

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Modelagem de Sensores e Atuadores**  
**Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo**  
**de Estruturas**

Autor: **José Juliano de Lima Jr.**

Orientador: **Prof. Dr. José Roberto de França Arruda**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Modelagem de Sensores e Atuadores  
Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo  
de Estruturas**

Autor: **José Juliano de Lima Jr.**

Orientador: **Prof. Dr. José Roberto de França Arruda**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1999

S.P. – Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**TESE DE DOUTORADO**

# **Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas**

Autor: **José Juliano de Lima Jr.**

Orientador: **Prof. Dr. José Roberto de França Arruda**

---

**Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente  
DMC/FEM/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Sérgio Frascino Müller de Almeida  
IEMP/ITA/CTA**

---

**Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida  
DME/IEM/EFEI**

---

**Prof. Dr. Arthur Martins Barbosa Braga  
MEC/PUC-RIO**

---

**Prof. Dr. Renato Pavanello  
DMC/FEM/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles  
DMC/FEM/UNICAMP**

Campinas, 24 de fevereiro de 1999.

## DEDICATÓRIA

*À minha esposa Maria de Lourdes  
e aos meus filhos  
Eduardo André, Augusto César e Giselle Juliane.*

## AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, pela competência, dedicação, paciência e amizade.

Ao Prof. Dr. Renato Pavanello, pela colaboração e amizade.

Aos amigos, Allan Kardec Araújo Pereira, Fernando José de Oliveira Moreira, João Francisco Foganholi, Khaled Mohamed Ahmida e Virgílio Mendonça da Costa e Silva, pelo permanente incentivo, colaboração, amizade, momentos de lazer e inesquecível convívio profissional.

Aos colegas da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, José Celio Dias, Márcio Tadeu de Almeida, Paulo Shigueme Ide e Wlamir Carlos de Oliveira, pelo apoio e valiosas sugestões, que contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, representado pelos seus dedicados Professores e Funcionários, pela oportunidade que me concedeu na realização deste trabalho, e aos amigos desse Departamento, pelo convívio profissional.

À CAPES, através do Programa PICD, pelo apoio financeiro.

À FAPESP que financiou essa importante pesquisa.

Aos meus pais, Juliano e Lourdes, que sempre me incentivaram na formação e no desenvolvimento cultural.

*If you can dream, you can do it.*

# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 APLICAÇÕES EM CONTROLE DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS .....	2
1.2 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO .....	7
1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	7
1.4 CONTEÚDO .....	8
<b>CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DE CASCA, PLACA E VIGA PARA MATERIAIS PIEZOCERÂMICOS.....</b>	<b>10</b>
2.1 EQUAÇÕES DE CASCA .....	10
2.1.1 Considerações Básicas .....	10
2.1.2 Sistema de Coordenadas.....	12
2.1.3 Relações entre Deformação e Deslocamento .....	14
2.1.4 Relações Constitutivas .....	17
2.1.5 Forças e Momentos Resultantes .....	18
2.1.6 Equações de Equilíbrio .....	20
2.2 EQUAÇÕES DE PLACA .....	21
2.2.1 Placa de Kirchhoff.....	21
2.2.2 Placa de Reissner-Mindlin .....	24
2.3 EQUAÇÕES DE VIGA.....	27
2.3.1 Viga de Euler - Bernoulli .....	27
2.3.2 Viga de Timoshenko .....	28
2.4 INFLUÊNCIA DA CERÂMICA PIEZELÉTRICA NA EQUAÇÃO ESTRUTURAL .....	30
2.4.1 Interação Cerâmica Piezelétrica e Placa Retangular .....	30

2.4.1.1	Forças e momentos internos .....	30
2.4.1.2	Forças e momentos externos .....	34
2.4.2	Interação Cerâmica Piezelétrica e Viga.....	39

### **CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE PIEZELETRICIDADE.....41**

3.1	EQUAÇÃO VARIACIONAL PARA MEIOS PIEZELÉTRICOS .....	42
3.2	ELEMENTO SÓLIDO TRILINEAR DE OITO NÓS .....	43
3.2.1	Aproximação por Elementos Finitos .....	43
3.2.2	Energia Potencial .....	48
3.2.3	Energia Cinética .....	54
3.2.4	Trabalho .....	55
3.2.5	Equação de Equilíbrio .....	56
3.2.6	Condensação dos Graus de Liberdade Internos .....	57
3.2.7	Determinação dos Elementos de $\left[ \tilde{k}_{qq}^* \right]$ .....	57
3.2.8	Sistema Global de Equações .....	59
3.2.9	Equações do Sensor e Atuador Piezelétrico .....	60
3.3	VIGA DE EULER - BERNOULLI.....	61
3.3.1	Aproximação por Elementos Finitos .....	62
3.3.2	Energia Potencial .....	63
3.3.3	Energia Cinética .....	67
3.3.4	Trabalho .....	68
3.3.5	Sistema Global de Equações .....	68
3.3.6	Equações do Sensor e Atuador Piezelétrico .....	69
3.4	VIGA DE TIMOSHENKO.....	70
3.4.1	Aproximação por Elementos Finitos.....	71
3.4.2	Energia Potencial .....	73
3.4.3	Energia Cinética .....	77
3.4.4	Trabalho .....	77
3.4.5	Sistema Global de Equações .....	78
3.5	PLACA DE KIRCHHOFF .....	79
3.5.1	Aproximação por Elementos Finitos.....	80
3.5.2	Energia Potencial .....	82
3.5.3	Energia Cinética .....	86



3.5.4 Trabalho .....	87
3.5.5 Sistema Global de Equações .....	88
3.6 PLACA DE REISSNER-MINDLIN .....	89
3.6.1 Aproximação por Elementos Finitos .....	90
3.6.2 Energia Potencial .....	94
3.6.3 Energia Cinética .....	98
3.6.4 Trabalho .....	99
3.6.5 Sistema Global de Equações .....	100

## **CAPÍTULO 4 - VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS .....101**

4.1 ELEMENTO TRILINEAR DE OITO NÓS.....	102
4.1.1 Viga Livre - Livre Modelada com 50 Elementos.....	103
4.1.2 Placa Totalmente Livre - Malha de 16 x16 Elementos .....	104
4.1.3 Elemento Piezocerâmico com Potencial Elétrico Aplicado .....	105
4.1.4 Elemento Piezocerâmico com Carga Externa .....	108
4.1.5 Viga de Alumínio Coberta por Cerâmicas Piezelétricas .....	109
4.2. ELEMENTOS DE VIGA DE EULER-BERNOULLI E TIMOSHENKO .....	111
4.2.1 Elemento de viga de Euler-Bernoulli .....	111
4.2.2 Elemento de viga de Timoshenko .....	115
4.2.3 Viga piezelétrica de PVDF.....	119
4.3 ELEMENTOS DE PLACA DE KIRCHHOFF E REISSNER - MINDLIN .....	124
4.3.1 Frequências Naturais para uma Placa Totalmente Livre .....	125
4.3.2 Placa de Grafite/Epoxy com Atuadores Piezelétricos Distribuídos .....	131

## **CAPÍTULO 5 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....135**

5.1 VIGA LIVRE - LIVRE.....	135
5.1.1 Descrição do Experimento. ....	135
5.1.2 Ensaio de Identificação .....	142
5.1.3 Modelo via M.E.F. ....	145
5.1.4 Controle Ativo da Estrutura. ....	151
5.2 PLACA TOTALMENTE LIVRE .....	154
5.2.1 Descrição do Experimento .....	154
5.2.2 Ensaio de Identificação .....	156

5.2.3 Modelo via M.E.F. ....	160
------------------------------	-----

## **CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES .....165**

6.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	165
-----------------------------------	-----

6.2 PROPOSTAS .....	169
---------------------	-----

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....170**

## **APÊNDICE A - PRINCÍPIO VARIACIONAL APLICADO EM MEIOS PIEZELÉTRICOS .....188**

EQUAÇÕES PARA MEIOS DIELÉTRICOS .....	189
---------------------------------------	-----

EQUILÍBRIO ELÉTRICO.....	193
--------------------------	-----

EQUILÍBRIO MECÂNICO.....	194
--------------------------	-----

## **APÊNDICE B - MANUSEIO DE ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS .....201**

CORTE DA CERÂMICA .....	201
-------------------------	-----

COLAGEM DA CERÂMICA .....	204
---------------------------	-----

CONEXÃO DO ELETRODO NA CERÂMICA.....	205
--------------------------------------	-----

Adesivo Condutivo.....	205
------------------------	-----

Fita Adesiva Condutiva.....	207
-----------------------------	-----

DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS.....	207
-------------------------------	-----

## RESUMO

**LIMA JR., J. J. de (1999)**, *Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas*, Tese de Doutorado, Depto. de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 243p.

Apresenta-se uma metodologia para a modelagem analítica e numérica de estruturas, com elementos piezelétricos incorporados. Obtêm-se modelos analíticos de placa de Kirchhoff e Mindlin–Reissner e de viga de Euler–Bernoulli e Timoshenko, a partir das equações de movimento de casca, com a aplicação dos Postulados de Love e da escolha apropriada dos raios de curvaturas e dos Parâmetros de Lamé. Em seguida, são consideradas, nos modelos, as influências do elemento piezelétrico.

O princípio variacional, aplicado em meios piezelétricos, é obtido com o auxílio da energia potencial mecânica da estrutura e elétrica do material piezelétrico. Com base nesse princípio, vários modelos numéricos são desenvolvidos, usando o método dos elementos finitos, tais como o modelo que usa o elemento sólido 3D, modelos de placa de Kirchhoff e Mindlin–Reissner e de viga de Euler–Bernoulli e Timoshenko. Desenvolve-se um programa computacional para a realização da análise estática e dinâmica de estruturas, com elementos piezelétricos incorporados. Simulações numéricas e experimentais são efetuadas e os resultados gerados são comparados entre si e com os dados disponíveis em algumas das referências bibliográficas citadas.

Experimentos são conduzidos com o objetivo de validar os modelos desenvolvidos e de realizar o controle ativo de uma estrutura tipo viga. São descritas as técnicas de manuseio aplicadas nos elementos piezelétricos.

O controle ativo é aplicado nessa estrutura, segundo duas estratégias de se projetar o controlador, a saber: na primeira, o projeto do controlador é realizado com base na dinâmica identificada e, na segunda, com base no modelo numérico. Conclui-se que o modelo numérico contribui para o sucesso do controlador.

### *Palavras Chaves*

Método dos Elementos Finitos, Transdutores Piezoelétricos, Materiais Piezoelétricos, Placas e Cascas Elásticas, Vigas.

## ABSTRACT

LIMA JR., J. J. de (1999), *Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators with Applications in Active Control of Structures*, Ph. D. Thesis, Depto. de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 243p.

An analytical and numerical approach for modelling intelligent structures with incorporated piezoelectric elements is presented. Analytical models of Kirchhoff and Mindlin–Reissner plates and of Euler–Bernoulli and Timoshenko beams are obtained from equations of motion of structures having shell characteristics with the application of the Love Postulates and judicious choices of the curvature radii and Lamé Parameters. Then, the effects of the piezoelectric element are taken into account in the models.

The variational principle for piezoelectric media is obtained by considering both the potential mechanical energy of the structures and the electrical energy of the piezoelectric material. Based in this principle, various numerical models are developed by applying the finite element method: such as the 3D solid element model, the Kirchhoff and Mindlin–Reissner plate models and the Euler–Bernoulli and Timoshenko beam models. A computer program is developed for the static and dynamical analyses of structures with incorporated piezoelectric elements. A range of numerical simulations and experimental tests are carried out and the results are compared to each other and to available data found in the literature.

Experimental procedures are conducted to validate developed numerical models and to implement the active control of a beam type structure. Also, techniques for the handling of piezoelectric elements are described.

Two control design approaches are implemented: the first uses the identified model, the other is based on numerical model parameters. It is concluded that the numerical model contributes to the successful implementation of the controller.

### *Key Words*

Finite Element Method, Piezoelectric Transducers, Piezoelectric Materials, Elastic Plates and Shells, Beams.

## LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1 - Elemento de Casca.....</i>	<i>i</i>
<i>Figura 2 - Forças Resultantes no Elemento de Casca. ....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 3 - Momentos Resultantes no Elemento de Casca.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 4 - Deformação Normal na Placa. ....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 5 - Fixação da Cerâmica Piezelétrica na Placa. ....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 6 - Conjunto de PZTs Ativos, Colados sobre uma Placa Retangular .....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 7 - Elemento Trilinear de Oito Nós.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 8 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro.....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 9 - Parâmetros Dimensionais do Elemento Viga / PZT .....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 10 - Elemento de Viga Piezelétrico .....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 11 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 12 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro.....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 13 - Parâmetros Dimensionais do Elemento Placa / PZT .....</i>	<i>80</i>
<i>Figura 14 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 15 - Elemento de Placa MITC4.....</i>	<i>91</i>
<i>Figura 16 – Fluxograma Resumido do Programa SMART MEF .....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 17 – Geometria Indeformada (SMART MEF).....</i>	<i>103</i>
<i>Figura 18 – Modo de Vibração (SMART MEF).....</i>	<i>103</i>
<i>Figura 19 – Geometria Indeformada (SMART M.E.F.).....</i>	<i>104</i>
<i>Figura 20 - Modos de Vibração (SMART MEF).....</i>	<i>105</i>
<i>Figura 21 – Elemento Piezocerâmico com Tensão Elétrica Aplicada (SMART MEF).....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 22 - Geometria Deformada do Elemento PZT com Potencial Elétrico Aplicado. ....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 23 - Potencial Elétrico sobre o Elemento PZT (SMART MEF). ....</i>	<i>107</i>
<i>Figura 24 - Elemento Carregado e Condições de Contorno (SMART MEF). ....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 25 - Geometria Deformada devido a F (SMART MEF). ....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 26 –Viga em Balanço, Modelada com Elementos Trilineares de Oito Nós .....</i>	<i>109</i>
<i>Figura 27 - Geometria Deformada após a Aplicação de 1 V (SMART MEF).....</i>	<i>110</i>

<i>Figura 28 - Frequências Naturais - Viga de Euler - Bernoulli.....</i>	<i>113</i>
<i>Figura 29 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Euler – Bernoulli .....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 30 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Euler – Bernoulli .....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 31 -Frequências Naturais - Viga de Timoshenko.....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 32 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Timoshenko .....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 33 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Timoshenko .....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 34 - Desvios Percentuais Relativos – Comparação entre os Modelos.....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 35 – Viga Piezelétrica Formada por duas Camadas de PVDF .....</i>	<i>120</i>
<i>Figura 36 – Deflexão da Viga de PVDF, devido à Voltagem Aplicada de 1 V .....</i>	<i>121</i>
<i>Figura 37 – Desvios Percentuais Relativos das Deflexões Devido a Aplicação de 1 V .....</i>	<i>121</i>
<i>Figura 38 – Distribuição da Voltagem em Função da Flexão da Viga.....</i>	<i>122</i>
<i>Figura 39 – Deflexão da Extremidade da Viga de PVDF Versus Voltagens Aplicadas.....</i>	<i>123</i>
<i>Figura 40 – Frequências Naturais Adimensionais: Elemento 3D Sólido .....</i>	<i>127</i>
<i>Figura 41 – Frequências Naturais Adimensionais: Kirchhoff.....</i>	<i>128</i>
<i>Figura 42 – Frequências Naturais Adimensionais: Reissner-Mindlin .....</i>	<i>128</i>
<i>Figura 43 – Desvios Percentuais Relativos: Elemento 3D Sólido.....</i>	<i>129</i>
<i>Figura 44 – Desvios Percentuais Relativos: Kirchhoff.....</i>	<i>129</i>
<i>Figura 45 – Desvios Percentuais Relativos: Reissner-Mindlin .....</i>	<i>130</i>
<i>Figura 46 – Desvios Percentuais Relativos: Comparação entre os Elementos.....</i>	<i>130</i>
<i>Figura 47 – Placa Usada no Experimento de Crawley .....</i>	<i>131</i>
<i>Figura 48 – Comparação entre a Flexão Longitudinal Experimental e Simulada.....</i>	<i>133</i>
<i>Figura 49 – Comparação entre a Flexão Transversal Experimental e Simulada .....</i>	<i>133</i>
<i>Figura 50 – Esquema da Montagem Utilizada nos Ensaios. ....</i>	<i>137</i>
<i>Figura 51 - Movimento de flexão do Atuador PZT. ....</i>	<i>138</i>
<i>Figura 52 – Esquema do Conjunto Estrutura, Sensores e Atuadores com dimensões em mm.....</i>	<i>141</i>
<i>Figura 53 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{11}</math>.....</i>	<i>143</i>
<i>Figura 54 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{12}</math>.....</i>	<i>143</i>
<i>Figura 55 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{21}</math>.....</i>	<i>144</i>
<i>Figura 56 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{22}</math>.....</i>	<i>144</i>
<i>Figura 57 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF – <math>G_{11}</math>.....</i>	<i>147</i>
<i>Figura 58 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF – <math>G_{12}</math>.....</i>	<i>147</i>
<i>Figura 59 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF – <math>G_{21}</math>.....</i>	<i>148</i>
<i>Figura 60 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF – <math>G_{22}</math>.....</i>	<i>148</i>
<i>Figura 61 – Frequências dos Modelos Identificado e M.E.F. ....</i>	<i>150</i>
<i>Figura 62 – Desvios Relativos Percentuais entre os Modelos Identificado e MEF.....</i>	<i>150</i>
<i>Figura 63 – Diagrama do Controlador Implementado no Ambiente dSPACE.....</i>	<i>151</i>
<i>Figura 64 – Comparação entre os Controladores Projetados .....</i>	<i>152</i>
<i>Figura 65 – Comparação entre o Controlador MEF e Identificado – Zoom .....</i>	<i>152</i>



<i>Figura 66 – Esquema da Montagem utilizada nos Ensaios.....</i>	<i>155</i>
<i>Figura 67 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{11}</math>.....</i>	<i>157</i>
<i>Figura 68 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{21}</math>.....</i>	<i>157</i>
<i>Figura 69 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{12}</math>.....</i>	<i>158</i>
<i>Figura 70 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{22}</math>.....</i>	<i>158</i>
<i>Figura 71 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{13}</math>.....</i>	<i>159</i>
<i>Figura 72 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real – <math>G_{23}</math>.....</i>	<i>159</i>
<i>Figura 73 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real – <math>G_{11}</math>.....</i>	<i>160</i>
<i>Figura 74 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real – <math>G_{21}</math>.....</i>	<i>161</i>
<i>Figura 75 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real – <math>G_{12}</math>.....</i>	<i>161</i>
<i>Figura 76 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real – <math>G_{22}</math>.....</i>	<i>162</i>
<i>Figura 77 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real – <math>G_{13}</math>.....</i>	<i>162</i>
<i>Figura 78 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real – <math>G_{23}</math>.....</i>	<i>163</i>
<i>Figura 79 – Frequências Naturais dos Modelos Identificado e M.E.F. ....</i>	<i>164</i>
<i>Figura 80 – Desvios Relativos Percentuais entre o Modelo Identificado e MEF.....</i>	<i>164</i>
<i>Figura 81 - Sólido Composto por um Condutor e um Dielétrico.....</i>	<i>189</i>
<i>Figura 82 - Superfície de um Sólido .....</i>	<i>195</i>
<i>Figura 83 – Preparação da Cerâmica para o Corte .....</i>	<i>202</i>
<i>Figura 84 – Corte da Cerâmica.....</i>	<i>202</i>
<i>Figura 85 – Fixação da Cerâmica para posterior Corte.....</i>	<i>203</i>
<i>Figura 86 – Procedimento para Lixar Superfície Cortada da Cerâmica .....</i>	<i>203</i>
<i>Figura 87 – Colagem do Fio Elétrico com Adesivo Condutivo .....</i>	<i>205</i>
<i>Figura 88 – Colagem do Fio Elétrico com uma Chapa de Material Condutivo.....</i>	<i>206</i>
<i>Figura 89 – Colagem do Fio Elétrico com uma Fita Condutiva .....</i>	<i>207</i>
<i>Figura 90 – Dispositivo Eletrônico Empregado com o Piezo.....</i>	<i>208</i>
<i>Figura 91 – Acoplador de Impedância .....</i>	<i>209</i>

## LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1 - Freqüências Naturais.....</i>	<i>104</i>
<i>Tabela 2 - Freqüências Naturais.....</i>	<i>105</i>
<i>Tabela 3 – Propriedades da Cerâmica Piezelétrica. ....</i>	<i>106</i>
<i>Tabela 4 – Campo de Deslocamentos no Elemento de PZT devido à Voltagem Aplicada. ....</i>	<i>107</i>
<i>Tabela 5 - Freqüências Naturais.....</i>	<i>107</i>
<i>Tabela 6- Campo de Deslocamentos e Tensão Elétrica em uma Placa de PZT, devido à F. ....</i>	<i>109</i>
<i>Tabela 7 – Campo de Deslocamentos após a Aplicação de 1 V. ....</i>	<i>110</i>
<i>Tabela 8 – Freqüências Naturais em Hz – Viga de Euler – Bernoulli.....</i>	<i>112</i>
<i>Tabela 9 – Desvios Percentuais Relativos – <math>(freq/freq\_analítica-1)*100</math> .....</i>	<i>112</i>
<i>Tabela 10 – Número de Flops Obtidos em cada Etapa do Cálculo.....</i>	<i>112</i>
<i>Tabela 11 – Freqüência Natural Hz – Viga de Timoshenko.....</i>	<i>115</i>
<i>Tabela 12 - Desvios Percentuais Relativos – <math>(freq/freq\_analítica-1)*100</math>.....</i>	<i>116</i>
<i>Tabela 13 – Número de Flops Obtidos em cada Etapa do Cálculo.....</i>	<i>116</i>
<i>Tabela 14 – Propriedades do Material Piezelétrico – PVDF.....</i>	<i>120</i>
<i>Tabela 15 – Freqüências Naturais Adimensionais: Placa Totalmente Livre .....</i>	<i>125</i>
<i>Tabela 16 – Desvios Percentuais Relativos: <math>(freq/freq\_Leissa-1)*100</math>.....</i>	<i>126</i>
<i>Tabela 17 – Características Principais dos Modelos de Placa .....</i>	<i>126</i>
<i>Tabela 18 – Propriedades da Cerâmica Piezelétrica e do Compósito .....</i>	<i>132</i>
<i>Tabela 19 – Propriedades da Cerâmica Piezelétrica e do Material da Viga. ....</i>	<i>138</i>
<i>Tabela 20 – Nomenclatura dos Gráficos de Identificação.....</i>	<i>142</i>
<i>Tabela 21 – Comparação entre o Modelo Identificado e o Gerado via M.E.F. ....</i>	<i>149</i>
<i>Tabela 22 – Atenuação dos Modos para os Controladores Identificado e MEF.....</i>	<i>153</i>
<i>Tabela 23 – Tamanho e Posicionamento dos Elementos na Placa.....</i>	<i>155</i>
<i>Tabela 24 – Nomenclatura dos Gráficos de Identificação.....</i>	<i>156</i>
<i>Tabela 25 – Comparação entre os Modelos Identificado e M.E.F. ....</i>	<i>163</i>
<i>Tabela 26 – Características Principais dos Adesivos.....</i>	<i>205</i>
<i>Tabela 27 – Características Principais dos Adesivos Condutivos.....</i>	<i>206</i>



## LISTA DE FOTOS

<i>Foto 1 – Vista Geral da Bancada de Ensaios. ....</i>	<i>136</i>
<i>Foto 2 – Sensor de PZT e Acoplador de Impedância.....</i>	<i>137</i>
<i>Foto 3 – PZT Atuador, Visto de um Lado da Viga.....</i>	<i>139</i>
<i>Foto 4 – PZT Atuador, Visto do outro Lado da Viga.....</i>	<i>139</i>
<i>Foto 5 –Shaker de Distúrbio com Transdutor de força. ....</i>	<i>139</i>
<i>Foto 6 – Conjunto Shaker, Transdutor de força e Condicionador de Sinais.....</i>	<i>140</i>
<i>Foto 7 – Sensor PVDF. ....</i>	<i>140</i>

# SIMBOLOGIA

## Caracteres Latinos

$a$	comprimento
$\tilde{a}$	deslocamento ampliado para os graus de liberdade internos - deslocamento e potencial elétrico
$\vec{A}$	campo vetorial
$A$	área ( $m^2$ )
$A_\alpha, A_\beta$	parâmetros de Lamé
$b$	largura
$b_{pe}$	largura do PZT
$\vec{B}$	indução magnética (weber/m <sup>2</sup> )
$[B]$	primeira derivada ampliado - derivadas de deslocamento e potencial elétrico
$[B_q], [B_u], [B_w]$	primeira derivada das funções de interpolação para o deslocamento
$[B_v]$	primeira derivada das funções de interpolação
$[B'_w], [B_\kappa]$	segunda derivada das funções de interpolação para o deslocamento
$[B_\theta]$	primeira derivada das funções de interpolação para o ângulo de rotação
$[B_\gamma]$	primeira derivada do deslocamento vertical menos a função de interpolação para o ângulo de rotação
$[B_\phi], [B_{\phi u}], [B_{\phi w}]$	primeira derivada das funções de interpolação para o potencial elétrico

$[B_{\phi\theta}], [B_{\phi\gamma}]$	primeira derivada das funções de interpolação para o potencial elétrico
$C_L$	coeficiente relacionando as propriedades do material
$[c]$	matriz elasticidade (Pa)
$[c_{pe}], [c_{st}]$	matriz função do coeficiente de Poisson.
$[c_K^{pe}], [c_K^{st}]$	matriz elasticidade para o elemento de placa(Pa)
$[c^E]$	elasticidade para campo elétrico constante (Pa)
$[C_{qq}]$	amortecimento global
$d_i$	coeficientes do polinômio de interpolação
$d_{15}, d_{31}, d_{33}$	coeficiente de carga piezelétrico (m/V)
$\{d_i\}$	vetor dos coeficientes do polinômio de interpolação
$[d]$	constantes de deformação piezelétrica (m/V)
$dS$	superfície elementar
$dV$	volume elementar
$D$	coeficiente de rigidez à flexão das placa
$D_k, D_3$	deslocamento elétrico nas direções $k$ e 3, respectivamente (C/m <sup>2</sup> )
$\bar{D}, \{D\}$	deslocamento elétrico (C/m <sup>2</sup> )
$e_i, e_x, e_y, e_z$	deformação normal em um ponto arbitrário do material
$e_{31}, e_{15}$	constantes de tensão piezelétrica (C/m <sup>2</sup> )
$[e]$	constantes de tensão piezelétrica (C/m <sup>2</sup> )
$E$	Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade Longitudinal (Pa)
$\bar{E}$	Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade Longitudinal Corrigido
(Pa)	
$E_k, E_3$	campo elétrico na direção $k$ e 3, respectivamente (V/m)
$\vec{E}, \{E\}$	campo elétrico (V/m)
$f_d$	força de inércia de D'Alembert
$\{f_q\}, \{F_q\}$	força ampliada - força de corpo, força de superfície e força concentrada

$\{f_S\}, \{\bar{f}_S\}$	força de superfície
$\{f_{sq}\}, \{\tilde{f}_{sq}\}$	força ampliada incluindo força de superfície e carga elétrica distribuída na superfície
$\{f_V\}, \{\bar{f}_V\}$	força de corpo
$\{f_C\}$	força concentrada
$\bar{F}$	vetor força
$\{F_\phi\}$	força elétrica gerada pelo atuador
$g_1, g_2, g_3$	coeficientes métricos
$G$	módulo de elasticidade transversal (Pa)
$\bar{G}$	módulo de elasticidade transversal corrigido (Pa)
$[G]$	primeira derivada ampliada para os g.d.l. internos - derivadas de deslocamento e potencial elétrico
$[G_q]$	primeira derivada das funções de interpolação do deslocamento para os graus de liberdade internos
$[G_\phi]$	primeira derivada das funções de interpolação do potencial elétrico para os graus de liberdade internos
$h$	altura, espessura
$h_2, h_3$	constantes
$h_a^3, h_b^2, h_c$	alturas que são funções da espessura do elemento estrutural e do elemento piezelétrico
$h_{pe}, h_{pe1}, h_{pe2}$	espessura do PZT
$I$	momento de inércia (m <sup>4</sup> )
$[J]$	Jacobiano
$k$	constante
$[k]$	rigidez ampliada do elemento piezelétrico
$[k_{aa}]$	rigidez do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento
$[k_{aa}^i]$	rigidez inversa do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento

- $[k_{ab}]$  rigidez do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento e potencial elétrico
- $[k_{ab}^i]$  rigidez inversa do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento e potencial elétrico
- $[k_{ba}]$  rigidez do elemento com g.d.l. internos para o potencial elétrico e deslocamento
- $[k_{ba}^i]$  rigidez inversa do elemento com g.d.l. internos para o potencial elétrico e deslocamento
- $[k_{bb}]$  rigidez dielétrica do elemento com g.d.l. para o potencial elétrico
- $[k_{bb}^i]$  rigidez dielétrica inversa do elemento com g.d.l. para o potencial elétrico
- $[k_{aq}]$  rigidez do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento
- $[k_{bq}]$  rigidez piezelétrica do elemento com g.d.l. internos para o potencial elétrico
- $[k_{a\phi}]$  rigidez piezelétrica do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento
- $[k_{b\phi}]$  rigidez piezelétrica do elemento com g.d.l. internos para o potencial elétrico
- $[k_{qa}]$  rigidez do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento
- $[k_{qb}]$  rigidez piezelétrica do elemento com g.d.l. internos para o potencial elétrico
- $[k_{\phi a}]$  rigidez piezelétrica do elemento com g.d.l. internos para o deslocamento
- $[k_{\phi b}]$  rigidez dielétrica do elemento com g.d.l. internos para o potencial elétrico
- $[k_{qq}]$  rigidez do elemento
- $[k_{q\phi}]$  rigidez piezelétrica do elemento
- $[k_{\phi q}]$  rigidez piezelétrica do elemento
- $[k_{\phi\phi}]$  rigidez dielétrica do elemento
- $[k_{qq}^*]$  rigidez condensada do elemento
- $[k_{q\phi}^*]$  rigidez piezelétrica condensada do elemento
- $[k_{\phi q}^*]$  rigidez piezelétrica condensada do elemento



$\left[ \tilde{k}_{aa} \right]$	rigidez ampliada do elemento com g.d.l. internos
$\left[ \tilde{k}_{aq} \right]$	rigidez ampliada do elemento com g.d.l. internos
$\left[ \tilde{k}_{qa} \right]$	rigidez ampliada do elemento com g.d.l. internos
$\left[ \tilde{k}_{qq} \right]$	rigidez ampliada do elemento
$\left[ \tilde{k}_{qq}^* \right]$	rigidez ampliada do elemento com matrizes de rigidez condensada
$\left[ K_{qq}^* \right]$	rigidez condensada global
$\left[ K_{qq}^+ \right]$	rigidez reduzida global
$l, L$	comprimentos
$l_\alpha, l_\beta$	comprimentos nas direções $\alpha$ e $\beta$ , respectivamente
$\left[ L_q \right]$	operador diferencial
$m_\alpha, m_\beta, m_n$	momento externo por unidade de comprimento (Nm/m)
$M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$	momento por unidade de comprimento (Nm/m)
$M_{\alpha\beta}$	momento no plano $\alpha\beta$ por unidade de comprimento (Nm/m)
$\left[ m_{qq} \right]$	massa do elemento
$\left[ M_{qq} \right]$	massa global
$\left[ \tilde{m}_{qq} \right]$	massa ampliada do elemento
$\hat{n}$	vetor unitário normal
$N_i$	função de interpolação
$N_\alpha, N_\beta$	força por unidade de comprimento (N/m)
$N_{\alpha\beta}$	força por unidade de comprimento no plano $\alpha\beta$ (N/m)
$\left[ N_q \right]$	função de interpolação para os deslocamentos generalizados
$\left[ N_w \right]$	função de interpolação para os deslocamentos $w$
$\left[ N_u \right]$	função de interpolação para o deslocamento $u$

$[N_\theta]$	função de interpolação para os ângulos de rotação
$[N_{q\phi}]$	função de interpolação ampliada para o deslocamento e potencial elétrico
$[N_\phi]$	função de interpolação para o potencial elétrico
$p_1, p_2$	pontos sobre o elemento de casca
$\vec{P}$	vetor de polarização (C/m <sup>2</sup> )
$P_m$	funções de interpolação para os graus de liberdades internos
$\{P\}$	vetor com as variáveis independentes do polinômio de interpolação
$\vec{q}$	carga externa por comprimento (N/m)
$q_\alpha, q_\beta, q_n$	carga externa por comprimento (N/m)
$q_0$	carga elétrica de prova (C)
$\{q\}$	deslocamento (aproximação por elementos finitos)
$\{q_i\}$	deslocamento nodal
$\{\tilde{q}_m\}$	deslocamento nodal dos graus de liberdade internos
$\{q_S\}$	carga elétrica de superfície do elemento
$\{Q_S\}$	carga elétrica global de superfície
$Q$	carga elétrica total sobre o corpo (C)
$Q_\alpha, Q_\beta$	força de cisalhamento por unidade de comprimento (N/m)
$\vec{r}$	vetor posição de um ponto sobre a superfície média da casca
$\vec{R}$	vetor posição de um ponto qualquer da casca
$R_\alpha, R_\beta$	raios de curvatura
$[R]$	propriedades do material piezelétrico
$s$	comprimento de arco (m)
$S$	área
$S_{1,2}, \hat{S}_{1,2}$	função indicadora
$S_\alpha, S_\beta$	áreas nas direções $\alpha$ e $\beta$ , respectivamente
$S_C$	área do condutor

$S_f$	superfície onde são aplicadas as forças $\bar{f}_S$
$S_u$	superfície onde são impostos os deslocamentos $u$
$t, t_1, t_2$	tempo (s)
$T$	energia cinética
$[Tr]$	matriz transformação que depende das coordenadas nodais
$v, \bar{v}$	deslocamento
$V$	domínio do sólido
$\tilde{V}$	deslocamento arbitrário de um ponto do material
$V_\infty$	domínio total menos do sólido (vácuo)
$u, \bar{u}, \hat{u}, u_1$	deslocamento
$\{u\}$	deslocamento
$\tilde{u}$	deslocamento nodal ampliado - deslocamento e potencial elétrico nodais
$\tilde{U}$	deslocamento de um ponto arbitrário do material
$U$	energia potencial
$U_d$	energia dielétrica
$w, \bar{w}$	deslocamento
$W$	trabalho externo
$\tilde{W}$	deslocamento de um ponto arbitrário do material
$x$	coordenada cartesiana
$\bar{x}$	ponto médio na direção $x$
$[X_q]$	funções de interpolação dos graus de liberdade internos para o deslocamento
$[X_\phi]$	funções de interpolação dos graus de liberdade internos para o potencial elétrico
$y$	coordenada cartesiana
$\bar{y}$	ponto médio na direção $y$
$z$	coordenada cartesiana
$[z]$	matriz que é uma função da coordenada $z$

## Caracteres Gregos

$\alpha, \beta$	coordenadas curvilíneas
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$	vetores unitários normais
$\gamma_{jk}, \gamma_{\alpha z}, \gamma_{\beta z}$	tensão de cisalhamento em um ponto arbitrário do material
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	tensão de cisalhamento em um ponto arbitrário do material
$\varepsilon_{kj}, \hat{\varepsilon}_{kj}, \{\varepsilon\}$	tensor deformação
$\varepsilon_0$	constante de permissividade do vácuo - $8,85418 \times 10^{-12}$ (F/m)
$\zeta$	coordenada isoparamétrica
$\xi$	coordenada isoparamétrica
$\xi_{33}^{\varepsilon}$	dielétrico para deformação constante (F/m)
$\left[ \xi^{\varepsilon} \right]$	dielétrico para deformação constante (F/m)
$\left[ \xi^{\sigma} \right]$	dielétrico para tensão constante (F/m)
$\eta$	coordenada isoparamétrica
$\theta$	ângulo
$\theta_{\alpha}, \theta_{\beta}$	ângulo de rotação da normal em relação à superfície média
$\theta_x, \theta_y$	ângulo de rotação
$\kappa_{\alpha}, \kappa_{\beta}$	mudanças na curvatura da superfície média
$\{\kappa\}$	vetor que é função das derivadas de segunda ordem do deslocamento
$\mu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	densidade volumétrica de massa (N/m <sup>3</sup> )
$\rho_i$	densidade volumétrica de carga induzida (C/m <sup>3</sup> )
$\rho_q$	densidade volumétrica de carga elétrica (C/m <sup>3</sup> )
$\rho_{si}$	densidade superficial de carga induzida (C/m <sup>2</sup> )
$\sigma_z, \sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$	tensão normal (Pa)
$\sigma_{\beta z}, \sigma_{\alpha z}, \sigma_{\alpha\beta}$	tensões tangenciais (Pa)

$\sigma_{kj}, \{\sigma\}$	tensor tensão mecânica (Pa)
$\sigma_q$	densidade superficial de carga elétrica (C/m <sup>2</sup> )
$\phi, \bar{\phi}$	campo escalar, potencial elétrico (V)
$\{\phi_i\}$	potencial elétrico nodal
$\{\tilde{\phi}_m\}$	potencial elétrico nodal com graus de liberdade internos
$\tau$	torção
$\chi$	função característica
$\varphi$	constante usada nas funções de interpolação para a viga de Timoshenko

## Caracteres Superiores

$T$	transposta de uma matriz ou vetor
$\rightarrow$	vetor
$-1$	inversa de uma matriz

## Índices Inferiores

$k$	notação indicial ( $k=1, 2$ e $3$ )
$j$	notação indicial ( $j=1, 2$ e $3$ )
$i$	variável nodal
$m$	variável nodal para os graus de liberdade internos
$pe$	relativo ao material piezelétrico
$st$	relativo ao material estrutural
$x, y, z$	direções cartesianas

## Operadores

$,k$	derivada com relação a $k$
$,j$	derivada com relação a $j$
$,\zeta$	derivada com relação a $\zeta$
$,\eta$	derivada com relação a $\eta$
$,\xi$	derivada com relação a $\xi$
$\delta$	operador variacional
$\Delta$	variação
$\nabla$	operador diferencial vetorial (nabla)
$\cdot, \frac{\partial}{\partial t}$	primeira derivada com relação ao tempo
$\cdot\cdot, \frac{\partial^2}{\partial t^2}$	segunda derivada com relação ao tempo

$$', \frac{\partial}{\partial x}$$

primeira derivada com relação a  $x$

$$'', \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

segunda derivada com relação a  $x$

$$\oint$$

integral em uma superfície fechada

$$[ \ ]$$

matriz

$$\{ \}$$

vetor

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Recentemente, um novo enfoque no controle de vibrações em estruturas flexíveis tem sido alvo de estudos de vários pesquisadores. Segundo esse enfoque, uma estrutura pode ter a sua resposta minimizada, utilizando de forma integrada elementos ativos, como sensores e atuadores, e controladores. Conseqüentemente, essa integração capacitaria o sistema a responder de modo controlado à excitações externas, procurando compensar os efeitos, que levariam sua resposta a se afastar de patamares aceitáveis. Hoje, esses sistemas, integrando estrutura, sensores, atuadores e controladores, são conhecidos como *Estruturas Inteligentes*.

Várias tecnologias e materiais têm sido investigados e propostos no desenvolvimento dessas estruturas. Uma das mais populares, consiste em usar materiais que exibem propriedades piezelétricas, especialmente as cerâmicas, *PZT (Titanato Zirconato de Chumbo)*, e os filmes plásticos, *PVDF (Fluorido de Polivinilideno)*. Descobertos por *Jaffet et al.* em 1954 (*CLARK, SAUNDERS & GIBBS, 1998*), os PZTs são constituídos principalmente de óxido de chumbo, zircônio e titânio, e, na sua fabricação, é aplicado um grande campo de coerção, que polariza a cerâmica, alinhando suas moléculas polarizadas na direção do campo elétrico, propiciando, assim, as desejadas propriedades piezelétricas. Uma das vantagens do PZT reside no fato de apresentar grande rigidez, da ordem de 70 GPa, sendo idealmente indicados na confecção de



atuadores. Já o PVDF, cujas propriedades piezelétricas foram descobertas por *Kawai* após 1960 (*TSENG, 1989*), é um polímero piezelétrico robusto e maleável, que pode ser produzido em geometrias complexas e extremamente delgadas, por causa da sua constante piezelétrica. Com todas essas propriedades, o PVDF é altamente indicado para sensoramento distribuído.

Esses materiais piezelétricos apresentam o fenômeno da piezoeletricidade, isto é, desenvolvem um campo elétrico, quando sujeitos a uma força (ou pressão), *efeito piezelétrico direto*, e, inversamente, apresentam uma deformação, quando sujeitos a um campo elétrico, *efeito piezelétrico inverso*. Esta reciprocidade entre a energia mecânica e elétrica propicia aos materiais piezelétricos grande aplicabilidade em várias áreas.

Curiosamente, embora a piezoeletricidade tenha uma longa história, visto que o efeito direto da piezoeletricidade foi descoberto pelos irmãos *Curie & Curie*, em 1880, e o efeito inverso da piezoeletricidade foi teoricamente predito por *Lippman*, com base em princípios termodinâmicos (*RAO & SUNAR, 1994*), seu uso em aplicações de controle é relativamente recente, *BAILEY & HUBBARD (1985)*, *CRAWLEY & DE LUIS (1987)*, *GIBBS & FULLER (1992)*, *TSENG & TZOU (1993)* e *CHANDRASHEKHARA, VARADAJAN & AGARWAL (1996)*. Uma explicação para esse fato seria a espera pela síntese e o desenvolvimento de novos materiais piezelétricos, que pudessem ser aplicados para essa finalidade. Relatos sobre estes desenvolvimentos, bem como sobre a base teórica do fenômeno da piezoeletricidade, podem ser encontrados em *CADY (1946)* e *TIERSTEN (1962)*.

## 1.1 APLICAÇÕES EM CONTROLE DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Um dos primeiros trabalhos, apresentando o uso de atuadores piezelétricos como elementos de estruturas inteligentes, foi apresentado por *CRAWLEY & DE LUIS (1987)*. Estes construíram três protótipos de estruturas inteligentes, a saber: uma viga de alumínio com atuadores piezelétricos colados sobre suas superfícies, uma viga de grafita/epoxy e outra com fibra de

vidro/epoxy, ambas com material piezelétrico imerso nessas estruturas. Foi empregado um controlador por realimentação proporcional à velocidade.

Os materiais piezelétricos, colados na superfície da estrutura, permitem fácil acesso, mas podem ser facilmente danificados. A presença desses materiais sobre a estrutura alteram as propriedades do conjunto, estrutura e material piezelétrico, visto que possuem módulo de Young, coeficiente de Poisson e fator de amortecimento diferentes do material da estrutura. Materiais piezelétricos, colados na superfície, foram empregados por vários pesquisadores, como *BAILEY & HUBBARD JR. (1985)*, *TZOU & FU (1994 a & b)* e *LEE & O'SULLIVAN (1991)*.

A vantagem do material piezelétrico imerso consiste em uma melhor distribuição das propriedades mecânicas e elétricas. A desvantagem é a maior dificuldade de fabricação da estrutura composta e a isolamento elétrica. Materiais piezelétricos imersos em estruturas foram utilizados por *CRAWLEY & DE LUIS (1987)*, *HAGOOD & CRAWLEY (1989)* e *CRAWLEY & ANDERSON (1990)*.

Para se conseguir bons resultados com elementos piezelétricos em aplicações de controle e sensoriamento, é necessário obter modelos matemáticos, que possam descrever de uma forma precisa o mecanismo da deformação induzida no material piezelétrico. Infelizmente, as equações diferenciais da piezoeletricidade linear são suficientemente complexas para impedir soluções analíticas na grande maioria das aplicações, com exceção de geometrias bastantes simples. Consequentemente, técnicas de aproximação devem ser empregadas para resolver essas equações (*TSENG, 1989*). De todas as técnicas hoje conhecidas, o *Método dos Elementos Finitos (M.E.F.)* é, provavelmente, um dos melhores procedimentos disponíveis para análise de meios contínuos. Com esse método, é possível obter soluções para muitos problemas complexos na engenharia, sendo largamente utilizado, na engenharia moderna, como ferramenta de projeto e análise (*BATHE, 1996*). Segundo *RAO & SUNAR (1994)*, a literatura disponível sobre o problema da modelagem de meios piezelétricos através do M.E.F. e sua implementação em problemas de sensoriamento e controle distribuído aparecem em número reduzido.

Um dos primeiros trabalhos, empregando o M.E.F., foi apresentado por *ALLIK & HUGHES (1970)*, que propuseram um método geral de análise estática e dinâmica de estruturas piezelétricas. O resultado final foi a obtenção de uma equação diferencial de movimento da piezoeletricidade, redutível à forma matricial das equações diferenciais dinâmicas, hoje conhecidas. *NAILLON et al. (1983)* simularam, através de um modelo numérico obtido via M.E.F, o fenômeno de ressonância em transdutores ultra-sônicos. Seguindo a mesma linha de trabalho, *CHALLANDE (1990)* estudou, via M.E.F., uma forma de otimizar os transdutores ultra-sônicos, analisando elementos cerâmicos na forma de barras e verificando seu comportamento através da relação entre o comprimento e a espessura. Trabalhos similares podem ser encontrados em: *TIRSTEN & MINDLIN (1962)*, *LERCH (1990)*, *BRISSAUD (1991)*, *GUALTIERI et al. (1994)*, *HAGOOD & McFARLAND (1995)*, *LAMBERTI & PAPPALARDO (1995)*, *YANG (1995)* e *HOM & SHANKAR (1996)*.

*TSENG (1989)* empregou o elemento hexaedro isoparamétrico não conforme, tendo oito nós e três graus de liberdade internos. Cada nó apresenta três graus de liberdade de deslocamento. Segundo *TAYLOR et al. (1976)* os graus de liberdade internos reduzem a rigidez extra na direção da espessura, o que produz equações mal condicionadas e resultados imprecisos. A aplicação desse modelo na caracterização da dinâmica dos materiais piezelétricos e controle ativo de vibração foi apresentada por *TZOU & TSENG (1990 & 1991a)*. Foi simulado o controle por realimentação proporcional à velocidade em uma estrutura inteligente do tipo placa. A mesma metodologia foi aplicada em uma viga em balanço por *TZOU & TSENG (1991b)*. *HA, KEILERS & CHANG (1992)* desenvolveram um elemento linear tridimensional, aplicado a materiais compostos, obtendo modelo estático e dinâmico de compósitos laminados contendo cerâmicas piezelétricas sujeitas a carregamentos mecânicos ou elétricos. Outras publicações similares, trabalhando com esse elemento, foram apresentadas por *KAGAWA et al. (1996)*, *TZOU & YE (1996)* e *YIN & SHEN (1997)*.

*HWANG & PARK (1993)* apresentaram uma formulação, por elementos finitos, para o caso de uma placa laminada com sensores e atuadores piezelétricos. Foram apresentados modelos estáticos e dinâmicos, aplicados no controle ativo da estrutura. Obtiveram as equações de movimento usando a teoria clássica de placa (Modelo de Kirchhoff) e o elemento quadrilateral de 4 nós. A carga elétrica total gerada pelo sensor foi calculada diretamente da equação da

piezoeletricidade. Através de simulações numéricas, analisaram o efeito da mudança da rigidez e do amortecimento nas estruturas compostas. Na mesma linha de trabalho, podemos citar *CHANG-QING et al. (1996)*. No estudo da espessura ótima de atuadores piezelétricos, aplicados em estruturas inteligentes, *KIM & JONES (1991)* estudaram o comportamento do momento induzido por um par de atuadores piezocerâmicos, colados em uma estrutura do tipo placa. Demonstraram que a espessura ideal para atuadores piezelétricos comercialmente disponíveis é, aproximadamente, a metade da espessura da placa para uma estrutura de aço e um quarto para estrutura de alumínio.

Poucos trabalhos apresentaram modelos matemáticos de estruturas inteligentes do tipo viga, levando em conta o efeito da deformação por cisalhamento. Na literatura, existem vários estudos sobre modelos de viga de Euler – Bernoulli, tais como: *BAILEY & HUBBARD, (1985)*, *HANAGUD, OBAL & CALISE (1992)*, *CARPENTER et al. (1993)*, *LI & BAINUM (1994)* e *FARIA (1995)*. Um modelo analítico de viga de Timoshenko foi apresentado por *YANG & LEE (1994)*, considerando a influência do atuador piezocerâmico na frequência natural e nos modos de vibrar. A modelagem de uma viga inteligente laminada via elementos finitos foi discutida por *ALDRAIHEM et al. (1996)*. Apresentaram dois modelos, um incluindo e outro excluindo a deformação por cisalhamento. Mostraram que o efeito do cisalhamento é importante no controle de uma viga laminada, quando a relação entre o comprimento da viga e sua espessura é menor do que 15, para materiais isotrópicos, e menor do que 30, para materiais compostos. Um método que simula o comportamento dinâmico de vigas compósitas piezelétricas em altas frequências foi apresentado por *GAMA (1998)*, baseado na teoria discreta de Reddy.

*RAO & SUNAR (1993)* apresentaram um estudo do efeito da termopiezoeletricidade em uma estrutura do tipo viga, formada por duas camadas de PVDF. Demonstram que, dependendo da localização da estrutura, condições de trabalho e do material piezelétrico, o impacto da variação da temperatura pode ser importante e ter efeitos negativos sobre a performance do controle da estrutura. *TZOU & HOWARD (1994)* fizeram um estudo analítico da termopiezoeletricidade usando a teoria de casca. Observaram que o efeito térmico influi apenas sobre as forças resultantes de membrana, não nos momentos resultantes, quando, no modelo proposto, considera-se uma distribuição uniforme da temperatura. Outros trabalhos nessa área foram também

apresentados por *TZOU & YE (1994)*, *LEE & SARAVANOS (1995)*, *TZOU, YE & VENKAYYA (1996)* e *LEE & SARAVANOS (1996)*.

O conceito de que material piezelétrico poderia trabalhar, simultaneamente, como sensor e atuador foi apresentando por *ANDERSON & HAGOOD (1994)*, para combinar a função de sensor e atuador em um único equipamento. Esses pesquisadores propuseram compensadores eletrônicos para remover a carga direta devido à voltagem aplicada, de modo a permitir apenas a observação da resposta mecânica. Recentemente, *FANNIN (1997)* apresentou um estudo teórico e experimental propondo, um circuito eletrônico, que viabiliza o uso do material piezelétrico como sensor e atuador, simultaneamente. O autor discute as dificuldades em se obter tal circuito.

Na área de controle, *TZOU (1991)* e *TZOU & ZHONG (1993)* apresentaram um modelo de estrutura do tipo casca, no qual o controle por realimentação proporcional à velocidade foi aplicado em uma estrutura tipo viga e casca cilíndrica. *HANAGUD, OBAL e CALISE (1992)* apresentaram um estudo sobre o controle ótimo de vibrações em estruturas inteligentes. Propuseram um algoritmo baseado na minimização de um índice de performance quadrático de vetores de estado. Outros trabalhos na mesma linha foram apresentados por *BIRMAN & ADALI (1993)*, *TSENG & TZOU (1993)*, *GAUDILLER & DER HAGOPIAN (1996)*, *RESCH, JEGER & ELSPASS (1996)*. Encontram-se na literatura vários trabalhos sobre o controle ativo de estruturas, usando outras técnicas, como intensidade estrutural *GIBBS & FULLER (1992)* e *ARRUDA, MOREIRA & PEREIRA (1997)*, controle por realimentação positiva *FANSON & CAUGHEY (1990)*, controle adaptativo *VARADARAJAN, CHANDRASHEKHARA & AGARWAL (1996)*, controle por redes neurais *VIPPERMAN & CLARK (1996)* e controle robusto de banda limitada *MOREIRA (1998)*.

## 1.2 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

As possibilidades de controle passivo de vibrações estão praticamente esgotadas e a melhoria no desempenho de novos equipamentos, nas áreas veicular, aeronáutica e espacial, depende hoje, em grande parte, do controle ativo de vibrações e ruídos. Um dos materiais mais empregados, nesse tipo de controle, são os materiais piezelétricos, pois são leves, baratos, fáceis de manusear, podem ser confeccionados em formas variadas e são, por natureza, sensores e atuadores distribuídos. Nesse novo enfoque, a obtenção de modelos que permitam analisar, de forma detalhada e precisa, o comportamento estático e dinâmico de estruturas com elementos piezelétricos incorporados é de fundamental importância no desenvolvimento dessa tecnologia. Existem na literatura vários relatos de trabalhos, propondo modelos analíticos e numéricos para esse tipo de estrutura. Trabalhos abordando o problema da modelagem dessas estruturas, empregando o M.E.F., são ainda, reduzidos. Nesse cenário, a proposição de modelos mais detalhados, como Viga de Timoshenko e Placa de Reissner-Mindlin, sem o efeito de travamento por cisalhamento, ainda encontra espaço. A proposição de um ambiente de simulação de estruturas inteligentes, em que os vários modelos estariam disponíveis para análise estática e dinâmica, ainda não foi apresentado na literatura. Esse ambiente permitiria escolher o melhor modelo para cada caso em análise, facilitaria o desenvolvimento de novos modelos e permitiria a simulação estática, dinâmica e o emprego de técnicas de controle ativo nessas estruturas. Observa-se, ainda, que pouquíssimos trabalhos, apresentam relatos, sobre as técnicas de manuseio dos elementos piezelétricos.

## 1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Nossos objetivos são apresentar uma metodologia para a modelagem de estruturas mais utilizadas, com elementos piezelétricos incorporados via M.E.F., desenvolver um ambiente de simulação de estruturas inteligentes onde existam vários elementos disponíveis, como o elemento tridimensional, os elementos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko e os elementos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, implementar a simulação numérica e experimental do controle ativo de vibrações, usando esses modelos, e relatar algumas das técnicas de manuseio de elementos piezelétricos.

## 1.4 CONTEÚDO

Neste trabalho, uma metodologia é aplicada ao estudo de estruturas com sensores e atuadores piezelétricos incorporados. Os modelos, analíticos e numéricos, obtidos permitem uma análise detalhada e precisa do comportamento estático e dinâmico dessas estruturas. São desenvolvidos modelos para estruturas com comportamento de viga de Euler–Bernoulli e Timoshenko, e estruturas do tipo placa de Kirchhoff e Mindlin – Reissner. Um programa foi desenvolvido, trabalhando com elementos finitos, para análise dessas estruturas. Através de comparações entre os resultados apresentados pelo programa desenvolvido, apresentados por outros pesquisadores e um programa comercial (ANSYS®), todos os modelos propostos são validados. Finalmente, para duas estruturas com sensores e atuadores incorporados, foram realizados ensaios, empregados as técnicas de modelagem propostas, posicionamento de sensores e controle ativo. Os resultados experimentais validaram os modelos numéricos.

No capítulo 2, são deduzidas as equações de movimento de estruturas com características de casca, placa e viga. Inicialmente, obtemos as equações de casca. Com base nessas equações, e através de algumas considerações, baseadas nos postulados de Love, parâmetros de Lamé e raios de curvatura, são apresentadas as equações de placa de Kirchhoff e Mindlin–Reissner e viga de Euler–Bernoulli e Timoshenko. Finalmente, na última parte desse capítulo, são introduzidos os efeitos dos atuadores piezelétricos nos modelos de placa e viga. Também é modelada a contribuição, devido à deformação induzida no material piezelétrico, quando aplicamos um potencial elétrico.

A modelagem da estrutura com sensores e atuadores incorporados via elementos finitos é discutida em detalhe no capítulo 3. É formulado um elemento piezelétrico isoparamétrico trilinear com três graus de liberdade internos. São estudados dois modelos de vigas e placas, a saber: Euler–Bernoulli, Timoshenko, Kirchhoff e Reissner-Mindlin, respectivamente. O modelo de Euler-Bernoulli é discretizado com elementos de viga isoparamétricos com três graus de liberdade por nó. Já no modelo de Timoshenko, os efeitos do cisalhamento transversal e da inércia de rotação são considerados. A discretização é obtida com elemento isoparamétrico de viga, com funções de interpolação apropriadas. No modelo de placa de Kirchhoff, o elemento

escolhido é o elemento de Melosh (*BATHE, 1996*). O problema de travamento por cisalhamento (“*shear locking*”) é contornado, no modelo de placa de Mindlin–Reissner, utilizando o elemento da família MITCn proposto por *BATHE (1996)*.

No capítulo 4 a validação dos modelos obtidos via elementos finitos é, primeiramente, feita, considerando os modelos de uma estrutura convencional, sem os elementos piezelétricos. Numa segunda etapa são validados os modelos com os elementos piezelétricos e posteriormente, os modelos com os elementos piezelétricos incorporados. Os resultados gerados com o elemento trilinear são validados com base nos resultados do programa ANSYS®. É analisado o campo de deslocamentos gerado por forças mecânicas e potencial elétrico, os autovetores e os autovalores associados e o campo elétrico gerado por forças mecânicas. Os modelos de viga e placa são validados através de comparações com o elemento trilinear e os resultados disponíveis na literatura.

No capítulo 5 são apresentados os resultados dos ensaios de uma viga e de uma placa, ambas com atuadores e sensores piezelétricos incorporados. Os ensaios objetivam validar os modelos numéricos desenvolvidos, implementar o controle ativo das estruturas e, também, tomar contato com os problemas, encontrados na preparação e realização dos ensaios. Também foi verificado o desempenho do sistema de controle, ora trabalhando com o controlador sintetizado com base na dinâmica identificada, ora com o controlador projetado com o modelo numérico.

As conclusões, extraídas do trabalho, são apresentadas no capítulo 6, com comentários sobre os resultados experimentais, e algumas sugestões para a continuidade da pesquisa.

No Apêndice A mostramos o desenvolvimento matemático conciso das equações para meios piezelétricos e obtemos a equação do princípio variacional. Verificamos que existe uma similaridade entre o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o Princípio Variacional de Hamilton.

Finalmente, as técnicas de manuseio da cerâmica piezelétrica, como: corte, colagem e soldagem do eletrodo na cerâmica piezelétrica, são discutidas no Apêndice B.



## CAPÍTULO 2

# MODELAGEM DE CASCA, PLACA E VIGA PARA MATERIAIS PIEZOCERÂMICOS

Neste capítulo, serão deduzidas as equações de movimento de estruturas que possuem características de casca, placa e viga. Inicialmente, obteremos as equações básicas de casca, as quais servirão de base para o equacionamento de estruturas com comportamento de placa e viga. Em seguida, introduziremos os efeitos dos atuadores piezelétricos nos modelos de placa e viga (*BANKS & WANG, 1995*). Apesar de clássica, essa metodologia tem a vantagem de oferecer os elementos básicos para o entendimento da modelagem de várias estruturas (*KRAUS, 1967*).

## 2.1 EQUAÇÕES DE CASCA

### 2.1.1 Considerações Básicas

A descrição de uma casca, aqui apresentada, será limitada à discussão de materiais elásticos, que apresentam uma relação linear entre tensão e deformação. Consideraremos uma casca como um sólido, limitado por duas superfícies curvas, separadas por uma distância  $h$ . A superfície média será definida como sendo a região, onde os pontos a ela pertencentes, estão na distância média entre as superfícies externas. Os fundamentos da teoria de casca, descrita dessa

maneira, foi, inicialmente, estabelecida por *Love*, em seu livro *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, publicado em 1927. Em sua formulação, o autor fez algumas considerações, conhecidas como *Postulados de Love*, que são:

- 1** A espessura da casca  $h$  é muito pequena em comparação com as outras dimensões, tais como raios de curvatura e comprimentos. Essa condição é fundamental para a formulação da teoria de casca fina. A relação entre a espessura  $h$  da casca e o menor raio de curvatura deve ser bem menor que a unidade. Na prática, o limite máximo para essa razão é da ordem de  $1/10$  a  $1/20$ ;
- 2** As deformações de casca ocorrem no campo das pequenas deformações. Isso nos permite desprezar os termos de segunda ordem e superiores, com relação aos termos de primeira ordem, nas equações das deformações. Desse modo, essas equações serão lineares. Conseqüentemente, todas as considerações cinemáticas e de equilíbrio serão referenciadas ao estado inicial e não perturbado da casca;
- 3** A tensão normal  $\sigma_z$ , na direção perpendicular à superfície da casca, é pequena, podendo ser desprezada, quando comparada com as outras tensões normais,  $\sigma_\alpha$  e  $\sigma_\beta$ . Essa consideração, em combinação com o quarto postulado, trata das propriedades constitutivas de casca fina e permite transformar o problema elástico tridimensional em bidimensional;
- 4** As normais para a superfície de referência da casca permanecerão normais à superfície de referência deformada, isto é,  $\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = 0$ , e os segmentos das normais ficarão com os mesmos comprimentos, não havendo, portanto, variação de espessura durante a deformação ( $e_z$ ). Essa consideração é análoga às *Hipóteses de Kirchhoff* para placa fina e de *Euler-Bernoulli*, na teoria de viga fina, onde as seções planas permanecem planas, após a deformação. No caso de casca moderadamente espessa, essa hipótese pode ser relaxada, para permitir efeitos rotacionais e deformações de cisalhamento. Isto conduz às *Teorias de Reissner-Mindlin* para modelos de placa e *Timoshenko* para modelos de viga.

### 2.1.2 Sistema de Coordenadas

Na definição das coordenadas de casca, escolhemos a sua superfície média, não perturbada, como a superfície de referência. Sobre essa superfície, estabelecemos um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, que coincide com as linhas ortogonais da curvatura principal da casca. A direção da espessura, que é normal à superfície de referência, é considerada como a terceira coordenada da casca. Em função do quarto Postulado de Love, o deslocamento deve ser linear na coordenada da espessura, sendo possível analisar o comportamento de qualquer ponto sobre a casca, em função de outro correspondente sobre a superfície de referência. Esta pode ser determinada pelo vetor  $\vec{r}(\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros independentes. Para um ponto arbitrário sobre a casca, o vetor posição é definido por:

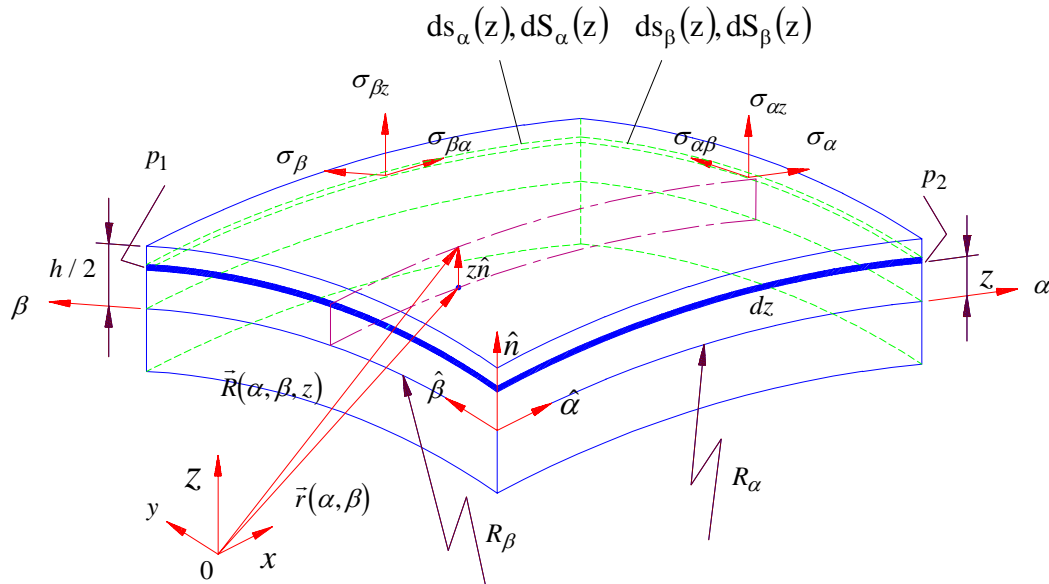


Figura 1 - Elemento de Casca.

$$\vec{R}(\alpha, \beta, z) = \vec{r}(\alpha, \beta) + z\hat{n} \quad (1)$$

onde:  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à superfície de referência,  $z$  é a medida da distância de um ponto em relação à superfície de referência ao longo de  $\hat{n}$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ).

Como os pontos  $p_1$  e  $p_2$  são infinitamente próximos (adjacentes), o comprimento do arco  $ds$ , que une esses pontos, é igual ao comprimento da corda, que une  $p_1$  e  $p_2$ , isto é,  $p_1p_2$  é igual a  $|d\vec{R}|$ . Com o sistema de coordenadas assim estabelecido, definimos o elemento fundamental de casca tridimensional de espessura  $dz$  e altura  $z$  da superfície média.

Então, podemos escrever:

$$(ds)^2 = |d\vec{R}|^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} \quad (2)$$

Fazendo

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta \quad (3)$$

$$d\hat{n} = \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \beta} d\beta \quad (4)$$

$$A_\alpha^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \quad \text{e} \quad A_\beta^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \quad (5)$$

obtemos:

$$(ds)^2 = g_1(d\alpha)^2 + g_2(d\beta)^2 + g_3(dz)^2 \quad (6)$$

Sendo que:

$$g_1 = \left[ A_\alpha \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \right]^2, g_2 = \left[ A_\beta \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \right]^2 \quad \text{e} \quad g_3 = 1 \quad (7)$$

onde:  $R_\alpha$  e  $R_\beta$  são os raios de curvatura nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente;  $A_\alpha$  e  $A_\beta$  são os Parâmetros de Lamé, e  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são os coeficientes métricos, que fazem a ligação entre o comprimento do elemento e os diferenciais  $d\alpha$ ,  $d\beta$  e  $dz$ , (LOVE, 1926; TZOU & YE, 1996).

### 2.1.3 Relações entre Deformação e Deslocamento

As equações entre deformação e deslocamento em coordenadas ortogonais, segundo BORESI & LYNN (1974), são:

$$e_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{U^j}{\sqrt{g_j}} \right) + \frac{1}{2g_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_j}{\partial \alpha_k} \frac{U^k}{\sqrt{g_k}}, \quad j=1, 2 \text{ e } 3 \quad (8)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[ g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{U^i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{U^j}{\sqrt{g_j}} \right) \right], \quad i, j=1, 2 \text{ e } 3 \quad \text{e} \quad i \neq j \quad (9)$$

onde:  $U^i$ ,  $e_j$  e  $\gamma_{ij}$  são os deslocamentos, deformação normal e deformação por cisalhamento em um ponto arbitrário do material, respectivamente.

As equações (8) e (9) são colocadas em coordenadas curvilíneas, fazendo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \alpha & \alpha_2 &\equiv \beta & \alpha_3 &\equiv z \\ U^1 &\equiv U & U^2 &\equiv V & U^3 &\equiv W \end{aligned} \quad (10)$$

A substituição dos coeficientes métricos, equação (7), conduz às seguintes equações gerais das deformações em função dos deslocamentos:

$$e_\alpha = \frac{1}{1 + z/R_\alpha} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{W}{R_\alpha} \right) \quad (11)$$

$$e_\beta = \frac{1}{1+z/R_\beta} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{U}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{W}{R_\beta} \right) \quad (12)$$

$$e_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (13)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A_\alpha(1+z/R_\alpha)}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{U}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \right] + \frac{A_\beta(1+z/R_\beta)}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{V}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \right] \quad (14)$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + A_\alpha(1+z/R_\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{U}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \right] \quad (15)$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{1}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \frac{\partial W}{\partial \beta} + A_\beta(1+z/R_\beta) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{V}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \right] \quad (16)$$

Segundo o quarto postulado de Love, os deslocamentos deverão apresentar variações lineares, ao longo da espessura.

$$U(\alpha, \beta, z) = u(\alpha, \beta) + z\theta_\alpha(\alpha, \beta) \quad (17)$$

$$V(\alpha, \beta, z) = v(\alpha, \beta) + z\theta_\beta(\alpha, \beta) \quad (18)$$

$$W(\alpha, \beta, z) = w(\alpha, \beta) \quad (19)$$

onde:  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos de pontos da superfície média nas direções  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ , respectivamente. As quantidades  $\theta_\alpha$  e  $\theta_\beta$  são as rotações da normal em relação à superfície média, quando ocorre uma deformação.

De modo a determinar  $\theta_\alpha$  e  $\theta_\beta$  em termos dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , segundo a hipótese de Kirchhoff, todos os componentes de deformação na direção normal à superfície de referência serão desprezados.

$$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = e_z = 0 \quad (20)$$

Quando substituimos as equações (17) a (19) nas equações (11) a (16), com as restrições observadas pela equação (20), obtemos:

$$\theta_\alpha = \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (21)$$

$$\theta_\beta = \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (22)$$

As equações das deformações, em função dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , no caso de casca fina, são obtidas das equações (17) a (19), (21) e (22), quando essas são substituídas nas equações (11) a (16).

$$e_\alpha = \frac{1}{(1 + z/R_\alpha)} (\varepsilon_\alpha + z\kappa_\alpha) \quad (23)$$

$$e_\beta = \frac{1}{(1 + z/R_\beta)} (\varepsilon_\beta + z\kappa_\beta) \quad (24)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1 + z/R_\alpha)(1 + z/R_\beta)} \left[ \left( 1 - \frac{z^2}{R_\alpha R_\beta} \right) \varepsilon_{\alpha\beta} + z \left( 1 + \frac{z}{2R_\alpha} + \frac{z}{2R_\beta} \right) \tau \right] \quad (25)$$

Onde  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  e  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  são as deformações normais e angulares na superfície média ( $z = 0$ ),  $\kappa_\alpha$  e  $\kappa_\beta$  são as mudanças na curvatura da superfície média, e  $\tau$  é a torção da superfície média. Essas quantidades são dadas por:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \quad (26)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \quad (27)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A_\alpha} \right) + \frac{A_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{A_\beta} \right) \quad (28)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \quad (29)$$

$$\kappa_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \frac{\theta_\alpha}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\theta_\alpha}{A_\alpha} \right) + \frac{A_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\theta_\beta}{A_\beta} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

### 2.1.4 Relações Constitutivas

Considerando que o material da casca é elástico linear, homogêneo, isotrópico, com módulo de Young  $E$ , coeficiente de Poisson  $\mu$ , com base na hipótese de Kirchhoff e na terceira consideração de Love, podemos escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

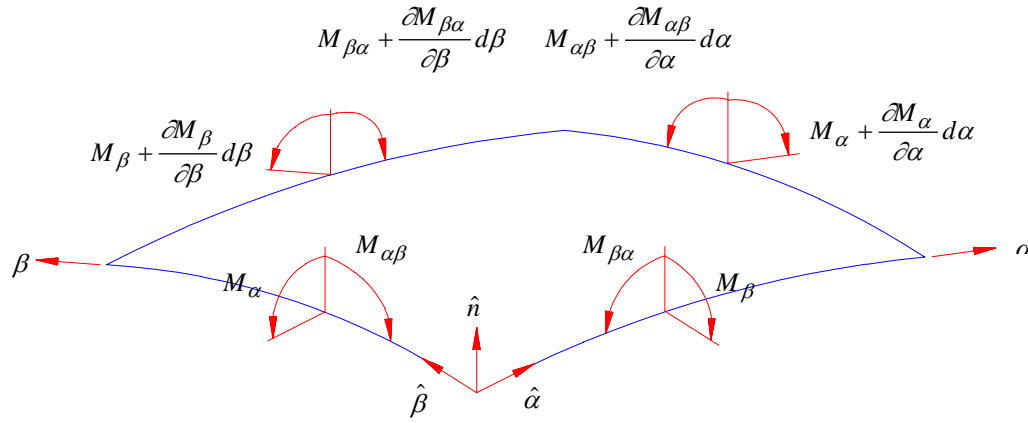




$$\begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) z dz \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} M_\beta \\ M_{\beta\alpha} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_\beta \\ \sigma_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) z dz \quad (36)$$

Devido aos momentos resultantes serem definidos com respeito à superfície média, as suas dimensões são momento por unidade de comprimento da superfície média.



*Figura 3 - Momentos Resultantes no Elemento de Casca.*

Assim, com as equações (33) e (34) e considerando que para casca finas,  $z/R_\alpha$  e  $z/R_\beta$  são desprezíveis, pois são valores pequenos em comparação com a unidade, resultam nas seguintes equações, com  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$  e  $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ .

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \\ M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_\alpha \\ \kappa_\beta \\ \tau \end{bmatrix} \quad (38)$$

### 2.1.6 Equações de Equilíbrio

As equações gerais de equilíbrio do elemento de casca são obtidas, através do equilíbrio entre as forças internas e momentos resultantes, como mostrado na Figura 2 e Figura 3, com as forças e momentos externos aplicados.

$$\vec{q} = q_\alpha \hat{\alpha} + q_\beta \hat{\beta} + q_n \hat{n} \quad \text{e} \quad \vec{m} = m_\alpha \hat{\alpha} + m_\beta \hat{\beta} + m_n \hat{n} \quad (39)$$

Então, as equações de equilíbrio ficam:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta N_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha N_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\alpha} Q_\alpha + A_\alpha A_\beta q_\alpha = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha N_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta N_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\beta} Q_\beta + A_\alpha A_\beta q_\beta = 0 \quad (41)$$

$$-\frac{A_\alpha A_\beta}{R_\alpha} N_\alpha - \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha Q_\beta) + A_\alpha A_\beta q_n = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha M_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} M_\beta - A_\alpha A_\beta Q_\alpha + A_\alpha A_\beta m_\beta = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha M_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta M_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} M_\alpha - A_\alpha A_\beta Q_\beta + A_\alpha A_\beta m_\alpha = 0 \quad (44)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} = 0 \quad (45)$$

## 2.2 EQUAÇÕES DE PLACA

As equações, descrevendo o movimento de *placa* de *Kirchhoff* e *Reissner-Mindlin*, são obtidas a partir da equação geral de movimento de casca, em coordenadas curvilíneas, com a escolha apropriada dos parâmetros de Lamé e dos raios de curvaturas. Para o modelo de *Kirchhoff*, será considerada a quarta hipótese de Love, já para o modelo de *Reissner-Mindlin* esse postulado será desconsiderado, para permitir efeitos rotacionais e de deformação por cisalhamento. Em ambos os modelos, os resultados de casca, previamente discutidos, serão considerados, na descrição do movimento longitudinal e transversal de uma placa retangular.

### 2.2.1 Placa de Kirchhoff

As equações para uma placa retangular fina, resultante das equações de casca previamente apresentadas, são obtidas com as escolhas dos seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv x & \beta &\equiv y \\ A_\alpha &= 1 & A_\beta &= 1 \\ R_\alpha &= \infty & R_\beta &= \infty\end{aligned}\tag{46}$$

Nas equações (23) a (25) e (32) substituímos as condições da equação (46). As relações entre tensão versus deformação e deformação versus deslocamento, ficam:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \tau \end{bmatrix}\tag{47}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}\tag{48}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (50)$$

A combinação das equações constitutivas com as expressões de força e momentos resultantes conduz a:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \tau \end{bmatrix} \quad (52)$$

Fazendo o equilíbrio entre forças e momentos, de maneira análoga ao mostrado nas equações (40) a (45), obtemos as relações:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + q_x \quad (53)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y \quad (54)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_n \quad (55)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + m_y = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_x = 0 \quad (57)$$

Com as equações (56) e (57), e eliminamos  $Q_x$  e  $Q_y$  em (55), obtemos as seguintes equações de equilíbrio:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (58)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (59)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} = q_n + \frac{\partial m_x}{\partial y} + \frac{\partial m_y}{\partial x} \quad (60)$$

Com as forças e momentos resultantes, equações (51) e (53), as equações de movimento desacopladas para membrana podem ser escritas como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1+\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{h^2}{12D} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1-\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1+\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{h^2}{12D} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_y \right) \quad (62)$$

e para placa, como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q_n + \frac{\partial m_x}{\partial y} + \frac{\partial m_y}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (63)$$

com

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (64)$$

### 2.2.2 Placa de Reissner-Mindlin

Na obtenção do modelo de *placa de Reissner-Mindlin*, os três primeiros postulados de Love serão considerados, e o quarto postulado será relaxado, para permitir o efeito de inércia de rotação e deformação por cisalhamento.

Com

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv x & \beta &\equiv y \\ A_\alpha &= 1 & A_\beta &= 1 \\ R_\alpha &= \infty & R_\beta &= \infty \end{aligned} \quad (65)$$

As relações gerais dos deslocamentos em (17) a (19), podem ser escritas como:

$$U(x, y, z) = u(x, y) + z\theta_x(x, y) \quad (66)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (67)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \quad (68)$$

onde:  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da superfície média nas direções  $x$  e  $y$ .

Através das equações (11) a (16), as relações entre deformação e deslocamento são:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}^T + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (69)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (70)$$

Observamos que, se não assumíssemos a deformação por cisalhamento, obteríamos a relação  $\theta_x = -\partial w / \partial x$  e  $\theta_y = -\partial w / \partial y$  das equações (21) e (22), as quais conduziriam as expressões em (47) a (48). Além disso, pode ser observado que o quarto postulado de Love desconsidera as deformações  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ . Ao relaxarmos tal postulado, essas deformações passarão a ser diferentes de zero e o modelo resultante permite considerarmos as deformações de cisalhamento.

As expressões de forças e momentos resultantes são obtidas de maneira usual, por integração da tensão através da espessura da placa.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = k^2 Gh \left( \begin{bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \right) \quad (72)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \theta_x / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial y \\ \partial \theta_y / \partial x + \partial \theta_x / \partial y \end{bmatrix} \quad (73)$$

onde:



$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{e} \quad k = \frac{\pi^2}{12} \quad (74)$$

A constante  $k$  é conhecida como fator de correção de cisalhamento e varia em função da seção transversal da placa. O valor apresentado na equação (74) é válido para seção transversal retangular.

As expressões do equilíbrio de forças e momentos são idênticas às consideradas anteriormente, equações (53) a (55). A inclusão do efeito de inércia de rotação, no equilíbrio de momentos, conduz a:

$$\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = -Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + m_y \quad (75)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = -Q_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + m_x \quad (76)$$

O sistema de equações desacopladas, descrevendo o movimento transversal da placa, é:

$$\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = -kGh \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) + \frac{D}{2} \left[ (1-\mu) \nabla^2 \theta_x + (1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] + m_y \quad (77)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = -kGh \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \frac{D}{2} \left[ (1-\mu) \nabla^2 \theta_y + (1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] + m_x \quad (78)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = kGh \left[ \nabla^2 w + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] + q_n \quad (79)$$

## 2.3 EQUAÇÕES DE VIGA

As equações, descrevendo o movimento de uma viga, podem ser obtidas a partir das equações de placa, com a escolha apropriada dos parâmetros de Lamé e dos raios de curvatura. O modelo de viga de Euler-Bernoulli é obtido diretamente do modelo de placa de Kirchhoff, mas, o modelo de viga de Timoshenko é obtido do modelo de placa de Reissner-Mindlin.

### 2.3.1 Viga de Euler - Bernoulli

O movimento de uma viga fina e plana, com comprimento  $l$  e largura  $b$ , pode ser determinado a partir da equação de placa finas, equações (58) a (60) (placa de Kirchhoff), ignorando o movimento na direção  $x$  e o efeito do coeficiente de Poisson.

$$\rho h b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b \frac{\partial N_y}{\partial y} = b q_y \quad (80)$$

$$\rho h b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = b q_n + b \frac{\partial m_x}{\partial y} \quad (81)$$

Com as equações (51) e (52) e as equações (49) e (50), obtemos:

$$b N_y = E h b \frac{\partial v}{\partial y} \quad (82)$$

$$b M_y = -E \frac{b h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -E I \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (83)$$

Substituindo as equações (82) e (83) nas equações (80) e (81), obtemos as equações de movimento longitudinal e transversal.

$$\rho h b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - E h b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = b q_y \quad (84)$$

$$\rho h b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = b q_n + b \frac{\partial m_x}{\partial y} \quad (85)$$

### 2.3.2 Viga de Timoshenko

Trabalhando com as equações (71) a (76), com o mesmo equilíbrio de forças e momentos resultantes, equações (53) a (55), e desconsiderando a coordenada  $x$  e o efeito do coeficiente de Poisson, obtemos:

$$\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y \quad (86)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_n \quad (87)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = -Q_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} + m_x \quad (88)$$

onde:

$$b N_y = E b h \frac{\partial v}{\partial y} \quad (89)$$

$$b Q_y = k G b h \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad (90)$$

$$b M_y = EI \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (91)$$

Substituindo as equações (89) a (91) nas equações (86) a (88), obtemos a equação do movimento longitudinal.

$$\rho b h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E b h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b q_y \quad (92)$$

e as equações desacopladas do movimento transversal:

$$\rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k G b h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + b q_n \quad (93)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = -k G b h \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + E I \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + b m_x \quad (94)$$

## 2.4 INFLUÊNCIA DA CERÂMICA PIEZELÉTRICA NA EQUAÇÃO ESTRUTURAL

De posse das equações de placas e vigas, podemos modelar a interação entre a cerâmica piezelétrica e essas estruturas. A contribuição da cerâmica piezelétrica pode ser dividida em duas categorias, chamada interna (material) e externas (forças e momentos). As forças e momentos internos levam em consideração as mudanças nas propriedades do material da estrutura, como massa, rigidez e amortecimento, devido à presença da cerâmica, e está presente, mesmo quando não existe voltagem aplicada sobre a cerâmica. A contribuição externa é devida à deformação induzida pela cerâmica, quando aplicamos um potencial elétrico, e aparece nas equações de movimento como carga externa, (TZOU & FU, 1994; BANKS & WANG, 1995).

### 2.4.1 Interação Cerâmica Piezelétrica e Placa Retangular

#### 2.4.1.1 Forças e momentos internos

Tomemos um par de cerâmicas piezelétricas, com espessura  $h_{pe}$  e uma placa de espessura  $h$ . Suponhamos que exista uma aderência perfeita entre as cerâmicas e a placa.

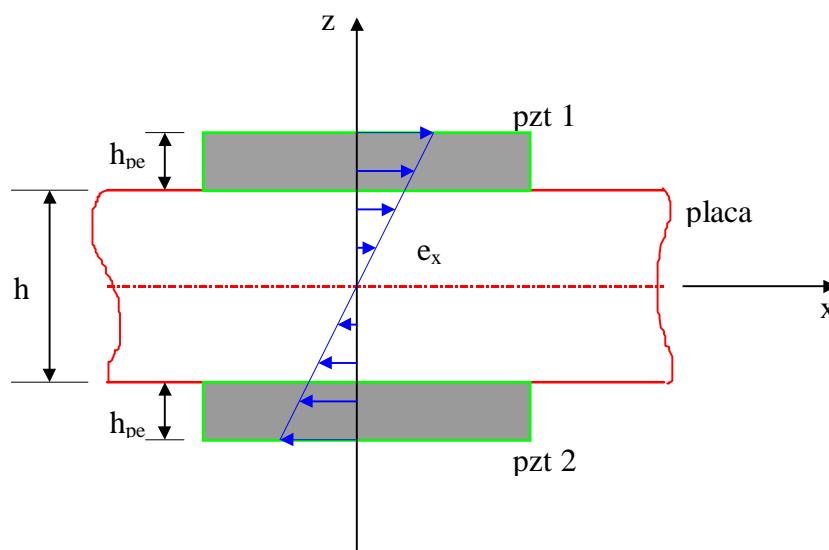
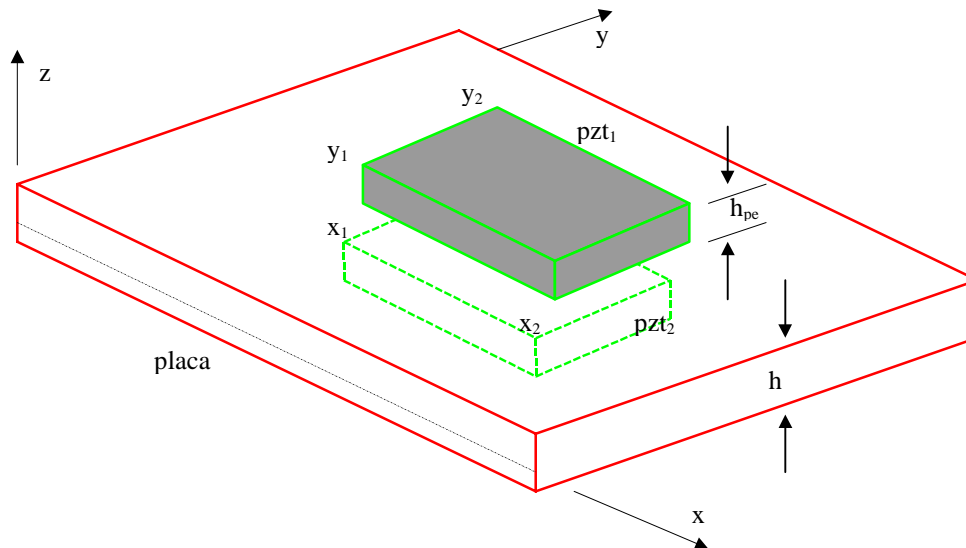


Figura 4 - Deformação Normal na Placa.

Neste trabalho, restringimos a nossa análise ao estudo dos primeiros modos de vibração, já que admitimos que o campo de deslocamentos é contínuo e linear, ao longo da espessura da placa e dos PZTs. Em modos mais altos, existe uma variação rápida desse campo, sendo que tal consideração impede a reprodução deste de uma forma precisa (GAMA, 1998).

Como mostrado na Figura 4, os PZTs possuem suas extremidades paralelas às linhas de  $x$  e  $y$  constantes. Admitimos que a fixação dos PZTs não trazem nenhuma pré-tensão à estrutura. A consideração de que as laterais dos PZTs são paralelas às linhas  $x$  e  $y$  é somente por conveniência. A forma só afetará a função característica  $\chi_{pe}$ , a qual tem valor unitário para as coordenadas, cobertas pelos PZTs, e zero em caso contrário.



*Figura 5 - Fixação da Cerâmica Piezolétrica na Placa.*

Com as considerações anteriores, podemos supor que as relações, apresentadas pela equação (47), sejam mantidas através da espessura combinada  $h + 2h_{pe}$ .

Para uma placa com  $E_{pe1}$ ,  $\mu_{pe1}$ ,  $E_{pe2}$  e  $\mu_{pe2}$  sendo, respectivamente, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, para os PZT's colados nas superfícies externa (parte superior e inferior da estrutura), o componente da tensão  $\sigma_x$  é dado por:

$$\sigma_x = \begin{cases} \frac{E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}^2} (e_x + \mu_{pe1} e_y) \\ \frac{E}{1-\mu^2} (e_x + \mu e_y) \\ \frac{E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}^2} (e_x + \mu_{pe2} e_y) \end{cases} \quad (95)$$

com expressões similares para  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Os subscritos 1 e 2 são usados para descrever as propriedades dos PZT, posicionados, respectivamente na superfícies, superior e inferior, da estrutura.

As forças e momentos resultantes são obtidos pela integração das tensões, através da espessura da superfície.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_{pe})}^{(h/2+h_{pe})} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_{pe})}^{(h/2+h_{pe})} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (97)$$

Isto conduz às seguintes equações:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ &+ \frac{E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}^2} \left[ (\varepsilon_x + \mu_{pe1} \varepsilon_y) h_{pe} + \frac{h_2}{2} (\kappa_x + \mu_{pe1} \kappa_y) \right] \chi_{pe}(x, y) \\ &+ \frac{E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}^2} \left[ (\varepsilon_x + \mu_{pe2} \varepsilon_y) h_{pe} - \frac{h_2}{2} (\kappa_x + \mu_{pe2} \kappa_y) \right] \chi_{pe}(x, y) \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned}
N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\
&+ \frac{E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}^2} \left[ (\varepsilon_y + \mu_{pe1}\varepsilon_x) h_{pe} + \frac{h_2}{2} (\kappa_y + \mu_{pe1}\kappa_x) \right] \chi_{pe}(x, y) \\
&+ \frac{E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}^2} \left[ (\varepsilon_y + \mu_{pe2}\varepsilon_x) h_{pe} - \frac{h_2}{2} (\kappa_y + \mu_{pe2}\kappa_x) \right] \chi_{pe}(x, y)
\end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
N_{xy} = N_{yx} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \varepsilon_{xy} \\
&+ E_{pe1} \left[ \frac{h_{pe}}{2(1+\mu_{pe1})} \varepsilon_{xy} + \frac{h_2}{4(1+\mu_{pe1})} \tau \right] \chi_{pe}(x, y) \\
&+ E_{pe2} \left[ \frac{h_{pe}}{2(1+\mu_{pe2})} \varepsilon_{xy} - \frac{h_2}{4(1+\mu_{pe2})} \tau \right] \chi_{pe}(x, y)
\end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\kappa_x + \mu\kappa_y) \\
&+ \frac{E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}^2} \left[ (\varepsilon_x + \mu_{pe1}\varepsilon_y) \frac{h_2}{2} + (\kappa_x + \mu_{pe1}\kappa_y) \frac{h_3}{3} \right] \chi_{pe}(x, y) \\
&+ \frac{E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}^2} \left[ -(\varepsilon_x + \mu_{pe2}\varepsilon_y) \frac{h_2}{2} + (\kappa_x + \mu_{pe2}\kappa_y) \frac{h_3}{3} \right] \chi_{pe}(x, y)
\end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\kappa_y + \mu\kappa_x) \\
&+ \frac{E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}^2} \left[ (\varepsilon_y + \mu_{pe1}\varepsilon_x) \frac{h_2}{2} + (\kappa_y + \mu_{pe1}\kappa_x) \frac{h_3}{3} \right] \chi_{pe}(x, y) \\
&+ \frac{E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}^2} \left[ -(\varepsilon_y + \mu_{pe2}\varepsilon_x) \frac{h_2}{2} + (\kappa_y + \mu_{pe2}\kappa_x) \frac{h_3}{3} \right] \chi_{pe}(x, y)
\end{aligned} \tag{102}$$



$$\begin{aligned}
M_{xy} = M_{yx} = & \frac{Eh^3}{24(1+\mu)} \tau \\
& + E_{pe1} \left[ \frac{h_2}{4(1+\mu_{pe1})} \epsilon_{xy} + \frac{h_3}{6(1+\mu_{pe1})} \tau \right] \chi_{pe}(x, y) \\
& + E_{pe2} \left[ -\frac{h_2}{4(1+\mu_{pe2})} \epsilon_{xy} + \frac{h_3}{6(1+\mu_{pe2})} \tau \right] \chi_{pe}(x, y)
\end{aligned} \tag{103}$$

onde:

$$h_2 = \left( \frac{h}{2} + h_{pe} \right)^2 - \frac{h^2}{4} \quad \text{e} \quad h_3 = \left( \frac{h}{2} + h_{pe} \right)^3 - \frac{h^3}{8} \tag{104}$$

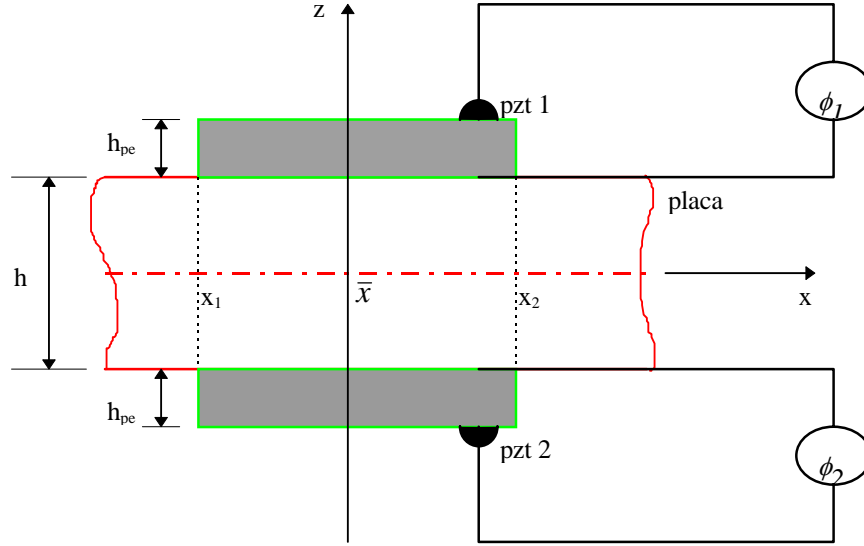
A função característica  $\chi_{pe}(x, y)$  tem a definição:

$$\chi_{pe}(x, y) = \begin{cases} 1, & x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \\ 0, & \text{de outra maneira} \end{cases} \tag{105}$$

Se um PZT estiver presente, as forças internas e momentos resultantes na estrutura podem ser determinados a partir das equações (98) a (103) omitindo-se a contribuição do PZT faltante. Como observado nas expressões resultantes, equações (98) a (103), a fixação dos PZTs sobre a placa conduz à descontinuidade da rigidez e do coeficiente Poisson, nas equações de movimento.

#### 2.4.1.2 Forças e momentos externos

A segunda contribuição do conjunto de PZTs é a geração de forças e momentos externos, resultantes da aplicação de um potencial elétrico sobre os PZTs. A aplicação desse potencial elétrico induz deformações nas direções  $x$  e  $y$ .



*Figura 6 - Conjunto de PZTs Ativos, Colados sobre uma Placa Retangular*

Portanto, consideramos que, quando o conjunto é ativado, deformações lineares na direção  $x$  e  $y$  serão induzidas igualmente.

A amplitude da deformação livre induzida é:

$$e_{pe1} = (e_x)_{pe1} = (e_y)_{pe1} = \frac{d_{31}}{h_{pe}} \phi_1 \quad (106)$$

$$e_{pe2} = (e_x)_{pe2} = (e_y)_{pe2} = \frac{d_{31}}{h_{pe}} \phi_2 \quad (107)$$

onde:  $d_{31}$  é a constante piezelétrica e  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são os potenciais elétricos aplicados no PZT superior e inferior, respectivamente.

Quando há potencial elétrico nos PZTs, com coordenadas das extremidades  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$ , como mostrado na Figura 6, o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}) = [(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2]$  não se moverá, ao passo que os pontos axialmente simétricos se moverão, em igual quantidade, na direção oposta. Esta observação é importante, quando determinamos a natureza da força resultante, e motiva o uso de uma função indicadora em muitas das expressões.

A tensão individual nos PZTs é considerada como:

$$(\sigma_x)_{pe1} = (\sigma_y)_{pe1} = \frac{-E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}} e_{pe1} = \frac{-E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}} \frac{d_{31}}{h_{pe}} \phi_1 \quad (108)$$

$$(\sigma_x)_{pe2} = (\sigma_y)_{pe2} = \frac{-E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}} e_{pe2} = \frac{-E_{pe2}}{1-\mu_{pe2}} \frac{d_{31}}{h_{pe}} \phi_2 \quad (109)$$

Obs: O sinal negativo é resultante do equilíbrio de forças e tensões induzidas nos PZTs.

Integrando a tensão sobre a face do elemento fundamental, as forças e os momentos externos resultantes, devido à ativação individual dos PZTs, podem ser expressos como:

$$\begin{bmatrix} (N_x)_{pe1} \\ (N_y)_{pe1} \end{bmatrix} = \int_{h/2}^{h/2+h_{pe}} \begin{bmatrix} (\sigma_x)_{pe1} \\ (\sigma_y)_{pe1} \end{bmatrix} dz \quad (110)$$

$$\begin{bmatrix} (M_x)_{pe1} \\ (M_y)_{pe1} \end{bmatrix} = \int_{h/2}^{h/2+h_{pe}} \begin{bmatrix} (\sigma_x)_{pe1} \\ (\sigma_y)_{pe1} \end{bmatrix} z dz \quad (111)$$

Com expressões análogas para  $(N_x)_{pe2}$ ,  $(N_y)_{pe2}$ ,  $(M_x)_{pe2}$  e  $(M_y)_{pe2}$ . A unidade aqui é força por unidade de comprimento, e momento por unidade de comprimento. A integração, então, conduz a:

$$(N_x)_{pe1} = (N_y)_{pe1} = \frac{-E_{pe1} h_{pe}}{1-\mu_{pe1}} e_{pe1} \quad (112)$$

$$(N_x)_{pe2} = (N_y)_{pe2} = \frac{-E_{pe2} h_{pe}}{1-\mu_{pe2}} e_{pe2} \quad (113)$$

$$(M_x)_{pe1} = (M_y)_{pe1} = -\frac{1}{8} \left( \frac{E_{pe1}}{1-\mu_{pe1}} \right) \left[ 4 \left( \frac{h}{2} + h_{pe} \right)^2 - h^2 \right] e_{pe1} \quad (114)$$

$$(M_x)_{pe2} = (M_y)_{pe2} = \frac{1}{8} \left( \frac{E_{pe2}}{1 - \mu_{pe2}} \right) \left[ 4 \left( \frac{h}{2} + h_{pe} \right)^2 - h^2 \right] e_{pe2} \quad (115)$$

As expressões (112) a (115) admitem diferentes potenciais elétricos nos PZTs, incluindo a possibilidade de um PZT permanecer passivo, sem potencial aplicado. Isto dá uma grande flexibilidade nas aplicações de vários tipos de carregamentos, através da ativação dos PZTs.

No desenvolvimento da força externa e momento resultante, devido à ativação dos PZTs, efeitos de borda foram ignorados e, portanto, as expressões (112) a (115) aplicam-se aos PZTs, cobrindo toda a placa. Essas equações podem ser modificadas para PZTs finitos da seguinte maneira. Para o PZT, com contornos  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ , e  $y_2$ , como mostrado na Figuras 5 e 6, as forças e os momentos totais são:

$$(N_x)_{pe} = [(N_x)_{pe1} + (N_x)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) S_{1,2}(x) \hat{S}_{1,2}(y) \quad (116)$$

$$(N_y)_{pe} = [(N_y)_{pe1} + (N_y)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) S_{1,2}(x) \hat{S}_{1,2}(y) \quad (117)$$

$$(M_x)_{pe} = [(M_x)_{pe1} + (M_x)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) \quad (118)$$

$$(M_y)_{pe} = [(M_y)_{pe1} + (M_y)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) \quad (119)$$

onde a função característica  $\chi_{pe}(x, y)$  foi definida em (105). A presença da função indicadora

$$S_{1,2}(x) = \begin{cases} 1, & x < (x_1 + x_2)/2 \\ 0, & x = (x_1 + x_2)/2 \\ -1, & x > (x_1 + x_2)/2 \end{cases} \quad (120)$$

$$\hat{S}_{1,2}(y) = \begin{cases} 1, & y < (y_1 + y_2)/2 \\ 0, & y = (y_1 + y_2)/2 \\ -1, & y > (y_1 + y_2)/2 \end{cases} \quad (121)$$

vem da propriedade de que, para PZTs homogêneos de espessura uniforme e opostos, iguais deformações são geradas sobre o ponto médio  $(\bar{x}, \bar{y})$ , nas duas coordenadas.

Se a equação de placa (Reissner-Mindlin ou Kirchhoff) for usada, os carregamentos de superfície podem ser determinados via as expressões:

$$q_x = -S_{1,2}(x)\hat{S}_{1,2}(y)\frac{\partial(N_x)_{pe}}{\partial x} \quad (122)$$

$$q_y = -S_{1,2}(x)\hat{S}_{1,2}(y)\frac{\partial(N_y)_{pe}}{\partial y} \quad (123)$$

$$m_x = -\frac{\partial(M_y)_{pe}}{\partial y} \quad (124)$$

$$m_y = -\frac{\partial(M_x)_{pe}}{\partial x} \quad (125)$$

Esses valores, mais tarde, podem ser substituídos nas equações de equilíbrio (61) a (63), para *Kirchhoff*, e (77) a (79) para *Reissner-Mindlin*.

A aplicação de um potencial tal que  $e_{pe}=e_{pe1}=e_{pe2}$ , causa extensão pura no plano da placa (PZTs são excitados no plano), enquanto flexão pura ocorre com a escolha  $e_{pe}=e_{pe1}=-e_{pe2}$  (excitação fora do plano).

### 2.4.2 Interação Cerâmica Piezelétrica e Viga

A contribuição dos PZTs, na dinâmica de vigas planas e finas, pode ser determinada diretamente dos modelos de placa com PZTs. Se considerarmos somente o movimento transversal, direção  $y$ , da equação (99), vem:

$$\begin{aligned} bN_y = & \left[ Ehb + (E_{pe1}h_{pe}b + E_{pe2}h_{pe}b)\chi_{pe}(y) \right] \frac{\partial v}{\partial y} \\ & + \frac{1}{2} (E_{pe1}h_2b - E_{pe2}h_2b)\chi_{pe}(y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} bM_y = & - \left[ E \frac{h^3b}{12} + \frac{1}{3} (E_{pe1}h_3b + E_{pe2}h_3b)\chi_{pe}(y) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & - \frac{1}{2} (E_{pe1}h_2b - E_{pe2}h_2b)\chi_{pe}(y) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (127)$$

A força externa e momentos, gerados pela ativação dos PZTs, seguem as mesmas expressões, obtidas no caso de placa. Resumindo aqueles resultados, vemos que a força e momento externos totais são:

$$(bM_y)_{pe} = \left[ (bM_y)_{pe1} + (bM_y)_{pe2} \right] \chi_{pe}(y) \quad (128)$$

$$(bN_y)_{pe} = \left[ (bN_y)_{pe1} + (bN_y)_{pe2} \right] \chi_{pe}(y) \tilde{S}_{1,2}(y) \quad (129)$$

onde:

$$\begin{aligned} (bM_y)_{pe1} &= -\frac{1}{8} E_{pe1} b \left[ 4 \left( \frac{h}{2} + h_{pe} \right)^2 - h^2 \right] e_{pe1} \\ &= -\frac{1}{2} E_{pe1} b (h + h_{pe}) d_{31} \phi_1 \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned}
(bM_y)_{pe2} &= \frac{1}{8} E_{pe2} b \left[ 4 \left( \frac{h}{2} + h_{pe} \right)^2 - h^2 \right] e_{pe2} \\
&= \frac{1}{2} E_{pe2} b (h + h_{pe}) d_{31} \phi_2
\end{aligned} \tag{131}$$

$$(bN_y)_{pe1} = -E_{pe1} b h_{pe} e_{pe1} = -E_{pe1} b d_{31} \phi_1 \tag{132}$$

$$(bN_y)_{pe2} = -E_{pe2} b h_{pe} e_{pe2} = -E_{pe2} b d_{31} \phi_2 \tag{133}$$

Para determinar as cargas dos PZTs sobre a equação da viga, as forças e os momentos de superfície correspondentes são encontrados através das relações:

$$bq_y = (bq_y)_{pe} = -\tilde{S}_{1,2}(y) \frac{\partial (bN_y)_{pe}}{\partial y} \tag{134}$$

$$bm_x = (bm_x)_{pe} = \frac{\partial (bM_y)_{pe}}{\partial y} \tag{135}$$

## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE PIEZELETRICIDADE

Para modelar estruturas complexas, precisamos lançar mão de um método numérico. Segundo *BATHE*, o *Método dos Elementos Finitos* é uma importante ferramenta, freqüentemente, indispensável na análise e projeto de engenharia (*BATHE, 1996*). As equações da piezoeletricidade são complexas e impedem soluções fechadas para geometrias complexas. Nesse sentido, o método dos elementos finitos se mostra atrativo.

Modelos numéricos são desenvolvidos empregando o *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos* para estruturas com sensores e atuadores distribuídos, cujo equacionamento se encontra no Apêndice A. Primeiramente, apresentamos um modelo tridimensional, usando o elemento isoparamétrico trilinear de oito nós, com três graus de liberdade internos, com cada nó, tendo três graus de liberdade de deslocamento. O objetivo da adição dos graus de liberdade internos é reduzir a rigidez adicional, que aparece na direção da espessura, e produz equações mal condicionadas e resultados imprecisos (*TAYLOR et al., 1976*). Posteriormente, desenvolvemos modelos para estruturas do tipo viga e placa. Trabalhamos com modelo de *Viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko* e de *Placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin*. No modelo de *Kirchhoff* foi utilizado o elemento retangular de *Melosh*, com quatro nós e três graus de liberdade por nó. Segundo *BATHE (1996)*, é um dos elementos mais efetivos para placa.



Já no *modelo de Mindlin - Reissner*, empregamos um elemento isoparamétrico, com formulação mista MITC4, proposto por *BATHE (1996)*. Tal elemento, segundo o autor, não apresenta o problema de superestimar a tensão de cisalhamento transversal, conhecido pela expressão “*shear locking*”.

### 3.1 EQUAÇÃO VARIACIONAL PARA MEIOS PIEZELÉTRICOS

Conforme apresentado no Apêndice A, o comportamento do material piezelétrico, onde existem efeitos elétricos e mecânicos, pode ser escrito na forma matricial, como:

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iiint_V \{\delta E\}^T \{D\} dV = \\ \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{f}_V\} dV + \iint_{S_f} \{\delta u\}^T \{\bar{f}_S\} dS - \iint_{S_q} \delta \phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (136)$$

Segundo *CADY (1946)*, a equação constitutiva da piezoeletricidade linear é:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [c^E] \{\varepsilon\} - [e] \{E\} \\ \{D\} &= [e]^T \{\varepsilon\} + [\xi^E] \{E\} \end{aligned} \quad (137)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} [e] &= [c^E] [d] \\ [\xi^E] &= [\xi^\sigma] - [d]^T [c^E] [d] \end{aligned} \quad (138)$$

onde:  $\{\sigma\}$  - tensor tensão mecânica;  $\{\varepsilon\}$  - tensor deformação;  $\{E\}$  - vetor campo elétrico;  $\{D\}$  - vetor deslocamento elétrico;  $[c^E]$  - matriz elasticidade para campo elétrico constante;  $[e]$  - matriz de constantes de tensões piezelétricas;  $[\xi^E]$  - tensor de constantes dielétricas para deformação constante;  $[\xi^\sigma]$  - matriz de constantes dielétricas para tensão mecânica constante;  $[d]$  - matriz de constantes de deformações piezelétricas.

Substituindo a equação (137) na equação (136), obtemos a equação do *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos*:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T [c^E] \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \iiint_V \{\delta E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV \\ & - \iiint_V \{\delta E\}^T [\xi] \{E\} dV = \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{f}_V\} dV + \iint_{S_f} \{\delta u\}^T \{\bar{f}_S\} dS - \iint_{S_q} \delta \phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (139)$$

## 3.2 ELEMENTO SÓLIDO TRILINEAR DE OITO NÓS

Um elemento piezelétrico e isoparamétrico trilinear de oitos nó, com três graus de liberdade internos, será formulado, usando o princípio variacional eletromecânico para meios piezelétricos, equação (139). Para se obter as relações matriciais para o elemento, definimos uma aproximação nodal do deslocamento  $\{u\} \cong \{q\}$  e do potencial  $\phi$  em termos de  $i$  variáveis nodais via matrizes de funções de interpolação  $[N_q]$  e  $[N_\phi]$ .

### 3.2.1 Aproximação por Elementos Finitos

A aproximação nodal, via elementos finitos, sugere que:

$$\begin{aligned} \{q\} &= [N_q] \{q_i\} \\ \phi &= [N_\phi] \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (140)$$

onde:

$$\{q_i\} = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \dots \quad \bar{u}_8 \quad \bar{v}_8 \quad \bar{w}_8]^T = \sum_{i=1}^8 [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i]^T \quad (141)$$

$$\{\phi_i\} = [\bar{\phi}_1 \quad \bar{\phi}_2 \quad \dots \quad \bar{\phi}_8]^T = \sum_{i=1}^8 [\bar{\phi}_i]^T \quad (142)$$

$$[N_q] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$[N_\phi] = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8] = \sum_{i=1}^8 [N_i] \quad (144)$$

A deformação  $\{\varepsilon\}$  é definida como a primeira derivada do vetor  $\{q\}$ , empregando a matriz operador diferencial  $[L_q]$ .

$$\{\varepsilon\} = [L_q]\{q\} \quad (145)$$

O vetor campo elétrico  $\{E\}$  é definido pelo potencial elétrico  $\phi$ , usando o operador gradiente, equação (424).

$$\{E\} = -\nabla\{\phi\} \quad (146)$$

Escrevendo as equações (145) e (146) em termos das variáveis nodais, obtemos:

$$\{\varepsilon\} = [B_q]\{q_i\} \quad (147)$$

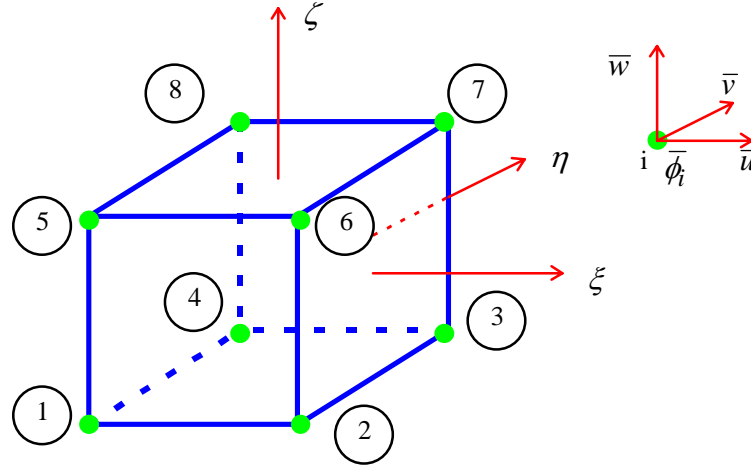
$$\{E\} = -[B_\phi]\{\phi_i\} \quad (148)$$

onde:

$$[B_q] = [L_q][N_q] = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$[B_\phi] = \nabla[N_\phi] = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (150)$$

O elemento isoparamétrico convencional apresenta grande deficiência, quando aplicado em estruturas finas. Se a espessura do elemento é muito pequena, comparada com seu comprimento, uma energia cisalhante excessiva é armazenada na direção da espessura. Conseqüentemente, o coeficiente de rigidez na direção da espessura se tornará muito maior do que aqueles nas outras direções do plano. Isto conduz a estimativas pobres e resultados incorretos (*COOK, 1974; BATHE & WILSON, 1976*). Uma técnica para aperfeiçoar o comportamento do elemento isoparamétrico consiste em introduzir graus de liberdade internos, (*TAYLOR, et al., 1976; COOK, et al., 1989; TZOU & TSENG, 1990*).



*Figura 7 - Elemento Trilinear de Oito Nós*

As funções de interpolação são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
 \end{aligned} \tag{151}$$

Já as funções de interpolação para os graus de liberdades internos são:

$$P_1 = (1-\xi^2) \quad P_2 = (1-\eta^2) \quad P_3 = (1-\zeta^2) \tag{152}$$

onde:

$$-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1 \tag{153}$$

Adicionando na equação (140), as funções de interpolação, referentes aos graus de liberdade internos, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\{q\} &= [N_q]\{q_i\} + [X_q]\{\tilde{q}_m\} \\ \phi &= [N_\phi]\{\phi_i\} + [X_\phi]\{\tilde{\phi}_m\}\end{aligned}\quad (154)$$

sendo que:

$$\{\tilde{q}_m\} = [\bar{u}_9 \quad \bar{v}_9 \quad \bar{w}_9 \quad \dots \quad \bar{u}_{11} \quad \bar{v}_{11} \quad \bar{w}_{11}]^T = \sum_{m=9}^{11} [\bar{u}_m \quad \bar{v}_m \quad \bar{w}_m]^T \quad (155)$$

$$\{\tilde{\phi}_m\} = [\bar{\phi}_9 \quad \bar{\phi}_{10} \quad \bar{\phi}_{11}]^T = \sum_{m=9}^{11} [\bar{\phi}_m]^T \quad (156)$$

$$[X_q] = \begin{bmatrix} P_9 & 0 & 0 & \dots & P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_9 & 0 & \dots & 0 & P_{11} & 0 \\ 0 & 0 & P_9 & \dots & 0 & 0 & P_{11} \end{bmatrix} = \sum_{m=9}^{11} \begin{bmatrix} P_m & 0 & 0 \\ 0 & P_m & 0 \\ 0 & 0 & P_m \end{bmatrix} \quad (157)$$

$$[X_\phi] = [P_9 \quad P_{10} \quad P_{11}] = \sum_{m=9}^{11} [P_m] \quad (158)$$

Com a aproximação representada pela equação (154), as equações (147) e (148) tomam a forma seguinte:

$$\{\varepsilon\} = [B_q]\{q_i\} + [G_q]\{\tilde{q}_m\} \quad (159)$$

$$\{E\} = -[B_\phi]\{\phi_i\} - [G_\phi]\{\tilde{\phi}_m\} \quad (160)$$

onde:

$$[G_q] = [L_q][X_q] = \sum_{m=9}^{11} \begin{bmatrix} \frac{\partial P_m}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_m}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P_m}{\partial \zeta} \\ 0 & \frac{\partial P_m}{\partial \zeta} & \frac{\partial P_m}{\partial \eta} \\ \frac{\partial P_m}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial P_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P_m}{\partial \eta} & \frac{\partial P_m}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$[G_\phi] = \nabla[X_\phi] = \sum_{m=9}^{11} \begin{bmatrix} \frac{\partial P_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P_m}{\partial \eta} \\ \frac{\partial P_m}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (162)$$

### 3.2.2 Energia Potencial

Agora, a energia potencial  $U$  do material piezelétrico deve ser modificada, para incluir os graus de liberdade internos. Isso é feito, aplicando-se, novamente, o princípio da energia potencial mínima e substituindo as equações (154), (159) e (160) na equação **(466)**.

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\delta \tilde{u}_i\}^T \\ \{\delta \tilde{a}_m\}^T \end{bmatrix}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B]^T \\ [G]^T \end{bmatrix} [R][[B] \quad [G]] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\} \\ \{\tilde{a}_m\} \end{bmatrix} \quad (163)$$

onde:

$$\{\tilde{u}_i\} = \begin{bmatrix} \{q_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} \quad (164)$$

$$\{\tilde{a}_m\} = \begin{bmatrix} \{\tilde{q}_m\} \\ \{\tilde{\phi}_m\} \end{bmatrix} \quad (165)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_q] & [0] \\ [0] & -[B_\phi] \end{bmatrix} \quad (166)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [G_q] & [0] \\ [0] & -[G_\phi] \end{bmatrix} \quad (167)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [c^E] & -[e] \\ -[e]^T & -[\xi^{\mathcal{E}}] \end{bmatrix} \quad (168)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (169)$$

Fazendo

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B]^T \\ [G]^T \end{bmatrix} [R] \begin{bmatrix} [B] & [G] \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (170)$$

a equação (163), fica:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\delta \tilde{u}_i\}^T \\ \{\delta \tilde{a}_m\}^T \end{bmatrix}^T [k] \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\} \\ \{\tilde{a}_m\} \end{bmatrix} \quad (171)$$

Operando a equação (170), obtemos:



$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B]^T [R][B] & [B]^T [R][G] \\ [G]^T [R][B] & [G]^T [R][G] \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (172)$$

Considerando-se

$$[\tilde{k}_{qq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [R][B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (173)$$

$$[\tilde{k}_{qa}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [R][G] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (174)$$

$$[\tilde{k}_{aq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T [R][B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (175)$$

$$[\tilde{k}_{aa}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T [R][G] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (176)$$

e substituindo as equações (173) a (176) na equação (172), vemos que:

$$[k] = \begin{bmatrix} [\tilde{k}_{qq}] & [\tilde{k}_{qa}] \\ [\tilde{k}_{aq}] & [\tilde{k}_{aa}] \end{bmatrix} \quad (177)$$

Vamos determinar cada matriz apresentada pela equação (177). Para isso, tomemos a equação (173), que receberá as equações (166) e (168).

$$[\tilde{k}_{qq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_q]^T [c^E][B_q] & [B_q]^T [e][B_\phi] \\ [B_\phi]^T [e]^T [B_q] & -[B_\phi]^T [\xi^E][B_\phi] \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (178)$$

Ora, fazendo

$$[k_{qq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_q]^T [c^E] [B_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (179)$$

$$[k_{q\phi}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_q]^T [e] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (180)$$

$$[k_{\phi q}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [e]^T [B_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (181)$$

$$[k_{\phi\phi}] = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [\xi^E] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (182)$$

e substituindo essas equações, (179) a (182), na equação (178), temos:

$$[\tilde{k}_{qq}] = \begin{bmatrix} [k_{qq}] \\ [k_{\phi q}] \end{bmatrix} \quad (183)$$

Tomando a equação (174) e substituindo as equações (166) a (168), obtemos:

$$[\tilde{k}_{qa}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_q]^T [c^E] [G_q] & [B_q]^T [e] [G_\phi] \\ [B_\phi]^T [e]^T [G_q] & -[B_\phi]^T [\xi^E] [G_\phi] \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (184)$$

Considerando-se

$$[k_{qa}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_q]^T [c^E] [G_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (185)$$

$$[k_{qb}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_q]^T [e] [G_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (186)$$

$$[k_{\phi a}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [e]^T [G_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (187)$$

$$[k_{\phi b}] = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [G_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (188)$$

podemos substituir essas equações, (185) a (188), na equação (184), obtendo:

$$[\tilde{k}_{qa}] = \begin{bmatrix} [k_{qa}] \\ [k_{\phi a}] \end{bmatrix} \quad (189)$$

A equação (175), com as substituições das equações (166) a (168), fica:

$$[\tilde{k}_{aq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [G_q]^T [c^E] [B_q] & [G_q]^T [e] [B_\phi] \\ [G_\phi]^T [e]^T [B_q] & -[G_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [B_\phi] \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (190)$$

Ora, fazendo

$$[k_{aq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_q]^T [c^E] [B_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (191)$$

$$[k_{a\phi}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_q]^T [e] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (192)$$

$$[k_{bq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_\phi]^T [e]^T [B_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (193)$$

$$[k_{b\phi}] = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (194)$$

podemos substituir as equações (191) a (194) na equação (190) obtendo:

$$[\tilde{k}_{aq}] = \begin{bmatrix} k_{aq} \\ k_{bq} \end{bmatrix} \quad (195)$$

Finalmente, tomando a equação (176) e substituindo as equações (167) e (168), chegamos a:

$$[\tilde{k}_{aa}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [G_q]^T [c^E] [G_q] & [G_q]^T [e] [G_\phi] \\ [G_\phi]^T [e]^T [G_q] & -[G_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [G_\phi] \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (196)$$

Fazendo com que

$$[k_{aa}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_q]^T [c^E] [G_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (197)$$

$$[k_{ab}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_q]^T [e] [G_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (198)$$

$$[k_{ba}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_\phi]^T [e]^T [G_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (199)$$

$$[k_{bb}] = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [G_\phi] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (200)$$

vemos que as equações (197) a (200), substituídas na equação (196), conduzem a:

$$[\tilde{k}_{aa}] = \begin{bmatrix} [k_{aa}] & [k_{ab}] \\ [k_{ba}] & [k_{bb}] \end{bmatrix} \quad (201)$$

Então, o variacional da energia potencial, equação (171), com a substituição da equação (177), pode ser escrito como:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\}^T \\ \{\tilde{a}_m\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [\tilde{k}_{qq}] & [\tilde{k}_{qa}] \\ [\tilde{k}_{aq}] & [\tilde{k}_{aa}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\} \\ \{\tilde{a}_m\} \end{bmatrix} \quad (202)$$

### 3.2.3 Energia Cinética

O variacional da energia cinética, equação (469), com a substituição da equação (140), pode ser escrito como:

$$\delta T = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [m_{qq}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} \quad (203)$$

onde:

$$[m_{qq}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [N_q]^T [N_q] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (204)$$

Incluindo os graus de liberdade internos, reescrevemos a equação (203):

$$\delta T = \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\}^T \\ \{\tilde{a}_m\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{m}_{qq} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\} \\ \{\tilde{a}_m\} \end{bmatrix} \quad (205)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{qq} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (206)$$

### 3.2.4 Trabalho

Para determinar os vetores de força mecânica e elétrica, devemos tomar o variacional do trabalho, equação (467), com a substituição da equação (140).

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \\ \{\tilde{\alpha}_m\}^T \end{bmatrix}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_q]^T & [0] & [0] \\ [0] & -[N_\phi]^T & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{f}_s\} \\ \{\sigma_q\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta \quad (207)$$

Fazendo

$$[N_{q\phi}] = \begin{bmatrix} [N_q]^T & [0] \\ [0] & -[N_\phi]^T \end{bmatrix} \quad (208)$$

$$\{\bar{f}_{sq}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{f}_s\} \\ \{\sigma_q\} \end{bmatrix} \quad (209)$$

conseguimos obter a equação:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\tilde{\delta u}_i\}^T \\ \{\tilde{\delta a}_m\}^T \end{bmatrix}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{q\phi} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{f}_{sq}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta \quad (210)$$

Com

$$\begin{bmatrix} \{\tilde{f}_{sq}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{q\phi} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{f}_{sq}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta \quad (211)$$

na equação (210), obtemos:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\tilde{\delta u}_i\}^T \\ \{\tilde{\delta a}_m\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{\tilde{f}_{sq}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (212)$$

### 3.2.5 Equação de Equilíbrio

Reescrevendo a equação do princípio variacional para meios piezelétricos, equação (465), com aproximação, por elementos finitos, para o elemento trilinear de oito nós, com três graus de liberdade internos, concluímos:

$$\begin{bmatrix} \{\tilde{\delta u}_i\}^T \\ \{\tilde{\delta a}_m\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{m}_{qq} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{\ddot{u}}_i\} \\ \{\tilde{\ddot{a}}_m\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{qq} \\ \tilde{k}_{aq} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{k}_{qa} \\ \tilde{k}_{aa} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\} \\ \{\tilde{a}_m\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{\tilde{f}_{sq}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} = 0 \quad (213)$$

Finalmente, como os variacionais  $\tilde{\delta u}_i$  e  $\tilde{\delta a}_m$  são cinematicamente admissíveis, podemos escrever o sistema de equações homogêneo, que representa o comportamento dinâmico do material piezelétrico, como

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{m}_{qq} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{\ddot{u}}_i\} \\ \{\tilde{\ddot{a}}_m\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{qq} \\ \tilde{k}_{aq} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{k}_{qa} \\ \tilde{k}_{aa} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{u}_i\} \\ \{\tilde{a}_m\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\tilde{f}_{sq}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (214)$$

### 3.2.6 Condensação dos Graus de Liberdade Internos

O conjunto de equações (214) deve ser condensado (*COOK et al., 1989*), antes de montar o sistema global de equações, pois os graus de liberdade internos são utilizados somente para aumentar o grau da função de interpolação, não tendo nenhuma interpretação física.

Escrevendo novamente esse sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} \left[ \tilde{m}_{qq} \right] \{ \ddot{\tilde{u}}_i \} + \left[ \tilde{k}_{qq} \right] \{ \tilde{u}_i \} + \left[ \tilde{k}_{qa} \right] \{ \tilde{a}_m \} = \{ \tilde{f}_{sq} \} \\ \left[ \tilde{k}_{aq} \right] \{ \tilde{u}_i \} + \left[ \tilde{k}_{aa} \right] \{ \tilde{a}_m \} = \{ 0 \} \end{cases} \quad (215)$$

Da segunda equação do sistema de equações (215), observamos que

$$\{ \tilde{a}_m \} = - \left[ \tilde{k}_{aa} \right]^{-1} \left[ \tilde{k}_{aq} \right] \{ \tilde{u}_i \} \quad (216)$$

a qual é substituída na primeira equação do sistema (215).

$$\left[ \tilde{m}_{qq} \right] \{ \ddot{\tilde{u}}_i \} + \left[ \tilde{k}_{qq}^* \right] \{ \tilde{u}_i \} = \{ \tilde{f}_{sq} \} \quad (217)$$

onde:

$$\left[ \tilde{k}_{qq}^* \right] = \left[ \tilde{k}_{qq} \right] - \left[ \tilde{k}_{qa} \right] \left[ \tilde{k}_{aa} \right]^{-1} \left[ \tilde{k}_{aq} \right] \quad (218)$$

### 3.2.7 Determinação dos Elementos de $\left[ \tilde{k}_{qq}^* \right]$

Para obtermos um sistema de equações que explicate separadamente o comportamento mecânico e elétrico do material piezelétrico, devemos determinar o valor de  $\left[ \tilde{k}_{qq}^* \right]$ .



Fazendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{qq}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{qq}^* \\ k_{\phi q}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{q\phi}^* \\ k_{\phi\phi}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (219)$$

e substituindo as equações (183), (189), (195), (201) e (219) na equação (218), temos:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{qq}^* \\ k_{\phi q}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{q\phi}^* \\ k_{\phi\phi}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{qq} \\ k_{\phi q} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{q\phi} \\ k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{qa} \\ k_{\phi a} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{qb} \\ k_{\phi b} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa} \\ k_{ba} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab} \\ k_{bb} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aq} \\ k_{bq} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{a\phi} \\ k_{b\phi} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (220)$$

então:

$$\begin{bmatrix} k_{qq}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} k_{qa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{qb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ba}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{qa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{qb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bq} \end{bmatrix} \right) \quad (221)$$

$$\begin{bmatrix} k_{q\phi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{q\phi} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} k_{qa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{a\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{qb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ba}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{a\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{qa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{b\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{qb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{b\phi} \end{bmatrix} \right) \quad (222)$$

$$\begin{bmatrix} k_{\phi q}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\phi q} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} k_{\phi a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\phi b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ba}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\phi a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\phi b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bq} \end{bmatrix} \right) \quad (223)$$

$$\begin{bmatrix} k_{\phi\phi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} k_{\phi a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{a\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\phi b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ba}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{a\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\phi a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{b\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\phi b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{b\phi} \end{bmatrix} \right) \quad (224)$$

sendo que:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa}^i \\ k_{ba}^i \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab}^i \\ k_{bb}^i \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa} \\ k_{ba} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ab} \\ k_{bb} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \quad (225)$$

### 3.2.8 Sistema Global de Equações

O sistema de equações, representado pela equação (217), agora pode ser expandido, com o auxílio das equações (202), (212), (205) e (219), da seguinte forma:

$$\begin{cases} \left[ m_{qq} \right] \{\ddot{q}_i\} + \left[ k_{qq}^* \right] \{q_i\} + \left[ k_{q\phi}^* \right] \{\phi_i\} = \{f_s\} \\ \left[ k_{\phi q}^* \right] \{q_i\} + \left[ k_{\phi\phi}^* \right] \{\phi_i\} = \{q_s\} \end{cases} \quad (226)$$

onde:

$$\{f_s\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_q]^T \{\bar{f}_s\} \det[J] d\xi d\eta \quad (227)$$

$$\{q_s\} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_\phi]^T \sigma_q \det[J] d\xi d\eta \quad (228)$$

O sistema de equações (226) pode ser generalizado com relação ao carregamento mecânico, acrescentando os termos de força de corpo e forças pontuais.

$$\{f_q\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_q]^T \{\bar{f}_V\} \det[J] d\xi d\eta d\zeta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_q]^T \{\bar{f}_S\} \det[J] d\xi d\eta + \{\bar{f}_C\} \quad (229)$$

Montando o sistema global de equações dinâmicas a partir do sistema de equações dos elementos, representados pela equação (226), obtemos o sistema global de equações de equilíbrio dinâmico para o material piezelétrico, como

$$\begin{cases} \left[ M_{qq} \right] \{\ddot{q}\} + \left[ K_{qq}^* \right] \{q\} + \left[ K_{q\phi}^* \right] \{\phi\} = \{F_q\} \\ \left[ K_{\phi q}^* \right] \{q\} + \left[ K_{\phi\phi}^* \right] \{\phi\} = \{Q_s\} \end{cases} \quad (230)$$

### 3.2.9 Equações do Sensor e Atuador Piezelétrico

Tomando o valor do potencial elétrico na segunda equação do sistema de equações (230), temos:

$$\{\phi\} = [\mathbf{K}_{\phi\phi}^*]^{-1} (\{Q_s\} - [\mathbf{K}_{\phi q}^*] \{q\}) \quad (231)$$

Como no sensor não existe potencial elétrico aplicado, a equação do sensor pode ser escrita como:

$$\{\phi\} = -[\mathbf{K}_{\phi\phi}^*]^{-1} [\mathbf{K}_{\phi q}^*] \{q\} \quad (232)$$

Substituindo a equação (231) na primeira equação do sistema de equações (230), obtemos a equação do atuador.

$$[\mathbf{M}_{qq}] \{\ddot{q}\} + [\mathbf{K}^+] \{q\} = \{F_q\} + \{F_{el}\} \quad (233)$$

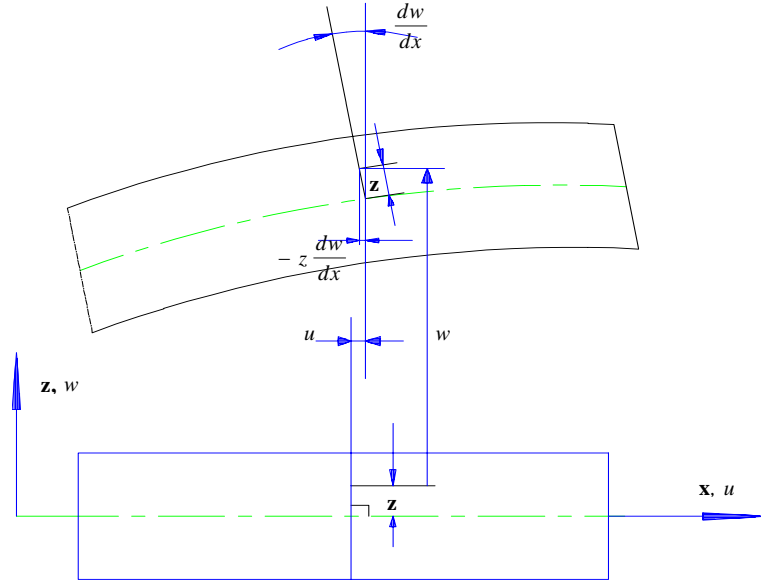
onde:

$$[\mathbf{K}^+] = [\mathbf{K}_{qq}^*] - [\mathbf{K}_{q\phi}^*] [\mathbf{K}_{\phi\phi}^*]^{-1} [\mathbf{K}_{\phi q}^*] \quad (234)$$

$$\{f_{el}\} = -[\mathbf{K}_{q\phi}^*] [\mathbf{K}_{\phi\phi}^*]^{-1} \{Q_s\} \quad (235)$$

### 3.3 VIGA DE EULER - BERNOULLI

Vamos obter as matrizes de massa e rigidez e o vetor de forças para o elemento de viga de Euler - Bernoulli, com base na hipótese de Kirchhoff, no quarto postulado de Love e no princípio variacional eletromecânico para meios piezelétricos, equação (139).



*Figura 8 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro*

Com as considerações anteriores, podemos escrever a seguinte relação de deslocamento:

$$u_1 = u - z \frac{dw}{dx} \quad (236)$$

As relações cinemáticas são obtidas em função do deslocamento  $u$  na direção  $x$  de um ponto, situado sobre uma normal ao plano médio da viga e distante de  $z$  desse plano.

$$e_x = \frac{du_1}{dx} = u' - zw'' \quad (237)$$

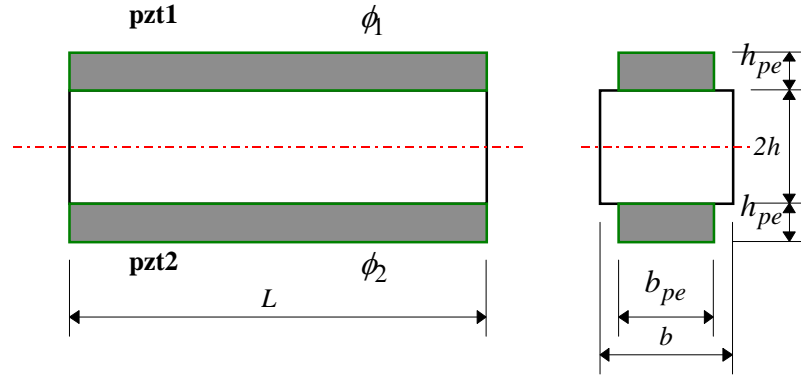


Figura 9 - Parâmetros Dimensionais do Elemento Viga / PZT

### 3.3.1 Aproximação por Elementos Finitos

A discretização da estrutura será feita com elementos de viga isoparamétricos, com três graus de liberdade por nó. O polinômio de interpolação para o deslocamento horizontal será linear, enquanto ao deslocamento vertical será cúbico. Então, as aproximações nodais ficam:

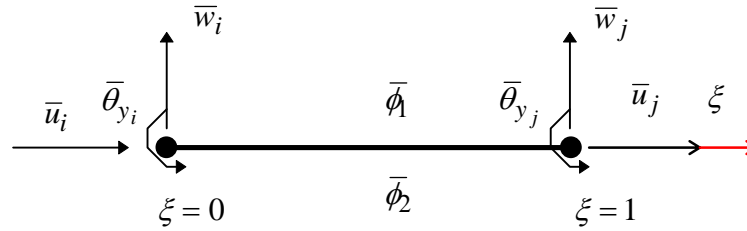


Figura 10 - Elemento de Viga Piezelétrico

$$\begin{cases} u \cong \bar{u} = [N_u] \{q_i\} \\ w \cong \bar{w} = [N_w] \{q_i\} \\ \phi \cong \bar{\phi} = [N_\phi] \{\phi_i\} \end{cases} \quad (238)$$

$$\begin{cases} \bar{u}' = \frac{d}{dx}[N_u]\{q_i\} = [B_u]\{q_i\} \\ \bar{w}' = \frac{d}{dx}[N_w]\{q_i\} = [B_w]\{q_i\} \\ \bar{w}'' = \frac{d^2}{dx^2}[N_w]\{q_i\} = [B'_w]\{q_i\} \end{cases} \quad (239)$$

onde:

$$\{q_i\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{w}_i & \bar{\theta}_{y_i} & \bar{u}_j & \bar{w}_j & \bar{\theta}_{y_j} \end{bmatrix}^T \quad (240)$$

As funções de interpolação para os deslocamentos horizontais, verticais e angulares são, respectivamente:

$$[N_u] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (241)$$

$$[N_w] = \begin{bmatrix} 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & (\xi-2\xi^2+\xi^3)L & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & (-\xi^2+\xi^3)L \end{bmatrix} \quad (242)$$

$$[N_q] = \begin{bmatrix} N_u & N_w \end{bmatrix}^T \quad (243)$$

### 3.3.2 Energia Potencial

O variacional da energia potencial para meios piezelétricos, equação (466), colocado na forma matricial, fica:

$$\delta U = \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iiint_{V_{pe}} \{\delta E\}^T \{D\} dV_{pe} \quad (244)$$

No modelo de viga proposto, existem dois domínios, que devem ser considerados. O primeiro refere-se ao material estrutural, domínio  $V - V_{pe}$  ou  $V_{st}$ , e o segundo é relativo ao material piezelétrico, domínio  $V_{pe}$ . No primeiro domínio, as leis constitutivas do material, são:

$$\{\varepsilon\} = e_x, \quad [c] = E_{st}, \quad \{\sigma\} = \sigma_x, \quad (245)$$

Com essas considerações, a energia potencial para o domínio  $V_{st}$ , fica:

$$\delta U = \iiint_{V_{st}} \{\delta\varepsilon\}^T [c] \{\varepsilon\} dV_{st} \quad (246)$$

Com a aproximação por elementos finitos, a equação (237) das relações cinemáticas, para o modelo de viga de Euler - Bernoulli e colocada na forma matricial:

$$\{\varepsilon\} = \{[B_u] - z[B'_w]\} \{q_i\} \quad (247)$$

Substituindo a equação (247) na equação do variacional da energia potencial, temos:

$$\delta U = \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{st}} ([B_u] - z[B'_w])^T E_{st} ([B_u] - z[B'_w]) dV_{st} \{q_i\} \quad (248)$$

ou, ainda,

$$\delta U = \{\delta q_i\}^T \left[ \int_0^1 E_{st} A_{st} [B_u]^T [B_u] L d\xi + \int_0^1 E_{st} I_{st} [B'_w]^T [B'_w] L d\xi \right] \{q_i\} \quad (249)$$

Conseqüentemente, a equação, colocada entre colchetes, é a matriz de rigidez do elemento estrutural.

$$\begin{bmatrix} k_{qq} \end{bmatrix} = \int_0^1 E_{st} A_{st} [B_u]^T [B_u] L d\xi + \int_0^1 E_{st} I_{st} [B'_w]^T [B'_w] L d\xi \quad (250)$$

onde  $A_{st}$  é a área da seção transversal e  $I_{st}$  é o momento de inércia da seção transversal, e são calculados pelas equações (251).

$$\begin{cases} A_{st} = 2bh \\ I_{st} = \frac{2}{3}bh^3 \end{cases} \quad (251)$$

Já para o domínio  $V_{pe}$ , devemos considerar a equação constitutiva da piezoelectricidade linear, equação (137), para o modelo de viga de Euler - Bernoulli.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= e_x, \quad [c^E] = E_{pe}, \quad \{\sigma\} = \sigma_x, \\ \{e\} &= e_{31} \quad [\zeta^{\varepsilon}] = \zeta_{33}^{\varepsilon} \quad [D] = D_3 \quad \{E\} = E_3 \end{aligned} \quad (252)$$

Vamos reescrever a energia potencial, com auxílio das equações (247) e (252).

$$\begin{aligned} \delta U &= \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B'_w])^T E_{pe} ([B_u] - z[B'_w]) dV_{pe} \{q_i\} \\ &+ \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B'_w])^T e_{31} [B_\phi] dV_{pe} \{\phi_i\} \\ &+ \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{31} ([B_u] - z[B'_w]) dV_{pe} \{q_i\} \\ &- \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T \zeta_{33}^{\varepsilon} [B_\phi] dV_{pe} \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (253)$$

Fazendo com que



$$[k_{qq}] = \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B'_w])^T E_{pe} ([B_u] - z[B'_w]) dV_{pe} \quad (254)$$

$$[k_{q\phi}] = \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B'_w])^T e_{31} [B_\phi] dV_{pe} \quad (255)$$

$$[k_{\phi q}] = \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{31} ([B_u] - z[B'_w]) dV_{pe} \quad (256)$$

$$[k_{\phi\phi}] = - \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T \xi_{33}^{\mathcal{E}} [B_\phi] dV_{pe} \quad (257)$$

A equação (253) fica:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [k_{qq}] \\ [k_{q\phi}] \\ [k_{\phi q}] \\ [k_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} \quad (258)$$

Trabalhando com as equações (250), (254) a (257), conseguimos obter as expressões finais para as matrizes de rigidez.

$$[k_{qq}] = L(E_{st}A_{st} + E_{pe}A_{pe}) \int_0^1 [B_u]^T [B_u] d\xi + L(E_{st}I_{st} + E_{pe}I_{pe}) \int_0^1 [B'_w]^T [B'_w] d\xi \quad (259)$$

$$[k_{q\phi}] = E_{pe}A_{pe}d_{31}L \int_0^1 [B_u]^T [B_{\phi u}] d\xi - \left(h + \frac{h_{pe}}{2}\right) E_{pe}A_{pe}d_{31}L \int_0^1 [B'_w]^T [B_{\phi w}] d\xi \quad (260)$$

$$[k_{\phi\phi}] = \frac{\xi_{33}^{\mathcal{E}} A_{pe} L}{h_{pe}^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (261)$$

com

$$\begin{bmatrix} B_{\phi u} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{pe}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} B_{\phi w} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{pe}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (262)$$

### 3.3.3 Energia Cinética

A equação do variacional da energia cinética, equação (470), é aplicada ao elemento de viga proposto.

$$\delta T = \iiint_{V_{st}} \rho \{ \delta \dot{q}_i \}^T [N_q]^T [N_q] \{ \dot{q}_i \} dV_{st} + \iiint_{V_{pe}} \rho_{pe} \{ \delta \dot{q}_i \}^T [N_q]^T [N_q] \{ \dot{q}_i \} dV \quad (263)$$

Chamando de

$$[m_{st}] = \rho_{st} A_{st} L \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\xi \quad (264)$$

$$[m_{pe}] = \rho_{pe} A_{pe} L \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\xi \quad (265)$$

A equação (263) é reescrita como:

$$\delta T = \{ \delta \dot{q}_i \}^T [m_{qq}] \{ \dot{q}_i \} \quad (266)$$

onde:

$$\begin{cases} A_{pe} = 2b_{pe}h_{pe} \\ I_{pe} = 2 \left( \frac{b_{pe}h_{pe}^3}{12} + \left( h + \frac{h_{pe}}{2} \right)^2 b_{pe}h_{pe} \right) \end{cases} \quad (267)$$

### 3.3.4 Trabalho

O variacional do trabalho, realizado pelas forças e cargas externas, equação (467), com a aproximação por elementos finitos, fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \int_0^1 \begin{bmatrix} [N_w]^T & [0] \\ [0] & [N_\phi]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{f}_s\} \\ \{\sigma_s\} \end{bmatrix} d\xi \quad (268)$$

Chamando de

$$\{f_s\} = \int_0^1 [N_w]^T \{\bar{f}_s\} L d\xi \quad (269)$$

$$\{q_s\} = - \int_0^1 [N_\phi]^T \sigma_q L d\xi \quad (270)$$

O trabalho realizado pelas forças e cargas elétricas externas, fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{f_s\} \\ \{q_s\} \end{bmatrix} \quad (271)$$

### 3.3.5 Sistema Global de Equações

Substituindo as equações (258), (266) e (271) no princípio variacional eletromecânico, equação (465) e montando as matrizes globais, escrevemos o sistema global de equações de movimento para um modelo de viga de Euler - Bernoulli

$$\begin{cases} [M_{qq}]\{\ddot{q}_i\} + [K_{qq}]\{q_i\} + [K_{q\phi}]\{\phi_i\} = \{F_s\} \\ [K_{\phi q}]\{q_i\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi_i\} = \{Q_s\} \end{cases} \quad (272)$$

### 3.3.6 Equações do Sensor e Atuador Piezelétrico

Tomando o valor do potencial elétrico na segunda equação do sistema de equações (272), temos:

$$\{\phi\} = [K_{\phi\phi}]^{-1} (\{Q_s\} - [K_{\phi q}]\{q\}) \quad (273)$$

Como no sensor não existe potencial elétrico aplicado, a equação do sensor pode ser escrita como:

$$\{\phi\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi q}]\{q\} \quad (274)$$

Substituindo a equação (274) na primeira equação do sistema de equações (272), obtemos a equação do atuador.

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + [K^+]\{q\} = \{F_q\} + \{F_{el}\} \quad (275)$$

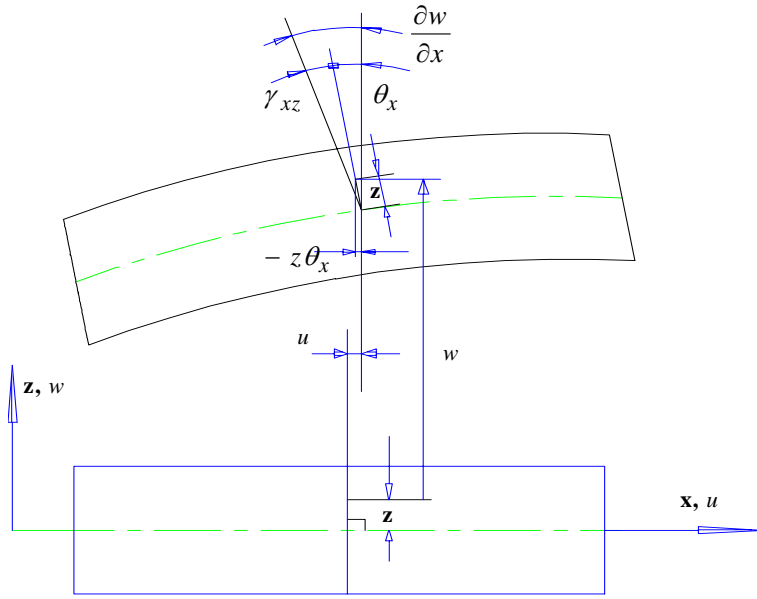
onde:

$$[K^+] = [K_{qq}] - [K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi q}] \quad (276)$$

$$\{f_{el}\} = -[K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}\{Q_s\} \quad (277)$$

### 3.4 VIGA DE TIMOSHENKO

Desconsiderando o quarto postulado de Love, podemos incluir no modelo de viga, efeitos de inércia de rotação e cisalhamento. O modelo de viga que apresenta essas características é conhecido como Viga de Timoshenko, cujas relações cinemáticas são:



*Figura 11 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro*

A relação de deslocamento é:

$$u_1 = u - z\theta_x \quad (278)$$

Com base no exposto, as relações cinemáticas para o modelo são:

$$\begin{cases} e_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u' - z\theta'_x \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w' - \theta_x \end{cases} \quad (279)$$

### 3.4.1 Aproximação por Elementos Finitos

As aproximações nodais ficam:

$$\begin{cases} u \cong \bar{u} = [N_u] \{q_i\} \\ w \cong \bar{w} = [N_w] \{q_i\} \\ \theta_x \cong \bar{\theta}_x = [N_\theta] \{q_i\} \\ \phi \cong \bar{\phi} = [N_\phi] \{\phi_i\} \end{cases} \quad (280)$$

$$\begin{cases} \bar{u}' = \frac{\partial}{\partial x} [N_u] \{q_i\} = [B_u] \{q_i\} \\ \bar{w}' = \frac{\partial}{\partial x} [N_w] \{q_i\} = [B_w] \{q_i\} \\ \bar{\theta}_x' = \frac{\partial}{\partial x} [N_\theta] \{q_i\} = [B_\theta] \{q_i\} \end{cases} \quad (281)$$

onde:

$$\{q_i\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{w}_i & \bar{\theta}_{y_i} & \bar{u}_j & \bar{w}_j & \bar{\theta}_{y_j} \end{bmatrix}^T \quad (282)$$

As funções de interpolação, livre do problema de travamento por cisalhamento (“*shear locking*”), para o deslocamento horizontal, vertical e angulares, são, respectivamente (ALDRAIHEM, WETHERHOLD & SINGH, 1996):

$$[N_u] = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (283)$$

$$[N_w] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-3\xi^2+2\xi^3+(1-\xi)\varphi}{1+\varphi} \\ \left[ \frac{\xi-2\xi^2+\xi^3+(\xi-\xi^2)\frac{\varphi}{2}}{1+\varphi} \right] L \\ 0 \\ \frac{3\xi^2-2\xi^3+\xi\varphi}{1+\varphi} \\ \left[ \frac{-\xi^2+\xi^3-(\xi-\xi^2)\frac{\varphi}{2}}{1+\varphi} \right] L \end{bmatrix} \quad (284)$$

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6(-\xi+\xi^2)}{L(1+\varphi)} \\ \frac{1-4\xi+3\xi^2+(1-\xi)\varphi}{1+\varphi} \\ 0 \\ \frac{6(-\xi-\xi^2)}{L(1+\varphi)} \\ \frac{-2\xi+3\xi^2+\xi\varphi}{1+\varphi} \end{bmatrix} \quad (285)$$

$$[N_q] = [N_u \quad N_w \quad N_\theta]^T \quad (286)$$

onde  $\varphi = \varphi_{st}$  é a razão de rigidez para o material da estrutura e  $\varphi = \varphi_{pe}$  para o material piezelétrico.

$$\varphi_{st} = \frac{12E_{st}I_{st}}{kG_{st}A_{st}L^2} \text{ e } \varphi_{pe} = \frac{12E_{pe}I_{pe}}{kG_{pe}A_{pe}L^2} \quad (287)$$

Existem outros procedimentos para contornar o problema do travamento por cisalhamento, como por exemplo a integração reduzida (COOK, 1989).

