

Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

15. října 2020

Obsah

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Zavedení základních pojmů | 2 |
| 2 | Lineární zobrazení | 2 |
| 3 | Diferencovatelnost | 3 |
| 4 | Elementární funkce v \mathbb{C} | 5 |
| 4.1 | Exponenciála | 5 |
| 4.2 | Logaritmus | 6 |
| 4.3 | Obecná mocnina | 6 |
| 4.4 | Hyperbolické funkce | 7 |
| 4.5 | Goniometrické funkce | 7 |
| 5 | Křivkový integrál | 7 |

1 Zavedení základních pojmů

\mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor \mathbb{C} je prostor \mathbb{R}^2 , v němž definujeme navíc:

- násobení $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme $(x, 0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0, 1)$

Vlastnosti 1.2.

Vlastnosti \mathbb{C} . Nechť $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x + iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v \mathbb{C} zahrnuje násobení v \mathbb{R} i násobení skalárem v \mathbb{R}^2 .

Značení 1.3. Nechť $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\bar{z} := x - iy$ je *komplexně sdružená část* k z ,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* z , $Im(z) := y$ je *imaginární část* z ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* z .

Dále platí

- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}.w$, $|zw| = |z|.|w|$, $z + \bar{z} = 2.Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- \mathbb{C} je těleso.

Pozor, \mathbb{C} nelze *rozumně* upořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. \mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1, 0)^T, (0, 1)^T)$. Obecné \mathbb{R} -lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

\mathbb{C} je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné \mathbb{C} -lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (x + iy)$, $w = (a + ib)$. Potom

$$Lz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2.2. \mathbb{R} -lineární zobrazení (1) je \mathbb{C} -lineární, právě když $d = a$, $c = -b$.

Poznámka 2.3. \mathbb{C} -lineární zobrazení jsou velmi specifická \mathbb{R} -lineární zobrazení.

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné*. Na $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* z_0 . Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí*. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$.

Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- f je spojitá v x_0 , pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v x_0 \mathbb{R} -diferencovatelná, pokud existuje \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $df(x_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* f v x_0 a platí, že

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Ta matice se nazývá *Jacobiho matice*.)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v x_0 \mathbb{C} -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme *komplexní derivací* f v x_0 .

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)'$ a $(f \circ g)'$.

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.

- $f(z) = \bar{z}$ není nikde v \mathbb{C} \mathbb{C} -diferencovatelná, ale $f(x, y) = (x, -y)$ je všude \mathbb{R} -diferencovatelná. Skutečně, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h},$$

avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:*

1. Existuje $f'(x_0)$
2. Existuje $df(x_0)$ a $df(x_0)$ je \mathbb{C} -lineární
3. Existuje $df(x_0)$ a v z_0 platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned} \tag{CR}$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Důkaz. (2. \iff 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. \iff 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(z_0) - wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. \square

Poznámka 3.7.

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz.

- $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

\square

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \bar{z}$, pak $f'(x, y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde \mathbb{C} -diferencovatelná.

Definice 3.9. Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G *holomorfní*, pokud f je \mathbb{C} -diferencovatelná v každém $z \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je *celá*, pokud $F \in \mathcal{H}(G)$.

Příklad 3.10.

- Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je *celá* funkce.
- Necht $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionální funkce R je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$ konečné.

4 Elementární funkce v \mathbb{C}

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(t) := e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp(z), f_1(x, y) = e^x \cos y, f_2(x, y) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Polární tvar komplexního čísla $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = x + i$, $y = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z .

Značení. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položíme $\text{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$. Je-li $\text{Arg}(z) \cap (\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z) := \varphi_0$ je tzv. hlavní hodnota argumentu z .

Platí:

- $\text{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (\pi, \pi]$, kde \arg je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je \arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- \exp není prostá na \mathbb{C} , je $2\pi i$ -periodická a platí dokonce:
 $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = 2k\pi i$
- Necht $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \in (\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$. Pro $z = 0$ nemáme řešení. Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = \log|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.3. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

- $\text{Log } z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + i\arg z$, tzv. hlavní hodnota logaritmu z .

Vlastnosti 4.4.

Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- \log není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp z) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$ -periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.5. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom *hlavní hodnotu* α -té mocniny z definujeme $z^\alpha := \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in \text{Log } z\}$.

Vlastnosti 4.6.

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
 $w \in \text{Log } z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Příklad 4.7. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Necht $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Necht $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \dots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q -úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0.
- Necht $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

Příklad 4.8. • $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$

- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

$$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$$

$$\text{např. } 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$$

Poznámka 4.9. Je-li $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} = \text{sudá část} + \text{lichá část}$.

4.4 Hyperbolické funkce

$$e^z = \cosh(z) + \sinh(z), \text{ kde}$$

Definice 4.10.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.11.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), \text{ kde}$$

Definice 4.12.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.13. • \cos a \sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{C} .

- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- \sin i \cos jsou 2π -periodické, ale nejsou omezené na \mathbb{C} . Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na \mathbb{C} platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5 Křivkový integrál

Definice 5.1. Necht $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Potom

1. φ je *křivka*, pokud je φ spojitá
2. φ je *regulární křivka*, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0, \dots, n-1$.

Definice 5.2 (Úsečka). Necht $a, b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b . Značíme $[a, b]$.

Značení 5.3. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

Definice 5.4 (Lomenná čára). Řekneme, že regulární křivka φ je *lomenná čára* v \mathbb{C} , existují-li $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1, z_2] \dot{+} [z_2, z_3] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{k-1}, z_k]$.

Definice 5.5 (Kružnice). Necht $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 5.6. Pro křivku φ může být její graf $\langle \varphi \rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

Úmluva 5.7. Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku* v \mathbb{C} .

Připomenutí 5.8. Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t), \\ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) dt, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 5.9. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (4)$$

Poznámka 5.10.

1. Křivkový integrál (4) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_{\varphi} f(z) dz$

Základní vlastnosti 5.11.

1. Je-li φ křivka, f a g jsou spojitě funkce na $\langle \varphi \rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_{\varphi} (Af + Bg) = A \int_{\varphi} f + B \int_{\varphi} g.$$

2. Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle \varphi \rangle$, potom $\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle \varphi \rangle} |f| \cdot V(\varphi)$.

Důkaz. Označíme $M := \max_{\langle \varphi \rangle} |f|$. Potom máme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |\varphi'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = M \cdot V(\varphi) \end{aligned}$$

□

3. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \dot{+} \psi} f &= \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \\ &\text{a} \\ \int_{\dot{-} \varphi} f &= - \int_{\varphi} f, \end{aligned}$$

kde $(\dot{-} \varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je *opačná křivka* k φ .

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky*. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom

$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \int_{\psi} f &= \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \varphi'(\omega(t)) \omega'(t) dt \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \psi'(t) dt \stackrel{\text{subst.}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi} f. \end{aligned}$$

□

Definice 5.12. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F , pokud $F' = f$ na G .

Příklad 5.13. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k $z^n \begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \dots \end{cases}$

Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F . Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ je křivka a f je spojitá^(*) na $\langle \varphi \rangle$. Potom

1. $\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_{\varphi} f = 0$, je-li φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Poznámka 5.15. ^(*) Ukážeme si později, že funkce f , která má na G primitivní funkci, je na G holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz. Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'_2 = F'\varphi'_1 + iF'\varphi'_2 = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Příklad 5.16.

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nemá primitivní funkci, neboť víme

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Připomenutí 5.17 (Souvislost). Necht $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (a) G je *souvislá*, tj. G je *oblast*.
- (b) G je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.
- (c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

Důkaz. (a) \iff (b): víte z MA; (c) \Rightarrow (b): jasné; (a) \Rightarrow (c): ukáže se podobně jako (a) \Rightarrow (b) □

Věta 5.18. Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G .

Důkaz. \Rightarrow Jasně.

\Leftarrow Necht $z, w \in G$ a φ je lomenná čára v G spojující z a w . Potom $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G . □

Důsledek 5.19. Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.

Důkaz.

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

Věta 5.20 (O existenci PF). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G . NTJE:

1. f má na G primitivní funkci.
2. $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .

3. $\int_{\varphi} f$ nezávisí v G na křivce φ , tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

Poznámka 5.21. Připomíná větu o potenciálu z MA (?)

Důkaz věty 5.20.

1. \Rightarrow 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF

2. \Rightarrow 3. Položme $\tau := \varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

3. \Rightarrow 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G , která začíná v z_0 a končí v z . Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní, nezávislá na volbě φ_z , protože předpokládáme 3. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G . Necht $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \stackrel{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dot{+} u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1, z_1 + h]$ je úsečka, tzn. $u(t) = z_1 + t \cdot h$, $t \in [0, 1]$. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h dt,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt.$$

To se blíží k nule pro $h \rightarrow 0$, protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \right| \leq \max_{z \in [z_1, z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ze spojitosti f v z_1 . Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

Značení 5.22.

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0, z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

Poznámka. Konvexní \subsetneq hvězdovitá.

2. Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

(konvexní obal a, b, c) a značíme $\partial\Delta := [a, b] \dot{+} [b, c] \dot{+} [c, a]$. Připouštíme i degenerované Δ , tzn. a, b, c mohou ležet na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

Dodatek 5.23. Necht f je spojitá funkce na hvězdicovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \tag{5}$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

Důkaz. Necht z_0 je střed hvězdovitosti G , Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0, z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$.

Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ předchozí věty, když místo $\textcircled{3}$ uvažujeme (5). □

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček