有限群表示论笔记

崔嘉祺

华东师范大学 20 级数学强基拔尖班

2023 年 6 月 13 日

摘要

教材:《Representation Theory of Finite Groups An introductory Approach》; Benjamin Steinberg; Springer

第 4 周: P48 4.1,4.2,4.3　第 5 周: P48 4.4,4.5,4.6,4.7,4.8,4.9　第 6 周: P49 4.10,4.11,4.12,4.13,4.14,4.15

第 7 周: P68 5.3,5.7,5.10,5.11　第 8 周: P69 5.12,5.13,5.14,5.15　第 9 周: P82 6.1,6.2,6.5,6.6　第 11 周: P95 7.3

第 13 周: P108 8.1,8.2,8.3,8.4　第 14 周: P109 8.12　第 16 周: P128 10.3,10.4,10.5

目录

1 回顾线性代数

本课程所有的向量空间都是复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。

定义 1.0.1. 在复内积空间 $(\mathbb{C}^n, \langle,\rangle)$ 中，

矩阵伴随 = 转置共轭：$A^* = \bar{A}^T$

线性变换 $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 的伴随变换 $A^*:\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$：$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$

关于标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的度量矩阵：$\Big(\langle e_i, e_j\rangle\Big)$

自对偶矩阵：$A^* = A$

酉矩阵：$A^* = A^{-1}$

酉变换：$\langle Av, Aw\rangle = \langle v, A^*(Aw)\rangle = \langle v, w\rangle$

定理 1.0.2 (谱定理)**.** 设 A 是自对偶矩阵，则存在酉矩阵 U，使得 U^*AU 是对角阵。从而存在一组以 A 的特征向量组成的正交基。

证明. 对维数做归纳：

$n=1$ 时，结论显然成立。

由代数基本定理，n 维复方阵必有一个特征值，记为 λ_1，V_{λ_1} 是 λ_1 的全体特征向量。由于 A 自对偶，从而 $V_{\lambda_1}^{\perp}$ 是 A-不变子空间（$\forall\, v \in V_{\lambda_1}, w \in V_{\lambda_1}^{\perp}, \langle v, Aw\rangle = \langle v, A^*w\rangle = \langle Av, w\rangle = \lambda_1 \langle v, w\rangle = 0$，从而 $Aw \in V_{\lambda_1}^{\perp}$）。从而 $\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_1}^{\perp}$ 由归纳法即得。 □

2 群表示

2.1 定义与例子

定义 2.1.1. 群 G 的一个表示是指一个同态 $\varphi: G \to GL(V)$。其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维向量空间，n 称为这个表示的次数。

注记 2.1.2. 对 $\mathbb{C}$ 上的 n 维向量空间 V，在选定一组基后，有 V 到 $\mathbb{C}^n$ 的坐标投影同构 Pr，从而 V 上的全体线性变换 $GL(V)$ 与 $GL_n(\mathbb{C})$ 有自然的表示矩阵的同态，对 $\forall\, g \in G$，即有以下交换图：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, shift left, "Pr"] & V \arrow[d, shift left, "Pr"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A_g"'] \arrow[u, shift left, "Pr^{-1}"] & \mathbb{C}^n \arrow[u, shift left, "Pr^{-1}"] \end{tikzcd}$$

从而也可以如此定义表示：

$$A = Pr \circ \varphi \circ Pr^{-1} : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

$$g \mapsto A_g = Pr \circ \varphi_g \circ Pr^{-1}.$$

在另一组不同的基下，按上述定义的表示之间只会相差一个基变换同构的共轭。

定义 2.1.3 (表示的等价)**.** 群 G 的两个表示：$\varphi: G \to GL(V)$ 与 $\psi: G \to GL(W)$，若存在同构：$T: V \to W$，则称这两个表示等价。即对 $\forall\, g \in G$，有以下交换图：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, shift left, "T"] & V \arrow[d, shift left, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] \arrow[u, shift left, "T^{-1}"] & W \arrow[u, shift left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

例 2.1.4 (平凡表示)**.** $\varphi: G \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$，$\forall\, g \in G$，$\varphi(g) = \varphi_g = 1$.

例 2.1.5. 表示 $\varphi: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^*$ 只需要指定生成元 $[1]$ 的像是某个 n 次本原单位根就能决定这个表示。

定义 2.1.6 (不变子空间). 群表示 $\varphi : G \to GL(V)$，称 W 是 G-不变子空间，若 $\forall\, g \in G$，$\varphi_g(W) \subseteq W$。此时也称 V 是一个 G-模，W 是一个 G-子模。

例 2.1.7. 定义群表示 $\varphi : \mathbb{Z}_n \to GL_2(\mathbb{C})$，其中

$$[1] \mapsto \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$$

$$[m] \mapsto \begin{bmatrix} \cos\frac{2m\pi}{n} & -\sin\frac{2m\pi}{n} \\ \sin\frac{2m\pi}{n} & \cos\frac{2m\pi}{n} \end{bmatrix}$$

再定义群表示 $\psi : \mathbb{Z}_n \to GL_2(\mathbb{C})$，其中

$$[m] \mapsto \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i m}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i m}{n}} \end{bmatrix}$$

有 $\deg\varphi = \deg\psi = 2$，且

$$\psi_{[m]} = A^{-1} \circ \varphi_{[m]} \circ A$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

如此就正交分解了表示 φ 为对角型 ψ.

例 2.1.8 (对称群的标准表示). 定义群表示 $\varphi : S_n \to GL_n(\mathbb{C})$ 如下：

取标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，$\forall\, \sigma \in S_n$，令 $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$，从而

$$\varphi_\sigma(e_1, \ldots, e_n) = (e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}).$$

从而得 σ 的表示矩阵是一个置换阵。

但这个表示是可约的：考虑 $w = e_1 + \cdots + e_n$，$\forall\, \sigma \in S_n$，

$$\varphi_\sigma(w) = \varphi_\sigma(\sum_{i=1}^{n} e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} e_j = w.$$

从而 $\mathbb{C}w$ 是 S_n 的一维平凡表示

定义 2.1.9. 群表示 $\varphi: G \to GL(V)$，满足若 $W \subseteq V$ 是 G-子模，则要么 $W=0$，要么 $W=V$，则称 V 是 G 的一个不可约模，相应的表示称为不可约表示。反之，若存在真子模 $W \subsetneq V$，则称 V 是可约模。

定义 2.1.10. 两个群表示 $\varphi^{(1)}: G \to GL_m(\mathbb{C})$ 与 $\varphi^{(2)}: G \to GL_n(\mathbb{C})$，则

$$\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)}: G \to GL_{m+n}(\mathbb{C})$$

$$g \mapsto \begin{bmatrix} \varphi_g^{(1)} & 0 \\ 0 & \varphi_g^{(2)} \end{bmatrix}$$

也是群表示，称为群表示的（外）直和。

注记 2.1.11. $n>1$ 时，$\forall\ g \in G$，$\varphi_g = I_n$，则称它是 n 个平凡表示的直和，但它不是平凡表示。

例 2.1.12. 定义表示 $\rho: S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ 如下：

$$\rho_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

容易验证这是一个表示。

再令 $\psi: S_3 \to \mathbb{C}^*$ 是一个平凡表示，则

$$\rho \oplus \psi: S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$$

$$(\rho \oplus \psi)_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (\rho \oplus \psi)_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也是一个表示。并且，它与表示

$$\varphi: S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$$

$$\varphi_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \varphi_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

等价。

例 2.1.13. 表示空间 $V = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$, 二面体群 $G = D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = (sr)^2 = 1 = (sr)^2 \rangle$, 有两个表示

$$\varphi : D_4 \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$r \mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, s \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

与

$$\rho : D_4 \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$r \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, s \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

令线性映射

$$f : V \to V$$

$$f(e_1, e_2) = (e_1, e_2) \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$(V, \varphi) \overset{f}{\sim} (V, \rho).$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, shift left, "f"] & V \arrow[d, shift left, "f"] \\
V \arrow[r, "\rho_g"'] \arrow[u, shift left, "f^{-1}"] & V \arrow[u, shift left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

定义 2.1.14 (不可约表示)**.** 称一个非零表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 是不可约的，若 V 的 G-不变子空间只有零空间与 V 本身。

例 2.1.15. 一维表示是不可约的。

命题 2.1.16. 一个二维表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 是不可约的，当且仅当对 $\forall\, g \in G$,φ_g 无公共特征向量。

例 2.1.17. 群表示

$$\rho: S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$\rho_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

是不可约表示。

定义 2.1.18 (完全可约)**.** 称一个表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 是完全可约的，若存在直和分解

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

使得每一个 V_i 是 G-不变子空间。此时，

$$\varphi|_{V_i}: G \to GL(V_i)$$

$$g \mapsto \varphi_g|_{V_i}$$

也是一个表示，称为 φ 的子表示。此时有表示的等价：

$$\varphi \sim \varphi|_{V_1} \oplus \varphi|_{V_2} \oplus \cdots \oplus \varphi|_{V_k}.$$

此时，若选定 V_i 的基 B_i, 拼成 V 的基 B,$\forall\, g \in G$,φ_g 的矩阵是分块对角阵。

定义 2.1.19 (可分解表示)**.** 称一个非零表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 是可分解的，若 $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1, V_2 是非零的 G-不变子空间；否则，称 φ 是不可分解的。

引理 2.1.20. 若一个表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 等价于一个可分解表示，则 φ 也是可分解的。

证明. 设 φ 等价于 $\psi: G \to GL(W)$,$W = W_1 \oplus W_2$,W_1, W_2 是 G-不变子空间。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, shift left, "T"] & V \arrow[d, shift left, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] \arrow[u, shift left, "T^{-1}"] & W \arrow[u, shift left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

令 $V_1 = T^{-1}W_1, V_2 = T^{-1}W_2$, 要先验证 $V = V_1 \oplus V_2$:
$\forall\, v \in V_1 \cap V_2$,

$$Tv \in TV_1 \cap TV_2 = W_1 \cap W_2 = \{0\},$$

从而 $v = 0$, 即

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

$\forall\, v \in V$, 由

$$Tv \in TV = W = W_1 \oplus W_2,$$

可设 $Tv = w_1 + w_2$, 其中 $w_1 \in W_1$,$w_2 \in W_2$, 从而

$$v = (T^{-1}T)v = T^{-1}(Tv) = T^{-1}w_1 + T^{-1}w_2 \in T^{-1}W_1 + T^{-1}W_2 = V_1 + V_2.$$

综上有

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

最后还要验证 V_1, V_2 是 G-不变子空间:
$\forall\, v_1 \in V_1$,$\exists\, w_1 \in W_1$, 使得 $v_1 = T^{-1}w_1$,$\forall g \in G$, 由图表交换,

$$\varphi_g v_1 = \varphi_g T^{-1} w_1 = T\psi w_1,$$

又 W_1 是 G-不变子空间, 从而 $\psi_g w_1 \in W_1$, 从而 $T\psi_g w_1 \in TW_1 = V_1$, 从而

$$\varphi_g v_1 = T\psi w_1 \in V_1,$$

即 V_1 是 G-不变子空间。同理，V_2 是 G-不变子空间。

□

引理 2.1.21. 若一个表示 $\varphi : G \to GL(V)$ 等价于一个不可约表示，则 φ 也是不可约的。

证明. 类似引理 2.1.20可证。 □

引理 2.1.22. 若一个表示 $\varphi : G \to GL(V)$ 等价于一个完全可约表示，则 φ 也是完全可约的。

证明. 类似引理 2.1.20可证。 □

2.2 Maschke 定理与完全可约性

定义 2.2.1 (酉表示)**.** 设 V 是一个内积空间，一个表示 $\varphi : G \to GL(V)$ 称为一个酉表示，若 $\forall\, g \in G$,φ_g 是酉变换，即对 $\forall\, v, w \in V$,

$$\langle \varphi_g v, \varphi_g w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

即存在 V 的一组标准正交基，使得 $\forall\, g \in G$,φ_g 在这组基下的矩阵是酉矩阵。

例 2.2.2. 群表示

$$\begin{gathered} \varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, \times) = (\{z \mid |z| = 1\}, \times) \\ r \mapsto e^{2\pi i r} \end{gathered}$$

是一个酉表示。

命题 2.2.3. 酉表示 $\varphi : G \to GL(V)$ 要么不可约，要么可分解。

证明. 若 φ 不是不可约的，则存在一个非零的真 G-不变子空间 V_1, 由内积空间可知，

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}.$$

只要证 $V_1^{\perp}$ 是 G-不变子空间：$\forall\, v \in V_1^{\perp}$,$g \in G$, 要证 $\varphi_g v \in V_1^{\perp}$.

$\forall w \in V_1$, 由 φ 是酉表示，知 $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ 是酉变换，从而

$$\langle \varphi_g v, w \rangle = \langle \varphi_g^{-1}\varphi_g v, \varphi_g^{-1} w \rangle = \langle v, \varphi_g^{-1} w \rangle,$$

又 V_1 是 G-不变子空间，故 $\varphi_g^{-1} w \in V_1$, 从而

$$\langle \varphi_g v, w \rangle = \langle v, \varphi_g^{-1} w \rangle = 0.$$

即 $\varphi_g v \in V_1^{\perp}$.

综上，即 φ 可分解。 □

命题 2.2.4. 任意一个有限群的表示都等价于一个酉表示。

证明. 取定一组基后，可以将表示 $\varphi : G \to GL(V)$ 等价于表示 $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$. 而 $\mathbb{C}^n$ 上有标准内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 使用“平均技巧”构造一个新的内积 $(\cdot, \cdot)$：对 $\forall\ v, w \in V$,

$$(v, w) = \sum_{g \in G} \langle \rho_g v, \rho_g w \rangle.$$

由于 G 是有限群，故上面的求和是良定义的。可以验证 $(\cdot, \cdot)$ 确实是一个内积。

只需验证 ρ 在新的内积下是酉表示。$\forall\ h \in G, v, w \in V$,

$$(\rho_h v, \rho_h w) = \sum_{g \in G} \langle \rho_g \rho_h v, \rho_g \rho_h w \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho_{gh} v, \rho_{gh} w \rangle = \sum_{x = gh \in G} \langle \rho_x v, \rho_x w \rangle = (v, w).$$

即 ρ 是酉表示。 □

注记 2.2.5. 命题 *2.2.4*对无限群的表示不一定成立。

注记 2.2.6. 不可约表示是不可分解的，但反之不一定成立。

例 2.2.7 (上条注释的反例)**.**

$$\varphi : \mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$\varphi(n)=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

由于 e_1 是任意 $\varphi(n)$ 的特征值 1 的特征向量，从而 $\mathbb{C}e_1$ 是非零的 1 维真 $\mathbb{Z}$-不变子空间，从而 φ 可约。但任意 $\varphi(n)$ 都不可对角化，从而不存在另一个 1 维 $\mathbb{Z}$-不变子空间，从而 φ 不可分解。

定理 2.2.8 (Maschke 定理)**.** 任何一个有限群的表示都是完全可约的。

证明. 由命题 2.2.4与引理 2.1.22，只需要对酉表示证明。

对空间维数做归纳：$n=1$ 时显然成立，设 $<n$ 时成立。

若酉表示 $\varphi: G\to GL(V)$ 是不可约的，从而是不可分解的，自然是完全可约的；若否，由命题 2.2.3知，φ 是可分解的。从而有

$$V=V_1\oplus V_2,$$

其中 V_1,V_2 是非零的 G-不变子空间，从而维数都小于 n, 由归纳假设，$\varphi|_{V_1},\varphi|_{V_2}$ 都是完全可约的，从而存在直和分解

$$V_1=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s$$

与

$$V_2=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t,$$

其中 $U_1,U_2,\cdots,U_s,W_1,W_2,\cdots,W_t$ 都是 G-不变子空间，从而

$$V=V_1\oplus V_2=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s\oplus W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t,$$

即 φ 是完全可约的。 □

3 特征标理论与正交关系

3.1 表示的同态

定义 3.1.1 (表示的同态)**.** 设同一个群 G 的两个表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 与 $\psi: G \to GL(W)$，$T: V \to W$ 是线性映射，若对 $\forall\, g \in G$，以下图表交换，

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd}$$

即

$$T \circ \varphi_g = \psi_g \circ T,$$

此时称 $T: V \to W$ 是一个 V 到 W 的 G-模同态，也称它是表示 φ 与 ψ 间的同态，记为 $T \in \mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$.

命题 3.1.2. 此时，

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{T : V \to W \mid T \circ \varphi_g = \psi_g \circ T, \forall\, g \in G\} \subseteq \mathrm{Hom}(V, W).$$

证明. 直接验证定义即可。 □

注记 3.1.3. 若 $T: V \to W$ 是线性同构，此时即是上文提到的两个表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 与 $\psi: G \to GL(W)$ 的等价。特别的，当 $V = W$ 时，

$$id_V \in \mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi).$$

命题 3.1.4. 设 $T: V \to W \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$，则 $Ker(T)$ 是 V 的 G-子模或者称 G-不变子空间，$Im(T) = T(V)$ 是 W 的 G-子模或者称 G-不变子空间。

证明. 直接验证定义即可。 □

引理 3.1.5 (Schur)**.** 设同一个群 G 的两个不可约表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 与 $\psi: G \to GL(W)$，$T \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$，则 T 要么可逆，要么是零映射，从而

1. 若 φ 与 ψ 不等价，则 $\mathrm{Hom}_G(\varphi,\psi)=0$;

2. 若 φ 与 ψ 等价，则 $T=\lambda I$, 其中 $\lambda\in\mathbb{C}$.

证明. 设 T 非零，要证 T 可逆，需要证 $Ker(T)=0$, 且 T 是满射。

$\underline{Ker(T)=0}$: 由 T 不是零映射知，

$$0\subseteq Ker(T)\subsetneq V,$$

又 V 不可约，从而必有 $Ker(T)=0$.

$\underline{T\text{ 是满射}}$: 同样由 T 不是零映射知，

$$0\subsetneq Im(T)\subseteq W,$$

又 W 不可约，从而必有 $Im(T)=W$, 即 T 是满射。

若 $\mathrm{Hom}_G(\varphi,\psi)\neq 0$, 则存在非零 $T\in\mathrm{Hom}_G(\varphi,\psi)$, 由以上推理，$T$ 可逆，从而 φ 与 ψ 等价。这是 1 的逆否命题，从而 1 成立。

若 φ 与 ψ 等价，设 λ 是 T 的一个特征值，T 不是零，从而是同构，从而 $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ 可以看作 $\mathrm{Hom}_G(V,V)$, 从而

$$\lambda I-T\in\mathrm{Hom}_G(\varphi,\psi)=\mathrm{Hom}_G(\varphi,\varphi),$$

又 $\lambda I-T$ 不可逆，由该定理的第一个结论，必有 $\lambda I-T=0$, 即 $T=\lambda I$. □

注记 3.1.6. 事实上，只有 $\mathrm{Hom}_G(\varphi,\psi)\cong\mathrm{Hom}_G(\varphi,\varphi)$, 但此时，只差一个共轭，不影响之后的推理。

注记 3.1.7. 由 *Schur* 引理知，若两个表示 φ 与 ψ 等价，则 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(\varphi,\psi))=\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}I)=1$.

