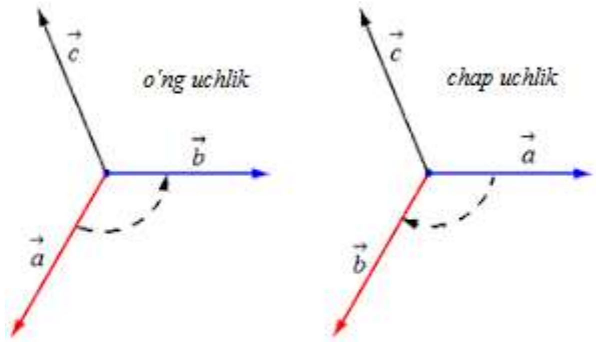
Chap va o‘ng sistemalar. Vektorlarning vektor ko‘paytmasi va aralash ko‘paytmasi.

1-Ta’rif. *Tartiblangan* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *uchlikda* $\vec{c}$ *vektor oxiridan* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlar tekisligiga qaraganimizda* $\vec{a}$ *dan* $\vec{b}$ *ga qisqa burilish yo‘nalishi soat mili yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, bu uchlik o‘ng uchlik deb ataladi. Agar bu yo‘nalish soat mili yo‘nalishi bilan ustma-ust tushsa,* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *uchlik chap uchlik deyiladi (1-rasm).*



1-rasm.

O‘ng (chap) uchlik o‘ng (chap) qo‘l qoidasiga mos keladi.

2-Ta’rif. *Ikkita* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb shunday* $\vec{p}$ *vektorga aytiladiki,*

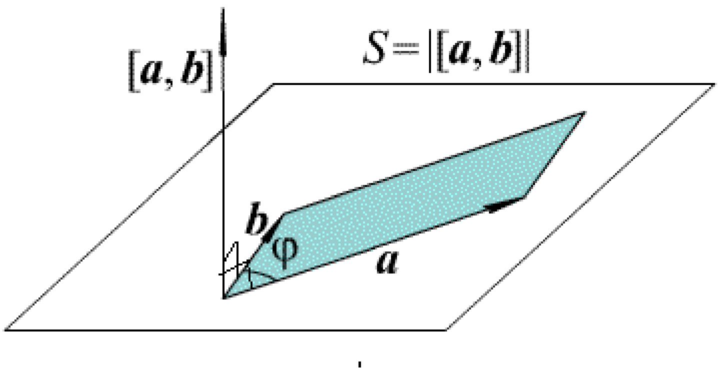
1) uning uzunligi $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng:*

$$\vec{p} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,\ \varphi = (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b});$$

$\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarning Vektor ko‘paytma* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *ko‘rinishda tasvirlanadi*

2) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{p}$ *vektor* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarga perpendikulyar:* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *vektorlar o‘ng uchlik hosil qiladi (2-rasm).*



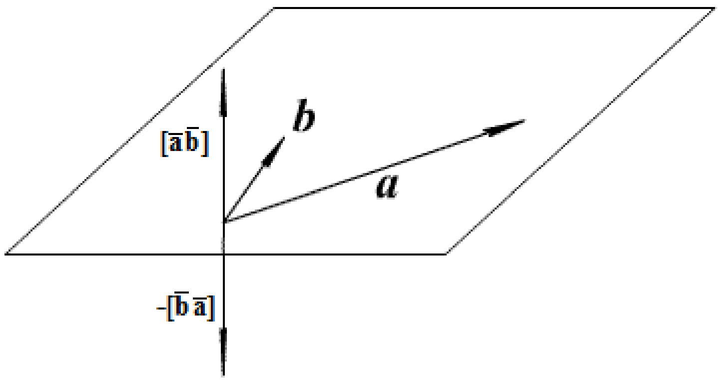
2-rasm.

Vektor ko‘paytmaning xossalari. Vektor ko‘paytma bir qator xossalarga ega bo‘lib, biz shu xossalar bilan batafsil tanishib chiqamiz.

