Задача 5. Оценки

Код на R и графики в pdf с пометкой авторства присылать на е-мэйл: danila.milanov@gmail.com или показывать на занятии. Дедлайн — 27 января.

1 В таблице table.htm даны два распределения P_1 и P_2 случайных величин ξ_1 и ξ_2, некоторые параметры которых неизвестны.

Используя выборку значений произведения $\xi_1\xi_2$ из data.csv, с именем из столбца Data:

- оценить неизвестные параметры а) методом моментов б) методом максимального правдоподобия
- построить график функции правдоподобия
- построить гистограмму и график эмпирической функции распределения выборки. Поверх них построить графики плотности и функции распределения с оцененными параметрами.

2 Предполагая, что распределение диаметров астероидов главного пояса подчиняется степенному закону

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & x \geqslant x_0 \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

оценить его параметры x_0 и α а) методом моментов б) методом максимального правдоподобия в) методом наименьших квадратов, аппроксимируя линейной функцией зависимость $\log(1 - F_n(x))$ от $\log(x)$, где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения (смотри функцию lsfit)

Построить гистограмму диаметров и график эмпирической функции распределения, наложив на них соответствующие теоретические кривые с оцененными параметрами. Построить график $\log(1 - F_n(x))$ от $\log(x)$ вместе с аппроксимирующей прямой из пункта в).

Прокомментируйте согласие оценок с данными.

Используйте данные WISE (https://sbn.psi.edu/pds/resource/neowisediam.html) либо MPC (https://www.minorplanetcenter.net/iau/MPCORB/MPCORB.DAT).

Ключевые слова: Метод моментов, Функция правдоподобия, Метод максимального правдоподобия, Метод наименьших квадратов.

$$f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f_1(u)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du$$ формула произв-я распределений

$$f_1(x) = p_1 \delta(x - a_1) + p_2 \delta(x - a_2)$$

дельта-ф-ция

$$f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f_1(u)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p_1 \delta(u - a_1)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p_2 \delta(u - a_2)}{u} f_2\left(\frac{t}{u}\right) du$$

$$f(t) = \frac{p_1}{a_1} f_2\left(\frac{t}{a_1}\right) + \frac{p_2}{a_2} f_2\left(\frac{t}{a_2}\right)$$

$$f(t) = \frac{p}{a_1} N\left(\frac{t}{a_1}\right) + \frac{1-p}{a_2} N\left(\frac{t}{a_2}\right)$$

Посчитаем мат. ожид. этой ф-ции

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{\mathbb{R}} t f(t) dt$$

$$= \underbrace{\frac{p}{a_1} \int\limits_{\mathbb{R}} N\left(\frac{t}{a_1}\right) t \, dt}_{:= int_1} + \underbrace{\frac{1-p}{a_2} \int\limits_{\mathbb{R}} N\left(\frac{t}{a_2}\right) dt}_{:= int_2}$$

$$p\left(\frac{1}{a_1} int_1 - \frac{1}{a_2} int_2\right) = \mathbb{E}(X) - \frac{1}{a_2} int_2$$

$$p = \frac{\mathbb{E}(X) - \frac{1}{a_2} int_2}{\frac{1}{a_1} int_1 - \frac{1}{a_2} int_2}$$

$a_1 = 0.7$

$a_2 = 1$

$$int_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t}{a_2}-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)}_{\text{интеграл Гаусса}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

$$int_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t}{0.7}-\mu}{\sigma}\right)^2} t\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{\frac{t}{0.7}-\mu}{\sigma} & t = 0.7 \cdot \sigma u + \frac{\mu}{\sigma} \\ u = \dfrac{t}{0.7\sigma} - \dfrac{\mu}{\sigma} & dt = 0.7\sigma\, du \end{array} \right| =$$

$$t = \left(\frac{\mu}{\sigma} + u\right) 0.7\sigma$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \left(0.7\sigma u + \frac{\mu}{\sigma} 0.7\sigma\right) \cdot 0.7\sigma\, du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{(0.7\cancel{\sigma})^2 u}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \int_{\mathbb{R}} \frac{0.7\mu\cancel{\sigma} \cdot 0.7\cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{0.7^2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} u\,du + \int_{\mathbb{R}} \frac{0.7 \cdot 0.7\cancel{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du =$$

$$= \frac{0.7^2 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}u^2} u \, du \quad + \frac{0.7 \cdot 0.7 \cancel{\sigma}}{\cancel{\sqrt{2\pi}} \cancel{\sigma}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cancel{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{0.7^2 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}u^2} du^2 \cdot \frac{1}{2} \quad + \frac{0.7 \cdot 0.7 \cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma}} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 0.7^2 \sigma}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 0.7^2 =$$

$$= \underbrace{-\frac{2 \cdot 0.7^2 \sigma}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\infty} - e^{-\infty} \right)}_{=0} + 0.7^2 = 0.49$$