推论 3.1.8. 设 G 是一个阿贝尔群，则 G 的任意不可约表示都是一维的。

证明. 设 $\varphi:G\to GL(V)$ 是 G 的一个不可约表示，取 $\forall\, h\in G$, 令 $T=\varphi_h$, 则 $\forall\, g\in G$,

$$T\circ\varphi_g=\varphi_h\varphi_g=\varphi_{hg}=\varphi_{gh}=\varphi_g\varphi_h=\varphi_g\circ T,$$

从而 $T\in\mathrm{Hom}_G(\varphi,\varphi)=\mathbb{C}id_V$, 即 $\exists\lambda_h\in\mathbb{C}^*$, 使得 $T=\lambda_h id_V$. 任取 $v\in V$, $c\in\mathbb{C}$, $\forall\, h\in G$,

$$\varphi_h(kv)=\lambda_h id_V(kv)=\lambda_h kv\in\mathbb{C}v,$$

从而 $\mathbb{C}v$ 是 G-不变子空间，由 φ 不可约，只有 $V=\mathbb{C}v$, 即 φ 是一维的。 □

推论 3.1.9. 设 G 是一个有限阿贝尔群，$\varphi : G \to GL(V)$ 是一个表示，则存在可逆矩阵 T, 使得 $\forall\, g \in G$, $T^{-1}\varphi_g T$ 是对角阵。

证明. 由 Maschke 定理，φ 是完全可约的，从而可设

$$\varphi \sim \varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus \varphi^{(m)},$$

其中 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 是不可约表示。又由推论 3.1.8, $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 都是一维表示，从而 $m = n$. 从而 $\forall\, 1 \le i \le n$, $g \in G$, $\varphi_g^{(i)} \in \mathbb{C}^*$. 设 $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是使得 $\varphi \sim \varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus \varphi^{(m)}$ 的同构，此时 $\forall\, g \in G$,

$$T^{-1}\varphi_g T = \begin{bmatrix} \varphi_g^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_g^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_g^{(n)} \end{bmatrix}$$

是对角阵。 □

推论 3.1.10. 设 $A \in GL_m(\mathbb{C})$, 且 $\exists\, n > 0$, 使得 $A^n = I$, 则 A 可对角化。

证明. 定义表示

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to GL_m(\mathbb{C})$$

$$[1] \mapsto A.$$

由推论 3.1.9可知，$\exists\, T \in Gl_n(\mathbb{C})$, 使得

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

□

3.2 正交关系

考虑群表示 $\varphi: G \to GL_n(\mathbb{C})$, 记 $\varphi_g = (g_{ij}(g))_{1\leq i,j\leq n}$, 由此我们得到了 n^2 个定义在 G 上的复函数：$\forall\ 1 \leq i,j \leq n$,

$$\varphi_{ij}: G \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \varphi_{ij}(g)$$

定义 3.2.1 (群代数)**.** 设 G 是一个群，令

$$L(G) = \mathbb{C}^G = \{g: G \to \mathbb{C}\},$$

它是一个内积空间，它上面的内积定义为：$\forall\ f_1, f_2 \in L(G)$,

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

还满足加法与数乘

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g),$$

$$(cf)(g) = c \cdot f(g),$$

构成一个群代数。

定理 3.2.2 (Schur 正交关系)**.** 设 $\varphi: G \to U_n(\mathbb{C})$ 与 $\rho: G \to U_m(\mathbb{C})$ 是不等价的不可约酉表示，则

1. $\langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle = 0$;
2. $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i = k, j = l; \\ 0, & else. \end{cases}$

定理的证明需要很多准备工作。

命题 3.2.3. 有两个表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 与 $\rho: G \to GL(W)$，$T: V \to W$ 是线性变换，则

1. $T^{\#}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g\in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$,

2. 若 $T\in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$, 则 $T^{\#}=T$;

3. 映射

$$P:\mathrm{Hom}(V,W)\to \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$$
$$T\mapsto T^{\#}$$

是线性满射。

证明. 1:$\forall\ h\in G$,

$$T^{\#}\varphi_h=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g\varphi_h=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_{gh}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{hx^{-1}}T\varphi_x=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_h\rho_{x^{-1}}T\varphi_x=\rho_h\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{x^{-1}}T\varphi_x=\rho_hT^{\#},$$

即 $T^{\#}\in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$.

2: 若 $T\in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$, 则

$$T^{\#}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}\rho_gT=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T=\frac{1}{|G|}|G|T=T.$$

3: 线性显然。$\forall\ T\in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$, 由 2 可知，$T=T^{\#}=P(T)$, 即 P 是线性满射。 □

注记 3.2.4. 由于 $\rho_{g^{-1}}=\rho_g^{-1}$, 从而 $T^{\#}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g^{-1}T\varphi_g$ 是良定义的。

命题 3.2.5. 有两个不可约表示 $\varphi:G\to GL(V)$ 与 $\rho:G\to GL(W)$，$T:V\to W$ 是线性映射，则

1. 若 φ 与 ρ 不等价，则 $T^{\#}=0$;

2. 若 φ 与 ρ 等价，则 $T^{\#}=\frac{\mathrm{Tr}(T)}{\deg\varphi}I\in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\varphi)=\mathbb{C}I$.

证明. 1: 若 φ 与 ρ 不等价，由 Schur 引理即知，$\mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)=0$, 且由命题 3.2.3,$T^\# \in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$, 从而 $T^\#=0$.

2: 若 φ 与 ρ 等价，由 Schur 引理即知，$\mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)\cong \mathrm{Hom}_G(\varphi,\varphi)\cong \mathbb{C}id_V$, 且由命题 3.2.3,$T^\# \in \mathrm{Hom}_G(\varphi,\rho)$, 从而 $T^\#=\lambda I$. 又

$$\mathrm{Tr}(T^\#)=\mathrm{Tr}(\lambda I)=\lambda\,\mathrm{Tr}(I)=\lambda\deg\varphi,$$

从而 $T^\#=\frac{\mathrm{Tr}(T^\#)}{\deg\varphi}I$. 又

$$\mathrm{Tr}(T^\#)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho_{g^{-1}}T\varphi_g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\varphi_{g^{-1}}T\varphi_g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(T)=\frac{1}{|G|}\,|G|\,\mathrm{Tr}(T)=\mathrm{Tr}(T),$$

从而 $T^\#=\frac{\mathrm{Tr}(T)}{\deg\varphi}I$. □

引理 3.2.6. 设 $A\in M_{rm}(\mathbb{C})$, $B\in M_{ns}(\mathbb{C})$, $E_{ki}\in M_{mn}(\mathbb{C})$, 则 $(AE_{ki}B)_{lj}=a_{lk}b_{ij}$.

证明. 直接计算即得。 □

引理 3.2.7. 设 $\varphi: G\to U_n(\mathbb{C})$ 与 $\rho: G\to U_m(\mathbb{C})$ 是两个酉表示，$A=E_{ki}\in M_{mn}(\mathbb{C})$, 则 $A^\#_{lj}=\langle\varphi_{ij},\rho_{kl}\rangle$.

证明. 由于 ρ 是酉表示，从而 $\rho_{g^{-1}}=\rho_g^{-1}=\rho_g^*$, 从而 $\rho_{lk}(g^{-1})=\overline{\rho_{kl}(g)}$. 从而

$$A^\#_{lj}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_{g^{-1}}A\varphi_g)_{ij}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_{g^{-1}}E_{ki}\varphi_g)_{ij}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{lk}(g^{-1})\varphi_{ij}(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\rho_{kl}(g)}\varphi_{ij}(g)=\langle\varphi_{ij},\rho_{kl}\rangle.$$

其中，第三个等号是由引理 3.2.6计算得到。 □

注记 3.2.8. 该引理表明，线性变换

$$P: M_{mn}(\mathbb{C})\to M_{mn}(\mathbb{C})$$

$$T\mapsto T^\#$$

在 $M_{mn}(\mathbb{C})$ 的标准基下的矩阵 $B\in M_{mn\times mn}(\mathbb{C})$ 在 (lj,ki) 处的元素为 $\langle\varphi_{ij},\rho_{kl}\rangle$.

Schur 正交关系的证明. $\underline{1}$: 设 $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$, 由命题 3.2.5,$A^{\#} = 0$. 又由引理 3.2.7,$A^{\#}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle$, 从而

$$\langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle = A^{\#}_{lj} = 0.$$

$\underline{2}$: 由命题 3.2.5与引理 3.2.7，设 $A = E_{ki} \in M_n(\mathbb{C})$, 则

$$A^{\#} = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{\deg \varphi} I = \frac{\mathrm{Tr}(E_{ki})}{n} I.$$

又 $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = A^{\#}_{lj}$, 当 $j \neq l$ 或 $i \neq k$ 时,

$$\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = A^{\#}_{lj} = (\frac{\mathrm{Tr}(E_{ki})}{n} I)_{lj} = 0.$$

当 $i = k, j = l$ 时,

$$\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = A^{\#}_{lj} = (\frac{\mathrm{Tr}(E_{ki})}{n} I)_{lj} = (\frac{1}{n} I)_{lj} = \frac{1}{n}.$$

□

推论 3.2.9. 设 φ 是有限群 G 的一个次数为 d 的不可约酉表示，则 $\left\{ \sqrt{d} \varphi_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}$ 是一组正交集。

推论 3.2.10. 不可约表示只有有限个等价类。

证明. 由命题 2.2.4, 每个等价类都含有一个酉表示，且 $\{\delta_g \mid g \in G\}$ 是 $L(G)$ 的一组基，从而 $L(G) = |G|$. 从而 $L(G)$ 中的线性无关组的维数不能超过 $|G|$. 由 Schur 正交关系，有限群 G 的互不等价的不可约酉表示的 ij 元素的群函数构成一组线性无关组，它的维数要小于 $|G|$, 从而必然只有有限个等价类。 □

推论 3.2.11. 设 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(s)}$ 是 G 的不可约表示的所有等价类的各自的一个代表元，记 $d_i = \deg \varphi^{(i)}$, 则

$$\left\{ \sqrt{d_k} \varphi^{(k)}_{ij} \mid 1 \leq k \leq s, 1 \leq i, j \leq d_k \right\}$$

是 $L(G)$ 的一组正交集，从而 $s \leq d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2 = \dim \left\{ \sqrt{d_k} \varphi^{(k)}_{ij} \mid 1 \leq k \leq s, 1 \leq i, j \leq d_k \right\} \leq |G|$.

3.3 特征标与类函数

定义 3.3.1 (特征标). 设群表示 $\varphi: G \to GL(V)$, 它的特征标 $\chi_\varphi: G \to \mathbb{C}$ 定义为 $\chi_\varphi(g) = \mathrm{Tr}(\varphi_g)$. 不可约表示的特征标称为不可约特征标。

注记 3.3.2. 一维表示 φ 的特征标 $\chi_\varphi = \varphi$, 从而之后不再区分一维表示与它的特征标。

命题 3.3.3. 设 φ 是群 G 的以一个表示，则 $\chi_\varphi(1) = \deg\varphi$.

证明. 直接计算

$$\chi_\varphi(1) = \mathrm{Tr}(\varphi_1) = \mathrm{Tr}(I) = \dim V = \deg\varphi.$$

□

命题 3.3.4. 若 φ 与 ρ 是两个等价的表示，则 $\chi_\varphi = \chi_\rho$.

证明. φ 与 ρ 是两个等价的表示，取定表示空间的一组基后，对 $\forall\, g \in G$, φ_g 与 ρ_g 只差一个共轭，而共轭的矩阵有相同的迹，即

$$\chi_\varphi(g) = \mathrm{Tr}(\varphi_g) = \mathrm{Tr}(T\rho_g T^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho_g) = \chi_\rho(g),$$

其中 T 是可逆矩阵。 □

命题 3.3.5. 设 φ 是群 G 的表示，则 $\forall\, g, h \in G$, $\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(hgh^{-1})$.

证明. 直接计算

$$\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}(\varphi_{hgh^{-1}}) = \mathrm{Tr}(\varphi_h\varphi_g\varphi_{h^{-1}}) = \mathrm{Tr}(\varphi_h\varphi_g\varphi_h^{-1}) = \mathrm{Tr}(\varphi_g) = \chi_\varphi(g).$$

□

定义 3.3.6 (类函数). 称函数 $f: G \to \mathbb{C}$ 是一个类函数，若它在共轭的元素的取值相同。G 的类函数的集合记为 $Z(L(G))$.

命题 3.3.7. $Z(L(G))$ 是 $L(G)$ 的线性子空间。

证明. 直接验证定义即得。 □

定义 3.3.8. 记 $Cl(G)$ 是 G 的共轭类的全体，若 $C \in Cl(G)$, 则记 δ_C 是 C 的示性函数。

命题 3.3.9. 集合 $B = \{\delta_C \mid C \in Cl(G)\}$ 是 $Z(L(G))$ 的一组基，从而 $\dim Z(L(G)) = |Cl(G)|$.

证明. 注意到，$\forall\ f \in Z(L(G))$,

$$f = \sum_{C \in Cl(G)} f(C)\delta_C,$$

从而 B 张成了 $Z(L(G))$.

又注意到

$$\langle \delta_C, \delta_{C'} \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \delta_C(g)\overline{\delta_{C'(g)}} = \begin{cases} \frac{|C|}{|G|}, & C = C'; \\ 0, & C \neq C'. \end{cases},$$

从而 B 的元素线性无关。当然也可以直接对 B 的元素做线性组合，作用在每一个共轭类的某个元素上，得到系数都为 0.

综上，$B = \{\delta_C \mid C \in Cl(G)\}$ 是 $Z(L(G))$ 的一组基，从而 $\dim Z(L(G)) = |B| = |Cl(G)|$. □

定理 3.3.10 (第一正交关系)**.** 令 φ, ρ 是两个 G 的不可约表示，则

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, & \varphi \sim \rho; \\ 0, & \varphi \nsim \rho. \end{cases},$$

从而不可约特征标是类函数的标准正交基。

证明. 由命题 2.2.4与 3.3.4, 不妨设 $\varphi: G \to U_n(\mathbb{C})$ 与 $\rho: G \to U_m(\mathbb{C})$ 是不可约酉表示，

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\rho(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\sum_{i=1}^n \varphi_{ii}(g))(\sum_{j=1}^n \overline{\rho_{jj}(g)}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{ii}(g)\overline{\rho_{jj}(g)} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle \varphi_{ii}, \rho_{jj}\rangle.$$

由 Schur 正交关系知，若 φ 与 ρ 不等价，则 $\forall\ i, j$, $\langle \varphi_{ii}, \rho_{jj}\rangle = 0$, 从而 $\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi_{ii}, \rho_{jj}\rangle = 0$. 若 φ 与 ρ 等价，则

$$\langle \varphi_{ii}, \rho_{jj}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

从而

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi_{ii}, \rho_{jj}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \varphi_{ii}, \rho_{ii}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1.$$

□

推论 3.3.11. G 的不可约表示至多有 $|Cl(G)|$ 个等价类。

证明. 由定理 3.3.10, 不等价的不可约表示有不同的特征标，且这些不可约特征标构成了 $Z(L(G))$ 中的一组正交集，由命题 3.3.9, $\dim Z(L(G)) = |Cl(G)|$, 从而这个正交集的维数不会超过 $\dim Z(L(G)) = |Cl(G)|$. □

定义 3.3.12. 记

$$mV = \overbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}^{\times m},$$

$$m\varphi = \overbrace{\varphi \oplus \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi}^{\times m}.$$

定义 3.3.13 (重数)**.** 若

$$\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus m_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)},$$

其中 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(s)}$ 是互不等价的的不可约酉表示的完全集，则 m_i 称为 $\varphi^{(i)}$ 的重数，若 $m_i > 0$, 则称 $\varphi^{(i)}$ 是 ρ 的一个不可约构成。

注记 3.3.14. 由于我们还没有证明表示的不可约分解的唯一性，从而这不是良定义的。但是，表示的特征只依赖于等价类，从而无论表示的分解如何，每个互不等价的不可约表示的重数不会改变。

注记 3.3.15. 若

$$\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus m_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)},$$

其中 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(s)}$ 是互不等价的的不可约酉表示的完全集，即从每个等价类中选一个不可约酉表示，设 $d_i = \deg\varphi^{(i)}$, 则

$$\deg\rho = m_1d_1 + m_2d_2 + \cdots + m_sd_s.$$

引理 3.3.16. 若 $\varphi=\rho\oplus\psi$, 则 $\chi_\varphi=\chi_\rho+\chi_\psi$.

证明. 由定义，$\forall\, g\in G$,

$$\varphi_g=\begin{bmatrix}\rho_g & 0\\ 0 & \psi_g\end{bmatrix},$$

从而

$$\chi_\varphi(g)=\mathrm{Tr}(\varphi_g)=\mathrm{Tr}(\rho_g)+\mathrm{Tr}(\psi_g)=\chi_\rho(g)+\chi_\psi(g).$$

□

注记 3.3.17. 该引理告诉我们每一个特征标都是不可约特征标的整系数的线性组合。

定理 3.3.18. 若

$$\rho\sim m_1\varphi^{(1)}\oplus m_2\varphi^{(2)}\oplus\cdots\oplus m_s\varphi^{(s)},$$

其中 $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\cdots,\varphi^{(s)}$ 是互不等价的的不可约酉表示的完全集，则 $m_i=\langle\chi_\rho,\chi_{\varphi^{(i)}}\rangle$, 从而将表示分解为不可约构成是唯一的，这个表示由它的特征标的等价类决定。

证明. 由引理 3.3.16,

$$\chi_\rho=m_1\chi_{\varphi^{(1)}}+m_2\chi_{\varphi^{(2)}}+\cdots+m_s\chi_{\varphi^{(s)}},$$

由第一正交关系，

$$\langle\chi_\rho,\chi_{\varphi^{(i)}}\rangle=m_1\langle\chi_{\varphi^{(1)}},\chi_{\varphi^{(i)}}\rangle+m_2\langle\chi_{\varphi^{(2)}},\chi_{\varphi^{(i)}}\rangle+\cdots+m_s\langle\chi_{\varphi^{(s)}},\chi_{\varphi^{(i)}}\rangle=m_i.$$

由命题 3.3.4即知，表示的不可约构成的分解是唯一的，这个表示由它的特征标的等价类决定。 □

推论 3.3.19. 表示 ρ 是不可约的，当且仅当 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=1$.

证明. 设

$$\rho\sim m_1\varphi^{(1)}\oplus m_2\varphi^{(2)}\oplus\cdots\oplus m_s\varphi^{(s)},$$

其中 $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\cdots,\varphi^{(s)}$ 是互不等价的的不可约酉表示的完全集，由引理 3.3.16,

$$\chi_\rho = m_1\chi_{\varphi^{(1)}} + m_2\chi_{\varphi^{(2)}} + \cdots + m_s\chi_{\varphi^{(s)}}.$$

由正交性,

$$\langle \chi_\rho,\chi_\rho\rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_s^2.$$

由于 m_i 都是非负整数，于是 $\langle \chi_\rho,\chi_\rho\rangle = 1$ 当且仅当存在 $1 \le i \le s$, 使得 $m_i = 1$, 且 $\forall\, j \neq i$, $m_j = 0$, 即 $\rho \sim \varphi^{(i)}$, 即 ρ 不可约。 □

例 3.3.20. 定义表示 $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ 如下：

$$\rho_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

且 $Id, (1\,2), (1\,2\,3)$ 是 S_3 的共轭类的完全代表元，且由命题 *3.3.5,* 共轭的元素的特征相等，从而可以通过这三个元素计算 $\langle \chi_\rho,\chi_\rho\rangle$. 易得 $\chi_\rho(Id) = 2, \chi_\rho((1\,2)) = 0, \chi_\rho((1\,2\,3)) = -1$, 且 S_3 中有三个对换与两个三轮换，从而

$$\langle \chi_\rho,\chi_\rho\rangle = \frac{1}{|S_3|}\sum_{\sigma\in S_3}\chi_\rho(\sigma)\overline{\chi_\rho(\sigma)} = \frac{1}{6}(1\cdot 2^2 + 3\cdot 0^2 + 2\cdot(-1)^2) = 1,$$

从而由推论 *3.3.19*可知,ρ 不可约。

例 3.3.21. 我们尝试找到 S_3 的所有不可约表示，并把 S_3 的标准表示 $\varphi : S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$

$$\varphi_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \varphi_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

分解为不可约表示。

首先，S_3 的平凡表示 $\varphi_1 : S_3 \to \mathbb{C}^*$ 是不可约表示，它的特征标为 $\chi_1(\sigma) = 1, \forall\,\sigma\in S_3$. 由例 *3.3.20,* 表示 $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$

$$\rho_{(1\,2)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{(1\,2\,3)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

是不可约的，它的特征标为 $\chi_3(Id)=2, \chi_3((1\,2))=0, \chi_3((1\,2\,3))=-1$. 我们希望 S_3 有三个不等价的不可约表示。设第三个不可约表示的次数为 d, 由推论 3.2.11可知,$1^2+d^2+2^2\le|S_3|=6$, 从而 $d=1$. 事实上，一维表示 $\varphi_2: S_3\to\mathbb{C}^*$

$$\varphi_2(\sigma)=\begin{cases}1, & \sigma\text{是偶置换};\\ -1, & \sigma\text{是奇置换}.\end{cases}$$

是不可约表示，它的特征标也为

$$\chi_2(\sigma)=\begin{cases}1, & \sigma\text{是偶置换};\\ -1, & \sigma\text{是奇置换}.\end{cases}$$

于是我们可以把这三个不可约表示的特征标列成如下的特征标表：

	C_{Id}	$C_{(1\,2)}$	$C_{(1\,2\,3)}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

而容易计算 S_3 的标准表示 φ 的特征标表为：

	C_{Id}	$C_{(1\,2)}$	$C_{(1\,2\,3)}$
χ_φ	3	1	0

从而从特征标表可知，$\chi_\varphi=\chi_1+\chi_3$, 从而 $\varphi\sim\varphi_1\oplus\rho$. 或者，可由定理 3.3.18直接计算每个不可约构成的重数：

$$m_1=\langle\chi_\varphi,\chi_1\rangle=\frac{1}{6}(1\cdot 3+3\cdot 1+2\cdot 0)=1;$$
$$m_2=\langle\chi_\varphi,\chi_2\rangle=\frac{1}{6}(1\cdot 3+3\cdot(-1)+2\cdot 0)=0;$$
$$m_3=\langle\chi_\varphi,\chi_3\rangle=\frac{1}{6}(1\cdot 6+3\cdot 0+2\cdot 0)=1.$$

3.4 正则表示

定义 3.4.1. 设 X 是有限集，$\mathbb{C}X = \left\{\sum_{x\in X} c_x x \mid c_x \in \mathbb{C}\right\}$ 是有限维向量空间，它上面的内积定义为：

$$\left\langle \sum_{x\in X} a_x x, \sum_{x\in X} b_x x \right\rangle = \sum_{x\in X} a_x \overline{b_x}.$$

定义 3.4.2 (正则表示)**.** 有限群 G 的正则表示是 $L : G \to GL(\mathbb{C}G)$

$$Lg(\sum_{h\in G} c_h h) = \sum_{h\in G} c_h gh = \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} x.$$

命题 3.4.3. 正则表示是酉表示。

证明. 直接计算：

$$\left\langle Lg(\sum_{h\in G} c_h h), Lg(\sum_{h\in G} k_h h) \right\rangle = \left\langle \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} x, \sum_{x\in G} k_{g^{-1}x} x \right\rangle = \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} \overline{k_{g^{-1}x}} = \left\langle \sum_{y\in G} c_y y, \sum_{y\in G} k_y y \right\rangle.$$

□

命题 3.4.4. 正则表示的特征标为

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1; \\ 0, & g \neq 1. \end{cases}$$

证明. 设 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$, 由 $L_g g_i = g g_i$,

$$(L_g)_{ij} = \begin{cases} 1, & g_i = g g_i; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & g = g_i g_j^{-1}; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

特别的，

$$(L_g)_{ii} = \begin{cases} 1, & g = 1; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

从而

$$\chi_L(g)=\operatorname{Tr}(L_g)=\begin{cases}|G|, & g=1;\\ 0, & g\neq 1.\end{cases}$$

□

定理 3.4.5. 正则表示有如下分解:

$$L\sim d_1\varphi^{(1)}\oplus d_2\varphi^{(2)}\oplus\cdots\oplus d_s\varphi^{(s)}.$$

证明. 直接计算内积:

$$\langle\chi_L,\chi_i\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_L(g)\overline{\chi_i(g)}=\frac{1}{|G|}|G|\,\overline{\chi_i(1)}=\deg\varphi^{(i)}=d_i,$$

由定理 3.3.18即知成立。 □

推论 3.4.6. 有公式

$$|G|=d_1^2+d_2^2+\cdots+d_s^2$$

成立。

证明. 由定理 3.4.5, 有

$$\chi_L=d_1\chi_1+d_2\chi_2+\cdots+d_s\chi_s,$$

同时作用 1 即得:

$$|G|=\chi_L(1)=d_1\chi_1(1)+d_2\chi_2(1)+\cdots+d_s\chi_s(1)=d_1^2+d_2^2+\cdots+d_s^2.$$

□

定理 3.4.7. 设 $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\cdots,\varphi^{(s)}$ 是 G 的不可约表示的所有等价类的各自的一个代表元，记 $d_i=\deg\varphi^{(i)}$, 则

$$B=\left\{\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)}\mid 1\leq k\leq s,1\leq i,j\leq d_k\right\}$$

是 $L(G)$ 的一组正交基。

证明. 由定理 3.2.11,B 是正交集，且

$$|B| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2 = |G| = \dim L(G),$$

即知 B 是 $L(G)$ 的一组正交基。 □

定理 3.4.8. 集合 $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s\}$ 是 $Z(L(G))$ 的一组正交基。

证明. 由定理 3.3.10,$\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s\}$ 是正交集，只要证它张成了 $Z(L(G))$. $\forall f \in Z(L(G))$, 由定理 3.4.7, 设

$$f = \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}^{(k)},$$

由于 f 是类函数，从而 $\forall x \in G$,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g^{-1}xg) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)}\varphi_{ij}^{(k)}(g^{-1}xg) &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{ij}^{(k)}(g^{-1}xg) \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \left[\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{g^{-1}}^{(k)}\varphi_x^{(k)}\varphi_g^{(k)}\right]_{ij} \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \left[(\varphi_x^{(k)})^{\#}\right]_{ij} = \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \frac{\operatorname{Tr}(\varphi_x^{(k)})}{\deg \varphi^{(k)}} I_{ij} = \sum_{i,k} c_{ii}^{(k)} \frac{1}{d_k}\chi_k(x), \end{aligned}$$

即

$$f = \sum_{i,k} c_{ii}^{(k)} \frac{1}{d_k}\chi_k,$$

从而 $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s\}$ 确实张成了 $Z(L(G))$. □

推论 3.4.9. 不可约表示的等价类的数量等于群的共轭类的数量。

证明. 这是因为 $s = \dim Z(L(G)) = |Cl(G)|$. □

推论 3.4.10. 有限群是交换群当且仅当它有 $|G|$ 个不等价的不可约表示。

证明. 群 G 是交换的当且仅当 $|G| = |Cl(G)|$. □

例 3.4.11. 记 ω_n 是 n 次单位根，定义表示 $\chi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^*$

$$\chi_k([m]) = (w_n)^{km},$$

则 $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_n - 1$ 是不同的不可约表示。

定义 3.4.12 (特征标表)**.** 形如

G	C_1	C_2	$\cdots$	C_s
χ_1	1	1	$\cdots$	1
χ_2	*	*		
$\vdots$	*		$\ddots$	
χ_s				

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_s$ 是 g 的共轭类，$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ 是 G 的互不等价的不可约表示，表内的数是各个特征标在相应等价类上的取值。

定理 3.4.13 (第二正交关系)**.** 特征标表的列是互相正交的，即设 $g \in C, h \in C'$, 其中 C, C' 是 G 的共轭类，则

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|}, & C = C'; \\ 0, & C \neq C'. \end{cases}$$

证明. 由定理 3.3.18, 对 $\forall\, g \in G$,

$$\delta_{C'}(g) = \sum_{i=1}^{s} \langle \delta_{C'}, \chi_i \rangle \chi_i(g) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \delta_{C'}(x)\overline{\chi_i(x)}\chi_i(g) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in C'} \overline{\chi_i(x)}\chi_i(g) = \frac{|C'|}{|G|} \sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)},$$

而当 $g \in C'$ 时，$\delta_{C'}(g) = 1$, 否则，$\delta_{C'}(g) = 0$, 从而

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|}, & C = C'; \\ 0, & C \neq C'. \end{cases}$$

□

注记 3.4.14. 事实上，特征标表就是 $Z(L(G))$ 的由 $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s\}$ 到 $\{\delta_C \mid C \in Cl(G)\}$ 的基变换矩阵。

例 3.4.15. $\mathbb{Z}_4$ 的特征标表：

$\mathbb{Z}_4$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	i	-1	$-i$
χ_4	1	$-i$	-1	i

3.5 阿贝尔群的表示

由有限生成阿贝尔群的结构定理，有限阿贝尔群都是若干循环群的直和，从而我们只需要建立阿贝尔群的直和的表示。

命题 3.5.1. 设 G_1, G_2 是两个阿贝尔群，$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ 与 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 分别是它们的所有互不等价的不可约表示，有 $|G_1| = m, |G_2| = n$, 定义函数 $\alpha_{ij} : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^*$

$$\alpha_{ij}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2),$$

则 $\{\alpha_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 是 $G_1 \times G_2$ 的不可约表示的完全集。

证明. 容易验证 α_{ij} 是表示，若 $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$, 则 $\forall\ g \in G_1$,

$$\chi_i(g) = \alpha_{ij}(g, 1) = \alpha_{kl}(g, 1) = \chi_k(g),$$

从而 $i = k$, 同理 $j = l$, 即 $\{\alpha_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 是 $G_1 \times G_2$ 中的元素互不相同。它有 mn 个元素，又 $|G_1 \times G_2| = mn$, 从而 $G_1 \times G_2$ 有 mn 个互不等价的不可约表示，就是 $\{\alpha_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$. □

例 3.5.2. $\mathbb{Z}_2$ 的特征标表：

$\mathbb{Z}_2$	$[0]$	$[1]$
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

例 3.5.3. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 的特征标表：

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$([0],[0])$	$([0],[1])$	$([1],[0])$	$([1],[1])$
α_{11}	1	1	1	1
α_{12}	1	-1	1	-1
α_{21}	1	1	-1	-1
α_{22}	1	-1	-1	1

4 有限群上的 Fourier 分析

4.1 循环群上的周期函数

定义 4.1.1. 周期为 n 的定义在整数环上的周期函数 f 可以自然看成循环群 $\mathbb{Z}_n$ 上的函数。

$$f \in L(\mathbb{Z}_n) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{n-1}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_{[0]}, \delta_{[1]}, \cdots, \delta_{[n-1]}\},$$

其中，$\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{n-1}$ 是由推论 *3.4.10*保证的循环群 $\mathbb{Z}_n$ 的 n 个互不等价的不可约特征标，从而

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k,$$

其中，

$$\chi_k([m]) = e^{\frac{2\pi ikm}{n}}.$$

定义 4.1.2 (Fourier 变换)**.** 设 $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$, 定义 f 的 *Fourier* 变换 $T(f) = \widehat{f} : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}([m]) = n \langle f, \chi_m \rangle = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f([k]) \overline{\chi_m([k])} = \sum_{k=0}^{n-1} f([k]) e^{-\frac{2\pi ikm}{n}},$$

显然有 $\widehat{f} \in L(\mathbb{Z}_n)$.

命题 4.1.3. *Fourier* 变换是可逆的，事实上，

$$f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}([k]) \chi_k.$$

4.2 卷积

定义 4.2.1. 设 G 是有限群，$\forall a, b \in L(G)$, a, b 的卷积 $a * b : G \to \mathbb{C}$ 定义为

$$a * b(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1}) b(y).$$

命题 4.2.2. 对 $\forall\, g, h \in G$,

$$\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}.$$

证明. 直接计算:

$$\delta_g * \delta_h(x) = \sum_{y\in G} \delta_g(xy^{-1})\delta_h(y) = \delta_g(xh^{-1}) = \begin{cases} 1, & xh^{-1} = g; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = gh; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} = \delta_{gh}(x).$$

□

定理 4.2.3. $(L(G), +, *)$ 是一个环，δ_1 是乘法单位元。

证明. 对 $\forall\, a, b \in L(G)$, 有 $a = \sum_{g\in G} a(g)\delta_g, b = \sum_{g\in G} b(g)\delta_g$, 由推论 4.2.2,

$$a * b = \left(\sum_{g\in G} a(g)\delta_g\right) * \left(\sum_{g\in G} b(g)\delta_g\right) = \sum_{g,h\in G} a(g)b(h)\delta_g * \delta_h = \sum_{g,h\in G} a(g)b(h)\delta_{gh} = \sum_{x\in G}\left(\sum_{y\in G} a(xy^{-1})b(y)\right)\delta_x,$$

其中最后一个等号是令 $x = gh, y = h$ 得来，即有 $a * b \in L(G)$.

对 $\forall\, a = \sum_{g\in G} a(g)\delta_g \in L(G)$,

$$a * \delta_1(x) = \sum_{y\in G} a(xy^{-1})\delta_1(y) = a(x1^{-1})\delta_1(1) = a(x),$$

即 $a * \delta_1 = a$, 同理，$\delta_1 * a = a$, 即 δ_1 是乘法单位元。

对 $\forall\, a, b, c \in L(G), \forall\, x \in G$,

$$\begin{aligned}[(a * b) * c](x) &= \sum_{y\in G} [a * b](xy^{-1})c(y) = \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} a(xy^{-1}z^{-1})b(z)c(y) \\ &= \sum_{y\in G}\sum_{u\in G} a(xu^{-1})b(uy^{-1})c(y) = \sum_{u\in G} a(xu^{-1})\sum_{y\in G} b(uy^{-1})c(y) = \sum_{u\in G} a(xu^{-1})[b * c](u)) = [a * (b * c)](x),\end{aligned}$$

其中换行处的等号是令 $u = zy$ 得来的，从而乘法满足结合律。

其它定义都容易验证。 □

命题 4.2.4. 类函数的集合 $Z(L(G))$ 是 $L(G)$ 的中心。

证明. 设 $\forall f \in Z(L(G)), a \in L(G)$,

$$a * f(x) = \sum_{y\in G} a(xy^{-1})f(y) = \sum_{y\in G} a(xy^{-1})f(xyx^{-1}) = \sum_{z\in G} a(z)f(xz^{-1}) = \sum_{z\in G} f(xz^{-1})a(z) = f * a(x),$$

其中第三个等号是令 $z = xy^{-1}$ 得来的，即得 $Z(L(G))$ 包含于 $L(G)$ 的中心。

反之，任取 $L(G)$ 的中心的元素 f, 断言：$\forall\, g, h \in G$,

$$f(gh) = f(hg).$$

这是因为注意到

$$f(gh) = f(g(h^{-1})^{-1})\delta_{h^{-1}}(h^{-1}) = \sum_{y\in G} f(gy^{-1})\delta_{h^{-1}}(y) = f*\delta_{h^{-1}}(g) = \delta_{h^{-1}}*f(g) = \sum_{y\in G}\delta_{h^{-1}}(gy^{-1})f(y) = \delta_{h^{-1}}(h^{-1})f((h^{-1})^{-1}g) = f(hg).$$

从而 $\forall\, g, h \in G$,

$$f(ghg^{-1}) = f((gh)g^{-1}) = f(g^{-1}(gh)) = f((g^{-1}g)h) = f(h),$$

即 $f \in Z(L(G))$, 即 $L(G)$ 的中心包含于 $Z(L(G))$.

综上，$Z(L(G))$ 就是 $L(G)$ 的中心。 □

4.3 有限 Abel 群上的 Fourier 分析

定义 4.3.1 (对偶群)**.** 设 G 是一个有限 *Abel* 群，令 $\widehat{G}$ 是 G 的所有不可约特征标，称为 G 的对偶群。

命题 4.3.2. 在 $\widehat{G}$ 上定义乘法：对 $\forall\, \chi, \theta \in \widehat{G}, \forall\, g \in G$,

$$\chi \cdot \theta(g) = \chi(g)\theta(g),$$

则 $(\widehat{G}, \cdot)$ 是 $|G|$ 阶 *Abel* 群。

证明. 对 $\forall\, \chi, \theta \in \widehat{G}$, $\forall\, g_1, g_2 \in G$,

$$\chi \cdot \theta(g_1 g_2) = \chi(g_1 g_2)\theta(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)\theta(g_1)\theta(g_2) = \chi(g_1)\theta(g_1)\chi(g_2)\theta(g_2) = (\chi \cdot \theta)(g_1) \cdot (\chi \cdot \theta)(g_2),$$

即 $\widehat{G}$ 在乘法预算下封闭。容易验证交换律与结合律。单位元是平凡表示 χ_1. 逆元是 $\chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, $\forall\, g \in G$. 由推论 3.4.10,$(\widehat{G}, \cdot)$ 的阶为 $|G|$. □

例 4.3.3. 设 $G = \mathbb{Z}_n$, 则 $\widehat{G} = \{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{n-1}\}$, 其中

$$\chi_k([m]) = e^{\frac{2\pi i k m}{n}}.$$

容易验证 $G \to \widehat{G}$

$$[k] \mapsto \chi_k$$

是同构。

注记 4.3.4. 事实上，由有限生成 *Abel* 群的结构定理，对任意有限 *Abel* 群 G, 都有 $G \simeq \widehat{G}$.

定义 4.3.5 (Fourier 变换)**.** 设 G 是一个有限 *Abel* 群，$f \in L(G)$, 定义 f 的 *Fourier* 变换 $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$,

$$\widehat{f}(\chi) = |G| \langle f, \chi \rangle = \sum_{g \in G} f(g)\overline{\chi(g)},$$

其中，$|G| \langle f, \chi \rangle$ 称为 f 的 *Fourier* 系数。

例 4.3.6. 设对 $\chi, \theta \in \widehat{G}$, 由第一正交关系（定理 *3.3.10*),

$$\widehat{\chi}(\theta) = |G| \langle \chi, \theta \rangle = \begin{cases} |G|, & \chi = \theta; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

即 $\widehat{\chi} = |G|\, \delta_\chi$.

定理 4.3.7 (Fourier 逆变换)**.** 设 $f \in L(G)$, 则

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi.$$

证明. 直接计算:

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |G| \langle f, \chi \rangle \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi.$$

□

命题 4.3.8. 映射 $T : L(G) \to L(\widehat{G})$

$$Tf = \widehat{f}$$

是可逆线性变换。

证明. 对 $\forall\, f_1, f_2 \in L(G), \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \forall\, \chi \in \widehat{G}$,

$$T(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\chi) = c_1 \widehat{f_1 + c_2} f_2(\chi) = |G| \langle c_1 f_1 + c_2 f_2, \chi \rangle = c_1 |G| \langle f_1, \chi \rangle + c_2 |G| \langle f_2, \chi \rangle = c_1 \widehat{f}_1(\chi) + c_2 \widehat{f}_2(\chi) = c_1 T f_1(\chi) + c_2 T f_2(\chi),$$

即 T 是线性的。而由定理 4.3.7, $\forall\, f \in L(G)$, $\widehat{f}$ 有逆，从而 T 是单射。又 $L(G), L(\widehat{G})$ 是有限维向量空间，且 G 是 Abel 群，有

$$\dim L(G) = n = \dim L(\widehat{G}),$$

从而 T 是可逆线性变换。 □

定理 4.3.9. *Fourier* 变换满足

$$\widehat{a * b} = \widehat{a} \cdot \widehat{b},$$

从而命题 *4.3.8*定义的 T 给出了 $(L(G), +, *)$ 到 $(L(\widehat{G}), +, \cdot)$ 的环同构。

证明. 对 $\forall\, a, b \in L(G), \forall\, \chi \in \widehat{G}$,

$$\begin{aligned}\widehat{a*b}(\chi) = |G|\,\langle a*b, \chi\rangle = |G| \cdot \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(a*b)(x)\overline{\chi(x)} = \sum_{x\in G}\overline{\chi(x)}\sum_{y\in G}a(xy^{-1})b(y) &= \sum_{y\in G}b(y)\sum_{x\in G}a(xy^{-1})\overline{\chi(x)}\\ &= \sum_{y\in G}b(y)\sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(zy)}\\ &= \sum_{y\in G}b(y)\overline{\chi(y)}\sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(z)}\\ &= \sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(z)}\sum_{y\in G}b(y)\overline{\chi(y)} = |G|\,\langle a, \chi\rangle \cdot \langle b, \chi\rangle = \widehat{a}(\chi)\widehat{b}(\chi),\end{aligned}$$

其中第一次换行处的等号是令 $z = xy^{-1}$ 得来的。由命题 4.3.8, T 是线性空间的同构，只要证它是环同态：对 $\forall\, a, b \in L(G)$,

$$T(a*b) = \widehat{a*b} = \widehat{a}\cdot\widehat{b} = Ta \cdot Tb.$$

综上，T 给出了 $(L(G), +, *)$ 到 $(L(\widehat{G}), +, \cdot)$ 的环同构。 □

例 4.3.10. 设 $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 是以 n 为周期的函数，则它们的卷积定义为

$$f*g(m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(m-k)g(k),$$

Fourier 变换定义为

$$\widehat{f}(m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)e^{-\frac{2\pi imk}{n}},$$

Fourier 逆变换告诉我们

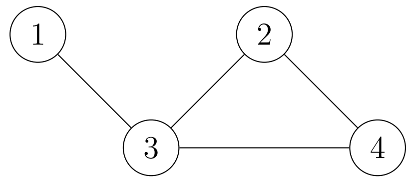
$$f(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)e^{\frac{2\pi imk}{n}}.$$

4.4 图论中的应用

定义 4.4.1.

$$图 = 顶点 + 边$$

例 4.4.2. 这是一个图



定义 4.4.3 (连接矩阵)**.** 设 Γ 是一个图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是它的顶点集，对 $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, 令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $A = (a_{ij})$ 称为 Γ 的连接矩阵。

推论 4.4.4. 图的连接矩阵是实对称矩阵。

例 4.4.5. 例 *4.4.2*中的图的连接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义 4.4.6 (Cayley 图)**.** 设 G 是一个群，$S \subset G$, 若

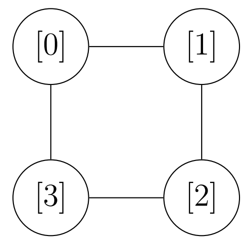
1. $1 \notin S$;

2. $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$,

则称 S 是 G 的一个对称子集。此时，G 关于 S 的 *Cayley* 图是以 G 的元素为顶点，$\{g,h\}\in E \Leftrightarrow gh^{-1}\in S \Leftrightarrow hg^{-1}\in S$ 所得的图。

注记 4.4.7. 群 G 关于 S 的 *Cayley* 图是连通的当且仅达 S 生成 G.

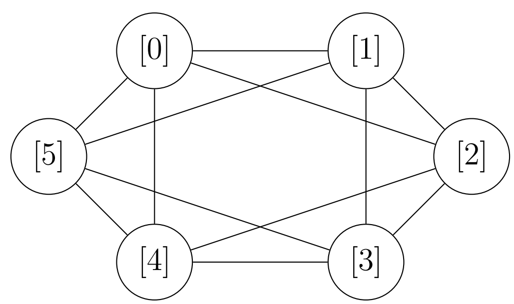
例 4.4.8. $G=\mathbb{Z}_4$ 关于 $S=\{\pm[1]\}$ 的 *Cayley* 图：



它的连接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 4.4.9. $G=\mathbb{Z}_6$ 关于 $S=\{\pm[1],\pm[2]\}$ 的 *Cayley* 图：



它的连接矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义 4.4.10 (循环图)**.** 循环群 $\mathbb{Z}_n$ 的 *Cayley* 图称为循环图。

定义 4.4.11 (循环矩阵)**.** 循环矩阵是形如

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} = a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 + \cdots + a_{n-1} C^{n-1}$$

的矩阵，其中 $C^n = I$.

注记 4.4.12. 事实上，若存在函数 $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$, 使得 $A_{ij} = f([j] - [i])$, 则 A 是一个循环矩阵，此时 $a_i = f([i])$. 若 S 是 $\mathbb{Z}_n$ 的对称子集，则示性函数 δ_S 所得到的循环矩阵就是 $\mathbb{Z}_n$ 关于 S 的 *Cayley* 图的连接矩阵。

我们的目标是刻画 Abel 群的 Cayley 图的特征值。

引理 4.4.13. 设 G 是一个 *Abel* 群，$a \in (L(G), *)$, 定义卷积算子 $A : L(G) \to L(G)$

$$A(b) = a * b,$$

则 A 是线性的，且 $\forall\, \chi \in \widehat{G}$, χ 是 A 的关于特征值 $\widehat{a}(\chi)$ 的特征向量，从而 A 可对角化。

证明. 线性是显然的。记 $n = |G|, \forall\ \chi \in \widehat{G}$, 由定理 4.3.9与例 4.3.6,

$$\widehat{a * \chi} = \widehat{a} \cdot \widehat{\chi} = \widehat{a} \cdot n\delta_\chi.$$

直接计算，$\forall\ \theta \in \widehat{G}$,

$$(\widehat{a} \cdot n\delta_\chi)(\theta) = \begin{cases} \widehat{a}(\theta)n, & \chi = \theta; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

从而

$$\widehat{a} \cdot n\delta_\chi = \widehat{a}(\chi)n\delta_\chi.$$

由 Fourier 逆变换（定理 4.3.7），

$$a * \chi = \frac{1}{|G|}\sum_{\theta \in \widehat{G}} \widehat{a * \chi}(\theta)\theta = \frac{1}{|G|}\sum_{\theta \in \widehat{G}} (\widehat{a}(\chi)n\delta_\chi)(\theta)\theta = \frac{1}{n}\widehat{a}(\chi)n\chi = \widehat{a}(\chi)\chi,$$

即

$$A\chi = \widehat{a}(\chi)\chi,$$

即 χ 是 A 的关于特征值 $\widehat{a}(\chi)$ 的特征向量。从而 $\widehat{G}$ 是 A 的特征向量组成的正交基，即 A 可对角化。 □

定理 4.4.14. 设 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 是交换群，$S \subset G$ 是对称子集，$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ 是 G 的互不等价的不可约特征标，A 是 G 关于 S 的 *Cayley* 图的连接矩阵，则

1. 连接矩阵 A 的特征值是实数：$\forall\ 1 \le i \le n$,
$$\lambda_i = \sum_{s \in S} \chi_i(s);$$

2. 特征值对应的特征向量是：$\forall\ 1 \le i \le n$,
$$v_i = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\left(\chi_i(g_1), \chi_i(g_2), \cdots, \chi_i(g_n)\right)^T,$$
它是一组标准正交基。

证明. 令 $\delta_S=\sum_{s\in S}\delta_s$, 即

$$\delta_S(x)=\begin{cases}1, & x\in S;\\ 0, & x\notin S.\end{cases}$$

定义卷积算子 $F:L(G)\to L(G)$

$$F(b)=\delta_S*b.$$

由引理 4.4.13, $\forall\ 1\le i\le n$, χ_i 是 F 关于特征值 $\widehat{\delta_S}(\chi_i)$ 的特征向量，而

$$\widehat{\delta_S}(\chi_i)=n\left\langle\delta_S,\chi_i\right\rangle=\sum_{x\in S}\delta_S(x)\overline{\chi_i(x)}=\sum_{s\in S}\overline{\chi_i(s)}=\sum_{s\in S}\overline{\chi_i(s^{-1})}=\sum_{s\in S}\left(\chi_i(s^{-1})\right)^{-1}=\sum_{s\in S}\chi_i(s)=\lambda_i,$$

其中倒数第四个等号是由 S 是对称集得来的,倒数第三个等号是由一维特征标(表示)χ_i 是酉表示得来的。又注意到 $B=\{\delta_{g_1},\delta_{g_2},\cdots,\delta_{g_n}\}$ 是 $L(G)$ 的一组基，计算 F 在 B 下的矩阵 $[F]_B$: 由命题 4.2.2,

$$F(\delta_{g_j})=\delta_S*\delta_{g_j}=\sum_{s\in S}\delta_s*\delta_{g_j}=\sum_{s\in S}\delta_{sg_j},$$

从而

$$([F]_B)_{ij}=\begin{cases}1, & \exists s\in S,\text{使得}g_i=sg_j;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & g_ig_j^{-1}\in S;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=A_{ij},$$

从而 λ_i 也是 A 的特征向量。又注意到

$$\begin{aligned}Av_i=[F]_Bv_i&=\frac{1}{\sqrt{|G|}}\left(F(\chi_i)(g_1),F(\chi_i)(g_2),\cdots,F(\chi_i)(g_n)\right)^T=\frac{1}{\sqrt{|G|}}\left(\lambda_i\chi_i(g_1),\lambda_i\chi_i(g_2),\cdots,\lambda_i\chi_i(g_n)\right)^T\\&=\lambda_i\frac{1}{\sqrt{|G|}}\left(\chi_i(g_1),\chi_i(g_2),\cdots,\chi_i(g_n)\right)^T=\lambda_iv_i,\end{aligned}$$

且由向量的内积

$$\left(\delta_{g_i},\delta_{g_j}\right)=|G|\left\langle\delta_{g_i},\delta_{g_j}\right\rangle=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

知，$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是标准正交基。只需要证 λ_i 是实数:

- 若 $s=s^{-1}$, 由 χ_i 是酉表示,

$$\chi_i(s)=\chi_i(s^{-1})=\overline{\chi_i(s)}$$

是实数;

- 若 $s\neq s^{-1}\in S$, 则

$$\chi_i(s)+\chi_i(s^{-1})=\chi_i(s)+\overline{\chi_i(s)}$$

是实数,

从而

$$\lambda_i=\sum_{s\in S}\chi_i(s)$$

是实数。 □

推论 4.4.15. 设 A 是 n 阶循环矩阵,由注记 *4.4.12,* 它是 $\mathbb{Z}_n$ 关于某对称集的 *Cayley* 图的连接矩阵,则由定义 *4.1.1*与定理 *4.4.14,* A 的特征值为

$$\lambda_k=\sum_{[m]\in S}e^{\frac{2\pi ikm}{n}},$$

其中 $0\leq k\leq n-1$, 对应的特征向量为

$$v_k=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1,e^{\frac{2\pi ik2}{n}},\cdots,e^{\frac{2\pi ik(n-1)}{n}}\right),$$

且 $\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$ 是一组标准正交基。

4.5 非 Abel 群上的 Fourier 分析

定理 4.5.1. 设 G 是有限 *Abel* 群,$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n$ 是它的互不等价的不可约特征标,定义映射 $T:L(G)\to\mathbb{C}^n$

$$Tf=(n\langle f,\chi_1\rangle,n\langle f,\chi_2\rangle,\cdots,n\langle f,\chi_n\rangle)=(\widehat{f}(\chi_1),\widehat{f}(\chi_2),\cdots,\widehat{f}(\chi_n)).$$

又 *Fourier* 逆变换可知，T 是单射，且显然是线性的。又 $\dim L(G)=n$, 从而 $L(G)\cong\mathbb{C}^n$ 是向量空间的同构。又注意到

$$\begin{aligned}T(a*b)=(\widehat{a*b}(\chi_1),\widehat{a*b}(\chi_2),\cdots,\widehat{a*b}(\chi_n))&=(\widehat{a}(\chi_1)\widehat{b}(\chi_1),\widehat{a}(\chi_2)\widehat{b}(\chi_2),\cdots,\widehat{a}(\chi_n))\widehat{b}(\chi_n)\\&=(\widehat{a}(\chi_1),\widehat{a}(\chi_2),\cdots,\widehat{a}(\chi_n))\cdot(\widehat{b}(\chi_1),\widehat{b}(\chi_2),\cdots,\widehat{b}(\chi_n))=Ta\cdot Tb,\end{aligned}$$

即 T 给出了 $(L(G),+,*)$ 到 $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ 的环同构，其中 $\cdot$ 是分量各自相乘。

定义 4.5.2 (Fourier 变换)**.** 设 G 是一个 n 阶有限群，$\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\cdots,\varphi^{(s)}$ 是它的互不等价的不可约表示的完全集，记 $d_i=\deg\varphi^{(i)}$, 由定理 *3.4.7*,

$$\left\{\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)}\mid 1\le k\le s,1\le i,j\le d_k\right\}$$

是 $L(G)$ 的一组正交基。定义映射 $T\to M_{d_1}(\mathbb{C})\times M_{d_2}(\mathbb{C})\times\cdots\times M_{d_s}(\mathbb{C})$

$$Tf=(\widehat{f}(\varphi^{(1)}),\widehat{f}(\varphi^{(2)}),\cdots,\widehat{f}(\varphi^{(s)})),$$

其中

$$\left(\widehat{f}(\varphi^{(k)})\right)_{ij}=n\left\langle f,\varphi_{ij}^{(k)}\right\rangle=\sum_{g\in G}f(g)\overline{\varphi_{ij}^{(k)}(g)},$$

也记为

$$\widehat{f}(\varphi^{(k)})=\sum_{g\in G}f(g)\overline{\varphi_g^{(k)}},$$

称为 f 的 *Fourier* 变换。

定理 4.5.3 (Fourier 逆变换)**.** 对 $\forall\ f\in L(G)$,

$$f=\frac{1}{n}\sum_{i,j,k}d_k\left(\widehat{f}(\varphi^{(k)})\right)_{ij}\varphi_{ij}^{(k)}.$$

证明. 由定理 3.4.7, 直接计算：

$$f=\sum_{i,j,k}\left\langle f,\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)}\right\rangle\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)}=\frac{1}{n}\sum_{i,j,k}d_kn\left\langle f,\varphi_{ij}^{(k)}\right\rangle\varphi_{ij}^{(k)}=\frac{1}{n}\sum_{i,j,k}d_k\left(\widehat{f}(\varphi^{(k)})\right)_{ij}\varphi_{ij}^{(k)}.$$

□

命题 4.5.4. 映射 $T: L(G) \to M_{d_1}(\mathbb{C}) \times M_{d_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_s}(\mathbb{C})$ 是向量空间的同构。

证明. 容易验证 T 是线性映射。由 Fourier 逆变换（定理 4.5.3），T 是单射。又由推论 3.4.6,

$$\dim L(G) = |G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2 = \dim\left(M_{d_1}(\mathbb{C}) \times M_{d_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_s}(\mathbb{C})\right),$$

从而 T 是同构。 □

定理 4.5.5 (Wedderburn)**.** *Fourier* 变换

$$T: L(G) \to M_{d_1}(\mathbb{C}) \times M_{d_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_s}(\mathbb{C})$$

是环同构。

证明. 由命题 4.5.4, T 是向量空间的同构，只要证它还保持乘法。即 $\forall\, a, b \in L(G)$,

$$T(a * b) = T(a) \cdot T(b).$$

由定理 3.4.7, 只要证 $\forall\, 1 \leq k \leq s$,

$$\widehat{a * b}(\varphi^{(k)}) = \widehat{a}(\varphi^{(k)}) \cdot \widehat{b}(\varphi^{(k)}).$$

直接计算

$$\widehat{a * b}(\varphi^{(k)}) = \sum_{x \in G} (a * b)(x)\overline{\varphi_x^{(k)}} = \sum_{x \in G} \overline{\varphi_x^{(k)}} \sum_{y \in G} a(xy^{-1})b(y) = \sum_{y \in G} b(y) \sum_{x \in G} a(xy^{-1})\overline{\varphi_x^{(k)}},$$

令 $z = xy^{-1}$,

$$\widehat{a * b}(\varphi^{(k)}) = \sum_{y \in G} b(y) \sum_{x \in G} a(xy^{-1})\overline{\varphi_x^{(k)}} = \sum_{y \in G} b(y) \sum_{z \in G} a(z)\overline{\varphi_{zy}^{(k)}} \sum_{y \in G} b(y) \sum_{z \in G} a(z)\overline{\varphi_z^{(k)}} \cdot \overline{\varphi_y^{(k)}} = \sum_{z \in G} a(z)\overline{\varphi_z^{(k)}} \sum_{y \in G} b(y)\overline{\varphi_y^{(k)}} = \widehat{a}(\varphi^{(k)}) \cdot \widehat{b}(\varphi^{(k)}).$$

□

注记 4.5.6. 我们可以通过计算 $Ta \cdot Tb$ 再计算它的 *Fourier* 逆变换来计算 $a * b$.

注记 4.5.7. 注意到

$$\widehat{\delta_g}(\varphi^{(k)}) = \sum_{x \in G} \delta_g(x)\overline{\varphi_x^{(k)}} = \overline{\varphi_g^{(k)}},$$

从而 $T\delta_g$ 是包含了所有不可约表示在 g 的像的向量。

5 Burnside 定理

5.1 一些数论

定义 5.1.1. 称一个复数是代数数，若它是某个整系数多项式的根，不是代数数的数称为超越数。

定义 5.1.2. 称一个复数是代数整数，若它是某个首一整系数多项式的根。

例 5.1.3. *1.* n 次单位根是代数整数；

2. 整数矩阵的特征值是代数整数。

命题 5.1.4. 有理数是代数整数当且仅当它是整数。

引理 5.1.5. 复数 y 是代数整数，当且仅当存在不全为 0 的复数 $y_1, y_2, \cdots, y_t$, 使得 $\forall\ 1 \le i \le t$,

$$yy_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} y_j,$$

其中 a_{ij} 是整数。

推论 5.1.6. 代数整数环 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环。

命题 5.1.7. 代数整数的共轭也是代数整数。

5.2 维数定理

推论 5.2.1. 设 χ 是有限群 G 的特征标，则 $\forall\ g \in G$, $\chi(g)$ 是代数整数。

证明. 设 $\varphi : G \to GL_m(\mathbb{C})$ 是以 χ 为特征标的表示，$n = |G|$. 从而 $\forall\ g \in G$, $g^n = 1$, 从而 $\varphi_g^n = I$. 由推论 3.1.10, φ_g 可对角化，设它的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 都是 n 次单位根，是代数整数，从而

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(\varphi_g) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$$

是代数整数。 □

注记 5.2.2. 其中我们证明了，$\chi_\varphi(g)$ 是 m 个 n 次单位根的和。

定理 5.2.3. 设 φ 是有限群 G 的不可约表示，$\deg\varphi = d$. 设 $g \in G$, h 是 g 所在的共轭类的元素个数，即 $h = |C_g|$, 则 $\frac{h\chi_\varphi(g)}{d}$ 是代数整数。

证明. 设 $C_1, C_2, \cdots, C_s$ 是 G 的全体共轭类，令 $h_i = |C_i|$, χ_i 是 χ_φ 在共轭类 C_i 上的取值。考虑算子

$$T_i = \sum_{x \in C_i} \varphi_x.$$

<u>断言</u>:

$$T_i = \frac{h_i}{d}\chi_i I.$$

断言的证明. 注意到 $\forall\, g \in G$,

$$\varphi_g T_i \varphi_{g^{-1}} = \sum_{x \in C_i} \varphi_g \varphi_x \varphi_{g^{-1}} = \sum_{x \in C_i} \varphi_{gxg^{-1}} = \sum_{y \in C_i} \varphi_y = T_i,$$

从而由 Schur 引理（3.1.5），$T_i = \lambda I$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 从而

$$d\lambda = \mathrm{Tr}(\lambda I) = \mathrm{Tr}(T_i) = \sum_{x \in C_i} \mathrm{Tr}(\varphi_x) = \sum_{x \in C_i} \chi_\varphi(x) = \sum_{x \in C_i} \chi_i = |C_i|\,\chi_i = h_i\chi_i,$$

即 $\lambda = \frac{h_i\chi_i}{d}$. □

<u>断言</u>:

$$T_i T_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} T_k,$$

其中 a_{ijk} 是整数。

断言的证明. 计算

$$T_i T_j = \sum_{x \in C_i} \varphi_x \cdot \sum_{y \in C_j} \varphi_y = \sum_{x \in C_i, y \in C_j} \varphi_{xy} = \sum_{g \in G} a_{ijg}\varphi_g,$$

其中 $a_{ijg}\in\mathbb{Z}$ 是 $g\in G$ 可以写成 $g=xy,\ x\in C_i,\ y\in C_j$ 的方法数。设 $g\in C_k$ 时，将 a_{ijg} 记为 a_{ijk}，只要说明 a_{ijg} 只依赖于 g 所在的共轭类，则

$$\sum_{g\in G}a_{ijg}\varphi_g=\sum_{k=1}^{s}\sum_{g\in C_k}a_{ijg}\varphi_g=\sum_{k=1}^{s}a_{ijk}\sum_{g\in C_k}\varphi_g=\sum_{k=1}^{s}a_{ijk}T_k,$$

即

$$T_iT_j=\sum_{k=1}^{s}a_{ijk}T_k.$$

令

$$X_g=\{(x,y)\in C_i\times C_j\mid xy=g\},$$

从而 $a_{ijg}=|X_g|$. 设 g' 与 g 共轭，即 $g'=kgk^{-1}$, 定义映射 $\psi:X_g\to X_{g'}$

$$(x,y)\mapsto(kxk^{-1},kyk^{-1}).$$

注意到 $kxk^{-1}\in C_i$, $kyk^{-1}\in C_j$, 且 $kxk^{-1}kyk^{-1}=kxyk^{-1}=kgk^{-1}=g'$, 从而 $\psi((x,y))\in X_{g'}$. 同理，ψ 的逆 $\tau:X_{g'}\to X_g$

$$(x',y')\mapsto(k^{-1}x'k,k^{-1}y'k)$$

也良定义，从而 ψ 是双射，从而 $|X_g|=|X_{g'}|$, 即 $a_{ijg}=|X_g|$ 只依赖于 g 所在的共轭类。 □

综上两个断言，

$$\left(\frac{h_i}{d}\chi_i\right)\cdot\left(\frac{h_j}{d}\chi_j\right)=\sum_{k=1}^{s}a_{ijk}\left(\frac{h_k}{d}\chi_k\right),$$

其中 a_{ijk} 是整数，由引理 5.1.5, $\frac{h_i\chi_i}{d}$ 是代数整数。 □

定理 5.2.4 (维数定理)**.** 设 φ 是群 G 的不可约表示，$\deg\varphi=d$, 则 $d\mid |G|$.

证明. 由第一正交关系（定理 3.2.2），

$$1=\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\varphi(g)},$$

从而

$$\frac{|G|}{d}=\sum_{g\in G}\frac{\chi_\varphi(g)}{d}\overline{\chi_\varphi(g)}.$$

设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全体共轭类，χ_i 是 χ_φ 在 C_i 上的取值，记 $h_i=|C_i|$, 从而

$$\frac{|G|}{d}=\sum_{g\in G}\frac{\chi_\varphi(g)}{d}\overline{\chi_\varphi(g)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{g\in C_i}\frac{\chi_\varphi(g)}{d}\overline{\chi_\varphi(g)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{g\in C_i}\left(\frac{1}{d}\chi_i\right)\overline{\chi_i}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{h_i}{d}\chi_i\right)\overline{\chi_i}.$$

由定理 5.2.3, $\frac{h_i\chi_i}{d}$ 是代数整数；由推论 5.2.1, χ_i 是代数整数，从而 $\overline{\chi_i}$ 是代数整数，从而

$$\frac{|G|}{d}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{h_i}{d}\chi_i\right)\overline{\chi_i}$$

是代数整数，它还是有理数，由命题 5.1.4, $\frac{|G|}{d}$ 是整数，即 $d\mid|G|$. □

推论 5.2.5. *设 p 是素数，G 是 p^2 阶群，则 G 是 Abel 群。*

证明. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_s$ 是 G 的所有互不等价的不可约表示的维数，由维数定理（定理 5.2.4），d_i 是 1 或 p 或 p^2. 由推论 3.4.6,

$$p^2=|G|=d_1^2+d_2^2+\cdots+d_s^2,$$

且 $d_1,d_2,\cdots,d_s$ 中至少有一个是平凡表示的维数为 1, 此时只能有 $s=p^2$, $d_i=1,\forall\ 1\le i\le s$. 由推论 3.4.10, G 是 Abel 群。 □

定义 5.2.6 (换位子群). *群 G 的子群 $G'=[G,G]=\{g^{-1}h^{-1}gh\mid g,h\in G\}$ 称为 G 的换位子群。*

命题 5.2.7. *G' 是 G 的正规子群，商群 G/G' 是 Abel 群，且任意 G 的正规子群 N, 使得 G/N 是 Abel 群，则 $G'\subset N$.*

引理 5.2.8. *设 G 是有限群，则它的一维表示的数量整除 $|G|$. 事实上，存在 G 的一维表示与 Abel 群 G/G' 的不可约表示之间的双射，从而 G 的一维表示的数量为 $|G/G'|=[G:G']$.*

证明. 记 $\pi : G \to G/G'$

$$g \mapsto gG'$$

是典则投影。设 $\psi : G/G' \to \mathbb{C}^*$ 是不可约表示，则 $\psi\pi : G \to \mathbb{C}^*$ 是一维表示。这说明 G/G' 的不可约表示的数量小于等于 G 的一维表示的数量。

接下来证明 G 的任意一维表示都可以写成这种形式。设 $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ 是一维表示，由群同构第一定理，$Im\rho \cong G/Ker\rho$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的乘法子群，是 Abel 群，且 $Ker\rho$ 是 G 的正规子群，由命题 5.2.7, $G' \subset Ker\rho$. 定义映射 $\psi : G/G' \to \mathbb{C}^*$

$$gG' \mapsto \rho(g).$$

若 $gG' = hG'$, 则 $h^{-1}g \in G' \subset Ker\rho$, 从而 $\rho(h^{-1}g)$, 即 $\rho(h) = \rho(g)$, 即 $\psi(gG') = \psi(hG')$, 从而 ψ 是良定义的。又 $\forall\ g, h \in G$,

$$\psi(gG'hG') = \psi(ghG') = \rho(gh) = \rho(g)\rho(h) = \psi(gG')\psi(hG'),$$

即 ψ 是同态，从而是一维表示，不可约。这又说明了 G 的一维表示的数量小于等于 G/G' 的不可约表示的数量。

综上，存在 G 的一维表示与 Abel 群 G/G' 的不可约表示之间的双射，这说明 G 的一维表示的数量等于 G/G' 的不可约表示的数量，从而 G 的一维表示的数量为 $|G/G'| = [G : G']$. □

推论 5.2.9. *设两个素数 $p < q$, 且 $q \not\equiv 1 \mod p$, 则 pq 阶群 G 是 Abel 群。*

证明. 设 $d_1, d_2, \cdots, d_s$ 是 G 的所有互不等价的不可约表示的维数，由维数定理（定理 5.2.4），d_i 是 1 或 p 或 q 或 pq. 由推论 3.4.6,

$$pq = |G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2,$$

且 $d_1, d_2, \cdots, d_s$ 中至少有一个是平凡表示的维数为 1, 且 $p < q$, 只能有 d_i 是 1 或 p. 设其中有 n 个 p 维表示，m 个一维表示，则

$$pq = m + np^2.$$

从而 $m|p$. 由引理 5.2.8, $m|\,|G|$, 又 $m \geq 1$, 这说明只能有 $m = p$ 或 $m = pq$.

- 若 $m = p$, 则 $pq = p + np^2$, 即 $q = 1 + np$, 这与 $q \not\equiv 1 \mod p$ 矛盾；
- 只能有 $m = pq = |G|$, 即 G 的所有不可约表示是一维表示，此时由推论 3.4.10, G 是 Abel 群。

□

5.3 Burnside 定理

引理 5.3.1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ 是 n 次单位根，则

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d| \leq d,$$

等号成立当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$.

证明. $\forall\, v, w \in \mathbb{C}$,

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\|v\| \cdot \|w\| \cos\theta + \|w\|^2,$$

其中 θ 是 v, w 的夹角。从而

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

等号成立当且仅当 $\exists\, \lambda > 0$, 使得 $v = \lambda w$ 或 $w = \lambda v$. 归纳地，

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| + \cdots + \|v_n\|,$$

等号成立当且仅当 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 各自是某个复数的正实数倍。从而

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_d| = 1 + 1 + \cdots + 1 = d,$$

等号成立当且仅当 $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, 1 \leq i \leq d, \exists\, k_i \geq 0$, 使得 $\lambda_i = k_i \lambda$, 又

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_d| = 1,$$

从而当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$. □

引理 5.3.2. 记 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\varphi(n)$ 是 *Euler* 函数，则域 $\mathbb{Q}[\omega_n]$ 是 $\varphi(n)$ 维 $\mathbb{Q}$-向量空间，它是 $z^n - 1$ 的分裂域，称为分圆域。

引理 5.3.3. 令 $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\omega_n] : \mathbb{Q})$ 是 *Galois* 群，由 *Galois* 基本定理，$|\Gamma| = \varphi(n)$, 这是因为作为 $\mathbb{Q}$-向量空间，$\dim \mathbb{Q}[\omega_n] = \varphi(n)$, 且 $\mathbb{Q}[\omega_n]$ 是 $z^n - 1$ 的分裂域。事实上，$\Gamma \cong \mathbb{Z}_n^*$.

引理 5.3.4. 设 $p(z)$ 是有理多项式，$\alpha \in \mathbb{Q}[\omega_n]$ 是 p 的一个根，则 $\forall\, \sigma \in \Gamma$, $\sigma(\alpha)$ 也是 p 的一个根。

证明. 设 $p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, 其中 $\forall\, 0 \le i \le k$, $a_i \in \mathbb{Q}$. $\forall\, \sigma \in \Gamma$, $\forall\, 0 \le i \le k$, $\sigma(a_i) = a_i$, 从而

$$p(\sigma(\alpha)) = a_k \sigma(\alpha)^k + a_{k-1}\sigma(\alpha)^{k-1} + \cdots + a_1\sigma(\alpha) + a_0 = \sigma(a_k\alpha^k + a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) = \sigma(0) = 0,$$

即 $\sigma(\alpha)$ 也是 p 的一个根。 □

推论 5.3.5. 设 α 是 n-次单位根，则 $\forall\, \sigma \in \Gamma$, $\sigma(\alpha)$ 也是 n-次单位根。

证明. 对 $z^n - 1$ 用引理 5.3.4即得。 □

注记 5.3.6 ($\Gamma \cong \mathbb{Z}_n^*$ 的证明概要)**.** Γ 置换 $z^n - 1$ 的根，它是 n 阶循环群 $C_n = \{\omega_n^k \mid 0 \le k \le n-1\}$ 的自同构，而 $C_n \cong \mathbb{Z}_n^*$, 从而定义同态 $\tau : \Gamma \to \mathbb{Z}_n^*$

$$\sigma \mapsto \sigma|_{C_n}.$$

由于 $\mathbb{Q}[\omega_n]$ 是在 $\mathbb{Q}$ 上添加 ω_n 生成的，从而 Γ 的元素都由它作用在 ω_n 上的像完全决定，从而 τ 是单射。又 $|\Gamma| = \varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$, 从而 τ 是同构。

推论 5.3.7. 设 $\alpha \in \mathbb{Q}[\omega_n]$ 是代数整数，$\sigma \in \Gamma$, 则 $\sigma(\alpha)$ 也是代数整数。

证明. α 是某个首一多项式 p 的根，由引理 5.3.4, $\sigma(\alpha)$ 也是首一多项式 p 的根，是代数整数。 □

定理 5.3.8. 设 $\alpha \in \mathbb{Q}[\omega_n]$, 则 $\forall\, \sigma \in \Gamma$, $\sigma(\alpha) = \alpha$, 当且仅当 $\alpha \in \mathbb{Q}$.

推论 5.3.9. 设 $\alpha \in \mathbb{Q}[\omega_n]$, 则 $\prod_{\alpha\in\Gamma} \sigma(\alpha) \in \mathbb{Q}$.

证明. 使用“平均技巧”，$\forall\, \tau \in \Gamma$,

$$\tau\left(\prod_{\alpha\in\Gamma}\sigma(\alpha)\right) = \prod_{\alpha\in\Gamma}\tau\sigma(\alpha) = \prod_{\rho\in\Gamma}\rho(\alpha),$$

其中最后的等号是令 $\rho = \tau\sigma$ 得来的。由定理 5.3.8, $\prod_{\alpha\in\Gamma}\sigma(\alpha) \in \mathbb{Q}$. □

引理 5.3.10. 设 G 是一个 n 阶有限群，C 是它的一个共轭类，$\varphi : G \to GL_d(\mathbb{C})$ 是一个不可约表示，$\gcd(h = |C|, d) = 1$, 则

1. $\exists\ \lambda \in \mathbb{C}^*$, 使得 $\forall\ g \in C$, $\varphi_g = \lambda I$; 或者,

2. $\forall\ g \in C$, $\chi_\varphi(g) = 0$.

证明. 记 $\chi = \chi_\varphi$. 注意到，若存在 $g \in C$, 使得 $\varphi_g = \lambda I$, 则 $\forall\ x \in C$, $\varphi_x = \lambda I$, 这是因为 λI 的共轭是它自己。又 χ 是类函数，从而若存在 $g \in C$, 使得 $\chi(g) = 0$, 则 $\forall\ x \in C$, $\chi(x) = 0$. 从而只需要证，若不存在 $g \in C$, 使得 $\varphi_g = \lambda I$, 则 $\chi(g) = 0$.

由定理 5.2.3与推论 5.2.1, $\frac{h\chi(g)}{d}$ 与 $\chi(g)$ 都是代数整数。又 $\gcd(h,d) = 1$, 由 Bézout 定理，存在整数 k, j 使得 $kh + jd = 1$. 令

$$\alpha = k \cdot \frac{h}{d}\chi(g) + j \cdot \chi(g) = \frac{kh + jd}{d}\chi(g) = \frac{\chi(g)}{d},$$

它也是代数整数。由推论 3.1.10, φ_g 可对角化，且它的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ 是 n 次单位根。φ_g 可对角化，但不是若干倍的单位阵，从而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ 不全相等，由引理 5.3.1,

$$|\chi(g)| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d| < d,$$

从而

$$|\alpha| = \left|\frac{\chi(g)}{d}\right| < 1.$$

又注意到 $\alpha = \frac{\chi(g)}{d} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d}{d} \in \mathbb{Q}[\omega_n]$, 设 $\sigma \in \Gamma$, 由引理 5.3.7, $\sigma(\alpha)$ 也是代数整数，由推论 5.3.5,

$$\sigma(\chi(g)) = \sigma(\lambda_1) + \sigma(\lambda_2) \cdots + \sigma(\lambda_d)$$

是 d 个不全相同的 n 次单位根的和，再由引理 5.3.1,

$$|\sigma(\alpha)| = \left|\sigma\left(\frac{\chi(g)}{d}\right)\right| = \left|\frac{\sigma(\chi(g))}{d}\right| < 1.$$

综上，$q = \prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(\alpha)$ 是代数整数，且

$$|q| = \left|\prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(\alpha)\right| = \prod_{\sigma \in \Gamma} |\sigma(\alpha)| < 1.$$

但推论 5.3.9告诉我们 $q \in \mathbb{Q}$, 由命题 5.1.4, $q \in \mathbb{Z}$. 但 $|q| < 1$, 故只能有 $q = 0$, 从而 $\exists\ \sigma \in \Gamma$, $\sigma(\alpha) = 0$. 由于 σ 是同构，只有 $\alpha = 0$, 从而 $\chi(g) = 0$. $\square$

定义 5.3.11. 不含非平凡正规子群的群称为单群。

引理 5.3.12. 设 G 是有限非 *Abel* 群，且存在它的一个共轭类 $C \neq \{1\}$, 满足 $|C| = p^t$, 其中 p 是素数，$t \geq 0$, 则 G 不是单群。

证明. 设 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(s)}$ 是 G 的互不等价的不可约表示的完全集，$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ 是各自的特征标，$d_1, d_2, \cdots, d_s$ 是各自的维数，设 $\varphi^{(1)}$ 是平凡表示。若 G 是单群，对 $k > 1$, $Ker\varphi^{(k)}$ 是 G 的正规子群，从而 $Ker\varphi^{(k)} = \{1\}$, 即 $\varphi^{(k)}$ 是单射。又 G 是非 Abel 群但 $\mathbb{C}^*$ 交换，只能有 $d_k > 1$. 又 $Z(G)$ 是 G 的正规子群，从而 $Z(G) = \{1\}$, 从而 $t > 0$.

设 $g \in C$, $k > 1$. 令 $Z_k = \{x \in G \mid \varphi^{(k)}_x = \lambda I, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, $H = \mathbb{C}^* I_{d_k}$, 则 $H = Z(GL_{d_k}(\mathbb{C}))$, 是正规子群。注意到 Z_k 是 H 在 $\varphi^{(k)}$ 下的原像，是 G 的正规子群。由于 $d_k > 1$, 不可能有 $Z_k = G$, 只能 $Z_k = \{1\}$. 当 $p \nmid d_k$ 时，由定理 5.3.10, $\chi_k(g) = 0$. 设 L 是 G 的正则表示，由定理 3.4.5,

$$L \sim d_1\varphi^{(1)} \oplus d_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus d_s\varphi^{(s)}.$$

由于 $g \neq 1$, 由命题 3.4.4,

$$0 = \chi_L(g) = d_1\chi_1(g) + d_2\chi_2(g) + \cdots + d_s\chi_s(g) = 1 + \sum_{k=2}^{s} d_k\chi_k(g) = 1 + \sum_{p \mid d_k} d_k\chi_k(g) = 1 + pz,$$

其中，z 是 $\chi_2(g), \chi_3(g), \cdots, \chi_s(g)$ 的整系数线性组合，是一个代数整数，从而 $\frac{1}{p} = -z$ 是代数整数，但它还是有理数，由命题 5.1.4, 它是整数，即 $p = 1$, 矛盾。 □

定理 5.3.13 (Burnside)**.** 设 G 是 $p^a q^b$ 阶有限群，其中 p, q 是素数，则它不是单群，除非它是素数阶循环群。

证明. 由于 Abel 群是单群，当且仅当它是素数阶循环群，从而可以假设 G 是非 Abel 群。由群论的知识，素数的幂次阶群有非平凡中心，不是单群，从而可以假设 $a, b \geq 1$. 由 Sylow 定理，G 有 q^b 阶的子群 H. 取 $1 \neq g \in Z(H)$，令 $N_G(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ 是 g 在 G 中的正规化子，从而 $H \subseteq N_G(g)$, 从而

$$p^a = [G : H] = [G : N_G(g)][N_G(g) : H],$$

从而 $[G : N_G(g)] = p^t$, 其中 $t \geq 0$. 但注意到 $[G : N_G(g)]$ 是 g 所在的共轭类的元素个数，由引理 5.3.12, G 不是单群。 □

6 群作用与置换表示

6.1 群作用

定义 6.1.1. 设 G 是一个群，X 是非空有限集，S_X 是它的对称群，定义同态映射 $\sigma : G \to S_X$, 也记 $\sigma_g x = gx$, 称为 G 在 X 上的一个作用。也将群作用记为映射 $G \times X \to X$.

例 6.1.2 (正则作用)**.** 取 $X = G$, 定义作用 $L : G \to G$: $\forall\, g, h \in G$,

$$L_g(h) = gh,$$

称为正则作用。

定义 6.1.3. 子集 $Y \subset X$ 称为 G-不变的，若 $\forall\, y \in Y, \forall\, g \in G$, $gy \in Y$.

定义 6.1.4. 设群作用 $G \times X \to X$, $x \in X$, 称 $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ 为 x 的轨道，它是 G-不变的。

注记 6.1.5. 事实上，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, 使得

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} Gx_i,$$

是 X 的一个轨道划分。

定义 6.1.6 (可迁)**.** 称群作用 $G \to S_X$ 是可迁的，若 $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, g \in G$, 使得 $y = gx$, 这等价于，$\forall\, x \in X$, $X = Gx$.

例 6.1.7. 令 $X = G/H$, 其中 $H < G$, 则群作用 $G \to S_X$

$$(g, g'H) \mapsto (gg')H$$

是可迁的。

定义 6.1.8 (双重可迁)**.** 称群作用 $G \to S_X$ 是双重可迁的，若 $\forall\, x \neq y \in G$, $y \neq y' \in G$, $\exists\, g \in G$, 使得 $gx = x'$, $gy = y'$.

