

目 录

序言	(2)
一、鉴别名画的真伪	(2)
二、测定考古发掘物的年龄	(6)
三、在军事上的应用	(8)
四、在社会经济中的应用	(13)
五、应用于刑事侦察中死亡时间的鉴定	(16)
六、在人口增减规律中的应用	(17)
结束语	(18)
参考文献	(19)

常微分方程在实际生活中的应用

曹天岩

(渤海大学数学系 辽宁 锦州 121000 中国)

摘要: 现代的科学、技术、工程中的大量数学模型都可以用常微分方程来描述,很多近代自然科学的基本方程本身就是微分方程,从微积分理论形成以来,人们一直用微分方程来描述、解释或预见各种自然现象,不断地取得了显著的成效。

常微分方程来自人类的社会实践,又是解决实际问题的一个最强有力的数学方法,在现实生活中,能用常微分方程研究的实际问题非常多,几乎在人类社会的每一个角落它都展示了无穷的威力,尤其是在工程技术、军事、经济、医学、生物、生态等领域它都发挥着极其重要的作用。所以研究常微分方程对人类社会生活有非常重要的意义和很实用的价值。本文介绍了利用常微分方程的知识和放射性物质可以衰变的特性来鉴别名画的真伪。利用放射现象测定考古发掘物的年龄,利用常微分方程了解深水炸弹在水下的运动,也就是其在军事上的应用,利用常微分方程对社会经济进行分析研究,利用牛顿冷却定律和常微分方程的知识对刑事侦察中死亡时间的鉴定,以及常微分方程在人口增减规律中的应用等几部分内容。

关键词: 常微分方程 应用 解。

Application of ordinary differential equation in actual life

Cao Tianyan

(Department of Mathematics Bohai University Liaoning Jinzhou 121000 China)

Abstract : A great deal of mathematics models in science, technique, engineering of the summary modern all can use a differential calculus a square distance to often describe, the basic and square distance of a lot of modern natural sciences is a differential calculus square distance, from the calculus theories formation, people had been use a square distance of differential calculus to describe, explain or foresee various natural phenomena, obtaining to show the result of the constantly.

Often differential calculus the square distance come from the mankind's social fulfillment, is the most powerful mathematics method that resolves an actual problem again, can use a differential calculus a square distance to often study in the realistic life of the actual problem is quite a few, almost at mankind each corner of the society display endless of power is in the realms, such as engineering technique, military, economy, medical science, living creature and ecosystem...etc. particularly it develops a very and important function. So research often differential calculus the square distance have count for much meaning to mankind's social activities with the very practical value. This text introduced to make use of differential calculus often the knowledge and the radio material of the square distance can be change with of characteristic to discriminate a painting of true false. Make use of emanation the phenomenon measurement to study of ancient relics age of discover the thing, make use of a differential calculus a square distance understanding often deeply the water bomb at underwater of sport be also it to apply militarily, make use of often differential calculus the square distance is to the social economy carry on analysis research, make use of Newton to cool off laws and often differential calculus the pertaining to crime for the knowledge of the square distance is on the scout to die time of authenticate, and often differential calculus the square distance is in the population increase or decrease the application in the regulation to wait several parts of contentses.

Key Words: Ordinary differential equation application solution

引言

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从实际中产生，而又成为实际生活与现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具。

一 鉴别名画的真伪

我们可以利用常微分方程的知识和放射性物质可以衰变的特性来鉴别名画的真伪。某些“放射性”元素的原子是不稳定的，在一个给定的时期内，一定比例的原子会自动地衰变，形成新元素的原子。放射性是原子的一个特性。一种物质的放射性与现存的物质的原子数成正比。用 $N(t)$ 表示 t 时刻存在的原子数，则单位时间内衰变的原子数与 N 成比例，即

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1)$$

正的常数 λ 叫做物质的衰变常数。自然 λ 越大，物质衰变得越快。我们可根据 λ 来计算物质的半衰期（一定数量的放射性原子衰变到一半时所需要的时间）。

假设在 t_0 时刻。 $N(t_0) = T_0$ ，则初值问题：

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad N(t_0) = N_0$$

其解是： $N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$

两边取对数，得 $-\lambda(t-t_0) = \ln \frac{N}{N_0}$ (2)

如果 $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$ ，则 $-\lambda(t-t_0) = \ln \frac{1}{2}$ ，

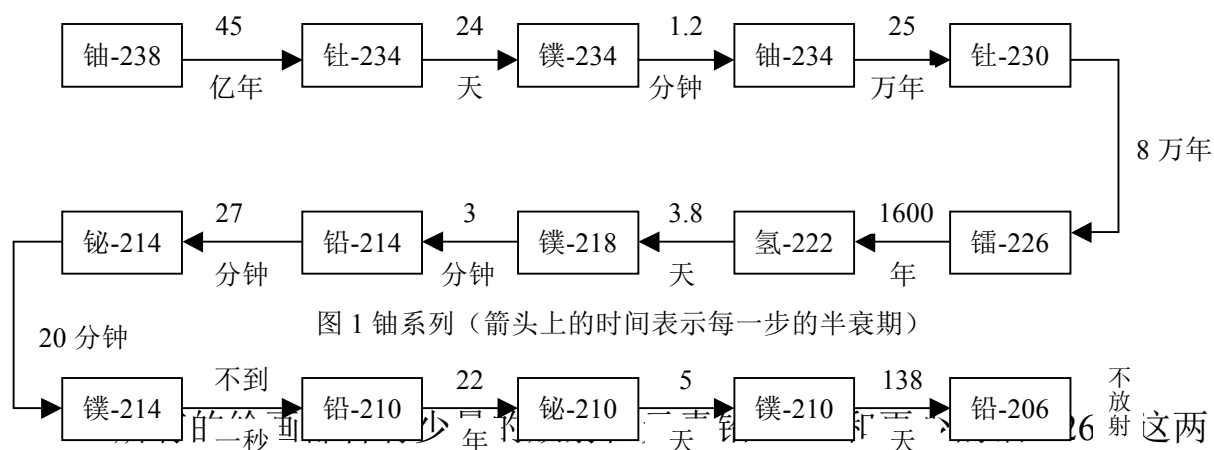
即
$$t - t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.6931}{\lambda} \quad (3)$$

所以一种物质的半衰期为 $\ln 2$ 除以衰变常数 λ 。许多物质的半衰期都已经被测定并有记录。例如：碳-14 的半衰期为 5568 年，铀-238 的半衰期是 45 亿年。

由 (2) 可解得：
$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N}$$

如果 t_0 为某种物质最初形成或制造出的时间，则该物质的年代就是 $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0}$ 。在大多数情况下，衰变常数 λ 是已知或算出的。此外，通常很容易得出 N ，这样，如果知道 N_0 我们就能确定该物质的年代，但这正是实际的困难所在，因为通常我们并不知道 N_0 ，不过在某些情况下，我们可以间接的确定 N_0 ，或确定 N_0 的某一个适当的范围。

我们从初等化学的众所周知的知识开始。地壳中的所有岩石几乎都含有少量的铀。岩石中的铀衰变成一种其它的元素，而这种元素又衰变成另一种元素，如此衰变下去，形成一个元素序列，直到铅（参看图 1）就不再衰变了。铀（半衰期超过 40 亿年）不断地补充序列中的后续元素，所以，这些后面的元素替代的速度与他们衰变的速度同样快。



种元素都存在于白铅（铅的氧化物）中，画家们用白铅作颜料已经有 2000 多年了。为了后面的分析，请注意下面事实，白铅是由铅金属产生的，而铅金属是经过熔炼从铅矿石中提炼出来的。在这个过程中，矿石中的铅-210 随铅金属被提取出来。不过 90%到 95%的镭以及它的派生物都随着炉渣中的废物被排出来了。所以大多数铅-210 的提供物都被排掉了，而铅-210 开始迅速的衰变，其半衰期为 22 年。这个衰变过程一直持续到白铅中的铅-210 再次与现存的少量的镭达到放射平衡，即铅-210 的衰变恰好被镭的衰变所平衡。

那么我们可以利用这个结论计算要鉴别的画中现存的铅-210 的数量，计算是基于最初生产时铅-210 的数量。设 $y(t)$ 为 t 时刻每克白铅中铅-210 的数量， y_0 为最初生产时 t_0 每克白铅中存在的铅-210 的数量，而 $r(t)$ 为 t 时刻每分钟每克白铅中镭-226 的衰变数。如果 λ 是铅-210 的衰变常数，则

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t), \quad y(t_0) = y_0$$

因为我们只对最多 300 年这一时间段感兴趣，所以可设镭-226 保持常数（其半衰期为 1600 年），故 $r(t)$ 是一个常数 r 。用积分因子 $u(t) = e^{\lambda t}$ 乘微分方程的两端，得

$$\frac{d(e^{\lambda t} y)}{dt} = r e^{\lambda t}$$

$$\text{因此} \quad e^{\lambda t} y(t) - e^{\lambda t_0} y_0 = \frac{r}{\lambda} (e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0}) \quad (5)$$

现在 $y(t)$ 和 r 很容易测得。于是我们知道 y_0 ，我们就可以利用（5）来计算 $t - t_0$ ，因而，我们就能确定画的年代。正如我们已经指出的，虽然我

们不能直接测得 y_0 ，但有一种可能的办法，它能帮助我们避开这个问题。这个办法就是利用这样的事实：铅-210 的初始量是与用来提取铅金属的矿石中的大量的镭-226 处于放射性平衡状态的。所以，我们取不同的矿石样品，计算镭-226 的衰变率。对各种矿石进行计算，结果见表 2。这些数字从 0.18 变化到 140。因而，生产时每分钟每克铅-210 的衰变数将在 0.18 到 140 之间变动。因为铅-210 的衰变数是与当时的量成比例的，这意味着 y_0 也将在一个大区间中变化。

图 2 矿石和精矿样品

种类及来源	$Ra-226$ 的衰变/min
精矿 (Oklahoma-kansas)	4.5
压碎的粗碎石 (S.E.Missouri)	2.4
精矿 (S.E.Missouri)	0.7
精矿 (Idaho)	2.2
精矿 (Idaho)	0.18
精矿 (Washington)	140
精矿 (British Columbia)	1.9
精矿 (British Columbia)	0.4
精矿 (Bolivia)	1.6
精矿 (Australia)	1.1

这样，我们不能利用 (5) 得到一个精确的或甚至是一个粗糙的画的年代估计。不过，我们仍然能够利用 (5) 区别 17 世纪的画和现代的伪造品。这种方法的基础就是进行简单的观察，如果一幅画与铅的 22 年半衰期相比非常旧，那么，画的样品中，铅-210 的放射量几乎等于这个样品中镭的放射量。另一方面，如果一幅画是现代作品（画龄 20 年左右），那么铅-210 的放射量比镭的放射量要大的多。

通过下面的方法，我们可以使这一论据变得更精确，假设问题中画或者非常新，或者大约有 300 年的历史。在 (5) 中设 $t-t_0=300$ ，那么作些简单的代数运算后，可看出

$$\lambda y_0 = \lambda y(t)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1) \quad (6)$$

如为了计算生产时每克白铅每分钟内铅-210 的衰变数 λy_0 ，必须计算铅-210 画确实是件现代的伪造品，那么 λy_0 就应不合理地大。为了确定什么是不合理的高衰变率，我们观察到，在一个白铅样品中，如果铅-210 最初（生产时）以每克白铅中 $100\text{dis}/\text{min}$ 的衰变率衰变，那么用来提取这些铅的矿石中，铀的含量为 0.014%。这样高的铀浓度是很少见的，因为地壳岩石中铀的平均含量大约是每百万 2.7 份（2.7ppm）。另一方面，在西半球存在非常稀有的矿石，其中铀的含量是 2%到 3%。为了可靠起见，如果每克白铅超过 $300\text{dis}/\text{min}$ ，我们就说铅-210 的衰变速度肯定是不合理的。210 现在的衰变率 $\lambda y(t)$ ，镭-226 的衰变率 r ，以及 $e^{300\lambda}$ 。因为若干年后，镭-210 的衰变率等于铅-210 的衰变率，而且镭-210 的衰变率较易测得，我们就用镭的这些值代替铅-210 的有关值。为计算 $e^{300\lambda}$ ，由（3）观察到 $\lambda = \ln 2 / 22$ 。因此 $e^{300\lambda} = e^{(\frac{300}{22})\ln 2} = e^{\frac{150}{11}}$ 。

所以我们要鉴别某画的真伪，我们要鉴定画中的镭-210 和镭-226 的衰变率，由（6）计算出要鉴定的画中白铅 λy_0 。如果得一个数值非常大，那么这幅画一定是现代的伪造品。

二 测定考古发掘物的年龄

利用放射现象我们还可以测定考古发掘物的年龄。这个方法的依据很简单，地于周围的大气层不断的受到宇宙射线的轰击。这些宇宙射线使地球中的大气产生中子，这些中子同氮发生作用产生 C-14。因为 C-14 会发生放射性衰变，所以通常称这种碳为放射性碳。这种放射性碳又结合到二氧化碳中在大气中漂动而被植物吸收。动物通过吃植物又把放射

