2

a) $F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} = k$$

$k = \sum \frac{x_i}{n}$

$x_0 \alpha = k\alpha - k$

$k\alpha - x_0\alpha = k$

$\alpha = \frac{k}{k - x_0}$

$$L(x, \alpha) = \sum_i \ln\left(\frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}}\right) \cdot \sum_i \left(\ln \frac{\alpha}{x_i^{\alpha+1}} + \alpha \ln x_0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{\alpha}{x_i^{\alpha+1}} + \alpha \cdot n \cdot \underline{\ln x_0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \alpha - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{\alpha+1} + \alpha \cdot n \cdot \ln x_0 =$$

$$= n \cdot \ln \alpha - \sum_{i=1}^{n} (\alpha+1) \ln x_i + \alpha n \cdot \ln x_0 =$$

$$= -(\alpha+1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \alpha n \ln x_0 + \underbrace{n \ln \alpha} =$$

$$= \alpha\left(n \ln x_0 - \sum \ln x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + n \ln \alpha$$

$$L' = n \cancel{\cdot} \ln x_0 - \sum \ln x_i \Big| + n \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$L' = n\ln x_0 - \sum \ln x_i + n\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\alpha = \frac{n}{\sum \ln x_i - n\ln x_0}$$

Наша задача — максимизировать функцию правдоподобия (L).

$\ln x_0 \uparrow$ при $x_0 \uparrow$ $\Rightarrow$ нам нужно взять максимально возможный x_0.

Т.к. $x_0 \leq x_i \ \forall i$ в выборке, мы возьмём $\min(x_i)$.