Chiziqli erkli va chiziqli bog‘lanishli vektorlar oilasi va ularning xossalari. Vektorlarning kollinearlik va komplanarlik shartlari.

1-Ta’rif. *Vektor ($\vec{a}$ - vektor) yotgan to‘gri chiziq α tekislikka parallel bo‘lsa, $\vec{a}$ vektor α tekislikka parallel deyiladi.*

2-Ta’rif. *Uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bitta tekislikka parallel bo‘lsa, ular komplanar vektorlar deyiladi.*

Tabiiyki, agar vektorlar komplanar bo‘lsa, ularni parallel ko‘chirish natijasida bitta tekislikka joylashtirish mumkin.

Bizga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ vektor berilgan bo’lsin va $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ bo’lgan bo’lsin.

3-Ta’rif: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ *vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb*

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n \quad (1)$$

Shu yig’indiga aytiladi.

4-Ta’rif: *Agar* $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0$ *dan* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *sonlardan kamida bittasi 0 dan farqli bo‘lsa,* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ *vektorlar chiziqli bog’liq deyiladi,*

5-Ta’rif: *Quyidagi* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ *vektorlar chiziqli erkli deyiladi, agar* $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0$ *dan* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = 0$ *ekanligi kelib chiksa.*

1-teorema: *Agar* $\vec{a} \| \vec{b} (\vec{a} \neq 0)$ *bo‘lsa, u holda shunday* α *son mavjudki,*

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \quad (2)$$

bo‘ladi.

Demak, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifidan va bu teoremadan bunday xulosa chiqaramiz:

$$\vec{a} \| \vec{b} \leftrightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} .$$

Shunday qilib (2) munosabat $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va yetarli shartidir.

2-teorema: *Agar* $a_1, a_2, ..., a_n$ *vektorlar sistemasining kamida bita elementi 0 bo'lsa, bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.*

△ **Isbot:** Aniqlik uchun $\overrightarrow{a_1} = 0$ bo'lsin $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$ deb olamiz. $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + 0 \cdot \overrightarrow{a_n} = 0$ deb yozishimiz mumkin. Ta'rifga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlar sistema chiziqli bo'ladi. ▲

3-teorema: *Agar* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u xolda uning kamida bitta elementini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkin.*

△ **Isbot:** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ta'rifga asosan $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar mavjudki, ularning kamida bittasi 0 dan farqli bo'lib, $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0$ bo'ladi. Aniqlik uchun $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsin. $\alpha_1 \cdot \vec{a} = -\alpha_2 \cdot \vec{a}_2 - \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 - ... - \alpha_n \cdot \vec{a}_n$ $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}$ teorema isbotlandi. ▲

4-teorema: *Ikki vektorning kolleniyar bo'lishi uchun ularning chiziqli bog'liq bo'lishi zarur va yetarli.*

△ **Isbot:** *Zarurligi* ikkita $\vec{a}_1 \vec{a}_2$ vektor kolleniar bo'lsin, biz bu vektorlarni chiziqli bog'liqligini ko'rsatishimiz kerak. $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ $1 \cdot \vec{a}_1 - \lambda \cdot \vec{a}_2 = 0$ $\alpha_1 = 1 \neq 0$ $\alpha_2 = -\lambda$

Demak, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar chiziqli bog'liq.

Yetarligi: $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0$ bu yerda $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ (yoki ikkalasi xam bir vaqtda 0 emas). Aniqlik uchun $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsin.

$$\alpha_1 \vec{a}_1 = -\alpha_2 \vec{a}_2 \qquad \vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 \qquad \lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \qquad \vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$$

teorema isbot bo'ldi. ▲

Yuqorida berilgan vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari xossalarini qanoatlantiruvchi vektorlar to'plami L chiziqli fazo (yoki vektor fazo) deb ataladi. L chiziqli fazo elementlari vektorlardan iborat bo'ladi.

Chiziqli erkli va chiziqli bog‘liq elementlarning ba’zi xossalari bilan tanishib chiqamiz.

Chiziqli fazodan olingan har qanday elementlar tizimi chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli bo‘lishi shart. Agar $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ elementlarni tanlab olsak, ular chiziqli erkli yoki chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Chiziqli erkli va chiziqli bog‘lanishli vektorlarning xosalari.

1) ***Xossa.*** *Agar* $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ *elementlarning biror qismi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, bu elementlar ham chiziqli bog‘liq bo‘ladi.*

Haqiqatan ham, elementlardan $a_1, a_2, a_3, ..., a_k (k < m)$ lar chiziqli bog‘liq bo‘lsin. Demak, $\alpha_i (i = \overline{1, k})$ lardan kamida bittasi noldan farqli son topiladiki

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + ... + \alpha_k \cdot a_k = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bunda $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + ... + \alpha_k \cdot a_k + 0 \cdot a_{k+1} + ... + 0 \cdot a_m = 0$ tenglik ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikda α_i lardan kamita bittasi noldan farqli. Bu esa $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ – elementlarning chiziqli bog‘liq ekanini ko‘rsatadi.

2) ***Xossa.*** *Agar* $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ *elementlar chiziqli erkli bo‘lsa, bu to‘plamdan olingan ixtiyoriy qism to‘plam elementlari ham chiziqli erkli bo‘ladi.*

Bu xossaning isboti avvalgi xossadan kelib chiqadi.

3) ***Xossa.*** *Agar* $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ *elementlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi.*

Haqiqatan hamma $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ elementlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lgan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m$ sonlar mavjudki

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + ... + \alpha_m \cdot a_m = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Chiziqli bog‘liqlikning ta’rifiga ko‘ra aytaylik $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsin, u holda

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - ... - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} a_m$$

tenglikni hosil qilish mumkin. Bu esa a_1 – elementni boshqa elementlar orqali chiziqli ifoda etilishini ko‘rsatadi.

Keltirilgan ohirgi xossa o‘z o‘rnida quyidagi xossani keltirib chiqaradi.

4) ***Xossa.*** *Agar* $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ *elementlardan birortasi boshqalari orqali chiziqli ifodalansa, bu elementlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.*

Bu xossa chiziqli kombinatsiyada elementlarni tenglikning bir tomoniga o‘tkazish yo‘li bilan isbotlanadi.

Haqiqatan ham, agar a_1 element qolgan elementlar orqali chiziqli ifodalangan bo‘lsa, ya’ni

$$a_1 = \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + ... + \alpha_m \cdot a_m$$

ifodada barcha elementlarni tenglikning bir tomoniga o‘tkazib

$$1 \cdot a_1 + (-\alpha_2) \cdot a_2 + (-\alpha_3) \cdot a_3 + ... + (-\alpha_m) \cdot a_m = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bunda a_1 element koeffittsienti $\alpha_1 = 1$. Chiziqli bog‘liqlik sharti bajarildi.

6-Ta’rif: *Agar* L *chiziqli fazoda* n *ta chiziqli erkli elementlar mavjud bo‘lib, har qanday* $n+1$ *ta element chiziqli bog‘liqli bo‘lsa, u holda* L *chiziqli fazoning o‘lchovi* n *ga teng deyiladi.*

Vektorlarning chiziqli bo‘g‘lanishli bo‘lishining kollinearlik va komplanarlik shartlari.

5-teorema. *Ikkita vektorning chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning kollinear bo‘lishi zarur va yetarli.*

$\triangle$ **Isbot**. Zarurligi. $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin, u holda kamida biri noldan farqli $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ sonlar mavjud bo‘lib,

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \qquad (1)$$

bo‘ladi. Aniqlik uchun $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsin, u holda (1) munosabatdan $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2$, $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ belgilashni kiritsak, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ bo‘ladi, bundan 1- teoremaga asosan $\vec{a}_1 \| \vec{a}_2$ ekani kelib chiqadi.

Yetarliligi: $\vec{a}_1 \| \vec{a}_2$ bo‘lsin, u holda shunday $\lambda \in R$ son mavjudki, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ yoki $(-1)\vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 = 0$; ta’rifga ko‘ra $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektorlar chiziqli bog‘liq. Teorema isbotlandi. ▲

6-teorema: *Uch vektor chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning komplanar bo‘lishi zarur va yetarli.*

△ **Isbot**. Uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar chiziqli bog‘lanishli bo‘lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog‘lanishlilikning ta’rifiga asosan, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan α, β, γ sonlar uchun

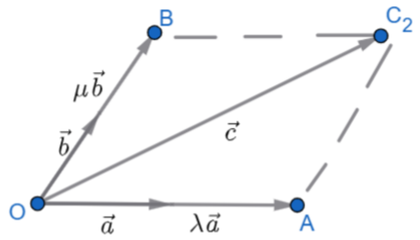
$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Aniqlik uchun γ noldan farqli bo‘lsin, yuqoridagi tenglikdan

$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda $\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}, \mu = -\frac{\beta}{\gamma}$ belgilashlarni kiritib, $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning boshi bitta umumiy O nuqtaga joylashtirilgan bo‘lsa, oxirgi tenglikdan $\vec{c}$ vektor $\lambda \vec{a}$ va $\mu \vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogram diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Va aksincha, $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lsin. Ular chiziqli bog‘liqligini isbotlaymiz.



1-rasm.

Berilgan uchta vektorlar orasida kollinear vektorlar bo‘lgan holni chiqarib tashlaymiz. Yuqoridagi teoremaga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli bog‘liq bo‘ladi va berilgan uchta vektor ham chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi. Shuning uchun $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo‘lmagan holni ko‘rib chiqamiz (xususan, ular orasida nol vektor ham yo‘q). Vektorlarni bitta tekislikka ko‘chirib, ularning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz (1-chizmaga qarang). Keyin

$\vec{c}$ vektorning C uchi orqali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga parallel to‘gri chiziqlar o‘tkazamiz, vektor yotgan to‘gri chiziqning $\vec{b}$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasini A deb belgilaymiz va $\vec{b}$ vektor yotgan to‘gri chiziqning $\vec{a}$ vektorga parallel to‘gri chiziq bilan kesishish nuqtasini B deb belgilaymiz. (Ushbu nuqtalarning mavjudligi, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear emasligidan kelib chiqadi). Vektorlarni qo‘shishning parallelogramm qoidasiga ko‘ra $\vec{c}$ vektor $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlar yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

$\overrightarrow{OA}$ vektor noldan farqli $\vec{a}$ vektorga kollinear (u bilan bir to‘gri chiziqda yotuvchi), demak, shunday λ haqiiy son topiladiki,

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash, $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{b}$ tenglik ham o‘rinli. Bu tengliklardan

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$ ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi λ, μ va -1 sonlarining kamida bittasi noldan farqli bo‘lganligi sababli, oxirgi tenglik $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli bog‘lanishligini ifodalaydi. Teorema isbotlandi. ▲

1-natija. *Agar* $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ *vektorlar komplanar bo‘lmasa, ular chiziqli erkli bo‘ladi.*

2-natija. *Ixtiyoriy uchta komplanar bo‘lmagan vektorlar orasida ikkita kollinear vektorlar bo‘la olmaydi. Shuningdek ular orasida nol vektor ham bo‘lmaydi.*