_n^\infty \frac{1}{x^2\log x}\,\mathrm{d}\,x &= 2n\int_{\log n}^\infty \frac{1}{t\,\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}\,t \\ &< 2n\int_{\log n}^\infty \frac{1}{\log n\,\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{2n}{\log n}(-\mathrm{e}^{-t})|_{\log n}^\infty = \frac{2n}{\log n}\,\mathrm{e}^{-\log n} = \frac{2n}{\log n}\frac{1}{n} = \frac{2}{\log n} \to 0.\end{aligned}$$

□

题目 18. 证明：$\mathbb{E}[X^2] < \infty$, 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(|X| > n) < \infty.$$

证明.

$$\mathbb{E}[X^2]=\int_{\mathbb{R}}2y\mathbb{P}(|X|\geq y)\,\mathrm{d}\,y=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}2y\mathbb{P}(|X|\geq y)\,\mathrm{d}\,y.$$

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}2y\mathbb{P}(|X|\geq y)\,\mathrm{d}\,y&\geq\int_n^{n+1}(2n)\mathbb{P}(|X|\geq n+1)\,\mathrm{d}\,y\\&\geq\int_n^{n+1}(n+1)\mathbb{P}(|X|\geq n+1)\,\mathrm{d}\,y=(n+1)\mathbb{P}(|X|\geq n+1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}y\mathbb{P}(|X|\geq y)\,\mathrm{d}\,y&\leq\int_n^{n+1}(n+1)\mathbb{P}(|X|\geq n)\,\mathrm{d}\,y\\&\leq\int_n^{n+1}(2n)\mathbb{P}(|X|\geq n)\,\mathrm{d}\,y=2n\mathbb{P}(|X|\geq n).\end{aligned}$$

综上，

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\mathbb{P}(|X|\geq n)+\int_0^1 2y\mathbb{P}(|X|\geq y)\leq\mathbb{E}[X^2]=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}2y\mathbb{P}(|X|\geq y)\,\mathrm{d}\,y\leq\sum_{n=0}^{\infty}4n\mathbb{P}(|X|\geq n).$$

□

题目 19. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量。证明：

1. 若对某个 $0<\alpha<1$, 有 $\mathbb{E}[|X_1|^{\alpha}]<\infty$, 则
$$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\xrightarrow{a.e.}0.$$

2. 若对某个 $1\leq\beta<2$, 有 $\mathbb{E}[|X_1|^{\beta}]<\infty$, 则
$$\frac{S_n-n\mathbb{E}[X_1]}{n^{\frac{1}{\beta}}}\xrightarrow{a.e.}0.$$

Marcinkiewicz SLLN for iid r.v.'s

Theorem 8.3.5 **(Marcinkiewicz SLLN for iid r.v.'s)** *Let $X_1, X_2, ...$ be i.i.d. r.v.'s, and $0 < r < 2$. Then*

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a) \longrightarrow 0, \qquad a.s.$$

if and only if $E|X_1|^r < \infty$, where

$$\begin{aligned} a &= EX_1 && \text{if } 1 \le r < 2 \\ &= \text{arbitrary} && \text{if } 0 < r < 1. \text{ (Usually, simply chooses } a = 0). \end{aligned}$$

Proof. Denote $S_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - a)$. If $n^{-1/r}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a) \longrightarrow 0$ a.s., then

$$\frac{X_n}{n^{1/r}} = \frac{a}{n^{1/r}} + \frac{S_n}{n^{1/r}} - \frac{S_{n-1}}{n^{1/r}} = \frac{a}{n^{1/r}} + \frac{S_n}{n^{1/r}} - \frac{S_{n-1}}{(n-1)^{1/r}}\frac{(n-1)^{1/r}}{n^{1/r}} \to 0, \quad a.s.$$

Thus, $P(|X_n| \ge n^{1/r}, i.o.) = 0$. From the Borel 0-1 law for independent sequences, and identical distribution assumption, we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| \ge n^{1/r}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_1|^r \ge n\right) < \infty,$$

which implies that $E|X_1|^r < \infty$.

Now we shall show that if $E|X_1|^r < \infty$, we shall show that $\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a) \to 0$ a.s. The proof is very similar to Theorem 8.3.4. However, we shall write it down below for completeness.

Write $Y_n = X_n I_{\{|X_n| \le n^{1/r}\}}$. Clearly,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n \ne Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| > n^{1/r}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_1|^r > n\right) \le E|X_1|^r < \infty.$$

Therefore, $\{X_n\}$ and $\{Y_n\}$ are equivalent sequences. Therefore, it suffices to show that

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - a) \to 0 \qquad a.s.$$

Case I: $r = 1$. This is Theorem 8.3.4.

Case II: $0 < r < 1$.

Applying Corollary 8.3.3 with $a_n = n^{1/r}$ to $\{Y_n\}$, we get

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|Y_n|}{n^{1/r}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/r}} E|X_n| I_{\{|X_n| \le n^{1/r}\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{1/r}} E|X_1| I_{\{k-1<|X_1|^r \le k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1/r}} E|X_1| I_{\{k-1<|X_1|^r \le k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[E\left(|X_1| I_{\{k-1<|X_1|^r \le k\}}\right) \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1/r}} \right) \right] \\
&\quad \text{(Note that the series } \textstyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1/r}} \text{ converges when } 0 < r < 1.) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^{1/r} P\left(I_{\{k-1<|X_1|^r \le k\}}\right) \left(\frac{C}{k^{1/r-1}} \right) \right] \\
&= C \sum_{k=1}^{\infty} k P\left(I_{\{k-1<|X_1|^r \le k\}}\right) \\
&\le C\left(1 + E|X_1|^r\right) < \infty,
\end{aligned}$$

where we used the elementary estimate $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1/r}} \le C/k^{1/r-1}$ for some $C > 0$ and all $k \ge 1$ when $0 < r < 1$.

It follows from Corollary 8.3.3 that

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \to 0 \qquad a.s.$$

which in turn implies that

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - a) = \frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{a}{n^{1/r-1}} \to 0 \qquad a.s.$$

Case III: $1 < r < 2$ with $a = EX_1$.

Applying Corollary 8.3.3 with $a_n = n^{1/r}$ to $\{Y_n\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EY_n^2}{n^{2/r}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} EX_n^2 I_{\{|X_n| \le n^{1/r}\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{2/r}} EX_1^2 I_{\{k-1 < |X_1|^r \le k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} EX_1^2 I_{\{k-1 < |X_1|^r \le k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[E\left(X_1^2 I_{\{k-1 < |X_1|^r \le k\}}\right) \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} \right) \right]
\end{aligned}$$

(Note that the series $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}}$ converges when $1 < r < 2$.)

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^{2/r} P\left(k-1 < |X_1|^r \le k\right) \left(\frac{C}{k^{2/r-1}} \right) \right] \\
&= C \sum_{k=1}^{\infty} k P\left(k-1 < |X_1|^r \le k\right) \\
&\le C\left(1 + E|X_1|^r\right) < \infty,
\end{aligned}$$

where we used the elementary estimate $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} \le C/k^{2/r-1}$ for some $C > 0$ and all $k \ge 1$ when $1 < r < 2$. Thus, (i) follows from Corollary 8.3.3.

Proof of (ii) and (iii). Note that

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n-EY_n}{n^{1/r}}\right| &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n-Y_n|}{n^{1/r}} \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/r}}EX_nI_{\{|X_n|>n^{1/r}\}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/r}}E|X_1|I_{\{|X_1|^r>n\}} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n^{1/r}}E|X_1|I_{\{k-1<|X_1|^r\le k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^{1/r}}E|X_1|I_{\{k-1<|X_1|^r\le k\}} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}k^{1/r}P\left(k-1<|X_1|^r\le k\right)\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^{1/r}}\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\left[k^{2/r}P\left(k-1<|X_1|^r\le k\right)\left(\frac{C}{k^{2/r-1}}\right)\right] \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty}kP\left(k-1<|X_1|^r\le k\right) \\
&\le C\left(1+E|X_1|^r\right)<\infty.
\end{aligned}
$$

From Kronecker Lemma and Corollary 8.3.3, we obtain (ii) and (iii).

Note that (iii) also follows from the equivalence sequence theorem in the last chapter on WLLN.

Combining (i)-(iii), we get

$$
\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_1)=\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-Y_k)+\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-EY_k)+\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(EY_k-EX_k)\to 0 \quad a.s. \quad \blacksquare
$$

Theorem **8.3.4 (Kolmogorov SLLN for iid r.v.'s)** *Let $X_1, X_2, \dots$ be i.i.d. r.v.'s, and $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Then*

$$(i) \quad E|X_1| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_n}{n} \to EX_1 \quad a.s. \tag{3.8}$$

$$(ii) \quad E|X_1| = \infty \quad \Longrightarrow \quad \limsup_n \frac{|S_n|}{n} = \infty \quad a.s. \tag{3.9}$$

Corollary **8.3.3** *$\{X_n\}$ are independent r.v.'s, and $0 < a_n \nearrow \infty$. Assume that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^r}{a_n^r} < \infty, \qquad 0 < r \le 2. \tag{3.7}$$

Then, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} X_j &\to 0 \qquad a.s. \quad \text{if } 0 < r \le 1; \\ \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} (X_j - EX_j) &\to 0 \qquad a.s. \quad \text{if } 1 \le r \le 2. \end{aligned}$$

Proof. Take $g_n(x) \equiv |x|^r$.

Case I: If $0 < r \le 1$, then (3.7) is equivalent to (3.2). From the last theorem, we get $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/a_n$ converges a.s. and then apply Kronecker's Lemma.

Case II: If $1 \le r \le 2$, then (3.7) implies that

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Eg_n(X_n - EX_n)}{g_n(a_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n - EX_n|^r}{a_n^r} \\ \le\ & C_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^r}{a_n^r} + C_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|EX_n|^r}{a_n^r} \qquad (\text{by } C_r\text{-inequality}) \\ \le\ & 2C_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^r}{a_n^r} \qquad (\text{as } |EX_n|^r \le E|X_n|^r,\ r \ge 1) \\ <\ & \infty. \end{aligned}$$

From the last theorem, we get $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - EX_n)/a_n$ converges a.s. and then apply Kronecker's Lemma. ∎

Corollary **8.3.2 (Kronecker lemma)** *If $a_n \nearrow \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{a_n}$ converges, then*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} y_k \to 0.$$

第十周

题目 20. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，$\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$. 求

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ 收敛}\right).$$

解.

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1.$$

$$\sigma^2(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = 1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot (1 - p) - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p).$$

令 $X'_n = \frac{X_n}{n}$, $\mathbb{P}(X'_i = \frac{1}{n}) = p$, $\mathbb{P}(X'_i = -\frac{1}{n}) = 1 - p$, $\mathbb{E}[X'_n] = \frac{2p-1}{n}$, $\sigma^2(X'_n) = \frac{4p(1-p)}{n^2}$. 令 $Y_n = X'_n \cdot \chi_{\{|X'_n| \leq A\}}$.

- 若 $p = \frac{1}{2}$, 取 $A = 1$. 则 $Y_n = X'_n$. $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X'_n] = \frac{2p-1}{n} = 0$, $\sigma^2(Y_n) = \sigma^2(Y'_n) = \frac{4p(1-p)}{n^2} = 0$.
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X'_n| > A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X'_n| > 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 < \infty$.
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 < \infty$.
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 < \infty$.

  由 Kolmogorov 三级数定理，$\sum_{k=1}^{\infty} X'_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k}$ 几乎处处收敛，从而 $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ 收敛}\right) = 1$.

- 若 $p \neq \frac{1}{2}$. 则 $\forall A > 0$, $\exists N$, 使得 $\forall n > N$, $\frac{1}{n} < A$. 此时，$Y_n = X'_n$. 从而

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[Y_n] + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[Y_n] + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{E}[X'_n] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[Y_n] + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2p-1}{n} \to \infty.$$

  由 Kolmogorov 三级数定理, $\sum_{k=1}^{\infty} X'_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k}$ 不是几乎处处收敛, 从而 $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ 收敛}\right) < 1$. 又由于 $\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ 收敛}\}$ 是一个尾事件，由 Kolmogorov 0-1 律，$\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ 收敛}) \in \{0, 1\}$, 从而 $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ 收敛}) = 0$.

□

题目 21. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立随机变量序列，记 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. 利用 *Kolmogorov* 三级数定理证明：

1. 若 $\sum X_n^2$ 几乎处处收敛，则 $\sum X_n$ 几乎处处收敛当且仅当 $\sum \mathbb{E}\left[X_n \cdot \chi_{\{|X_n| \leq 1\}}\right]$ 收敛。
2. 若 $\sum X_n$ 几乎处处收敛，则 $\sum X_n^2$ 几乎处处收敛当且仅当 $\sum \left(\mathbb{E}\left[|X_n| \cdot \chi_{\{|X_n| \leq 1\}}\right]\right)^2$ 收敛。

证明. 1. 必要性由 Kolmogorov 三级数定理即得。充分性：由 Kolmogorov 三级数定理，$\sum \mathbb{P}(|X_n^2| > 1) < \infty$, 从而 $\sum \mathbb{P}(|X_n| > 1) = \sum \mathbb{P}(|X_n^2| > 1) < \infty$; 且 $\sum \mathbb{E}[|X_n^2| \cdot \chi_{\{|X_n^2| \leq 1\}}] < \infty$, 从而 $\sum \mathbb{E}[X_n^2 \cdot \chi_{\{|X_n| \leq 1\}}] = \sum \mathbb{E}[|X_n^2| \cdot \chi_{\{|X_n^2| \leq 1\}}] < \infty$. 由 Hölder 不等式，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}] = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\,\mathrm{d}\,\mu_{X_n} &= \int_{-1}^{1} 1\cdot x\,\mathrm{d}\,\mu_{X_n} \\
&\le \left(\int_{-1}^{1} 1^2\,\mathrm{d}\,\mu_{X_n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}\,\mu_{X_n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\mathbb{P}(|X_n|\le 1)}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} x^2\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\,\mathrm{d}\,\mu_{X_n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\mathbb{P}(|X_n|\le 1)}\cdot\sqrt{\mathbb{E}[|X_n^2|\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}]}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\sum\left(\mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}]\right)^2 \le \mathbb{P}(|X_n|\le 1)\cdot\sum\mathbb{E}[\left|X_n^2\right|\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}] < \infty.
$$

从而

$$
\sum\sigma^2(X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}) = \sum\left(\mathbb{E}[\left|X_n^2\right|\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}] - \left(\mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}]\right)^2\right) < \infty.
$$

由 Kolmogorov 三级数定理，$\sum X_n$ 几乎处处收敛。

2. 必要性：同理 1,

$$
\sum\left(\mathbb{E}[|X_n|\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}]\right)^2 \le \mathbb{P}(|X_n|\le 1)\cdot\sum\mathbb{E}[\left|X_n^2\right|\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}] < \infty.
$$

充分性：由 $\sum X_n$ 几乎处处收敛，$\sum\mathbb{P}(|X_n|>1)<\infty$, 从而

$$
\sum\mathbb{P}(\left|X_n^2\right|>1) = \sum\mathbb{P}(|X_n|>1) < \infty.
$$

还有 $\sum\mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right]$ 收敛，从而

$$
\sum\mathbb{E}\left[X_n^2\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right] \le \sum\mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right] < \infty.
$$

且

$$
\sum\mathbb{E}\left[X_n^4\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right] \le \sum\mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right] < \infty.
$$

由 Hölder 不等式，

$$
\sum\left(\mathbb{E}\left[X_n^2\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right]\right)^2 \le \mathbb{P}(\left|X_n^2\right|\le 1)\cdot\sum\mathbb{E}\left[X_n^4\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}\right] < \infty.
$$

从而

$$
\sum\sigma^2(X_n^2\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}) = \sum\left(\mathbb{E}[\left|X_n^4\right|\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}] - \left(\mathbb{E}[X_n^2\cdot\chi_{\{|X_n|\le 1\}}]\right)^2\right) < \infty.
$$

由 Kolmogorov 三级数定理，$\sum X_n^2$ 几乎处处收敛。

$\square$

题目 22. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立随机变量序列，证明级数 $\sum X_n^2$ 几乎处处收敛当且仅当

$$\sum \mathbb{E}\left[\frac{X_n^2}{1+X_n^2}\right] < \infty.$$

证明. 简化记号：设 $X_n \geq 0$, 即证 $\sum X_n$ 几乎处处收敛当且仅当 $\sum \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\right] < \infty$.

必要性：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\cdot\chi_{\{|X_n|>1\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}\right] + \mathbb{E}\left[1\cdot\chi_{\{|X_n|>1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}\right] + \mathbb{P}\left(|X_n|>1\right).\end{aligned}$$

由 Kolmogorov 三级数定理，$\sum \mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}\right] < \infty$, $\sum \mathbb{P}\left(|X_n|>1\right) < \infty$. 从而

$$\sum \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\right] \leq \sum \mathbb{E}\left[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}\right] + \sum \mathbb{P}\left(|X_n|>1\right) < \infty.$$

充分性：由 Markov 不等式，

$$\sum \mathbb{P}(X_n > 1) = \sum \mathbb{P}(\frac{X_n}{1+X_n} < \frac{1}{2}) \leq 2\sum \mathbb{E}[\frac{X_n}{1+X_n}] < \infty.$$

并且

$$\sum \mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{X_n\leq 1\}}] \leq 2\sum \mathbb{E}[\frac{X_n}{1+X_n}\cdot\chi_{\{X_n\leq 1\}}] \leq 2\sum \mathbb{E}[\frac{X_n}{1+X_n}] < \infty.$$

又

$$\sum \mathbb{E}[X_n^2\cdot\chi_{\{X_n\leq 1\}}] \leq \sum \mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{X_n\leq 1\}}] < \infty.$$

由 Hölder 不等式，

$$\sum \left(\mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}]\right)^2 \leq \mathbb{P}(|X_n|\leq 1)\cdot\sum \mathbb{E}[\left|X_n^2\right|\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}] < \infty.$$

从而

$$\sum \sigma^2(X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}) = \sum\left(\mathbb{E}[\left|X_n^2\right|\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}] - \left(\mathbb{E}[X_n\cdot\chi_{\{|X_n|\leq 1\}}]\right)^2\right) < \infty.$$

由 Kolmogorov 三级数定理，$\sum X_n$ 几乎处处收敛。 □

题目 23. 设随机变量序列 X_n 依分布收敛于 X. 证明：$\varphi_{X_n}(z)$ 在紧集上一致收敛于 $\varphi_X(z)$.

证明. 不妨设这个紧集是 $[a,b]$. 由分部积分，

$$\begin{aligned}|\varphi_n(z)-\varphi(z)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,zx}\,\mathrm{d}\,\mu_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,zx}\,\mathrm{d}\,\mu_X\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,zx}(\Phi_n(x)-\Phi(x))\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \mathrm{i}\,z\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,zx}(\Phi_n(x)-\Phi(x))\,\mathrm{d}\,x\right| \\ &\leq |z|\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,zx}\right|\left|\Phi_n(x)-\Phi(x)\right|\mathrm{d}\,x \\ &\leq \max\{a,b\}\int_{\mathbb{R}} \left|\Phi_n(x)-\Phi(x)\right|\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

由于 $\Phi_n \xrightarrow{a.e.} \Phi$, 且 $|\Phi_n| \le 1$, 由控制收敛定理，$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \,\mathrm{d}\, x \to 0$. 从而

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \le \max\{a, b\} \int_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \,\mathrm{d}\, x \to 0.$$

且收敛与 z 无关，即 $\varphi_{X_n}(z)$ 在紧集上一致收敛于 $\varphi_X(z)$. □

题目 24. 证明：特征函数相同的两个随机变量是同分布的。

证明. 由逆转公式，

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(b) - \Phi_Y(a) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(Y = a) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(Y = b) &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, az} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, bz}}{\mathrm{i}\, z} \varphi_Y(z) \,\mathrm{d}\, z \\
&= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, az} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, bz}}{\mathrm{i}\, z} \varphi_X(z) \,\mathrm{d}\, z \\
&= \Phi_X(b) - \Phi_X(a) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = a) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = b).
\end{aligned}$$

由分布函数的右连续性，令 $b \to a^+$, 有

$$\Phi_X(b) - \Phi_X(a) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = a) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = b) \to \mathbb{P}(X = a) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = a) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = a).$$

$$\Phi_Y(b) - \Phi_Y(a) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(Y = a) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(Y = b) \to \mathbb{P}(Y = a) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(Y = a) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(Y = a) = \mathbb{P}(Y = a).$$

从而 $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(Y = a)$, 即 X, Y 有相同的分布。 □

第十一周

题目 25. 证明：X_n 依分布收敛到 X 的充分必要条件是任意 X_n 的子列都有子列依分布收敛到 X.

证明. 必要性是显然的，只证充分性。若否，存在 Φ 的连续点 z, 使得 $\Phi_n(z) \nrightarrow \Phi(z)$. 从而 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall N > 0$, $\exists n_N > N$, 使得 $|\Phi_{n_N}(z) - \Phi(z)| > \varepsilon_0$. 取 Φ_n 的子列 Φ_{n_N}, 它的任意子列 $\Phi_{n_{N_k}}$, 总有 $\left|\Phi_{n_{N_k}}(z) - \Phi(z)\right| > \varepsilon_0$. 这说明 $\Phi_{n_{N_k}}$ 在 Φ 的连续点 z 处不收敛于 $\Phi(z)$. 从而 Φ_{n_N} 没有收敛子列，矛盾。 $\square$

第十三周

题目 26. 对 $n \geq 0, k \geq 1, \xi_{n,k}$ 是取值非负整数的独立同分布随机变量，X_0 是取正整数的随机变量，与 $\{\xi_{n,k}\}$ 独立。$\forall n \geq 0$, 定义

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k}.$$

证明：$\{X_n\}$ 是 *Markov* 链，并且当 $X_0 = 1$ 时，计算 $\mathbb{E}[X_n]$.

证明. 记 $\xi_{n,k}$ 独立同分布于 ξ.

$\omega \in \{ X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1 \}$ 当且仅当 $i_{n+1} = X_{n+1}(\omega) = \sum_{k=1}^{X_n(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) = \sum_{k=1}^{i_n} \xi_{n,k}(\omega)$ 当且仅当 $\omega \in \{ X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n \}$. 从而有

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1 \right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n \right).$$

这就说明 $\{X_n\}$ 是 Markov 链。

用归纳法：$\mathbb{E}[X_0] = 1$. $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[\xi_{0,1}] = \mathbb{E}[\xi]$. 设 $\mathbb{E}[X_n] = (\mathbb{E}[\xi])^n$ 对 $\leq n$ 成立。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k} \middle| X_n\right]\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k} \middle| X_n = n\right] \mathbb{P}(X_n = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}\right] \mathbb{P}(X_n = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{E}[\xi]\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{E}[\xi] \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\xi](\mathbb{E}[\xi])^n = (\mathbb{E}[\xi])^{n+1}.
\end{aligned}$$

综上，由归纳法知，$\forall n \geq 0, \mathbb{E}[X_n] = (\mathbb{E}[\xi])^n$. □

题目 27. 设 $p_{ij}^{(n)}$ 是时间齐次的 *Markov* 链 n 步转移矩阵中的 (i,j) 元，即

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i).$$

证明：对固定的 j, $\max_{i \in I} p_{ij}^{(n)}$ 关于 n 单调不增，$\min_{i \in I} p_{ij}^{(n)}$ 关于 n 单调不减。

证明. 由 Chapman-Kolmogorov 方程：$p_{ij}^{(k+l)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(l)}$, 且 $\sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)}$. $\forall i \in I$,

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)} p_{rj}^{(n)} \leq \sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)} \max_{i \in I} p_{ij}^{(n)} = \max_{i \in I} p_{ij}^{(n)} \sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)} = \max_{i \in I} p_{ij}^{(n)}.$$

从而 $\max_{i \in I} p_{ij}^{(n+1)} \leq \max_{i \in I} p_{ij}^{(n)}$.

同理，$\forall i \in I$,

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)} p_{rj}^{(n)} \geq \sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)} \min_{i \in I} p_{ij}^{(n)} = \min_{i \in I} p_{ij}^{(n)} \sum_{r \in I} p_{ir}^{(1)} = \min_{i \in I} p_{ij}^{(n)}.$$

从而 $\min_{i \in I} p_{ij}^{(n+1)} \geq \min_{i \in I} p_{ij}^{(n)}$. □