排队模型

凯里学院
余英

模型要点

1、掌握排队模型的基本概念

2、了解常见的分布函数及生灭过程

3、掌握典型排队系统模型的结构及应用

排队模型的基本概念

一、引言

1、什么是排队模型（排队论）？

排队论是研究拥挤现象的一门学科。

它是在研究各种排队系统概率规律性的基础上，解决有关排队系统的最优化设计（静态）和最优控制（动态）问题。

现实生活中的排队系统

序号	到达的顾客	要求服务内容	服务机构
1	不能运转的机器	修理	修理技工
2	修理技工	领取修配零件	发放修配零件的管理员
3	病人	诊断或做手术	医生（或包括手术台）
4	电话呼唤	通话	交换台
5	文件搞	打字	打字员
6	提货单	提取存货	仓库管理员
7	驶入港口的货船	装（卸）货	装（卸）货码头（泊位）
8	上游河水进入水库	放水，调整水位	水闸管理员

2、排队论的起源与应用领域

1）、20世纪初Bell电话公司为减少用户呼叫，研究电话线路合理配置问题；

2）、1909年丹麦工程师A.K.Erlang受热力学统计平衡概念启发发表论文《概率论与电话交换》，解决上述问题；

3）、应用于：通讯系统、交通运输、机器维修、库存控制、计算几设计等领域。

二、排队系统的特征及其组成

1、排队系统的特征即拥挤现象的共性

1）、有请求服务的人或物

2）、有为顾客服务的人或物

3）、具有随机性

4）、服务的数量超过服务机构的容量

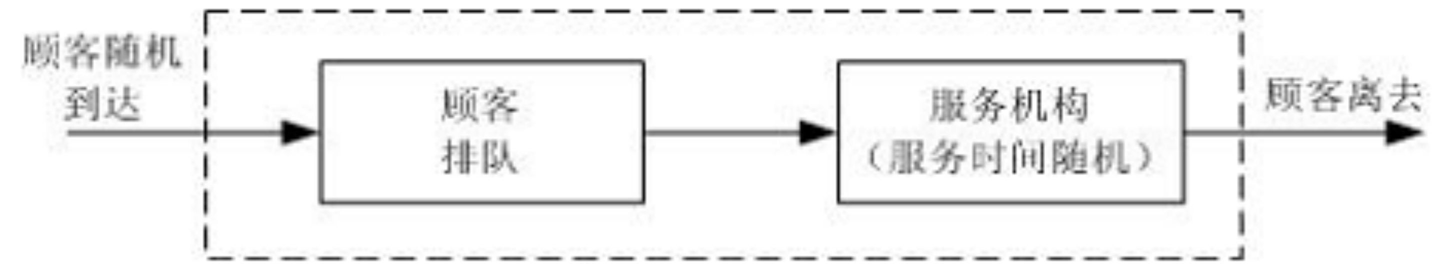


图 1　排队模型

2、排队系统的三大基本组成部分

1）、输入过程(顾客到达的方式)

a、顾客的总体（顾客源）的组成可能是有限的，也可能是无限的；

b、顾客相继到达的时间间隔可以是确定的，也可以是随机的，对于随机的情形，要知道单位时间内的顾客到达数或相继到达的间隔时间的概率分布；

c 、输入过程可以是平稳的（描述相继到达的间隔时间分布和所含参数（如期望值、方差等）都是与时间无关的），否则成为非平稳的，我们研究平稳的。

2、排队系统的三大基本组成部分

2）、排队规则

a、顾客到达时，如所有服务台都被占用，在这种情形下，顾客可以随即离去，也可以排队等待，前者成为损失制，后者成为等待制，我们研究后者；其次还有混合制，它是介于等待制和损失制之间的；

