Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

15. října 2020

Obsah

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:

- násobení $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- ztotožňujeme $(x,0) \cong x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0,1)$

Značení 1.2. Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\overline{z} := x - iy$ je *komplexně sdružené číslo* k z,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* z, $Im(z) := y$ je *imaginární část* z,
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* z.

Vlastnosti 1.3.

Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- $\mathbb{C}$ je těleso.

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. $\mathbb{R}^2$ je *reálný vektorový prostor* dimenze 2, jeho báze je $\left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\}$. Obecné $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je $\{1\}$. Obecné $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (x+iy)$, $w = (a+ib)$. Potom

$$Lz = (a+ib)(x+iy) = (ax-by, bx+ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2.2. $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* (1) je $\mathbb{C}$-*lineární*, právě když $d = a$, $c = -b$.

Poznámka 2.3. $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení*.

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné*. Na $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0,\delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* z_0. Dále $P(z_0,\delta) := U(z_0,\delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí*. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$.
Potom definujeme

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in P(z_0,\delta) : f(z) \in U(L,\varepsilon)$
- f je spojitá v z_0, pokud $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v z_0 $\mathbb{R}$-*diferencovatelná*, pokud existuje $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $\mathrm{d}f(z_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* f v z_0 a platí, že

$$\mathrm{d}f(z_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} h, \quad h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. (Tato matice se nazývá *Jacobiho matice.*)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v z_0 $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*, pokud existuje konečná limita

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Číslo $f'(z_0)$ nazýváme *komplexní derivací* f v z_0.

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f.g)' = f'g + g'f$, $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ a $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$.

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.
- $f(z) = \overline{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*, ale $f(x,y) = (x,-y)$ je všude $\mathbb{R}$-*diferencovatelná*. Skutečně, pro $z_0 \in \mathbb{C}$ libovolné, máme

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h},$$

  avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje $f'(z_0)$*
2. *Existuje $\mathrm{d}f(z_0)$ a $\mathrm{d}f(z_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární*
3. *Existuje $\mathrm{d}f(z_0)$ a v z_0 platí tzv.* Cauchy-Riemannovy podmínky.

Cauchy-Riemannovy podmínky*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0), \end{aligned} \tag{CR}$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

Důkaz. (2. $\iff$ 3.): Plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Podle definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $\mathrm{d}f(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

Poznámka 3.7.

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff$ $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

Důkaz.

- $\mathrm{d}f(z_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- zřejmé

□

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \overline{z}$, pak $f(x,y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*.

Definice 3.9. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G *holomorfní*, pokud f je $\mathbb{C}$-*diferencovatelná* v každém $z_0 \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních funkcí $f\colon G \to \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je *celá*, pokud $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Příklad 3.10.

- *Polynom* $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je *celá* funkce.
- Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionální funkce R je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$,kde $Q^{-1}(\{0\})$ je konečná množina.

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(z) \\ f_1(x,y) &= e^x \cos y \\ f_2(x,y) &= e^x \sin y \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Z CR-věty a poznámky 3.7 máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon w = z + 2k\pi i$
- Nechť $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 4.3. Nechť $z = x + iy$ je komplexní číslo, pak se na něj můžeme dívat jako na bod v rovině určený kartézskými souřadnicemi x a y. *Polární (Goniometrický) tvar komplexního čísla* získáme tak, že si body x a y vyjádříme v polárních souřadnicích a ty pak dosadím do rovnice udávající z. Tedy
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z. Polární souřadnice nám říkají jak je daleko od počátku r a v jakém směru $\measuredangle\varphi$ se bod z nachází.

Značení 4.4. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položme $\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ Je-li $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z) := \varphi_0$ je tzv. *hlavní hodnota argumentu z*.

Platí:

- $\operatorname{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$, kde arg je surjektivní a navíc je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Dále je arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme rovnici $e^w = z$.

- Pro $z = 0$ nemá rovnice řešení.
- Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z|+i\arg(z)} = e^w \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.5. Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Položme

- $\operatorname{Log} z\colon = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z\colon = \log|z| + i\arg z$, tzv. *hlavní hodnota logaritmu z.*

Vlastnosti 4.6.

Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

- $\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_P)^{-1}$, kde P je množina z vlastností exponenciály.
- $\log$ není spojitá v žádném $z \in (-\infty,0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus(-\infty,0])$.
  Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
- $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s komplexním logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp z) \neq z$, z toho, že exponenciála je $2\pi i$-periodická
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.7. Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom *hlavní hodnotu α-té mocniny z* definujeme $z^\alpha\colon = \exp(\alpha\log z)$. Položme $m_\alpha(z)\colon = \{\exp(\alpha w) \mid w \in \operatorname{Log} z\}$.

Vlastnosti 4.8.

- $e^z = \exp(z\log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s definicí z MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$

  Důkaz. $w \in \operatorname{Log} z \iff w = \log z + 2k\pi i$ □

- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pozorování 4.9. Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p,q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}}e^{\frac{2k\pi ip}{q}} : k \in \{0,1,\cdots,q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $z^{\frac{p}{q}}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

Příklad 4.10.
- $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s definicí z MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

- $(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
  např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.11. Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom $f(z) = \underbrace{\frac{f(z)+f(-z)}{2}}_{\text{sudá část}} + \underbrace{\frac{f(z)-f(-z)}{2}}_{\text{lichá část}}$.

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.12.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.13.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, kde

Definice 4.14.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.15.
- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou 2π-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5 Křivkový integrál

Definice 5.1. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Potom

1. φ je *křivka*, pokud je φ spojitá
2. φ je *regulární křivka*, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0, \cdots, n-1$.

Definice 5.2 (Úsečka). Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$ je úsečka z a do b. Značíme $[a; b]$.

Značení 5.3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dotplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

Definice 5.4 (Lomenná čára). Řekneme, že regulární křivka φ je *lomenná čára* v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, z_2, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1; z_2] \dotplus [z_2; z_3] \dotplus \cdots \dotplus [z_{k-1}; z_k]$.

Definice 5.5 (Kružnice). Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 5.6. Pro křivku φ může být její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

Úmluva 5.7. Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku v* $\mathbb{C}$.

