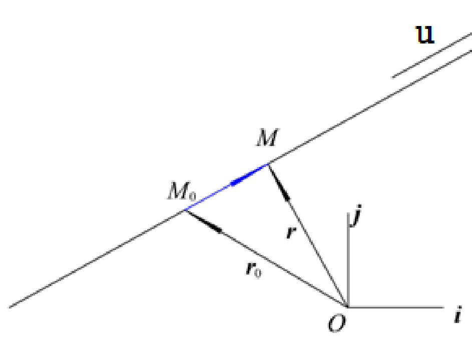
Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamalari.

Tekislikda Oxy Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va biror u to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqqa parallel har qanday vektor uning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi. Agar to‘g‘ri chiziqning bitta nuqtasi va yo‘naltiruvchi vektori berilgan bo‘lsa, uning tenglamasini tuzish masalasini qaraylik.



1-rasm.

Tekislikda u to‘g‘ri chiziqning vaziyati biror $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sistemaga nisbatan shu to‘g‘ri chiziqqa tegishli $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va yo‘naltiruvchi $\vec{u}(a_1, a_2)$ vektor bilan to‘la aniqlanadi (1-rasm). Bu ma’lumotlarga asoslanib, u to‘g‘ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. M orqali u to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini belgilaymiz. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ vektorni yo‘naltiruvchi vektor sifatida olish mumkin.

Demak, shunday t son topiladiki,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \tag{1}$$

bo‘ladi. Aksincha, biror M nuqta uchun (1) munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{u}$. Demak, (1) munosabat faqat u to‘g‘ri chiziqqa tegishli M nuqtalar uchungina bajariladi, M, M_0 nuqtalarning radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}, \vec{r}_0$ bilan belgilasak, ya’ni $\vec{r} = \overrightarrow{OM}, \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. (1) tenglikdan

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}. \tag{2}$$

Bu tenglama u to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi deb ataladi. t ga turli xil qiymatlar berib, u ga tegishli nuqtalarning radius-vektorlarini hosil qilamiz; (2) tenglamaga kirgan t o‘zgaruvchi parametr deb ataladi.

Endi (2) ni koordinatalarda yozaylik. M nuqtaning koordinatalarini x, y bilan, M_0 nuqtaning koordinatalarini x_0, y_0 bilan belgilasak, natijada ushbu tenglamalar hosil qilinadi:

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t. \tag{3}$$

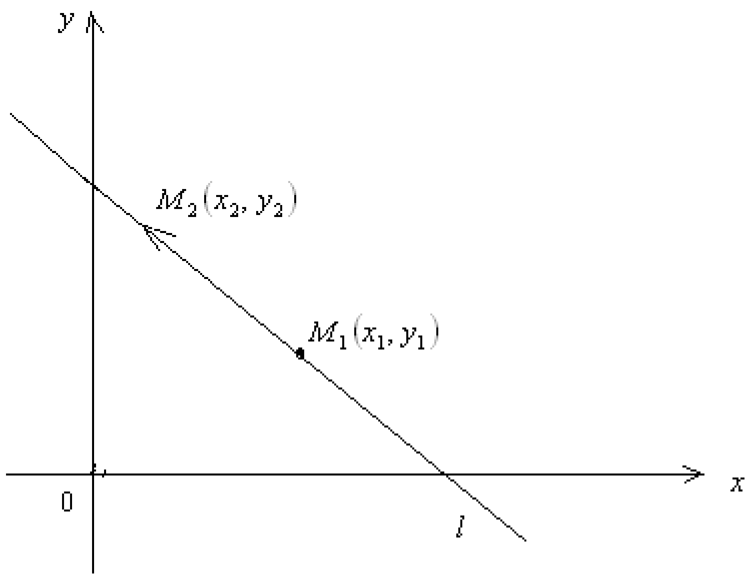
Bu tenglamalar **to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari** deb ataladi. (3) tenglamani quyidagicha yozsak:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \tag{4}$$

to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi hosil bo‘ladi, ya’ni (4) ga to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Har qanday to‘g‘ri chiziqning vaziyati uning ikkita har xil nuqtasi bilan to‘la aniqlanadi. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sistemada u to‘g‘ri chiziqning $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalari ma’lum bo‘lsin.



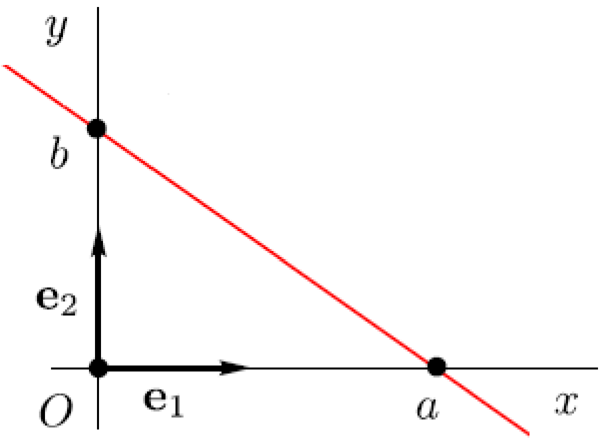
Shu to‘g‘ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaraylik. Qaralayotgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektorni qabul qilish mumkin, shuning uchun (4) ga asosan u to‘g‘ri chiziq ushbu

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{5}$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu berilgan ikki nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidir.

To‘g‘ri chiziqning kesmalari bo‘yicha tenglamasi.

u to‘g‘ri chiziq Ox o‘qni $A(a, 0)$ nuqtada, Oy o‘qni esa $B(0, b)$ nuqtada kessin va koordinatalar boshidan o‘tmasin, ya’ni $a \neq 0$, $b \neq 0$ bo‘lsin (2-rasm). Bu holda ikki nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi (5) quyidagi ko‘rinishni oladi:



2-rasm.

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6}$$

(6) da a, b sonlar to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalaridir. Shuni hisobga olib, (6)ga **to‘g‘ri chiziqning kesmalari** bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Avvalo to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. *$\vec{u}$ vektor $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisda $a_1,\ a_2$ koordinatalarga ega va $a_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda $\frac{a_2}{a_1} = k$ son $\vec{u}$ vektorning burchak koeffitsienti deyiladi.*

1-teorema. *Kollinear vektorlarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng.*

$\triangle$ **Isbot**. Haqiqatan, $\vec{u} \parallel \vec{\upsilon}$ vektorlar berilgan bo'lib, ular $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisga nisbatan $\vec{u}(a_1, a_2),\ \vec{\upsilon}(b_1, b_2)\ (a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0)$ koordinatalarga ega bo'lsin hamda k_1, k_2 mos ravishda bu vektorlarning burchak koeffitsientlari bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$k_1 = \frac{a_2}{a_1} \ \text{ va } \ k_2 = \frac{b_2}{b_1}.$$

$\vec{u} \parallel \vec{\upsilon}$ bo'lgani uchun shunday λ son mavjudki, $\vec{u} = \lambda \vec{\upsilon}$ yoki $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2 \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$ yoki $k_2 = k_1$. Isbot tugadi.▲

Xulosa. Bitta to'g'ri chiziqqa parallel barcha vektorlarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng. k son to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi.

Endi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chiqaraylik. Bitta nuqtasi va burchak koeffitsienti to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatini to'la aniqlaydi. Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar uchun burchak koeffitsient mavjud emas. Endi Oy o'qqa parallel bo'lmagan u to'g'ri chiziq $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tsin va k ga teng burchak koeffitsientga ega bo'lsin. u ning tenglamasini tuzamiz.

(4) ga asosan $a_1 \neq 0$ shartda $y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0)$, ammo $k = \frac{a_2}{a_1}$, demak,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{7}$$

yoki

$$y = kx + b,$$

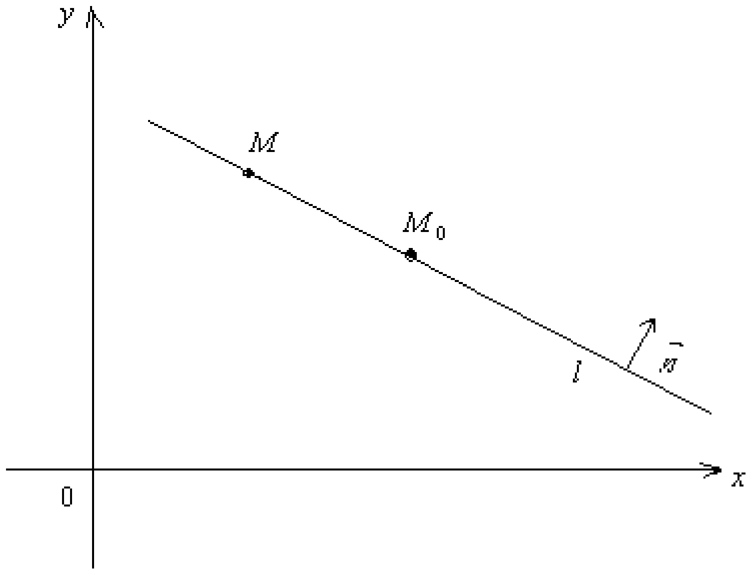
bunda

$$b = y_0 - kx_0. \tag{8}$$

(8) tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.

To’g’ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Biga biror *xoy* koordinatalar sistemasi va *l* to’g’ri chiziq berilgan bo’lsin. Bu shu *l* to’g’ri chiziqni keltirib chikaramiz. *l* to’g’ri chiziq $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va but ugri chiziqqa perpendikulyar bo’lgan $\vec{n}(a,b)$ vektor berilgan bo’lsin.



3-rasm

$M(x, y)$ to’g’ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqta bo’lsin. $\overrightarrow{M_0M}$ vektorni qaraylik. Bu vektorning koordinatalari $(x - x_0; y - y_0)$ bo’ladi. $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ $\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad ax - ax_0 + by - by_0 = 0$

$c = -ax_0 - by_0$ deb olamiz.

$$ax + by + c = 0 \qquad (9)$$

(9)-tenglamaga to’g’ri chiziqning *umumiy tenglamasi* deyiladi. $\vec{n}$ vektorga to’g’ri chiziqning normal vektori deyiladi. Demak, to’g’ri chiziqdagi bitta nuqta vash u to’g’ri chiziqning normal vektori to’g’ri chiziqni yagona aniqladi.

Misol: 1) Normal vektori $\vec{n}(3;2)$ bo’lgan va $M_0(-3;4)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamani tuzing.

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$3(x + 3) + 2(y - 4) = 0$

$3x + 9 + 2y - 8 = 0$

$3x + 2y + 1 = 0$

Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashishi.

Tenglamalari Dekart sistemada berilgan u_1, u_2 to‘g‘ri chiziqlarni olaylik:

$$u_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$u_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$\vec{u}_1(-B_1,\ A_1), \vec{u}_2(-B_2,\ A_2)$ vektorlar mos ravishda bu to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlaridir. $u_1,\ u_2$ to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvida quyidagi hollar yuz berishi mumkin.

1. $u_1,\ u_2$ to‘g‘ri chiziqlar kesishadi. U holda $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Bundan to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasini topish uchun berilgan tenglamalar sistemasini yechish kerak.

2. $u_1,\ u_2$ to‘g‘ri chiziqlar parallel $\Rightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Aksincha, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2,$ bu esa $u_1,\ u_2$ ning parallelligini anglatadi.

Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo‘lsa, $u_1,\ u_2$ to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi.