Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

15. října 2020

Obsah

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:

- násobení $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- ztotožňujeme $(x,0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0,1)$

Vlastnosti 1.2.
Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$.

Značení 1.3. Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\overline{z} := x - iy$ je *komplexně sdružené číslo* k z,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* z, $Im(z) := y$ je *imaginární část* z,
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* z.

Dále platí

- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- $\mathbb{C}$ je těleso.

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. $\mathbb{R}^2$ je *reálný vektorový prostor* dimenze 2, jeho báze je $\big((1,0)^T,(0,1)^T\big)$. Obecné $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (x + iy)$, $w = (a + ib)$. Potom

$$Lz = (a+ib)(x+iy) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2.2. $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* (1) je $\mathbb{C}$-*lineární*, právě když $d = a$, $c = -b$.

Poznámka 2.3. $\mathbb{C}$-*lineární zobrazení* jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení.*

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné.* Na $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* z_0. Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí.* Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$.
Potom definujeme

- $\lim_{z \to x_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : z \in P(x_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- f je spojitá v x_0, pokud $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v x_0 $\mathbb{R}$-*diferencovatelná*, pokud existuje $\mathbb{R}$-*lineární zobrazení* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $\mathrm{d}f(x_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* f v x_0 a platí, že

$$\mathrm{d}f(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, \; h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Ta matice se nazývá *Jacobiho matice.*)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v x_0 $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme *komplexní derivací* f v x_0.

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)'$, $(f.g)'$, $(f/g)'$ a $(f \circ g)'$.

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.

- $f(z) = \overline{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-*diferencovatelná*, ale $f(x,y) = (x,-y)$ je všude $\mathbb{R}$-*diferencovatelná*. Skutečně, máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h},$$

  avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce diferencovatelná na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje $f'(z_0)$*
2. *Existuje $\mathrm{d}f(z_0)$ a $\mathrm{d}f(z_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární*
3. *Existuje $\mathrm{d}f(z_0)$ a v z_0 platí tzv.* Cauchy-Riemannovy podmínky*.*

Cauchy-Riemannovy podmínky*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned} \tag{CR}$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

Důkaz. (2. $\iff$ 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{h}. \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{|h|}, \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $\mathrm{d}f(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

Poznámka 3.7.

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff$ $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz.

- $\mathrm{d}f(z_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} z_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- zřejmé

□

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \overline{z}$, pak $f'(x,y) = (x,-y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \; \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$-*diferencovatelná.*

Definice 3.9. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G *holomorfní*, pokud f je $\mathbb{C}$-*diferencovatelná* v každém $z_0 \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních funkcí $f\colon G \to \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je *celá*, pokud $F \in \mathcal{H}(G)$.

Příklad 3.10.

- *Polynom* $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je *celá* funkce.
- Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionální funkce R je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$, což je konečná množina.

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(t) \colon = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp(z),\ f_1(x,y) = e^x \cos y,\ f_2(x,y) = e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon w = z + 2k\pi i$
- Nechť $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 4.3. Nechť $z = x + iy$ je komplexní číslo, pak se na něj můžeme dívat jako na bod v rovině určený kartézskými souřadnicemi x a y. *Polární (Goniometrický) tvar komplexního čísla* získám tak, že si body x a y vyjádřím v polárních souřadnicích a ty pak dosadím do rovnice udávající z.
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z. Polární souřadnice mi říkají jak je daleko od počátku r a v jakém směru $\measuredangle\varphi$ se bod z nachází.

Značení 4.4. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položme $\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ Je-li $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z) := \varphi_0$ je tzv. *hlavní hodnota argumentu z*.

Platí:

- $\operatorname{Arg}(z) \colon = \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$, kde arg je surjektivní a navíc je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Dále je arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$.

- Pro $z = 0$ nemáme řešení.
- Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.5. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

- $\operatorname{Log} z\colon = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z\colon = \log|z| + i\arg z$, tzv. *hlavní hodnota logaritmu z.*

Vlastnosti 4.6.

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_P)^{-1}$, kde P známe z vlastností exponenciály.
- $\log$ není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s komplexním logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp z) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$-periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.7. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom *hlavní hodnotu α-té mocniny z* definujeme $z^\alpha\colon = \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z)\colon = \{\exp(\alpha w) \mid w \in \operatorname{Log} z\}$.

Vlastnosti 4.8.

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s definicí z MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
$w \in \operatorname{Log} z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pozorování 4.9. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p\,|_q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \cdots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

Příklad 4.10.

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s definicí z MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2}+2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

- $(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
  např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.11. Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2}$ = sudá část + lichá část.

