泛函分析笔记

崔嘉祺
华东师范大学 20 级数学强基拔尖班

2023 年 6 月 16 日

摘要

教材：《泛函分析讲义》；许全华，马涛，尹智编著；高等教育出版社
第一周：见 PDF　第二周：习题一 3.6.9　第三周：习题二 2.13.14　第四周：见 PDF　第五周：习题三 3.6.9
第六周：习题三 11.17 习题四 2.3.11　第七周：习题四 13.15.18.19　第八周：习题五 4.5.7　第十周：习题五 16
第十一周：习题六 5.6　第十二周：图片 + 习题六 13.14.15　第十四周：见 PDF　第十五周：习题九 1.2.12.13

目录

1 拓扑空间简介

1.1 基本概念

1.1.1 开集，闭集和邻域系

定义 1.1.1.
- 拓扑：任意并，有限交
- 开集，闭集
- 邻域，邻域系：$\mathcal{N}(x) = \{x$ 的所有邻域$\}$，基础邻域系：$\mathcal{B}(x)$：$\forall\, V \in \mathcal{N}(x), \exists\, U \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $U \subset V$

1.1.2 粘着集，闭包和内部

定义 1.1.2.
- 凝聚点
- 粘着集：$A \cup \{A$ 的凝聚点$\}$
- 闭包：$\overline{A} = A \cup \{A$ 的凝聚点$\} = \{A$ 的粘着点$\}$，是包含 A 的最小闭集，A 是闭集 $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$
- 内点：$A^\circ = \{A$ 的内点$\}$，是 A 中的最大开集，A 是开集 $\Longleftrightarrow A = A^\circ$
- 边界：$\partial A = \overline{A} - A^\circ$

1.1.3 拓扑空间的比较与拓扑子空间

定义 1.1.3. (E, τ)，$F \subset E$，则 F 上有自然的拓扑 $\tau|_F$：$V \subset F$，$V \in \tau|_F$，若 $\exists\, O \in \tau$，使得 $V = F \cap O$。

例 1.1.4. $E = \mathbb{R}$，$F = (0, 1]$，$A = \left(\frac{1}{2}, 1\right] = (0, 1] \cap \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 是 F 中的开集。

1.1.4 Hausdorff 空间

定义 1.1.5. 设 E 是拓扑空间，$\forall\, x, y \in E$，$\exists\, V \in \mathcal{N}(x), U \in \mathcal{N}(y)$，使得 $V \cap U = \varnothing$，则称 E 是一个 *Hausdorff* 空间或可分离空间。

1.2 收敛序列与连续映射

定义 1.2.1. 称 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset E$，$x_n \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x$ 是指 $\forall\, V\in\mathcal{N}(x)$，$\exists\, n_0\in\mathbb{N}$，使得 $\forall\, n\geq n_0$，都有 $x_n\in V$。

注记 1.2.2. 当 E 不是度量空间时，以下命题不等价：

- $x\in\overline{A}$;
- $\forall\,\{x_n\}\subset A$，使得 $x_n\to x$，则 $x\in A$。

更详细的论述需要“网 *(filter)*”的概念。

定义 1.2.3. 设 $f:E\longrightarrow F$ 是映射，称 f 在 $x\in E$ 处连续，是指 $\forall\, V\in\mathcal{N}(f(x))$，$\exists\, U\in\mathcal{N}(x)$，使得 $f(U)\subset V$。

注记 1.2.4.

- “连续”是局部概念；
- 称 f 在 E 上连续是指他在 E 的每一个点连续；
- 称 E 与 F 同胚是指存在连续的一一对应：$f:E\longrightarrow F$ 与 $g=f^{-1}:F\longrightarrow E$。

性质 1.2.5 (连续映射的基本性质)**.** 设 $f:(E,\tau_E)\longrightarrow(F,\tau_F)$ 是连续的，当且仅当 $\forall\, O\in\tau_F$，都有 $f^{-1}(O)\in\tau_E$，同时 $\forall\, A$ 是 F 中的闭集，都有 $f^{-1}(A)$ 是 E 中的闭集。

例 1.2.6. 给 E 赋予两个拓扑 τ_1,τ_2，称 τ_1 比 τ_2 强，是指 $\forall\, O\in\tau_2$，都有 $O\in\tau_1$，从而恒等映射 $i:(E,\tau_1)\longrightarrow(E,\tau_2)$ 是连续映射。

例 1.2.7. 设 (E,d) 是度量空间，$A\subset E$，$\forall\, x\in E$，可以定义 x 到 A 的距离：$d(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)$。再令 $d_A(x)=d(x,A)$ 是 E 上的连续函数，事实上，它是 *1-Lipschitz* 的。

1.3 紧性

定义 1.3.1. 称 (E,τ) 是紧的拓扑空间，是指 $\forall\, E$ 的开覆盖，即 $E=\bigcup_{i\in I}O_i$，$O_i\in\tau$，都存在有限集 $J\subset I$，使得 $E=\bigcup_{j\in J}O_j$。类比地可以定义 $A\subset E$ 的紧性。

定义 1.3.2. 称 (E,τ) 是局部紧的拓扑空间，是指 $\forall\, x\in E$，$\exists\, K\in\mathcal{N}(x)$，$K$ 是紧集。

注记 1.3.3. 紧（子）集的连续像是紧的。但注意，开集的连续像不一定是开集，闭集的连续像也不一定是闭集（即开映射与闭映射）。

引理 1.3.4 (Urysohn)**.** 设 E 是局部紧的 *Hausdorff* 空间。设 A,B 是 E 中互不相交的闭集，其中之一是紧的，则存在 E 上的连续函数 f，使得 $f|_A\equiv 0$，$f|_B\equiv 1$。

注记 1.3.5. 若 (E,d) 是度量空间，则不需要紧性，考虑

$$f(x)=\frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$$

即得。

Urysohn 引理的证明需要用到以下的引理：

引理 1.3.6. 设 K,O 是 E 中的紧集和开集，$K\subset O$，则存在开集 U，使得 $K\subset U\subset\overline{U}\subset O$，且 $\overline{U}$ 是紧集。

证明. 先证明：局部紧的 Hausdorff 空间中的任意一点存在一个开邻域，其闭包是紧的。

由于 E 是局部紧的，对 $\forall\, x\in E$，$\exists$ 紧邻域 $G\in\mathcal{N}(x)$，由邻域的定义，$\exists\, x$ 的开邻域 V，使得 $V\subset G$。由于紧集 G 是 E 的闭集（Hausdorff 空间的紧子集是闭集，书 P11 定理 1.3.6），从而 $\overline{V}\subset G$。从而 $\overline{V}$ 也是 G 中的闭集，故也是紧集（G 是紧的 Hausdorff 空间，紧子集等价于闭子集，书 P11 定理 1.3.6）。

设 $K\subseteq\bigcup_{x\in K}V_x$，其中 V_x 是 x 的一个开邻域。且 $\overline{V_x}$ 是紧集（存在性由上面的结论保证）。由于 K 是紧的，故存在有限开覆盖记为 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^n V_i$。记 $V=\bigcup_{i=1}^n V_i$，是开集的有限并，仍然是开集，且 $\overline{V}=\bigcup_{i=1}^n\overline{V_i}$ 是紧集的有限并，仍然是紧集。如果 $O=E$，取 $U=V$ 即得。

否则，任取 $y\in O^c$，由 K 是紧的，可知存在开集 W_y，使得 $K\subset W_y$ 且 $y\notin\overline{W_y}$. 这是因为 $\forall\, x\in K$，由 Hausdorff 性质，$\exists\, x,y$ 的无交的开邻域 O_x,O_x'，且 $K\subseteq\bigcup_{x\in K}O_x$. 由于 K 是紧的，有有限子覆盖 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$，且 $(\bigcup_{i=1}^n O_{x_i})\cap(\bigcap_{i=1}^n O_{x_i}')=\varnothing$，从而 $y\notin\bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$. 又 $\bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$ 是开集的有限并，仍是开集，即为所求。

于是得到

$$\bigcap_{y\in O^c}(O^c\cap\overline{V}\cap\overline{W_y})=\varnothing.$$

因为 $\overline{V}$ 是紧的，O^c 与每一个 $\overline{W_y}$ 都是闭集，从而每个 $O^c\cap\overline{V}\cap\overline{W_y}$ 都是紧的。从而存在有限个 $y_1,\cdots,y_k\in O^c$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{k}(O^c\cap\overline{V}\cap\overline{W_{y_i}})=\varnothing.$$

这是因为若 $\bigcap_{i\in I}K_i=\varnothing$ 是紧集的交，取一个 K_0，$K_0\cap(\bigcap_{i\in I}K_i)=\varnothing$，从而 $K_0\subseteq(\bigcap_{i\in I}K_i)^c=\bigcup_{i\in I}K_i^c$，而 Hausdorff 空间中的紧子集是闭子集，从而 $\bigcup_{i\in I}K_i^c$ 是 K_0 的开覆盖，从而有有限子覆盖 $K_0\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}K_i^c$，从而 $K_0\cap(\bigcap_{i=1}^{n}K_i)=\varnothing$.

从而

$$\bigcap_{i=1}^{k}(\overline{V}\cap\overline{W_{y_i}})\subset O.$$

并且 $\bigcap_{i=1}^{k}(\overline{V}\cap\overline{W_{y_i}})$ 是紧集，取 $U=V\cap(\bigcap_{i=1}^{k}W_{y_i})$ 是开集的有限交，仍是开集，则有

$$\overline{U}\subset\overline{V}\cap(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{W_{y_i}}).$$

因而 $\overline{U}$ 是紧集，且有 $\overline{U}\subset O$. 即为所求。 □

Urysohn 引理的证明. 不妨设 A 是紧集，而 B 是闭集，由 $A\cap B=\varnothing$ 知，$A\subset B^c$。

令 $A_0=A,A_1=B^c$，由 $A_1=B^c$ 是开集，由引理 1.3.6，存在开集 $A_{\frac12}$，使得 $\overline{A_{\frac12}}$ 是紧集，且

$$A_0\subset A_{\frac12}\subset\overline{A_{\frac12}}\subset A_1.$$

再由引理 1.3.6，存在开集 $A_{\frac14},A_{\frac34}$，使得 $\overline{A_{\frac14}},\overline{A_{\frac34}}$ 是紧集，且

$$A_0\subset A_{\frac14}\subset\overline{A_{\frac14}}\subset A_{\frac12}\subset\overline{A_{\frac12}}\subset A_{\frac34}\subset\overline{A_{\frac34}}\subset A_1.$$

如此进行下去。

记

$$D=\{\frac{k}{2^n}|n\in\mathbb{N},0\le k\le 2^n\}\subset[0,1],$$

由以上步骤，<u>得到一族 $\{A_t\}_{t\in D}$</u>，满足

1. $A_0=A,A_1=B^c$;
2. $\forall\, t\in D-\{0,1\}$,A_t 是开集，$\overline{A_t}$ 是紧集；
3. $\forall\, s,t\in D,s<t$，都有 $\overline{A_s}\subset A_t$.

从而 $\forall\, x\in E$，定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}\sup\{s\in D|x\notin\overline{A_s}\}, & x\notin A;\\ 0, & x\in A.\end{cases}$$

$$\beta(x)=\begin{cases}\inf\{t\in D|x\in A_t\}, & x\notin B;\\ 1, & x\in B.\end{cases}$$

下面验证：

1. $\alpha(x)\le\beta(x)$;
2. $\alpha(x)=\beta(x)$,$\forall\, x\in E$.

反证法：假设 $\exists\, x\in E$，使得 $\alpha(x)<\beta(x)$，从而 $\exists\, s,t\in D$，使得 $\alpha(x)<s<t<\beta(x)$，从而由定义，$x\in\overline{A_s}$ 且 $x\notin\overline{A_t}$，但这与

$$A_s\subset\overline{A_s}\subset A_t\subset\overline{A_t}$$

矛盾。于是可以<u>定义</u>

$$f(x)=\alpha(x)=\beta(x),$$

且显然有

$$f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1.$$

只需要验证 f 是 E 上的连续函数。

由 $\mathbb{R}$ 上开集的构造定理，只需要验证 $\forall\, \lambda \in [0,1]$, $(\lambda, +\infty)$ 与 $(-\infty, \lambda)$ 的原像是开集：

$$f^{-1}((\lambda, +\infty)) = \{x \in E \mid f(x) = \alpha(x) > \lambda\} = \bigcup_{\substack{\mu > \lambda \\ \mu \in D}} \bigcup_{t > \mu} (\overline{A_t})^c$$

开集的任意并是开集，从而 $f^{-1}((\lambda, +\infty))$ 是开集。$f^{-1}((-\infty, \lambda))$ 是开集同理。 □

1.4 乘积空间

定义 1.4.1. 设 $\{(E_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ 是一族拓扑空间，记

$$E = \prod_{i \in I} E_i = \{x \mid x = (x_i)_{i \in I}, x_i \in E_i\}.$$

在 E 上定义一个拓扑（乘积拓扑）：

在 E 上定义基础开集：

$$O = \prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in I - J} E_i,$$

其中 $J \subset I$ 是有限集，U_i 是 E_i 中的开集。由这些基础开集生成的拓扑 τ 就是 E 上的乘积拓扑。

记

$$p_i : E \longrightarrow E_i$$

$$x = (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$$

称为正规投影。

定理 1.4.2. τ 是使得每一个 p_i 都连续的最弱的拓扑，且每一个 p_i 都是开映射。

证明. 先证 p_i 连续:
$\forall\, O_i$ 是 E_i 的开集,

$$p_i^{-1}(O_i) = O_i \times \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_j$$

是 E 中的开集，即 p_i 是连续映射。

再证 τ 最弱:
设 τ' 是 E 上的另一个拓扑，使得任意 p_i 是连续的。任意开集 $U_i \subset E_i$，由于 p_i 连续,

$$p_i^{-1}(U_i) \in \tau',$$

又

$$p_i^{-1}(U_i) = U_i \times \prod_{\substack{j\neq i\\ j\in I}} E_j$$

是 τ 中的基础开集，从而任意 τ 中的开集都是 τ' 的开集。

最后证 p_i 是开映射:
设 $O \subset E$ 是开集，$\forall\, x \in O$, O 是 E 中基础开集的并，从而 x 属于某个基础开集，设

$$x \in U = \prod_{i\in J} U_i \times \prod_{i\in I-J} E_i,$$

其中 U_i 是 E_i 中的开集。由于 $U \subset O$，从而

$$x_i = p_i(x) \in p_i(U) \subset p_i(O),$$

即 $p_i(O)$ 是 O 的每一个点的邻域，从而是 E 中的开集。

$\square$

性质 1.4.3. 乘积空间的一些重要结论:

- 任意多个 *Hausdorff* 空间的乘积空间也是 *Hausdorff* 空间;

- 有限个紧拓扑空间的乘积空间也是紧拓扑空间；
- *Tychonoff* 定理：任意多个紧拓扑空间的乘积空间也是紧拓扑空间；
- 可数个可度量化拓扑空间的乘积空间也是可度量化拓扑空间。

注记 1.4.4. 在度量空间（可度量化空间）中，以下命题等价：

- $A=\overline{A}$;
- $\forall\ \{x_n\}\subset A,\ x_n\to x\implies x\in A$.

在一般的拓扑空间中则不一定成立。

2 完备度量空间

2.1 度量空间

定义 2.1.1. 度量空间 (E,d)，度量空间 (E,d_1) 与 (E,d_2) 拓扑等价，度量 d_1 与 d_2 距离等价，开球。

注记 2.1.2. 距离等价 $\Longrightarrow$ 拓扑等价.

注记 2.1.3. 开集 $U=\bigcup_{x\in U}B(x,r)$, 其中 $B(x,r)\subset U$.

2.2 Cauchy 序列

定义 2.2.1. 度量空间中的 *Cauchy* 序列。

定义 2.2.2. 度量空间 (E,d) 中的任意 *Cauchy* 序列都收敛于 E, 则称 (E,d) 是完备度量空间。

性质 2.2.3. *Cauchy* 序列的性质：

- 收敛的序列是 *Cauchy* 序列；
- 有收敛子列的 *Cauchy* 序列是收敛序列。

定义 2.2.4. 设 A 是度量空间 (E,d) 的子集，则称 $\operatorname{diam}A=\sup_{x,y\in A}d(x,y)$ 为 A 的直径。

定理 2.2.5. 度量空间 (E,d) 是完备的 $\Longleftrightarrow$ 任意单调下降的 E 的非空闭子集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}A_n=0$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 是单点集。

证明. 必要性：
取 $x_n\in A_n$, 由于 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减，则 $\forall\, n<m$, 有 $x_m\in A_m\subset A_n$, 且由 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}A_n=0$ 知，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\to\infty}d(x_n,x_m)\le\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}A_n=0,$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (E,d) 中的 Cauchy 序列，由 (E,d) 的完备性，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E.$$

又 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭集列，从而 $x \in A_n$, 从而 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 若有 $x \neq y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则有 $d(x,y) > 0$, 这与 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$ 矛盾，从而 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ 是单点集。

充分性:

先证:

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A).$$

由定义，只要证:

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A).$$

对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 任意 $x, y \in \overline{A}$, 存在 $x', y' \in A$, 使得 $d(x,x') < \varepsilon$, $d(y,y') < \varepsilon$, 从而

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y,y') < d(x',y') + 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，$d(x,y) \leq \operatorname{diam}(A)$, 从而

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A).$$

对任意 E 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}$, 令 $A_n = \{x_m \mid m \geq n\}$. 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，故 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, 使得 $\forall\, m, n > n_0$, 都有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{A_n}) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0.$$

且 $\overline{A_n}$ 都是闭集，由条件，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ 是单点集，记为 $\{x\}$. 故

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} diam(\overline{A_n}) = 0.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset E.$$

即 (E,d) 是完备的。

□

性质 2.2.6. 设 (E,d) 是度量空间,

- 若 (A,d) 是 (E,d) 的完备子空间，则 A 是 (E,d) 的闭集;
- 若 (E,d) 完备且 A 是闭集，则若 (A,d) 是完备子空间。

定理 2.2.7. 可数个完备度量空间的乘积空间是完备的。

证明. 先证两个的情形:
设 (E_1,d_1) 与 (E_2,d_2) 是两个完备的度量空间，$(E,d)=(E_1,d_1)\times(E_2,d_2)$ 是乘积度量空间，其中

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}.$$

设 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)})\in E$，容易验证 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列当且仅当 $\{x_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{x_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是 E_1 与 E_2 中的 Cauchy 序列。由于 (E_1,d_1) 与 (E_2,d_2) 完备，从而存在 $x_1\in E_1, x_2\in E_2$, 使得

$$x_1^{(n)} \xrightarrow{d_1} x_1 \text{ 且 } x_2^{(n)} \xrightarrow{d_2} x_2.$$

并且这等价于

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \xrightarrow{d} (x_1,x_2).$$

从而 (E,d) 是完备的。

对可数个完备度量空间 $\{(E_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 记

$$(E,d) = \prod_{n=1}^{\infty}(E_n,d_n),$$

其中

$$d(x,y)=\sup_{n\geq 1}\frac{1}{n}\min\{1,d_n(x_n,y_n)\}.$$

则 (E,d) 中的序列

$$x^{(k)}=(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}\xrightarrow{d}(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

等价于

$$x_n^{(k)}\xrightarrow{d_n}x_n,\forall\ n\in\mathbb{N}^*,$$

从而 (E,d) 是完备度量空间。 □

2.3 一致连续映射与不动点定理

定义 2.3.1. 一致连续映射

定理 2.3.2. 紧度量空间 (E,d) 上的连续函数 $f:E\to F$ 是一致连续的。

证明. 由于 f 连续，$\forall\ \varepsilon>0,x\in E$,$\exists\ \eta_x>0$, 使得 $\forall\ y\in B(x,\eta_x)$,

$$\delta(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

则

$$\{B(x,\frac{\eta_x}{2})\mid x\in E\}$$

是 E 的一个开覆盖，由 E 的紧性，有有限子覆盖

$$E\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\frac{\eta_{x_k}}{2}).$$

令

$$\eta=\min_{1\leq k\leq n}\{\frac{\eta_{x_k}}{2}\},$$

则当 $\forall\ x, y \in E, d(x,y) < \eta$ 时，$\exists\ 1 \leq j \leq n$, 使得

$$x \in B(x_j, \frac{\eta_{x_j}}{2}),$$

此时

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) < \eta + \frac{\eta_{x_j}}{2} \leq \frac{\eta_{x_j}}{2} + \frac{\eta_{x_j}}{2} = \eta_{x_j},$$

从而

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_j)) + \delta(f(y), f(x_j)) < 2\varepsilon,$$

即 f 一致连续。 □

性质 2.3.3. *一致连续映射把 Cauchy 序列映到 Cauchy 序列。*

证明. 设 (E,d) 与 (F,δ) 是两个度量空间，$f: E \to F$ 是一致连续映射，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的 Cauchy 序列。由于 f 一致连续，$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0$, 使得 $\forall\ d(x_n, x_m) < \eta$, 就有 $\delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. 又 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，$\exists\ N > 0$, 使得 $\forall\ m, n > N$, 都有 $d(x_n, x_m) < \eta$.

综上，$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0$, 使得 $\forall\ m, n > N$, 都有 $\delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, 即 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列。 □

定理 2.3.4 (一致连续映射的扩展)**.** *设 (E,d) 与 (F,δ) 是两个度量空间，其中 (F,δ) 是完备的且 E_0 是 E 的稠密子集，即 $\overline{E_0} = E$, 若有一致连续映射 $f: E_0 \to F$, 则 f 可唯一地扩展成 (E,d) 到 (F,δ) 的一致连续映射 $\widetilde{f}: E \to F$.*

证明. <u>先构造出 $\widetilde{f}$</u>:
由 E_0 的稠密性，$\forall\ x \in E$, 存在 E_0 中的收敛于 x 的 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，由性质 2.3.3，$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 F 中的 Cauchy 序列。又 (F,δ) 是完备的，从而设 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $y \in F$. 令

$$\widetilde{f}(x) = y.$$

由于 E_0 有不止一个 Cauchy 序列收敛于 x, 还需要验证 $\widetilde{f}$ 是良定义的。设两个 E_0 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛于 x，记

$$y' = \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

需要验证 $y=y'$.$\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\,N>0$, 使得 $\forall\,n>N$,

$$d(x_n,x)<\varepsilon, d(x'_n,x)<\varepsilon.$$

且 $\forall\,m,n>N$,

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon, d(x'_n,x'_m)<\varepsilon.$$

从而 $\forall\,m,n>N$,

$$d(x_n,x'_m)\le d(x_n,x_m)+d(x_m,x)+d(x,x'_m)<3\varepsilon,$$

即 $\{x_n,x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 Cauchy 序列，由性质 2.3.3，$\{f(x_n),f(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 Cauchy 序列，从而

$$\lim_{n\to\infty}\delta(f(x_n),f(x'_n))=0.$$

由度量的连续性，

$$\delta(y,y')=\lim_{n\to\infty}\delta(f(x_n),f(x'_n))=0,$$

即 $y=y'$. 且显然有 $f|_{E_0}=f$.

再证 $\widetilde{f}:E\to F$ 一致连续:

$\forall\,\varepsilon>0$, 由于 f 一致连续，从而 $\exists\,\eta>0$, 对 $\forall\,a,b\in E_0$,$d(a,b)<\eta$, 有 $\delta(f(a),f(b))<\varepsilon$. 则对 $\forall\,a',b'\in E$, 由 E_0 在 E 中稠密，存在 E_0 中的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别收敛于 a',b', 从而 $\exists\,N>0$, 使得 $\forall\,n>N$, 有

$$d(a',a_n)<\frac{\eta}{3}, d(b',b_n)<\frac{\eta}{3},$$

从而当 $\boxed{d(a',b')<\eta/3}$ 时，有

$$d(a_n,b_n)\le d(a_n,a')+d(a',b')+d(b_n,b')<\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}<\eta,$$

此时,

$$\delta(f(a_n),f(b_n))<\varepsilon.$$

由 $\widetilde{f}$ 的定义可知,

$$\widetilde{f}(a')=\lim_{n\to\infty}f(a_n),\widetilde{f}(b')=\lim_{n\to\infty}f(b_n),$$

由度量的连续性，

$$\delta(\widetilde{f}(a'),\widetilde{f}(b'))=\lim_{n\to\infty}\delta(f(a_n),f(b_n))\leq\varepsilon,$$

即 $\widetilde{f}$ 是一致连续的。

最后证明唯一性：

设 f' 是另一个扩展映射，$\forall\ x\in E$, 存在 E_0 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x, 由 f' 的连续性，

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n).$$

但由 $\widetilde{f}$ 的定义，

$$\widetilde{f}(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n),$$

从而

$$\widetilde{f}(x)=f'(x),$$

即 $f'=\widetilde{f}$. □

例 2.3.5. 几个特殊的一致连续映射：

- *Hölder* 映射：存在 $\lambda>0$ 与 $0<\alpha\leq 1$, 使得

$$\delta(f(x),f(y))\leq\lambda d(x,y)^{\alpha};$$

- *Lipschitz* 映射：$\alpha=1$ 的 *Hölder* 映射，最小的 λ 称为 f 的 *Lipschitz* 常数；

- 压缩映射：$\lambda<1$ 的 *Lipschitz* 映射。

定理 2.3.6 (压缩映射不动点定理)**.** 设 (E,d) 是完备的度量空间，$f:E\to E$ 是压缩映射，则 f 有唯一的不动点。

证明. 任取 $x_1\in E$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)$, 得到序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 设 f 是以 λ 为系数的压缩映射，对 $\forall\ n$,

$$d(x_n,x_{n-1})=d(f(x_{n-1}),f(x_{n-2}))\leq\lambda d(x_{n-1},x_{n-2})\leq\lambda^2 d(x_{n-2},x_{n-3})\leq\cdots\leq\lambda^{n-2}d(x_2,x_1),$$

从而对任意正整数 p,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+p}, x_n) \le (\lambda^{n+p-2} + \cdots + \lambda^{n-1}) d(x_2, x_1) = 0,$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列。由于 (E, d) 是完备的，可设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $x \in E$, 且 f 是压缩映射，从而必定连续，从而极限与函数可交换，则

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

即 x 就是 f 的不动点。

若有另一不动点 y, 则

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y),$$

由于 λ 严格小于 1, 从而必有 $d(x, y) = 0$, 即 $x = y$. □

2.4 度量空间的完备化

定义 2.4.1. 称两个度量空间 (E, d) 与 (F, δ) 间的映射 T 是等距映射，若对 $\forall\, x, y \in E$,

$$\delta(T(x), T(y)) = d(x, y).$$

若 T 还是一一映射，则称其为等距同构映射。此时称这两个度量空间等距同构。

定理 2.4.2. 设 (E, d) 是一个度量空间，在等距同构的意义下，存在唯一完备的度量空间 $(\hat{E}, \hat{d})$, 使得

1. $E \subset \hat{E}$;
2. $\hat{d}|_E = d$;
3. E 在 $\hat{E}$ 中稠密。

证明. 先定义出 $(\hat{E}, \hat{d})$:
令 $\widetilde{E} = \{E$ 中的 Cauchy 序列$\}$, 再在 $\widetilde{E}$ 上定义一个等价关系：

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

令 $\hat{E}=\widetilde{E}/\sim$.$\forall\ \hat{x}=[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}],\hat{y}=[\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]\in\hat{E}$, 令

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n).$$

要先验证 $\hat{d}$ 是良定义的, 即不依赖于代表元 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的选取: 设 $\forall\ \hat{x}=[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]=[\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}],\hat{y}=[\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]=[\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}]\in\hat{E}$

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)\le\lim_{n\to\infty}[d(x_n,x'_n)+d(x'_n,x'_n)+d(y'_n,y_n)]=\lim_{n\to\infty}d(x'_n,y'_n),$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty}d(x'_n,y'_n)\le\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=\lim_{n\to\infty}d(x'_n,y'_n).$$

还要验证极限是存在的：由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\le\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}|[d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n)]-d(x_m,y_m)|\le\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)+\lim_{m\to\infty}d(x_m,y_m)=0,$$

从而 $\{d(x_n,y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 实数列，必收敛，从而 $\hat{d}$ 的定义中的极限存在。
可以验证 $\hat{d}$ 是一个度量。
最后验证 $\hat{d}|_E=d$: 记 $\dot{x}$ 是常序列 $\{x\}_{n=1}^{\infty}$, 则 $\forall\ x,y\in E$, 自然的可以选取常序列 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$ 作为 $\hat{x}$ 与 $\hat{y}$ 在 $\hat{E}$ 中的代表元，于是 E 可以有一个到 $\hat{E}$ 的单射嵌入，因此可以把 x 与 $\hat{x}$ 看作同一个元素，于是可以看作 $E\subset\hat{E}$, 此时

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=\hat{d}([\dot{x}],[\dot{y}])=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y),$$

即

$$\hat{d}|_E=d.$$

<u>再验证 E 在 $\hat{E}$ 中稠密</u>：$\forall\ \hat{x}\in\hat{E}$, 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的一个代表元，常序列 $\dot{x_n}$ 可看作与 $x_n\in E$ 是同一个元素, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\hat{d}(\hat{x},\dot{x_n})=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}d(x_m,x_n)=0,$$

即 E 在 $\hat{E}$ 中稠密。

再证 $(\hat{E},\hat{d})$ 是完备的：设 $\{\hat{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\hat{E}$ 中的 Cauchy 序列，由于 E 在 $\hat{E}$ 中稠密，故对 $\forall\, n$, 存在 $x_n \in E$, 使得

$$\hat{d}(\hat{x}^{(n)}, \dot{x}_n) < \frac{1}{n},$$

从而

$$d(x_n, x_m) = \hat{d}(\dot{x}_n, \dot{x}_m) \le \hat{d}(\dot{x}_n, \hat{x}^{(n)}) + \hat{d}(\hat{x}^{(n)}, \hat{x}^{(m)}) + \hat{d}(\dot{x}_m, \hat{x}^{(m)}) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{x}^{(n)}, \hat{x}^{(m)}) + \frac{1}{m},$$

又 $\{\hat{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，从而

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) \le \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} (\frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{x}^{(n)}, \hat{x}^{(m)}) + \frac{1}{m}) = 0,$$

即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的 Cauchy 序列，记它在 $\hat{E}$ 中代表的等价类是 $\hat{x}$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}^{(n)}, \hat{x}) \le \lim_{n\to\infty} (\hat{d}(\hat{x}^{(n)}, \dot{x}_n) + \hat{d}(\dot{x}_n, \hat{x})) \le \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \hat{d}(\dot{x}_n, \hat{x})) = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}^{(n)} = \hat{x},$$

从而 $(\hat{E},\hat{d})$ 是完备的度量空间。

最后证明 $(\hat{E},\hat{d})$ 在等距同构的意义下是唯一的：设 (E', d') 是另一个满足条件的度量空间，设

$$\iota : E \to \hat{E},$$

$$\iota' : E \to E'$$

是各自的等距嵌入单射，定义映射

$$f : \iota(E) \to E'$$

$$\hat{a} \mapsto \iota'(a).$$

由 ι, ι' 都是等距，从而 f 是等距，故一致连续，且由 $\iota(E)$ 在 $\hat{E}$ 中稠密以及 (E', d') 完备，由定理 2.3.4可知，f 可以唯一扩展成 $\hat{E}$ 到 E' 的一致连续映射 $\widetilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
(E,d) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & (\iota(E),\hat{d}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & (\hat{E},\hat{d}) \arrow[dl, "\widetilde{f}"] \\
& (E',d') &
\end{tikzcd}$$

任意 $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$,

$$d'(\widetilde{f}(\hat{x}), \widetilde{f}(\hat{y})) = d'(\lim_{n\to\infty} f(\dot{x}_n), \lim_{n\to\infty} f(\dot{y}_n)) = \lim_{n\to\infty} d'(f(\dot{x}_n), f(\dot{y}_n)) = \lim_{n\to\infty} d'(\dot{x}_n, \dot{y}_n) = d(\hat{x}, \hat{y}),$$

即 $\widetilde{f}$ 也是等距映射，从而是单射。又因为 $\iota'(E)$ 也在 E' 中稠密，从而 $\widetilde{f}$ 也是满射，即 $\widetilde{f}$ 是等距同构。 □

2.5 度量空间的紧性

定理 2.5.1. 设 (E, d) 是一个度量空间，则以下命题等价：

1. (E, d) 是紧的（任意开覆盖有有限子覆盖）；
2. E 中的任意无限子集必有凝聚点（此时称 E 是列紧的）；
3. E 中的任意序列都有收敛子列（此时称 E 是序列紧的）；
4. (E, d) 是完备的且是预紧的（$\forall\, \varepsilon > 0$,$E$ 可以被有限个半径为 ε 的开球覆盖）。

证明. 用如下顺序：$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$:

反证法。若否，即存在 E 的无限子集 F, 它没有凝聚点。从而 $\forall\, x \in E$,$\exists\, \varepsilon_x > 0$, 使得

$$B(x, \varepsilon_x) \cap (F - \{x\}) = \varnothing.$$

且 $E = \bigcup_{x\in E} B(x, \varepsilon_x)$ 是 E 的开覆盖，从而有有限子覆盖 $E = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_{x_i})$. 但 $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 中最多含有 F 中的有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 这与 $F \subset E = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 是无限集矛盾。

$\underline{2 \Rightarrow 3}$:

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的无穷序列。若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中仅含有限个不同的值，则必有一个值出现无限次，即得收敛子列。若否，由 2 知，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有凝聚点，记为 x. 从而对任意 $k \geq 1$, 可以从 $B(x, \frac{1}{k})$ 中选 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的一个点作为 x_{n_k}，从而

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) < \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

即 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛于 x 的子列。

$\underline{3 \Rightarrow 4}$:

任取 E 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 由 3 知，它有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 设它收敛于 $x \in E$. 从而对任意 $n \leq n_k$, 都有

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} d(x_n, x_{n_k}) + \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0,$$

即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x, 即 E 是完备的。

若 (E, d) 不是预紧的，则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 E 的开覆盖 $\bigcup_{x\in E} B(x, \varepsilon_0)$ 没有有限子覆盖，于是可以按以下方式构造出 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

(1) 任取 $x_1 \in E$;

(2) 任取 $x_2 \in E - B(x_1, \varepsilon_0)$;

$\cdots$

(n) 任取 $x_n \in E - \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_0)$;

$\cdots$

从而 $\forall\ m, n \geq 1$, 不妨设 $n < m$, 由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的构造可知，$x_m \notin B(x_n, \varepsilon_0)$, 从而

$$d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0,$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无收敛子列，与 3 矛盾，从而 E 是预紧的。

$\underline{4 \Rightarrow 3}$:

由于 (E,d) 是完备的，从而只需要证任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有 Cauchy 子序列。按如下方式构造:

(1) 取 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$，由于 (E,d) 预紧，从而存在有限子集 $F \subset E$, 使得 $E = \bigcup_{x\in F} B(x,\varepsilon_1)$, 从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必有一个无穷子列包含于某个开球 $B(x,\varepsilon_1)$ 中，记这个子列为 $\{x_{1_i}\}_{i=1}^{\infty}$;

(2) 再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$，同理，$\{x_{1_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 必有一个无穷子列包含于某个开球 $B(x,\varepsilon_2)$ 中，记这个子列为 $\{x_{2_i}\}_{i=1}^{\infty}$;

$\cdots$

(n) 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$，$\{x_{(n-1)_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 必有一个无穷子列包含于某个开球 $B(x,\varepsilon_n)$ 中，记这个子列为 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$;

$\cdots$

从而对 $\forall\ n \geq 1$,$\forall\ i,j \geq 1$,

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

接下来用“对角线法则”，选择子列 $\{x_{i_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 从而对 $\forall\ n$,$\forall\ i,j \geq n$, 不妨设 $i \leq j$, 由 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 的构造可知，x_{j_j} 处于序列 $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 中，设 $x_{j_j} = x_{i_h}$, 从而

$$d(x_{i_i}, x_{j_j}) = d(x_{i_i}, x_{i_h}) < \frac{1}{2^{i-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

即 $\{x_{i_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Cauchy 子序列。

$\underline{3 \Rightarrow 1}$:

设 $\bigcup_{i\in I} O_i$ 是 E 的一个开覆盖，首先证明存在一个正常数 λ, 使得任意 $0 < r < \lambda$, 对任意 $x \in E$, 开球 $B(x,r)$ 必包含于开覆盖的某一个开集 O_i 中（λ 称为开覆盖 $\bigcup_{i\in I} O_i$ 的 Lebesgue 数）。

若否，$\forall\ n \geq 1$, 存在 $x_n \in E$, 以及常数 $0 < r_{x_n} < \frac{1}{n}$, 使得开球 $B(x_n, r_{x_n})$ 不包含于开覆盖 $\bigcup_{i\in I} O_i$ 的任意一个开集中，由此构造出序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

由 3 可知,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 设 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0. 而 x_0 必定属于开覆盖 $\bigcup_{i\in I} O_i$ 的某一个开集 $O_{i_0}, i_0 \in I$ 中从而

存在正数 r_0, 使得 $B(x_0,r_0)\subset O_{i_0}$. 由于 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0, 故 $\exists\, k_0>0$, 使得 $\forall\, k>k_0$, 有 $d(x_{n_k},x_0)<\frac{r_0}{2}$. 再取正整数 $N>k_0$, 使得 $n_N>\frac{2}{r_0}$, 此时 $\forall\, y\in B(x_{n_N},r_{x_{n_N}})$, 有

$$d(y,x_0)\le d(y,x_{n_N})+d(x_{n_N},x_0)<r_{x_{n_N}}+\frac{r_0}{2}<\frac{1}{n_N}+\frac{r_0}{2}<r_0,$$

从而有

$$B(x_{n_N},r_{x_{n_N}})\subset B(x_0,r_0)\subset O_{i_0},$$

这与 $B(x_{n_N},r_{x_{n_N}})$ 的选取矛盾。

从而可设开覆盖 $\bigcup_{i\in I}O_i$ 有 Lebesgue 数 λ. 而 $\bigcup_{x\in E}B(x,\frac{\lambda}{2})$ 是 E 的一个开覆盖, 又由 $3\Rightarrow 4$ 知, (E,d) 是预紧的, 从而 $\bigcup_{x\in E}B(x,\frac{\lambda}{2})$ 有有限子覆盖，记为 $\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\frac{\lambda}{2})$. 而由 Lebesgue 数的定义可知，对 $\forall\ 1\le k\le n$, $B(x_k,\frac{\lambda}{2})$ 都包含于某个 $O_{i_k}, i_k\in I$ 中，从而 $\bigcup_{k=1}^{n}O_{i_k}$ 也是 E 的覆盖，从而 $\bigcup_{i\in I}O_i$ 有有限子覆盖 $\bigcup_{k=1}^{n}O_{i_k}$, 从而 (E,d) 是紧的。 □

性质 2.5.2. 紧性的性质：

1. $A\subset(E,d)$ 是紧集，$F\subset A$, 则 F 是紧集 $\Longleftrightarrow$ F 是闭集；
2. 定义域是紧的的连续映射是一致连续的；
3. 紧集上的连续函数能达到最大最小值。

证明. 1: 由于度量空间是 Hausdorff 的，由书 P11 定理 1.3.6 即得。

2: 这是定理 2.3.2.

3: 紧集的连续像是紧的，从而 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧集，从而是有界闭集，从而 $f(E)$ 能达到上下确界。 □

定义 2.5.3 (相对紧)**.** 设 (E,d) 是度量空间，称 $A\subset E$ 是相对紧的，若 $\overline{A}$ 是紧的。

推论 2.5.4. 设 (E,d) 是度量空间，则 $A\subset E$ 是相对紧的，当且仅当 A 中的无穷序列有在 E 中收敛的子列。

推论 2.5.5. 设 (E,d) 是完备度量空间，则 $A\subset E$ 是相对紧的，当且仅当 A 是预紧的。

3 赋范空间与连续线性映射

3.1 Banach 空间

定义 3.1.1. 度量空间 (E, d) 称为一个赋范空间，若 E 是一个线性空间，且 $\forall\, x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$, 其中 $\|\cdot\|$ 是一个函数，满足

1. 正定性：$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. 齐次性：$\forall\, \lambda \in K$,
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$
其中 $\mathbb{K}$ 是一个数域;
3. 三角不等式：$\forall\, x, y \in E$,
$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|,$$

此时称其为一个范数。

注记 3.1.2. 此时 $\forall\, x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$ 称为范数诱导的度量，空间中度量的语言可转化为范数的语言。

例 3.1.3. 欧氏空间 $\mathbb{K}^n$ 是赋范空间：$\forall\, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

- $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$;
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

定义 3.1.4 (Banach 空间)**.** 完备的赋范空间称为 *Banach* 空间。

例 3.1.5. 令 $E = C([a, b])$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数的集合，则

- $\|\cdot\|_\infty$: $\forall\, f \in E$, 令
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,,$$
是一个范数，且 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的：

设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 中的 *Cauchy* 序列，$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$, 使得 $\forall\, n, m > N$, 都有
$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$
从而 $\forall\, x \in E$,
$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$
即 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 *Cauchy* 数列，必收敛，记它收敛于 $f(x)$. 重新整理以上论述，$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$, 使得 $\forall\, n, m > N$, $\forall\, x \in E$, 都有
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$
令 $m \to \infty$, 由范数的连续性，
$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$
这对 $\forall\, x \in E$ 都成立，综上，$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$, 使得 $\forall\, n > N$, $\forall\, x \in E$, 都有
$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$
即
$$f_n \rightrightarrows f.$$
而一致收敛的连续函数列的极限仍是连续函数，从而 $f \in E$, 从而 $\|f_n - f\|_\infty$ 是良定义的。而由定义，$f_n \rightrightarrows f$ 等价于 $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. 综上，$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ 且 $f \in E$, 从而 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是 *Banach* 空间。但 $P([a,b]) = \{[a,b]\text{上的多项式函数}\} \subset C([a,b])$ 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下不完备；

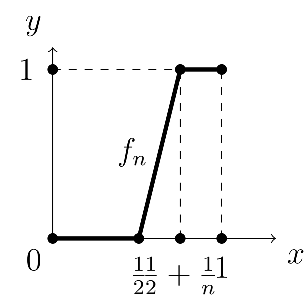
- $\|\cdot\|_1$: $\forall\ f \in E$, 令

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

是一个范数，但 $(E, \|\cdot\|_1)$ 不完备：

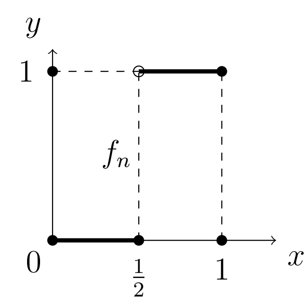
考虑函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ n(x - \frac{1}{2}), & x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}); \\ 1, & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$



记

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



此时，

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n-f|=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}n(x-\frac{1}{2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

即

$$f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}f,$$

但 $f\notin C([a,b])$, 从而 $(E,\|\cdot\|_1)$ 不是 *Banach* 空间。

这说明同一个向量空间可以有不同的范数，且在不同的范数下向量空间的完备性不一定相同，从而我们在谈论 *Banach* 空间时要同时指定空间和范数。

例 3.1.6. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，$\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 是 E 中的无穷级数，若部分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

的序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(E,\|\cdot\|)$ 中依范数收敛，则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 在 $(E,\|\cdot\|)$ 中收敛。

同样可以推广 *Cauchy* 级数，绝对收敛等概念。

定理 3.1.7. 赋范空间 $(E,\|\cdot\|)$ 是完备的当且仅当绝对收敛的级数都收敛。

证明. <u>必要性</u>：设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛，由三角不等式，

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\p\to\infty}}\|S_{n+p}-S_n\|=\lim_{\substack{n\to\infty\\p\to\infty}}\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right\|\le\lim_{\substack{n\to\infty\\p\to\infty}}\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|=0,$$

从而 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的 Cauchy 序列，由于 E 是完备的，从而 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

<u>充分性</u>：任意 E 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 可以选择子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\forall\ k$,

$$\left\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right\|\le\frac{1}{2^k},$$

从而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right\|$ 收敛，从而 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}-x_{n_1}$ 收敛，即 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛。而有收敛子列的 Cauchy 序列收敛，即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，从而 $(E,\|\cdot\|)$ 是完备的。 □

定义 3.1.8 (范数的等价). 设 p, q 是向量空间 E 上的两个范数，称它们等价，若 $\exists\, C > 0$, 使得 $\forall\, x \in E$, 都有

$$\frac{1}{C} \cdot p(x) \leq q(x) \leq C \cdot p(x).$$

定理 3.1.9. 欧氏空间的任意范数都等价。

证明. 只要证任意范数 $\|\cdot\|$ 都与无穷范数 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E 的一组基，从而任意 $x \in E$, 有唯一的表示

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

且 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 中的单位球

$$S = \left\{ x \in E \mid \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \right\}$$

是紧集，由于范数 $\|\cdot\|$ 是 E 上的连续函数，从而在紧集 S 上能取到正的最大最小值 C_1, C_2, 即 $\forall\, x \in S$,

$$0 < C_2 \leq \|x\| \leq C_1.$$

而 $\forall\, 0 \neq x \in E$, 都有

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_\infty = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1,$$

即

$$\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S,$$

从而

$$C_2 \leq \frac{x}{\|x\|_\infty} \leq C_1,$$

取

$$C = \max\{C_1, \frac{1}{C_2}\} > 0,$$

有

$$\frac{1}{C} \leq C_2 \leq \frac{x}{\|x\|_\infty} \leq C_1 \leq C,$$

由范数的齐次性，

$$\frac{1}{C} \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C \cdot \|x\|_\infty,$$

即范数 $\|\cdot\|$ 与无穷范数 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。 □

注记 3.1.10. 同理可知，事实上，有限维赋范线性空间上的所有范数都等价。

推论 3.1.11. 有限维赋范线性空间是 *Banach* 空间，它的任意范数诱导同样的拓扑，它之中的有界闭集是紧集。

定理 3.1.12 (Riesz)**.** 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则 E 是有限维的当且仅当 $\overline{B_1} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ 是紧集。

先证明一个引理：

引理 3.1.13. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，$F \subsetneq E$ 是闭线性子空间，则 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, e \in E$, 使得 $\|e\| = 1$ 且 $d(e, F) \geq 1 - \varepsilon$.

证明. 由于 $F \subsetneq E$, 故 $\exists\, x \in E - F$, 记 $d = d(x, F)$. 又 F 是闭集，从而 $d > 0$. 取 $y \in F$, 使得

$$d \leq \|x - y\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

令 $e = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, 则 $\|e\| = 1$ 且 $e \notin F$, 从而 $\forall\, z \in F$, 由 $x - y = \|x - y\| \cdot e \notin F$ 且 $\|x - y\| \cdot z \in F$, 从而

$$\|e - z\| = \left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} - z \right\| = \frac{1}{\|x - y\|} \|x - y - \|x - y\| \cdot z\| \geq \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon,$$

即

$$d(e, F) \geq 1 - \varepsilon.$$

□

Riesz 定理的证明. 必要性：这是推论 3.1.11的简单推论。

充分性：按以下步骤构造 $\overline{B_1}$ 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

(1) 任取 $x_1 \in \overline{B_1}$, 记 $F_1 = \mathbb{K}x_1$, 是 E 的有限维（一维）线性子空间，从而完备，从而是闭子空间，且是真子空间，从而由引理 3.1.13，$\exists\, x_2 \in \overline{B_1}$, 使得 $d(x_2, F_1) \geq \frac{1}{2}$, 更有 $d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{2}$;

(2) 记 $F_2 = \mathrm{Span}\{x_1, x_2\}$, 同理可取 $x_3 \in \overline{B_1}$, 使得 $d(x_3, F_2) \geq \frac{1}{2}$, 更有 $d(x_1, x_3) \geq \frac{1}{2}$,$d(x_2, x_3) \geq \frac{1}{2}$;

$\cdots$

(n) 记 $F_k = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, 可取 $x_{k+1} \in \overline{B_1}$, 使得 $d(x_{k+1}, F_k) \geq \frac{1}{2}$, 更有 $\forall\, 1 \leq i \leq k$,$d(x_i, x_{k+1}) \geq \frac{1}{2}$;

$\cdots$

由此得到一列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{B_1}$, 满足 $\forall\, j \neq k$,

$$d(x_j, x_k) \geq \frac{1}{2},$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，这与 $\overline{B_1}$ 是紧的矛盾，故 E 是有限维的。 □

3.2 连续线性映射

定义 3.2.1. 线性映射，记 $\mathcal{L}(E, F)$ 是向量空间 E 到向量空间 F 的线性映射的全体。

定理 3.2.2. *设 E 和 F 是两个赋范空间，$T \in \mathcal{L}(E, F)$, 则以下命题等价：*

1. *T 在 E 上连续;*

2. *T 在 E 中的某一点连续;*

3. *T 在原点连续;*

4. *存在非负数 C, 使得 $\forall\, x \in E$, 有 $\|Tx\|_F \leq C\,\|x\|_E$.*

证明. 用如下顺序：$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$: 这是显然的。

$\underline{2 \Rightarrow 3}$: 设 T 在 x_0 处连续，$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0$, 使得 $\forall\, x \in B(x_0, r)$, 都有

$$\|Tx - Tx_0\|_F < \varepsilon,$$

从而 $\forall\, y \in B(0, r)$, 有

$$\|(x_0 + y) - x_0\|_E = \|y\|_E = \|y - 0\|_E < r,$$

即 $x_0 + y \in B(x_0, r)$, 从而由线性，

$$\|Ty - T0\|_F = \|Ty\|_F = \|T(x_0 + y) - Tx_0\|_F < \varepsilon,$$

即 T 在原点处连续。

$\underline{3 \Rightarrow 4}$: 若 T 在原点处连续，则存在 $r_0 > 0$, 使得 $\forall\, y \in \overline{B(0, r_0)}$, 有 $\|Ty\|_F \leq 1$. 对 $\forall\, 0 \neq x \in E$, 记 $y = r_0 \frac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B(0, r_0)}$, 从而

$$\|Ty\|_F = \left\| T(r_0 \frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F \leq 1,$$

由线性，即得

$$\|Tx\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{r_0}.$$

取 $C = \frac{1}{r_0}$ 即得。

$\underline{4 \Rightarrow 1}$: 由线性，$\forall\, x, y \in E$, 有

$$\|Tx - Ty\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq C \|x - y\|_E,$$

即 T 是 Lipschitz 映射，从而在 E 上连续。 □

定义 3.2.3. 设 E 和 F 是两个赋范空间，$T \in \mathcal{L}(E, F)$, 若存在非负数 C, 使得 $\forall\, x \in E$, 有

$$\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E,$$

则称 T 是有界的。令

$$\|T\| = \sup_{0\neq x\in E} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|Tx\|_F\,,$$

称为 T 的范数。从 E 到 F 的有界线性映射全体记为 $\mathcal{B}(E, F)$.

注记 3.2.4. *1.* 线性算子是有界的，当且仅当它是连续的；

2. $\forall\, x \in E$, $\|Tx\|_F \le \|T\| \cdot \|x\|_E$.

证明. 1. 这是定理 3.2.2的直接推论。

2. $\forall\, x \in E$,

$$\|T\| = \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|Tx\|_F \ge \left\|T(\frac{x}{\|x\|_E})\right\|_F = \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$

即

$$\|Tx\|_F \le \|T\| \cdot \|x\|_E\,.$$

□

定理 3.2.5. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 是赋范空间，$(F, \|\cdot\|_F)$ 是 *Banach* 空间，则 $\mathcal{B}(E, F)$ 也是 *Banach* 空间。

证明. 设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{B}(E, F)$ 中的 Cauchy 序列，$\forall\, x \in E$, $\forall\, n, m > 0$, 由注记 3.2.4,

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \le \|(T_n - T_m)\| \cdot \|x\|_E\,,$$

从而 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 F 中的 Cauchy 序列，且由于 F 是 Banach 空间，从而 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，记它收敛于 Tx. 这样我们定义了映射 $T : E \to F$. 只要证 $T \in \mathcal{B}(E, F)$ 且 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T.

由定义可直接验证 T 是线性的。由注记 3.2.4, $\forall\, x \in E$, $\forall\, n, m > 0$,

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \le \|(T_n - T_m)\| \cdot \|x\|_E\,,$$

固定 m, 令 $n \to \infty$, 有

$$\|(T - T_m)x\|_F = \|Tx - T_m x\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_F \le \limsup_{n\to\infty} \|(T_n - T_m)\| \cdot \|x\|_E\,,$$

由于 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，故 $\limsup_{n\to\infty} \|(T_n - T_m)\| \cdot \|x\|_E < \infty$, 从而 $T - T_m \in \mathcal{B}(E, F)$, 从而 $T = (T - T_m) + T_m \in \mathcal{B}(E, F)$. 且还知道 $\|T - T_m\| \le \limsup_{n\to\infty} \|(T_n - T_m)\|$, 令 $m \to \infty$, 由于 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，

$$\lim_{m\to\infty} \|T - T_m\| \le \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|(T_n - T_m)\| = 0,$$

即 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T. □

定义 3.2.6 (对偶空间)**.** $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ 称为 E 的对偶空间，记为 E^*, $T \in E^*$ 称为线性泛函。

定理 3.2.7. 设 $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, 则 f 连续当且仅当 $N(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ 是闭集。

证明. 必要性: 由于 $\{0\}$ 是闭集，f 连续，闭集的原像是闭集，从而 $N(f) = f^{-1}(\{0\})$ 是闭集。

充分性: 反证法，由定理 3.2.2, 设 f 在 0 处不连续，则存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \ne 0$. 不妨设 $\forall\, n$, $|f(x_n)| \ge \delta > 0$, 否则就取满足该条件的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列。取 $x \in E$ 使得 $x \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $f(x) \ne 0$, 令

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x}{f(x)},$$

则 $\forall\, n$,

$$f(y_n) = f(\frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x}{f(x)}) = \frac{f(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f(x)}{f(x)} = 1 - 1 = 0,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\frac{x}{f(x)},$$

由于 $N(f)$ 是闭集且 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N(f)$, 从而 $-\frac{x}{f(x)} \in N(f)$, 即

$$f(-\frac{x}{f(x)}) = 0,$$

从而 $f(x) = 0$, 矛盾。 □

定理 3.2.8. 设 $(E, \|| = \cdot\|_E)$ 有限维赋范空间，$(F, \|\cdot\|_F)$ 是任意赋范空间，则任意 E 到 F 的线性映射都是有界的，从而也是连续的，即 $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{B}(E,F)$.

证明. 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E 的一组基，$\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, 考虑 E 上的无穷范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|\,.$$

由注记 3.1.10, E 的所有范数等价，从而存在 $C > 0$, 使得 $\forall\, x \in E$,

$$\|x\|_\infty \le C\,\|x\|_E\,,$$

从而 $\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\|Tx\|_F \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Te_i\|_F \le \left(\sum_{i=1}^n \|Te_i\|_F\right) \|x\|_\infty \le C\left(\sum_{i=1}^n \|Te_i\|_F\right) \|x\|_E\,,$$

即 T 是有界线性映射，从而也是连续线性映射。 □

定理 3.2.9. 设 $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ 是两个 *Banach* 空间，G 是 E 的稠密子空间，则任意有界线性算子 $T : G \to F$ 都可以唯一扩展为有界线性算子 $\widetilde{T} : E \to F$, 使得 $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.

证明. 对 $\forall\, x \in E$, 由于 G 在 E 中稠密，从而存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset G$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

并且 $\forall\, n, m$, 由注记 3.2.4,

$$\|Tx_n - Tx_m\|_F \le \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|_E\,,$$

从而 $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty$ 是 F 中的 Cauchy 序列。由 F 是 Banach 空间，完备，从而存在 $f \in F$, 使得

$$y = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

由此定义

$$\widetilde{T}x = y = \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

由定义，容易验证 $\widetilde{T}$ 是线性的。又对 $\forall\, x \in E$, 取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

则

$$\left\|\widetilde{T}x\right\|_F = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_F \le \lim_{n\to\infty} \|T\| \cdot \|x_n\|_E = \|T\| \cdot \|x\|_E\,,$$

即 $\widetilde{T}$ 有界且 $\left\|\widetilde{T}\right\| \le \|T\|$. 又

$$\|T\| = \sup_{x\in G, \|x\|_E=1} \|Tx\|_F \le \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \left\|\widetilde{T}x\right\|_F = \left\|\widetilde{T}\right\|,$$

这是因为 $G \subset E$, 从而上界不会减小。综上即有 $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$. □

定理 3.2.10. 设 $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ 是赋范空间，$T \in \mathcal{B}(E, F)$, $S \in \mathcal{B}(F, G)$, 则 $S \circ T \in \mathcal{B}(E, G)$, 且

$$\|S \circ T\| \le \|S\| \cdot \|T\|\,.$$

证明. 容易验证 $S \circ T$ 是线性的，且 $\forall\, x \in E$,

$$\|(S \circ T)x\|_G \le \|S\| \cdot \|Tx\|_F \le \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_E\,,$$

由于 T, S 有界，从而 $\|S\| \cdot \|T\| < \infty$, 即 $S \circ T$ 有界，从而 $S \circ T \in \mathcal{B}(E, G)$, 并且

$$\|S \circ T\| \le \|S\| \cdot \|T\|\,.$$

□

定理 3.2.11. 设 E 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|T\| < 1$, 则存在 $S \in \mathcal{B}(E)$, 使得

$$(I_E - T)S = S(I_E - T) = I_E,$$

即 $I_E - T$ 是同构，在代数 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆。

证明. 考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$, 由定理 3.2.10,

$$\|T^n\| = \|T \circ T \circ \cdots \circ T\| \leq \|T\|^n .$$

由于 $\|T\| < 1$, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ 绝对收敛，由定理 3.1.7, $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ 收敛，记它的极限是 S, 从而

$$(I_E - T)S = \lim_{n\to\infty}(I_E - T)\sum_{i=0}^{n} T^i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} T^i - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=i}^{n+1} T^i = \lim_{n\to\infty}(I_E - T^{n+1}) = I_E.$$

同理可证 $S(I_E - T) = I_E$, 即 S 是 $I_E - T$ 的逆映射。 □

例 3.2.12. 设 $(E, \|\cdot\|) = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, 设 K 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数，定义 $T: E \to E$ 如下：$\forall\, x \in E$,

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

显然 T 是线性算子，且

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right| \leq \left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 |K(x,y)|\, dy\right)\|f\|_\infty ,$$

即 $\|T\| \leq \sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 |K(x,y)|\, dy$, 故 T 是有界线性算子。

3.3 L^p 空间

定义 3.3.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是开集，则定义

- $1 \leq p < \infty$ 时:

  $$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f\text{可测且}\int_\Omega |f|^p < \infty\right\}$$

  在范数

  $$\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p)^{\frac{1}{p}}$$

  下是 *Banach* 空间；

- $p=\infty$ 时:

$$\|f\|_\infty = \operatorname{essup}_{x\in\Omega}|f(x)| = M < \infty,$$

称为 f 的本性上确界，即在 Ω 上，$|f| \overset{a.e.}{\leq} M$,

$$L^\infty(\Omega) = \{f:\Omega\to\mathbb{R} \mid f\text{可测且}\|f\|_\infty < \infty\}$$

且 $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ 也是 *Banach* 空间。

定理 3.3.2. 几个不等式:

1. *Hölder* 不等式：设 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, $0<p,q\leq\infty$, $f\in L^p(\Omega), g\in L^q(\Omega)$, 则 $fg\in L^r(\Omega)$, 且

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q;$$

2. *Young* 不等式：设 $0<\alpha,\beta<1$, 且 $\alpha+\beta=1$, 则 $\forall\ x,y\in[0,\infty)$,

$$xy \leq \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}};$$

3. *Minkowski* 不等式：设 $0<p\leq\infty$. 则 $\forall\ f,g\in L^p(\Omega)$,

   (a) 若 $1\leq p\leq\infty$, 则

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p;$$

   (b) 若 $0<p<1$, 则

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p+\|g\|_p^p.$$

定理 3.3.3. 几个重要的收敛定理:

1. *Levi* 单调收敛定理：$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 可测，关于 n 单调递增且 $\sup_{n\geq1}\int_\Omega f_n<\infty$, 则在 Ω 上，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 几乎处处收敛于一个可测函数 f, 且 $f\in L^1(\Omega)$, 即 $f_n \xrightarrow{L^1} f$;

2. *Lebesgue* 控制定理：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ 可测，且在 Ω 中，

   (a) $f_n \xrightarrow{a.e.} f$;

   (b) $\exists\ g \in L^1(\Omega)$, 使得对任意 n, $|f_n| \overset{a.e.}{\leq} g$,

   则 $f_n \xrightarrow{L^1} f$;

3. *Fatou* 引理：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ 可测，且在 Ω 中，$\forall\ n$, $f_n \overset{a.e.}{\geq} 0$, 且 $\sup_{n\geq 1}\int_\Omega f_n < \infty$. 对 $\forall\ x \in \Omega$, 令

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

   则 $f \in L^1(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n.$$

定理 3.3.4 (稠密性). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是开集，令 $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x\in\Omega \mid f(x)\neq 0\}}$ 称为 f 的支集，令

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid \operatorname{Supp} f \Subset \Omega\} \subset L^1(\Omega),$$

其中 $\Subset$ 表示 $\operatorname{Supp} f$ 是紧集且真包含于 Ω, 即 $dist(\operatorname{Supp} f, \partial\Omega) > 0$, 则 $C_c(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中是稠密的，即 $\overline{C_c(\Omega)} = L^1(\Omega)$, 也即 $\forall\ f \in L^1(\Omega)$, $\exists\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c(\Omega)$, 使得 $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

例 3.3.5. 令 $E = C_c((0,1))$ 是一个向量空间，$\|f\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)}|f| = \max_{x\in(0,1)}|f|$, 则 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是赋范向量空间，但不完备，即不是 *Banach* 空间。定义线性泛函 $\varphi : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ 如下：$\forall\ f \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f,$$

它不连续。取 $f_0 \in C_c(\mathbb{R})$, $f_0 \geq 0$ 且 $f_0 \not\equiv 0$, 令 $f_n(x) = f_0(\frac{x}{n})$, 又变量替换可知，

$$\varphi(f_n) = \int_{\mathbb{R}} f_n = n\int_{\mathbb{R}} f_0 \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

但 $\|f_n\|_\infty = \|f_0\|_\infty < \infty$, 从而 φ 不是有界的，从而不是连续的。

例 3.3.6. 令 $1 \le p < \infty$, 定义

$$l^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

令 $p = \infty$, 定义

$$l^\infty = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \|x\|_\infty = \sup_{1 \le n} |x_n| < \infty \right\}.$$

则对 $1 \le p \le \infty$, l^p 都是 *Banach* 空间。

例 3.3.7. 令 $E = l^1$, 则 $E^* = (l^1)^* = l^\infty$.

- $l^\infty \subset (l^1)^*$: 任取 $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^\infty$, $\|\xi\|_\infty < \infty$, 定义泛函 $\varphi \in (l^1)^*$: 对 $\forall\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$, 令

  $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \xi_n,$$

  显然有 φ 是线性的，且对 $\forall\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$,

  $$|\varphi(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \xi_n \right| \le \|\xi\|_\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right) = \|\xi\|_\infty \cdot \|x\|_1 < \infty,$$

  从而 φ 是有界的，从而连续，即 $\varphi \in (l^1)^*$;

- $(l^1)^* \subset l^\infty$: 对 $\forall\ \varphi \in (l^1)^*$, $\forall\ i \ge 1$, 记 $\eta_i = \varphi(e_i)$, 则 $\forall\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$,

  $$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_i e_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i \varphi(e_i) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i \eta_i.$$

  令

  $$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0, \cdots) \in l^1,$$

有 $y_n \xrightarrow{l^1} x$:

$$\|y_n - x\|_{l^1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

对 $\forall\, i \geq 1$,

$$|\eta_i| = |\varphi(e_i)| \leq \|\varphi\|_{(l^1)^*} \cdot \|e_i\|_{l^1} = \|\varphi\|_{(l^1)^*}\,,$$

从而

$$\sup_{i\geq 1} |\eta_i| \leq \|\varphi\|_{(l^1)^*}\,,$$

即 $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^\infty$. 且由此定义的映射 $T : (l^1)^* \to l^\infty$ 是单射，且 $\forall\, \varphi \in (l^1)^*$,

$$\|T\varphi\|_{l^\infty} = \sup_{i\geq 1} |\eta_i| = \|\varphi\|_{(l^1)^*}\,,$$

从而 T 是同构映射，从而 $(l^1)^* \simeq l^\infty$.

例 3.3.8. 设 $1 < p < \infty$, 则 $(l^p)^* = l^q$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 称为共轭指数。

对 $\forall\, \varphi \in (l^1)^*$, $\forall\, i \geq 1$, 记 $\eta_i = \varphi(e_i)$, 则 $\forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_i e_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i \varphi(e_i) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i \eta_i.$$

不妨设 $\varphi \neq 0$, 从而存在 $k \geq 1$, 使得 $\eta_k \neq 0$. 令 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|\eta_k|^q}{\eta_k}, & k \leq n, \eta_k \neq 0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\left|\xi_k^{(n)}\right|^p = |\eta_k|^q$, 从而 $x_n \in l^p$. 此时,

$$\varphi(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \eta_k = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\,,$$

还有

$$|\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_n\|_{l^p} = \|\varphi\| \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|.$$

从而由此定义的映射 $T:(l^p)^* \to l^q$ 是单射。

满射

4 Hilbert 空间

4.1 内积空间

定义 4.1.1. 内积空间：线性，对称，非负

定理 4.1.2 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

从而

$$\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$$

是范数。

定理 4.1.3 (平行四边形公式)**.**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

由此，可定义内积

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

例 4.1.4. 定义 $L^2(\Omega)$ 上的内积：$\forall\ f, g \in L^2(\Omega)$,

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\overline{g}.$$

定理 4.1.5 (勾股定理)**.** 若 $\langle x, y\rangle = 0$, 则

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

4.2 投影算子

定义 4.2.1 (投影算子)**.** 设 C 是 *Hilbert* 空间 H 的闭凸子集，由空间的完备性，$\forall\ x \in H$, 存在唯一 $y \in C$, 使得

$$d(x, y) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y),$$

此时 y 称为 x 在 C 的投影，投影算子记为 P_C.

定理 4.2.2. *1. 投影算子 P_C 是良定义的;*

2. $y = P_C(x) \Longleftrightarrow \forall\ z \in C, Re\,\langle x-y, z-y\rangle \le 0;$

3. P_C 是 1-Lipschitz 映射。

证明. 1. 设 $d = d(x, C)$, 取 $\{y_n\} \subset C$, 使得

$$d \le \|x - y_n\| \le d + \frac{1}{n},$$

由平行四边形公式,

$$\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\frac{1}{m}\right)^2 \ge \|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|2x-y_n-y_m\|^2 + \|y_n-y_m\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|y_n-y_m\|^2 + 4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2\right).$$

由于 C 凸，从而 $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$, 从而 $\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \ge d$, 从而

$$\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\frac{1}{m}\right)^2 - 2\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \ge \left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\frac{1}{m}\right)^2 - 2d^2 \ge \frac{1}{2}\|y_n-y_m\|^2,$$

从而 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，又 H 完备且 C 闭，从而存在 $y \in C$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

从而

$$\|y - x\| = d.$$

若存在另一 $y' \in C$, 使得 $\|y' - x\| = d$, 则由平行四边形公式,

$$2d^2 = \|x-y\|^2 + \|x-y'\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|y-y'\|^2 + \|2x-y-y'\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|y-y'\|^2 + 4\left\|x-\frac{y+y'}{2}\right\|^2\right) \ge \frac{1}{2}\|y-y'\|^2 + 2d^2,$$

从而

$$\|y - y'\| = 0,$$

即

$$y = y'.$$

2. $\underline{\Rightarrow}$: 设 z 为 C 中任意一点，记 $z' = \lambda y + (1-\lambda)z$, 其中 $0 < \lambda < 1$. 由 C 的凸性，$z' \in C$, 从而

$$\|x-y\|^2 \le \|x-z'\|^2 = \|x-y-(z'-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z'\|^2 - 2Re\langle x-y, z'-y\rangle,$$

从而

$$2Re\langle x-y, z'-y\rangle \le \|y-z'\|^2 = \|y-(\lambda y+(1-\lambda)z)\|^2 = (1-\lambda)^2\|z-y\|^2,$$

令 $\lambda \to 1$ 即得，

$$Re\langle x-y, z-y\rangle \le 0.$$

$\underline{\Leftarrow}$: 对 $\forall\, z \in C$, 由于 $Re\langle x-y, z-y\rangle \le 0$, 有

$$\|x-z\|^2 = \|x-y-(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2Re\langle x-y, z-y\rangle \ge \|x-y\|^2,$$

由 z 的任意性与投影算子的定义即知，$y = P_C(x)$.

3. 任取 $x, x' \in H$, 记 $y = P_C(x), y' = P_C(x')$, 则

$$\|y-y'\|^2 = \langle y-y', y-y'\rangle = \langle y-x, y-y'\rangle + \langle x-x', y-y'\rangle + \langle x'-y', y-y'\rangle,$$

两边同时取实部得，

$$\|y-y'\|^2 = Re\langle y-x, y-y'\rangle + Re\langle x-x', y-y'\rangle + Re\langle x'-y', y-y'\rangle.$$

由 2 可知，$Re\langle y-x, y-y'\rangle \le 0, Re\langle x'-y', y-y'\rangle \le 0$, 再由 Cauchy-Schwarz 不等式可知，

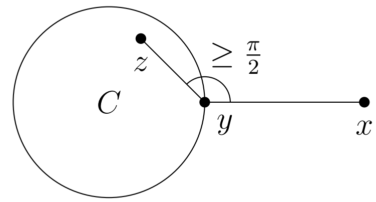
$$\|y-y'\|^2 \le Re\langle x-x', y-y'\rangle \le |\langle x-x', y-y'\rangle| \le \|x-x'\| \cdot \|y-y'\|,$$

即

$$\|P_C(x) - P_C(x')\| = \|y-y'\| \le \|x-x'\|.$$

□

注记 4.2.3. 命题 *2* 有几何意义：



注记 4.2.4. 容易验证，P_C 是幂等算子，即 $P_C^2 = P_C$, 并且 $P_C(H) = C$.

定理 4.2.5. 设 $E \subset H$ 是 *Hilbert* 空间的子空间，则 $y = P_E(x)$ 当且仅当对 $\forall\, z \in E$, $\langle x-y, z\rangle = 0$.

证明. 对 $\forall\, z \in E$,$-1 < t < 1$,

$$\|x-y\|^2 \leq \|x-y-tz\|^2,$$

令 $f(t) = \|x-y-tz\|^2$, 它在 $(-1,1)$ 可导，不等式说明 $f(0) \leq f(t)$, 从而 $f'(0) = 0$, 即

$$f'(0) = 2\left(\langle x-y, z\rangle + \langle z, x-y\rangle\right) = 0,$$

即

$$\langle x-y, z\rangle = 0.$$

□

定义 4.2.6 (正交补空间). $\forall\, A \subset H$, 定义

$$A^\perp = \{y \in H \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall\, x \in A\}$$

称为 A 的正交补空间，且

$$A^\perp = \bigcap_{x\in A} \left(\langle x, \cdot\rangle\right)^{-1}(0),$$

由内积的连续性，这说明 $A^\perp$ 是闭集。

注记 4.2.7. 对更一般的 *Banach* 空间 H, $E \subset H$, 我们也能定义 $E^\perp$:

$$E^\perp = \{f \in H^* \mid f(x) = 0, \forall\, x \in E\} \subset E^*,$$

这是因为 $E^* \simeq E$, $f(x)$ 也记为 $\langle f, x\rangle_{E^*\times E}$ 称为对偶积。

定理 4.2.8. $\forall\ E \subset H$, $H = \overline{E} \oplus E^{\perp}$.

证明. 任意 $x \in H$, 记 $y = P_{\overline{E}}(x) \in \overline{E}$, 由定理 4.2.5, $x - y \perp \overline{E}$, 即 $x - y \in E^{\perp}$, 从而由 $x = y + (x - y)$, 其中 $y \in \overline{E}, x - y \in E^{\perp}$, 即 $H = \overline{E} + E^{\perp}$. 又由定义，显然有 $\overline{E} \cap E^{\perp} = \{0\}$, 从而 $H = \overline{E} \oplus E^{\perp}$. □

定义 4.2.9. 规范正交基

4.3 对偶与共轭

定理 4.3.1 (Riesz 表示定理)**.** 设 H 是 *Hilbert* 空间，$\varphi : H \to \mathbb{K}$ 是连续线性泛函，当且仅当存在唯一 $y \in H$, 使得对 $\forall\ x \in H$,

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle ,$$

此时，$\|\varphi\| = \|y\|$.

证明. 充分性：若存在唯一 $y \in H$, 使得对 $\forall\ x \in H$,

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle ,$$

由内积的线性与连续性即知，φ 是连续线性泛函。由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$|\varphi(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| ,$$

从而

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in H} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leq \|y\| .$$

再令 $x = y$,

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \geq \left|\varphi(\frac{y}{\|y\|})\right| = \left|\frac{\varphi(y)}{\|y\|}\right| = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\| .$$

综上有 $\|\varphi\| = \|y\|$.

<u>必要性</u>：设 $\varphi \in E^*$, 记 $E = \operatorname{Ker} \varphi$, 由定理 3.2.7, $E = \operatorname{Ker} \varphi$ 是闭集，由定理 4.2.8, $H = E \oplus E^{\perp}$. 不妨设 $\varphi \neq 0$, 从而 $E \neq H$, 可取 $0 \neq e \in E^{\perp}$, 且不妨设 $\varphi(e) = 1$. 则 $\forall\, x \in H$,

$$x = [x - \varphi(x)e] + \varphi(x)e.$$

记 $x' = x - \varphi(x)e$, 则 $\varphi(x') = 0$, 即 $x' \in E$, 从而

$$\langle x, e\rangle = \langle x' + \varphi(x)e, e\rangle = \varphi(x)\langle e, e\rangle,$$

即

$$\varphi(x) = \left\langle x, \frac{e}{\|e\|^2} \right\rangle.$$

此时，取 $y = \frac{e}{\|e\|^2}$, 即得，对 $\forall\, x \in H$,

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle.$$

而 $\|\varphi\| = \|y\|$ 的证明与证明充分性时的证明一致。再证唯一性：若还有 $y' \in H$, 使得对 $\forall\, x \in H$,

$$\varphi(x) = \langle x, y'\rangle,$$

则对 $\forall\, x \in H$,

$$\langle x, y - y'\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y'\rangle = \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

从而 $y = y'$. □

注记 4.3.2. *Riesz 表示定理告诉我们，*

$$H^* \simeq H.$$

定义 4.3.3 (共轭算子)**.** *设 H, K 是两个 Hilbert 空间，$A \in \mathcal{B}(H, K)$, $\|A\| = \sup_{x \in H} \frac{\|Ax\|_K}{\|x\|_H}$, 定义 A 的共轭算子 $A^* : K \to H$: 对 $\forall\, x \in K$, $A^* x$ 是满足对 $\forall\, y \in H$,*

$$\langle A^* x, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_K$$

的元素。

定理 4.3.4. 共轭算子是良定义的，且是唯一的，且 $\|A^*\|_{\mathcal{B}(K,H)} = \|A\|_{\mathcal{B}(H,K)}$.

证明. 任意 $x \in K$, 由于 $A \in \mathcal{B}(H,K)$, 且由内积的连续性，

$$y \mapsto \langle Ay, x\rangle_K$$

是 H 上的连续线性泛函，由 Riesz 表示定理（定理 4.3.1），存在唯一 $z \in H$, 使得 $\forall\, y \in H$,

$$\langle y, z\rangle_H = \langle Ay, x\rangle_K \,.$$

令 $A^*x = z$, 则对 $\forall\, x \in K, y \in H$,

$$\langle y, A^*x\rangle_H = \langle Ay, x\rangle_K \,,$$

由内积的对称性，

$$\langle A^*x, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_K \,,$$

且显然 $A^* : K \to H$ 是线性映射，再由 Riesz 表示定理（定理 4.3.1），

$$\|A^*\|_{\mathcal{B}(K,H)} = \sup_{x\in K, \|x\|\le 1} \|A^*x\| = \sup_{x\in K, \|x\|\le 1} \sup_{y\in H, \|y\|\le 1} |\langle y, A^*x\rangle_H| = \sup_{y\in H, \|y\|\le 1} \sup_{x\in K, \|x\|\le 1} |\langle Ay, x\rangle_K| = \sup_{y\in H, \|y\|\le 1} \|Ay\| = \|A\|_{\mathcal{B}(H,K)} \,.$$

且容易看出 A^* 是唯一的。 □

4.4 Hilbert 空间的结构

定义 4.4.1. 称 *Hilbert* 空间 H 是可分的，若存在可数序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $E = \mathrm{Span}\{e_n \mid n \ge 1\}$ 在 H 中稠密，即 $\overline{E} = H$.

定理 4.4.2. 设 *Hilbert* 空间 H, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的规范正交集，则以下命题等价：

1. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完全的；
2. $\forall\, x \in H$, 存在唯一 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, 使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

证明. 1 ⇒ 2: 由于 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完全的，$\forall\, x \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n, \exists\, y \in E_n = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 使得

$$\|x - y\| \leq \varepsilon.$$

由定理 4.2.2.3,

$$\|P_{E_n}(x) - P_{E_n}(y)\| \leq \|x - y\| < \varepsilon,$$

而

$$P_{E_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle\, e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = S_n,$$

且 $P_{E_n}(y) = y$, 从而

$$\|x - S_n\| \leq \|x - y\| + \|y - S_n\| = \|x - y\| + \|P_{E_n}(x) - P_{E_n}(y)\| \leq 2\varepsilon,$$

即

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n = \lim_{N\to\infty} S_N = x.$$

若有另一表示 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' e_n$, 则 $\forall\, n$,

$$x_n' = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n' e_n, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle = x_n,$$

即得唯一性。

2 ⇒ 1: 由定义即得，这是显然的。 □

推论 4.4.3 (Bassel 不等式). 设 *Hilbert* 空间 H, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的规范正交集，则 $\forall\, x \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

推论 4.4.4 (Parseval 恒等式). 设 *Hilbert* 空间 H, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的规范正交基，则 $\forall\, x \in H$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

更一般地，$\forall\, x, y \in H$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle .$$

定理 4.4.5 (Gram-Schmidt 正交化). 设 *Hilbert* 空间 H, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的一个线性无关组，则存在规范正交集 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\forall\, n$,

$$\mathrm{Span}\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$

证明. 对 $\forall\, n$,

$$g_n = f_n - \frac{\langle f_n, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_n, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2 - \cdots - \frac{\langle f_n, g_{n-1}\rangle}{\langle g_{n-1}, g_{n-1}\rangle} g_{n-1},$$

且基变换矩阵为主对角线元素为 1 的下三角阵，从而可逆，从而

$$\mathrm{Span}\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} = \mathrm{Span}\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}.$$

再对 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 规范化即得 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

定理 4.4.6. 设 *Hilbert* 空间 H 可分，则它有规范正交集。

证明. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的可数稠密子集，去除掉能被它前面的元素线性表示的元素，仍记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 此时，它是一个线性无关组，且 $E = \mathrm{Span}\{a_n \mid n \geq 1\}$ 在 H 中稠密，再对 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 用 Gram-Schmidt 正交化（定理 4.4.5），即得规范正交序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 且

$$\mathrm{Span}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

这说明 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完全的，由定理 4.4.2, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 H 的规范正交基。 □

推论 4.4.7. 设 *Hilbert* 空间 H 可分，则

$$H \cong \begin{cases} \mathbb{K}^n, & \dim H = n < \infty; \\ l^2, & \dim H = \infty. \end{cases}$$

且在 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ 下，等距同构还保持内积。

事实上，对一般的 Hilbert 空间，也有如下定理成立：

定理 4.4.8. *任意非零 Hilbert 空间必有规范正交基。*

证明. 证明需要用到 Zorn 引理，略。(见教材 P82) □

例 4.4.9. 构造一般 *Hilbert* 空间的内积：设 I 是指标集，令

$$l^2(I) = \{x = (x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K} \mid \|x\| < \infty\},$$

其中

$$\|x\| = \sup_{J\subset I, J\text{有限}} \left(\sum_{i\in J} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 4.4.10 (可和族)**.** 设 $\alpha \in \mathbb{K}$ 且 $(\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K}$. 若 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在有限集 $J_0 \subset I$, 使得任意有限集 $J \subset I$ 且 $J_0 \subset J$, 都有

$$\left|\alpha - \sum_{i\in J} \alpha_i\right| < \varepsilon,$$

则称 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 是可和族，并称 α 是 $\sum_{i\in I} \alpha_i$ 的和，记为

$$\alpha = \sum_{i\in I} \alpha_i.$$

可和族有如下性质：

- $\sum_{i\in I} \alpha_i$ 可和当且仅当 $\sum_{i\in I} |\alpha_i|$;
- 设 $\alpha_i \geq 0, \forall\, i \in I$, 则 $\sum_{i\in I} \alpha_i$ 可和当且仅当 $\sup_{J\subset I, J\text{有限}} \sum_{i\in J} \alpha_i < \infty$, 此时,
$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\subset I, J\text{有限}} \sum_{i\in J} \alpha_i < \infty;$$
- 若 $\sum_{i\in I} \alpha_i$ 可和，则 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 至多有可数个非零元。

于是在可和的意义下，定义 $l^2(I)$ 上的内积：$\forall\, x=(x_i)i\in I, y=(y_i)i\in I\in l^2(I)$,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i\in I}\langle x_i,y_i\rangle\,.$$

且它诱导的范数就是

$$\|x\|=\sup_{J\subset I,J\text{有限}}\left(\sum_{i\in J}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而 $l^2(I)$ 在该内积下成为 *Hilbert* 空间。对 $\forall\, i\in I$, 令 e_i 是在 i 处取 1, 其他地方都取 0 的元素，则 $\{e_i\}_{i\in I}$ 就是 $l^2(I)$ 的规范正交基。

综上，本节我们得到了如下定理：

定理 4.4.11 (Hilbert 空间的结构)**.** 设 H 是 *Hilbert* 空间，则有等距同构：

$$H\cong l^2(I),$$

其中 $I=\{1,2,\cdots,n\}$, 若 $\dim H=n$; $I=\mathbb{N}^+$, 若 $\dim H=\infty$ 且 H 可分；I 不可数，若 H 不可分。

5 连续函数空间

定理 5.0.1. 本章主要定理：

- *Ascoli* 定理：解决 $C(K,E)$ 的子集的紧性问题，存在性问题；
- *Stone-Weierstrass* 定理：解决逼近问题。

5.1 等度连续与 Arzelà-Ascoli 定理

定义 5.1.1. 设 K 是紧的 *Hausdorff* 空间，(E,d) 是度量空间，记 $C(K,E)$ 是从 K 到 E 的连续函数的全体。

定义 5.1.2 (等度连续)**.** 设 $H\subset C(K,E)$, 称 H 在点 $x_0\in K$ 等度连续，若对 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,U\in\mathcal{N}(x_0)$, 使得 $\forall\,f\in H, \forall\,y\in U$, 都有

$$d(f(y),f(x_0))<\varepsilon.$$

若 H 在 K 的每一点处都等度连续，则称 H 在 K 上等度连续。

若 (K,δ) 也是度量空间，则可定义一致等度连续：若对 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\eta>0$, 使得 $\forall\,f\in H, \forall\,x,y\in K$, $\delta(x,y)<\eta$, 都有

$$d(f(y),f(x))<\varepsilon,$$

则称 H 在 K 上一致等度连续。

定理 5.1.3. 设 (K,δ) 是紧的度量空间，(E,d) 是度量空间，$H\subset C(K,E)$, 则 H 一致等度连续当且仅达 H 等度连续。

定理 5.1.4. 设 K 是紧的 *Hausdorff* 空间，(E,d) 是度量空间，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(K,E)$ 等度连续，且 $\forall\,x\in K$,

$$f_n(x)\to f(x),$$

则 $f\in C(K,E)$, 且

$$f_n\rightrightarrows f.$$

定义 5.1.5. 设 (E,d) 是 *Banach* 空间，在 $C(K,E)$ 上定义距离：

$$\Delta(f,g)=\sup_{x\in K} d(f(x)\ g(x)),$$

此时 $C(K,E)$ 也是 *Banach* 空间。

定理 5.1.6 (Arzelà-Ascoli)**.** 设 K 是紧 *Hausdorff* 空间，(E,d) 是度量空间，$H\subset C(K,E)$ 是相对紧的，即 $\overline{H}\subset C(K,E)$ 是紧的，当且仅当

1. H 等度连续；
2. $\forall\, x\in K$, $H(x)=\{f(x)\mid f\in H\}$ 在 E 中是相对紧的。

证明. 必要性：$\forall\, \varepsilon>0$, 由于 H 相对紧，即 $\overline{H}$ 是紧集，且注意到

$$\bigcup_{f\in H} B(f,\varepsilon)$$

是 H 的开覆盖，有有限子覆盖

$$H\subset\bigcup_{k=1}^{n} B(f_k,\varepsilon),$$

即存在 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in H$, 使得$\forall\ f\in H$, $\exists\ 1\le k\le n$, 使得 $\Delta(f_k,f)<\varepsilon$. 由于 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in H$ 连续，从而$\forall\ x\in K$, $\exists\ V\in\mathcal{N}(x)$, 使得$\forall\ y\in V$, $\forall\ k$,

$$d(f_k(x),f_k(y))<\varepsilon,$$

此时

$$\underline{d(f(x),f(y))\le d(f(x),f_k(x))+d(f_k(x),f_k(y))+d(f_k(y),f(y))<3\varepsilon},$$

即 H 等度连续。

$\forall\ x\in K$, 注意到映射 $\Phi: C(K,E)\to E$

$$f\mapsto f(x)$$

对 $\forall\ f, g \in C(K, E)$ 满足不等式

$$d(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) = \Delta(f, g),$$

从而是 1-Lipschitz 映射，连续。由注记 1.3.3, $\Phi(\overline{H})$ 是紧集，从而 $H(x)$ 在 E 中是相对紧的。

充分性：先证 $\overline{H}$ 在 $C(K, E)$ 中完备。任取 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{H}$, $\forall\ x \in K$,

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \sup_{x \in K} d(f_n(x), f_m(x)) = \Delta(f_n, f_m),$$

从而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的 Cauchy 列。由于 $H(x)$ 相对紧，从而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列。有收敛子列的 Cauchy 列收敛，即 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛。由定理 5.1.4, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛，一致收敛的连续函数列的极限也连续，从而 $\overline{H}$ 在 $C(K, E)$ 中完备。

由推论 2.5.5, 只要证 H 是预紧的。由于 H 等度连续，$\forall\ x \in K, \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 开集 $O_x \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $\forall\ y \in O_x, \forall\ f \in H$,

$$d(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

注意到

$$\bigcup_{x \in K} O_x$$

是 K 的开覆盖，由于 K 是紧的，有有限子覆盖，记为

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}.$$

又 $H(x)$ 是度量空间中的相对紧集，即 $\overline{H(x)}$ 是紧集，由定理 2.5, $\overline{H(x)}$ 预紧，自然有 $H(x)$ 预紧，从而它有 ε-网的有限覆盖，从而存在有限集 $Z \subset E$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} H(x_i) \subset \bigcup_{z \in Z} B(z, \varepsilon).$$

考虑有限集 Z^n, $\forall\ \underline{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in Z^n$, 令

$$B_{\underline{z}} = \left\{ f \in C(K, E) \mid \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{z \in O_{x_i}} d(f(x), z_i) < 2\varepsilon \right\}.$$

由此得到 $C(K,E)$ 的有限个子集 $\{B_{\underline{z}}\}_{\underline{z}\in Z^n}$. $\forall\ f,g\in B_{\underline{z}}$,

$$\Delta(f,g)\le \sup_{1\le i\le n}\sup_{z\in O_{x_i}} d(f(x),g(x))\le \sup_{1\le i\le n}\sup_{z\in O_{x_i}}\left(d(f(x),z_i)+d(g(x),z_i)\right)<4\varepsilon,$$

从而 $\operatorname{diam} B_{\underline{z}}<4\varepsilon$. 只需要证

$$H\subset\bigcup_{\underline{z}\in Z^n} B_{\underline{z}}.$$

$\forall\ f\in H, \forall\ 1\le i\le n$, $f(x_i)$ 属于某个 $B(z_i,\varepsilon)$, 其中 $z_i\in Z$, 从而 $\forall\ x\in O_{x_i}$,

$$d(f(x),z_i)\le d(f(x),f(x_i))+d(f(x_i),z_i)<2\varepsilon.$$

令 $\underline{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$, 则有

$$\sup_{1\le i\le n}\sup_{z\in O_{x_i}} d(f(x),z_i)<2\varepsilon,$$

即 $f\in B_{\underline{z}}$, 即

$$H\subset\bigcup_{\underline{z}\in Z^n} B_{\underline{z}}.$$

□

注记 5.1.7. $C(K,E)$ 中的拓扑是度量 $\forall\ f,g\in C(K,E)$,

$$d(f,g)=\sup_{x\in K} d(f(x),g(x))$$

诱导的拓扑，称为一致收敛的拓扑。

定理 5.1.8 (Arzelà-Ascoli 定理的原始版本). 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C([0,1],\mathbb{R})$, 则

- 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致有界且等度连续，则它有一致收敛的子列；
- 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意子列都有一致收敛的子列，则它有一致有界且等度连续。

推论 5.1.9. 设 K 是局部紧 *Hausdorff* 空间，$H \subset C(K, \mathbb{K}^n)$, 那么 H 在 $C(K, \mathbb{K}^n)$ 中相对紧，当且仅当 H 等度连续且 $\forall\, x \in K$, 轨道 $H(x)$ 有界。

证明. 这是因为在 $\mathbb{K}^n$ 中，相对紧等价于有界。 □

推论 5.1.10. 设 Ω 是 $\mathbb{K}^n$ 中的开子集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\Omega, \mathbb{K}^n)$, 若

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 的任意紧子集 K 上等度连续；
2. $\forall\, x \in \Omega$, $\{f_k(x) \mid k \geq 1\}$ 有界，

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一子列，它在 Ω 的任意紧子集 K 上一致收敛。

证明. $\forall\, n \geq 1$, 令

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \mathbb{K}^n - \Omega) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{B(0, n)},$$

它是紧集，且

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

注意到在 $\mathbb{K}^n$ 中，相对紧等价于有界，由 Arzelà-Ascoli 定理（5.1.8），$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 K_1 上有一致收敛的子列；该子列在 K_2 上有一致收敛的子列 $\cdots$ 由对角线法则，可以得到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个在 $K_n, \forall\, n \geq 1$ 上一致收敛的子列。又注意到 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增，从而 Ω 的任意紧子集必包含于某个 K_n 中，结论成立。 □

定理 5.1.11 (Montel)**.** 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的开子集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族 Ω 上的全纯函数。若对 Ω 的任意紧子集 K, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 K 上一致有界，则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个子列，在 Ω 的任意紧子集 K 上都收敛于一个 Ω 上的全纯函数 f.

证明. 设 $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, 使得

$$\overline{D(z_0, r)} = \{r \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega.$$

由 Cauchy 积分公式，$\forall\, n, \forall\, z \in D(z_0, r)$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f_n(u)}{u - z},$$

对 z 求导，

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_n(u)}{(u-z)^2}du,$$

从而

$$|f_n'(z)| \le \sup_{z\in\overline{D(z_0,r)}} |f_n(z)| \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{|u-z|^2}du,$$

从而

$$\sup_{n\ge 1}\sup_{z\in\overline{D(z_0,\frac{r}{2})}} |f_n'(z)| \le \frac{4}{r}\sup_{n\ge 1}\sup_{z\in\overline{D(z_0,r)}} |f_n(z)| = C_r < \infty.$$

这说明，$\{f_n|_{\overline{D(z_0,\frac{r}{2})}}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C_r-Lipschitz 函数列，等度连续。

对任意紧子集 $K\subset\Omega$, K 可以被有限个 $D(z_0,\frac{r}{2})$ 所覆盖，从而 $\{f_n|_K\}_{n=1}^{\infty}$ 等度连续，由推论 5.1.10, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有在 Ω 的任意紧子集上一致收敛的子列，而一致收敛的全纯函数列的极限也是全纯函数，即证。 □

5.2 Stone-Weierstrass 定理

定义 5.2.1. 设 $\mathcal{A}\subset C(K,\mathbb{K})$,

1. 若 $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{K})$ 的向量子空间且关于乘法封闭，则称 $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{K})$ 的子代数；
2. 若 $\forall\, x\ne y\in K$, 有函数 $f\in\mathcal{A}$, 使得 $f(x)\ne f(y)$, 则称 $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的；
3. 设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 若 $\forall\, f,g\in\mathcal{A}$, $\max\{f,g\}\in\mathcal{A}$ 且 $\min\{f,g\}\in\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是格。

定理 5.2.2 (实的情形的 Stone-Weierstrass 定理)**.** 设 K 是紧 *Hausdorff* 空间，$\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{R})$ 的子代数，若

1. $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的；
2. $\forall\, x\in K$, $\exists\, f\in\mathcal{A}$, 使得 $f(x)\ne 0$,

则 $\mathcal{A}$ 在 $C(K,\mathbb{R})$ 中稠密。

定理的证明需要两个引理:

引理 5.2.3. 设 $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{R})$ 的闭子代数，则 $\mathcal{A}$ 是格。

引理 5.2.4. 设 $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{R})$ 的子代数，满足定理 *5.2.2*中的条件（称为 *Stone-Weierstrass* 条件），则

1. $\forall\, x \in K, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \exists\, h \in \mathcal{A},$ 使得 $h(x) = \alpha;$

2. $\forall\, x \neq y \in K, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \exists\, h \in \mathcal{A},$ 使得 $h(x) = \alpha,\ h(y) = \beta.$

实的情形的 *Stone-Weierstrass* 定理的证明. 可以用 $\overline{\mathcal{A}}$ 代替 $\mathcal{A}$, 从而可设 $\mathcal{A}$ 是闭集。只要证 $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = C(K,\mathbb{R})$. $\forall\, f \in C(K,\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, 由引理 5.2.4, $\forall\, x, y \in K$, $\exists\, h_{x,y} \in \mathcal{A}$, 使得 $h_{x,y}(x) = f(x)$, $h_{x,y}(y) = f(y)$. 令

$$U_{x,y} = \{z \in K \mid h_{x,y}(z) + \varepsilon > f(z)\},$$

它是连续函数 $h_{x,y}(\cdot) - f(\cdot)$ 关于开集 $(-\varepsilon, +\infty)$ 的原像，是开集。又 $\forall\, x, y \in K$, 固定 x, 集族 $\{U_{x,y}\}_{y\in K}$ 是 K 的开覆盖，有有限子覆盖，记为

$$K = U_{x,y_1} \cup U_{x,y_2} \cup \cdots \cup U_{x,y_{n(x)}}.$$

令 $h_x = \max\{h_{x,y_1}, h_{x,y_2}, \cdots, h_{x,y_{n(x)}}\}$, 由引理 5.2.3, $h_x \in \mathcal{A}$. 由 $y_1, y_2, \cdots, y_{n(x)}$ 的选取，在 K 上，$h_x + \varepsilon > f$, 且 $f(x) = h_x(x)$. 再令

$$V_x = \{z \in K \mid f(z) > h_x(z) - \varepsilon\},$$

同理，它也是开集，且 $x \in V_x$, 从而集族 $\{V_x\}_{x\in K}$ 是 K 的开覆盖，有有限子覆盖，记为

$$K = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_m}.$$

令 $h = \min\{h_{x_1}, h_{x_2}, \cdots, h_{x_m}\}$, 由引理 5.2.3, $h \in \mathcal{A}$. 由 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的选取，在 K 上，$f > h - \varepsilon$. 又由之前论证，$\forall\, 1 \leq i \leq m$, $h_{x_i} + \varepsilon > f$, 从而 $h + \varepsilon > f$. 综上，$\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. 这说明 $f \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, 即得 $C(K,\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, 从而 $\mathcal{A} = C(K,\mathbb{R})$. □

推论 5.2.5. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集，则限制在 K 上的关于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实系数多项式的全体在 $C(K,\mathbb{R})$ 中稠密。特别地，若 $a < b$, 则 $\forall\, f \in C([a,b],\mathbb{R})$ 可由 $[a,b]$ 上的多项式一致逼近。

证明. 记 $\mathcal{A}$ 是限制在 K 上的关于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实系数多项式的全体，则它是 $C(K, \mathbb{R})$ 的子代数. 由 $\forall\, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in K$, $\exists\, 1 \leq i \leq n$, 使得 $y_i \neq z_i$, 令 $f(x) = x_i$, 从而 $f \in \mathcal{A}$, 且有 $f(y) \neq f(z)$, 即 $\mathcal{A}$ 是可分点的。又 $1 \in \mathcal{A}$, 故 $\mathcal{A}$ 满足 Stone-Weierstrass 条件，由定理 5.2.2, $\mathcal{A}$ 在 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中稠密。 □

注记 5.2.6. 可以构造出具体的逼近：例如，设 $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, 定义 n 次 *Bernstein* 多项式：$\forall\, x \in [0,1]$,

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

则 $B_n(f)$ 一致收敛到 f.

定理 5.2.7 (复的情形的 Stone-Weierstrass 定理)**.** 设 K 是紧 *Hausdorff* 空间，$\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{C})$ 的子代数，若

1. $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的；
2. $\forall\, x \in K$, $\exists\, f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x) \neq 0$;
3. 若 $f \in \mathcal{A}$, 则 $\overline{f} \in \mathcal{A}$（即 $\mathcal{A}$ 是自伴的），

则 $\mathcal{A}$ 在 $C(K, \mathbb{C})$ 中稠密。

证明. 令 $Re\mathcal{A} = \{Ref \mid f \in \mathcal{A}\}$. $\forall\, f \in \mathcal{A}$, 由于 $\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{C})$ 的自伴的子代数, 故有 $Ref = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in \mathcal{A}$ 且 $Imf = Re(-if) \in Re\mathcal{A}$. 从而 $Re\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ 且还是子代数，并且 $\mathcal{A} = Re\mathcal{A} + iRe\mathcal{A}$. $Re\mathcal{A}$ 还满足实的情形的 Stone-Weierstrass 条件：

1. $Re\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的：$\forall\, x, y \in K$, 由于 $\mathcal{A}$ 在 K 上可分点，从而 $\exists\, f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x) \neq f(y)$, 此时有 $Ref(x) \neq Ref(y)$ 或 $Imf(x) \neq Imf(y)$, 又 $Imf \in Re\mathcal{A}$, 故满足条件；
2. $\forall\, x \in K$, $\exists\, \varphi \in \mathcal{A}$, 使得 $\varphi(x) \neq 0$:$\forall\, x \in K$, $\exists\, f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x) \neq 0$, 此时有 $Ref(x) \neq 0$ 或 $Imf(x) \neq 0$, 又 $Imf \in Re\mathcal{A}$, 故满足条件。

于是，$Re\mathcal{A}$ 在 $C(K, \mathbb{R})$ 中稠密，则 $\mathcal{A} = Re\mathcal{A} + iRe\mathcal{A}$ 就是 $C(K, \mathbb{C})$ 的稠密子集。 □

推论 5.2.8 (多项式逼近定理). 由复的情形的 *Stone-Weierstrass* 定理，

1. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集，则限制在 K 上关于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的复系数多项式的全体在 $C(K,\mathbb{C})$ 中稠密；

2. 设 K 是 $\mathbb{C}^n$ 的紧子集，则限制在 K 上关于变量 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_n}$ 的复系数多项式的全体在 $C(K,\mathbb{C})$ 中稠密。

5.2.1 Stone-Weierstrass 定理在 Fourier 分析中的应用

定义 5.2.9. 几个函数空间：

1. $L^p_{2\pi} = L^p([0,2\pi), \frac{d\theta}{2\pi})$，当 $0 < p < \infty$ 时，它的范数为

$$\|f\|^p_{L^p_{2\pi}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}},$$

   当 $p = \infty$ 时，它的范数就是 $L^\infty([0,2\pi), dx)$ 的范数，且 $\forall\ 0 < p < q \leq \infty$, $L^q_{2\pi} \subset L^p_{2\pi}$ 且 $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}} \leq \|\cdot\|_{L^q_{2\pi}}$；

2. $C_{2\pi}$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数构成的空间，它的范数为

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(\theta)|;$$

3. $\mathcal{P}$ 是三角多项式构成的向量空间，它是 $C_{2\pi}$ 和 $L^p_{2\pi}$ 的向量子空间，$\mathcal{P}$ 中的任意元素 f 可以表示为

$$f(\theta) = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k\, \mathrm{e}^{ik\theta},$$

   其中 $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

引理 5.2.10. $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密。

定义 5.2.11. 设 $f \in L^1_{2\pi}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, 称

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,d\theta$$

为 f 的 n 阶 *Fourier* 系数，并记 f 的所有 *Fourier* 系数构成的序列为

$$\mathcal{F}(f) = \{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

称其为 f 的 *Fourier* 变换，也记为 $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

定理 5.2.12. 设 $0 < p < \infty$,

1. $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 与 $L^p_{2\pi}$ 中都稠密;
2. $\mathcal{F}$ 是从 $L^1_{2\pi}$ 到 $c_0(\mathbb{Z})$ 的范数为 1 的单射，其中
$$c_0(\mathbb{Z}) = \left\{\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \mid \lim_{n\to+\infty}\alpha_n = \lim_{n\to-\infty}\alpha_n = 0\right\},$$
其范数为 $\|\alpha\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha_n|$;
3. 记 $e_n(\theta) = \mathrm{e}^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, 则 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 *Hilbert* 空间 $L^2_{2\pi}$ 中的规范正交基。

5.3 广义函数

定义 5.3.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，记

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp}\,f\text{是紧集}\},$$

有

$$C_c^\infty(\Omega) \subsetneq C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\right\},$$

在它上面定义范数：$\forall\ f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)| = \max_{x\in\Omega}|f(x)| < \infty,$$

但不完备，即 $C_c^\infty(\Omega)$ 不是 *Banach* 空间。

定义 5.3.2. 可以在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上定义拓扑（在紧子集上一致收敛的拓扑）：设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega)$，则称 $f_n \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} f$，若存在 $K \Subset \Omega$，使得

1. $\forall\, n \geq 1$, $\operatorname{Supp} f_n \subset K$, 且 $\operatorname{Supp} f \subset K$;

2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$, 在 K 上,

$$\partial^\alpha f_n \rightrightarrows \partial^\alpha f.$$

定义 5.3.3. 记 $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$，令

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \mid T\text{是线性连续的}\},$$

即 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$，当且仅当

1. T 是线性算子;

2. $\forall\, \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $f_n \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} f$, 则 $T(f_n) \to T(f)$,

称为广义函数空间。

例 5.3.4. *Dirac* 测度 $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$，它的定义为 $\forall\, f \in \mathcal{D}(\Omega)$，

$$\delta_0(f) = f(0).$$

例 5.3.5. 设 Ω 是有界区域，有

$$C_c^\infty(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

其中，$1 < p < \infty$, $L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f\text{可测，且}\forall\, K \Subset \Omega, f \in L^1(K)\}$. 最后的包含事实上是一个嵌入，设 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$，定义对偶积：$\forall\, f \in C_c^\infty(\Omega)$，

$$u(f) = \langle u, f\rangle = \int_\Omega uf,$$

有

$$u(f) = \langle u, f \rangle = \int_\Omega uf = \int_{\operatorname{Supp} f} uf < \infty,$$

是良定义的，可以验证，这样定义了 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

例 5.3.6. 设 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 定义 $\frac{\partial T}{\partial x_1}$: $\forall\ f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, f \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle,$$

可以验证，$\frac{\partial T}{\partial x_1} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 其中的负号是因为，若 $u \in C^1(\Omega)$, 在广义函数的意义下，$\frac{\partial u}{\partial x_1} \in \mathcal{D}'(\Omega)$; 在函数意义下，由分部积分，$\forall\ f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} f = -\int_\Omega u \frac{\partial f}{\partial x_1} + uf|_{\partial\Omega} = -\int_\Omega u \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

与广义函数嵌入的定义相容。

可以推广定义，

$$\langle \partial^\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha f \rangle,$$

其中 f 称为检验函数。

例 5.3.7 (Heaviside 函数)**.**

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

容易验证 $\theta \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, 从而 $\theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. 直接计算，$\forall\ f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \theta', f \rangle = -\langle \theta, f' \rangle = -\int_\mathbb{R} \theta f' = -\int_0^\infty f' = f(0),$$

即 $\theta' = \delta_0$.

