Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar. Vektorning moduli va yo‘naltiruvchi kosinuslari.

1-Ta’rif: *Biror V vektor fazoda {e_1, e_2, ..., e_n} bazis (asos) berilgan bo‘lsin. Agar $\vec{a}$ vektor ushbu bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi*

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n$$

ko‘rinishida ifodalansa, u holda $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlar $\vec{a}$ vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari deyiladi.

***1-teorema**. Har bir vektor berilgan bazisda o‘zining koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.*

△ **Isbot:** faraz qilaylik $\vec{a}$ vektor V vektor fazoda quyidagi ko‘rinishlarda ifodalansin:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + ... + b_n\vec{e}_n$$

U holda bu yoyilmalar uchun quyidagi munosabat o‘rinli boladi:

$$\vec{0} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + ... + (a_n - b_n)\vec{e}_n$$

Bazisni tashkil qiluvchi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lganligi uchun $a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, ..., a_n - b_n = 0$ munosabat hosil bo‘ladi.▲

Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalarda bo‘lgan AB kesmani $\lambda \neq -1$ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari quyidagi munosabatlardan aniqlanadi:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

AB kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqta koordinatalari kesma uchlariga tegishli koordinatalar yig‘indisining yarmiga teng.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

(1) va (2) formulalar affin koordinatalar sistemasida ham o‘rinlidir. $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi: A, B nuqtalardan Ox, Oy o‘qlarga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlarning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalarini A_1, B_1 bilan, Oy o‘qi bilan kesishish nuqtalarini A_2, B_2 orqali

belgilaymiz. $\overrightarrow{A_1B_2}$ vektorning Ox o‘qdagi koordinatasi x va $\overrightarrow{A_2B_2}$ vektorning Oy o‘qdagi koordinatasi y bilan birgalikda $\overrightarrow{AB}$ vektorning umumiy dekart Oxy sistemasidagi koordinatalari deb ataladi.

Agar $(x_1, y_1) - A$ nuqtaning va $(x_2, y_2) - B$ nuqtaning koordinatalari bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1 \qquad (3)$$

Agar x, y - $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari bo‘lsa,

$\overrightarrow{AB} = \{x, y\}$ shaklida yoziladi.

$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (4)$$

yoki

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad (5)$$

bu yerda X, Y sonlar $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari. Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ nuqtalardagi uchburchakning yuzi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida quyidagicha topiladi:

$$S = \frac{1}{2} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

yoki

$$S = \frac{1}{2} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Faraz qilaylik $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar mos ravishda $\vec{a}$ vektorning boshi va oxiri bo‘lsin. U holda $\vec{a}$ vektorning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

2-Ta’rif: $\vec{a}$ *vektorning uzunligiga teng bo‘lgan son uning MODULI deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Agar $\vec{a}$ vektor koordinata o‘qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklar hosil qilsa, u holda $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ vektorning **yo‘naltiruvchi kosinuslari** deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|} \tag{8}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

bu yerda: $X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1$.

Masalan, $\cos\alpha$ uchun formula quyidagicha isbotlanadi:

$$x = pr_{\vec{e}_1}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Birlik vektorning koordinatalari uning yo‘naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya’ni agar $|\vec{a}_0| = 1$ bo‘lsa, $\vec{a}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

(8) ga ko‘ra

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

formulani hosil qilish mumkin, ya’ni vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig‘indisi birga teng.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.

Bizga V_3 vektor $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ fazoda bazisda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalari $\vec{a}(x_1 y_1 z_1) = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$ va $\vec{b}(x_2 y_2 z_2) = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin.

***2-teorema**: Uch vektor chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning komplanar bo‘lishi zarur va yetarli.*

Mavzuga doir bir nechta xossalarni keltirib o‘tamiz:

1. *Tekislikda har qanday ikkita nokollinear vektorlar bazisni tashkil qiladi.*

$\vec{a} \pm \vec{b} = (\vec{a} \pm \vec{b})(x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$ bo‘lsin.

△ **Isbot:** $\vec{a} \pm \vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3 + x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 + (z_1 + z_2)\vec{e}_3 =$
$= (\vec{a} + \vec{b})(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ ▲

2. *Fazoda har qanday uchta nokomplanar vektorlar bazisni tashkil qiladi.*

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

△ **Isbot:** $\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) = \lambda x_1\vec{e}_1 + \lambda y_1\vec{e}_2 + \lambda z_1\vec{e}_3 = (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda y_1)\vec{e}_2 + (\lambda z_1)\vec{e}_3 =$
$= (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$