# Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

8. prosince 2020

# Obsah

# 1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

**Definice 1.1.** Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:

- násobení $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- ztotožňujeme $(x,0) \cong x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0,1)$

**Značení 1.2.** Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\overline{z} := x - iy$ je *komplexně sdružené číslo* k $z$,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* $z$, $Im(z) := y$ je *imaginární část* $z$,
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* $z$.

**Vlastnosti 1.3.**

Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- $\mathbb{C}$ je těleso.

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

# 2 Lineární zobrazení

**Definice 2.1.** $\mathbb{R}^2$ je *reálný vektorový prostor* dimenze 2, jeho báze je $\left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$. Obecné $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je $\{1\}$. Obecné $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (x+iy)$, $w = (a+ib)$. Potom

$$Lz = (a+ib)(x+iy) = (ax-by, bx+ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Pozorování 2.2.** *$\mathbb{R}$-lineární zobrazení* (1) je *$\mathbb{C}$-lineární*, právě když $d = a$, $c = -b$.

**Poznámka 2.3.** *$\mathbb{C}$-lineární zobrazení* jsou velmi specifická *$\mathbb{R}$-lineární zobrazení.*

**Úmluva 2.4.** Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné.* Na $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

**Definice 2.5.** Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* $z_0$. Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí.* Pokud $\delta$ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$.
Potom definujeme

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in P(z_0, \delta) : f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- $f$ je spojitá v $z_0$, pokud $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

## 3 Diferencovatelnost

**Definice 3.1.** Funkce $f$ je v $z_0$ *$\mathbb{R}$-diferencovatelná*, pokud existuje *$\mathbb{R}$-lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

**Poznámka 3.2.** Potom $\mathrm{d}f(z_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* $f$ v $z_0$ a platí, že

$$\mathrm{d}f(z_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} h, \quad h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Tato matice se nazývá *Jacobiho matice.*)

**Definice 3.3.** Řekneme, že funkce $f$ je v $z_0$ *$\mathbb{C}$-diferencovatelná*, pokud existuje konečná limita

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Číslo $f'(z_0)$ nazýváme *komplexní derivací* $f$ v $z_0$.

**Poznámka 3.4.** Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f.g)' = f'g + g'f$, $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ a $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$.

**Příklad 3.5.**

- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.
- $f(z) = \overline{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ *$\mathbb{C}$-diferencovatelná*, ale $f(x, y) = (x, -y)$ je všude *$\mathbb{R}$-diferencovatelná.* Skutečně, pro $z_0 \in \mathbb{C}$ libovolné, máme

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h},$$

  avšak poslední limita neexistuje.

**Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova).** *Nechť $f$ je funkce diferencovatelná na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje $f'(z_0)$*
2. *Existuje $\mathrm{d}f(z_0)$ a $\mathrm{d}f(z_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární*
3. *Existuje $\mathrm{d}f(z_0)$ a v $z_0$ platí tzv.* Cauchy-Riemannovy podmínky.

Cauchy-Riemannovy podmínky*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0), \end{aligned} \tag{CR}$$

*kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.*

*Důkaz.* (2. $\iff$ 3.): Plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Podle definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $\mathrm{d}f(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

**Poznámka 3.7.**

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff$ $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

*Důkaz.*

- $\mathrm{d}f(z_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- zřejmé

□

**Příklad 3.8.** Nechť $f(z) = \overline{z}$, pak $f(x,y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*.

**Definice 3.9.** Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{C}$. Potom říkáme, že $f$ je na $G$ *holomorfní*, pokud $f$ je $\mathbb{C}$-*diferencovatelná* v každém $z_0 \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních funkcí $f\colon G \to \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce $F$ je *celá*, pokud $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

**Příklad 3.10.**

- *Polynom* $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je *celá* funkce.
- Nechť $R = P/Q$, kde $P$, $Q$ jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionální funkce $R$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$,kde $Q^{-1}(\{0\})$ je konečná množina.

# 4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

## 4.1 Exponenciála

**Definice 4.1.** $\exp(z)\colon = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

**Vlastnosti 4.2.**

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(z) \\ f_1(x,y) &= e^x \cos y \\ f_2(x,y) &= e^x \sin y \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Z CR-věty a poznámky 3.7 máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon w = z + 2k\pi i$
- Nechť $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**Definice 4.3.** Nechť $z = x + iy$ je komplexní číslo, pak se na něj můžeme dívat jako na bod v rovině určený kartézskými souřadnicemi $x$ a $y$. *Polární (Goniometrický) tvar komplexního čísla* získáme tak, že si body $x$ a $y$ vyjádříme v polárních souřadnicích a ty pak dosadím do rovnice udávající $z$. Tedy
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a $\varphi$ je argument $z$. Polární souřadnice nám říkají jak je daleko od počátku $r$ a v jakém směru $\measuredangle\varphi$ se bod $z$ nachází.

**Značení 4.4.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položme $\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ Je-li $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z) := \varphi_0$ je tzv. *hlavní hodnota argumentu z*.

Platí:

- $\operatorname{Arg}(z)\colon = \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$, kde arg je surjektivní a navíc je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Dále je arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$

## 4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme rovnici $e^w = z$.

- Pro $z = 0$ nemá rovnice řešení.
- Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

**Definice 4.5.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

- $\operatorname{Log} z\colon = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z\colon = \log|z| + i\arg z$, tzv. *hlavní hodnota logaritmu $z$.*

**Vlastnosti 4.6.**

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_P)^{-1}$, kde $P$ je množina z vlastností exponenciály.
- $\log$ není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
  Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s komplexním logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp z) \neq z$, z toho, že exponenciála je $2\pi i$-periodická
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

## 4.3 Obecná mocnina

**Definice 4.7.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom *hlavní hodnotu $\alpha$-té mocniny $z$* definujeme $z^\alpha\colon = \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z)\colon = \{\exp(\alpha w) \mid w \in \operatorname{Log} z\}$.

**Vlastnosti 4.8.**

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $z^\alpha$ je v souladu s definicí z MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$

  *Důkaz.* $w \in \operatorname{Log} z \iff w = \log z + 2k\pi i$ □

- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha - 1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

**Pozorování 4.9.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a $p, q$ jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{\frac{2k\pi ip}{q}} : k \in \{0, 1, \cdots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného $q$-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $z^{\frac{p}{q}}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

**Příklad 4.10.**

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s definicí z MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

- $(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
  např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

**Poznámka 4.11.** Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom $f(z) = \underbrace{\frac{f(z)+f(-z)}{2}}_{\text{sudá část}} + \underbrace{\frac{f(z)-f(-z)}{2}}_{\text{lichá část}}$.

## 4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

**Definice 4.12.**

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.13.**

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

## 4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, kde

**Definice 4.14.**

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.15.**

- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou $2\pi$-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

# 5 Křivkový integrál

**Definice 5.1.** Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Potom

1. $\varphi$ je *křivka*, pokud je $\varphi$ spojitá
2. $\varphi$ je *regulární křivka*, pokud je $\varphi$ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. $\varphi$ je spojitá na $[\alpha,\beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i,t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0,\cdots,n-1$.

**Definice 5.2 (Úsečka).** Nechť $a,b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$ je úsečka z $a$ do $b$. Značíme $[a;b]$.

**Značení 5.3.** Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma,\delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dotplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha,\beta] \\ \psi(t-\beta+\gamma) & \text{pro } t \in [\beta,\delta+\beta-\gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

**Definice 5.4 (Lomenná čára).** Řekneme, že regulární křivka $\varphi$ je *lomenná čára* v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, z_2, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1;z_2] \dotplus [z_2;z_3] \dotplus \cdots \dotplus [z_{k-1};z_k]$.

**Definice 5.5 (Kružnice).** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

**Poznámka 5.6.** Pro křivku $\varphi$ může být její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha,\beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

**Úmluva 5.7.** Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku v* $\mathbb{C}$.

**Připomenutí 5.8.** Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t),$$
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

je-li $\varphi$ regulární.

**Definice 5.9.** Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

**Poznámka 5.10.**

1. Křivkový integrál (5) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$

**Základní vlastnosti 5.11.**

1. Je-li $\varphi$ křivka, $f$ a $g$ jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom
$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g.$$

2. Je-li $\varphi$ křivka a $f$ je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom
$$\left|\int_\varphi f\right| \le \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$$
.

