المعادلات التفاضلية

(1) اثبت أن الدالة $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - y' + 2x = 2x$$

$$y = 3e^x \Rightarrow y' = 3e^x \Rightarrow y'' = 3e^x$$

$$LHS = 3e^x - 3e^x + 2x = 2x = RHS$$

(2) اثبت أن الدالة $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية

$$y + y'' = 2e^x$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x$$

$$LHS = e^x + e^x = 2e^x = RHS$$

حل كل من المعادلات التفاضلية التالية

(3) $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

$$y = \int (x^2 + x + 2)\,dx \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$$

بالتعويض عن قيمتي x ، y

$$4 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1) + c \Rightarrow c = \frac{7}{6}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{7}{6}$$

(4) $xy' = 1 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{x} - x$

$$y = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx \Rightarrow$$

$$y = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$x=1$ عند $y=1$ التي تحقق $xy' = 4$ (5)

$$y' = \frac{4}{x} \Rightarrow y = \int \frac{4}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$y = 4\ln|x| + c$$

بالتعويض عن قيمتي x ، y

$$1 = 4\ln|1| + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore y = 4\ln|x| + 1$$

$y' = 3y$ (6)

بتطبيق القاعدة $\underline{III}$

$$y = k e^{3x} \quad ; a = 3$$

$y' = 5y$ (7)

بتطبيق القاعدة $\underline{III}$

$$y = k e^{5x}$$

$2y' - 5y = 0 \quad ; \quad y = 4 ، x = 2$ (8)

$$2y' = 5y \Rightarrow y' = \frac{5}{2}y$$

بتطبيق القاعدة $\underline{III}$

$$y = k e^{\frac{5}{2}x}$$

بالتعويض عن قيمتي x ، y

$$4 = k e^{\frac{5}{2}(2)}$$

$$4 = k e^{5} \Rightarrow k = \frac{4}{e^{5}} \Rightarrow k = 4e^{-5}$$

$$\therefore y = 4e^{-5} e^{\frac{5}{2}x}$$

$$y = 4e^{\frac{5}{2}x - 5}$$

$\sqrt{2}\, y' + y = 0 \quad : y = \sqrt{2} \;، x = 0$ (9)

$\sqrt{2}\, y' = -y \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{2}} y$

بتطبيق القاعدة III

$y = k e^{\frac{-1}{\sqrt{2}} x} \quad : a = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

بالتعويض عن قيم x, y

$\sqrt{2} = k e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}(0)} \Rightarrow k = \sqrt{2}\, e^{0} \Rightarrow k = \sqrt{2}$

$\therefore y = \sqrt{2}\; e^{\frac{-1}{\sqrt{2}} x}$

$y' = y + 1$ (10)

بتطبيق القاعدة IV

$y = k e^{ax} - \frac{b}{a} \quad : a = 1 \;،\; b = 1$

$y = k e^{x} - 1$

$\frac{1}{2} y' + 4y = 1 \quad : y = \frac{3}{4} \;،\; x = \frac{1}{4}$ (11)

$\frac{1}{2} y' = -4y + 1 \Rightarrow y' = -8y + 2$

بتطبيق القاعدة IV

$y = k e^{ax} - \frac{b}{a} \quad : a = -8 \;،\; b = 2 \;،\; \frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$

$\therefore y = k e^{-8x} + \frac{1}{4}$

بالتعويض عن قيم x, y

$\frac{3}{4} = k e^{-8(\frac{1}{4})} + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = k e^{-2} \Rightarrow k = \frac{1}{2e^{-2}} \Rightarrow k = \frac{e^{2}}{2}$

$\therefore y = \frac{e^{2}}{2} e^{-8x} + \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{e^{-8x+2}}{2} + \frac{1}{4}$

$2y' + y = 4 \quad : y = 2 \,،\, x = 0$ (12)

$2y' = -y + 4 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}y + 2$

$y = k e^{ax} - \frac{b}{a} \quad : a = \frac{-1}{2} \,،\, b = 2 \,،\, \frac{b}{a} = -4$

$\therefore y = k e^{\frac{-1}{2}x} + 4$

بتعويض قيمتي x ، y نجد

$2 = k e^{\frac{-1}{2}(0)} + 4 \Rightarrow -2 = k e^{0} \Rightarrow k = -2$

$\therefore y = -2e^{\frac{-1}{2}x} + 4$

$y'' = -4 \sin 4x$ (13)

$y' = \int y'' dx \Rightarrow y' = \int -4 \sin(4x) dx$

$y' = \cos(4x) + c_1 \Rightarrow$

$y = \int (\cos(4\pi) + c_1) dx \Rightarrow y = \frac{1}{4}\sin(4x) + c_1 x + c_2$

$y'' = 6x - 8$ (14)

$y' = \int y'' dx \Rightarrow y' = \int 6x - 8 \, dx \Rightarrow y' = 3x^2 - 8x + c_1$

$\therefore y = \int (3x^2 - 8x + c_1) dx \Rightarrow y = x^3 - 4x^2 + c_1 x + c_2$

$2y'' + y' - 15y = 0$ (15)

$2r^2 + r - 15 = 0$ المعادله المميزه

$(2r - 5)(r + 3) = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$ or $r = -3$

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ بتطبيق القاعده VI-a

$\therefore$ الحل العام هو

$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{\frac{5}{2}x}$

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad (16)$$

المعادله المميزه

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r-3)^2 = 0 \Rightarrow r - 3 = 0 \Rightarrow r = 3$$

بتطبيق القاعده VI - b

$$y = (c_1 x + c_2) e^{rx}$$

∴ الحل العام هو

$$y = (c_1 x + c_2) e^{3x}$$

$$y'' + 9y = 0 \qquad (17)$$

المعادله المميزه

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r^2 = -9$$

$$\therefore \; r = 3i \;،\; r = -3i$$

بتطبيق القاعده VI - (c)

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

$\alpha = 0 \;،\; \beta = 3$:

$$y = e^{0x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

∴ الحل العام هو:

$$y = c \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad (18)$$

المعادله المميزه

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

بتطبيق القاعده VI - (b)

$$y = (c_1 x + c_2) e^{rx}$$

∴ الحل العام هو:

$$y = (c_1 x + c_2) e^{x}$$

$$2y'' + 4y' = -3y \qquad (19)$$

المعادله المميزه

$$2r^2 + 4r + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(3) = -8 = 8i^2$$

$$r_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}\,i}{2\times 2} \quad , \quad r_2 = \frac{-4 + \sqrt{8}\,i}{2\times 2}$$

$$= -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i \qquad = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$\therefore \alpha = -1 \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بتطبيق القاعده VI-(c)

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

الحل العام هو:

$$y = e^{-x}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x\right)$$

$$y' + 2y = 0 \qquad (a) \qquad (20)$$

$$y' = -2y \qquad : a = -2$$

بتطبيق القاعده III

$$y = ke^{-2x}$$

(b) بالتعويض عن قيم x ، y

$$\frac{1}{2} = ke^{-2(0)}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = ke^{0} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} e^{-2x}$$