

# Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

15. října 2020



# Obsah

<b>1</b>	<b>Zavedení základních pojmů</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Lineární zobrazení</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Diferencovatelnost</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Elementární funkce v <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>5</b>
4.1	Exponenciála . . . . .	5
4.2	Logaritmus . . . . .	6
4.3	Obecná mocnina . . . . .	6
4.4	Hyperbolické funkce . . . . .	7
4.5	Goniometrické funkce . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Křivkový integrál</b>	<b>7</b>

## 1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$  je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$ ,  $z, w \in \mathbb{R}^2$

**Definice 1.1.** Prostor  $\mathbb{C}$  je prostor  $\mathbb{R}^2$ , v němž definujeme navíc:

- násobení  $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme  $(x, 0) \cong$ , neboli  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme  $i = (0, 1)$

### Vlastnosti 1.2.

Vlastnosti  $\mathbb{C}$ . Nechť  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ .

- Potom  $z = x + iy$  a  $(\pm i)^2 = -1$ .
- Násobení v  $\mathbb{C}$  zahrnuje násobení v  $\mathbb{R}$  i násobení skalárem v  $\mathbb{R}^2$ .

**Značení 1.3.** Nechť  $z = x + iy$ , kde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Potom

- $\bar{z} := x - iy$  je *komplexně sdružená část* k  $z$ ,
- $Re(z) := x$  je *reálná část*  $z$ ,  $Im(z) := y$  je *imaginární část*  $z$ ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  je *modul* nebo *absolutní hodnota*  $z$ .

Dále platí

- $|z|^2 = z\bar{z}$ ,  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}.w$ ,  $|zw| = |z|.|w|$ ,  $z + \bar{z} = 2.Re(z)$ ,  $z - \bar{z} = 2i.Im(z)$ ,
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , je-li  $z \neq 0$ ,
- $\mathbb{C}$  je těleso.

Pozor,  $\mathbb{C}$  nelze *rozumně* upořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$ ,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$ .

## 2 Lineární zobrazení

**Definice 2.1.**  $\mathbb{R}^2$  je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je  $((1, 0)^T, (0, 1)^T)$ . Obecné  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$\mathbb{C}$  je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné  $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  má tvar  $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$ , kde  $w \in \mathbb{C}$ . Nechť  $z = (x + iy)$ ,  $w = (a + ib)$ . Potom

$$Lz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Pozorování 2.2.**  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení (1) je  $\mathbb{C}$ -lineární, právě když  $d = a$ ,  $c = -b$ .

**Poznámka 2.3.**  $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení jsou velmi specifická  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení.

**Úmluva 2.4.** Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné*. Na  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se můžeme vždy dívat jako na  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , protože  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ . Nechť  $f$  je funkce z  $\mathbb{C}$  do  $\mathbb{C}$ . Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

**Definice 2.5.** Pro  $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$  značíme  $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$  a nazýváme ji *okolí*  $z_0$ . Dále  $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$  nazýváme *prstencové okolí*. Pokud  $\delta$  není důležité, budeme často psát jen  $U(z_0)$ ,  $P(z_0)$ .

Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ , pokud  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- $f$  je spojitá v  $x_0$ , pokud  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

### 3 Diferencovatelnost

**Definice 3.1.** Funkce  $f$  je v  $x_0$   $\mathbb{R}$ -diferencovatelná, pokud existuje  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

**Poznámka 3.2.** Potom  $df(x_0) := L$  je tzv. *totální diferenciál*  $f$  v  $x_0$  a platí, že

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2,$$

kde  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ . (Ta matice se nazývá *Jacobiho matice*.)

**Definice 3.3.** Řekneme, že funkce  $f$  je v  $x_0$   $\mathbb{C}$ -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo  $f'(x_0)$  nazýváme *komplexní derivací*  $f$  v  $x_0$ .

**Poznámka 3.4.** Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí  $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)'$  a  $(f \circ g)'$ .

**Příklad 3.5.**

- $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  a  $n \in \mathbb{N}$ .

- $f(z) = \bar{z}$  není nikde v  $\mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -diferencovatelná, ale  $f(x, y) = (x, -y)$  je všude  $\mathbb{R}$ -diferencovatelná. Skutečně, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h},$$

avšak poslední limita neexistuje.

**Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova).** *Nechť  $f$  je funkce diferencovatelná na okolí  $x_0 \in \mathbb{C}$ . Pak následující je ekvivalentní:*

1. Existuje  $f'(x_0)$
2. Existuje  $df(x_0)$  a  $df(x_0)$  je  $\mathbb{C}$ -lineární
3. Existuje  $df(x_0)$  a v  $z_0$  platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned} \tag{CR}$$

kde  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

*Důkaz.* (2.  $\iff$  3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení  
(1.  $\iff$  2.) Z definice  $w = f'(z_0)$  znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(z_0) - wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě  $h/|h|$  dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že  $df(z_0)h = wh$ ,  $h \in \mathbb{C}$ . Z (3) plyne (2) vynásobením  $|h|/h$ .  $\square$

**Poznámka 3.7.**

- Existuje-li  $f'(z_0)$ , potom  $df(z_0)h = f'(z_0)h$ ,  $h \in \mathbb{C}$  a  $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR)  $\iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

*Důkaz.*

- $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

$\square$

**Příklad 3.8.** Nechť  $f(z) = \bar{z}$ , pak  $f'(x, y) = (x, -y)$ . Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , ale v žádném  $z \in \mathbb{C}$  nesplňuje (CR), proto není nikde  $\mathbb{C}$ -diferencovatelná.

**Definice 3.9.** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Potom říkáme, že  $f$  je na  $G$  *holomorfní*, pokud  $f$  je  $\mathbb{C}$ -diferencovatelná v každém  $z \in G$ . Značíme  $\mathcal{H}(G)$  prostor všech holomorfních  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Říkáme, že funkce  $F$  je *celá*, pokud  $F \in \mathcal{H}(G)$ .

**Příklad 3.10.**

- Polynom  $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $z \in \mathbb{C}$  je *celá* funkce.
- Necht  $R = P/Q$ , kde  $P, Q$  jsou polynomy, které nemají společné kořeny a  $Q \not\equiv 0$ . Potom racionální funkce  $R$  je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$  konečné.

## 4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

### 4.1 Exponenciála

**Definice 4.1.**  $\exp(t) := e^x(\cos y + i \sin y)$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

**Vlastnosti 4.2.**

- $\exp|_{\mathbb{R}}$  je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp(z), f_1(x, y) = e^x \cos y, f_2(x, y) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Tedy  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  a (CR) platí všude  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ . Z CR-věty máme  $f'(z) = \exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

**Polární tvar komplexního čísla**  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = x + i$ ,  $y = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$ , kde  $r = |z|$  a  $\varphi$  je argument  $z$ .

**Značení.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Potom položíme  $\text{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ . Je-li  $\text{Arg}(z) \cap (\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$ , potom  $\arg(z) := \varphi_0$  je tzv. hlavní hodnota argumentu  $z$ .

Platí:

- $\text{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,
- funkce  $\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (\pi, \pi]$ , kde  $\arg$  je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je  $\arg$  spojitá na  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , ale není spojitá v žádném  $z \in (-\infty, 0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $\exp$  není prostá na  $\mathbb{C}$ , je  $2\pi i$ -periodická a platí dokonce:  
 $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = z + 2k\pi i$
- Necht  $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \in (\pi, \pi]\}$ . Potom  $\exp|_P$  je prostá a  $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

## 4.2 Logaritmus

Pro dané  $z \in \mathbb{C}$  řešíme  $e^w = z$ . Pro  $z = 0$  nemáme řešení. Pro  $z \neq 0$  je  $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = \log|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$ .

**Definice 4.3.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Položme

- $\text{Log } z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + i\arg z$ , tzv. hlavní hodnota logaritmu  $z$ .

**Vlastnosti 4.4.**

Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- $\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$  a  $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- $\log$  není spojitá v žádném  $z \in (-\infty, 0]$ , ale  $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ .  
Navíc  $\log' z = \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .
- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ,  $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$ ,  $\log(\exp z) \neq z$ , z toho, že je to  $2\pi i$ -periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např.  $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

## 4.3 Obecná mocnina

**Definice 4.5.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  a  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Potom *hlavní hodnotu*  $\alpha$ -té mocniny  $z$  definujeme  $z^\alpha := \exp(\alpha \log z)$ . Položme  $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in \text{Log } z\}$ .

**Vlastnosti 4.6.**

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li  $z > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , potom  $z^\alpha$  je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $z \neq 0$   
 $w \in \text{Log } z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  a  $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ,  $|z| < 1$ , kde  $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ .

**Příklad 4.7.** Necht  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- Necht  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Potom  $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$ .
- Necht  $\alpha \in \mathbb{Q}$  a  $\alpha = p/q$ , kde  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  a  $p, q$  jsou nesoudělná. Potom  $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \dots, q-1\}\}$  tvoří vrcholy pravidelného  $q$ -úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0.
- Necht  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ . Potom je  $m_\alpha(z)$  nekonečné.

**Příklad 4.8.** •  $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ,  $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$



- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$  (nesouhlasí s MA!),  $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$ ,  $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

$$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$$

$$\text{např. } 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$$

**Poznámka 4.9.** Je-li  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , potom  $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} = \text{sudá část} + \text{lichá část}$ .

## 4.4 Hyperbolické funkce

$$e^z = \cosh(z) + \sinh(z), \text{ kde}$$

**Definice 4.10.**

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.11.**

- $\cosh' z = \sinh z$ ,  $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ ,  $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

## 4.5 Goniometrické funkce

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), \text{ kde}$$

**Definice 4.12.**

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.13.** •  $\cos$  a  $\sin$  jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{C}$ .

- $\sin'(z) = \cos(z)$ ,  $\cos'(z) = -\sin(z)$
- $\sin$  i  $\cos$  jsou  $2\pi$ -periodické, ale nejsou omezené na  $\mathbb{C}$ . Platí, že  $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na  $\mathbb{C}$  platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

## 5 Křivkový integrál

**Definice 5.1.** Necht  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ . Potom

1.  $\varphi$  je *křivka*, pokud je  $\varphi$  spojitá
2.  $\varphi$  je *regulární křivka*, pokud je  $\varphi$  po částech spojitě diferencovatelná, tzn.  $\varphi$  je spojitá na  $[\alpha, \beta]$  a existuje dělení  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  takové, že  $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$  je spojitě diferencovatelné pro každé  $i = 0, \dots, n-1$ .

**Definice 5.2 (Úsečka).** Necht  $a, b \in \mathbb{C}$ . Potom  $\varphi(t) := a + t(b - a)$ ,  $t \in [0, 1]$  je úsečka z  $a$  do  $b$ . Značíme  $[a, b]$ .

**Značení 5.3.** Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  a  $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$  jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka.  $(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$ , pokud  $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$ .

**Definice 5.4 (Lomenná čára).** Řekneme, že regulární křivka  $\varphi$  je *lomenná čára* v  $\mathbb{C}$ , existují-li  $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$  taková, že  $\varphi = [z_1, z_2] \dot{+} [z_2, z_3] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{k-1}, z_k]$ .

**Definice 5.5 (Kružnice).** Necht  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ . Potom  $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

**Poznámka 5.6.** Pro křivku  $\varphi$  může být její graf  $\langle \varphi \rangle := \varphi([\alpha, \beta])$  například čtverec (Peanova křivka).