例 5.3.8. *Gamma* 函数 $\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$, 满足 $\Delta\Gamma = 0$. 可以计算得,

$$\langle \Delta\Gamma, f \rangle = \langle \Gamma, \Delta f \rangle = -f(0) = -\langle \delta_0, f \rangle,$$

即 $-\Delta\Gamma = \delta_0$.

注记 5.3.9. 由此，引出了偏微分方程中弱解的概念。

6 Baire 定理及其应用

6.1 Baire 空间

定义 6.1.1. 设 E 是一个拓扑空间，若任意一列在 E 中稠密的开子集 $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

在 E 中稠密，则称 E 是 *Baire* 空间。

定理 6.1.2 (Baire)**.** 设 (E,d) 是完备度量空间，$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列在 E 中稠密的开子集，则

$$O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

在 E 中稠密。

证明. 任意非空开集 $U \subset E$, 由于 O_1 在 E 中稠密，$O_1 \cap U$ 是非空开集，

(1) 存在闭球 F_1, 使得 $F_1 \subset U \cap O_1$, 记 $r_1 = \operatorname{diam} F_1$;

(2) 同理，$O_2 \cap F_1^{\circ}$ 是非空开集，存在闭球 F_2, 使得 $F_2 \subset O_2 \cap F_1^{\circ}$, 且 $r_2 = \operatorname{diam} F_2 \leq \frac{r_1}{2}$;

$\cdots$

(n) 同理，$O_n \cap F_{n-1}^{\circ}$ 是非空开集，存在闭球 F_n, 使得 $F_n \subset O_n \cap F_{n-1}^{\circ}$, 且 $r_n = \operatorname{diam} F_n \leq \frac{r_{n-1}}{2} \leq \frac{r_1}{2^{n-1}}$;

$\cdots$

从而得到非空闭球序列 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $F_{n+1} \subset O_{n+1} \cap F_n^{\circ}$, 且 $\operatorname{diam} F_n \leq \frac{r_1}{2^{n-1}}$, 由于 E 是完备的，由定理 2.2.5, 存在唯一 $x \in E$, 使得

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

从而 $x \in O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, 且 $x \in F_1 \subset U$, 从而 $x \in O \cap U$, 即 O 在 E 中稠密。 □

推论 6.1.3. 完备度量空间是 *Baire* 空间。

定理 6.1.4. 设 E 是 *Baire* 空间，则

1. E 的任何开子集也是 *Baire* 空间；

2. 设 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中一列闭子集，且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^{\circ}$ 在 E 中稠密。

证明. 1: 设 Ω 是 E 中的开集，$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列在 Ω 中稠密的开子集，由于 Ω 是 E 中的开集，$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 E 中的开子集列，令

$$U_n=O_n\cup\overline{\Omega}^c,$$

是 E 中的开集，且 $\overline{U_n}=E$, 从而 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中稠密的开子集列。由于 E 是 Baire 空间，$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$ 在 E 中稠密，而

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n\right)\cup\overline{\Omega}^c,$$

故 $\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 在 Ω 中稠密。

2: 设 Ω 是 E 中的非空开集，则

$$\Omega=\Omega\cap E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Omega\cap F_n).$$

由于 F_n 是闭集，$\Omega\cap F_n$ 是 Ω 中的闭集。由 (1), 开集 Ω 也是 Baire 空间，从而存在 n, 使得 $(\Omega\cap F_n)^{\circ}\neq\varnothing$. 此时，注意到 $\Omega\cap F_n$ 在 E 中的内部也非空，即有 $\Omega\cap F_n^{\circ}\neq\varnothing$. 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^{\circ}$ 在 E 中稠密。 □

定理 6.1.5. 设 E 是 *Baire* 空间，(F,δ) 是度量空间，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(E,F)$, 且 $f_n\xrightarrow{p.w.}f$, 则 f 的连续点构成的集合 $\mathrm{Cont}(f)$ 是 E 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集。

证明. 定义振幅函数:

$$\omega(f)(x)=\inf_{V\in\mathcal{N}(x)}\sup_{y,z\in V}\delta(f(y),f(z)),$$

显然有，

$$\omega(f)(x)=0\Leftrightarrow x\in\mathrm{Cont}(f).$$

注意到，

$$\mathrm{Cont}(f)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in E \mid \omega(f)(x)<\frac{1}{n}\right\},$$

且 $\forall\ \varepsilon>0$, $\{x\in E \mid \omega(f)(x)<\varepsilon\}$ 是开集，从而 $\mathrm{Cont}(f)$ 是 $\mathcal{G}_\delta$ 集。

对任意正整数 N,k, 记

$$F_{N,k}=\left\{x\in E \mid \delta(f_n(x),f_m(x))\le\frac{1}{k},\forall m,n\ge N\right\}=\bigcap_{m,n\ge N}\left\{x\in E \mid \delta(f_n(x),f_m(x))\le\frac{1}{k}\right\}.$$

由于 $\forall\ n$, f_n 连续, 故 $\left\{x\in E \mid \delta(f_n(x),f_m(x))\le\frac{1}{k}\right\}$ 是闭集，故 $F_{N,k}$ 是可数个闭集的交，是 E 中的闭集。由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逐点收敛，故 $\forall\ k\ge 1$,

$$E=\bigcup_{N=1}^{\infty}F_{N,k}.$$

由于 E 是 Baire 空间，由定理 6.1.4,

$$O_k=\bigcup_{N=1}^{\infty}F_{N,k}^{\circ}$$

在 E 中稠密。仍然由于 E 是 Baire 空间，

$$O=\bigcap_{k=1}^{\infty}O_k$$

在 E 中稠密。任取 $x\in O$, 则对任意 $k\ge 1$, 有 $x\in O_k$. 由 O_k 的定义，存在 $N\ge 1$, 使得 $x\in F_{N,k}^{\circ}$. 从而对任意 $m,n\ge N$ 与任意 $y\in F_{N,k}^{\circ}$, 有

$$\delta(f_n(y),f_m(y))\le\frac{1}{k}.$$

令 $n\to\infty$, 即得 $\delta(f(y),f_m(y))\le\frac{1}{k}$. 又 f_N 连续，存在 $V\in\mathcal{N}(x)$, 使得 $\forall\ y\in V$, 有

$$\delta(f_N(y),f_N(x))\le\frac{1}{k}.$$

令 $U=V\cap F_{N,k}^{\circ}$, 则 $U\in\mathcal{N}(x)$, 且当 $y\in U$ 时，

$$\delta(f(y),f(x))\le\delta(f(y),f_N(y))+\delta(f_N(y),f_N(x))+\delta(f_N(x),f(x))\le\frac{3}{k},$$

即 f 在 x 处连续，从而 $O \subset \mathrm{Cont}(f) \subset E$, 又 O 在 E 中稠密，自然有 $\mathrm{Cont}(f)$ 也在 E 中稠密。 □

6.2 Banach-Steinhaus 定理

定理 6.2.1 (Banach-Steinhaus)**.** 设 E 是 *Banach* 空间，F 是赋范空间，$\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}(E,F)$ 是一族有界线性算子，若 $\forall\, x \in E$, 有 $\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty$, 则

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty,$$

即算子族 $\{T_i\}_{i\in I}$ 在 $\mathcal{B}(E,F)$ 中有界。

证明. 记

$$M(x) = \sup_{i\in I} \|T_i x\|,$$

$$F_n = \{x \in E \mid M(x) \le n\}.$$

由 T_i 的连续性知，$\{x \in E \mid \|T_i x\| \le n\}$ 是 E 中的闭集，则

$$F_n = \bigcap_{i\in I} \{x \in E \mid \|T_i x\| \le n\}$$

也是 E 中的闭集。由条件，$\forall\, x \in E$, $M(x) < \infty$, 因此，

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

由 Baire 定理（定理 6.1.2），E 是 Baire 空间，又由定理 6.1.4, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^\circ$ 在 E 中稠密，从而存在 $n \ge 1$, 使得 $F_n^\circ \ne \varnothing$, 从而存在开球 $B(x_0, r) \subset F_n^\circ$, 对任意 $x \in B(x_0, r)$, 有

$$M(x) \le n,$$

即 $\forall\, i \in I$,

$$\|T_i x\| \le n.$$

等价地，若令 $x \in B(0,r)$, 则有 $\|T_i(x+x_0)\| \leq n$, 由线性，

$$\|T_i x\| = \|T_i(x+x_0) - T_i x_0\| \leq \|T_i(x+x_0)\| + \|T_i x_0\| \leq n + M(x_0).$$

同样由线性，$\forall\, x \in B(0,1)$,

$$\|T_i x\| = \frac{1}{r}\|T_i r x\| \leq \frac{n+M(x_0)}{r} = C,$$

故 $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$. □

注记 6.2.2. *Banach-Steinhaus* 定理也称为一致有界原理。

定理 6.2.3. 设 E 是 *Banach* 空间，F 是赋范空间，$\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}(E,F)$ 满足

$$\sup_{i\in I}\|T_i\| = \infty,$$

则 $G = \{x \in E \mid M(x) = +\infty\}$ 是 E 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集。

证明. 令 $\Omega_n = \{x \in E \mid M(x) > n\}$, 注意到

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

设 $F_n = \{x \in E \mid M(x) \leq n\}$, 则 $\Omega_n = E - F_n$, 故 Ω_n 是开集，从而 G 是 $\mathcal{G}_\delta$ 集。

若某个 Ω_n 在 E 中不稠密，则相应的 $F_n^\circ \neq \varnothing$. 由 Bnanch-Steinhaus 定理（定理 6.2.1），$\{T_i\}_{i\in I}$ 一致有界，矛盾。从而 $\forall\, n \geq 1$, Ω_n 在 E 中稠密，由 Baire 定理（定理 6.1.2），G 在 E 中稠密。 □

推论 6.2.4. 设 E 是 *Banach* 空间，F 是赋范空间，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(E,F)$, 若 $T_n \xrightarrow{p.w.} T$, 则 $T \in \mathcal{B}(E,F)$, 且

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

证明. $\forall\, x \in E$, 因 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在 F 中收敛，从而有界。由 Bnanch-Steinhaus 定理（定理 6.2.1），$\sup_n\|T_n\| < \infty$. $\forall\, x \in E$, 记

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x,$$

易知 T 是线性的，且由范数的连续性，$\forall\, x \in E$,

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\| \, .$$

故 $T \in \mathcal{B}(E, F)$, 且

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \, .$$

$\square$

推论 6.2.5. 设 E, F 是 *Banach* 空间，G 是赋范空间，$B : E \times F \to G$ 是双线性映射。若 B 对两个变量分别是连续的，则 B 在 $E \times F$ 上连续。

注记 6.2.6. 这只对双线性映射成立，对一般的函数不成立。

6.2.1 Banach-Steinhaus 定理在 Fourier 分析中的应用

定理 6.2.7. 设 f 是 2π 周期的连续函数，它的 *Fourier* 级数为

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \, \mathrm{e}^{int},$$

其中

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \, dx \in \mathbb{C}.$$

令

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \, \mathrm{e}^{ikt}$$

是部分和函数序列。记

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}},$$

称为 *Dirichlet* 核，则

$$S_n(f)(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(t-x)\frac{dx}{2\pi}.$$

则有

$$G=\left\{f\in C_{2\pi}\mid \sup_n|S_n(f)(0)|=\infty\right\}$$

是 $C_{2\pi}$ 中的稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集。

6.3 开映射定理与闭图像定理

定义 6.3.1. 称集合 A 是贫集或第一纲集，若 A 包含于某个 $\mathcal{F}_\sigma$ 集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 其中 $\forall\, n$, F_n 是闭集，且 $F_n^\circ=\varnothing$.

定理 6.3.2 (开映射定理). 设 E,F 是 *Banach* 空间，$u\in\mathcal{B}(E,F)$, 若 $u(E)$ 不是 F 中的贫集，则

1. $\exists\, r>0$, 使得 $rB_F\subset u(B_E)$, 其中 B_E,B_F 分别是 E,F 中的单位开球，且 u 是满射；
2. u 是开映射。

证明. 1: 有

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}nB_E,$$

从而

$$u(E)=\bigcup_{n=1}^{\infty}u(nB_E)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{u(nB_E)}.$$

由于 $u(E)$ 不是 F 中的贫集，故

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{u(nB_E)}\right)^\circ\neq\varnothing.$$

由于 F 是 Banach 空间，由推论 6.1.3, 它是 Baire 空间，从而存在某个 n, 使得

$$\left(\overline{u(nB_E)}\right)^\circ\neq\varnothing,$$

于是存在 $y_0 \in F$ 与 $\eta > 0$, 使得

$$B(y_0, \eta) \subset \overline{u(nB_E)},$$

由线性,

$$y_0 + \eta B_F \subset \overline{u(nB_E)},$$

从而

$$\eta B_F \subset \overline{u(nB_E)} - y_0 \subset \overline{u(nB_E)} - \overline{u(nB_E)} \subset \overline{u(2nB_E)},$$

再由线性,

$$B_F \subset \overline{u(cB_E)},$$

其中, $c = \frac{2n}{\eta}$. 从而$\underline{\forall\ y \in B_F}$, 必存在 $x_0 \in cB_E$, 使得

$$\|y - u(x_0)\|_F < \frac{1}{2}.$$

(1) 令 $y_1 = 2(y - u(x_0))$, 则 $\|y_1\|_F < 1$, 即 $y_1 \in B_F$, 从而存在 $x_1 \in cB_E$, 使得

$$\|y_1 - u(x_1)\|_F < \frac{1}{2};$$

(2) 同理, 令 $y_2 = 2(y_1 - u(x_1))$, 则 $\|y_2\|_F < 1$, 即 $y_2 \in B_F$, 从而存在 $x_2 \in cB_E$, 使得

$$\|y_2 - u(x_2)\|_F < \frac{1}{2};$$

$\cdots$

(n) 同理, 令 $y_n = 2(y_{n-1} - u(x_{n-1}))$, 则 $\|y_n\|_F < 1$, 即 $y_n \in B_F$, 从而存在 $x_n \in cB_E$, 使得

$$\|y_n - u(x_n)\|_F < \frac{1}{2};$$

$\cdots$

由此得到序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_F$ 与对应的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset cB_E$, 满足 $\forall\, n$,

$$\|y_n - u(x_n)\|_F < \frac{1}{2}.$$

从而

$$y = u(x_0) + \frac{1}{2}y_1 = u(x_0) + \frac{1}{2}\left[u(x_1) + \frac{1}{2}y_2\right] = \cdots = u(x_0) + \frac{1}{2u(x_1)} + \cdots + \frac{1}{2^n}n(x_n) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1} = u\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1},$$

其中，注意到

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}\right\|_E \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{x_k}{2^k}\right\|_E \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|x_k\|_E \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c}{2^k} = 2c$$

绝对收敛，由于 E 完备，故可设 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$ 收敛于 $x \in E$, 且

$$\|x\|_E \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|x_k\|_E \leq 2c,$$

即$\underline{x \in 2cB_E}$. 对

$$y = u\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1}$$

令 $n \to \infty$, 由于 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_F$ 有界，且 u 连续，即得

$$y = u(x).$$

故$\underline{B_F \subset u(2cB_E)}$, 取 $r = \frac{1}{2c}$, 即有 $rB_F \subset u(B_E)$. 且综上，

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_F = \bigcup_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r}rB_F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r}u(B_E) = u\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r}B_E\right) = u(E),$$

即 u 是满射。 □

推论 6.3.3 (开映射定理). 设 E, F 是 *Banach* 空间，$u \in \mathcal{B}(E,F)$ 是满射，则

1. $\exists\ r>0$, 使得 $rB_F \subset u(B_E)$;

2. u 是开映射。

定义 6.3.4. 设映射 $u: E \to F$, 称

$$G(u) = \{(x, u(x)) \mid x \in E\}$$

是 u 的图像。

定理 6.3.5 (闭图像定理)**.** 设 E, F 是 *Banach* 空间，$u: E \to F$ 是线性映射，则 u 连续，当且仅当 $G(u)$ 是闭集。

证明. 充分性：由于 E, F 都是 Banach 空间，从而乘积空间 $E \times F$ 也是 Banach 空间。容易验证 $G(u)$ 是 $E \times F$ 的向量子空间，又 $G(u)$ 是闭的，从而 $G(u)$ 也是 Banach 空间。考虑线性映射 $\Phi: G(u) \to E$

$$(x, u(x)) \mapsto x,$$

容易验证 Φ 是连续线性映射。取 $E \times F$ 上的范数为 $\|(\cdot, *)\| = \|\cdot\|_E + \|*\|_F$, 则 $\forall\ (x, u(x)) \in G(u)$,

$$\|\Phi(x, u(x))\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|u(x)\|_F = \|(x, u(x))\|,$$

即 $\|\Phi\| \leq 1$. 且容易验证 Φ 是双射。由开映射定理（推论 6.3.3），Φ 是开映射，从而 Φ^{-1} 是连续映射，从而有界，即 $\|\Phi^{-1}\| < \infty$. 则 $\forall\ x \in E$,

$$\|u(x)\|_F \leq \|x\|_E + \|u(x)\|_F = \|(x, u(x))\| = \left\|\Phi^{-1}(x)\right\| \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|x\|_E,$$

即 u 有界，从而连续。

必要性：$\forall\ \{(x_n, u(x_n))\}_{n=1}^{\infty} \subset G(u)$, 设 $(x_n, u(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$, 则 $x_n \to x$ 且 $u(x_n) \to y$. 又 u 连续，有 $u(x_n) \to u(x)$, 从而 $y = u(x)$, 从而 $(x, y) = (x, u(x)) \in G(u)$, 即 $G(u)$ 是闭集。 □

6.3.1 开映射定理在 Fourier 级数中的应用

定理 6.3.6. *Fourier* 变换 $\mathcal{F}: L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ 不是满射。

证明. 若 $\mathcal{F}$ 是满射，由于 $c_0(\mathbb{Z})$ 是 Banach 空间，由开映射定理（推论 6.3.3），$\mathcal{F}$ 是同构，从而有相同的拓扑，从而存在常数 $c > 0$，使得 $\forall f \in L^1_{2\pi}$，

$$\|f\|_{L^1_{2\pi}} \le c\,\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = c\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(k)\right|,$$

特别地，取 f 是 Dirichlet 核 D_n, 有

$$\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} \le c\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{D_n}(k)\right| = c,$$

但是事实上，$\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} = +\infty$, 矛盾。 □

6.3.2 开映射定理在补空间问题中的应用

定义 6.3.7. 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，X,Y 是 E 的向量子空间，若 $X+Y=E$ 且 $X\cap Y=\{0\}$, 则称 X,Y 在 E 中是代数互补的。

注记 6.3.8. 若 X,Y 在 E 中是代数互补的，P_X,P_Y 是对应的投影映射，则

- P_X,P_Y 都是线性的；
- $P_X^2=P_X, P_Y^2=P_Y$;
- $P_X+P_Y=I_E$.

定义 6.3.9. 设 E 是赋范空间，X,Y 是 E 中的代数互补子空间，若 P_X 是连续的（此时 $P_Y=I_E-P_X$ 也是连续的），则称 X,Y 在 E 中是拓扑互补的。

定理 6.3.10. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，X,Y 是 E 中的代数互补子空间，则以下命题等价：

1. X,Y 在 E 中拓扑互补；
2. 映射 $\Phi: X\times Y\to E$

$$(x,y)\mapsto x+y$$

是同构，其中 $X\times Y$ 上的范数是 $\|(\cdot,*)\| = \|\cdot\|+\|*\|$.

证明. <u>1 ⇒ 2</u>: 由于 X, Y 在 E 中的代数互补，容易验证 Φ 是线性双射，并且 $\forall\ (x,y) \in X \times Y$,

$$\|\Phi((x,y))\| = \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|,$$

这说明 Φ 是有界映射，从而连续。由于 X, Y 在 E 中拓扑互补，

$$\|x\| = \|P_X(x+y)\| \le \|P_X\| \cdot \|x+y\|,$$

$$\|y\| = \|P_Y(x+y)\| \le \|P_Y\| \cdot \|x+y\|,$$

从而

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \le (\|P_X\| + \|P_Y\|)\,\|x+y\|,$$

从而 Φ 是同构。

<u>2 ⇒ 1</u>:$\forall\ e = x+y \in E$, 由于 Φ 是同构，有

$$\|(x,y)\| = \left\|\Phi^{-1}(e)\right\| \le \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|x+y\|,$$

从而

$$\|P_X(e)\| = \|x\| \le \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\| \le \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|x+y\| \le \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|e\|,$$

即 P_X 有界，从而连续。 □

注记 6.3.11. 这说明，若 X, Y 在 E 中拓扑互补，则有同构:

$$E \cong X \times Y \cong X \oplus Y.$$

推论 6.3.12. 设 E 是 *Banach* 空间，X, Y 在 E 中代数互补，则 X, Y 在 E 中拓扑互补，当且仅当 X, Y 是 E 中的闭集。

证明. <u>必要性</u>：注意到，$X = \operatorname{Ker} P_Y, Y = \operatorname{Ker} P_X$, 即得。

<u>充分性</u>：由于 X, Y 都是 Banach 空间 E 的闭向量子空间，从而乘积空间 $X \times Y$ 也是 Banach 空间。又 X, Y 在 E 中代数互补，映射 $\Phi : X \times Y \to E$

$$(x,y) \mapsto x+y$$

是线性双射；$\forall\,(x,y)\in X\times Y$,

$$\|\Phi((x,y))\|=\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|,$$

从而 Φ 有界，且 $\|\Phi\|\leq 1$. 由开映射定理（推论 6.3.3），Φ^{-1} 也连续，从而 Φ 是同构，从而 X,Y 在 E 中拓扑互补。 □

定义 6.3.13. 设 E 是赋范空间，称 $X\subset E$ 是 E 的可余子空间，若存在向量子空间 $Y\subset E$, 使得 X,Y 在 E 中拓扑互补。

注记 6.3.14. 以上的讨论说明了 E 的闭向量子空间 X 是可余的，当且仅当存在一个 E 到 X 的连续线性投影算子。

注记 6.3.15. 关于可余子空间有以下结论：

1. 每一个 *Hilbert* 空间的闭向量子空间是可余子空间（由投影算子的定义（定义 *4.2.1*）即得）；
2. 若赋范空间 E 的每个闭子向量空间是可余子空间，则 E 同构于一个 *Hilbert* 空间（*Lindenstrauss-Tzafriri* 定理）；
3. 设 E 是 *Banach* 空间，则 E 的每个有限维或有限余维的向量子空间 X 是可余子空间，其中，称 X 是有限余维的，若商空间 E/X 是有限维的。

7 拓扑向量空间

7.1 定义

定义 7.1.1. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，τ 是 E 上的拓扑，若加法与数乘都连续，则称 X 是拓扑向量空间。

例 7.1.2. $C^{\infty}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $C_c^{\infty}(\Omega)$, $L^p(\Omega)(0 < p < 1)$ 都是拓扑向量空间。

定义 7.1.3. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，$A \subset X$,

1. 若 $\forall\ |\lambda| <\leq 1, \forall\ x \in A, \lambda x \in A$, 则称 A 是平衡集；
2. 若 $\forall\ x \in A, \exists\ \alpha > 0$, 使得 $\forall\ |\lambda| < \alpha, \lambda x \in A$, 则称 A 是吸收集；
3. 若 $\forall\ x \in A, -x \in A$, 且 $0 \in A$, 则称 A 是对称集。

定理 7.1.4. 设 X 是拓扑向量空间，若 $A \subset X$ 是向量子空间，则 $\overline{A}$ 也是向量子空间。

证明. 见教材 P130. □

定理 7.1.5. 设 X 是拓扑向量空间，

1. $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(0) + x$;
2. $\forall\ V \in \mathcal{N}(0), \exists\ U \in \mathcal{N}(0)$, 使得 $U + U \subset V$;
3. $\forall\ V \in \mathcal{N}(0)$, V 是吸收集；
4. $\forall\ V \in \mathcal{N}(0), \exists\ U \in \mathcal{N}(0)$ 是平衡集，$U \subset V$, 即原点 0 有平衡的开（闭）邻域基。

证明. 见教材 P131. □

定理 7.1.6. 设 E, F 是拓扑向量空间，$u : E \to F$ 是线性映射，则以下命题等价：

1. u 连续;

2. u 在 0 处连续。

若 F 是赋范空间，则 u 在 0 的某个邻域内有界。

7.2 半范数空间

定义 7.2.1. 映射 $p : E \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\forall\, x \in E$, $p(x) \geq 0$;

2. $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$;

3. $\forall\, x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,

则称 p 是一个半范数。

注记 7.2.2. 半范数与范数只差正定性。

例 7.2.3. $E = C(\Omega)$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$K \subset \Omega$ 是紧集，定义 $p_K : E \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \max_{x \in K} |f(x)|$$

是一个半范数。

定义 7.2.4. 设 p 是 E 上的一个半范数，定义拓扑 τ_p: 其中的开集为若干 p 开球

$$B_p(a, r) = \{x \in E \mid p(a, x) < r\}$$

的并。

注记 7.2.5. τ_p 是 *Hausdorff* 的，当且仅当 p 是范数。

定义 7.2.6. 设 $\{p_i\}_{i\in I}$ 是一族半范数，$J\subset I$ 是有限集，令

$$q_J=\max_{i\in J}p_i$$

也是半范数。定义拓扑 τ: 其中的开集 O 是

$$O=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha,r_\alpha),$$

其中 Λ 是某个指标集，每个 $J_\alpha\subset I$ 是有限集。验证见教材 *P135.*

8 Hahn-Banach 定理

8.1 Hahn-Banach 定理：分析形式

定义 8.1.1. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，泛函 $p: E \to \mathbb{R}$ 满足：

1. 正齐性：$\forall\, t \geq 0, \forall\, x \in E$, $p(tx) = tp(x)$;
2. 次可加性：$\forall\, x, y \in E$,
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),$$

则称 p 是 E 上的次线性泛函。

定理 8.1.2 (实的情形的 Hahn-Banach 定理的简单情形)**.** 设 E 是实向量空间，F 是 E 的余维数为 1 的向量子空间，$p: E \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函，$f: E \to \mathbb{R}$ 是线性泛函，若 $\forall\, x \in F$,
$$f(x) \leq p(x),$$
则存在线性泛函 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{R}$, 使得
$$\widetilde{f}|_F = f,$$
即可以把 f 线性延拓到 E 上，且 $\forall\, x \in E$,
$$\widetilde{f}(x) \leq p(x).$$

证明. 由于 $\operatorname{codim} F = 1$, 故存在 $x_0 \in E - F$, 使得
$$E = \operatorname{Span}\{F, x_0\} = \{x + tx_0 \mid x \in F, t \in \mathbb{R}\}.$$
设 f 有线性延拓 $\widetilde{f}$, 则 $\forall\, x \in F, t \in \mathbb{R}$,
$$\widetilde{f}(x+tx_0) = \widetilde{f}(x) + t\widetilde{f}(x_0) = f(x) + t\widetilde{f}(x_0),$$
这说明，$\widetilde{f}$ 由 $\widetilde{f}(x_0)$ 唯一确定，记 $\widetilde{f}(x_0) = a$. 只要证，存在 a, 使得 $\forall\, x \in F, t \in \mathbb{R}$,
$$f(x) + ta = f(x) + t\widetilde{f}(x_0) = \widetilde{f}(x+tx_0) \leq p(x+tx_0).$$

不妨设 $t\neq 0$, 分为 $t>0$ 与 $t<0$ 两种情况，得到不等式组:

$$\begin{cases}\frac{1}{t}f(x)+a\leq \frac{1}{t}p(x+tx_0), & t>0;\\ -\frac{1}{t}f(x)-a\leq -\frac{1}{t}p(x+tx_0), & t<0,\end{cases}$$

整理得，

$$\begin{cases}a\leq p\left(\frac{1}{t}x+x_0\right)-f\left(\frac{1}{t}x\right), & t>0;\\ a\geq f\left(-\frac{1}{t}x\right)-p\left(-\frac{1}{t}x-x_0\right), & t<0.\end{cases}$$

由于 F 是向量子空间，不等式组等价于，$\forall\ x,y\in F$,

$$f(y)-p(y-x_0)\leq a\leq p(x+x_0)-f(x),$$

从而 a 的存在性等价于，$\forall\ x,y\in F$, 不等式

$$f(y)-p(y-x_0)\leq p(x+x_0)-f(x)$$

成立，即

$$f(x)+f(y)\leq p(x+x_0)+p(y-x_0),$$

由于在 F 上，$f\leq p$, 从而

$$f(x)+f(y)\leq f(x+y)\leq p(x+y)\leq p(x+x_0)+p(y-x_0)$$

恒成立，从而这样的 a 存在，从而满足条件的延拓 $\widetilde{f}$ 存在。 □

推论 8.1.3. 用数学归纳法，可以将定理 *8.1.2*推广到 $\operatorname{codim} F$ 有限和可数的情形:

设 E 是实向量空间，F 是 E 的余维数有限或可数的向量子空间，$p:E\to\mathbb{R}$ 是次线性泛函，$f:E\to\mathbb{R}$ 是线性泛函，若 $\forall\ x\in F$,

$$f(x)\leq p(x),$$

则存在线性泛函 $\widetilde{f}:E\to\mathbb{R}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F=f,$$

即可以把 f 线性延拓到 E 上，且 $\forall\, x \in E$,

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x).$$

定理 8.1.4 (实的情形的 Hahn-Banach 定理)**.** 设 E 是实向量空间，F 是 E 的向量子空间，$p : E \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函，$f : E \to \mathbb{R}$ 是线性泛函，若 $\forall\, x \in F$,

$$f(x) \leq p(x),$$

则存在线性泛函 $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F = f,$$

即可以把 f 线性延拓到 E 上，且 $\forall\, x \in E$,

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x).$$

证明. $\operatorname{codim} F$ 不可数时的证明需要用到 Zorn 引理，见教材 P151。 □

定理 8.1.5 (Hahn-Banach 延拓)**.** 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的向量空间，F 是 E 的向量子空间，p 是 E 上的半范数，$f : F \to \mathbb{K}$ 是线性映射，且 $\forall\, x \in F$,

$$|f(x)| \leq p(x),$$

则存在线性泛函 $\widetilde{f} : E \to \mathbb{K}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F = f,$$

即可以把 f 线性延拓到 E 上，且 $\forall\, x \in E$,

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x).$$

证明. <u>实的情形</u>：在 F 上，有 $|f| \leq p$, 故也有 $f \leq p$. 由定理 8.1.4, 存在线性泛函 $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F = f,$$

且 $\forall\, x \in E$,

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x).$$

由于 p 是半范数，

$$-\widetilde{f}(x)=\widetilde{f}(-x)\leq p(-x)=|-1|\cdot p(x)=p(x),$$

从而，

$$-p(x)\leq f(x)\leq p(x),$$

即

$$\left|\widetilde{f}(x)\right|\leq p(x).$$

复的情形：此时，$f=\operatorname{Re}f+\mathrm{i}\operatorname{Im}f$. 记 $\varphi=\operatorname{Re}f$, 则 $\varphi:F\to\mathbb{R}$ 是实线性泛函，由 f 的线性性，

$$f(\mathrm{i}\,x)=\mathrm{i}\,f(x)=\mathrm{i}[\operatorname{Re}f(x)+\mathrm{i}\operatorname{Im}f(x)]=-\operatorname{Im}f(x)+\mathrm{i}\operatorname{Re}f(x),$$

即

$$-\operatorname{Im}f(x)=\operatorname{Re}f(\mathrm{i}\,x)=\varphi(\mathrm{i}\,x),$$

从而 f 由它的实部 φ 唯一确定，即

$$f(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\,\varphi(\mathrm{i}\,x),$$

并且在 F 上有 $|\varphi|\leq|f|\leq p$. 此时，E,F 可以看成实向量空间，由实的情形的结论，存在实线性泛函 $\widetilde{\varphi}:E\to\mathbb{R}$, 使得 $|\widetilde{\varphi}|\leq p$ 且 $\widetilde{\varphi}|_F=\varphi$. 定义泛函 $\widetilde{f}:E\to\mathbb{C}$

$$\widetilde{f}(x)=\widetilde{\varphi}(x)-\mathrm{i}\,\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\,x),$$

容易验证，$\widetilde{f}$ 是 E 上的复线性泛函，并且 $\forall\,x\in F$, $\mathrm{i}\,x\in F$, 故

$$\widetilde{f}(x)=\widetilde{\varphi}(x)-\mathrm{i}\,\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\,x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\,\varphi(\mathrm{i}\,x)=f(x),$$

即 $\widetilde{f}|_F=f$. 另一方面，$\forall\,x\in E$, 令 $\lambda=\operatorname{sgn}\widetilde{f}(x)$, 则 $|\lambda|=1$, 由于 $\widetilde{\varphi}$ 是实线性泛函以及 p 是半范数，

$$\left|\widetilde{f}(x)\right|=\lambda\widetilde{f}(x)=\widetilde{f}(\lambda x)=\widetilde{\varphi}(\lambda x)-\mathrm{i}\,\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\,\lambda x),$$

其中，$\widetilde{\varphi}(\lambda x)$ 与 $\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\,\lambda x)$ 都是实数，而等式最左边也是实数，从而 $\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\,\lambda x)=0$, 从而，

$$\left|\widetilde{f}(x)\right|=\widetilde{\varphi}(\lambda x)-\mathrm{i}\,\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\,\lambda x)=\widetilde{\varphi}(\lambda x)\leq p(\lambda x)=|\lambda|\cdot p(x)=p(x),$$

即在 E 上，$\left|\widetilde{f}\right|\leq p$. □

推论 8.1.6. 设 E 是拓扑向量空间，p 是 E 上的半范数，$\forall\, x_0\in E$, 存在 $f\in E^*$, 使得 $f(x_0)=p(x_0)$, 且在 E 上，$|f|\leq p$.

证明. 取 $F=\mathbb{K}x_0$, $g:F\to\mathbb{K}$

$$tx_0\mapsto tp(x_0),$$

应用 Hahn-Banach 延拓定理（定理 8.1.5）即得。 □

推论 8.1.7. 设 E 是 *Hausdorff* 的局部凸空间，则 E^* 是可分点的，即 $\forall\, 0\neq x_0\in E$, 存在 $f\in E^*$, 使得 $f(x_0)\neq 0$.

证明. 取半范数 p, 使得 $p(x_0)\neq 0$, 由推论 8.1.6即得。 □

推论 8.1.8. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$（$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上的赋范空间，F 是 E 的向量子空间，$f:F\to\mathbb{K}$ 是连续线性泛函，则存在连续线性延拓 $\widetilde{f}:E\to\mathbb{K}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F=f,$$

且

$$\left\|\widetilde{f}\right\|=\|f\|,$$

称为 f 的保范延拓。

推论 8.1.9. 设 E 是赋范空间，则 $\forall\, x\in E$, 有

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|\mid f\in E^*,\|f\|\leq 1\},$$

并且上确界是可以达到的。

8.2 Hahn-Banach 定理：几何形式

定义 8.2.1 (水平集)**.** 对映射 $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $\{x \in E \mid \varphi(x) = c\}$ 称为一个水平集。

定理 8.2.2 (第一几何形式：Hahn-Banach 隔离定理)**.** 设 E 是拓扑向量空间，A, B 是 E 的非空凸子集，$A \cap B = \varphi$. 若 A 是开集，则存在 $f \in E^*$ 与 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得

$$A \subset \{\operatorname{Re} f < \alpha\}, B \subset \{\operatorname{Re} f \geq \alpha\},$$

这等价于，$\forall\, a \in A, \forall\, b \in B,$

$$\operatorname{Re} f(a) < \alpha \leq \operatorname{Re} f(b).$$

证明. 先考虑实的情形：设 $a \in A, b \in B$, 记 $x_0 = b - a$, 令 $C = A - B + x_0$, 则

1. 由于 A, B 是凸集，则 C 也是凸集；

2. C 是开集，这是因为，它是如下开集 A 经过平移的集合（还是开集）的并：

$$C = \bigcup_{y \in B} (A + x_0 - y);$$

3. $0 \in C$;

4. 由于 $A \cap B = \varphi$, $x_0 \notin C$.

设 p 是由 C 确定的 Minkowski 泛函，即 $\forall\, x \in E$,

$$p(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in C\right\},$$

则

1. p 是次线性泛函；

2. $\forall\, x \in E$, $p(x) < 1$, 当且仅当 $x \in C$;

3. $p(x_0) \geq 1$;

4. p 连续。

由推论 8.1.6, 存在连续线性泛函 $f : E \to \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = p(x_0)$, 且在 E 上有 $f \leq p$, 从而

$$f(a) - f(b) + f(x_0) = f(a - b + x_0) = f(0) \leq p(0) < 1.$$

由于 $f(x_0) = p(x_0) \geq 1$, 必有 $f(a) < f(b)$, 由 a, b 的任意性,

$$\sup f(A) \leq \inf f(B).$$

由于 A, B 都是凸集，f 是线性泛函，则 $f(A), f(B)$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的凸集，从而是区间。另一方面，由 A 是开集以及 f 是线性，$f(A)$ 也是开集，从而 $f(A)$ 是一个开区间。事实上，取 $x \in A$, 由于 A 是开集，存在 $\delta > 0$, 使得 $|t| < \delta$ 时，有 $x + tx_0 \in A$, 从而

$$f(x + tx_0) = f(x) + tf(x_0) \in f(A).$$

又注意到，$f(x_0) = p(x_0) > 0$, 则 $(f(x) - \delta f(x_0), f(x) + \delta f(x_0))$ 是非空区间，且

$$(f(x) - \delta f(x_0), f(x) + \delta f(x_0)) \subset f(A),$$

从而 $f(A)$ 是开集，从而是开区间。不妨设 $f(A) = (\beta, \alpha)$, 则

$$\alpha = \sup f(A) \leq \inf f(B),$$

从而 $A \subset \{f < \alpha\}$ 且 $B \subset \{f \geq \alpha\}$.

复的情形：先把 E 看成实向量空间，由实的情形的证明，存在连续实线性泛函 $\varphi : E \to \mathbb{R}$ 与实常数 α, 使得 $A \subset \{\varphi < \alpha\}$ 且 $B \subset \{\varphi \geq \alpha\}$, 令

$$f(x) = \varphi(x) - \mathrm{i}\,\varphi(\mathrm{i}\,x)$$

即为所求。 $\square$

注记 8.2.3. 直观解释是，存在超平面 $\{x \in E \mid \varphi(x) = \alpha\}$, 将 A, B 隔离开。

定理 8.2.4 (第二几何形式：Hahn-Banach 严格隔离定理)**.** 设 E 是 *Hausdorff* 的局部凸空间，A, B 是 E 的非空凸子集，$A \cap B = \varphi$. 若 A 是紧集，B 是闭集，则存在 $f \in E^*$ 与 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得

$$\sup \operatorname{Re} f(A) < \alpha < \beta < \inf \operatorname{Re} f(B).$$

证明. 设 $x \in A$, 则 $x \notin B$. 由于 E 是 Hausdorff 的局部凸空间，且 B 是闭集，从而存在开凸集 $U_x \in \mathcal{N}(0)$, 使得

$$(x + U_x + U_x) \cap B = \varnothing.$$

由于 A 是 E 中的紧集，则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$, 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U_{x_k}).$$

记 $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{x_k}$, 则 U 也是含有原点的开凸集。令 $\widetilde{A} = A + U$, 则

1. $\widetilde{A}$ 是开凸集；

2. $\widetilde{A} \cap B = \varnothing$. 具体地，$\forall\, \widetilde{a} \in \widetilde{A}$, 可设 $\widetilde{a} = a + u$, 其中 $a \in A, u \in U$. 又由 $A \subset \bigcup_{k=1}^{n}(x_k + U_{x_k})$, 存在 $1 \leq k \leq n$, 使得 $a \in x_k + U_{x_k}$, 从而

$$\widetilde{a} \in x_k + U_{x_k} + U \subset x_k + U_{x_k} + U_{x_k},$$

   由 $(x + U_x + U_x) \cap B = \varnothing$ 知，$\widetilde{a} \notin B$.

由定理 8.2.2, 存在 $f \in E^*$ 与实常数 r, 使得 $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B$, 有 $\operatorname{Re} f(a) < r$ 且 $\operatorname{Re} f(b) \geq r$. 由于 A 是紧凸集，且 f 是连续线性泛函，从而 $\operatorname{Re} f(A)$ 也是紧凸集，从而是闭区间，设为 $[r_1, r_2]$, 有 $r_1 \leq r_2 < r$. 此时，存在实数 α, β, 使得 $r_2 < \alpha < \beta < r$, 从而

$$\sup \operatorname{Re} f(A) \leq r_2 < \alpha < \beta < r \leq \inf \operatorname{Re} f(B),$$

即证。 □

注记 8.2.5. 直观解释是，存在超平面 $\{x \in E \mid \varphi(x) = \gamma\}$, 将 A, B 严格隔离开。

推论 8.2.6. 设 E 是 *Hausdorff* 的局部凸空间，B 是一个平衡的 (定义 *7.1.3*) 闭凸集，而 $x_0 \in E - B$, 则存在 $f \in E^*$, 使得 $f(x_0) > 1$ 且 $\sup_{x\in B} |f(x)| \leq 1$.

推论 8.2.7. 设 E 是 *Hausdorff* 的局部凸空间，F 是 E 的向量子空间，则 F 在 E 中稠密，当且仅当 $\forall\ f \in E^*$, 若 $f|_F = 0$, 则 $f \equiv 0$.

推论 8.2.8. 设 E 是 *Hausdorff* 的局部凸空间，则 E^* 是可分点的 (定义 *5.2.1*)。

推论 8.2.9 (Mazur)**.** 设 E 是向量空间，τ_1, τ_2 是 E 上的两个 *Hausdorff* 拓扑，使得 $(E, \tau_1), (E, \tau_2)$ 都是局部凸空间。如果对任意线性泛函 $f : E \to \mathbb{K}$, 它的 τ_1-连续等价于 τ_2-连续，即

$$(E, \tau_1)^* = (E, \tau_2)^*,$$

则 E 中的任意凸集 A 是 τ_1-闭的，当且仅当 A 是 τ_2-闭的。因此，若 A 是 E 中凸集，则 $\overline{A}^{\tau_1} = \overline{A}^{\tau_2}$.

8.3 弱拓扑与弱 * 拓扑

定义 8.3.1 (弱拓扑)**.** 设 E 是赋范空间，E 上的弱拓扑记为 $\sigma(E, E^*)$, 定义为：$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$,

$$x_n \xrightarrow{\sigma(E,E^*)} x$$

是指，$\forall\ f \in E^*$,

$$f(x_n) \to f(x),$$

称为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 弱收敛于 x, 记为 $x_n \rightharpoonup x$.

注记 8.3.2. 强收敛一定弱收敛，这是因为，

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\|.$$

定义 8.3.3 (弱 * 拓扑). 设 E 是赋范空间，E^* 也是赋范空间（取极大范数），从而有 E^{**}. E^* 上的弱 * 拓扑记为 $\sigma(E^*,E)$, 定义为：$\forall\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$,

$$f_n \overset{\sigma(E^*,E)}{\longrightarrow} f$$

是指，$\forall\ x \in E$,

$$x(f_n) = \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle = x(f),$$

称为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱 * 收敛于 f, 记为 $f_n \overset{w^*}{\to} f$.

注记 8.3.4. 取 $\sigma(E^*,E^{**})$ 是 E^* 上的弱拓扑，事实上有 $E \subset E^{**}$: $\forall\ x \in E, \forall\ f \in E^*$,

$$x(f) = \langle f, x\rangle,$$

有

$$|x(f)| = |\langle f, x\rangle| \leq \|f\| \cdot \|x\|,$$

从而弱 * 拓扑 $\sigma(E^*,E)$ 比弱拓扑 $\sigma(E^*,E^{**})$ 更弱。

定义 8.3.5. 一般情形，设 X 是一个集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ 是一族拓扑空间，$\varphi_i : X \to Y_i$ 是一族映射，解决以下两个问题：

1. 在 X 上构造一个拓扑，使得 $\forall\ i \in I$, φ_i 连续，并寻找 X 上满足条件的最弱的拓扑 $\mathcal{F}$;

2. X 是一个拓扑空间，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族子集，构造由 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 生成的最弱的拓扑。

对 $(E, \sigma(E,E^*))$, $\forall\ i \in I$, $Y_i = \mathbb{R}$, $\varphi_i \in E^*$, 则 $\forall\ x \in X$,

$$\bigcap_{\substack{i\in J \\ J\subset I\ \text{有限}}} \varphi_i^{-1}(V_i)$$

构成 x 的邻域基，其中 V_i 是 $\varphi_i(x)$ 在 Y_i 中的邻域。

命题 8.3.6. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的点列，则 $x_n \overset{\mathcal{F}}{\to} x$, 当且仅当 $\forall\ i \in I$, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$.

证明. 必要性：由 $\mathcal{F}$ 的定义，$\forall\, i \in I$, φ_i 连续，即得。

充分性：$\forall\, U \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x)$, 总能设 $U = \bigcap_{\substack{i \in J \\ J \subset I \text{ 有限}}} \varphi_i^{-1}(V_i)$, 其其中 V_i 是 $\varphi_i(x)$ 在 Y_i 中的邻域。$\forall\, i \in J$, 由 $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ 知，存在正整数 N_i, 使得 $\forall\, n \geq N_i$, 有 $\varphi_i(x_n) \in V_i$. 从而 $\forall\, n \geq \max_{i \in J} N_i$, 有 $x_n \in U$, 即 $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$. □

命题 8.3.7. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是无穷维 *Banach* 空间，E 上还有弱拓扑 $\sigma(E, E^*)$, 令 $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, 则

$$\overline{S}^w = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\} = B_E.$$

证明. 需要证明

1. $\forall\, x_0 \in E$, $\|x_0\| \leq 1$, 有 $x_0 \in \overline{S}^w$;

2. B_E 关于弱拓扑 $\sigma(E, E^*)$ 是闭的。

1: 由定义 8.3.5, $\forall\, V \in \mathcal{N}(x_0)$, V 可以写成

$$V = \{x \in E \mid |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall\, 1 \leq i \leq n, \varepsilon > 0, f_i \in E^*\}.$$

取 $0 \neq y_0 \in E$, 使得 $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\langle f_i, y_0\rangle = 0$. 首先，$y_0$ 一定存在，否则，令 $\psi : E \to \mathbb{K}^n$

$$z \mapsto (\langle f_1, z\rangle, \langle f_2, z\rangle, \cdots, \langle f_n, z\rangle),$$

则 ψ 是单射，从而 $\psi : E \to \psi(E) \subset \mathbb{K}^n$, 这说明 E 是有限维的，矛盾。令 $g(t) = \|x_0 + t y_0\|, t \geq 0$ 是连续函数，$g(0) = \|x_0\| \leq 1$. 若 $\|x_0\| = 1$, 则 $x_0 \in S \subset B_E = \overline{S}^w$, 于是不妨设 $\|x_0\| < 1$, 并且由于 $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, 从而存在 $t_0 > 0$, 使得 $g(t_0) = \|x_0 + t_0 y_0\| = 1$, 即有 $x_0 + t_0 y_0 \in S$. 又 $\forall\, 1 \leq i \leq n$,

$$|\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0\rangle| = |t_0 \langle f_i, y_0\rangle| = 0,$$

从而 $x_0 + t_0 y_0 \in V$, 从而 $S \cap V \neq \varnothing$, 从而 $x_0 \in \overline{S}^w$.