例 6.1.9. 自然群作用 $S_n \times \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ 是双重可迁的。事实上，$\forall\ i \neq j \in \{1,2,\cdots,n\}, k \neq l \in \{1,2,\cdots,n\}$，记 $X = \{1,2,\cdots,n\} - \{i,j\}$, $Y = \{1,2,\cdots,n\} - \{k,l\}$，一定存在 $\sigma \in S_n$，使得 $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = l$，且 $\sigma|X \in S_X$.

定义 6.1.10. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是可迁的群作用，定义群作用 $\sigma^2 : G \to S_{X\times X}$

$$(g,(x,y)) \mapsto (gx,gy),$$

σ^2 的轨道称为 σ 的轨道环，轨道环的个数称为群作用的秩。

例 6.1.11. 容易验证，$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 是 σ^2 的一个轨道，从而它是 σ 的轨道环，称为对角轨道环或平凡轨道环。

命题 6.1.12. 群作用是双重可迁的，当且仅当它是秩为 2 的可迁作用。

证明. 由定义，双重可迁一定可迁。注意到 $(X,X) - \Delta$ 是轨道环，当且仅当，$\forall\ x \neq y \in G$, $y \neq y' \in G$, $\exists\ g \in G$, 使得 $gx = x'$, $gy = y'$, 即作用是可迁的，这还等价于作用有两个轨道环，即秩为 2. □

推论 6.1.13. 由例 *6.1.9*与命题 *6.1.12*, S_n 的秩是 2.

命题 6.1.14. 对一个群作用 $\sigma : G \to S_X$，记 $\mathrm{Fix}^2(g)$ 是 σ^2 关于 $g \in G$ 的不动点集，则

$$\mathrm{Fix}^2(g) = \mathrm{Fix}(g) \times \mathrm{Fix}(g),$$

故该记号是合理的，且有 $\left|\mathrm{Fix}^2(g)\right| = |\mathrm{Fix}(g)|^2$.

证明. 注意到 $g(x,y) = (gx,gy) = (x,y)$, 当且仅当 $gx = x$, $gy = y$ 即得。 □

6.2 置换表示

我们希望通过群作用与置换群的标准表示（例 2.1.8）得到新的群表示。

定义 6.2.1. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是群作用，定义表示 $\widetilde{\sigma} : G \to GL(\mathbb{C}X)$

$$\widetilde{\sigma}_g\left(\sum_{x\in X} c_x x\right) = \sum_{x\in X} c_x \sigma_g(x) = \sum_{y\in X} c_{g^{-1}(y)} y,$$

成为群关于 σ 的置换表示。

例 6.2.2 (正则表示)**.** 设 $\lambda : G \to S_G$ 是正则作用（例 *6.1.2*），则 $\widetilde{\lambda} = L$ 是正则表示。

命题 6.2.3. 置换表示 $\widetilde{\sigma} : G \to GL(\mathbb{C}X)$ 是酉表示。

证明. 同理命题 3.4.3直接验证即得。 □

命题 6.2.4. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是群作用，则

$$\chi_{\widetilde{\sigma}}(g) = |\mathrm{Fix}(g)|\,.$$

证明. 记 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $[\widetilde{\sigma}_g]$ 是 $\widetilde{\sigma}$ 在这组基下的矩阵。注意到 $\forall\ 1 \le i \le n$,

$$\widetilde{\sigma}_g(x_i) = \sigma_g(x_i),$$

从而

$$[\widetilde{\sigma}_g]_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i = \sigma_g(x_j); \\ 0, & x_i \neq \sigma_g(x_j), \end{cases}$$

特别的，

$$[\widetilde{\sigma}_g]_{ii} = \begin{cases} 1, & x_i = \sigma_g(x_i); \\ 0, & x_i \neq \sigma_g(x_i), \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_i \in \mathrm{Fix}(g); \\ 0, & x_i \neq \mathrm{Fix}(g), \end{cases}$$

从而

$$\chi_{\widetilde{\sigma}}(g) = \mathrm{Tr}([\widetilde{\sigma}_g]) = \sum_{i=1}^{n} [\widetilde{\sigma}_g]_{ii} = \sum_{x\in \mathrm{Fix}(g)} 1 = |\mathrm{Fix}(g)|\,.$$

□

定义 6.2.5 (固定点子空间)**.** 设 $\varphi : G \to GL(V)$ 是一个群表示，称

$$V^G = \{v \in V \mid \forall\ g \in G, \varphi_g(v) = v\}$$

为固定点子空间。

命题 6.2.6. 设 $\varphi : G \to GL(V)$ 是一个群表示，χ_1 是 G 的平凡特征标，则

$$\langle \chi_\varphi, \chi_1 \rangle = \dim V^G.$$

证明. 设有不可约分解

$$\varphi \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus m_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)},$$

对应有 G-不变子空间的直和分解

$$V = m_1V_1 \oplus m_2V_2 \oplus \cdots \oplus m_sV_s,$$

设 V_1 是 $\chi_1 = \varphi^{(1)}$ 对应的子空间。$\forall\ v \in V$, 可以写成 $v = v_1 + v_2 + \cdots v_s$, 其中 $\forall\ 1 \leq i \leq s$, $v_i \in m_iV_i$, 此时，$\forall\ g \in G$,

$$\varphi_g v = (m_1\varphi^{(1)})_g v_1 + (m_2\varphi^{(2)})_g v_2 + \cdots + (m_s\varphi^{(s)})_g v_s = v_1 + (m_2\varphi^{(2)})_g v_2 + \cdots + (m_s\varphi^{(s)})_g v_s,$$

从而 $g \in V^G$, 当且仅当 $\forall\ 2 \leq i \leq s$, $v_i \in m_iV_i^G$, 即

$$V^G = m_1V_1 \oplus m_2V_2^G \oplus \cdots \oplus m_sV_s^G.$$

$\forall\ 2 \leq i \leq s$, V_i 不可约且 $V_i^G \subset V_i$ 是 G-不变的，只能有 $V_i^G = 0$. 这说明 $V^G = m_1V_1$, 且 $\varphi \sim m_1\varphi^{(1)}$, 从而由定理 3.3.18,

$$\dim V^G = m_1 \dim V_1 = m_1 = \langle \chi_\varphi, \chi_1 \rangle.$$

□

命题 6.2.7. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是群作用，$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_m$ 是所有的轨道，$\forall\ 1 \leq i \leq m$, 令 $v_i = \sum_{x \in \mathcal{O}_i} x$, 则 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是 $\mathbb{C}X^G$ 的一组基，从而 $\dim \mathbb{C}X^G$ 是作用的轨道数。

证明. 首先注意到, $\forall\ 1 \le i \le m$,

$$\widetilde{\sigma}_g v_i = \sum_{x\in\mathcal{O}_i} \sigma_g(x) = \sum_{y\in\mathcal{O}_i} y = v_i,$$

从而 $v_1, v_2, \cdots, v_m \in \mathbb{C}X^G$. 由于各个轨道不相交, 有

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} |\mathcal{O}_i|, & i = j; \\ 0, & i \ne j, \end{cases}$$

从而 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是非零向量的正交集, 线性无关, 只要证它们张成了 $\mathbb{C}X^G$.

$\forall\ v = \sum_{x\in X} c_x x \in \mathbb{C}X^G$, 先证明若 $z \in Gy$, 则 $c_z = c_y$. 设 $z = gy$, 则

$$\sum_{x\in X} c_x x = v = \widetilde{\sigma}_g v = \sum_{x\in X} c_x \sigma_g(x) = \sum_{x\in X} c_x (gx),$$

等式左端 z 的系数是 c_z, 而右端, 由于 $z = gy$, 故 z 的系数为 c_y, 即 $c_z = c_y$. 从而 $\forall\ x \in \mathcal{O}_i$, 可以记 $c_x = c_i$, 从而

$$v = \sum_{x\in X} c_x x = \sum_{i=1}^m \sum_{x\in\mathcal{O}_i} c_x x = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{x\in\mathcal{O}_i} x = \sum_{i=1}^m c_i v_i,$$

即 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 确实张成了 $\mathbb{C}X^G$. □

推论 6.2.8 (Burnside)**.** 设 $\sigma : G \to S_X$ 是群作用, 有 m 个轨道, 则

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|\,.$$

证明. 记 χ_1 是 G 的平凡表示, 由命题 6.2.4, 命题 6.2.6与命题 6.2.7,

$$m = \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_1\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\widetilde{\sigma}}(g)\overline{\chi_1(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|\,.$$

□

作为推论，我们得到两个群作用的秩的公式。

推论 6.2.9. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是可迁的群作用，则

$$\operatorname{rank}(\sigma) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}(g)|^2 = \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle\,.$$

证明. 由定义，$\operatorname{rank}(\sigma)$ 是 σ^2 作用在 $X\times X$ 上的轨道的数量，由推论 6.2.8与命题 6.1.14,

$$\operatorname{rank}(\sigma) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\operatorname{Fix}^2(g)\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}(g)|^2\,.$$

直接计算，

$$\langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}(g)|\,\overline{|\operatorname{Fix}(g)|} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}(g)|^2 = \operatorname{rank}(\sigma).$$

□

定义 6.2.10. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是可迁的群作用，$v_0 = \sum_{x\in X} x$, 由定义 *6.1.6*与命题 *6.2.7*, $\mathbb{C}X^G = \mathbb{C}v_0$. 由命题 *6.2.3*, $\widetilde{\sigma}$ 是酉表示，参考定理 *2.2.8*的证明可知，$V_0 = \mathbb{C}v_0{}^{\perp}$ 是 G-不变子空间。称 $\mathbb{C}v_0$ 为 σ 的迹，V_0 为 σ 的增广空间。记 $\widetilde{\sigma}' = \widetilde{\sigma}|_{V_0}$, 称为关于 σ 的增广表示。由于 $\mathbb{C}X = V_0 \oplus \mathbb{C}v_0$, 从而 $\chi_{\widetilde{\sigma}} = \chi_{\widetilde{\sigma}'} + \chi_1$, 其中 χ_1 是平凡表示。

定理 6.2.11. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是可迁的群作用，则它的增广表示是不可约的，当且仅当它是双重可迁的。

证明. 直接计算，

$$\langle \chi_{\widetilde{\sigma}'}, \chi_{\widetilde{\sigma}'} \rangle = \langle \chi_{\widetilde{\sigma}} - \chi_1, \chi_{\widetilde{\sigma}} - \chi_1 \rangle = \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle - \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_1 \rangle - \langle \chi_1, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle - \langle \chi_1, \chi_1 \rangle\,.$$

由于 G 是可迁的，由命题 6.2.6与命题 6.2.7, $\langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_1 \rangle = \langle \chi_1, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle = 1$, 又 $\langle \chi_1, \chi_1 \rangle = 1$, 由命题 6.2.9,

$$\langle \chi_{\widetilde{\sigma}'}, \chi_{\widetilde{\sigma}'} \rangle = \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle - \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_1 \rangle - \langle \chi_1, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle - \langle \chi_1, \chi_1 \rangle = \langle \chi_{\widetilde{\sigma}}, \chi_{\widetilde{\sigma}} \rangle - 1 - 1 + 1 = \operatorname{rank}(\sigma) - 1,$$

从而，由推论 3.3.19, $\chi_{\widetilde{\sigma}'}$ 不可约，当且仅当 $\langle \chi_{\widetilde{\sigma}'}, \chi_{\widetilde{\sigma}'} \rangle = 1$, 当且仅当 $\operatorname{rank}(\sigma) = 2$, 由命题 6.1.12, 当且仅当 σ 是双重可迁的。 □

例 6.2.12 (S_4 的特征标表). 注意到 S_4 有 5 个共轭类：C_{Id}, $C_{(1\,2)}$, $C_{(1\,2\,3)}$, $C_{(1\,2\,3\,4)}$, $C_{(1\,2)(3\,4)}$. 记 χ_1 是平凡特征标，χ_2 是奇偶同态表示的特征标。由例 *6.1.9*, S_4 双重可迁的作用于 $\{1,2,3,4\}$. 由定理 *6.2.11*, 它的增广表示是不可约的，记它的特征标是 χ_4, 它是自然置换表示减去平凡表示（定义 *6.2.10*），由命题 *6.2.4*, $\chi_4(g)=|\mathrm{Fix}(g)|-1$. 令 $\chi_5=\chi_2\cdot\chi_4$, 定义为，记 τ 是 χ_4 对应的表示，定义表示 $\tau^{\chi_2}: S_4\to GL_3(\mathbb{C})$

$$g\mapsto \chi_2(g)\tau_g,$$

容易验证 $\chi_{\tau^{\chi_2}}(g)=\chi_2(g)\chi_4(g)$, 且 τ^{χ_2} 不可约，χ_5 就是 τ^{χ_2} 的特征标，且 $\deg\tau=\deg\tau^{\chi_2}=|\{1,2,3,4\}|-1=3$. 由推论 *3.4.9*, 设最后一个特征标为 χ_3, $d=\deg\chi_3$, 由推论 *3.4.6*,

$$24=|S_4|=1^2+1^2+d^2+3^2+3^2=20+d^2,$$

从而 $d=2$. 记 L 是正则表示，由定理 *3.4.5*,

$$\chi_L=\chi_1+\chi_2+2\chi_3+3\chi_4+3\chi_5,$$

从而 $\forall\ Id\neq g\in S_4$,

$$\chi_3(g)=\frac{1}{2}(-\chi_1(g)-\chi_2(g)-3\chi_4(g)-3\chi_5(g)).$$

从而可以计算出以下的特征标表：

	C_{Id}	$C_{(1\,2)}$	$C_{(1\,2\,3)}$	$C_{(1\,2\,3\,4)}$	$C_{(1\,2)(3\,4)}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

可以具体计算出 χ_3 对应的表示：注意到，$K\{Id,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}$ 是 S_4 的正规子群，且 $S_4/K\cong S_3$. 通过复合满射 $S_4\to S_3$ 与 S_3 的维数为 2 的不可约表示，即关于它在 $\{1,2,3\}$ 上的自然作用的增广表示，即得。

6.3 中心化子代数与 Gelfand 对

定义 6.3.1 (中心化子代数)**.** 令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $\sigma : G \to S_X$ 是可迁作用，定义矩阵表示 $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$

$$g \mapsto [\widetilde{\sigma}_g]_X.$$

则有 $\varphi \sim \widetilde{\sigma}$, 从而 $\mathrm{Hom}_G(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}) \cong \mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi)$. 又注意到

$$\mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A\varphi_g = \varphi_g A, \forall\ g \in G\} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \varphi_g A \varphi_g^{-1} = A, \forall\ g \in G\}.$$

记 $C(\sigma) = \mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi)$, 称为 σ 的中心化子代数。

命题 6.3.2. $C(\sigma)$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的含幺子环。

证明. 直接验证即可。 □

注记 6.3.3. 事实上，$C(\sigma)$ 还有线性空间结构，从而是子结合代数。

下面我们的目标是证明 $\dim C(\sigma) = \mathrm{rank}(\sigma)$, 并找到 $C(\sigma)$ 的一组基。

定义 6.3.4. 记 $V = M_n(\mathbb{C})$, 定义表示 $\tau : G \to GL(V)$

$$\tau_g(A) = \varphi_g A \varphi_g^{-1}.$$

注意到

$$V^G = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \varphi_g A \varphi_g^{-1} = A, \forall\ g \in G\} = C(\sigma).$$

记 $\sigma^2 : G \to S_{X\times X}$ 是定义 *6.1.10*中定义的群作用。

命题 6.3.5. 定义映射 $T : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}(X \times X)$

$$(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i, x_j).$$

则它具体地给出了 τ 与 $\widetilde{\sigma^2}$ 之间的等价。

证明. 容易验证 T 是线性同构。记 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $\forall\, g\in G$, 记 $B=\tau_g(A)$. 定义群作用 $\gamma: G\to S_n$

$$\sigma_g(x_i)=x_{\gamma_g(i)}.$$

则

$$b_{ij}=[\varphi_g A\varphi_g^{-1}]_{ij}=\sum_{k,l=1}^{n}[\varphi_g]_{ik}a_{kl}[\varphi_{g^{-1}}]_{lj},$$

由于

$$[\varphi_g]_{ik}=\begin{cases}1, & x_i=\sigma_g(x_k);\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & i=\gamma_g(k);\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & k=\gamma_g^{-1}(i);\\ 0, & \text{其它}\end{cases}, [\varphi_{g^{-1}}]_{lj}=\begin{cases}1, & x_l=\sigma_g^{-1}(x_j);\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & l=\gamma_g^{-1}(j);\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

从而

$$b_{ij}=\sum_{k,l=1}^{n}[\varphi_g]_{ik}a_{kl}[\varphi_{g^{-1}}]_{lj}=a_{\gamma_g^{-1}(i),\gamma_g^{-1}(j)}.$$

从而

$$T\circ\tau_g(A)=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x_i,x_j)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{\gamma_g^{-1}(i),\gamma_g^{-1}(j)}(x_i,x_j)=\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(\sigma_g(x_k),\sigma_g(x_l))=\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}\sigma_g^2(x_k,x_l)=\widetilde{\sigma^2}\circ T(A).$$

□

定义 6.3.6. 设 Ω 是 σ 的一个轨道环，定义矩阵 $A(\Omega)\in M_n(\mathbb{C})$:

$$A(\Omega)_{ij}=\begin{cases}1, & (x_i,x_j)\in\Omega;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

推论 6.3.7. 设 $\sigma: G\to S_X$ 是一个可迁作用，$\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_r$ 是 σ 的所有轨道环，有 $r=\operatorname{rank}(\sigma)$. 则 $\{A(\Omega_1),A(\Omega_2),\cdots,A(\Omega_r)\}$ 是 $C(\sigma)$ 的一组基，从而 $\dim C(\sigma)=\operatorname{rank}(\sigma)$.

