МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: «Поиск с возвратом»

Студент гр. 3343 _____ Калиберов Н. И.

Преподаватель _____ Жангиров Т. Р.

Санкт-Петербург
2025

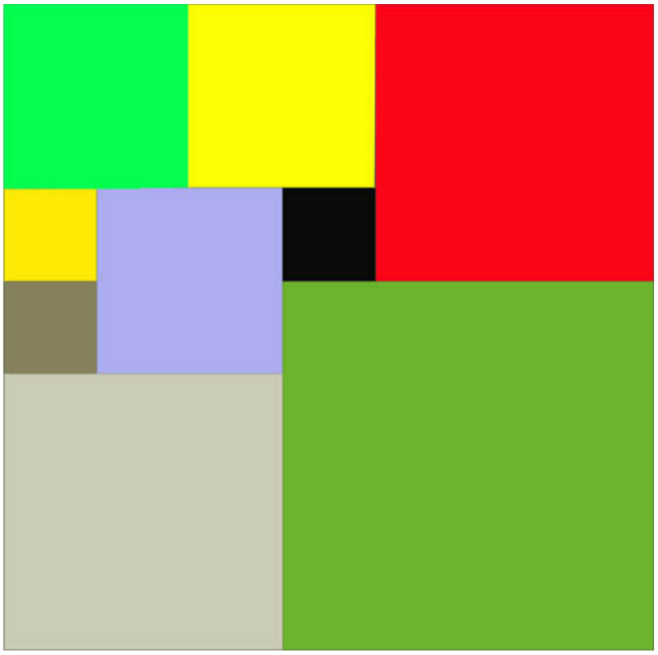
Цель работы

Изучить работу алгоритма поиска с возвратом и написать его рекурсивную реализацию для задачи размещения квадратов на столе.

Задание

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до N – 1, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу – квадрат размера N. Он может получить её, собрав из уже имеющихся обрезков (квадратов).

Например, столешница размера 7 x 7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы – одно целое число N (2 <= N <= 20).

Выходные данные

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков (квадратов), из которых можно построить столешницу (квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x,

y и w, задающие координаты левого верхнего угла (1 <= x, y <= N) и длину стороны соответствующего обрезка (квадрата).

Вар. 4р. Рекурсивный бэктрекинг. Расширение задачи на прямоугольные поля, рёбра квадратов меньше рёбер поля. Подсчёт количества вариантов покрытия минимальным числом квадратов.

Выполнение работы

Описание алгоритма

Программа решает задачу оптимального размещения квадратов на столе размером $N \times N$. Алгоритм использует рекурсивный бэктрекинг для перебора всех возможных вариантов расстановки квадратов. На каждом шаге проверяется, можно ли разместить квадрат определённого размера в текущей позиции. Если это возможно, квадрат размещается, и алгоритм продолжает поиск для оставшейся части стола. Если размещение невозможно, алгоритм откатывается и пробует другие варианты.

Оценка сложности

- **Временная сложность:** В худшем случае временная сложность алгоритма экспоненциальная — $O(k^n)$, где n — размер стола, а k — количество возможных размеров квадратов. Это связано с тем, что на каждом шаге алгоритм перебирает все возможные размеры квадратов и рекурсивно вызывает себя для каждой новой расстановки.
- **Пространственная сложность:** Пространственная сложность составляет $O(n^2)$, так как используется двумерный массив board для хранения текущего состояния стола, а также вектор result для хранения текущей расстановки квадратов.

Оптимизации

1. **Пропуск заведомо неоптимальных решений**:
    - Если количество использованных квадратов (*squaresUsed*) превышает текущий минимум (*minSquares*), алгоритм прекращает дальнейший поиск по этой ветке.
    - Для больших N (больше 7) введено ограничение на количество квадратов размером 1×1 (переменная *oneCount*). Если их количество превышает $N/4$, алгоритм прекращает поиск по этой ветке.
2. **Ограничение на размер квадрата**:

- В начальной позиции (0, 0) размер квадрата ограничен значением $(N-1)/2$, чтобы избежать избыточного перебора.

3. **Использование бэктрекинга**:
   - После размещения квадрата алгоритм рекурсивно вызывает себя для следующей позиции. Если дальнейшее размещение невозможно, квадрат удаляется, и алгоритм пробует другой размер.

Код программы

Программа состоит из следующих функций и структур:

Глобальные переменные

- *int N* — размер стола.
- *vector<vector<int>> board* — двумерный массив, представляющий стол. Значение 0 означает пустую клетку, 1 — занятую.
- *vector<vector<int>> result* — текущая расстановка квадратов.
- *vector<vector<int>> bestResult* — лучшая найденная расстановка.
- *int minSquares* — минимальное количество квадратов, необходимых для заполнения стола.
- *int oneCount* — количество квадратов размером 1×1.

Функции

1. *canPlace(int x, int y, int w):*
   - Проверяет, можно ли разместить квадрат размером $n \times n$ в позиции (x,y)(x,y).
   - Возвращает true, если это возможно, и false в противном случае.
2. *placeSquare(int x, int y, int w):*
   - Размещает квадрат размером $n \times n$ в позиции (x,y)(x,y), заполняя соответствующие клетки в массиве *board* значением 1.
3. *removeSquare(int x, int y, int w):*
   - Удаляет квадрат размером $n \times n$ из позиции (x,y)(x,y), восстанавливая значение 0 в соответствующих клетках массива *board*.
4. *backtrack(int x, int y, int squaresUsed):*

- Основная функция рекурсивного бэктрекинга.
- Перебирает все возможные размеры квадратов и пытается разместить их в текущей позиции.
- Если размещение возможно, рекурсивно вызывает себя для следующей позиции.
- Если текущая расстановка завершена (все клетки заполнены), обновляет *minSquares* и *bestResult*.

5. *main():*
   - Считывает размер стола *N*.
   - Инициализирует массив *board* и запускает алгоритм бэктрекинга.
   - Выводит минимальное количество квадратов и их координаты.

Тестирование

Программа была протестирована на различных входных данных, с учётом ограничения на размер стола ($2 \leq n \leq 20$).

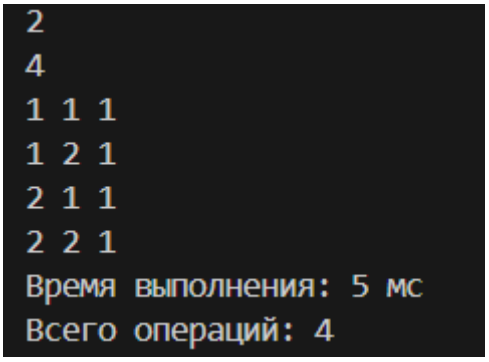


Рисунок 1 – Вывод программы для граничного случая n = 2.

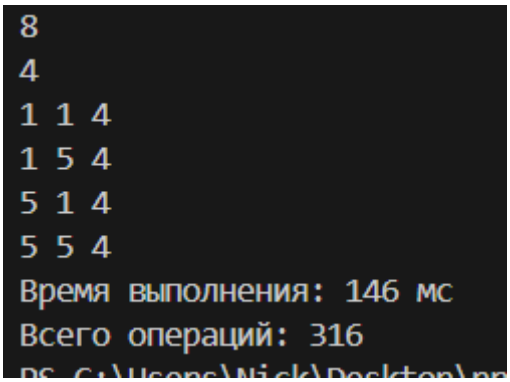


Рисунок 2 – Вывод программы для n = 8.

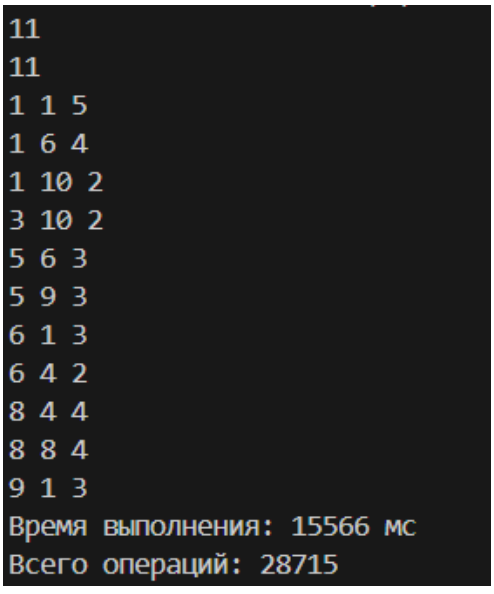


Рисунок 3 – Вывод программы для n = 11.

