

Systèmes linéaires holomorphes et connexions

GT RH - Exposé n°2

Ugo Fialho

Janvier 2026

Table des matières

1	Avant-propos	1
2	Retour aux équations différentielles	1
3	Connexions	2
3.1	Motivations	2
3.1.1	Physique mathématique (géométrie riemannienne)	2
3.1.2	Géométrie différentielle, analyse sur les variétés	3
3.2	Définitions et exemples	3
4	Expressions locales	5
4.1	Connexion	5
4.2	Courbure	5
5	De $\text{Conn}(X)$ vers $\text{Loc}(X)$	6
	Références	10

1 Avant-propos

Soit X une variété complexe lisse. Le but de cet exposé est de montrer qu'un faisceau localement libre sur X muni d'une connexion plate (ou fibré plat) donne lieu à un système local sur X . Dans la suite de ce document :

- on utilisera de manière interchangeable les notions de fibré vectoriel et de \mathcal{O}_X -module localement libre (de rang fini),
- par "localement", on entend "en restriction à un ouvert de carte trivialisant le fibré",
- tout ce qui sera établi marche dans le cadre lisse comme dans le cadre holomorphe

2 Retour aux équations différentielles


Notre tout premier exemple ayant permis de mettre en évidence les phénomènes de monodromie était l'étude d'équations holomorphes linéaires sur le disque unité. Dans la suite,

on va considérer le cas légèrement plus général d'un système linéaire holomorphe d'ordre 1 (*c.f.* une remarque ultérieure) à une variable de la forme

$$\frac{du}{dz} = A(z)u \quad \text{sur } U \subseteq \mathbb{C}$$

avec $u : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ et $A : U \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^m)$ holomorphes.

On veut déterminer la structure des solutions de ce système.

Idée  : on applique Cauchy-Lipschitz dans le cas réel et on étend le résultat au cas complexe, puis on prolonge analytiquement les solutions le long de chemins dans U . Cependant, deux prolongement peuvent ne pas coïncider dans le cas de chemins non-homotopes. En revanche, si les chemins sont homotopes, on peut montrer que les prolongements sont les mêmes. En particulier, on dispose de solutions sur les ouverts simplement connexes et Cauchy-Lipschitz nous dit que les germes de ces solutions forment un espace vectoriel de dimension m en tout point de U . De plus, on vérifie que les applications de transition entre ces espaces vectoriels sont localement constantes.

Autrement dit, dans le langage introduit lors de l'exposé précédent, les solutions de ce système holomorphe forment un système local sur U . (quand on y pense, c'est une manière de reformuler les conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz !)

Ainsi, on a obtenu un système local à partir d'un système linéaire holomorphe. Le reste de l'exposé a pour objectif de généraliser ce résultat en dimension supérieure et dans le cadre global des variétés. Pour ce faire, nous introduisons l'objet mathématique prévu à cet effet : les connexions.

3 Connexions

On arrive à la notion centrale de cet exposé, celle de connexion. Commençons tout d'abord par quelques motivations.

3.1 Motivations

3.1.1 Physique mathématique (géométrie riemannienne)

Sans avoir besoin de faire des rappels extensifs sur les notions de base en dynamique, il est bien connu que l'accélération d'un système physique s'obtient en dérivant sa vitesse par rapport au temps. Le calcul se mène assez aisément dans un espace vectoriel (usuellement \mathbb{R}^3) mais semble être plus subtil si on se place dans le cadre d'une variété riemannienne (M, g) . En effet pour une trajectoire tracée dans M , on ne peut pas "dérivée" le champ des vitesses naïvement car les vecteurs vitesses ne vivent pas dans les mêmes espaces (chacun étant un élément de la fibre du fibré tangent au dessus de points de M). On résout ce problème grâce aux connexions qui vont justement permettre de "connecter" les différents espaces tangents (de manière compatible avec la métrique). Plus généralement, dans ce cadre, une connexion affine est une application ∇ qui à deux champs de vecteurs X et Y sur M va associer un troisième champ de vecteurs noté $\nabla_X Y$ qui s'interprète comme "la dérivée de Y dans la

direction de X'' . Mentionnons que toute variété riemannienne admet une (unique) connexion affine compatible à la métrique : c'est la fameuse connexion de Levi-Civita.

Ainsi, si γ est une trajectoire tracée dans M , on retrouve l'expression attendue de l'accélération le long de γ : $a = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ (pour plus de détails, voir [LeeRM]).

De plus, si γ est un chemin reliant des points x_0 et x_1 de M , il induit un isomorphisme linéaire entre $T_{x_0}M$ et $T_{x_1}M$: c'est le transport parallèle. En particulier, on remarque que la monodromie suit le même principe, où les chemins considérés sont en fait des lacets et ce ne sont plus des vecteurs tangents qui sont transportés mais des solutions d'équation différentielle.

3.1.2 Géométrie différentielle, analyse sur les variétés

Dans le cadre de l'étude d'équations différentielles (ou holomorphes) linéaires et plus généralement de systèmes linéaires différentiels (ou holomorphes), la notion de connexion permet de "globaliser" ces objets : ils forment le modèle local de la connexion (de la même manière que les espaces euclidiens sont le modèle local des variétés lisses).

Enfin, les connexions peuvent être interprétées comme une extension de la différentielle extérieure pour des formes à coefficients dans un fibré vectoriel quelconque (et plus uniquement le fibré trivial). En particulier, on obtient ainsi des complexes de De Rham "étendus".

Enfin, dans un langage plus faisceautique, les "bons" objets généralisant la notion d'opérateur différentiel seront les " D_X -modules", peut-être abordés ultérieurement dans le cadre du groupe de travail.

3.2 Définitions et exemples

Définition. Soit X une variété complexe lisse et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Une connexion sur \mathcal{F} est un morphisme de faisceaux \mathbb{C}_X -linéaire

$$\nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

tel que pour toutes sections ϕ de \mathcal{O}_X et f de \mathcal{F} , on a l'identité suivante :

$$\nabla(\phi f) = d\phi \otimes f + \phi \nabla(f)$$

appelée "règle de Leibniz". On note une telle donnée (\mathcal{F}, ∇) .

Une fois les objets définis, le réflexe de tout bon mathématicien ayant des penchants catégoriques est de demander "Quid des morphismes?". On y vient.

Définition. Un morphisme de connexions $\theta : (\mathcal{F}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{F}', \nabla')$ est un morphisme \mathcal{O}_X -

linéaire qui commute aux connexions faisant commuter le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\nabla} & \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \theta \\ \mathcal{F}' & \xrightarrow{\nabla'} & \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}' \end{array}$$

Exemple. Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^{\oplus r}$, alors $d : \mathcal{O}_X^{\oplus r} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus r} \simeq (\Omega_X^1)^{\oplus r}$ est bien une connexion, qu'on pourrait appeler "connexion triviale (de rang r)".

Exemple. Toujours pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^{\oplus r}$, soit ∇ une connexion quelconque. Alors, d'après la règle de Leibniz, on a :

$$\begin{aligned} (\nabla - d)(\phi f) &= \cancel{d\phi} \times f + \phi \nabla f - \cancel{d\phi} \times f - \phi df \\ &= \phi \times (\nabla - d)(f) \end{aligned}$$

Donc : $(\nabla - d)$ est \mathcal{O}_X -linéaire.

Ainsi, localement, une connexion sera de la forme

$$\boxed{\nabla = d + \Omega}$$

où Ω est une matrice de 1-formes, appelée matrice des formes associée à ∇ .

Remarque. Si $\dim(X) = 1$, $A = -\Omega$ et f est une section telle que $\nabla(f) = 0$, alors f est solution du système différentiel

$$f' = Af$$

qui n'est pas sans rappeler l'exemple étudié au Chapitre 2.

Remarque. En fait, si on étudie une équation différentielle d'ordre supérieur à 1 (à une ou plusieurs variables), on peut toujours se ramener à un système différentiel d'ordre 1, ce qui justifie qu'on se soit contenté de ce cas précédemment.

A présent, en gardant en tête la motivation que les connexions sont une généralisation de la différentielle extérieure, on veut étendre la définition aux formes de degrés supérieurs.

Définition. Pour $p \geq 1$ entier, on pose :

$$\nabla^p : \Omega_X^p \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes \mathcal{F}$$

morphisme \mathbb{C}_X -linéaire vérifiant aussi une règle de Leibniz

$$\nabla^p(\omega \otimes f) = d\omega \otimes f + (-1)^p \omega \wedge \nabla(f)$$

On peut montrer que cette extension est bien définie car $\nabla^p(\phi\omega \otimes f) = \nabla^p(\omega \otimes \phi f)$ et est unique.

On définit à présent une propriété pour les connexions qui sera l'hypothèse clé du théorème final.

Définition. On appelle courbure de la connexion ∇ le morphisme

$$R_\nabla := \nabla^1 \circ \nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \Omega_X^2 \otimes \mathcal{F}$$

On dit que ∇ est plate (ou intégrable) si $R_\nabla = 0$.

Remarque. Variante en géométrie différentielle : ∇ est plate si $\nabla_{[X,Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y]$, où ∇_X est la "dérivée covariante dans la direction de X ".

Remarque (Bonus). Si (\mathcal{F}, ∇) est une connexion plate, alors pour tout p on a $\nabla^{p+1} \circ \nabla^p = 0$. On obtient ainsi un complexe de de Rham "étendu à \mathcal{F} " :

$$(\Omega_X^\bullet \otimes \mathcal{F}, \nabla) : \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla^1} \Omega_X^2 \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\nabla^2} \dots \longrightarrow \Omega_X^{\dim X} \otimes \mathcal{F}$$

4 Expressions locales

4.1 Connexion

On sait déjà que, localement, une connexion ∇ prend la forme suivante : $\nabla = d + \Omega$, où d est la différentielle extérieure et Ω la matrice des formes. En coordonnées, on peut écrire :

$$\omega_{i,j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k dx_k$$

Les coefficients $\Gamma_{i,j}^k$ qui apparaissent ici sont nommés "symboles de Christoffel".

4.2 Courbure

Pour la courbure, on calcule avec la définition en utilisant l'écriture locale de la connexion (et en faisant attention aux changements de nom de variables muettes dans certaines des égalités). On rappelle que pour e_α un vecteur de base dans une trivialisation de \mathcal{F} , on a $\nabla(e_\alpha) = \sum_\gamma \omega_{\gamma,\alpha} e_\gamma$. Soit f une section de \mathcal{F} . On calcule :

$$\begin{aligned} R_\nabla(f) &= \nabla^1 \circ \nabla(f) \\ &= \nabla^1 \left(\sum_\alpha \left(df_\alpha + \sum_\beta \omega_{\alpha,\beta} f_\beta \right) e_\alpha \right) \\ &= \sum_\alpha \left(d \left(df_\alpha + \sum_\beta \omega_{\alpha,\beta} f_\beta \right) e_\alpha - \left(df_\alpha + \sum_\beta \omega_{\alpha,\beta} f_\beta \right) \wedge \nabla(e_\alpha) \right) \\ &= \sum_\alpha \left(\sum_\beta (df_\beta \wedge \omega_{\alpha,\beta} + d\omega_{\alpha,\beta} \wedge f_\beta) e_\alpha - \sum_\gamma df_\alpha \wedge \omega_{\gamma,\alpha} e_\gamma - \sum_\gamma \sum_\beta f_\beta \omega_{\alpha,\beta} \wedge \omega_{\gamma,\alpha} e_\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_{\beta} \, d\omega_{\alpha,\beta} \, e_{\alpha} - \sum_{\gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_{\beta} \, \omega_{\alpha,\beta} \wedge \omega_{\gamma,\alpha} \, e_{\gamma} \\
&= \sum_{\gamma} \left(\sum_{\beta} \left(f_{\beta} \, d\omega_{\gamma,\beta} - \sum_{\alpha} f_{\beta} \omega_{\alpha,\beta} \wedge \omega_{\gamma,\alpha} \right) \right) e_{\gamma} \\
&= \sum_{\gamma} \sum_{\beta} f_{\beta} \left(d\omega_{\gamma,\beta} + \sum_{\alpha} \omega_{\gamma,\alpha} \wedge \omega_{\alpha,\beta} \right) e_{\gamma}
\end{aligned}$$

En plissant suffisamment les yeux, on s'aperçoit que l'expression obtenue correspond à l'application d'une certaine matrice à f dont les coefficients dans la base (e_{α}) sont de la forme

$$R_{i,j} = d\omega_{i,j} + \sum_k \omega_{i,k} \wedge \omega_{k,j}$$

Le terme de droite ressemble furieusement à la formule des coefficients d'un produit matriciel : ce n'est pas un hasard car ici les coefficients sont des formes, en particulier leur produit est bien le produit extérieur ! Finalement, on trouve localement une formule pour la courbure en fonction de la matrice des formes :

$$\boxed{R_{\nabla} = d\Omega + \Omega \wedge \Omega}$$

Enfin, on peut exprimer l'égalité ci-dessus en termes des symboles de Christoffel, en identifiant les coefficients des entrées de la matrice R_{∇} dans la base $(dx_{\alpha} \wedge dx_{\beta})$:

$$\begin{aligned}
R_{i,j} &= d\omega_{i,j} + \sum_k \omega_{i,k} \wedge \omega_{k,j} \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \partial_{\alpha} \Gamma_{i,j}^{\beta} \, dx_{\alpha} \wedge dx_{\beta} + \sum_k \left(\sum_{\alpha} \Gamma_{i,k}^{\alpha} \, dx_{\alpha} \wedge \sum_{\beta} \Gamma_{k,j}^{\beta} \, dx_{\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \left(\partial_{\alpha} \Gamma_{i,j}^{\beta} + \sum_k \Gamma_{i,k}^{\alpha} \Gamma_{k,j}^{\beta} \right) dx_{\alpha} \wedge dx_{\beta} \\
&= \sum_{\alpha < \beta} \underbrace{\left(\left(\partial_{\alpha} \Gamma_{i,j}^{\beta} - \partial_{\beta} \Gamma_{i,j}^{\alpha} \right) + \sum_k \left(\Gamma_{i,k}^{\alpha} \Gamma_{k,j}^{\beta} - \Gamma_{i,k}^{\beta} \Gamma_{k,j}^{\alpha} \right) \right)}_{:= R_{i,j,\alpha,\beta}} dx_{\alpha} \wedge dx_{\beta}
\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\nabla \text{ plate} \iff R_{\nabla} = 0 \iff R_{i,j} = 0 \iff R_{i,j,\alpha,\beta} = 0$$

5 De Conn(X) vers Loc(X)

Comme on l'a entraperçu dans un exemple précédent, les sections qui vont nous permettre de retrouver localement des systèmes différentiels sont celles qui sont annulées par ∇ .

Définition. On note $\mathcal{F}^{\nabla} := \text{Ker}_{\mathbb{C}}(\nabla)$. C'est le sous-faisceau des sections horizontales.

On arrive enfin au résultat clé de cet exposé :

Théorème. *Si (\mathcal{F}, ∇) est plate, alors \mathcal{F}^∇ est un système local.*

On va tenter d'adapter la démonstration de [Voi02, lemme 9.12]. La preuve fait appel à un résultat donnant une condition nécessaire et suffisante à l'existence de courbes intégrales de dimensions supérieures (les "sous-variétés intégrales") : le théorème de Frobenius. Tous les outils nécessaires sont présentés dans [LeeSM, Chapitre 19].

Définition.

- Une distribution D sur une variété lisse X est un sous-fibré du fibré tangent,
- D est involutive si pour toute paire de champs de vecteurs X et Y locaux à valeurs dans D , leur crochet est localement à valeurs dans D , (autrement dit D est stable par crochet),
- Si D est une distribution sur X , une sous-variété immergée $N \subseteq X$ est appelée sous-variété intégrale de D si pour tout point $p \in N$, on a $T_p N = D_p$,
- D sur X est dite intégrable si tout point de X est contenu dans une sous-variété intégrale

Lemme (Frobenius). *Soit D une distribution. Si D est involutive, alors D est (complètement) intégrable.*

Démonstration du théorème. On veut montrer que \mathcal{F}^∇ est un système local. Considérons F l'espace étalé de \mathcal{F} , c'est un fibré vectoriel car \mathcal{F} est localement libre. On va construire une distribution sur F et montrer qu'elle est involutive.

Etape 1 : Construction de D

On considère un ouvert $U \subseteq X$ trivialisant F et TX i.e. $F|_U = U \times \mathbb{C}^m$ et $TX|_U = U \times \mathbb{C}^n$. On fixe une section σ de F sur U . Alors on dispose de deux applications $d\sigma, \nabla\sigma : TX \rightarrow TF$ (a priori, $\nabla\sigma$ doit être à valeur dans F mais on considère l'inclusion naturelle $F \hookrightarrow TF$ via la section nulle). On peut alors poser :

$$D = \text{Im}(d\sigma - \nabla\sigma)$$

Par la règle de Leibniz, D est indépendant du choix de σ . Si on fixe un repère local $(\partial_{x_i})_{i=1,\dots,n}$ de TU , on peut calculer l'image de ces vecteurs de base par $d\sigma - \nabla\sigma$ pour obtenir une famille de champs X_k qui engendrent localement les champs à valeurs dans D .

Etape 2 : Calcul de X_k

Notons $\sigma : x \mapsto (x, y(x))$ avec $y : U_{x_1, \dots, x_n} \rightarrow \mathbb{C}_{z_1, \dots, z_m}^m$ les coordonnées de σ . Alors :

$$\begin{aligned} \nabla \sigma &= \sum_j \nabla(y_j e_j) \\ d\sigma &= \left(\frac{\text{Id}_n}{\text{Jac}(y)} \right) = \sum_j dy_j \otimes e_j + y_j \nabla(e_j) \\ &= \sum_j dy_j \otimes e_j + y_j \sum_i \omega_{i,j} \otimes e_i \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} d\sigma(\partial_{x_k}) &= \partial_{x_k} + \sum_i \partial_{x_k} y_i \partial_{z_i} \\ \nabla \sigma(\partial_{x_k}) &= \sum_j \left(\partial_{x_k} y_j e_j + y_j \sum_i \Gamma_{i,j}^k e_i \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$(d\sigma - \nabla \sigma)(\partial_{x_k}) = \partial_{x_k} - \sum_{i,j} y_j \Gamma_{i,j}^k \underbrace{e_i}_{=\partial_{z_i}}$$

où $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_m})$ est un repère local de $T(F|_U)$. On identifie ce champ à son expression locale en remplaçant les coordonnées (y_j) de σ par les fonctions coordonnées z_j de sorte que $z_j \circ \sigma = y_j$. Finalement :

$$\boxed{X_k := \partial_{x_k} - \sum_{i,j} z_j \Gamma_{i,j}^k \partial_{z_i}}$$

Etape 3 : Calcul du crochet

On a :

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] &= [\partial_{x_\alpha}, \partial_{x_\beta}] - \sum_{i,j} [\partial_{x_\alpha}, z_j \Gamma_{i,j}^\beta \partial_{z_i}] - \sum_{i,j} [z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \partial_{z_i}, \partial_{x_\beta}] + \sum_{i,j,k,l} [z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \partial_{z_i}, z_l \Gamma_{k,l}^\beta \partial_{z_k}] \\ \bullet [\partial_{x_\alpha}, z_j \Gamma_{i,j}^\beta \partial_{z_i}] &= \partial_{x_\alpha} \left(z_j \Gamma_{i,j}^\beta \right) \partial_{z_i} + z_j \Gamma_{i,j}^\beta \underbrace{[\partial_{x_\alpha}, \partial_{z_i}]}_{=0} = \left(\Gamma_{i,j}^\beta \cdot \cancel{\partial_{x_\alpha} z_j} + z_j \cdot \partial_{x_\alpha} \Gamma_{i,j}^\beta \right) \partial_{z_i} \\ &= \left(z_j \cdot \partial_{x_\alpha} \Gamma_{i,j}^\beta \right) \partial_{z_i} \\ \bullet [z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \partial_{z_i}, \partial_{x_\beta}] &= -[\partial_{x_\beta}, z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \partial_{z_i}] = - \left(\Gamma_{i,j}^\alpha \cdot \cancel{\partial_{x_\beta} z_j} + z_j \cdot \partial_{x_\beta} \Gamma_{i,j}^\alpha \right) \partial_{z_i} \\ &= - \left(z_j \cdot \partial_{x_\beta} \Gamma_{i,j}^\alpha \right) \partial_{z_i} \\ \bullet [z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \partial_{z_i}, z_l \Gamma_{k,l}^\beta \partial_{z_k}] &= z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \partial_{z_i} \left(z_l \Gamma_{k,l}^\beta \right) \partial_{z_k} - z_l \Gamma_{k,l}^\beta \partial_{z_k} \left(z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \right) \partial_{z_i} + z_j z_l \Gamma_{i,j}^\alpha \Gamma_{k,l}^\beta \underbrace{[\partial_{z_i}, \partial_{z_k}]}_{=0} \\ &= z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \left(\Gamma_{k,l}^\beta \cdot \partial_{z_i} z_l + z_l \cdot \cancel{\partial_{z_i} \Gamma_{k,l}^\beta} \right) \partial_{z_k} - z_l \Gamma_{k,l}^\beta \left(\Gamma_{i,j}^\alpha \cdot \partial_{z_k} z_j + z_j \cdot \cancel{\partial_{z_k} \Gamma_{i,j}^\alpha} \right) \partial_{z_i} \\ &= z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \Gamma_{k,l}^\beta \delta_{i,l} \partial_{z_k} - z_l \Gamma_{i,j}^\alpha \Gamma_{k,l}^\beta \delta_{k,j} \partial_{z_i} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
[X_\alpha, X_\beta] &= - \sum_{i,j} z_j \left(\partial_{x_\alpha} \Gamma_{i,j}^\beta - \partial_{x_\beta} \Gamma_{i,j}^\alpha \right) \partial_{z_i} + \sum_{i,j,k} z_j \Gamma_{i,j}^\alpha \Gamma_{k,i}^\beta \partial_{z_k} - \sum_{i,j,l} z_l \Gamma_{i,j}^\alpha \Gamma_{j,l}^\beta \partial_{z_i} \\
&= - \sum_{i,j} z_j \left(\partial_{x_\alpha} \Gamma_{i,j}^\beta - \partial_{x_\beta} \Gamma_{i,j}^\alpha \right) \partial_{z_i} + \sum_{i,j,k} z_j \Gamma_{k,j}^\alpha \Gamma_{i,k}^\beta \partial_{z_i} - \sum_{i,j,k} z_k \Gamma_{i,j}^\alpha \Gamma_{j,k}^\beta \partial_{z_i} \\
&= - \sum_{i,j} z_j \left(\partial_{x_\alpha} \Gamma_{i,j}^\beta - \partial_{x_\beta} \Gamma_{i,j}^\alpha \right) \partial_{z_i} + \sum_{i,j,k} z_j \Gamma_{k,j}^\alpha \Gamma_{i,k}^\beta \partial_{z_i} - \sum_{i,j,k} z_j \Gamma_{i,k}^\alpha \Gamma_{k,j}^\beta \partial_{z_i} \\
&= - \sum_{i,j} z_j \left(\left(\partial_{x_\alpha} \Gamma_{i,j}^\beta - \partial_{x_\beta} \Gamma_{i,j}^\alpha \right) + \sum_k \left(\Gamma_{i,k}^\alpha \Gamma_{k,j}^\beta - \Gamma_{i,k}^\beta \Gamma_{k,j}^\alpha \right) \right) \partial_{z_i} \\
&= - \sum_{i,j} z_j R_{i,j,\alpha,\beta} \partial_{z_i} \\
&= 0 \quad (\text{car } \nabla \text{ est plate par hypothèse!})
\end{aligned}$$

Pour mener ce calcul, on remarque que les symboles de Christoffel ne dépendent que des coordonnées selon x , que les fonctions coordonnées z_j sont constantes selon x et que les dérivations selon les vecteurs de base du repère commutent.

Etape 4 : Frobenius et intégrabilité

Ainsi, D est bien involutive donc intégrable d'après le théorème de Frobenius. Ainsi pour tout $x \in X$, chaque point de la fibre F_x est contenu dans une sous-variété intégrale de D de sorte qu'au voisinage de x chacune de ces sous-variétés soit difféomorphe à X . De plus, on a (toujours au voisinage de x) une correspondance bijective entre ces sous-variétés et un voisinage de 0 dans la fibre F_x . Ainsi, on obtient une bijection entre les sous-variétés intégrales et les sections définies au voisinage de x (à une sous-variété intégrale N , on associe le vecteur v tel que N passe par (x, v) et à une section s telle que $s(x) = (x, v)$, on associe la sous-variété passant par (x, v)). On peut d'ailleurs remarquer que les sous-variétés intégrales sont les graphes des sections associées. Or, les sous-variétés intégrales étant tangentes à D , les graphes des sections le sont également. En particulier ces sections sont donc horizontales car sans composante verticale.

Etape 5 : Conclusion

Ainsi, par le biais des sous-variétés intégrales, on obtient une correspondance entre les sections horizontales au voisinage de x et un voisinage ouvert de 0 $\in \mathbb{C}^m$. Enfin, soient $U, V \subseteq X$ deux ouverts comme ci-dessus tels que $x \in U \cap V$ et $(s_i), (t_i)$ des bases de sections plates respectivement sur U et V . Sur l'intersection, on peut exprimer les (t_i) en fonction des (s_j) . Il existe donc des fonctions $\phi_{i,j} : U \cap V \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^m)$ telles que :

$$t_i = \sum_j \phi_{i,j} s_j$$

Ainsi, on a :

$$0 = \nabla t_i = \sum_j d\phi_{i,j} \otimes s_j + \phi_{i,j} \nabla s_j = \sum_j d\phi_{i,j} s_j$$

Donc les $\phi_{i,j}$ sont localement constants.

Finalement, on peut conclure que les sections horizontales forment bien un système local comme annoncé.

□

Références

- [Del70] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 163, Springer-Verlag, 1970.
- [Voi02] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 76, Cambridge University Press, 2002.
- [EZeS09] F. El Zein et J. Snoussi, *Local Systems and Constructible Sheaves*, Progress in Mathematics, vol. 283, Birkhäuser Verlag, 2009.
- [Sza09] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press, 2009.
- [LeeSM] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013.
- [LeeRM] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer, Cham, 2018.