概率论作业

崔嘉祺

华东师范大学 20 级数学强基拔尖班

2023 年 10 月 14 日

摘要

这是华东师范大学数学专业研究生基础课“概率论”作业的个人解答。

目录

第二周

题目 1. 设 $\mathcal{A}$ 是集合 Ω 的子集族。$\mathcal{A}$ 既是 *Boole* 代数，又是单调类。证明：$\mathcal{A}$ 是 σ-代数。

证明. 由于 $\mathcal{A}$ 是 Boole 代数，故 $\Omega \in \mathcal{A}$, 且 $\mathcal{A}$ 对补封闭，只要证可列并封闭。

$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, 令 $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 由 Boole 代数的有限并封闭性质，$B_n \in \mathcal{A}$. 注意到有

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots,$$

记 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A$. 即有 $B_n \nearrow A$. 因为 $\mathcal{A}$ 是单调类，所以 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. 即 $\mathcal{A}$ 对可列并封闭。 □

第三周

题目 2. 设 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 是概率空间 Ω 上的两个独立的事件集。举例说明，如果 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 不是 π-系，则 $\sigma(\mathcal{A}_1)$ 与 $\sigma(\mathcal{A}_2)$ 不一定独立。

解. 令 Ω 是投掷两次骰子的结果的集合，$\mathcal{A}_1=\{A,B\},\mathcal{A}_2=\{C\}$, 其中，$A$ 是第一次为 1, B 是第二次为 1, C 是两次之和为偶数。由于 $\varnothing\notin\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$, 从而 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 都不是 π-系。

$$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{6},\ \mathbb{P}(B)=\frac{1}{6},\ \mathbb{P}(C)=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{12},\ \mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{12}.$$

从而

$$\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C).$$

即 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 相互独立。

而 $\sigma(\mathcal{A}_1)$ 中一定有 $A\cap B$, 即两次都是 1, $\sigma(\mathcal{A}_2)$ 中一定有 C, 而

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{36},\ \mathbb{P}((A\cap B)\cap C)=\frac{1}{36},$$

从而

$$\mathbb{P}((A\cap B)\cap C)=\frac{1}{36}\neq\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}(A\cap B)\cdot\mathbb{P}(C).$$

即 $\sigma(\mathcal{A}_1)$ 与 $\sigma(\mathcal{A}_2)$ 不独立。 □

题目 3. 设 $\mathcal{A}$ 是 λ-系。证明：若 $A,B\in\mathcal{A},A\cap B=\varnothing$, 则 $A\cup B\in\mathcal{A}$.

证明. $B^c=\Omega-B\in\mathcal{A}$. 由于 $A\cap B=\varnothing$, 从而 $A\subset B^c$, 从而 $B^c-A=(A\cup B)^c=\Omega-(A\cup B)\in\mathcal{A}$, 从而 $A\cup B=\Omega-(A\cup B)^c\in\mathcal{A}$. □

题目 4. 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}$ 是两个 σ-代数。定义

$$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=4\sup_{A_1\in\mathcal{F}_1,A_2\in\mathcal{F}_2}\left|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\right|.$$

$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 是表征 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 相依程度的一个量。证明：

(a) $0\le d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)\le 1$;

(b) 若 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 独立，则 $d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=0$;

(c) $d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=1$ 当且仅当存在 $A\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$, 满足 $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$.

证明. (a) 首先，显然有 $d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)\geq 0$.

$\forall A_1\in\mathcal{F}_1, A_2\in\mathcal{F}_2$, 有 $A_1\cap A_2\in\mathcal{F}$. 考虑 $|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|$:

1 若 $\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\geq 0$. 由单调性，$\mathbb{P}(A_1),\mathbb{P}(A_2)\geq\mathbb{P}(A_1A_2)$, 从而

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)| &= \mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\
&\leq \mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1A_2)^2\\
&= \mathbb{P}(A_1A_2)\left(1-\mathbb{P}(A_1A_2)\right)\\
&\leq \frac{1}{4}\left(\mathbb{P}(A_1A_2)+(1-\mathbb{P}(A_1A_2))\right)^2\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

2 若 $\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\leq 0$. 考虑 A_1^c: 有 $A_1^c\in\mathcal{F}_1$, 从而 $A_1^c\cap A_2\in\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1^cA_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1^c\mid A_2)\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\\
&= \left(\mathbb{P}(A_1^c\mid A_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\right)\mathbb{P}(A_2)\\
&= \left((1-\mathbb{P}(A_1\mid A_2))-(1-\mathbb{P}(A_1))\right)\mathbb{P}(A_2)\\
&= -\mathbb{P}(A_1\mid A_2)\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\
&= -\left(\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\right)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

从而同理有

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)| &= -\left(\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\right)\\
&= \mathbb{P}(A_1^cA_2)-\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\\
&\leq \mathbb{P}(A_1^cA_2)-\mathbb{P}(A_1^cA_2)^2\\
&\leq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

综上，无论如何都有 $|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|\leq\frac{1}{4}$. 从而

$$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=4\sup_{A_1\in\mathcal{F}_1,A_2\in\mathcal{F}_2}|\mathbb{P}(A_1A_2)-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)|\leq 4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

(b) 若 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 独立，则 $\forall A_1\in\mathcal{F}_1, A_2\in\mathcal{F}_2$,

$$\mathbb{P}(A_1A_2)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

从而

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 4 \sup_{A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2} |\mathbb{P}(A_1 A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)| = 0.$$

(c) <u>充分性</u>：此时，取 $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, 使得 $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

$$\left|\mathbb{P}(A) - (\mathbb{P}(A))^2\right| = \frac{1}{4},$$

则 $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ 能取到上界 $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$, 必有

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 1.$$

<u>必要性</u>：要让 $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 1$, 则 (a) 的证明中的不等式要同时取等号，即 $\exists A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$, 使得 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$, 并且均值不等式

$$\mathbb{P}(A_1 A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2)^2 \leq \frac{1}{4}$$

取等，当且仅当 $\mathbb{P}(A_1 A_2) = \frac{1}{2}$.

