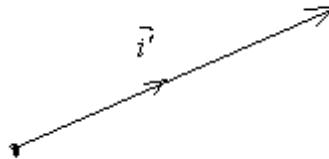


Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemasi.

Tekislikda ixtiyoriy o'q berilgan bo'lsin va shu o'qda \vec{i} birlik



1-rasm

vektor aniqlangan bo'lsin. Tekislikda M nuqta berilgan bo'lsin. $(\vec{i}'\overrightarrow{OM}) = \varphi$ bo'lsin. $|\overrightarrow{OM}|$ ning uzunligi r bo'lsin. $(\vec{i}'\overrightarrow{OM}) = \varphi$, $|\overrightarrow{OM}| = r$ va biz (\vec{i}, φ) juftlarni qaraymiz. Mana shu juftlik berilgan M nuqtani to'la aniqlaydi. Bu yerda burish soat strelkasiga qarama-qarshi bo'ladi.

R ga nuqtaning qutb radiusi φ ga qutb burchagi deyiladi. Masalan: $\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$

bo'lsa $r = 5, \varphi = \frac{\pi}{2}$ to'g'ri keladi.

Shunday qilib kiritilgan koordinata sistemasiga qutb koordinata sistemasi deyiladi. Nuqtaning qutb koordinatalari berilgan bo'lsa, u dekart koordinatalarini aniqlash uchun quyidagicha qilamiz. Qutb koordinatalarining boshiga dekart koordinatalar sistemasining O nuqtasini qo'yamiz. X o'jni qutb o'qi bo'yicha yo'naltiramiz. U o'jni OX ga perpendikulyar qilib yo'naltiramiz. M nuqta olamiz va uning proektsiyasi M' bo'lsin. $M(r, \varphi)$ bo'lsin.

$$\Delta OMM'$$
 ni qaraymiz: $\sin \varphi = \frac{|MM'|}{|r|}$, $\cos \varphi = \frac{|r|}{|MM'|}$.

M nuqtaning dekart koordinatalari (x, u) bo'lsin.

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

Ushbu formulaga (1) **nuqtaning qutb koordinatalari berilgan bo'lsa, dekart koordinatalarini** topish formulasi deyiladi.

Misol: $M\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$ qutb koordinatasi bo'lsin. $x = 5 \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $y = 5 \sin \frac{\pi}{2} = 5$. Demak

$M(0,5)$ dekart koordinatasi bo'ladi.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2).$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(2) formulaga **Dekart koordinatalardan qutb koordinatalarga o'tish formulası** deyiladi. Bizga qutb koordinatalar sitemasida M_1 va M_2 nuqtalar berilgan bo'lsin.

$M_1(r_1, \varphi_1)$ $M_2(r_2, \varphi_2)$ va $|M_1 M_2| = ?$

$$\begin{aligned}|M_1 M_2|^2 &= |OM_1|^2 + |OM_2|^2 - 2|OM_1||OM_2|\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \\&= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\|M_1 M_2| &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\end{aligned}$$

1) $M_1\left(1; \frac{3\pi}{4}\right)$ $M_2\left(3; \frac{7\pi}{4}\right)$

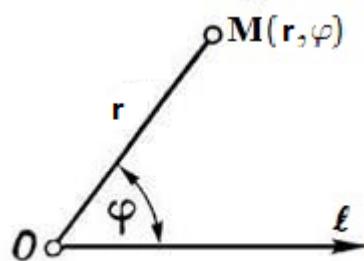
$$|M_1 M_2| = \sqrt{1+9-2 \cdot 1 \cdot 3 \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{10+6} = 4$$

2) $M_1\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$ $M_2\left(8; \frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}|M_1 M_2| &= \sqrt{25+64-2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{89-80 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \\&= \sqrt{89-40} = \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

$$|M_1 M_2| = \sqrt{1+9-2 \cdot 1 \cdot 3 \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{10+6} = 4$$

Tekislikda qutb koordinatalar sistemasini kiritish uchun birorta O nuqtani va bu nuqtadan o'tuvchi o'qni tanlab olamiz. Tanlangan nuqtani qutb boshi, o'qni esa qutb o'qi deb ataymiz va uni ℓ bilan belgilaymiz. Tekislikda berilgan ixtiyoriy O nuqtadan farqli M nuqta uchun r bilan $|OM|$ masofani, φ bilan esa ℓ o'q bilan \overrightarrow{OM} nur orasidagi burchakni belgilaymiz. r ni M nuqtaning qutb radiusi, φ ni M nuqtaning qutb burchagi deyilib, bu kattaliklar M nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va $M(r, \varphi)$ ko'rinishda belgilanadi (2-rasm).



2-rasm.

Tekislikning O nuqtadan farqli nuqtalari bilan qutb koordinatalari o‘rtasidagi moslik o‘zaro bir qiymatli bo‘lishi uchun r va φ kattaliklar uchun quyidagi chegara qo‘yiladi: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

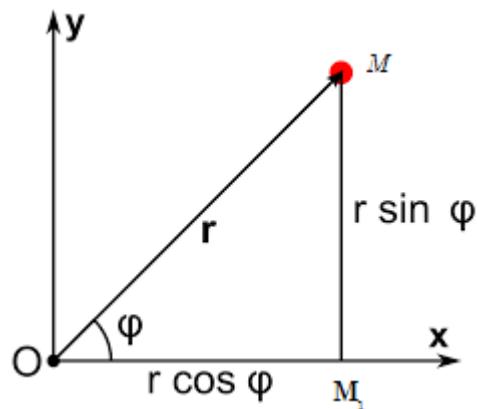
Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog‘lanish.

Tekislikda (r, φ) qutb koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Koordinatalar boshi qutb boshi bilan, absissalar o‘qining musbat qismi qutb o‘qi bilan ustma-ust tushadigan (O, \vec{i}, \vec{j}) Dekart sistemani kiritamiz.

M nuqtaning qutb koordinatalari (r, φ) Dekart koordinatalari esa x , y bo‘lsin. OM_1M to‘g‘ri burchakli uchburchakdan:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \quad (3)$$

M nuqtaning qutb koordinatalari (r, φ) ma’lum bo‘lsa, (3) formulalar bo‘yicha uning Dekart koordinatalari hisoblanadi (3-rasm).



3-rasm.

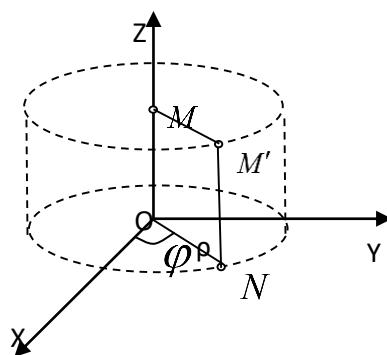
O‘z navbatida M nuqtaning qutb koordinatalari (r, φ) ni uning Dekart koordinatalari x , y orqali topish mumkin. OM_1M uchburchakdan:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3) M nuqtaning qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga, (4) M nuqtaning Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o‘tish formulalaridir.

Shuni eslatib o'tamizki, M nuqtaning Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tishda $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ formula qutb burchagining bosh qiymatini to'la aniqlamaydi, chunki buning uchun yana φ miqdor musbat yoki manfiy ekanligini ham bilish kerak. Odatda bu M nuqtaning qaysi chorakda joylashishiga qarab aniqlanadi. Masalan, (4) formulada $x=3$, $y=3$ bo'lsa, $\operatorname{tg}\varphi=1$ bo'lib, $\varphi=45^\circ$. Lekin $x=-3$, $y=-3$ bo'lganda ham $\operatorname{tg}\varphi=1$ bo'lib, endi $\varphi=45^\circ$ emas, balki $\varphi=-135^\circ$ bo'lishi kerak, chunki $(-3, -3)$ nuqta uchinchi chorakda joylashgan. φ burchakning qiymati va ishorasini $\sin\varphi, \cos\varphi$ ga qarab aniqlash qulayroq.

Silindrik koordinatalar sistemasi. Fazoda silindrik koordinatalar sistemasisini kiritish uchun biz fazoda bitta tekislikni va unga tegishli O birorta nuqtani tanlashimiz kerak. Tanlangan tekislikda O nuqtani qutb boshi sifatida olib bu tekislikda qutb koordinatalari kiritamiz. Berilgan tekislikka perpendikulyar va O nuqtadan o'tuvchi o'qni OZ o'qi sifatida olib, fazoda silindrik koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz: fazoda berilgan M nuqtaning tekislikdagi proyeksiyasini N bilan, uning OZ o'qdagi proyeksiyasini M' bilan belgilaymiz. Silindrik koordinatalar sifatida (ρ, φ, z) kattaliklarni olamiz. Bu yerda (ρ, φ) - N nuqtaning berilgan tekislikdagi qutb koordinatalari, z esa OM kesma kattaligidir (4-rasm).



4-rasm.

Agar biz fazoda OXY tekislik sifatida tanlangan tekislikni, OX o'q sifatida qutb o'qini olib dekart koordinatalar sistemasini kirtsak:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad x = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

bog'lanishlarni olamiz. Bu yerda ρ, φ o'zgaruvchilar uchun

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

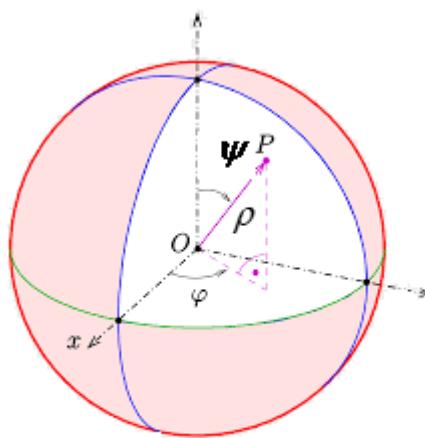
munosabatlar o'rnlidir.

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo bitta o'qqa ega bo'lgan ichma-ich joylashgan (konsentrik) silindrلarga ajraladi. Fazoning har bir nuqtasi bu silindrлarning faqat bittasiga tegishli bo'ladi. Agar nuqtaning silindrik koordinatalari ρ, φ, z bo'lsa, bu nuqta yotgan silindrning radiusi ρ ga teng bo'ladi. Agar nuqta silindrлar o'qiga tegishli bo'lsa, u tegishli bo'lgan silindrning radiusi nolga teng bo'ladi. Yuqoridagi tanlangan dekart koordinatalar sistemasida silindrлarning o'qi Oz o'qidan iboratdir. Bu Dekart koordinatalar sistemasida konsentrik silindrлar tenglamasi

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

Sferik koordinatalar sistemasi. Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritish uchun $Oxyz$ -Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan deb hisoblab, berilgan P nuqta uchun markazi koordinata boshida bo'lgan va radiusi $\rho = |\overrightarrow{OP}|$ ga teng bo'lgan sferani qaraymiz. Berilgan P nuqtaning Oxy tekisligiga proyeksiyasini P' bilan, \overrightarrow{OP} vektor va Oz o'qi orasidagi burchakni ψ bilan, $\overrightarrow{OP'}$ vektor va Ox orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz. Burchaklarni aniqlashda φ burchak shunday tanlanadiki, Oz o'qining musbat yo'nalishi tomonidan qaraganimizda, Ox o'qini $\overrightarrow{OP'}$ nur bilan ustma ust tushirish uchun soat mili yo'nalishiga qarshi yo'nalishda φ burchakka burish kerak. Yuqorida aniqlangan ρ, φ, ψ kattaliklar M nuqtaning sferik koordinatalari deyiladi (5-rasm).



5-rasm.

Bunga sabab, fazoning koordinatalari $\rho = \text{const}$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalari to‘plami sferani tashkil qiladi. Fazoning har bir nuqtasi radiusi koordinata boshidan shu nuqtagacha bo‘lgan masofaga teng bo‘lgan sferada yotadi. Nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalari orasidagi bog‘lanish quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \varphi \\ y = \rho \sin \psi \sin \varphi \\ z = \rho \cos \psi \end{cases}$$

Odatda fazo nuqtalari bilan ularning sferik koordinatalari orasidagi moslik o‘zaro bir qiymatli bo‘lishi uchun ular uchun

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \psi < \pi$$

chegaralar qo‘yiladi.

Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo markazi bitta nuqtada bo‘lgan sferalarga ajraladi. Agar nuqtaning sferik koordinatalari ρ, φ, ψ bo‘lsa, u yotgan sferaning radiusi ρ ga teng bo‘ladi. Bu masofa nuqtadan koordinatalar boshigacha bo‘lgan masofaga tengdir. Nuqta ρ radiusli sferada yotgan bo‘lsa, φ va ψ burchaklar uning sferadagi vaziyatini aniqlaydi.

Silindrik va sferik koordinatalar asosan mexanika, matematik fizika fanlarida ko‘proq ishlatiladi. Biz ulardan chiziqlar va sirtlar nazariyasida foydalanamiz.