

# Úvod do komplexní analýzy

Roman Lávička

20. února 2021



# Obsah

<b>1</b>	<b>Zavedení základních pojmů</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Lineární zobrazení</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Diferencovatelnost</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Elementární funkce v <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>5</b>
4.1	Exponenciála . . . . .	5
4.2	Logaritmus . . . . .	5
4.3	Obecná mocnina . . . . .	6
4.4	Hyperbolické funkce . . . . .	7
4.5	Goniometrické funkce . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Křivkový integrál</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Mocninné řady</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Riemannova sféra</b>	<b>19</b>
7.1	Izolované singularity . . . . .	21
7.2	Laurentovy řady . . . . .	23
7.3	Holomorfní funkce na mezikruží . . . . .	23
7.4	Izolované singularity 2 . . . . .	25
7.5	Reziduum . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Speciální typy integrálů</b>	<b>27</b>
<b>9</b>	<b>Index</b>	<b>29</b>
<b>10</b>	<b>Obecná Cauchyho věta a reziduová věta pro cykly</b>	<b>30</b>
<b>11</b>	<b>Zajímavé funkce</b>	<b>33</b>
11.1	Funkce Gama . . . . .	33
11.2	Riemannova zeta funkce . . . . .	34
11.3	Prvočíselná věta . . . . .	36

## 1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$  je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$ ,  $z, w \in \mathbb{R}^2$

**Definice 1.1.** Prostor  $\mathbb{C}$  je prostor  $\mathbb{R}^2$ , v němž definujeme navíc:

- násobení  $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme  $(x, 0) \cong x$ , neboli  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme  $i = (0, 1)$

**Značení 1.2.** Necht  $z = x + iy$ , kde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Potom

- $\bar{z} := x - iy$  je *komplexně sdružené číslo* k  $z$ ,
- $\operatorname{Re}(z) := x$  je *reálná část*  $z$ ,  $\operatorname{Im}(z) := y$  je *imaginární část*  $z$ ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  je *modul* nebo *absolutní hodnota*  $z$ .

**Vlastnosti 1.3.**

Vlastnosti  $\mathbb{C}$ . Necht  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ .

- Potom  $z = x + iy$  a  $(\pm i)^2 = -1$ .
- Násobení v  $\mathbb{C}$  zahrnuje násobení v  $\mathbb{R}$  i násobení skalárem v  $\mathbb{R}^2$ .
- $|z|^2 = z\bar{z}$ ,  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,  $|zw| = |z| \cdot |w|$ ,  $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$ ,  $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$ ,
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , je-li  $z \neq 0$ ,
- $\mathbb{C}$  je těleso.

Pozor,  $\mathbb{C}$  nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$ ,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$ .

## 2 Lineární zobrazení

**Definice 2.1.**  $\mathbb{R}^2$  je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je  $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ . Obecné  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .  $\mathbb{C}$  je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je  $\{1\}$ . Obecné  $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  má tvar  $Lz = wz$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , kde  $w \in \mathbb{C}$ . Necht  $z = (x + iy)$ ,  $w = (a + ib)$ . Potom

$$Lz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Pozorování 2.2.**  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení (1) je  $\mathbb{C}$ -lineární, právě když  $d = a$ ,  $c = -b$ .

**Poznámka 2.3.**  $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení jsou velmi specifická  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení.

**Úmluva 2.4.** Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné*. Na  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se můžeme vždy dívat jako na  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , protože  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ . Nechť  $f$  je funkce z  $\mathbb{C}$  do  $\mathbb{C}$ . Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

**Definice 2.5.** Pro  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\delta > 0$  značíme  $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$  a nazýváme ji *okolí*  $z_0$ . Dále  $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$  nazýváme *prstencové okolí*. Pokud  $\delta$  není důležité, budeme často psát jen  $U(z_0)$ ,  $P(z_0)$ .

Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ , pokud  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in P(z_0, \delta) : f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- $f$  je spojitá v  $z_0$ , pokud  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

### 3 Diferencovatelnost

**Definice 3.1.** Funkce  $f$  je v  $z_0$   $\mathbb{R}$ -diferencovatelná, pokud existuje  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

**Poznámka 3.2.** Potom  $df(z_0) := L$  je tzv. *totální diferenciál*  $f$  v  $z_0$  a platí, že

$$df(z_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} h, \quad h \in \mathbb{R}^2,$$

kde  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ . (Tato matice se nazývá *Jacobiho matice*.)

**Definice 3.3.** Řekneme, že funkce  $f$  je v  $z_0$   $\mathbb{C}$ -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Číslo  $f'(z_0)$  nazýváme *komplexní derivací*  $f$  v  $z_0$ .

**Poznámka 3.4.** Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ ,  $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$  a  $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ .

**Příklad 3.5.**

- $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  a  $n \in \mathbb{N}$ .
- $f(z) = \bar{z}$  není nikde v  $\mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -diferencovatelná, ale  $f(x, y) = (x, -y)$  je všude  $\mathbb{R}$ -diferencovatelná. Skutečně, pro  $z_0 \in \mathbb{C}$  libovolné, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h},$$

avšak poslední limita neexistuje.

**Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova).** Necht  $f$  je funkce definovaná na okolí  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Existuje  $f'(z_0)$
2. Existuje  $df(z_0)$  a  $df(z_0)$  je  $\mathbb{C}$ -lineární
3. Existuje  $df(z_0)$  a v  $z_0$  platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0),\end{aligned}\tag{CR}$$

kde  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

*Důkaz.* (2.  $\iff$  3.): Plyne z pozorování pro lineární zobrazení (1.  $\iff$  2.) Podle definice  $w = f'(z_0)$  znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{h}.\tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě  $h/|h|$  dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|},\tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že  $df(z_0)h = wh$ ,  $h \in \mathbb{C}$ . Z (3) plyne (2) vynásobením  $|h|/h$ .  $\square$

**Poznámka 3.7.**

- Existuje-li  $f'(z_0)$ , potom  $df(z_0)h = f'(z_0)h$ ,  $h \in \mathbb{C}$  a  $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR)  $\iff \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

*Důkaz.*

- $df(z_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- zřejmé

$\square$

**Příklad 3.8.** Necht  $f(z) = \bar{z}$ , pak  $f(x, y) = (x, -y)$ . Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , ale v žádném  $z \in \mathbb{C}$  nesplňuje (CR), proto není nikde  $\mathbb{C}$ -diferencovatelná.

**Definice 3.9.** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Potom říkáme, že  $f$  je na  $G$  holomorfní, pokud  $f$  je  $\mathbb{C}$ -diferencovatelná v každém  $z_0 \in G$ . Značíme  $\mathcal{H}(G)$  prostor všech holomorfních funkcí  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Říkáme, že funkce  $F$  je celá, pokud  $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .

**Příklad 3.10.**

- Polynom  $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $z \in \mathbb{C}$  je celá funkce.
- Necht  $R = P/Q$ , kde  $P, Q$  jsou polynomy, které nemají společné kořeny a  $Q \not\equiv 0$ . Potom racionální funkce  $R$  je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$ , kde  $Q^{-1}(\{0\})$  je konečná množina.

## 4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

### 4.1 Exponenciála

**Definice 4.1.**  $\exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y)$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

**Vlastnosti 4.2.**

- $\exp|_{\mathbb{R}}$  je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp(z), \quad f_1(x, y) = e^x \cos y, \quad f_2(x, y) = e^x \sin y$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Tedy  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  a (CR) platí všude v  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ . Z CR-věty a poznámky 3.7 máme  $f'(z) = \exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $\exp$  není prostá na  $\mathbb{C}$ , je  $2\pi i$ -periodická a platí dokonce:  
 $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = z + 2k\pi i$
- Necht'  $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$ . Potom  $\exp|_P$  je prostá a  $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Poznámka 4.3.** Necht'  $z = x + iy$  je komplexní číslo, pak se na něj můžeme dívat jako na bod v rovině určený kartézskými souřadnicemi  $x$  a  $y$ . *Polární (goniometrický) tvar komplexního čísla* získáme tak, že si body  $x$  a  $y$  vyjádříme v polárních souřadnicích a ty pak dosadíme do rovnice udávající  $z$ . Tedy  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$ , kde  $r = |z|$  a  $\varphi$  je argument  $z$ . Polární souřadnice nám říkají, jak je daleko od počátku  $r$  a v jakém směru  $\angle \varphi$  se bod  $z$  nachází.

**Značení 4.4.** Necht'  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Potom položíme  $\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ . Je-li  $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$ , potom  $\arg(z) := \varphi_0$  je tzv. *hlavní hodnota argumentu*  $z$ .

Platí:

- $\operatorname{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,
- funkce  $\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ , kde  $\arg$  je surjektivní a navíc je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Dále je  $\arg$  spojitá na  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , ale není spojitá v žádném  $z \in (-\infty, 0]$ .

### 4.2 Logaritmus

Pro dané  $z \in \mathbb{C}$  řešíme rovnici  $e^w = z$ .

- Pro  $z = 0$  nemá rovnice řešení.
- Pro  $z \neq 0$  je  $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = \log|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$ .

**Definice 4.5.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Položme

- $\text{Log } z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + i \arg z$ , tzv. *hlavní hodnota logaritmu*  $z$ .

**Vlastnosti 4.6.**

Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- $\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$  a  $\log = (\exp|_P)^{-1}$ , kde  $P$  je množina z vlastností exponenciály.
- $\log$  není spojitá v žádném  $z \in (-\infty, 0]$ , ale  $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ .  
Navíc  $\log' z = \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .
- $\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ,  $|z| < 1$

Pozor na počítání s komplexním logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$ ,  $\log(\exp z) \neq z$ , z toho, že exponenciála je  $2\pi i$ -periodická
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např.  $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

### 4.3 Obecná mocnina

**Definice 4.7.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  a  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Potom *hlavní hodnotu  $\alpha$ -té mocniny*  $z$  definujeme  $z^\alpha := \exp(\alpha \log z)$ . Položme  $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in \text{Log } z\}$ .

**Vlastnosti 4.8.**

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li  $z > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , potom  $z^\alpha$  je v souladu s definicí z MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $z \neq 0$

*Důkaz.*  $w \in \text{Log } z \iff w = \log z + 2k\pi i$

□

- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  a  $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ,  $|z| < 1$ , kde  $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ .

**Pozorování 4.9.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- Necht  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Potom  $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$ .
- Necht  $\alpha \in \mathbb{Q}$  a  $\alpha = p/q$ , kde  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  a  $p, q$  jsou nesoudělná. Potom

$$m_{\frac{p}{q}}(z) = \left\{ z^{\frac{p}{q}} e^{\frac{2k\pi i p}{q}} : k \in \{0, 1, \dots, q-1\} \right\}$$

tvoří vrcholy pravidelného  $q$ -úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem  $z^{\frac{p}{q}}$ .

- Necht  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ . Potom je  $m_\alpha(z)$  nekonečné.



**Příklad 4.10.**

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ,  $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$  (nesouhlasí s definicí z MA!),  $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ,  $m_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

- $(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$   
např.  $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

**Poznámka 4.11.** Je-li  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , potom  $f(z) = \underbrace{\frac{f(z) + f(-z)}{2}}_{\text{sudá část}} + \underbrace{\frac{f(z) - f(-z)}{2}}_{\text{lichá část}}.$

**4.4 Hyperbolické funkce**

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$ , kde

**Definice 4.12.**

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.13.**

- $\cosh' z = \sinh z$ ,  $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ ,  $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

**4.5 Goniometrické funkce**

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ , kde

**Definice 4.14.**

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.15.**

- $\cos$  a  $\sin$  jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{C}$ .
- $\sin'(z) = \cos(z)$ ,  $\cos'(z) = -\sin(z)$
- $\sin$  i  $\cos$  jsou  $2\pi$ -periodické, ale nejsou omezené na  $\mathbb{C}$ . Platí, že  $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na  $\mathbb{C}$  platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

## 5 Křivkový integrál

**Definice 5.1.** Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ . Potom

1.  $\varphi$  je *křivka*, pokud je  $\varphi$  spojitá
2.  $\varphi$  je *regulární křivka*, pokud je  $\varphi$  po částech spojitě diferencovatelná, tzn.  $\varphi$  je spojitá na  $[\alpha, \beta]$  a existuje dělení  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  takové, že  $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$  je spojitě diferencovatelné pro každé  $i = 0, \dots, n-1$ .

**Definice 5.2 (Úsečka).** Necht  $a, b \in \mathbb{C}$ . Potom  $\varphi(t) := a + t(b-a)$ ,  $t \in [0, 1]$  je úsečka z  $a$  do  $b$ . Značíme  $[a; b]$ .

**Značení 5.3.** Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  a  $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$  jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka.  $(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$ , pokud  $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$ .

**Definice 5.4 (Lomenná čára).** Řekneme, že regulární křivka  $\varphi$  je *lomenná čára* v  $\mathbb{C}$ , existují-li  $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$  taková, že  $\varphi = [z_1; z_2] \dot{+} [z_2; z_3] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{k-1}; z_k]$ .

**Definice 5.5 (Kružnice).** Necht  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ . Potom  $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

**Poznámka 5.6.** Pro křivku  $\varphi$  může být její graf  $\langle \varphi \rangle := \varphi([\alpha, \beta])$  například čtverec (Peanova křivka).

**Úmluva 5.7.** Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku* v  $\mathbb{C}$ .

**Připomenutí 5.8.** Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t), \\ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) dt, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl. Zde  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li  $\varphi$  regulární.

**Definice 5.9.** Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je regulární křivka a  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (1)$$

**Poznámka 5.10.**

1. Křivkový integrál (1) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také  $\int_{\varphi} f(z) dz$

**Základní vlastnosti 5.11.**

1. Je-li  $\varphi$  křivka,  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce na  $\langle\varphi\rangle$  a  $A, B \in \mathbb{C}$ , potom

$$\int_{\varphi} (Af + Bg) = A \int_{\varphi} f + B \int_{\varphi} g.$$

2. Je-li  $\varphi$  křivka a  $f$  je spojitá funkce na  $\langle\varphi\rangle$ , potom

$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi).$$

*Důkaz.* Označíme  $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$ . Potom máme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |\varphi'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = M \cdot V(\varphi) \end{aligned}$$

□

3. Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$  jsou křivky a  $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$ . Potom

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \dot{+} \psi} f &= \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \\ &\text{a} \\ \int_{\dot{-}\varphi} f &= - \int_{\varphi} f, \end{aligned}$$

kde  $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$ ,  $t \in [-\beta, -\alpha]$  je opačná křivka k  $\varphi$ .

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky*. Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je křivka,  $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$  je spojitě diferencovatelné s  $\omega' > 0$  a  $\psi := \varphi \circ \omega$ . Potom

$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$

*Důkaz.*

$$\int_{\psi} f = \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \varphi'(\omega(t)) \omega'(t) dt \stackrel{\text{subst.}}{\tau=\omega(t)} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi} f.$$

□

**Definice 5.12.** Řekneme, že funkce  $f$  má na otevřené  $G \subset \mathbb{C}$  *primitivní funkci*  $F$ , pokud  $F' = f$  na  $G$ .

**Příklad 5.13.**  $\frac{z^{n+1}}{n+1}$  je primitivní funkcí k  $z^n$

$$\begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \dots \end{cases}$$

**Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f$  má na  $G$  primitivní funkci  $F$ . Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$  je křivka a  $f$  je spojitá<sup>(\*)</sup> na  $\langle\varphi\rangle$ . Potom

1.  $\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2.  $\int_{\varphi} f = 0$ , je-li  $\varphi$  uzavřená, tzn.  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

**Poznámka 5.15.** (\*) Ukážeme si později, že funkce  $f$ , která má na  $G$  primitivní funkci, je na  $G$  holomorfní, tudíž i spojitá.

*Důkaz.* Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x} \varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'_2 = F' \varphi'_1 + i F' \varphi'_2 = F'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho  $t \in [\alpha, \beta]$ , neboli  $F \circ \varphi$  je zobecněná primitivní funkce k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

**Příklad 5.16.**

- $\frac{1}{z}$  je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ale na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nemá primitivní funkci, neboť víme

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$  má na  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  primitivní funkci  $\log(z)$ .

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Připomenutí 5.17 (Souvislost).** Necht  $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$  otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (a)  $G$  je souvislá, tj.  $G$  je oblast.
- (b)  $G$  je křivkově souvislá, tzn. pro každé  $z_1, z_2 \in G$  existuje spojitá křivka  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$  taková, že  $\varphi(\alpha) = z_1$  a  $\varphi(\beta) = z_2$ .
- (c) Pro každé  $z_1, z_2 \in G$  existuje lomenná čára  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$  taková, že  $\varphi(\alpha) = z_1$  a  $\varphi(\beta) = z_2$ .

*Důkaz.* (a)  $\iff$  (b): víte z MA; (c)  $\Rightarrow$  (b): jasné; (a)  $\Rightarrow$  (c): ukáže se podobně jako (a)  $\Rightarrow$  (b) □

**Věta 5.18.** Funkce  $f$  je konstantní na oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ , právě když  $f' = 0$  na  $G$ .

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  Jasně.

$\Leftarrow$  Necht  $z, w \in G$  a  $\varphi$  je lomená čára v  $G$  spojující  $z$  a  $w$ . Potom  $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$ , protože  $f$  je primitivní funkce k  $f'$  na  $G$ . □

**Důsledek 5.19.** Jsou-li  $F_1, F_2$  primitivní funkce k  $f$  na oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ , potom existuje  $c \in \mathbb{C}$  tak, že  $F_2 = F_1 + c$ .

*Důkaz.*

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

**Věta 5.20 (O existenci primitivní funkce).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f$  je spojitá na  $G$ . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $f$  má na  $G$  primitivní funkci.
2.  $\int_{\varphi} f = 0$  pro každou uzavřenou křivku  $\varphi$  v  $G$ .
3.  $\int_{\varphi} f$  nezávisí v  $G$  na křivce  $\varphi$ , tzn. pro každé dvě křivky  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ ,  $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$  takové, že  $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$  a  $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$ , platí  $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$ .

**Poznámka 5.21.** Připomíná větu o potenciálu z MA (?)

Důkaz věty 5.20.

1.  $\Rightarrow$  2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí primitivní funkce
2.  $\Rightarrow$  3. Položme  $\tau := \varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$ . Potom je  $\tau$  uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

3.  $\Rightarrow$  1. Volme  $z_0 \in G$  pevně. Pro každé  $z \in G$  najdeme lomenou čáru  $\varphi_z$  v  $G$ , která začíná v  $z_0$  a končí v  $z$ . Definujeme  $F(z) := \int_{\varphi_z} f$ ,  $z \in G$ . Definice  $F$  je korektní, nezávislá na volbě  $\varphi_z$ , protože předpokládáme 3. Ukážeme, že  $F$  je hledaná PF k  $f$  na  $G$ . Necht  $z_1 \in G$ . Dokážeme, že  $F'(z_1) = f(z_1)$ . Volme  $r > 0$ , aby  $U(z_1, r) \subset G$ . Je-li  $|h| < r$ , potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \stackrel{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dot{+} u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde  $u = [z_1; z_1 + h]$  je úsečka, tzn.  $u(t) = z_1 + t.h$ ,  $t \in [0, 1]$ . Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h dt,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt.$$

To se blíží k nule pro  $h \rightarrow 0$ , protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \right| \leq \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ze spojitosti  $f$  v  $z_1$ . Máme, že  $F'(z_1) = f(z_1)$ . □

**Značení 5.22.**

1. Řekneme, že  $M \subset \mathbb{C}$  je *hvězdovitá*, pokud existuje  $z_0 \in M$  (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který  $[z_0; z] \subset M$  pro každé  $z \in M$ .

**Poznámka.** Konvexní  $\subsetneq$  hvězdovitá.

2. Řekneme, že  $\Delta \subset \mathbb{C}$  je *trojúhelník* s vrcholy  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

(konvexní obal  $a, b, c$ ) a značíme  $\partial\Delta := [a; b] \dot{+} [b; c] \dot{+} [c; a]$ . Připouštíme i degenerované  $\Delta$ , tzn.  $a, b, c$  mohou ležet na jedné přímce nebo body  $a, b, c$  mohou splývat...

**Dodatek 5.23.** Necht  $f$  je spojitá funkce na hvězdovité oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ . Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad (2)$$

pro každý trojúhelník  $\Delta \subset G$ , potom  $f$  má na  $G$  primitivní funkci.

*Důkaz.* Necht  $z_0$  je střed hvězdovitosti  $G$ , Pro každé  $z \in G$  položíme  $\varphi_z := [z_0; z]$  a  $F(z) := \int_{\varphi_z} f$ . Rozmyslíme si, že důkaz  $\boxed{F' = f \text{ na } G}$  je zcela analogický  $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$  předchozí věty, když místo  $\textcircled{3}$  uvažujeme  $\textcircled{2}$ .  $\square$

**Poznámka 5.24.** Cauchyho věta – Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f \in \mathcal{H}(G)$  a  $\varphi$  je uzavřená křivka v  $G$ . Potom Cauchyho věty nám říkají za jakých podmínek na  $G$  a  $\varphi$  je  $\int_{\varphi} f = 0$ .

**Věta 5.25 (Goursatovo lemma – „Cauchyho věta pro  $\Delta$ “).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f \in \mathcal{H}(G)$  a  $\Delta$  je trojúhelník v  $G$ . Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0. \quad (3)$$

*Důkaz.* Označme  $\varphi_0 := \partial\Delta$ . Sporem: Předpokládejme, že  $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$ . Zřejmě  $\Delta$  je ne-degenerovaný. V  $\Delta$  vedme střední příčky a označme  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  obvody čtyř vzniklých trojúhelníků ( $\psi_4$  je obvod vnitřního trojúhelníka). Obvody vnitřních trojúhelníků  $\psi_1$  (vlevo dole),  $\psi_2$  (vpravo dole),  $\psi_3$  (nahore) a  $\psi_4$  (uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom  $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$ . Ex.  $j_1 = 1, \dots, 4$  tak, že  $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$  a  $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$ . Označme  $\varphi_1 = \psi_{j_1}$ . Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků, tž  $\Delta\psi_{j_1}$  zase rozdělíme na 4 menší  $\Delta$ -y středními příčkami a proces opakujeme. Pak  $\Delta_0 := \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$  s obvody  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  takové, že

$$\left| \int_{\varphi_j} f \right| \geq \frac{K}{4^j} \quad \text{a} \quad V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j} \quad (a)$$

. Máme, že  $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$ , protože  $\text{diam}(\Delta_j) \rightarrow 0$ . Položíme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), & z \in G \setminus \{z_0\}; \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Potom  $\varepsilon$  je spojitá na  $G$  a máme pro  $j \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\varphi_j} f(z) dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) dz, \quad (b)$$

kde první integrand vpravo má PF na  $\mathbb{C}$  a první integrál je roven 0. Pro každé  $j \in \mathbb{N}_0$  z (a), (b) dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leq \left| \int_{\varphi_j} f \right| \stackrel{(b)}{=} \left| \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) \right| \leq V^2(\varphi_j) \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon| \stackrel{(a)}{=} \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že  $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$ . Z předchozího tedy máme (po vynásobení  $4^j$ ):  $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon| \rightarrow 0$ , protože  $\varepsilon$  je spojitá v  $z_0$  a  $\varepsilon(z_0) = 0$ . Což je spor.  $\square$

**Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti).** *Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je hvězdovitá oblast a  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Potom  $f$  má na  $G$  primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že  $\int_{\varphi} f = 0$  pro každou uzavřenou křivku  $\varphi$  v  $G$ .*

*Důkaz.* Z Goursatova lemmatu a dodatku k větě o existenci primitivní funkce (Dodatek 5.23).  $\square$

**Poznámka 5.27.** Goursatovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci  $f$ , která je spojitá na  $G$  a holomorfní na  $G \setminus \{z_0\}$  pro nějaké  $z_0 \in G$ .

*Důkaz.* Nechť  $\Delta$  je nedegenerovaný trojúhelník v  $G$ . Rozlišujeme případy:

1. Nechť  $z_0 \notin \Delta$ . Potom  $\int_{\partial\Delta} f = 0$  dle Goursatova lemmatu.
2. Nechť  $z_0$  je vrchol  $\Delta$ . Nechť  $\Delta_\varepsilon$  je trojúhelník podobný s  $\Delta$ ,  $\Delta_\varepsilon \subset \Delta$  a  $z_0$  je jeho vrcholem. Nechť poměr stran  $\Delta$  ku  $\Delta_\varepsilon$  je roven  $\varepsilon$ .  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením  $\Delta$  na tři trojúhelníky  $(\Delta_\varepsilon, \Delta', \Delta'')$ . Obvody vzniklých vnitřních trojúhelníků procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom  $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f + \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$ , kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž  $|\int_{\partial\Delta} f| = |\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\Delta) \cdot \max_{\Delta} |f| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$ . Tedy  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .
3. Nechť  $z_0$  leží uvnitř strany  $\Delta$ . Potom  $\Delta$  rozřízneme na dva menší trojúhelníky  $\Delta'$  a  $\Delta''$  se společným vrcholem v  $z_0$ . Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom  $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$ , kde oba integrály na pravé straně jsou rovny 0 podle bodu 2. Tudíž  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .
4. Nechť  $z_0$  leží uvnitř  $\Delta$ . Potom  $\Delta$  rozřízneme na tři menší trojúhelníky  $\Delta'$  a  $\Delta''$ ,  $\Delta'''$  se společným vrcholem v  $z_0$ . Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom  $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f + \int_{\partial\Delta'''} f$ , kde jsou všechny tři integrály na pravé straně rovny 0 podle bodu 2. Tudíž  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .

$\square$

**Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru).** *Nechť  $\varphi$  je křivka v  $\mathbb{C}$  a  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená. Nechť  $F(z, s)$  a komplexní derivace  $\frac{\partial F}{\partial s}(z, s)$  jsou spojitě komplexní funkce na  $\langle \varphi \rangle \times \Omega$ . Pro každé  $s \in \Omega$  položíme  $\phi(s) := \int_{\varphi} F(z, s) dz$ . Potom  $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$  a  $\phi'(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s}(z, s) dz$ ,  $s \in \Omega$ .*

*Důkaz.* Pro  $s = s_1 + is_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$  máme  $\phi(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), (s_1, s_2)) \varphi'(t) dt$ , pokud  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ . Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na reálných parametrech máme  $\frac{\partial \phi}{\partial s_j}(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s) dz$ , pro  $s \in \Omega$  a  $j = 1, 2$ . Navíc jsou tyto parciální derivace spojitě a splňují (CR)-podmínky. To je vidět z toho, že  $\frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s)$ ,  $j = 1, 2$  jsou spojitě a splňují (CR)-podmínky. Z (CR) dostaneme, že funkce  $\phi$  je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. Odtud plyne věta.  $\square$

**Definice 5.29.** Nechť je  $\varphi$  uzavřená křivka v  $\mathbb{C}$  a  $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ . Potom číslo

$$\text{ind}_{\varphi} s := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - s}$$

nazveme *indexem bodu  $s$  vzhledem ke křivce  $\varphi$*

**Poznámka 5.30.** Ukážeme si, že  $\text{ind}_{\varphi} s$  se rovná počtu oběhů  $\varphi$  kolem  $s$  v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

**Věta 5.31 (o základních vlastnostech indexu).** *Nechť  $\varphi$  je uzavřená křivka v  $\mathbb{C}$  a  $G := \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ . Potom je  $G$  otevřená, funkce  $s \mapsto \text{ind}_{\varphi} s$  je konstantní na každé komponentě  $G$  a na jediné její neomezené komponentě je nulová.*

*Důkaz.* (i) Podle předchozí věty je  $\phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}$ ,  $s \in G$  holomorfní a pro každé  $s \in G$  je  $\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$ , protože  $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$  má PF na  $\mathbb{C} \setminus \{s\}$ . Tedy  $\phi$  je konstantní na každé komponentě  $G$ .

(ii) Volíme  $R > 0$ , aby  $\langle \varphi \rangle \subset U(0, R)$ . Potom  $\mathbb{C} \setminus U(0, R)$  je obsaženo v jediné neomezené komponentě  $G_0$  množiny  $G$ . Navíc pro  $s \in \mathbb{C} \setminus U(0, R)$  je funkce  $g(z) := \frac{1}{z-s}$ ,  $z \in U(0, R)$  holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je  $\phi(s) = 0$

□

**Příklad 5.32.** Necht  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  a  $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Potom

$$\text{ind}_{\varphi} s = \begin{cases} 0 & \text{pro } |s - z_0| < r, \\ 1 & \text{pro } |s - z_0| > r. \end{cases}$$

Spočetli jsme, že  $\text{ind}_{\varphi} z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-z_0} = 1$ . Zbytek plyne z předchozí věty.

**Věta 5.33 (Cauchyův vzorec pro kruh).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Necht  $\overline{U(z_0, r)} \subset G$  a  $\varphi(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (\*). Potom platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = \begin{cases} f(s), & |s - z_0| < r \\ 0, & |s - z_0| > r \end{cases} \quad (CV_z)$$

*Důkaz.* Existuje  $R > r$  tak, že  $U(z_0, R) \subset G$ .

(i) Necht  $|s - z_0| < r$ . Definujme

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z \neq s \text{ a } z \in G \\ f'(s), & z = s. \end{cases}$$

Potom  $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R) \setminus \{s\})$  a spojitá na hvězdovité oblasti  $U(z_0, R)$ . Potom z Cauchyho věty

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz - f(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}}_{=\text{ind}_{\varphi} s = 1}$$

(ii) Necht  $|s - z_0| > r$ . Volme  $R' \in (r, |s - z_0|)$ , aby  $U(z_0, R') \subset G$ . Potom  $f(z)/(z-s)$  je holomorfní funkce na  $U(z_0, R')$  a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = 0.$$

□

**Důsledek 5.34.** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Potom  $f$  má komplexní derivaci všech řádů všude na  $G$ . Necht  $\overline{U(z_0, r)} \subset G$  a  $\varphi$  je jako v (\*). Potom

$$f^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz, \quad |s - z_0| < r \text{ a } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (CV_z^{(k)})$$

Zde  $f^{(0)} = f$  a  $k$ -tá komplexní derivace  $f^{(k)}$  je definovaná jako  $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ , má-li pravá strana smysl.

*Důkaz.* Z věty o derivaci integrálu dle komplexního parametru a  $(CV_z)$ , protože

$$\frac{d^k}{ds^k} \left( \frac{1}{z-s} \right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

□



**Věta 5.35 (Morera).** *Nechť  $f$  je spojitá funkce na otevřené  $G \subset \mathbb{C}$ . Potom  $f \in \mathcal{H}(G)$ , právě když*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0 \quad \text{pro každý trojúhelník } \Delta \subset G. \quad (4)$$

*Důkaz.* " $\Rightarrow$ ": Goursatovo lemma

" $\Leftarrow$ ": Nechť  $\mathcal{U} := U(z_0, R)$  je libovolný kruh v  $G$ . Protože  $f$  je spojitá na  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}$  je hvězdovitá oblast a

$$\int_{\partial\Delta} f = 0$$

pro každý trojúhelník  $\Delta \subset \mathcal{U}$ , má  $f$  na  $\mathcal{U}$  primitivní funkci  $F$ , to znamená, že  $f = F'$  na  $\mathcal{U}$ . Protože  $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ , máme  $f' = F''$  na  $\mathcal{U}$ , tudíž  $f$  je holomorfní na  $\mathcal{U}$ . Protože  $\mathcal{U}$  byl libovolný kruh v  $G$ , je  $f \in \mathcal{H}(G)$ .  $\square$

**Věta 5.36 (Cauchyho odhady).** *Nechť  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r \in (0, +\infty)$  a  $f$  je holomorní funkce na otevřené množině obsahující  $\overline{U(z_0, r)}$ . Potom pro každé  $k = 0, 1, 2, \dots$  je*

$$\forall s \in \mathcal{U} := U(z_0, r) : \quad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{r \cdot k!}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|, \quad (CO_1)$$

kde  $d(s) := \text{dist}(s, \partial\mathcal{U}) \stackrel{\text{def.}}{=} \min_{z \in \partial\mathcal{U}} |s - z|$

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right) : \quad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|. \quad (CO_2)$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|. \quad (CO_3)$$

*Důkaz.*  $(CO_1)$  dostaneme z  $(CV_z^{(k)})$ , protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|$$

a  $|z-s| \geq d(s)$ ,  $z \in \partial\mathcal{U} = \langle \varphi \rangle$ , zde  $\varphi(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$(CO_2)$  plyne z  $(CO_1)$ , protože  $d(s) \geq \frac{r}{2} \quad \forall s \in U(z_0, r/2)$ .

$(CO_3)$  plyne z  $(CO_1)$ , protože  $d(z_0) = r$ .  $\square$

**Věta 5.37 (Liouville).** *Je-li  $f$  holomorfní a omezená na  $\mathbb{C}$ , potom je  $f$  konstantní.*

*Důkaz.* Ukážeme, že  $f' = 0$  na  $\mathbb{C}$ . Označme  $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$ . Nechť  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Z  $(CO_3)$  dostaneme pro každé  $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{\partial U(z_0, r)} |f| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

tudíž  $f'(z_0) = 0$ .  $\square$

**Důsledek 5.38 (Základní věta algebry).** *V  $\mathbb{C}$  má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň jeden kořen.*

*Důkaz.* Nechť  $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ , kde  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$  a  $n \geq 1$ .

Sporem: Předpokládejme, že  $p \neq 0$  na  $\mathbb{C}$ . Položme  $f := 1/p$ . Potom  $f$  je holomorfní a omezená na  $\mathbb{C}$ , tudíž dle Liouvilleovy věty je  $f$  i  $p$  konstantní. Tedy  $p' = 0$  a  $0 = p^{(n)} = n!a_0$ , což je spor. Omezenost  $f$ : Máme

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^n \cdot (a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n})} \right| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \dots - \frac{|a_n|}{r^n}} \rightarrow 0$$

pro  $r = |z| \rightarrow +\infty$ .

Existuje  $r_0 \in (0, +\infty)$  tak, že  $|f(z)| \leq 1$ , je-li  $|z| > r_0$ . Funkce  $f$  je omezená na  $\overline{U(0, r_0)}$ , protože je tam spojitá.  $\square$

**Lemma 5.39.** *Nechť  $\varphi$  je křivka v  $\mathbb{C}$ ,  $f_n$  jsou spojité funkce na  $\langle \varphi \rangle$  pro  $n = 1, 2, 3, \dots$  a  $f_n \rightrightarrows f$  na  $\langle \varphi \rangle$ . Potom  $f$  je spojitá na  $\langle \varphi \rangle$  a*

$$\int_{\varphi} f_n \rightarrow \int_{\varphi} f.$$

*Důkaz.* Máme

$$0 \leq \left| \int_{\varphi} f_n - \int_{\varphi} f \right| = \left| \int_{\varphi} (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi \rangle} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\square$

**Věta 5.40 (Weierstrass).** *Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f_n \in \mathcal{H}(G)$  pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $f_n \xrightarrow{loc} f$  na  $G$ . Potom  $f \in \mathcal{H}(G)$  a  $f_n^{(k)} \xrightarrow{loc} f^{(k)}$  na  $G$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Důkaz.* ① Zřejmě je  $f$  spojitá. Nechť  $\Delta$  je trojúhelník v  $G$ . Potom

$$0 = \int_{\partial \Delta} f_n \xrightarrow{\text{Lemma}} \int_{\partial \Delta} f = 0$$

Z Morerovy věty je  $f \in \mathcal{H}(G)$ .

② Nechť  $k \in \mathbb{N}$  a  $z_0 \in G$ . Volme  $r > 0$ , aby  $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ . Potom z (CO<sub>2</sub>) máme:

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \quad |f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| = |(f_n - f)^{(k)}(s)| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\square$

## 6 Mocninné řady

**Definice 6.1.** Nechť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  a  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

je mocninná řada o středu  $z_0$  s koeficienty  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

**Vlastnosti 6.2.**

① **Konvergence** (na cvičení)

Existuje jediné  $R \in [0, +\infty]$  takové, že

- řada (1) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na  $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ ,
- řada (1) diverguje pro  $|z - z_0| > R$ .

Číslo  $R$  se nazývá poloměr konvergence (1) a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde položíme  $\frac{1}{0} = +\infty$ ,  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

② Označíme-li součet (1) na  $U(z_0, R)$  jako  $f$ , potom je  $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$  a

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall z \in U(z_0, R) : \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) (z-z_0)^{n-k},$$

speciálně  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ .

**Poznámka 6.3.** Mocninnou řadu derivujeme "člen po členu", můžeme na  $U(z_0, r)$  zaměnit sumu a komplexní derivaci.

*Důkaz.* Užijeme Weierstrassovu větu na

$$S_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n (z-z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R)$$

Dosadíme-li do (1)  $z = z_0$ , máme  $f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!$  □

**Věta 6.4 (O rozvoji holomorfní funkce na kruhu do mocninné řady).** *Nechť  $R \in (0, +\infty]$  a  $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ . Potom existuje jediná mocninná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ , která má na  $U(z_0, R)$  součet  $f$ . Navíc platí, že  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

*Důkaz.* 1. jednoznačnost: Zřejmě z toho, že  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

2. existence: Nechť  $z \in U(z_0, R)$ . Volme  $r > 0$ , aby  $|z-z_0| < r < R$ . Potom z  $(CV_z)$  je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw, \tag{a}$$

kde  $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Pro každé  $w \in \langle \varphi \rangle$  máme

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}. \tag{b}$$

Kde  $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| < 1$  a suma konverguje stejnoměrně pro  $w \in \langle \varphi \rangle$ . Dosadíme (a) do (b). Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{aligned}$$

z  $(CV_z^{(k)})$ . □

**Příklad 6.5.**  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , protože  $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  a  $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ .

**Věta 6.6 (O nulovém bodě).** *Nechť  $f$  je holomorfní funkce na okolí  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $f(z_0) = 0$ . Potom buď*

1. *existuje  $r > 0$ , že  $f = 0$  na  $U(z_0, r)$ , nebo*
2. *existuje  $r > 0$ , že  $f \neq 0$  na  $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ .*

*V případě 2. existuje jediné  $p \in \mathbb{N}$  takové, že*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0. \quad (2)$$

*Číslo  $p$  nazýváme násobnost nulového bodu  $z_0$  funkce  $f$ .*

**Poznámka 6.7.** Navíc  $z_0$  je nulový bod  $f$  násobnosti  $p$ , právě když existuje  $r > 0$  a  $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$  tak, že  $\forall z \in U(z_0, r)$ :

$$g(z) \neq 0 \quad \text{a} \quad f(z) = (z - z_0)^p g(z). \quad (3)$$

*Důkaz.* Máme, že  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ,  $z \in U(z_0, r)$ . Pokud nenastane 1., potom existuje  $n \in \mathbb{N}$ , že  $0 \neq a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ . Zvolme nejmenší  $p \in \mathbb{N}$ , aby  $a_p \neq 0$ . Potom platí (2) a

$$\forall z \in U(z_0, r) : f(z) = a_p (z - z_0)^p + \dots = (z - z_0)^p \cdot \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-p}}_{:= g(z)}. \quad (4)$$

Dále  $g(z)$  definujeme jako poslední sumu. Protože  $g(z_0) = a_p \neq 0$ , existuje  $r > 0$ , že  $g \neq 0$  na  $U(z_0, r)$  a  $f(z) = (z - z_0)^p g(z) \neq 0$  na  $P(z_0, r)$ . Obrácené tvrzení z poznámky je snadné.  $\square$

**Věta 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce).** *Nechť  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f, g \in \mathcal{H}(G)$ . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1.  *$f = g$  na  $G$ ;*
2. *množina  $M := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$  má v  $G$  hromadný bod, tj. existuje  $z_0 \in G$  takový, že  $\forall r > 0 : M \cap P(z_0, r) \neq \emptyset$*
3. *existuje  $z_0 \in G$ , že  $\forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ .*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti  $g \equiv 0$  na  $G$  (jinak uvažme  $f - g$ ).

1  $\Rightarrow$  2: triviální, 2  $\Rightarrow$  3: Nechť  $z_0 \in G$  je hromadný bod  $M := \{z \in G : f(z) = 0\}$ . Z věty o nulovém bodě je  $f = 0$  na nějakém okolí  $z_0$ , tudíž platí 3.

3  $\Rightarrow$  1: Nechť  $N := \{z \in G : \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z) = 0\}$ . Potom  $\emptyset \neq N$ ,  $N$  je uzavřená v  $G$ , protože všechny  $f^{(k)}$  jsou spojitě. Navíc  $N$  je otevřená. Nechť  $z_1 \in N$ . Podle věty o nulovém bodě existuje  $r > 0$ , že  $f = 0$  na  $U(z_1, r)$ . Tedy  $U(z_1, r) \subset N$ . Protože  $G$  je oblast, dostaneme  $N = G$  a speciálně 1.  $\square$

**Příklad 6.9.** Vzoreček  $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  dostaneme z věty o jednoznačnosti, protože obě strany rovnosti jsou celé funkce a víme, že rovnost platí na  $\mathbb{R}$  (tzn. platí 2).

**Poznámka 6.10.** Podobně lze řadu vzorečků bez počítání zobecnit z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{C}$ !

**Věta 6.11 (Princip maxima modulu).** *Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Potom je  $f$  konstantní na  $G$ , pokud  $|f|$  nabývá na  $G$  lokální maximum, tzn. existuje  $z_0 \in G$  a  $r > 0$  tak, že*

$$\forall z \in U(z_0, r) \subset G : |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (5)$$

*Důkaz.* Necht platí (5). Potom  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ,  $z \in U(z_0, r)$ . Pro  $0 < \rho < r$  platí, že

$$\begin{aligned} |a_0|^2 &= |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{int} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \rho^m e^{-imt} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{a_m} \rho^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}, \end{aligned} \quad (6)$$

neboť

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m, \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases}$$

Nebo-li  $|a_0|^2 \geq |a_0|^2 + |a_1|^2 \rho^2 + \dots$ , tudíž  $0 = a_1 = a_2 = \dots$ . Dostáváme, že  $f = a_0$  na  $U(z_0, r)$  a z věty o jednoznačnosti  $f = a_0$  na  $G$ .  $\square$

## 7 Riemannova sféra

Rozšíříme  $\mathbb{C}$  o *nekonečno*. Položíme  $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , kde  $\infty \notin \mathbb{C}$ , a pro  $\varepsilon > 0$  zavedeme *okolí* kolem  $\infty$  následovně  $P(\infty, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ ,  $U(\infty, \varepsilon) := P(\infty, \varepsilon) \cup \{\infty\}$ .

**Definice 7.1.** Řekneme, že  $z_n \rightarrow z_0$  v  $\mathbb{S}$ , pokud  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : z_n \in U(z_0, \varepsilon)$ .

**Poznámka 7.2.** Z definice plyne:

- $z_n \rightarrow z_0$  v  $\mathbb{S}$  a  $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z_n \rightarrow z_0$  v  $\mathbb{C}$ .
- $z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$ . Zde  $\frac{1}{\infty} := 0$  a  $|\infty| := +\infty$ .

**Poznámka 7.3.**  $\mathbb{S}$  je jednobodová kompaktifikace topologického prostoru  $\mathbb{C}$ .

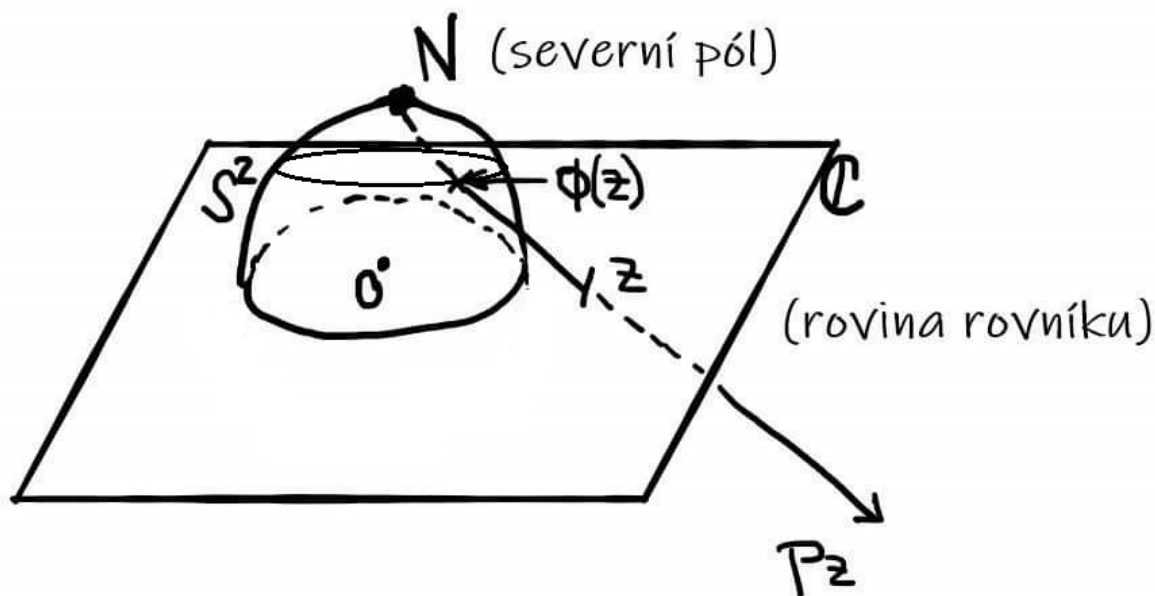
### Vlastnosti 7.4.

Na  $\mathbb{S}$  zavedeme metriku  $\varrho$  (není jediná), tž.

$$(z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \text{ v } \mathbb{S}) \Leftrightarrow \varrho(z_n, z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (*)$$

Navíc  $(\mathbb{S}, \varrho)$  bude *izometrický* s jednotkovou sférou  $S^2 := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$ , kterou chápeme jako metrický podprostor  $\mathbb{R}^3$ . Speciálně  $(\mathbb{S}, \varrho)$  je *kompaktní*.

- Definujeme *stereografickou projekci*  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$  jako na obrázku, kde  $N = (0, 0, 1)$ .



Položme  $\phi(\infty) := N$ . Pro  $z \in \mathbb{C}$  je  $\{\phi(z)\} = (S \setminus \{N\}) \cap p_z$ , kde  $p_z$  je polopřímka z  $N$  procházející bodem  $z \in \mathbb{C}$ . Potom  $\phi : \mathbb{S} \xrightarrow{na} S^2$  je bijekce.

### Cvičení 7.5.

- $\phi(z) := \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .
- $\phi^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) := \left( \frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma} \right)$ , pro  $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$
- Položme  $\varrho(z, w) := |\phi(z) - \phi(w)|$ ,  $z, w \in \mathbb{S}$ , kde  $|\cdot|_S$  je eukleidovská norma v  $\mathbb{R}^3$ . Potom  $\phi$  je izometrie  $(\mathbb{S}, \varrho)$  na  $S^2$ .
- Platí (\*). Skutečně, z předchozího bodu a z cvičení máme:  $\varrho(z_n, z_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi(z_n) \rightarrow \phi(z_0) \Leftrightarrow z_n \rightarrow z_0$  v  $\mathbb{S}$ , protože  $\phi$  i  $\phi^{-1}$  jsou spojité.
- Nechť  $z_n \in \mathbb{C}$  a  $z_n \rightarrow \infty$ . Potom  $|z_n| \rightarrow +\infty$ ,  $\phi(z_n) \in S^2$ , proto  $\phi_3(z_n) \rightarrow 1$ . Odtud  $\phi(z_n) \rightarrow N := (0, 0, 1)$
- Nechť  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in S^2 \setminus \{N\}$  a  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N$ . Potom  $|\phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)|^2 = \frac{1-\gamma_n^2}{(1-\gamma_n)^2} = \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \rightarrow +\infty$ . Tudíž  $\phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \rightarrow \infty$ .

**Definice 7.6.** Nechť  $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  a  $z_0, L \in \mathbb{S}$ . Potom  $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , pokud pro každou  $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{S}$ ,  $z_0 \neq z_n$  platí  $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow L$ .

**Poznámka 7.7.** Platí:

1.  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(1/z)$ , má-li alespoň jedna strana smysl.
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 0$ .

**Věta 7.8 (Aritmetika limit v  $\mathbb{S}$ ).** Platí:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl, pokud definujeme  $\forall a \in \mathbb{C} : a/\infty = 0, \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\} : a/0 = \infty, \forall a \in \mathbb{C} : a \pm \infty = \infty, \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\} : a \cdot \infty = \infty$ .

Nedefinujeme:  $0/0, \infty/\infty, \infty \pm \infty, 0 \cdot \infty$ .

**Příklad 7.9.** Racionální funkce lze chápat jako spojité funkce z  $\mathbb{S}$  do  $\mathbb{S}$ . Skutečně, nechť  $R = P/Q$ , kde  $P, Q$  jsou polynomy,  $Q \neq 0$  a  $P, Q$  nemají stejné kořeny.

1. Nechť  $Q(z_0) = 0$ . Potom  $P(z_0) \neq 0$  a  $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = \infty$ . Položme  $R(z_0) := \infty$ .
2. Pokud  $R \not\equiv 0$ , potom

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_0 z^n + \dots + a_n}^{\neq 0}}{\underbrace{b_0 z^m + \dots + b_m}_{\neq 0}} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} \left( \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_m}{z^m}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{pro } n = m, \\ \infty & \text{pro } n > m. \end{cases}$$

Položme  $R(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} R(z)$ .

## 7.1 Izolované singularity

**Definice 7.10.** Necht  $f$  je holomorfní funkce na  $P(z_0)$ , ale není holomorfní na  $U(z_0)$ . Potom  $f$  má v  $z_0$

1. *odstranitelnou singularity*, existuje-li  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ ,
2. *pól*, je-li  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ,
3. *podstatnou singularity*, pokud  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  neexistuje.

**Příklad 7.11.**

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &\text{ má v } 0 \text{ odstranitelnou singularity,} \\ \frac{1}{z^{10}} &\text{ má v } 0 \text{ pól,} \\ e^{1/z} &\text{ má v } 0 \text{ podstatnou singularity.} \end{aligned}$$

**Věta 7.12 (O odstranitelné singularitě).** Necht  $f$  je holomorfní funkce na  $P(z_0)$ . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $z_0$  je odstranitelná singulárta  $f$ ,
2. existuje  $r > 0$  tak, že  $f$  je omezená na  $P(z_0, r)$ ,
3. existuje  $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$  tak, že  $F = f$  na  $P(z_0)$ .

**Úmluva 7.13.** Odstranitelná singulárta je vždy odstraněna ve smyslu (3). Dodefinujeme  $f$  v  $z_0$  holomorfně.

*Důkaz.* (1)  $\Rightarrow$  (2): triviální, (2)  $\Rightarrow$  (3): Položme

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{pro } z \in P(z_0), \\ 0 & \text{pro } z = z_0. \end{cases}$$

Potom  $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$ , protože

$$g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{(z - z_0)}_{\rightarrow 0} \underbrace{f(z)}_{\text{omez.}} = 0.$$

Navíc pro každé  $z \in U(z_0)$  je

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 F(z),$$

kde

$$F(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}, \quad z \in U(z_0).$$

Zřejmě  $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$  a  $F = f$  na  $P(z_0)$ . (3)  $\Rightarrow$  (1): jasné. □

**Věta 7.14 (O pólu).** Necht  $f$  je holomorfní funkce na  $P(z_0)$ . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $z_0$  je pól  $f$ ,

2.  $h := \frac{1}{f}$  a  $h(z_0) := 0$  má v  $z_0$  nulový bod násobnosti  $p$  pro nějaké  $p \in \mathbb{N}$ ,

3. existuje  $p \in \mathbb{N}$  tak, že

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

4. existuje  $p \in \mathbb{N}$  tak, že  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

Číslo  $p$  z  $\textcircled{2} - \textcircled{4}$  je určeno jednoznačně a nazývá se násobnost pólu  $z_0$  funkce  $f$ .

**Poznámka 7.15.** Píšeme  $f(z) \sim g(z)$  pro  $z \rightarrow z_0$ , je-li  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Potom  $\textcircled{3} \iff f(z) \sim \frac{1}{(z - z_0)^p}$ , pro  $z \rightarrow z_0$ .

*Důkaz.*  $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$  Protože  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ , je  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ . Po odstranění odstranitelné singularity má  $1/f$  v  $z_0$  nulový bod konečné násobnosti  $p \in \mathbb{N}$ .

$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$  Existuje  $r > 0$  a  $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$  tak, že  $g \neq 0$  na  $U(z_0, r)$  a  $h(z) = (z - z_0)^p g(z)$ ,  $z \in U(z_0, r)$ . Potom

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p \underbrace{f(z)}_{= \frac{1}{h(z)}} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4}$  Máme

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k-p} \underbrace{(z - z_0)^p f(z)}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}} = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

$\textcircled{4} \Rightarrow \textcircled{1}$  Položíme  $k = 0$ . □

**Věta 7.16 (Casorati-Weierstrass).** Necht  $f$  je holomorfní funkce na  $P(z_0)$ . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $z_0$  je podstatná singularita  $f$ ,

2.  $\forall r > 0 : \overline{f(P(z_0, r))} = \mathbb{C}$ .

**Poznámka 7.17 (Velká Picardova věta).**  $\textcircled{1} \iff \textcircled{3}$

3.  $\forall r > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0, r))$  je nejvýše jednobodová [hluboká věta, důkaz nebude].

**Příklad 7.18.**  $\exp(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\exp(1/z)$  má v 0 podstatnou singularitu.

*Důkaz.*  $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}$  Jasně z definice limity.

$\neg \textcircled{2} \Rightarrow \neg \textcircled{1}$  Předpokládejme, že existuje  $r > 0$  tak, že  $\mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, r))} \neq \emptyset$  a  $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$ . Potom existuje  $U(u_0, \beta) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, r))}$ , speciálně máme, že  $0 < |z - z_0| < r \Rightarrow |f(z) - u_0| \geq \beta$ . Definujeme

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - u_0}, \quad z \in P(z_0, r). \quad (*)$$

Potom je  $g$  holomorfní a  $|g| \leq \frac{1}{\beta}$  na  $P(z_0, r)$ . Tedy  $z_0$  je odstranitelná singularita a existuje  $L := \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{C}$ . Potom máme

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \stackrel{(*)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( u_0 + \frac{1}{g(z)} \right) = \begin{cases} \infty & \text{pro } L = 0, \\ \in \mathbb{C} & \text{pro } L \neq 0. \end{cases}$$

Tedy  $f$  má v  $z_0$  buď odstranitelnou singularitu anebo pól. □



## 7.2 Laurentovy řady

**Definice 7.19.** Necht  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$  a  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Potom

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(L)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{(H)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(R)} \quad (1)$$

je *Laurentova řada* s koeficienty  $a_n$  a středem  $z_0$ . Řada  $(R)$  je *regulární část*  $(L)$  a řada  $(H)$  je *hlavní část*  $(L)$ . Řekneme, že  $(L)$  konverguje, pokud obě její části, tj.  $(H)$  i  $(R)$ , konvergují.

**Příklad 7.20.**

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

**Vlastnosti 7.21** (L).

① *Konvergence:* Existují *jediná*  $R, r \in [0, +\infty]$  tak, že

1. řada  $(R)$  konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na  $|z - z_0| < R$  a diverguje na  $|z - z_0| > R$ ,
2. řada  $(H)$  konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na  $|z - z_0| > r$  a diverguje na  $|z - z_0| < r$ .

② *Součet:* Necht  $0 \leq r < R \leq +\infty$  (toto ne vždy platí: může se stát, že řada nekonverguje). Položme *mezikruží*  $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ . Označíme-li součet  $(L)$  jako  $f$ , potom na  $P(z_0, r, R)$  je  $f$  holomorfní, řadu  $(L)$  tam derivujeme "člen po členu", atd.

**Poznámka 7.22.** Platí  $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$ .

*Důkaz.* ① Číslo  $R$  je poloměr konvergence mocninné řady  $(R)$ . Pro  $w = \frac{1}{z-z_0}$  je řada  $(H)$  rovna mocninné řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n. \quad (*)$$

Číslo  $\frac{1}{r}$  je poloměr konvergence  $(*)$ .

② Plyne opět z Weierstrassovy věty. □

Cíl Ukážeme, že  $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r, R))$ , právě když existuje *jediné*  $(L)$ , které má na  $P(z_0, r, R)$  součet  $f$ .

## 7.3 Holomorfní funkce na mezikruží

**Lemma 7.23.** Necht  $f$  je holomorfní funkce na  $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ , kde  $0 \leq r < R \leq +\infty$ . Pro každé  $\rho \in (r, R)$  označme

$$\varphi_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}, \text{ pro } t \in [0, 2\pi] \quad (\Delta)$$

a  $J(\rho) = \int_{\varphi_\rho} f$ . Potom je  $J$  konstantní na  $(r, R)$ .

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti necht  $z_0 = 0$ . Necht  $\rho \in (r, R)$ . Potom máme

$$J(\rho) = i \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} g(\rho e^{it}) dt,$$

kde  $g(z) := f(z) \cdot z$ ,  $z \in P := P(0, r, R)$ . Dále

$$J'(\rho) = \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it}) \rho e^{it} dt = \frac{1}{\rho} \int_{\varphi_\rho} g' = 0, \quad (\times)$$

protože  $g'$  má PF  $g$  na  $P$ . Platí  $(\times)$ , protože

$$\frac{d}{d\rho} \left( g(\rho e^{it}) \right) = \frac{dg}{dx} \cos t + \frac{dg}{dy} \sin t \stackrel{\text{CR v\u011bta}}{=} g' \cos t + i g' \sin t = g'(\rho e^{it}) e^{it}.$$

□

**V\u011bta 7.24 (Cauchyho vzorec na mezikru\u017b\u00ed).** *Nechť  $f \in \mathcal{H}(P)$ , kde  $P := P(z_0, r, R)$ . Nechť  $r < r_0 < R_0 < R$  a  $s \in P(z_0, r_0, R_0)$ . Potom plat\u00ed*

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)}{z-s} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)}{z-s} dz, \quad (\square)$$

kde  $\varphi_\rho$  je jako v  $(\Delta)$ .

*D\u00falaz.* Pro  $z \in P$  polo\u017eme

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s} & \text{pro } z \neq s, \\ f'(s) & \text{pro } z = s. \end{cases}$$

Potom  $h \in \mathcal{H}(P)$ , protože  $h$  m\u00e1 „odstran\u011bnou“ singularitu v  $s$ . Podle lemmatu m\u00e1me

$$\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) dz}{z-s} - f(s) \int_{\varphi_{R_0}} \frac{dz}{z-s}, \text{ kde posledn\u00ed integr\u00e1l je roven } 2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi_{R_0}} s = 2\pi i,$$

$$\int_{\varphi_{r_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z-s} - f(s) \int_{\varphi_{r_0}} \frac{dz}{z-s}, \text{ kde posledn\u00ed integr\u00e1l je roven } 2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi_{r_0}} s = 0.$$

D\u00e1le  $\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} h$ , tud\u00ed\u017e plat\u00ed  $(\square)$ . □

**V\u011bta 7.25 (O Laurentov\u011b rozvoji holomorfn\u00ed funkce na mezikru\u017b\u00ed).** *Nechť  $P := P(z_0, r, R)$ , kde  $0 \leq r < R \leq +\infty$ . Nechť  $f \in \mathcal{H}(P)$ . Potom existuje jedn\u00e1 Laurentova \u0159ada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (\text{L})$$

kter\u00e1 m\u00e1 na  $P$  sou\u010et  $f$ .

*D\u00falaz.* 1. jednozna\u010dnost: Nechť plat\u00ed  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ,  $z \in P$ . Je-li  $\rho \in (r, R)$  a  $m \in \mathbb{Z}$ , pak

$$\int_{\varphi_\rho} f(z) (z-z_0)^{-(m+1)} dz = \int_{\varphi_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\varphi_\rho} (z-z_0)^{n-m-1} dz =$$

$= 2\pi i \cdot a_m$ , kde v druhé rovnosti suma konverguje stejnom\u011brn\u011b na  $\langle \varphi_\rho \rangle$  a posledn\u00ed integr\u00e1l je roven 0 pro  $n \neq m$  a  $2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi_\rho} z_0 = 2\pi i$  pro  $n = m$ .

Z\u00e1v\u011br: koeficienty (L) se d\u00e1j\u00ed vyj\u00e1d\u0159it pomocí sou\u010tu  $f$  jako

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (**)$$

kde  $\varphi_\rho$  je jako v  $(\Delta)$ . Podle lemmatu integrandy nezávis\u00ed na  $\rho \in (r, R)$ .

2. existence: Necht  $s \in P$ . Volme  $r < r_0 < R_0 < R$ , aby  $s \in P(z_0, r_0, R_0)$ . Potom z Cauchyho vzorce máme

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z-s}, \quad (a)$$

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad (b)$$

neboť  $\left| \frac{s-z_0}{z-z_0} \right| < 1$ , tedy řada konverguje stejnoměrně pro  $z \in \langle \varphi_{R_0} \rangle$ ;

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{(-1)}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}, \quad (c)$$

neboť  $\left| \frac{z-z_0}{s-z_0} \right| < 1$ , tedy řada konverguje stejnoměrně pro  $z \in \langle \varphi_{r_0} \rangle$ . Dosadíme (b), (c) do (a) a dostaneme

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} f(z) dz \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^n \cdot a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^{-n-1} \cdot a_{-(n+1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

kde  $a_n$  jsou jako v (\*\*).

□

## 7.4 Izolované singularity 2

**Věta 7.26 (O Laurentově rozvoji kolem izolované singularity).** Necht  $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$

a  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ ,  $z \in P(z_0, r)$ . Potom

1.  $f$  má v  $z_0$  odstranitelnou singularitu  $\Leftrightarrow \forall n < 0: a_n = 0$ ;
2.  $f$  má v  $z_0$  pól násobnosti  $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-p} \neq 0$  a  $\forall n < -p: a_n = 0$ ;
3.  $f$  má v  $z_0$  podstatnou singularitu  $\Leftrightarrow a_n \neq 0$  pro nekonečně mnoho  $n < 0$ .

*Důkaz.*

1. jasné
2.  $f$  má v  $z_0$  pól násobnosti  $p$ , právě když  $g(z) := (z-z_0)^p f(z)$  má v  $z_0$  odstranitelnou singularitu a po jejím odstranění je  $g(z_0) \neq 0$ . Neboli  $(z-z_0)^p f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$ ,  $z \in P(z_0, r)$  a  $b_0 = g(z_0) \neq 0$ , tzn.

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-p}, \quad z \in P(z_0, r).$$

3. Z 1., 2. máme, že  $f$  nemá v  $z_0$  podstatnou singularitu, právě když  $a_n \neq 0$  pro konečně mnoho  $n < 0$ .

□

**Věta 7.27 (Rozklad holomorfní funkce s konečně mnoha izolovanými singularitami).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $M \subset G$  je konečná a  $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$ . Pro každé  $s \in M$  označme  $H_s$  součet hlavní části Laurentova rozvoje funkce  $f$  kolem  $s$ . Potom existuje jediná  $h \in \mathcal{H}(G)$  tak, že  $f = \sum_{s \in M} H_s + h$  na  $G \setminus M$ .

*Důkaz.* Zřejmě  $\forall s \in M : H_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\})$ . Funkce  $h := f - \sum_{s \in M} H_s$  je holomorfní na  $G \setminus M$  a v bodech  $s \in M$  má odstranitelné singularity. Skutečně, necht  $s_0 \in M$ . Potom existuje  $r_0 > 0$  tak, že  $P(s_0, r_0) \subset G \setminus M$  a  $f = R_{s_0} + H_{s_0}$  na  $P(s_0, r_0)$ , kde  $R_{s_0}$  je součet regulární části Laurentova rozvoje  $f$  kolem  $s_0$  a  $R_{s_0} \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0))$ . Tedy na  $P(s_0, r_0)$  máme

$$h = R_{s_0} + H_{s_0} - \sum_{s \in M} H_s = R_{s_0} - \sum_{\substack{s \neq s_0 \\ s \in M}} H_s \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0)).$$

□

## 7.5 Reziduum

**Definice 7.28.** Necht  $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$  a necht  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ,  $z \in P(z_0)$ . Potom reziduem  $f$  v  $z_0$  nazveme číslo  $\text{res}_{z_0} f := a_{-1}$ .

**Věta 7.29 (Reziduová na hvězdovitých oblastech).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je hvězdovitá oblast,  $M \subset G$  je konečná a  $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$ . Necht  $\varphi$  je uzavřená křivka v  $G \setminus M$ . Potom máme

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{s \in M} \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\varphi} s. \quad (\text{RV})$$

**Poznámka.** Pro  $M = \emptyset$  dostaneme Cauchyho větu.

*Důkaz.* Podle předchozí věty existuje  $h \in \mathcal{H}(G)$  tak, že  $f = \sum_{s \in M} H_s + h$  na  $G \setminus M$ . Potom máme  $\int_{\varphi} f = \sum_{s \in M} \int_{\varphi} H_s$ , protože  $\int_{\varphi} h = 0$  z Cauchyho věty pro hvězdovité oblasti. Pro každé  $s \in M$ :

$$\int_{\varphi} H_s(z) dz = \int_{\varphi} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \frac{1}{(z-s)^n} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^n} = 2\pi i \cdot \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\varphi} s,$$

jelikož suma konverguje stejnoměrně na  $\langle \varphi \rangle$  a poslední integrál je roven 0 pro  $n \neq 1$  (neboť jinak má integrand PF, a tudíž je integrál přes uzavřenou křivku nulový) a  $2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi} s$ , je-li  $n = 1$ . □

**Příklad 7.30.** Necht  $\varphi := \psi^+ + [-1; 1]$ , kde  $\psi^+(t) := e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Potom  $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle = G_0 \cup G_{\infty}$ , kde  $G_0$  je omezená komponenta ("vnitřek") a  $G_{\infty}$  je neomezená komponenta ("vnějšek"). Platí

$$\text{ind}_{\varphi} s = \begin{cases} 1, & s \in G_0 \\ 0, & s \in G_{\infty}. \end{cases}$$

Položme  $\tilde{\varphi} := \psi^- + [1; -1]$ , kde  $\psi^-(t) := e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, 0]$ . Potom pro  $|s| < 1$  máme

$$1 = \text{ind}_{\varphi + \tilde{\varphi}} s = \text{ind}_{\varphi} s + \text{ind}_{\tilde{\varphi}} s.$$

## 8 Speciální typy integrálů

**Věta 8.1.** *Nechť  $R = P/Q$ , kde  $P, Q$  jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí*

1.  $Q \neq 0$  na  $\mathbb{R}$ ,
2.  $st(Q) \geq st(P) + 2$ , kde  $st(Q)$  je stupeň polynomu  $Q$ .

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2i\pi \cdot \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \text{res}_s R. \quad (1)$$

*Důkaz.* Ukažte, že integrál v (1) konverguje, právě když platí 1., 2 (za cvičení). Nechť  $r > 0$  a  $\varphi_r := \varphi_r^1 + \varphi_r^2$ , kde  $\varphi_r^1(t) := t$ ,  $t \in [-r, r]$  a  $\varphi_r^2(t) := re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Je-li  $r > 0$  tak velké, aby uvnitř  $\varphi_r$  ležely všechny póly  $R$  z horní poloroviny, potom

$$2i\pi \cdot \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \text{res}_s R \stackrel{(RV)}{=} \int_{\varphi_r} R = \int_{\varphi_r^1} R + \int_{\varphi_r^2} R. \quad (2)$$

Máme

$$\int_{\varphi_r^1} R = \int_{-r}^r R \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R.$$

Protože  $\int_{\varphi_r^2} R \rightarrow 0$  pro  $r \rightarrow +\infty$ , dostaneme z (2) pro  $r \rightarrow \infty$ , že platí (1). Neboť existuje  $C > 0$ ,  $r_0 > 0$  tak, že  $|R(z)| \leq \frac{C}{r^2}$ , je-li  $|z| = r \geq r_0$ . Máme totiž

$$|R(z)| = \left| \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m} \right| = \frac{1}{|z|^2} |z|^{n-m+2} \cdot \underbrace{\left| \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z^m}} \right|}_{\xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{a_0}{b_0}}.$$

Tedy

$$\left| \int_{\varphi_r^2} R \right| \leq V(\varphi_r^2) \cdot \max_{\langle \varphi_r^2 \rangle} |R| \leq r\pi \frac{C}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

□

**Příklad 8.2.**

$$I = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{\text{sudá}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{:=R(x)} dx = i\pi \cdot (\text{res}_{z_0} R + \text{res}_{z_1} R)$$

$$= -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}} \left[ (1+i)^2 - (1-i)^2 \right] = -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}} 2 \cdot 2i = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

protože

$$\text{res}_{z_k} R = \frac{z_k^2+1}{4z_k^3} \cdot \frac{z_k}{z_k} = -\frac{1}{4}(z_k^2+1)z_k,$$

$$\text{res}_{z_0} R = -\frac{1}{4}(i+1)(1+i) \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)^2,$$

$$\text{res}_{z_1} R = -\frac{1}{4}(-i+1)(-1+i) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)^2.$$

**Věta 8.3.** *Nechť  $R = P/Q$ , kde  $P, Q$  jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí*

1.  $Q \neq 0$  na  $\mathbb{R}$ ,
2.  $st(Q) \geq st(P) + 1$ .

*Nechť  $a > 0$ . Potom*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax} dx = 2i\pi \cdot \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \text{res}_s \left( R(z)e^{iaz} \right). \quad (3)$$

*Důkaz.* Za cvičení:

- Dokažte, že Newtonův integrál v (3) konverguje právě když platí 1., 2.
- Jak se spočte tento integrál pro  $a < 0$ ?

Jako v předešlé větě integrujeme podél  $\varphi_r$  funkci  $R(z)e^{iaz}$  a pošleme  $r \rightarrow \infty$ . Platí, že

$$\int_{\varphi_r^2} R(z)e^{iaz} dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

z *Jordanova Lemmatu* (bylo na 5. cvičení), z 2. totiž máme, že  $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$ .  $\square$

**Poznámka 8.4.** Je-li  $a < 0$ , potom (4) obecně neplatí. V tomto případě je nutno integrovat přes dolní půlkružnici.

**Příklad 8.5.** Spočteme Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}$  funkce  $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$ , kde

$$(\mathcal{F}f)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Nechť  $t > 0$ . Potom  $(\mathcal{F}f)(t) = i \cdot \text{res}_i (f(z)e^{itz}) = i \cdot \frac{e^{-t}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2}$ .
- Nechť  $t < 0$ . Potom  $(\mathcal{F}f)(t) = i \cdot \text{res}_{(-i)} (f(z)e^{itz}) \cdot (-1) = -i \cdot \frac{e^{-t}}{2 \cdot (-i)} = \frac{e^t}{2}$ .

**Lépe:**

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) + i \sin(tx)}{1+x^2} dx = \frac{e^{-|t|}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 8.6.**

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Im} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2+1} dx \right)}_{:=I} = \frac{\pi}{2e},$$

protože

$$I = 2\pi i \text{res}_i f = 2\pi i \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{\pi i}{e}.$$

## 9 Index

**Poznámka 9.1.** Otázka: Jak  $\text{ind}_\varphi s$  vypočítat? BÚNO:  $s = 0$ .

**Značení 9.2 (Polární vyjádření).** Nechť  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  je spojitá. Víme, že  $0 \neq z = |z|e^{i\theta} = e^\phi$ , kde  $\theta \in \text{Arg}(z)$  a  $\phi = \log|z| + i\theta \in \text{Log}(z)$ . Potom pro každé  $t \in [\alpha, \beta]$  je  $0 \neq \varphi(t) = |\varphi(t)|e^{i\theta(t)} = e^{\phi(t)}$ , kde  $\theta(t) \in \text{Arg}(\varphi(t))$  a  $\phi(t) = \log|\varphi(t)| + i\theta(t) \in \text{Log}(\varphi(t))$ . Otázkou je, zda lze  $\theta$  a  $\Phi$  zvolit spojitě na  $[\alpha, \beta]$ .

**Definice 9.3.** Nechť  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  je spojitá. Řekneme, že  $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ) je *jednoznačná větev argumentu* (resp. *jednoznačná větev logaritmu*) křivky  $\varphi$ , pokud je  $\theta$  (resp.  $\phi$ ) spojitá na  $[\alpha, \beta]$  a  $\forall t \in [\alpha, \beta] : \theta(t) \in \text{Arg}(\varphi(t))$  (resp.  $\phi(t) \in \text{Log}(\varphi(t))$ ).

**Poznámka 9.4.** Vždy existuje jednoznačná větev argumentu a logaritmu pro spojitou křivku  $\varphi$  (cvičení). Dokážeme si to jen pro regulární křivky.

**Věta 9.5 (O jednoznačnosti jednoznačné větve argumentu a logaritmu).** Nechť  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  je spojitá křivka. Potom

- $\phi$  je jednoznačná větev logaritmu  $\varphi$ , právě když  $\text{Re}(\phi) = \log|\varphi|$  a  $\text{Im}(\phi)$  je jednoznačná větev argumentu  $\varphi$ .
- Jsou-li  $\theta_1, \theta_2$  jednoznačné větve argumentu  $\varphi$ , potom existuje  $k \in \mathbb{Z}$ , že  $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$ .

*Důkaz.*

- Z definice argumentu a logaritmu.
- Pro  $\forall t \in [\alpha, \beta]$  existuje  $k(t) \in \mathbb{Z}$ , že  $\theta_2(t) = \theta_1(t) + 2k(t)\pi$ . Protože  $k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{Z}$  je spojitá a  $[\alpha, \beta]$  je souvislá, je  $k$  konstantní na  $[\alpha, \beta]$ .

□

**Věta 9.6 (O existenci jednoznačné větve logaritmu pro regulární křivky).** Nechť  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  je regulární křivka. Potom existuje jednoznačná větev logaritmu  $\phi$  křivky  $\varphi$  a platí, že

$$\int_\varphi \frac{dz}{z} = \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Navíc  $\text{Im}(\phi)$  je jednoznačná větev argumentu  $\varphi$ .

*Důkaz.* Hledáme spojitě  $\phi$  takové, že  $\varphi = e^\phi$ . Zřejmě  $\int_\varphi \frac{dz}{z} = \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$ . Položme  $\phi_0(s) := \int_\alpha^s \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$ ,  $s \in [\alpha, \beta]$ . Potom  $\phi_0$  je spojitá na  $[\alpha, \beta]$  a  $\phi'_0 = \frac{\varphi'}{\varphi}$  na  $[\alpha, \beta] \setminus K$ , kde  $K$  je konečná. Potom na  $[\alpha, \beta] \setminus K$  je  $(\varphi e^{-\phi_0})' = (\varphi' - \varphi \phi'_0)e^{-\phi_0} = 0$ . Tedy existuje  $c \in \mathbb{C}$ , že  $\varphi e^{-\phi_0} = e^c$  na  $[\alpha, \beta]$ . Položme  $\phi := \phi_0 + c$ . □

**Věta 9.7 (O výpočtu indexu).** Nechť  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je uzavřená regulární křivka a  $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ . Nechť  $\tilde{\varphi} := \varphi - s$  a  $\theta$  je jednoznačná větev argumentu křivky  $\tilde{\varphi}$ . Potom

$$\text{ind}_\varphi s = \text{ind}_{\tilde{\varphi}} 0 = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}. \quad (\text{oVI})$$

Speciálně,  $\text{ind}_\varphi s \in \mathbb{Z}$ .

**Poznámka.**

- Je-li  $\varphi$  pouze spojitá, definujeme  $\text{ind}_\varphi s$  vztahem (oVI).

- Z (oVI) je jasné, že  $\text{ind}_\varphi s$  je počet otočení  $\varphi$  kolem  $s$  proti směru hodinových ručiček.

*Důkaz.* Máme, že

$$\begin{aligned}\text{ind}_\varphi s &\stackrel{z=\varphi(t)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-s} dt \stackrel{z=\varphi(t)-s}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\varphi}} \frac{dz}{z} = \text{ind}_{\tilde{\varphi}} 0 \stackrel{\text{Věta}}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\phi(\beta) - \phi(\alpha)) = \frac{1}{2\pi i} (i \text{Im} \phi(\beta) - i \text{Im} \phi(\alpha)) = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi} = K\end{aligned}$$

pro nějaké  $K \in \mathbb{Z}$ , kde  $\phi$  je jednoznačná větev logaritmu  $\tilde{\varphi}$ . Zřejmě  $\text{Re}(\phi(\beta)) = \log |\tilde{\varphi}(\beta)| = \log |\tilde{\varphi}(\alpha)| = \text{Re}(\phi(\alpha))$  a  $\text{Im}(\phi)$  je jednoznačná větev argumentu  $\tilde{\varphi}$ .  $\square$

## 10 Obecná Cauchyho věta a reziduová věta pro cykly

**Definice 10.1.** Konečnou posloupnost  $\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  jsou uzavřené (regulární) křivky v  $\mathbb{C}$ , budeme nazývat *cyklus*.

**Značení 10.2.** Necht  $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  je cyklus. Definujeme

- *graf*  $\Gamma$  jako

$$\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{k=1}^n \langle \varphi_k \rangle,$$

- *délku*  $\Gamma$  jako

$$V(\Gamma) := \sum_{k=1}^n V(\varphi_k),$$

- je-li  $f$  spojitá na  $\langle \Gamma \rangle$ , pak

$$\int_\Gamma f := \sum_{k=1}^n \int_{\varphi_k} f,$$

- *index*

$$\text{ind}_\Gamma(z_0) := \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\varphi_k}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0},$$

- *vnitřek*  $\Gamma$  jako  $\text{Int } \Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle : \text{ind}_\Gamma(z_0) \neq 0\}$ ,

- *vnějšek*  $\Gamma$  jako  $\text{Ext } \Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle : \text{ind}_\Gamma(z_0) = 0\}$ .

**Poznámka 10.3.** • Rozmyslete si, že podobně jako pro křivky, je zobrazení  $z \mapsto \text{ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$  konstantní na každé komponentě  $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$  a jediná neomezená komponenta  $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$  leží v  $\text{Ext } \Gamma$ .

- Zřejmě máme rozklad  $\mathbb{C} = \text{Int } \Gamma \cup \langle \Gamma \rangle \cup \text{Ext } \Gamma$ , kde  $\text{Int } \Gamma$ ,  $\text{Ext } \Gamma$  jsou otevřené a  $\langle \Gamma \rangle$ ,  $\text{Int } \Gamma \cup \langle \Gamma \rangle$  jsou kompaktní.

**Poznámka 10.4.** Uzavřenou křivku  $\varphi$  chápeme jako cyklus  $\Gamma := \{\varphi\}$ .

**Příklad 10.5.** Je-li  $\psi := \varphi \div \varphi$ ,  $\varphi(t) := e^{it}$ , pro  $t \in [0, 2\pi]$ . Potom  $\langle \psi \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $\text{Int } \psi = \emptyset$  a  $\text{Ext } \psi = \mathbb{C} \setminus \langle \psi \rangle$ .

**Věta 10.6 (Obecná Cauchyho pro cykly).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $\Gamma$  je cyklus v  $G$ , tedy  $\langle \Gamma \rangle \subset G$ . Potom platí, že

$$\forall f \in \mathcal{H}(G) : \int_\Gamma f = 0, \quad (\text{CV})$$

právě tehdy, když  $\text{Int } \Gamma \subset G$ .



**Příklad 10.7.** Necht  $f$  je holomorfní funkce na mezikruží  $P(z_0, r, R)$ , kde  $0 \leq r < R \leq \infty$ . Necht  $r < r_1 < r_2 < R$  a  $\varphi_j(t) := z_0 + r_j e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Potom víme, že  $\int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$ . Plyne to z předchozí věty pro  $\Gamma := \{\div \varphi_1, \varphi_2\}$ . Protože  $\text{Int } \Gamma = P(z_0, r_1, r_2)$ , máme  $0 = \int_{\Gamma} f = \int_{\varphi_1} f - \int_{\varphi_2} f$ .

**Věta 10.8 (Reziduová pro cykly).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $\Gamma$  je cyklus v  $G$  a  $\text{Int } \Gamma \subset G$ . Necht  $K \subset G \setminus \langle \Gamma \rangle$  je konečná a  $f \in \mathcal{H}(G \setminus K)$ . Potom platí

$$\int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{s \in K} \text{res}_s(f) \cdot \text{ind}_{\Gamma}(s). \quad (\text{RVC})$$

*Důkaz.* Zcela analogický jako pro (RV) na hvězdovitých oblastech.  $\square$

*Důkaz věty 10.6 (Obecná Cauchyho pro cykly).*

" $\implies$ ": Necht platí (CV). Je-li  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ , pak  $f(z) := \frac{1}{z-z_0} \in \mathcal{H}(G)$  a podle (CV) je  $\text{ind}_{\Gamma} z_0 = 0$ , neboli  $z_0 \in \text{Ext } \Gamma$ .

" $\impliedby$ ": Necht  $\text{Int } \Gamma \subset G$  a  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Nejdříve dokážeme, že

$$\forall \xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle : \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \xi} = f(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi, \quad (\text{CV}_z)$$

což je ekvivalentní s

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \xi} - f(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi. \quad (*)$$

Položme

$$g(z, \xi) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} & \text{pro } z \neq \xi, (z, \xi) \in G \times G, \\ f'(z) & \text{pro } z = \xi, (z, \xi) \in G \times G. \end{cases}$$

Potom

- (a)  $g$  je spojitá na  $G \times G$ . Jasně v bodech  $(z, \xi)$ ,  $z \neq \xi$ . Necht  $z_0 \in G$ . Dokážeme, že  $g$  je spojitá v  $(z_0, z_0)$ . Necht  $\varepsilon > 0$ . Protože  $f'$  je spojitá v  $z_0 \in G$ , existuje  $r > 0$  takové, že  $U(z_0, r) \subset G$  a

$$\forall z \in U(z_0, r) : |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon. \quad (\times)$$

Je-li  $z, \xi \in U(z_0, r)$  a  $z \neq \xi$ , potom pro úsečku  $\varphi(t) := \xi + t(z - \xi)$ ,  $t \in [0, 1]$  platí

$$f(z) - f(\xi) = \int_{\varphi} f' = \int_0^1 f'(\varphi(t)) \cdot (z - \xi) dt = (z - \xi) \cdot \int_0^1 f'(\varphi(t)) dt,$$

tudíž

$$|g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| = \left| \int_0^1 (f'(\varphi(t)) - f'(z_0)) dt \right| \stackrel{(\times)}{\leq} \varepsilon.$$

Pro  $z \in U(z_0, r)$  je

$$|g(z, z) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$$

z  $(\times)$ .

- (b)  $\forall z \in G : g(z, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$ . Jasně pro  $\xi \neq z$ . V  $\xi = z$  je ale odstranitelná singularita. Položme

$$h(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz, \quad \xi \in G.$$

Podle věty o derivování integrálu podle komplexního parametru platí, že  $h \in \mathcal{H}(G)$ . Je-li  $\xi \in G \cap \text{Ext } \Gamma$ , potom z  $(*)$  máme  $h(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz$ . Položme

$$h(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz, \quad \xi \in \text{Ext } \Gamma \setminus G_{\text{ot.}}$$

Potom  $h$  je holomorfní na  $G$  i na  $\text{Ext } \Gamma$ , tedy i na celém  $\mathbb{C} = G \cup \text{Ext } \Gamma$ . Ukážeme že  $h$  je omezená. Potom z věty 5.37 (Liouville) plyne, že  $h$  je konstantní. Skutečně, máme  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = 0$ . To plyne takto. Nechť  $\langle \Gamma \rangle \subset U(0, R)$ . Je-li  $|\xi| > R$ , potom

$$|h(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot V(\Gamma) \cdot \max_{\langle \Gamma \rangle} |f| \cdot \frac{1}{|\xi| - R} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0,$$

protože  $|z - \xi| \geq |\xi| - |z| \geq |\xi| - R$ . Tedy  $h = 0$  na  $\mathbb{C}$ , speciálně platí  $(CV_z)$ .

Dále zvolme  $\xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle$  a polořme

$$f_1(z) := (z - \xi)f(z), \quad z \in G.$$

Podle  $(CV_z)$  je

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{f_1(z) dz}{z - \xi} \stackrel{(CV_z)}{=} 2\pi i \cdot \underbrace{f_1(\xi)}_{=0} \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi = 0.$$

□

V důkazu potřebujeme lepší větu o derivování integrálu podle komplexního parametru.

**Věta 10.9 (O derivování integrálu podle komplexního parametru).** *Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $\Gamma$  je cyklus. Nechť  $g$  je spojitá funkce na  $\langle \Gamma \rangle \times G$  a  $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : g(z, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$ . Potom je funkce*

$$h(\xi) := \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz, \quad \xi \in G$$

*holomorfní na  $G$ .*

*Důkaz.* Zřejmě je  $h$  spojitá na  $G$ . Nechť  $\Delta$  je trojúhelník v  $G$ . Potom

$$\int_{\partial \Delta} h(\xi) d\xi = \int_{\partial \Delta} \left( \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz \right) d\xi \stackrel{Fubini}{=} \int_{\Gamma} \underbrace{\left( \int_{\partial \Delta} g(z, \xi) d\xi \right)}_{\substack{\text{Goursat} \\ = 0}} dz = 0.$$

Z Věty 5.35 (Morera) plyne, že  $h \in \mathcal{H}(G)$ . □

**Poznámka 10.10.** Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je hvězdovitá oblast. Potom platí

$$\text{pro každý cyklus } \Gamma \text{ v } G \text{ je } \text{Int } \Gamma \subset G. \quad (\text{JS})$$

*Důkaz.* Plyne z Věty 10.6 (Obecná Cauchyho pro cykly) a z 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). □

Otázka: Charakterizuj  $G \subset \mathbb{C}$  otevřené, pro které platí (JS).

**Věta 10.11.** *Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená. Potom platí (JS), právě když  $\mathbb{S} \setminus G$  je souvislá.*

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  Těžší. Bude v KA1.

$\Leftarrow$  Nechť  $\Gamma$  je cyklus v  $G$ . Polořme  $\text{ind}_{\Gamma} \infty = 0$ . Potom zřejmě  $\text{ind}_{\Gamma} : \mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$  je spojitá, tudíž konstantní na každé komponentě  $\mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle$ . Speciálně, máme  $\forall s \in \mathbb{S} \setminus G : \text{ind}_{\Gamma} s = 0$ , tedy  $\text{Int } \Gamma \subset G$ . □

**Definice 10.12.** Oblast  $G \subset \mathbb{C}$  se nazývá *jednoduře souvislá* (j. s.), pokud  $\mathbb{S} \setminus G$  je souvislá.

### Poznámka 10.13.

1. Hvězdovité oblasti  $\subsetneq$  jednoduše souvislé oblasti.
2. Je-li  $G \subset \mathbb{C}$  *jednoduše souvislá oblast*, potom v Cauchyově a reziduové větě je podmínka " $\text{Int } \Gamma \subset G$ " splněna automaticky, je-li  $\Gamma$  cyklus v  $G$ .

**Definice 10.14.** Řekneme, že uzavřená spojitá křivka  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je *Jordanova*, pokud  $\varphi|_{[\alpha, \beta]}$  je prosté zobrazení.

**Poznámka 10.15.** Pojem indexu, vnitřku a vnějšku lze zobecnit i pro *spojité* uzavřené křivky.

**Věta 10.16 (Jordanova).** *Nechť  $\varphi$  je Jordanova křivka v  $\mathbb{C}$ . Potom  $\text{Int } \varphi$  a  $\text{Ext } \varphi$  jsou oblasti a  $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle = \text{Int } \varphi \cup \text{Ext } \varphi$ . Navíc buď  $\forall s \in \text{Int } \varphi : \text{ind}_\varphi s = 1$ , nebo  $\forall s \in \text{Int } \varphi : \text{ind}_\varphi s = -1$ .*

*Důkaz.* Těžký, nebude. □

## 11 Zajímavé funkce

### 11.1 Funkce Gama

**Definice 11.1 (Funkce  $\Gamma$ ).** Položme

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (1)$$

**Lemma 11.2.** *Funkce  $\Gamma$  je holomorfní funkce na  $\text{Re}(z) > 0$ .*

*Důkaz.* Necht  $z = x + iy$ . Potom integrál konverguje jako Lebesgueův, právě když  $\text{Re}(z) > 0$ . Skutečně,  $t^{z-1} = e^{(x+iy-1) \cdot \log t}$ ,  $|t^{z-1}| = t^{x-1}$ . Dále z vět o spojitosti a derivování integrálu podle reálných parametrů  $x, y$  máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, y) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} \log(t) e^{-t} dt = -i \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \text{ protože} \\ \frac{\partial t^{z-1}}{\partial x} &= t^{z-1} \log(t) = -i \frac{\partial t^{z-1}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Z věty 3.6 (Cauchy-Riemannova) plyne, že  $\Gamma$  je holomorfní na  $\text{Re}(z) > 0$ . □

**Lemma 11.3.**  $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ ,  $\text{Re}(z) > 0$ . *Speciálně,  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$*

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1, \\ \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} \underbrace{t^z}_u \underbrace{e^{-t}}_{\frac{dv}{dt}} dt \stackrel{\text{per partes}}{=} \underbrace{\left[ -t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + z \cdot \Gamma(z), \\ \frac{du}{dt} &= z t^{z-1}, \quad v := -e^{-t}. \end{aligned}$$

□

**Poznámka.** Z věty 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce) stačí rovnost dokázat např. pro reálné  $z > 0$ .

**Lemma 11.4.** Funkci  $\Gamma$  lze jednoznačně rozšířit na funkci holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , přičemž v bodech  $0, -1, -2, -3, \dots$  má  $\Gamma$  jednoduché póly a  $\text{res}_{-n} \Gamma = (-1)^n / n!$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

*Důkaz.* Víme z 11.3, že

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (*)$$

Protože pravá strana má smysl i pro  $0 \geq \text{Re}(z) > -1$ ,  $z \neq 0$ , definujeme pro taková  $z$  funkci  $\Gamma(z)$  jako  $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ . Nyní má ale pravá strana smysl pro  $-1 \geq \text{Re}(z) > -2$ ,  $z \neq -1, 0$  a pro taková  $z$  rozšíříme definici  $\Gamma$  opět pomocí (\*), atd. Z věty o jednoznačnosti plyne, že toto holomorfní rozšíření  $\Gamma$  je jednoznačné. Navíc máme

$$\begin{aligned} \text{res}_0 \Gamma(z) &= \text{res}_0 \left( \frac{\Gamma(z+1)}{z} \right) = \Gamma(1) = 1, \\ \text{res}_{-1} \Gamma(z) &= \text{res}_{-1} \left( \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \right) = -\Gamma(1) = -1, \\ \text{res}_{-n} \Gamma(z) &= \text{res}_{-n} \left( \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right) = \frac{\Gamma(1)}{n!} \cdot (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

protože  $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1) \cdots z \cdot \Gamma(z)$ . □

## 11.2 Riemannova zeta funkce

**Definice 11.5 (Riemannova  $\zeta$  funkce).** Pro  $\text{Re}(z) > 1$  položíme

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (2)$$

**Lemma 11.6.** Funkce  $\zeta$  je holomorfní funkce na  $\text{Re } z > 1$ .

*Důkaz.* Skutečně, řada v (2) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na  $\text{Re } z > 1$ , protože

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| e^{-z \cdot \log(n)} \right| = e^{-\text{Re}(z) \cdot \log n} \leq \frac{1}{n^{x_0}},$$

je-li  $\text{Re}(z) \geq x_0 > 1$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}} < +\infty$ . Z Věty 5.40 (Weierstrass) plyne  $\zeta \in \mathcal{H}(\{\text{Re}(z) > 1\})$ . □

**Definice 11.7 (Dirichletova eta funkce).**

$$\eta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (3)$$

**Lemma 11.8.** Funkce  $\eta$  je holomorfní na  $\text{Re}(z) > 0$ .

*Důkaz.* Na  $\text{Re}(z) > 1$  je důkaz stejný jako pro  $\zeta$ . Na  $0 < \text{Re}(z) < 1$  řada v (3) konverguje neabsolutně - pro reálná  $z$  je důkaz snadný. □

**Lemma 11.9.** Platí

$$\eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z), \quad \text{Re}(z) > 1.$$

*Důkaz.* Necht  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . Potom

$$\begin{aligned}\zeta(z) + \eta(z) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} \text{ a} \\ \eta(z) &\stackrel{\text{abs.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \frac{\zeta(z) + \eta(z)}{2} - \frac{1}{2^z} \zeta(z), \text{ tudíž} \\ \eta(z) &= \zeta(z) - 2^{1-z} \zeta(z).\end{aligned}$$

□

**Lemma 11.10.**  $\varphi(z) := 1 - 2^{1-z}$  je celá funkce, která má nulové body právě v bodech

$$z_k := 1 + k \cdot \frac{2\pi i}{\log 2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a to jednoduché.

*Důkaz.*

- $2^{1-z} = e^{(1-z)\log 2} = 1 \iff (1-z) \cdot \log 2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$
- $\varphi'(z) = 2^{1-z} \cdot \log 2, \quad \varphi'(z_k) = \log 2 \neq 0.$

□

**Lemma 11.11.** Funkci  $\zeta$  lze jednoznačně rozšířit na holomorfní funkci na  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  s jednoduchým pólem v 1 a  $\operatorname{res}_1 \zeta = 1$ .

*Důkaz.* Z 11.9 víme, že pro  $\operatorname{Re}(z) > 1$  je

$$\zeta(z) = \frac{\eta(z)}{(1 - 2^{1-z})}. \quad (*)$$

Protože pravá strana (\*) má smysl i pro  $1 \geq \operatorname{Re}(z) > 0$ ,  $z \neq z_k$  pro všechna  $k \in \mathbb{Z}$ , rozšíříme  $\zeta$  holomorfně pro taková  $z$  pomocí (\*). Dále z (\*) máme  $\operatorname{res}_1 \zeta = \frac{\eta(1)}{\varphi'(1)} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$ . Pro další vlastnosti  $\zeta$  viz např. [CONWAY, J. B.; Functions of one complex variable, Springer, 1978]. □

**Lemma 11.12.** Mimo kritický pás  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$  má  $\zeta$  nulové body právě v  $-2, -4, -6, -8, \dots$  triviální nulové body.

Riemannova hypotéza Je-li  $z$  nulový bod funkce  $\zeta$  v kritickém pásu, potom  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ . Jeden z nejslavnějších otevřených problémů v matematice (odměna 1 milion \$). Má úzkou souvislost s rozložením prvočísel, viz [Riemann, B.; Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, anglický překlad: On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity, 1859]

**Věta 11.13 (Eulerova).** Je-li  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , potom

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right), \quad (4)$$

kde  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost všech prvočísel.

**Poznámka.** Zde  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N a_n$ , má-li pravá strana smysl.

*Důkaz.* Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\frac{1}{1 - \prod_{|\dots| < 1} p_n^{-z}} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n^{-mz}.$$

Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Potom

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 - p_k^{-z}} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} n_j^{-z} \quad (*)$$

jsou-li  $n_1, n_2, \dots$  všechna přirozená čísla, která se dají rozložit na součin mocnin jen prvočísel  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Zde se využívá jednoznačnosti faktorizace  $n_j$  jako součinu prvočísel. Pokud v (\*) pošleme  $n \rightarrow \infty$ , dostaneme (4).  $\square$

### 11.3 Prvočíselná věta

**Věta 11.14 (Prvočíselná).** [HADAMARD, J.; POUSSIN, Ch. J. de Pa Vallée; 1896] *Nechť  $\pi(x)$  je počet prvočísel  $p \leq x$  pro každé  $x > 0$ . Potom*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \text{ pro } x \rightarrow \infty$$

$$\text{tzn. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\left( \frac{x}{\log x} \right)} = 1$$

**Poznámka.** První velký úspěch KA. Nyní existují důkazy, které užívají pouze elementární techniky z UKA - Cauchyho integrální vzorec, Cauchyho větu a odhady křivkových integrálů.

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Kateřina Lipavská, Stanislav Mosný, Terka Poláková a Petr Sedláček