综上，存在 $A = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, 满足 $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

$\square$

第四周

题目 5. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 中两个独立的事件簇，均为 π-系。证明：$\sigma(\mathcal{A})$ 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。

证明. $\forall A\in\mathcal{A}$, A 与 $\mathcal{B}$ 独立，由于 $\mathcal{B}$ 是 π-系，从而 A 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。由 A 的任意性，$\mathcal{A}$ 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。

$\forall B\in\sigma(\mathcal{B})$, B 与 $\mathcal{A}$ 独立，由于 $\mathcal{A}$ 是 π-系，从而 B 与 $\sigma(\mathcal{A})$ 独立。由 B 的任意性，$\sigma(\mathcal{A})$ 与 $\sigma(\mathcal{B})$ 独立。 $\square$

第五周

题目 6. 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间，$f:\Omega\to\mathbb{R}$. 若 $|f|$ 是可测函数，则 f 是否一定是可测函数？

解. 不一定。设 E 是一个不可测集，定义函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\notin E;\\ -1, & x\in E.\end{cases}$$

从而 $|f|=1$, 是常值函数，可测。但是，

- 若 $a\le -1$, $f^{-1}((-\infty,a))=\varnothing$.
- 若 $-1<a\le 1$, $f^{-1}((-\infty,a))=E$.
- 若 $a>1$, $f^{-1}((-\infty,a))=\mathbb{R}$.

从而 f 不可测。 □

题目 7. 设 ξ,η 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的两个随机变量，$A\in\mathcal{F}$. 证明：函数

$$\zeta(\omega)=\xi(\omega)\chi_A+\eta(\omega)\chi_{\overline{A}}$$

也是随机变量。

证明. $\xi,\eta,\chi_A,\chi_{\overline{A}}$ 都是随机变量，即 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数。可测函数的四则运算仍然是可测函数。从而 $\zeta=\xi\cdot\chi_A+\eta\cdot\chi_{\overline{A}}$ 是可测函数，是随机变量。 □

题目 8. 设 ξ,η 是同一概率空间上的取值为 $1,2,\cdots,N$ 的两个随机变量，且 $\sigma(\xi)=\sigma(\eta)$. 证明：存在 $1,2,\cdots,N$ 的排列 $i_1,i_2,\cdots,i_N$, 使得对每个 $j=1,2,\cdots,N$, 有

$$\{\omega\mid\xi=j\}=\{\omega\mid\eta=i_j\}.$$

证明. 记 $A_i=\xi^{-1}(i),B_i=\eta^{-1}(i)\in\mathcal{F}$. $\Omega=\bigsqcup_{i=1}^N A_i=\bigsqcup_{i=1}^N B_i$.

$$\begin{aligned}\sigma(\xi)&=\xi^{-1}(\{0\},\{1\},\cdots,\{N\},\{1,2\},\cdots,\{N-1,N\},\cdots,\{1,2,\cdots,N\})\\&=\{\varnothing,A_1,\cdots,A_N,A_1\cup A_2,\cdots,A_{N-1}\cup A_N,\cdots,A_1\cup\cdots\cup A_N\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(\eta) &= \eta^{-1}(\{0\},\{1\},\cdots,\{N\},\{1,2\},\cdots,\{N-1,N\},\cdots,\{1,2,\cdots,N\}) \\ &= \{\varnothing, B_1,\cdots,B_N, B_1\cup B_2,\cdots,B_{N-1}\cup B_N,\cdots,B_1\cup\cdots\cup B_N\}.\end{aligned}$$

从而必须有 $\{A_1,\cdots,A_N\} = \{B_1,\cdots,B_N\}$. 从而存在 $1,2,\cdots,N$ 的排列 $i_1,i_2,\cdots,i_N$, 使得 $A_j = B_{i_j}, \forall j = 1,2,\cdots,N$. 此时,

$$\{\omega \mid \xi = j\} = A_j = B_{i_j} = \{\omega \mid \eta = i_j\}.$$

□

题目 9. 证明：随机变量 X 连续，当且仅当 $\forall x$, 有 $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

证明. 必要性：X 连续，Φ_X 连续。$\forall \varepsilon > 0, \forall x$,

$$\Phi_X(x+\varepsilon) - \Phi_X(x) = \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) - \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(x < X \le x+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由 Φ_X 与概率的连续性即得

$$0 = \mathbb{P}(X = x).$$

充分性：$\forall \varepsilon > 0, \forall x$,

$$\Phi_X(x+\varepsilon) - \Phi_X(x) = \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) - \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(x < X \le x+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由概率的连续性，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\Phi_X(x+\varepsilon) - \Phi_X(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{P}(x < X \le x+\varepsilon)) = \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

即 Φ_X 在 x 处连续。由 x 的任意性，Φ_X 连续。 □