### 3.4.2 Energia Potencial

Para o modelo de Viga de Timoshenko, no domínio  $V_{st}$ , as leis constitutivas do material, considerando material homogêneo e isotrópico são:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad [c] = \frac{E_{st}}{(1 + \mu_{st})} \begin{bmatrix} \frac{1 - \mu_{st}}{1 - 2\mu_{st}} & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{st} & 0 \\ 0 & \bar{G}_{st} \end{bmatrix} \quad (288)$$

A energia potencial, para o domínio  $V_{st}$ , é:

$$\delta U = \iiint_{V_{st}} \{\delta\varepsilon\}^T [c] \{\varepsilon\} dV_{st} \quad (289)$$

Com a aproximação por elementos finitos, a equação (279) das relações cinemáticas para o modelo de viga de Timoshenko é colocada na forma matricial.

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} = \{[B_u] - z[B_\theta]\} \{q_i\} \\ \{\gamma_{xz}\} = \{[B_w] - [N_\theta]\} \{q_i\} = [B_\gamma] \{q_i\} \end{cases} \quad (290)$$

Substituindo a equação (290) na equação do variacional da energia potencial, temos:

$$\begin{aligned} \delta U &= \{ \delta q_i \}^T \iiint_{V_{st}} ([B_u] - z[B_\theta])^T \bar{E}_{st} ([B_u] - z[B_\theta]) dV_{st} \{q_i\} \\ &+ \{ \delta q_i \}^T \iiint_{V_{st}} ([B_w] - [N_\theta])^T k \bar{G}_{st} ([B_w] - [N_\theta]) dV_{st} \{q_i\} \end{aligned} \quad (291)$$

ou, ainda,



$$\begin{aligned} \delta U = \{ \delta q_i \}^T & \left[ \int_0^1 \bar{E}_{st} A_{st} [B_u]^T [B_u] L d\xi + \int_0^1 \bar{E}_{st} I_{st} [B_\theta]^T [B_\theta] L d\xi \right. \\ & \left. + \int_0^1 k \bar{G}_{st} A_{st} [B_\gamma]^T [B_\gamma] L d\xi \right] \{ q_i \} \end{aligned} \quad (292)$$

Onde:  $k = \frac{\pi^2}{12}$  é o fator de correção do cisalhamento para uma seção transversal retangular.

Conseqüentemente, a equação, colocada entre colchetes, é a matriz de rigidez do elemento estrutural.

$$[k_{qq}] = \int_0^1 \bar{E}_{st} A_{st} [B_u]^T [B_u] L d\xi + \int_0^1 \bar{E}_{st} I_{st} [B_\theta]^T [B_\theta] L d\xi + \int_0^1 k \bar{G}_{st} A_{st} [B_\gamma]^T [B_\gamma] L d\xi \quad (293)$$

Já para o domínio  $V_{pe}$ , devemos considerar a equação constitutiva da piezoeletricidade linear, equação (137), para o modelo de viga de Timoshenko.

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon \} &= \begin{Bmatrix} e_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \{ \sigma \} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad [c^E] = \frac{E_{pe}}{(1 + \mu_{pe})} \begin{bmatrix} \frac{(1 - \mu_{pe})}{(1 - 2\mu_{pe})} & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{pe} & 0 \\ 0 & \bar{G}_{pe} \end{bmatrix} \\ \{ e \} &= \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{15} \end{Bmatrix}, \quad [\zeta^E] = \zeta_{33}^E \quad [D] = D_3 \quad \{ E \} = E_3 \end{aligned} \quad (294)$$

Vamos reescrever a energia potencial, com auxílio das equações (290) e (294).

$$\begin{aligned}
\delta U = & \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B_\theta])^T \bar{E}_{pe} ([B_u] - z[B_\theta]) dV_{pe} \{q_i\} \\
& + \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} ([B_w] - [N_\theta])^T k\bar{G}_{pe} ([B_w] - [N_\theta]) dV_{pe} \{q_i\} \\
& + \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B_\theta])^T e_{31} [B_\phi] dV_{pe} \{\phi_i\} \\
& + \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} ([B_w] - [N_\theta])^T e_{15} [B_\phi] dV_{pe} \{\phi_i\} \\
& + \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{31} ([B_u] - z[B_\theta]) dV_{pe} \{q_i\} \\
& + \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{15} ([B_w] - [N_\theta]) dV_{pe} \{q_i\} \\
& - \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T \xi_{33}^\varepsilon [B_\phi] dV_{pe} \{\phi_i\}
\end{aligned} \tag{295}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
[k_{qq}] = & \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B_\theta])^T \bar{E}_{pe} ([B_u] - z[B_\theta]) dV_{pe} \{q_i\} \\
& + \iiint_{V_{pe}} ([B_w] - [N_\theta])^T k\bar{G}_{pe} ([B_w] - [N_\theta]) dV_{pe}
\end{aligned} \tag{296}$$

$$[k_{q\phi}] = \iiint_{V_{pe}} ([B_u] - z[B_\theta])^T e_{31} [B_\phi] dV_{pe} + \iiint_{V_{pe}} ([B_w] - [N_\theta])^T e_{15} [B_\phi] dV_{pe} \tag{297}$$

$$[k_{\phi q}] = \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{31} ([B_u] - z[B_\theta]) dV_{pe} + \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{15} ([B_w] - [N_\theta]) dV_{pe} \tag{298}$$

$$[k_{\phi\phi}] = - \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T \xi_{33}^\varepsilon [B_\phi] dV_{pe} \tag{299}$$

Então, a equação (295), fica:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{qq} \\ k_{\phi q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{q\phi} \\ k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} \quad (300)$$

Trabalhando as equações (293), (296) a (299), conseguimos obter as expressões finais para as matrizes de rigidez.

$$\begin{aligned} [k_{qq}] &= L(\bar{E}_{st}A_{st} + \bar{E}_{pe}A_{pe}) \int_0^1 [B_u]^T [B_u] d\xi + L(\bar{E}_{st}I_{st} + \bar{E}_{pe}I_{pe}) \int_0^1 [B_\theta]^T [B_\theta] d\xi \\ &+ kL(\bar{G}_{st}A_{st} + \bar{G}_{pe}A_{pe}) \int_0^1 [B_\gamma]^T [B_\gamma] d\xi \end{aligned} \quad (301)$$

$$\begin{aligned} [k_{q\phi}] &= \bar{E}_{pe}\bar{A}_{pe}d_{31}L \int_0^1 [B_u]^T [B_{\phi u}] d\xi - \left(h + \frac{h_{pe}}{2}\right) \bar{E}_{pe}A_{pe}d_{31}L \int_0^1 [B_\theta]^T [B_{\phi\theta}] d\xi \\ &+ \bar{G}_{pe}\bar{A}_{pe}d_{15}L \int_0^1 [B_\gamma]^T [B_{\phi\gamma}] d\xi \end{aligned} \quad (302)$$

$$[k_{\phi\phi}] = \frac{\zeta_{33}^\varepsilon A_{pe}L}{h_{pe}^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (303)$$

com:

$$[B_{\phi u}] = \frac{1}{h_{pe}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [B_{\phi\theta}] = [B_{\phi\gamma}] = \frac{1}{h_{pe}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (304)$$

### 3.4.3 Energia Cinética

A equação do variacional da energia cinética, equação (470), é aplicada ao elemento de viga proposto.

$$\delta T = \iiint_{V_{st}} \rho \{\delta \dot{q}_i\}^T [N_q]^T [N_q] \{\dot{q}_i\} dV_{st} + \iiint_{V_{pe}} \rho_{pe} \{\delta \dot{q}_i\}^T [N_q]^T [N_q] \{\dot{q}_i\} dV \quad (305)$$

Chamando de

$$[m_{st}] = \rho_{st} A_{st} L \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\xi \quad (306)$$

$$[m_{pe}] = \rho_{pe} A_{pe} L \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\xi \quad (307)$$

A equação (305), é reescrita.

$$\delta T = \{\delta \dot{q}_i\}^T [m_{qq}] \{\dot{q}_i\} \quad (308)$$

### 3.4.4 Trabalho

O variacional do trabalho realizado pelas forças e cargas externas, equação (467), com a aproximação por elementos finitos, fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \int_0^1 \begin{bmatrix} [N_w]^T & [0] \\ [0] & [N_\phi]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{f}_s\} \\ \{\sigma_s\} \end{bmatrix} d\xi \quad (309)$$

Chamando de

$$\{f_s\} = \int_0^1 [N_w]^T \{\bar{f}_s\} L d\xi \quad (310)$$

$$\{q_s\} = - \int_0^1 [N_\phi]^T \sigma_q L d\xi \quad (311)$$

O trabalho realizado pelas forças e cargas elétricas externas, fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{f_s\} \\ \{q_s\} \end{bmatrix} \quad (312)$$

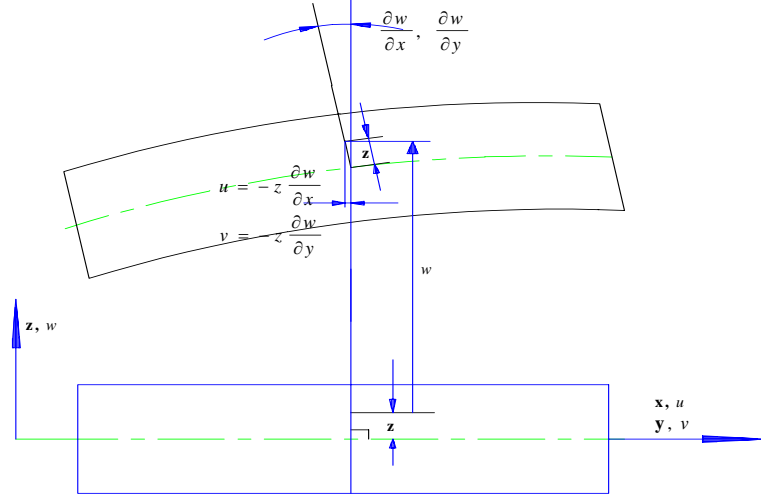
### 3.4.5 Sistema Global de Equações

Substituindo as equações (300), (308) e (312) no princípio variacional eletromecânico, equação (465) e montando as matrizes globais, escrevemos o sistema global de equações de movimento para um modelo de viga de Timoshenko:

$$\begin{cases} [M_{qq}]\{\ddot{q}_i\} + [K_{qq}]\{q_i\} + [K_{q\phi}]\{\phi_i\} = \{F_s\} \\ [K_{\phi q}]\{q_i\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi_i\} = \{q_s\} \end{cases} \quad (313)$$

### 3.5 PLACA DE KIRCHHOFF

Com base na hipótese de Kirchhoff, no quarto postulado de Love e no princípio variacional eletromecânico para meios piezelétricos, equação (139), obtemos as relações cinemáticas para o modelo de placa de Kirchhoff.



*Figura 12 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro*

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (314)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (315)$$

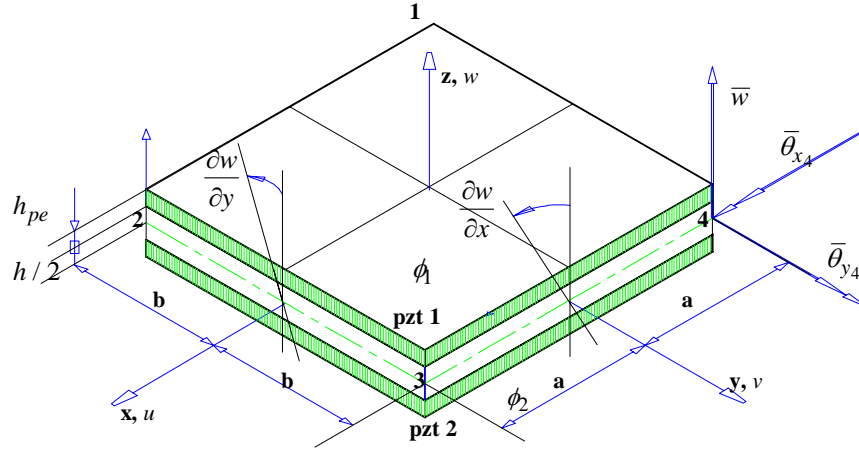


Figura 13 - Parâmetros Dimensionais do Elemento Placa / PZT

### 3.5.1 Aproximação por Elementos Finitos

Como mostra a Figura 13, o elemento de placa considerado, elemento retangular de Melosh, possui três graus de liberdade por nó. Segundo *BATHE (1996)* é um dos elementos de placa mais efetivos em uso. Para esse elemento é necessário usar uma função de interpolação polinomial com 12 parâmetros para o campo de deslocamentos.

$$w|_{x_i, y_i} = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^3 + d_8x^2y + d_9xy^2 + d_{10}y^3 + d_{11}x^3y + d_{12}xy^3 \quad (316)$$

então

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} = d_2 + 2d_4x_i + d_5y_i + 3d_7x_i^2 + 2d_8x_iy_i + d_9y_i^2 + 3d_{11}x_i^2y_i + d_{12}y_i^3 \quad (317)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x_i, y_i} = d_3 + d_5x_i + 2d_6y_i + d_8x_i^2 + 2d_9x_iy_i + 3d_{10}y_i^2 + d_{11}x_i^3 + 3d_{12}x_iy_i^2 \quad (318)$$

onde:

$$\begin{cases} i = 1 \dots 4 \\ x_1 = -a & y_1 = -b & x_2 = a & y_2 = -b \\ x_3 = a & y_3 = b & x_4 = -a & y_4 = b \end{cases} \quad (319)$$

e  $d_i$  - são os coeficientes da função polinomial.

Matricialmente, a expressão (316) fica:

$$w = \{P\}^T \{d\} \quad (320)$$

com

$$\begin{aligned} \{P\} &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \\ \{d_i\} &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & d_{10} & d_{11} & d_{12} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (321)$$

A expressão que leva em consideração a aplicação das equações (316) a (318) em todos os nós é colocados na a forma matricial,

$$\{q_i\} = [Tr]\{d_i\} \quad (322)$$

onde foram usadas as seguintes condições:

$$\begin{cases} \bar{w}_i = w|_{x_i, y_i} \\ \bar{\theta}_{x_i} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} \\ \bar{\theta}_{y_i} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} \end{cases} \quad (323)$$

$$\{q_i\} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x_1} & \bar{\theta}_{y_1} & \dots & \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x_4} & \bar{\theta}_{y_4} \end{bmatrix}^T \quad (324)$$



$$[Tr] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (325)$$

Invertendo a matriz transformação  $[Tr]$ , resulta:

$$[Tr]^{-1} \{q_i\} = \{d_i\} \quad (326)$$

Substituindo a equação (326) na equação (320), vem:

$$w = \{P\}^T [Tr]^{-1} \{q_i\} = [N_w] \{q_i\} \quad (327)$$

Finalmente, as aproximações nodais ficam:

$$\begin{cases} w \cong \bar{w} = [N_w] \{q_i\} \\ \phi \cong \bar{\phi} = [N_\phi] \{\phi_i\} \end{cases} \quad (328)$$

### 3.5.2 Energia Potencial

Para o elemento estrutural, as leis constitutivas do material são:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{st}}{(1 - \mu_{st}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{st} & 0 \\ \mu_{st} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \mu_{st})}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{st}}{(1 - \mu_{st}^2)} [c_{st}] \{\varepsilon\} \quad (329)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z \{\kappa\} \quad (330)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{Bmatrix} = [z] \{\nu\} = [z] [B_v] \{q_i\} \quad (331)$$

$$[B_v] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (332)$$

Substituindo as equações (329) a (331) na equação da energia potencial, vem:

$$\delta U = \{\delta q_i\}^T \iint_{A_{st}} [B_\kappa]^T [c_\kappa^{st}] [B_\kappa] dA_{st} \{q_i\} \quad (333)$$

Conseqüentemente, a matriz de rigidez do elemento estrutural, é:

$$[k_{qq}] = \iint_{A_{st}} [B_\kappa]^T [c_\kappa^{st}] [B_\kappa] dA_{st} \quad (334)$$

onde:

$$[c_{\kappa}^{st}] = \frac{E_{st} h^3}{12(1 - \mu_{st}^2)} [c_{st}] \quad (335)$$

$$[B_{\kappa}] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (336)$$

Para o domínio  $V_{pe}$ , devemos considerar a equação constitutiva da piezeletricidade linear, equação (137), aplicada ao modelo de placa de Kirchhoff.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{pe}}{(1 - \mu_{pe}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{pe} & 0 \\ \mu_{pe} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \mu_{pe})}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{pe}}{(1 - \mu_{pe}^2)} [c_{pe}] \{\varepsilon\} \quad (337)$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{31} \\ e_{15} \end{Bmatrix}, \quad [\zeta^{\varepsilon}] = \zeta_{33}^{\varepsilon} \quad [D] = D_3 \quad \{E\} = E_3$$

Vamos reescrever a energia potencial, com auxílio das equações (335) e (337).

$$\begin{aligned}
\delta U = & \left\{ \delta q_i \right\}^T \iint_{A_{pe}} [B_\kappa]^T [c_\kappa^{pe}] [B_\kappa] dA_{pe} \left\{ q_i \right\} \\
& + \left\{ \delta q_i \right\}^T h_b^2 \iint_{A_{pe}} [B_\kappa]^T [e] [B_\phi] dA_{pe} \left\{ \phi_i \right\} \\
& + \left\{ \delta \phi_i \right\}^T h_b^2 \iint_{A_{pe}} [B_\phi]^T [e]^T [B_\kappa] dA_{pe} \left\{ q_i \right\} \\
& - \left\{ \delta \phi_i \right\}^T h_c \iint_{A_{pe}} [B_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [B_\phi] dA_{pe} \left\{ \phi_i \right\}
\end{aligned} \tag{338}$$

Logo, as matrizes de rigidez são:

$$[k_{qq}] = \iint_{A_{pe}} [B_\kappa]^T [c_\kappa^{pe}] [B_\kappa] dA_{pe} \tag{339}$$

$$[k_{q\phi}] = h_b^2 \iint_{A_{pe}} [B_\kappa]^T [e] [B_\phi] dA_{pe} \tag{340}$$

$$[k_{\phi q}] = h_b^2 \iint_{A_{pe}} [B_\phi]^T [e]^T [B_\kappa] dA_{pe} \tag{341}$$

$$[k_{\phi\phi}] = -h_c \iint_{A_{pe}} [B_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [B_\phi] dA_{pe} \tag{342}$$

onde:

$$[c_\kappa^{pe}] = \frac{E_{pe} h_a^3}{12(1 - \mu_{pe}^2)} [c_{pe}] \tag{343}$$

$$\begin{cases} h_a^3 = \frac{h^2}{2} h_{pe} + h h_{pe}^2 + \frac{2}{3} h_{pe}^3 \\ h_b^2 = h h_{pe} + h_{pe}^2 \\ h_c = 2 h_{pe} \end{cases} \quad (344)$$

A equação (338), fica:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{qq} \\ k_{\phi q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{q\phi} \\ k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} \quad (345)$$

### 3.5.3 Energia Cinética

A equação da energia cinética, equação (470), é aplicada ao elemento de placa proposto, com a substituição da expressão (331).

$$\begin{aligned} \delta T &= \{\delta \dot{q}_i\}^T \iint_{A_{st}} \rho_{st} [B_v]^T [z]^T [z] [B_v] dA_{st} \{\dot{q}_i\} \\ &+ \{\delta \dot{q}_i\}^T \iint_{A_{pe}} \rho_{pe} [B_v]^T [z]^T [z] [B_v]^T dA_{pe} \{\dot{q}_i\} \end{aligned} \quad (346)$$

$$\begin{aligned} \delta T &= \{\delta \dot{q}_i\}^T \iint_{A_{st}} \rho_{st} [B_v]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [B_v] dA_{st} \{\dot{q}_i\} \\ &+ \{\delta \dot{q}_i\}^T \iint_{A_{pe}} \rho_{pe} [B_v]^T \begin{bmatrix} h_c & 0 & 0 \\ 0 & h_a^3 & 0 \\ 0 & 0 & h_a^3 \end{bmatrix} [B_v]^T dA_{pe} \{\dot{q}_i\} \end{aligned} \quad (347)$$

fazendo,

$$[h_{st}] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} e [h_{pe}] = \begin{bmatrix} h_c & 0 & 0 \\ 0 & h_a^3 & 0 \\ 0 & 0 & h_a^3 \end{bmatrix} \quad (348)$$

as matriz de massa dos elementos, ficam:

$$[m_{st}] = \rho_{st} h \iint_{A_{st}} [N_w]^T [h_{st}] [N_w] dA_{st} \quad (349)$$

$$[m_{pe}] = \rho_{st} h_c \iint_{A_{pe}} [N_w]^T [h_{pe}] [N_w] dA_{pe} \quad (350)$$

onde a equação (347), é reescrita como:

$$\delta T = \{\delta \dot{q}_i\}^T [m_{qq}] \{\dot{q}_i\} \quad (351)$$

### 3.5.4 Trabalho

O variacional do trabalho realizado pelas forças e cargas externas, equação (467), com a aproximação por elementos finitos, fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix} \iint_A \begin{bmatrix} [N_w]^T & [0] \\ [0] & [N_\phi]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{f}_s\} \\ \{\bar{\sigma}_s\} \end{bmatrix} dA \quad (352)$$

Chamando de

$$\{f_s\} = \iint_A [N_w]^T \{\bar{f}_s\} dA \quad (353)$$

$$\{q_s\} = - \iint_{A_{pe}} [N_\phi]^T \sigma_q dA_{pe} \quad (354)$$

o trabalho realizado pelas forças e cargas elétricas externas fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{f_s\} \\ \{q_s\} \end{bmatrix} \quad (355)$$

### 3.5.5 Sistema Global de Equações

Substituindo as equações (345), (351) e (355) no princípio variacional eletromecânico, equação (465) e montando as matrizes globais, escrevemos o sistema global de equações de movimento para um modelo de placa de Kirchhoff.

$$\begin{cases} [M_{qq}]\{\ddot{q}_i\} + [K_{qq}]\{q_i\} + [K_{q\phi}]\{\phi_i\} = \{F_s\} \\ [K_{\phi q}]\{q_i\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi_i\} = \{Q_s\} \end{cases} \quad (356)$$

### 3.6 PLACA DE REISSNER-MINDLIN

Diferentemente do modelo de placa de Kirchhoff, o modelo de Mindlin - Reissner leva em consideração os efeitos de inércia de rotação e de cisalhamento transversal. Então, os componentes do deslocamento de um ponto no sistema de coordenadas cartesianas, no campo das pequenas deformações, são:

$$\begin{cases} u = -z\theta_x \\ v = -z\theta_y \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (357)$$

Com base na placa apresentada pela Figura 13, as deformações de flexão são obtidas através da curvatura da placa usando,

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{cases} \quad (358)$$

enquanto que as deformações de cisalhamento transversal são assumidas constantes através da espessura da placa.

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{cases} \quad (359)$$



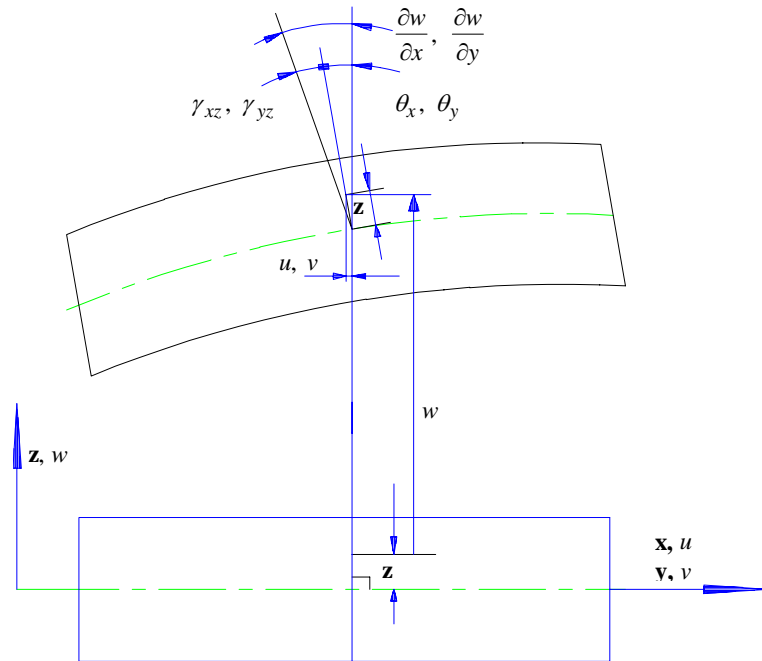
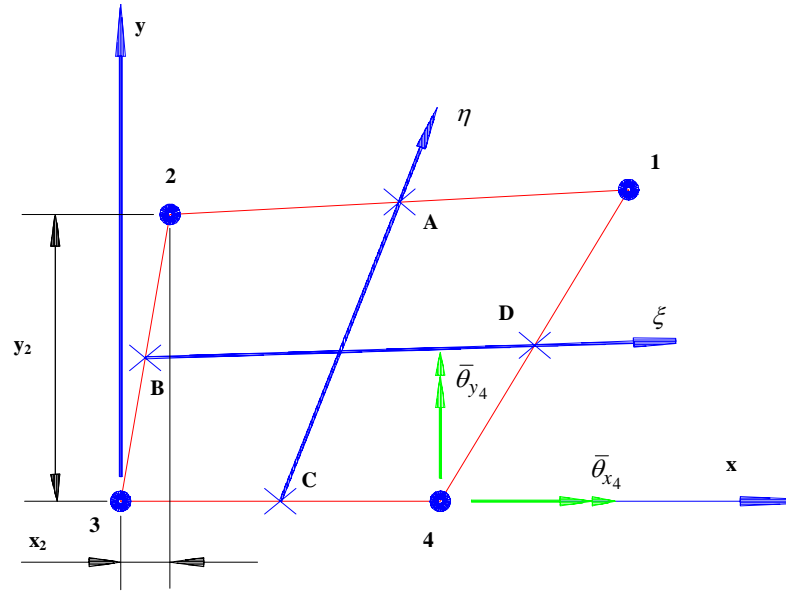


Figura 14 - Deslocamento de um Ponto sobre a Normal ao Plano Neutro

### 3.6.1 Aproximação por Elementos Finitos

Para contornar o problema de travamento por cisalhamento (“*shear locking*”), foi utilizado o elemento proposto por *BATHE* (1996), da família por elementos MITCn, que segundo o autor são elementos confiáveis e eficientes. Nesses elementos, a formulação da matriz de rigidez incluindo o efeito de flexão e cisalhamento transversal, é obtida através de funções de interpolação diferentes. Para as equações (381) foi usada a mesma função de interpolação proposta no método do deslocamento. Já, no cálculo das funções de interpolação das deformações de cisalhamento transversal, equação (382), o procedimento foi diferente.



*Figura 15 - Elemento de Placa MITC4*

As funções de interpolação para o deslocamento vertical e rotações no plano são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \end{aligned} \quad (360)$$

Logo, a aproximação por elementos finitos do deslocamento vertical e rotações, é:

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i \bar{w}_i \quad \theta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i \bar{\theta}_{y_i} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \bar{\theta}_{x_i} \quad (361)$$

Na forma matricial, temos as seguintes equações:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N_q] \{q_i\} \quad (362)$$

onde:

$$\{q_i\} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \bar{w}_i & \bar{\theta}_{x_i} & \bar{\theta}_{y_i} \end{bmatrix} \quad (363)$$

$$[N_q] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_i \\ 0 & N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (364)$$

A matriz operador diferencial é definida como:

$$[L_q] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (365)$$

Com auxílio das equações (364) e (365), podemos obter a matriz derivada das funções de interpolação  $[B_k]$ .

$$[B_k] = [L_q][N_q] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & -\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (366)$$

O vetor de cisalhamento é definido pela expressão:

$$\{\gamma\} = [B_\gamma]\{q_i\} \quad (367)$$

Segundo *BATHE*, com o elemento MITC4, a matriz de distorção  $[B_\gamma]$  deve ser determinada pela expressão:

$$\begin{bmatrix} B_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{g^{zz}} \left( [N_{\xi z}] \sqrt{g^{\xi\xi}} \sin\theta_{\eta x} - [N_{\eta z}] \sqrt{g^{\eta\eta}} \sin\theta_{\xi x} \right) \\ -2\sqrt{g^{zz}} \left( [N_{\xi z}] \sqrt{g^{\xi\xi}} \cos\theta_{\eta x} + [N_{\eta z}] \sqrt{g^{\eta\eta}} \cos\theta_{\xi x} \right) \end{bmatrix} \quad (368)$$

onde:

$$\gamma_{xz} = 2\sqrt{g^{zz}} \left( [N_{\xi z}^i] \sqrt{g^{\xi\xi}} \sin\theta_{\eta x} - [N_{\eta z}^i] \sqrt{g^{\eta\eta}} \sin\theta_{\xi x} \right) \{q_i\} \quad (369)$$

$$\gamma_{yz} = -2\sqrt{g^{zz}} \left( [N_{\xi z}^i] \sqrt{g^{\xi\xi}} \cos\theta_{\eta x} + [N_{\eta z}^i] \sqrt{g^{\eta\eta}} \cos\theta_{\xi x} \right) \{q_i\} \quad (370)$$

As funções de interpolação que aparecem nas equações (368) a (370), são apresentadas a seguir:

$$\begin{bmatrix} N_{\xi z} \end{bmatrix} = \frac{h}{16} \begin{bmatrix} (1+\eta) & -(1+\eta)\frac{b_1}{2} & (1+\eta)\frac{a_1}{2} & -(1+\eta) & -(1+\eta)\frac{b_1}{2} & (1+\eta)\frac{a_1}{2} \\ -(1-\eta) & -(1-\eta)\frac{b_2}{2} & (1-\eta)\frac{a_2}{2} & (1-\eta) & -(1-\eta)\frac{b_2}{2} & (1-\eta)\frac{a_2}{2} \end{bmatrix} \quad (371)$$

$$\begin{bmatrix} N_{\eta z} \end{bmatrix} = \frac{h}{16} \begin{bmatrix} (1+\xi) & -(1+\xi)\frac{b_3}{2} & (1+\xi)\frac{a_3}{2} & (1-\xi) & -(1-\xi)\frac{b_4}{2} & (1-\xi)\frac{a_4}{2} \\ -(1-\xi) & -(1-\xi)\frac{b_4}{2} & (1-\xi)\frac{a_4}{2} & -(1+\xi) & -(1+\xi)\frac{b_3}{2} & (1+\xi)\frac{a_3}{2} \end{bmatrix} \quad (372)$$

onde:

$$\begin{cases} a_1 = x_1 - x_2 & b_1 = y_1 - y_2 \\ a_2 = x_4 - x_3 & b_2 = y_4 - y_3 \\ a_3 = x_1 - x_4 & b_3 = y_1 - y_4 \\ a_4 = x_2 - x_3 & b_4 = y_2 - y_3 \end{cases} \quad (373)$$

Os valores de  $g^{\xi\xi}$ ,  $g^{\eta\eta}$ ,  $g^{zz}$  são calculados pelas seguintes expressões:

$$g^{\xi\xi} = \frac{(C_x + \xi B_x)^2 + (C_y + \xi B_y)^2}{16(\det[J])^2} \quad (374)$$

$$g^{\eta\eta} = \frac{(A_x + \eta B_x)^2 + (A_y + \eta B_y)^2}{16(\det[J])^2} \quad (375)$$

$$g^{zz} = \frac{4}{h^2} \quad (376)$$

com

$$\begin{cases} A_x = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & A_y = y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ B_x = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & B_y = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\ C_x = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & C_y = y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \end{cases} \quad (377)$$

Finalmente, as equações dos ângulos  $\theta_{\xi x}$  e  $\theta_{\eta x}$  são:

$$\begin{cases} \theta_{\xi x} = tg^{-1} \frac{A_y}{A_x} \\ \theta_{\eta x} = tg^{-1} \frac{C_y}{C_x} \end{cases} \quad (378)$$

### 3.6.2 Energia Potencial

As leis constitutivas para o elemento estrutural, considerando um material isotrópico e homogêneo, podem ser assim escritas:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{st}}{(1 - \mu_{st}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{st} & 0 \\ \mu_{st} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \mu_{st})}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{st}}{(1 - \mu_{st}^2)} [c_{st}] \{\varepsilon\} \quad (379)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{kE_{st}}{2(1+\mu_{st})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (380)$$

onde os deslocamentos e deformações são colocadas na forma matricial,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \{\kappa\} \quad (381)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \{\gamma\} \quad (382)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x \\ -z\theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [z] [N_q] \{q_i\} \quad (383)$$

onde:  $k = \frac{\pi^2}{12}$  é o fator de correção de cisalhamento para seção transversal retangular.