1) Agar Ko‘paytirilayotgan vektorlardan kamida bittasi nol vektor yoki $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo‘lsa, u holda $[\vec{a}\vec{b}]=0$.

△ **Isbot.** Xaqiqatan ham, $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo‘lsa, $(\vec{a}\wedge\vec{b})=0$ yoki 180° bo‘lib, birinchi shartga asosan $[\vec{a}\vec{b}]=0$ bo‘ladi, moduli nolga teng vektor esa albatta nol vektordir.▲

2) $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$ ya’ni vektor ko‘paytma antikommutativdir (3-rasm).



3-rasm.

△ **Isbot.** Xaqiqatan, vektor ko‘paytma ta’rifining 1 va 2-shartlariga asosan $[\vec{a}\vec{b}]$ va $[\vec{b}\vec{a}]$ vektorlarning uzunliklari teng va ikkalasi ham bitta tekislikka perpendikular, yo‘nalishlari esa uchunchi shartga asosan $[\vec{a}\vec{b}]$ vektor uchidan qaralganda $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo‘l bilan burilish soat mili harakatiga teskari bo‘lsa $\vec{b}$ dan $\vec{a}$ vektor tomonga qarab qisqa yo‘l bilan burilish esa soat mili harakati bo‘yicha bo‘lib qoladi, demak, yo‘nalish avvalgiga o‘xshash bo‘lishi uchun $[\vec{b}\vec{a}]$ vektor $[\vec{a}\vec{b}]$ ga nisbatan qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lishi kerak. ▲

3) $[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$, ya’ni vektor ko‘paytma qo‘shish amaliga nisbatan taqsimot qonuniga bo‘ysunadi.

$\triangle$ **Isbot.** Bu xossani isbot qilish uchun vektor ko‘paytmani topishning boshqacharoq usulini ko‘rsatamiz. (4-rasm).

O‘zaro kollinear bo‘lmagan $\vec{m}$ va $\vec{n}$ vektorlarni olaylik. Bu vektorlarning boshlarini bir O nuqtaga keltirib, O nuqtadan $\vec{m}$ vektorga perpendikular bo‘lgan Π tekislikni o‘tkazib, $\vec{n}$ vektorning Π tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi $\vec{n_1}$ni hosil qilamiz, so‘ngra $\vec{n_1}$ ni O nuqta atrofida 90° ga shunday buramizki, $\vec{m}$ ning uchidan qaraganimizda burishning yo‘nalishi soat milining harakati bilan bir xil bo‘lsin, natijada $\vec{n_2}$ vektor hosil bo‘ladi, u holda

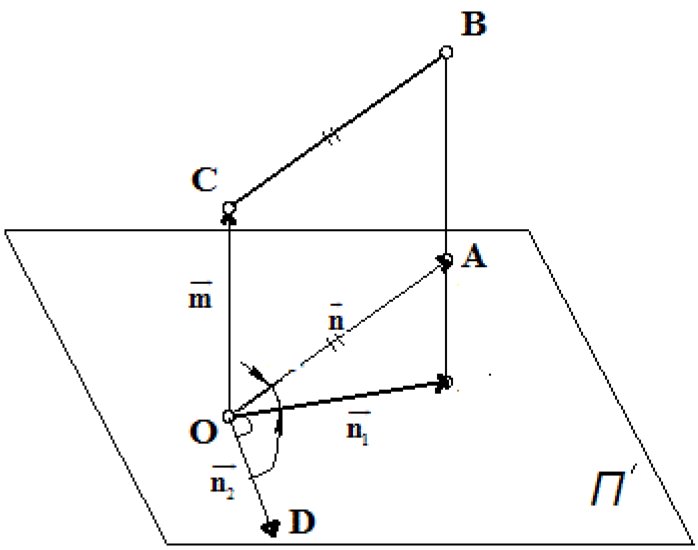
$$[\vec{m},\vec{n}]=|\vec{m}|\;\vec{n}_2, \qquad (1)$$

chunki:

1) $\left||\vec{m}|\,\vec{n}_2\right|=|\vec{m}|\,|\vec{n}_2|=|\vec{m}|\,|\vec{n}_1|$, bu esa $\vec{m}$, $\vec{n}$ ga qurilgan parallelogrammning yuzini aniqlaydi;

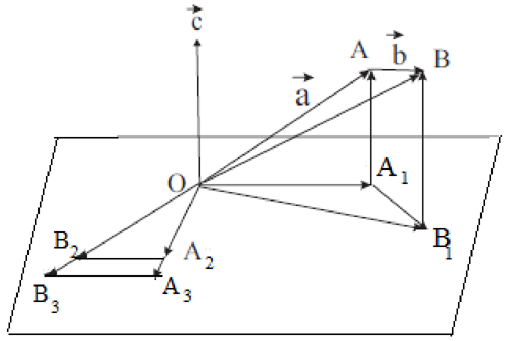
2) $(|\vec{m}|\,\vec{n}_2)\perp\vec{n},\ (|\vec{m}|\,\vec{n}_2)\perp\vec{m};$

3) $\vec{m},\vec{n}$ va $|\vec{m}|\,\vec{n}_2$ vektorlar uchligi o‘ng uchlikni hosil qiladi.



4-rasm.

Endi 3-xossani isbotlashga o‘taylik. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. $\vec{c}$ ning boshini O deb belgilab, shu nuqtadan $\vec{c}$ ga perpendikulyar Π tekislikni o‘tkazaylik, $\bar{a}$ ning boshini ham O nuqtaga keltirib $\vec{a}+\vec{b}=\overline{OB}$ ni (5-chizma) yasab va ΔOAB ni Π tekislikka ortogonal proyeksiyalab, ΔOA_1B_1 ni hosil qilaylik.



5-rasm.

ΔOA_1B_1 ni Π da O nuqta atrofida 90^0 ga shunday buraylikki, bu burish yo‘nalishi $\vec{c}$ vektorning uchidan qaralganda soat mili harakati bo‘yicha bo‘lsin, natijada ΔOA_2B_2 hosil bo‘ladi. Shu uchburchakning har bir tomonini $|\vec{c}|$ ga ko‘paytirib, ΔOA_2B_2 ga o‘xshash ΔOA_3B_3 ni hosil qilamiz. Yuqorida isbot qilingan (1) ga asosan:

$$\overrightarrow{OA_3}=|\vec{c}|\overrightarrow{OA_2}=[\vec{a},\vec{c}],$$

$$\overrightarrow{A_3B_3}=|\vec{c}|\,\overrightarrow{A_2B_2}=\left[\vec{b},\vec{c}\right],\ \overrightarrow{OB_3}=|\vec{c}|\,\overrightarrow{OB_2}=[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]. \qquad (2)$$

Bundan tashqari, bu chizmadan

$$\overrightarrow{OB_3}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3B_3}.$$

Bundagi vektorlar o‘rniga (2) dagi ifodalarni qo‘ysak,

$$[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$$

ga ega bo‘lamiz. Isbot tugadi.

1-natija. $[\vec{c},(\vec{a}+\vec{b})]=[\vec{c},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{b}].$

Buni ko‘rsatish uchun isbot qilingan 3^0-xossaga 2^0-xossani tadbiq qilish kifoyadir.

4) $\forall\lambda\in R$ uchun $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$, ya’ni vektor ko‘paytma skalyar ko‘paytuvchiga nisbatan guruhlash qonuniga bo‘ysunadi.

△ **Isboti.** Isbotlash uchun ikkita holni ko‘ramiz $\lambda>0$ va $\lambda<0$.

Birinchi $\lambda>0$ holda, $\vec{a}$ va $\lambda\vec{a}$ vektorlar bir xil yo‘nalishga ega va shuning uchun $\vec{a},\vec{b},\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]$ va $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektorlar bir xil uchlikka ega. Demak $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]$ va $\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektorlar uzunliklari teng va bir xil yo‘nalishga ega.

Ikkinchi $\lambda<0$ holda $\vec{a}$ va $\lambda\vec{a}$ vektorlar yo‘nalishlari qarama qarshi va $\vec{a},\vec{b},\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]$ va $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektorlar uchliklari har xil uchlikga ega bo‘ladi. Bundan esa $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]$ va $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektorlar qarama qarshi yo‘nalishga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]$ va $\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektorlar bir xil yo‘nalishga ega va uzunliklari tengdir.▲

Eslatma. 3^0-xossa ikki qo‘shiluvchi vektor uchungina emas, balki istalgan sondagi qo‘shiluvchilar uchun ham o‘rinlidir, bundan tashqari, vektor ko‘paytmaning har bir vektori bir nechta vektorning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, ularni algebradagi ko‘phadni ko‘phadga ko‘paytirish qoidasi bo‘yicha ochish mumkin, bunda faqat vektorlar tartibining saqlanishiga e’tibor berish kerak.

Endi Dekart sistemasidagi bazis vektorlarning vektor ko‘paytmasini topaylik.

Vektor ko‘paytmani ta’rifiga asosan,

$$[\vec{i},\vec{i}]=\vec{0},\ [\vec{j},\vec{j}]=\vec{0},\ [\vec{k},\vec{k}]=\vec{0}.$$

$\left|[\vec{i},\vec{j}]\right|=\left|\vec{i}\right|\left|\vec{j}\right|\sin 90^0=1\cdot1\cdot1=1$ hamda $\vec{i}\perp\vec{k},\ \vec{j}\perp\vec{k}$ ekanini e’tiborga olsak, $[\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}$. Shunga o‘xshash $[\vec{k},\vec{i}]=\vec{j},\ [\vec{j},\vec{k}]=\vec{i}$ ham o‘rinli. 2^0 ga asosan

$$[\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k},\ [\vec{k},\vec{j}]=-\vec{i},\ [\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j}.$$

Bularni quyidagi jadval ko‘rinishida yozish mumkin (1-jadval):

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\vec{0}$	$\bar{k}$	$-\vec{j}$
$\bar{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

1-jadval.

1-misol. $A(1,-1,2)$ $B(2,1,-1)$ $C(1,0,3)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchakning yuzini hisoblang.

Yechish. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ ning koordinatalarini hisoblaymiz. $\overrightarrow{AB}(1,2,-3)$, $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$ $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}]\ (5,-1,1)$

$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}] = \sqrt{5^2+(-1)^2+1} = \sqrt{27} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{27}$ kv. birlik.

2-misol. $\vec{m},\vec{n}$ birlik vektorlar bo‘lib, ular orasidagi burchak 30° ga teng. $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ vektorlarda berilgan parallelogrammning yuzini hisoblang.

Yechish.

$[\vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{m} - 2\vec{n}\ \ 2\vec{m} + 3\vec{n}] = [\vec{m}\ \ 2\vec{m}] + [-2\vec{n}\ \ 2\vec{m}] +$

$[\vec{m}\ \ 3\vec{n}] + [-2\vec{n}\ \ 3\vec{n}] = \vec{0} - 4[\vec{n}\ \ \vec{m}] + 3[\vec{m}\ \ \vec{n}] + 0 = 4[\vec{n}\ \ \vec{m}] +$

$+3[\vec{m}\ \ \vec{n}] = 7[\vec{n}\ \ \vec{m}];$

$[\vec{a}\,\vec{b}] = 7[\vec{n}\ \ \vec{m}] = 7|\vec{n}||\vec{m}|\sin 30^0 = 7\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ kv.birlik

3-misol. Ihtiyoriy $\vec{a}\ va\ \vec{b}$ vektorlar uchun ushbu ayniyatni isbotlang.

$$[\vec{a}\,\vec{b}]^2 + (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2$$

Isbot. $(\vec{a}\,\vec{b}) = \varphi$ desak, $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$ $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, bu ikki tenglikni kvadratga ko‘tarib, xadlab qo‘shsak

$$[\vec{a}\,\vec{b}]^2 + (\vec{a}\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \vec{a}^2\,\vec{b}^2\cdot 1 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2$$