**Úmluva 5.7.** Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku* v  $\mathbb{C}$ .

**Připomenutí 5.8.** Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t), \\ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) dt, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl. Zde  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li  $\varphi$  regulární.

**Definice 5.9.** Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je regulární křivka a  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (4)$$

**Poznámka 5.10.**

1. Křivkový integrál (4) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také  $\int_{\varphi} f(z) dz$

**Základní vlastnosti 5.11.**

1. Je-li  $\varphi$  křivka,  $f$  a  $g$  jsou spojitě funkce na  $\langle \varphi \rangle$  a  $A, B \in \mathbb{C}$ , potom

$$\int_{\varphi} (Af + Bg) = A \int_{\varphi} f + B \int_{\varphi} g.$$

2. Je-li  $\varphi$  křivka a  $f$  je spojitá funkce na  $\langle \varphi \rangle$ , potom  $\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle \varphi \rangle} |f| \cdot V(\varphi)$ .

*Důkaz.* Označíme  $M := \max_{\langle \varphi \rangle} |f|$ . Potom máme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |\varphi'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = M \cdot V(\varphi) \end{aligned}$$

□

3. Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$  jsou křivky a  $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$ . Potom

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \dot{+} \psi} f &= \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \\ &\text{a} \\ \int_{\dot{-} \varphi} f &= - \int_{\varphi} f, \end{aligned}$$

kde  $(\dot{-} \varphi)(t) := \varphi(-t)$ ,  $t \in [-\beta, -\alpha]$  je opačná křivka k  $\varphi$ .

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky*. Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je křivka,  $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$  je spojitě diferencovatelné s  $\omega' > 0$  a  $\psi := \varphi \circ \omega$ . Potom

$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \int_{\psi} f &= \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \varphi'(\omega(t)) \omega'(t) dt \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \psi'(t) dt \stackrel{\text{subst.}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi} f. \end{aligned}$$

□

**Definice 5.12.** Řekneme, že funkce  $f$  má na otevřené  $G \subset \mathbb{C}$  *primitivní funkci*  $F$ , pokud  $F' = f$  na  $G$ .

**Příklad 5.13.**  $\frac{z^{n+1}}{n+1}$  je primitivní funkcí k  $z^n \begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \dots \end{cases}$

**Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f$  má na  $G$  primitivní funkci  $F$ . Necht  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$  je křivka a  $f$  je spojitá<sup>(\*)</sup> na  $\langle \varphi \rangle$ . Potom

1.  $\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2.  $\int_{\varphi} f = 0$ , je-li  $\varphi$  uzavřená, tzn.  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

**Poznámka 5.15.** <sup>(\*)</sup> Ukážeme si později, že funkce  $f$ , která má na  $G$  primitivní funkci, je na  $G$  holomorfní, tudíž i spojitá.

*Důkaz.* Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'_2 = F'\varphi'_1 + iF'\varphi'_2 = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho  $t \in [\alpha, \beta]$ , neboli  $F \circ \varphi$  je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

**Příklad 5.16.**

- $\frac{1}{z}$  je holomorfní na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ale na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nemá primitivní funkci, neboť víme

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$  má na  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  primitivní funkci  $\log(z)$ .

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Připomenutí 5.17 (Souvislost).** Necht  $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$  otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (a)  $G$  je *souvislá*, tj.  $G$  je *oblast*.
- (b)  $G$  je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé  $z_1, z_2 \in G$  existuje spojitá křivka  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$  taková, že  $\varphi(\alpha) = z_1$  a  $\varphi(\beta) = z_2$ .
- (c) Pro každé  $z_1, z_2 \in G$  existuje *lomenná čára*  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$  taková, že  $\varphi(\alpha) = z_1$  a  $\varphi(\beta) = z_2$ .

*Důkaz.* (a)  $\iff$  (b): víte z MA; (c)  $\Rightarrow$  (b): jasné; (a)  $\Rightarrow$  (c): ukáže se podobně jako (a)  $\Rightarrow$  (b) □

**Věta 5.18.** Funkce  $f$  je konstantní na oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ , právě když  $f' = 0$  na  $G$ .

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  Jasně.

$\Leftarrow$  Necht  $z, w \in G$  a  $\varphi$  je lomenná čára v  $G$  spojující  $z$  a  $w$ . Potom  $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$ , protože  $f$  je primitivní funkcí k  $f'$  na  $G$ . □

**Důsledek 5.19.** Jsou-li  $F_1, F_2$  primitivní funkce k  $f$  na oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ , potom existuje  $c \in \mathbb{C}$  tak, že  $F_2 = F_1 + c$ .

*Důkaz.*

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

**Věta 5.20 (O existenci PF).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f$  je spojitá na  $G$ . NTJE:

1.  $f$  má na  $G$  primitivní funkci.
2.  $\int_{\varphi} f = 0$  pro každou uzavřenou křivku  $\varphi$  v  $G$ .

3.  $\int_{\varphi} f$  nezávisí v  $G$  na křivce  $\varphi$ , tzn. pro každé dvě křivky  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ ,  $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$  takové, že  $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$  a  $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$ , platí  $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$ .

**Poznámka 5.21.** Přípomíná větu o potenciálu z MA (?)

*Důkaz věty 5.20.*

1.  $\Rightarrow$  2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF

2.  $\Rightarrow$  3. Položme  $\tau := \varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$ . Potom je  $\tau$  uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

3.  $\Rightarrow$  1. Volme  $z_0 \in G$  pevně. Pro každé  $z \in G$  najdeme lomenou čáru  $\varphi_z$  v  $G$ , která začíná v  $z_0$  a končí v  $z$ . Definujeme  $F(z) := \int_{\varphi_z} f$ ,  $z \in G$ . Definice  $F$  je korektní, nezávislá na volbě  $\varphi_z$ , protože předpokládáme 3. Ukážeme, že  $F$  je hledaná PF k  $f$  na  $G$ . Necht  $z_1 \in G$ . Dokážeme, že  $F'(z_1) = f(z_1)$ . Volme  $r > 0$ , aby  $U(z_1, r) \subset G$ . Je-li  $|h| < r$ , potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \stackrel{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dot{+} u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde  $u = [z_1, z_1 + h]$  je úsečka, tzn.  $u(t) = z_1 + t \cdot h$ ,  $t \in [0, 1]$ . Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h dt,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt.$$

To se blíží k nule pro  $h \rightarrow 0$ , protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \right| \leq \max_{z \in [z_1, z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ze spojitosti  $f$  v  $z_1$ . Máme, že  $F'(z_1) = f(z_1)$ . □

**Značení 5.22.**

1. Řekneme, že  $m \subset \mathbb{C}$  je *hvězdovitá*, pokud existuje  $z_0 \in M$  (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který  $[z_0, z] \subset M$  pro každé  $z \in M$ .

**Poznámka.** Konvexní  $\subsetneq$  hvězdovitá.

2. Řekneme, že  $\Delta \subset \mathbb{C}$  je *trojúhelník* s vrcholy  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

(konvexní obal  $a, b, c$ ) a značíme  $\partial\Delta := [a, b] \dot{+} [b, c] \dot{+} [c, a]$ . Připouštíme i degenerované  $\Delta$ , tzn.  $a, b, c$  mohou ležet na jedné přímce nebo body  $a, b, c$  mohou splývat...

**Dodatek 5.23.** Necht  $f$  je spojitá funkce na hvězdcovité oblasti  $G \subset \mathbb{C}$ . Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \tag{5}$$

pro každý trojúhelník  $\Delta \subset G$ , potom  $f$  má na  $G$  primitivní funkci.

*Důkaz.* Necht  $z_0$  je střed hvězdovitosti  $G$ , Pro každé  $z \in G$  položme  $\varphi_z := [z_0, z]$  a  $F(z) := \int_{\varphi_z} f$ . Rozmyslíme si, že důkaz  $\boxed{F' = f \text{ na } G}$  je zcela analogický ③  $\Rightarrow$  ① předchozí věty, když místo ③ uvažujeme (5).  $\square$

**Poznámka 5.24.** Cauchyho věta – Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f \in \mathcal{H}(G)$  a  $\varphi$  je uzavřená křivka v  $G$ . Za jakých podmínek na  $G$  a  $\varphi$  je  $\int_{\varphi} f = 0$ ?

**Věta 5.25 (Goursartovo lemma – „Cauchyho věta pro  $\Delta$ “).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f \in \mathcal{H}(G)$  a  $\Delta$  je trojúhelník v  $G$ . Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0. \quad (6)$$

*Důkaz.* Označme  $\varphi_0 := \partial\Delta$ . Sporem: Předpokládejme, že  $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$ . Zřejmě  $\Delta$  je nede degenerovaný. V  $\Delta$  vedme střední příčky a označme  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  obvody čtyř vzniklých trojúhelníků ( $\psi_4$  je obvod vnitřního trojúhelníka). Potom  $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$ . Ex.  $j_1 = 1, \dots, 4$  tak, že  $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$  a  $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$ . Označme  $\varphi_1 = \psi_{j_1}$ . Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků  $\Delta_0 := \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$  s obvody  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  takové, že (a)  $|\int_{\varphi_j} f| \geq \frac{K}{4^j}$  a  $V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}$ . Máme, že  $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$ , protože  $\text{diam}(\Delta_j) \rightarrow 0$ . Položme

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &:= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad z \in G \setminus \{z_0\}; \\ &:= 0, \quad z = z_0. \end{aligned}$$

Potom  $\varepsilon$  je spojitá na  $G$  a máme pro  $j \in \mathbb{N}_0$

$$(b) \int_{\varphi_j} f(z) dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) dz,$$

kde první integrand má PF na  $\mathbb{C}$  a první integrál je roven 0. Pro každé  $j \in \mathbb{N}_0$  z (a), (b) dostaneme

$$\frac{K}{4^j} \leq \left| \int_{\varphi_j} f \right| \stackrel{(b)}{=} \left| \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) \right| \leq V^2(\varphi_j) \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde druhá nerovnost platí díky tomu, že  $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$ . Z předchozího tedy máme (po vynásobení  $4^j$ ):  $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \rightarrow 0$ , protože  $\varepsilon$  je spojitá v  $z_0$  a  $\varepsilon(z_0) = 0$ . Což je spor.  $\square$

**Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti).** Necht  $G \subset \mathbb{C}$  je hvězdovitá oblast a  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Potom  $f$  má na  $G$  primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že  $\int_{\varphi} f = 0$  pro každou uzavřenou křivku  $\varphi$  v  $G$ .

*Důkaz.* Z Goursartova lemmatu a dodatku k větě o existenci PF.  $\square$

**Poznámka 5.27.** Goursartovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci  $f$ , která je spojitá na  $G$  a holomorfní na  $G \setminus \{z_0\}$  pro nějaké  $z_0 \in G$ .

*Důkaz.* Skutečně, necht  $\Delta$  je nede degenerovaný trojúhelník v  $G$ . Potom

1. Necht  $z_0 \notin \Delta$ . Potom  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .
2. Necht  $z_0$  je vrchol  $\Delta$ . Necht  $\Delta_\varepsilon$  je trojúhelník podobný s  $\Delta$ , poměr stran roven  $\varepsilon$ .  $\Delta', \Delta''$  jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením  $\Delta$  na tři části. Potom  $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f + \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$ , kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž  $|\int_{\partial\Delta} f| = |\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\Delta) \cdot \max_{\Delta} |f| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$ . Tedy  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .

3. Necht  $z_0$  leží uvnitř strany  $\triangle$ .

4. Necht  $z_0$  leží uvnitř  $\triangle$ .

□

**Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru).**

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček