

Úvod do komplexní analýzy

6. října 2020

1 Zavedení základních pojmů

\mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm Euklidovskou normu a metriku:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. *Prostor \mathbb{C} je prostor \mathbb{R}^2 , v němž definujeme navíc:*

- násobení $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme $(x, 0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0, 1)$

Vlastnosti \mathbb{C} . Necht $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x + iy$ a $(\pm i)^2 = -1$
- Násobení v \mathbb{C} zahrnuje násobení v \mathbb{R} i násobení skalárem v \mathbb{R}^2

Značení 1.2. *Necht $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom*

- $\bar{z} := x - iy$ je komplexně sdružená část k z ,
- $\operatorname{Re}(z) := x$ je reálná část z , $\operatorname{Im}(z) := y$ je imaginární část z ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je modul nebo absolutní hodnota z .

Dále platí

- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$
- \mathbb{C} je těleso

Pozor, \mathbb{C} nelze rozumně upořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. \mathbb{R}^2 je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1,0)^T, (0,1)^T)$. Obecné \mathbb{R} -lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

\mathbb{C} je komplexní vektorový prostor dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné \mathbb{C} -lineární zobrazení $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, bx + ay) =$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pozorování 2.2. \mathbb{R} -lineární zobrazení (1) je \mathbb{C} -lineární, právě když $d = a, c = -b$.

Poznámka 2.3. \mathbb{C} -lineární zobrazení jsou velmi specifická \mathbb{R} -lineární zobrazení.

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexnou funkci komplexné proměnné. Na $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji okolí z_0 . Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme prstencové okolí. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0), P(z_0)$.

Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow x_0} f(z) = L$, pokud $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(x_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \epsilon)$
- f je spojitá v x_0 , pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v x_0 \mathbb{R} -diferencovatelná, pokud existuje \mathbb{R} -lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $df(x_0) := L$ je tzv. totální diferenciál f v x_0 a platí, že

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Ta matice se nazývá Jacobiho matice.)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v x_0 \mathbb{C} -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme komplexní derivací f v x_0 .

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)', (f \cdot g)', (f/g)', (f \circ g)'$

Příklad 3.5. • $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, z \in \mathbb{C} \text{ a } n \in \mathbb{N}$

- $f(z) = \bar{z}$ není nikde v \mathbb{C} \mathbb{C} -diferencovatelná, ale $f(x, y) = (x, -y)$ je všude \mathbb{R} -diferencovatelná. Skutečně, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6. (Cauchy-Riemannova)

Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:

1. Existuje $f'(x_0)$
2. Existuje $df(x_0)$ a $df(x_0)$ je \mathbb{C} -lineární
3. Existuje $df(x_0)$ a v z_0 platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}$$

zde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$

Důkaz. (2. \iff 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení

(1. \iff 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(z_0) - wh}{h} \quad (2)$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|} \quad (3)$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh, h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

Poznámka 3.7. • Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

- Platí, že $(CR) \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz. • $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

- zřejmé

□

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \bar{z}$, pak $f'(x, y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR) , proto není nikde \mathbb{C} -diferencovatelná.