

不可压缩曲面

崔嘉祺

华东师范大学

2025 年 1 月 7 日

摘要

这是笔者 2024 年秋季学期在华东师范大学修读的研究生课程《三维流形》的 final project.

这是对 John Hempel 的书 *3-MANIFOLDS* 的第六章的翻译和一些细节的补充.

在第二章我们证明了任意的闭三维流形都有 Heegaard 分解: 沿着 Heegaard 曲面分解成两个 handlebody. Heegaard 分解的好处是, 分解出的块 (handlebody) 很简单. 然而, 我们很难从嵌入的 Heegaard 曲面得到流形的内蕴信息. 另一方面, 这章我们将要研究的不可压缩曲面高度反应了流形的同伦性质, 在之后的发展和研究中起着关键作用. 这章我们将阐述关于不可压缩曲面的一些技术性引理.

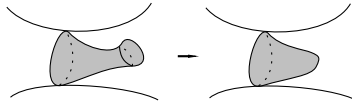
本文所说的“曲面”是指紧连通的二维流形.

定义 1. 设 M 是一个三维流形, F 是其中的一个曲面. 假设 F 要么是恰当嵌入的, 要么包含于 M 的边界中. 我们称 F 在 M 中是不可压缩的, 如果以下的条件都不满足:

1. F 是一个球面, 并且在 M 中界定一个同伦的实心球.
2. F 是一个圆盘, 并且要么 $F \subset \partial M$, 要么存在一个同伦实心球 $X \subset M$, 使得 $\partial X \subset F \cup \partial M$.
3. 存在一个圆盘 $D \subset M$, 使得 $D \cap F = \partial D$ 并且 ∂D 在 F 中不可缩.

引理 2. 设 S 是三维流形 M 中的一个紧二维流形. 假设 S 的每一个连通分支要么是双侧恰当嵌入的, 要么包含于 M 的边界中. 如果有 S 的连通分支 F 使得 $\ker([\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)]) \neq 1$, 则存在一个圆盘 $D \subset M$, 使得 $D \cap S = \partial D$ 并且 ∂D 在 S 中不可缩.

证明. 首先, 选取一个一般位置的映射 $f: (B^2, \partial B^2) \rightarrow (M, F)$ 使得 $f|_{\partial B^2}$ 在 F 中是必要的 (不是零伦的). 由 S 的邻域上的乘积结构, 我们可以假设存在 ∂B^2 在 B^2 中的邻域 N , 使得 $f(N - \partial B^2) \cap S = \emptyset$. 从而 $f^{-1}(S)$ 的连通分支都是简单闭曲线. 设 f 是实现连通分支数最小的映射. 设 E 是一个 B^2 中的圆盘, 使得 $E \cap f^{-1}(S) = \partial E$, F' 是 S 的包含 $f(\partial E)$ 的连通分支. 在 B^2 中对 $f^{-1}(S)$ 用 inner most argument, 我们知道 $f|_{\partial E}$ 在 F' 中是必要的; 否则与 f 是实现连通分支数最小的假设矛盾.



由环路定理 (取 $N = \{1\}$), 我们就找到了所需的 D . □

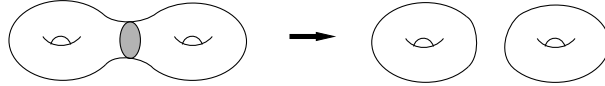
推论 3. 设 F 是三维流形 M 中的一个双侧不可压缩曲面, 则 $\ker([\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)]) = 1$.

推论 3 中 F 是双侧的条件是必要的:

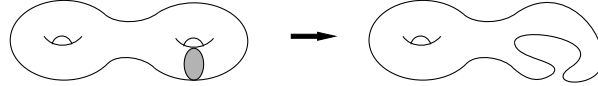
引理 4. 设 M 是一个可定向的三维流形, 它包含一个欧拉示性数是奇数的闭曲面. 假设 F 是 M 中有最大的奇数欧拉示性数的闭曲面. 则 F 在 M 中是不可压缩的. 从而若 $F = \mathbb{P}^2$, 则 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2 * G$ (其中 G 可以是平凡群).

证明. 反证法. 若 F 是可压缩的, 考虑 F 的压缩圆盘 D . 对 D 做手术:

1. 若 ∂D 分离 F , 则手术得到两个曲面 F', F'' , 使得 $\chi(F') + \chi(F'') = \chi(F) + 2$.