Připomenutí 5.8. Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:
$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t),$$
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$
mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$
2. *Délka křivky*:
$$V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$
je-li φ regulární.

Definice 5.9. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

Poznámka 5.10.

1. Křivkový integrál (5) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$

Základní vlastnosti 5.11.

1. Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g.$$

2. Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom

$$\left|\int_\varphi f\right| \le \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$$

.

Důkaz. Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme

$$\begin{aligned}\left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_\alpha^\beta M\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\cdot V(\varphi)\end{aligned}$$

□

3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta], \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi\dotplus\psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f$$

a

$$\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_\varphi f,$$

kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je *opačná křivka* k φ.

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky.* Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom

$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\int_\psi f = \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi\big(\omega(t)\big)\Big)\varphi'(\omega(t))\omega'(t)\,\mathrm{d}t \\ = \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi\big(\omega(t)\big)\Big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\substack{\text{subst.}\\ \tau=\omega(t)}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\varphi f.\end{aligned}$$

□

Definice 5.12. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F, pokud $F' = f$ na G.

Příklad 5.13. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k z^n

$$\begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \text{na } \mathbb{C}\setminus\{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \ldots \end{cases}$$

Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ je křivka a f je spojitá$^{(*)}$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom*

1. $\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_\varphi f = 0$, *je-li* φ uzavřená, *tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Poznámka 5.15. $^{(*)}$ Ukážeme si později, že funkce f, která má na G primitivní funkci, je na G holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz. Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2' = F'\varphi_1' + iF'\varphi_2' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Příklad 5.16.

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nemá* primitivní funkci, neboť víme

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Připomenutí 5.17 (Souvislost). Nechť $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) G je *souvislá*, tj. G je *oblast*.

(b) G je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

(c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

Důkaz. *(a)* $\iff$ *(b)*: víte z MA; *(c)* $\Rightarrow$ *(b)*: jasné; *(a)* $\Rightarrow$ *(c)*: ukáže se podobně jako *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* □

Věta 5.18. *Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Jasné.
$\Leftarrow$ Nechť $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w. Potom $f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G. □

Důsledek 5.19. *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na* oblasti *$G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.*

Důkaz.
$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$
□

Věta 5.20 (O existenci PF). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *f má na G primitivní funkci.*
2. *$\int_\varphi f = 0$ pro každou* uzavřenou *křivku φ v G.*
3. *$\int_\varphi f$* nezávisí *v G* na křivce *φ, tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$, $\psi : [\gamma,\delta] \to G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*

Poznámka 5.21. Přípomíná *větu o potenciálu* z MA ?

Důkaz věty 5.20.
1. ⇒ 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF
2. ⇒ 3. Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je τ *uzavřená* a z 2. dostaneme
$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$
3. ⇒ 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najděme lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z. Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní, nezávislá na volbě φ_z, protože předpokládáme 3. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom
$$F(z_1 + h) - F(z_1) \overset{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dotplus u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$
kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je *úsečka*, tzn. $u(t) = z_1 + t.h$, $t \in [0,1]$. Tedy
$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th)h\,\mathrm{d}t,$$
tudíž
$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1))\,\mathrm{d}t.$$
To se blíží k nule pro $h \to 0$, protože
$$\left|\int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1))\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$
ze spojitosti f v z_1. Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

Značení 5.22.

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

   Poznámka. Konvexní $\subsetneq$ hvězdicovitá.

2. Řekneme, že $\triangle \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud
$$\triangle := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \ge 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$
   (*konvexní obal a, b, c*) a značíme $\partial\triangle := [a; b] \dotplus [b; c] \dotplus [c; a]$. Připouštíme i degenerované $\triangle$, tzn. a, b, c mohou ležet na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

Dodatek 5.23. *Nechť f je spojitá funkce na* hvězdicovité *oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0, \tag{6}$$

pro každý trojúhelník *$\triangle \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.*

Důkaz. Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G, Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický ③ $\Rightarrow$ ① předchozí věty, když místo ③ uvažujeme (6). □

Poznámka 5.24. Cauchyho věta – Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G. Potom Cauchyho věty nám říkají za jakých podmínek na G a φ je $\int_\varphi f = 0$.

Věta 5.25 (Gousartovo lemma – „Cauchyho věta pro $\triangle$“). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a $\triangle$ je trojúhelník v G. Potom*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0. \tag{7}$$

Důkaz. Označme $\varphi_0 := \partial\triangle$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě $\triangle$ je nedegenerovaný. V $\triangle$ veďme střední příčky a označme ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 obvody čtyř vzniklých trojúhelníků (ψ_4 je obvod vnitřního trojúhelníka). Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1(vlevo dole), ψ_2(vpravo dole), ψ_3(nahoře) a ψ_4(uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$. Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků, tž $\triangle\psi_{j_1}$ zase rozdělíme na 4 menší $\triangle$-y středními příčkami a proces opakujeme. Pak $\triangle_0 := \triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \dots$ s obvody φ_0, φ_1, φ_2, …takové, že

$$\begin{aligned} \left|\int_{\varphi_j} f\right| &\geq \frac{K}{4^j} \quad \text{a} \\ V(\varphi_j) &= \frac{V(\varphi)}{2^j} \end{aligned} \tag{a}$$

. Máme, že $\bigcap\limits_{j=0}^{\infty} \triangle_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\operatorname{diam}(\triangle_j) \to 0$. Položme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0),\ z \in G\backslash\{z_0\}; \\ 0,\ z = z_0 \end{cases}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0))\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z, \tag{b}$$

kde první integrand vpravo má PF na $\mathbb{C}$ a první integrál je roven 0. Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ z (a),(b) dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leq \left|\int_{\varphi_j} f\right| \stackrel{\text{(b)}}{=} \left|\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z-z_0)\right| \leq V^2(\varphi_j) \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \stackrel{\text{(a)}}{=} \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po vynásobení 4^j): $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max\limits_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \to 0$, protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. Což je spor. □

Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G.*

Důkaz. Z Goursartova lemmatu a dodatku k větě o existenci PF (Dodatek 5.23). $\square$

Poznámka 5.27. Gousartovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f, která je spojitá na G a holomorfní na $G\backslash\{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

Důkaz. Nechť $\triangle$ je nedegenerovaný trojúhelník v G. Rozlišujeme případy:

1. Nechť $z_0 \notin \triangle$. Potom $\int_{\partial\triangle} f = 0$. Dle Gousartova lemmatu.

2. Nechť z_0 je vrchol $\triangle$. Nechť $\triangle_\varepsilon$ je trojúhelník podobný s $\triangle$, $\triangle_\varepsilon \subset \triangle$ a z_0 je jeho vrcholem. Nechť poměr stran $\triangle$ ku $\triangle_\varepsilon$ je roven ε. $\triangle'$, $\triangle''$ jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením $\triangle$ na tři trojúhelníky ($\triangle_\varepsilon$, $\triangle'$, $\triangle''$). Obvody vzniklých vnitřních trojúhelníků procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle_\varepsilon} f + \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f$, kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $|\int_{\partial\triangle} f| = |\int_{\partial\triangle_\varepsilon} f| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\triangle) \cdot \max_\triangle |f| \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$. Tedy $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

3. Nechť z_0 leží uvnitř strany $\triangle$. Potom $\triangle$ rozřízneme na dva menší trojúhelníky $\triangle'$ a $\triangle''$ se společným vrcholem v z_0. Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f$, kde oba integrály na pravé straně jsou rovny 0 podle bodu 2. Tudíž $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

4. Nechť z_0 leží uvnitř $\triangle$. Potom $\triangle$ rozřízneme na tři menší trojúhelníky $\triangle'$ a $\triangle''$, $\triangle'''$ se společným vrcholem v z_0. Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f + \int_{\partial\triangle'''} f$, kde jsou všechny tři integrály na pravé straně rovny 0 podle bodu 2. Tudíž $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

$\square$

Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru). *Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z,s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z,s)$ jsou spojité komplexní funkce na $\langle\varphi\rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položme $\phi(s) := \int_\varphi F(z,s)dz$. Potom $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\phi'(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s}(z,s)dz$, $s \in \Omega$.*

Důkaz. Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1,\ s_2) \in \Omega$ máme $\phi(s) = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t),(s_1,s_2))\varphi'(t)dt$, pokud $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na reálných parametrech máme $\frac{\partial\phi}{\partial s_j}(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)dz$, pro $s \in \Omega$ a $j = 1,2$ navíc jsou tyto parciální derivacespojité a splňují (CR)-podmínky. To je vidět z toho, že $\frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)$, $j = 1,2$ jsou spojité a splňují (CR)-podmínky. Z (CR) dostaneme, že funkce φ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. Odtud plyne věta. $\square$

Definice 5.29. Nechť je φ uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C}\backslash\langle\varphi\rangle$. Potom číslo

$$ind_\varphi s := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$$

nazveme *indexem bodu s vzhledem ke křivce φ*

Poznámka 5.30. Ukážeme si, že $ind_\varphi s$ se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 5.31 (o základních vlastnostech indexu). *Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $G := \mathbb{C}\backslash\langle\varphi\rangle$. Potom je G otevřená, funkce $s \mapsto ind_\varphi s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.*

Důkaz. (i) Podle předchozí věty je $\phi(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má PF na $\mathbb{C}\backslash\{s\}$. Tedy ϕ je konstantní na každé komponentě G.

(ii) Volíme $R>0$, aby $\langle\varphi\rangle\subset U(0,R)$. Potom $\mathbb{C}\setminus U(0,R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G. Navíc pro $s\in\mathbb{C}\setminus U(0,R)$ je funkce $g(z):=\frac{1}{z-s}$, $z\in U(0,R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\phi(s)=0$

□

Příklad 5.32. Nechť $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$ a $\varphi(t):=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Potom

$$ind_\varphi s=\begin{cases}0 & \text{pro } |s-z_0|<r,\\ 1 & \text{pro } |s-z_0|>r.\end{cases}$$

Spočetli jsme, že $ind_\varphi z_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\frac{dz}{z-z_0}=1$. Zbytek plyne z předchozí věty.

Věta 5.33 (Cauchyův vzorec pro kruh). *Nechť $G\subset\mathbb{C}$ je otevřená a $f\in\mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0,r)}\subset G$ a $\varphi(t):=z_0+r.e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ $(*)$. Potom platí*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\frac{f(z)}{z-s}dz=\begin{cases}f(s), & |s-z_0|<r\\ 0, & |s-z_0|>r\end{cases}\qquad (CV_z)$$

Důkaz. Existuje $R>r$ tak, že $U(z_0,R)\subset G$.
(i) Nechť $|s-z_0|<r$. Definujme

$$h(z):=\begin{cases}\frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z\neq s \ \ a \ \ z\in G\\ f'(s), & z=s.\end{cases}$$

Potom $h\in\mathcal{H}(U(z_0,R)\setminus\{s\})$ a spojitá na hvězdovité oblasti $U(z_0,R)$. Potom z Cauchyho věty

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi h=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\frac{f(z)}{z-s}dz-f(s).\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\frac{dz}{z-s}}_{=ind_\varphi s=1}$$

(ii) Nechť $|s-z_0|>r$. Volme $R'\in(r,|s-z_0|)$, aby $U(z_0,R')\subset G$. Potom $f(z)/(z-s)$ je holomorfní funkce na $U(z_0,R')$ a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\frac{f(z)}{z-s}dz=0.$$

□

Důsledek 5.34. *Nechť $G\subset\mathbb{C}$ je otevřená a $f\in\mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivaci všech řádů všude na G. Nechť $\overline{U(z_0,r)}\subset G$ a φ je jako v $(*)$. Potom*

$$f^{(k)}(s)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi\frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}}dz,\qquad |s-z_0|<r \ \ a \ \ k=0,1,2,3,\ldots\qquad (CV_z^{(k)})$$

Zde $f^{(0)}=f$ a k-tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)}=(f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Z věty o derivaci integrálu dle komplexního parametru a (CV_z), protože

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{z-s}\right)=\frac{k!}{(z-s)^{k+1}},\quad z\neq s.$$

□

Věta 5.35 (Morera). *Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{pro každý trojúhelník } \triangle \subset G. \tag{8}$$

Důkaz. "$\Rightarrow$": Goursatovo lemma
"$\Leftarrow$": Nechť $\mathcal{U} := U(z_0, R)$ je libovolný kruh v G. Protože f je spojitá na $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ je hvězdicovitá oblast a

$$\int_{\partial\triangle} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset \mathcal{U}$, má f na $\mathcal{U}$ primitivní funkci F, to znamená, že $f = F'$ na $\mathcal{U}$. Protože $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, máme $f' = F''$ na $\mathcal{U}$, tudíž f je holomorfní na $\mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U}$ byl libovolný kruh v G, je $f \in \mathcal{H}(G)$. □

Věta 5.36 (Cachyho odhady). *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ je*

$$\forall s \in \mathcal{U} := U(z_0, r): \qquad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{r.k!}{(d(s))^{k+1}} . \max_{\partial\mathcal{U}} |f|, \tag{CO_1}$$

kde $d(s) := dist(s, \partial\mathcal{U}) \overset{def.}{:=} \min\limits_{z \in \partial\mathcal{U}} |s - z|$

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \qquad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!.2^{k+1}}{r^k} . \max_{\partial U} |f|. \tag{CO_2}$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} . \max_{\partial U} |f|. \tag{CO_3}$$

Důkaz. (CO_1) dostaneme z $(CV_z^{(k)})$, protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} . 2\pi r . \frac{1}{(d(s))^{k+1}} . \max_{\partial\mathcal{U}} |f|$$

a $|z - s| \geq d(s)$, $z \in \partial\mathcal{U} = \langle\varphi\rangle$, zde $\varphi(t) = z_0 + r.e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
(CO_2) plyne z (CO_1), protože $d(s) \geq \frac{r}{2}$ $\forall s \in U(z_0, r/2)$.
(CO_3) plyne z (CO_1), protože $d(z_0) = r$. □

Věta 5.37 (Liouville). *Je-li f holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.*

Důkaz. Ukážeme, že $f' = 0$ na $\mathbb{C}$. Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Z (CO_3) dostaneme pro každé $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{\partial U(z_0, r)} |f| \leq \frac{M}{r} \underset{r \to +\infty}{\to} 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. □

Důsledek 5.38 (Základní věta algebry). *V $\mathbb{C}$ má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň jeden kořen.*

Důkaz. Nechť $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$.
Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. Položme $f := 1/p$. Potom f je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, tudíž dle Liouvilleovy věty je f i p konstantní. Tedy $p' = 0$ a $0 = p^{(n)} = n! a_0$, což je spor.
Omezenost f: Máme

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^n . (a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n})} \right| \leq \frac{1}{r^n} . \frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \ldots - \frac{|a_n|}{r^n}} \longrightarrow 0$$

pro $r = |z| \to +\infty$.
Existuje $r_0 \in (0, +\infty)$ tak, že $|f(z)| \leq 1$, je-li $|z| > r_0$. Funkce f je omezená na $\overline{U(0, r_0)}$, protože je tam spojitá. $\square$

Lemma 5.39. *Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$, f_n jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$ a*

$$\int_\varphi f_n \longrightarrow \int_\varphi f.$$

Důkaz. Máme

$$0 \leq \left| \int_\varphi f_n - \int_\varphi f \right| = \left| \int_\varphi (f_n - f) \right| \leq V(\varphi). \max_{\langle\varphi\rangle} |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Věta 5.40 (Weierstrass). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. 1 Zřejmě je f spojitá. Nechť $\triangle$ je trojúhelník v G. Potom

$$0 = \int_{\partial\triangle} f_n \overset{Lemma}{\longrightarrow} \int_{\partial\triangle} f = 0$$

Z Morerovy věty je $f \in \mathcal{H}(G)$.
2 Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Potom z (CO_2) máme:

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \quad \left| f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s) \right| = \left| (f_n - f)^{(k)}(s) \right| \leq \frac{k!.2^{k+1}}{r^k}. \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

6 Mocninné řady

Definice 6.1. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{9}$$

je mocninná řada o středu z_0 s koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Vlastnosti 6.2.

1 **Konvergence** (na cvičení)
Existuje jediné $R \in [0, +\infty]$ takové, že

- řada (9) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,
- řada (9) diverguje pro $|z - z_0| > R$.

Číslo R se nazývá poloměr konvergence (9) a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde položíme $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.
② Označíme-li součet (9) na $U(z_0,R)$ jako f, potom je $f \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$ a

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall z \in U(z_0,R): \qquad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n.n.(n-1)...(n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

speciálně $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Poznámka 6.3. Mocninnou řadu derivujeme "člen po členu", můžeme na $U(z_0,r)$ zaměnit sumu a komplexní derivaci.

Důkaz. Užijeme Weierstrassovu větu na

$$S_n(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n, \qquad z \in U(z_0,R)$$

Dosadíme-li do (9) $z = z_0$, máme $f^{(k)}(z_0) = a_k.k!$ □

Věta 6.4 (O rozvoji holomorfní funkce na kruhu do mocninné řady). *Nechť $R \in (0,+\infty]$ a $f \in (U(z_0,R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, která má na $U(z_0,R)$ součet f. Navíc platí, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Důkaz.
1. jednoznačnost: Zřejmě z toho, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
2. existence: Nechť $z \in U(z_0,R)$. Volme $r > 0$, aby $|z-z_0| < r < R$. Potom z (CV_z) je (1) $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$, kde $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.
   Pro každé $w \in \langle\varphi\rangle$ máme

$$(2) \quad \frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

   Kde $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| = 1$ a suma konverguje stejnoměrně pro $w \in \langle\varphi\rangle$. Dosadíme (2) do (1). Potom

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w)\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ \text{ z } (\mathrm{CV}_z^{(n)}).$$

□

Příklad 6.5. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, protože $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$.

Věta 6.6 (O nulovém bodě). *Nechť f je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď*

1. *existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_0,r)$, anebo*
2. *existuje $r > 0$, že $f \neq 0$ na $P(z_0,r) := U(z_0,r)\setminus\{z_0\}$.*

V případě 2. existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ takové, že (0) $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f(p)(z_0) \neq 0$. Číslo p nazýváme násobnost nulového bodu z_0 funkce f.

Poznámka 6.7. Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti p, právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0,r))$ tak, že $\forall z \in U(z_0,r)$: $(\triangle)$ $g(z) \neq 0$ a $f(z) = (z-z_0)^p g(z)$.

Důkaz. Máme, že $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0,r)$. Pokud nenastane 1., potom existuje $n \in \mathbb{N}$, že $0 \neq a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $a_p \neq 0$. Potom platí (0) a $\forall z \in U(z_0,r)$: $f(z) = a_p(z-z_0)^p + \ldots = (z-z_0)^p \cdot \sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-p}$. Dále $g(z)$ definujeme jako poslední sumu.Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, existuje $r > 0$, že $g \neq 0$ na $U(z_0,r)$ a $f(z) = (z-z_0)^p g(z) \neq 0$ na $P(z_0,r)$. Obrácené tvrzení plyne snadno. $\square$

Věta 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce). *Nechť $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f,g \in \mathcal{H}(G)$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *$f = g$ na G;*
2. *množina $M := \{z \in G | f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod, tj. existuje $z_0 \in G$ takový, že $M \cap P(z_0,r) \neq \emptyset \; \forall r > 0$;*
3. *existuje $z_0 \in G$, že $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \; \forall k \in \mathbb{N}_0$.*

Důkaz. BÚNO $g \equiv 0$ na G (jinak uvažme $f - g$).
$1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$ Nechť $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G | f(z) = 0\}$. Z věty o nulovém bodě je $f = 0$ na nějakém okolí z_0, tudíž platí 3.
$3 \Rightarrow 1$ Nechť $N := \{z \in G | \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) = 0\}$. Potom $\emptyset \neq N$, N je uzavřená v G, protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc N je otevřená. Nechť $z_1 \in \mathbb{N}$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_1,r)$. Tedy $U(z_1,r) \subset N$. Protože G je oblast, dostaneme $N = G$ a speciálně 1. $\square$

Příklad 6.9. Vzoreček $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$ dostaneme z věty o jednoznačnosti, protože obě strany rovnosti jsou celé funkce a víme, že rovnost platí na $\mathbb{R}$ (tzn. platí 2).

Poznámka 6.10. Podobně lze řadu vzorečků bez počítání zobecnit z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$!

Věta 6.11 (Princip maxima modulu). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom je f konstantní na G, pokud $|f|$ nabývá na G lokální maximum, tzn. existuje $z_0 \in G$ a $r > 0$ tak, že $\forall z \in U(z_0,r) \subset G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$. (+)*

Důkaz. Nechť platí (+). Potom $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0,r)$. Pro $0 < \rho < r$ platí, že $|a_0|^2 = |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{int})(\sum\limits_{m=0}^{\infty} \overline{a_m}\rho^m e^{-imt})\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{a_m}\rho^{n+m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it(n-m)}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\rho^{2n}$, neboť $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it(n-m)}\,\mathrm{d}t = 0$, pro $n \neq m$ a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it(n-m)}\,\mathrm{d}t = 1$, pro $n = m$. Nebo-li $|a_0|^2 \geq |a_0|^2 + |a_1|^2\rho^2 + \cdots$, tudíž $0 = a_1 = a_2 = \cdots$. Dostáváme,že $f = a_0$ na $U(z_0,r)$ a z věty o jednoznačnosti $f = a_0$ na G. $\square$

7 Riemannova sféra

Rozšíříme $\mathbb{C}$ o *nekonečno*. Položíme $\$ = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin \mathbb{C}$, a zavedeme *okolí* kolem ∞ $P(\infty,\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $U(\infty,\varepsilon) := P(\infty,\varepsilon) \cup \{\infty\}$.

Definice 7.1. Řekneme, že $z_n \to z_0$ v $\$$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : z_n \in U(z_0,\varepsilon)$.

Poznámka 7.2. Z definice plyne:

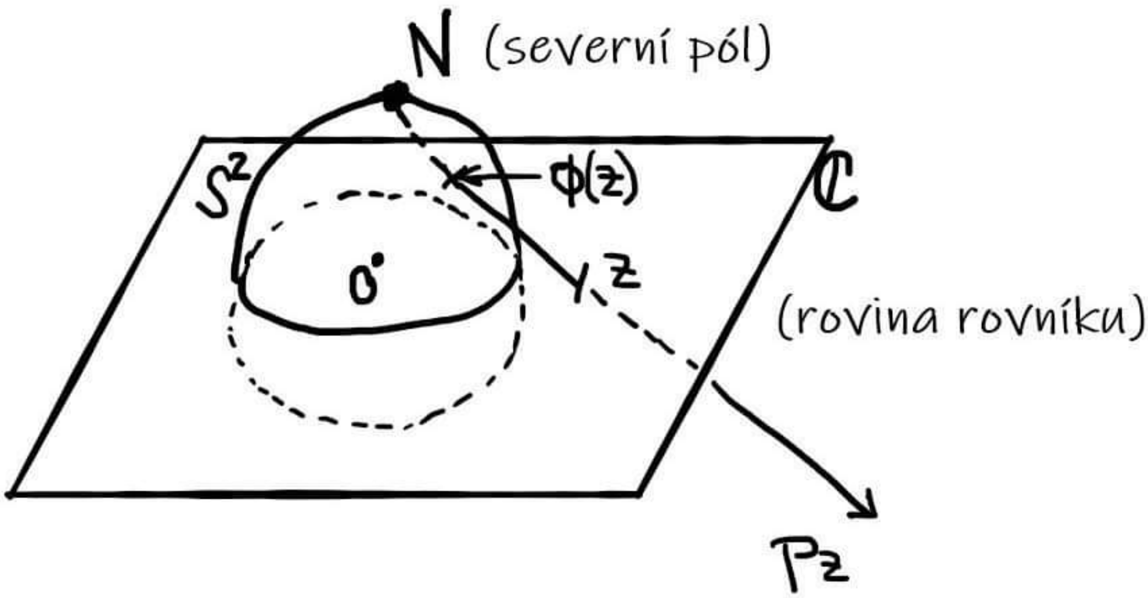
- $z_n \to z_0$ v $\$$ a $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z_n \to z_0$ v $\mathbb{C}$.
- $z_n \to \infty \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \to \cdot$. Zde $\frac{1}{\infty} := 0$ a $|\infty| := +\infty$.

Poznámka 7.3. $\$$ je jednobodová kompaktifikace topologického prostoru $\mathbb{C}$.

Vlastnosti 7.4.

Na $\$$ zavedeme metriku ρ (není jediná), tž. (*)$z_n \to z_0$ v $\$ \Leftrightarrow \rho(z_n, z_0) \to 0$. Navíc $(\$, \rho)$ bude *izometrický* s jednotkovou sférou $S^2 := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$, kterou chápeme jako metrický podprostor $\mathbb{R}^3$. Speciálně $(\$, \rho)$ je *kompaktní*.

- Definujeme *stereografickou projekci* $\phi : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ jako na obrázku, kde $N = (0,0,1)$.



  Položme $\phi(\infty) := N$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $\{\phi(z)\} = (S \setminus \{N\}) \cap p_z$, kde p_z je polopřímka z N procházející bodem $z \in \mathbb{C}$. Potom $\phi : \$ \xrightarrow{na} S^2$ je bijekce.

  Cvičení 7.5. (CV)

  - $\phi(z) := (\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
  - $\phi^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) := (\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma})$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$

- Položme $\rho(\cancel{z}, w) := |\phi(z) - \phi(w)|$, $z, w \in \$$, kde $|\cdot|_S$ je Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^3$.(ϕ je izometrie $(\cancel{\$}, \rho)$ na S^2)
- Platí (*). Skutečně z předchozího bodu a z cvičení máme: $\rho(z_n, z_0) \to 0 \Leftrightarrow \phi(\cancel{z_n} \to \phi(\cancel{z_0}) \Leftrightarrow z_n \to \cancel{z_0} v\cancel{\$}$, protože ϕ i ϕ^{-1} jsou spojité.

Příklad 7.6. Necht $z_n \in \mathbb{C}$ a $z_n \to \infty$. Potom $|z_n| \to +\infty \Rightarrow \phi(z_n) \in S^2; \phi_3(z_n) \to 1 \Rightarrow \phi(z_n) \to N := (0,0,1)$

Příklad 7.7. Necht $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$ a $(\alpha, \beta, \gamma) \to N$. Potom $|\phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)|^2 = \frac{1-\gamma_n^2}{(1-\gamma_n)^2} = \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \to +\infty \Rightarrow \phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \to \infty$

Značení. $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definice 7.8. Nechť $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ a $z_0, L \in \mathbb{S}$. Potom $L = \lim_{z \to z_0} f(z)$, pokud pro každou $(z_n) \subset \mathbb{S}$: $z_0 \neq z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to L$. Platí:

1. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f(1/z)$, má-li alespoň jedna strana smysl.

2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} 1/f(z) = 0$.

Definice 7.9 (Aritmetika limit v $\mathbb{S}$). Platí:

$$\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)},$$

mají-li pravé strany smysl, pokud definujeme $a/\infty = 0\ \forall a \in \mathbb{C},\ a/0 = \infty\ \forall a \in \mathbb{S}\setminus\{0\},\ a \pm \infty = \infty\ \forall a \in \mathbb{C},\ a \cdot \infty = \infty\ \forall a \in \mathbb{S}\setminus\{0\}$.
Nedefinujeme: $0/0,\ \infty/\infty,\ \infty \pm \infty\ 0 \cdot \infty$.

Příklad 7.10. *Racionální funkce* lze chápat jako spojité funkce z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$. Skutečně, nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, $Q \neq 0$ a P, Q nemají stejné kořeny.

1. Nechť $Q(z_0) = 0$. Potom $P(z_0) \neq 0$ a $\lim_{z\to z_0} R(z) = \infty$. Položme $R(z_0) := \infty$.

2. Pokud $R \not\equiv 0$, potom

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\overbrace{a_0}^{\neq 0} z^n + \cdots + a_n}{\underbrace{b_0}_{\neq 0} z^m + \cdots + b_m} = \lim_{z\to\infty} z^{n-m} \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_m}{z^m}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{pro } n = m, \\ \infty & \text{pro } n > m. \end{cases}$$

   Položme $R(\infty) := \lim_{z\to\infty} R(z)$.

7.1 Izolované singularity

Definice 7.11. Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Potom f má v z_0

1. *izolovanou singularitu*, existuje-li $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$,

2. *pól*, je-li $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$,

3. *podstatnou singularitu*, pokud $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Příklad 7.12.

$$\frac{\sin z}{z} \text{ má v 0 odstranitelnou singularitu,}$$
$$\frac{1}{z^{10}} \text{ má v 0 pól,}$$
$$e^{1/z} \text{ má v 0 podstatnou singularitu.}$$

Věta 7.13 (O odstranitelné singularitě). *Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. NTJE:*

1. *z_0 je odstranitelná singularita f,*

2. *existuje $r > 0$ tak, že f je omezená na $P(z_0, r)$,*

3. *existuje $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $F = f$ na $P(z_0)$.*

Úmluva 7.14. Odstranitelná singularita je vždy odstraněna ve smyslu (3). Didefinujeme f v z_0 holomorfně.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3):
Položme $g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{pro } z \in P(z_0), \\ 0 & \text{pro } z = z_0. \end{cases}$
Potom $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$, protože $g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \underbrace{(z-z_0)}_{\to 0} \underbrace{f(z)}_{omez.} = 0$. Navíc pro každé $z \in U(z_0)$ je $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^2 F(z)$, kde $F(z) \overset{def.}{:=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-2}$, $z \in U(z_0)$. Zřejmě $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $F = f$ na $P(z_0)$.
(3) $\Rightarrow$ (1): jasné. □

Věta 7.15 (O pólu). *Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. NTJE:*

1. *z_0 je pól f,*
2. *$h := \frac{1}{f}$ a $h(z_0) := 0$ má v z_0 nulový bod násobnosti p pro nějaké $p \in \mathbb{N}$,*
3. *existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že*
$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$
4. *existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \in \mathbb{Z}$*
$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

Číslo p z 2.–4. je určeno jednoznačně a nazývá se násobnost pólu *z_0 funkce f.*

Poznámka 7.16. Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \to z_0$, je-li $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom 3. $\iff$ $f(z) \sim \frac{1}{(z-z_0)^p}$, pro $z \to z_0$.

Důkaz. 1. $\Rightarrow$ 2. Protože $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, je $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Po odstranění odstranitelné singularity má $1/f$ v z_0 nulový bod konečné násobnosti $p \in \mathbb{N}$.
2. $\Rightarrow$ 3. Existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $h(z) = (z-z_0)^p g(z)$, $z \in U(z_0, r)$. Potom $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^p \underbrace{f(z)}_{=\frac{1}{h(z)}} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. $\Rightarrow$ 4. Máme $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{k-p} \underbrace{(z-z_0)^p f(z)}_{\in \mathbb{C}\setminus\{0\}} = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$

4. $\Rightarrow$ 1. pro k=0. □

Věta 7.17 (Casorati-Weierstrass). *Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. NTJE:*

1. *z_0 je podstatná singularita f,*
2. *$\forall r > 0 : \overline{f(P(z_0, r))} = \mathbb{C}$.*

Poznámka 7.18 (Velká Picardova věta). 1. $\iff$ 3.

3. $\forall r > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0, r))$ je nejvýše jednobodová [hluboká věta, důkaz nebude].

Příklad 7.19. $\exp(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exp(1/z)$ má v 0 podstatnou singularitu.

Důkaz. 2. $\Rightarrow$ 1. Jasné z definice limity.
$\neg$ 2. $\Rightarrow \neg$ 1. Předpokládejme, že existuje $r > 0$ tak, že $\mathbb{C}\setminus\overline{f(P(z_0,\ r))} \neq \emptyset$ a $f \in \mathcal{H}(P(z_0,\ r))$. Potom existuje $U(u_0,\ \beta) \subset \mathbb{C}\setminus\overline{f(P(z_0,\ r))}$, speciálně máme, že $0 < |z - z_0| < r \Rightarrow |f(z) - u_0| \geq \beta$. Definujeme

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - u_0},\ z \in P(z_0,\ r). \tag{*}$$

Potom je g holomorfní a $|g| \leq \frac{1}{\beta}$ na $P(z_0,\ r)$. Tedy z_0 je odstranitelná singularita a existuje $L := \lim_{z\to z_0} g(z) \in \mathbb{C}$. Potom máme $\lim_{z\to z_0} f(z) \overset{(*)}{=} \lim_{z\to z_0}(u_0 + \frac{1}{g(z)}) = \begin{cases} \infty & \text{pro } L = 0, \\ \in \mathbb{C} & \text{pro } L \neq 0. \end{cases}$
Tedy f má v z_0 buď odstranitelnou singularitu anebo pól. □

7.2 Laurentovy řady

Definice 7.20. Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n}_{(L)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}}_{(H)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n}_{(R)} \tag{10}$$

je *Laurentova řada* s koeficienty a_n a středem z_0. Řada (R) je *regulární část* (L) a řada (H) je *hlavní část* (L). Řekneme, že (L) konverguje, pokud obě její části, tj. (H) i (R), konvergují.

Příklad 7.21.

$$\exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

Vlastnosti 7.22 (L)**.**

1. *Konvergence:* Existují *jedinná* $R, r \in [0,\ +\infty]$ tak, že

   1. řada (R) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| < R$ a diverguje na $|z - z_0| > R$,
   2. řada (H) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| > r$ a diverguje na $|z - z_0| < r$.

2. *Součet:* Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ (toto vždy neplatí!). Položme *mezikruží* $P(z_0,\ r,\ R) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z - z_0| < R\}$. Označíme-li součet (L) jako f, potom na $P(z_0,\ r,\ R)$ je f holomorfní, řadu (L) tam definujeme "člen po členu", atd.

Poznámka. $P(z_0,\ R) = P(z_0,\ 0,\ R)$.

Důkaz. 1. Číslo R je poloměr konvergence mocninné řady (R). Pro $w = \frac{1}{z - z_0}$ je řada (H) rovna mocninné řadě (*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$. Číslo $\frac{1}{r}$ je poloměr konvergence (*).
2. Plyne opět z Weierstrassovy věty. □

$\boxed{\text{Cíl}}$ Ukážeme, že $f \in \mathcal{H}(P(z_0,\ r,\ R))$, právě když existuje jedinné (L), které má na $(P(z_0,\ r,\ R))$ součet f.

7.3 Holomorfní funkce na mezikruží

Lemma 7.23. *Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0,r,R) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\}$, kde $0 \le r < R \le +\infty$. Pro každé $\rho \in (r,R)$ $(\triangle) \varphi_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ a $J(\rho) = \int_{\varphi_\rho} f$. Potom je J konstantní na (r,R).*

Důkaz. BÚNO nechť $z_0 = 0$. Nechť $\rho \in (r,R)$. Potom máme $J(\rho) = i \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \rho e^{it} \, \mathrm{d}t =$ $i \int_0^{2\pi} g(\rho e^{it}) \, \mathrm{d}t$, kde $g(z) := f(z) \cdot z$, $z \in P := P(0,r,R)$. Dále $J'(\rho) \overset{(\times)}{=} \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it}) \rho e^{it} \, \mathrm{d}t =$ $\frac{1}{\rho} \int_{\varphi_\rho} g' = 0$, protože g' má PF g na P.
Platí $(\times)$, protože $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(g(\rho e^{it})) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \cos t + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} \sin t \overset{\text{CR věta}}{=} g' \cos t + i g' \sin t = g' e^{it}$. □

Věta 7.24 (Cauchyho vzorec na mezikruží). *Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$, kde $P := P(z_0,r,R)$. Nechť $r < r_0 < R_0 < R$ a $s \in P(z_0,r_0,R_0)$. Potom platí*

$$\Box f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)}{z-s} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)}{z-s} \, \mathrm{d}z,$$

kde φ_ρ je jako v $(\triangle)$.

Důkaz. Pro $z \in P$ položme

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, \; z \neq s, \\ &= f'(s), z = s. \end{aligned}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(P)$, protože h má „odstraněnou“ singularitu v s. Podle lemmatu máme

$$\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) \, \mathrm{d}z}{z-s} - f(s) \int_{\varphi_{R_0}} \frac{\mathrm{d}z}{z-s}, \text{ kde poslední integrál je roven } 2\pi i \cdot \mathrm{ind}_{\varphi_{R_0}} s = 2\pi i,$$

$$\int_{\varphi_{r_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) \, \mathrm{d}z}{z-s} - f(s) \int_{\varphi_{r_0}} \frac{\mathrm{d}z}{z-s}, \text{ kde poslední integrál je roven } 2\pi i \cdot \mathrm{ind}_{\varphi_{r_0}} s = 0.$$

Dále $\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} h$, tudíž platí $(\Box)$. □

Věta 7.25 (O Laurentově rozvoji holomorfní funkce na mezikruží). *Nechť $P := P(z_0,r,R)$, kde $0 \le r < R \le +\infty$. Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$. Potom existuje jediná Laurentova řada (L) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, která má na P součet f.*

Důkaz.

1. jednoznačnost: Nechť platí $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P$. Je-li $\rho \in (r,R)$ a $m \in \mathbb{Z}$, pak

   $$\int_{\varphi_\rho} f(z)(z-z_0)^{-(m+1)} \, \mathrm{d}z = \int_{\varphi_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m-1} \, \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\varphi_\rho} (z-z_0)^{n-m-1} \, \mathrm{d}z =$$

   $= 2\pi i \cdot a_m$, kde z druhé rovnosti suma konverguje stejnoměrně na $\langle \varphi_\rho \rangle$ a poslední integrál je roven 0 pro $n \neq m$ a $2\pi i \cdot \mathrm{ind}_{\varphi_\rho} z_0 = 2\pi i$ pro $n = m$.

   Závěr: koeficienty (L) se dají vyjádřit pomocí součtu f jako

   $$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz, \; m \in \mathbb{Z}, (**),$$

   kde φ_ρ je jako v $(\triangle)$. Podle lemmatu integrandy nezávisejí na $\rho \in (r,R)$.

2. existence: Nechť $s \in P$. Volme $r < r_0 < R_0 < R$, aby $s \in P(z_0, r_0, R_0)$. Potom z Cauchyho vzorce máme

$$(a)\, f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - s};$$

$$(b)\, \frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

kde řada konverguje stejnoměrně pro $z \in \langle \varphi_{R_0} \rangle$;

$$(c)\, \frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{(-1)}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}},$$

kde řada konverguje stejnoměrně pro $z \in \langle \varphi_{r_0} \rangle$. Dosadíme (b), (c) do (a) a dostaneme

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z =$$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^n \cdot a_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^{-n-1} \cdot a_{-(n+1)}$, kde a_n jsou jako v $(**)$.

□

7.4 Izolované singularity 2

Věta 7.26 (O Laurentově rozvoji kolem izolované singularity). *Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$ a $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$. Potom*

1. *f má v z_0 odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow \forall n < 0 : a_n = 0$;*
2. *f má v z_0 pól násobnosti $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-p} \neq 0$ a $\forall n < -p : a_n = 0$;*
3. *f má v z_0 podstatnou singularitu $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.*

Důkaz. 1. jasné

2. f má v z_0 pól násobnosti p, právě když $g(z) := (z-z_0)^p f(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu a po jejím odstranění je $g(z_0) \neq 0$. Neboli $(z-z_0)^p f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$ a $b_0 = g(z_0) \neq 0$, tzn.

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-p},\ z \in P(z_0, r).$$

3. Z 1., 2. máme, že f nemá v z_0 podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro konečně mnoho $n < 0$.

□

Věta 7.27 (Rozklad holomorfní funkce s nekonečně mnoha izolovanými singularitami). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Pro každé $s \in M$ označme H_s součet hlavní části Laurentova rozvoje funkce f kolem s. Potom existuje jediná $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum\limits_{s \in M} H_s + h$ na $G \setminus M$.*

Důkaz. Zřejmě $H_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\}) \forall s \in M$. Funkce $h := f - \sum_{s \in M} H_s$ je holomorfní na $G \setminus M$ a v bodech $s \in M$ má odstranitelné singularity. Skutečně, nechť $s_0 \in M$. Potom existuje $r_0 > 0$ tak, že $P(s_0, r_0) \subset G \setminus M$ a $f = R_{s_0} + H_{s_0}$ na $P(s_0, r_0)$, kde R_{s_0} je součet regulární části Laurentova rozvoje f kolem s_0 a $R_{s_0} \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0))$. Tedy na $P(s_0, r_0)$ máme $h = R_{s_0} + H_{s_0} - \sum_{s \in M} H_s = R_{s_0} - \sum_{s \in M, s \neq s_0} H_s \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0))$. □

7.5 Reziduum

Definice 7.28. Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$ a nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in P(z_0)$. Potom reziduem f v z_0 nazveme číslo $\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$.

Věta 7.29 (Reziduová na hvězdovitých oblastech). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Nechť φ je uzavřená křivka v $G \setminus M$. Potom máme $(RV) \int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s \in M} res_s f \cdot ind_\varphi s$.*

Poznámka. Pro $M = \varnothing$ dostaneme Cauchyho větu.

Důkaz. Podle předchozí věty existuje $f \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ na $G \setminus M$. Potom máme $\int_\varphi f = \sum_{s \in M} \int_\varphi H_s$, protože $\int_\varphi h = 0$ z Cauchyho věty pro hvězdovité oblasti. Pro každé $s \in M$:

$$\int_\varphi H_s(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \frac{1}{(z-s)^n}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{(z-s)^n} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_\varphi s,$$

jelikož suma konverguje stejnoměrně na $\langle \varphi \rangle$ a poslední integrál je roven 0, $n \neq 1$ (integrand má PF) a $2\pi i \cdot \operatorname{ind}_\varphi s$, je-li $n = 1$. □

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Kateřina Lipavská, Stanislav Mosný, Terka Poláková a Petr Sedláček