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.12.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.13.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, kde

Definice 4.14.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.15.

- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou 2π-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5 Křivkový integrál

Definice 5.1. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Potom

1. φ je *křivka*, pokud je φ spojitá
2. φ je *regulární křivka*, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha,\beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi\big|_{[t_i,t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0,\cdots,n-1$.

Definice 5.2 (Úsečka). Nechť $a,b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$ je úsečka z a do b. Značíme $[a;b]$.

Značení 5.3. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma,\delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dotplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha,\beta] \\ \psi(t-\beta+\gamma) & \text{pro } t \in [\beta,\delta+\beta-\gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

Definice 5.4 (Lomenná čára). Řekneme, že regulární křivka φ je *lomenná čára* v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, z_2, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1;z_2] \dotplus [z_2;z_3] \dotplus \cdots \dotplus [z_{k-1};z_k]$.

Definice 5.5 (Kružnice). Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 5.6. Pro křivku φ může být její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha,\beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

Úmluva 5.7. Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku v* $\mathbb{C}$.

Připomenutí 5.8. Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t),$$
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

   mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

   je-li φ regulární.

Definice 5.9. Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Poznámka 5.10.

1. Křivkový integrál (4) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$

Základní vlastnosti 5.11.

1. Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom
$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g.$$

2. Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom $\left|\int_\varphi f\right| \leq \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$.

   Důkaz. Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme
$$\left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_\alpha^\beta M\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M \cdot V(\varphi)$$
□

3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta], \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom
$$\int_{\varphi \dotplus \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f$$
a
$$\int_{\dot-\varphi} f = -\int_\varphi f,$$
   kde $(\dot-\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je *opačná křivka* k φ.

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky.* Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom
$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$

   Důkaz.
$$\int_\psi f = \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi(\omega(t))\Big)\varphi'(\omega(t))\omega'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_\gamma^\delta f\Big(\varphi(\omega(t))\Big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\substack{\text{subst.}\\ \tau=\omega(t)}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\varphi f.$$
□

Definice 5.12. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F, pokud $F' = f$ na G.

Příklad 5.13. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k $z^n \begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \ldots \end{cases}$

Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ je křivka a f je spojitá$^{(*)}$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom*

1. $\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_\varphi f = 0$, *je-li* φ uzavřená, *tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Poznámka 5.15. (*) Ukážeme si později, že funkce f, která má na G primitivní funkci, je na G holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz. Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2' = F'\varphi_1' + iF'\varphi_2' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha\beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Příklad 5.16.

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nemá* primitivní funkci, neboť víme

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Připomenutí 5.17 (Souvislost). Nechť $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) G je *souvislá*, tj. G je *oblast.*

(b) G je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

(c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

Důkaz. $(a) \iff (b)$: víte z MA; $(c) \Rightarrow (b)$: jasné; $(a) \Rightarrow (c)$: ukáže se podobně jako $(a) \Rightarrow (b)$ □

Věta 5.18. *Funkce f je konstatní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Jasné.
$\Leftarrow$ Nechť $z, w \in G$ a φ je lomenná čára v G spojující z a w. Potom $f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G. □

Důsledek 5.19. *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na* oblasti $G \subset \mathbb{C}$, *potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.*

Důkaz.

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

Věta 5.20 (O existenci PF). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G. NTJE:*

1. *f má na G primitivní funkci.*

2. $\int_\varphi f = 0$ *pro každou* uzavřenou *křivku* φ *v* G.

3. $\int_\varphi f$ nezávisí *v* G na křivce φ, *tzn. pro každé dvě křivky* $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$, $\psi : [\gamma,\delta] \to G$ *takové, že* $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ *a* $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, *platí* $\int_\varphi f = \int_\psi f$.

Poznámka 5.21. Přípomíná *větu o potenciálu* z MA ?

Důkaz věty 5.20.
1. ⇒ 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF
2. ⇒ 3. Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je τ *uzavřená* a z 2. dostaneme

$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$

3. ⇒ 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najděme lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z. Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní, nezávislá na volbě φ_z, protože předpokládáme 3. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \overset{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dotplus u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je *úsečka*, tzn. $u(t) = z_1 + t \cdot h$, $t \in [0,1]$. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th)h \,\mathrm{d}t,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{g} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \,\mathrm{d}t.$$

To se blíží k nule pro $h \to 0$, protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \,\mathrm{d}t \right| \leq \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

ze spojitosti f v z_1. Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

Značení 5.22.

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

   Poznámka. Konvexní $\subsetneq$ hvězdicovitá.