2. 若 ∂D 不分离 F , 则手术得到曲面 F' , 使得 $\chi(F') = \chi(F) + 2$.



无论如何, 我们得到了具有比 F 更大的奇欧拉示性数的闭曲面 F' , 这就与 F 的选取矛盾.

由于 M 可定向, $F = \mathbb{P}^2$ 不可定向, 从而是单侧的, 它的一个正则邻域 (非平凡的区间丛) N 的边界 ∂N 是一个球面. 由 Van-Kampen 定理,

$$\pi_1(M) = \pi_1(N) *_{\pi_1(\partial N)} \pi_1(M - N) = \mathbb{Z}_2 * \pi_1(M - N).$$

□

又注意到, 透镜空间 $L_{2k,q}$ 包含一个欧拉示性数为 $2-k$ 的闭曲面 F : 由定义, 取粘合透镜空间的实心环的边界上的 (p, q) -曲线的合适的管状邻域即得. 可见 <https://math.stackexchange.com/questions/268310/problem-from-hempel-surfaces-in-lens-spaces?r=SearchResults>. 由引理 4, 我们可以假设 F 是单侧不可压缩的. 而在第二章我们知道, $\pi_1(L_{2k,q}) = \mathbb{Z}_{2k}$ 是一个有限群. 但对足够大的 k , $\pi_1(F)$ 是一个无限群. 从而 $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(L_{2k,q})$ 不可能是单射.

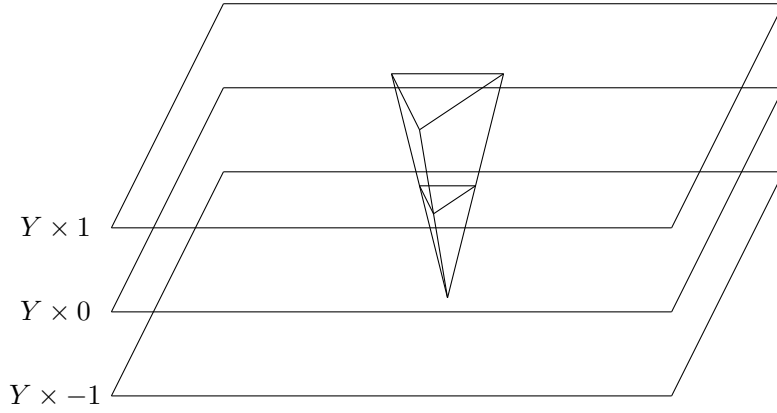
定义 5. 对一个三维流形 M 与一个空间 X , 我们称两个映射 $f, g: M \rightarrow X$ 是 C -等价的, 若存在 M 到 X 的映射 $f_0 = f, f_1, \dots, f_n = g$, 使得要么 f_i 同伦于 f_{i-1} , 要么对一些同伦实心球 $B^3 \subset M$, 满足 $B \cap \partial M$ 是空集或者一个圆盘, f_i 与 f_{i-1} 在 $M - B$ 上相等.

若 $\pi_3(X) = 0$, 同伦实心球都是零伦的. 从而若第二种情况发生, 就有 f_i, f_{i-1} 在 M 去掉一个点处都相等, 从而同伦. 此时 C -等价的映射都是同伦的. 但是无论如何, 在取合适的基点变换和内自同构的意义下, C -等价的映射诱导相同的群同态 $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$: 对情况二, 对 B 与 $M - B$ 使用 Van-Kampen 定理即得.

引理 6. 设 M 是一个紧三维流形, X 是一个 k 维分段线性流形, 且 X 包含一个恰当嵌入的双侧 $k-1$ 维分段线性子流形 Y , 使得 $\ker([\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)]) = 1$, $\pi_2(Y) = \pi_2(X - Y) = 0$. 设 $f: M \rightarrow X$ 是任意一个映射, 则存在映射 $g: M \rightarrow X$, 使得

1. g 与 f 是 C -等价的.
2. $g^{-1}(Y)$ 的每一个连通分支都是 M 中的恰当嵌入的双侧不可压缩曲面.
3. 存在合适的 $Y = Y \times 0 \subset X$ 的乘积邻域 $Y \times [-1, 1]$ 与 $g^{-1}(Y) = g^{-1}(Y) \times 0 \subset M$ 的乘积邻域 $g^{-1}(Y) \times [-1, 1]$, 使得对任意 $p \in g^{-1}(Y)$, g 将纤维 $p \times [-1, 1]$ 同胚地映到纤维 $g(p) \times [-1, 1]$.

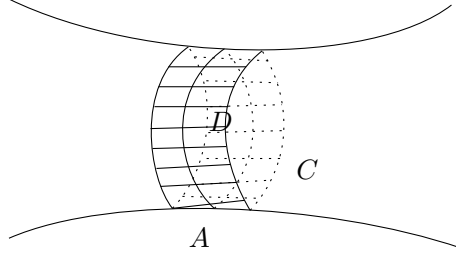
证明. 首先我们取 X 的三角剖分, 使得 Y 的乘积邻域 $Y \times [-1, 1]$ 以乘积结构被三角化, 即 $Y \times [-1, 1]$ 中的任意一个单形都是由 $Y \times -1$ 中的一个单形和 $Y \times 1$ 中的一个单形连接出来的.



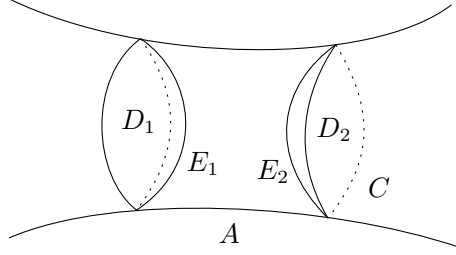
这样, $Y = Y \times 0$ 关于这个三角化是“横截的”. 由单纯逼近定理, 我们可以首先将 f 同伦到一个从 M 的某个三角化到 X 的单纯映射. 此时, 由于 Y 是 X 的恰当嵌入的双侧余维数 1 的分段线性子流形, $f^{-1}(Y)$ 是一个恰当嵌入的双侧曲面 (取适当的 Morse 函数, 由正则值原像定理保证). 并且此时 (3) 在 $Y \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 与 $f^{-1}(Y \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ 上成立. 如果 $f^{-1}(Y)$ 的每一个连通分支都是不可压缩的, 将每一个纤维重新参数化即得. 若否, 会出现以下三种情况:

1. 若 $f^{-1}(Y)$ 包含一个可压缩的球面 F , 则它在 M 中界定一个实心球 C . 由于 $\pi_2(Y) = 0$, 取 C 的一个小正则邻域 U , 我们可以构造映射 $f_1: M \rightarrow X$, 使得 $f_1|_{M-U} = f|_{M-U}$ 并且 $f_1(U) \subset Y \times [-1, 1] - Y$. 从而 f_1 与 f 是 C -等价的, 并且 $f_1^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Y) - F$. 这样我们就消掉了 $f^{-1}(Y)$ 中的可压缩球面.
2. 若 $f^{-1}(Y)$ 包含一个压缩圆盘 F , 由定义, F 与 ∂M 共同界定一个实心球. 同理 (1), 我们可以消掉 $f^{-1}(Y)$ 中的压缩圆盘.
3. 若有压缩圆盘 $D \subset \int M$ 使得 $D \cap f^{-1}(Y) = \partial D$ 并且 ∂D 在 $f^{-1}(Y)$ 中不可缩, 我们取 D 在 M 中

的一个邻域 C 使得 $A = C \cap f^{-1}(Y)$ 是 C 中一个恰当嵌入的带子.



取 ∂C 中两个不交的圆盘 D_1, D_2 使得 $\partial A = \partial D_1 \cup \partial D_2$, 再取 C 中两个恰当嵌入的圆盘 E_1, E_2 使得 $\partial E_i = \partial D_i, i = 1, 2$.



构造 $f_1: M \rightarrow X$ 如下: 首先令 $f_1|_{M-fC} = f|_{M-fC}$. 由于 $\ker([\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)]) = 1$, 我们可以将 $f_1|_{\partial E_i}$ 延拓到 $E_i \rightarrow Y$. 这是因为, 若否, 存在一个圆盘 $D' \subset X - Y$, 使得 $\partial D' \subset Y$, 矛盾. 之后, 由于 $\pi_2(X - Y) = 0$, 同理 (1), 我们可以把 $C - (E_1 \cup E_2)$ 中的三个实心球都消掉. 并且 $f_1^{-1}(Y)$ 也是双侧的. 这样我们就消掉了 $f^{-1}(Y)$ 的压缩圆盘 D .

到此为止, 我们得到了与 f 是 C -等价的映射 f_1 , 满足引理条件 (2). 最后我们用正则邻域理论可以将 f_1 同伦到满足引理条件 (3) 的 g , 并且不改变 $f_1^{-1}(Y)$, 即为所求. \square

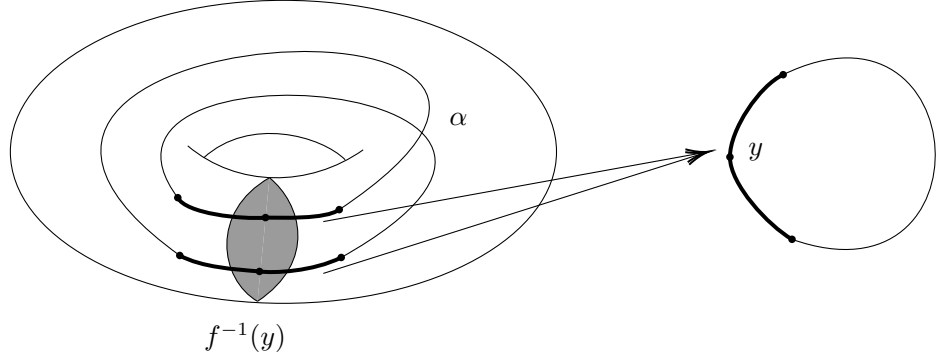
我们能注意到, 如果一个三维流形 M 包含一个恰当嵌入的双侧非分离曲面 F , 则 $H_1(M)$ 是无限阶的: 任意一个与 F 横截相交于一个孤立点的闭曲线就给出了 $H_1(M)$ 的一个无限阶元. 以下的两个引理给出这个观察一个很强的逆定理.

引理 7. 设 M 是一个紧三维流形, $H_1(M)$ 是无限阶的. 则 M 包含一个恰当嵌入的双侧非分离的不可压缩曲面.

证明. 由于 $H_1(M)$ 是无限阶的, 存在一个满同态 $H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$. 这说明存在一个映射 $f: M \rightarrow S^1$, 它诱导一个满同态 $f_*: H_1(M) \rightarrow H_1(S^1)$. 由引理 6 (2), $\forall y \in S^1$, 我们可以假设 $f^{-1}(y)$ 的每一个连通分支都是 M 中的恰当嵌入的双侧不可压缩曲面. 并且由于 f_* 是满射, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. 这样我们只需要在其中找一个非分离的分支.

由引理 6 (3), 我们可以取 $\pi_1(S^1)$ 的生成元 z , 使得对任意 M 中的与 $f^{-1}(y)$ 横截相交的环路 α , $f_*([\alpha]) = z^n$, 其中 n 是 α 与 $f^{-1}(y)$ 的定向相交数. 这是因为, 每一个相交处有纤维同胚于 $y \in S^1$ 的纤

维, 它贡献了 z 的一次指数.



由于 f_* 是满射, 取环路 α 使得 $f_*([\alpha]) = z$. 这说明 α 与 $f^{-1}(y)$ 的某个连通分支 F 相较于奇数个点. 从而 $M - F$ 是连通的. 这是因为, 若否, 将 α 沿 F 切开得到一些线段, 每个线段的每个端点都会贡献一个相交数, 从而 α 与 F 的相交数为偶数, 矛盾. 这说明 F 是非分离的, 即为所求. \square

很多情况下, $|H_1(M)| = \infty$ 的条件是自然满足的. 例如:

引理 8. 设 M 是一个紧三维流形, 并且

- 要么 M 可定向, $\partial \widehat{M} \neq \emptyset$,
- 要么 M 不可定向, $\partial \widehat{M}$ 不包含射影平面 (允许 $\partial \widehat{M} = \emptyset$),

其中 \widehat{M} 表示将 M 的球面边界都粘上一个实心球所得到的流形. 则 $H_1(M)$ 是无限阶的.

