Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

8. října 2020

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm Euklidovskou normu a metriku:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. *Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:*

- *násobení* $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- *ztotožňujeme* $(x,0) \cong$, *neboli* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- *značíme* $i = (0,1)$

Vlastnosti 1.2.

Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$

Značení 1.3. *Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom*

- $\overline{z} := x-iy$ *je komplexně sdružená část k z,*
- $Re(z) := x$ *je reálná část z,* $Im(z) := y$ *je imaginární část z,*
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ *je modul nebo absolutní hodnota z.*

Dále platí

- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$
- $\mathbb{C}$ je těleso

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. *$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1,0)^T,(0,1)^T)$. Obecné $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ má tvar*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

kde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ je komplexní vektorový prostor dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ má tvar $Lz=wz, z\in\mathbb{C}$, kde $w\in\mathbb{C}$. Nechť $z=(a+ib)(x+iy)=(ax-by,bx+ay)=$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pozorování 2.2. *$\mathbb{R}$-lineární zobrazení (1) je $\mathbb{C}$-lineární, právě když $d=a, c=-b$.*

Poznámka 2.3. *$\mathbb{C}$-lineární zobrazení jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-lineární zobrazení.*

Úmluva 2.4. *Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexnou funkci komplexné proměnné. Na $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.*

Definice 2.5. *Pro $z_0\in\mathbb{C},\delta>0$ značíme $U(z_0,\delta):=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\delta\}$ a nazýváme ji okolí z_0. Dále $P(z_0,\delta):=U(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ nazýváme prstencové okolí. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0),P(z_0)$.*
Potom definujeme

- $\lim_{z\to x_0} f(z)=L$, *pokud* $\forall\epsilon>0\exists\delta>0: z\in P(x_0,\delta) \implies f(z)\in U(L,\epsilon)$
- *f je spojitá v x_0, pokud* $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. *Funkce f je v x_0 $\mathbb{R}$-diferencovatelná, pokud existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ takové, že*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{|h|}=0.$$

Poznámka 3.2. *Potom $df(x_0):=L$ je tzv. totální diferenciál f v x_0 a platí, že*

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h\in\mathbb{R}^2$$

kde $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$. (Ta matice se nazývá Jacobiho matice.)

Definice 3.3. *Řekneme, že funkce f je v x_0 $\mathbb{C}$-diferencovatelná, pokud existuje konečná limita*

$$f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme komplexní derivací f v x_0.

Poznámka 3.4. *Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí* $(f \pm g)', (f.g)', (f/g)', (f \circ g)'$

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ *a* $n \in \mathbb{N}$
- $f(z) = \overline{z}$ *není nikde v* $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$*-diferencovatelná, ale* $f(x,y) = (x,-y)$ *je všude* $\mathbb{R}$*-diferencovatelná. Skutečně, máme*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

  Avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť* f *je funkce diferencovatelná na okolí* $x_0 \in \mathbb{C}$. *Pak následující je ekvivalentní:*

1. *Existuje* $f'(x_0)$
2. *Existuje* $df(x_0)$ *a* $df(x_0)$ *je* $\mathbb{C}$*-lineární*
3. *Existuje* $df(x_0)$ *a v* z_0 *platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.*

Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

zde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

Důkaz. (2. $\iff$ 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(z_0) - wh}{h} \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{|h|} \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh, h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

Poznámka 3.7.

- *Existuje-li* $f'(z_0)$, *potom* $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ *a* $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- *Platí, že* $(CR) \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

Důkaz.

- $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

□

Příklad 3.8. *Nechť* $f(z) = \overline{z}$, *pak* $f'(x,y) = (x,-y)$. *Dále*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, *ale v žádném* $z \in \mathbb{C}$ *nesplňuje* (CR), *proto není nikde* $\mathbb{C}$*-diferencovatelná.*

Definice 3.9. *Nechť* $\mathbb{C}$ *je otevřené a* $f: G \to \mathbb{C}$*. Potom říkáme, že* f *je na* G *kolomorfní, pokud* f *je* $\mathbb{C}$*-diferencovatelná v každém* $z \in G$*. Značíme* $\mathcal{H}(G)$ *prostor všech kolomorfních* $f: G \to \mathbb{C}$*. Říkáme, že funkce* F *je celá, pokud* $F \in \mathcal{H}(G)$*.*

Příklad 3.10.
- *Polynom* $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$*,* $z \in \mathbb{C}$ *je celá funkce.*
- *Necht* $R = P/Q$*, kde* P*,* Q *jsou polynomy, které nemají společné kořeny a* $Q \not\equiv 0$*. Potom racionalita funkce* R *je kolomorfní na* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^{-1}(\alpha \circ \varphi)$ *konečné.*

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(t) \colon = e^x(\cos y + i \sin y)$*,* $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.
- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
  $f(z) = \exp(z)$, $f_1(x,y) = e^x \cos y$, $f_2(x,y) = e^x \sin y$,
  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$
  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

  Polární tvar komplexního čísla $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = x + i$, $y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z.

  Značení 4.3. *Nechť* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Potom položme* $Arg(z) \colon = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ *Je-li* $Arg(z) \cap (\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$*, potom* $arg(z) \colon = \varphi_0$ *je tzv. hlavní hodnota argumentu* z*.*

  Platí:

  - $Arg(z) \colon = \{arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
  - funkce $arg \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (\pi, \pi]$, kde arg je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je arg spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon w = 2k\pi i$
- Nechť $P \colon = \{z \in \mathbb{C} \mid Im z \in (\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$. Pro $z = 0$ nemáme řešení. Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{iarg(z)} = e^{\log|z| + iarg(z)} = e^w \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.4. *Nechť* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*.Položme*

- $Log z\colon = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z\colon = \log|z| + i arg z \dots$ *tzv. hlavní hodnota logaritmu z.*

Vlastnosti 4.5.

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $Log z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- log není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
  Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp zi) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$-periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.6. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnota α-té mocniny z definujeme $z^\alpha\colon = \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z)\colon = \{\exp(\alpha w) \mid w \in Log z\}$.*

Vlastnosti 4.7.

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
  $w \in Log z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Příklad 4.8. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

- *Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.*
- *Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p\,|_q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \cdots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0*
- *Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.*

Příklad 4.9.

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{pii}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ *(nesouhlasí s MA!)*, $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!
$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.10. *Je-li* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *potom* $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2} =$ *sudá část* + *lichá část.*

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.11.

$$\cosh(z) \colon = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) \colon = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.12.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2 n}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, kde

Definice 4.13.

$$cos(z) \colon = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$sin(z) \colon = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.14.

- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou 2π-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytvořeny společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček