Stable ∞-Categories

Luc Saccoccio–Le Guennec

13 novembre 2025

1 En guise de motivation

Nous reproduisons, à peu de choses près, une partie de l'introduction de [Cno25], auquel nous renvoyons les lecteurs intéressés.

Théorème 1.1 (Suspension de Freudenthal). *Si X est n-connexe, l'unité $X \to \Omega\Sigma X$ de l'adjonction $\Sigma \dashv \Omega$ est $(2n+1)$-connexe, c'est à dire que la flèche induite est un isomorphisme sur les π_k pour $k \leq 2n$ et une surjection pour $k = 2n+1$.*

Quitte à appliquer ce théorème plusieurs fois (à $\Sigma X, \Sigma^2 X, \cdots$), on obtient une suite

$$\pi_k(X) \to \pi_k(\Omega\Sigma X) \to \pi_k(\Omega^2\Sigma^2 X) \to \cdots$$

qui devient stable à partir d'un certain rang pour tout $k \geq 0$. La colimite de ce diagramme est le k^{e} **groupe d'homotopie stable**, noté $\pi_k^{st}(X)$. Contrairement aux π_k, les π_k^{st} forment une théorie cohomologique généralisée, c'est à dire ne vérifiant pas l'axiome de la dimension. On introduit aussi les ensembles de morphismes stables :

$$[X, Y]_*^{st} := \operatorname*{colim}_n [\Sigma^n X, \Sigma^n, Y]_*$$

Les CW-complexes finis pointés et ces ensembles de morphismes forment une catégorie, la **catégorie de Spanier-Whitehead**.

Définition 1.2 (Spectre). *Un **spectre** X est la donnée d'une suite d'espaces pointés $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'équivalences homotopiques $X_n \simeq \Omega X_{n+1}$.*

Théorème 1.3 (Représentabilité de Brown). *Un foncteur $(\mathsf{hTop}_*^c)^{op} \to \mathsf{C}$ est représentable si et seulement il préserve les coproduits et envoie les pushouts faibles sur des pullback faibles.*

Ce théorème est bien connu, l'une de ses conséquences [1] étant qu'une théorie cohomologique généralisée (additive et réduite) $E^\bullet$ est représentable par un spectre E :

$$E^n(X) \simeq [X, E_n]$$

Exemple 1.4.

- Le spectre (généré par le pré-spectre) $(\Sigma^\infty X)_n = \Sigma^n X$.
- Le spectre nul $\star_n = \star$.
- Le spectre de la sphère $(\Sigma^\infty \mathbb{S}^0)_n = \mathbb{S}^n$.
- Le spectre d'Eilenberg-Mac Lane HA pour A un groupe abélien

Les spectres forment une catégorie dont la catégorie homotopique $\mathsf{hSpectra}$ contient pleinement la catégorie de Spanier-Whitehead. De plus, elle représente toute les théorie cohomologiques généralisées, et est dotée d'un *smash product* commutatif. De nombreuses propositions suivent, qui motivent la *Brave New Algebra* (cf [May91] pour plus de détails) :

1. Une autre est que, pour les CW-complexes finis, une théorie homologique généralisée (additive) sont aussi représentable par un spectre en le sens suivant : $E_n(X) = \pi_n(E_n \wedge X)$

Proposition 1.5. *On peut former, sur la catégorie* $\mathsf{hSpectra}$ *:*

- *Une somme directe $X \oplus Y$, qui se trouve être un biproduit.*
- *Un produit tensoriel $X \otimes Y$, appelé* ***smash product****, qui induit une structure monoïdale symétrique.*
- *Ce dernier permet de munir un spectre R d'une structure d'anneau interne.*
- *Une notion de module sur un anneau en spectres, où l'on retrouve des notions analogues à la platitude, la projectivité, la p-complétion et la p-localisation en un premier p...*

Enfin, cette catégorie est déjà "dérivée" : le Hom interne $\mathcal{H}om$ et le produit tensoriel $(- \otimes -)$ sont déjà exacts.

Du côté des catégories abéliennes : lorsque l'on passe aux complexes de chaînes, on retrouve un vocabulaire similaire (*homotopie* entre morphismes, *contractibilité* de complexes...). L'analogue de hTop est $\mathcal{D}(\mathsf{A})$ pour A abélienne. Elle est munie, comme $\mathsf{hSpectra}$, d'une structure *triangulée* complexe à manipuler, et oublie les homotopies. Une solution est de considérer $\mathcal{D}(\mathsf{A})$ comme l'∞-catégorie homotopique, où l'on retrouve un analogue ∞-catégorique de l'additivité : **la stabilité**.

2 ∞-Catégories stables

L'intuition à suivre est donc à la fois celle des spectres et celle des catégories abéliennes.

Définition 2.1. *Une ∞-catégorie est dite* ***pointée*** *si elle admet un objet nul 0, c'est à dire initial et final.*

Déroulons cette définition : pour tout objet X d'une ∞-catégorie C, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(0, X)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, 0)$ sont contractiles. Il est donc, d'après un résultat de Lurie ([Lur09b], 1.2.12.9) unique à équivalence près.

Remarque 2.2. C est pointée si et seulement si elle a un objet initial 0, final 1 et un morphisme $1 \to 0$.

On a un unique morphisme $X \to Y$ dans hC appelé le morphisme nul (ou zéro), induit par $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, 0) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(0, Y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$, le complexe de gauche étant contractile.

Exemple 2.3.

- Si C a un objet terminal $\star$, $\star \downarrow \mathsf{C}$ est pointée, c'est la catégorie des objets pointées de C (cf. [Lur09b], 7.2.2.8)
- Une (1-)catégorie est pointée si et seulement si l'∞-catégorie du nerf est pointée.

Définition 2.4. *Un triangle est un diagramme $\Delta^1 \times \Delta^1 \to \mathsf{C}$ (ou $\square \to \mathsf{C}$) de la forme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Il est dit ***exact*** *(resp.* ***coexact****) si c'est un pullback (resp.* ***pushout****). On trouve aussi les termes fiber sequence et cofiber sequence.*

Si l'on déroule de nouveau la définition, c'est la donnée d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "h" description] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow"] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Avec deux homotopies $h \simeq g \circ f$ et $h \simeq 0$

Définition 2.5. *Soit $g : X \to Y$ un morphisme de C. Une* ***fibre*** *(ou* ***noyau****) de g est un triangle exact*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Dualement, une ***cofibre*** *(ou* ***conoyau****) est un triangle coexact*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & Z \end{tikzcd}$$

On note $\operatorname{fib} g := W$ *et* $\operatorname{cofib} g := Z$ *dans chaque cas.*

Cette définition entraîne plusieurs questions : est-elle seulement correcte, c'est à dire, est-ce que fib et cofib sont bien définies ? Si c'est le cas, cette assignation est-elle fonctorielle ? On considère $\mathcal{E} \subseteq \operatorname{Fun}(\square, \mathsf{C})$ la sous-catégorie pleine des triangles coexacts, $\theta : \mathcal{E} \to \operatorname{Fun}(\Delta^1, \mathsf{C})$ le foncteur extrayant le morphisme du haut. C'est une fibration de Kan ([Lur09b] 4.3.2.15 appliqué deux fois) dont les fibres sont soit nulles soit contractiles, selon si le morphisme admet un conoyau. Si C admet les pullbacks (e.g. C finiment complète), alors θ est triviale. On utilise alors un argument plus général :

Lemme 2.6. *Si $p : X \to Y$ est une fibration de Kan acyclique, alors l'espace des sections $\Gamma(p) \in \mathsf{sSet}$ est un complexe de Kan contractile.*

En effet il suffit de considérer le pullback

$$\begin{tikzcd} \Gamma(p) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Hom}_{\mathsf{sSet}}(Y, X) \arrow[d, "p_*"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & \operatorname{Hom}_{\mathsf{sSet}}(Y, Y) \end{tikzcd}$$

Ainsi, θ admet une section cofib : $\operatorname{Fun}(\Delta^1, \mathsf{C}) \to \mathcal{E}$ bien définie, et par abus on idenfitie cofib à $\operatorname{Fun}(\Delta^1, \mathsf{C}) \to \mathcal{E} \hookrightarrow \operatorname{Fun}(\square, \mathsf{C}) \xrightarrow{ev_{(1,1)}} \mathsf{C}$. cofib est non seulement bien définie, mais donc aussi fonctorielle.

Remarque 2.7. On admet un second abus, principalement car il guide l'intuition : cofib est *unique à contractibilité d'un espace de choix près.* Ainsi, on considérera que l'on peut parler de <u>la</u> section, de <u>l'</u>objet nul...

Un raisonnement identique mutatis mutandis permet d'obtenir la bonne définition et la fonctorialité de fib.

Définition 2.8. *Une ∞-catégorie C est dite* ***stable*** *si*

1. *Il existe un objet nul.*
2. *Tout morphisme de C admet un noyau (fibre) et un conoyau (cofibre).*
3. *Un triangle de C est exact si et seulement si il est coexact.*

Remarque 2.9.

1. La troisième proposition est un analogue du premier théorème d'isomorphisme identifiant l'image et la coimage.
2. Si C est stable, C^{op} aussi.
3. On verra (en admettant la preuve...) que $\mathcal{D}(\mathsf{A})$ est stable.
4. La stabilité n'est pas une structure, c'est une propriété (comme l'additivité pour les (1-)catégories).

Notons $\mathsf{C}^{\Sigma} \subseteq \operatorname{Fun}(\square, \mathsf{C})$ la sous-catégorie pleine des triangles coexacts de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0' \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner", very near end] & Y \end{tikzcd}$$

Et, dualement $\mathsf{C}^{\Omega} \subseteq \mathrm{Fun}(\square, \mathsf{C})$ la sous-catégorie pleine des triangles exacts de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0' \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Remarque 2.10. Si C est stable, $\mathsf{C}^{\Sigma} = \mathsf{C}^{\Omega}$.

De nouveau, on peut utiliser le formalisme quasicatégorique pour obtenir des foncteurs de suspension/lacets. On admet que si C est pointée et admet les pullbacks et pushouts, $ev_{(0,0)}$ et $ev_{(1,1)}$ sont des fibrations de Kan acycliques, et on a des sections $s_{\Sigma} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\Sigma}$ et $s_{\Omega} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\Omega}$ "uniques" (2.7) et on note $\Sigma : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\Sigma} \xrightarrow{ev_{(1,1)}} \mathsf{C}$ et $\Omega : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\Omega} \xrightarrow{ev_{(0,0)}} \mathsf{C}$ les foncteurs de suspension et de lacets.

On admet deux adjonctions $\Sigma \dashv \Omega$ et cofib $\dashv$ fib, en esquissant les contours de la première : Ω étant un pullback, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, \Omega Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\lrcorner, \mathsf{C})}(\mathrm{const}_X, 0 \to Y \leftarrow 0) \simeq \left\{ \left(\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \right) \right\}$$

Théorème 2.11. *Soit C une ∞-catégorie pointée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *C admet les pullbacks et les pushouts, et un carré $\square \to \mathsf{C}$ est un pullback si et seulement si c'est un pushout.*
2. *C est stable.*
3. *C admet les fibres et Ω est une équivalence.*
4. *C admet les cofibres et Σ est une équivalence.*

Remarque 2.12. Dans le cas où C est supposée pointée, finiment complète et cocomplète, on a les équivalences :

1. C est stable.
2. $\Sigma \dashv \Omega$ est une équivalence.
3. cofib $\dashv$ fib est une équivalence.

Preuve.

— 1 implique clairement 2.

— 2 implique 3 et 4, en écrivant les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Ce qui montre respectivement le fait que la counité $\Sigma\Omega X \to X$ et que l'unité $X \to \Omega\Sigma X$ sont des équivalences.

— On admet que 3 (ou 4, en passant à $\mathsf{C}^o p$) implique 1 (cf. [Cno25] 3.1.2).