性碳带入它们的组织中，在活的组织中， $C-14$ 的摄取率正好与 $C-14$ 的衰变率相平衡。但是，当组织死亡以后，它就停止摄取 $C-14$ ，因此 $C-14$ 的浓度因 $C-14$ 的衰变而减少。地球的大气被宇宙射线轰击的速度始终不变，这是一个基本的物理假设。这就意味着，在挖掘中有木炭这样的物质时， $C-14$ 原来的蜕变速度同现在测量出来的蜕变速度是一样的。这样我们就可以测定木炭样品的年龄。设 $N(t)$ 表示在时刻 t 样品中存在的 $C-14$ 的数量，单位时间衰变的原子数 dN/dt 与 N 成比例。即：

$$dN/dt = -\lambda N$$

N_0 表示在时刻 $t=0$ 时样品中的数量状况，即样品形成时的数量。若 λ 是 $C-14$ 的衰变常数（ $C-14$ 的半衰期是 5568 年），则 $dN/dt = -\lambda N$ ， $N(t_0) = N_0$ 。

$$\text{所以 } N = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \text{则有 } N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

由此我们测出木炭中 $C-14$ 目前的蜕变速度 $R(t)$ ， $R(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ 而来的蜕变速度是 $R(0) = \lambda N_0$ ，因此： $R(t)/R(0) = e^{-\lambda t}$ ，从而 $t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R(0)}{R(t)}$ 。

所以如果我们测出木炭中 $C-14$ 目前的蜕变速度 $R(t)$ ，并且注意到 $R(0)$ 必须等于相当数量的活的树木中 $C-14$ 的蜕变速度，那么我们就计算出木炭的年龄，从而知道发掘物的年龄。

三 在军事上的应用

利用常微分方程可了解深水炸弹在水下的运动。一质量为 m 的深水炸弹，从高为 h 处自由下落到水中。如果不考虑深水炸弹在水平方向的运动，而仅考虑它在竖直方向的运动。由经典力学知：物体从高为 h 米处自由下落至海平面时，其竖直方向的速度 v_0 为： $v_0 = \sqrt{2gh}$ （ g 为重力加速度）。

深水炸弹自高度为 h 米处自由下落至海平面的瞬时时间为 t_0 ，于是深水炸弹的初始状态为：

$$x(t_0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = V_0 = \sqrt{2gn}$$

深水炸弹在海水中运动时，它受到三个力的作用：一是地球吸引力 mg ，其方向竖直向下，二是海水对它的浮力，三是海水对炸弹的摩擦力，这个摩擦力是很复杂的，它和炸弹的形状、速度等因素有关。这里仅近似的认为摩擦力的大小和炸弹的速度 v 成正比，比例系数即摩擦系数 u 为常数。摩擦力的方向与炸弹的速度方向相反，因而是竖直向上的。于是摩擦力 f 表示为： $f = -uv = -u \frac{dx}{dt}$ 。

根据牛顿第二定律知深水炸弹在水下运动的规律为

$$m \frac{dx}{dt} = -uv + mg + \rho g v$$

当今世界的主题虽然是和平和发展，但是局部地区的战争，也引起了人们的关注和重视，战争以及为战争做准备依然是人类主要关注的问题。常微分方程也应用于研究和分析战争。如果一支 X 部队和一支 Y 部队互相交战，设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表两个部队在 t 时刻的力量，其中 t 从战斗开始时以天计算。将力量定量化是不容易的。因为它包括：士兵数量、战斗准备就绪情况、武器性能和数量、指挥员的素质，以及大量心理的和无形的因素。这些因素连描述都很困难，就更不用说转化为数量了。我们将采一种简单的回避方法，即把力量看作是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为士兵的数量。假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 连续的变化，并且为时间的可导函数。当然，这是事态真实状况的一种理想化，因为兵力必须是整数，而且随时间整数的变化，但是当兵力很大时增加一个或两个人，与总数相比简直是一个无穷小，

我们进而允许战斗力在很短的时间间隔内作任意小量而不仅是整数的变化。虽然还没有关于 $x(t)$ 的具体公式（比如作为 t 的函数），但是，我们可以获得大量有关 x 部队的自然损失率（即由于各种不可避免的疾病、开小差以及其他非作战事故所引起损失率），由于与 Y 部队遭遇而生的战斗损失率，以及补充率等信息。假定 $x(t)$ 的净变化率由下式给出：

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(\text{自然损失率} + \text{战斗损失率}) + \text{补充率} \quad (1)$$

Y 部队也有一个类似的方程。问题要求出关于每个部队的这些变化率的适当的公式。然后分析相应的微分方程的解 $x(t)$ 和 $y(t)$ 从而确定谁将赢得战争的胜利。

用 a, b, c, d, h, g 表示非负损失率常数。

用 $P(t), Q(t)$ 表示 t 时刻敌对部队双方的战斗力。

x_0, y_0 表示战斗开始时双方的战斗力。

T 为按天计算的战斗时间。

则常规战可表示为

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -ax(t) - by(t) + P(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cx(t) - dy(t) + Q(t); \end{aligned}$$

这两个方程都将一支部队的兵力的变化率与其他变化项目联系起来，并且有（1）形式。补充率 $P(t)$ 和 $Q(t)$ ，对于一支独立的部队，这一项为零。自然损失率 $-ax(t)$ 和 $-d(y)$ 产生不变的相对损失率（没有战斗和补充时）：

$$\frac{dx/dt}{x} = -a, \quad \frac{dy/dt}{y} = -d$$

还可能其他的损失率，但是可能性不大，对于大多数情况，这已经足够了。

如果只出现补充率和自然损失率，那么就没有发生战斗，因为任一方对对方都没有影响。将实际战斗进入，则产生干扰项 $-by(t), -cx(t)$ ，一支常规部队在野外作战，假设这支部队的每一个成员都在敌人的有效杀伤距离以内。一旦这支常规部队受到损失，炮火就集中剩下的兵员身上。则一支常规的 X 部队的战斗损失率具有形式 $-by(t)$ ，其中 b 是部队的战斗效果系数。 Y 部队中每单个兵员所造成的 X 部队的战斗损失率为

$$\frac{dx/dt}{y} = -b \quad (3)$$

这里 b 就是 Y 部队中每个成员在战斗中的平均效果的一个量度。关于 $-cx(t)$ 项也可以给出一个类似的解释。计算战斗效果系数 b 和 c 并不是一件简单的事。一种方法就是令

$$b = r_y P_y, \quad c = r_x P_x \quad (4)$$

其中 r_y 和 r_x 分别表示 Y 部队的 X 部队的射速， P_y 和 P_x 分别表示一次射击杀死一个敌人的可能性。由(4)可以看出， Y 部队决定着 b ， X 部队决定着 c 。有时一个事后的战斗分析将揭示 b 和 c 的值。

假设两支孤立的常规部队正在交战，所作的理想假设是自然损失为零。在双方没有增援和自然损失的情况下，有简单的线性方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(6a) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(6b) \end{cases}$$

用(6a)除以(6b)，我们得到：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by} \quad (7)$$

在(7)中分离变量并积分得：

$$b \int_{y_0}^{y(t)} y dy = c \int_{x_0}^{x(t)} x dx$$

$$b[y^2(t) - y_0^2] = c[x^2(t) - x_0^2] \quad (8)$$

相互对抗的部队之间的这种二次关系，我们称之为平方律模型。设 k 表示常数 $by_0^2 - cx_0^2$ ，由 (8) 得到的关于方程

$$by^2 - cx^2 = k \quad (9)$$

的图形是一支双曲线（若 $k=0$ ，则为一对直线），称 (9) 为双曲率。

图 3 绘出了对应不同 k 值的双曲线。显然，我们只需要考察兵力象限 ($x > 0, y > 0$) 的双曲线。曲线上的箭头表示兵力随时间而变的方向。因为只要 $x(t) > 0, y(t) > 0$ ，就有 $\frac{dx}{dt} < 0, \frac{dy}{dt} < 0$ 所以箭头的方向如图 3 所示。

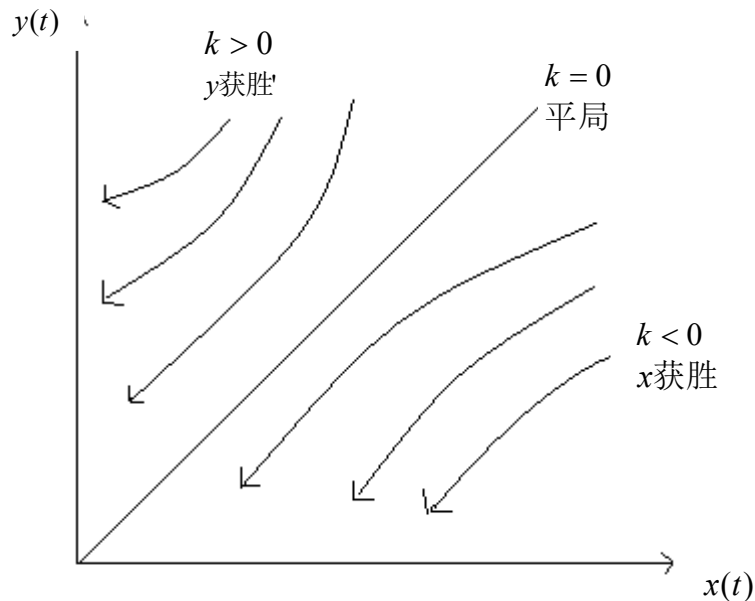


图 3 平方律的双曲线

在这样的战斗中谁将获胜？如果一支部队先被消灭，我们就说另一支部队将获胜。例如：如果 $k > 0$ ，则 Y 获胜，因为根据 (9)， y 在这种情况下决不会消失，但是对 X 部队来说，当 Y 部队减少到 $\sqrt{\frac{k}{b}}$ 时它将被歼灭。

这样， Y 部队试图形成一个 $k > 0$ 的战斗态势，即 Y 部队希望下述不等式成立

$$by_0^2 > cx_0^2 \quad (10)$$

由（4）看出（10）可写成：
$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \left(\frac{r_x}{r_y}\right)\left(\frac{P_x}{P_y}\right) \quad (11)$$

这就是Y部队在数量上占优势的条件。假设两支部队都训练有素，并且处于良好的作战条件，那么很难看出作战双方对（11）的右边会有多大的影响。（11）左边的平方说明，初始兵力比例 $\frac{y_0}{x_0}$ 的变化被平方地放大了。显然Y部队的目标是增大兵力的比例，而其对手是要减小这个比例。但（1）中平方的作用却不明显。

正是这个作用使得达到一个有利的局部力量对比成为如此的重要。例如：从 $\frac{y_0}{x_0}=1$ 到 $\frac{y_0}{x_0}=2$ 的一个变化，将使Y部队获得四倍的优势。当然，（11）是一个有利于Y部队的不等式条件。X部队则将试图通过增加 x_0 使不等式倾向。

方程（9）只与两个部队的兵力有关，而与时间的推移无关。通过下述方法，由（6）可得到关于兵力的瞬时变化公式。对（6a）微分并利用（6b）

得
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dy}{dt} = bcx \quad (12)$$

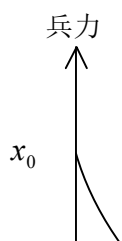
利用初始条件： $x_0 = x(0), -by_0 = \frac{dx}{dt}\big|_{t=0}$

则二阶常系数数齐次线性常微分方程（12）的理由

$$x(t) = \cosh(\beta t) - r \sinh(\beta t) \quad (13)$$

给出其中 $\beta = \sqrt{bc}$ ， $r = \sqrt{b/c}$ ，类似的

$$y(t) = y_0 \cosh(\beta t) - \frac{x_0}{t} \sinh(\beta t) \quad (14)$$



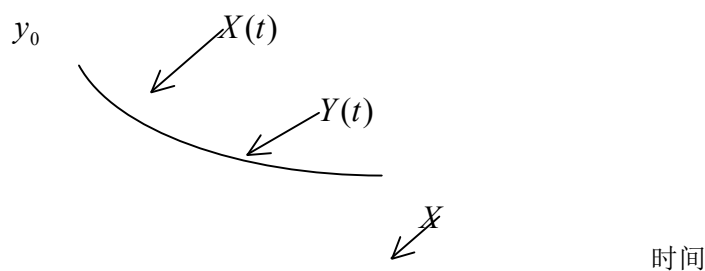


图 4 $k > 0$ 兵力与时间的关系，这里仅绘出了两个部队都存在的那段时间上的曲线

图 4 表示了 $k > 0$ （即 $by_0^2 > cx_0^2$ ）的特殊情况下，(13) 和 (14) 的图形。可以看出，Y 部队要取胜并不是一定要求 y_0 超过 x_0 ，但是必须使 $ry_0 > x_0$ 。

但这只是一种比较理想的情况，在实际的战争中，问题会很复杂，战争可能受到天气突发事件等情况的影响，实际战争也不会只单纯的采取这一种形式，会采取比如：游击战、空中打击等形式。但用这种方法来分析战争的结果，有很重要的理论意义。

四 在社会经济中的应用

物资的供给、需求与物价之间的关系，用常微分的知识来表示，我们可以发现他们之间的秘密。供给是在一定价格条件下，单位时间内企业愿出售的商品量，记为 S 。需求是在一定价格条件下，单位时间内消费者欲购且有支付能力的商品量，记为 D 。价格是影响 D 与 S 的主要因素。市场上的供给与需求相等时的价格称为均衡价格。假设 $D = m - np, S = -a + bp$ ，其中 p 是物价， a, b, m, n 是正整数，物价的涨速与过剩需求 $D - S$ 成正比，故有

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(m - np + a - bp) = \alpha[m + a - (b + n)p]$$

$$\text{即} \quad \frac{dp}{dt} + kp = h \quad (1)$$

其中 $k = \alpha(b+n), h = \alpha(a+m)$

$$(1) \text{ 的通解为} \quad p(t) = Ce^{-kt} + \frac{h}{k}$$

$$\text{记 } \bar{p} = \frac{h}{k}, \text{ 则 } \bar{p} = \frac{a+m}{b+n} \quad (2)$$

又当 $D = S$, 即 $m - np = -a + bp$ 时, p 为均衡价格, 故 $\bar{p} = 1$ 就是均衡价格, 于是

$$p(t) = Ce^{-kt} + \bar{p} \quad (3)$$

我们看到, $p(t)$ 虽有波动, 但当 $t \rightarrow \infty$ 时, $p(t)$ 趋于均衡价格 \bar{p} , 这时的市场价格趋于稳定。

如果供给与需求都是常理, 但 $D > S$, 则 $\frac{dp}{dt} = \alpha(D - S)$

$$p(t) = Ce^{\alpha(D-S)t} \quad (C > 0)$$

这时, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = +\infty$

此即通货膨胀, 是由于供不应求造成的, 为平抑物价, 必须降低消费资金的投放, 把需求降下来或增加商品的供给量, 例如: 压缩政府机关的公务员数量和企业多余职工就能降低消费资金, 或是实行商品房推销等措施, 就是增加了商品的供给, 可以起到抑制物价上涨的作用。

关于新商品的销售, 也可应用常微分方程。一种新产品面世, 厂家和商家总要采取各种措施, 包括大做广告等, 促进销售。他们都希望对产品的销售速度与销售数量做到心中有数, 以便用于组织生产, 安排进货。用常微分方程来描述产品推销速度, 并由此分析出结果。以指导生产和销售。我们以耐用商品为例, 这种商品可以长期使用, 价格较高, 一般不会废弃和重复购置, 价格一般也相对稳定。这一类型的新产品,

例如微波炉、电饭锅等，刚进入市场时，人们对其功能尚不是很熟悉，所以销售速度较慢。随着销售数量的增加，人们对于它的熟悉程度就会增加，销售速度也增加，但当这类商品销售到一定数量时，因为人们不会重复购置，而使销售速度减慢。假设需求量有一个上界 M ，用 $x(t)$ 表示时间 t 已售出的产品数量，则尚未购置的人数大约为 $M - x(t)$ 销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 与销售量 $x(t)$ 和 $M - x(t)$ 的乘积成正比，比例系数记为 k ，则

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) \quad (1)$$

解得：

$$x(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-kMt}} \quad (2)$$

其中 C 是任意常数

对 (1) 求导，得：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{dx}{dt} (M - x) - kx \frac{dx}{dt} = k \frac{dx}{dt} (M - 2x) \quad (3)$$

当 $x = \frac{M}{2}$ 时， $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

从 (2) 可求出 t_0 ，使 $x(t_0) = \frac{M}{2}$

由此可做如下分析：

(1) 当 $t < t_0$ 时， $x''(t) > 0$ ，因此 $x'(t)$ 单调上升

(2) 当 $t > t_0$ 时， $x''(t) < 0$ ，因此 $x'(t)$ 单调下降

这样， $x'(t)$ 在 $t = t_0$ 时达到最大值，这表明在销售小于最大销售的一半时，销售速度是不断增大的，销售量达到最大销售量的一半时，产品最为畅销，其后销售速度开始下降。

五 应用于刑事侦察中死亡时间的鉴定

牛顿冷却定律也运用了常微分方程的知识，应用牛顿冷却定律可以

解决很多实际问题。牛顿冷却定律的内容是物体在空气中冷却的速度与物体温度和空气温度之差成正比。

如果物体在房间里，与物体相比，若房间非常大，可假设房间的温度保持不变，即保持常温。也就是物体对房间温度的改变可以忽略不计。把牛顿冷却定律可应用于刑事侦察中死亡时间的鉴定问题。当谋杀发生后，尸体的温度从原来的温度 37 摄氏度按照牛顿冷却定律开始下降。如果周围空气的温度保持 20 摄氏度，那么两小时后尸体的温度变为 35 摄氏度。如果现在尸体被发现时的温度是 30 摄氏度，假设现在的时间是下午 4 点整，那么我们就可以知道谋杀是什么时候发生的了。那么我们可以列式为：

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 20) \quad H(0) = 37 \quad (\text{其中 } k > 0 \text{ 是常数})$$

