# Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar. Vektorning moduli va yo‘naltiruvchi kosinuslari.

**1-Ta’rif:** *Biror V vektor fazoda {$e_1$, $e_2$, ..., $e_n$} bazis (asos) berilgan bo‘lsin. Agar* $\vec{a}$ *vektor ushbu bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi*

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n$$

*ko‘rinishida ifodalansa, u holda* $a_1, a_2, ..., a_n$ *sonlar* $\vec{a}$ *vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari deyiladi.*

***1-teorema***. *Har bir vektor berilgan bazisda o‘zining koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.*

△ **Isbot:** faraz qilaylik $\vec{a}$ vektor V vektor fazoda quyidagi ko‘rinishlarda ifodalansin:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + ... + b_n\vec{e}_n$$

U holda bu yoyilmalar uchun quyidagi munosabat o‘rinli boladi:

$$\vec{0} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + ... + (a_n - b_n)\vec{e}_n$$

Bazisni tashkil qiluvchi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lganligi uchun $a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, ..., a_n - b_n = 0$ munosabat hosil bo‘ladi.▲

Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalarda bo‘lgan $AB$ kesmani $\lambda \neq -1$ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari quyidagi munosabatlardan aniqlanadi:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

$AB$ kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqta koordinatalari kesma uchlariga tegishli koordinatalar yig‘indisining yarmiga teng.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

(1) va (2) formulalar affin koordinatalar sistemasida ham o‘rinlidir. $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi: $A, B$ nuqtalardan $Ox$ ,$Oy$ o‘qlarga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlarning $Ox$ o‘qi bilan kesishish nuqtalarini $A_1, B_1$ bilan, $Oy$ o‘qi bilan kesishish nuqtalarini $A_2, B_2$ orqali

belgilaymiz. $\overrightarrow{A_1B_2}$ vektorning $Ox$ o‘qdagi koordinatasi $x$ va $\overrightarrow{A_2B_2}$ vektorning $Oy$ o‘qdagi koordinatasi $y$ bilan birgalikda $\overrightarrow{AB}$ vektorning umumiy dekart $Oxy$ sistemasidagi koordinatalari deb ataladi.

Agar $(x_1, y_1) - A$ nuqtaning va $(x_2, y_2) - B$ nuqtaning koordinatalari bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1 \tag{3}$$

Agar $x, y$ - $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari bo‘lsa,

$\overrightarrow{AB} = \{x, y\}$ shaklida yoziladi.

$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4}$$

yoki

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{5}$$

bu yerda $X, Y$ sonlar $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari. Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ nuqtalardagi uchburchakning yuzi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida quyidagicha topiladi:

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

yoki

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Faraz qilaylik $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar mos ravishda $\vec{a}$ vektorning boshi va oxiri bo‘lsin. U holda $\vec{a}$ vektorning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

**2-Ta’rif:** *$\vec{a}$ vektorning uzunligiga teng bo‘lgan son uning MODULI deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Agar $\vec{a}$ vektor koordinata o‘qlari bilan mos ravishda $\alpha,\beta,\gamma$ burchaklar hosil qilsa, u holda $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ $\vec{a}$ vektorning **yo‘naltiruvchi kosinuslari** deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{Y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{|\vec{a}|} \qquad (8)$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

bu yerda: $X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1,\ Z=z_2-z_1$.

Masalan, $\cos\alpha$ uchun formula quyidagicha isbotlanadi:

$$x=pr_{\vec{e}_1}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha;\quad \cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Birlik vektorning koordinatalari uning yo‘naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya’ni agar $|\vec{a}_0|=1$ bo‘lsa, $\vec{a}_0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

(8) ga ko‘ra

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

formulani hosil qilish mumkin, ya’ni vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig‘indisi birga teng.

**Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.**

Bizga $V_3$ vektor $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ fazoda bazisda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalari $\vec{a}(x_1y_1z_1)=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$ va $\vec{b}(x_2y_2z_2)=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin.

***2-teorema**: Uch vektor chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning komplanar bo‘lishi zarur va yetarli.*

Mavzuga doir bir nechta xossalarni keltirib o‘tamiz:

1. *Tekislikda har qanday ikkita nokollinear vektorlar bazisni tashkil qiladi.*

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(\vec{a}\pm\vec{b})(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)\ \text{bo‘lsin.}$$

△ **Isbot:** $\vec{a}\pm\vec{b}=x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}+z_2\vec{e_3}+x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}+z_1\vec{e_3}=(x_1+x_2)\vec{e_1}+(y_1+y_2)\vec{e_2}+(z_1+z_2)\vec{e_3}=$
$=(\vec{a}+\vec{b})(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$▲

2. *Fazoda har qanday uchta nokomplanar vektorlar bazisni tashkil qiladi.*

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

△ **Isbot:** $\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) = \lambda x_1\vec{e}_1 + \lambda y_1\vec{e}_2 + \lambda z_1\vec{e}_3 = (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda y_1)\vec{e}_2 + (\lambda z_1)\vec{e}_3 =$
$= (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$