证明. 由命题 6.2.7, $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ 是 $\mathbb{C}(X \times X)^G$ 的一组基，其中 $\forall\ 1 \leq k \leq r$,

$$v_k = \sum_{(x_i, x_j) \in \Omega_k} (x_i, x_j).$$

注意到，$A(\Omega_k) = T^{-1}(v_k)$, 将 T 限制在 $C(\sigma) = V^G = M_n(\mathbb{C})^G$ 上就得到了表示空间 $C(\sigma)$ 与 $\mathbb{C}(X \times X)^G$ 之间的等价（同构），从而 $\{A(\Omega_1), A(\Omega_2), \cdots, A(\Omega_r)\} = \{T^{-1}(v_1), T^{-1}(v_2), \cdots, T^{-1}(v_r)\}$ 是 $C(\sigma) = T^{-1}(\mathbb{C}(X \times X)^G)$ 的一组基。 □

定义 6.3.8 (Gelfand 对)**.** 设 G 是群，$H < G$ 是子群，定义陪集作用 $\sigma : G \times G/H \to G/H$

$$(g, g'H) \mapsto gg'H.$$

若中心化子代数 $C(\sigma)$ 是交换代数，则称 (G, H) 是一个 *Gelfand* 对。

例 6.3.9. 设 $H = \{1\}$. 则陪集作用 $\lambda : G \to S_G$ 就是正则作用（例 *6.1.2*），从而 $\widetilde{\lambda} = L$ 就是正则表示。

<u>断言</u>：$C(\lambda) \cong L(G)$. 设 $T \in C(\lambda)$, 定义 $f_T : G \to \mathbb{C}$

$$T(1) = \sum_{x \in G} f_T(x^{-1})x.$$

<u>断言</u>：映射 $\psi : C(\lambda) \to L(G)$

$$T \mapsto f_T$$

是同构。$\forall\ g \in G$,

$$T(g) = T(L_g(1)) = TL_g(1) = L_gT(1) = L_g\left(\sum_{x \in G} f_T(x^{-1})x\right),$$

从而 T 由 f_T 完全决定，从而 ψ 是单射。又任意 $f : G \to \mathbb{C}$, 定义 $T : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$

$$g \mapsto L_g \sum_{x \in G} f(x^{-1})x.$$

$\forall\ g, y \in G$,

$$TL_y(g) = T(L_y(g)) = T(yg) = L_{yg} \sum_{x \in G} f(x^{-1})x = L_y\left(L_g \sum_{x \in G} f(x^{-1})x\right) = L_y(T(g)) = L_yT(g),$$

从而 $T \in C(\lambda)$. 又注意到

$$T(1) = \sum_{x \in G} f(x^{-1})x,$$

即 $f = f_T$, 从而 ψ 是满射。最后，$\forall\, T_1, T_2 \in C(\lambda)$,

$$\begin{aligned} T_1T_2(1) = T_1\left(\sum_{x\in G} f_{T_2}(x^{-1})x\right) = T_1\left(\sum_{x\in G} f_{T_2}(x^{-1})L_x(1)\right) &= \sum_{x\in G} f_{T_2}(x^{-1})T_1L_x(1) \\ &= \sum_{x\in G} f_{T_2}(x^{-1})L_xT_1(1) = \sum_{x\in G} f_{T_2}(x^{-1})L_x\sum_{y\in G} f_{T_1}(y^{-1})y = \sum_{x,y\in G} f_{T_1}(y^{-1})f_{T_2}(x^{-1})xy, \end{aligned}$$

令 $g = xy, u = x^{-1}$,

$$T_1T_2(1) = \sum_{x,y\in G} f_{T_1}(y^{-1})f_{T_2}(x^{-1})xy = \sum_{g\in G}\sum_{u\in G} f_{T_1}(g^{-1}u^{-1})f_{T_2}(u)g = \sum_{g\in G} f_{T_1} * f_{T_2}(g^{-1})g,$$

又由定义,

$$T_1T_2(1) = \sum_{g\in G} f_{T_1T_2}(g^{-1})g,$$

从而 $f_{T_1T_2} = f_{T_1} * f_{T_2}$. 这说明 ψ 是环同态。

综上，ψ 是环同构。

最后, $(G, \{1\})$ 是 *Gelfand* 对, 当且仅当 $L(G)$ 是交换代数, 当且仅当 $L(G) = Z(L(G))$, 由于 $\dim Z(L(G)) = |Cl(G)|$, $\dim L(G) = |G|$, 当且仅当 $|Cl(G)| = |G|$, 当且仅当 G 是 *Abel* 群。

引理 6.3.10. (G, H) 是 *Gelfand* 对，当且仅当 $\widetilde{\sigma}$ 是重数自由的，即 $\widetilde{\sigma}$ 的不可约构成（定义 *3.3.13*）都是一重的。

定义 6.3.11. 设 $\sigma : G \to S_X$ 是一个可迁作用，对 σ 的任意轨道环 Ω, 定义它的转置

$$\Omega^T = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid (x_2, x_1) \in \Omega\},$$

容易验证，Ω^T 也是 σ 的一个轨道环。称 σ 的轨道环 Ω 是对称的，当且仅当 $\Omega = \Omega^T$.

例 6.3.12. 对角轨道环 Δ（例 *6.1.11*）是对称的。

注记 6.3.13. 注意到，$A(\Omega^T) = A(\Omega)^T$, 从而 Ω 是对称的，当且仅当 $A(\Omega)$ 是对称矩阵。

定义 6.3.14 (对称 Gelfand 对)**.** 设 G 是群，$H < G$ 是子群，$\sigma : G \times G/H \to G/H$ 是陪集作用，称 (G, H) 是一个对称 *Gelfand* 对，当且仅当 σ 的轨道环都是对称的。

例 6.3.15. 设 $H < G$, 且陪集作用 $\sigma : G \times G/H \to G/H$ 是双重可迁的，则它的轨道环是 Δ 与 $(G/H \times G/H) - \Delta$, 且容易验证二者都是对称的，从而 (G, H) 是一个对称 *Gelfand* 对。

引理 6.3.16. $M_n(\mathbb{C})$ 中的对称矩阵构成的子环是可交换的。

证明. 只要注意到

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

□

定理 6.3.17. 对称 *Gelfand* 对是 *Gelfand* 对。

证明. 设 G 是群，$H < G$ 是子群，$\sigma : G \times G/H \to G/H$ 是陪集作用，(G, H) 是一个对称 Gelfand 对，$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_r$ 是 σ 的所有轨道环，它们都是对称的。由注记 6.3.13, $A(\Omega_1), A(\Omega_2), \cdots, A(\Omega_r)$ 是对称矩阵。又由推论 6.3.7, $\{A(\Omega_1), A(\Omega_2), \cdots, A(\Omega_r)\}$ 是 $C(\sigma)$ 的一组基，从而 $C(\sigma)$ 中的元素都是对称矩阵，从而由引理 6.3.16, $C(\sigma)$ 是可交换的，即 (G, H) 是 Gelfand 对。 □

7 诱导表示

本章我们通过子群的表示，构造大群的表示。

7.1 诱导特征标与 Frobenius 互反律

定义 7.1.1. 设 G 是一个群，$f: G \to \mathbb{C}$, $H \le G$, 定义 f 在 H 上的限制函数 $\mathrm{Res}_H^G f: H \to \mathbb{C}$

$$h \mapsto f(h).$$

命题 7.1.2. 设 $H \le G$, 则 $\mathrm{Res}_H^G: Z(L(G)) \to Z(L(H))$ 是线性映射。

证明. 首先验证这是良定义的，即 $\forall\, f \in Z(L(G))$, $\mathrm{Res}_H^G f \in Z(L(H))$, 这由限制映射的定义即得。线性也容易验证。 □

定义 7.1.3. 设 G 是一个群，$H \le G$, $f: H \to \mathbb{C}$, 定义 f 在 G 上的函数 $\dot{f}: G \to \mathbb{C}$

$$\dot{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$$

由此，得到了映射 $L(H) \to L(G)$, 可以验证它是线性的。再定义映射 $\mathrm{Ind}_H^G: Z(L(H)) \to Z(L(G))$: $\forall\, f \in Z(L(H))$, $\forall\, g \in G$,

$$\mathrm{Ind}_H^G f(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{f}(x^{-1} g x).$$

命题 7.1.4. 设 $H \le G$, 则 $\mathrm{Ind}_H^G: Z(L(H)) \to Z(L(G))$ 是线性映射。

证明. 同样也要先验证映射是良定义的，再验证线性，这些都是容易的。 □

定义 7.1.5. 映射 $\mathrm{Ind}_H^G: Z(L(H)) \to Z(L(G))$ 称为诱导。若 χ 是 H 的特征标，则称 $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ 是 χ 在 G 上的诱导特征标。

定理 7.1.6 (Frobenius 互反律)**.** 设 $H \le G$, $a \in Z(L(H))$, $b \in Z(L(G))$, 则

$$\left\langle \mathrm{Ind}_H^G a, b \right\rangle_{\mathbb{C}G} = \left\langle a, \mathrm{Res}_H^G b \right\rangle_{\mathbb{C}H}.$$

证明. 直接计算:

$$\left\langle \operatorname{Ind}_H^G a, b\right\rangle_{\mathbb{C}G} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Ind}_H^G a(g)\overline{b(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{a}(x^{-1}gx)\overline{b(g)} = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G}\dot{a}(x^{-1}gx)\overline{b(g)}.$$

其中, $\dot{a}(x^{-1}gx)\neq 0$, 当且仅当 $x^{-1}gx\in H$, 即 $g = xhx^{-1}$, 其中 $h\in H$. 由于 $b\in Z(L(G))$, 从而

$$\begin{aligned}\left\langle \operatorname{Ind}_H^G a, b\right\rangle_{\mathbb{C}G} &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G}\dot{a}(x^{-1}gx)\overline{b(g)} = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{h\in H}\dot{a}(h)\overline{b(xhx^{-1})}\\ &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{h\in H}a(h)\overline{b(h)} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left\langle a, \operatorname{Res}_H^G b\right\rangle_{\mathbb{C}H} = \left\langle a, \operatorname{Res}_H^G b\right\rangle_{\mathbb{C}H}.\end{aligned}$$

□

注记 7.1.7. 这说明 Res_H^G 与 Ind_H^G 互为伴随函子, 即 $\left(\operatorname{Ind}_H^G\right)^* = \operatorname{Res}_H^G$.

推论 7.1.8. 设 $H\le G$, θ,χ 分别是 H,G 的不可约特征标, $\left\langle \operatorname{Ind}_H^G\theta,\chi\right\rangle_{\mathbb{C}G} = \left\langle\theta, \operatorname{Res}_H^G\chi\right\rangle_{\mathbb{C}H}$ 告诉我们 $\operatorname{Ind}_H^G\theta$ 关于 χ 的重数与 $\operatorname{Res}_H^G\chi$ 关于 θ 的重数相等。

命题 7.1.9. 设 $H\le G$, $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 是 G 关于 H 的陪集的完全代表元, 即

$$G = t_1H\sqcup t_2H\sqcup\cdots\sqcup t_mH,$$

则 $\forall\, f\in Z(L(H))$, $\forall\, g\in G$,

$$\operatorname{Ind}_H^G f(g) = \sum_{i=1}^m \dot{f}(t_i^{-1}gt_i).$$

证明. 直接计算:

$$\operatorname{Ind}_H^G f(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{f}(x^{-1}gx) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m\sum_{h\in H}\dot{f}(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih).$$

其中, 对 $h\in H$, $\dot{f}(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih)\neq 0$, 当且仅当 $h^{-1}t_i^{-1}gt_ih\in H$, 当且仅当 $t_i^{-1}gt_i\in H$. 又由于 $\forall\, f\in Z(L(H))$,

$$\operatorname{Ind}_H^G f(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m\sum_{h\in H}\dot{f}(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m\sum_{h\in H}\dot{f}(t_i^{-1}gt_i) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sum_{i=1}^m\dot{f}(t_i^{-1}gt_i) = \sum_{i=1}^m\dot{f}(t_i^{-1}gt_i).$$

□

7.2 诱导表示

设 $H \le G$, $\varphi : G \to GL(V)$ 是表示，同样做限制 $\operatorname{Res}_H^G \varphi : H \to GL(V)$, 它也是表示。$\forall\ h \in H$,

$$\chi_{\operatorname{Res}_H^G \varphi}(h) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Res}_H^G \varphi(h)) = \operatorname{Tr}(\varphi(h)) = \chi_\varphi(h) = \operatorname{Res}_H^G \chi_\varphi(h),$$

即 $\chi_{\operatorname{Res}_H^G \varphi} = \operatorname{Res}_H^G \chi_\varphi$. 这说明对表示取限制和取特征标是可交换的，从而限制映射把特征标映成特征标。本节我们将证明诱导映射也把特征标映成特征标。

例 7.2.1 (正则表示). 记 χ_1 是 G 的平凡子群 $\{1\}$ 的平凡表示，则 $\forall\ g \in G$,

$$\operatorname{Ind}_{\{1\}}^G \chi_1(g) = \sum_{x \in G} \dot{\chi_1}(x^{-1}gx),$$

其中，$x^{-1}gx \in \{1\}$, 当且仅当 $g = 1$, 从而

$$\operatorname{Ind}_{\{1\}}^G \chi_1(g) = \sum_{x \in G} \dot{\chi_1}(x^{-1}gx) = \begin{cases} |G|, & g = 1; \\ 0, & g \neq 1. \end{cases}$$

即 $\operatorname{Ind}_{\{1\}}^G \chi_1$ 是 G 的正则表示。

例 7.2.2 (置换表示). 设 $H \le G$, 考虑群作用 $\sigma : G \to S_{G/H}$

$$\sigma_g(xH) = gxH.$$

注意到，$xH \in \operatorname{Fix}(g)$, 当且仅当 $gxH = xH$, 当且仅当 $x^{-1}gx \in H$. 并且注意到，有 $|H|$ 个元素可以代表 xH, 从而 $|\operatorname{Fix}(g)|$ 是 $\frac{1}{|H|}$ 倍的使得 $x^{-1}gx \in H$ 的 $x \in G$ 的数量。记 χ_1 是 H 的平凡表示，则

$$\dot{\chi_1}(x^{-1}gx) = \begin{cases} 1, & x^{-1}gx \in H; \\ 0, & x^{-1}gx \notin H, \end{cases}$$

从而，由命题 6.2.4, $\forall\, g \in G$,

$$\chi_{\widetilde{\sigma}}(g) = |\mathrm{Fix}(g)| = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}_1(x^{-1}gx) = \mathrm{Ind}_H^G\,\chi_1(g),$$

即 $\mathrm{Ind}_H^G\,\chi_1$ 就是置换表示 $\widetilde{(\sigma)}$.

定义 7.2.3. 设 $H \leq G$, $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 是 G 关于 H 的陪集的完全代表元，且不妨设 $t_1 = 1$, 即

$$G = H \sqcup t_2H \sqcup \cdots \sqcup t_mH.$$

设 $\varphi : H \to GL_d(\mathbb{C})$ 是表示，记

$$\dot{\varphi}_x = \begin{cases} \varphi_x, & x \in H; \\ 0, & x \notin H, \end{cases}$$

其中 0 是 0 矩阵。定义诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G\,\varphi : G \to GL_{md}(\mathbb{C})$, 将 $\mathrm{Ind}_H^G\,\varphi$ 简记为 φ^G. $\forall\, g \in G$, φ_g^G 是 $m \times m$ 的每块是 $d \times d$ 的矩阵的分块矩阵，$\forall\, 1 \leq i, j \leq m$, $[\varphi_g^G]_{ij} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1}gt_j}$, 即

$$\varphi_g^G = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{t_1^{-1}gt_1} & \dot{\varphi}_{t_1^{-1}gt_2} & \cdots & \dot{\varphi}_{t_1^{-1}gt_m} \\ \dot{\varphi}_{t_2^{-1}gt_1} & \dot{\varphi}_{t_2^{-1}gt_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dot{\varphi}_{t_{m-1}^{-1}gt_m} \\ \dot{\varphi}_{t_m^{-1}gt_1} & \cdots & \dot{\varphi}_{t_m^{-1}gt_{m-1}} & \dot{\varphi}_{t_m^{-1}gt_m} \end{bmatrix}.$$

定理 7.2.4. 诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G\,\varphi : G \to GL_{md}(\mathbb{C})$ 确实是一个表示，且 $\chi_{Ind_H^G\varphi} = Ind_H^G\chi_\varphi$. 特别地，$\mathrm{Ind}_H^G$ 把特征标映到特征标。

证明. 设 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 是 G 关于 H 的陪集的完全代表元，将 $\mathrm{Ind}_H^G\,\varphi$ 简记为 φ^G. $\forall\, x, y \in G$,

$$[\varphi_x^G\varphi_y^G]_{ij} = \sum_{k=1}^m [\varphi_x^G]_{ik}[\varphi_y^G]_{kj} = \sum_{k=1}^m \dot{\varphi}_{t_i^{-1}xt_k}\dot{\varphi}_{t_k^{-1}yt_j}.$$

注意到，$\dot{\varphi}_{t_k^{-1}yt_j} \neq 0$, 当且仅当 $t_k^{-1}yt_j \in H$, 当且仅当 $t_kH = yt_jH$. 于是若 t_l 是 yt_jH 的代表元，此时 $\dot{\varphi}_{t_i^{-1}xt_l}\dot{\varphi}_{t_l^{-1}yt_j} \neq 0$, 当且仅当 $t_i^{-1}xt_l \in H$, 即 $t_iH = xt_lH = xyt_jH$, 当且仅当 $t_i^{-1}xyt_j \in H$, 此时

$$[\varphi_x^G\varphi_y^G]_{ij} = \sum_{k=1}^m \dot{\varphi}_{t_i^{-1}xt_k}\dot{\varphi}_{t_k^{-1}yt_j} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1}xt_l}\dot{\varphi}_{t_l^{-1}yt_j} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1}xyt_j} = [\varphi_{xy}^G]_{ij}.$$

又注意到 $[\varphi_1^G]_{ij} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1}t_j}$, 而 $t_i^{-1}t_j \in H$, 当且仅当 $t_iH = t_jH$, 当且仅当 $t_i = t_j$, 因此，

$$[\varphi_1^G]_{ij} = \dot{\varphi}_{t_i^{-1}t_j} = \begin{cases} \varphi_{t_i^{-1}t_j}, & t_i^{-1}t_j \in H; \\ 0, & t_i^{-1}t_j \notin H \end{cases} = \begin{cases} \varphi_{t_i^{-1}t_j} = \varphi_1 = I_d, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

从而 $[\varphi_1^G] = I_{md}$. 因此 $\forall\, g \in G$, $\varphi_g^G \varphi_{g^{-1}}^G = \varphi_{gg^{-1}}^G = \varphi_1^G = I_{md}$, 从而 $(\varphi_g^G)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}^G$. 综上，$\varphi^G$ 是同态，从而是一个表示。

由命题 7.1.9, $\forall\, g \in G$,

$$\chi_{\varphi^G}(g) = \mathrm{Tr}(\varphi_g^G) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Tr}(\dot{\varphi}_{t_i^{-1}gt_i}) = \sum_{i=1}^m \dot{\chi}_\varphi(t_i^{-1}gt_i) = \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi(g),$$

即 $\chi_{Ind_H^G \varphi} = \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi$. □

7.3 Mackey 不可约性准则

设 $H \leq G$, 若 χ 是 H 的不可约特征标，$\mathrm{Ind}_H^G \chi$ 不一定不可约。设 φ 是 H 的一个不可约表示，由推论 3.3.19, $\mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi$ 不可约，当且仅当

$$\left\langle \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi, \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi \right\rangle = 1.$$

又由 Frobenius 互反律（定理 7.1.6），

$$\left\langle \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi, \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi \right\rangle = \left\langle \chi_\varphi, \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi \right\rangle,$$

从而我们要考察 $\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi$.

定义 7.3.1 (不交表示). *群 G 的两个表示 φ 与 ρ 称为不交的，若它们没有共同的不可约构成（定义 3.3.13）。*

命题 7.3.2. *两个表示 φ 与 ρ 不交，当且仅当 χ_φ 与 χ_ρ 正交。*

证明. 设 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(s)}$ 是 G 的不可约表示的完全等价类，设

$$\varphi \sim m_1\varphi^{(1)} + m_2\varphi^{(2)} + \cdots + m_s\varphi^{(s)},$$

$$\rho \sim n_1\varphi^{(1)} + n_2\varphi^{(2)} + \cdots + n_s\varphi^{(s)},$$

其中，$m_1, m_2, \cdots, m_s, n_1, n_2, \cdots, n_s$ 都是非负整数。由特征标的第一正交关系（定理 3.3.10），

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = m_1n_1 + m_2n_2 + \cdots + m_sn_s.$$

从而 χ_φ 与 χ_ρ 正交，当且仅当 $m_1n_1 + m_2n_2 + \cdots + m_sn_s = 0$, 当且仅当 $\forall\ 1 \leq i \leq s$, $m_in_i = 0$, 当且仅当 φ 与 ρ 不交。 □

定义 7.3.3 (双陪集)**.** 设 H, K 是群 G 的两个子群，定义群作用 $\sigma : H \times K \to S_G$

$$\sigma_{(h,k)}(g) = hgk^{-1},$$

则 g 的轨道是

$$HgK = \{hgk \mid h \in H, k \in K\},$$

称为 g 的双陪集，G 关于 H, K 的双陪集的集合记为 $H\backslash G/K$.

注记 7.3.4. 设 H, K 是群 G 的两个子群，则

1. G 有双陪集分解
$$G = \bigsqcup_{g\in G} HgK;$$

2. 若 H 是 G 的正规子群，则 $H\backslash G/H = G/H$.

例 7.3.5. 令 $G = GL_2(\mathbb{C})$, B 是 G 中的上三角阵，则 $B\backslash G/B = \left\{B, B\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}B\right\}$.

定理 7.3.6 (Mackey)**.** 设 $H, K \leq G$, 且 S 是 $H\backslash G/K$ 的完全代表元集，则 $\forall\ f \in Z(L(K))$,

$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G f = \sum_{s\in S} \mathrm{Ind}_{H\cap sKs^{-1}}^H \mathrm{Res}_{H\cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}} f^s,$$

其中 $f^s \in Z(L(sKs^{-1}))$, 定义为 $f^s(x) = f(s^{-1}xs)$.

证明. 证明中<u>重要的是构造 G 关于 K 的左陪集的完全代表元集 T</u>. $\forall\ s \in S$, 选择一个 H 关于 $H \cap sKs^{-1}$ 的左陪集的完全代表元集 V_s, 则

$$H = \bigsqcup_{v \in V_s} v(H \cap sKs^{-1}).$$

于是,

$$HsK = HsKs^{-1}s = \bigcup_{v \in V_s} v(H \cap sKs^{-1})sKs^{-1}s = \bigcup_{v \in V_s} vsKs^{-1}s = \bigcup_{v \in V_s} vsK,$$

事实上，这是无交并。具体地，由于左陪集要么无交，要么相等，若 $v'sK = vsK$, 则 $s^{-1}v^{-1}v's \in K$, 从而 $v^{-1}v' \in sKs^{-1}$. 又由 V_s 的定义，$v, v' \in H$, 从而 $v^{-1}v' \in H \cap sKs^{-1}$, 从而 $v(H \cap sKs^{-1}) = v'(H \cap sKs^{-1})$, 再由 V_s 的定义，$v = v'$. 即

$$HsK = \bigsqcup_{v \in V_s} vsK.$$

令 $T_s = \{vs \mid v \in V_s\}$, 再令 $T = \bigcup_{s \in S} T_s$, 事实上, 这也是无交并。具体地, 若有 $vs \in T_s, v's' \in V_{s'}$, 使得 $vs = v's'$, 则 $HvsK = Hv's'K$. 又由 $V_s, V_{s'}$ 的定义，$v, v' \in H$, 从而

$$HsK = HvsK = Hv's'K = Hvs'K.$$

由于 S 是 $H\backslash G/K$ 的完全代表元集，从而 $s = s'$, 从而 $v = v'$.

综上,

$$G = \bigsqcup_{s \in S} HsK = \bigsqcup_{s \in S} \bigsqcup_{v \in V_s} vsK = \bigsqcup_{s \in S} \bigsqcup_{t \in T_s} tK = \bigsqcup_{t \in T} tK,$$

从而，<u>T 是 G 关于 K 的左陪集的完全代表元集</u>。

由命题 7.1.9, $\boxed{\forall\ h \in H}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_K^G f(h) &= \sum_{t \in T} \dot{f}(t^{-1}ht) = \sum_{s \in S} \sum_{t \in T_s} \dot{f}(t^{-1}ht) = \sum_{s \in S} \sum_{v \in V_s} \dot{f}(s^{-1}v^{-1}hvs) \\
&= \sum_{s \in S} \sum_{\substack{v \in V_s \\ s^{-1}v^{-1}hvs \in K}} f(s^{-1}v^{-1}hvs) = \sum_{s \in S} \sum_{\substack{v \in V_s \\ v^{-1}hv \in sKs^{-1}}} f^s(v^{-1}hv),
\end{aligned}$$

又由 V_s 的定义，$\forall\ v \in V_s \subset H$, $v^{-1}hv \in H$, 从而 $v^{-1}hv \in H \cap sKs^{-1}$, 从而，

$$\operatorname{Ind}_K^G f(h) = \sum_{s\in S} \sum_{\substack{v\in V_s \\ v^{-1}hv\in sKs^{-1}}} f^s(v^{-1}hv) = \sum_{s\in S} \sum_{\substack{v\in V_s \\ v^{-1}hv\in H\cap sKs^{-1}}} f^s(v^{-1}hv) = \sum_{s\in S} \sum_{\substack{v\in V_s \\ v^{-1}hv\in H\cap sKs^{-1}}} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s(v^{-1}hv),$$

再由 V_s 的定义与命题 7.1.9,

$$\operatorname{Ind}_K^G f(h) = \sum_{s\in S} \sum_{\substack{v\in V_s \\ v^{-1}hv\in H\cap sKs^{-1}}} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s(v^{-1}hv) = \sum_{s\in S}\sum_{v\in V_s} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s(v^{-1}hv) = \sum_{s\in S} \operatorname{Ind}^H_{H\cap sKs^{-1}} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s(h).$$

从而，

$$\operatorname{Res}^G_H \operatorname{Ind}^G_K f = \sum_{s\in S} \operatorname{Ind}^H_{H\cap sKs^{-1}} \operatorname{Res}^{sKs^{-1}}_{H\cap sKs^{-1}} f^s.$$

□

定理 7.3.7 (Mackey 不可约性准则). 设 $H \leq G$, 且 $\varphi : H \to GL_d(\mathbb{C})$ 是一个表示，则 $\operatorname{Ind}^G_H \varphi$ 不可约，当且仅当

1. φ 不可约；
2. $\forall\ s \in G - H$, 表示 $\operatorname{Res}^H_{H\cap sHs^{-1}} \varphi$ 与 $\operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \varphi^s$ 无交，其中，$\forall\ x \in sHs^{-1}$, $\varphi^s(x) = \varphi(s^{-1}xs)$.

证明. 记 χ 是 φ 的特征标，S 是双陪集 $H\backslash G/H$ 的完全代表元集，不失一般性，设 $1 \in S$. 对 $s = 1$, 注意到有 $H \cap sHs^{-1} = H$, $\varphi^s = \varphi$. 记 $S^\# = S - \{1\}$, 从而由定理 7.3.6,

$$\operatorname{Res}^G_H \operatorname{Ind}^G_H \chi = \sum_{s\in S} \operatorname{Ind}^H_{H\cap sHs^{-1}} \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s = \chi + \sum_{s\in S^\#} \operatorname{Ind}^H_{H\cap sHs^{-1}} \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s.$$

使用两次 Frobenius 互反律（定理 7.1.6），

$$\left\langle \operatorname{Ind}^G_H \chi, \operatorname{Ind}^G_H \chi \right\rangle = \left\langle \operatorname{Res}^G_H \operatorname{Ind}^G_H \chi, \chi \right\rangle = \langle \chi, \chi\rangle + \sum_{s\in S^\#} \left\langle \operatorname{Ind}^H_{H\cap sHs^{-1}} \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s, \chi \right\rangle = \langle \chi, \chi\rangle + \sum_{s\in S^\#} \left\langle \operatorname{Res}^{sHs^{-1}}_{H\cap sHs^{-1}} \chi^s, \operatorname{Res}^H_{H\cap sHs^{-1}} \chi \right\rangle,$$

其中,所有的内积都是非负实数,且由注记 3.3.17与定理 3.3.10, $\langle\chi,\chi\rangle\geq 1$, 从而由推论 3.3.19, $\mathrm{Ind}_H^G\varphi$ 不可约,当且仅当 $\left\langle\mathrm{Ind}_H^G\chi,\mathrm{Ind}_H^G\chi\right\rangle=1$, 当且仅当 $\langle\chi,\chi\rangle=1$, 且 $\forall\ s\in S^{\#}$,

$$\left\langle\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}}\chi^s,\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{H}\chi\right\rangle=0,$$

由命题 7.3.2, 当且仅当 φ 不可约, 且 $\forall\ s\in S^{\#}$, $\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}}\varphi^s$ 与 $\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{H}\varphi$ 无交。最后, $\forall\ s\in G-H$, 都可以成为双陪集完全代表元集中的非单位元元素, 即证。 □

注记 7.3.8. 定理的证明告诉我们, 对于第二个条件, 我们只需要对一个双陪集的完全代表元集中的元素验证即可。

注记 7.3.9. 当 $H\lhd G$ 时, $H\backslash G/H=G/H$, 且 $H\cap sHs^{-1}=H$. 此时, *Mackey* 不可约性准则只要验证 φ 不可约, 且 $\forall\ s\in G-H$, φ^s 不以 φ 作为一个不可约构成。事实上, φ^s 不可约, 当且仅当 φ 不可约, 于是只要验证 $\forall\ s\in G-H$, φ 与 φ^s 是不等价的不可约表示。事实上, 也只需要对 G/H 的一个陪集完全代表元集中的元素验证。

例 7.3.10. 设 p 是一个素数, 令

$$G=\left\{\begin{bmatrix}[a]&[b]\\ [0]&[1]\end{bmatrix}\mid[a]\in\mathbb{Z}_p^*,[b]\in\mathbb{Z}_p\right\},$$

$$H=\left\{\begin{bmatrix}[1]&[b]\\ [0]&[1]\end{bmatrix}\mid[b]\in\mathbb{Z}_p\right\},$$

则 $H\cong\mathbb{Z}_p$, $H\lhd G$, $G/H\cong\mathbb{Z}_p^*$. G/H 的一个陪集完全代表元集是

$$S=\left\{\begin{bmatrix}[a]&[0]\\ [0]&[1]\end{bmatrix}\mid[a]\in\mathbb{Z}_p^*\right\}.$$

定义 $\varphi:H\to\mathbb{C}^*$

$$\begin{bmatrix}[1]&[b]\\ [0]&[1]\end{bmatrix}\mapsto\mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,b}{p}},$$

则若 $s=\begin{bmatrix}[a]^{-1} & [0]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}$, 其中 $[a]\neq 1$, 有

$$\varphi^s\left(\begin{bmatrix}[1] & [b]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}\right)=\varphi\left(s^{-1}\begin{bmatrix}[1] & [b]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}s\right)=\varphi\left(\begin{bmatrix}[a] & [0]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[1] & [b]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[a]^{-1} & [0]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{bmatrix}[1] & [a][b]\\ [0] & [1]\end{bmatrix}\right)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,ab}{p}},$$

从而由例 *3.4.11*, φ 与 φ^s 是 H 的不等价的不可约表示，由注记 *7.3.9*, $\mathrm{Ind}_H^G\varphi$ 是 G 的不可约表示，维数为 $|S|=[G:H]=p-1$. 将 $G/H\cong\mathbb{Z}_p^*$ 的 $p-1$ 个一维表示（例 *3.4.11*）提升为 G 的一维表示，且注意到，

$$p-1+(p-1)^2=(p-1)(1+p-1)=(p-1)p=|G|,$$

由推论 *3.4.6*, 它们与 $\mathrm{Ind}_H^G\varphi$ 就是 G 的所有互不等价的的不可约表示。

8 对称群的表示论

8.1 划分与 Young 表

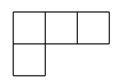
定义 8.1.1 (划分)**.** 设 n 是正整数，数组 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$ 满足 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_l\geq 0$, 且 $|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l=n$, 称为 n 的一个划分，记为 $\lambda\vdash n$. n 的所有不同划分的个数记为 $p(n)$.

例 8.1.2. $\forall\,\sigma\in S_n$, σ 可以分解为若干个不相交轮换的乘积（可交换），按每个轮换的长度由长到短排序，自然地，它的轮换型给出了 n 的一个划分：$\mathrm{type}(\sigma)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)\vdash n$.

定理 8.1.3. 若 $\sigma,\tau\in S_n$, 则 σ 与 τ 共轭，当且仅当 $\mathrm{type}(\sigma)=\mathrm{type}(\tau)$.

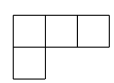
注记 8.1.4. 由定理 *8.1.3*, n 的划分与 S_n 的共轭类有一一对应，由推论 *3.4.9*, 它们与 S_n 的不可约表示有一一对应。

定义 8.1.5 (Young 图)**.** 对 n 的一个划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，将 n 个方块分成 l 行，第 i 行有 λ_i 个，$1\leq i\leq l$, 例如，$n=4$, $\lambda=(3,1)$,

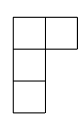


称为划分 λ 的 *Young* 图。

定义 8.1.6 (共轭划分)**.** 对划分 $\lambda\vdash n$, 它的共轭划分 λ^T 是将它对应的 *Young* 图沿对角线 $y=-x$ 翻转得到的 *Young* 图所对应的划分。例如 $n=4$, $\lambda=(3,1)$, 它的 *Young* 图为



翻转后的 *Young* 图为



从而 $\lambda^T = (2,1,1)$.

定义 8.1.7. 在划分的集合上定义偏序关系 $\trianglerighteq$: 对任意 n 的两个划分 λ, μ, 称 $\lambda \trianglerighteq \mu$, 若 $\forall\, i \geq 1$, λ 的前 i 行的方块的个数不小于 μ 的前 i 行方块的个数。即对 n 的划分 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l), \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$, 称 $\lambda \trianglerighteq \mu$, 若 $\forall\, i \geq 1$,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i.$$

容易验证, $\trianglerighteq$ 是一个偏序, 但不是全序。

定义 8.1.8 (Young 表)**.** 对 n 的一个划分 λ, 将 $1, 2, \cdots, n$ 不重复地填入它的 *Young* 图的方块中, 称为它的一个 *Young* 表。每个 *Young* 图有 $n!$ 个 *Young* 表。

命题 8.1.9. 对 n 的划分 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l), \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$, t^λ 是 λ 的一个 *Young* 表, s^μ 是 μ 的一个 *Young* 表, 满足若两个数在 s^μ 的同一行, 则它们不在 t^λ 的同一列, 则存在 λ 的 *Young* 表 u^λ, 满足

1. t^λ 与 u^λ 的每一列的数的集合相同;
2. $\forall\, 1 \leq i \leq m$, s^μ 的前 i 行的数的集合包含于 u^λ 的前 i 行的数的集合。

引理 8.1.10. 对 n 的划分 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l), \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$, t^λ 是 λ 的一个 *Young* 表, s^μ 是 μ 的一个 *Young* 表, 满足, 若两个数在 s^μ 的同一行, 则它们不在 t^λ 的同一列, 则 $\lambda \trianglerighteq \mu$.

证明. 由命题 8.1.9, 借助 u^λ 即得。 □

8.2 构造不可约表示

定义 8.2.1 (余不变子群)**.** 设 $X \subset \{1, 2, \cdots, n\}$, 记 S_X 是 S_n 中保持 X 之外的元素不动的置换的集合, 称为 X 的余不变子群。

定义 8.2.2 (列稳定化子)**.** 设 t 是一个 *Young* 表, 它的列稳定化子 C_t 是 S_n 的子群, 保持 t 的每一列的元素, 即 $\forall\, \sigma \in C_t$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\sigma(i)$ 与 i 在同一列。

定义 8.2.3. $\forall\ \sigma \in S_n$, σ 在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的作用也可以诱导在 *Young* 表 t 的作用，得到的 *Young* 表记为 σt. 对 n 的划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$, 定义它的 *Young* 表的等价关系 $\sim$: $t_1\sim t_2$, 当且仅当它们对应的每一行的数的集合相同。

定义 8.2.4 (表胚)**.** 对 n 的划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$, 它的 *Young* 图在 $\sim$ 下的等价类称为它的一个表胚。*Young* 表 t 所在的表胚记为 $[t]$. λ 的表胚的集合记为 T^λ. 记 T_λ 是将 i 填到第 i 个方块得到的表胚。

命题 8.2.5. 对 n 的划分 λ, $t_1\sim t_2$ 是它的两个等价地 *Young* 表，则 $\forall\ \sigma\in S_n$, $\sigma t_1\sim\sigma t_2$. 从而可以通过令 $\sigma[t]=[\sigma t]$, 定义 S_n 在 T^λ 的作用。

注记 8.2.6. S_n 在 T^λ 上的作用是可迁的，这是因为它在 λ 的 *Young* 表上的作用是可迁的。

定义 8.2.7 (Young 子群)**.** 对 n 的划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$, T_λ 的稳定化子 S_λ 为

$$S_\lambda=S_{\{1,2,\cdots,\lambda_1\}}\times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\cdots,\lambda_1+\lambda_2\}}\times\cdots\times S_{\{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{l-1}+1,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{l-1}+2,\cdots,n\}}.$$

从而

$$\left|T^\lambda\right|=[S_n:S_\lambda]=\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!}.$$

子群 S_λ 称为 S_n 关于划分 λ 的 *Young* 子群。记 $M^\lambda=\mathbb{C}T^\lambda$, 令 $\varphi^\lambda:S_n\to GL(M^\lambda)$ 是对应的置换表示。

例 8.2.8 (P123 例 10.2.5)**.**

1. 若 $\lambda=(n-1,1)$, 则 T^λ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有一一对应，φ^λ 是置换群的标准表示；
2. 若 $\lambda=(n)$, 则 $S_\lambda=\{e\}$, 则 $\left|T^\lambda\right|=1$, 从而 φ^λ 是平凡表示；
3. 若 $\lambda=(n-2,2)$, 则 T^λ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的二元子集有一一对应。

定义 8.2.9 (多体胚)**.** 对划分 $\lambda,\mu\vdash n$, 设 t 是 λ 的一个 *Young* 表，定义线性算子 $A_t:M^\mu\to M^\mu$

$$A_t=\sum_{\pi\in C_t}\operatorname{sgn}(\pi)\varphi^\mu_\pi.$$

当 $\lambda=\mu$ 时，M^λ 中的元素

$$e_t=A_t([t])=\sum_{\pi\in C_t}\operatorname{sgn}(\pi)\pi([t])$$

称为 t 的多体胚。

命题 8.2.10. 对划分 $\lambda \vdash n$, 设 t 是 λ 的一个 *Young* 表，$\sigma \in S_n$, 则 $\varphi_\sigma^\lambda e_t = e_{\sigma t}$.

定义 8.2.11 (Sprecht 表示)**.** 对划分 $\lambda \vdash n$, 定义

$$S^\lambda = \mathrm{Span}\{e_t \mid t \text{ 是 } \lambda \text{ 的 } Young \text{ 表}\},$$

它是 M^λ 的子空间。由命题 *8.2.10*, S^λ 是 S_n 不变的。令 $\psi^\lambda : S_n \to GL(S^\lambda)$ 是对应的子表示，称为 λ 的 *Sprecht* 表示。

引理 8.2.12. 对划分 $\lambda, \mu \vdash n$, 设 t^λ 是 λ 的一个 *Young* 表，s^μ 是 μ 的一个 *Young* 表，使得 $A_{t^\lambda}([s^\mu]) \neq 0$, 则 $\lambda \trianglerighteq \mu$. 特别地，当 $\lambda = \mu$ 时，$A_{t^\lambda}([s^\mu]) = \pm e_{t^\lambda}$.

引理 8.2.13. 对划分 $\lambda \vdash n$, 设 t 是 λ 的一个 *Young* 表，则 $\mathrm{Im}(A_t) = \mathbb{C}e_t$.

定理 8.2.14 (子表示定理)**.** 对划分 $\lambda \vdash n$, 设 V 是 M^λ 的一个 S_n 不变子空间，则要么 $S^\lambda \subseteq V$, 要么 $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$.

推论 8.2.15. 对划分 $\lambda \vdash n$, 则 λ 的 *Sprecht* 表示 $\psi^\lambda : S_n \to GL(S^\lambda)$ 是不可约表示。

引理 8.2.16. 对划分 $\lambda, \mu \vdash n$, 设 $T \in \mathrm{Hom}_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu)$, 若 $S^\lambda \not\subseteq \mathrm{Ker}(T)$, 则 $\lambda \trianglerighteq \mu$. 特别地，若 $\lambda = \mu$, 则 $T|_{S^\lambda}$ 是数乘映射。

引理 8.2.17. 若 $\mathrm{Hom}_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu) \neq 0$, 则 $\lambda \trianglerighteq \mu$. 特别地，若 $\lambda = \mu$, 则 $\dim \mathrm{Hom}_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu) = 1$.

定理 8.2.18. 所有 n 的划分 $\lambda \vdash n$ 对应的 *Sprecht* 表示 ψ^λ 构成了 S_n 的互不等价的不可约表示的完全集。

推论 8.2.19. 对 n 的划分 $\mu \vdash n$, ψ^μ 是 φ^μ 的一重不可约构成。对 φ^μ 的任意不可约构成 ψ^λ, 都有 $\lambda \trianglerighteq \mu$.