Fazoda tekislikning turli tenglamalari. Fazoda tekisliklarning o‘zaro vaziyati. Nuqtadan tekislikkacha masofa.

Fazoda tekislik tenglamalari

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va unda P tekislik berilgan bo‘lsin. Bu tekislikka tegishli nuqtalar koordinatalari birinchi darajali chiziqli tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsatamiz. Fazoda tekislikka tegishli $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ nuqtani olib, P tekislikka perpendikulyar birorta vektorni $\vec{n}$ bilan belgilasak, $M\left(x, y, z\right)$ nuqta P tekislikka tegishli bo‘lishi, $\overrightarrow{M_0M}$ vektorning $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo‘lishiga teng kuchlidir. Demak perpendikulyarlik shartiga ko‘ra $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right)=0$ bo‘lishi kerak bo‘ladi. Bunda agar $\vec{n}=(A,B,C)$ - koordinatalarga ega bo‘lsa, $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ bo‘lganligi uchun

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

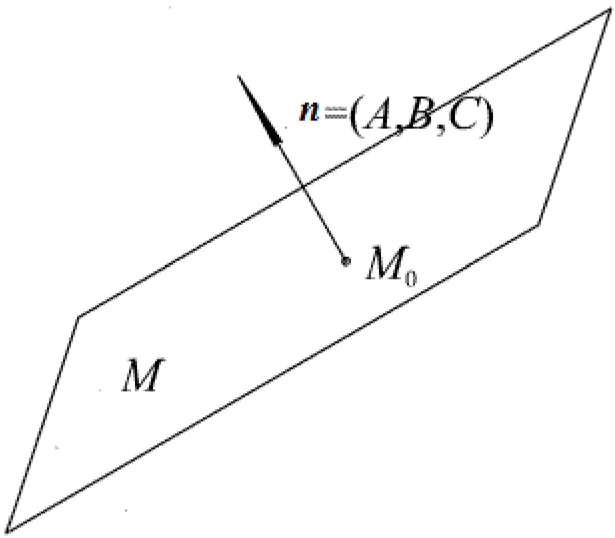
tenglama o‘rinli bo‘ladi. Agar $D=Ax_0+By_0+Cz_0$ belgilashni kiritsak

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz.

1-ta’rif. *(1) tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deb ataladi. Berilgan P tekislikka perpendikulyar bo‘lgan har qanday vektor bu tekislikning normal vektori yoki qisqacha normali deb ataladi.*

Teskari masala qo‘yamiz: $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama berilgan bo‘lsa, koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami tekislikni hosil qilishini ko‘rsatamiz. Koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi birorta $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ nuqtani olib, $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ nuqtadan o‘tuvchi va normal $\vec{n}=\left\{A, B, C\right\}$ vektorga perpendikulyar tekislikni P bilan belgilasak, bu tekislikdagi nuqtalarning koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko‘ramiz, va aksincha, koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning har biri P tekislikga tegishlidir (1-rasm).



1-rasm.

Endi P tekislikning (1) umumiy tenglamasini ayrim xususiy hollarda tahlil etamiz:

1. $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0)\in P$, ya'ni P tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.

2. $A=0 \Rightarrow By+Cz+D=0 \Rightarrow n=(0,B,C)\perp OX \Rightarrow P\,||\,OX$, ya'ni P tekislik OX o'qiga parallel bo'ladi.

3. $B=0 \Rightarrow Ax+Cz+D=0 \Rightarrow n=(A,0,C)\perp OY \Rightarrow P\,||\,OY$.

4. $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0 \Rightarrow n=(A,B,0)\perp OZ \Rightarrow P\,||\,OZ$.

5. $A=0, D=0 \Rightarrow By+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0)\in P,\ P\,||\,OX \Rightarrow OX\subset P$, ya'ni P tekislik OX o'qidan o'tadi.

6. $B=0, D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0)\in P,\ P\,||\,OY \Rightarrow OY\subset P$.

7. $C=0, D=0 \Rightarrow Ax+By=0 \Rightarrow 0(0,0,0)\in P,\ P\,||\,OZ \Rightarrow OZ\subset P$.

8. $A=0, B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow z=-\dfrac{D}{C} \Rightarrow P\,||\,OX,\ P\,||\,OY \Rightarrow P\,||\,XOY$, ya'ni P tekislik XOY tekisligiga parallel bo'ladi.

9. $A=0, C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-\dfrac{D}{B} \Rightarrow P\,||\,OX,\ P\,||\,OZ \Rightarrow P\,||\,XOZ$.

10. $B=0, C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-\dfrac{D}{A} \Rightarrow P\,||\,OY,\ P\,||\,OZ \Rightarrow P\,||\,YOZ$.

11. $A=0, B=0, D=0 \Rightarrow Cz=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow P=XOY$.

12. $A=0, C=0, D=0 \Rightarrow By=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow P=XOZ$.

13. $B=0, C=0, D=0 \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow P=YOZ$.

Nokolleniar ikki $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$ vektor va bitta M_0 nuqta P tekislikning vaziyatini to'la aniqlaydi.

$\forall M \in P$ nuqtani olaylik. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ vektor va $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$ vektorlar bilan komplanar bo‘ladi, demak, bu vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lib, bundan ularning koordinatalaridan tuzilgan uchinchi tartibli determenant nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi. Shuni koordinatalarda yozaylik.

$$M_0(x_0, y_0, z_0),\ \ \vec{p}_1(a_1, b_1, c_1),\ \ \vec{p}_2(a_2, b_2, c_2) \tag{2}$$

bo‘lsin. M ning koordinatalarini $x,\ y,\ z$ deb olaylik. $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ bo'lib, quyidagi tenglama hosil bo‘lad

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Aksincha, (3) shart bajarilsa, M nuqta albatta P tekislikka tegishli bo'ladi. Demak, (3) P tekislikning tenglamasi. **Bu tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan (nokolleniar) ikki vektorga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasi** deb deyiladi.

Bundan tashqari $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$ vektorlar bir tekislikda yotgani uchun ular chiziqli bog'liqdir, ya'ni

$$\overrightarrow{M_0M} = u\,\vec{p}_1 + \vartheta\,\vec{p}_2,\ \ u,\ \ \vartheta \in R, \tag{4}$$

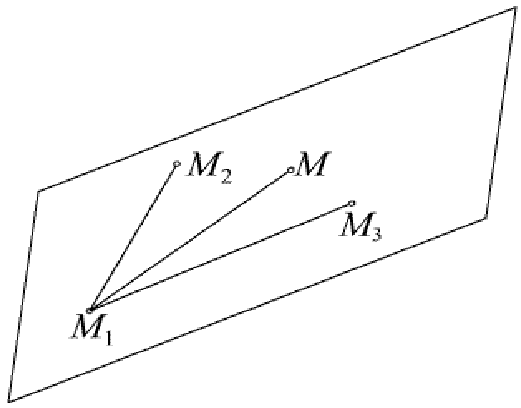
bu yerda $u,\ \vartheta$ sonlar parametrlardir. (4) dan

$$\begin{cases} x-x_0 = u\,a_1 + \vartheta a_2, \\ y-y_0 = u\,b_1 + \vartheta b_2, \\ z-z_0 = u\,c_1 + \vartheta c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u\,a_1 + \vartheta a_2 + x_0, \\ y = u\,b_1 + \vartheta b_2 + y_0, \\ z = u\,c_1 + \vartheta c_2 + z_0. \end{cases} \tag{5}$$

Fazoda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan, $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, ulardan o‘tuvchi P tekislik tenglamasini tuzaylik. Fazoning $M(x,y,z)$ nuqtasi P tekislikka tegishli bo‘lishi $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlarlarning komplanar bo‘lishiga teng kuchlidir. Bu vektorlarning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishini koordinatalar orqali yozsak

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

tenglamani hosil qilamiz (2-rasm) **Bu tenglamaga berilgan 3ta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi deyiladi.**



2-rasm.

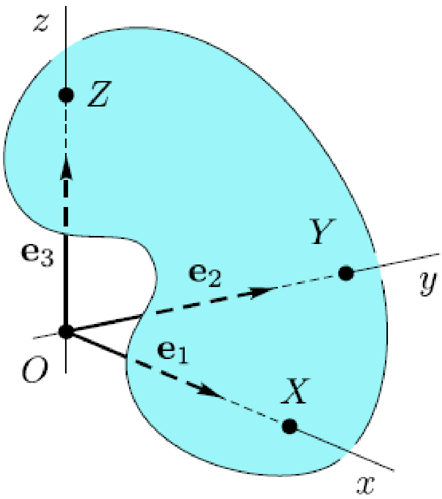
Agar tekislik koordinatalar boshidan o‘tmasa, u Ox, Oy, Oz o‘qlarni uchta $M_1(a,\ 0,\ 0)$, $M_2(0,\ b,\ 0)$, $M_3(0,\ 0,\ c)$ nuqtada kesadi, bu erda a, b, c tekislikning shu o‘qlardan ajratgan kesmalaridir. Bunga (6) ko‘rinishli tenglamani tatbiq qilamiz:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

bundan

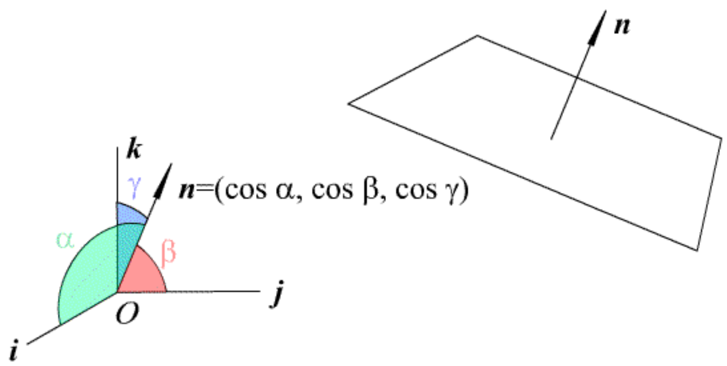
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{z} = 1 \qquad (7)$$

bu **tenglamaga tekislikning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi** deb ataladi (3-rasm).



3-rasm.

Tekislikning normal tenglamasi. Berilgan P tekislikka O koordinata boshidan o‘tkazilgan perpendikularning asosini N deb belgilaymiz. Bu perpendikular uzunligi $\left|\overrightarrow{ON}\right| = p$ (ya’ni koordinata boshidan P tekislikkacha bo‘lgan masofa) va uning OX, OY, OZ koordinata o‘qlari bilan mos ravishda hosil etgan α, β, γ burchaklar ma’lum deb olamiz. Tekislikning ON perpendikularda joylashgan va O nuqtadan N nuqtaga qarab yo‘nalgan normal birlik vektorini $\vec{n}$ deb belgilaymiz. Bunda uning koordinatalari $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ bo‘ladi (4-rasm).

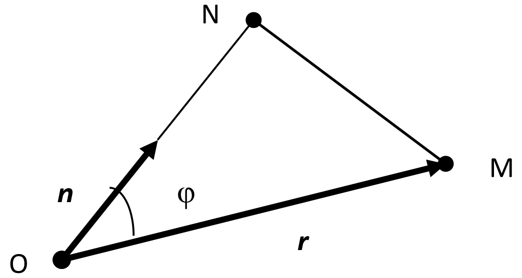


4-rasm.

P tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani olsak, uning radius vektori $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$ bo‘ladi. Endi $\vec{n} \cdot \vec{r}$ skalyar ko‘paytmani ikki usulda hisoblaymiz. Agar bu vektorlar orasidagi burchakni φ deb olsak, unda skalyar ko‘paytmaning ta’rifiga asosan (5-rasm)

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|\cdot\cos\varphi=1\cdot|\vec{r}|\cdot\cos\varphi=|\vec{r}|\cdot\left(\frac{\left|\overrightarrow{ON}\right|}{|\vec{r}|}\right)=\left|\overrightarrow{ON}\right|=p$$

tenglikka ega bo‘lamiz.



5-rasm

Ikkinchi tomondan, skalyar ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasiga asosan,

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

tenglikni hosil etamiz. Bu yerdan ko‘rinadiki P tekislikdagi har bir $M(x,y,z)$ nuqtaning koordinatalari

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \quad\Rightarrow\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (8)$$

tenglamani qanoatlantiradi va aksincha, (8) tenglamani qanoatlantiruvchi har bir $M(x,y,z)$ nuqta P tekislikka tegishli bo‘ladi.

(8) tenglama **tekislikning normal tenglamasi** deyiladi.

Endi (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan tekislikning normal tenglamasini topish masalasini ko‘ramiz. Buning uchun dastlab quyidagi lemmani isbotlaymiz.

1-lemma. *Agar ikkita* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *va* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *tenglamalar bitta* P *tekislikni ifodalasa, unda ularning mos koeffitsiyentlari va ozod hadlari proporsional bo‘ladi , ya’ni*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

△ **Isbot:** Bu tenglamalardan $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlarni hosil etamiz. Ularning ikkalasi ham P tekislikka perpendikular va shu sababli kollinear vektorlar bo‘ladilar. Unda, vektorlarning kollinearlik shartiga asosan,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \mu$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bunda μ proporsionallik koeffitsiyentini ifodalaydi. Bu holda

$$A_1 = \mu A_2, \quad B_1 = \mu B_2, \quad C_1 = \mu C_2$$

bo‘lgani uchun, yuqoridagi tenglamalardan ikkinchisini μ soniga ko‘paytirib va birinchisidan hadma-had ayirib

$$D_1 - \mu D_2 = 0 \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = \mu$$

ekanligini ko‘ramiz. Bu nisbatni yuqoridagi nisbatlar bilan solishtirib, lemmadagi tasdiqni to‘g‘riligiga ishonch hosil etamiz.

Bu lemmaga asosan *P* tekislikning (1) umumiy va (8) normal tenglamalaridan

$$A = \mu\cos\alpha, \quad B = \mu\cos\beta, \quad C = \mu\cos\gamma, \quad D = -\mu \cdot p$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Bunda yo‘naltiruvchi kosinuslar xossasidan foydalanib, μ proporsionallik koeffitsiyentini topamiz:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \mu^2\cos^2\alpha + \mu^2\cos^2\beta + \mu^2\cos^2\gamma =$$
$$= \mu^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \mu^2 \cdot 1 = \mu^2 .$$

Bu yerdan

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad p = \mp\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

ekanligini topamiz. Bunda μ normallashtiruvchi ko‘paytuvchi deb ataladi va uning ishorasi $p = \left(\frac{-D}{\mu}\right) \geq 0$ shartdan aniqlanib, D ozod had ishorasiga qarama-qarshi qilib olinadi.

Shunday qilib tekislikning (1) umumiy tenglamasidan (8) normal tenglamasiga o‘tish uchun uni

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

soniga ko‘paytirish kerak.