Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

8. října 2020

Obsah

1 Zavedení základních pojmů **2**

2 Lineární zobrazení **2**

3 Diferencovatelnost **3**

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$ **5**

4.1 Exponenciála 5
4.2 Logaritmus 5
4.3 Obecná mocnina 6
4.4 Hyperbolické funkce 7
4.5 Goniometrické funkce 7

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm Euklidovskou normu a metriku:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. *Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:*

- *násobení* $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- *ztotožňujeme* $(x,0) \cong$, *neboli* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- *značíme* $i = (0,1)$

Vlastnosti 1.2.

Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$

Značení 1.3. *Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom*

- $\overline{z} := x-iy$ *je komplexně sdružená část k z,*
- $Re(z) := x$ *je reálná část z,* $Im(z) := y$ *je imaginární část z,*
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ *je modul nebo absolutní hodnota z.*

Dále platí

- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$
- $\mathbb{C}$ je těleso

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. $\mathbb{R}^2$ *je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je* $((1,0)^T,(0,1)^T)$. *Obecné $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ je komplexní vektorový prostor dimenze 1, jeho báze je 1. *Obecné $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (a+ib)(x+iy) = (ax-by, bx+ay) =$*

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pozorování 2.2. *$\mathbb{R}$-lineární zobrazení* (1) *je $\mathbb{C}$-lineární, právě když $d = a, c = -b$.*

Poznámka 2.3. *$\mathbb{C}$-lineární zobrazení jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-lineární zobrazení.*

Úmluva 2.4. *Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexnou funkci komplexné proměnné. Na $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.*

Definice 2.5. *Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji okolí z_0. Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme prstencové okolí. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0), P(z_0)$.*
Potom definujeme

- $\lim_{z \to x_0} f(z) = L$, *pokud* $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(x_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \epsilon)$
- *f je spojitá v x_0, pokud* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. *Funkce f je v x_0 $\mathbb{R}$-diferencovatelná, pokud existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. *Potom $df(x_0) := L$ je tzv. totální diferenciál f v x_0 a platí, že*

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. (Ta matice se nazývá Jacobiho matice.)

Definice 3.3. *Řekneme, že funkce f je v x_0 $\mathbb{C}$-diferencovatelná, pokud existuje konečná limita*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme komplexní derivací f v x_0.

Poznámka 3.4. *Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)', (f.g)', (f/g)', (f \circ g)'$*

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, *$z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$*

- *$f(z)=\overline{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diferencovatelná, ale $f(x,y)=(x,-y)$ je všude $\mathbb{R}$-diferencovatelná. Skutečně, máme*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

Avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $x_0\in\mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:*

1. *Existuje $f'(x_0)$*
2. *Existuje $df(x_0)$ a $df(x_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární*
3. *Existuje $df(x_0)$ a v z_0 platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.*

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

zde $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$

Důkaz. (2. $\iff$ 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Z definice $w=f'(z_0)$ znamená, že

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(z_0)-wh}{h}\tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{|h|}\tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h=wh, h\in\mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

Poznámka 3.7.
- *Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h=f'(z_0)h, h\in\mathbb{C}$ a $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$*
- *Platí, že $(CR)\iff\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$*

Důkaz.
- $df(x_0)1=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0)+i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0)=:\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

□

Příklad 3.8. *Nechť $f(z)=\overline{z}$, pak $f'(x,y)=(x,-y)$. Dále*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=1,\frac{\partial f_1}{\partial y}=0,\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,\frac{\partial f_2}{\partial y}=-1.$$

Máme, že $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z\in\mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$-diferencovatelná.

Definice 3.9. *Nechť $\mathbb{C}$ je otevřené a $f:G\to\mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G kolomorfní, pokud f je $\mathbb{C}$-diferencovatelná v každém $z\in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech kolomorfních $f:G\to\mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je celá, pokud $F\in\mathcal{H}(G)$.*

Příklad 3.10.
- *Polynom $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n$, $z\in\mathbb{C}$ je celá funkce.*
- *Necht $R=P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q\not\equiv 0$. Potom racionalita funkce R je kolomorfní na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}^{-1}(\alpha\circ\varphi)$ konečné.*

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(t) \colon = e^x(\cos y + i \sin y),\ z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z),\ z \in \mathbb{C}$
  $f(z) = \exp(z),\ f_1(x,y) = e^x \cos y,\ f_2(x,y) = e^x \sin y,$
  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$
  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z),\ z \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}$

  Polární tvar komplexního čísla $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = x + i,\ y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z.

  Značení 4.3. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položme $Arg(z) \colon = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ Je-li $Arg(z) \cap (\pi,\pi] = \{\varphi_0\}$, potom $arg(z) \colon = \varphi_0$ je tzv. hlavní hodnota argumentu z.*

  Platí:

  - $Arg(z) \colon = \{arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
  - funkce $arg \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (\pi,\pi]$, kde arg je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty,0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon w = 2k\pi i$
- Nechť $P \colon = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz \in (\pi,\pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$. Pro $z = 0$ nemáme řešení. Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{iarg(z)} = e^{\log|z| + iarg(z)} = e^w \iff \exists\ k \in \mathbb{Z} \colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.4. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.Položme*

- $Logz \colon = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z \colon = \log|z| + iargz \ldots$ *tzv. hlavní hodnota logaritmu z.*

Vlastnosti 4.5.

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $Logz = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- log není spojitá v žádném $z \in (-\infty,0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty,0])$.
  Navíc $\log' z = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$.

- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp zi) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$-periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.6. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnota α-té mocniny z definujeme $z^\alpha \colon = \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z) \colon = \{\exp(\alpha w) \mid w \in Log z\}$.*

Vlastnosti 4.7.
- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
  $w \in Log z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Příklad 4.8. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

- *Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.*
- *Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p\,|_q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \cdots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0*
- *Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.*

Příklad 4.9.
- $\sqrt{-1} = e^{\frac{pii}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ *(nesouhlasí s MA!)*, $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!
$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.10. *Je-li $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} =$ sudá část + lichá část.*

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.11.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.12.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2 n}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, kde

Definice 4.13.

$$cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.14.

- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou 2π-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytvořeny společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček