

Úvod do komplexní analýzy

6. října 2020

1 Zavedení základních pojmů

\mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm Euklidovskou normu a metriku:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor \mathbb{C} je prostor \mathbb{R}^2 , v němž definujeme navíc:

- násobení $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme $(x, 0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0, 1)$

Vlastnosti 1.2.

Vlastnosti \mathbb{C} . Necht $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x + iy$ a $(\pm i)^2 = -1$
- Násobení v \mathbb{C} zahrnuje násobení v \mathbb{R} i násobení skalárem v \mathbb{R}^2

Značení 1.3. Necht $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\bar{z} := x - iy$ je komplexně sdružená část k z ,
- $Re(z) := x$ je reálná část z , $Im(z) := y$ je imaginární část z ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je modul nebo absolutní hodnota z .

Dále platí

- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $z + \bar{z} = 2.Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i.Im(z)$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$
- \mathbb{C} je těleso

Pozor, \mathbb{C} nelze rozumně upořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. \mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1,0)^T, (0,1)^T)$. Obecné \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

\mathbb{C} je komplexní vektorový prostor dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné \mathbb{C} -lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (a+ib)(x+iy) = (ax-by, bx+ay) =$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pozorování 2.2. \mathbb{R} -lineární zobrazení (1) je \mathbb{C} -lineární, právě když $d = a, c = -b$.

Poznámka 2.3. \mathbb{C} -lineární zobrazení jsou velmi specifická \mathbb{R} -lineární zobrazení.

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexnou funkci komplexné proměnné. Na $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji okolí z_0 . Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme prstencové okolí. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0), P(z_0)$. Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$, pokud $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \epsilon)$
- f je spojitá v x_0 , pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v x_0 \mathbb{R} -diferencovatelná, pokud existuje \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $df(x_0) := L$ je tzv. totální diferenciál f v x_0 a platí, že

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Ta matice se nazývá Jacobiho matice.)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v x_0 \mathbb{C} -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme komplexní derivací f v x_0 .

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)', (f \circ g)'$

Příklad 3.5. • $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$

- $f(z) = \bar{z}$ není nikde v \mathbb{C} \mathbb{C} -diferencovatelná, ale $f(x, y) = (x, -y)$ je všude \mathbb{R} -diferencovatelná. Skutečně, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:

1. Existuje $f'(x_0)$
2. Existuje $df(x_0)$ a $df(x_0)$ je \mathbb{C} -lineární
3. Existuje $df(x_0)$ a v z_0 platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

zde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$

Důkaz. (2. \iff 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. \iff 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(z_0) - wh}{h} \quad (2)$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|} \quad (3)$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh, h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. \square

Poznámka 3.7. • Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

- Platí, že $(CR) \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz. • $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

- zřejmé

\square

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \bar{z}$, pak $f'(x, y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR) , proto není nikde \mathbb{C} -diferencovatelná.

Definice 3.9. Necht \mathbb{C} je otevřené a $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G kolomorfní, pokud f je \mathbb{C} -diferencovatelná v každém $z \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech kolomorfních $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je celá, pokud $F \in \mathcal{H}(G)$.

Příklad 3.10. • Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je celá funkce.

- Necht $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \neq 0$. Potom racionalita funkce R je kolomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\alpha \circ \varphi)$ konečné.

4 Elementární funkce v \mathbb{C}

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(t): = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2. • $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála

- $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
 $f(z) = \exp(z)$, $f_1(x, y) = e^x \cos y$, $f_2(x, y) = e^x \sin y$,
 $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$
 Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

Polární tvar komplexního čísla $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = x + i$, $y = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z .

Značení 4.3. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položíme $\text{Arg}(z): = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$. Je-li $\text{Arg}(z) \cap (\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z): = \varphi_0$ je tzv. hlavní hodnota argumentu z .

Platí:

- $\text{Arg}(z): = \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (\pi, \pi]$, kde \arg je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je \arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- \exp není prostá na \mathbb{C} , je $2\pi i$ -periodická a platí dokonce:
 $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = z + 2k\pi i$
- Necht $P: = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \in (\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$. Pro $z = 0$ nemáme řešení. Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = \log|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.4. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položíme

- $\text{Log} z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + i \arg z \dots$ tzv. hlavní hodnota logaritmu z .

Vlastnosti 4.5.

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $\text{Log} z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- \log není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp zi) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$ -periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.6. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnota α -té mocniny z definujeme $z^\alpha := \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in \text{Log} z\}$.

Vlastnosti 4.7. • $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$

- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
 $w \in \text{Log} z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Příklad 4.8. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p|_q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \dots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q -úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0
- Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

Příklad 4.9. • $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$

- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$

např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.10. Je-li $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} = \text{sudá část} + \text{lichá část}$.

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.11.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.12. • $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$

• $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, kde

Definice 4.13.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.14. • \cos a \sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{C} .

- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- \sin i \cos jsou 2π -periodické, ale nejsou omezené na \mathbb{C} . Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na \mathbb{C} platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$