分离变量并求解得： $H - 20 = Ce^{-kt}$ 代入初值条件 $H(0) = 37$ ，可求得 $C = 17$ ，于是得该初值问题的解为 $H = 20 + 17e^{-kt}$

因为两小时后尸体的温度变为 35 摄氏度，于是我们可以求出 k 的值，则有

$$35 = 20 + 17e^{-2k}$$

求得 $k \approx 0.063$

于是温度函数为 $H = 20 + 17e^{-0.063t}$

那么把 $H = 30$ 代入上式，就可以求出 t ，

$$30 = 20 + 17e^{-0.063t}$$

解得 $t \approx 8.4$ 小时

于是，我们可以判定谋杀发生在下午 4 点尸体发现前的 8.4 小时，即

8 小时 24 分钟，那么我们主知道谋杀发生的时间是上午 7 点 36 分。

六 在人口增减规律中的应用

尽管人口的增加或减少是离散的，但是由于增加或减少的只是少数个体，与全体数量相比，这种增量是很微小的，所以我们可以近似地假设大规模种群数量随时间的变化是连续的甚至是可微的，因而我们可以用常微分方程来表示。

设 $y(t)$ 表示 t 时刻某地区的人口数，用 $k(t)$ 表示出生率和死亡率的差。如果该地区的人口孤立，即没有移进和移出的移民。则人口的变化率 $y'(t) = ky(t)$ 。

在大多数情况下，可以假设 k 是常数，即不随时间变化。于是可得方程： $\frac{dy}{dt} = ky$ 这一方程在人口学中叫做马尔萨斯定律。其解为 $y = ce^{kt}$ （ c 为任意常数）如果在 t_0 时，某地区的人口数为 y_0 ，则 $y_0 = ce^{kt_0}$ ，将 $c = y_0 e^{-kt_0}$ 代入前一方程得：

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)} \quad (1)$$

该函数表示在上述假设下，人口总数是按指数规律增长的。用（1）方程估算美国 1970 到 1860 年间的人口数量，其结果与实际值相近。但对 1870 年到 1990 年美国人口估算时，其结果与实际人口吻合不好。事实上，当 $t \rightarrow +\infty$ ，依生物学常识判断，这是不可能的。因为最终人口拥挤产生的效应，如向外移民、疾病、战争、食物短缺、种内竞争等，都必将使人口的增长受到抑制。因而假设人口相对增长率为一常数，在时间间隔不太大的情况下是合适的，但当时间间隔增大时，相对增长率不是一个常数。考虑各种综合因素，1837 年荷兰的生物数学家 Verhulst 得方

程组

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = (a - bp)p \\ p(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 a, b 为常数，称作生命常数。当 $p \neq 0$ 或 $p \neq \frac{a}{b}$ 时，将方程分离变量后积分，

$$\int_{p_0}^p \frac{du}{u(a - bu)} = \int_0^t dt$$

因为
$$\frac{1}{u(a - bu)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{a - bu} \right)$$

所以得
$$\frac{1}{a} \ln \frac{u}{a - bu} \Big|_{p_0}^p = t - t_0$$

即
$$\ln \frac{p(a - bp_0)}{p_0(a - bp)} = a(t - t_0)$$

从而
$$\frac{p}{a - bp} = \frac{p_0 e^{a(t - t_0)}}{a - bp_0}$$

根据文献记载，美国和法国都曾用这个公式预报过人口变化，结果相当符合实际。

结束语

本文选取了几个典型的例子，表明常微分方程在实际生活中的应用。我们还可以充分发挥常微分方程解决实际问题的潜力。例如在自然科学、环境、政治、文化、体育、交通、通信等许多方面我们都可以建立数学模型，用于实际问题。

参考文献:

- [1] William F. Lucas 微分方程模型 (M) 国防科技大学出版社 1998 年
- [2] 张顺燕 数学的思想方法和应用 (M) 北京大学出版社 1997 年
- [3] 张国楚 大学文科数学 (M) 高等教育出版社 2002 年 第 187 页
- [4] 王树禾 微分方程模型与混沌 (M) 国防科技大学出版社 1999 年
- [5] 周义仓 靳埏 常微分方程及其应用 (M) 科学出版社 2003 年
- [6] 秦化淑 林正国 常微分方程及其应用 (M) 国防工业出版社 1985 年
- [7] 王联 蒲富全 刘永清 常微分方程理论及其应用 (M) 科学出版社 1992 年
- [8] 周尚仁 权宏顺 常微分方程习题集 (M) 高等教育出版社 1980 年