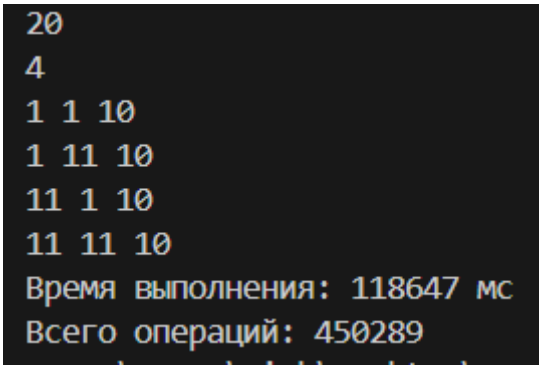


Рисунок 4 – Вывод программы для n = 19.

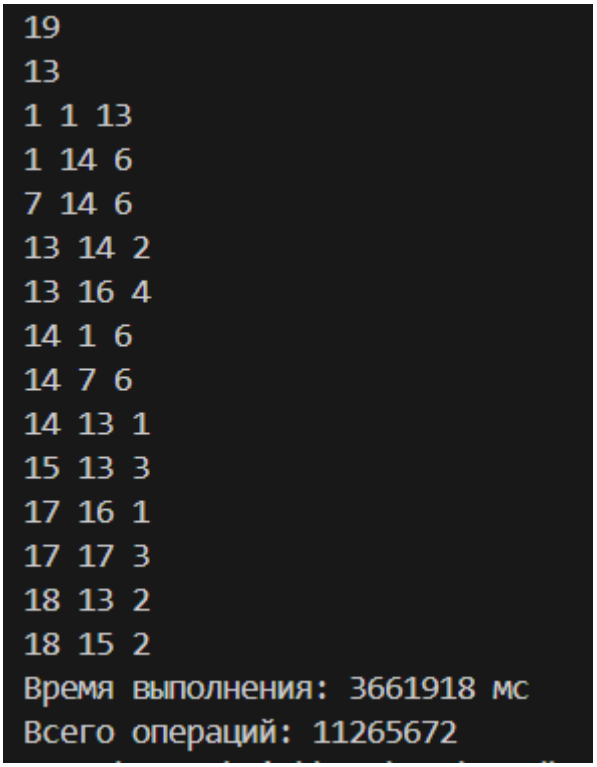


Рисунок 5 – Вывод программы для n = 20.

Исследование

Вар. 4р. Рекурсивный бэктрекинг. Расширение задачи на прямоугольные поля, рёбра квадратов меньше рёбер поля. Подсчёт количества вариантов покрытия минимальным числом квадратов.

Таблица 1. Результаты полученных данных.

Размер стороны	Число операций	Затраченное время (мкс)	Число квадратов
2	4	5	4
3	6	15	6
4	33	44	4
5	239	69	8
6	96	72	4
7	1769	467	9
8	316	105	4
9	537	219	6
10	1458	402	4
11	28715	7858	11
12	1233	375	4
13	143791	46975	11
14	34367	10030	4
15	9147	3250	6
16	46579	12511	4
17	3024481	934376	12
18	150147	48225	4
19	11265672	3693579	13
20	450289	117715	4

Отобразим на графике результаты только для простых чисел, поскольку с ними возникает больше всего трудностей.