b、从占有的空间来看，有的系统要规定容量（即允许进入排队系统的顾客数）的最大限，有的没有这种限制

2、排队系统的三大基本组成部分

3）、服务过程

a、可以是没有服务员，单个的，多个的，对于多个的，它们之间可以是平行排列（并列）的，也可以是前后排列（串列）的，也可以是混合的；

b、服务时间可以是确定的，也可以是随机的，对于后者要知道它的概率分布；

c、服务时间可以是平稳的，也可以是非平稳的，我们研究前者；

d、对于等待制，服务规则又可以分为先到先服务（**FCFS**），后到先服务（**LCFS**），随机服务和有优先权的服务。

三、排队模型的分类（符号表示）

我们采用Kendall记号

顾客相继到达时间间隔分布/服务时间分布/服务台数目/排队系统允许的最大顾客容量（系统容量）/顾客总体数量（顾客源数量）/排队规则

说明：如果Kendall记号中略去后3项，表示x/y/z/∞/∞/FCFS

相继到达时间间隔和服务时间分布的符号如下：

M——负指数分布

D——确定型

Ek——k阶爱尔朗分布

GI——一般相互独立的时间间隔分布

G——一般服务时间分布

四、排队模型的数量指标

1、平均队长(Ls)：指在系统中的顾客数（包括正被服务的顾客和排队等待的顾客）的期望值。

2、平均排队长(L_q)：指系统中排队等候服务的顾客数的期望值。

$L_s=L_q$+正被服务的顾客数

3、平均逗留时间(W_s)：指一个顾客在系统中的停留时间期望值。

4、平均等待时间(W_q)：指一个顾客在系统中排队等待的时间的期望值。

$W_s=W_q$+服务时间

5、忙期：指从顾客到达空闲服务机构起到服务机构再次空闲止这段时间长度，即服务机构连续繁忙的时间长度。

6、系统的状态概率[$P_n(t)$]：指系统中的顾客数为n的概率。

7、稳定状态：$\lim P_n(t)\to P_n$

四、排队模型的数量指标

- **8**、λ_n —— 系统有n个顾客时的平均到达率
- 9、μ_n ——系统有**n**个顾客时的平均服务率
- 10、λ ——对任何**n**都是常数的平均到达率
- 11、μ ——对任何**n**都是常数的平均服务率
- 12、ρ ——服务强度，或称使用因子，平均到达率与服务台与平均服务率的乘积的比值
- **13**、系统的状态——系统中的顾客数，如果系统中有**n**个顾客，就说系统的状态是**n**，系统的状态是随着时间在变化的
- **14**、$p_n(t)$**:**时刻**t**系统状态为**n**的概率，稳态时系统状态为**n**的概率用p_n表示。

五、常见的分布函数及生灭过程

- 1、poisson流

定义：设N（t）为时间[0，t]内到达系统的顾客数，如果满足下面三个条件：

a、平稳性：在[t,t+Δt]内有一个顾客到达的概率为 λΔt+o(Δt)；

b、独立性（无后效性）：任意两个不相交区间内顾客到达情况相互独立；

c、普遍性：在[t,t+Δt]内多于一个顾客到达的概率为o(Δt)；

则称{N（t），t≥0}为poisson流。

- 2、poisson分布

设N（t）为时间[0，t]内到达系统的顾客数，则{N（t），t≥0}为poisson流的充要条件是：

$$p\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\quad(n=1,2,\ldots)$$

五、常见的分布函数及生灭过程

- 3、负指数分布

定理：设N（t）为时间[0，t]内到达系统的顾客数，则{N（t），t≥0}为参数为λ的poisson流的充要条件是：相继到达时间间隔服从相互独立的参数为λ的负指数分布。

- 4、k阶爱尔朗分布

设$v_1, v_2, \ldots, v_k$是k个相互独立的随机变量，服从相同参数kμ的负指数分布，那么

$$T = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

服从k阶爱尔朗分布。

五、常见的分布函数及生灭过程

- 5、生灭过程

定义：设{**N（t），t≥0**}为一随机过程，若**N（t）**的概率分布具有以下性质：

a、假设**N（t）=n,**则从时刻**t**起到下一个顾客到达时刻止的时间服从参数为λ_n的负指数分布，**n=0,1,2,…**

b、假设假设**N（t）=n,**则从时刻**t**起到下一个顾客离去时刻止的时间服从参数为μ_n的负指数分布，**n=0,1,2,…**

c、同一时刻时只有一个顾客到达或离去。

则称{**N（t），t≥0**}为一个生灭过程。

五、常见的分布函数及生灭过程

生灭过程中C_n与p_0的推导及应用

根据系统平稳状态时“流入=流出”原理，得到如下任一状态下的平衡方程：

0　　$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$

1　　$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1$

2　　$\lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2) p_2$

…　　…

n-1　　$\lambda_{n-2} p_{n-2} + \mu_n p_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) p_{n-1}$

n　　$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n$

…　　…

五、常见的分布函数及生灭过程

- 由上述方程可求得

0 $p_1 = p_0 \lambda_0 / \mu_1$

1 $p_2 = \lambda_1 p_1 / \mu_2 + (\mu_1 p_1 - p_0 \lambda_0) / \mu_2$

$= p_0 \lambda_0 \lambda_1 / (\mu_2 \mu_1)$

2 $p_3 = \lambda_2 p_2 / \mu_3 + (\mu_2 p_2 - p_1 \lambda_1) / \mu_3$

$= p_0 \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0 / (\mu_3 \mu_2 \mu_1)$

… …

n−1 $p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} / \mu_n + (\mu_{n-1} p_{n-1} - p_{n-2} \lambda_{n-2}) / \mu_n$

$= p_0 \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \dots \lambda_0 / (\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1)$

n $p_3 = \lambda_n p_n / \mu_{n+1} + (\mu_n p_n - p_{n-1} \lambda_{n-1}) / \mu_{n+1}$

$= p_0 \lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0 / (\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1)$

五、常见的分布函数及生灭过程

- 记 $c_n = \dfrac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_0}(n=1,2,\ldots)$
- 则平稳状态的分布为$p_n=c_np_0$。由此可得 $p_0 = \dfrac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n}$
- 生灭过程排队系统的各项指标，即

$$l = \sum_{n=0}^{\infty} np_n, l_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n, w = \frac{l}{\lambda_e}, w_q = \frac{l_q}{\lambda_e}$$

其中λ_e是整体平均到达率

五、常见的分布函数及生灭过程

6、经验分布

例1 某服务机构单服务台，先到先服务，对41顾客记录到达时刻τ和服务时间s（单位：分钟）如下表，表中第1号顾客到达时刻为0。全部服务时间为127（分钟）。

(1) i	(2) τ_i	(3) s_i	(4) t_i	(5) w_i	(1) i	(2) τ_i	(3) s_i	(4) t_i	(5) w_i	(1) i	(2) τ_i	(3) s_i	(4) t_i	(5) w_i
1	0	5	2	0	5	12	2	7	10	9	36	1	2	0
2	2	7	4	3	6	19	4	3	5	10	38	2	7	0
3	6	1	5	6	7	22	3	4	6	11	45	5	2	0
4	11	9	1	2	8	26	3	10	5	12	47	4	2	3

(1) i	(2) τ_i	(3) s_i	(4) t_i	(5) w_i	(1) i	(2) τ_i	(3) s_i	(4) t_i	(5) w_i	(1) i	(2) τ_i	(3) s_i	(4) t_i	(5) w_i
13	49	1	3	5	23	86	6	2	2	33	117	4	4	7
14	52	2	9	3	24	88	5	4	6	34	121	2	6	7
15	61	1	1	0	25	92	1	3	7	35	127	1	2	3
16	62	2	3	0	26	95	3	6	5	36	129	6	1	2
17	65	1	5	0	27	101	2	4	2	37	130	3	3	7
18	70	3	2	0	28	105	2	1	0	38	133	5	2	7
19	72	4	8	1	29	106	1	3	1	39	135	2	4	10
20	80	3	1	0	30	109	2	5	0	40	139	4	3	8
21	81	2	2	2	31	114	1	2	0	41	142	1		9
22	83	3	3	2	32	116	8	1	0					

到达间隔分布表

到达间隔(分钟)	次数
1	6
2	10
3	8
4	6
5	3
6	2
7	2
8	1
9	1
10以上	1
合计	40

服务时间分布表

服务时间(分钟)	次数
1	10
2	10
3	7
4	5
5	4
6	2
7	1
8	1
9以上	1
合计	41

平均间隔时间：
=142/40=3.55(分钟/人)

平均服务时间：
127/41=3.12(分钟/人)

平均到达率：
41/142=0.28(人/分钟)

平均服务率：
41/127=0.32(人/分钟)

六、典型排队系统模型的结构及应用

- M/M/C等待制排队模型研究要点：

a、系统意义

b、状态转移速度图与状态转移速度矩阵

c、状态概率方程

d、系统的基本数量指标

Passion分布

设N(t)表示在时间[0, t)内到达顾客数；

令$P_n(t_1, t_2)$表示在时间区间$[t_1, t_2)$（$t_2 > t_1$）内有n（≥0）个顾客到达的概率，即

$P_n(t_1, t_2)=P\{ N(t_2) - N(t_1)=n \}$ （$t_2>t_1$， $n\geq 0$）

Passion分布的三条件：

(1) 无后效性：不相重叠的时间区间内顾客到达数相互独立

(2) $P_1(t,\ t+\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} P_n(t,\ t+\Delta t) = o(\Delta t)$

情况	$[0, t)$		$[t, t+\Delta t)$		$[0, t+\Delta t)$	
	个数	概率	个数	概率	个数	概率
(A)	n	$P_n(t)$	0	$1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$	n	$P_n(t)\,(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))$
(B)	$n-1$	$P_{n-1}(t)$	1	$\lambda\Delta t$	n	$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t$
(C)	$n-2$	$P_{n-2}(t)$	2	$o(\Delta t)$	n	$o(\Delta t)$
	$n-3$	$P_{n-3}(t)$	3		n	
	…	…	…		…	
	0	$P_0(t)$	n		n	

在上述条件下，研究顾客到达数 n 的概率分布

$$P_n(t+\Delta t)= P_n(t)\,(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)(1-\lambda\Delta t)+P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$[P_n(t+\Delta t)-P_n(t)]/\Delta t=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+[o(\Delta t)]/\Delta t$$

令$\Delta t\to 0$

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_n(t)/\mathrm{d}t=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \\ P_n(0)=0 \end{cases} \qquad (n\geq 1)$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_0(t)/\mathrm{d}t=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=1 \end{cases} \qquad (n=0)$$

$\therefore\ P_0(t)=e^{-\lambda t}$

$P_n(t)=[(\lambda t)^n e^{-\lambda t}]/n!$ $\qquad t>0, n=0,\ 1,\ 2\ldots$

$E[N(t)]=\lambda t$； $\mathrm{Var}[N(t)]=\lambda t$。

负指数分布

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$E(T) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = -\int_0^\infty t e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = -\int_0^\infty t de^{-\lambda t}$$

$$= -[te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t} d(-\lambda t)$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -[t^2 e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2te^{-\lambda t} dt] - \frac{1}{\lambda^2} = 2\int_0^\infty te^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

第三节　单服务台负指数分布排队系统的分析

一、M/M/1 模型

1、假设

（1）顾客到达的间隔时间满足参数为λ的负指数分布

（2）服务时间满足参数为μ的负指数分布（$\lambda<\mu$）

（3）服务机构是单服务台

（4）顾客源是无限的，顾客相互独立

（5）单队排列，且对队长没有限制

2、P_n的计算

情况	在时刻t顾客数	在区间（$t, t+\Delta t$）		在时刻$t+\Delta t$顾客数
		到达	离去	
(A)	n	×	×	n
(B)	$n+1$	×	O	n
(C)	$n-1$	O	×	n
(D)	n	O	O	n

O表示发生（1个），×表示没有发生

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) = {} & P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) \\
& + P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t \\
& + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) \\
& + P_n(t)\lambda\Delta t\mu\Delta t
\end{aligned}
$$

整理得：

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)+P_{n+1}(t)\mu\Delta t+P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+o(t)$$

$$[P_n(t+\Delta t)-P_n(t)]/\Delta t=\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t) \qquad (1)$$

$$\Delta t\rightarrow 0 \Rightarrow dP_n(t)/dt=\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)$$

考虑$P_0(t)$的情况：

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$$

$$\Delta t\rightarrow 0 \Rightarrow dP_0(t)/dt=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \qquad (2)$$

由$dP_n(t)/dt=0$得到

$$\begin{cases} -\lambda P_0+\mu P_1=0 & (3) \\ \lambda P_{n-1}+\mu P_{n+1}-(\lambda+\mu)P_n=0 & (4) \end{cases}$$

由式(3)得 $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$

通过求解可得 $P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0, \quad n = 0,1,2,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_0(1+\rho+\rho^2+\cdots) = P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P_0 = 1-\rho \\ &P_n = \rho^n(1-\rho), \quad n \geq 1 \end{aligned}}$$

参数意义：

λ —— 单位时间内到达的平均顾客数

μ —— 单位时间内服务的平均顾客数

ρ —— 服务强度

3、M/M/1参数计算

（1）系统中平均顾客数（L_s）

$$L_S=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n=\rho(1-\rho)+2\rho^2(1-\rho)+3\rho^3(1-\rho)+\cdots$$

$$=(1-\rho)(\rho+2\rho^2+3\rho^3+\cdots)$$

记 $\left.\begin{aligned} S&=\rho+2\rho^2+3\rho^3+\cdots \\ \rho S&=\rho^2+2\rho^3+3\rho^4+\cdots \end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$$(1-\rho)S=\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots=\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\boxed{L_s=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$$

（2）队列中等待的平均顾客数（L_q）

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n-\sum_{n=1}^{\infty}P_n=L_s-\rho=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

（3）顾客逗留时间（W_s）

$$W_s=E[W]=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

（4）队列中顾客等待时间（W_q）

$$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

它们的相互关系如下：

Ls：平均顾客数
Ws：顾客逗留时间
Lq：队列中等待的平均顾客数
Wq：顾客等待时间

$$L_s = \lambda W_s, \qquad L_q = \lambda W_q$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \qquad L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

其中 $\boxed{L_s = \lambda W_s, \qquad L_q = \lambda W_q}$

称为**little**公式，它是排队论中的一个重要公式。

例3 100个工作小时内每小时来就诊的病人数n出现次数如下

到达的病人数n	出现次数t_n
0	10
1	28
2	29
3	16
4	10
5	6
6	1
合计	100

100个完成手术的病例所用时间v(小时)出现的次数如下

为病人完成手术时间v(小时)	出现次数t_v
0.0-0.2	38
0.2-0.4	25
0.4-0.6	17
0.6-0.8	9
0.8-1.0	6
1.0-1.2	5
1.2以上	0
合计	100

解：

(1)病人平均到达率 $= \dfrac{\sum nf_n}{100} = 2.1$(人/小时)

每次手术平均时间 $= \dfrac{\sum vf_v}{100} = 0.4$(小时/人)

每小时完成手术人数（平均服务率） $= \dfrac{1}{0.4} = 2.5$(人/小时)

(2)取$\lambda = 2.1,\quad \mu = 2.5$ 则$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{2.1}{2.5} = 0.84$

(3)$L_s = \dfrac{2.1}{2.5 - 2.1} = 5.25$(人) $L_q = 0.84 \times 5.25 = 4.41$(人)

$W_s = \dfrac{1}{2.5 - 2.1} = 2.5$(小时) $W_q = \dfrac{0.84}{2.5 - 2.1} = 2.1$(小时)

二、M/M/1/N/∞ 模型

假定系统最大容量为N，单服务台情形排队等待的顾客最多为N-1，下面只考虑稳态情形：

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + \mu) P_n, & n \le N-1 \\ \mu P_N = \lambda P_{N-1} \end{cases}$$

解得：

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad \rho \ne 1$$

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^n \qquad n \le N$$

根据上式我们可以推导出系统的各项指标：

(1) 队长 $L_s = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}, \quad \rho \neq 1$

队长与队列长有什么区别?

(2) 队列长 $L_q = \sum_{n=1}^{N} (n-1) P_n = L_s - (1-P_0)$

Lq：等待人数

Ls：系统人数

有效到达率$\lambda_e=\lambda(1-P_N)$

可以验证：$1-P_0=\lambda_e/\mu$

带入公式

(3) 顾客逗留时间 $W_t = \frac{L_s}{\mu(1-P_0)} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)} + \frac{1}{\mu}$

(4) 顾客等待时间 $W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$

例4 单人理发馆有六个椅子接待客人。当6个椅子都坐满时，后来的顾客不进店就离开。顾客平均到达率为3人/小时，理发需时平均15分钟。则：

N=7为系统中最大的顾客数，λ=3人/小时，μ=4人/小时

（1）求某顾客一到达就能理发的概率。

相当于没有顾客，所求概率为

$$P_0 = \frac{1-3/4}{1-(3/4)^8} = 0.2778$$

（2）求需要等待的顾客数的期望值。

$$L_s = \frac{3/4}{1-3/4} - \frac{8(3/4)^8}{1-(3/4)^8} = 2.11$$

$$L_q = L_s - (1-P_0) = 2.11-(1-0.2778) = 1.39$$

（3）求有效到达率。

$$\lambda_e = \mu(1 - P_0) = 4(1 - 0.2778) = 2.89$$ （人/小时）

（4）求一顾客在理发馆内逗留的时间。

$$W_s = L_s / \lambda_e = 2.11 / 2.89 = 0.73\text{小时} = 43.8\text{分钟}$$

（5）在可能到达的顾客中有百分之几不等待就离开。

$$P_7 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7 \left(\frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^8}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1 - \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8}\right) \approx 3.7\%$$

第四节　多服务台指数分布排队系统的分析

一、M/M/c

规定各服务台工作相互独立且平均分配服务率相同，即

$\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_c=\mu$

整个服务机构的平均服务率为 $\begin{cases} c\mu, & (n\geq c) \\ n\mu, & (n<c) \end{cases}$

令 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}$，只有当 $\dfrac{\lambda}{c\mu}<1$ 时才不会排成无限的队列.称它为这个系统的服务强度，或服务机构的平均利用率.

$$\begin{cases} \mu P_1=\lambda P_0 \\ (n+1)\mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}=(\lambda+n\mu)P_n, & (1\leq n<c) \\ c\mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}=(\lambda+c\mu)P_n, & (n\geq c) \end{cases}$$

这里 $\sum_{i=0}^{\infty}P_i=1$，且 $\rho\leq 1$.

用递推法解上述差分方程，可求得状态概率。

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (n < c) \\ \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (n \geq c) \end{cases}$$

根据上式我们可以推导出系统的各项指标：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}, \quad L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) P_n = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0$$

因为 $\sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) P_n = \sum_{n'=1}^{\infty} n' P_{n'+c} = \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{n'}{c!c^{n'}} (c\rho)^{n'+c} P_0 =$ 右边

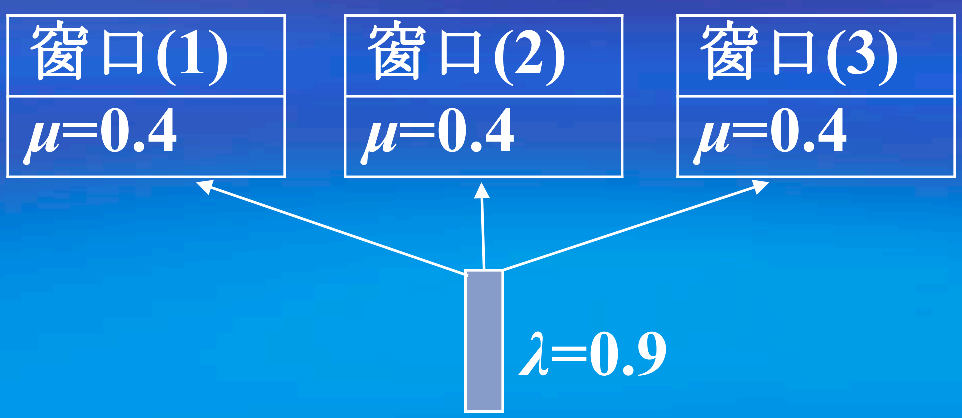
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

例6 某售票所有三个窗口，顾客到达服从Passion过程，平均到达率每分钟 $\lambda=0.9$(人)，服务(售票)时间服从负指数分布，平均服务率每分钟 $\mu=0.4$(人).

现设顾客到达后排成一队，依次向空闲的窗口购票，

如下图。是一个 $M/M/c$ 型的系统，其中 $c=3, \dfrac{\lambda}{\mu}=2.25,$

$$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{2.25}{3}\quad(<1)$$ 符合要求的公式。



代入公式得

(1)整个售票所空闲的概率

$$P=\frac{1}{\frac{(2.25)^0}{0!}+\frac{(2.25)^1}{1!}+\frac{(2.25)^2}{2!}+\frac{(2.25)^3}{3!}\cdot\frac{1}{1-2.25/3}}=0.0748$$

（2）平均队长

$$L_q=\frac{(2.25)^3\cdot 3/4}{3!(1/4)^2}\times 0.0748=1.70$$

（3）平均等待时间和逗留时间

$$W_q=1.70/0.90=1.89\text{分钟}$$

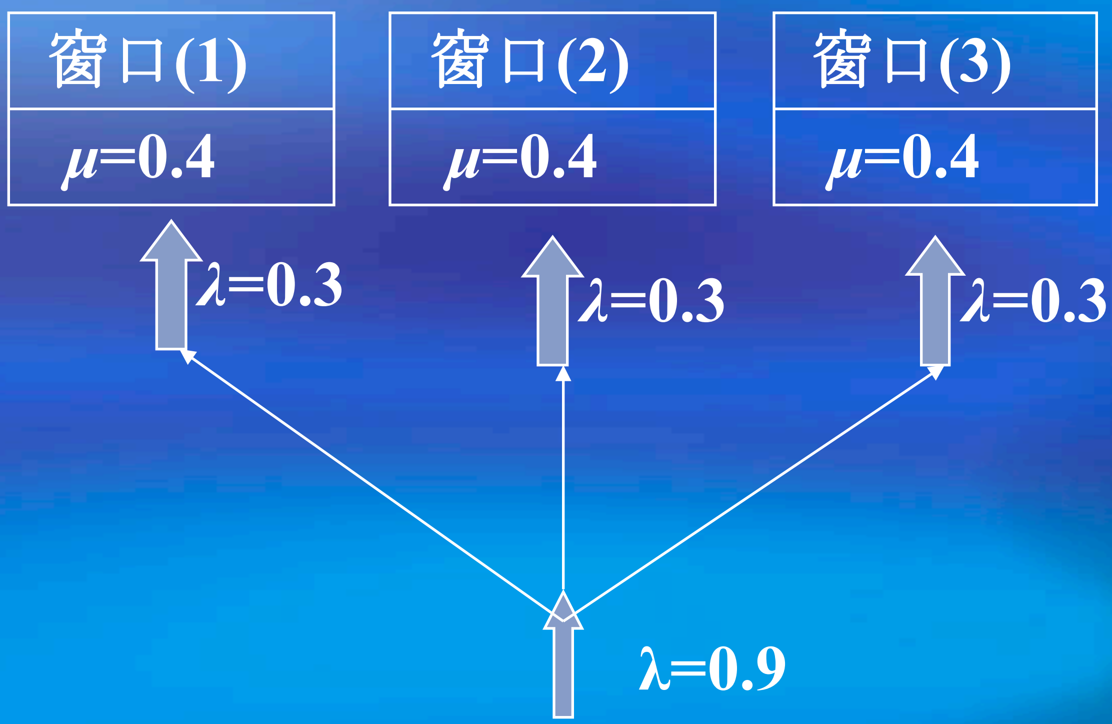
$$W_s=1.89+1/4=4.39\text{分钟}$$

（4）顾客到达后必须等待（即系统中顾客数已有3人）的概率

$$P(n\geq 3)=\frac{(2.25)^3}{3!(1/4)}\times 0.0748=0.57$$

M/M/c型系统和c个M/M/1系统的比较

上例中，排队方式不变，但顾客到达后在每个窗口前各排一队，且进入队列后坚持不换，这就形成3个队列，如下图二每个队列平均到达率为 $\lambda=\lambda=\lambda=0.9/3=0.3$（每分钟），这样原来的系统就变成3个M/M/1型的子系统。



现按M/M/1型解决这个问题，并与上表比较：

指标 \ 模型	(1)M/M/3型	(2)M/M/1型
服务台空闲的概率	0.0748	0.25(每个子系统)
顾客必须等待的概率	P(n≥3)=0.57	0.75
平均队列	1.70	2.25(每个子系统)
平均队长	3.95	9.00(整个系统)
平均逗留时间	4.39(分钟)	10(分钟)
平均等待时间	1.89(分钟)	7.5(分钟)

从表中各指标的对比可以看出单队比三队有显著的优越性