

Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

15. října 2020

Obsah

1	Zavedení základních pojmů	2
2	Lineární zobrazení	2
3	Diferencovatelnost	3
4	Elementární funkce v \mathbb{C}	5
4.1	Exponenciála	5
4.2	Logaritmus	6
4.3	Obecná mocnina	6
4.4	Hyperbolické funkce	7
4.5	Goniometrické funkce	7
5	Křivkový integrál	8
6	Mocninné řady	16
7	Riemannova sféra	18

1 Zavedení základních pojmů

\mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor \mathbb{C} je prostor \mathbb{R}^2 , v němž definujeme navíc:

- násobení $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme $(x, 0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0, 1)$

Vlastnosti 1.2.

Vlastnosti \mathbb{C} . Necht $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x + iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v \mathbb{C} zahrnuje násobení v \mathbb{R} i násobení skalárem v \mathbb{R}^2 .

Značení 1.3. Necht $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\bar{z} := x - iy$ je *komplexně sdružené číslo* k z ,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* z , $Im(z) := y$ je *imaginární část* z ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* z .

Dále platí

- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $z + \bar{z} = 2.Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- \mathbb{C} je těleso.

Pozor, \mathbb{C} nelze *rozumně* upořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. \mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1, 0)^T, (0, 1)^T)$. Obecné \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. \mathbb{C} je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné \mathbb{C} -lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Necht $z = (x + iy)$, $w = (a + ib)$. Potom

$$Lz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2.2. \mathbb{R} -lineární zobrazení (1) je \mathbb{C} -lineární, právě když $d = a$, $c = -b$.

Poznámka 2.3. \mathbb{C} -lineární zobrazení jsou velmi specifická \mathbb{R} -lineární zobrazení.

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné*. Na $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Necht f je funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* z_0 . Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí*. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0), P(z_0)$.

Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow x_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(x_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- f je spojitá v x_0 , pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v x_0 \mathbb{R} -diferencovatelná, pokud existuje \mathbb{R} -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $df(x_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* f v x_0 a platí, že

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Ta matice se nazývá *Jacobiho matice*.)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v x_0 \mathbb{C} -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme *komplexní derivací* f v x_0 .

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)'$ a $(f \circ g)'$.

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.

- $f(z) = \bar{z}$ není nikde v \mathbb{C} \mathbb{C} -diferencovatelná, ale $f(x, y) = (x, -y)$ je všude \mathbb{R} -diferencovatelná. Skutečně, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h},$$

avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. Existuje $f'(z_0)$
2. Existuje $df(z_0)$ a $df(z_0)$ je \mathbb{C} -lineární
3. Existuje $df(z_0)$ a v z_0 platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky.

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned} \tag{CR}$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Důkaz. (2. \iff 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. \iff 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. \square

Poznámka 3.7.

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz.

- $df(z_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- zřejmé

\square

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \bar{z}$, pak $f'(x, y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde \mathbb{C} -diferencovatelná.

Definice 3.9. Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G *holomorfní*, pokud f je \mathbb{C} -diferencovatelná v každém $z_0 \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních funkcí $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je *celá*, pokud $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Příklad 3.10.

- Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je *celá* funkce.
- Necht $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \neq 0$. Potom racionální funkce R je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$, kde $Q^{-1}(\{0\})$ je konečná množina.

4 Elementární funkce v \mathbb{C}

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp(z),$$

$$f_1(x, y) = e^x \cos y,$$

$$f_2(x, y) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Tedy $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Z CR-věty a **poznámky 3.7** máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- \exp není prostá na \mathbb{C} , je $2\pi i$ -periodická a platí dokonce:
 $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = z + 2k\pi i$
- Necht $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 4.3. Necht $z = x + iy$ je komplexní číslo, pak se na něj můžeme dívat jako na bod v rovině určený kartézskými souřadnicemi x a y . *Polární (Goniometrický) tvar komplexního čísla* získám tak, že si body x a y vyjádřím v polárních souřadnicích a ty pak dosadím do rovnice udávající z . Tedy

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z . Polární souřadnice nám říkají jak je daleko od počátku r a v jakém směru $\angle \varphi$ se bod z nachází.

Značení 4.4. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položíme $\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$. Je-li $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z) := \varphi_0$ je tzv. *hlavní hodnota argumentu* z .

Platí:

- $\operatorname{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$, kde \arg je surjektivní a navíc je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Dále je \arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme rovnici $e^w = z$.

- Pro $z = 0$ nemáme řešení.
- Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = \log|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.5. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

- $\text{Log } z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + i\arg z$, tzv. *hlavní hodnota logaritmu* z .

Vlastnosti 4.6.

Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_P)^{-1}$, kde P známe z vlastností exponenciály.
- \log není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s komplexním logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp z) \neq z$, z toho, že exponenciála je $2\pi i$ -periodická
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.7. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom *hlavní hodnotu α -té mocniny* z definujeme $z^\alpha := \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in \text{Log } z\}$.

Vlastnosti 4.8.

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s definicí z MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$

Důkaz. $w \in \text{Log } z \iff w = \log z + 2k\pi i$

□

- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pozorování 4.9. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Necht $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.

- Necht $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{\frac{2K\pi ip}{q}} \mid K = \{0, 1, \dots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q -úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $z^{\frac{p}{q}}$.
- Necht $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_{\alpha}(z)$ nekonečné.

Příklad 4.10. • $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$

- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s definicí z MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

- $(zw)^{\alpha} \neq z^{\alpha} w^{\alpha}$
např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.11. Je-li $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} =$ sudá část + lichá část.

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.12.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.13.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, kde

Definice 4.14.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.15. • \cos a \sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{C} .

- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- \sin i \cos jsou 2π -periodické, ale nejsou omezené na \mathbb{C} . Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na \mathbb{C} platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5 Křivkový integrál

Definice 5.1. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Potom

1. φ je *křivka*, pokud je φ spojitá
2. φ je *regulární křivka*, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0, \dots, n-1$.

Definice 5.2 (Úsečka). Necht $a, b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b . Značíme $[a; b]$.

Značení 5.3. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

Definice 5.4 (Lomenná čára). Řekneme, že regulární křivka φ je *lomenná čára* v \mathbb{C} , existují-li $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1; z_2] \dot{+} [z_2; z_3] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{k-1}; z_k]$.

Definice 5.5 (Kružnice). Necht $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 5.6. Pro křivku φ může být její graf $\langle \varphi \rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

Úmluva 5.7. Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku* v \mathbb{C} .

Připomenutí 5.8. Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t), \\ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) dt, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 5.9. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (4)$$

Poznámka 5.10.

1. Křivkový integrál (4) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_{\varphi} f(z) dz$

Základní vlastnosti 5.11.

1. Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_{\varphi} (Af + Bg) = A \int_{\varphi} f + B \int_{\varphi} g.$$

2. Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom $\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$.

Důkaz. Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |\varphi'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = M \cdot V(\varphi) \end{aligned}$$

□

3. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \dot{+} \psi} f &= \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \\ &\text{a} \\ \int_{\dot{-} \varphi} f &= - \int_{\varphi} f, \end{aligned}$$

kde $(\dot{-} \varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je opačná křivka k φ .

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky*. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom

$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \int_{\psi} f &= \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \varphi'(\omega(t)) \omega'(t) dt \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \psi'(t) dt \stackrel{\text{subst.}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi} f. \end{aligned}$$

□

Definice 5.12. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F , pokud $F' = f$ na G .

Příklad 5.13. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k z^n $\begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \dots \end{cases}$

Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F . Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ je křivka a f je spojitá^(*) na $\langle\varphi\rangle$. Potom

1. $\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_{\varphi} f = 0$, je-li φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Poznámka 5.15. (*) Ukážeme si později, že funkce f , která má na G primitivní funkci, je na G holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz. Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'_2 = F'\varphi'_1 + iF'\varphi'_2 = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Příklad 5.16.

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nemá primitivní funkci, neboť víme

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Připomenutí 5.17 (Souvislost). Necht $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (a) G je *souvislá*, tj. G je *oblast*.
- (b) G je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.
- (c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

Důkaz. (a) \iff (b): víte z MA; (c) \Rightarrow (b): jasné; (a) \Rightarrow (c): ukáže se podobně jako (a) \Rightarrow (b) □

Věta 5.18. Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G .

Důkaz. \Rightarrow Jasně.

\Leftarrow Necht $z, w \in G$ a φ je lomenná čára v G spojující z a w . Potom $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G . □

Důsledek 5.19. Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.

Důkaz.

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

Věta 5.20 (O existenci PF). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G . NTJE:

1. f má na G primitivní funkci.

2. $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .
3. $\int_{\varphi} f$ nezávisí v G na křivce φ , tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

Poznámka 5.21. Připomíná větu o potenciálu z MA (?)

Důkaz věty 5.20.

1. \Rightarrow 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF

2. \Rightarrow 3. Položme $\tau := \varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

3. \Rightarrow 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G , která začíná v z_0 a končí v z . Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní, nezávislá na volbě φ_z , protože předpokládáme 3. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G . Necht $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \stackrel{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dot{+} u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je úsečka, tzn. $u(t) = z_1 + t \cdot h$, $t \in [0, 1]$. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) h dt,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt.$$

To se blíží k nule pro $h \rightarrow 0$, protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \right| \leq \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ze spojitosti f v z_1 . Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

Značení 5.22.

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

Poznámka. Konvexní \subsetneq hvězdovitá.

2. Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

(konvexní obal a, b, c) a značíme $\partial\Delta := [a; b] \dot{+} [b; c] \dot{+} [c; a]$. Pripouštíme i degenerované Δ , tzn. a, b, c mohou ležet na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

Dodatek 5.23. Necht f je spojitá funkce na hvězdicovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \tag{5}$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

Důkaz. Necht z_0 je střed hvězdovitosti G , Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický ③ \Rightarrow ① předchozí věty, když místo ③ uvažujeme (5). \square

Poznámka 5.24. Cauchyho věta – Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G . Potom Cauchyho věty nám říkají za jakých podmínek na G a φ je $\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 5.25 (Goursartovo lemma – „Cauchyho věta pro Δ “). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a Δ je trojúhelník v G . Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0. \quad (6)$$

Důkaz. Označme $\varphi_0 := \partial\Delta$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě Δ je nede degenerovaný. V Δ vedme střední příčky a označme $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ obvody čtyř vzniklých trojúhelníků (ψ_4 je obvod vnitřního trojúhelníka). Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1 (vlevo dole), ψ_2 (vpravo dole), ψ_3 (nahore) a ψ_4 (uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$. Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků, tž $\Delta_{\psi_{j_1}}$ zase rozdělíme na 4 menší Δ y středními příčkami a proces opakujeme. $\Delta_0 := \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ s obvody $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ takové, že (a) $|\int_{\varphi_j} f| \geq \frac{K}{4^j}$ a $V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}$. Máme, že $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\text{diam}(\Delta_j) \rightarrow 0$. Položme

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &:= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad z \in G \setminus \{z_0\}; \\ &:= 0, \quad z = z_0. \end{aligned}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$

$$(b) \int_{\varphi_j} f(z) dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) dz,$$

kde první integrand má PF na \mathbb{C} a první integrál je roven 0. Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ z (a), (b) dostaneme

$$\frac{K}{4^j} \leq \left| \int_{\varphi_j} f \right| \stackrel{(b)}{=} \left| \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) \right| \leq V^2(\varphi_j) \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde druhá nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po vynásobení 4^j): $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \rightarrow 0$, protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. Což je spor. \square

Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .

Důkaz. Z Goursartova lemmatu a dodatku k větě o existenci PF. \square

Poznámka 5.27. Goursartovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f , která je spojitá na G a holomorfní na $G \setminus \{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

Důkaz. Skutečně, necht Δ je nede degenerovaný trojúhelník v G . Potom

1. Necht $z_0 \notin \Delta$. Potom $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Tady nám bude stačit použít obyčejné Goursartovo lemma

2. Necht z_0 je vrchol Δ . Necht Δ_ε je trojúhelník podobný s Δ , $\Delta_\varepsilon \subset \Delta$ a z_0 je jeho vrcholem. Poměr stran Δ ku Δ_ε je roven ε . Δ' , Δ'' jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením Δ na tři trojúhelníky $(\Delta_\varepsilon, \Delta', \Delta'')$. Obvody vnitřních trojúhelníků procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f + \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$, kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $|\int_{\partial\Delta} f| = |\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\Delta) \cdot \max_{\Delta} |f| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$. Tedy $\int_{\partial\Delta} f = 0$.
3. Necht z_0 leží uvnitř strany Δ . Potom Δ rozřízneme na dva menší trojúhelníky Δ' a Δ'' se společným vrcholem v z_0 . Jejich obvody procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$, kde oba integrály na pravé straně jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $\int_{\partial\Delta} f = 0$.
4. Necht z_0 leží uvnitř Δ . Potom Δ rozřízneme na tři menší trojúhelníky Δ' a Δ'', Δ''' se společným vrcholem v z_0 . Jejich obvody procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f + \int_{\partial\Delta'''} f$, kde jsou všechny tři integrály na pravé straně rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

□

Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru). *Necht φ je křivka v \mathbb{C} a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Necht $F(z, s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z, s)$ jsou spojitě komplexní funkce na $\langle \varphi \rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položíme $\phi(s) := \int_{\varphi} F(z, s) dz$. Potom $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\phi' = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s}(z, s) dz$, $s \in \Omega$.*

Důkaz. Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$ máme $\phi(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), s_1, s_2) \varphi'(t) dt$, pokud $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na reálných parametrech $\frac{\partial \phi}{\partial s_j}(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s) dz$, $s \in \Omega$ a $j = 1, 2$ tyto parciální derivace $\frac{\partial \phi}{\partial s_j}(s)$, $j = 1, 2$ jsou spojitě a splňují (CR)-podmínky. To je vidět z toho, že $\frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s)$, $j = 1, 2$ jsou spojitě a splňují (CR)-podmínky. Z (CR) dostaneme, že funkce φ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. Odtud plyne věta. □

Definice 5.29. Necht je φ uzavřená křivka v \mathbb{C} a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom číslo $ind_{\varphi} s := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}$ nazveme *indexem bodu vzhledem ke křivce φ* .

Poznámka 5.30. Ukážeme si, že $ind_{\varphi} s$ se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 5.31 (o základních vlastnostech indexu). *Necht φ je uzavřená křivka v \mathbb{C} a $G := \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom je G otevřená, funkce $s \rightarrow ind_{\varphi} s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.*

Důkaz. (i) Podle předchozí věty je $\phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má PF na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$. Tedy ϕ je konstantní na každé komponentě G .

- (ii) Volíme $R > 0$, aby $\langle \varphi \rangle \subset U(0, R)$. Potom $\mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G . Navíc pro $s \in \mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0, R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\phi(s) = 0$

□

Příklad 5.32. Necht $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$ind_{\varphi} s = \begin{cases} 0 & \text{pro } |s - z_0| < r, \\ 1 & \text{pro } |s - z_0| > r. \end{cases}$$

Spočítali jsme, že $ind_{\varphi} z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-z_0} = 1$. Zbytek plyne z předchozí věty.

Věta 5.33 (Cauchyův vzorec pro kruh). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a $\varphi t := z_0 + r.e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (*). Potom platí TBA*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = \begin{cases} f(s), & |s-z_0| < r \\ 0, & |s-z_0| > r \end{cases}$$

Důkaz. (i) Existuje $R > r$ tak, že $U(z_0, R) \subset G$. Nechť $|s-z_0| < r$. Definujme

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z \neq s \text{ a } z \in G \\ f'(s), & z = s. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R) \setminus \{s\})$ a spojitá na hvězdovité oblasti $U(z_0, R)$. Potom z Cauchyho věty

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz - f(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}}_{=ind_{\varphi}s=1}$$

(ii) Nechť $|s-z_0| > r$. Volme $R' \in (r, |s-z_0|)$, aby $U(z_0, R') \subset G$. Potom $f(z)/(z-s)$ je holomorfní funkce na $U(z_0, R')$ a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = 0.$$

□

Důsledek 5.34. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivaci všech řádů všude na G . Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a φ je jako v (*). Potom TBA*

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz = f^{(k)}(s), \quad |s-z_0| < r \text{ a } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Zde $f^{(0)} = f$ a k -tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Z věty o derivaci integrálu dle komplexního parametru a (CV_z) , protože

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z-s} \right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

□

Věta 5.35 (Morera). *Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když TBA*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0 \quad \text{pro každý trojúhelník } \Delta \subset G.$$

Důkaz. " \Rightarrow ": Goursatovo lemma

" \Leftarrow ": Nechť $\mathcal{U} := U(z_0, R)$ je libovolný kruh v G . Protože f je spojitá na \mathcal{U} , \mathcal{U} je hvězdovitá oblast a

$$\int_{\partial\Delta} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset \mathcal{U}$, má f na \mathcal{U} primitivní funkci F , to znamená, že $f = F'$ na \mathcal{U} . Protože $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, máme $f' = F''$ na \mathcal{U} , tudíž f je holomorfní na \mathcal{U} . Protože \mathcal{U} byl libovolný kruh v G , je $f \in \mathcal{H}(G)$. □

Věta 5.36 (Cachyho odhady). Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \dots$ je TBA

$$\forall s \in \mathcal{U} := U(z_0, r) : |f^{(k)}(s)| \leq \frac{r \cdot k!}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial \mathcal{U}} |f|,$$

kde $d(s) := \text{dist}(s, \partial \mathcal{U}) \stackrel{\text{def.}}{=} \min_{z \in \partial \mathcal{U}} |s - z|$

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right) : |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial \mathcal{U}} |f|,$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial \mathcal{U}} |f|.$$

Důkaz. (CO_1) dostaneme z $(CV_z^{(k)})$, protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial \mathcal{U}} |f|$$

a $|z-s| \geq d(s)$, $z \in \partial \mathcal{U} = \langle \varphi \rangle$, zde $\varphi(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(CO_2) plyne z (CO_1) , protože $d(s) \geq \frac{r}{2} \forall s \in U(z_0, r/2)$.

(CO_3) plyne z (CO_1) , protože $d(z_0) = r$. □

Věta 5.37 (Liouville). Je-li f holomorfní a omezená na \mathbb{C} , potom je f konstantní.

Důkaz. Ukážeme, že $f' = 0$ na \mathbb{C} . Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Z (CO_3) dostaneme pro každé $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{\partial U(z_0, r)} |f| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. □

Důsledek 5.38 (Základní věta algebry). V \mathbb{C} má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň jeden kořen.

Důkaz. Nechť $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$.

Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na \mathbb{C} . Položme $f := 1/p$. Potom f je holomorfní a omezená na \mathbb{C} , tudíž dle Liouvilleovy věty je f i p konstantní. Tedy $p' = 0$ a $0 = p^{(n)} = n!a_0$, což je spor.

Omezenost f : Máme

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^n \cdot (a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n})} \right| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \dots - \frac{|a_n|}{r^n}} \rightarrow 0$$

pro $r = |z| \rightarrow +\infty$

Existuje $r_0 \in (0, +\infty)$ tak, že $|f(z)| \leq 1$, je-li $|z| > r_0$. Funkce f je omezená na $\overline{U(0, r_0)}$, protože je tam spojitá. □

Lemma 5.39. Nechť φ je křivka v \mathbb{C} , f_n jsou spojité funkce na $\langle \varphi \rangle$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle \varphi \rangle$. Potom f je spojitá na $\langle \varphi \rangle$ a

$$\int_{\varphi} f_n \rightarrow \int_{\varphi} f.$$

Důkaz. Máme

$$0 \leq \left| \int_{\varphi} f_n - \int_{\varphi} f \right| = \left| \int_{\varphi} (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi \rangle} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Věta 5.40 (Weierstrass). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \xrightarrow{loc} f$ na G . Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \xrightarrow{loc} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. ① Zřejmě je f spojitá. Nechť Δ je trojúhelník v G . Potom

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n \xrightarrow{Lemma} \int_{\partial\Delta} f = 0$$

Z Morerovy věty je $f \in \mathcal{H}(G)$.

② Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Potom z (CO₂) máme:

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \quad |f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| = |(f_n - f)^{(k)}(s)| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

6 Mocninné řady

Definice 6.1. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom TBA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

je mocninná řada o středu z_0 s koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^\infty$.

Vlastnosti 6.2.

① **Konvergence** (na cvičení)

Existuje jediné $R \in [0, +\infty]$ takové, že

- řada TBA konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,
- řada TBA diverguje pro $|z - z_0| > R$.

Číslo R se nazývá poloměr konvergence TBA a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde položíme $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

② Označíme-li součet TBA na $U(z_0, R)$ jako f , potom je $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall z \in U(z_0, R): \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) (z - z_0)^{n-k},$$

speciálně $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Poznámka 6.3. Mocninnou řadu derivujeme "člen po členu", můžeme na $U(z_0, r)$ zaměnit sumu a komplexnou derivaci.

Důkaz. Užijeme Weierstrassovu větu na

$$S_n(z) := \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R)$$

Dosadíme-li do TBA $z = z_0$, máme $f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!$

□

Věta 6.4 (O rozvoji holomorfní funkce na kruhu do mocninné řady). *Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in (U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f . Navíc platí, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Důkaz. 1. jednoznačnost: Zřejmě z toho, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2. existence: Nechť $z \in U(z_0, R)$. Volme $r > 0$, aby $|z - z_0| < r < R$. Potom z (CV_z) je (1) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw$, kde $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Pro každé $w \in \langle \varphi \rangle$ máme

$$(2) \quad \frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Kde $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| = 1$ a suma konverguje stejnoměrně pro $w \in \langle \varphi \rangle$. Dosadíme (2) do (1). Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = z(CV_z^{(n)}). \end{aligned}$$

□

Příklad 6.5. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, protože $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$.

Věta 6.6 (O nulovém bodě). *Nechť f je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď*

1. *existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_0, r)$, anebo*
2. *existuje $r > 0$, že $f \neq 0$ na $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

V případě 2. existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ takové, že $(0) f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Číslo p nazýváme násobnost nulového bodu z_0 funkce f .

Poznámka 6.7. Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti p , právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $\forall z \in U(z_0, r)$: $(\Delta) g(z) \neq 0$ a $f(z) = (z-z_0)^p g(z)$.

Důkaz. Máme, že $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0, r)$. Pokud nenastane 1., potom existuje $n \in \mathbb{N}$, že $0 \neq a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $a_p \neq 0$. Potom platí (0) a $\forall z \in U(z_0, r)$: $f(z) = a_p(z-z_0)^p + \dots = (z-z_0)^p \cdot \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-p}$. Dále $g(z)$ definujeme jako poslední sumu. Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, existuje $r > 0$, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $f(z) = (z-z_0)^p g(z) \neq 0$ na $P(z_0, r)$. Obrácené tvrzení plyne snadno. □

Věta 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce). *Nechť $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f, g \in \mathcal{H}(G)$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. $f = g$ na G ;
2. množina $M := \{z \in G | f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod, tj. existuje $z_0 \in G$ takový, že $M \cap P(z_0, r) \neq \emptyset \forall r > 0$;

3. existuje $z_0 \in G$, že $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. BÚNO $g \equiv 0$ na G (jinak uvažme $f - g$).

$1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3$ Necht $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G | f(z) = 0\}$. Z věty o nulovém bodě je $f = 0$ na nějakém okolí z_0 , tudíž platí 3.

$3 \Rightarrow 1$ Necht $N := \{z \in G | \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) = 0\}$. Potom $\emptyset \neq N$, N je uzavřená v G , protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc N je otevřená. Necht $z_1 \in N$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_1, r)$. Tedy $U(z_1, r) \subset N$. Protože G je oblast, dostaneme $N = G$ a speciálně 1. \square

Příklad 6.9. Vzoreček $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$ dostaneme z věty o jednoznačnosti, protože obě strany rovnosti jsou celé funkce a víme, že rovnost platí na \mathbb{R} (tzn. platí 2).

Poznámka 6.10. Podobně lze řadu vzorečků bez počítání zobecnit z \mathbb{R} do \mathbb{C} !

Věta 6.11 (Princip maxima modulu). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom je f konstantní na G , pokud $|f|$ nabývá na G lokální maximum, tzn. existuje $z_0 \in G$ a $r > 0$ tak, že $\forall z \in U(z_0, r) \subset G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$. (+)

Důkaz. Necht platí (+). Potom $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, r)$. Pro $0 < \rho < r$ platí, že $|a_0|^2 = |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{int}) (\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \rho^m e^{-imt}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{a_m} \rho^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$, neboť $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = 0$, pro $n \neq m$ a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = 1$, pro $n = m$. Nebo-li $|a_0|^2 \geq |a_0|^2 + |a_1|^2 \rho^2 + \dots$, tudíž $0 = a_1 = a_2 = \dots$. Dostáváme, že $f = a_0$ na $U(z_0, r)$ a z věty o jednoznačnosti $f = a_0$ na G . \square

7 Riemannova sféra

Rozšíříme \mathbb{C} o nekonečno. Položíme $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin \mathbb{C}$, a zavedeme okolí kolem ∞ $P(\infty, \epsilon) := \{z \in \mathbb{C} | |z| > \frac{1}{\epsilon}\}$, $\epsilon > 0$, $U(\infty, \epsilon) := P(\infty, \epsilon) \cup \{\infty\}$.

Definice 7.1. Řekneme, že $z_n \rightarrow z_0$ v \mathbb{S} , pokud $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : z_n \in U(z_0, \epsilon)$.

Poznámka 7.2. Z definice plyne:

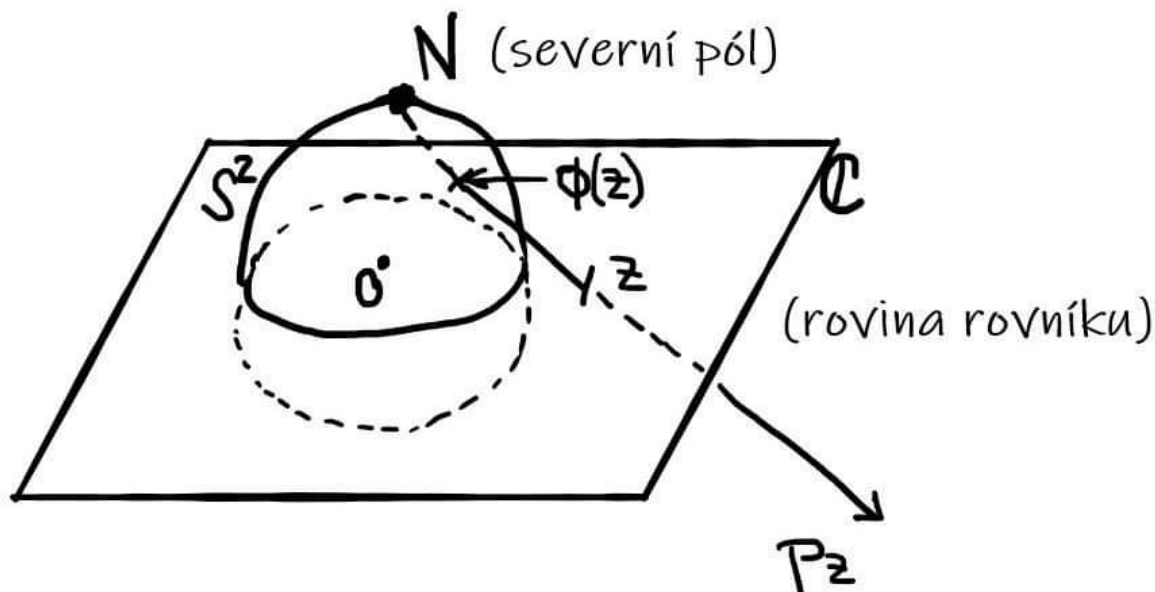
- $z_n \rightarrow z_0$ v \mathbb{S} a $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z_n \rightarrow z_0$ v \mathbb{C} .
- $z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$. Zde $\frac{1}{\infty} := 0$ a $|\infty| := +\infty$.

Poznámka 7.3. \mathbb{S} je jednobodová kompaktifikace topologického prostoru \mathbb{C} .

Vlastnosti 7.4.

Na \mathbb{S} zavedeme metriku ρ (není jediná), tž. $(*) z_n \rightarrow z_0$ v $\mathbb{S} \Leftrightarrow \rho(z_n, z_0) \rightarrow 0$. Navíc (\mathbb{S}, ρ) bude izometrický s jednotkovou sférou $S^2 := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 | \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$, kterou chápeme jako metrický podprostor \mathbb{R}^3 . Speciálně (\mathbb{S}, ρ) je kompaktní.

- Definujeme stereografickou projekci $\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ jako na obrázku, kde $N = (0, 0, 1)$.



Položme $\phi(\infty) := N$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $\{\phi(z)\} = (S \setminus \{N\}) \cap p_z$, kde p_z je polopřímka z N procházející bodem $z \in \mathbb{C}$. Potom $\phi: \mathbb{C} \xrightarrow{na} S^2$ je bijekce.

Cvičení 7.5. (CV)

- $\phi(z) := (\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
- $\phi^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) := (\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma})$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$

- Položme $\rho(z, w) := |\phi(z) - \phi(w)|$, $z, w \in \mathbb{C}$, kde $|\cdot|_S$ je Eukleidovská norma v \mathbb{R}^3 . (ϕ je izometrie (\mathbb{C}, ρ) na S^2)
- Platí (*). Skutečně z předchozího bodu a z cvičení máme: $\rho(z_n, z_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi(z_n) \rightarrow \phi(z_0) \Leftrightarrow z_n \rightarrow z_0$ v \mathbb{C} , protože ϕ i ϕ^{-1} jsou spojité.

Příklad 7.6. Necht $z_n \in \mathbb{C}$ a $z_n \rightarrow \infty$. Potom $|z_n| \rightarrow +\infty \Rightarrow \phi(z_n) \in S^2$; $\phi_3(z_n) \rightarrow 1 \Rightarrow \phi(z_n) \rightarrow N := (0, 0, 1)$

Příklad 7.7. Necht $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$ a $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow N$. Potom $|\phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)|^2 = \frac{1-\gamma_n^2}{(1-\gamma_n)^2} = \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \rightarrow \infty$

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Kateřina Lipavská, Stanislav Mosný, Tereza Poláková a Petr Sedláček