Analitik geometriya fani haqida qisqacha ma’lumot. Analitik geometriya fanining predmeti va uslublari. Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

Kirish

Tasavvur qiling, geografik xarita yoki shahar rejasiga qarab turibsiz. Har bir joy aniq koordinatalarga ega: kenglik va uzunlik orqali istalgan nuqtani topish mumkin. Endi tasavvur qiling, siz kompyuter o‘yinida biror qahramonni boshqarayapsiz – uning harakati ham xuddi shu usulda, koordinatalar asosida belgilanadi. Hatto oddiy telefondagi GPS tizimi ham analitik geometriya yordamida ishlaydi. Demak, **analitik geometriya – nafaqat matematiklarning sohasi, balki kundalik hayotimizning ajralmas qismi!** Biroq, bu g‘oya qayerdan paydo bo‘ldi? Geometriya qanday qilib algebra bilan “do‘stlashdi”? Bu savollarga javob topish uchun tarix sahifalariga nazar tashlaymiz.

Buyuk allomalarimiz:

Abu Rayhon Beruniy (973–1048) o‘z asarlarida yer yuzasidagi nuqtalarning aniq joylashuvini aniqlash uchun geografik koordinatalar tizimini ishlab chiqqan. Uning astronomik kuzatuvlari va trigonometrik hisoblari analitik geometriyaning rivojlanishiga hissa qo‘shgan.

Mirzo Ulug‘bek (1394–1449) Samarqandda barpo etgan rasadxonasida sayyoralar va yulduzlarning koordinatalarini aniqlash uchun geometriya va algebra usullaridan foydalangan. U tuzgan **“Zijji Ko‘ragoniy”** astronomik jadvali o‘sha davr uchun eng aniq ma’lumotlarni o‘z ichiga olgan.

Muhammad al-Xorazmiy (780–850) algebra fanining asoschisi bo‘lib, uning ishlari analitik geometriya rivojlanishiga katta turtki bergan. Aynan uning algebraik usullari keyinchalik koordinatalar geometriyasi bilan bog‘langan.

Bugungi kunda ham O‘zbekistonda analitik geometriya bo‘yicha ko‘plab tadqiqotlar olib borilmoqda. O‘zbek olimlari **fazoviy geometriya, differensial geometriya va algebraik geometriya** yo‘nalishlarida xalqaro miqyosda e’tirof etilgan ishlarga ega.

Analitik geometriyaning tug‘ilishi:

Bir kuni fransuz matematigi **René Descartes** (1596–1650) to‘shagida yotgan holda shiftga qarab, xonasida osilgan chiroqni kuzatadi. U o‘z oldiga savol qo‘yadi: *chiroq xonaning qaysi nuqtasida joylashgan?* Bu savol unga har qanday nuqtani ikki son yordamida ifodalash mumkinligi g‘oyasini beradi. Shu tariqa, **koordinatalar tizimi va analitik geometriyaning ilk tamoyillari shakllana boshlaydi**. Ushbu uslub orqali geometrik shakllar endi faqat rasm emas, balki matematik tenglamalar yordamida tasvirlana boshladi. Masalan, oddiy to‘g‘ri chiziq $\mathbf{y = mx + b}$ tenglamasi bilan ifodalansa, doiraning tenglamasi $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ shaklida yoziladi.

Pierre de Fermat (1601–1665) ham xuddi shu yillarda mustaqil ravishda koordinatalar usulini ishlab chiqdi. U matematik formulalar yordamida egri chiziqlarni tasvirlashga muvaffaq boʻldi. Afsuski, uning ishlari Descartesnikiga qaraganda kamroq mashhurlikka erishdi. Chunki Descartes oʻz nazariyalarini **"Geometriya"** nomli kitobida chop etgan boʻlsa, Fermatning ishlari faqat uning vafotidan keyin topilib nashr qilingan.

Analitik geometriyaning sohalarda qoʻllanilishi

Analitik geometriya oddiy shakllarni matematik tenglamalar bilan ifodalashdan tashqari, **fizika, muhandislik, astronomiya va hatto biologiya** sohalarida ham muhim ahamiyatga ega.

Quyidagi misollar bunga yaqqol dalildir:

✅ **Tibbiyot** – MRT va rentgen tasvirlarida tananing ichki qismlari uch oʻlchovli koordinatalar asosida modellashtiriladi.

✅ **Astronomiya** – Sayyoralar harakatini bashorat qilish uchun analitik geometriya ishlatiladi. Masalan, Yupiter yoki Mars orbitasi maxsus matematik formulalar yordamida aniqlanadi.

✅ **GPS tizimi** – Har qanday nuqtaning aniq joylashuvi koordinatalar tizimi orqali hisoblab chiqiladi.

✅ **Kompyuter grafikasi va animatsiya** – 3D modellar, video oʻyinlar va maxsus effektlar aynan analitik geometriya tamoyillariga asoslanadi.

Analitik geometriya: zamonaviy texnologiyalar asosi

Agar analitik geometriya kashf etilmaganida, biz qanday dunyoda yashayotgan boʻlardik? Quyidagi texnologiyalar mavjud boʻlmasligi mumkin edi:

❌ **GPS tizimi** – yoʻnalish topish qiyinlashardi.

❌ **3D animatsiya va grafikalar** – filmlar va video oʻyinlar boʻlmaydi yoki rivojlanishi juda sust kechardi.

❌ **Sun'iy yoʻldoshlar** – fazoviy hisob-kitoblar murakkab boʻlib, zamonaviy aloqa tizimlari ishlamas edi.

❌ **Fizikada mexanika va dinamika nazariyalari** – sayyoralar va jismlarning harakatini tushunish ancha qiyin boʻlardi.

Shunday qilib, analitik geometriya fanning **boshqa koʻplab sohalari rivojiga yoʻl ochib bergan muhim boʻgʻin** boʻlib, bugungi texnologiyalar negiziga aylangan.

Analitik geometriyaning predmeti va uslublari

Predmeti

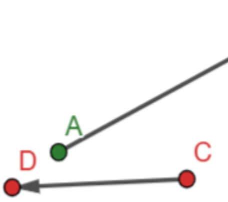
Analitik geometriya – bu algebraik usullar yordamida geometrik shakllar va ularning xususiyatlarini oʻrganadigan fandir. Uning predmeti quyidagi asosiy tushunchalarni oʻz ichiga oladi:

- **Koordinatalar tizimi** – Geometrik jismlarni matematik ifodalash uchun asos.
- **Toʻgʻri chiziqlar va egri chiziqlar** – Ularning tenglamalari va xossalari.
- **Tekislik va fazoda joylashgan jismlar** – Ular orasidagi masofalar, burchaklar va boshqa nisbatlar.
- **Transformatsiyalar** – Geometrik jismlarning harakatlari va ularning algebraik ifodalanishi.

Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

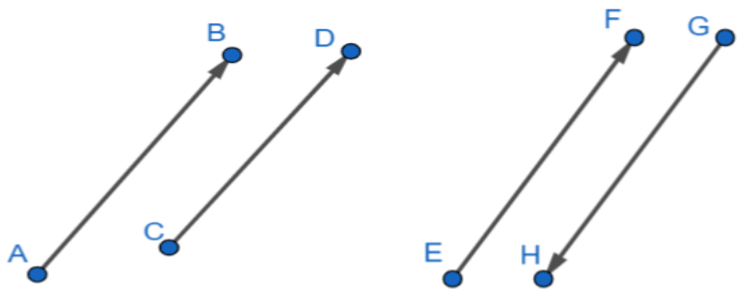
1-Ta'rif: *Berilgan kesmaning qaysi uchi birinchiligi va qaysi uchi ikkinchiligi aniqlangan bo'lsa bunday kesmaga yo'nalgan kesma deyiladi.*

1.1-Ta'rif: *Yo'nalishga ega bo'lgan kesmaga **VEKTOR** deyiladi.*



1-rasm

AB kesma uzunligiga yo'nalgan kesmaning uzunligi deyiladi. (chiziqcha AB) (uzunligi $|AB|$)



2-rasm

2-Ta'rif: *Agar AB va CD nurlar bir xil yo'nalishli bo'lsa AB va CD yo'nalgan kesmalar (vektorlar) bir xil yo'nalishli deyiladi va quyidagicha ifodalanadi* $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ *aks holda qarama-qarshi yo'nalishli deyiladi* $\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GH}$

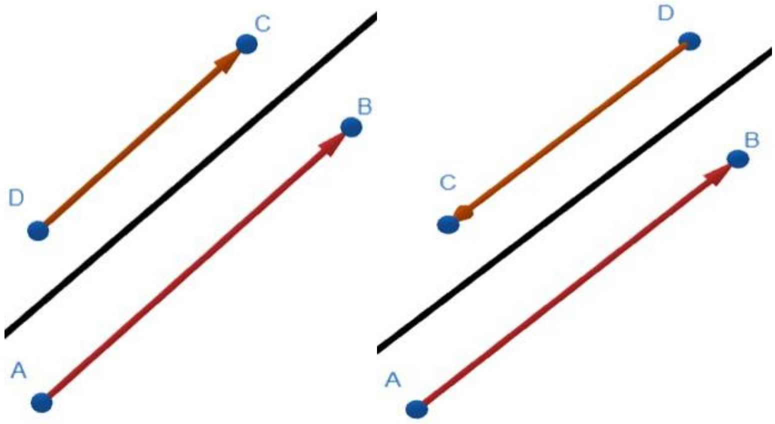
Vektorlar kichkina lotin harflari bilan belgilanadi va ustiga chiziqcha qo'yiladi. Misol uchun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ yoki koordinata o'qida berilgan bo'lsa $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ katta harflar bilan belgilanadi. $\overrightarrow{AB}$ vektorda A-uchi boshi bo'lib B-uchi oxiri deb belgilaymiz.

3-Ta'rif: $\overrightarrow{AB}$ *vektorning uzunligi deb* $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ *kesmaning uzunligiga teng.*

4-Ta'rif: *Uzunligi birga teng bo'lgan vektor- Birlik vektor deyiladi.*

5-Ta'rif: *Boshi va oxiri ustma-ust tushgan vektor- Nol vektor deyiladi.*

6-Ta'rif: *Bitta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan vektorlar koleniar vektorlar deyiladi.*



3-rasm

Bu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ yerda vektorlar koleniar hisoblanadi.

VEKTORLAR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR

Quyidagi amallarga biz vektorlar ustida chiziqli amallar deb hisoblaymiz:

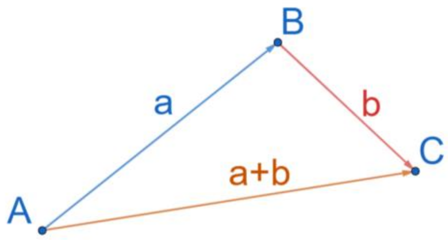
1) qo‘shish
2) ayirish
3) vektorni songa ko‘paytirish.

Vektorlarni qo‘shish amalini ikkita yo‘l bilan yechish mumkin:

1) Uchburchak usuli.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{b} = \overrightarrow{BD}$

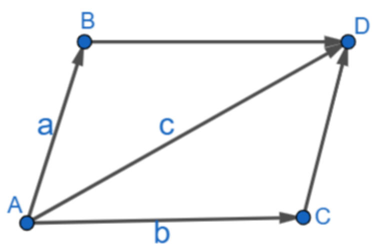
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo‘shish uchun $\vec{a}$ vektor oxiriga $\vec{b}$ vektorni boshi olib kelib qo‘yiladi va $\vec{a}$ vektorning boshidan $\vec{b}$ vektorning oxiriga qarata $\vec{c}$ vektor xosil bo‘ladi. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



4-rasm

2) Paralellogram usuli.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning boshlari bir nuqtaga olib kelib qo‘yiladi. D uchdan $\vec{a}$ vektorga parallel qilib paralellogramm xosil bo‘ladi.



5-rasm

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi uning diagonallari bo‘yicha o‘tadi va $\vec{c}$ vektor hosil bo‘ladi.

Vektorlarni qo‘shish amallari quyidagi xossalarga ega:
1. Vektorlarning qo‘shishni guruxlanish (assotsiativlik)

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

2. Vektorlarning qo‘shishni o‘rin almashishligi (komutativlik).

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

3.Har qanday $\vec{a}$ vektorga 0 vektori qo‘shilsa, $\vec{a}$ vektor hosil bo‘ladi.

$$\vec{a}+0=\vec{a}$$

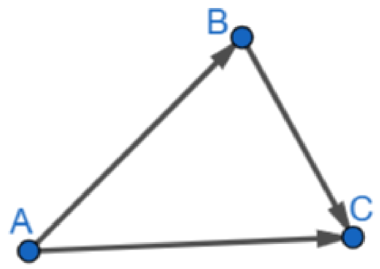
4.Har qanday $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{a'}$ vektor mavjudki:

$$\vec{a}+\vec{a'}=0$$

7-Ta’rif: $\vec{a'}$ *vektor* $\vec{a}$ *vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi.*

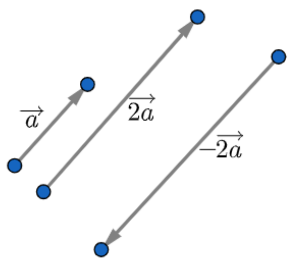
Vektorlarni ayirish

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{a}$ ga $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi bo‘lgan -$\vec{b}$ ni vektorlarning yig’indisiga aytiladi.
$\vec{a}-\vec{b}$ ko‘rinishda yoziladi.
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun ularning boshlarini bir nuqtaga olib kelamiz va ularning oxirlarini tutashtiramiz.



6-rasm

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ vektorlarni bir joyga olib kelamiz. Xosil bo‘lgan vektor $\vec{a}-\vec{b}$ deb yoziladi.
Vektorni songa ko‘paytirish.
8-Ta’rif: $\vec{a}\neq 0$ *vektorning* $\alpha\in R$ *ko‘paytmasi deb, shunday vektorga aytiladiki, bu vektorning yo‘nalishi* $\alpha>0$ *bo‘lsa* $\vec{a}$ *vektorning yo‘nalishi bilan bir xil,* $\alpha<0$ *bo‘lsa* $\vec{a}$ *vektorning yo‘nalishiga qarama-qarshi bo‘lib, uzunligi* α *ning moduliga* $\vec{a}$ *vektorning uzunligining ko‘paytmasiga teng bo‘ladi va* $\alpha\cdot\vec{a}$ *ko‘rinishda yoziladi.*



7-rasm

bu ta’rifdan quyidagi hossalar kelib chiqadi.
1) $\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$
2) $0\cdot\alpha=0$

3) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

4) $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

5) $\vec{a}$ va $\alpha\cdot\vec{a}$ vektorlar kollenear.

Teorema: *Agar $\vec{a}\parallel\vec{b}$ $(\vec{a}\neq 0)$ bo'lsa, u xolda shunday α son mavjud bo'ladiki $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Bu yerda uchta xol mavjud bo'lishi mumkin:

1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

3) $\vec{b}=0$

1 holatni ko'rib chiqamiz.

Isbot. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ bo'lsin. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ vektor yo'nalishi $\vec{a}$ vektor bilan bir xil bo'lgan birlik vektordir. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ va $\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|\cdot\vec{a}$ bu yerda $\alpha=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ deb olsak $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}$ bo'ladi.

2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\uparrow\uparrow\vec{a}$ va $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\uparrow\uparrow\vec{b}$ birlik vektor. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ edi shunda $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ bo'ladi. $\vec{b}=-\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|\cdot\vec{a}$, $\alpha=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}$ kelib chiqadi.

3) $\vec{b}=0$. U holda $\alpha=0$ deb hisoblaymiz. $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}$ hosil bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni songa ko'paytirish teoremasidan ushbu mulohaza kelib chiqadi.

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}$$

Demak, vektorlar kollenear bo'lishi uchun $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}$ bo'lishi zarur va yetarli bo'lib vektorlarni songa ko'paytirish va qoshish amallari quyidagi xossalarga ega.

1. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (assotsativlik)

2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (komutativlik)

3. Shunday $\vec{0}$ vektor mavjudki $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4. Shunday $\vec{a}'$ vektor mavjud mavjudki $\vec{a}+\vec{a}'=0$

5. $\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\alpha\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$

6. $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$

7. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$

8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

bu sakkiz xossani qanoatlantiruvchi vektorlar to'plamiga V vektor fazo deyiladi. (chiziqli fazo deb yuritiladi).