

## Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha va ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa.

Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofani topish masalasini qaraylik.

**1-ta'rif.** Berilgan  $M_1$  nuqtadan berilgan  $P$  tekislikkacha bo'lgan masofa deb, shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar to'g'ri chiziqlarning tekislik bilan kesishgan nuqtasi orasidagi masofaga aytiladi va  $d(M, P)$  bilan belgilanadi (1-rasm).

$P$  tekislik umumiy tenglama bilan berilgan bo'lib,  $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin P$  bo'lsin.  $M_1$  dan  $P$  ga perpendikulyar tushirib, uning asosini  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  desak,  $M_0 \in P$  bo'lgani uchun

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (1)$$

$\vec{n}(A, B, C)$  vektor  $P$  ning normal vektori.

$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{M_0M_1}, \text{ demak, } \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M_1}| |\vec{n}| \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{n}) = d(M_1, P) |\vec{n}| \cdot (\pm 1),$$

bundan:

$$d(M_1, P) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \quad (2)$$

$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ ; (2) dan

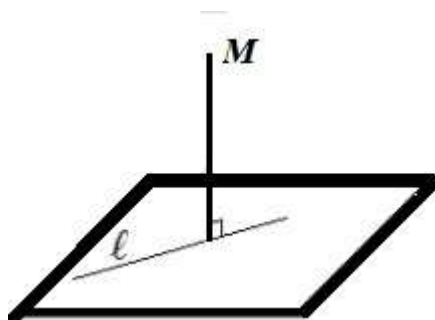
$$\begin{aligned} d(M_1, P) &= \frac{|(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

demak

$$d(M_1, P) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3)$$

Bu berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasidir. Xususiyl holda, koordinatalar boshidan tekislikkacha bo'lgan masofa quyidagicha bo'ladi:

$$d(O, P) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



*1-rasm.*

### ***Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash***

Bizga fazoda  $\ell$  to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqta berilgan bo'lsin. Biz bilamizki to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orqali bitta tekislik o'tkazish mumkin. Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblashni oldingi paragraflarda o'rgangan edik. Buning uchun biz to'g'ri chiziqning tekislikdagi tenglamasini va nuqtaning tekislikdagi koordinatalarini bilishimiz kerak. Lekin bu ish har doim qulay bo'lmaganlini uchun biz bevosita  $\ell$  to'g'ri chiziqning

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$$

tenglamasidan foydalanmoqchimiz. Bizga to'g'ri chiziqning  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtasi va uning yo'naltiruvchi  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  vektori ma'lum. Agar  $N$  nuqta  $\ell$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va  $N$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq  $\ell$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va  $N$  nuqtalar orasidagi masofa  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan  $\ell$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofadir. Biz  $\overrightarrow{NM_1}$  vektorni

$$\overrightarrow{NM_1} = d \vec{e}_1$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda  $d = |\overrightarrow{NM_1}|$ ,  $\vec{e}_1$  esa  $\overrightarrow{NM_1}$  vektor bilan bir xil yo'nalishga ega bo'lgan birlik vektordir. Xuddi shunday  $\vec{a}$  vektorni

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_2$$

ko'rinishda yozib,  $\overrightarrow{NM_1}$  va  $\vec{a}$  vektorlarning vektor ko'paytmasi uchun

$$[\overrightarrow{NM_1}, \vec{a}] = d |\vec{a}| [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$$

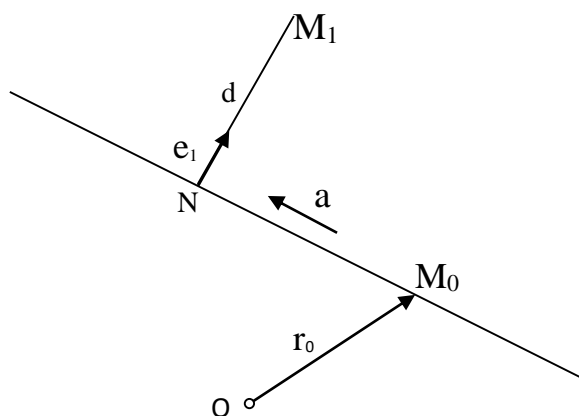
tenglikni olamiz. Bu tenglikdan

$$d = \frac{[\overrightarrow{NM_1}, \vec{a}]}{|\vec{a}|}$$

formulani hosil qilamiz. Lekin bu formulada  $N$  nuqta koordinatalari noma'lum bo'lganligi uchun, biz undan bevosita foydalana olmaymiz. Lekin chizmadan ko'rinib turibdiki, biz  $\overrightarrow{NM_1}$  vektorni

$$\overrightarrow{NM_1} = \vec{r}_1 - (\vec{r}_0 + \vec{a}t_1)$$

ko'rinishda yoza olamiz (2-rasm).