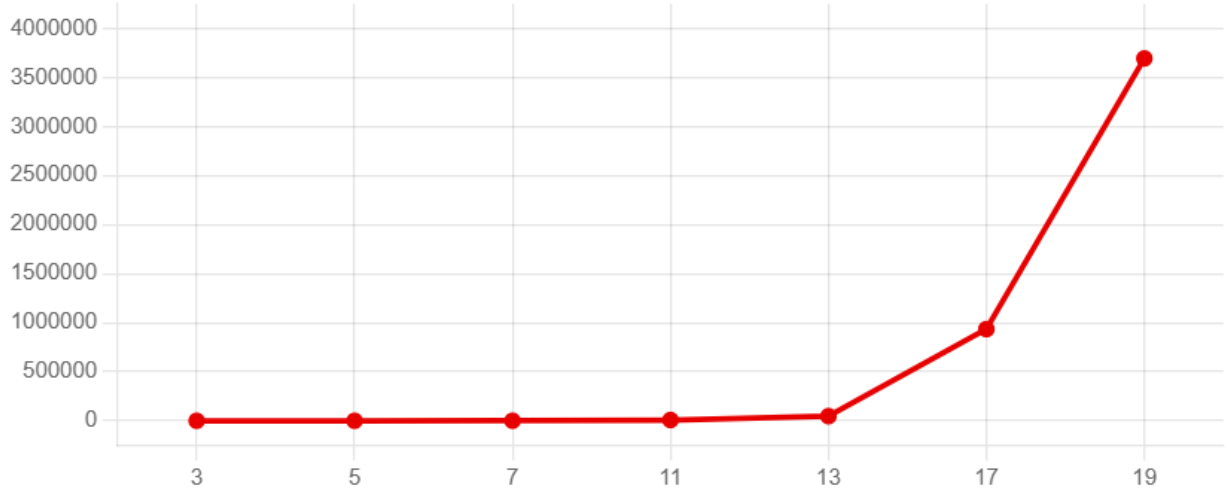


Рисунок 6 – Зависимость числа операций от размера стола.

Можно сделать следующие выводы по исследованию:

1. Число операций растёт экспоненциально.
2. Время, необходимое для вычисления расстановки для простой стороны стола, также растёт крайне быстро.

Выводы

Во время выполнения лабораторной работы, была реализована программа, выполняющая рекурсивный бэктрекинг для поиска оптимального числа квадратов для покрытия стола. Было выявлено, что число операций зависит от размера поля и растёт экспоненциально.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Имя файла: main.cpp

```
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <chrono>
#include <windows.h>

using namespace std;
using namespace std::chrono;

int N;
vector<vector<int>> board;
vector<vector<int>> result;
vector<vector<int>> bestResult;
int minSquares = 400;

int oneCount = 0;
unsigned long long operationsCount = 0;

bool canPlace(int x, int y, int w) {
    if (x + w > N || y + w > N)
        return false;
    for (int i = x; i < x + w; ++i) {
        for (int j = y; j < y + w; ++j) {
        if (board[i][j] != 0)
            return false;
        }
    }
    return true;
}

void placeSquare(int x, int y, int w) {
    operationsCount++;
    for (int i = x; i < x + w; ++i) {
        for (int j = y; j < y + w; ++j) {
        board[i][j] = 1;
        }
    }
}
```

```
void removeSquare(int x, int y, int w) {
    // operationsCount++;
    for (int i = x; i < x + w; ++i) {
        for (int j = y; j < y + w; ++j) {
        board[i][j] = 0;
        }
    }
}

void backtrack(int x, int y, int squaresUsed) {
    // operationsCount++;
    if (squaresUsed >= minSquares)
        return;

    if (N > 7) {
        if (oneCount > (N / 4)) {
        return;
        }
    }

    if (x == N) {
        minSquares = squaresUsed;
        bestResult = result;
        return;
    }

    if (y == N) {
        backtrack(x + 1, 0, squaresUsed);
        return;
    }

    if (board[x][y] != 0) {
        backtrack(x, y + 1, squaresUsed);
        return;
    }

    for (int w = min(N - x, N - y); w >= 1; --w) {
        if (x == 0 && y == 0 && w < (N - 1) / 2) {
            break;
        }
        if (w == N)
        continue;
```

```
            if (canPlace(x, y, w)) {
            placeSquare(x, y, w);
            result.push_back({x + 1, y + 1, w});
            if (w == 1) {
                oneCount++;
            }
            backtrack(x, y + w, squaresUsed + 1);
            result.pop_back();
            if (w == 1) {
                oneCount--;
            }
            removeSquare(x, y, w);
            }
        }
    }

    int main() {
        SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);
        SetConsoleCP(CP_UTF8);

        cin >> N;
        board.resize(N, vector<int>(N, 0));

        auto start = high_resolution_clock::now();
        backtrack(0, 0, 0);
        auto stop = high_resolution_clock::now();
        auto duration = duration_cast<microseconds>(stop - start);

        cout << minSquares << endl;
        for (auto& sq : bestResult) {
            cout << sq[0] << " " << sq[1] << " " << sq[2] << endl;
        }

        cout << "Время выполнения: " << duration.count() << " мс" << endl;
        cout << "Всего операций: " << operationsCount << endl;

        return 0;
    }
```