2. Řekneme, že $\triangle \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\triangle := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

   (*konvexní obal* a, b, c) a značíme $\partial\triangle := [a; b] \dotplus [b; c] \dotplus [c; a]$. Připouštíme i degenerované $\triangle$, tzn. a, b, c mohou ležet na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

Dodatek 5.23. *Nechť* f *je spojitá funkce na* hvězdicovité *oblasti* $G \subset \mathbb{C}$. *Je-li*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0, \tag{5}$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$, *potom* f *má na* G *primitivní funkci.*

Důkaz. Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G, Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický ③ ⇒ ① předchozí věty, když místo ③ uvažujeme (5). □

Poznámka 5.24. Cauchyho věta – Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G. Potom Cauchyho věty nám říkají za jakých podmínek na G a φ je $\int_\varphi f = 0$.

Věta 5.25 (Gousartovo lemma – „Cauchyho věta pro $\triangle$"). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a $\triangle$ je trojúhelník v G. Potom*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0. \tag{6}$$

Důkaz. Označme $\varphi_0 := \partial\triangle$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě $\triangle$ je nedegenerovaný. V $\triangle$ veďme střední příčky a označme ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 obvody čtyř vzniklých trojúhelníků (ψ_4 je obvod vnitřního trojúhelníka). Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1(vlevo dole), ψ_2(vpravo dole), ψ_3(nahore) a ψ_4(uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$. Ex. $j_1 = 1, \ldots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků, tž $\triangle\psi_{j_1}$ zase rozdělíme na 4 menší $\triangle$y středními příčkami a proces opakujeme. $\triangle_0 := \triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$ s obvody φ_0, φ_1, φ_2, …takové, že $(a)|\int_{\varphi_j} f| \geq \frac{K}{4^j}$ a $V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}$. Máme, že $\bigcap\limits_{j=0}^{\infty} \triangle_j = \{z_0\} \subset G$,protože $\operatorname{diam}(\triangle_j) \to 0$. Položme

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) :&= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0),\ z \in G\backslash\{z_0\}; \\ :&= 0,\ z = z_0. \end{aligned}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$

$$(b) \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z,$$

kde první integrand má PF na $\mathbb{C}$ a první integrál je roven 0. Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ z $(a), (b)$ dostaneme

$$\frac{K}{4^j} \leq \left|\int_{\varphi_j} f\right| \overset{(b)}{=} \left|\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)\right| \leq V^2(\varphi_j) \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{<\varphi_j>} |\varepsilon|,$$

kde druhá nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po vynásobení 4^j): $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max\limits_{<\varphi_j>} |\varepsilon| \to 0$, protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. Což je spor. □

Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G.*

Důkaz. Z Goursartova lemmatu a dodatku k větě o existenci PF. □

Poznámka 5.27. Gousartovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f, která je spojitá na G a holomorfní na $G\backslash\{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

Důkaz. Skutečně, nechť $\triangle$ je nedegenerovaný trojúhelník v G. Potom

1. Nechť $z_0 \notin \triangle$. Potom $\int_{\partial\triangle} f = 0$. Tady nám bude stačit použít obyčejné Gousartovo lemmma

2. Nechť z_0 je vrchol $\triangle$. Nechť $\triangle_\varepsilon$ je trojúhelník podobný s $\triangle$, $\triangle_\varepsilon \subset \triangle$ a z_0 je jeho vrcholem. Poměr stran $\triangle$ ku $\triangle_\varepsilon$ je roven ε. $\triangle', \triangle''$ jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením $\triangle$ na tři trojúhelníky ($\triangle_\varepsilon$, $\triangle'$, $\triangle''$). Obvody vzniklých vnitřních trojúhelníků procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle_\varepsilon} f + \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f$, kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $|\int_{\partial\triangle} f| = |\int_{\partial\triangle_\varepsilon} f| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\triangle) \cdot \max_\triangle |f| \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$. Tedy $\int_{\partial\triangle} f = 0$.
3. Nechť z_0 leží uvnitř strany $\triangle$. Potom $\triangle$ rozříznu na dva menší trojúhelníky $\triangle'$ a $\triangle''$ se společným vrcholem v z_0. Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f$, kde oba integrály na pravé straně jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $\int_{\partial\triangle} f = 0$.
4. Nechť z_0 leží uvnitř $\triangle$. Potom $\triangle$ rozříznu na tři menší trojúhelníky $\triangle'$ a $\triangle''$, $\triangle'''$ se společným vrcholem v z_0. Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f + \int_{\partial\triangle'''} f$, kde jsou všechny tři integrály na pravé straně rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

$\square$

Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru). *Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z,s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z,s)$ jsou spojité komplexní funkce na $\langle\varphi\rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položme $\phi(s) := \int_\varphi F(z,s)dz$. Potom $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\phi' = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s}(z,s)dz$, $s \in \Omega$.*

Důkaz. Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1,s_2) \in \Omega$ máme $\phi(s) = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t),s_1,s_2)\varphi'(t)dt$, pokud $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislího na reálných parametrech $\frac{\partial\phi}{\partial s_j}(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)dz$, $s \in \Omega$ a $j = 1,2$ tyto parciální derivace $\frac{\partial\phi}{\partial s_j}(s)$, $j = 1,2$ jsou spojité a splnují (CR)-podmínky. To je vidět z toho, že $\frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)$, $j = 1,2$ jsou spojité a splnují (CR)-podmínky. Z (CR) dostanu, že funkce φ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. Odtud plyne věta. $\square$

Definice 5.29. Nechť je φ uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C}\backslash\langle\varphi\rangle$. Potom číslo $ind_\varphi s := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$ nazveme *indexem bodu vzhledem ke křivce φ*

Poznámka 5.30. Ukážeme si, že $ind_\varphi s$ se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 5.31 (o základních vlastnostech indexu). *Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $G := \mathbb{C}\backslash\langle\varphi\rangle$. Potom je G otevřená, funkce $s \to ind_\varphi s$je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.*

Důkaz.
(i) Podle předchozí věty je $\phi(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má PF na $\mathbb{C}\backslash\{s\}$. Tedy ϕ je konstantní na každé komponentě G.

(ii) Volím $R > 0$, aby $\langle\varphi\rangle \subset U(0,R)$. Potom $\mathbb{C}\backslash U(0,R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G. Navíc pro $s \in \mathbb{C}\backslash U(0,R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0,R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\phi(s) = 0$

$\square$

Příklad 5.32. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Potom $ind_\varphi s$

$= 1$, $|s - z_0| < r$;

$= 0$, $|s - z_0| > r$.

Spočetli jsme, že $ind_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-z_0} = 1$. Zbytek plyne z předchozí věty.

Věta 5.33 (Cauchyův vzorec pro kruh). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nechť $\overline{U(z_0,r)} \subset G$ a $\varphi t := z_0 + r.e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ $(*)$. Potom platí TBA*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz = \begin{cases} f(s), & |s-z_0| < r \\ 0, & |s-z_0| > r \end{cases}$$

Důkaz. (i) Existuje $R > r$ tak, že $U(z_0,R) \subset G$. Nechť $|s-z_0| < r$. Definujme

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z \neq s \ \ a \ \ z \in G \\ f'(s), & z = s. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U(z_0,R) \setminus \{s\})$ a spojitá na hvězdovité oblasti $U(z_0,R)$. Potom z Cauchyho věty

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi h = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz - f(s).\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}}_{=ind_\varphi s = 1}$$

(ii) Nechť $|s-z_0| > r$. Volme $R' \in (r, |s-z_0|)$, aby $U(z_0,R') \subset G$. Potom $f(z)/(z-s)$ je holomorfní funkce na $U(z_0,R')$ a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz = 0.$$

□

Důsledek 5.34. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivaci všech řádů všude na G. Nechť $\overline{U(z_0,r)} \subset G$ a φ je jako v $(*)$. Potom TBA*

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}}dz = f^{(k)}(s), \quad |s-z_0| < r \ \ a \ \ k = 0,1,2,3,\ldots$$

Zde $f^{(0)} = f$ a k-tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Z věty o derivaci integrálu dle komplexního parametru a (CV_z), protože

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{z-s}\right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

□

Věta 5.35 (Morera). *Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když TBA*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0 \quad \text{pro každý trojúhelník } \triangle \subset G.$$

Důkaz. "$\Rightarrow$": Goursatovo lemma
"$\Leftarrow$": Nechť $\mathcal{U} := U(z_0,R)$ je libovolný kruh v G. Protože f je spojitá na $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ je hvězdicovitá oblast a

$$\int_{\partial\triangle} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset \mathcal{U}$, má f na $\mathcal{U}$ primitivní funkci F, to znamená, že $f = F'$ na $\mathcal{U}$. Protože $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, máme $f' = F''$ na $\mathcal{U}$, tudíž f je holomorfní na $\mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U}$ byl libovolný kruh v G, je $f \in \mathcal{H}(G)$. □

Věta 5.36 (Cachyho odhady). *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0,+\infty)$ a f je holomorní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0,r)}$. Potom pro každé $k = 0,1,2,...$ je TBA*

$$\forall s \in \mathcal{U} := U(z_0,r): \quad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{r.k!}{(d(s))^{k+1}}.\max_{\partial\mathcal{U}}|f|,$$

kde $d(s) := dist(s,\partial\mathcal{U}) \overset{def.}{:=} \min_{z\in\partial\mathcal{U}}|s-z|$

$$\forall s \in U\left(z_0,\frac{r}{2}\right): \quad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!.2^{k+1}}{r^k}.\max_{\partial U}|f|,$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k}.\max_{\partial U}|f|.$$

Důkaz. (CO_1) dostaneme z $(CV_z^{(k)})$, protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}}dz\right| \leq \frac{k!}{2\pi}.2\pi r.\frac{1}{(d(s))^{k+1}}.\max_{\partial\mathcal{U}}|f|$$

a $|z-s| \geq d(s)$, $z \in \partial\mathcal{U} = \langle\varphi\rangle$, zde $\varphi(t) = z_0 + r.e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.
(CO_2) plyne z (CO_1), protože $d(s) \geq \frac{r}{2}$ $\forall s \in U(z_0,r/2)$.
(CO_3) plyne z (CO_1), protože $d(z_0) = r$. □

Věta 5.37 (Liouville). *Je-li f holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.*

Důkaz. Ukážeme, že $f' = 0$ na $\mathbb{C}$. Označme $M := \sup_{\mathbb{C}}|f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Z (CO_3) dostaneme pro každé $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}.\max_{\partial U(z_0,r)}|f| \leq \frac{M}{r} \underset{r\to+\infty}{\to} 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. □

Důsledek 5.38 (Základní věta algebry). *V $\mathbb{C}$ má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň jeden kořen.*

Důkaz. Nehť $p(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_n$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$.
Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. Položme $f := 1/p$. Potom f je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, tudíž dle Liouvilleovy věty je f i p konstantní. Tedy $p' = 0$ a $0 = p^{(n)} = n!a_0$, což je spor.
Omezenost f: Máme

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z_n.(a_0 + \frac{a_1}{z} + ... + \frac{a_n}{z^n})}\right| \leq \frac{1}{r^n}.\frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - ... - \frac{|a_n|}{r^n}} \longrightarrow 0$$

pro $r = |z| \to +\infty$
Existuje $r_0 \in (0,+\infty)$ tak, že $|f(z)| \leq 1$, je-li $|z| > r_0$. Funkce f je omezená na $\overline{U(0,r_0)}$, protože je tam spojitá. □

Lemma 5.39. *Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$, f_n jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ pro $n = 1,2,3,...$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$ a*

$$\int_\varphi f_n \longrightarrow \int_\varphi f$$

.

Důkaz. Máme

$$0 \leq \left| \int_\varphi f_n - \int_\varphi f \right| = \left| \int_\varphi (f_n - f) \right| \leq V(\varphi). \max_{\langle\varphi\rangle} |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Věta 5.40 (Weierstrass). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. ① Zřejmě je f spojitá. Nechť $\triangle$ je trojúhelník v G. Potom

$$0 = \int_{\partial\triangle} f_n \overset{Lemma}{\longrightarrow} \int_{\partial\triangle} f = 0$$

Z Morerovy věty je $f \in \mathcal{H}(G)$.
② Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0,r)} \subset G$. Potom z (CO_2) máme:

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \quad \left|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)\right| = \left|(f_n - f)^{(k)}(s)\right| \leq \frac{k!.2^{k+1}}{r^k}. \max_{\partial U(z_0,r)} |f_n - f| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

6 Mocninné řady

Definice 6.1. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom TBA

$$\sum_{n=0}^\infty a_n.(z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

je mocninná řada o středu z_0 s koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^\infty$.

Vlastnosti 6.2.

① **Konvergence** (na cvičení)
Existuje jediné $R \in [0, +\infty]$ takové, že

- řada TBA konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,
- řada TBA diverguje pro $|z - z_0| > R$.

Číslo R se nazývá poloměr konvergence TBA a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde položíme $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.
② Označíme-li součet TBA na $U(z_0,R)$ jako f, potom je $f \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$ a

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \;\; \forall z \in U(z_0,R): \qquad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n.n.(n-1)...(n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

speciálně $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Poznámka 6.3. Mocninnou řadu derivujeme "člen po členu", můžeme na $U(z_0, r)$ zaměnit sumu a komplexnou derivaci.

Důkaz. Užijeme Weierstrassovu větu na

$$S_n(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n, \qquad z \in U(z_0, R)$$

Dosadíme-li do TBA $z = z_0$, máme $f^{(k)}(z_0) = a_k.k!$ $\square$

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček