Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

8. října 2020

Obsah

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:

- násobení $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- ztotožňujeme $(x,0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0,1)$

Vlastnosti 1.2.
Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$.

Značení 1.3. Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\overline{z} := x-iy$ je *komplexně sdružená část* k z,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* z, $Im(z) := y$ je *imaginární část* z,
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* z.

Dále platí

- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- $\mathbb{C}$ je těleso.

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. $\mathbb{R}^2$ je *reálný vektorový prostor* dimenze 2, jeho báze je $\big((1,0)^T,(0,1)^T\big)$. Obecné $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (x+iy)$, $w = (a+ib)$. Potom

$$Lz = (a+ib)(x+iy) = (ax-by, bx+ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2.2. $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* (1) je $\mathbb{C}$-*lineární*, právě když $d = a$, $c = -b$.

Poznámka 2.3. $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení.*

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné.* Na $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* z_0. Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí.* Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$.
Potom definujeme

- $\lim_{z \to x_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : z \in P(x_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- f je spojitá v x_0, pokud $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v x_0 $\mathbb{R}$-*diferencovatelná*, pokud existuje $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $\mathrm{d}f(x_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* f v x_0 a platí, že

$$\mathrm{d}f(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h,\ h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. (Ta matice se nazývá *Jacobiho matice.*)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v x_0 $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme *komplexní derivací* f v x_0.

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)'$, $(f.g)'$, $(f/g)'$ a $(f \circ g)'$.

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.

- $f(z) = \overline{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*, ale $f(x,y) = (x,-y)$ je všude $\mathbb{R}$-*diferencovatelná*. Skutečně, máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h},$$

  avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:*

1. *Existuje $f'(x_0)$*
2. *Existuje $\mathrm{d}f(x_0)$ a $\mathrm{d}f(x_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární*
3. *Existuje $\mathrm{d}f(x_0)$ a v z_0 platí tvrzení* Cauchy-Riemannových podmínek*.*

Cauchy-Riemannovy podmínky*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned} \tag{CR}$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

Důkaz. (2. $\iff$ 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(z_0)-wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $\mathrm{d}f(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. $\square$

Poznámka 3.7.

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff$ $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz.

- $\mathrm{d}f(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

$\square$

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \overline{z}$, pak $f'(x,y) = (x,-y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$-*diferencovatelná.*

Definice 3.9. Nechť $\mathbb{C}$ je otevřené a $f\colon G \to \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G holomorfní, pokud f je $\mathbb{C}$-diferencovatelná v každém $z \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních $f\colon G \to \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je celá, pokud $F \in \mathcal{H}(G)$.

Příklad 3.10.

- Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je celá funkce.
- Necht $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionalita funkce R je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^{-1}(\alpha \circ \varphi)$ konečné.

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(t)\colon = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
  $f(z) = \exp(z)$, $f_1(x,y) = e^x \cos y$, $f_2(x,y) = e^x \sin y$,
  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$
  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

  Polární tvar komplexního čísla $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = x + i$, $y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z.

  Značení 4.3. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položme $Arg(z)\colon = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ Je-li $Arg(z) \cap (\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $arg(z)\colon = \varphi_0$ je tzv. hlavní hodnota argumentu z.

  Platí:

  - $Arg(z)\colon = \{arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
  - funkce $arg\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (\pi, \pi]$, kde arg je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon w = 2k\pi i$
- Nechť $P\colon = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz \in (\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$. Pro $z = 0$ nemáme řešení. Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{iarg(z)} = e^{\log|z| + iarg(z)} = e^w \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.4. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.Položme

- $Logz\colon = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z\colon = \log|z| + iargz\ldots$tzv. hlavní hodnota logaritmu z.

Vlastnosti 4.5.

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $Logz = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- $\log$ není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
  Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp zi) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$-periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.6. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnota α-té mocniny z definujeme $z^\alpha\colon = \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z)\colon = \{\exp(\alpha w) \mid w \in Logz\}$.

Vlastnosti 4.7.

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
  $w \in Logz \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Příklad 4.8. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p|_q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \cdots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0
- Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

Příklad 4.9.

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{pii}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$

- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2}+2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!
$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.10. Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} =$ sudá část + lichá část.

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.11.

$$\cosh(z)\colon = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z)\colon = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.12.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2 n}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, kde

Definice 4.13.

$$cos(z)\colon = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$sin(z)\colon = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.14.

- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou 2π-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5 Křivkový integrál

Definice 5.1. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Potom

1. φ je *křivka*, pokud je φ spojitá
2. φ je *regulární křivka*, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi\Big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0, \cdots, n-1$
   $(x^n + y^n = z^n$

Definice 5.2 (Úsečka). Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$ je úsečka z a do b. Značíme $[a,b]$.

Značení 5.3. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma,\delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dotplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha,\beta] \\ \psi(t-\beta+\gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta+\beta-\gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

Definice 5.4 (Lomenná čára). Řekneme, že regulární křivka φ je *lomenná čára* v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, z_2, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1,z_2] \dotplus [z_2,z_3] \dotplus \cdots \dotplus [z_{k-1}, z_k]$.

Definice 5.5 (Kružnice). Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 5.6. Pro křivku φ může být její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha,\beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

Úmluva 5.7. Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku v* $\mathbb{C}$.

Připomenutí 5.8. Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například.

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t),$$
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

   mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

   je-li φ regulární.

Definice 5.9. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Poznámka 5.10.

1. Křivkový integrál (4) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$

Základní vlastnosti 5.11.

1. Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g.$$

2. Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom $\left|\int_\varphi f\right| \leq \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$.

Důkaz. Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme

$$\left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\le \int_\alpha^\beta M\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\cdot V(\varphi)$$

□

3. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma,\delta], \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi\dot{+}\psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f$$

a

$$\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_\varphi f,$$

kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta,-\alpha]$ je *opačná křivka* k φ.

4. Křivková integrál *nezávisí na parametrizaci křivky.* Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma,\delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha,\beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi\circ\omega$. Potom

$$\int_\varphi f = \int_\psi f$$

.

Důkaz.

$$\int_\psi f = \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi(\omega(t))\Big)\varphi'(\omega(t))\omega'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi(\omega(t))\Big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\substack{\text{subst.}\\ \tau=\omega(t)}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\varphi f$$

□

Definice 5.12. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F, pokud $F' = f$ na G

Příklad 5.13. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k $z^n \begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0,1,2,3,\cdots \\ \text{na } \mathbb{C}\setminus\{0\} & \text{pro } n = -2,-3,-4,\cdots \end{cases}$

Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$ je křivka a f je spojitá* $^{(*)}$ *na $\langle\varphi\rangle$. Potom*

1. $\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_\varphi f = 0$, *je-li* φ uzavřená, *tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Poznámka 5.15. $^{(*)}$ Ukážeme si později, že funkce f, která má na G primitivní funkci je na G holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz. Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2' = F'\varphi_1' + iF'\varphi_2' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha\beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Příklad 5.16.

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ale na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *nemá* primitivní funkci, neboť víme

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Připomenutí 5.17 (Souvislost). Nechť $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) G je *souvislá*, tj. G je *oblast.*

(b) G je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

(c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

Důkaz. $(a) \Leftrightarrow (b)$: víte z MA; $(c) \Rightarrow (b)$: jasné; $(a) \Rightarrow (c)$: ukáže se podobně jako $(a) \Rightarrow (b)$ □

Věta 5.18. *Funkce f je konstatní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Jasné.
$\Leftarrow$ Nechť $z, w \in G$ a φ je lomenná čára v G spojující z a w. Potom $f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G. □

Důsledek 5.19. *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na* oblasti *$G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.*

Důkaz.

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

Věta 5.20 (O existenci PF). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G. NTJE:*

1. *f má na G primitivní funkci.*
2. *$\int_\varphi f = 0$ pro každou* uzavřenou *křivku φ v G.*

3. $\int_\varphi f$ nezávisí *v* G na křivce φ, *tzn. pro každé dvě křivky* $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$, $\psi : [\gamma,\delta] \to G$ *takové, že* $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ *a* $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, *platí* $\int_\varphi f = \int_\psi f$.

Poznámka 5.21. Přípomíná *větu o potenciálu* z MA ?

Důkaz.
1. $\Rightarrow$ 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF
2. $\Rightarrow$ 3. Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je τ *uzavřená* a z 2. dostaneme

$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najděme lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z. Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní, nezávislá na volbě φ_z, protože předpokládáme 3. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \overset{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dotplus u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1, z_1 + h]$ je *úsečka*, tzn. $u(t) = z_1 + t \cdot h$, $t \in [0,1]$. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h \, \mathrm{d}t,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{g} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \, \mathrm{d}t.$$

To se blíží k nule pro $h \to 0$, protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \, \mathrm{d}t \right| \le \max_{z \in [z_1, z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

ze spojitosti f v z_1. Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

Značení 5.22.

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0, z] \subset M$ pro každý $z \in M$.

   Poznámka. Konvexní $\subsetneq$ hvězdicovitá.

2. Řekneme, že $\triangle \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\triangle := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \ge 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

   (*konvexní obal* a, b, c) a značíme $\partial\triangle := [a,b] \dotplus [b,c] \dotplus [c,a]$. Připouštíme i degenerované $\triangle$, tzn. a, b, c mohou ležet na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

Dodatek 5.23. *Nechť f je spojitá funkce na* hvězdicovité *oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0, \tag{5}$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$, *potom f má na G primitivní funkci.*

Důkaz. Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G, Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0, z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický 3 $\Rightarrow$ 1 předchozí věty, když místo 3 uvažujeme (5). □

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček