2024 届本科生学士学位论文 学校代码：10269

華東師範大學
East China Normal University

本科生毕业论文

Bass-Serre 树简介

Introduction to Bass-Serre Trees

姓　　名：	崔嘉祺
学　　号：	10201510407
学　　院：	数学科学学院
专　　业：	数学与应用数学
指导教师：	邹燕清
职　　称：	青年研究员

2024 年 5 月

华东师范大学学位论文诚信承诺

本毕业论文是本人在导师指导下独立完成的，内容真实、可靠。本人在撰写毕业论文过程中不存在请人代写、抄袭或者剽窃他人作品、伪造或者篡改数据以及其他学位论文作假行为。

本人清楚知道学位论文作假行为将会导致行为人受到不授予/撤销学位、开除学籍等处理（处分）决定。本人如果被查证在撰写本毕业论文过程中存在学位论文作假行为，愿意接受学校依法作出的处理（处分）决定。

承诺人签名：崔嘉祺　　　　　　　　日期：2024年4月17日

华东师范大学学位论文使用授权说明

本论文的研究成果归华东师范大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本学位论文作者和指导教师完全了解华东师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权华东师范大学可以将论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索、交流，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

保密的毕业论文（设计）在解密后应遵守此规定。

作者签名：崔嘉祺　导师签名：[illegible]　日期：2024年4月17日

目录

摘要 . . . . **i**

ABSTRACT . . . . **ii**

1、 绪论 **1**

2、 Bass-Serre 树 **3**

2.1 融合积 3

2.1.1 正向极限 3

2.1.2 融合积的结构 4

2.1.3 例子 7

2.2 树 9

2.2.1 图 9

2.2.2 树 13

2.2.3 图的子树 15

2.3 树与自由群 18

2.3.1 代表元树 18

2.3.2 自由群的图 18

2.3.3 树上的自由作用 19

2.3.4 应用：Schreier 定理 21

2.4 树与融合积 24

2.4.1 两个生成元的情形 24

2.4.2 融合积与基本域 (一般情形) 27

3、 研究课题 **30**

3.1 问题 30

3.2 分析 30

3.3 例子的构造 31

3.3.1 秩为 3 的例子 31

3.3.2 秩为 2 的例子 34

3.3.3 代数嵌入不一定能拓扑实现 37

3.4 进一步讨论 39

参考文献 **41**

致谢 **41**

Bass-Serre 树简介

摘要:

有限表现群一直以来得到数学家们的关注. 而几何群论是研究群的结构与表现的重要工具. 本文将关注几何/组合群论的原始文献, 法国著名数学家 Jean Pierre Serre 的 *Trees*, 对其中最基本也是最重要的概念: Bass-Serre 树进行学习和研究. 通过对该书的学习, 体会如何通过群作用在树上的结构来得到群本身的信息. 并使用这套理论计算一些例子, 试图回答低维拓扑中的一个问题.

第一章, 我们将简要介绍几何群论的发展历史. 从而组合群论到现代的几何群论, 从 Dehn 等人的工作出发, 沿着时间, 介绍到 Serre, Gromov, Bestvina 等著名数学家在这个领域的著名工作. Dehn 提出的群的算法问题后, 数学家们开始对各种群进行研究 (主要使用组合的方法). 而后产生了拟等距等概念, 对群做进一步分类. Gromov 推广了黎曼几何中曲率的概念, 定义了一般的度量空间上双曲性, 发明了双曲群的概念. 更多的来自于几何, 分析的工具被引入群的研究中. 现在, 双曲群已然称为几何群论学家关注的焦点.

第二章, 我们会对本文关注的重点: Bass-Serre 树的相关概念, 如融合积, 树等进行介绍. 并证明几个重要的有限生成群的自由积和融合积的结构定理.

最后, 第三章, 我们应用 Bass-Serre 树, 通过一些例子的计算, 尝试回答三维流形中的一个问题: 两个柄体相粘合得到的空间的基本群的秩可能是多少? 具体地, 对亏格为 2 的柄体, 我们构造了秩为 2 和 3 的例子.

关键词: 融合积, 树, 群作用, 自由群, 秩

Introduction to Bass-Serre Trees

Abstract:

Finite representation groups have always been the focus of mathematicians. Geometric group theory is an important tool for studying the structure and representation of groups. This thesis will focus on the original work of geometric/combinatorial group theory, the famous French mathematician Jean Pierre Serre's textit Trees, and study the most basic and important concept: Bass-Serre trees. Through studying this book, we try to understand how to obtain information about groups themselves through the structure of groups acting on trees. We will use this theory to calculate some examples and attempt to answer a question in Low-dimensional Topology.

In Chapter 1, we will briefly introduce the development history of geometric group theory. By combining group theory with modern geometric group theory, starting from Dehn's work and following time, we will introduce the famous works of famous mathematicians such as Serre, Gromov, Bestvina, etc. in this field.

In Chapter 2, we will introduce the relevant concepts of Bass-Serre trees, such as amalgamations and trees, which are the focus of this article. We will also prove some important structure theorems of free products and amalgamations of finite generated groups.

Finally, in Chapter 3, we apply Bass-Serre trees to attempt to answer a question in 3-dimensional manifolds in a special case by calculating some examples: what is the rank of the fundamental group of the space obtained by bonding two handlebodies together? Specifically, we will focus on the case of handlebodies of genus 2. We construct some cases of rank 2 and 3.

Keywords: Amalgamation, Tree, Group Action, Free Group, Rank

1、 绪论

几何群论起源于组合群论, 它的研究对象是有限表现群, 与低维几何拓扑的发展有着密不可分的联系.

紧流形的基本群是有限表现的. 于是有限表现群提供给我们一个强大的工具去分类流形. 反之, 拓扑的技术对研究群也有着很大的作用.1911 年, Dehn 提出了有关群的算法问题[1]:

- 单词问题: 对有限表现群 $G = \langle S|R\rangle$, 我们能不能判定其中的任意一个单词是不是平凡单词?

- 共轭问题: 对有限表现群 $G = \langle S|R\rangle$, 我们能不能判定其中的任意两个单词是不是共轭的?

- 同构问题: 对两个有限表现群 $G = \langle S|R\rangle$ 与 $G' = \langle S'|R'\rangle$, 我们能不能通过它们的表现判定 G 与 G' 是不是同构的?

他使用双曲几何的办法对曲面的基本群解决了这些问题. 稍后, Magnus 用组合发方法推广了 Dehn 的工作.[2]

之后, 在 Stallings, Serre, Rips, Gromov 等人的工作下, 强大的几何工具被引入到这个学科, 加深了组合群论与三维流形理论的联系.

几何群论的中心思想是将有限生成群赋予一个度量, 并且把它们视作几何对象. 具体地, 给定群 G 的有限生成元集 S, 我们可以定义群的 Cayley 图 (见定义2.2.17), 将群上的度量限制在顶点上就可以得到 G 的单词度量. 但是这个定义依赖于生成元集 S 的选取, 对于不同的生成元集, 对应的 Cayley 图并不总是同构的, 但是它们是拟等距的 (见[3] 第 123 页):

定义 1.0.1 (拟等距)**.** 设 $f : X \to Y$ 是从度量空间 (X, d_X) 到 (Y, d_Y) 的映射,

- 称 f 是拟等距嵌入, 若存在正实数 b, c, 使得 $\forall x, x' \in X$, 有

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \le d_Y(f(x), f(x')) \le c \cdot d_X(x, x') + b.$$

- 称 f 是拟等距, 若存在拟等距嵌入 $g : Y \to X$ 与正常数 a, 使得 $\forall x \in X, y \in Y$,

$$d_X(g \circ f(x), x) \le a, \quad d_Y(f \circ g(y), y) \le a.$$

命题 1.0.2. 设 S, S' 都是群 G 的有限生成元集. 则 G 关于 S 与 S' 的 *Cayley* 图是拟等距的.

围绕着这一概念, 许多杰出的数学家做出了许多美妙而优雅的工作, 如[4][5][6]:

定理 1.0.3 (Milnor-Švarc) 设群 G 几何作用在测地度量空间 X 上. 则

1. 群 G 是有限生成的.
2. 群 G 的 Cayley 图与 X 拟等距. 具体地, 任取 $x_0 \in X$, 映射 $g \mapsto gx_0$ 是拟等距.

定理 1.0.4 (Gromov) 有限表现群是有至多多项式增长的, 当且仅当它包含一个有限指标的幂零子群.

1987 年, Gromov 在他的书[7] 中推广了双曲几何的概念:

定义 1.0.5. *称一个测地度量空间 X 是 (Gromov-) 双曲的, 若存在常数 $\delta \geq 0$, 使得对任意测地三角形 $[x, y] \cup [x, z] \cup [z, y] \subset X$, $\forall p \in [x, y]$, 存在 $q \in [x, z] \cup [z, y]$, 使得 $d(x, y) \leq \delta$.*

并且我们容易证明如下的命题:

命题 1.0.6. 双曲性是测地度量空间的拟等距不变量.

于是我们可以定义有限表现群的双曲性:

定义 1.0.7. *我们称有限表现群 G 是双曲的, 若它的某个 Cayley 图是双曲空间.*

并且 Gromov 证明了:

定理 1.0.8 (Gromov) 双曲群的算法问题都是可解的.

Gromov 的工作向我们展示了几何的观点对研究群有着巨大的威力, 使得双曲群成为了人们研究的焦点, 现代的几何群论从此开始蓬勃发展.

定理 1.0.9 (Bestvina, Feighn[8]) 若 H 是双曲群 G_1, G_2 的拟凸完全不正规子群, 则融合积 $G_1 *_H G_2$ 是双曲群.

本文我们将关注几何群论中的重要方法: 通过研究群在 (Bass-Serre) 树上的作用来得到群本身的信息. 并证明一些结构定理, 包括著名的 Nielsen-Schreier 定理 (定理 2.3.10):

定理 (Nielsen-Schreier)**.** 自由群的子群是自由的.

最后, 我们将应用这个方法, 通过例子, 尝试回答三维流形中的一个问题: 两个柄体沿着它们的边界子曲面相粘合得到的空间的基本群的秩可能是多少? 特别地, 我们将关注亏格为 2 的柄体的情况. 我们构造了两个秩为 2 的自由群沿着某格秩为 3 的自由子群到其中的嵌入, 可以得到的秩为 2 和 3 的融合积, 并且在拓扑上具体实现了这样的嵌入和粘合, 使得这个融合积的确成为了对应的粘合流形的基本群.

2、 Bass-Serre 树

2.1 融合积

2.1.1 正向极限

定义 2.1.1. 设 $(G_i)_{i\in I}$ 是一族群, F_{ij} 是从 G_i 到 G_j 的一些同态. 若有群 G 与一族同态 $f_i : G_i \to G$, 使得 $\forall f \in F_{ij}$, 都有 $f_j \circ f = f_i$, 则称 G 是 (G_i) 相对于 (F_{ij}) 的正向极限, 记为 $G = \varinjlim G_i$.

性质 2.1.2 (泛性质)**.** 若群 H 与同态族 $h_i : G_i \to H$, 满足 $\forall f \in F_{ij}$, 都有 $h_j \circ f = h_i$, 则存在唯一的同态 $h : G \to H$, 使得 $h_i = h \circ f_i$.

$$\begin{tikzcd}
H & & \\
 & G_i \arrow[ul, "h_i"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "f_i"] & G_j \arrow[ull, "h_j"'] \arrow[dll, "f_j"] \\
G \arrow[uu, "\exists! h"] & &
\end{tikzcd}$$

命题 2.1.3. $G = \varinjlim G_i$ 存在, 且在唯一的同构的意义下唯一.

证明 唯一性由泛性质即得. 对于存在性, 考虑 G 的表现.

1. 对生成元, 记 S_i 是 G_i 的生成元集, 令 $S = \bigsqcup_{i\in I} S_i$.
2. 对生成关系 R, 令
   (a) $xyz^{-1} = 1$, 若 $x, y, z \in G_i$, 且 $z = xy$.
   (b) $xy^{-1} = 1$, 若 $x \in G_i, y \in G_j$, 且存在 $f \in F_{ij}$, 使得 $f(x) = y$.

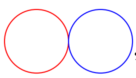
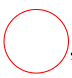
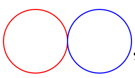
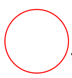
令 $G = \langle S|R\rangle$, $f_i : G_i \to G$ 是投影映射.

$\forall f \in F_{ij}, \forall x \in G_i$, 记 $y = f(x)$. $f_i(x) = x$, $f_j \circ f(x) = f_j(y) = y$. 由生成关系 (b), 在 G 中 $x = y$. 从而 $\forall f \in F_{ij}$, 都有 $f_j \circ f = f_i$. □

例 2.1.1 取群 A, G_1, G_2, 同态 $f_i : A \to G_i, i = 1, 2$. 由此得到的正向极限 G 称为 A 在 G_1, G_2 中通过 f_1, f_2 融合积得到, 记为 $G = G_1 *_A G_2$.

应用 2.1.4 (Van Kampen 定理)**.** 设 X 是一个拓扑空间, 被开集 U_1, U_2 覆盖. 设 $U_1, U_2, U_{12} = U_1 \cap U_2$ 都是道路连通的. 设 $x \in U_{12}$ 是基点. 则 $\pi_1(X, x)$ 是由 $\pi_1(U_{12}, x)$ 在 $\pi_1(U_1, x), \pi_1(U_2, x)$ 中通过投影映射 $i_1 : \pi_1(U_{12}, x) \to \pi_1(U_1, x), i_2 : \pi_1(U_{12}, x) \to \pi_1(U_2, x)$ 融合积得到.

例 2.1.2 令

$X =$ , $U_1 =$ , $U_2 =$ , $U_1 \cap U_2 =$ .

$$U_1 = \langle r_1 \rangle, \ U_2 = \langle r_2, b_2 \rangle, \ U_1 \cap U_2 = \langle r_3 \rangle.$$

从而

$$X = \left\langle r_1, r_2, b_2, r_3 | r_3 r_1^{-1}, r_3 r_2^{-1} \right\rangle = \langle r_1, b_2 \rangle.$$

2.1.2 融合积的结构

定义 2.1.5. 设 $A, (G_i)_{i \in I}$ 是群, 与单同态 $f_i : A \to G_i, i \in I$. 记 $*_A G_i$ 是 (A, G_i) 相对于 (f_i) 的正向极限, 称为 (G_i) 与 A 融合积.

例 2.1.3 当 $A = \{1\}$ 时, 简记为 $*G_i$, 它就是 (G_i) 的自由积.

定义 2.1.6. 取 S_i 是 $G_i \bmod A$ 的一个右陪集表示代表元集, 且设 $1 \in S_i$. 于是映射

$$\begin{gathered} A \times S_i \to G_i \\ (a, s) \mapsto as \end{gathered}$$

是一个双射, 它还把 $A \times (S_i - \{1\})$ 映满 $G_i - A$.

设 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n) \subset I$, 满足

$$i_m \neq i_{m+1}, 1 \leq m \leq n-1. \tag{T}$$

则称任意序列

$$m = (a; s_1, \cdots, s_n),$$

其中, $a \in A, 1 \neq s_m \in S_{i_m}, 1 \leq m \leq n$, 是一个 $\boldsymbol{i}$ 型约化单词.

最后, 记 f, f_i 是 A, G_i 到 $G = *_A G$ 的典范映射.

定理 2.1.7 (结构定理) $\forall g \in G$, 存在满足条件 (T) 的序列 $\boldsymbol{i}$, 与一个 $\boldsymbol{i}$ 型约化单词 $m = (a; s_1, \cdots, s_n)$, 使得

$$g = f(a) f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n). \tag{*}$$

并且, $\boldsymbol{i}$ 与 m 是唯一的.

证明见[9] 第 3-4 页.

例 2.1.4 (特殊情形) 当 $A = \{1\}$ 时, $*G_i$ 就是自由积. 此时有 $S_i = G_i, G_i' = G_i - \{1\}$.

特别地, 若 G_i 是 x_i 生成的无限循环群, 此时 G 就是自由群 $F((x_i)_{i \in I})$. 定理 2.1.7给出了将 $g \in F((x_i)_{i \in I})$ 分解成以下形式的存在性与唯一性:

$$g = x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_n}^{m_n}, \ i_1 \neq i_2, \cdots, i_{n-1} \neq i_n, \ m_1 \neq 0, \cdots, m_n \neq 0.$$

例 2.1.5 (推广) 之前的定理的关键的情形是 $(G_i)_{i\in I}$ 有两个元素. 任意有限个元素的情况可以由归纳法得到 (例如：$G_1 *_A G_2 *_A G_3$ 可以有连续地两次融合积 $(G_1 *_A G_2) *_A G_3$ 得到). 无限集的情况可以通过正向极限过程化简到有限集的情况.

沿用之前的记号, $G = *_A G_i$. 称

$$g = f(a) f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n) = a s_1 \cdots s_n$$

是 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n)$ 型的. 我们有 $\boldsymbol{i} = \varnothing$, 当且仅当 $g \in A$. 于是 g 的型可以由关系 $g \in G'_{\boldsymbol{i}}$ 刻画, 这与 S_i 的选取无关.

定义 2.1.8. 称 n 是 g 的长度, 记为 $l(g)$. 我们有 $l(g) \le 1$, 当且仅当 g 属于某个 G_i.

称 $l(g) \ge 2$ 的 g 是循环约化的, 若它的型 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n)$ 满足 $i_1 \ne i_n$.

命题 2.1.9. *1.* $\forall g \in G$ 要么共轭于一个循环约化元, 要么共轭于某个 G_i 中的元.

2. 循环约化元都是无穷阶的.

证明 1. 对 $l(g)$ 做归纳. 设 $l(g) \ge 2$ 且不是循环约化的, 设 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n)$ 是 g 的型. 于是有 $i_1 = i_n$. 将 g 写为

$$g = g_1 \cdots g_n,\ g_1 \in G'_{i_1} \cdots g_n \in G'_{i_n}.$$

则

$$g_1^{-1} g g_1 = g_2 \cdots g_{n-1}(g_n g_1),\ g_n g_1 \in G'_{i_1}.$$

从而我们知道要么 $l(g_1^{-1} g g_1) = n - 1$(若 $g_n g_1 \notin A$), 要么 $l(g_1^{-1} g g_1) = n - 2$(若 $g_n g_1 \in A$). 由归纳假设, $g_1^{-1} g g_1$ 要么共轭于一个循环约化元, 要么共轭于某个 G_i 中的元. 于是 g 也如此.

2. 设 g 是 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n)$ 型的循环约化元. 显然有 g^2 的型是 $2\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n, i_1, \cdots, i_n)$, $l(g^2) = 2n$. 一般地, $\forall k \ge 1$, g^k 的型是 $k\boldsymbol{i}$, $l(g^k) = kn$, 从而 g^k 不可能是单位元.

□

推论 2.1.1 G 中的有限阶元都共轭于某个 G_i 中的元.

注记 2.1.10. 有更精确的结果：G 的有限子群都共轭于某个 G_i 的子群.

推论 2.1.2 若 $\forall i \in I$, G_i 是无扭的 (非单位元都是无限阶的), 则 G 也是无扭的.

应用到自由积:

命题 2.1.11. A, B 是群, R 是典则映射 $A * B \to A \times B$ 的核. 则 R 是自由群, 它的自由基 X 是交换子的集合:

$$X = \{[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab \mid a \in A - \{1\}, b \in B - \{1\}\}.$$

证明 记 $S = \langle X \rangle$ 是 X 生成的 $A * B$ 的子群. $\forall a' \in A, \forall [a,b] \in X$,

$$a'^{-1}[a,b]a' = a'^{-1}a^{-1}b^{-1}aba' = [aa', b] \cdot [a', b]^{-1} \in S.$$

从而 $a'^{-1}Sa' \subset S$, 从而 $a'^{-1}Sa' = S$. 同理, $\forall b' \in B$, $b'^{-1}Sb' = S$. 从而 $(a'b')S = a'(b'S) = a'Sb' = (a'S)b' = S(a'b')$. 从而 $S \trianglelefteq A * B$. 容易验证 $(A * B)/S$ 有 $A \times B$ 的泛性质, 从而 $S = R$, 即 X 生成了 R.

只剩下证 X 是 R 的自由子集.

引理 2.1.1 设 X 是群 R 的子集. 则以下条件等价:

1. X 是 R 的自由子集.
2. 任意有限序列 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 与 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, 使得不存在 $1 \le i \le n-1$, 同时有 $x_i = x_{i+1}$ 且 $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$. 则乘积 $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \neq 1$.

事实上, 由定理 2.1.7, 任意自由群 $F(X)$ 中的非零元可以被唯一写为 $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ 的形式. 条件 (ii) 说明同态 $F(X) \to R$ 是单射.

由引理 2.1.1, 我们只需要证明 X 满足条件 (ii). $\forall [a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n] \in X, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, 使得不存在 $1 \le i \le n-1$, 同时有 $a_i = a_{i+1}, b_i = b_{i+1}, \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$. 我们要证明

$$g = [a_1, b_1]^{\varepsilon_1} \cdots [a_n, b_n]^{\varepsilon_n} \neq 1.$$

我们将证明:

1. $l(g) \ge n + 3$.
2. 若 $\varepsilon_n = 1$, 则 g 的约化分解的终点是 $a_n b_n$; 若 $\varepsilon_n = -1$, 则 g 的约化分解的终点是 $b_n a_n$.

对 n 做归纳: $n = 1$ 的情形是平凡的. 设 $\varepsilon_{n-1} = +1$, 由归纳假设,

$$g' = [a_1, b_1]^{\varepsilon_1} \cdots [a_{n-1}, b_{n-1}]^{\varepsilon_{n-1}}$$

的约化分解有以下形式:

$$g' = s_1 \cdots s_p a_{n-1} b_{n-1},\ p \ge n.$$

- 若 $\varepsilon_n = +1$, 则
$$g = s_1 \cdots s_p a_{n-1} b_{n-1} a_n^{-1} b_n^{-1} a_n b_n$$
是一个约化分解, $l(g) \geq n+6$, 终点是 $a_n b_n$.

- 若 $\varepsilon_n = -1$, 则
$$g = s_1 \cdots s_p a_{n-1} b_{n-1} b_n^{-1} a_n^{-1} b_n a_n = s_1 \cdots s_p a_{n-1} (b_{n-1} b_n^{-1}) a_n^{-1} b_n a_n.$$
  - 若 $b_{n-1} b_n^{-1} \neq 1$, 则 $g = s_1 \cdots s_p a_{n-1} (b_{n-1} b_n^{-1}) a_n^{-1} b_n a_n$ 是一个约化分解, $l(g) \geq n+5$, 终点是 $b_n a_n$.
  - 若 $b_{n-1} b_n^{-1} = 1$, 由条件, $a_{n-1} \neq a_n$. 则
$$g = s_1 \cdots s_p (a_{n-1} a_n^{-1}) b_n a_n$$
是一个约化分解, $l(g) \geq n+3$, 终点是 $b_n a_n$.

而 $\varepsilon_{n-1} = -1$ 的情况同理. □

推论 2.1.3 两个有限群的自由积包含一个有限指标的自由子群.

2.1.3 例子

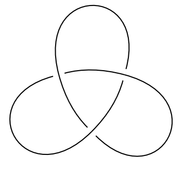
例 2.1.6 无穷阶二面体群 D_∞ 同构于 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

证明 $D_\infty = \{a, b | abab = 1\}$. 令 $x = ab, y = ba$. 从而 $x^2 = abab = 1$. $y^2 = baba = a^{-1}ababa = a^{-1}1a = 1$. 故 $D_\infty = \{a, b | abab = 1\} = \{x, y | x^2 = y^2 = 1\} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. □

例 2.1.7 三叶结群 $\langle a, b | aba = bab \rangle$ 就是 $\mathbb{Z}$ 与两个 $\mathbb{Z}$ 通过单射 $2\,\mathrm{Id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 与 $3\,\mathrm{Id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 做的融合积. 换句话说, 他也可以由 $\left\langle x, y | x^2 = y^3 \right\rangle$ 定义 (比如取 $x = bab, y = ab$).

三叶结群有许多形式:

1. 它是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \supset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的万有覆盖下的原像.
2. 它是三叶结的补空间 $\mathbb{R}^3 - N$ 的基本群.



3. 它是三根弦的辫子群 $B(3)$, 即复平面上三个元素构成的空间 X_3 的基本群.

4. 它是尖点的局部基本群, 或者说 $\mathbb{C}^2$ 去掉仿射曲线 $x^2 = y^3$ 得到的空间 $\mathbb{C}^2 - Y$ 的基本群.

证明 辫子群

$$B(n) = \left\langle \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \forall |i-j| \geq 2, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \forall i \right\rangle.$$

于是 $B(3) = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle = \langle a, b | aba = bab \rangle$ □

例 2.1.8 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ (4 阶与 6 阶群的生成元分别是 $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 与 $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$).

证明 令 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 作用在无理数集上:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

1. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 的生成元.

2. B 是二阶元, $C = AB$ 是三阶元. 从而有满同态 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

3. 由 B, C, C^{-1} 写成的非平凡单词 ω, 存在无理数 z, 使得 $\omega(z) \neq z$, 从而 $\omega \neq 1$.

4. 第二步得到的满同态是同构.

同理, 有满同态 $f : \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. 注意到 $D^2 = E^3 = -I$. 从而 $\mathrm{Ker} f = \left\langle D^4, E^6, D^2E^{-3} \right\rangle$. 由同态基本定理,

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 / \mathrm{Ker} f = \left\langle D, E | D^4 = E^6 = 1, D^2 = E^3 = -1 \right\rangle = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6.$$

□

2.2 树

2.2.1 图

定义 2.2.1. 图 Γ 由顶点 $X = \operatorname{vert}\Gamma$, 边 $Y = \operatorname{edge}\Gamma$, 以及两个映射组成.

$$Y \to X \times X$$
$$y \mapsto (\mathrm{o}(y), \mathrm{t}(y)).$$

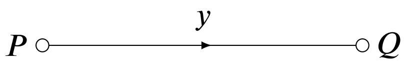
$$Y \to Y$$
$$y \mapsto \overline{y}.$$

其中, $\forall y \in Y$, $\overline{\overline{y}} = y$, $\overline{y} \neq y$, $\overline{y}$ 称为 y 的反向边. $\mathrm{o}(t) = \mathrm{t}(\overline{y})$ 称为 y 的起点, $\mathrm{t}(y) = \mathrm{o}(\overline{y})$ 称为 y 的终点. 二者统称为 y 的端点. 我们称两个顶点是相连的, 若它们是某条边的端点.

定义 2.2.2. 图 Γ 的定向是边的子集 $Y_+ \subset Y = \operatorname{edge}\Gamma$, 使得 $Y = Y_+ \sqcup \overline{Y_+}$. 在同构意义下, 定向图就是由给定的 X 与 Y_+ 和映射 $Y_+ : X \times X$ 所确定.

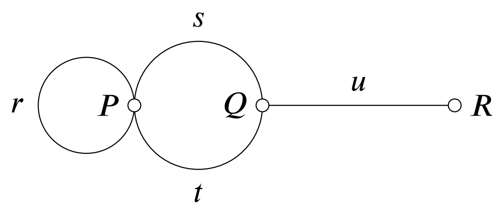
箭图

定义 2.2.3. 图经常用箭图来表示. $y \in \operatorname{edge}\Gamma$, $P = \mathrm{o}(y)$, $Q = \mathrm{t}(y)$.



这样我们也规定了这个图的定向.

例 2.2.1 如下的箭图代表的图有 3 个顶点: P, Q, R, 8 条边: $r, s, t, u, \overline{r}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{u}$. 其中, r, s, t, u 的端点分别是 $\{P, P\}, \{P, Q\}, \{P, Q\}, \{Q, R\}$.



我们没有指定这个图的定向.

图的实现

定义 2.2.4. 设 Γ 是一个图, $X = \operatorname{vert}\Gamma$, $Y = \operatorname{edge}\Gamma$. 构造拓扑空间

$$T = X \sqcup (Y \times [0, 1]),$$

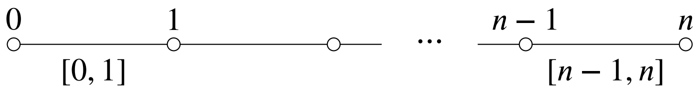
其中, X, Y 赋予离散拓扑. 定义 T 上的等价关系 R: $\forall y \in Y$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$(y, t) \equiv (\overline{y}, 1 - t),$$
$$(y, 0) \equiv \mathrm{o}(y),$$
$$(y, 1) \equiv \mathrm{t}(y).$$

则商空间 $\mathrm{real}(\Gamma) = T/R$ 称为图 Γ 的实现.

道路

定义 2.2.5. 设 $n \geq 0$. 考虑定向图:

Path_n :


它有 $n+1$ 个顶点: $0, 1, \cdots, n$, 与由 n 条边 $[i, i+1]$, $0 \leq i < n$ 确定的定向: $\mathrm{o}([i, i+1]) = i$, $\mathrm{t}([i, i+1]) = i+1$.

定义 2.2.6. 图 Γ 的长度为 n 的道路是一个连续映射 $c : \mathrm{Path}_n \to \Gamma$.

对 $n \geq 1$. 边的序列 $(y_1, \cdots, y_n)$, $\forall 1 \leq i < n$, $y_i = c([i-1, i])$, 使得 $\mathrm{t}(y_i) = \mathrm{o}(y_{i+1})$ 决定了 c. 将 $(y_1, \cdots, y_n)$ 也记为 c. $\forall 0 \leq i \leq n$, 记 $P_i = c(i)$. 我们称 c 是一条从 P_0 到 P_n 的道路, P_0 和 P_n 是道路 c 的端点.

