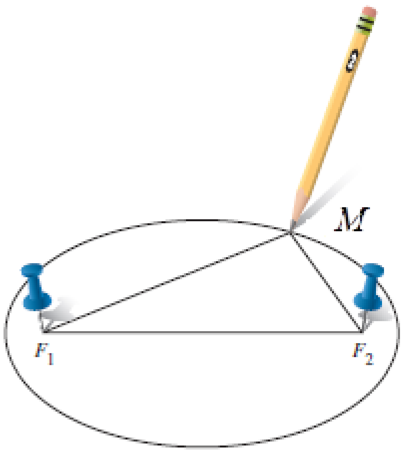
Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar. Ellips va uning kanonik tenglamasi.

1-ta'rif. *Tekislikda koordinatalari*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli chiziq deyiladi.

2-ta'rif. *Tekislikda har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikkita* F_1, F_2 *nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas* $2a\,(a>0)$ *ga teng bo'lgan barcha nuqtalar to'plami ellips deb ataladi (1-rasm).*



1-rasm.

Fokuslar orasidagi masofani $2c\,(c>0)$ bilan belgilaylik, ya'ni $a>c$.

1. Ellipsning ta'rifi, kanonik tenglamasi.

Tekislikda biror Dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ koeffitsientlar haqiqiy sonlar bo'lib, a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi lozim. Bu shartni $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ ko'rinishida yozish mumkin.

Ellipsdagi ixtiyoriy M nuqtaning F_1 va F_2 fokuslargacha masofalari uning **fokal radiuslari** deyiladi va mos ravishda r_1, r_2 bilan belgilanadi.

Ellipsning ta'rifiga ko'ra r_1, r_2 fokal radiuslarning yig'indisi o'zgarmas bo'lib, $2a$ teng, ya'ni

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (3)$$

(3) tenglik ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta uchun o‘rinli bo‘lib, uni koordinatalarda ifodalaylik.

Dekart koordinatalar sistemasini tenglamaning sodda bo‘lishiga imkon beradigan qilib tanlaymiz: abstsissalar o‘qini fokuslar orqali F_2 dan F_1 ga yo‘naltirib o‘tkazamiz. Ordinatalar o‘qini esa F_1F_2 kesmaning o‘rtasidan shu kesmaga perpendikulyar qilib o‘tkazamiz. Tanlangan bu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ koordinatalar sistemasida F_1 va F_2 nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(c, 0)$ va $(-c, 0)$ bo‘ladi.

Ellipsdagi ixtiyoriy M nuqtaning koordinatalarini x, y bilan belgilasak, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (4)$$

r_1, r_2 larning (4) munosabatlardagi qiymatlarini (3) tenglikka qo‘yib, ushbu tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (5)$$

(5) tenglama tanlangan sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasidir, chunki $M(x, y)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani faqat M nuqta ellipsga tegishli bo‘lgan holdagina qanoatlantiradi. (5) tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiramiz.

(5) tenglamaning birinchi hadini o‘ng tomonga o‘tkazib, hosil bo‘lgan tenglamaning ikkala tomonini kvadratga oshirsak.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Bundan

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

yoki

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Hosil qilingan tenglamaning ikkala tomonini yana kvadratga oshiramiz:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

bundan

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right). \tag{6}$$

$a>c \Rightarrow a^2>c^2,$ demak, $a^2-c^2>0,$ bu musbat soni b^2 deb olaylik:

$$b^2=a^2-c^2, \tag{7}$$

u holda (6) tenglik quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \tag{8}$$

(8) ni a^2b^2 ga bo‘lib, ushbu tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

Endi (9) tenglama haqiqatan ham ellipsni ifodalashini isbot qilamiz, chunki ellips tenglamasi (5) ko‘rinishda olingan edi. (9) tenglama (5) tenglamani ikki marta radikallardan qutqarish bilan hosil qilindi. Demak, (9) tenglama (5) tenglamaning natijasi, boshqacha aytganda, koordinatalari (5) ni qanoatlantiradigan har bir nuqta (9) tenglamani ham qanoatlantiradi. Lekin (5) tenglama (9) tenglamaning natijasi ekani ravshan emas. (5) tenglama (9) tenglamaning natijasi ekanini ko‘rsatamiz.

$M_1(x_1,\ y_1)$ (9) tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin, ya’ni

$$\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1. \tag{10}$$

M_1 nuqta uchun $r_1+r_2=2a$ tenglikning bajarilishini ko‘rsatamiz.

M_1 nuqtaning fokal radiuslari,

$$r_1=\sqrt{\left(x_1-c\right)^2+y_1^{\ 2}}, \tag{11}$$

$$r_2=\sqrt{\left(x_1+c\right)^2+y_1^{\ 2}}. \tag{12}$$

(10) tenglikdan $y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$, bu qiymatni (11) va (12) tengliklarga qo‘yib,

$$r_1=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1^2-2cx_1+(b^2+c^2)}.$$

$$r_2=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1^2+2cx_1+(b^2+c^2)}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. (7) munosabatdan $c^2=a^2-b^2$ va $a^2=b^2+c^2,$ shuning uchun yuqoridagi tengliklar ushbu ko‘rinishni oladi:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1 - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x_1 - a\right| = \left|a - \frac{c}{a}x_1\right|,$$
$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1 + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x_1 + a\right| = \left|a + \frac{c}{a}x_1\right|. \qquad (13)$$

(10) tenglikdan $\Rightarrow |x_1| \le a.$ U holda $0 < \frac{c}{a} < 1,$ bo‘lganligi uchun $\frac{c}{a}|x_1| < a,$ shuning uchun $a - \frac{c}{a}x_1 > 0$ va $a + \frac{c}{a}x_1 > 0.$ Bularni e’tiborga olsak, (13) tengliklar ushbu ko‘rinishni oladi:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1; \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x_1. \qquad (14)$$

(14) tengliklarni hadlab qo‘shsak,

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ga ega bo‘lamiz. Demak, koordinatalari (9) tenglamani qanoatlantiradigan har qanday $M_1(x_1,\ y_1)$ nuqta ellipsga tegishli.

(9) tenglama ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi.

(14) tengliklardan ushbu **xulosa** kelib chiqadi: ellipsning ixtiyoriy $M(x,\ y)$ nuqtasining $r_1,\ r_2$ fokal radiuslari bu nuqtaning abstsissasi orqali

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x \text{ va } r_2 = a + \frac{c}{a}x \qquad (15)$$

ko‘rinishda chiziqli ifodalanadi.

Agar xususiy holda $a = b$ bo‘lsa, ellipsning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida va radiusi a ga teng aylanani ifodalaydi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi. $a = b$ bo‘lganda $b^2 = a^2 - c^2$ dan $c = 0$. $c \ne 0$ bo‘lganda $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a > b.$

Ellips shakli. Ellipsning (9) kanonik tenglamasi bo‘yicha shaklini o‘rganamiz.

1. (9) tenglamadan ko‘rinadiki, ellips ikkinchi tartibli chiziq.

2. Ellips chegaralangan chiziq. (9) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, uning chap tomonidagi ifoda doimo musbat bo‘lib, har bir had quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak: $\frac{x^2}{a^2} \le 1,\ \frac{y^2}{b^2} \le 1.$ Bundan $|x| \le a,\quad |y| \le b.$

Demak, (9) tenglama bilan aniqlangan ellipsning barcha nuqtalari tomonlari $2a,\ 2b$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak ichiga joylashgan.

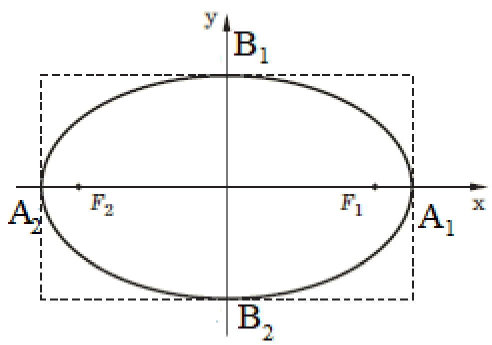
3. (9) tenglama bilan aniqlangan ellips koordinatalar o‘qlariga nisbatan simmetrikdir. Koordinata o‘qlari ellipsning simmetriya o‘qlaridir. Simmetriya o‘qlarining kesishgan nuqtasi $O(0,\ 0)$ ellipsning markazi deyiladi, fokuslar yotgan o‘qi uning fokal o‘qi deyiladi.

4. Ellipsning koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Masalan, Ox o‘q bilan kesishgan nuqtalarini topish uchun ushbu tenglamalarni birgalikda yechamiz:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \tag{16}$$

(16) sistemaning ikkinchi tenglamasidan $y = 0$ ni birinchi tenglamasiga qo‘ysak, $x = \pm a$ hosil bo‘ladi. Shunday qilib, ellips Ox o‘qini $A_1(a,\ 0)$ va $A_2(-a,\ 0)$ nuqtalarda kesadi. Shu singari ellipsning Oy o‘q bilan kesishgan $B_1(0,\ b)$ va $B_2(0,\ -b)$ nuqtalari topiladi. Ellipsning koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini uning uchlari deyiladi. Ellipsning to‘rtta uchi bor, ular (2-rasm):

$A_1(a,0), A_2(-a,0), B_1(0,b), B_2(0,-b)$.



2-rasm.

A_1A_2 kesma ellipsning katta o‘qi, OA_1 kesma esa ellipsning katta yarim o‘qi deyiladi. B_1B_2 kesma ellipsning kichik o‘qi, OB_1 kesma esa ellipsning kichik yarim o‘qi deyiladi.

5. Endi (9) tenglamani y ga nisbatan yechaylik:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,. \tag{17}$$

Ellips koordinata o‘qlarining har biriga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun uning birinchi koordinata choragida yotgan qisminigina tekshirish yetarli. Birinchi chorakdagi nuqtalar uchun $x \geq 0,\ y \geq 0$ bo‘lib, ellipsning bu chorakdagi qismi uchun

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,. \tag{18}$$

Bundan (18) funksiyaning monoton kamayuvchi ekanligi va $a^2 - x^2 \geq 0$ bo‘lishi, ya’ni $a^2 \geq x^2$ yoki $|x| \leq a$ bo‘lishi bevosita ko‘rinadi. Demak, faqat birinchi chorakda ish ko‘rayotganimiz uchun $x \leq a$.

Ellipsning ekstsentrisiteti.

3-ta’rif. *Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning katta o‘qining uzunligiga nisbati ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi va e harfi bilan belgilanadi.*

Ta’rifga ko‘ra $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ hamda $c < a \Rightarrow 0 < e < 1.$

Ellipsning ekstsentrisiteti uning shaklini aniqlashda muhim ro‘l o‘ynaydi. Haqiqatan ham, (7) dan $c^2 = a^2 - b^2,$ shuning uchun

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

bundan

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Ekstsentrisitet $e \to 1$ da (lekin $e < 1$) $\frac{b}{a} \to 0$ bo‘lib (bu yerda a o‘zgarmaydi deb faraz qilinadi), b kichiklashadi va ellips Ox o‘qqa qisila boradi, aksincha $e \to 0$ bo‘lsa, $\frac{b}{a} \to 1 \Rightarrow b \to a.$ Bu holda ellips aylanaga yaqinlasha boradi.

Ellipsning fokal radiuslari. (9) ellipsdagi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning fokal radiuslari (14) formulalar orqali ifodalanar edi. $\frac{c}{a}=e$ ekanini e'tiborga olsak, bu formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$r_1 = a - e\,x; \quad r_2 = a + e\,x. \tag{19}$$

Ellipsning parametrik tenglamasi.

$$x = a\cos\varphi,\ \ y = b\sin\varphi \ \text{ yoki } \frac{x}{a} = \cos\varphi,\ \frac{y}{b} = \sin\varphi,$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{20}$$

(20) ifoda ellipsning parametrik tenglamalari deyiladi.

Ellipsning direktrisalari.

4-ta'rif: *Ellipsning direktrisalari deb, uning katta o'qiga perpendikular bo'lgan va markazdan* $\frac{a}{e}$ *masofadan o'tuvchi ikkita parallel to'g'ri chiziqlarga aytiladi.*

Bu ta'rifga muvofiq, ellipsning direktrisalarining tenglamasi

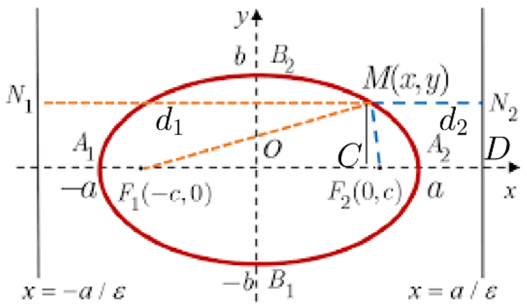
$$x = +\frac{a}{e} \ \text{ va } \ x = -\frac{a}{e}$$

bo'ladi. Ellipsda $e<1$ bo'lgani sababli $\frac{a}{e} > a$. Demak, direktrisalar ellipsning A_1 va A_2 uchlaridan tashqarida joylashgan.