$\square$

Remarque 2.13. Une catégorie abélienne ne peut être "stable" car Ω serait 0.

Enfin, on a une notion de foncteurs préservant la stabilité :

Définition 2.14 (et proposition)**.** *Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur entre ∞-catégories stables. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est* ***exact à droite****, c'est à dire qu'il préserve les objets initiaux et les pushouts.*
2. *F est* ***exact à gauche****, c'est à dire qu'il préserve les objets finaux et les pullbacks.*
3. *F est* ***exact****, c'est à dire qu'il est exact à gauche et à droite.*

Remarque 2.15. F est automatiquement pointé dans les trois cas car C et D le sont.

On définit alors l'∞-catégorie des ∞-catégories stables et foncteurs exacts

$$\mathsf{Cat}_\infty^{st} \subseteq \mathsf{Cat}_\infty$$

3 Additivité et structure triangulée

On vas retrouver des propriétés analogues à celle d'une (1-)catégorie additive dans une $\infty-$catégorie stable.

On introduit la notation (postfixe) $[n] := \begin{cases} \Sigma^n & n \geq 0 \\ \Omega^{-n} & n \leq 0 \end{cases}$. Clairement, $[0] \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$ et $[n] \circ [m] = [n+m]$. De plus, si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g}$ est exacte, alors $X[n] \to Y[n] \to Z[n]$, $Y \xrightarrow{g} Z \to X[1]$ et $Z[-1] \to X \xrightarrow{f} Y$ aussi. Dans le premier cas, il suffit de remarquer que $[n]$ est une équivalence, donc préserve l'exactitude. Dans les deux autres, on écrit les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near start, shift right=0] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z[-1] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme, alors $\mathrm{cofib}(f) \simeq \mathrm{fib}(f)[1]$ et les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est un isomorphisme.*
- $\mathrm{cofib}(f) \simeq 0$
- $\mathrm{fib}(f) \simeq 0$

Preuve. On écrit 3 diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{fib}(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & \mathrm{cofib}(f)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & Y \arrow[d] \\
0 \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{cofib}(f)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{fib}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f", "\sim"'] \\
0 \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Dans le premier cas, on utilise le fait que si les deux carrés internes sont des pushout, alors le carré externe est un pushout. Pour l'équivalence, on utilise le fait qu'un pushout (comme un pullback) conserve les isomorphismes. $\square$

Lemme 3.2 (où l'on retrouve l'additivité)**.** C *est semiadditive, c'est à dire qu'elle a un objet nul, des coprduits et produits finis, le morphisme canonique $X \sqcup Y \to X \times Y$ est un isomorphisme et $\pi_0 \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ est abélien.*

Preuve. C est pointée, et admet bien les produits et coproduits finis :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X \sqcup_0 Y \simeq X \sqcup Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \simeq X \times_0 Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On démontre aussi que $X \times Y$ est un coproduit, c'est à dire que le diagramme suivant est exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(\mathrm{id},0)}"] \\
Y \arrow[r, "{(0,\mathrm{id})}"] & X \times Y
\end{tikzcd}$$

Ce qui s'obtient à partir du diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(\mathrm{id},0)}"] & \\
Y \arrow[r, "{(0,\mathrm{id})}"] \arrow[d] & X \times Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Où le carré interne en bas à droite, le rectangle du bas et le rectangle de gauche sont exacts, donc le carré interne du haut à gauche est exact. Pour $\pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$, on définit comme dans une (1-)catégorie additive la somme $f+g$ par la composée $X \to X \oplus X \to Y \oplus Y \to Y$ $\square$

Encore mieux, on a le *splitting lemma* :

Lemme 3.3. *Soit $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z$ une suite exacte. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un rétract $r : Y \to X$ tel que $ri \simeq \mathrm{id}_X$*
2. *Il existe une section $s : Z \to Y$ tel que $ps \simeq \mathrm{id}_Z$*
3. *$Y \simeq X \oplus Y$ tel que*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\simeq"] & Z \\ & X \oplus Z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On omet la preuve, qui consiste à observer que la 3 implique naturellement la 1 et la 2, et que, supposant la 1, observer le diagramme suivant suffisamment longtemps permet d'en déduire la 3. L'implication de 2 à 3 se déduit dualement.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, equal] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] & 0 \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

Enfin, on finit par un résultat majeur qui présente les ∞-catégories comme une amélioration des catégories triangulées.

Définition 3.4. *Soit C une ∞-catégorie stable, hC sa (1-)catégorie homotopique. Un diagramme $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ de hC est un* ***triangle distingué*** *s'il existe un diagramme $\Delta^1 \times \Delta^2 \to \mathsf{C}$ de la forme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Z \arrow[r, "\tilde{h}"'] \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] & W \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

où

- *0 et $0'$ sont nuls.*
- *Les triangles sont exacts.*
- *$\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ représentent f et g.*
- *$Z \to X[1]$ est représenté par $\tilde{h}$ et l'isomorphisme $W \simeq X[1]$ (donné par l'exactitude du triangle externe, déduite de l'exactitude des deux triangles internes).*

On conclut alors par le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Soit C une ∞-catégorie stable. Alors hC est triangulée, et les triangles distingués sont donnés par la définition précédente.*

On s'abstient de prouver ce théorème. On pourra consulter dans [Lur09a] le théorème 3.11 ou dans [Lur17] le théorème 1.1.2.14 pour une démonstration. On s'attarde cependant sur quelques points de réflexion.

Tout d'abord, et à ma connaissance, il n'existe pas de réciproque à ce théorème. Autrement dit, toute catégorie triangulée n'est pas nécessairement la catégorie homotopique d'une certaine ∞-catégorie stable. Néanmoins, dans les cas usuels (catégories dérivées et spectres), on voit que la structure triangulée n'est que la *trace* 1-catégorique d'une propriété de stabilité ∞-catégorique.

En termes figurés : oublier le nuage des morphismes ambiants rend les choses nettement plus compliquées. En effet, la raison d'être de la structure triangulée est de traiter les défauts d'une catégorie de modèle stable ou d'une catégorie dérivée en imposant une *structure* supplémentaire. Une telle structure n'est pas canonique (il faut choisir une auto-équivalence et une classe de triangles). De même, un morphisme de catégorie triangulée est la donnée d'un foncteur F et d'un choix d'isomorphisme naturel $F\Sigma \cong \Sigma F$.

Les tentatives d'amélioration de la structure triangulée (à l'aide de *triangulations supérieures*) ne font que rendre le formalisme plus technique. Il est possible de montrer que la (1-)catégorie homotopique d'une ∞-catégorie stable peut être munie de ces triangulations supérieures à peu de frais : la stabilité encode *déjà* les axiomes supplémentaires, elle encode **toute** la structure triangulée.

Pour conclure, on met l'emphase sur ces deux idées :

1. La stabilité est une **propriété**, pas une structure.
2. Si la structure triangulée se comporte aussi mal, c'est parcequ'elle n'est que la trace d'une structure supérieure : **il manque le nuage**.

On retiendra le slogan suivant :

> Le cadre ∞-catégorie encode **déjà dans sa structure** la façon dont deux objets sont semblables.

Références

[Cno25] Bastiaan Cnossen. *Stable Homotopy Theory and Higher Algebra*. 2025. URL : https://drive.google.com/file/d/1ivHDIqclbg2hxmUEMTqmj2TnsAHQxVg9/view?usp=sharing.

[Lur09a] Jacob J. Lurie. *Derived Algebraic Geometry I*. 2009. URL : https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/DAG-I.pdf.

[Lur09b] Jacob J. Lurie. *Higher Topos Theory*. 2009. URL : https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf.

[Lur17] Jacob J. Lurie. *Higher Algebra*. 2017. URL : https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf.

[May91] J. Peter May. *Brave new worlds in stable homotopy theory*. 1991. URL : https://www.math.uchicago.edu/~may/PAPERS/WorldsNWU.pdf.