# Úvod do komplexní analýzy

doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.

8. října 2020

# Obsah

# 1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm Euklidovskou normu a metriku:

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z,w) := |z-w|$, $z,w \in \mathbb{R}^2$

**Definice 1.1.** Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:

- násobení $(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$
- ztotožňujeme $(x,0) \cong$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0,1)$

**Vlastnosti 1.2.**
Vlastnosti $\mathbb{C}$. Nechť $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x+iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$.

**Značení 1.3.** Nechť $z = x+iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\overline{z} := x-iy$ je *komplexně sdružená část* k $z$,
- $Re(z) := x$ je *reálná část* $z$, $Im(z) := y$ je *imaginární část* $z$,
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* $z$.

Dále platí

- $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$, $|zw| = |z|.|w|$, $z+\overline{z} = 2.Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i.Im(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- $\mathbb{C}$ je těleso.

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

# 2 Lineární zobrazení

**Definice 2.1.** $\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $((1,0)^T,(0,1)^T)$. Obecné $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ je komplexní vektorový prostor dimenze 1, jeho báze je 1. Obecné $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz, z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Nechť $z = (a+ib)(x+iy) = (ax-by, bx+ay) =$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Pozorování 2.2.** $\mathbb{R}$-lineární zobrazení (1) je $\mathbb{C}$-lineární, právě když $d = a, c = -b$.

**Poznámka 2.3.** $\mathbb{C}$-lineární zobrazení jsou velmi specifická $\mathbb{R}$-lineární zobrazení.

**Úmluva 2.4.** Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexnou funkci komplexné proměnné. Na $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

**Definice 2.5.** Pro $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* $z_0$. Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí*. Pokud $\delta$ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0), P(z_0)$.
Potom definujeme

- $\lim_{z \to x_0} f(z) = L$, pokud $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in P(x_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \epsilon)$
- $f$ je spojitá v $x_0$, pokud $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

# 3 Diferencovatelnost

**Definice 3.1.** Funkce $f$ je v $x_0$ $\mathbb{R}$-diferencovatelná, pokud existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

**Poznámka 3.2.** Potom $df(x_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* $f$ v $x_0$ a platí, že

$$df(x_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R}^2$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Ta matice se nazývá *Jacobiho matice.*)

**Definice 3.3.** Řekneme, že funkce $f$ je v $x_0$ $\mathbb{C}$-diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Číslo $f'(x_0)$ nazýváme *komplexní derivací* $f$ v $x_0$.

**Poznámka 3.4.** Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)', (f.g)', (f/g)', (f \circ g)'$

**Příklad 3.5.**
- $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$

- $f(z) = \overline{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diferencovatelná, ale $f(x,y) = (x,-y)$ je všude $\mathbb{R}$-diferencovatelná. Skutečně, máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

  Avšak poslední limita neexistuje.

**Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova).** *Nechť $f$ je funkce diferencovatelná na okolí $x_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:*

1. *Existuje $f'(x_0)$*
2. *Existuje $df(x_0)$ a $df(x_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární*
3. *Existuje $df(x_0)$ a v $z_0$ platí tvrzení Cauchy-Riemannových podmínek.*

*Cauchy-Riemannovy podmínky:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

*zde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$*

*Důkaz.* (2. $\iff$ 3.) plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(z_0)-wh}{h} \tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{|h|} \tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh, h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. □

**Poznámka 3.7.**
- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h, h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že $(CR) \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

*Důkaz.*
- $df(x_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
- zřejmé

□

**Příklad 3.8.** Nechť $f(z) = \overline{z}$, pak $f'(x,y) = (x,-y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje $(CR)$, proto není nikde $\mathbb{C}$-diferencovatelná.

**Definice 3.9.** Nechť $\mathbb{C}$ je otevřené a $f\colon G \to \mathbb{C}$. Potom říkáme, že $f$ je na $G$ holomorfní, pokud $f$ je $\mathbb{C}$-diferencovatelná v každém $z \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních $f\colon G \to \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce $F$ je celá, pokud $F \in \mathcal{H}(G)$.

**Příklad 3.10.**
- Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je celá funkce.
- Necht $R = P/Q$, kde $P$, $Q$ jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionalita funkce $R$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^{-1}(\alpha \circ \varphi)$ konečné.

# 4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

## 4.1 Exponenciála

**Definice 4.1.** $\exp(t) := e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

**Vlastnosti 4.2.**

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
  $f(z) = \exp(z)$, $f_1(x,y) = e^x \cos y$, $f_2(x,y) = e^x \sin y$,
  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$
  Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a $(CR)$ platí všude $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ z CR-věty máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

  **Polární tvar komplexního čísla** $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = x + i$, $y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a $\varphi$ je argument $z$.

  **Značení 4.3.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položme $Arg(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$ Je-li $Arg(z) \cap (\pi,\pi] = \{\varphi_0\}$, potom $arg(z) := \varphi_0$ je tzv. hlavní hodnota argumentu $z$.

  Platí:

  - $Arg(z) := \{arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
  - funkce $arg\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (\pi,\pi]$, kde $arg$ je surjektivní a konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Navíc je $arg$ spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty,0]$
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:
  $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon w = 2k\pi i$
- Nechť $P := \{z \in \mathbb{C} \mid Imz \in (\pi,\pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

## 4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme $e^w = z$. Pro $z = 0$ nemáme řešení. Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{iarg(z)} = e^{\log|z| + iarg(z)} = e^w \iff \exists\ k \in \mathbb{Z}\colon w = \log|z| + iarg(z) + 2k\pi i$.

**Definice 4.4.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.Položme

- $Logz := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + iargz \ldots$ tzv. hlavní hodnota logaritmu $z$.

**Vlastnosti 4.5.**

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $Logz = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_p)^{-1}$
- log není spojitá v žádném $z \in (-\infty,0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty,0])$.
  Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$.

- $\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp zi) \neq z$, z toho, že je to $2\pi i$-periodické
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

## 4.3 Obecná mocnina

**Definice 4.6.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnota $\alpha$-té mocniny $z$ definujeme $z^\alpha :=\exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in Log z\}$.

**Vlastnosti 4.7.**

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $z^\alpha$ je v souladu s MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$
  $w \in Log z \iff w = \log z + 2k\pi i$
- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

**Příklad 4.8.** Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p\,|_q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ a $p, q$ jsou nesoudělná. Potom $m_{\frac{p}{q}}(z) = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2K\frac{p}{q}\pi i} \mid K = \{0, 1, \cdots, q-1\}\}$ tvoří vrcholy pravidelného $q$-úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0
- Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

**Příklad 4.9.**

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{pii}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!
$(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

**Poznámka 4.10.** Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom $f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2}$ = sudá část + lichá část.

### 4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

**Definice 4.11.**

$$\cosh(z) \colon = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) \colon = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.12.**

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2 n}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

### 4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, kde

**Definice 4.13.**

$$cos(z) \colon = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$
$$sin(z) \colon = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

**Vlastnosti 4.14.**

- cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- sin i cos jsou $2\pi$-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

## 5 Křivkový integrál

**Definice 5.1.** Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Potom

1. $\varphi$ je *křivka*, pokud je $\varphi$ spojitá
2. $\varphi$ je *regulární křivka*, pokud je $\varphi$ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. $\varphi$ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi\Big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0, \cdots, n-1$
   $(x^n + y^n = z^n$

**Definice 5.2 (Úsečka).** Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$ je úsečka z $a$ do $b$. Značíme $[a, b]$.

**Značení 5.3.** Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

**Definice 5.4 (Lomenná čára).** Řekneme, že regulární křivka $\varphi$ je *lomenná čára* v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, z_2, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1, z_2] \dotplus [z_2, z_3] \dotplus \cdots \dotplus [z_{k-1}, z_k]$.

**Definice 5.5 (Kružnice).** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

**Poznámka 5.6.** Pro křivku $\varphi$ může být její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

**Úmluva 5.7.** Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku v* $\mathbb{C}$.

**Připomenutí 5.8.** Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například.

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t),$$
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

   mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

   je-li $\varphi$ regulární.

**Definice 5.9.** Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

**Poznámka 5.10.**

1. Křivkový integrál (4) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$

**Základní vlastnosti 5.11.**

1. Je-li $\varphi$ křivka, $f$ a $g$ jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g.$$

2. Je-li $\varphi$ křivka a $f$ je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom $\left|\int_\varphi f\right| \le \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$.

   *Důkaz.* Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme

$$\begin{aligned}\left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_\alpha^\beta M\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M \cdot V(\varphi)\end{aligned}$$

□

3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta], \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom
$$\int_{\varphi \dotplus \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f$$
a
$$\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f,$$
kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je *opačná křivka* k $\varphi$.

4. Křivková integrál *nezávisí na parametrizaci křivky.* Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom
$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$$
.

