

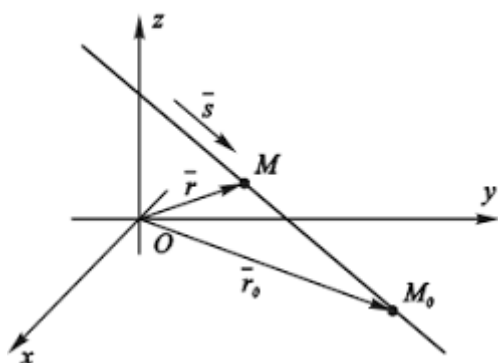
Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari. Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati. Tekislik va to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati.

Fazodagi to'g'ri chiziq o'zining nuqtasi va shu chiziqqa parallel biror \vec{s} vektor bilan to'la aniqlanadi (1-rasm).

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sistemada to'g'ri chiziqqa tegishli biror va $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s}(l, m, n)$ berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s} (t \in R). \quad (1)$$

$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ desak hamda



1-rasm.

$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ ni hisobga olsak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}. \quad (2)$$

(2) tenglama to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi deb ataladi, t ga har xil qiymatlar berish bilan to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning radius-vektori topiladi.

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ va (1) dan

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot l, \\ y - y_0 = t \cdot m, \\ z - z_0 = t \cdot n \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cdot l, \\ y = y_0 + t \cdot m, \\ z = z_0 + t \cdot n. \end{cases} \quad (3)$$

Bu (3) tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari deb yuritiladi. M_0 – berilgan nuqta, \vec{s} esa u ning yo'naltiruvchi vektori deb ataladi.

Agar $l \cdot m \cdot n \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) $\Rightarrow t = \frac{x - x_0}{l}, t = \frac{y - y_0}{m}, t = \frac{z - z_0}{n}$,

bulardan

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (4)$$

Bu tenglamalar to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamalari deb ataladi.

Fazoda radius-vektorlari \vec{r}_1, \vec{r}_2 bo'lgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, bu nuqtalardan o'tgan u to'g'ri chiziq uchun $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Yuqoridagi (2) tenglamadagi vektor o'rniga $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektorni qo'ysak, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta sifatida $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtani olsak u to'g'ri chiziqlarning vektor ko'rinishdagi tenglamasini

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t \quad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar (5) tenglamada t parametrni yo'qotib uni koordinatalar orqali yozsak ikki nuqta orqali o'tuvchi ℓ to'g'ri chiziq tenglamasini quyidagi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

ko'rinishini hosil qilamiz.

Fazodagi har bir to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i deb qarash mumkin. Shunga muvofiq

$$\begin{aligned} P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

tenglamalar sistemasi $P_1 \nparallel P_2 \Rightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$ shart bajarilganda to'g'ri chiziqni aniqlaydi (2-rasm).

To'g'ri chiziqlarning yuqorida ko'rilgan (2)-(4) tenglamalarining biridan qolganlariga o'tish mumkin. Lekin u (7) ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilsa, kanonik ko'rinishga bevosita o'tish mumkin ekanligi ochiqdan-ochiq ravshan emas. Biz hozir shu masalaga to'xtalamiz. Kanonik tenglamalarni yozish uchun to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektorini bilish kerak. (7) uch noma'lumli

ikki tenglama, demak, o'zgaruvchilardan biriga, masalan, z ga $z = z_0$ qiymat berib va hosil qilingan ikki noma'lumli ikkita tenglamani yechib, $x = x_0, y = y_0$

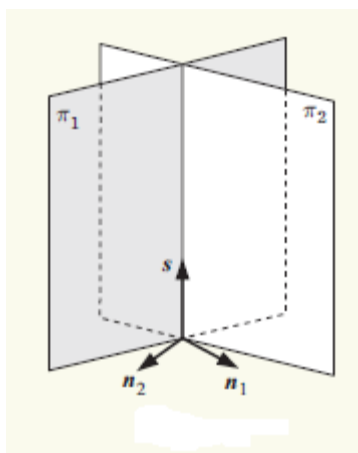
qiymatlarni topamiz (bunda biz $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ deb faraz qildik). Natijada

(x_0, y_0, z_0) nuqta (7) to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi, u holda (7) ni quyidagicha yozib olsak bo'ladi.

$$\begin{aligned} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) &= 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Bu sistemadan quyidagilarni topamiz:

$$x - x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t, \quad y - y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t, \quad z - z_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t.$$



2-rasm.

bulardan

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (8)$$

Agar (7) tenglamalarni dekart sistemasida qarasak, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ vektor P_1 tekislikning, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ vektor P_2 tekislikning normal vektori bo'ladi. (8)

tenglamalardagi maxrajlarda turgan ifodalar P_1, P_2 tekisliklar normal vektorlarining vektor ko'paytmasining mos koordinatalaridan iborat, ya'ni $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

Ikki tekislikning o'zaro vaziyati.

Bizga dekart koordinatalari kiritilgan fazoda α va β ikkita tekisliklar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin :

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Ularning $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakning kosinusini

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formula bo'yicha xisoblashni bilamiz. Tekisliklarning parallellik sharti ularning vektorlari paralleligiga teng kuchlidir. Shuning uchun bu shart

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ko'rinishda yoziladi. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti ularning normal vektorlari perpendikulyarligiga teng kuchli va

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

ko'rinishda yoziladi.

Fazoda 2 ta tekislikni muhim bo'lgan o'zaro vaziyatlari quyidagi jadvalda berilgan:

Parallel tekisliklar	$\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2$ yoki $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
Ustma-ust tushuvchi tekisliklar	$\begin{cases} \vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2 \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \end{cases}$
Perpendikulyar tekisliklar	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ yoki $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati.

Fazoda u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar biror affin sistemada ushbu parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$u_1 : \begin{cases} x = x_1 + m_1 t, \\ y = y_1 + n_1 t, \\ z = z_1 + p_1 t, \end{cases} \quad u_2 : \begin{cases} x = x_2 + m_2 t, \\ y = y_2 + n_2 t, \\ z = z_2 + p_2 t, \end{cases}$$

bu yerda $\vec{S}_1(l_1, m_1, n_1), \vec{S}_2(l_2, m_2, n_2)$ yo'naltiruvchi vektorlar.

Fazoda ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel, kesishuvchi va ayqash bo'lishi mumkin. Shu holatlarni ayrim-ayrim ko'raylik.

$$1. u_1 \parallel u_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (9)$$

2. $u_1 \cap u_2 \neq \emptyset$, ya'ni u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar kesishsin. Bu holda bu ikki to'g'ri chiziq bir tekislikka tegishli bo'lib, $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}$ vektorlar komplanar, ya'ni $(\vec{S}_1 \vec{S}_2 \overrightarrow{M_1 M_2}) = 0$ yoki

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

(10) tenglik u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning bir tekislikka tegishlilik shartidir.

3. Agar (10), (9) shartlar bajarilsa, u_1, u_2 lar ustma ust tushadi.

4. Agar (10) shart bajarilib, (9) bajarilmasa, u_1, u_2 lar bitta nuqtada kesishadi.

5. u_1 va u_2 kesishmasa hamda parallel bo'lmasa, ular ayqash, demak, ayqash ikki to'g'ri chiziq uchun

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

ushbu tenglik o'rinlidir.

u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarni dekart sistemasida qarasak, metrik xarakterli ba'zi masalalarni hal qilish mumkin.

6. Fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Parametrik tenglamalari bilan berilgan u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar uchun $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlaridir, demak,

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa, } u_1 \perp u_2 \text{ bo'lib, } (2.5.4) \Rightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (13)$$

Bu shart ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik shartidir.

Fazoda 2 ta to'g'ri chiziqni muhim bo'lgan o'zaro vaziyatlari quyidagi jadvalda berilgan:

<i>To'g'ri chiziqlarning kolleniarlik sharti</i>	$\vec{S}_1 = \lambda \vec{S}_2, (\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = 0), \text{ yoki } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$ <i>lekin</i> $\overline{M_1 M_2} \neq \lambda \vec{S}_1 (\neq \lambda \vec{S}_2)$
<i>To'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti</i>	$(\vec{S}_1, \vec{S}_2) \text{ yoki } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$
<i>To'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushish sharti</i>	$\vec{S}_1 = \lambda \vec{S}_2, (\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = 0), \text{ va } \overline{M_1 M_2} \neq \lambda \vec{S}_1$ $(\neq \lambda \vec{S}_2)$
<i>To'g'ri chiziqlarning kesishish sharti</i>	$\overline{M_1 M_2} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0,$
<i>To'g'ri chiziqlarning aykash bo'lish sharti</i>	$\overline{M_1 M_2} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \neq 0$

Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro vaziyati. Dekart sistemasida u to'g'ri chiziq parametrik tenglamasi bilan, P tekislik umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin:

$$u: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad \vec{S}(m, n, p), \quad (14)$$

$$P: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n}(A, B, C). \quad (15)$$

Avvalo, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasiga to'xtalaylik: buning uchun berilgan tenglamalarni sistema deb qarash kerak. (14) va (15) dan

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Am + Bn + Cp) = 0. \quad (16)$$

$Am + Bn + Cp \neq 0$ shartda

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} \quad (17)$$

bo'ladi. t ning bu qiymatini (14) ga qo'ysak, izlangan nuqta topiladi. Lekin

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (18)$$

shart bajarilsa, ya'ni $\vec{S} \perp \vec{n}$ bo'lsa, u to'g'ri chiziq P ga parallel bo'ladi. Aksincha, $u // P \Rightarrow \vec{S} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{S} \cdot \vec{n} = 0$. Demak, $\vec{S} \cdot \vec{n} = Am + Bn + Cp = 0$ shart to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallelligini bildiradi. Ushbu

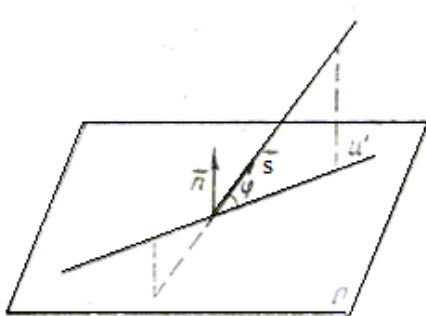
$$u // P \Rightarrow \vec{S} // \vec{n} \Rightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}, \quad (19)$$

bu (19) shart to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikularligini bildiradi.

$u \in P$ bo'lgan holda (18) shart bajarilib, undan tashqari $M_0 \in P$ bo'lishi lozim, ya'ni

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (20)$$

Endi to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini beramiz.



3-rasm.

1-ta'rif. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziq bilan uning shu tekislikdagi ortogonal proektsiyasi orasidagi burchakka aytiladi (3-rasm). Biz $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ deb faraz qilamiz.

3-rasmdan ko'rinadiki, φ ning o'rniga (\vec{n}, \vec{S}) burchakni qabul qilish mumkin.

Bu burchak $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ga yoki $\frac{\pi}{2} + \varphi$ ga teng. Demak, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$, shuning uchun

$$\sin \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{u})| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (21)$$

Fazoda to'g'ri chiziq va tekislikni muhim bo'lgan o'zaro vaziyatlari quyidagi jadvalda berilgan:

To'g'ri chiziq va tekislik parallel sharti	$\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$ yoki $Am + Bn + Cp = 0$, lekin $Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0$
To'g'ri chiziq va tekislik kesishish sharti	$Am + Bn + Cp \neq 0$
To'g'ri chiziq va tekislik perpendikulyar bo'lish sharti	$\vec{S} = \lambda \vec{n}$ yoki $\vec{S} \times \vec{n} = 0$ yoki $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$
To'g'ri chiziq va tekislik ustma-ust tushish sharti	$\begin{cases} \vec{S} \cdot \vec{n} = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{cases}$