   *Důkaz.* Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme
$$\begin{aligned}\left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_\alpha^\beta M\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\cdot V(\varphi)\end{aligned}$$
□

3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta], \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom
$$\int_{\varphi \dotplus \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f$$
a
$$\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_\varphi f,$$
kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je *opačná křivka* k $\varphi$.

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky.* Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom
$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$

   *Důkaz.*
$$\begin{aligned}\int_\psi f &= \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi\big(\omega(t)\big)\Big)\varphi'(\omega(t))\omega'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi\big(\omega(t)\big)\Big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\substack{\text{subst.}\\ \tau=\omega(t)}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\varphi f.\end{aligned}$$
□

**Definice 5.12.** Řekneme, že funkce $f$ má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* $F$, pokud $F' = f$ na $G$.

**Příklad 5.13.** $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k $z^n$
$$\begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{na } \mathbb{C}\setminus\{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \dots \end{cases}$$

**Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f$ má na $G$ primitivní funkci $F$. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ je křivka a $f$ je spojitá$^{(*)}$ na $\langle \varphi \rangle$. Potom*

1. $\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_\varphi f = 0$, *je-li* $\varphi$ uzavřená, *tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

**Poznámka 5.15.** $^{(*)}$ Ukážeme si později, že funkce $f$, která má na $G$ primitivní funkci, je na $G$ holomorfní, tudíž i spojitá.

*Důkaz.* Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2' = F'\varphi_1' + iF'\varphi_2' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

**Příklad 5.16.**

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nemá* primitivní funkci, neboť víme

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Připomenutí 5.17 (Souvislost).** Nechť $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) $G$ je *souvislá*, tj. $G$ je *oblast.*

(b) $G$ je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

(c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

*Důkaz.* $(a) \iff (b)$: víte z MA; $(c) \Rightarrow (b)$: jasné; $(a) \Rightarrow (c)$: ukáže se podobně jako $(a) \Rightarrow (b)$ □

**Věta 5.18.** *Funkce $f$ je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na $G$.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Jasné.
$\Leftarrow$ Nechť $z, w \in G$ a $\varphi$ je lomená čára v $G$ spojující $z$ a $w$. Potom $f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0$, protože $f$ je primitivní funkcí k $f'$ na $G$. □

**Důsledek 5.19.** *Jsou-li $F_1, F_2$ primitivní funkce k $f$ na* oblasti *$G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.*

*Důkaz.*
$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$
□

**Věta 5.20 (O existenci PF).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f$ je spojitá na $G$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$f$ má na $G$ primitivní funkci.*
2. *$\int_\varphi f = 0$ pro každou* uzavřenou *křivku $\varphi$ v $G$.*
3. *$\int_\varphi f$* nezávisí *v $G$* na křivce *$\varphi$, tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$, $\psi : [\gamma,\delta] \to G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*

**Poznámka 5.21.** Přípomíná *větu o potenciálu* z MA ?

*Důkaz věty 5.20.*
1. ⇒ 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF
2. ⇒ 3. Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je $\tau$ *uzavřená* a z 2. dostaneme
$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$
3. ⇒ 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najděme lomenou čáru $\varphi_z$ v $G$, která začíná v $z_0$ a končí v $z$. Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice $F$ je korektní, nezávislá na volbě $\varphi_z$, protože předpokládáme 3. Ukážeme, že $F$ je hledaná PF k $f$ na $G$. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom
$$F(z_1 + h) - F(z_1) \overset{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dotplus u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$
kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je *úsečka*, tzn. $u(t) = z_1 + t.h$, $t \in [0,1]$. Tedy
$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h \, \mathrm{d}t,$$
tudíž
$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \, \mathrm{d}t.$$
To se blíží k nule pro $h \to 0$, protože
$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \, \mathrm{d}t \right| \leq \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$
ze spojitosti $f$ v $z_1$. Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

**Značení 5.22.**

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

   **Poznámka.** Konvexní $\subsetneq$ hvězdicovitá.

2. Řekneme, že $\triangle \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud
$$\triangle := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$
   (*konvexní obal* $a, b, c$) a značíme $\partial\triangle := [a; b] \dotplus [b; c] \dotplus [c; a]$. Připouštíme i degenerované $\triangle$, tzn. $a, b, c$ mohou ležet na jedné přímce nebo body $a, b, c$ mohou splývat...

**Dodatek 5.23.** *Nechť $f$ je spojitá funkce na* hvězdicovité *oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0, \tag{6}$$

*pro každý* trojúhelník *$\triangle \subset G$, potom $f$ má na $G$ primitivní funkci.*

*Důkaz.* Nechť $z_0$ je střed hvězdovitosti $G$, Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický ③ $\Rightarrow$ ① předchozí věty, když místo ③ uvažujeme (6). $\square$

**Poznámka 5.24.** Cauchyho věta – Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a $\varphi$ je uzavřená křivka v $G$. Potom Cauchyho věty nám říkají za jakých podmínek na $G$ a $\varphi$ je $\int_\varphi f = 0$.

**Věta 5.25 (Gousartovo lemma – „Cauchyho věta pro $\triangle$“).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a $\triangle$ je trojúhelník v $G$. Potom*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0. \tag{7}$$

*Důkaz.* Označme $\varphi_0 := \partial\triangle$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě $\triangle$ je nedegenerovaný. V $\triangle$ veďme střední příčky a označme $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$ obvody čtyř vzniklých trojúhelníků ($\psi_4$ je obvod vnitřního trojúhelníka). Obvody vnitřních trojúhelníků $\psi_1$(vlevo dole), $\psi_2$(vpravo dole), $\psi_3$(nahoře) a $\psi_4$(uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$. Ex. $j_1 = 1, \ldots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků, tž $\triangle\psi_{j_1}$ zase rozdělíme na 4 menší $\triangle$-y středními příčkami a proces opakujeme. Pak $\triangle_0 := \triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$ s obvody $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... takové, že

$$\begin{aligned} \left|\int_{\varphi_j} f\right| &\geq \frac{K}{4^j} \quad \text{a} \\ V(\varphi_j) &= \frac{V(\varphi)}{2^j} \end{aligned} \tag{a}$$

. Máme, že $\bigcap_{j=0}^{\infty} \triangle_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\operatorname{diam}(\triangle_j) \to 0$. Položme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0),\ z \in G\setminus\{z_0\}; \\ 0,\ z = z_0 \end{cases}$$

Potom $\varepsilon$ je spojitá na $G$ a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0))\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z, \tag{b}$$

kde první integrand vpravo má PF na $\mathbb{C}$ a první integrál je roven 0. Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ z (a),(b) dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leq \left|\int_{\varphi_j} f\right| \overset{(b)}{=} \left|\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z-z_0)\right| \leq V^2(\varphi_j) \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \overset{(a)}{=} \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po vynásobení $4^j$): $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \to 0$, protože $\varepsilon$ je spojitá v $z_0$ a $\varepsilon(z_0) = 0$. Což je spor. $\square$

**Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom $f$ má na $G$ primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku $\varphi$ v $G$.*

*Důkaz.* Z Goursartova lemmatu a dodatku k větě o existenci PF (Dodatek 5.23). □

**Poznámka 5.27.** Gousartovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci $f$, která je spojitá na $G$ a holomorfní na $G\backslash\{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

*Důkaz.* Nechť $\triangle$ je nedegenerovaný trojúhelník v $G$. Rozlišujeme případy:

1. Nechť $z_0 \notin \triangle$. Potom $\int_{\partial\triangle} f = 0$. Dle Gousartova lemmatu.

2. Nechť $z_0$ je vrchol $\triangle$. Nechť $\triangle_\varepsilon$ je trojúhelník podobný s $\triangle$, $\triangle_\varepsilon \subset \triangle$ a $z_0$ je jeho vrcholem. Nechť poměr stran $\triangle$ ku $\triangle_\varepsilon$ je roven $\varepsilon$. $\triangle'$, $\triangle''$ jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením $\triangle$ na tři trojúhelníky ($\triangle_\varepsilon$, $\triangle'$, $\triangle''$). Obvody vzniklých vnitřních trojúhelníků procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle_\varepsilon} f + \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f$, kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $|\int_{\partial\triangle} f| = |\int_{\partial\triangle_\varepsilon} f| \le \varepsilon \cdot V(\partial\triangle) \cdot \max_\triangle |f| \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$. Tedy $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

3. Nechť $z_0$ leží uvnitř strany $\triangle$. Potom $\triangle$ rozřízneme na dva menší trojúhelníky $\triangle'$ a $\triangle''$ se společným vrcholem v $z_0$. Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f$, kde oba integrály na pravé straně jsou rovny 0 podle bodu 2. Tudíž $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

4. Nechť $z_0$ leží uvnitř $\triangle$. Potom $\triangle$ rozřízneme na tři menší trojúhelníky $\triangle'$ a $\triangle''$, $\triangle'''$ se společným vrcholem v $z_0$. Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f + \int_{\partial\triangle'''} f$, kde jsou všechny tři integrály na pravé straně rovny 0 podle bodu 2. Tudíž $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

□

**Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru).** *Nechť $\varphi$ je křivka v $\mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z,s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z,s)$ jsou spojité komplexní funkce na $\langle\varphi\rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položme $\phi(s) := \int_\varphi F(z,s)dz$. Potom $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\phi'(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s}(z,s)dz$, $s \in \Omega$.*

*Důkaz.* Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1,\ s_2) \in \Omega$ máme $\phi(s) = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t),(s_1,s_2))\varphi'(t)dt$, pokud $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na reálných parametrech máme $\frac{\partial\phi}{\partial s_j}(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)dz$, pro $s \in \Omega$ a $j = 1,2$ navíc jsou tyto parciální derivacespojité a splňují (CR)-podmínky. To je vidět z toho, že $\frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)$, $j = 1,2$ jsou spojité a splňují (CR)-podmínky. Z (CR) dostaneme, že funkce $\varphi$ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. Odtud plyne věta. □

**Definice 5.29.** Nechť je $\varphi$ uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C}\backslash\langle\varphi\rangle$. Potom číslo

$$ind_\varphi s := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$$

nazveme *indexem bodu s vzhledem ke křivce $\varphi$*

**Poznámka 5.30.** Ukážeme si, že $ind_\varphi s$ se rovná počtu oběhů $\varphi$ kolem $s$ v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

**Věta 5.31 (o základních vlastnostech indexu).** *Nechť $\varphi$ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $G := \mathbb{C}\backslash\langle\varphi\rangle$. Potom je $G$ otevřená, funkce $s \mapsto ind_\varphi s$ je konstantní na každé komponentě $G$ a na jediné její neomezené komponentě je nulová.*

*Důkaz.* (i) Podle předchozí věty je $\phi(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má PF na $\mathbb{C}\backslash\{s\}$. Tedy $\phi$ je konstantní na každé komponentě $G$.

(ii) Volíme $R > 0$, aby $\langle\varphi\rangle \subset U(0,R)$. Potom $\mathbb{C}\backslash U(0,R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě $G_0$ množiny $G$. Navíc pro $s \in \mathbb{C}\backslash U(0,R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0,R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\phi(s) = 0$

$\square$

**Příklad 5.32.** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Potom

$$ind_\varphi s = \begin{cases} 0 & \text{pro } |s - z_0| < r, \\ 1 & \text{pro } |s - z_0| > r. \end{cases}$$

Spočetli jsme, že $ind_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-z_0} = 1$. Zbytek plyne z předchozí věty.

**Věta 5.33 (Cauchyův vzorec pro kruh).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0,r)} \subset G$ a $\varphi(t) := z_0 + r.e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ $(*)$. Potom platí*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz = \begin{cases} f(s), & |s - z_0| < r \\ 0, & |s - z_0| > r \end{cases} \qquad (CV_z)$$

*Důkaz.* Existuje $R > r$ tak, že $U(z_0,R) \subset G$.
(i) Nechť $|s - z_0| < r$. Definujme

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z \neq s \ \ a \ \ z \in G \\ f'(s), & z = s. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U(z_0,R) \setminus \{s\})$ a spojitá na hvězdovité oblasti $U(z_0,R)$. Potom z Cauchyho věty

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi h = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz - f(s).\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}}_{=ind_\varphi s = 1}$$

(ii) Nechť $|s - z_0| > r$. Volme $R' \in (r, |s - z_0|)$, aby $U(z_0,R') \subset G$. Potom $f(z)/(z-s)$ je holomorfní funkce na $U(z_0,R')$ a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz = 0.$$

$\square$

**Důsledek 5.34.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom $f$ má komplexní derivaci všech řádů všude na $G$. Nechť $\overline{U(z_0,r)} \subset G$ a $\varphi$ je jako v $(*)$. Potom*

$$f^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}}dz, \quad |s - z_0| < r \ \ a \ \ k = 0,1,2,3,... \qquad (CV_z^{(k)})$$

*Zde $f^{(0)} = f$ a $k$-tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.*

*Důkaz.* Z věty o derivaci integrálu dle komplexního parametru a $(CV_z)$, protože

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{z-s}\right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

$\square$

**Věta 5.35 (Morera).** *Nechť $f$ je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{pro každý trojúhelník } \triangle \subset G. \tag{8}$$

*Důkaz.* "$\Rightarrow$": Goursatovo lemma
"$\Leftarrow$": Nechť $\mathcal{U} := U(z_0, R)$ je libovolný kruh v $G$. Protože $f$ je spojitá na $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ je hvězdicovitá oblast a

$$\int_{\partial\triangle} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset \mathcal{U}$, má $f$ na $\mathcal{U}$ primitivní funkci $F$, to znamená, že $f = F'$ na $\mathcal{U}$. Protože $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, máme $f' = F''$ na $\mathcal{U}$, tudíž $f$ je holomorfní na $\mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U}$ byl libovolný kruh v $G$, je $f \in \mathcal{H}(G)$. ☐

**Věta 5.36 (Cachyho odhady).** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a $f$ je holomorní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ je*

$$\forall s \in \mathcal{U} := U(z_0, r): \qquad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{r.k!}{(d(s))^{k+1}}.\max_{\partial\mathcal{U}} |f|, \tag{$CO_1$}$$

*kde* $d(s) := dist(s, \partial\mathcal{U}) \overset{def.}{:=} \underset{z \in \partial\mathcal{U}}{min} |s - z|$

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \qquad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!.2^{k+1}}{r^k}.\max_{\partial U} |f|. \tag{$CO_2$}$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k}.\max_{\partial U} |f|. \tag{$CO_3$}$$

*Důkaz.* $(CO_1)$ dostaneme z $(CV_z^{(k)})$, protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi}.2\pi r.\frac{1}{(d(s))^{k+1}}.\max_{\partial\mathcal{U}} |f|$$

a $|z - s| \geq d(s)$, $z \in \partial\mathcal{U} = \langle\varphi\rangle$, zde $\varphi(t) = z_0 + r.e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
$(CO_2)$ plyne z $(CO_1)$, protože $d(s) \geq \frac{r}{2}$ $\forall s \in U(z_0, r/2)$.
$(CO_3)$ plyne z $(CO_1)$, protože $d(z_0) = r$. ☐

**Věta 5.37 (Liouville).** *Je-li $f$ holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, potom je $f$ konstantní.*

*Důkaz.* Ukážeme, že $f' = 0$ na $\mathbb{C}$. Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Z $(CO_3)$ dostaneme pro každé $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{\partial U(z_0, r)} |f| \leq \frac{M}{r} \underset{r \to +\infty}{\to} 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. ☐

**Důsledek 5.38 (Základní věta algebry).** *V $\mathbb{C}$ má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň jeden kořen.*

*Důkaz.* Nechť $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$.
Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. Položme $f := 1/p$. Potom $f$ je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, tudíž dle Liouvilleovy věty je $f$ i $p$ konstantní. Tedy $p' = 0$ a $0 = p^{(n)} = n! a_0$, což je spor.
Omezenost $f$: Máme

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^n.(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n})} \right| \leq \frac{1}{r^n}.\frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \ldots - \frac{|a_n|}{r^n}} \longrightarrow 0$$

pro $r = |z| \to +\infty$.
Existuje $r_0 \in (0, +\infty)$ tak, že $|f(z)| \le 1$, je-li $|z| > r_0$. Funkce $f$ je omezená na $\overline{U(0, r_0)}$, protože je tam spojitá. $\square$

**Lemma 5.39.** *Nechť $\varphi$ je křivka v $\mathbb{C}$, $f_n$ jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom $f$ je spojitá na $\langle\varphi\rangle$ a*

$$\int_\varphi f_n \longrightarrow \int_\varphi f.$$

*Důkaz.* Máme

$$0 \le \left| \int_\varphi f_n - \int_\varphi f \right| = \left| \int_\varphi (f_n - f) \right| \le V(\varphi). \max_{\langle\varphi\rangle} |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

**Věta 5.40 (Weierstrass).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $G$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)}$ na $G$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

*Důkaz.* 1 Zřejmě je $f$ spojitá. Nechť $\triangle$ je trojúhelník v $G$. Potom

$$0 = \int_{\partial\triangle} f_n \overset{Lemma}{\longrightarrow} \int_{\partial\triangle} f = 0$$

Z Morerovy věty je $f \in \mathcal{H}(G)$.
2 Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Potom z $(CO_2)$ máme:

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \quad \left| f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s) \right| = \left| (f_n - f)^{(k)}(s) \right| \le \frac{k!.2^{k+1}}{r^k}. \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

# 6 Mocninné řady

**Definice 6.1.** Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=0}^\infty a_n.(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \tag{9}$$

je mocninná řada o středu $z_0$ s koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^\infty$.

**Vlastnosti 6.2.**

1 **Konvergence** (na cvičení)
Existuje jediné $R \in [0, +\infty]$ takové, že

- řada (9) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,
- řada (9) diverguje pro $|z - z_0| > R$.

Číslo $R$ se nazývá poloměr konvergence (9) a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde položíme $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.
② Označíme-li součet (9) na $U(z_0, R)$ jako $f$, potom je $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall z \in U(z_0, R): \qquad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n.n.(n-1)...(n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

speciálně $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

**Poznámka 6.3.** Mocninnou řadu derivujeme "člen po členu", můžeme na $U(z_0, r)$ zaměnit sumu a komplexní derivaci.

*Důkaz.* Užijeme Weierstrassovu větu na

$$S_n(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n, \qquad z \in U(z_0, R)$$

Dosadíme-li do (9) $z = z_0$, máme $f^{(k)}(z_0) = a_k.k!$ □

**Věta 6.4 (O rozvoji holomorfní funkce na kruhu do mocninné řady).** *Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet $f$. Navíc platí, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

*Důkaz.*

1. jednoznačnost: Zřejmě z toho, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
2. existence: Nechť $z \in U(z_0, R)$. Volme $r > 0$, aby $|z - z_0| < r < R$. Potom z $(CV_z)$ je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \tag{a}$$

kde $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Pro každé $w \in \langle\varphi\rangle$ máme

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}. \tag{b}$$

Kde $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| < 1$ a suma konverguje stejnoměrně pro $w \in \langle\varphi\rangle$. Dosadíme (a) do (b). Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w) \, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{aligned}$$

z $(CV_z^{(k)})$.

□

**Příklad 6.5.** $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, protože $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$.

**Věta 6.6 (O nulovém bodě).** *Nechť $f$ je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0)=0$. Potom buď*

1. *existuje $r>0$, že $f=0$ na $U(z_0,r)$, nebo*
2. *existuje $r>0$, že $f\neq 0$ na $P(z_0,r):=U(z_0,r)\setminus\{z_0\}$.*

*V případě 2. existuje jediné $p\in\mathbb{N}$ takové, že*

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(p-1)}(z_0)=0, \qquad f^{(p)}(z_0)\neq 0. \tag{10}$$

*Číslo $p$ nazýváme násobnost nulového bodu $z_0$ funkce $f$.*

**Poznámka 6.7.** Navíc $z_0$ je nulový bod $f$ násobnosti $p$, právě když existuje $r>0$ a $g\in\mathcal{H}(U(z_0,r))$ tak, že $\forall z\in U(z_0,r)$:

$$g(z)\neq 0 \quad \text{a} \quad f(z)=(z-z_0)^p g(z). \tag{11}$$

*Důkaz.* Máme, že $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z\in U(z_0,r)$. Pokud nenastane 1., potom existuje $n\in\mathbb{N}$, že $0\neq a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Zvolme nejmenší $p\in\mathbb{N}$, aby $a_p\neq 0$. Potom platí (10) a

$$\forall z\in U(z_0,r):\ f(z)=a_p(z-z_0)^p+\ldots=(z-z_0)^p\cdot\underbrace{\sum_{n=p}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-p}}_{:=\,g(z)}. \tag{12}$$

Dále $g(z)$ definujeme jako poslední sumu. Protože $g(z_0)=a_p\neq 0$, existuje $r>0$, že $g\neq 0$ na $U(z_0,r)$ a $f(z)=(z-z_0)^p g(z)\neq 0$ na $P(z_0,r)$. Obrácené tvrzení z poznámky je snadné. $\square$

**Věta 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce).** *Nechť $\emptyset\neq G\subset\mathbb{C}$ je oblast a $f,g\in\mathcal{H}(G)$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *$f=g$ na $G$;*
2. *množina $M:=\{z\in G: f(z)=g(z)\}$ má v $G$ hromadný bod, tj. existuje $z_0\in G$ takový, že $\forall r>0:\ M\cap P(z_0,r)\neq\emptyset$*
3. *existuje $z_0\in G$, že $\forall k\in\mathbb{N}_0:\ f^{(k)}(z_0)=g^{(k)}(z_0)$ .*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti $g\equiv 0$ na $G$ (jinak uvažme $f-g$).
1 $\Rightarrow$ 2: triviální, 2 $\Rightarrow$ 3: Nechť $z_0\in G$ je hromadný bod $M:=\{z\in G:\ f(z)=0\}$. Z věty o nulovém bodě je $f=0$ na nějakém okolí $z_0$, tudíž platí 3.
3 $\Rightarrow$ 1: Nechť $N:=\{z\in G:\ \forall k\in\mathbb{N}_0: f^{(k)}(z)=0\}$. Potom $\emptyset\neq N$, $N$ je uzavřená v $G$, protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc $N$ je otevřená. Nechť $z_1\in N$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r>0$, že $f=0$ na $U(z_1,r)$. Tedy $U(z_1,r)\subset N$. Protože $G$ je oblast, dostaneme $N=G$ a speciálně 1. $\square$

**Příklad 6.9.** Vzoreček $\sin(2z)=2\sin(z)\cos(z)$, $z\in\mathbb{C}$ dostaneme z věty o jednoznačnosti, protože obě strany rovnosti jsou celé funkce a víme, že rovnost platí na $\mathbb{R}$ (tzn. platí 2).

**Poznámka 6.10.** Podobně lze řadu vzorečků bez počítání zobecnit z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$!

**Věta 6.11 (Princip maxima modulu).** *Nechť $G\subset\mathbb{C}$ je oblast a $f\in\mathcal{H}(G)$. Potom je $f$ konstantní na $G$, pokud $|f|$ nabývá na $G$ lokální maximum, tzn. existuje $z_0\in G$ a $r>0$ tak, že*

$$\forall z\in U(z_0,r)\subset G:\ |f(z)|\leq|f(z_0)| \tag{13}$$

*Důkaz.* Nechť platí (13). Potom $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $z\in U(z_0,r)$. Pro $0<\rho<r$ platí, že

$$\begin{aligned}|a_0|^2=|f(z_0)|^2&\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{it})|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho^n e^{int}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m}\rho^m e^{-imt}\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_n.\overline{a_m}\rho^{n+m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it(n-m)}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\rho^{2n},\end{aligned}\tag{14}$$

neboť

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it(n-m)}\,\mathrm{d}t=0,\text{ pro } n\neq m \text{ a}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it(n-m)}\,\mathrm{d}t=1,\text{ pro } n=m.$$

Nebo-li $|a_0|^2\geq|a_0|^2+|a_1|^2\rho^2+\cdots$, tudíž $0=a_1=a_2=\cdots$. Dostáváme,že $f=a_0$ na $U(z_0,r)$ a z věty o jednoznačnosti $f=a_0$ na $G$. □

# 7 Riemannova sféra

Rozšíříme $\mathbb{C}$ o *nekonečno*. Položíme $\mathbb{S}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, kde $\infty\notin\mathbb{C}$, a pro $\varepsilon>0$ zavedeme *okolí* kolem $\infty$ $P(\infty,\varepsilon):=\{z\in\mathbb{C}:|z|>\frac{1}{\varepsilon}\}$, $U(\infty,\varepsilon):=P(\infty,\varepsilon)\cup\{\infty\}$.

**Definice 7.1.** Řekneme, že $z_n\to z_0$ v $\mathbb{S}$, pokud $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0: z_n\in U(z_0,\varepsilon)$.

**Poznámka 7.2.** Z definice plyne:

- $z_n\to z_0$ v $\mathbb{S}$ a $z_0\in\mathbb{C}\Leftrightarrow z_n\to z_0$ v $\mathbb{C}$.
- $z_n\to\infty\Leftrightarrow|z_n|\to+\infty\Leftrightarrow\frac{1}{z_n}\to 0$. Zde $\frac{1}{\infty}:=0$ a $|\infty|:=+\infty$.

**Poznámka 7.3.** $\mathbb{S}$ je jednobodová kompaktifikace topologického prostoru $\mathbb{C}$.

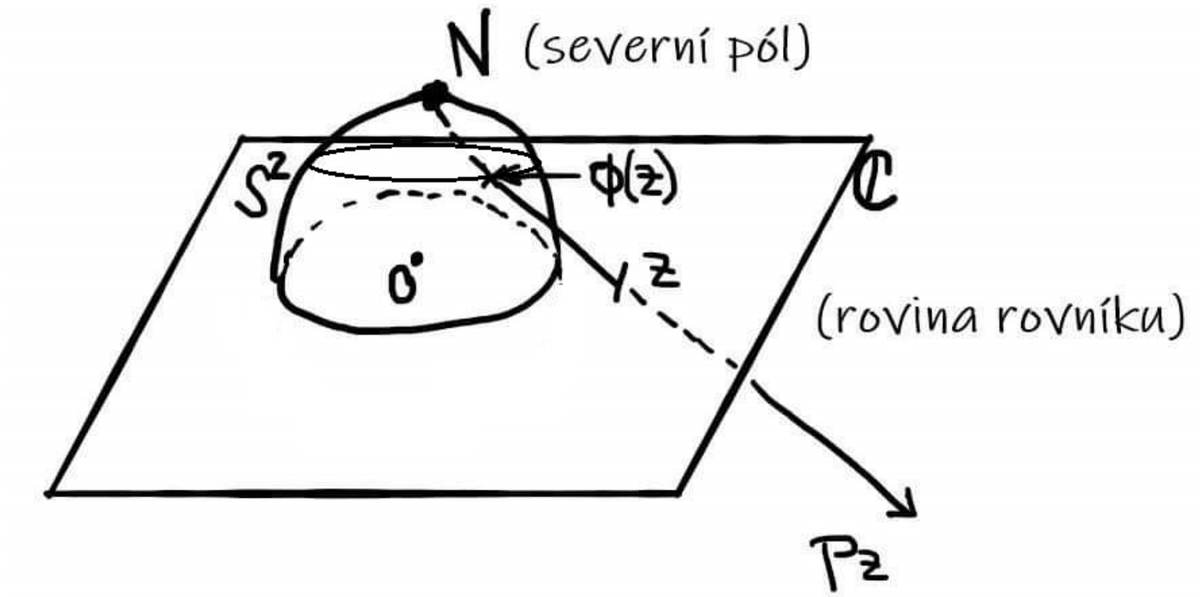
**Vlastnosti 7.4.**

Na $\mathbb{S}$ zavedeme metriku $\varrho$ (není jediná), tž.

$$\left(z_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}z_0\text{ v }\mathbb{S}\right)\Leftrightarrow\varrho(z_n,z_0)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\tag{*}$$

Navíc $(\mathbb{S},\varrho)$ bude *izometrický* s jednotkovou sférou $S^2:=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3:\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\}$, kterou chápeme jako metrický podprostor $\mathbb{R}^3$. Speciálně $(\mathbb{S},\varrho)$ je *kompaktní.*

- Definujeme *stereografickou projekci* $\phi:\mathbb{C}\to S^2\setminus\{N\}$ jako na obrázku, kde $N=(0,0,1)$.




Položme $\phi(\infty) := N$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $\{\phi(z)\} = (S \setminus \{N\}) \cap p_z$, kde $p_z$ je polopřímka z $N$ procházející bodem $z \in \mathbb{C}$. Potom $\phi : \mathbb{S} \xrightarrow{na} S^2$ je bijekce.

**Cvičení 7.5.** .

- $\phi(z) := \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$.
- $\phi^{-1}(\alpha,\beta,\gamma) := \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma}\right)$, pro $(\alpha,\beta,\gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$

- Položme $\varrho(z,w) := |\phi(z) - \phi(w)|$, $z,w \in \mathbb{S}$, kde $|\cdot|_S$ je Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^3$ ($\phi$ je izometrie $(\mathbb{S},\varrho)$ na $S^2$)
- Platí (*). Skutečně, z předchozího bodu a z cvičení máme: $\varrho(z_n,z_0) \to 0 \Leftrightarrow \phi(z_n) \to \phi(z_0) \Leftrightarrow z_n \to z_0$ v $\mathbb{S}$, protože $\phi$ i $\phi^{-1}$ jsou spojité.

**Příklad 7.6.** Nechť $z_n \in \mathbb{C}$ a $z_n \to \infty$. Potom $|z_n| \to +\infty$, $\phi(z_n) \in S^2$, proto $\phi_3(z_n) \to 1$. Odtud $\phi(z_n) \to N := (0,0,1)$

**Příklad 7.7.** Nechť $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n) \in S^2 \setminus \{N\}$ a $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n) \xrightarrow{n\to\infty} N$. Potom $|\phi^{-1}(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)|^2 = \frac{1-\gamma_n^2}{(1-\gamma_n)^2} = \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \to +\infty$. Tudíž $\phi^{-1}(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n) \to \infty$.

**Definice 7.8.** Nechť $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ a $z_0, L \in \mathbb{S}$. Potom $L = \lim_{z\to z_0} f(z)$, pokud pro každou $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{S}$, $z_0 \neq z_n$ platí $z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to L$.

**Poznámka 7.9.** Platí:

1. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f(1/z)$, má-li alespoň jedna strana smysl.
2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} 1/f(z) = 0$.

**Věta 7.10 (Aritmetika limit v $\mathbb{S}$).** *Platí:*

$$\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)},$$

*mají-li pravé strany smysl, pokud definujeme* $\forall a \in \mathbb{C}: \ a/\infty = 0,\ \forall a \in \mathbb{S}\setminus\{0\}: \ a/0 = \infty,\ \forall a \in \mathbb{C}: a \pm \infty = \infty,\ \forall a \in \mathbb{S}\setminus\{0\}: \ a \cdot \infty = \infty.$
*Nedefinujeme:* $0/0,\ \infty/\infty,\ \infty \pm \infty,\ 0 \cdot \infty.$

**Příklad 7.11.** *Racionální funkce* lze chápat jako spojité funkce z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$. Skutečně, nechť $R = P/Q$, kde $P$, $Q$ jsou polynomy, $Q \neq 0$ a $P$, $Q$ nemají stejné kořeny.

1. Nechť $Q(z_0) = 0$. Potom $P(z_0) \neq 0$ a $\lim_{z\to z_0} R(z) = \infty$. Položme $R(z_0) := \infty$.

2. Pokud $R \not\equiv 0$, potom

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\overbrace{a_0}^{\neq 0} z^n + \cdots + a_n}{\underbrace{b_0}_{\neq 0} z^m + \cdots + b_m} = \lim_{z\to\infty} z^{n-m} \left( \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_m}{z^m}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{pro } n = m, \\ \infty & \text{pro } n > m. \end{cases}$$

Položme $R(\infty) := \lim_{z\to\infty} R(z)$.

