特征函数、母函数、矩母函数

确定随机变量的概率密度函数/分布律
方便求解独立随机变量和的分布函数一类问题
可以通过微分运算求随机变量的数字特征

1．特征函数：

设随机变量ξ的分布函数为 F (x)，概率密度函数为 f(x)，称：

$\Phi(t)=E\{e^{jt\xi}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}f(x)dx$ 为随机变量ξ的分布函数的特征函数，或ξ的特征函数,特征函数是概率密度函数的付氏变换。

特征函数的性质：

1．特征函数与概率密度函数相互唯一地确定；
2．两个相互统计独立的随机变量和的特征函数等于各个随机变量特征函数的积；
3．特征函数与随机变量的数字特征的关系：$\Phi^{(k)}(t)|_{t=0}=j^kE\{\xi^k\}$

典型随机变量的特征函数

1． 两点分布的特征函数：$\Phi(t)=q+pe^{jt}$

2． 二项式分布的特征函数：$\Phi(t)=\left(q+pe^{jt}\right)^n$

3． 几何分布：$\Phi(t)=\dfrac{pe^{jt}}{1-qe^{jt}}$

4． 泊松分布(λ)：$\Phi(t)=e^{-\lambda(1-e^{jt})}$

5． 正态分布 $N(\partial,\sigma^2)$：$\Phi(t)=\exp\{j\partial t-\dfrac{\sigma^2t^2}{2}\}$

6． 均匀分布[0，1]：$\Phi(t)=\dfrac{e^{jt}-1}{jt}$

7． 负指数分布：$\Phi(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-jt}$

2．母函数

研究分析非负整值随机变量时，可以采用母函数法：

对于一个取非负整数值 n=0,1,2,……，的随机变量 x，，其相应的矩生成函数定义为：

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(x=n)\cdot z^{n}$$

$\Phi(1/z)$ 是序列 $p(x=n)$ 的正常的 z 变换

母函数的性质：

1. 两个相互统计独立的随机变量和的母函数等于各个随机变量的母函数的积。
2. 随机个独立同分布的非负整值随机变量和的矩生成函数是原来两个母函数的复合(见附合泊松过程的应用)
3. $\Phi(z)\big|_{z=0}=p_0,\Phi^{(k)}(z)\big|_{z=0}=k!\,p_k \quad k=1,2,\cdots$

   通过母函数有理分式的幂级数展开等方法，得到随机变量的概率分布表达式。
3. $\Phi^{(k)}(z)\big|_{z=1}=E\{X(X-1)\cdots(X-k+1)\} \quad k=1,2,\cdots$

   通过矩生成函数的微分可以得到随机变量的数字特征：

   均值：

   $$E\{X\}=\Phi^{'}(z)|_{z=1}$$

   方差：

   $$D\{X\}=E\{X^2\}-[E\{X\}]^2=\Phi^{''}(z)|_{z=1}+\Phi^{'}(z)|_{z=1}-[\Phi^{'}(z)|_{z=1}]^2$$

典型随机变量的母函数

1. 两点分布的母函数：$\Phi(z)=q+pz$
2. 二项式分布的母函数：$\Phi(z)=\left(q+pz\right)^n$
3. 泊松分布(λ)：$\Phi(z)=e^{-\lambda(z-1)}$
4. 几何分布：$\Phi(z)=\dfrac{pz}{1-qz}$

3 矩母函数

设随机变量 ξ 的分布函数为 F (x), 概率密度函数为 f(x), 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$ 在区间(t1,t2)上存在且有限，则定义区间(t1,t2)上：

$m(s) = E\{e^{s\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx$ 为随机变量 ξ 的矩母函数。

矩母函数的性质：

1．两个相互统计独立的随机变量和的矩母函数等于各个随机变量矩母函数的积；
2．矩母函数与随机变量的数字特征的关系：

$$m^{(k)}(s)|_{s=0} = E\{\xi^k\}$$，k=1,2,3，……

典型随机变量的矩母函数

8． 两点分布的特征函数：$m(s) = q + pe^s$

9． 二项式分布的特征函数：$m(s) = \left(q + pe^s\right)^n$

10． 几何分布：$m(s) = \dfrac{pe^s}{1 - qe^s} \quad s < -\log q$

11． 泊松分布(λ)：$m(s) = e^{-\lambda(1-e^s)}$

12． 均匀分布[0，1]：$m(s) = \dfrac{e^s - 1}{s}$

13． 负指数分布：$m(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda - s} \quad s < \lambda$