Задача 4. Большие числа

Код на R и графики в pdf с пометкой авторства присылать на е-мэйл: danila.milanov@gmail.com или показывать на занятии. Дедлайн — 14 ноября

1 Оценим среднюю длину L отрезка с концами на поверхности из задачи 3 методом Монте-Карло. Для этого понадобится большое число таких расстояний, сгенерированных независимо друг от друга. В качестве оценки искомой величины будем брать среднее арифметическое выборки.

  Постройте выборку объема $N \geqslant 10^4$, используя генератор случайных точек из задачи 3. Выведите в pdf файл график зависимости среднего арифметического s_n первых n элементов от n. Для n кратных $[N/50]$ отметьте на графике интервалы (a_n, b_n), такие что $\mathbf{P}(a_n \leqslant L \leqslant b_n) \geqslant 0.95$. При каком объеме выборки $|a_N - b_N|$ станет меньше 0.1?

  Постройте аналогичную картинку для дисперсии длины отрезка.

2 Критерием честности монеты назовем алгоритм, который для последовательности результатов независимых бросков монеты $a_1, ...a_n$, $a_i \in \{0, 1\}$ возвращает значение 1 — монета честная или 0 — монета нечестная.

  Пусть K — критерий честности монеты.

  Ошибкой первого рода критерия K назовем случай, когда K, примененный к выборке результатов бросков честной монеты, возвращает 0.

  Вероятность ошибки первого рода α назовем уровнем значимости.

  Придумайте и запрограммируйте критерий честности монеты с вероятностью ошибки первого рода не больше заданного α. Проведите численный эксперимент, показывающий, что монету

  $$coin = function(n) \quad sample(\,0:10,\, n,\, replace = TRUE\,) \quad \%\% \quad 2$$

  нельзя считать честной на уровне значимости 0.01.

Ключевые слова: Закон больших чисел, Центральная предельная теорема, Неравенство Чебышёва, Диаметр, Неравенство Берри—Эссéена.