

Задача 5. Оценки

Код на R и графики в pdf с пометкой авторства присылать на e-мэйл: danila.milanov@gmail.com или показывать на занятии. Дедлайн — 27 января.

- 1 В таблице [table.htm](#) даны два распределения P_1 и P_2 случайных величин ξ_1 и ξ_2 , некоторые параметры которых неизвестны.

Используя выборку значений произведения $\xi_1\xi_2$ из [data.csv](#) с именем из столбца Data:

- оценить неизвестные параметры а) методом моментов б) методом максимального правдоподобия
- построить график функции правдоподобия
- построить гистограмму и график эмпирической функции распределения выборки. Поверх них построить графики плотности и функции распределения с оцененными параметрами.

- 2 Предполагая, что распределение диаметров астероидов главного пояса подчиняется степенному закону

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

оценить его параметры x_0 и α а) методом моментов б) методом максимального правдоподобия в) методом наименьших квадратов, аппроксимируя линейной функцией зависимость $\log(1 - F_n(x))$ от $\log(x)$, где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения (смотри функцию `lsfit`)

Построить гистограмму диаметров и график эмпирической функции распределения, наложив на них соответствующие теоретические кривые с оцененными параметрами. Построить график $\log(1 - F_n(x))$ от $\log(x)$ вместе с аппроксимирующей прямой из пункта в).

Прокомментируйте согласие оценок с данными.

Используйте данные WISE (<https://sbn.psi.edu/pds/resource/neowisediam.html>) либо MPC (<https://www.minorplanetcenter.net/iau/MPCORB/MPCORB.DAT>).

Ключевые слова: Метод моментов, Функция правдоподобия, Метод максимального правдоподобия, Метод наименьших квадратов.

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_1(u)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du \quad \text{формула прои́зв-я разпределений}$$

$$f_1(x) = p_1 \delta(x-a_1) + p_2 \delta(x-a_2)$$

← генер-ф-ция ↑

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_1(u)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du = \int_{\mathbb{R}} \frac{p_1 \delta(u-a_1)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du + \\ + \int_{\mathbb{R}} \frac{p_2 \delta(u-a_2)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du$$

$$f(t) = \frac{p_1}{a_1} f_2\left(\frac{t}{a_1}\right) + \frac{p_2}{a_2} f_2\left(\frac{t}{a_2}\right)$$

$$f(t) = \frac{p}{a_1} N\left(\frac{t}{a_1}\right) + \frac{1-p}{a_2} N\left(\frac{t}{a_2}\right)$$

Посчитаем мат. ожид. этой ф-ции

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} t f(t) dt$$

$$= \underbrace{\frac{p}{a_1} \int_{\mathbb{R}} N\left(\frac{t}{a_1}\right) t dt}_{:= \text{int}_1} + \frac{1-p}{a_2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} N\left(\frac{t}{a_2}\right) t dt}_{:= \text{int}_2}$$

$$p \left(\frac{1}{a_1} \text{int}_1 - \frac{1}{a_2} \text{int}_2 \right) = E(X) - \frac{1}{a_2} \text{int}_2$$

$$p = \frac{E(X) - \frac{1}{a_2} \text{int}_2}{\frac{1}{a_1} \text{int}_1 - \frac{1}{a_2} \text{int}_2}$$

$$\begin{aligned} \text{mom}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} t dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{t-\mu}{\sigma} = u \quad dt = \sigma du \\ \sigma u + \mu = t \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}u^2} (\sigma u + \mu) du =$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}u^2} u du}_{=0} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \mu$$

$$a_1 = 0.7$$

$$a_2 = 1$$

$$int_{-s} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{0.7} - \mu \right)^2} t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{t}{0.7} - \frac{\mu}{\sigma} \\ u = \frac{t}{0.7\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \\ t = \left(\frac{\mu}{\sigma} + u \right) 0.7\sigma \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} t = 0.7 \cdot \sigma u + \frac{\mu}{\sigma} \\ dt = 0.7\sigma du \end{array}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} (0.7\sigma u + \frac{\mu}{\sigma}) \cdot 0.7\sigma du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{(0.7\sigma)^2 u}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} du + \int_{\mathbb{R}} \frac{0.7\mu\sigma \cdot 0.7\sigma}{\sigma \sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} u^2} du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{0.7^2 \sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} u du + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu 0.7 \cdot 0.7\sigma}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} u^2} du =$$

$$= \frac{0.7^2 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}u^2} u du$$

$$= \frac{0.7^2 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}u^2} du^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2 \cdot 0.7^2 \sigma}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mu 0.7^2 =$$

$$= \underbrace{-\frac{2 \cdot 0.7^2 \sigma}{2\sqrt{2\pi}} (e^{-\infty} - e^{-\infty})}_{=0} + \mu 0.7^2 = \underline{0.49 \mu}$$

$$+ \frac{\mu 0.7 \cdot 0.7 \sigma}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} =$$

$$+ \frac{\mu 0.7 \cdot 0.7}{\sigma} =$$