## 2-rasm.

Bu yerda  $t_1$  -parametrning  $N$  nuqtaga mos keluvchi qiymatidir. Endi bu ifodani yo'qoridagi formulaga qo'yib va  $\vec{a}t_1$ ,  $\vec{a}$  vektorlarning vektor ko'paytmasi nol vektor ekanligini hisobga olsak

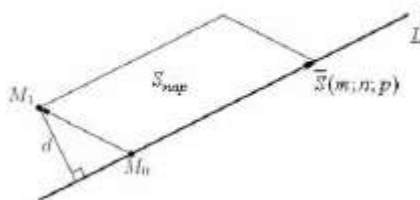
$$d = \frac{[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}]}{|\vec{a}|}$$

formulani olamiz. Bu formulani koordinatalar orqali yozsak, u

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (4)$$

ko‘rinishga keladi.

Keling fazoda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani boshqa usulda keltirib chiqaraylik. Bizga  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqta va  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa  $\vec{S}(m, n, p)$  va  $\overrightarrow{M_0M_1}$  vektorlarga qurilgan parallelogram balandligiga teng, bu yerda  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqta to‘g‘ri chiziqda yotgan nuqta (3-rasm).



**3-rasm.**

Parallelogrammaning yuzasi ko‘rsatilgan vektorlarning vektor ko‘paytmasining moduliga teng  $S = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$  va kerakli balandlikka perpendikulyar bo‘lgan parallelogramm asosining uzunligi  $|\vec{S}|$ , bundan

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

### Fazoda ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa.

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi masofani topaylik:

$$u_1 : \begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t, \end{cases} \quad u_2 : \begin{cases} x = x_2 + l_2 t, \\ y = y_2 + m_2 t, \\ z = z_2 + n_2 t, \end{cases}$$

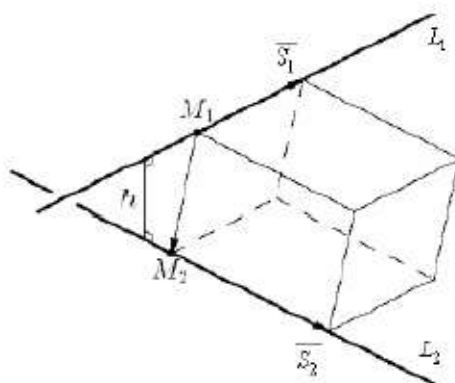
Bu to'g'ri chiziqlarda yotuvchi  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  nuqtalar, hamda berilgan to'g'ri chiziqlarning  $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  va  $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  yo'naltiruvchi vektorlarini qaraylik.

Ikki chiziq orasidagi masofani hisoblash usuli yo'naltiruvchi vektorlarning o'zaro vaziyatiga bog'liq.

Ikkita xolni qaraymiz.

**1-xol.**  $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  va  $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  vektorlar kolleniar. Bu xolda  $l_1$  va  $l_2$  to'g'ri chiziqlar yoki parallel yoki ustma ust tushadi, va ular orasidagi masofa ularning birida yotgan nuqtadan ikkinchisigacha bo'lgan masofaga teng (masalan,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan  $l_2$  to'g'ri chiziqqacha). Yuqoridagidan (4) formuladan topiladi.

**2-xol.**  $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  va  $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  vektorlar kolleniar emas. Bu xolda  $l_1$  va  $l_2$  to'g'ri chiziqlar yoki kesishadi ( $d = 0$ ) yoki ayqash bo'ladi. Ikkinchi holda, kerakli masofa  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  va  $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  vektorlarga qurilgan parallelepipedning  $h$  balandligiga teng bo'lgan  $l_1$  va  $l_2$  to'g'ri chiziqlarning umumiy perpendikulyar uzunligiga tengdir (4-rasm).



**4-rasm.**

Parallelepipedning hajmi  $V = (\overline{M_1M_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2)$ , ko'rsatilgan vektorlarning aralash ko'paytmasining moduliga teng bo'lganligi sababli kerakli balandlikka teng bo'lgan perpendikulyar, asoslari  $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  va  $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzi, ya'ni  $S_{par} = |\vec{S}_1 \times \vec{S}_2|$  ga nisbatiga teng bo'ladi: bundan

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{S_2})|}{|S_1\times S_2|}$$