*Důkaz.*
$$\begin{aligned}\int_{\psi} f = \int_{\gamma}^{\delta} f\Big(\varphi(\omega(t))\Big)\varphi'(\omega(t))\omega'(t)\,\mathrm{d}t \\ = \int_{\gamma}^{\delta} f\Big(\varphi(\omega(t))\Big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\substack{\text{subst.}\\ \tau=\omega(t)}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\varphi} f\end{aligned}$$

□

**Definice 5.12.** Řekneme, že funkce $f$ má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* $F$, pokud $F' = f$ na $G$

**Příklad 5.13.** $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k $z^n \begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \cdots \end{cases}$

**Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f$ má na $G$ primitivní funkci $F$. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ je křivka a $f$ je spojitá* (*) *na $\langle\varphi\rangle$. Potom*

*1.* $\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$

*2.* $\int_{\varphi} f = 0$, *je-li $\varphi$* uzavřená, *tzn.* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

**Poznámka 5.15.** (*) Ukážeme si později, že funkce $f$, která má na $G$ primitivní funkci je na $G$ holomorfní, tudíž i spojitá.

*Důkaz.* Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big) = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2' = F'\varphi_1' + iF'\varphi_2' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha\beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecnění PF k integrandu. Máme tedy
$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F(\varphi(t))\Big)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

**Příklad 5.16.**

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ale na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *nemá* primitivní funkci, neboť víme
$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0,2\pi].$$
- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ primitivní funkci $\log(z)$.
$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Připomenutí 5.17 (Souvislost).** Nechť $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) $G$ je *souvislá*, tj. $G$ je *oblast.*

(b) $G$ je *křivkově souvislá*, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

(c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje *lomenná čára* $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

*Důkaz.* $(a) \Leftrightarrow (b)$: víte z MA; $(c) \Rightarrow (b)$: jasné; $(a) \Rightarrow (c)$: ukáže se podobně jako $(a) \Rightarrow (b)$ □

**Věta 5.18.** *Funkce $f$ je konstatní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na $G$.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Jasné.
$\Leftarrow$ Nechť $z, w \in G$ a $\varphi$ je lomenná čára v $G$ spojující $z$ a $w$. Potom $f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0$, protože $f$ je primitivní funkcí k $f'$ na $G$. □

**Důsledek 5.19.** *Jsou-li $F_1, F_2$ primitivní funkce k $f$ na* oblasti *$G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.*

*Důkaz.*
$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$
□

**Věta 5.20 (O existenci PF).** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f$ je spojitá na $G$. NTJE:*

1. *$f$ má na $G$ primitivní funkci.*
2. *$\int_\varphi f = 0$ pro každou* uzavřenou *křivku $\varphi$ v $G$.*
3. *$\int_\varphi f$* nezávisí *v $G$* na křivce *$\varphi$, tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha,\beta] \to G$, $\psi : [\gamma,\delta] \to G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*

**Poznámka 5.21.** Přípomíná *větu o potenciálu* z MA ?

*Důkaz.*
1. $\Rightarrow$ 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí PF
2. $\Rightarrow$ 3. Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je $\tau$ *uzavřená* a z 2. dostaneme
$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$
3. $\Rightarrow$ 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najděme lomenou čáru $\varphi_z$ v $G$, která začíná v $z_0$ a končí v $z$. Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice $F$ je korektní, nezávislá na volbě $\varphi_z$,

protože předpokládáme 3. Ukážeme, že $F$ je hledaná PF k $f$ na $G$. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1+h) - F(z_1) \overset{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dot{+} u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1, z_1+h]$ je *úsečka*, tzn. $u(t) = z_1 + t \cdot h$, $t \in [0,1]$. Tedy

$$F(z_1+h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1+th)h \,\mathrm{d}t,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{g} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1)) \,\mathrm{d}t.$$

To se blíží k nule pro $h \to 0$, protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1)) \,\mathrm{d}t \right| \leq \max_{z \in [z_1, z_1+h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

ze spojitosti $f$ v $z_1$. Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. $\square$

**Značení 5.22.**

1. Řekneme, že $m \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0, z] \subset M$ pro každý $z \in M$.

   **Poznámka.** Konvexní $\subsetneq$ hvězdicovitá.

2. Řekneme, že $\triangle \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

   $$\triangle := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

   (*konvexní obal* $a, b, c$) a značíme $\partial\triangle := [a,b] \dot{+} [b,c] \dot{+} [c,a]$. Připouštíme i degenerované $\triangle$, tzn. $a, b, c$ mohou ležet na jedné přímce nebo body $a, b, c$ mohou splývat...

**Dodatek 5.23.** *Nechť $f$ je spojitá funkce na* hvězdicovité *oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0, \tag{5}$$

*pro každý* trojúhelník $\triangle \subset G$, *potom $f$ má na $G$ primitivní funkci.*

*Důkaz.* Nechť $z_0$ je střed hvězdovitosti $G$, Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0, z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický 3 $\Rightarrow$ 1 předchozí věty, když místo 3 uvažujeme (5). $\square$

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Stanislav Mosný, Tereza Poláková, Viktor Procházka a Petr Sedláček