## 7.1 Izolované singularity

**Definice 7.12.** Nechť $f$ je holomorfní funkce na $P(z_0)$, ale není holomorfní na $U(z_0)$. Potom $f$ má v $z_0$

1. *izolovanou singularitu* (*odstranitelnou singularitu*), existuje-li $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$,

2. *pól*, je-li $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$,

3. *podstatnou singularitu*, pokud $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

**Příklad 7.13.**

$$\begin{aligned} &\frac{\sin z}{z} \text{ má v 0 odstranitelnou singularitu,} \\ &\frac{1}{z^{10}} \text{ má v 0 pól,} \\ &e^{1/z} \text{ má v 0 podstatnou singularitu.} \end{aligned}$$

**Věta 7.14 (O odstranitelné singularitě).** *Nechť $f$ je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$z_0$ je odstranitelná singularita $f$,*

2. *existuje $r > 0$ tak, že $f$ je omezená na $P(z_0, r)$,*

3. *existuje $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $F = f$ na $P(z_0)$.*

**Úmluva 7.15.** Odstranitelná singularita je vždy odstraněna ve smyslu (3). Dodefinujeme $f$ v $z_0$ holomorfně.

*Důkaz.* (1) $\Rightarrow$ (2): triviální, (2) $\Rightarrow$ (3): Položme

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{pro } z \in P(z_0), \\ 0 & \text{pro } z = z_0. \end{cases}$$

Potom $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$, protože

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \underbrace{(z - z_0)}_{\to 0} \underbrace{f(z)}_{omez.} = 0.$$

Navíc pro každé $z \in U(z_0)$ je

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 F(z),$$

kde

$$F(z) \overset{def.}{:=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}, \ z \in U(z_0).$$

Zřejmě $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $F = f$ na $P(z_0)$. (3) $\Rightarrow$ (1): jasné. $\square$

**Věta 7.16 (O pólu).** *Nechť $f$ je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$z_0$ je pól $f$,*
2. *$h := \frac{1}{f}$ a $h(z_0) := 0$ má v $z_0$ nulový bod násobnosti $p$ pro nějaké $p \in \mathbb{N}$,*
3. *existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že*
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$
4. *existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \in \mathbb{Z}$*
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

*Číslo $p$ z 2.–4. je určeno jednoznačně a nazývá se* násobnost pólu $z_0$ *funkce $f$.*

**Poznámka 7.17.** Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \to z_0$, je-li $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom 3. $\iff$ $f(z) \sim \frac{1}{(z - z_0)^p}$, pro $z \to z_0$.

*Důkaz.* 1. $\Rightarrow$ 2. Protože $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, je $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Po odstranění odstranitelné singularity má $1/f$ v $z_0$ nulový bod konečné násobnosti $p \in \mathbb{N}$.
2. $\Rightarrow$ 3. Existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $h(z) = (z - z_0)^p g(z)$, $z \in U(z_0, r)$. Potom

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p \underbrace{f(z)}_{= \frac{1}{h(z)}} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

3. $\Rightarrow$ 4. Máme

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k-p} \underbrace{(z - z_0)^p f(z)}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}} = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

4. $\Rightarrow$ 1. Položíme $k = 0$. $\square$

**Věta 7.18 (Casorati-Weierstrass).** *Nechť $f$ je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$z_0$ je podstatná singularita $f$,*
2. *$\forall r > 0 : \overline{f(P(z_0,\ r))} = \mathbb{C}$.*

**Poznámka 7.19 (Velká Picardova věta).** 1. $\iff$ 3.

3. $\forall r > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0,\ r))$ je nejvýše jednobodová [hluboká věta, důkaz nebude].

**Příklad 7.20.** $\exp(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exp(1/z)$ má v 0 podstatnou singularitu.

*Důkaz.* 2. $\Rightarrow$ 1. Jasné z definice limity.
$\neg$ 2. $\Rightarrow \neg$ 1. Předpokládejme, že existuje $r > 0$ tak, že $\mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0,\ r))} \neq \emptyset$ a $f \in \mathcal{H}(P(z_0,\ r))$. Potom existuje $U(u_0,\ \beta) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0,\ r))}$, speciálně máme, že $0 < |z - z_0| < r \Rightarrow |f(z) - u_0| \geq \beta$. Definujeme

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - u_0},\ z \in P(z_0,\ r). \tag{*}$$

Potom je $g$ holomorfní a $|g| \leq \frac{1}{\beta}$ na $P(z_0,\ r)$. Tedy $z_0$ je odstranitelná singularita a existuje $L := \lim_{z \to z_0} g(z) \in \mathbb{C}$. Potom máme

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \overset{(*)}{=} \lim_{z \to z_0} \left( u_0 + \frac{1}{g(z)} \right) = \begin{cases} \infty & \text{pro } L = 0, \\ \in \mathbb{C} & \text{pro } L \neq 0. \end{cases}$$

Tedy $f$ má v $z_0$ buď odstranitelnou singularitu anebo pól. □

## 7.2 Laurentovy řady

**Definice 7.21.** Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}_{(L)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{(H)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}_{(R)} \tag{15}$$

je *Laurentova řada* s koeficienty $a_n$ a středem $z_0$. Řada $(R)$ je *regulární část* $(L)$ a řada $(H)$ je *hlavní část* $(L)$. Řekneme, že $(L)$ konverguje, pokud obě její části, tj. $(H)$ i $(R)$, konvergují.

**Příklad 7.22.**

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

**Vlastnosti 7.23** (L)**.**

1. *Konvergence:* Existují *jediná* $R, r \in [0,\ +\infty]$ tak, že

   1. řada $(R)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| < R$ a diverguje na $|z - z_0| > R$,
   2. řada $(H)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| > r$ a diverguje na $|z - z_0| < r$.

2. *Součet:* Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ (toto ne vždy platí: může se stát, že řada nekonverguje). Položme *mezikruží* $P(z_0,\ r,\ R) := \{z \in \mathbb{C} :\ r < |z - z_0| < R\}$. Označíme-li součet $(L)$ jako $f$, potom na $P(z_0,\ r,\ R)$ je $f$ holomorfní, řadu $(L)$ tam derivujeme "člen po členu", atd.

**Poznámka 7.24.** Zkracujeme $P(z_0,R) = P(z_0,0,R)$ a $P(z_0,r) = P(z_0,r,\infty)$

*Důkaz.* 1. Číslo $R$ je poloměr konvergence mocninné řady $(R)$. Pro $w = \frac{1}{z-z_0}$ je řada $(H)$ rovna mocninné řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n. \tag{*}$$

Číslo $\frac{1}{r}$ je poloměr konvergence (*).
2. Plyne opět z Weierstrassovy věty. $\square$

$\boxed{\text{Cíl}}$ Ukážeme, že $f \in \mathcal{H}(P(z_0,\ r,\ R))$, právě když existuje jediné $(L)$, které má na $(P(z_0,\ r,\ R))$ součet $f$.

## 7.3 Holomorfní funkce na mezikruží

**Lemma 7.25.** *Nechť $f$ je holomorfní funkce na $P(z_0,r,R) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\}$, kde $0 \le r < R \le +\infty$. Pro každé $\rho \in (r,R)$ označme*

$$\varphi_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}, \text{ pro } t \in [0,2\pi] \tag{$\triangle$}$$

*a $J(\rho) = \int_{\varphi_\rho} f$. Potom je $J$ konstantní na $(r,R)$.*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti nechť $z_0 = 0$. Nechť $\rho \in (r,R)$. Potom máme

$$J(\rho) = i\int_0^{2\pi} f(\rho e^{it})\rho e^{it}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} g(\rho e^{it})\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(z) := f(z)\cdot z$, $z \in P := P(0,r,R)$. Dále

$$J'(\rho) {=} \frac{i}{\rho}\int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it})\rho e^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\rho}\int_{\varphi_\rho} g' = 0, \tag{$\times$}$$

protože $g'$ má PF $g$ na $P$. Platí $(\times)$, protože

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(g\left(\rho e^{it}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\cos t + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\sin t \overset{\text{CR věta}}{=} g'\cos t + ig'\sin t = g'\left(\rho e^{it}\right)e^{it}.$$

$\square$

**Věta 7.26 (Cauchyho vzorec na mezikruží).** *Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$, kde $P := P(z_0,r,R)$. Nechť $r < r_0 < R_0 < R$ a $s \in P(z_0,r_0,R_0)$. Potom platí*

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z, \tag{$\square$}$$

*kde $\varphi_\rho$ je jako v $(\triangle)$.*

*Důkaz.* Pro $z \in P$ položme

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s} & \text{pro } z \neq s,\\ f'(s) & \text{pro } z = s.\end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(P)$, protože $h$ má „odstraněnou“ singularitu v $s$. Podle lemmatu máme

$$\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-s} - f(s)\int_{\varphi_{R_0}} \frac{\mathrm{d}z}{z-s}, \text{ kde poslední integrál je roven } 2\pi i\cdot \operatorname{ind}_{\varphi_{R_0}} s = 2\pi i,$$

$$\int_{\varphi_{r_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-s} - f(s)\int_{\varphi_{r_0}} \frac{\mathrm{d}z}{z-s}, \text{ kde poslední integrál je roven } 2\pi i\cdot \operatorname{ind}_{\varphi_{r_0}} s = 0.$$

Dále $\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} h$, tudíž platí $(\square)$. $\square$

**Věta 7.27 (O Laurentově rozvoji holomorfní funkce na mezikruží).** *Nechť* $P := P(z_0,r,R)$, *kde* $0 \le r < R \le +\infty$. *Nechť* $f \in \mathcal{H}(P)$. *Potom existuje jediná Laurentova řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{L}$$

*která má na* $P$ *součet* $f$.

*Důkaz.* 1. jednoznačnost: Nechť platí $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in P$. Je-li $\rho \in (r,R)$ a $m \in \mathbb{Z}$, pak

$$\int_{\varphi_\rho} f(z)(z-z_0)^{-(m+1)}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-m-1}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\varphi_\rho} (z-z_0)^{n-m-1}\,\mathrm{d}z =$$

$= 2\pi i \cdot a_m$, kde v druhé rovnosti suma konverguje stejnoměrně na $\langle\varphi_\rho\rangle$ a poslední integrál je roven 0 pro $n \neq m$ a $2\pi i \cdot \mathrm{ind}_{\varphi_\rho} z_0 = 2\pi i$ pro $n = m$.

Závěr: koeficienty (L) se dají vyjádřit pomocí součtu $f$ jako

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz,\ m \in \mathbb{Z}, (**), \tag{**}$$

kde $\varphi_\rho$ je jako v ($\triangle$). Podle lemmatu integrandy nezávisejí na $\rho \in (r,R)$.

2. existence: Nechť $s \in P$. Volme $r < r_0 < R_0 < R$, aby $s \in P(z_0,r_0,R_0)$. Potom z Cauchyho vzorce máme

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-s}, \tag{a}$$

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{b}$$

neboť $\left|\frac{s-z_0}{z-z_0}\right| < 1$, tedy řada konverguje stejnoměrně pro $z \in \langle\varphi_{R_0}\rangle$;

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{(-1)}{s-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}, \tag{c}$$

neboť $\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < 1$, tedy řada konverguje stejnoměrně pro $z \in \langle\varphi_{r_0}\rangle$. Dosadíme (b), (c) do (a) a dostaneme

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^n \cdot a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^{-n-1} \cdot a_{-(n+1)}, \end{aligned} \tag{16}$$

kde $a_n$ jsou jako v (**).

□

## 7.4 Izolované singularity 2

**Věta 7.28 (O Laurentově rozvoji kolem izolované singularity).** *Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0,r))$ a $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in P(z_0,r)$. Potom*

1. *$f$ má v $z_0$ odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow \forall n < 0 : a_n = 0$;*
2. *$f$ má v $z_0$ pól násobnosti $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-p} \neq 0$ a $\forall n < -p : a_n = 0$;*
3. *$f$ má v $z_0$ podstatnou singularitu $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.*

*Důkaz.* 1. jasné

2. $f$ má v $z_0$ pól násobnosti $p$, právě když $g(z) := (z-z_0)^p f(z)$ má v $z_0$ odstranitelnou singularitu a po jejím odstranění je $g(z_0) \neq 0$. Neboli $(z-z_0)^p f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$, $z \in P(z_0,r)$ a $b_0 = g(z_0) \neq 0$, tzn.

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^{n-p},\ z \in P(z_0,r).$$

3. Z 1., 2. máme, že $f$ nemá v $z_0$ podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro konečně mnoho $n < 0$.

□

**Věta 7.29 (Rozklad holomorfní funkce s nekonečně mnoha izolovanými singularitami).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Pro každé $s \in M$ označme $H_s$ součet hlavní části Laurentova rozvoje funkce $f$ kolem $s$. Potom existuje jediná $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum\limits_{s\in M} H_s + h$ na $G \setminus M$.*

*Důkaz.* Zřejmě $\forall s \in M:\ H_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\})$. Funkce $h := f - \sum\limits_{s\in M} H_s$ je holomorfní na $G \setminus M$ a v bodech $s \in M$ má odstranitelné singularity. Skutečně, nechť $s_0 \in M$. Potom existuje $r_0 > 0$ tak, že $P(s_0,r_0) \subset G \setminus M$ a $f = R_{s_0} + H_{s_0}$ na $P(s_0,r_0)$, kde $R_{s_0}$ je součet regulární části Laurentova rozvoje $f$ kolem $s_0$ a $R_{s_0} \in \mathcal{H}(U(s_0,r_0))$. Tedy na $P(s_0,r_0)$ máme

$$h = R_{s_0} + H_{s_0} - \sum_{s\in M} H_s = R_{s_0} - \sum_{\substack{s \neq s_0 \\ s \in M,}} H_s \in \mathcal{H}(U(s_0,r_0)).$$

□

## 7.5 Reziduum

**Definice 7.30.** Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$ a nechť $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in P(z_0)$. Potom reziduem $f$ v $z_0$ nazveme číslo $\mathrm{res}_{z_0} f := a_{-1}$.

**Věta 7.31 (Reziduová na hvězdovitých oblastech).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Nechť $\varphi$ je uzavřená křivka v $G \setminus M$. Potom máme*

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s\in M} res_s f \cdot ind_\varphi s. \tag{RV}$$

**Poznámka.** Pro $M = \emptyset$ dostaneme Cauchyho větu.

*Důkaz.* Podle předchozí věty existuje $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s\in M} H_s + h$ na $G\setminus M$. Potom máme $\int_\varphi f = \sum_{s\in M} \int_\varphi H_s$, protože $\int_\varphi h = 0$ z Cauchyho věty pro hvězdovité oblasti. Pro každé $s \in M$:

$$\int_\varphi H_s(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \frac{1}{(z-s)^n}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{(z-s)^n} = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_s f \cdot \mathrm{ind}_\varphi s,$$

jelikož suma konverguje stejnoměrně na $\langle\varphi\rangle$ a poslední integrál je roven 0 pro $n \neq 1$ (neboť jinak má integrand PF, a tudíž je integrál přes uzavřenou křivku nulový) a $2\pi i \cdot \mathrm{ind}_\varphi s$, je-li $n = 1$. □

**Příklad 7.32.** Nechť $\varphi := \psi^t \dotplus [-1;1]$, kde $\psi^t(t) := e^{it},\ t \in [0,\pi]$. Potom $\mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle = G_0 \cup G_\infty$, kde $G_0$ je omezená komponenta ("vnitřek") a $G_\infty$ je neomezená komponenta ("vnějšek"). Platí

$$ind_\varphi s = \begin{cases} 1, & s \in G_0 \\ 0, & s \in G_\infty. \end{cases}$$

Položme $\tilde\varphi := \psi^- \dotplus [1;-1]$, kde $\psi^-(t) := e^{it},\ t \in [-\pi,0]$. Potom máme

$$1 = ind_{\varphi\dotplus\tilde\varphi} s = ind_\varphi s + ind_{\tilde\varphi} s.$$

# 8 Speciální typy integrálů

**Věta 8.1.** *Nechť $R = P/Q$, kde $P,Q$ jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí*

1. *$Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$,*
2. *$st(Q) \geq st(P)+2$, kde $st(Q)$ je stupeň polynomu $Q$.*

*Potom*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2i\pi. \sum_{\substack{Q(s)=0\\ Ims>0}} res_s R. \tag{17}$$

*Důkaz.* Ukažte, že integrál v (17) konverguje, právě když platí 1., 2. Nechť $r > 0$ a $\varphi_r := \varphi_r^1 \dotplus \varphi_r^2$, kde $\varphi_r^1(t) := t\ t \in [-r,r]$ a $\varphi_r^2(t) := re^{it},\ t \in [0,\pi]$. Je-li $r > 0$ tak velké, aby uvnitř $\varphi_r$ ležely všechny póly $R$ z horní polrovviny, potom

$$2i\pi. \sum_{\substack{Q(s)=0\\ Ims>0}} res_s R \overset{(RV)}{=} \int_{\varphi_r} R = \int_{\varphi_r^1} R + \int_{\varphi_r^2} R. \tag{18}$$

Máme

$$\int_{\varphi_r^1} R = \int_{-r}^{r} R \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} R.$$

Protože $\int_{\varphi_r^2} R \to 0$ pro $r \to +\infty$, dostaneme z (18) pro $r \to \infty$, že platí (17). Neboť existuje $C > 0$, $r_0 > 0$ tak, že $|R(z)| \leq \frac{C}{r^2}$, je-li $|z| = r \geq r_0$. Máme totiž

$$|R(z)| = \left|\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} ... + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_m}\right| = \frac{1}{|z|^2}|z|^{n-m+2}.\underbrace{\left|\frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + ... + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + ... + \frac{b_m}{z^m}}\right|}_{\overset{z\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_0}{b_0}}.$$

Tedy

$$\left|\int_{\varphi_r^2} R\right| \leq V(\varphi_r^2).\max_{\langle\varphi_r^2\rangle}|R| \leq r\pi\frac{C}{r^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

**Příklad 8.2.**
$$I = \int_0^\infty \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{sud\acute{a}} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{:=R(x)} dx = i\pi.(res_{z_0}R + res_{z_1}R)$$
$$= -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}}\left[(1+i)^2-(1-i)^2\right] = -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}}2.2i = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

protože
$$res_{z_k}R = \frac{z_k^2+1}{4z_k^3}.\frac{z_k}{z_k} = -\frac{1}{4}(z_k^2+1)z_k,$$
$$res_{z_0}R = -\frac{1}{4}(i+1)(1+i)\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)^2,$$
$$res_{z_1}R = -\frac{1}{4}(-i+1)(-1+i)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)^2.$$

**Věta 8.3.** *Nechť $R = P/Q$, kde $P,Q$ jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí*

1. $Q \neq 0$ *na* $\mathbb{R}$,
2. $st(Q) \geq st(p)+1$.

*Nechť $a > 0$. Potom*
$$\int_{-\infty}^\infty R(x)e^{iax}dx = 2i\pi.\sum_{\substack{Q(s)=0\\ Ims>0}} res_s\Big(R(z)e^{iaz}\Big). \tag{19}$$

*Důkaz.* Za cvičení:

- Dokažte, že Newtonův integrál v (19) konverguje právě když platí 1., 2.
- Jak se spočte tento integrál pro $a < 0$?

Jako v předešlé větě integrujeme podél $\varphi_r$ funkci $R(z)e^{iaz}$ a pošleme $r \to \infty$. Platí, že
$$\int_{\varphi_r^2} R(z)e^{iaz}dz \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{20}$$
z *Jordanova Lemmatu* (bylo na 5. cvičení), z 2. totiž máme, že $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. □

**Poznámka 8.4.** Je-li $a < 0$, potom (20) obecně neplatí. V tomto případě je nutno integrovat přes dolní půlkružnici.

**Příklad 8.5.** Spočteme Fourierovu transformaci $\mathcal{F}$ funkce $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$, kde
$$(\mathcal{F}f)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{itx}dx,\ t\in\mathbb{R}$$
.

- Nechť $t > 0$. Potom $(\mathcal{F}f)(t) = i.res_i(f(z)e^{itz}) = i.\frac{e^{-t}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2}$.
- Nechť $t < 0$. Potom $(\mathcal{F}f)(t) = i.res_{(-i)}(f(z)e^{itz}).(-1) = -i.\frac{e^{-t}}{2.(-i)} = \frac{e^t}{2}$.

**Lépe:**
$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(tx)+i\sin(tx)}{1+x^2}dx = \frac{e^{-|t|}}{2},\ t\in\mathbb{R}$$
.

**Příklad 8.6.**

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}Im\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{x.e^{ix}}{x^2+1}dx}_{:=I} = \frac{\pi}{2e},$$

protože

$$I = 2\pi i.res_i f = 2\pi i\frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{\pi i}{e}.$$

# 9 Obecná Cauchyho věta a reziduová věta pro cykly

**Definice 9.1.** Konečnou posloupnost $\Gamma := \{\varphi_1, ..., \varpi_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, ...\varphi_n$ jsou uzavřené (regulární) křivky v $\mathbb{C}$, budeme nazývat *cyklus*.

**Značení 9.2.** Nechť $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varpi_n\}$ je cyklus. Definujeme

- *graf* $\Gamma$ jako
$$\langle\Gamma\rangle := \bigcup_{k=1}^n \langle\varphi_k\rangle,$$
- *délku* $\Gamma$ jako
$$V(\Gamma) := \sum_{k=1}^n V(\varphi_k),$$
- je-li $f$ spojitá na $\langle\Gamma\rangle$, pak
$$\int_\Gamma f := \sum_{k=1}^n int_{\varphi_k} f,$$
- *index*
$$\text{ind}_\Gamma(z_0) := \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\varphi_k}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0},$$
- *vnitřek* $\Gamma$ jako $\text{Int}\Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle : \text{ind}_\Gamma(z_0) \neq 0\}$,
- *vnějšek* $\Gamma$ jako $\text{Ext}\Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle : \text{ind}_\Gamma(z_0) = 0\}$.

**Poznámka 9.3.**
- Rozmyslete si, že podobně jako pro křivky, je zobrazení $z \mapsto \text{ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$ konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$ a jediná neomezená komponenta $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$ leží v $\text{Ext}\Gamma$.
- Zřejmě máme rozklad $\mathbb{C} = \text{Int}\Gamma \cup \langle\Gamma\rangle \cup \text{Ext}\Gamma$, kde $\text{Int}\Gamma$, $\text{Ext}\Gamma$ jsou otevřené a $\langle\Gamma\rangle$, $\text{Int}\Gamma \cup \langle\Gamma\rangle$ jsou kompaktní.

**Příklad 9.4.** Je-li $\psi := \varphi \dot{-} \varphi$, $\varphi(t) := e^{it}$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Potom $\langle\psi\rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\text{Int}\psi = \emptyset$ a $\text{Ext}\psi = \mathbb{C} \setminus \langle\psi\rangle$.

**Poznámka 9.5.** Uzavřenou křivku $\varphi$ chápeme jako cyklus $\Gamma := \{\varphi\}$.

**Věta 9.6 (Obecná Cauchyho pro cykly).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $\Gamma$ je cyklus v $G$, tedy $\langle\Gamma\rangle \subset G$. Potom platí, že*

$$\forall f \in \mathcal{H}(G) : \int_\Gamma f = 0, \tag{CV}$$

*právě tehdy, když $Int\Gamma \subset G$.*

**Příklad 9.7.** Nechť $f$ je holomorfní funkce na mezikruží $P(z_0,r,R)$, kde $0 \leq r < R \leq \infty$. Nechť $r < r_1 < r_2 < R$ a $\varphi_j(t) := z_0 + r_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom víme, že $\int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$. Plyne to z předchozí věty pro $\Gamma := \{\dot{-}\varphi_1, \varphi_2\}$. Protože $\mathrm{Int}\Gamma = P(z_0, r_1, r_2)$, máme $0 = \int_\Gamma f = \int_{\varphi_1} f - \int_{\varphi_2} f$.

**Věta 9.8 (Reziduová pro cykly).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $\Gamma$ je cyklus v $G$ a $Int\Gamma \subset G$. Nechť $K \subset G \setminus \langle\Gamma\rangle$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus K)$. Potom platí*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i. \sum_{s \in K} res_s(f).ind_\Gamma(s). \tag{RVC}$$

*Důkaz.* Zcela analogický jako pro (RV) na hvězdovitých oblastech. □

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Kateřina Lipavská, Stanislav Mosný, Terka Poláková a Petr Sedláček