2: 我们证明一个更强的结论：对凸集 $C \subset E$, 若它是强拓扑中的闭集，则它在 $\sigma(E, E^*)$ 是弱闭的。即证 C^c 在 $\sigma(E, E^*)$ 是弱开的。取 $x_0 \notin C$, 由 Hahn-Banach 定理（定理 8.2.4），存在闭超平面严格隔离开 $\{x_0\}$ 与 C, 即存在 $f \in E^*$ 与实数 α, 使得 $\forall\, y \in C$,

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle.$$

令 $V = \{x \in E \mid \langle f, x\rangle < \alpha\}$, 则 $x_0 \in V$, 它是弱拓扑 $\sigma(E, E^*)$ 下 x_0 的邻域，且 $V \cap C = \varnothing$, 即 $V \subset C^c$, 从而 C^c 是弱开的。 □

注记 8.3.8. 若 $(E, \|\cdot\|)$ 是有限维 *Banach* 空间，则 $(E, \|\cdot\|) = (E, \sigma(E, E^*))$.

命题 8.3.9. 一些实用的结论：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, 则

1. 若 $x_n \rightharpoonup x$, 则 $\forall\ f \in E^*$, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$;
2. 若 $x_n \to x$, 则 $x_n \rightharpoonup x$;
3. 若 $x_n \rightharpoonup x$, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致有界，且 $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$;
4. 若 $x_n \rightharpoonup x$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$ 强收敛于 f: $f_n \to f$, 则 $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

定义 8.3.10 (极集)**.** 设 E 是 *Hausdorff* 的局部凸空间，$A \subset E$, 称 E^* 中的子集

$$A^\circ = \{x^* \in E^* \mid \forall\ x \in A, |x^*(x)| \leq 1\}$$

为 A 的极集；$B \subset E^*$, 称 E 中的子集

$$B^\circ = \{x \in E \mid \forall\ x^* \in B, |\langle x^*, x \rangle| \leq 1\}$$

为 B 的极集。

命题 8.3.11. 极集 A° 是凸的，平衡的（定义 *7.1.3*），弱 * 闭的；极集 B° 是凸的，平衡的，弱闭的。

注记 8.3.12. 在下一章我们将知道，$A^\circ = A^\perp = \{x^* \in E^* \mid \forall\ x \in A, x^*(x) = 0\}$.

9 Banach 空间的对偶理论

9.1 共轭算子

定理 9.1.1. 设 E, F 是赋范空间，$u \in \mathcal{B}(E, F)$, 则存在唯一 $u^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$, 使得对任意 $x \in E$ 与 $f^* \in F^*$, 有

$$\langle u^*(f^*), x\rangle = \langle f^*, u(x)\rangle,$$

并且 $\|u^*\| = \|u\|$, 称 u^* 是 u 的共轭算子。

证明. <u>存在性</u>：定义 $u^* : F^* \to E^*$

$$u^*(f^*) = f^* \circ u,$$

则 $\forall\, x \in E$,

$$\langle u^*(f^*), x\rangle = f^* \circ u(x) = f^*(u(x)) = \langle f^*, u(x)\rangle.$$

由于 u 与 f^* 都是连续线性的，从而 $u^*(f^*) = f^* \circ u$ 是线性的。又

$$\|u^*(f^*)\|_{E^*} = \|f^* \circ u\|_{E^*} \le \|f^*\|_{F^*} \cdot \|u\|_{\mathcal{B}(E,F)},$$

即 U^* 有界，从而连续，故 $u^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$; 还能得到 $\|u^*\| \le \|u\|$.

<u>唯一性</u>：若有 $v^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$, 使得对任意 $x \in E$ 与 $f^* \in E^*$, 也有

$$\langle v^*(f^*), x\rangle = \langle f^*, u(x)\rangle,$$

就有

$$\langle v^*(f^*), x\rangle = \langle f^*, u(x)\rangle = \langle u^*(f^*), x\rangle,$$

由 x 的任意性，

$$v^*(f^*) = u^*(f^*).$$

再由 f^* 的任意性，

$$v^* = u^*.$$

最后，由范数的定义，

$$\|u^*\| = \sup_{f^*\in F^*, \|f^*\|\le 1} \|u^*(f^*)\| = \sup_{f^*\in F^*, \|f^*\|\le 1} \sup_{x\in E, \|x\|\le 1} |u^*(f^*)(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|\le 1} \sup_{f^*\in F^*, \|f^*\|\le 1} |f^*(u(x))|,$$

再由推论 8.1.9,

$$\|u^*\| = \sup_{x\in E, \|x\|\le 1} \sup_{f^*\in F^*, \|f^*\|\le 1} |f^*(u(x))| = \sup_{x\in E, \|x\|\le 1} \|u(x)\| = \|u\|.$$

□

注记 9.1.2. 注意“共轭”一词在 *Hilbert* 空间（第四章）与 *Banach* 空间中有区别：当数域为 $\mathbb{R}$ 时，二者一样；当数域为 $\mathbb{C}$ 时，映射 $u \mapsto u^*$ 在 *Hilbert* 空间中是“共轭线性”的，在 *Banach* 空间中是“线性”的。

定理 9.1.3. 设 E, F 是赋范空间，$u \in \mathcal{B}(E, F)$, 则

1. 若 u 是同构，则 u^* 也是同构，且 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$;
2. 若 E 完备，则当 u^* 是同构时，u 也是同构。

9.2 子空间和商空间的对偶

定义 9.2.1 (商空间). 设 E 是数域 $\mathcal{K}$ 上的赋范空间，F 是 E 的闭向量子空间，在 E 上定义等价关系 $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F.$$

记 E/F 是在等价关系 $\sim$ 下等价类的集合，则 E 上的线性结构可以自然继承到 E/F 上：$\forall\, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in E/F, \forall\, \lambda \in \mathcal{K}$, 定义

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x+y},$$

$$\lambda\widetilde{x}=\widetilde{\lambda x}.$$

容易验证，该定义是合理的，即不依赖于等价类的代表元的选取。此时，E/F 是一个向量空间，称为 E 关于 F 的商空间。在商空间 E/F 上定义范数：$\forall\ \widetilde{x}\in E/F$,

$$\|\widetilde{x}\|_{E/F}=\inf\{\|y\|\mid y\sim x\}=\inf\{\|x+y\|\mid y\in F\},$$

F 是闭的保证了定义的合理性，具体地，若 $\|\widetilde{x}\|_{E/F}=0$, 则存在 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F$, 使得 $x+y_n\to 0$, 即 $-y_n\to x$. 由于 F 是闭集，从而 $x\in F$, 即有 $\widetilde{x}=0$. 正齐性与三角不等式是容易验证的。

定义 9.2.2 (零化子空间)**.** 设 E 是赋范空间，F 是 E 的向量子空间，G 是 E^* 的向量子空间，令

$$F^{\perp}=\{x^*\in E^*\mid\forall\ x\in F,\langle x^*,x\rangle\},$$

$$G_{\perp}=\{x\in E\mid\forall\ x^*\in G,\langle x^*,x\rangle\},$$

称 $F^{\perp}$ 是 F 的零化子空间，$G_{\perp}$ 是 G 的预零化子空间。

定义 9.2.3. 记

$$\pi:E\to E/F,$$
$$x\mapsto\widetilde{x}$$

是商映射。由商空间及其范数的定义，π 是满射，$\|\pi\|\le 1$, $\operatorname{Ker}\pi=F$. 并且，$\forall\,\varepsilon>0,\widetilde{x}\in E/F$, 有代表元 $x\in E$, 使得 $\|x\|\le(1+\varepsilon)\,\|\widetilde{x}\|$.

$\forall\ \varphi\in(E/F)^*$, 有 $\varphi(\pi(F))=0$, 即有 $\varphi\circ\pi\in F^{\perp}$, 从而可以定义线性映射

$$\nu:(E/F)^*\to F^{\perp}\subset E^*,$$
$$\varphi\mapsto\varphi\circ\pi,$$

则 ν 是 π 的共轭算子，即有

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\nu(\varphi)=\varphi\circ\pi"] & \\ E/F \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

定理 9.2.4. 映射 $\nu : (E/F)^* \to F^\perp$ 是等距同构，即有

$$(E/F)^* \cong F^\perp,$$

也就是说，商空间 E/F 的对偶空间是 E 的对偶空间的子空间。

证明. ν 是线性等距，从而是单射：由 ν 的定义（定义 9.2.3），由于 ν 是 π 的共轭，则 $\|\nu\| = \|\pi\| \le 1$, 从而 $\forall\ \varphi \in (E/F)^*$, $\|\nu(\varphi)\| \le \|\nu\| \cdot \|\varphi\| \le \|\varphi\|$. 又 $\forall\ \widetilde{x} \in E/F$,

$$|\varphi(\widetilde{x})| = |\varphi(\pi(x))| = |\langle \varphi, \pi(x)\rangle| = |\langle \nu(\varphi), x\rangle| \le \|\nu(\varphi)\| \cdot \|x\|\,,$$

其中，x 是 $\widetilde{x}$ 的代表元。对 $\widetilde{x}$ 的所有代表元取下届，则

$$|\varphi(\widetilde{x})| \le \inf_{y\in E, \widetilde{y}=\widetilde{x}} \|\nu(\varphi)\| \cdot \|y\| = \|\nu(\varphi)\| \cdot \inf_{y\in E, \widetilde{y}=\widetilde{x}} \|\nu(\varphi)\| = \|\nu(\varphi)\| \cdot \|\widetilde{x}\|\,,$$

即得 $\|\varphi\| \le \|\nu(\varphi)\|$. 综上，$\|\nu(\varphi)\| = \|\varphi\|$, 即 ν 是线性等距，自然是单射。

ν 是满射：$\forall\ f \in F^\perp$, $\forall\ \widetilde{x} \in E/F$, 定义 E/F 上的泛函

$$\begin{aligned} \varphi : E/F &\to \mathbb{K} \\ \widetilde{x} &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

其中，x 是 $\widetilde{x}$ 的一个代表元。要验证 φ 是良定义的：若 x' 是 $\widetilde{x}$ 的另一个代表元，则 $x - x' \in F$; 又由于 $f \in F^\perp$, 有 $f(x-x') = 0$, 即 $f(x) = f(x')$. 还容易验证 φ 是线性的，并且，

$$|\varphi(\widetilde{x})| = |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|\,,$$

对 $\widetilde{x}$ 的所有代表元取下届，即有 $|\varphi(\widetilde{x})| \le \|f\| \cdot \|\widetilde{x}\|$, 从而 φ 是有界线性映射，从而连续，即 $\varphi \in (E/F)^*$, 而且 $\forall\ x \in E$,

$$\varphi \circ \pi(x) = \varphi(\widetilde{x}) = f(x),$$

由 ν 的定义，$\nu(\varphi) = \varphi \circ \pi = f$, 即 ν 是满射。 □

定义 9.2.5. 定义映射 $\sigma : E^*/F^\perp \to F^*$: $\forall\, \widetilde{\varphi} \in E^*/F^\perp$, 令

$$\begin{aligned}\sigma(\widetilde{\varphi}) : F &\to \mathbb{K}\\ x &\mapsto \varphi(x),\end{aligned}$$

其中，φ 是 $\widetilde{\varphi}$ 的代表元。事实上，$\sigma(\widetilde{\varphi}) = \varphi|_F$. 容易验证，定义与 $\widetilde{\varphi}$ 的代表元的选取无关，从而 σ 是良定义的；还容易验证它是线性的，而且，

$$|\sigma(\widetilde{\varphi})(x)| = |\varphi(x)| \le \|\varphi\| \cdot \|x\|,$$

对 $\widetilde{\varphi}$ 的代表元取下确界，有

$$|\sigma(\widetilde{\varphi})(x)| \le \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp} \cdot \|x\|,$$

从而 $\sigma(\widetilde{\varphi})$ 有界，从而它是 F 上的连续线性泛函，即 $\sigma(\widetilde{\varphi}) \in F^*$, 并且

$$\|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*} \le \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp}.$$

由此，我们得到连续线性映射

$$\begin{aligned}\sigma : E^*/F^\perp &\to F^*,\\ \widetilde{\varphi} &\mapsto f = \varphi|_F.\end{aligned}$$

定理 9.2.6. 映射 $\sigma : E^*/F^\perp \to F^*$ 是等距同构，从而，

$$F^* \cong E^*/F^\perp,$$

也就是说，E 的子空间 F 的对偶空间是 E^* 关于 $F^\perp$ 的商空间。

证明. 由 σ 的定义（定义 9.2.5），σ 是连续线性映射。

σ 是线性等距，从而是单射：$\forall\, \widetilde{\varphi} \in E^*/F^\perp$, 记 $f = \sigma(\widetilde{\varphi}) \in F^*$, 由 Hahn-Banach 延拓定理（推论 8.1.8），存在延拓 $f' \in E^*$, 使得 $f'|_F = f$, 且 $\|f'\|_{E^*} = \|f\|_{F^*}$. 其中，$f'|_F = f = \sigma(\widetilde{\varphi}) = \varphi|_F$ 意味着 $f' - \varphi \in F^\perp$, 即 f' 与 φ 在同一个等价类 $\widetilde{\varphi}$ 中，由商空间的定义（定义 9.2.1），

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp} = \inf_{y \in E^*, \widetilde{y} = \widetilde{\varphi}} \|\widetilde{y}\|_{E^*} \le \|f'\|_{E^*} = \|f\|_{F^*} = \|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*}.$$

再由 σ 的定义（定义 9.2.5），

$$\|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*} \leq \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp},$$

综上，

$$\|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*} = \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp},$$

即 σ 是线性等距，从而是单射。

$\underline{\sigma\text{ 是满射}}$：$\forall f \in F^*$, 由 Hahn-Banach 延拓定理（推论 8.1.8），$f \in F^*$ 可以保范延拓成 $\psi \in E^*$. 令 $\widetilde{\psi} = \psi + F^\perp$, 则 $\widetilde{\psi}$ 是商空间 $E^*/F^\perp$ 中的一个等价类，ψ 是它的一个代表元，从而由 σ 的定义（定义 9.2.5），

$$\sigma(\widetilde{\psi}) = \psi|_F = f,$$

即 σ 是满射。 □

定理 9.2.7. 设 E, F 是赋范空间，$u \in \mathcal{B}(E,F)$, 则

1. $\operatorname{Ker} u^* = u(E)^\perp$;
2. $\operatorname{Ker} u = u^*(F^*)_\perp$;
3. $(\operatorname{Ker} u^*)_\perp = \overline{u(E)}^w = \overline{u(E)}^{\|\cdot\|}$;
4. $(\operatorname{Ker} u)^\perp = \overline{u^*(F^*)}^{w^*}$.

推论 9.2.8. 设 E, F 是赋范空间，$u \in \mathcal{B}(E,F)$, 则

1. u^* 是单射，当且仅当 $u(E)$ 在 F 中稠密；
2. u 是单射，当且仅当 $u^*(F^*)$ 在 E^* 中弱 * 稠密。

9.3 自反性

定义 9.3.1. 设 E 是赋范空间，称映射

$$\begin{aligned}\iota_E : E &\to E^{**} \\ x &\mapsto \widehat{x}\end{aligned}$$

是自然嵌入算子，其中，$\widehat{x} \in E^{**}$ 定义为：$\forall\, x^* \in E^*$, 有

$$\langle \widehat{x}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle .$$

由定义立得，

$$\|\widehat{x}\|_{E^{**}} = \sup_{0 \neq x^* \in E^*} \frac{|\langle \widehat{x}, x^* \rangle|}{\|x^*\|} = \sup_{0 \neq x^* \in E^*} \frac{|\langle x^*, x \rangle|}{\|x^*\|} \leq \sup_{0 \neq x^* \in E^*} \frac{\|x^*\| \cdot \|x\|}{\|x^*\|} = \|x\| .$$

再由 *Hahn-Banach* 定理（推论 *8.1.9*），

$$\|\widehat{x}\|_{E^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{E^*} \leq 1} |\langle x^*, x \rangle| = \|x\| .$$

从而 ι_E 是从 E 到 E^{**} 的子空间的等距同构。此时，将 x 与 $\widehat{x}$ 可以看成同一个元素，从而把 E 看成 E^{**} 的子空间，记为 $E \hookrightarrow E^{**}$, 称为 E 到 E^{**} 的自然嵌入。

定义 9.3.2 (自反空间)**.** 若在自然嵌入的意义下有 $E = E^{**}$, 则称 E 是自反空间。

例 9.3.3.

- 有限维空间，*Hilbert* 空间是自反空间；
- c_0（定理 *5.2.12*），l^∞, $L^\infty(0,1)$, $C([0,1])$ 不是自反空间。

定理 9.3.4. *Banach* 空间是自反空间，当且仅当它的对偶空间也是自反空间。

证明. <u>必要性</u>：设 E 是自反的 Banach 空间，则 $E = E^{**}$, 从而

$$E^* = (E^{**})^* = (E^*)^{**},$$

即 E^* 是自反空间。

充分性：设 E^* 是自反空间，有

$$E^* = (E^*)^{**} = E^{***} = (E^{**})^*.$$

故 $\forall\, \varphi \in (E^{**})^*$, 满足 $\varphi|_E = 0$, 则在 E^{**} 上，$\varphi = 0$. 由 Hahn-Banach 延拓定理（推论 8.2.7），E 在 E^{**} 中稠密，即 $\overline{E} = E^{**}$. 而 E 是 Banach 空间，从而完备，从而 E 是 E^{**} 中的闭集，从而 $E = \overline{E} = E^{**}$, 即 E 是自反空间。 □

定理 9.3.5. 设 E 是自反空间，F 是 E 的闭子空间，则 F 与 E/F 都是自反空间。

9.4 弱 * 紧性

定理 9.4.1 (Banach-Alaoglu)**.** 设 E 是赋范空间，则 $(\overline{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E))$ 是紧的，即 E^* 中的闭单位球 $\overline{B}_{E^*}$ 是弱 * 紧的。

证明. 首先，注意到，由线性，E^* 中的元素由它们在 E 的闭单位球 $\overline{B}_E$ 上的取值唯一决定：$\forall\, f \in E^*, \forall\, x \in E$,

$$f(x) = f\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right),$$

其中，$\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}_E$. 由此，可以把 E^* 中的元素看成 E 的闭单位球 $\overline{B}_E$ 上的函数，则

$$\overline{B}_{E^*} = \{x^* \in E^* \mid \|x^*\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |x^*(x)| \leq 1\} = \{x^* \in E^* \mid \forall\, x \in \overline{B}_E, |x^*(x)| \leq 1\},$$

从而作为 $\overline{B}_E$ 上的函数，$\overline{B}_{E^*}$ 中的元素取值于 $\mathbb{K}$ 的闭单位球 $\overline{B}_{\mathbb{K}}$ 中，记 $K = \overline{B}_{\mathbb{K}}$, 即 $\forall\, x^* \in \overline{B}_{E^*}$, 有 $x^*|_{\overline{B}_E} : \overline{B}_E \to K$, 从而，$\overline{B}_{E^*}$ 成为 $K^{\overline{B}_E}$ 的子集。

综上，$(\overline{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E))$ 上的拓扑由 $K^{\overline{B}_E}$ 上的乘积拓扑诱导。

由于 K 是紧集，由 Tychonoff 定理（性质 1.4.3），$K^{\overline{B}_E}$ 也是紧的。由于紧空间的闭子集是紧的（性质 2.5.2），只要证 $\overline{B}_{E^*}$ 是 $K^{\overline{B}_E}$ 中的闭集。

断言：若 $\varphi \in \overline{B}_{E^*}$, 则 φ 是 $\overline{B}_E$ 上的线性映射；反过来，若 $\psi : \overline{B}_E \to K$ 满足线性性，则 ψ 课延拓为 E 上的连续线性泛函。事实上，$\forall\, x \in E$, 取 $\lambda = \|x\|_E$, 即有 $\frac{x}{\lambda} \in \overline{B}_E$, 令

$$\varphi(x) = \lambda \cdot \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

容易验证 $\varphi|_{\overline{B}_E} = \psi$ 以及 φ 是线性的。由 $\varphi|_{\overline{B}_E} = \psi \in \overline{B}_{E^*}$, 从而 $\varphi \in \overline{B}_{E^*}$.

由以上断言，设 $\psi \in K^{\overline{B}_E} - \overline{B}_{E^*}$, 这意味着，$\psi$ 不是线性的，即存在 $x_1, x_2 \in \overline{B}_E$ 与 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 满足 $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \overline{B}_E$, 使得

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2) \neq \alpha \cdot \psi(x_1) + \beta \cdot \psi(x_2).$$

记 $x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2$. 设 $K^{\overline{B}_E}$ 中 ψ 的一个 开邻域 为

$$V = V(\psi, x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = \{f \in K^{\overline{B}_E} \mid |(f - \psi)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, 3\}.$$

取充分小的 ε, 则 $\forall\, f \in V$, 有

$$\begin{aligned}
|f(x_3) - \alpha \cdot f(x_1) - \beta \cdot f(x_2)| &\geq |\psi(x_3) - \alpha \cdot \psi(x_1) - \beta \cdot \psi(x_2)| - |\alpha| \cdot |(f - \psi)(x_1)| - |\beta| \cdot |(f - \psi)(x_2)| - |(f - \psi)(x_3)| \\
&> |\psi(x_3) - \alpha \cdot \psi(x_1) - \beta \cdot \psi(x_2)| - |\alpha| \cdot \varepsilon - |\beta| \cdot \varepsilon - \varepsilon \\
&= |\psi(x_3) - \alpha \cdot \psi(x_1) - \beta \cdot \psi(x_2)| - (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon \\
&> 0,
\end{aligned}$$

因此，f 不能延拓为线性泛函，即 $f \in K^{\overline{B}_E} - \overline{B}_{E^*}$, 从而 $V \subset K^{\overline{B}_E} - \overline{B}_{E^*}$, 这说明 $K^{\overline{B}_E} - \overline{B}_{E^*}$ 是开集，从而 $\overline{B}_{E^*}$ 是 $K^{\overline{B}_E}$ 中的闭集。 □

注记 9.4.2. 现在，我们有 E^* 上的三种拓扑：

1. 范数拓扑 $(E^*, \|\cdot\|)$, 它是最强的；

2. 弱拓扑 $(E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$;

3. 弱 * 拓扑 $(E^*, \sigma(E^*, E))$, 它是最弱的。

若 E 是自反空间，即 $E = E^{**}$, 则 $(E^*, \sigma(E^*, E^{**})) = (E^*, \sigma(E^*, E))$.

定理 9.4.3 (Goldstine)**.** 设 E 是赋范空间，则 B_E 在 $\overline{B}_{E^{**}}$ 中弱 * 稠密，即

$$\overline{B_E}^{w^*} = \overline{B}_{E^{**}}.$$

证明. 首先，$\forall\, x \in B_E, \forall\, f \in E^*$,

$$x(f) = \langle f, x \rangle ,$$

有

$$|x(f)| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|f\| ,$$

从而 $\|x\|_{E^{**}} \leq 1$, 从而 $x \in \overline{B}_{E^{**}}$, 从而 $B_E \subset \overline{B}_{E^{**}}$. 又 $\forall\, \{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{B}_{E^{**}}$, 若有 $x_n^{**} \xrightarrow{w^*} x^{**}$, 则 $\forall\, f \in E^*$,

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f\| \cdot \|x_n\| \leq \|f\| ,$$

从而 $\|x^{**}\| \leq 1$, 从而 $x^{**} \in \overline{B}_{E^{**}}$, 即 $\overline{B}_{E^{**}}$ 在 E^{**} 中是弱 * 闭的，即 $\overline{\overline{B}_{E^{**}}}^{w^*} = \overline{B}_{E^{**}}$. 在 $B_E \subset \overline{B}_{E^{**}}$ 两端同时在弱 * 拓扑下取闭包即得，

$$\overline{B_E}^{w^*} \subset \overline{\overline{B}_{E^{**}}}^{w^*} = \overline{B}_{E^{**}}.$$

另一方面, 若存在 $x^{**} \in \overline{B}_{E^{**}} - \overline{B_E}^{w^*}$, 由 Hahn-Banach 定理 (推论 8.2.6), 存在 $\varphi \in E^*$, 使得 $\langle \varphi, x^{**} \rangle > 1$ 且 $\sup \left| \varphi \left(\overline{B_E}^{w^*} \right) \right| \leq 1$, 从而，

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle \varphi, x \rangle| \leq \sup \left| \varphi \left(\overline{B_E}^{w^*} \right) \right| \leq 1,$$

于是有

$$\|x^{**}\| \geq \|\varphi\|_{E^*} \cdot \|x^{**}\| \geq |\varphi(x^{**})| = |\langle \varphi, x^{**} \rangle| > 1,$$

这说明 $x^{**} \notin \overline{B}_{E^{**}}$, 矛盾。故 $\overline{B}_{E^{**}} \subset \overline{B_E}^{w^*}$.

综上，$\overline{B_E}^{w^*} = \overline{B}_{E^{**}}$. □

定理 9.4.4 (Banach)**.** 设 E 是赋范空间，则 E 是自反的，当且仅当 $\overline{B}_E$ 是弱紧的。

证明. <u>必要性</u>: 由 E 是自反的, $E = E^{**}$, 从而 $\overline{B}_E = \overline{B}_{E^{**}}$. 由 Banach-Alaoglu 定理 (定理 9.4.1), E^* 是赋范空间, 从而 $(E^*)^* = E^{**}$ 中的闭单位球 $\overline{B}_{E^{**}}$ 是弱 * 紧的，即在拓扑 $\sigma((E^*)^*, E^*)$ 中是紧的，而

$$\overline{B}_{E^{**}} = \overline{B}_E, \sigma((E^*)^*, E^*) = \sigma(E^{**}, E^*) = \sigma(E, E^*),$$

从而 $\overline{B}_E$ 在拓扑 $\sigma(E,E^*)$ 中是紧的，即 $\overline{B}_E$ 是弱紧的。

充分性：由注记 8.3.4, 有 $E\subset E^{**}$, 则 $\sigma(E,E^*)=\sigma(E^{**},E^*)|_E$. 由于 $\overline{B}_E$ 是弱紧的，即 $\overline{B}_E$ 在 $(E,\sigma(E,E^*))$ 中是紧的，从而 $\overline{B}_E$ 在 $(E^{**},\sigma(E^{**},E^*)$ 中是也紧的，从而 $\overline{B}_E$ 在 $(E^{**},\sigma(E^{**},E^*)$ 中是闭集（P11 定理 1.3.6：Haudorff 空间中的紧集是闭集），即 $\overline{B}_E$ 是弱 * 闭的，从而 $\overline{B}_E=\overline{B_E}^{w^*}$. 又由 Goldstine 定理（定理 9.4.3），$\overline{B_E}^{w^*}=\overline{B}_{E^{**}}$. 综上，

$$\overline{B}_E=\overline{B_E}^{w^*}=\overline{B}_{E^{**}},$$

从而 $E=E^{**}$, 即 E 是自反的。 $\square$

10 紧算子

10.1 有限秩算子与紧算子

定义 10.1.1. 设 E,F 是 *Banach* 空间，T 是 E 到 F 的算子，

1. 若 T 是连续的，且 $\dim T(E)<\infty$, 则称 T 是有限秩的，记从 E 到 F 的有限秩算子的集合为 $\mathcal{F}_r(E,F)$;

2. 若 $T(B_E)$ 是相对紧的（定义 *2.5.3*），则称 T 是紧算子，记从 E 到 F 的紧算子的集合为 $\mathcal{K}(E,F)$.

特别地，若 E,F, 则记 $\mathcal{F}_r(E,F)=\mathcal{F}_r(E),\mathcal{K}(E,F)=\mathcal{K}(E)$.

注记 10.1.2. 设 E,F 是 *Banach* 空间，则有向量子空间的包含关系：

$$\mathcal{F}_r(E,F)\subset\mathcal{K}(E,F)\subset\mathcal{B}(E,F).$$

性质 10.1.3. 若 $T\in\mathcal{K}(E,F)$, 由线性，对 E 中的任意有界集 A, 有 $T(A)$ 是 F 中的相对紧集。

定理 10.1.4. 设 E 是 *Banach* 空间，则 $\mathcal{F}_r(E)$ 与 $\mathcal{K}(E)$ 都是 $\mathcal{B}(E)$ 的理想。

证明. 设 $T\in\mathcal{F}_r(E)$, $S\in\mathcal{B}(E)$. 有 $S(E)\subset E$, 从而 $T\circ S(E)=T(S(E))\subset T(E)$, 从而 $\dim(T\circ S(E))\le\dim(T(E))<\infty$, 即 $T\circ S\in\mathcal{F}_r(E)$. 另一方面，由于 $\dim(T(E))<\infty$, 可设 $\dim(T(E))=\mathrm{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$, 从而 $\forall\,x\in E$, 可设 $T(x)=\sum_{i=1}^k x_ie_i\in E$, 从而 $S\circ T(x)=S(T(X))=S\left(\sum_{i=1}^k x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^k x_iS(e_i)$, 从而 $\dim(S\circ T(E))\le\dim(T(E))<\infty$, 即 $S\circ T\in\mathcal{F}_r(E)$. 综上，$\mathcal{F}_r(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 的理想。

设 $T\in\mathcal{K}(E)$, $S\in\mathcal{B}(E)$. 对任意 $\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset S\circ T(B_E)$, 则存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset B_E$, 使得 $\forall\,n\ge1$, 有 $y_n=S\circ T(x_n)$. 由于 T 是紧算子，即 $T(B_E)$ 是相对紧的，由推论 2.5.4, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\{T(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty\subset\{T(x_n)\}_{n=1}^\infty\subset T(B_E)$ 收敛。又由于 S 是有界算子，从而连续，从而 $\{S\circ T(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ 收敛，从而$\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty=\{S\circ T(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty\subset S\circ T(B_E)$ 收敛，从而 $S\circ T(B_E)$ 相对紧，即 $S\circ T$ 是紧算子，$S\circ T\in\mathcal{K}(E)$. 另一方面，由于 S 有界，从而连续，从而 $S(B_E)$ 是有界集，从而 $T\circ S(B_E)$ 相对紧（性质 10.1.3），即 $S\circ T$ 是紧算子，$S\circ T\in\mathcal{B}(E)$. 综上，$\mathcal{K}(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 的理想。 □

定理 10.1.5. 设 E,F 是 *Banach* 空间，$T\in\mathcal{B}(E,F)$, 则 T 是紧算子，当且仅当 T^* 是紧算子。

证明. <u>必要性</u>：若 T 是紧算子，T^* 是它的共轭算子（定义 9.1.1），任意 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset T^*(B_{F^*})$, 存在 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty \subset B_{F^*}$, 使得 $\forall\, n \geq 1$, 有 $T^*(y_n^*) = x_n^*$. 注意到，由线性，$\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 可以看成 $\overline{T(B_E)}$ 上的函数，从而 $\forall\, y, y' \in \overline{T(B_E)}$, 由于 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty \subset B_{F^*}$, $\forall\, n \geq 1$, 有

$$|\langle y_n^*, y - y'\rangle| \leq \|y_n^*\| \cdot \|y - y'\| \leq \|y - y'\|,$$

这说明 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 在 $\overline{T(B_E)}$ 上等度连续。同时，$\forall\, y \in \overline{T(B_E)}$, $\forall\, n \geq 1$, 也有 $|\langle y_n^*, y\rangle| \leq \|y_n^*\| \cdot \|y\| \leq \|y\|$, 即 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 一致有界。由 T 是紧算子，$\overline{T(B_E)}$ 是紧集，由 Arzelà-Ascoli 引理（定理 5.1.6与定理 5.1.8），$\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 有在 $\overline{T(B_E)}$ 上一致收敛的子列 $\{y_{n_k}^*\}_{k=1}^\infty$, 从而 $\forall\, j, k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n_j}^* - x_{n_k}^*\right\| = \sup_{x \in B_E} \left|x_{n_j}^*(x) - x_{n_k}^*(x)\right| &= \sup_{x \in B_E} \left|\left\langle T^*(y_{n_j}^*), x\right\rangle - \left\langle T^*(y_{n_k}^*), x\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x \in B_E} \left|\left\langle y_{n_j}^*, T(x)\right\rangle - \left\langle y_{n_k}^*, T(x)\right\rangle\right| \\
&= \sup_{T(x) \in T(B_E)} \left|\left\langle y_{n_j}^*, T(x)\right\rangle - \left\langle y_{n_k}^*, T(x)\right\rangle\right| \leq \sup_{T(x) \in \overline{T(B_E)}} \left|\left\langle y_{n_j}^*, T(x)\right\rangle - \left\langle y_{n_k}^*, T(x)\right\rangle\right|,
\end{aligned}$$

由于 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 在 $\overline{T(B_E)}$ 上一致收敛，故 $\{x_{n_k}^*\}_{k=1}^\infty$ 是 Cauchy 序列。又 E^* 是 Banach 空间，完备，故 $\{x_{n_k}^*\}_{k=1}^\infty$ 在 E^* 中收敛，从而 $T^*(B_{F^*})$ 相对紧（推论 2.5.4），从而 T^* 是紧算子。

<u>充分性</u>：设 T^* 是紧算子，由必要性的结论，T^{**} 是 E^{**} 到 F^{**} 的紧算子，从而 $T^{**}(B_{E^{**}})$ 是相对紧的。由于有自然嵌入 $E \hookrightarrow E^{**}$（定义 9.3.1），有 $\overline{T^{**}(B_E)} \subset \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$, 从而 $\overline{T^{**}(B_E)}$ 是紧的（P11 定理 1.3.6：Haudorff 空间中的紧集是闭集）。利用二次共轭关系即得，$\overline{T(B_E)}$ 也是紧的，即 $T(B_E)$ 是相对紧的，从而 T 是紧算子。 □

定理 10.1.6. *设 H 是 Hilbert 空间，则 $\overline{\mathcal{F}_r(H)} = \mathcal{K}(H)$.*

证明. <u>当 H 可分时</u>：由定理 4.4.8, 可设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 H 的规范正交基，$\forall\, n \geq 1$, 记 P_n 是 H 到 $H_n = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的正交投影算子（定义 4.2.1），则由定理 4.2.2, $\|P_n\| \leq 1$, 且 $P_n(E) = H_n$, 从而 $\dim(P_n(E)) = n < \infty$, 从而 $P_n \in \mathcal{F}_r(H)$.<u>$\forall\, T \in \mathcal{K}(H)$</u>, 令 $T_n = P_n \circ T$, 则 $T_n(H) = P_n(T(H)) \subset P_n(H)$ 也是有限维，从而 $T_n \in \mathcal{F}_r(H)$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, "T_n"] & \\
H \arrow[r, "P_n"'] & H_n
\end{tikzcd}$$

只要说明$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中收敛到 T: 注意到 $\forall\, n \geq 1, \forall\, x \in H$,

$$(T - T_n)(x) = T(x) - T_n(x) = T(x) - P_n(T(x)) = (I_H - P_n)(T(x)),$$

并且 $\forall\, y \in H$, 有 $\|P_n(y) - y\| \to 0$. 由于 $T(B_H)$ 相对紧，从而

$$\|T - T_n\| = \sup_{x \in B_H} \|(T - T_n)(x)\| = \sup_{x \in B_H} \|(I_H - P_n)(T(x))\| = \sup_{y \in T(B_H)} \|(I_H - P_n)(y)\| = \sup_{y \in T(B_H)} \|y - P_n(y)\| \to 0.$$

一般情形: $\forall\, T \in \mathcal{K}(H)$, $\overline{T(B_E)}$ 是紧集，从而 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$, 使得 $T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. 记 P_n 是 H 到 $H_n = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的正交投影算子，令 $T_\varepsilon = P_n \circ T \in \mathcal{F}_r(H)$, $\forall\, x \in B_H$, $\exists\, i \leq i_0 \leq n$, 使得 $\|T(X) - x_{i_0}\| < \varepsilon$. 由定理 4.2.2, $\|P_n\| \leq 1$, 且 $x_{i_0} \in H_n$, 从而 $\|P_n(T(x)) - x_{i_0}\| = \|P_n(T(x)) - P_n(x_{i_0})\| \leq \|T(X) - x_{i_0}\| < \varepsilon$, 从而

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| = \|P_n(T(x)) - T(x)\| \leq \|P_n(T(x)) - x_{i_0}\| + \|T(X) - x_{i_0}\| < 2\varepsilon,$$

即 $\|T_\varepsilon - T\| < 2\varepsilon$. □

命题 10.1.7. 设 E, F 是 *Banach* 空间，$\mathcal{K}(E,F)$ 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 的闭子空间。

证明. 任意 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(E,F)$, 若 $T_n \to T$, 要证 $T \in \mathcal{K}(E,F)$, 即证 $\overline{T(B_E)}$ 是紧集，即证 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, f_1, f_2, \cdots, f_n \in F$, 使得 $T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$. 而 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$, 使得 $\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 且 $\overline{T_{n_0}(B_E)}$ 是紧集，即得。 □

10.2 紧算子的谱性质

定义 10.2.1. 设 $T \in \mathcal{B}(E)$,

1. 令集合

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda - T \text{ 不可逆}\},$$

称为 T 的谱集，并称 $\rho(T) = \mathbb{K} - \sigma(T)$ 是 T 的预解集；

2. 若 $\lambda - T$ 不是单射，则称 λ 是 T 的一个特征值，相应的，$\mathrm{Ker}(\lambda - T)$ 称为 T 关于特征值 λ 的特征子空间，并称非零向量 $x \in \mathrm{Ker}(\lambda - T)$（即使得 $Tx = \lambda x$）为 T 关于特征值 λ 的特征向量，记 $\sigma_p(T)$ 表示 T 的所有特征向量的集合，称为 T 的点谱集；

3. $\forall\ \lambda \in \rho(T)$，记 $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$，称为 T 的预解式。

性质 10.2.2. *1.* 若 $T \in \mathcal{K}(E)$ 且 $\dim E = \infty$，则 $0 \in \sigma(T)$;

2. 有 $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$，并且包含一般是严格的；

3. 有预解方程：$\forall\ \lambda, \mu \in \rho(T)$，有

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\mu, T)R(\lambda, T),$$

这是因为

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\lambda, T)(\mu - \lambda)R(\mu, T) &= R(\lambda, T)[(\mu - T) - (\lambda - T)]R(\mu, T)\\ &= R(\lambda, T)[(\mu - T)R(\mu, T)] - [R(\lambda, T)(\lambda - T)]R(\mu, T) = R(\lambda, T) - R(\mu, T),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)R(\mu, T)R(\lambda, T) = R(\mu, T)(\mu - \lambda)R(\lambda, T) &= R(\mu, T)[(\mu - T) - (\lambda - T)]R(\lambda, T)\\ &= [R(\mu, T)(\mu - T)]R(\lambda, T) - R(\mu, T)[(\lambda - T)R(\lambda, T)] = R(\lambda, T) - R(\mu, T),\end{aligned}$$

这说明 $R(\lambda, T)$ 与 $R(\mu, T)$ 可交换。

定理 10.2.3. 设 $T \in \mathcal{B}(E)$，则

1. 极限 $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在，并且

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}},$$

通常，记该极限值为 $r(T)$，称为 T 的谱半径；

2. 谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的紧集，并且 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \le r(T)\}$.

证明. $\underline{1}$: 记 $a = \inf_{n\ge 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, 首先有

$$\liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \ge \inf_{n\ge 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = a.$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$, 使得 $\|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \le a + \varepsilon$. $\forall\, n > n_0$, 记 $n = q(n)\cdot n_0 + r(n)$, 其中 $q(n) \in \mathbb{N}^*$, $r(n) < n_0$, 则

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \left\|T^{q(n)\cdot n_0 + r(n)}\right\|^{\frac{1}{n}} = \left\|T^{q(n)\cdot n_0} \cdot T^{r(n)}\right\|^{\frac{1}{n}} \le \left\|T^{q(n)\cdot n_0}\right\|^{\frac{1}{n}} \cdot \left\|T^{r(n)}\right\|^{\frac{1}{n}} \le \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}\cdot\frac{q(n)\cdot n_0}{n}} \cdot \|T\|^{\frac{r(n)}{n}},$$

其中，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{q(n)\cdot n_0}{n} \to 1$, $\frac{r(n)}{n} \to 0$, 从而，

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty} \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}\cdot\frac{q(n)\cdot n_0}{n}} \cdot \|T\|^{\frac{r(n)}{n}} = \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \cdot 1 \le a + \varepsilon,$$

由 ε 的任意性，$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le a$, 从而

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le a \le \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = a = \inf_{n\ge 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

$\underline{2}$: 先证 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \le r(T)\}$. 设有 $|\lambda| > r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, 从而存在 $0 < c < 1$, 与对应的 n_0, 使得 $\forall\, n \ge n_0$, 有 $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le c\,|\lambda|$, 从而 $\left|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right| \le c^n$, 从而级数 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$ 有

$$\|S\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c} < \infty,$$

即级数 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中依范数收敛，并且有

$$(\lambda - T)S = (\lambda - T)\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n - T\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n - \lambda\frac{T}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = \lambda,$$

同样的也易得 $S(\lambda - T) = \lambda$, 故 $\lambda - T$ 可逆，从而 $\lambda \notin \sigma(T)$. 这也说明了谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的有界集。

再证谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的闭集。只要证预解集 $\rho(T) = \mathbb{K} - \sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的开集。定义映射

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} &\to \mathcal{B}(E) \\ \lambda &\mapsto \lambda - T, \end{aligned}$$

由

$$\|(\lambda_1 - T) - (\lambda_2 - T)\| = \|\lambda_1 - \lambda_2\| = |\lambda_1 - \lambda_2|\,,$$

故 f 连续。记 $GL(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆算子的集合，由 P60 习题三 9, $GL(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集，而由预解集 $\rho(T)$ 的定义，$\rho(T) = f^{-1}(GL(E))$, 从而 $\rho(E)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的开集，从而谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的闭集。

综上，谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集，是紧集（有限维度量空间中紧集等价于有界闭集）。 □

定理 10.2.4. 设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $T \in \mathcal{B}(E)$, 则 $\sigma(T)$ 非空，并且

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|\,.$$

证明. 对 $T \in \mathcal{B}(E)$, $\forall\, \lambda \in \rho(T)$, 记 $R(\lambda) = R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$. 由 P60 习题三 9,

$$\begin{aligned} GL(E) &\to GL(E) \\ u &\mapsto u^{-1} \end{aligned}$$

是同胚，从而连续，从而

$$\begin{aligned} R : \rho(T) &\to GL(E) \to GL(E) \\ \lambda &\mapsto \lambda - T \mapsto (\lambda - T)^{-1} = R(\lambda, T) \end{aligned}$$

连续（定理 10.2.3的证明）。$\forall\, \xi \in \mathcal{B}(E)^*$, 构造函数

$$\begin{aligned} \varphi : \rho(T) &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \xi(R(\lambda)), \end{aligned}$$

则 φ 是 $\rho(T)$ 上的连续函数。

现证 φ 在 $\rho(T)$ 中是全纯的：$\forall\ \lambda_0 \in \rho(T)$, 令 $\lambda \in \rho(T)$, 满足 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$, 则有

$$(\lambda-T)^{-1} = (\lambda-\lambda_0+\lambda_0-T)^{-1} = (\lambda_0-T)^{-1}[1+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0-T)^{-1}]^{-1} = R(\lambda_0)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n R(\lambda_0)^n(\lambda-\lambda_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n R(\lambda_0)^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n.$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ 时，有 $\|(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0-T)^{-1}\| < |\lambda-\lambda_0| \cdot \frac{1}{|\lambda-\lambda_0|} = 1$, 从而

$$\left\|(\lambda-T)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n R(\lambda_0)^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n\right\| \le \|R(\lambda_0)\| \sum_{n=0}^{\infty} \|R(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)\|^n = \left\|(\lambda_0-T)^{-1}\right\| \sum_{n=0}^{\infty} \left\|(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0-T)^{-1}\right\|^n,$$

从而由定理 3.2.11, 级数 $(\lambda-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n R(\lambda_0)^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中绝对收敛，从而

$$\varphi(\lambda) = \xi(R(\lambda)) = \xi((\lambda-T)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \xi(R(\lambda_0)^{n+1})(\lambda-\lambda_0)^n$$

在 $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ 时成立。由 λ_0 的任意性，φ 在 $\rho(T)$ 中是全纯的。

再证 $\sigma(T) \neq \varnothing$: 当 $|\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$ 时，由定理 3.2.11, 有级数

$$R(\lambda) = (\lambda-T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I-\frac{T}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

在 $\mathcal{B}(E)$ 上绝对收敛，则有

$$\varphi(\lambda) = \xi(R(\lambda)) = \xi\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}},$$

从而

$$|\varphi(\lambda)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\xi(T^n)|}{\lambda^{n+1}} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\xi\|\cdot\|T^n\|}{\lambda^{n+1}} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\xi\|\cdot\|T\|^n}{\lambda^{n+1}} = \frac{\|\xi\|}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{\lambda}\right)^n = \frac{\|\xi\|}{\lambda}\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}}.$$

当 $\lambda \to \infty$ 时，有 $\varphi(\lambda) \to 0$.若 $\sigma(T) = \varnothing$, 即 $\rho(T) = \mathbb{C}$, 由全纯函数下的 Liouville 定理，φ 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上有 $\varphi \equiv 0$. 特别地，取 $\lambda > \|T\|$, 由定理 10.2.3,

$$r(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\|T\|^{n\cdot\frac{1}{n}} = \|T\| < \lambda,$$

从而 $\lambda\notin\sigma(T)$, 即 $\lambda-T$ 可逆，即 $(\lambda-T)^{-1}$ 存在，此时，$\forall\,\xi\in\mathcal{B}(E)^*$, $\xi((\lambda-T)^{-1})=\varphi(\lambda)=0$. 但由 Hahn-Banach 定理（推论 8.1.7），总存在 $\xi\in\mathcal{B}(E)^*$, 使得 $\xi((\lambda-T)^{-1})\neq 0$,矛盾。故 $\sigma(T)\neq\varnothing$.

最后，$r(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$：记 $\alpha=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$. 由定理 10.2.3, $r(T)\geq\alpha$, 故只要证 $r(T)\leq\alpha$. 取 $|\lambda|>\alpha$, 则 $\lambda\notin\sigma(T)$, 即 $\lambda\in\rho(T)$. 由证明的第一部分，$\varphi(\lambda)$ 在 $\rho(T)$ 中全纯，从而在 $\{\lambda\mid|\lambda|>\alpha\}\subset\rho(T)$ 中全纯，从而级数

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

绝对收敛，从而 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}\right|<\infty$. 记 $B_n=\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\in\mathcal{B}(E)$. 运用 Banach 空间的对偶理论，把 B_n 看成 $\mathcal{B}(E)^*$ 上的连续线性泛函，$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}\right|<\infty$ 意味着 B_n 作用在每个 $\xi\in\mathcal{B}(E)^*$ 上都是有界的。由 Banach-Steinhaus 定理（定理 6.2.1）,$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|B_n\|<\infty$. 记 $M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|B_n\|$, 从而 $\forall\,n\in\mathbb{N}$,

$$\|B_n\|=\left\|\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right\|\leq M,$$

于是有

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq M^{\frac{1}{n}}\cdot|\lambda|^{1+\frac{1}{n}},$$

不等式两边同时取极限即得，

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq\lim_{n\to\infty}M^{\frac{1}{n}}\cdot|\lambda|^{1+\frac{1}{n}}=|\lambda|,$$

由 $|\lambda|>\alpha$ 的任意性，即得 $r(T)\leq\alpha$. □

性质 10.2.5. 设 $T\in\mathcal{K}(E)$, $0\neq\lambda\in\mathbb{K}$, 则

1. $\forall\,n$, $\dim\operatorname{Ker}(\lambda-T)^n<\infty$;
2. $\forall\,n$, $(\lambda-T)^n(E)$ 是闭集；
3. $\exists\,n$, 使得 $\operatorname{Ker}(\lambda-T)^{n+1}=\operatorname{Ker}(\lambda-T)^n$;
4. $\exists\,n$, 使得 $(\lambda-T)^{n+1}(E)=(\lambda-T)^n(E)$;

5. $\forall\, 0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, 必有 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 如果 E 是无穷维的，必有 $0 \in \sigma_p(T)$;

6. T 的非零特征值至多有可数个，从而 $\sigma_p(T)$ 至多可数，特别地，$\sigma(T)$ 是紧集，并记所有的特征值构成序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$，则当 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无限集时，有 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

证明. □

推论 10.2.6 (Fredholm 选择定理)**.** 设 $T \in \mathcal{K}(E)$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, 则 $\lambda - T$ 是单射，当且仅当它是满射。

10.3 Hilbert 空间上的自伴紧算子

定义 10.3.1 (自伴算子, 正算子)**.** 设 H 是 *Hilbert* 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, T^* 是 T 的伴随算子, 若 $T = T^*$, 则称 T 是自伴算子或 *Hermite* 算子；若 T 是自伴的，并且 $\forall\, x \in H$, 有 $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, 则称 T 为正算子。

注记 10.3.2. 1. 若 T 是自伴的，则 $\forall\, x \in H$, 有 $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$;

2. 若 T 是正算子，有 *Cauchy-Schwarz* 不等式：$\forall\, x, y \in H$,

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle \langle Ty, y\rangle,$$

从而

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, \|x\| = 1\}.$$

定理 10.3.3. 设 T 是 *Hilbert* 空间上的自伴算子，则

1. $r(T) = \|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, \|x\| = 1\}$;

2. 若令

$$m = \inf\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, \|x\| = 1\}, M = \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, \|x\| = 1\},$$

则 $\sigma(T) \subset [m, M]$, 且 $m, M \in \sigma(T)$, 并且

$$r(T) = \|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

证明. □

推论 10.3.4. 设 T 是 *Hilbert* 空间上的自伴算子，则 T 是正算子，当且仅当 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. 并且若 T 是正算子，则 $\|T\| \in \sigma(T)$.

推论 10.3.5. 设 T 是 *Hilbert* 空间上的自伴紧算子，则存在 T 的特征值 λ, 使得 $|\lambda| = \|\lambda\|$.

定义 10.3.6 (直和). 设 $\{H_i\}_{i\in I}$ 是一族 *Hilbert* 空间，令

$$\bigoplus_{i\in I} H_i$$

是 $\{H_i\}_{i\in I}$ 的笛卡尔积 $\prod_{i\in I} H_i$ 的子集，其中的元素 $\{x_i\}_{i\in I}$ 满足

$$\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty.$$

给 $\bigoplus_{i\in I} H_i$ 赋予范数：

$$\|\{x_i\}_{i\in I}\| = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

事实上，它可以被内积

$$\langle \{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$$

诱导，从而 $\bigoplus_{i\in I} H_i$ 成为一个 *Hilbert* 空间，称为 $\{H_i\}_{i\in I}$ 的直和。

定理 10.3.7 (自伴紧算子的谱分解). 设 T 是 *Hilbert* 空间 H 上的自伴紧算子，V_λ 表示 T 的特征值 λ 的特征子空间，则

1. $$H = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)} V_\lambda,$$

   因此，H 有一组由 T 的特征向量构成的正交基；

2. 空间 $\overline{T(H)}$ 有一个由特征向量 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成的正交基，其中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是分别对应于特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的特征向量(特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可能是有限的)，使得 $\forall\, x \in H$, 在范数收敛的意义下，

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

并且，若特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无限的，则 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

积分方程