$x = \pm\frac{a}{e}$ to'g'ri chiziqlar ushbu xossaga ega.

1-xossa. *Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha masofalarni mos direktrisalarigacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas miqdor bo'lib,* e *ga teng.*

$\triangle$ **Isbot.** Haqiqatan ham, $\frac{r_1}{d_1} = e$ yoki $\frac{r_2}{d_2} = e$ ekanini ko'rsatish kerak. 3-rasmdan $d_1 = |MN_1|$, $d_2 = |MN_2|$ sonlar M nuqtadan direktrisalargacha bo'lgan masofalar bo‘lib, r_1, r_2 fokal radiuslaridir. r_1, r_2 fokal radiuslarni (15) ko‘rinishida olamiz. M nuqtadan $x=-\frac{a}{e}$ direktrisaga masofa: $d_1=\left|\frac{a}{e}+x\right|=\frac{a+ex}{e}$.



3-rasm.

Demak,

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+ex}{\frac{a}{e}+x}=\frac{e(a+ex)}{a+ex}=e$$

shunga o‘xshash,

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-ex}{\frac{a}{e}-x}=\frac{e(a-ex)}{a-ex}=e.$$

Isbot tugadi.▲

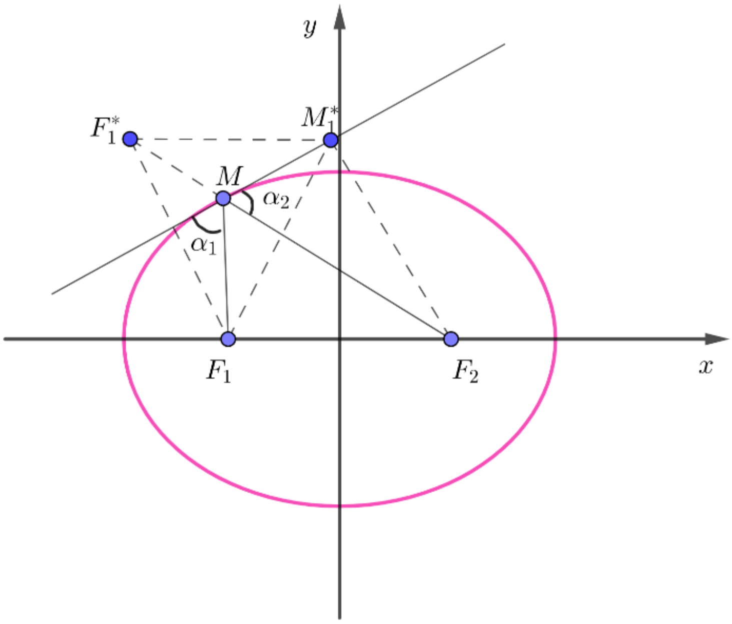
Biz ellipsning quyidagi optik xossasini isbotlaymiz.

1-teorema. *Ellipsning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so‘ng ikkinchi fokusga tushadi.*

△ **Isbot.** Ellipsning chap F_1 fokusidan chiquvchi nur uning M nuqtasida sinib F_2 fokusga tushishini ko‘rsatish uchun MF_1 va MF_2 to‘g‘ri chiziqlarning M nuqtadan o‘tuvchi urinma bilan teng burchaklar hosil qilishini ko‘rsatishimiz kerak. Biz ellipsning M nuqtasidan o‘tuvchi urinmasini ℓ bilan, ℓ to‘g‘ri chiziqga nisbatan F_1 nuqtaga simmetrik bo‘lgan nuqtani F_1^* bilan belgilaymiz. Agar $\alpha_1\neq\alpha_2$ bo‘lsa, $F_1^*F_2$ to‘g‘ri chiziqning urinma bilan kesishish nuqtasi M urinish nuqtasi bilan ustma –ust tushmaydi. Shuning uchun

$$\left|F_1M^*\right|+\left|F_2M^*\right|=\left|F_1^*F_2\right|<\left|F_1M\right|+\left|F_2M\right|=2a$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda a – ellipsning katta yarim o‘qi.

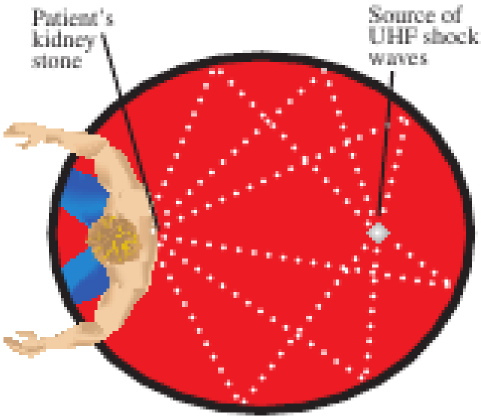


4-rasm.

Biz M^* nuqtani urinma bo‘ylab M nuqtadan uzoqlashtira boshlaymiz. Bunda $|F_1M^*|+|F_2M^*|$ yig‘indi o‘sa boshlaydi. Boshlang‘ich holatda bu yig‘indini qiymati, yuqoridagi tengsizlikka ko‘ra $2a$ dan kichik bo‘lganligi uchun, yig‘indi o‘sish natijasida qandaydir N nuqtada $2a$ ga teng bo‘ladi. Bu nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofalarning yig‘indisi $2a$ ga teng bo‘lganligi uchun, u ellipsga tegishli nuqta boladi.

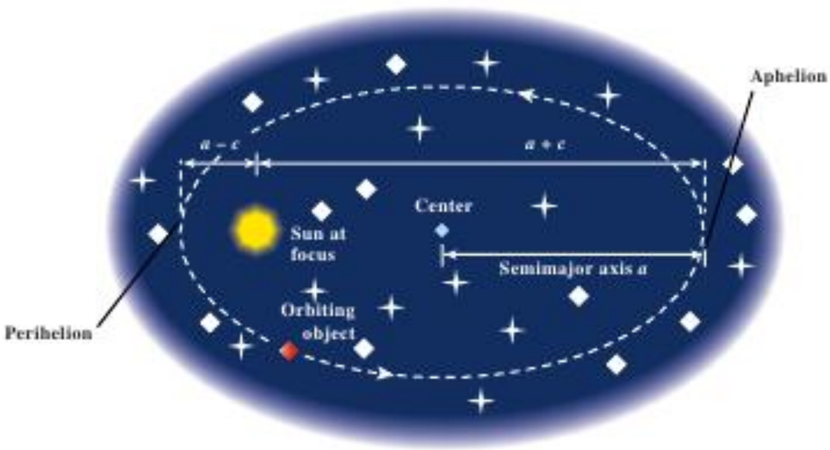
Bundan esa ℓ urinma ellipsni ikkita nuqtada kesishi kelib chiqadi. Ellipsning har bir urinmasi uni faqat bitta nuqtada kesib o‘tganligi uchun biz ziddiyat hosil qildik. Demak $\alpha_1 = \alpha_2$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Teorema isbotlandi. ▲

Xuddi shunday hodisa, tovush aks etganda ham sodir bo‘ladi. Elliptik galereyaning fokuslarida turgan ikki kishi, galereyaga tashrif buyurganlarga eshittirmagan xolda, bir-birlari bilan gaplashishlari mumkin (5-rasm).



5-rasm.

Keplerning 1609 yilda nashr etilgan sayyoralar harakati haqidagi birinchi qonunida aytilishicha, sayyora orbitasi ellips bo‘lib, fokuslardan birida Quyosh joylashgan. Asteroidlar, kometalar va boshqalar quyosh atrofida aylanadigan jismlar elliptik yo‘llardan boradi. Bunday holda Quyoshga eng yaqin orbita nuqtasi perigeliy, eng uzoq nuqtasi esa afeliydir (6-rasm).



6-rasm.

Belorussiyada oval qanotli samolyot ishlab chiqilgan. Bunday qanotli samolyotlar yanada tezroq, yon shamolga nisbatan ancha chidamli va tejamkor bo‘ladi (7-rasm).

7-rasm.