定义 2.2.7. 在一条道路中, 形如 $(y_i, y_{i+1}) = (y_i, \overline{y_i})$ 的节点对称为一个折返. 它允许我们构造一个从 P_0 到 P_n 的长度为 $n-2$ 的道路:

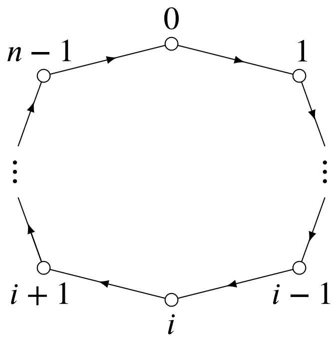
$$(y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+2}, \cdots, y_n).$$

归纳地, 若图 Γ 中有一条从 P 到 Q 的道路, 则 Γ 中有一条从 P 到 Q 的不含折返的道路.

定义 2.2.8. 称一个图是连通的, 若它的任意两个顶点都是至少一条道路的端点. 图的一个极大连通子图称为图的一个连通分支.

环路

定义 2.2.9. 对 $n \geq 1$. 考虑定向图:

Circ_n :


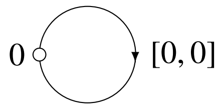
它的顶点集是 $\mathbb{Z}_n$, 有由 n 条边 $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{Z}_n$ 确定的定向: $\mathrm{o}([i, i+1]) = i$, $\mathrm{t}([i, i+1]) = i+1$.

定义 2.2.10. 图的一个长度为 n 的环路是一个同构于 Circ_n 的子图. 这个子图可由不含折返的道路 $(y_1, \cdots, y_n)$, 使得 $\forall 1 \leq i \leq n$, $P_i = \mathrm{t}(y_i)$ 两两不同, 且 $P_n = \mathrm{o}(y_1)$ 所确定.

定义 2.2.11. 长度为 1 的环路称为圈.

例 2.2.2 • $n = 1$:

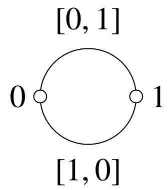
Circ_1 :



Circ_1 就是圈. 它有一个 2 阶的自同构：反向.

• $n = 2$:

Circ_2 :



组合图

定义 2.2.12. 设 (X, S) 是一个维度不大于 1 的单纯复形. X 是一个集合, $S \subset 2^X$, $\forall s \in S$, $|s| = 1$ 或 2, 且 $\forall x \in X$, $\{x\} \in S$. 相对于 (X, S) 定义一个图：顶点集就是集合 X, 边是 $(P, Q) \in X \times X$, 满足 $P \neq Q$, $\{P, Q\} \in S$, $\overline{(P, Q)} = (Q, P)$, $\mathrm{o}(P, Q) = P$, $\mathrm{t}(P, Q) = Q$.

定义 2.2.13. 称一个图是组合的, 若它不含长度不大于 2 的环路.

定义 2.2.14. 设 Γ 是一个组合图. 边 y 的端点的集合 $\{P, Q\}$ 称为 Γ 的几何边. 几何边 $\{P, Q\}$ 决定了定向边 $\{y, \overline{y}\}$. 于是 Γ 的结构可由它的所有顶点与所有几何边决定.

Cayley 图

定义 2.2.15. G 是群, $S \subset G$. 定义定向图 $\Gamma = \Gamma(G, S)$: $\mathrm{vert}\,\Gamma = G$, $(\mathrm{edge}\,\Gamma)_+ = G \times S$, 满足 $\forall (g, s) \in G \times S$,

$$\mathrm{o}(g, s) = s, \quad \mathrm{t}(g, s) = gs.$$

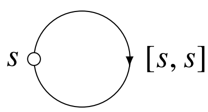
称为群 G 关于 S 的 *Cayley* 图.

命题 2.2.16. 群 G 的元素的左乘定义了一个群 G 在图 $\Gamma = \Gamma(G, S)$ 上的作用, 它保持图 Γ 的定向.

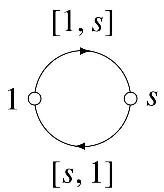
进一步, 群 G 自由地作用在图 Γ 的顶点集和边集上.

例 2.2.3 设 n 阶循环群 $G = \langle s \rangle$, $s^n = 1$. 令 $S = \{s\}$. 则 $\Gamma(G, S)$ 的箭图表示为：

• $n = 1$:



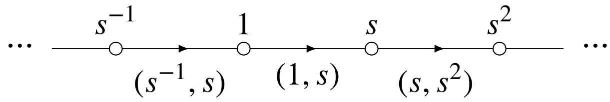
• $n = 2$:



- $n < \infty$:

$$\Gamma(G,S) \cong \mathrm{Circ}_n$$

- $n = \infty$:



命题 2.2.17. 设 $\Gamma = \Gamma(G,S)$ 是群 G 关于 S 的 *Cayley* 图. 则

1. Γ 是连通的, 当且仅当 S 是 G 的一个生成元集. 事实上, Γ 的每个连通分支对应于某一个陪集 gH, 其中, $H = \langle S \rangle \leq G$.

2. Γ 包含一个圈, 当且仅当 $1 \in S$.

3. Γ 是组合图, 当且仅当 $S \cap S^{-1} = \varnothing$.

证明 1. 注意到, $g, g' \in G$ 是某条长度为 n 的道路的端点, 当且仅当 $\exists s_1, \cdots, s_n \in S \cap S^{-1}$, 使得 $g' = gs_1 \cdots s_n$.

必要性：若 Γ 是连通的, 则 $\forall g \in G$, 存在以 $1, g$ 为端点的道路, 从而 $\exists s_1, \cdots, s_m \in S \cap S^{-1}$, 使得 $g = 1 \cdot s_1 \cdots s_m = s_1 \cdots s_m$. 即 S 生成 G.

充分性: $\forall g, g' \in G$, 由于 S 生成 G, 从而 $\exists s_1, \cdots, s_m \in S \cap S^{-1}$, 使得 $g^{-1}g' = s_1 \cdots s_m$, 即 $g' = gs_1 \cdots s_m$, 这说明存在一条长度为 m 的以 g, g' 为端点的道路. 从而 Γ 是连通的.

2. Γ 包含一个圈, 当且仅当它含有一条长度为 1 的道路 y, 使得端点 $g = \mathrm{o}(y) = \mathrm{t}(y) = g'$. 这等价于 $\exists s \in S$, 使得 $g' = gs$. 而 $g' = g = g \cdot 1$. 这当且仅当 $1 = g^{-1}g' = s \in S$.

3. 必要性：若否, 不妨设 $1 \neq s \in S \cap S^{-1}$, 则 $s^{-1} \in (S \cap S^{-1})^{-1} = S \cap S^{-1}$. 若 $1 \in S \cap S^{-1}$, 由 (b), Γ 包含一个圈, 不是组合图. 取 $g \in G$, 令 $g' = gs$. 这说明有一条长度为 1 的道路 y, 使得 $\mathrm{o}(y) = g$, $\mathrm{t}(y) = gs = g'$. 还有 $g's^{-1} = gss^{-1} = g$. 这说明有一条长度为 1 的道路 y', 使得 $\mathrm{o}(y') = g'$, $\mathrm{t}(y') = g's^{-1} = g$. 从而将 y, y' 相接, 就得到了一个长度为 2 的环路：$g = g's^{-1} = gss^{-1}$, 与 Γ 是组合图矛盾.

充分性：若 Γ 包含一个圈, 由 (b), $1 \in S$. 自然有 $1 \in S \cap S^{-1} \neq \varnothing$. 矛盾. 若 Γ 包含一个 Circ_2. 则存在 $g \in G$, $s, s' \in S$, 记 $g' = gs$, 使得 $gss' = g's' = g$. 而 $g \cdot 1 = g$. 从而由群的乘法封闭性, $1 = ss' \in S$, 自然有 $1 \in S \cap S^{-1} \neq \varnothing$. 矛盾.

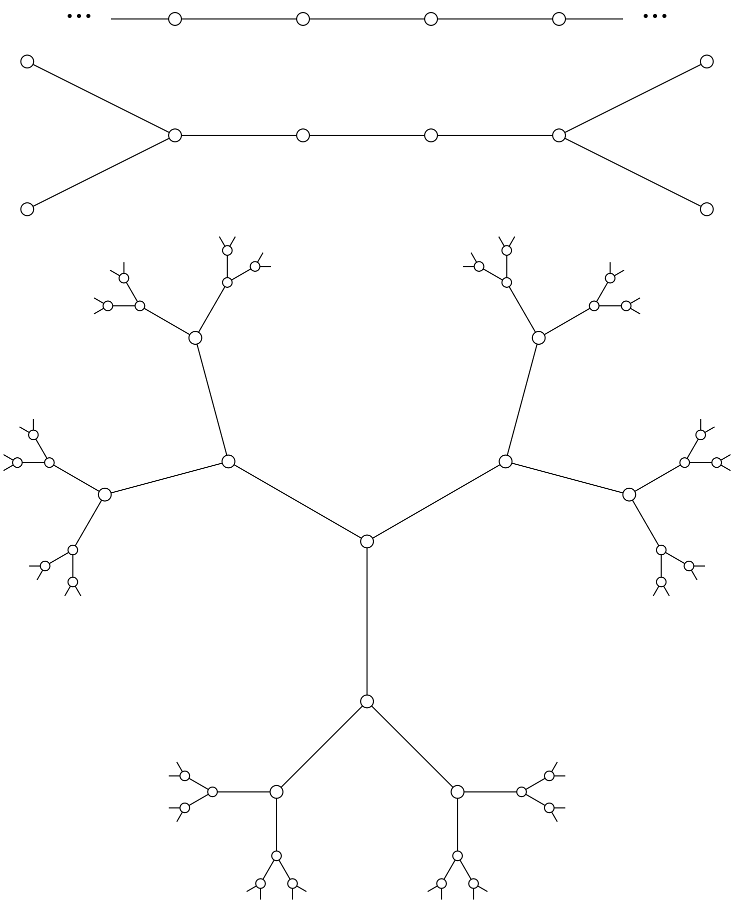
□

2.2.2 树

定义 2.2.18. 树是不含环路的非空连通图.

注记 2.2.19. 特别地, 树是一个组合图.

例 2.2.4



树上的测地线

定义 2.2.20. 树上的测地线是一条不含折返的道路.

命题 2.2.21. 设 P, Q 是树 Γ 上的两个顶点. 则树 Γ 上存在唯一一条从 P 到 Q 的测地线, 并且它是单射道路.

证明见[9] 第 18 页.

定义 2.2.22. 从 P 到 Q 的测地线的长度称为从 P 到 Q 的距离, 记为 $l(P, Q)$. $l(P, Q) = 0$, 当且仅当 $P = Q$. $l(P, Q) = 1$, 当且仅当 P, Q 是相连的.

树的实现

命题 2.2.23. 设 Γ 是一个树. $P \in \operatorname{vert}\Gamma$. 若 $Q \in \operatorname{vert}\Gamma$, 满足 $l(P, Q) = n$, 则由 $\{P, Q\}$ 生成的子树 $\Gamma(P, Q)$ 同构于 Path_n, 我们典范地令 P 对应 Path_n 的顶点 0. 于是我们可以用区间

$[0,n]$ 决定 $\mathrm{real}(\mathrm{Path}_n)$. 考虑 $\mathrm{real}(\Gamma(P,Q))$ 的收缩, 对应于 $[0,n]$ 到 $\{0\}$ 的收缩:

$$\begin{aligned}[0,n]\times[0,1] &\to [0,n]\\ (x,t) &\mapsto (1-t)x.\end{aligned}$$

由于 $\Gamma=\bigcup_{Q\in\mathrm{vert}\,\Gamma}\Gamma(P,Q)$, 于是 $\mathrm{real}(\Gamma)=\bigcup_{Q\in\mathrm{vert}\,\Gamma}\mathrm{real}(\Gamma(P,Q))$. 进一步, 容易看出这些子空间 $\mathrm{real}(\Gamma(P,Q))$ 的收缩是相容的, 从而我们可以得到 $\mathrm{real}(\Gamma)$ 的一个收缩. 树的实现 $\mathrm{real}(\Gamma)$ 是可缩的.

终端

定义 2.2.24. 设 Γ 是一个图, $X=\mathrm{vert}\,\Gamma$, $Y=\mathrm{edge}\,\Gamma$. 设 $P\in X$ 是 Γ 的一个顶点, 记 $Y_P=\{y\in Y\mid \mathrm{t}(y)=P\}$. 则 Y_P 的势 $n=|Y_P|$ 称为 P 的指标. 若 $n=0$, 我们称 P 是孤立的; 当 Γ 是连通图时, 这不可能, 除非 $X=\{P\}$, $Y=\varnothing$. 若 $n\leq 1$, 我们称 P 是图 Γ 的一个终端.

记 $\Gamma-P$ 是 Γ 的子图, 顶点集为 $X-\{P\}$, 边集为 $Y-(Y_P\cup\overline{Y_P})$.

命题 2.2.25. 设 Γ 是一个图, $X=\mathrm{vert}\,\Gamma$, $Y=\mathrm{edge}\,\Gamma$. 设 P 是 Γ 的一个非孤立终端. 则

1. Γ 是连通的, 当且仅当 $\Gamma-P$ 是连通的.

2. Γ 的每一个环路都被包含在 $\Gamma-P$ 中.

3. Γ 是一个树, 当且仅当 $\Gamma-P$ 是一个树.

证明 由假设, 有唯一的边 y 使得 P 是它的终点, 即得 1. 并且, 环路上的任意点的指标至少为 2, 即得 2. 而 3. 由 1. 和 2. 即得. □

有界树

定义 2.2.26. 树 Γ 的顶点集 $\mathrm{vert}\,\Gamma$ 在距离 l 下成为一个度量空间, 从而我们可以谈论一个树的直径, 定义有界树. 比如, 有限树都是有界的.

命题 2.2.27. 设 Γ 是一个直径为 $n<\infty$ 的树. 则

1. Γ 的终端集 $\mathrm{t}(\Gamma)$ 非空.

2. 若 $n\geq 2$, 则 $\mathrm{vert}\,\Gamma-\mathrm{t}(\Gamma)$ 是 Γ 的一个直径为 $n-2$ 的子树的顶点集.

3. 若 $n=0$, 则 $\Gamma\simeq\mathrm{Path}_0$(箭图: $\circ$); 若 $n=1$, 则 $\Gamma\simeq\mathrm{Path}_1$(箭图: $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$).

证明 3 是显然的. 1 由 2 和 3 立即得到: 若 $n\geq 2$, 2 说明 $\mathrm{vert}\,\Gamma-\mathrm{t}(\Gamma)\subsetneq\mathrm{vert}\,\Gamma$, 即 $\mathrm{t}(\Gamma)\neq\varnothing$; 若 $n=0,1$, 由 3, 显然有 $\mathrm{t}(\Gamma)\neq\varnothing$. 故只剩下证 2 .

记 $X' = \operatorname{vert}\Gamma - \mathrm{t}(\Gamma)$. 若 $P, Q \in X'$, 则从 P 到 Q 的测地线上的每个顶点都不是终端, 从而属于 X'. 这说明 X' 生成的子树 Γ' 没有 X' 之外的顶点. 即 $X' = \operatorname{vert}\Gamma'$. 进一步, $\forall P, Q \in X' = \operatorname{vert}\Gamma'$, 设 $l(P, Q) = m$, 由于 Γ' 不含终端, 故连接 P, Q 的测地线可以双侧延长成一个长度为 $m+2$ 的测地线, 从而 $m+2 \leq n$, 即 $m \leq n-2$. 这说明 $\operatorname{diam}(\Gamma') \leq n-2$. 另一方面, 由于 $\operatorname{diam}(\Gamma) = n$, 从而 Γ 中存在一条长度为 n 的测地线 $(y_1, \cdots, y_n)$, 去掉它的首位两条边, 得到一条 Γ' 中的长度为 $n-2$ 的测地线 $(y_2, \cdots, y_{n-1})$. 从而 $\operatorname{diam}(\Gamma') = n-2$. 综上, $\operatorname{vert}\Gamma - \mathrm{t}(\Gamma) = X'$ 是它生成的子树 Γ' 的顶点集, 且 $\operatorname{diam}(\Gamma') = n-2$. □

注记 2.2.28. 任意 Γ 的自同构都保持 Γ'. 对 $\operatorname{diam}(\Gamma)$ 做归纳, 立即得到:

推论 2.2.1 直径是有限偶数/奇数的树, 有一个/一条在它的任意自同构下都不变的顶点/几何边.

注记 2.2.29. 若 Q 是树 Γ_1 的顶点, 由命题 *2.2.25,* 在 Γ_1 外另取一个终端 P, 添加一条几何边 $\{P, Q\}$, 得到的图 Γ 也是一个树. 命题 *2.2.27* 说明任何一个有限树都可以从一个单点树开始, 重复这个操作得到: 任意有限树 Γ, 它的终端集 $\mathrm{t}(\Gamma)$ 非空, 它可以由 $\operatorname{vert}\Gamma - \mathrm{t}(\Gamma)$ 生成的子树重复这个操作得到. 归纳地, 即得. 这样的"下放"过程经常是很方便的.

2.2.3 图的子树

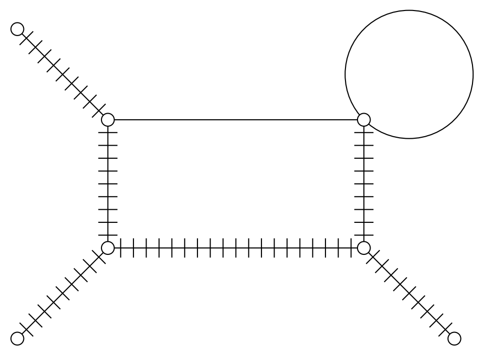
定义 2.2.30. 设 Γ 是一个非空图. 它的所有是一个树的子图的集合, 以包含作为一个序, 成为一个偏序集. 由 *Zorn* 引理, 这个偏序集存在极大元, 称为 Γ 的极大树.

命题 2.2.31. 设 Λ 是非空连通图 Γ 的极大树. 则 Λ 包含 Γ 的所有顶点.

证明 若否, 设 $P \in \operatorname{vert}\Gamma$, $P \notin \operatorname{vert}\Lambda$. 由于 Γ 是连通的, 故存在一条起点在 $\operatorname{vert}\Lambda$ 中, 终点是 P 的边 y. 记 $\mathrm{o}(y) = Q \in \operatorname{vert}\Lambda$. 将 Λ 的顶点集添加 P, 边集添加 $y, \bar{y}$, 得到了 Γ 的一个子图 Λ'. 此时, Λ' 中只有唯一一条以 P 作为端点的几何边 $\{P, Q\}$, 即 $\left|Y_P\right| = |\{\{P, Q\}\}| = 1$, 即 P 是 Λ' 的非孤立终端. 有 $\Lambda' - P = \Lambda$ 是一个树, 由命题 2.2.25, Λ' 是一个树. 又注意到 $\Lambda = \Lambda' - P \subset \Lambda'$. 这与 Λ 的极大性矛盾. 故 $\operatorname{vert}\Lambda \supset \operatorname{vert}\Gamma$. 从而 Λ 包含 Γ 的所有顶点. □

注记 2.2.32. 显然有 $\operatorname{vert}\Lambda \subset \operatorname{vert}\Gamma$. 故事实上, 我们得到了 $\operatorname{vert}\Lambda = \operatorname{vert}\Gamma$.

例 2.2.5



命题 2.2.33. 设 Γ 是一个仅有有限个顶点的连通图. 记

$$s = |\operatorname{vert}\Gamma|, \quad a = \frac{1}{2}|\operatorname{edge}\Gamma|.$$

则 $a \geq s-1$, 等号成立, 当且仅当 Γ 是一个树.

证明 首先证明若 Γ 是一个树, 则 $a = s-1$. 这对单点树: $\circ$ $(s=1, a=0)$ 显然成立. 并且, 若命题对树 Γ 成立, 即 $a = s-1$. 则取 $\operatorname{vert}\Gamma$ 外的一个终端 P, 取 $\operatorname{vert}\Gamma$ 中一点 Q, 以 Q 为起点, P 为终点连一条边 y. 将 Γ 的顶点集添加 P, 边集添加 $y, \bar{y}$, 得到了一个新的树 Γ'. 记 $s' = |\operatorname{vert}\Gamma'|$, $a' = \frac{1}{2}|\operatorname{edge}\Gamma'|$. 此时, $a' = a+1$, $s' = s+1$, 从而

$$a' = a+1 = (s-1)+1 = s = s'-1.$$

即命题对树 Γ' 也成立. 由注记 2.2.29, 这对任意的有限树都成立.

一般情形: 若 Γ 是空集, 则命题显然成立. 否则, 取 Γ 的极大树 Γ'. Γ' 也是有限的. 记 $s' = |\operatorname{vert}\Gamma'|$, $a' = \frac{1}{2}|\operatorname{edge}\Gamma'|$. 由第一个情形, 我们有 $a' = s'-1$. 由注记 2.2.32, 我们有 $\operatorname{vert}\Gamma = \operatorname{vert}\Gamma'$, 从而 $s = s'$. 且显然有 $\operatorname{edge}\Gamma \supset \operatorname{edge}\Gamma'$, 从而 $a \geq a'$. 另一方面,

$$a = a+0 = a+(s'-1-a') = s'-1+(a-a') = s-1+(a-a') \geq s-1.$$

等号成立, 当且仅当 $a - a' = 0$, 即 $a = a'$, 当且仅当 $\operatorname{edge}\Gamma = \operatorname{edge}\Gamma'$, 当且仅当 $\Gamma = \Gamma'$, 即 Γ 本身就是一个树. □

子树的收缩

定义 2.2.34. 设 Γ 是一个非空连通图, 设 Λ 是 Γ 的一个子图, 它是一族不交的树 $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ 的并. 我们将定义一个图 Γ/Λ, 使得 $\operatorname{real}(\Gamma/\Lambda)$ 是将每一个子空间 $\operatorname{real}(\Lambda_i)$ 变成一个点得到的 $\operatorname{real}(\Gamma)$ 的商空间.

更精确地, $\operatorname{vert}(\Gamma/\Lambda)$ 是 $\operatorname{vert}\Gamma$ 的商空间, 其中的等价类是集合 $\operatorname{vert}\Lambda_i$ 与 $\operatorname{vert}\Gamma - \operatorname{vert}\Lambda$ 中的元素, 即 $\{\operatorname{vert}\Lambda_i, p \mid i \in I, p \in \operatorname{vert}\Gamma - \operatorname{vert}\Lambda\}$. $\operatorname{edge}(\Gamma/\Lambda)$ 就是 $\operatorname{edge}\Gamma - \operatorname{edge}\Lambda$. 包含映射

$$\operatorname{edge}(\Gamma/\Lambda) \to \operatorname{edge}(\Gamma/\Lambda)$$

$$y \mapsto \bar{y}$$

就是由 $\operatorname{edge}\Gamma$ 上的包含映射的限制在 $\operatorname{edge}(\Gamma/\Lambda) = \operatorname{edge}\Gamma - \operatorname{edge}\Lambda$ 上诱导而来. 最后, 映射

$$\operatorname{edge}(\Gamma/\Lambda) \to \operatorname{vert}(\Gamma/\Lambda) \times \operatorname{vert}(\Gamma/\Lambda)$$

是由

$$\operatorname{edge}\Gamma \to \operatorname{vert}\Gamma \times \operatorname{vert}\Gamma$$

通过商诱导而来的. 容易验证 $\operatorname{real}(\Gamma/\Lambda)$ 就满足所需的性质.

命题 2.2.35. 典则投影 $\mathrm{real}(\Gamma) \to \mathrm{real}(\Gamma/\Lambda)$ 是一个同伦等价.

证明见[9] 第 22-23 页.

推论 2.2.2 设 Γ 是一个非空连通图. 则 $\mathrm{real}(\Gamma)$ 的同伦型是一束圆圈. 进一步, Γ 是一个树, 当且仅当 $\mathrm{real}(\Gamma)$ 是可缩的.

推论 2.2.3 在命题 2.2.35 的假设下, Γ 是一个树, 当且仅当 Γ/Λ 是一个树.

2.3 树与自由群

2.3.1 代表元树

定义 2.3.1. 设 X 是一个图, 群 G 作用在 X 上. 一个反转是一个对 (g, y), $g \in G$, $y \in \operatorname{edge} X$, 使得 $gy = \overline{y}$. 如果这个作用没有反转, 我们则称 G 是无反转作用. 这等价于存在 X 的一个定向, 使得 G 的作用保持这个定向.

若 G 无反转作用在 X 上, 我们则可以定义商图 $G\backslash X$:

$$\operatorname{vert}(G\backslash X) = \operatorname{vert}(X)/G, \quad \operatorname{edge}(G\backslash X) = \operatorname{edge}(X)/G.$$

命题 2.3.2. 设 X 是一个连通图, G 无反转作用在 X 上. 则 $G\backslash X$ 的任意一个子树 T' 的提升是 X 的一个子树.

证明见[9] 第 25 页.

定义 2.3.3. $X \bmod G$ 的一个代表元树就是 X 的子树 T, 使得 T 是 $G\backslash X$ 的一个极大树的提升.

2.3.2 自由群的图

命题 2.3.4. 令 $X = \Gamma(G, S)$ 是群 G 关于子集 S 的 *Cayley* 图. 则以下条件等价:

1. X 是一个树.

2. G 是以 S 为自由基的自由群.

证明 $2 \Rightarrow 1$:G 是以 S 为自由基的自由群, 从而 $\forall g \in G$ 可以被唯一地写为如下的约化形式

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n},$$

其中 $s_i \in S, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. 并且若 $s_i = s_{i+1}$, 则 $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$(见引理 2.1.1). 整数 n 称为 g 的长度, 记为 $l(g)$. 令 G_n 是 G 中长度为 n 的元素的集合. $\forall g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \in G_n$, 它在 X 中与唯一一个 G_{n-1} 中的元素相邻, 即 $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$. 这诱导了一个映射 $G_n \to G_{n-1}$. 另外, 注意到 X 就是由以下的逆系统定义的图

$$\cdots \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 = \{1\}.$$

从而 X 是一个树.

$1 \Rightarrow 2$: X 是一个树. 由命题 2.2.17, 由于 X 是连通的, 从而 S 生成 G; 由于 X 是组合图, 从而 $S \cap S^{-1} = \varnothing$. 只要证 S 是自由的. 若否, 存在自由群 $F(S)$ 中的非平凡元素 $\hat{g}$, 使得 $\hat{g}$ 在 G 中的像是 1. 设 $\hat{g}$ 的最小长度为 n, 设

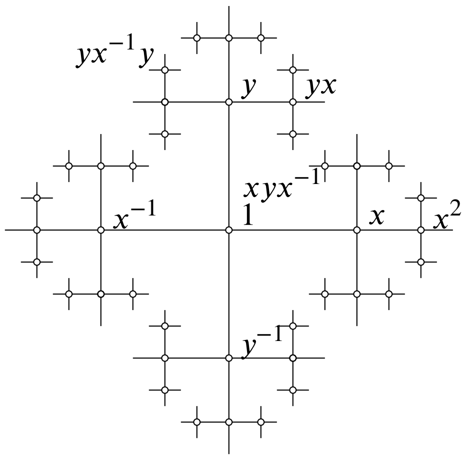
$$\hat{g} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$$

是 $\hat{g}$ 在 $F(S)$ 中的约化分解. $S \cap S^{-1} = \varnothing$ 说明 $n \geq 3$(若 $n = 1$, 则 s_1 在 G 中的像是 1, 从而 $\hat{g} = s_1^{\varepsilon_1} = 1$, 矛盾. 若 $n = 2$, 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 同号, 则在 G 中 $s_1 = s_2^{-1} = \in S^{-1}$, 从而 $s_1 \in S \cap S^{-1} \neq \varnothing$, 矛盾; 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 异号, 则在 G 中 $s_1 = s_2$, 而 S 在 $F(S)$ 中自然是自由的, 这与引理 2.1.1 矛盾). 记 P_i 是 $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i}$ 在 G 中的像. n 的极小性说明 $P_0, \cdots, P_{n-1}$ 两两不同 (若否, $P_i = P_j$, 则 $\hat{g} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i} s_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$, 与 n 的极小性矛盾). 另外 P_i, P_{i+1} 是相连的, $P_n = 1 = P_0$. 由于 $n \geq 3$, 几何边 $\{P_i, P_{i+1}\}, \{P_n, P_0\}$ 是两两不同的, 从而 $P_0, \cdots, P_{n-1}$ 是 X 中一个长度为 n 的环路的顶点, 这个环路的边就是几何边 $\{P_i, P_{i+1}\}, \{P_n, P_0\}$ 所代表的边. 这与 X 是一个树矛盾. □

例 2.3.1

$$S = \{x, y\}$$

$$G = F(S)$$



2.3.3 树上的自由作用

定义 2.3.5. 我们称群 G 自由作用在图 X 上, 若这是一个无反转作用, 且 $\forall 1 \neq g \in G$, 不存在 $x \in \operatorname{vert} X$, 使得 $gx = x$.

例 2.3.2 设 S 是群 G 的子集, 则 G 自由作用在 $\Gamma(G, S)$ 上.

注记 2.3.6. 命题 *2.3.4* 说明, 若 G 是自由群, 则存在一个树 X, 使得 G 自由作用在 X 上. 事实上, 这个性质刻画了自由群:

定理 2.3.7 若一个群自由作用在一个树上, 则它是一个自由群. 更精确地:

定理 2.3.8 设群 G 自由作用在树 X 上. 取 $X \bmod G$ 的一个代表元树 T, 与在 G 的作用下保持的定向 $Y_+ \subset \operatorname{edge} X$.

1. 设 S 是 G 的某些非单位元 g 的集合, 使得存在边 $y \in \operatorname{edge}_+$, 使得 $\operatorname{o}(y) \in T$, $\operatorname{t}(y) \in gT$. 则 S 是 G 的一组自由基.

2. 若 $X^* = G\backslash X$ 只有有限 s 个顶点, 设 $\left|\operatorname{edge} X^*\right| = 2a$. 则 $|S| - 1 = a - s$.

证明 1. 由于 G 自由作用在 X 上, 且由定义, $T^* = G\backslash T$ 是 X^* 的极大树, 从而 $T \to X^*$ 是单射. 从而 $g \mapsto gT$ 是一个从 G 到 T 平移得到的图的集合的双射 (满射是显然的; 若 $gT = g'T$, 则它们的商都是 T^*, 从而它们都不是提升), 且这些 T 的平移是两两不交的 (否则取它们的并, 商映射的像仍是 T^*, 说明它们不是提升). 从而 $G \cdot T$ 是一族不交的树的并, 从而我们可以定义 $X' = X/(G \cdot T)$, 它是把每一个 gT 收缩到一个顶点, 记为 (gT). 由推论 2.2.3, 由于 X 是一个树, 从而 X' 是一个树. 进一步, 双射 $g \mapsto gT \mapsto (gT)$ 的逆映射可以看作一个双射 $\alpha : \operatorname{vert} X' \to G = \operatorname{vert} \Gamma(G, S)$. 我们将把 α 扩张为同构 $\alpha : X' \to \Gamma(G, S)$. 这样, $\Gamma(G, S) \cong X'$ 是一个树, 由命题 2.3.4, G 是以 S 为一个自由基的自由群.

由定义 2.2.34, $\operatorname{edge} X' = \operatorname{edge} X - \operatorname{edge}(G \cdot T)$. 令 X' 的定向 $Y'_+ = Y_+ \cap \operatorname{edge} X'$ 就是 X 的定向诱导的定向. 由于同态 α 是定向图的同态, 从而只需要定义 $\alpha : (\operatorname{edge} X')_+ = Y'_+ \to G \times S = (\operatorname{edge} \Gamma(G, S))_+$. $\forall y \in Y'_+$, 设 $\mathrm{o}(y) = (gT)$, $\mathrm{t}(y) = (g'T)$. 注意到, 此时, 在 X 中, 边 y 连接了 gT 与 $g'T$. 从而 $s = g^{-1}g'$ 将 T 中某点与 sT 中某点相连, 由 S 的定义, $s = g^{-1}g' \in S$. 定义

$$\alpha(y) = (g, s).$$

由 S 的定义, $\forall (g, s)$, 取 $y \in Y'_+$, $\mathrm{o}(y) = (gT)$, $\mathrm{t}(y) = (gsT)$. 则 $\alpha(y) = (g, s)$. 即 α 是满射. 若有 $y, y' \in Y'_+$, 使得 $\alpha(y) = \alpha(y') = (g, s)$. 由于 $\alpha : \operatorname{vert} X' \to \operatorname{vert} \Gamma(G, S)$ 是单射, 从而 $\mathrm{o}(y) = \mathrm{o}(y') = (gT)$, $\mathrm{t}(y) = \mathrm{t}(y') = (gsT)$. 这样, 将 $y, \overline{y'}$ 首位相接得到一个 X' 中的环路, 这与 X' 是一个树矛盾. 从而 α 是单射. 综上, $\alpha : X' \to \Gamma(G, S)$ 是同构. 这就证明了命题.

2. 令 $W = \{ y \in Y_+ \mid \mathrm{o}(y) \in T, \mathrm{t}(y) \notin T \}$. a) 的证明给我们一个双射 $W \to S$($\forall y \in W$, $\mathrm{t}(y) \notin T$, 由于 $\{gT\}$ 两两不交, 从而存在唯一 $g \in S$, 使得 $\mathrm{t}(y) \in gT$; $\forall g \in S$, 存在 $y \in Y_+$, 使得 $\mathrm{t}(y) \in gT$, 从而 $\mathrm{t}(y) \notin T$), 从而 $|W| = |S|$. 另一方面, T^* 是 X^* 的极大树, 由注记 2.2.31, $\operatorname{vert} X^* = \operatorname{vert} T^*$. 我们给 X^* 一个定向 Y_+^*, 它就是 Y_+ 在商映射下的像. 从而 $Y_+^* = (Y_+^* \cap \operatorname{edge} T^*) \sqcup W^*$($\forall y^* \in \operatorname{edge} T^*$, 存在 $y \in \operatorname{edge} T$, $g \in G$, 使得 $\mathrm{o}(y^*) = g\,\mathrm{o}(y)$, $\mathrm{t}(y^*) = g\,\mathrm{t}(y)$, 这说明 $\mathrm{o}(y), \mathrm{t}(y) \in g^{-1}T$, 即 $y \notin W$, 从而 $y^* \notin W^*$; $\forall y \in Y_+$, 使得 $y^* \notin W^*$. 必有 $\mathrm{o}(y), \mathrm{t}(y) \in gT$, 否则若 $\mathrm{o}(y) \in gT$, $\mathrm{t}(y) \in g'T$, 则 $g^{-1}\,\mathrm{o}(y) \in T$, $g^{-1}\,\mathrm{t}(y) \in g^{-1}g'T$, 从而 $g^{-1}y \in W$, 从而 $y^* = (g^{-1}y)^* \in W^*$, 矛盾. 从而 $g^{-1}\,\mathrm{o}(y), g^{-1}\,\mathrm{t}(y) \in T$, 从而 $g^{-1}y \in T$, 从而 $y^* = (g^{-1}y)^* \in \operatorname{edge} T^*$), 并且 $W \to W^*$ 是一个双射 (若 $y, y' \in W$, 使得 $y^* = y'^*$. 设 $\mathrm{t}(y) \in gT$, $\mathrm{t}(y') \in g'T$. 则存在 g'' 使得 $y = g''y'$, 从而 $\mathrm{o}(y) = \mathrm{o}(g''y') = g''\,\mathrm{o}(y') \in g''T$. 但由于 $\mathrm{o}(y), \mathrm{o}(y') \in T$,

且 $\{gT\}$ 两两不交, 只能有 $g'' = 1$, 从而 $y = g''y' = y'$. 从而是单射. 满射显然), 从而 $\left|W^*\right| = |W|$. 由命题 2.2.33, $\left|(\operatorname{edge} T^*)_+\right| = \left|\operatorname{vert} T^*\right| - 1$. 从而

$$\begin{aligned}
a - s &= \frac{1}{2}\left|\operatorname{edge} X^*\right| - \left|\operatorname{vert} X^*\right| \\
&= \left|\operatorname{edge} Y_+^*\right| - \left|\operatorname{vert} X^*\right| \\
&= \left|W^*\right| + \left|(\operatorname{edge} T^*)_+\right| - \left|\operatorname{vert} T^*\right| \\
&= \left|W^*\right| - 1 \\
&= |W| - 1 \\
&= |S| - 1.
\end{aligned}$$

□

定义 2.3.9. *X 就称为自由群 (自由积)G 的 Bass-Serre 树.*

2.3.4 应用: Schreier 定理

定理 2.3.10 (Schreier) 自由群的子群是自由的.

证明 设 S 是 G 的自由基. 由命题 2.3.4, $X = \Gamma(G, S)$ 是一个树. 由例 2.3.2, G 自由作用在树 $X = \Gamma(G, S)$ 上. $\forall H \leq G$, H 也自由作用在树 X 上, 由定理 2.3.7, H 是自由群. □

定义 2.3.11. 若 G 是自由的, 则它的自由基的势与自由基的选取无关. 故我们可以将 G 的任一自由基 S 的势 $|S|$ 称为 G 的秩, 记为 r_G.

推论 2.3.1 (Schreier 指标公式) 设 G 是一个自由群, H 是它的一个子群, 它在 G 中的指标 $[G : H] = n < \infty$. 则

$$r_H - 1 = n(r_G - 1).$$

证明 记 $G_1 = G, G_2 = H$. 设 G 自由作用在树 Γ 上 (例 2.3.2 告诉我们这样的树和作用存在). 记商图 $\Gamma_i = G_i \backslash \Gamma$, $s_i = \left|\operatorname{vert} \Gamma_i\right|$, $a_i = \left|\operatorname{edge} \Gamma_i\right|$, $i = 1, 2$. 则 $s_2 = ns_1$, $a_2 = na_1$. 我们可以选取 Γ 使得 s_1 是有限的 (比如取 G 的自由基 S, 令 $\Gamma = \Gamma(G, S)$, 则 $s_1 = 1$). 由定理 2.3.8, $r_{G_i} - 1 = \left|S_i\right| - 1 = \frac{1}{2}a_i - s_i$, 其中, S_i 是 G_i 的一组自由基, $i = 1, 2$. 从而

$$\begin{aligned}
r_H - 1 = r_{G_2} - 1 &= \frac{1}{2}a_2 - s_2 \\
&= \frac{1}{2}na_1 - ns_1 = n(\frac{1}{2}a_1 - s_1) = n(r_{G_1} - 1) = n(r_G - 1).
\end{aligned}$$

□

Schreier 定理的具体版本

命题 2.3.12. 设 G 是自由群, S 是它的一组自由基, $H \le G$.

1. 我们可以选择 $H\backslash G$ 的一个代表元集 T, 满足以下条件:

若 $t \in T$ 有如下约化分解
$$t = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$
其中, $s_i \in S, \varepsilon = \pm 1$, 且若 $s_i = s_{i+1}$, 则 $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$. 则所有部分单词 $1, s_1^{\varepsilon_1}, s_1^{\varepsilon_1}s_2^{\varepsilon_2}, \cdots, s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \in T$.

2. 令 $W = \{(t,s) \in T \times S \mid ts \notin T\}$. 若 $(t,s) \in W$, 记 $h_{t,s} = tsu^{-1}$, 其中, $u \in T$, 使得 $Hts = Hu$. 则
$$R = \{ h_{t,s} \big| (t,s) \in W \}$$
是 H 的一个基.

证明 1. 记 $\Gamma = \Gamma(G,S)$. 由例 2.3.2, G 自由作用在 Γ 上, 从而 H 也自由作用在 Γ 上, 并且保持 Γ 的定向 $G \times S$ 不变. 若 $t \in G$, 则部分单词 $1, s_1^{\varepsilon_1}, s_1^{\varepsilon_1}s_2^{\varepsilon_2}, \cdots, s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ 就是 Γ 中从 1 到 t 的测地线上的顶点. 则 G 的子集 T 满足条件, 当且仅当 $T = \mathrm{vert}\,\Lambda$, 其中, Λ 是包含顶点 1 的 $\Gamma \bmod H$ 的一个代表元树. H 无反转作用在 Γ 上, 取 $H\backslash\Gamma$ 的极大树, 由命题 2.3.2, 它的提升记为 Λ, 也是一个树, 不妨设它包含 1. 由定义, Λ 就是 $\Gamma \bmod H$ 的一个代表元树. 取 $T = \mathrm{vert}\,\Lambda$ 即得.

2. 由定理 2.3.8, H 的生成元集可以是由 $1 \neq h \in H$, 使得存在边 $(t,s) \in G \times S$, 满足起点 $\mathrm{o}((t,s)) = t \in T$, 终点 $\mathrm{t}((t,s)) = ts \in hT$ 的元素组成. 由于 $h \neq 1$, 故 $1 \neq u = h^{-1}ts \in T$, 且 $(t,s) \in W$, 且 $Hu = Hh^{-1}ts = Hts$. 从而 $h = ts(s^{-1}t^{-1}h) = ts(h^{-1}ts)^{-1} = tsu^{-1} = h_{t,s} \in R$. 即 R 包含这个生成集, 从而是 H 的一组基.

□

例 2.3.3 设 $G = F(x,y)$ 是自由基 $\{x,y\}$ 生成的自由群. 令 H 是投影映射
$$G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$
$$x^{n_1}y^{m_1} \cdots x^{n_i}y^{m_i} \cdots \mapsto (\overline{n_1 + \cdots + n_i + \cdots}, \overline{m_1 + \cdots + m_i + \cdots})$$
的核. 这个映射是满射, 由群同态基本定理, $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. 从而 $[G:H] = |G/H| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 4$. 由 Schreier 指标公式, $r_H = 1 + 4(r_G - 1) = 5$. 取 $G\backslash H$ 的代表元集 $T = \{1, x, y, xy\}$. 由命题 2.3.12, H 的一个自由基 $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ 由以下公式定义:
$$xx = h_1 \cdot 1,\ yx = h_2 \cdot xy,\ yy = h_3 \cdot 1,\ xy \cdot x = h_4 \cdot y,\ xy \cdot y = h_5 \cdot x.$$

从而 H 的一个自由基是

$$\{x^2, yxy^{-1}x^{-1}, y^2, xyxy^{-1}, xy^2x^{-1}\}.$$

2.4 树与融合积

为了方便, 除特殊说明, 本节我们假设群在图上的作用都是无反转的.

2.4.1 两个生成元的情形

定义 2.4.1. 设群 G 作用在图 X 上. 称 $X \bmod G$ 是基本域是 X 的子树 T, 使得 $T \to G\backslash X$ 是一个同构.

注记 2.4.2. 若 $G\backslash X$ 是一个树, 由定理 *2.3.2,* 基本域存在 *(*树 $G\backslash X$ 的提升 T 是 X 的一个子树, 且 $T \to G\backslash X$ 是同构. T 就是一个基本域*)*. 若 X 是一个树，则逆命题也对*:*

命题 2.4.3. 设群 G 作用在树 X 上. 则 $X \bmod G$ 的基本域存在*,* 当且仅当 $G \bmod X$ 是一个树.

证明 充分性由注记 2.4.2 已证. 只证必要性.

由于 X 是一个树, 它是非空连通图, 则 $G\backslash X$ 也是非空连通图. 设 T 是 $X \bmod G$ 的基本域, 它是树 X 的非空连通子图, 也是一个树. 再由同构 $T \to G\backslash X$ 知, $G\backslash X$ 也是一个树. □

定义 2.4.4. 同构于 $\mathrm{Path}_1 = \overset{0}{\circ}\!\!\longrightarrow\!\!\overset{1}{\circ}$ 的图称为一个段.

定理 2.4.5 设群 G 作用在图 X 上, 且 $T = \overset{P}{\circ}\xrightarrow{\ y\ }\overset{Q}{\circ}$ 是 X 的一个段. 设 T 是 $X \bmod G$ 的一个基本域. 记 $G_P, G_Q, G_y = G_{\overline{y}}$ 分别是 T 的顶点 P, Q 与边 y 的稳定化子. 则以下性质等价:

1. X 是一个树.

2. 由嵌入单射 $G_P \to G$ 与 $G_Q \to G$ 诱导的同态 $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ 是同构.

(注意到 $G_y = G_P \cap G_Q$ 是 G_P 与 G_Q 的子群, 从而融合积 $G_P *_{G_y} G_Q$ 有意义.)

证明 证明由以下两个引理完成:

引理 2.4.1 X 是连通的, 当且仅当 G 由 $G_P \cup G_Q$ 生成.

证明 记 X' 是 X 的包含 T 的连通分支, $G' = \{g \in G |\, gX' = X'\}$, $G'' = \langle G_P \cup G_Q \rangle \le G$. $\forall h \in G_P \cup G_Q$, 段 T 与段 hT 至少有一个相同的端点. 从而 $hT \subset X'$. 从而 $hX' = X'$. 即 $h \in G'$. 这说明 $G'' \subset G'$. 另一方面, 我们有子图分解 $X = G''T \sqcup (G - G'')T$ 这说明 $X' \subset G''T$, 从而 $G' \subset G''$. 综上, $G' = G''$.

最后, X 是连通的, 当且仅当 $X = X'$, 这当且仅当 $G = G'$, 当且仅当 $G = G' = G'' = \langle G_P \cup G_Q \rangle$. □

引理 2.4.2 X 不包含环路, 当且仅当 $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ 是单射.

证明 X 包含环路, 即存在 X 中一条无折返的道路 $c = (\omega_0, \cdots, \omega_n)$, $n \geq 1$, 使得 $\mathrm{o}(c) = \mathrm{t}(c)$. 由于 $T \cong G\backslash X$, 从而可设 $\omega_i = h_i y_i$, $h_i \in G$, $y_i \in \{y, \overline{y}\}$. 再由 $G\backslash X \cong T$, 有 $\overline{y_i} = y_{i-1} \in \{y, \overline{y}\}$, $1 \leq i \leq n$. 这说明 y_{i-1}, y_i 互为反转定向, 从而可记 $P_i = \mathrm{o}(y_i) = \mathrm{t}(y_{i-1}) \in \{P, Q\}$, 有 $P_i = \mathrm{o}(y_i) = \mathrm{t}(y_{i-1}) \neq \mathrm{o}(y_{i-1}) = P_{i-1}$. 注意到

$$h_i P_i = h_i \,\mathrm{o}(y_i) = \mathrm{o}(h_i y_i) = \mathrm{o}(\omega_i) = \mathrm{t}(\omega_{i-1}) = \mathrm{t}(h_{i-1} y_{i-1}) = h_{i-1}\,\mathrm{t}(y_{i-1}) = h_{i-1} P_i.$$

这说明 $(h_{i-1}^{-1} h_i) P_i = P_i$, 即 $g_i = h_{i-1}^{-1} h_i \in G_{P_i} \in \{G_P, G_Q\}$. 又注意到,

- 若 $y_i = y$, 则 $\overline{y_{i-1}} = y_i = y$

$$h_i y = h_i y_i = \omega_i \neq \overline{\omega_{i-1}} = \overline{h_{i-1} y_{i-1}} = h_{i-1} \overline{y_{i-1}} = h_{i-1} y.$$

- 若 $y_i = \overline{y}$, 则 $y_{i-1} = \overline{y_i} = y$

$$h_i y = h_i \overline{y_i} = \overline{h_i y_i} = \overline{\omega_i} \neq \omega_{i-1} = h_{i-1} y_{i-1} = h_{i-1} y.$$

总之, $h_{i-1}^{-1} h_i y \neq y$, 从而 $g_i = h_{i-1}^{-1} h_i \notin G_y$. 又由于 $\mathrm{o}(c) = \mathrm{t}(c)$, 这说明 $\mathrm{t}(y_n) = \mathrm{o}(y_0) = P_0$. 同理, 此时也有 $\overline{y_0} = y_n \in \{y, \overline{y}\}$. 从而有

$$\begin{aligned}
h_0 P_0 &= \mathrm{o}(\omega_0) = \mathrm{t}(\omega_n) = \mathrm{t}(h_n y_n) = h_n\,\mathrm{t}(y_n) \\
&= h_n P_0 = (h_0 h_0^{-1})(h_1 h_1^{-1})(h_2 h_2^{-1}) \cdots (h_{n-1} h_{n-1}^{-1}) h_n P_0 \\
&= h_0 (h_0^{-1} h_1)(h_1^{-1} h_2) \cdots (h_{n-2}^{-1} h_{n-1})(h_{n-1}^{-1} h_n) P_0 \\
&= h_0 g_1 \cdots g_n P_0.
\end{aligned}$$

从而 $g_1 \cdots g_n \in G_{P_0}$. 同理定义 $g_0 = h_n^{-1} h_0$.

综上, X 包含一个环路, 当且仅当存在 T 的顶点的序列 $P_0, \cdots, P_n \in \{P, Q\}$, 使得 $\{P_{i-1}, P_i\} = \{P, Q\}$, 与一列 G 中的元素 $g_i \in G_{P_i} - G_y \in \{G_P - G_y, G_Q - G_y\}$, 使得在 G 中,

$$g_0 \cdots g_n = (h_n^{-1} h_0)(h_0^{-1} h_1) \cdots (h_{n-1}^{-1} h_n) = h_n^{-1} (h_0 h_0^{-1}) \cdots (h_{n-1} h_{n-1}^{-1}) h_n = h_n^{-1} h_n = 1.$$

其中 $\{P_{i-1}, P_i\} = \{P, Q\}$ 保证了 $G_{P_{i-1}} - G_y \neq G_{P_i} - G_y$. 这等价于 $(1; g_0, \cdots, g_n)$ 是 $G_P *_{G_y} G_Q$ 中的一个约化单词, 且不是平凡单词 1. 由定理 2.1.7, 这等价于

$$\begin{aligned}
&G_P *_{G_y} G_Q \cong (G_P - G_y) \sqcup (G_Q - G_y) \sqcup G_y \to G \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (1; g_0, \cdots, g_n) \neq 1 \mapsto i_0(g_0) \cdots i_n(g_n) = g_0 \cdots g_n = 1.
\end{aligned}$$

其中 i_j 是对应的嵌入 $G_{P_j} \to G$. 这当且仅当 $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ 不是单射. □

综上, X 是一个树, 当且仅当 X 是不包含环路的连通图, 这当且仅当有单射 $G_P *_{G_y} G_Q \to G = \langle G_P, G_Q \rangle \subset G_P *_{G_y} G_Q$, 当且仅当 $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ 是同构. □

注记 2.4.6. 相反地, 任意两个群的融合积作用在一个树上, 则这个树含有一个段作为基本域. 具体地:

定理 2.4.7 设 $G = G_1 *_A G_2$ 是两个群的融合积. 则存在一个树 X(且在同构意义下是唯一的), 使得 G 作用在 X 上, 有一个 X 中的段 $T = \overset{P \quad y \quad Q}{\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ}$ 作为 $X \bmod G$ 的基本域. 且 T 的顶点 P, Q 与边 y 的稳定化子满足 $G_P = G_1, G_Q = G_2, G_y = A$.

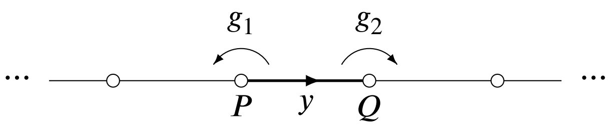
证明 唯一性是容易的: 在同构意义下, X 就是以下定义的图:

$$\operatorname{vert} X = (G/G_1) \sqcup (G/G_2), \quad \operatorname{edge} X = (G/A) \sqcup \overline{(G/A)},$$

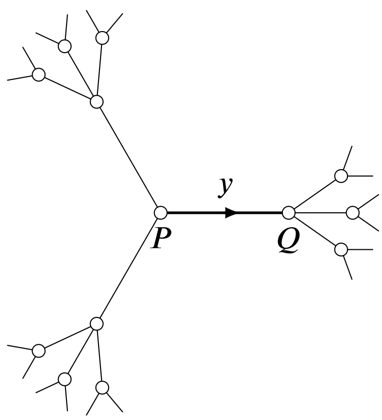
映射 $\mathrm{o} : G/A \to G/G_1$ 与 $\mathrm{t} : G/A \to G/G_2$ 就是由嵌入 $A \to G_1$ 与 $A \to G_2$ 诱导而来. G 在 X 上的作用就是由群乘法诱导而来. 令 $P = 1G_1$, $Q = 1G_2$, $y = 1A$. 则段 $T = \overset{P \quad y \quad Q}{\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ}$ 就是 $X \bmod G$ 的基本域. 容易验证 $G_P = G_1, G_Q = G_2, G_y = A$. 由定理 2.4.5, $G_P *_{G_y} G_Q = G_1 *_A G_2 = G$, 从而 X 是一个树. □

定义 2.4.8. X 就称为融合积 $G_P *_{G_y} G_Q$ 的 *Bass-Serre* 树.

例 2.4.1 无限阶二面体群 D_∞: $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2$, $A = \{1\}$.



例 2.4.2 $G = \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$.



例 2.4.3 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

熟知地, G 可作用在上半平面 $H = \{ z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ 上. 设 $y = \{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} | \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \}$, $\mathrm{o}(y) = P = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}$, $\mathrm{t}(y) = Q = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2}} = \mathrm{i}$. 记 PQ 是 y 从 P 到 Q 代表的段. 令 $X = \bigcup_{g \in G} gy$ 是 y

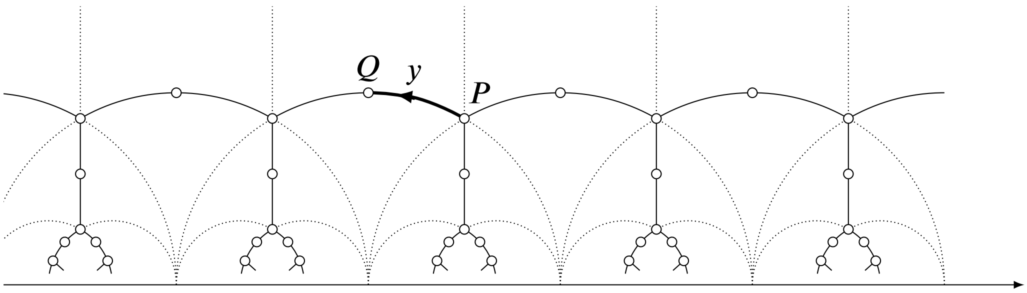
在 G 作用下的像的并. 可以证明 X 是一个树 (更精确地, 一个树的几何实现.), 使得 G 作用在 X 上, 以段 PQ 作为 $X \bmod G$ 的基本域. 我们有

$$G_P = \mathbb{Z}_6, \quad G_Q = \mathbb{Z}_4, \quad G_y = \mathbb{Z}_2,$$

从而我们又得到了经典的同构

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6.$$

(见例 2.1.8.)



2.4.2 融合积与基本域 (一般情形)

定义 2.4.9. 一个群图 (G,T) 由以下元素组成: 一个图 T; $\forall P \in \operatorname{vert} T$, 一个群 G_P; $\forall y \in \operatorname{edge} T$, 一个群 G_y, 与一个同态

$$G_y \to G_{\mathrm{t}(y)}$$
$$a \mapsto a^y.$$

我们还要求 $G_{\overline{y}} = G_y$.

定义 2.4.10. 本节我们考虑 T 是一个树的情形. 此时我们称 (G,T) 是一个群树. 令

$$G_T = \varinjlim(G,T)$$

是群树 (G,T) 的正向极限, 称之为 G_P 沿 G_y 的融合积.

定理 2.4.11 设 (G,T) 是一个群树. 则存在一个包含 T 的图 X, 与一个 $G_T = \varinjlim(G,T)$ 在 X 上的作用, 它有以下刻画:

> T 是 $X \bmod G_T$ 的一个基本域. $\forall P \in \operatorname{vert} T, y \in \operatorname{edge} T$, 它们在 G_T 作用下的稳定化子就是 G_T, G_y.

进一步, X 是一个树.

定义 2.4.12. 此时我们称 X 是关于 (G,T) 的图.

证明 定义图 X:

$$\operatorname{vert} X = \bigsqcup_{P \in \operatorname{vert} T} G_T \cdot P = \bigsqcup_{P \in \operatorname{vert} T} \{ \overline{g} P \,|\, \overline{g} \in G_T / G_P \} \cong \bigsqcup_{P \in \operatorname{vert} T} G_T / G_P,$$

$$\operatorname{edge} X = \bigsqcup_{y \in \operatorname{edge} T} G_T \cdot P = \bigsqcup_{y \in \operatorname{edge} T} \{ \overline{g} y \,|\, \overline{g} \in G_T / G_y \} \cong \bigsqcup_{y \in \operatorname{edge} T} G_T / G_y.$$

边的端点映射是由嵌入 $G_y \to G_{\mathrm{o}(y)}$ 与 $G_y \to G_{\mathrm{t}(y)}$ 给出的. 就令 $\overline{1}P = P, \overline{1}y = y$, 从而可以看作 X 包含 T. G_T 以最自然的方式作用在 X 上. 容易验证 X 满足群作用的性质.

只剩下证明 X 是一个树. 我们将 T 写成它的有限子树的正向极限, G_T 与 X 写作有限子树对应的群和图的正向极限. 从而我们把命题化归到了 T 是有限树的情形. 我们对 $n = |\operatorname{vert} T|$ 做归纳. 不妨设 $n > 1$, 否则 $X = T$ 是平凡的. 取 $y \in \operatorname{edge} T$, 使得 $P = \mathrm{t}(y)$ 是 T 的一个终端.(存在性由命题 2.2.27 (a) 保证.) 由命题 2.2.25, T 是由它的子树 $T' = T - P$ 通过添加顶点 P 连接边 $y, \overline{y}$ 得到的. 令 $G_{T'} = \varinjlim(G, T')$, 我们有 $G_T \cong G_{T'} *_{G_y} G_P$.

令 $X' = G_{T'} T'$, 它是 X 的子图. 容易看出 X' 就是关于 (G, T') 的图. 而 $\left|\operatorname{vert} T'\right| = n - 1 < n = |\operatorname{vert} T|$, 由归纳假设, X' 是一个树. 进一步, 平移 $gX', g \in G_T / G_{T'}$ 是两两不交的. 令 $\widetilde{X}$ 是将 X 中的每一个 gX' 都收缩到一个点得到的图. 有诱导的群 G_T 在 $\widetilde{X}$ 上的作用, 它的基本域是段 $T/T' = \overset{(T')}{\circ} \xrightarrow{\;y\;} \overset{P}{\circ}$. 而 $(T'), P, y$ 的稳定化子分别是 $G_{T'}, G_P, G_y$. 由于 $G_{T'} *_{G_y} G_P \to G_T$ 是一个同构, 由定理 2.4.5, $\widetilde{X}$ 是一个树. 由推论 2.2.3, X 是一个树. □

另一方面, 记 $\widetilde{X}$ 是关于 (G, T) 的树, 恒等映射 $T \to T$ 可以唯一延拓成一个同态 $\widetilde{X} \to X$, 他与映射 $G_T \to G$ 有相同的性质:

定理 2.4.13 以下性质等价:

1. X 是一个树.

2. $\widetilde{X} \to X$ 是一个同构.

3. $G_T \to G$ 是一个同构.

证明 $3 \Rightarrow 2$ 与 $2 \Rightarrow 1$ 由定理 2.4.11 即得.

$2 \Rightarrow 3$: 设 $P \in \operatorname{vert} T$, $(G_T)_P$ 与 G_P 分别是 P 在 G_T 与 G_P 的作用下的稳定化子. 由 G_T 与 G 分别是 $(G_T)_P$ 与 G_P 的融合积的构造, 同态 $G_T \to G$ 诱导了一个同构 $(G_T)_P \to G_P$. 另一方面, $\widetilde{X} \to X$ 是双射, 且映射 $G_T \to G$ 的核 H 一定包含在 $(G_T)_P$ 中, 又 G_T 有在 $\widetilde{X} \cong X \subset \widetilde{X}$ 上的作用, 从而 $(G_T)_P = \{1\}$, 从而只能 $H \subset (G_T)_P = \{1\}$. 由于 X 同构于树 $\widetilde{X}$, 从而 X 是连通的, 从而 $G_T \to G$ 是满射. 综上, $G_T \to G$ 是同构.

$2 \Rightarrow 3$: 由于 T 是基本域, 从而 $G_T \cdot T = \widetilde{X}$ 且 $G \cdot T = X$. X 是树, 连通, 从而 $G_T \to G$ 是满射, 从而 $G \subset G_T$. 从而 $\widetilde{X} = G_T \cdot T \subset G \cdot T = X$, 从而 $\widetilde{X} \to X$ 是满射. 另一方面, 同态 $G_t \to G$ 诱导了 $\widetilde{X}$ 与 X 的对应的顶点和边的稳定化子之间的同构.

定义 2.4.14. 称映射 $f : \widetilde{X} \to X$ 是局部单的, 若给定一个顶点, 将这个映射限制在以这个顶点为起点的边上是单射.

从而 $f : \widetilde{X} \to X$ 是局部单的.

引理 2.4.3 若 $f : \widetilde{X} \to X$ 是一个从连通图 $\widetilde{X}$ 到树 X 的局部单映射, 则 f 是一个单射.

证明 由于 $\widetilde{X}$ 是连通的, 只要证对任意 $\widetilde{X}$ 中的单射道路 c, $f \circ c$ 是单射道路. 由于 X 是一个树, 从而只要验证 $f \circ c$ 不含折返. 这由 c 是单射道路以及 f 是局部单的即得. □

由引理 , f 是单射. 综上, $f : \widetilde{X} \to X$ 是同构. □

注记 2.4.15. 设群 G 作用在树 X 上. 当 $G\backslash X$ 是一个树时, 存在一个 $X \bmod G$ 的基本域 T, 使得 T 是一个 (同构于 $G\backslash X$ 的) 树, 并且 G 的结构由定理 *2.4.13* 给出.

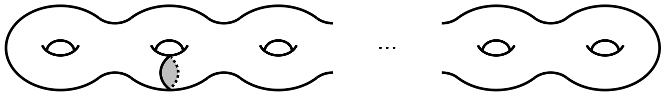
定义 2.4.16. 树 X 就称为融合积 $G = \varinjlim(G, T)$ 的 *Bass-Serre* 树.

3、 研究课题

3.1 问题

在正式介绍本文的研究课题之前, 我们需要先引入一些定义.

定义 3.1.1. 一个亏格为 g 的柄体就是一个亏格为 g 的实心环.



g 个洞

定义 3.1.2. 对于有限生成群 G, 它的秩定义为它的最少的生成元的个数, 记为 $\mathrm{r}(G)$, 即

$$\mathrm{r}(G) := \{|S|\,|G = \langle S|R\rangle\}.$$

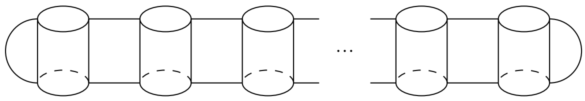
三维流形中一个自然的问题是:

问题 3.1.1 将两个柄体沿着它们的亏格为 $g-1$ 的边界子曲面 (如下图左侧的边界, 不含两个切处的圆盘) 粘合, 得到的三维流形的基本群的秩是多少?

3.2 分析

我们知道, 边界子曲面有不止一种自同构. 而两个柄体沿着边界子曲面不同的自同构粘合得到的流形也不尽相同.

我们容易看出, 亏格为 g 的柄体同伦于圆束 $\bigvee_{i=1}^{g} S^1$, 于是它的基本群就是秩为 g 的自由群 F_g. 而它的边界子曲面可以收缩到以下图形:



$g-1$ 个圆柱面

并且它又可以同伦到 $2g-1$ 个圆的圆束 $\bigvee_{i=1}^{2g-1} S^1$. 于是边界子曲面的基本群是秩为 $2g-1$ 的自由群 F_{2g-1}.

我们想应用 Van Kampen 定理 (应用 2.1.4), 但是这要求每个柄体是开集, 我们做不到. 但幸好我们有如下的加强版本 (见[10] 第 136 页):

定理 3.2.1 将 U_1, U_2 改为闭集, 并且 U_{12} 是它的一个开邻域的强形变收缩核, 其它条件不变, 则结论仍成立.

于是在代数上, 我们的问题转化为:

问题 3.2.1 给定自由群的两个嵌入 $f_1: F_{2g-1} \to F_g$ 与 $f_2: F_{2g-1} \to F_g$, 则两个 F_g 沿着 f_1, f_2 关于 F_{2g-1} 的融合积的秩是多少?

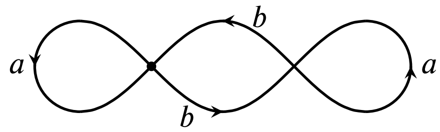
这是因为, 柄体的边界子曲面沿着不同的自同构的粘合就对应不同的嵌入 f_1, f_2. 这样, 对应的自同构的粘合流形的基本群就是沿着对应的嵌入 f_1, f_2 的融合积 $F_g *_{F_{2g-1}} F_g$. 最后, 我们只要能在拓扑上将自由群的嵌入 f_1, f_2 具体实现为边界子曲面的基本群到柄体的基本群的嵌入, 并且对应的粘合的确能粘成一个流形即可. 而这样的具体实现是必须的, 因为有例子可以说明, 存在代数上的嵌入, 使得沿着对应的基本群的嵌入不能粘合成一个流形 (见 3.3.3 小节).

3.3 例子的构造

我们考虑 $g = 2$ 的情况. 记 $F_2^1 = \langle a, b \rangle$, $F_2^2 = \langle c, d \rangle$, $F_3 = \langle x, y, z \rangle$.

3.3.1 秩为 3 的例子

我们先从 $S^1 \vee S^1$ 的覆叠空间得到一个 F_3 到 F_2 的嵌入 (见[11] 第 58 页):



$\left\langle a, b^2, bab^{-1} \right\rangle$

我们令 $f_1 = f_2$ 都是这个嵌入, 即

$$\begin{aligned} f_1 : F_3 &\to F_2^1 \\ x &\mapsto a \\ y &\mapsto b^2 \\ z &\mapsto bab^{-1}, \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} f_2 : F_3 &\to F_2^2 \\ x &\mapsto c \\ y &\mapsto d^2 \\ z &\mapsto dcd^{-1}. \end{aligned}$$

由命题2.1.3的存在性的构造证明, F_2^1 与 F_2^2 沿着 f_1, f_2 关于 F_3 的融合积是:

$$G = F_2^1 *_{F_3} F_2^2 = \left\langle a, b, c, d, x, y, z | x = a, y = b^2, z = bab^{-1}, x = c, y = d^2, z = dcd^{-1} \right\rangle .$$

直接计算这个群表现:

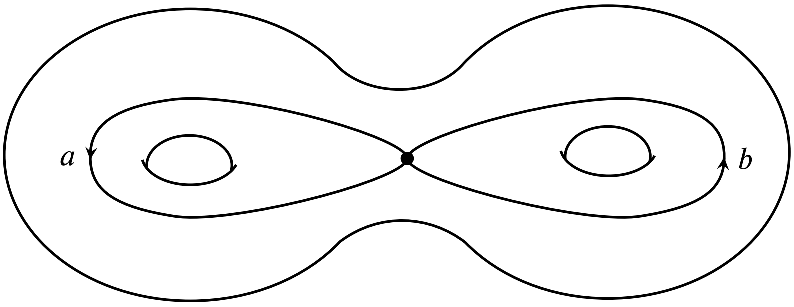
$$\begin{aligned} G &= \left\langle a, b, c, d, x, y, z | x = a, y = b^2, z = bab^{-1}, x = c, y = d^2, z = dcd^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle a, b, c, d | a = c, b^2 = d^2, bab^{-1} = dcd^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle b, c, d | b^2 = d^2, bcb^{-1} = dcd^{-1} \right\rangle . \end{aligned}$$

接着我们来计算它的秩. 取 G 的交换化, 即令 b, c, d 可交换, 生成关系 $bcb^{-1} = dcd^{-1}$ 就变为 $c = c$, 是一个平凡关系. 于是 G 的交换化是

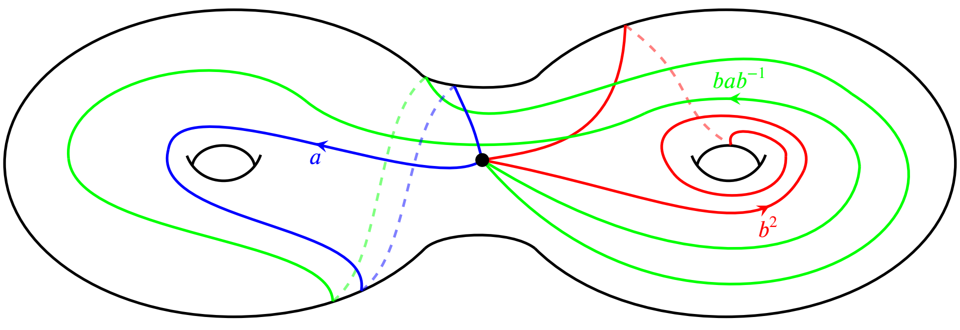
$$\begin{aligned} &\left\langle b, c, d | b^2 = d^2, bc = cb, bd = db, cd = dc \right\rangle \\ =&\left\langle b, c, db^{-1} | (db^{-1})^2 = 1, bc = cb, bd = db, cd = dc \right\rangle \\ =&\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

这就说明 G 的秩是 3.

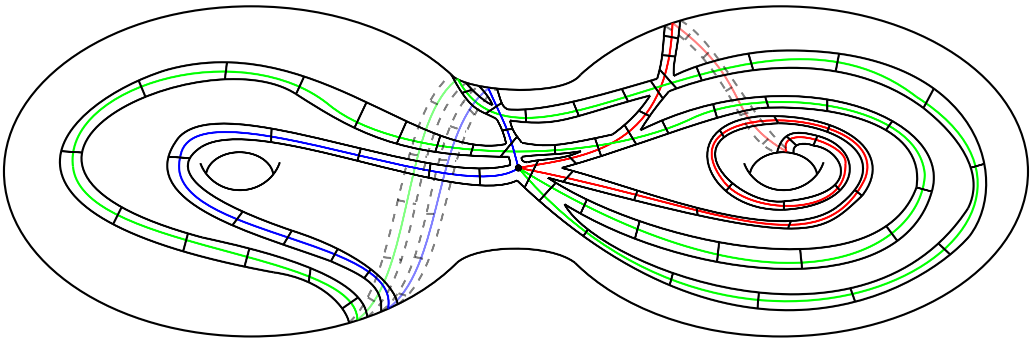
最后我们来具体地在拓扑上实现这个嵌入. 设下图的柄体的基本群有生成元 a, b.



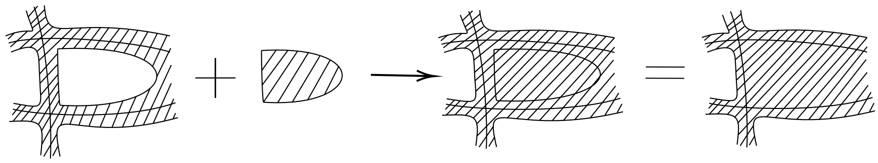
注意到, 下图就在柄体的边界上找到了不同伦的道路 (类) a, b^2, bab^{-1}.



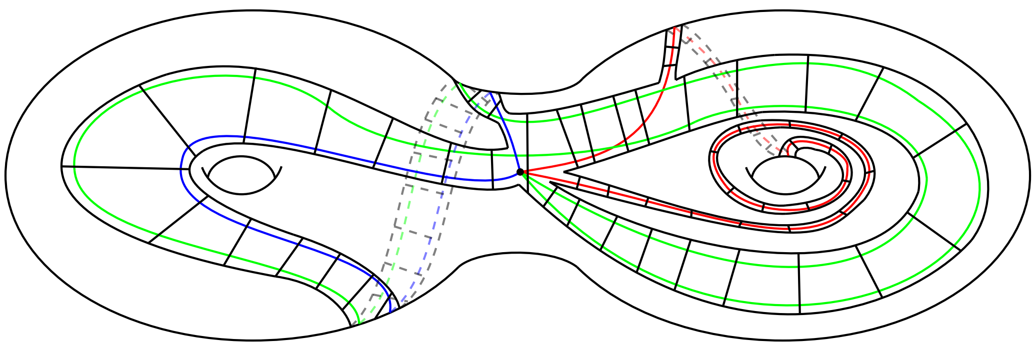
为了找到以这些道路类为基本群的生成元的柄体的边界子曲面, 我们先取这三条道路的管状邻域 (下图阴影部分):



之后, 只要出现如下图的情况, 我们就沿着洞粘上一个圆盘.



于是我们得到以下的边界子曲面 (下图阴影部分):



这就是一个亏格为 3 的, 以 a, b^2, bab^{-1} 为基本群的生成元的边界子曲面. 同样地, 我们可以得到第二个柄体上的以 c, d^2, dcd^{-1} 为基本群生成元的亏格为 3 的边界子曲面. 这样, 我们就可以将这两个柄体沿着如此所得的边界子曲面的自同构

$$a = c, \quad b^2 = d^2, \quad bab^{-1} = dcd^{-1}$$

粘合, 就得到了一个粘合流形, 并且它的基本群就是秩为 3 的融合积:

$$G = \left\langle b, c, d \,|\, b^2 = c^2, bcb^{-1} = dcd^{-1} \right\rangle.$$

并且, 这个粘合流形就是一个实心球 (S^3) 粘上一个 Small Seifert 流形.

3.3.2 秩为 2 的例子

我们在上一小节由覆叠空间得到了嵌入

$$\left\langle a, b^2, bab^{-1} \right\rangle.$$

我们对它做处理: 对 bab^{-1} 右乘 b^2, 得到 bab, 这仍然是一个嵌入

$$\left\langle a, b^2, bab \right\rangle.$$

我们令

$$\begin{aligned} g_1 : F_3 &\to F_2^1 \\ x &\mapsto a \\ y &\mapsto b^2 \\ z &\mapsto bab, \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} g_2 : F_3 &\to F_2^2 \\ x &\mapsto d^2 \\ y &\mapsto dcd \\ z &\mapsto c. \end{aligned}$$

同理, F_2^1 与 F_2^2 沿着 g_1, g_2 关于 F_3 的融合积是:

$$H = F_2^1 *_{F_3} F_2^2 = \left\langle a, b, c, d, x, y, z | x = a, y = b^2, z = bab, x = d^2, y = dcd, z = c \right\rangle.$$

直接计算这个群表现:

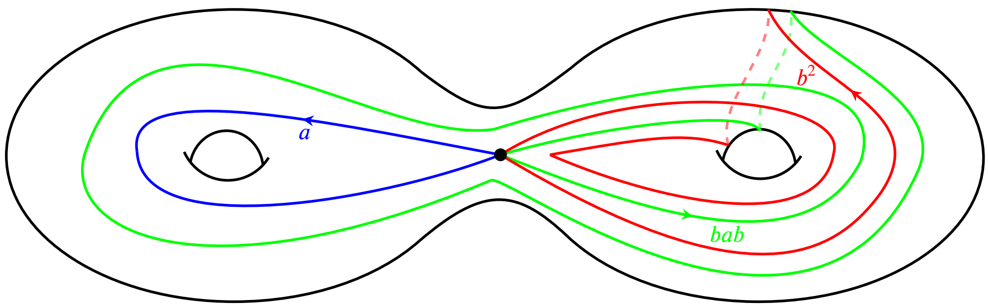
$$\begin{aligned} H &= \left\langle a, b, c, d, x, y, z | x = a, y = b^2, z = bab, x = d^2, y = dcd, z = c \right\rangle \\ &= \left\langle a, b, c, d | a = d^2, b^2 = dcd, bab = c \right\rangle \\ &= \left\langle b, c, d | b^2 = dcd, bd^2b = c \right\rangle \\ &= \left\langle b, d | b^2 = dbd^2bd \right\rangle. \end{aligned}$$

接着我们来计算它的秩. 取 H 的交换化, 即令 b, d 可交换, 生成关系 $b^2 = dbd^2bd$ 就变为 $1 = d^4$. 于是 G 的交换化是

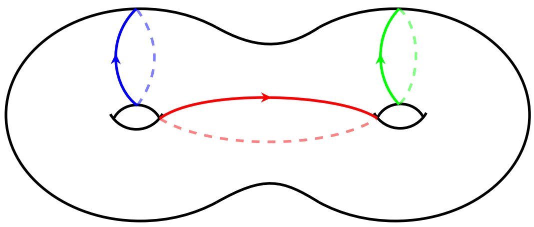
$$\left\langle b, d | d^4 = 1, bd = db \right\rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4.$$

这就说明 G 的秩是 2.

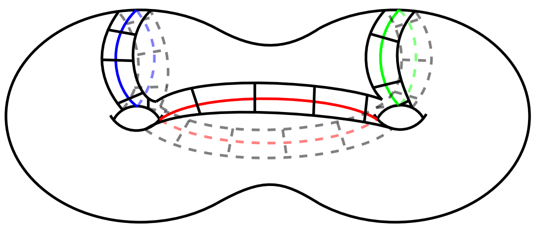
接着我们从拓扑上实现这个嵌入. 如下图所示, 我们找到了不同伦的道路类 a, b^2, bab 在柄体的边界的嵌入.



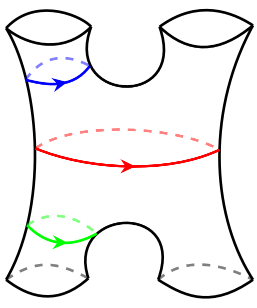
这是三条不相交 (除了基点) 的道路, 于是它们可以自由同伦到:



取它们的管状邻域:

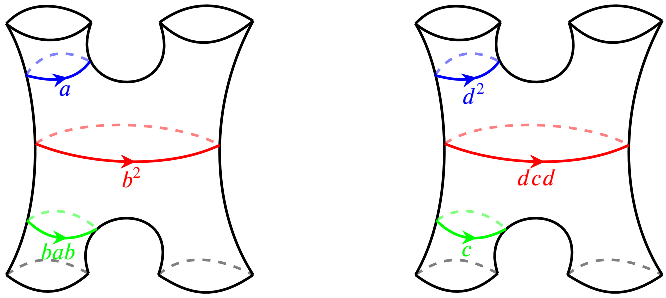


这是一个挖掉四个洞的球面:



由于这三条道路没有相交关系, 于是我们可以取适当的管状邻域使得它们可以随意

交换. 这样, 我们可以同时对两个柄体实现如下的边界子曲面嵌入:



这样, 我们沿着这两个柄体的球面挖掉四个洞的边界子曲面的自同构

$$a = d^2, \quad b^2 = dcd, \quad bab = c$$

粘合, 就得到了一个粘合流形, 并且它的基本群是秩为 2 的融合积

$$H = \langle b, d | b^2 = dbd^2bd \rangle .$$

并且, 这个三维流形就是通过将两个亏格为 2 的柄体沿着边界的恒等映射粘起来, 然后再粘上两个实心把柄得到的.

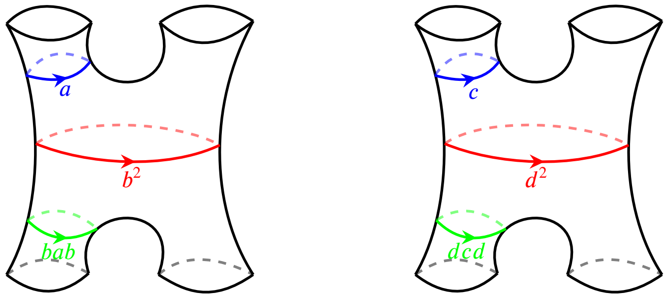
注记 3.3.1. 考虑嵌入

$$\begin{aligned} g_1 : F_3 &\to F_2^1 \\ x &\mapsto a \\ y &\mapsto b^2 \\ z &\mapsto bab, \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} g_2 : F_3 &\to F_2^2 \\ x &\mapsto c \\ y &\mapsto d^2 \\ z &\mapsto dcd. \end{aligned}$$

由以上分析, 我们可以同时对两个柄体实现如下的边界子曲面嵌入:



这样, 我们沿着这两个柄体的边界子曲面的自同构

$$a = c, \quad b^2 = d^2, \quad bab = dcd$$

粘合, 也得到了一个三维流形, 它的基本群是

$$\begin{aligned} & \left\langle a, b, c, d, x, y, z | x = a, y = b^2, z = bab, x = c, y = d^2, z = dcd \right\rangle \\ = & \left\langle a, b, c, d | a = c, b^2 = d^2, bab = dcd \right\rangle \\ = & \left\langle b, c, d | b^2 = d^2, bcb = dcd \right\rangle . \end{aligned}$$

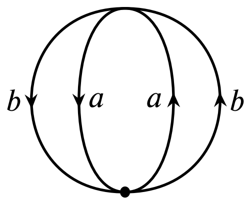
它的交换化是

$$\begin{aligned} & \left\langle b, c, d | b^2 = d^2, bcb = dcd, bc = cb, bd = db, cd = dc \right\rangle \\ = & \left\langle b, c, d | b^2 = d^2, b^2c = d^2c, bcb = dcd, bc = cb, bd = db, cd = dc \right\rangle \\ = & \left\langle b, c, d | b^2 = d^2, bcb = dcd, bc = cb, bd = db, cd = dc \right\rangle \\ = & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 . \end{aligned}$$

于是基本群的秩为 3. 这样, 我们又得到了一个秩为 3 的例子.

3.3.3 代数嵌入不一定能拓扑实现

我们还是先从 $S^1 \vee S^1$ 的覆叠空间得到一个 F_3 到 F_2 的嵌入 (见[11] 第 58 页):



$$\left\langle a^2, b^2, ab \right\rangle$$

将 ab 左乘 $(a^2)^{-1}$ 变为 $a^{-1}b$. 此时 $\left\langle a^2, b^2, a^{-1}b \right\rangle$ 仍是一个嵌入.

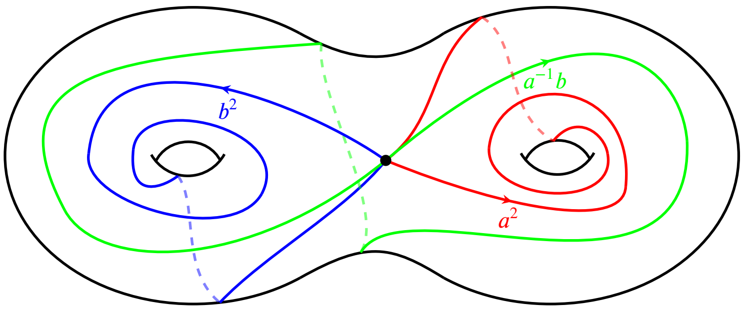
考虑嵌入

$$\begin{aligned} g_1 : F_3 &\to F_2^1 \\ x &\mapsto a^2 \\ y &\mapsto b^2 \\ z &\mapsto a^{-1}b, \end{aligned}$$

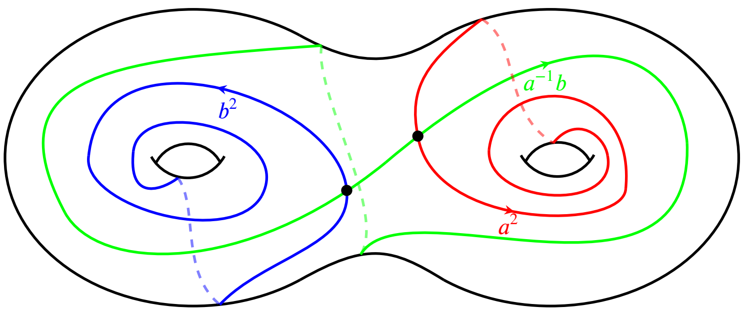
与

$$\begin{aligned} g_2 : F_3 &\to F_2^2 \\ x &\mapsto c^2 \\ y &\mapsto c^{-1}d \\ z &\mapsto d^2. \end{aligned}$$

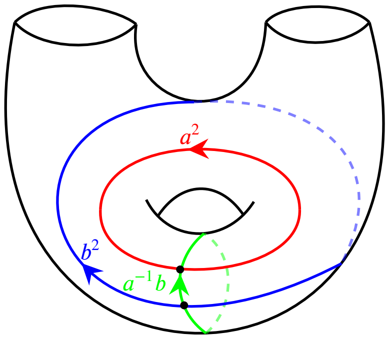
我们有以下不同伦的道路类 $a^2, b^2, a^{-1}b$ 到柄体的边界的嵌入:



但是注意到, 无论如何做自由同伦, 道路 $a^{-1}b$ 总是会和 a^2, b^2 分别有一个交点:



这说明, 我们取 $a^2, b^2, a^{-1}b$ 的管状邻域将会是如下的曲面:



其中 a^2 与 b^2 不相交, 可以自由交换, 然而 $a^{-1}b$ 却不能. 这说明我们不能沿着 $a^{-1}b = d^2, b^2 = c^{-1}d$ 将两个边界子曲面粘起来. 即我们不能沿着这两个柄体的边界子曲面的自同构

$$a^2 = c^2, \quad b^2 = c^{-1}d, \quad a^{-1}b = d^2$$

粘合.

综上所述, 我们有

注记 3.3.2. 代数上的嵌入不一定能实现为拓扑的粘合.

这说明, 本节第二小节最后的讨论, 在构造例子时, 将代数的嵌入具体实现为拓扑的粘合是必要的.

3.4 进一步讨论

进一步地, 我们还想知道, 粘合流形的基本群是不是一个双曲群, 是不是相对双曲群? 解决这个问题也许需要更多的工具. 由于群的生成关系比较简单, 我们暂时对这个问题的答案持消极态度. 即使这样, 我们还可以问: 粘合流形本身是不是一个双曲三维流形? 并且, 我们在这只是依赖于具体地技巧构造出了一些零散的例子, 我们还希望对其它各种粘合方式能得到更一般的答案.

推广地, 对于 $g > 2$ 的情况又该如何构造? 我们在得到自由群的嵌入后, 拓扑的嵌入和粘合很大程度上依赖于直观的观察和想象. 但随着柄体的亏格的增加, 融合积的计算与拓扑的具体实现的复杂度将会大大提高 (但是对于融合积是否是双曲群的态度将更加积极). 即使我们可以通过相对简单的方式 (比如本文中通过覆叠空间) 得到代数的嵌入, 将它们实现为拓扑的嵌入将变得困难. 届时, 我们就需要更加算法化和程序化的工具来构造了. 或者我们可以尝试先从拓扑上得到一些嵌入, 然后再反过来去实现代数上的嵌入.

这些问题就超出本文的研究范畴了. 但是, 随着更多的例子的成功构造和相关结果的证明, 相信人们对三维流形, 这些不存在于我们生活的空间中的对象的理解将会大大加深.

参考文献

[1] DEHN M. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen[J]. Math. Ann., 1911, 71: 116-144.

[2] MAGNUS W. Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation[J]. Math. Ann., 1932, 106: 295-307.

[3] LÖH C. Geometric group theory[M]. Switzerland: Springer, Cham, 2017.

[4] ŠVARC A S. A volume invariant of coverings[J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 1955, 105: 32-34.

[5] MILNOR J. A note on curvature and fundamental group[J]. J. Differential Geometry, 1968, 2: 1-7.

[6] GROMOV M. Groups of polynomial growth and expanding maps[J]. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1981(53): 53-73.

[7] GROMOV M. Hyperbolic groups[G]//Math. Sci. Res. Inst. Publ. Essays in group theory: vol. 8. [S.l.]: Springer, New York, 1987: 75-263.

[8] BESTVINA M, FEIGHN M. A combination theorem for negatively curved groups[J]. J. Differential Geom., 1992, 35: 85-101.

[9] SERRE J P. Trees[M]. Berlin, German: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[10] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京, 中国: 北京大学出版社, 1997.

[11] HATCHER A. Algebraic topology[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

致谢

光阴似箭, 日月如梭, 四年的本科时光就要过去. 回顾人生的二十余载, 许多人对我的成长给予了莫大的帮助. 我将对你们表示感谢.

学术上, 首先我要感谢我的毕业论文指导老师邹燕清老师, 感谢您引领我进入这个领域, 给我提供丰富的学术资源和训练, 对我的学习规划给出了许多重要的建议. 感谢您提供给我毕业论文的选题和对课题的讨论, 没有和您的讨论我无法完成这一问题. 作为我学术生涯的引路人, 我期待在我的硕士阶段继续在您的指导下学习, 共同探索美妙的数学世界.

其次我要感谢所有给我授课或交流的老师. 你们为我提供了严肃的学术训练, 传授知识, 为我的研究打下了坚实的基础. 感谢你们不厌其烦地解答问题. 你们是我成长中不可或缺的一环.

我还要感谢统计楼 105 自习室的诸位小伙伴, 作为我本科阶段最主要的学习工作场所, 我在这里享受到了非常好的氛围. 我们一起讨论问题, 交流对数学的见解. 你们是我最亲密的伙伴.

最后我要感谢华东师范大学数学科学学院和强基计划. 在浮躁的社会中, 你们为我提供了一个可以暂时逃离内卷和功利的学习环境, 使我能够全身心投入到自己感兴趣的领域进行学习. 感谢学院提供的丰富的学术资源和机会, 它们大大拓宽了我的视野. 感谢学校和学院提供的奖学金和报销资助, 能让我无所顾忌地学习和交流.

生活上, 我必须要先感谢我的父母和亲人. 感谢你们将我养育成人, 感谢你们对我的教育和教导, 感谢你们供养我的生活, 使我能完成我的学业. 你们是我最坚实的倚仗. 任何语言都不能表达我的感激.

我还要感谢我所有与我一起运动玩乐的伙伴, 你们丰富了我的业余生活, 使我发挥了我的社会学属性, 成为了一个活生生的人. 尤其我要感谢我的同班同学侯江南和应时, 我们一起吃饭, 通勤, 无话不谈, 你们为我提供了不可或缺的情绪价值.

最后的最后, 请允许我再次向所有对我有帮助的人和物表达由衷的感谢!