证明. 对两种情形同时证明. 将两个 \widehat{M} 沿他们边界粘合, 得到一个闭三维流形 $2\widehat{M}$. 考虑 $(2\widehat{M}, \widehat{M}_1 = \widehat{M}, \widehat{M}_2 = \widehat{M})$ 的 Mayer-Vietoris 序列可以得到 $\chi(2\widehat{M}) = 2\chi(\widehat{M}) - \chi(\partial \widehat{M})$. 由于 $2\widehat{M}$ 是闭可定向三维流形, $\chi(2\widehat{M}) = 0$ (见 Hatcher 的代数拓扑 Cor 3.37). 并且由于 $\partial \widehat{M}$ 没有球面分支, 我们有

$$\chi(\widehat{M}) = \frac{1}{2}\chi(\partial \widehat{M}) \leq 0.$$

由于 \widehat{M} 是紧流形, 由 Poincaré 对偶,

$$H_3(\widehat{M}) = H^0(\widehat{M}) = 0.$$

故 $b_3(\widehat{M}) = 0$. 最后由欧拉示性数与 Betti 数的关系

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3,$$

我们有

$$\dim H_1(M) = \dim H_1(\widehat{M}) = b_1(\widehat{M}) = b_0(\widehat{M}) + b_2(\widehat{M}) - b_3(\widehat{M}) - \chi(\widehat{M}) \geq 1 + b_2(\widehat{M}) \geq 1,$$

即 $H_1(M)$ 是无限阶的. \square

对带边的可定向流形, 引理 7 有更强的版本:

引理 9. 设 M 是一个紧可定向的三维流形, 它的边界 ∂M 包含一个正亏格的曲面. 则 M 包含一个恰当嵌入的双侧不可压缩曲面 F , 使得 $0 \neq [\partial F] \in H_1(\partial M)$ (从而 $\partial F \neq 0$).

证明. 首先, 由于 M 是可定向的, 且 F 是双侧的, F 也是可定向的. 从而 F 的定向又诱导了 ∂F 的定向. 这说明 $[\partial F] \in H_1(\partial M)$ 是良定义的.

由引理 8, $|H_1(M)| = \infty$. 于是我们可以同理引理 7 的证明: 选取 $f: M \rightarrow S^1$, 使得对某个 $y \in S^1$, $f^{-1}(y)$ 的每个连通分支都是不可压缩的. 若结论不对, 即 $\partial F = \emptyset$ 或者 $[\partial F] = 0 \in H_1(\partial M)$, 则对任意 ∂M 中的环路 α , 它与 ∂F 的定向相交数是 0. 从而 $f_*([\alpha]) = z^0 = 0$. 这说明 $f_*(H_1(\partial M)) = 0 \in H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$. 这样, 我们只需要取合适的 f 使得 $f_*(H_1(\partial M)) \neq 0$, 就避免了这种情况, 从而完成证明.

只需要证 $|\text{im}([i_*: H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)])| = \infty$. 这样, 由于 f_* 是满射, 就一定有 $f_*(H_1(\partial M)) = \text{im}(f_*i_*) \neq 0$. 若否, 考虑 \mathbb{Q} 系数的同调, 我们有以下的相对同调 Mayer-Vietoris 正合序列:

$$0 \rightarrow H_3(M, \partial M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(\partial M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(M, \partial M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(\partial M; \mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

它们的秩的交错和为 0. 又由 Alexander 对偶定理和万有系数定理,

$$H_2(M, \partial M; \mathbb{Q}) = H^1(M; \mathbb{Q}) = H_1(M; \mathbb{Q}).$$

从而

$$1 - b_2(\partial M) + b_2(M) - b_1(M) + b_1(\partial M) = 0,$$

其中 b_i 是有理 Betti 数. 于是, 由于 $b_3(M) = 0$ (见引理 8 的证明),

$$\chi(M) = -b_3(M) + b_2(M) - b_1(M) + b_0(M) = 0 - 1 + b_2(\partial M) - b_1(\partial M) + b_0(M) = \chi(\partial M) - b_0(\partial M).$$

同理引理 8 的证明, 又有 $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M)$. 从而

$$\chi(\partial M) = 2b_0(\partial M) \geq 2$$

是一个正偶数. 这说明 ∂M 的每一个分支都是球面, 与假设 ∂M 含一个亏格为正的定向曲面矛盾. \square

注记 10. 1. 引理 9 并不说明 ∂F 不能在 ∂M 中界定一个曲面, 除非 ∂F (由 F 的诱导定向) 不是 ∂M 中某个曲面的定向边界.

2. 引理 8 对边界包含射影平面的不可定向三维流形不一定成立, 哪怕它的边界包含正亏格的定向曲面.

3. 如果 M 不可定向, $\widehat{\partial M} \neq \emptyset$, 我们不能得到 $\text{im}([H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)])$ 是无限阶的, 哪怕 ∂M 不包含射影平面.

以下是反例:

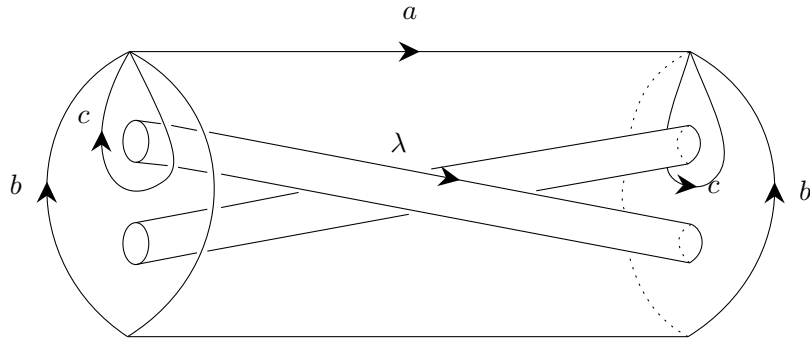
例 11. 设 M 是 Klein 瓶上的扭 I -丛. 它是可定向的. 如果 F 是 M 中的一个带边的双侧不可压缩曲面, 由于 ∂M 是不可压缩的, 并且 $\pi_1(M)$ 不包含非平凡的自由子群, F 一定是一个带子. 于是 ∂F 在 $\partial M = S^1 \times S^1$ 中界定两个带子 B_1, B_2 . 但是 $F \cup B_i$ 是一个 Klein 瓶, $i = 1, 2$. 这给出了注记 10 (1) 的反例.

例 12. 设 F 是一个可定向闭曲面, $r: F \rightarrow F$ 是一个对合 ($r^2 = \text{id}$), 有有限个不动点 x_1, \dots, x_n , 使得 $r_*: H_1(F) \rightarrow H_1(F)$ 将每个元素映到它的逆. 比如, 取 $F = S^1 \times S^1$, $r(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = (e^{-i\theta}, e^{-i\phi})$. 定义 $\sigma: F \times [-1, 1] \rightarrow F \times [-1, 1]$, $\sigma(x, t) = (r(x), -t)$. 取 $x_1 \times 0, \dots, x_n \times 0$ 的邻域 (实心球) B_1, \dots, B_n , 使得 $\sigma(B_i) = B_i$, $i = 1, \dots, n$. 从而 σ 自由作用在 $F \times [-1, 1] - \bigcup_{i=1}^n \text{int } B_i$. 考虑商空间 $M := (F \times [-1, 1] - \bigcup_{i=1}^n \text{int } B_i) / \sigma$. 则 ∂M 包含 n 个射影平面 (由 ∂B_i 生成) 和一个 F (由 $F \times -1$ 和 $F \times 1$ 粘合而来). 容易看出 $H_1(M)$ 是有限阶的: 由 Van-Kampen 定理,

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &= \pi_1(T^2) *_{\pi_1(T^2) \oplus \pi_1(T^2)} \pi_1(T^2) \\ &= \langle a, b, c, d : ab = ba, cd = dc, a = c^{-1}, b = d^{-1}, a = c, b = d \rangle = \mathbb{Z}_2^2. \end{aligned}$$

从而这就给出了注记 10 (2) 的反例.

例 13. 如下图所示, 设 V 是一个实心 Klein 瓶, T 是 V 内部的一个实心环.



从而

$$\pi_1(V - \text{int } T) = \langle a, b, c : aba^{-1} = b^{-1}, acac^{-1} = b^{-1}c \rangle.$$

另外, 选 ∂T 的一个纬线 λ , 它是 $a^2 \in \pi_1(V - \text{int } T)$ 的一个代表元. 沿着 λ 给 $V - \text{int } T$ 粘上一个 2-handle 得到流形 M . 此时, $\partial M = K^2 \cup S^2$, 从而 $\pi_1(\partial M) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. 而注意到 $\partial M \hookrightarrow M$ 将同调中 \mathbb{Z}_2 的部分杀掉, 将 \mathbb{Z} 中 $\lambda = a^2$ 生成的部分杀掉, 即 $\ker([H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)]) = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. 从而

$$\text{im}([H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)]) = H_1(\partial M) / \ker([H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)]) = \mathbb{Z}_2.$$

这就给出了注记 10 (3) 的反例.