Úvod do komplexní analýzy

6. října 2020

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm Euklidovskou normu a metriku:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. *Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:*

- *násobení* $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- *ztotožňujeme* $(x,0) \cong$*, neboli* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- *značíme* $i = (0,1)$

Vlastnosti $\mathbb{C}$*. Nechť* $z = (x,y) \in \mathbb{C}$*.*

- *Potom* $z = x+iy$ *a* $(\pm i)^2 = -1$
- *Násobení v* $\mathbb{C}$ *zahrnuje násobení v* $\mathbb{R}$ *i násobení skalárem v* $\mathbb{R}^2$

Značení 1.2. *Nechť* $z = x+iy$*, kde* $x,y \in \mathbb{R}$*. Potom*

- $\overline{z} := x - iy$ *je komplexně sdružená část k* z*,*
- $Re(z) := x$ *je reálná část* z*,* $Im(z) := y$ *je imaginární část* z*,*
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ *je modul nebo absolutní hodnota* z*.*

Dále platí

- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$
- $\mathbb{C}$ je těleso

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. *$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1,0)^T,(0,1)^T)$. Obecné $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ má tvar*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

kde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ je komplexní vektorový prostor dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ má tvar $Lz=wz, z\in\mathbb{C}$, kde $w\in\mathbb{C}$. Nechť $z=(a+ib)(x+iy)=(ax-by,bx+ay)=$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pozorování 2.2. *$\mathbb{R}$-lineární zobrazení (1) je $\mathbb{C}$-lineární, právě když $d=a, c=-b$.*

Poznámka 2.3. *$\mathbb{C}$-lineární zobrazení jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-lineární zobrazení.*

Úmluva 2.4. *Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexnou funkci komplexné proměnné. Na $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.*

Definice 2.5. *Pro $z_0\in\mathbb{C},\delta>0$ značíme $U(z_0,\delta):=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\delta\}$ a nazýváme ji okolí z_0. Dále $P(z_0,\delta):=U(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ nazýváme prstencové okolí. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0),P(z_0)$.*
Potom definujeme

- $\lim_{z\to x_0} f(z)=L$, *pokud* $\forall\epsilon>0\exists\delta>0: z\in P(x_0,\delta) \implies f(z)\in U(L,\epsilon)$
- *f je spojitá v x_0, pokud $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.*

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. *Funkce f je v x_0 $\mathbb{R}$-diferencovatelná, pokud existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ takové, že*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{|h|}=0.$$

Poznámka 3.2. *Potom $df(x_0):=L$ je tzv. totální diferenciál f v x_0 a platí, že*

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h\in\mathbb{R}^2$$

kde $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$. (Ta matice se nazývá Jacobiho matice.)

Definice 3.3. *Řekneme, že funkce f je v x_0 $\mathbb{C}$-diferencovatelná, pokud existuje konečná limita*

$$f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme komplexní derivací f v x_0.

Poznámka 3.4. *Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí* $(f \pm g)', (f.g)', (f/g)', (f \circ g)'$

Příklad 3.5.
- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ *a* $n \in \mathbb{N}$
- $f(z) = \overline{z}$ *není nikde v* $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$*-diferencovatelná, ale* $f(x,y) = (x,-y)$ *je všude* $\mathbb{R}$*-diferencovatelná. Skutečně, máme*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

Avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť* f *je funkce diferencovatelná na okolí* $x_0 \in \mathbb{C}$*. Pak následující je ekvivalentní:*

1. *Existuje* $f'(x_0)$
2. *Existuje* $df(x_0)$ *a* $df(x_0)$ *je* $\mathbb{C}$*-lineární*
3. *Existuje* $df(x_0)$ *a v* z_0 *platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.*

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

zde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

Důkaz. (2. $\iff$ 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(z_0) - wh}{h} \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|} \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh, h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

Poznámka 3.7.
- *Existuje-li* $f'(z_0)$*, potom* $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ *a* $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- *Platí, že* $(CR) \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz.
- $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

□

Příklad 3.8. *Nechť* $f(z) = \overline{z}$*, pak* $f'(x,y) = (x,-y)$*. Dále*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$*, ale v žádném* $z \in \mathbb{C}$ *nesplňuje* (CR)*, proto není nikde* $\mathbb{C}$*-diferencovatelná.*