Substituindo as equações (329) a (382) na equação da energia potencial, vem:

$$\begin{aligned} \delta U = & \{ \delta q_i \}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\kappa]^T [c_\kappa^{st}] [B_\kappa] \det[J] d\xi d\eta \{q_i\} \\ & + \{ \delta q_i \}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\gamma]^T [c_\gamma^{st}] [B_\gamma] \det[J] d\xi d\eta \{q_i\} \end{aligned} \quad (384)$$

Conseqüentemente, as matrizes de rigidez do elemento estrutural, é:

$$\left[ k_{qq}^{\kappa} \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ B_{\kappa} \right]^T \left[ c_{\kappa}^{st} \right] \left[ B_{\kappa} \right] \det[J] d\xi d\eta \quad (385)$$

$$\left[ k_{qq}^{\gamma} \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ B_{\gamma} \right]^T \left[ c_{\gamma}^{st} \right] \left[ B_{\gamma} \right] \det[J] d\xi d\eta \quad (386)$$

onde:

$$\left[ k_{qq} \right] = \left[ k_{qq}^{\kappa} \right] + \left[ k_{qq}^{\gamma} \right] \quad (387)$$

$$\left[ c_{\kappa}^{st} \right] = \frac{h^3 E_{st}}{12(1 - \mu_{st}^2)} \left[ c_{st} \right] \quad (388)$$

$$\left[ c_{\gamma}^{st} \right] = \frac{kh E_{st}}{2(1 + \mu_{st})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (389)$$

Para o domínio  $V_{pe}$ , devemos considerar as leis constitutivas da piezeletricidade linear, equação (137), aplicada ao modelo de placa de Mindlin - Reissner.

$$\left\{ \sigma \right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{pe}}{(1 - \mu_{pe}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{pe} & 0 \\ \mu_{pe} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \mu_{pe})}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_{pe}}{(1 - \mu_{pe}^2)} \left[ c_{pe} \right] \left\{ \varepsilon \right\} \quad (390)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{kE_{pe}}{2(1 + \mu_{pe})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \left\{ e \right\} = \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{31} \\ e_{15} \end{Bmatrix} \quad \left[ \zeta^{\varepsilon} \right] = \zeta_{33}^{\varepsilon} \quad [D] = D_3 \quad \left\{ E \right\} = E_3$$

Vamos reescrever a expressão da energia potencial, com auxílio das equações (337).

$$\begin{aligned}
\delta U = & \{\delta q_i\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\kappa]^T [c_\kappa^{pe}] [B_\kappa] \det[J] d\xi d\eta \{q_i\} \\
& + \{\delta q_i\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\gamma]^T [c_\gamma^{pe}] [B_\gamma] \det[J] d\xi d\eta \{q_i\} \\
& + \{\delta q_i\}^T h_b^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\kappa]^T [e] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta \{\phi_i\} \\
& + \{\delta \phi_i\}^T h_b^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [e]^T [B_\kappa] \det[J] d\xi d\eta \{q_i\} \\
& - \{\delta \phi_i\}^T h_c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta \{\phi_i\}
\end{aligned} \tag{391}$$

Logo, as matrizes de rigidez são:

$$[k_{qq}^\kappa] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\kappa]^T [c_\kappa^{pe}] [B_\kappa] \det[J] d\xi d\eta \tag{392}$$

$$[k_{qq}^\gamma] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\gamma]^T [c_\gamma^{pe}] [B_\gamma] \det[J] d\xi d\eta \tag{393}$$

$$[k_{q\phi}] = h_b^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\kappa]^T [e] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta \tag{394}$$

$$[k_{\phi q}] = h_b^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [e]^T [B_\kappa] \det[J] d\xi d\eta \tag{395}$$

$$[k_{\phi\phi}] = -h_c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\phi]^T [\xi^\varepsilon] [B_\phi] \det[J] d\xi d\eta \tag{396}$$

onde:



$$[c_{\kappa}^{pe}] = \frac{h_a^3 E_{pe}}{12(1 - \mu_{pe}^2)} [c_{pe}] \quad (397)$$

$$[c_{\gamma}^{pe}] = \frac{kh_c E_{pe}}{2(1 + \mu_{pe})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (398)$$

Com a substituição das equações (392) a (396) na equação (338),

$$\delta U = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [k_{qq}] \\ [k_{\phi q}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_{q\phi}] \\ [k_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} \quad (399)$$

### 3.6.3 Energia Cinética

A equação da energia cinética, equação (470), é aplicada ao elemento de placa proposto, com a substituição da expressão (331).

$$\begin{aligned} \delta T = & \{\delta \dot{q}_i\}^T 2 \int_0^{h/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{st} [N_q]^T [z]^T [z] [N_q] \det[J] d\xi d\eta \{\dot{q}_i\} \\ & + \{\delta \dot{q}_i\}^T 2 \int_{h/2}^{h/2+h_{pe}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{pe} [N_q]^T [z]^T [z] [N_q] \det[J] d\xi d\eta \{\dot{q}_i\} \end{aligned} \quad (400)$$

$$\begin{aligned} \delta T = & \{\delta \dot{q}_i\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{st} [N_q]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N_q] \det[J] d\xi d\eta \{\dot{q}_i\} \\ & + \{\delta \dot{q}_i\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{pe} [N_q]^T \begin{bmatrix} h_c & 0 & 0 \\ 0 & h_a^3 & 0 \\ 0 & 0 & h_a^3 \end{bmatrix} [N_q] \det[J] d\xi d\eta \{\dot{q}_i\} \end{aligned} \quad (401)$$

As matrizes de massa são:

$$[m_{st}] = \rho_{st} h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_h]^T [h_{st}] [N_h] \det[J] d\xi d\eta \quad (402)$$

$$[m_{pe}] = \rho_{st} h_c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_h]^T [h_{pe}] [N_h] \det[J] d\xi d\eta \quad (403)$$

onde a equação (347) é reescrita como:

$$\delta T = \{\delta \dot{q}_i\}^T [m_{qq}] \{\dot{q}_i\} \quad (404)$$

### 3.6.4 Trabalho

A expressão do trabalho virtual das forças mecânicas e cargas elétricas externas fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_h]^T & [0] \\ [0] & [N_\phi]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{f}_s\} \\ \{\sigma_s\} \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta \quad (405)$$

Chamando de

$$\{f_s\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_q]^T \{\bar{f}_s\} \det[J] d\xi d\eta \quad (406)$$

$$\{q_s\} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{A_{pe}} [N_\phi]^T \sigma_q \det[J] d\xi d\eta \quad (407)$$

a expressão do trabalho virtual fica:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \{\delta q_i\}^T \\ \{\delta \phi_i\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{f_s\} \\ \{q_s\} \end{bmatrix} \quad (408)$$

### 3.6.5 Sistema Global de Equações

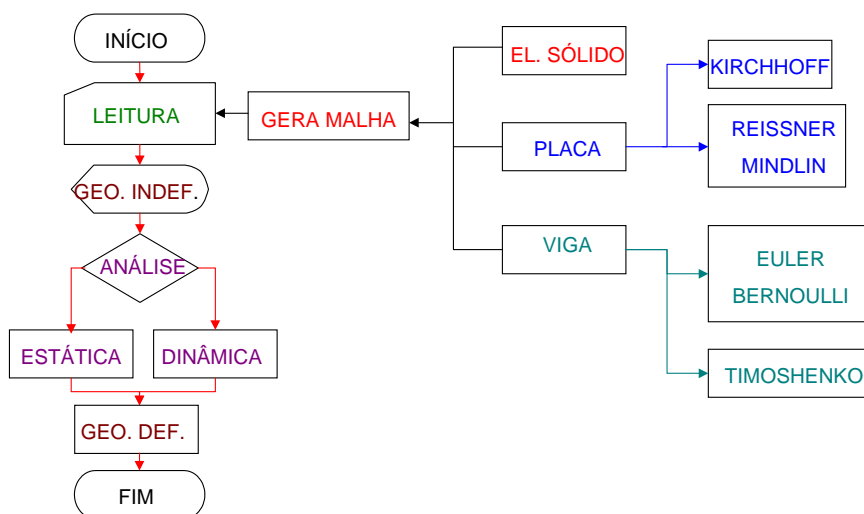
Substituindo as equações (345), (351) e (355) no princípio variacional eletromecânico, equação (465) e montando as matrizes globais, escrevemos o sistema global de equações de movimento para um modelo de placa de Mindlin–Reissner como,

$$\begin{cases} [\mathbf{M}_{qq}]\{\ddot{\mathbf{q}}_i\} + [\mathbf{K}_{qq}]\{\mathbf{q}_i\} + [\mathbf{K}_{q\phi}]\{\phi_i\} = \{\mathbf{K}_s\} \\ [\mathbf{K}_{\phi q}]\{\mathbf{q}_i\} + [\mathbf{K}_{\phi\phi}]\{\phi_i\} = \{\mathbf{Q}_s\} \end{cases} \quad (409)$$

## CAPÍTULO 4

# VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Uma das contribuições desse trabalho é o desenvolvimento de um programa para a modelagem de estruturas com sensores e atuadores incorporados, \*SMART MEF. Foi desenvolvido, tendo como plataforma o software MATLAB® *for Windows* da “The MathWorks Inc.” e possui 100 subprogramas e 10.000 linhas de programação.



*Figura 16 – Fluxograma Resumido do Programa SMART MEF*

Os modelos numéricos implementados pelo programa são validados neste capítulo. Primeiramente, são validados os modelos de estruturas tipo viga e placa trabalhando com o elemento sólido, ou 3D ou trilinear de 8 nós. Posteriormente, os modelos em que empregam elementos de viga e placa. Para cada modelo, é inicialmente verificado o elemento estrutural, e, em seguida, o elemento piezelétrico, finalmente, o modelo com os elementos estruturais e piezelétricos.

O objetivo principal de todos os teste de validação é o de verificar se os resultados apresentados pelo programa SMART MEF, para cada estrutura modelada, estão corretos. Para isso, inicialmente, esses resultados são comparados com o resultados apresentados pelo programa ANSYS, utilizando o mesmo modelo do programa SMART MEF (mesmo tipo e número de elementos).

Concluída essa primeira validação, algumas estruturas encontradas na literatura, como uma viga de PVDF e a placa de Crawley, são modeladas no SMART MEF. Os resultados apresentados pela literatura e pelo programa SMART MEF são comparados. Com base nessas comparações é possível concluir, com segurança, que os modelos desenvolvidos estão corretos e o programa SMART MEF apresenta resultados confiáveis.

## 4.1 ELEMENTO TRILINEAR DE OITO NÓS

Os resultados, apresentados pelo SMART MEF, trabalhando com o elemento trilinear de oito nós, são comparados com os resultados, apresentados pelo programa ANSYS®, trabalhando com o mesmo elemento. São obtidos, dependendo da estrutura analisada, o campo de deslocamentos, os autovalores e os correspondentes autovetores, usando a rotina *eig* do MATLAB (SMITH *et al.*, 1976), que não leva em conta a esparsidade das matrizes, resultando num maior esforço computacional. Para efeito de comparação entre os resultados apresentados pelos programas, basta utilizar o mesmo modelo em cada programa (tipo e número de elementos, condições de contorno e carga externa), não havendo a necessidade de se utilizar a malha mais adequada aos problemas tratados. O esforço de processamento entre os vários modelos, é determinado com auxílio do *FLOP* “floating point operation count”, que é independente da máquina onde se dá o processamento.

### 4.1.1 Viga Livre - Livre Modelada com 50 Elementos

Um viga de alumínio com coeficiente de Poisson 0,32, módulo de Young de 68 GPa, densidade de  $2711 \text{ kg/m}^3$ , comprimento de 780 mm, largura de 19,3 mm e espessura de 3,4 mm, com condição de contorno livre nas extremidades, é modelada com 50 elementos trilineares de 8 nós ao longo do comprimento e um elemento trilinear de 8 nós ao longo da espessura. O modelo resultante tem 204 nós e 612 graus de liberdade. Na obtenção dos autovalores e dos correspondentes autovetores, o programa SMART MEF precisou de 3,80 Mflop, para montar as matrizes de massa e rigidez, de 20,12 Gflop, para a obtenção dos autovalores, dos correspondentes autovetores e de 20,13 Gflop, para o processamento total do modelo.

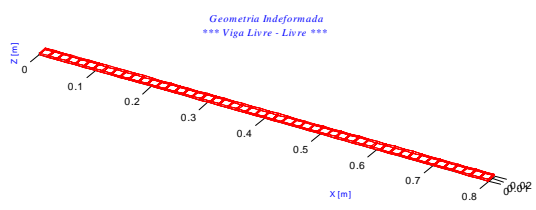


Figura 17 – Geometria Indeformada (SMART MEF)

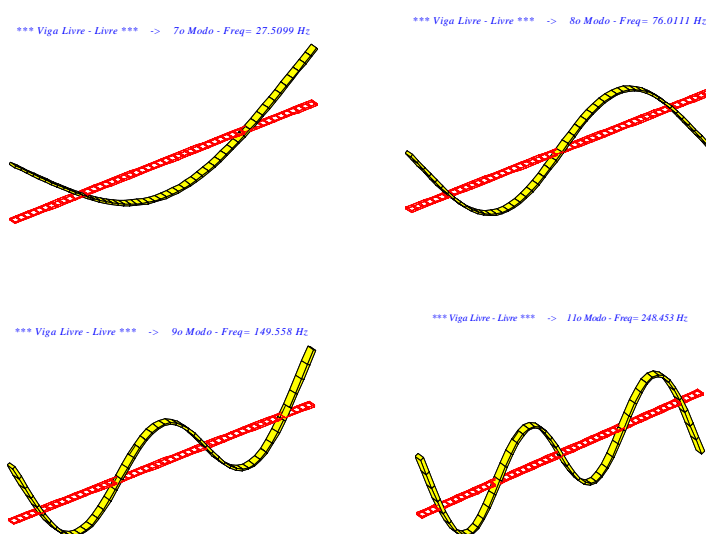


Figura 18 – Modo de Vibração (SMART MEF)

Tabela 1 - Frequências Naturais.

SMART MEF(MATLAB)		ANSYS	
Modo	$f_n$ (Hz)	Modo	$f_n$ (Hz)
7	27.5099018	7	27.5098941
8	76.0110726	8	76.0110758
9	149.557622	9	149.557622
10	155.817107	10	155.817107
11	248.453179	11	248.453179
12	373.446965	12	373.446965
13	428.731891	13	428.731891
14	525.438476	14	525.438476
15	660.970734	15	660.970734

#### 4.1.2 Placa Totalmente Livre - Malha de 16 x16 Elementos

Um placa de alumínio com coeficiente de Poisson 0,32, módulo de Young de 68 GPa, densidade de 2711 kgf/m<sup>3</sup>, comprimento de 500 mm, largura de 500 mm e espessura de 3,3 mm, é modelada com 256 elementos trilineares de 8 nós, isto é, 16 elementos na direção X e Y e 1 elemento na direção Z. O modelo resultante possui 578 nós e 1734 graus de liberdade. Na obtenção dos 100 primeiros autovalores e dos correspondentes autovetores, o programa SMART MEF usou o Método de Iteração de Vetores (*“Vector Iteration Methods”*) (PILKEY & WUNDERLICH, 1994). O programa necessitou de 20,19 Mflop, para montar as matrizes de massa e rigidez, de 53,01 Gflop para a obtenção dos autovalores e dos correspondentes autovetores e de 53,03 Gflop para o processamento total do modelo.

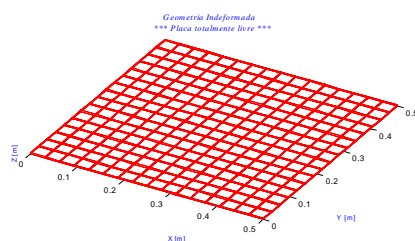
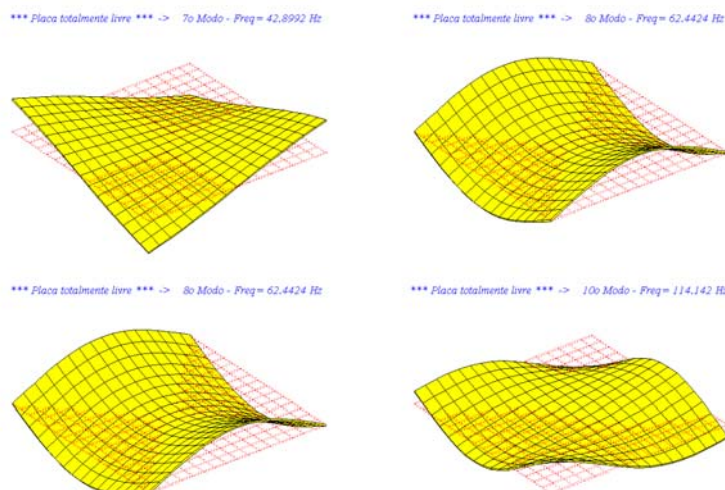


Figura 19 – Geometria Indeformada (SMART M.E.F.)



*Figura 20 - Modos de Vibração (SMART MEF).*

*Tabela 2 - Frequências Naturais.*

SMART MEF(MATLAB)		ANSYS	
Modo	$f_n$ (Hz)	Modo	$f_n$ (Hz)
7	42.8992230	7	42.8993748
8	62.4424015	8	62.4427330
9	78.7684842	9	78.7692401
10	114.141872	10	114.143779
11	114.141872	11	114.144322
12	200.529955	12	200.541307
13	200.529955	13	200.545623
14	217.691851	14	217.702868
15	234.696281	15	234.715757

#### 4.1.3 Elemento Piezocerâmico com Potencial Elétrico Aplicado

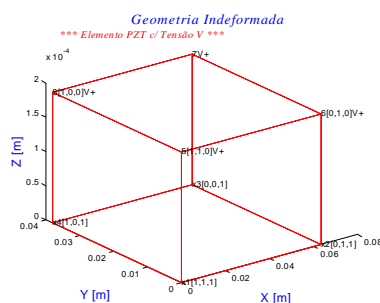
Em um elemento piezocerâmico com 63,5 mm de comprimento, 38,1 mm de largura e 0,1905 mm de espessura, e propriedades piezelétricas conforme Tabela 3, aplica-se um potencial elétrico de 2 V. Os resultados apresentados pelo programa SMART MEF para o campo de deslocamentos e frequências naturais são comparados com os resultados apresentados pelo ANSYS. O programa precisou de 98,23 kflop para a montagem da matriz de rigidez, de 3,50



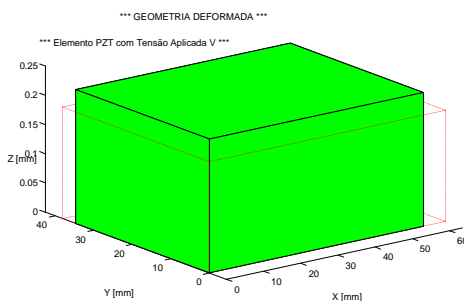
kflop para determinação do campo de deslocamentos, e de 101,73 kflop para processamento total. Para análise dinâmica, o SMART MEF precisou de 106,85 kflop para a montagem das matrizes de massa e rigidez, de 174,46 kflop para a determinação dos autovalores e correspondentes autovetores, e 281,31 kflop de processamento total.

*Tabela 3 – Propriedades da Cerâmica Piezelétrica.*

PZT PSI-5A-S4-ENH	
Propriedades	Valor
Módulo de Young (GPa)	
$E_{xx}$	66,0
$E_{zz}$	53,0
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	
$\rho$	7800
Constantes de deformação piezelétrica (pm/V)	
$d_{31}$	-190
$d_{33}$	390



*Figura 21 – Elemento Piezocerâmico com Tensão Elétrica Aplicada (SMART MEF).*



*Figura 22 - Geometria Deformada do Elemento PZT com Potencial Elétrico Aplicado.*

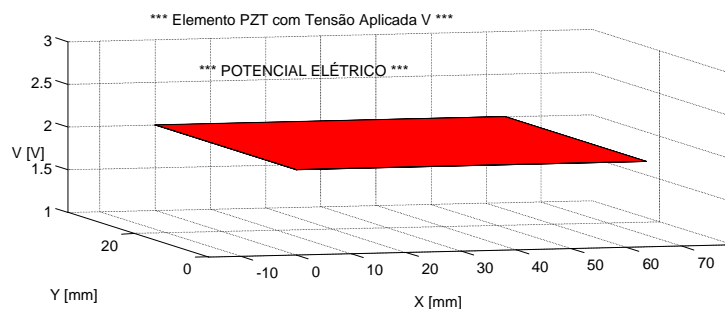


Figura 23 - Potencial Elétrico sobre o Elemento PZT (SMART MEF).

Tabela 4 – Campo de Deslocamentos no Elemento de PZT devido à Voltagem Aplicada.

ANSYS.			SMART M.E.F.(MATLAB)	
u=-1,1067x10 <sup>-7</sup> v=-6,6400x10 <sup>-8</sup> w=7,2000x10 <sup>-10</sup>			u=-1,1067x10 <sup>-7</sup> v=-6,6400x10 <sup>-8</sup> w=7,2000x10 <sup>-10</sup>	
Resultado SMART M.E.F.				
Nó	u(m)	v(m)	w(m)	Tensão (V)
1	0	0	0	0
2	-1.1067e-007	0	0	0
3	-1.1067e-007	-6.6400e-008	0	0
4	0	-6.6400e-008	0	0
5	0	0	7.200e-010	2
6	-1.1067e-007	0	7.200e-010	2
7	-1.1067e-007	-6.6400e-008	7.200e-010	2
8	0	-6.6400e-008	7.200e-010	2

Tabela 5 - Frequências Naturais.

SMART MEF(MATLAB)		ANSYS	
Modo	$f_n$ (Hz)	Modo	$f_n$ (Hz)
1	12269.6708	1	12269.6708
2	18437.5787	2	18351.7652
3	22933.9738	3	22933.9738
4	30625.4110	4	29644.4016
5	3933858.24	5	3933592.77

### 4.1.4 Elemento Piezocerâmico com Carga Externa

Agora, o elemento piezocerâmico está sujeito a uma carga externa  $F$  de 1kN. Vamos determinar o potencial elétrico  $V$  e o campo de deslocamentos resultante. Os flops desse modelo foram: 98,22 kflop para montagem da matriz de rigidez, 3,74 kflop para a solução e 101,96 kflop para o processamento total.

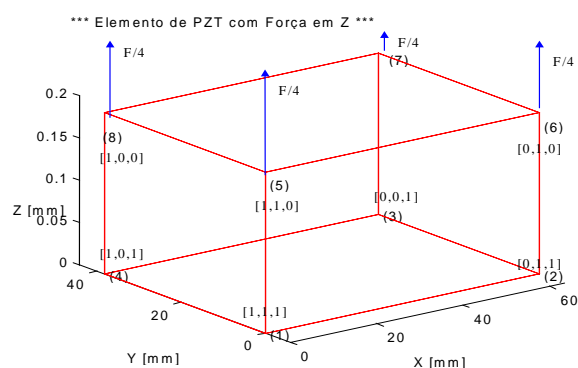


Figura 24 - Elemento Carregado e Condições de Contorno (SMART MEF).

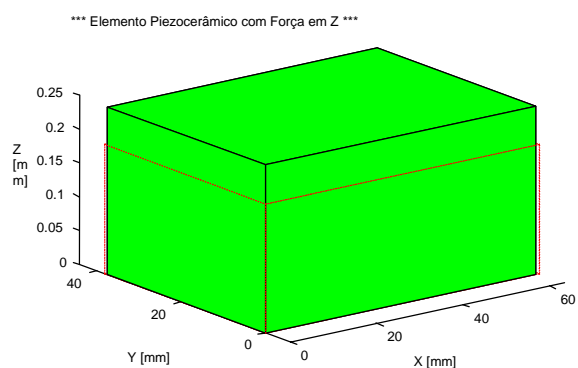


Figura 25 - Geometria Deformada devido a  $F$  (SMART MEF).

Tabela 6- Campo de Deslocamentos e Tensão Elétrica em uma Placa de PZT, devido à F.

SMART MEF(MATLAB) – ANSYS								
Nó	u (m)		v (m)		w (m)		Tensão(V)	
	M.E.F.	ANSYS	M.E.F.	ANSYS	M.E.F.	ANSYS	MEF	ANSYS
1	0	.00000	0	.00000	0	.00000	0	.00000
2	-1.1992e-08	-.11992E-07	0	.00000	0	.00000	0	.00000
3	-1.1992e-08	-.11992E-07	-7.195e-009	-.71950E-08	0	.00000	0	.00000
4	0	.00000	-7.195e-009	-.71950E-08	0	.00000	0	.00000
5	0	.00000	0	.00000	8.269e-010	.82690E-09	1.9143	1.9143
6	-1.1992e-08	-.11992E-07	0	.00000	8.269e-010	.82690E-09	1.9143	1.9143
7	-1.1992e-08	-.11992E-07	-7.195e-009	-.71950E-08	8.269e-010	.82690E-09	1.9143	1.9143
8	0	.00000	-7.195e-009	-.71950E-08	8.269e-010	.82690E-09	1.9143	1.9143

#### 4.1.5 Viga de Alumínio Coberta por Cerâmicas Piezelétricas

Uma viga fina de alumínio é coberta por duas camadas de PZTs, nas partes superior e inferior, respectivamente. Possui 50 mm de comprimento, 1,6 mm de largura, 1 mm de espessura, densidade igual a  $2690 \text{ kg/m}^3$ , coeficiente de Poisson de 0,345 e módulo de Young de 70,03 GPa. As camadas piezocerâmicas são de 40 mm de comprimento, 1,6 mm de largura e 0,7 mm de espessura. O modelo possui 26 elementos, 80 nós e 260 graus de liberdade.

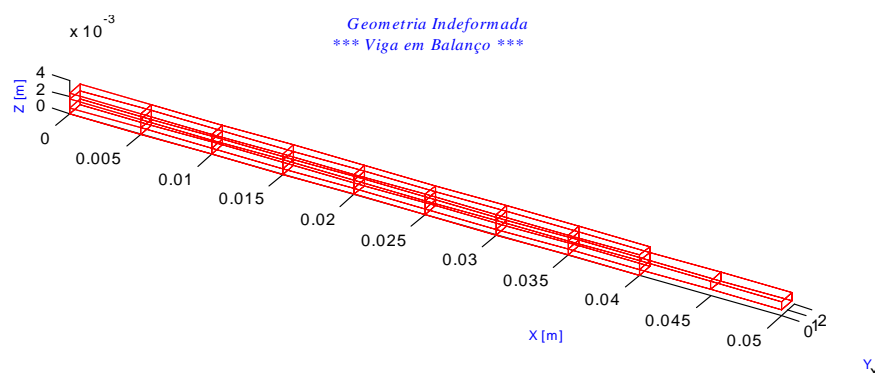


Figura 26 –Viga em Balanço, Modelada com Elementos Trilineares de Oito Nós

\*\*\* Viga em Balanço \*\*\*

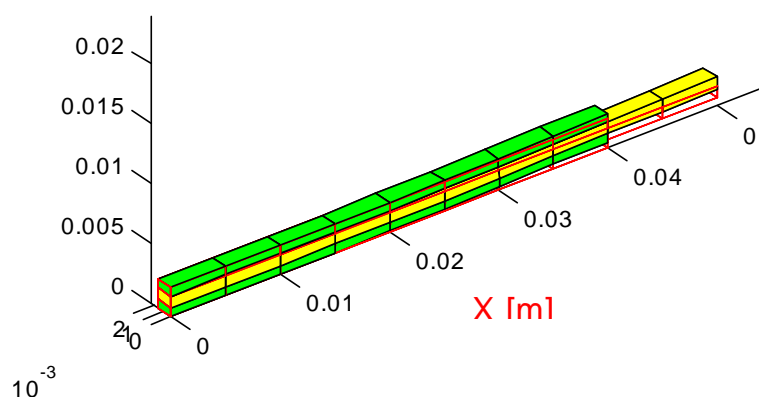


Figura 27 - Geometria Deformada após a Aplicação de 1 V (SMART MEF)

Tabela 7 – Campo de Deslocamentos após a Aplicação de 1 V.

SMART MEF(MATLAB) – ANSYS							
Nó		u (m)		v (m)		w (m)	
MEF	ANSYS	M.E.F.	ANSYS	M.E.F.	ANSYS	MEF	ANSYS
37	19	0	.00000	0	.00000	0	.00000
41	22	-1.1905e-009	-1.1905E-08	8.5653e-011	.85654E-10	1.1337e-008	.11337E-07
45	24	009	-.23979E-08	9.0748e-011	.90748E-10	4.6981e-008	.46981E-07
49	26	-2.3979e-009	-.36116E-08	9.061e-011	.90610E-10	1.0694e-007	.10694E-06
53	28	009	-.48315E-08	-6.0384e-011	-.60382E-10	1.9124e-007	.19124E-06
79	41	-3.6116e-009	-.47740E-08	011	.24872E-12	2.8698e-007	28698E-06
		009		2.4872e-013			
		-4.8315e-009					
		-4.774e-009					

OBS: Esse modelo precisou de 2,30 Mflop para montagem da matriz de rigidez, 2,52 Mflop para a determinação do campo de deslocamentos e 4,82 Mflop para o processamento total.

## 4.2. ELEMENTOS DE VIGA DE EULER–BERNOULLI E TIMOSHENKO

Vamos comparar os resultados experimentais e analíticos segundo *BLEVINS (1979)*, com os resultados numéricos, gerados pelo programa SMART MEF, trabalhando com os modelos de viga e elemento 3D. A estrutura analisada é uma viga de alumínio que possui os seguintes dados geométricos e propriedades do material: 798 mm de comprimento, 19,3 mm de largura, 3,40 mm de espessura, 2711 kg/m<sup>3</sup> de densidade e módulo de Young igual a 68 GPa.

O experimento foi realizado com a viga na condição de extremidades livres, suspensa por fios flexíveis. A resposta impulsiva da estrutura foi obtida através de um acelerômetro (PCB Piezotronics - Modelo 353B68) e de um sensor de PZT posicionados a 600 mm e 150 mm da extremidade esquerda, respectivamente. Foi utilizado um programa de identificação desenvolvido por *MOREIRA & ARRUDA (1997)* para identificar o sistema. Informações mais detalhas sobre os procedimentos e equipamentos utilizados nos ensaios são apresentadas no capítulo 5.

### 4.2.1 Elemento de viga de Euler–Bernoulli

A viga em análise é modelada com 25 e 50 elementos de viga de Euler–Bernoulli e 50 elementos trilineares de oito nós na direção do comprimento e 1 elemento na direção da espessura. Os modelos de viga possuem 26 nós, 52 gdl e 51 nós e 102 gdl, respectivamente. O modelo 3 D possui 204 nós e 612 gdl.

Tabela 8 – Frequências Naturais em Hz – Viga de Euler – Bernoulli

Viga Livre – Livre – Frequências Naturais					
Modos	Analítico <i>Euler-Bernoulli</i>	Experi- mental	No. de Elementos de Viga		No. de Elem. 3D
			25	50	50
1	27.48667	27.3837	27.48669	27.48667	27.50990
2	75.76806	75.9383	75.76857	75.76809	76.01107
3	148.53569	148.7158	148.53949	148.53593	149.55762
4	245.53705	245.7912	245.55410	245.53813	248.45318
5	366.78999	366.6832	366.84644	366.79359	373.44696
6	512.29345	512.4795	512.44598	512.30325	525.43848
7	682.04749	682.6574	682.40413	682.07057	705.49056
8	876.05210	876.6084	876.80016	876.10091	914.82636

Os desvios percentuais relativos calculados, tendo como base os resultados das frequências naturais analíticas, são apresentados na Tabela 9. Na Tabela 10, é apresentado o número de operações de ponto flutuante em cada etapa do cálculo dos autovalores e autovetores.

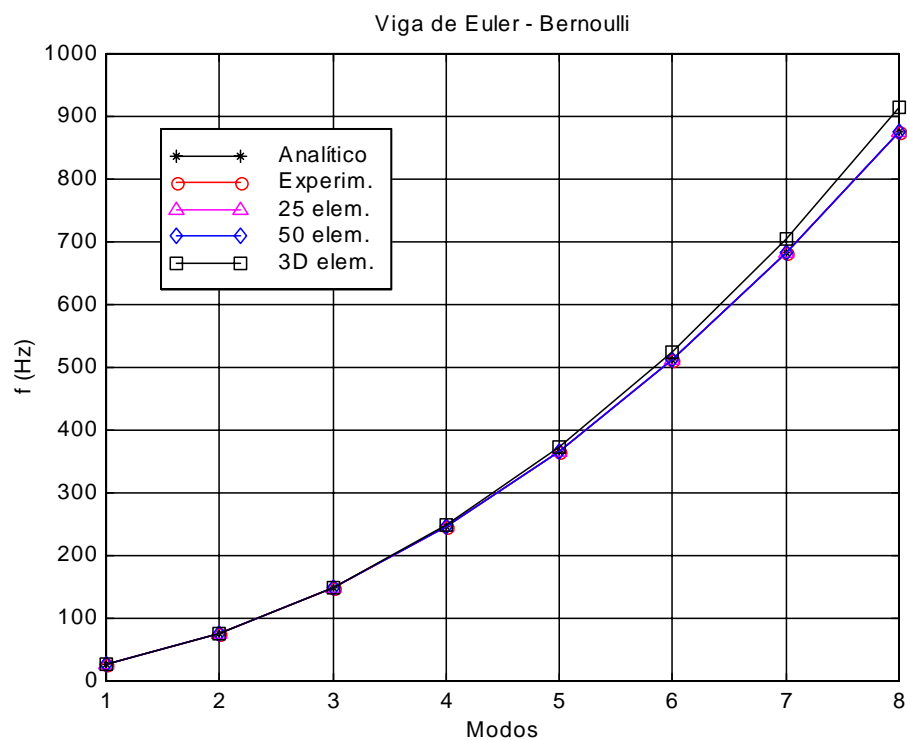
Tabela 9 – Desvios Percentuais Relativos –  $(freq/freq\_analítica-1)*100$ 

Viga Livre - Livre – desvio %			
Experi- mental	Elementos de Viga		Elem. 3D
	25	50	50
0.37462	-0.00007	0.00000	0.08451
-0.22469	-0.00067	-0.00004	0.32073
-0.12126	-0.00256	-0.00016	0.68800
-0.10351	-0.00694	-0.00044	1.18765
0.02911	-0.01539	-0.00098	1.81493
-0.03632	-0.02977	-0.00191	2.56592
-0.08942	-0.05229	-0.00338	3.43716
-0.06350	-0.08539	-0.00557	4.42602

Tabela 10 – Número de Flops Obtidos em cada Etapa do Cálculo

Viga Livre – Livre – Mflop			
Tarefa	Elementos de Viga		Elem. 3D
	25	50	50
Montagem de [M] e [K]	0,05	0,10	3,80
Autovalor e Autovetor	3,04	21,81	20.121,60
Processamento do Modelo	3,09	21,91	20.125,40

Na Figura 28 e Figura 29, apresentamos, na forma de gráficos, os valores da Tabela 8 e Tabela 9, respectivamente. Na Figura 30, são excluídos os valores da Tabela 9, referentes ao elemento 3D.



*Figura 28 - Frequências Naturais - Viga de Euler - Bernoulli*



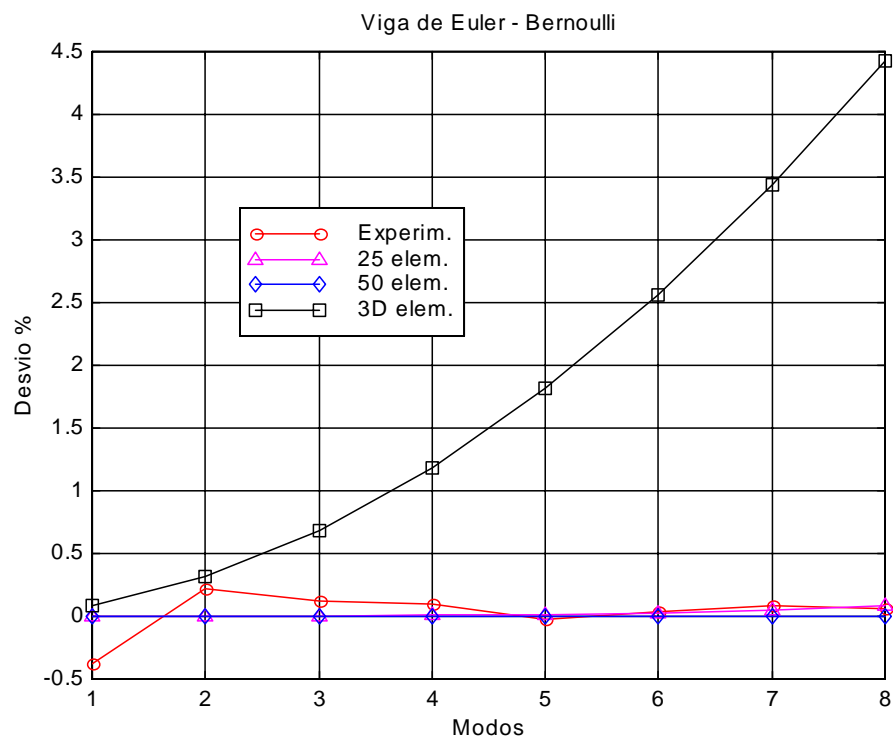


Figura 29 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Euler – Bernoulli

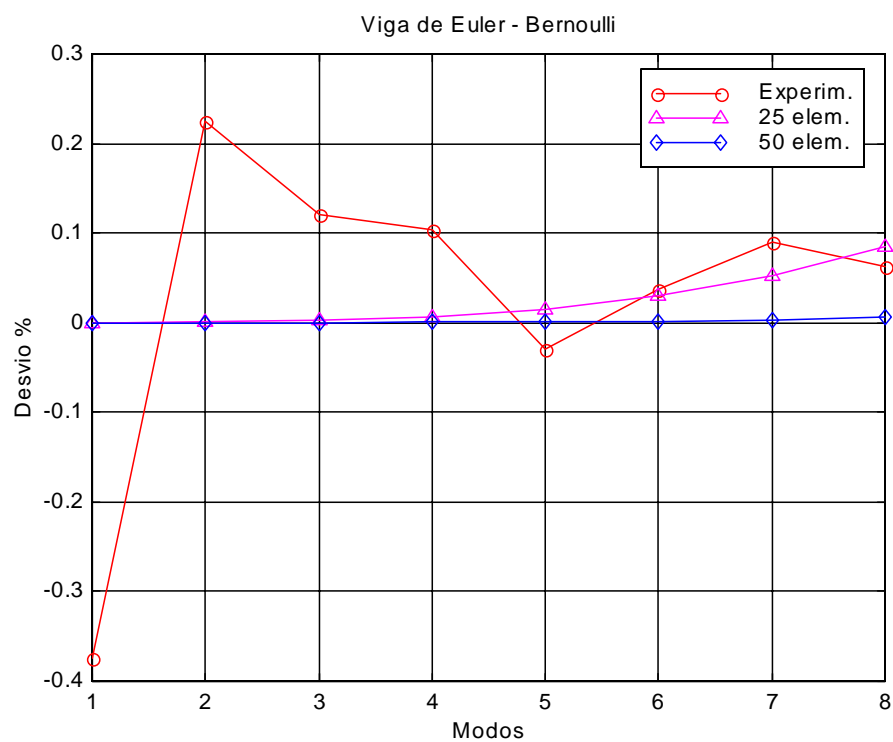


Figura 30 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Euler – Bernoulli

## 4.2.2 Elemento de viga de Timoshenko

A viga é modelada com 25 e 50 elementos de viga de Timoshenko e 50 elementos trilineares de oito nós ao longo do comprimento e 1 elemento ao longo da espessura. Os modelos de viga possuem 26 nós, 52 gds e 51 nós e 102 gds, respectivamente. O modelo com elementos 3D possui 204 nós e 612 gds.

*Tabela 11 – Frequência Natural Hz – Viga de Timoshenko*

Viga Livre – Livre – Frequências Naturais					
Modos	Analítico Timoshenko	Experi- mental	No. de Elementos de Viga		No. de Elem. 3D
			25	50	50
1	27.4848	27.3837	27.48486	27.48483	27.50990
2	75.7535	75.9383	75.75406	75.75352	76.01107
3	148.4796	148.7158	148.48402	148.47995	149.55762
4	245.3835	245.7912	245.40349	245.38526	248.45318
5	366.4473	366.6832	366.51341	366.45314	373.44696
6	511.6252	512.4795	511.80364	511.64107	525.43848
7	680.8638	682.6574	681.28062	680.90119	705.49056
8	874.1013	876.6084	874.97442	874.18016	914.82636

Os desvios percentuais relativos calculados, tendo como base os resultados das frequências naturais analíticas, são apresentados na Tabela 12. Na Tabela 14, é apresentado o número de operações de ponto flutuante, em cada etapa do cálculo dos autovalores e autovetores.

Tabela 12 - Desvios Percentuais Relativos –  $(freq/freq\_analítica-1)*100$ 

Viga Livre - Livre – desvio %			
Experi- mental	Elementos de Viga		Elem. 3D
	25	50	50
0.3679	-0.0001	0.0000	0.0912
-0.2440	-0.0008	-0.0001	0.3401
-0.1591	-0.0030	-0.0003	0.7261
-0.1661	-0.0081	-0.0007	1.2510
-0.0644	-0.0180	-0.0016	1.9101
-0.1670	-0.0349	-0.0031	2.6999
-0.2634	-0.0612	-0.0055	3.6170
-0.2868	-0.0999	-0.0090	4.6591

Tabela 13 – Número de Flops Obtidos em cada Etapa do Cálculo

Viga Livre – Livre – Mflop			
Tarefa	Elementos de Viga		Elem. 3D
	25	50	50
Montagem de [M] e [K]	0,06	0,12	3,80
Autovalor e Autovetor	3,04	21,69	20.121,60
Processamento do Modelo	3,10	21,81	20.125,40

Na Figura 31 e Figura 32 apresentamos, na forma de gráficos, os valores da Tabela 11 e Tabela 12, respectivamente. Na Figura 33 são, excluídos os valores da Tabela 9, referentes ao elemento 3D.

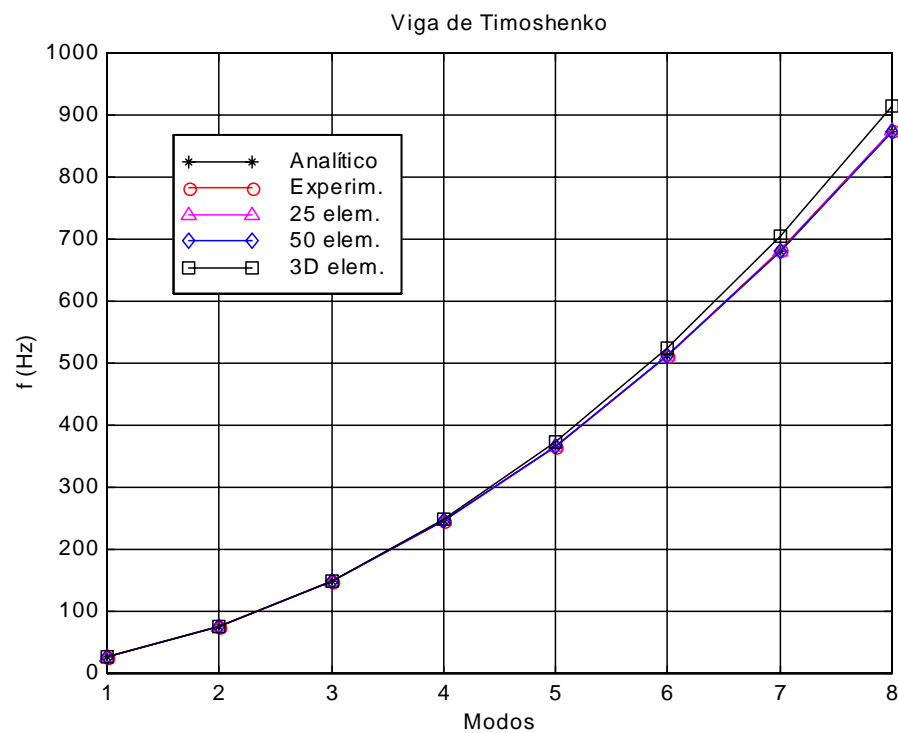


Figura 31 - Frequências Naturais - Viga de Timoshenko

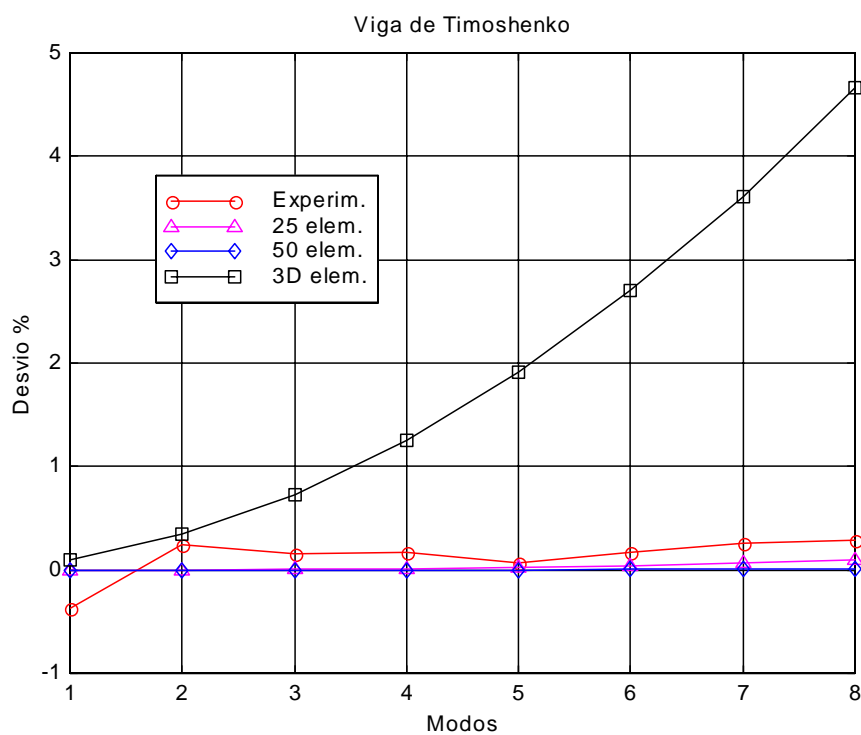
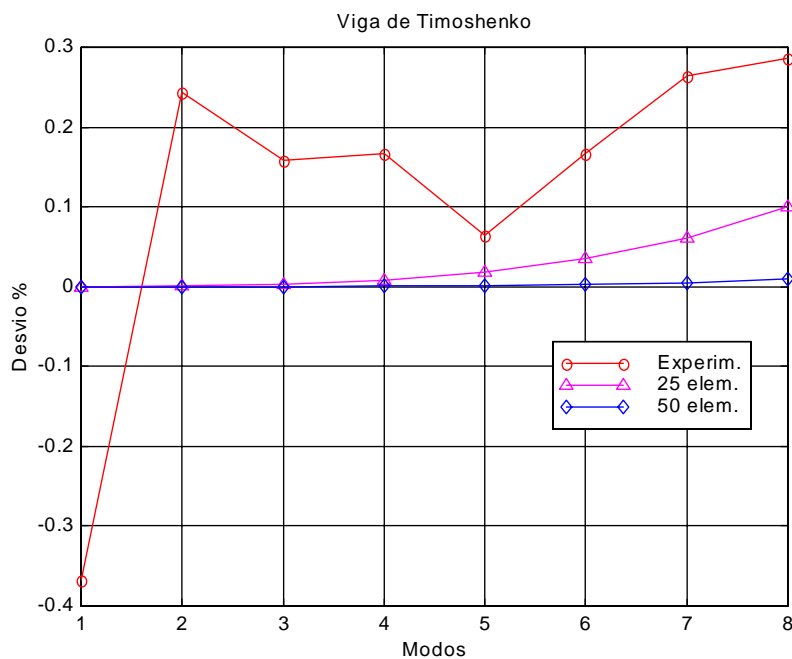
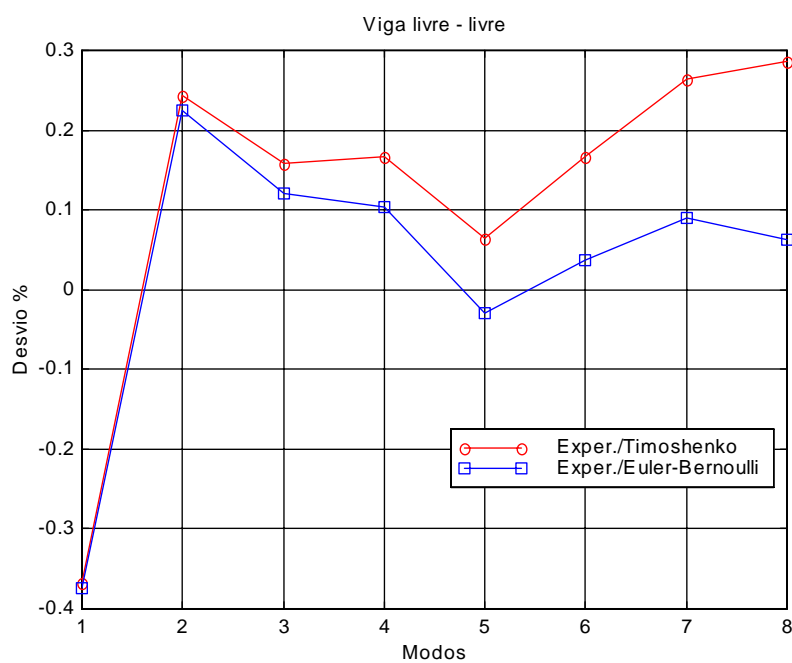


Figura 32 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Timoshenko



*Figura 33 - Desvios Percentuais Relativos - Viga de Timoshenko*

A Figura 34 apresenta as curvas dos desvios percentuais relativos, entre os resultados experimentais e os resultados analíticos de viga de Euler–Bernoulli e Timoshenko, empregando os modelos com 50 elementos.



*Figura 34 - Desvios Percentuais Relativos – Comparação entre os Modelos*

Os desvios relativos percentuais, apresentados pelos modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko (Tabela 12), comparados com os resultados analíticos, foram menores do que 0,1%. Verificamos, então, que existe uma excelente concordância entre os modelos numéricos e analíticos.

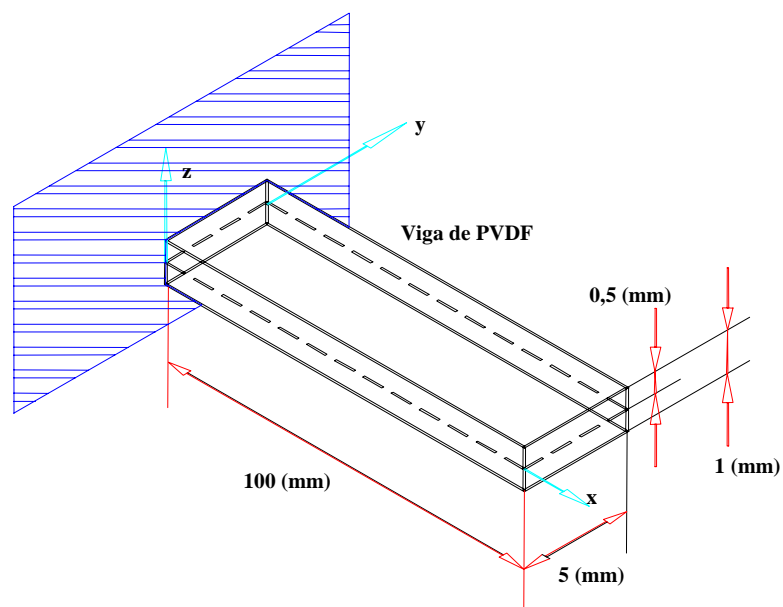
Teoricamente, o modelo de viga de Timoshenko é superior ao modelo de Euler – Bernoulli, na determinação da resposta da estrutura. Entretanto, dependendo da relação de aspecto da viga, isto é, da relação entre o seu comprimento e espessura, da relação entre os módulos de elasticidade longitudinal e transversal e do número de modos analisados, os dois modelos podem apresentar comportamentos semelhantes, principalmente para razão de aspecto superior a 50. Uma explicação mais detalhada sobre esse fato, baseada nas energias cinéticas, pode ser encontrada em *ALDRAIHEM (1996)*.

### 4.2.3 Viga piezelétrica de PVDF

A viga piezelétrica da Figura 35 é composta por duas camadas idênticas de polímero piezelétrico (*PVDF*), com polaridades opostas. A condição de contorno da viga é uma extremidade fixa e a outra livre.

Iremos comparar os resultados apresentados pelos programa SMART MEF, quando modelamos a viga de PVDF com elementos de viga e elemento trilinear de oito nós, com os resultados publicados por *HWANG & PARK (1993)*, que trabalharam com o elemento bilinear de 4 nós (modelo de Euler-Bernoulli). Inicialmente, aplicamos um potencial elétrico de 1 V através dos PVDFs e, posteriormente, sem esse potencial elétrico, aplicamos uma força de flexão, que induz um potencial elétrico de 1 V nos PVDFs.

Os modelos resultantes da viga de PVDF com elementos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko têm 10 elementos, 11 nós e 20 gdl. O processamento do primeiro modelo necessitou de 13,94 kflop, e do segundo modelo de 16,37 kflop. Com o elemento trilinear de oito nós, o modelo tem 20 elementos, 10 elementos por camada, 66 nós e 224 gdl e necessitou de 2,49 Mflop para obtenção dos resultados.



*Figura 35 – Viga Piezelétrica Formada por duas Camadas de PVDF*

As propriedades do material piezelétrico são apresentadas na Tabela 14.

*Tabela 14 – Propriedades do Material Piezelétrico – PVDF*

PVDF		
propriedades	valor	unidade
coeficiente de Poisson	0,29	
densidade	1800	kg/m <sup>3</sup>
módulo de elasticidade	2	GPa
Constantes Piezelétricas		
$e_{31}$	0,0460	C/m <sup>2</sup>
$e_{32}$	0,0460	C/m <sup>2</sup>
Constantes Dielétricas		
$\xi_{11}$	$0,1062 \times 10^{-9}$	F/m
$\xi_{22}$	$0,1062 \times 10^{-9}$	F/m
$\xi_{33}$	$0,1062 \times 10^{-9}$	F/m

Quando um potencial elétrico é aplicado na viga de PVDF, provoca o aparecimento de uma força de flexão, que deforma a estrutura. Vamos aplicar um potencial elétrico igual 1 volt, através da espessura dos PVDFs, e determinar as deflexões estáticas ao longo da viga.

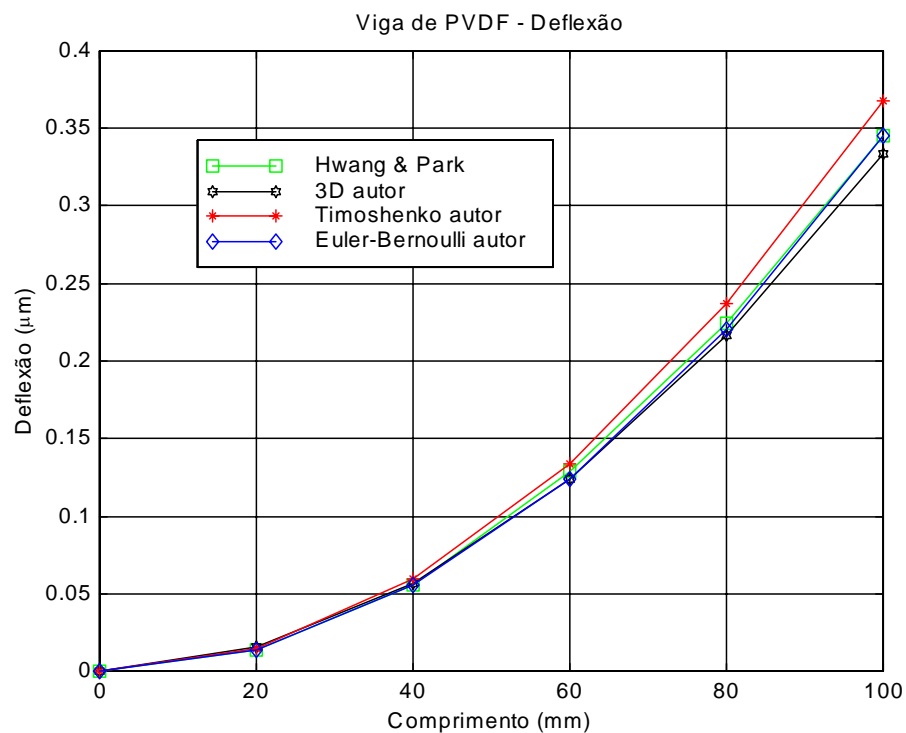


Figura 36 – Deflexão da Viga de PVDF, devido à Voltagem Aplicada de 1 V

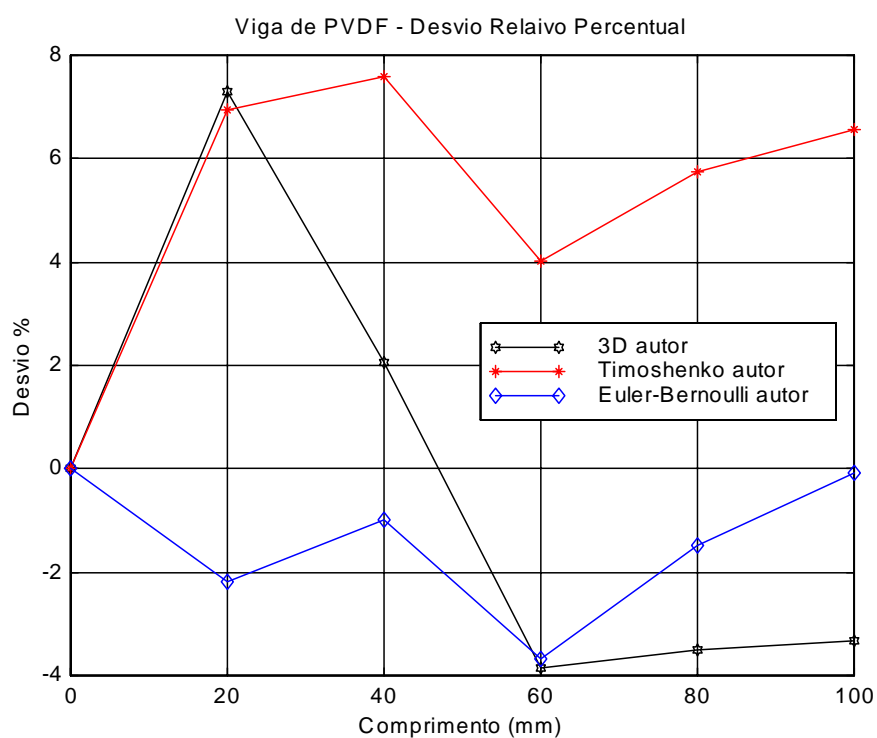


Figura 37 – Desvios Percentuais Relativos das Deflexões Devido a Aplicação de 1 V



Na análise da viga de PVDF (Figura 35), segundo a Figura 37, o modelo de Euler–Bernoulli apresentou melhores resultados, como era esperado. A diferença nos desvios explica-se pelo fato que o desvio percentual é calculado com relação ao modelo de Euler – Bernoulli.

Quando uma carga externa é aplicada na extremidade livre da viga, de tal maneira a provocar uma deflexão de 1 cm, é gerada uma tensão de saída no sensor de PVDF. Esta tensão elétrica é calculada por *TZOU & TSENG (1993)*, como sendo a tensão média ao longo do comprimento da viga. No trabalho de *HWANG & PARK (1993)*, as tensões são calculados em cada elemento, num total de 5 elementos. Consideram, que cada elemento, possui um eletrodo. Com o programa de elementos finitos, é possível, obter uma distribuição da tensão de saída do sensor ao longo do comprimento da viga, mais ou menos refinada, em função do número de elementos empregado no modelo.

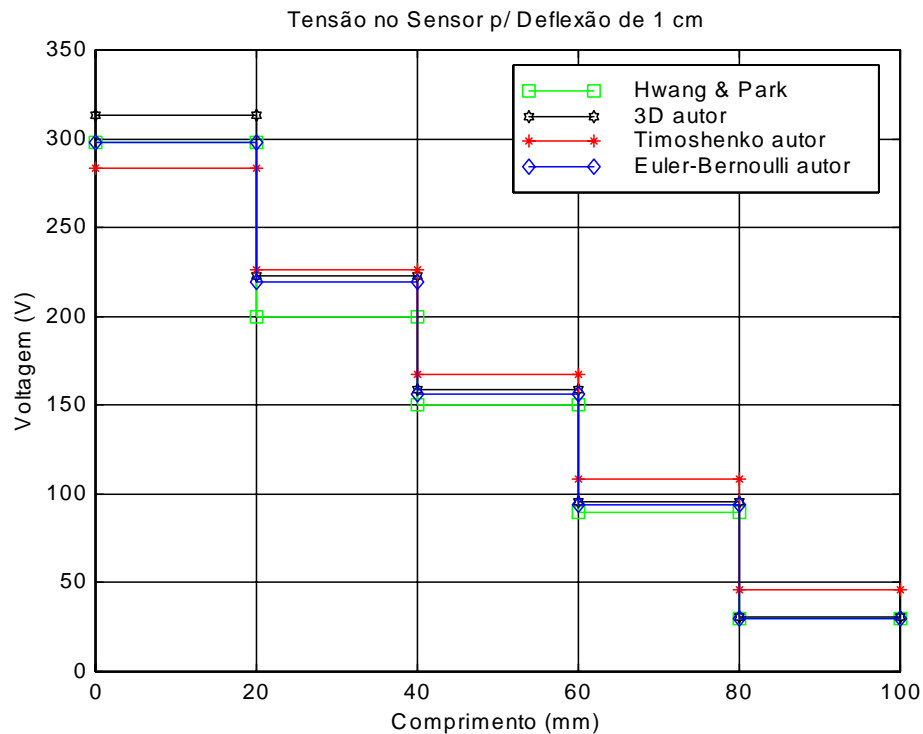
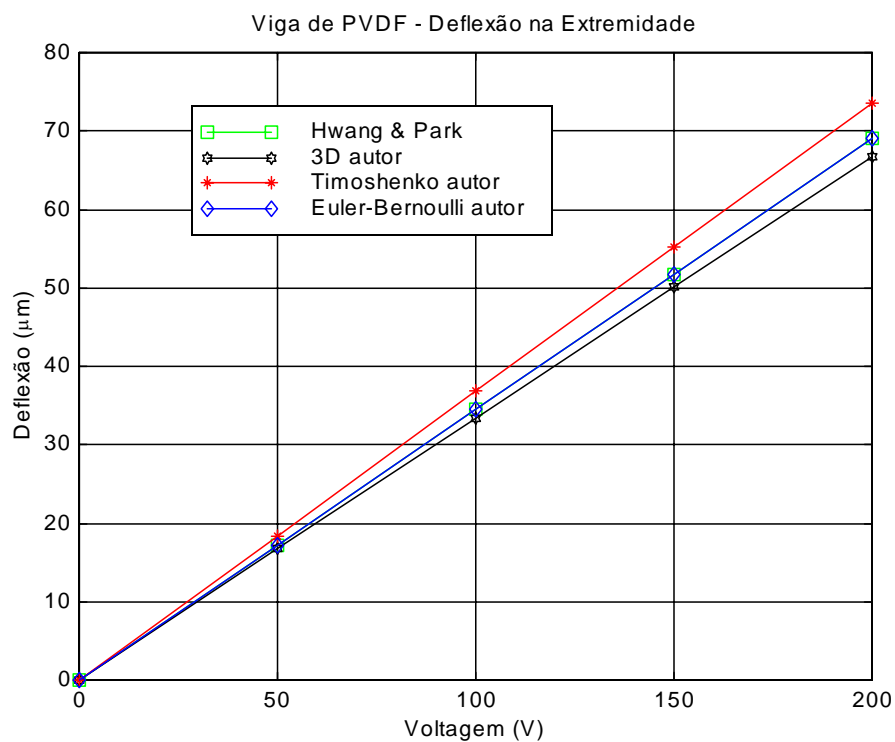


Figura 38 – Distribuição da Voltagem em Função da Flexão da Viga

O potencial elétrico aplicado no elemento piezoelétrico pode chegar até a voltagem de “breakdown”, que corresponde a destruição da polarização inicial do material piezoelétrico, e

conseqüentemente, perda de suas propriedades piezelétricas. Para PVDF o campo máximo que pode ser aplicado na direção da espessura é da ordem de 40 kV/mm.



*Figura 39 – Deflexão da Extremidade da Viga de PVDF Versus Voltagens Aplicadas*

Na modelagem da viga de PVDF (Figura 35), os desvios encontrados para a deflexão da viga apresentaram valores inferiores a 8% (Figura 37), sendo esses resultados compatíveis aos apresentados por *HWANG & PARK (1993)*.

### 4.3 ELEMENTOS DE PLACA DE KIRCHHOFF E REISSNER - MINDLIN

Para validar os modelos de placa de um elemento estrutural , analisaremos uma placa de aço com as seguintes características: comprimento de 0,5 m, largura de 0,5 m, espessura 3 mm, densidade de  $7600 \text{ kg/m}^3$  , coeficiente de Poisson igual a 0,30 e módulo de Young igual a 210 GPa. A condição de contorno imposta é a placa totalmente livres.

A Tabela 15 apresenta as frequências naturais adimensionais para os vários modelos. Na Tabela 16 são determinados os desvios percentuais relativos, tendo como base as frequências adimensionais analíticas, calculadas por *Leissa*, sem considerar o efeito do cisalhamento e inércia de rotação (*MUCHERONI, 1988*). Um resumo das principais características dos modelos empregados, bem como o número de operações de ponto flutuante, necessários à montagem das matrizes de massa e rigidez, resolução do autoproblema, para os 100 primeiros autovalores, e o processamento do modelo é apresentado na Tabela 17.

### 4.3.1 Freqüências Naturais para uma Placa Totalmente Livre

*Tabela 15 – Freqüências Naturais Adimensionais: Placa Totalmente Livre*

Freq. Adimensional $\bar{f} = 2\pi f_n a^2 \sqrt{\rho h/D}$ para $\mu = 0,30$					
Modos	Malha	Leissa (Kirchhoff)	Kirchhoff	Reissner-Mindlin	3D Sólido
1	-----	13.4680	-----	-----	-----
	4x4		13.8220	13.8220	14.2073
	8x8		13.5626	13.5626	13.9559
	16x16		13.4888	13.4888	13.5984
2	-----	19.5960	-----	-----	-----
	4x4		19.6622	20.8990	20.9265
	8x8		19.6168	19.9565	19.9945
	16x16		19.6016	19.6865	19.6057
3	-----	24.2680	-----	-----	-----
	4x4		24.4188	26.9034	26.8965
	8x8		24.3148	24.9745	25.0596
	16x16		24.2819	24.4458	24.4796
4	-----	34.8000	-----	-----	-----
	4x4		34.6997	37.5320	83.6557
	8x8		34.7916	35.5934	49.8239
	16x16		34.8011	34.9935	36.1491
5	-----	34.8000	-----	-----	-----
	4x4		34.6997	37.5320	83.7130
	8x8		34.7916	35.5934	49.8239
	16x16		34.8011	34.9935	36.3815
6	-----	61.1080	-----	-----	-----
	4x4		61.7781	72.5463	151.4241
	8x8		61.3282	66.2185	67.3677
	16x16		61.1562	62.4656	62.6609
7	-----	61.1080	-----	-----	-----
	4x4		61.7781	72.5463	152.2427
	8x8		61.3282	66.2185	67.3677
	16x16		61.1562	62.4656	62.6641

Tabela 16 – Desvios Percentuais Relativos:  $(freq/freq_{Leissa}-1)*100$ 

Desvios % – Placa Retangular Livre				
Modos	Malha	Kirchhoff	Reissner-Mindlin	3D Sólido
1	4x4	0.3959	2.6286	5.4890
	8x8	0.1330	0.7020	3.6229
	16x16	0.0386	0.1546	0.9684
2	4x4	0.3378	6.6491	6.7896
	8x8	0.1060	1.8394	2.0335
	16x16	0.0287	0.4618	0.0497
3	4x4	0.6215	10.8596	10.8312
	8x8	0.1930	2.9112	3.2619
	16x16	0.0573	0.7326	0.8720
4	4x4	-0.2882	7.8505	140.3898
	8x8	-0.0242	2.2799	43.1721
	16x16	0.0031	0.5562	3.8768
5	4x4	-0.2882	7.8505	140.5545
	8x8	-0.0242	2.2799	43.1721
	16x16	0.0031	0.5562	4.5444
6	4x4	1.0965	18.7181	147.7975
	8x8	0.3603	8.3631	10.2436
	16x16	0.0789	2.2217	2.5412
7	4x4	1.0965	18.7181	149.1371
	8x8	0.3603	8.3631	10.2436
	16x16	0.0789	2.2217	2.5465

Tabela 17 – Características Principais dos Modelos de Placa

Dados do Modelos	Modelos de Placa						Elemento Trilinear		
	Kirchhoff			Reissner-Mindlin					
Malha	4x4	8x8	16x16	4x4	8x8	16x16	4x4	8x8	16x16
Elementos	16	64	256	16	64	256	16	64	256
Nós	25	81	289	25	81	289	50	162	578
GDL	75	243	867	75	243	867	150	486	1734
Operações	Mflo p	Mflop	Mflop	Mflop	Mflop	Mflop	Mflop	Gflop	Gflop
Mont. K-M	0,03	0,14	0,67	0,17	0,67	2,70	1,24	0,005	0,02
Autoprob.	12,71	385,00	328,73	10,48	324,89	359,65	167,46	4,19	68,39
Total	12,74	385,14	329,40	10,65	325,56	362,35	168,70	4,19	68,41

Para cada modelo, variamos a malha e comparamos esses resultados com os calculados segundo Leissa: Figura 40, Figura 41 e Figura 42.

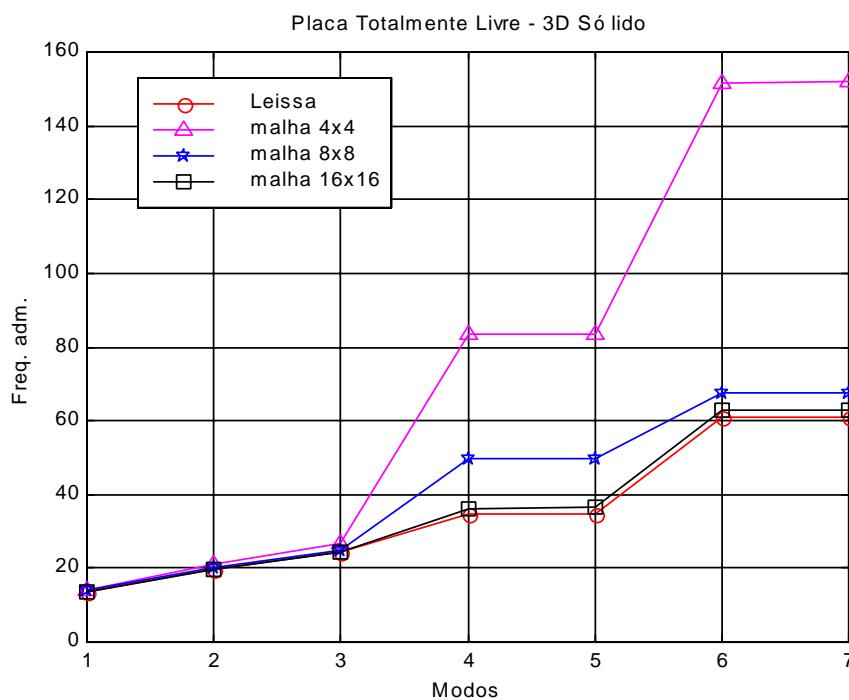


Figura 40 – Frequências Naturais Adimensionais: Elemento 3D Sólido

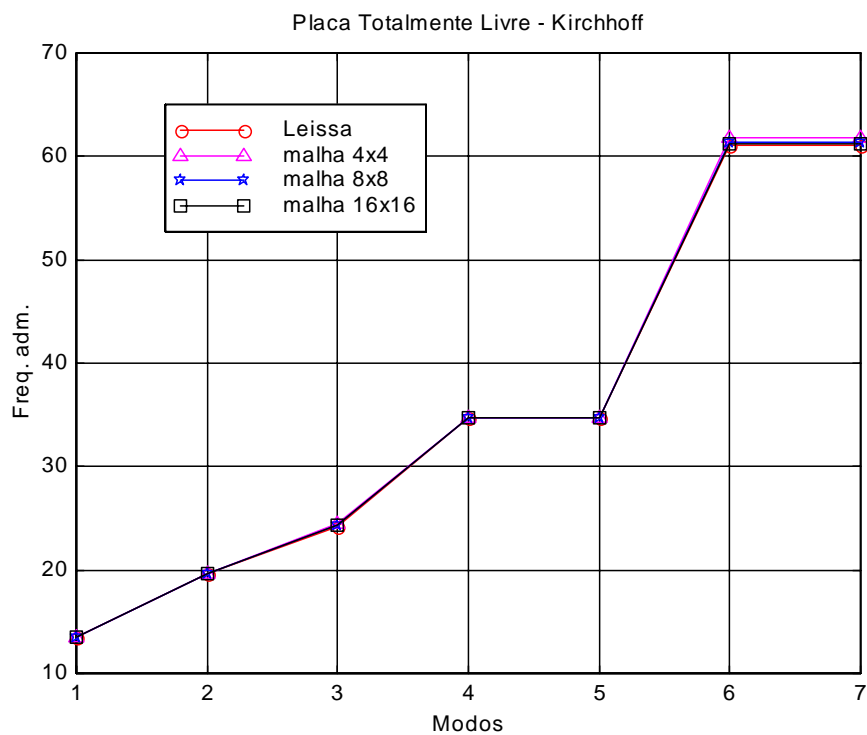


Figura 41 – Frequências Naturais Adimensionais: Kirchhoff

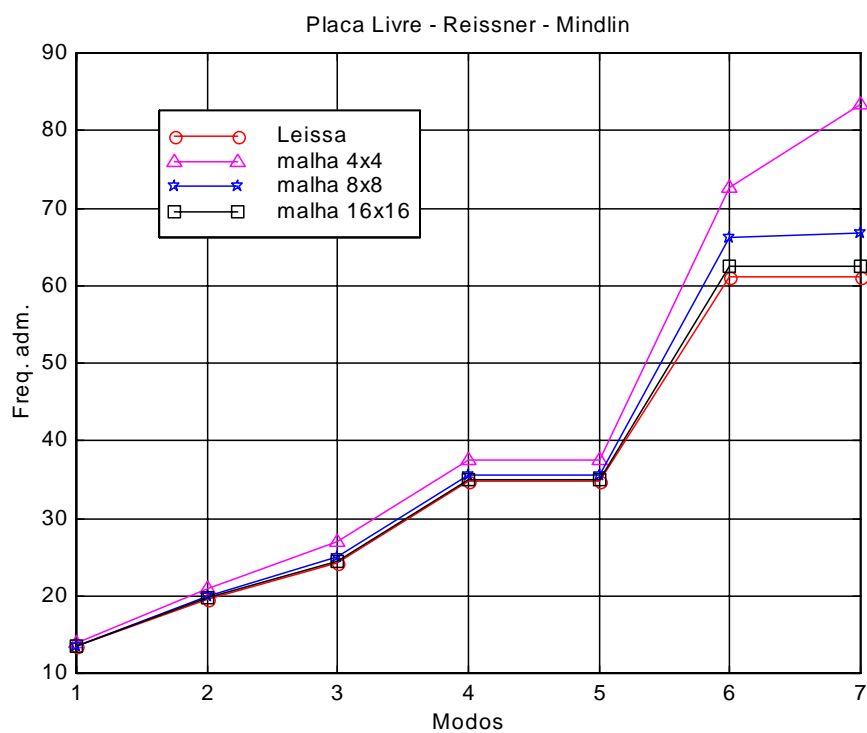
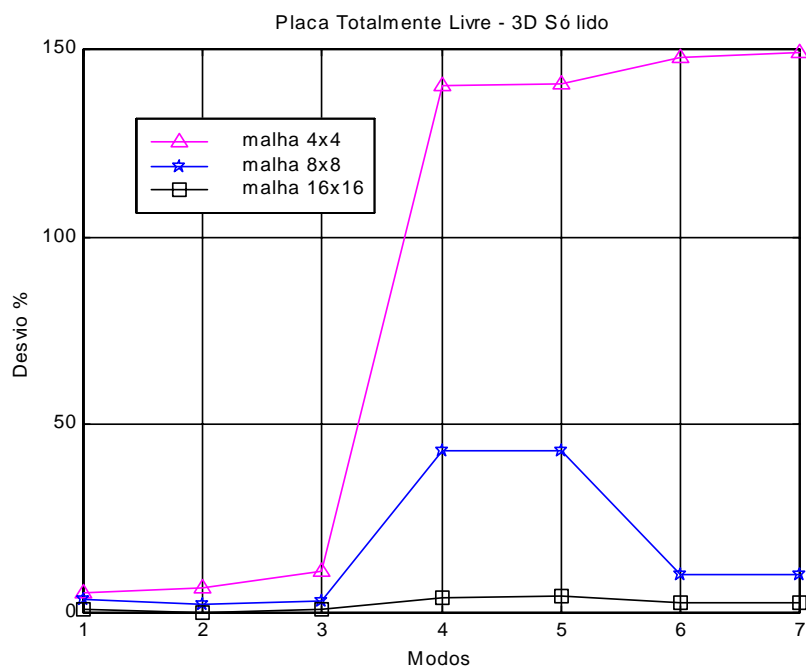
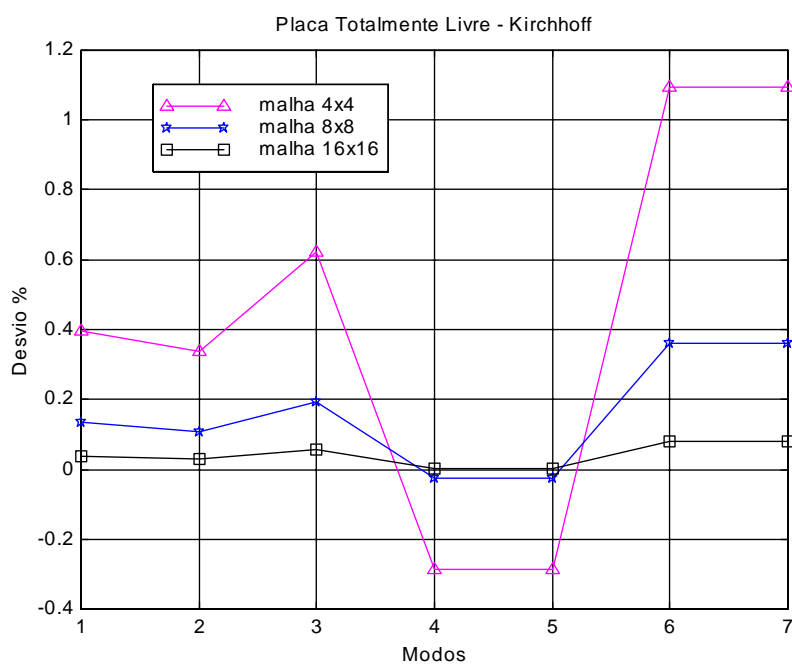


Figura 42 – Frequências Naturais Adimensionais: Reissner-Mindlin

Na Figura 43, Figura 44 e Figura 45, são apresentados os desvios relativos percentuais de cada modelo, com base nos resultados calculados, segundo Leissa. Na Figura 46, são apresentadas as curvas para a malha 24x24.



*Figura 43 – Desvios Percentuais Relativos: Elemento 3D Sólido*



*Figura 44 – Desvios Percentuais Relativos: Kirchhoff*



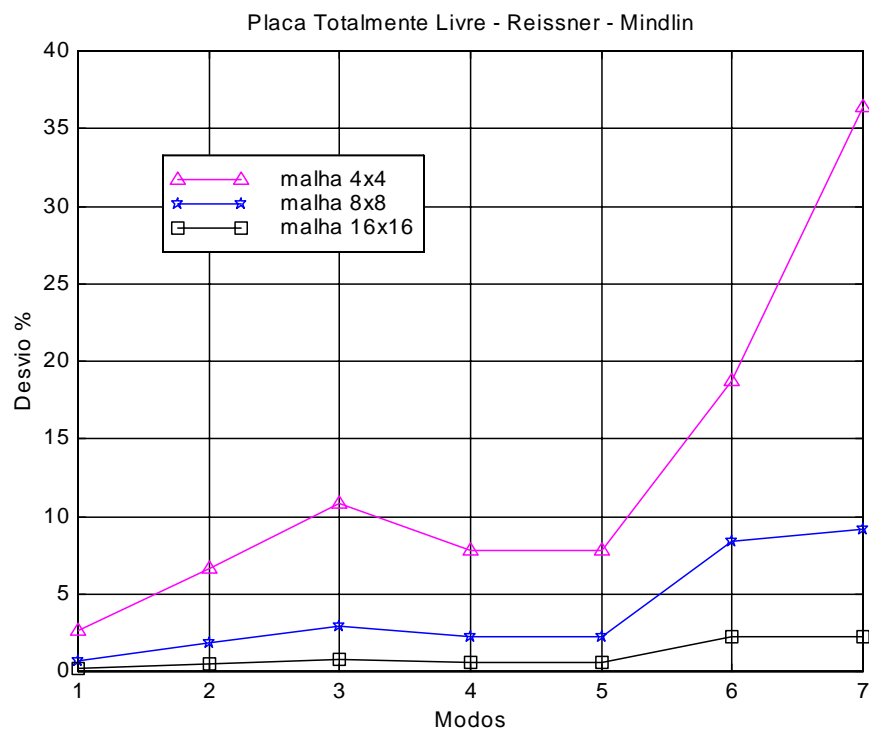


Figura 45 – Desvios Percentuais Relativos: Reissner-Mindlin

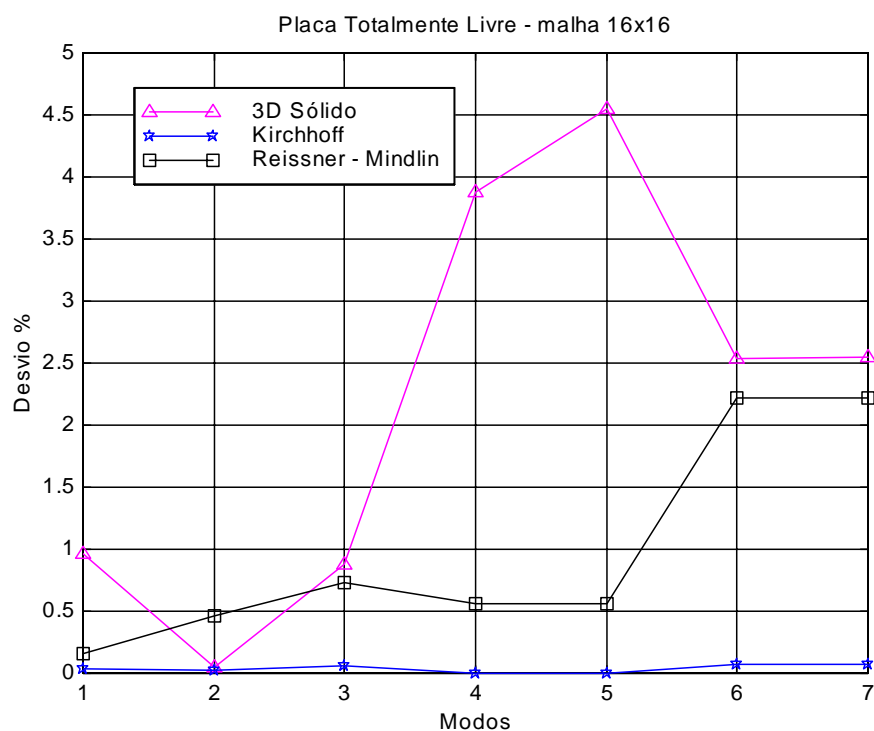


Figura 46 – Desvios Percentuais Relativos: Comparação entre os Elementos

### 4.3.2 Placa de Grafite/Epoxy com Atuadores Piezelétricos Distribuídos

Com o objetivo de validar os modelos de placa para meios piezelétricos, vamos utilizar os resultados experimentais obtidos por *CRAWLEY et. al. (1989)*. Em seu experimento, Crawley trabalhou com um placa laminada, composta por grafite e epoxy. Cerâmicas piezelétricas *PZT G1195N* foram coladas nas superfícies do material compósito, conforme apresentado na Figura 47. Para provocar um deflexão na placa, potenciais elétricos com sinais opostos foram aplicados nas cerâmicas piezelétricas, em ambos os lados da placa. As deflexões foram medidas com sensores de proximidade, ao longo das bordas e da linha de centro da placa. Os modelos de placa para este caso possuem malha 10x6, 60 elementos, 77 nós e 210 gdl, e o modelo 3D possui malha 10x6x3, 176 elementos e 994 gdl.

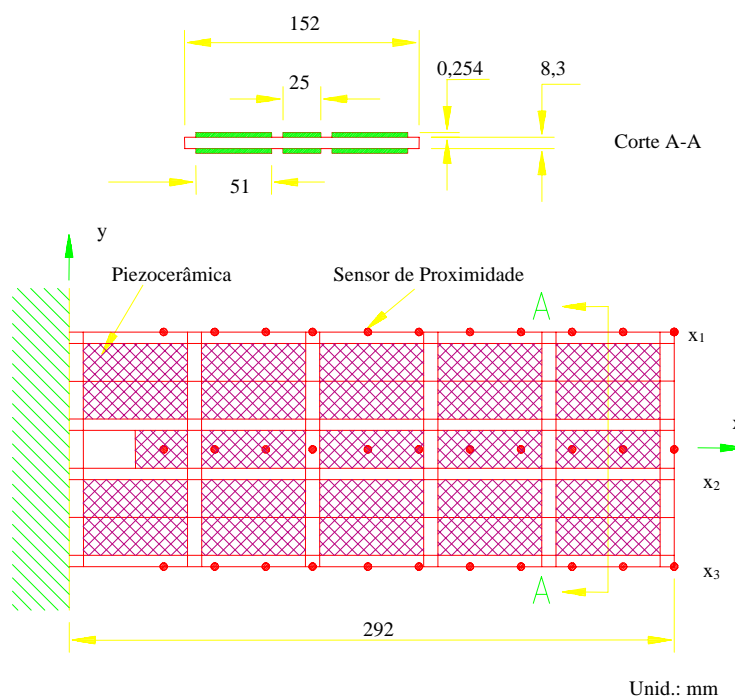


Figura 47 – Placa Usada no Experimento de Crawley

Tomando as deflexões dos pontos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e, considerando a largura  $b$  da placa, podemos calcular as deformações longitudinal e transversal, com auxílios das seguintes equações:

$$W_1 = \frac{x_2}{b} \quad (410)$$

$$W_T = \frac{x_2 - (x_1 + x_3)/2}{b} \quad (411)$$

As propriedades do compósito T300/976 grafite e epoxy e da cerâmica piezelétrica PZT G1195N são listadas na Tabela 18.

*Tabela 18 – Propriedades da Cerâmica Piezelétrica e do Compósito*

Propriedades dos PZT e do material composto Grafite/Epoxy		
Propriedades	PZT G1195N	T300/976
Módulo de Young (GPa)		
$E_{xx}$	63,0	150,0
$E_{yy}=E_{zz}$	63,0	9,0
Coefficiente de Poisson		
$\nu_{xy}=\nu_{xz}$	0,3	0,3
$\nu_{zy}=\nu_{yz}$	0,3	0,3
Módulo de Elasticidade Transversal (GPa)		
$G_{xy}=G_{zx}$	24,2	7,10
$G_{yz}$	24,2	2,50
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )		
$\rho$	7600	1600
Constantes de deformação piezelétrica (pm/V)		
$d_{31}=d_{32}$	254	-----
$d_{24}$	584	-----
$d_{33}$	374	-----
Permissividade dielétrica (nF/m)		
$\xi_{xx}^{\sigma} = \xi_{yy}^{\sigma}$	15,3	-----
$\xi_{zz}^{\sigma}$	15,0	-----

Os gráficos da Figura 48 e Figura 49 apresentam as deflexões longitudinais e transversais, em função das posições dos sensores de proximidade, conforme Figura 47.

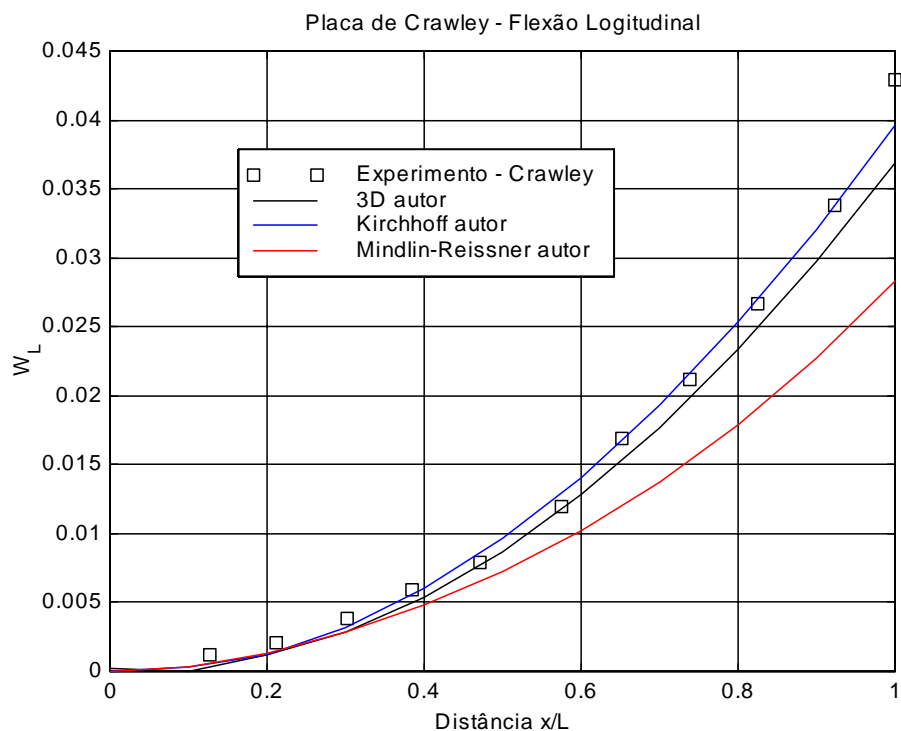


Figura 48 – Comparação entre a Flexão Longitudinal Experimental e Simulada

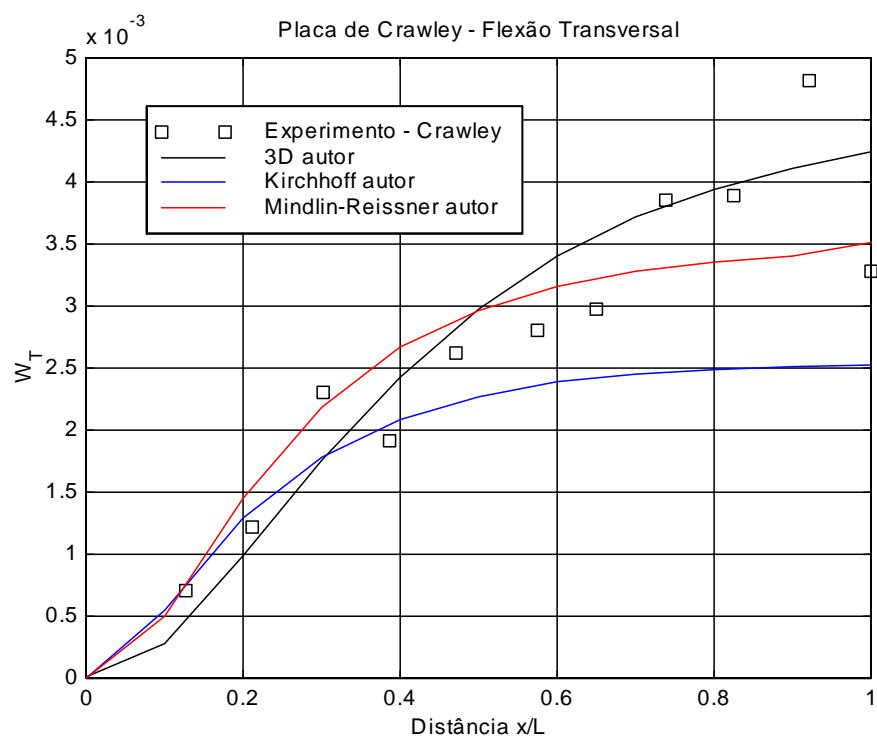


Figura 49 – Comparação entre a Flexão Transversal Experimental e Simulada

Na Figura 48 e Figura 49 observamos que os resultados apresentados pelos modelos desenvolvidos apresentaram concordância com os dados experimentais obtidos por Crawley. A diferença nos resultados entre o modelo de Mindlin–Reissner e os outros deve-se ao grau do polinômio de interpolação deste ser linear.

## **CAPÍTULO 5.**

### **RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

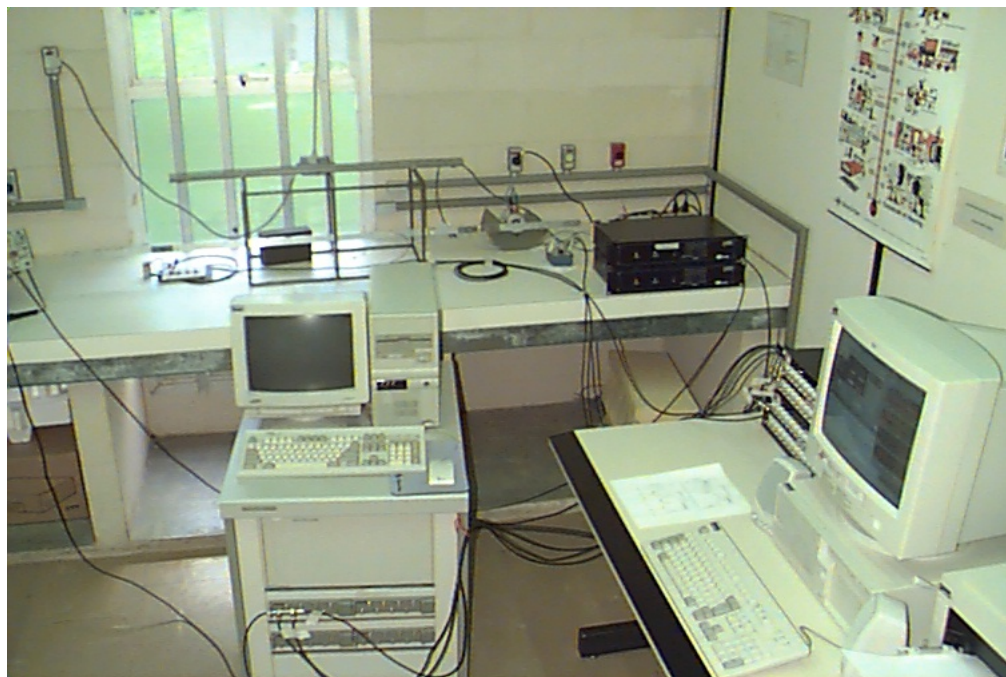
#### **5.1 VIGA LIVRE - LIVRE**

Os ensaios realizados objetivam validar os modelos numéricos desenvolvidos, implementar o controle ativo da estrutura e tomar contato com os problemas encontrados na preparação, realização e interpretação dos resultados experimentais. Possibilitaram a aplicação de técnica de manuseio dos sensores e atuadores piezelétricos e procedimentos de montagem de toda a instrumentação envolvida. Os ensaios da viga envolveram fases distintas, a saber: preparação e montagem da instrumentação, identificação da dinâmica e controle ativo da estrutura.

##### **5.1.1 Descrição do Experimento.**

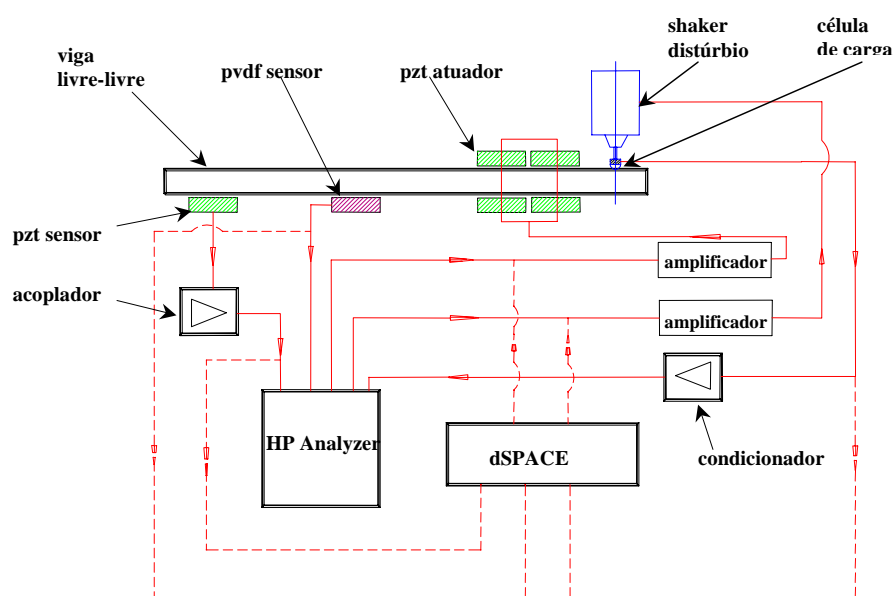
Uma estrutura do tipo viga é suspensa com auxílio de elementos flexíveis. A condição de contorno pretendida é a livre – livre. A viga é instrumentada com sensores de PZT e de PVDF. O atuador de controle consiste de um conjunto de cerâmicas piezelétricas. A estrutura é excitada através de um atuador de distúrbio, que consiste em um excitador eletrodinâmico (“shaker”), com um transdutor de força acoplado na sua extremidade. Ainda fazem parte da instrumentação, circuitos eletrônicos de amplificação, acopladores de impedância para o sensor de PZT e

transdutor de força, sistema de aquisição de dados HP35650 com software HP3566A (HP Analyzer), um microcomputador que executa o programa de controle em tempo real, equipado com placa de conversão analógico/digital DS2103, digital/analógico DS2003 e com processador digital de sinais DS1003 (dSPACE GmbH).



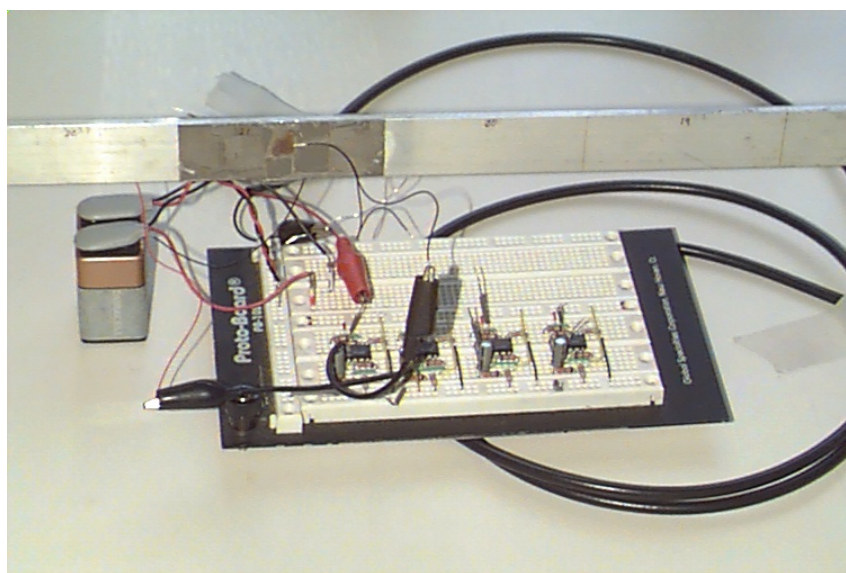
*Foto 1– Vista Geral da Bancada de Ensaios.*

A Foto 1 apresenta uma vista geral, mostrada de forma esquemática na Figura 50, das montagens utilizadas nos ensaios. Na Figura 50, as linhas contínuas indicam as ligações utilizadas no ensaio de identificação, enquanto as linhas tracejadas indicam as ligações do ensaio de controle ativo da estrutura.



*Figura 50 – Esquema da Montagem Utilizada nos Ensaios.*

O sensor de PZT é composto por uma lâmina de cerâmica piezelétrica PSI – 5A –S4 – ENH (Piezo Systems, Inc.), ligada a um protótipo de acoplador de impedância, conforme apresentado na Foto 2 (vide esquema elétrico no Apêndice B).



*Foto 2 – Sensor de PZT e Acoplador de Impedância.*

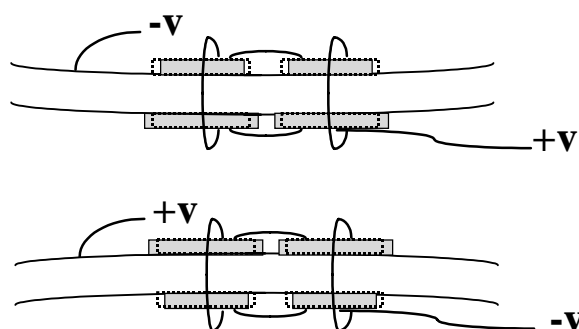


Os PZTs e a estrutura usada nos ensaios têm as suas propriedades apresentadas na Tabela 19.

*Tabela 19 – Propriedades da Cerâmica Piezelétrica e do Material da Viga.*

Propriedades dos PZTs e do Material da Viga		
Propriedades	PSI-5A-S4-ENH	Alumínio
dimensões (mm)	72 x 25 x 0,254	1800 x 25,9 x 3,45
Módulo de Young (GPa)		
$E_{xx}$	66,0	65,0
$E_{zz}$	52,0	-----
Coefficiente de Poisson		
$\nu$	0,30	0,32
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )		
$\rho$	7800	2711
Consts. de deformação piezelétrica (pm/V)		
$d_{31}$	-190	-----
$d_{33}$	390	-----
Permissividade dielétrica (nf/m)		
$\epsilon_{zz}^{\sigma}$	15,93	-----

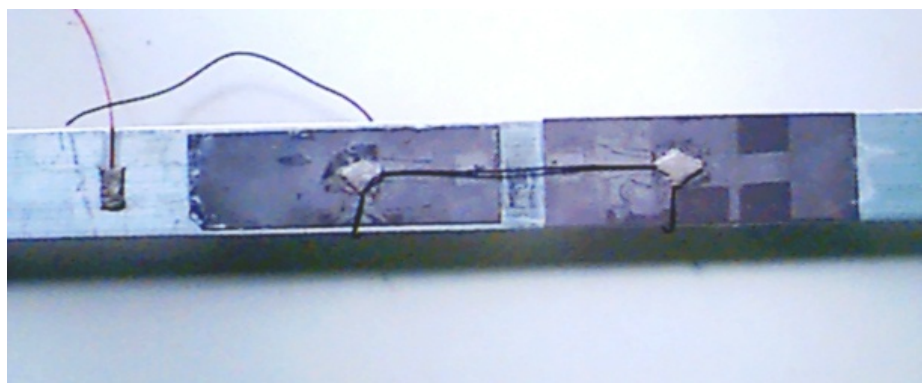
Os PZTs atuadores ou PZTs de controle são compostos por lâminas coladas em pares em cada lado da viga, com 180 graus de defasagem na direção de polarização, formando um conjunto com quatro PZTs. Todos os PZTs são conectados entre si, de tal forma que recebam potenciais elétricos com sinais opostos. Este esquema de ligação tem como função produzir um movimento de flexão na viga, quando um potencial elétrico for aplicado nos PZTs.



*Figura 51 - Movimento de flexão do Atuador PZT.*

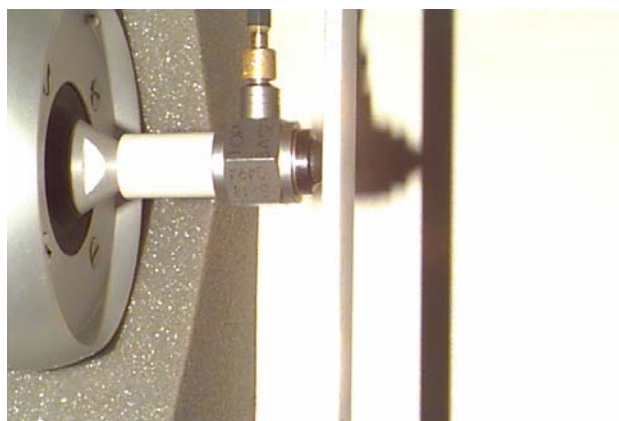


*Foto 3 – PZT Atuador, Visto de um Lado da Viga.*



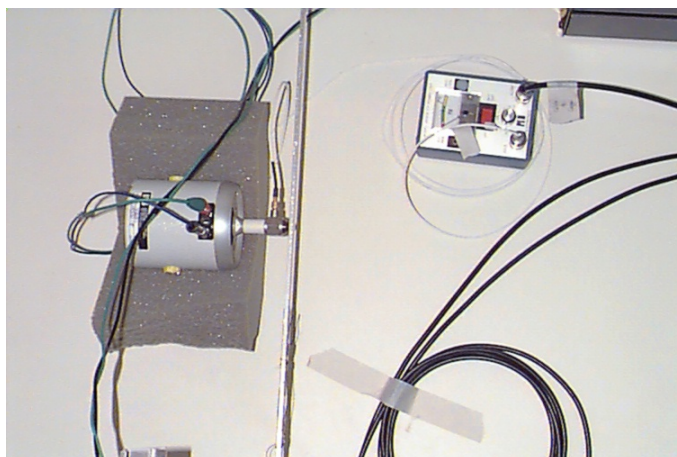
*Foto 4 – PZT Atuador, Visto do outro Lado da Viga.*

O sinal de distúrbio é aplicado via shaker de distúrbio, com um transdutor de força na sua extremidade.



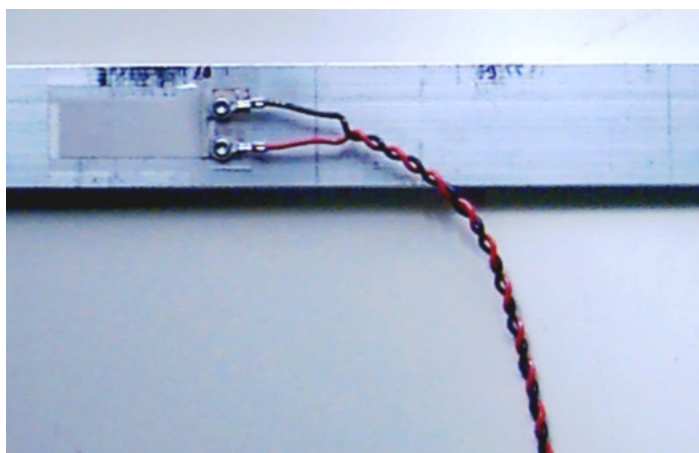
*Foto 5 – Shaker de Distúrbio com Transdutor de força.*

O sinal de distúrbio é medido por um transdutor de força piezelétrica pré-amplificada, que possui um condicionador de sinais.



*Foto 6 – Conjunto Shaker, Transdutor de força e Condicionador de Sinais.*

Para se ter um ponto a mais de medida no processo de identificação, também foi usado um sensor de plástico piezelétrico (PVDF).



*Foto 7 – Sensor PVDF.*

Esse ensaio foi desenvolvido de maneira a validar os trabalhos de modelagem de estrutura com sensores e atuadores piezelétricos, posicionamento de sensores e atuadores (COSTA E SILVA, 1998) e controle ativo de estruturas, usando um controlador robusto de banda limitada (MOREIRA, 1998). Em vista disto, e com base no modelo de elementos finitos, escolhemos as seguintes frequências a serem controladas: 496 e 573 Hz. A metodologia de busca para o

posicionamento ótimo dos sensores e atuadores utiliza o critério de mínimo esforço do controlador e máxima energia de saída, através de medidas dos grammianos de controlabilidade e observabilidade do sistema. Neste caso, o posicionamento teve como medida a maximização do menor autovalor das matrizes grammianas (*COSTA E SILVA, 1998*).

As dimensões da estrutura e dos PZTs e os seus respectivos posicionamentos são apresentados na Figura 52.

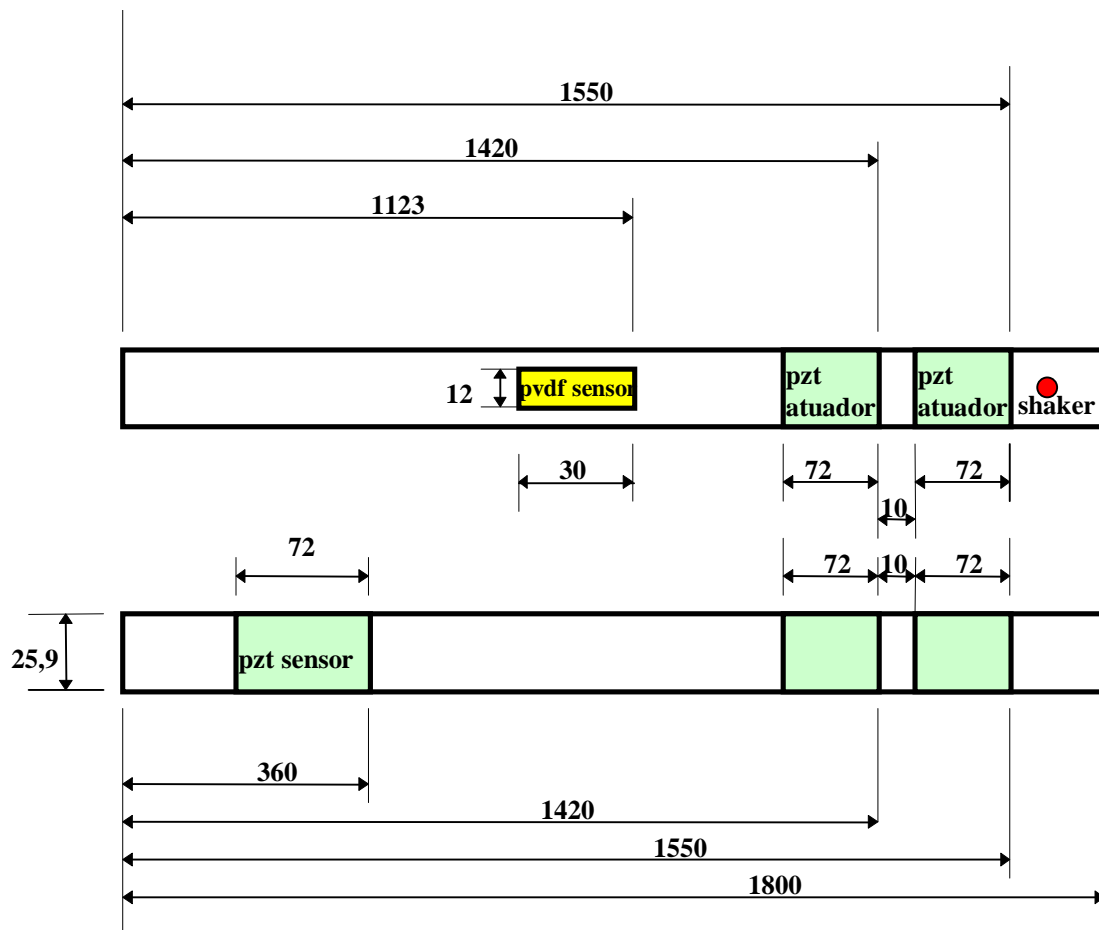


Figura 52 – Esquema do Conjunto Estrutura, Sensores e Atuadores com dimensões em mm

### 5.1.2 Ensaio de Identificação

O ensaio de identificação é dividido em duas etapas. Na primeira etapa, a viga é excitada através do PZT atuador com um sinal aleatório. O sistema de aquisição do HP Analyzer armazena os sinais de excitação e de resposta dos sensores de PZT e PVDF. Na segunda etapa, a estrutura é excitada com o “shaker” de distúrbio. Novamente, os sinais do transdutor de força e dos sensores são armazenados. Assim, obtemos as funções respostas em frequência e respostas impulsivas, relacionando os sinais de entrada com os sinais medidos. Os dados provenientes do ensaio são convertidos em arquivos com extensão *.mat* do MATLAB®. Um programa de identificação, baseado na teoria de realizações de autossistema (MOREIRA & ARRUDA, 1997), é utilizado para identificar o modelo dinâmico de estado da estrutura ensaiada.

Os gráficos da Figura 53 à Figura 56 apresentam uma comparação entre as respostas em frequência do modelo identificado e as obtidas no ensaio, com amplitudes em dB e referência. 1 V/V. A Tabela 20 apresenta a nomenclatura, utilizada para identificar os resultados da identificação.

*Tabela 20 – Nomenclatura dos Gráficos de Identificação*

Nomenclatura dos Gráficos		
G <sub>ij</sub> →	i=1 → sensor PZT	j=1 → Shaker distúrb.
	i=2 → sensor PVDF	j=2 → atuador PZT

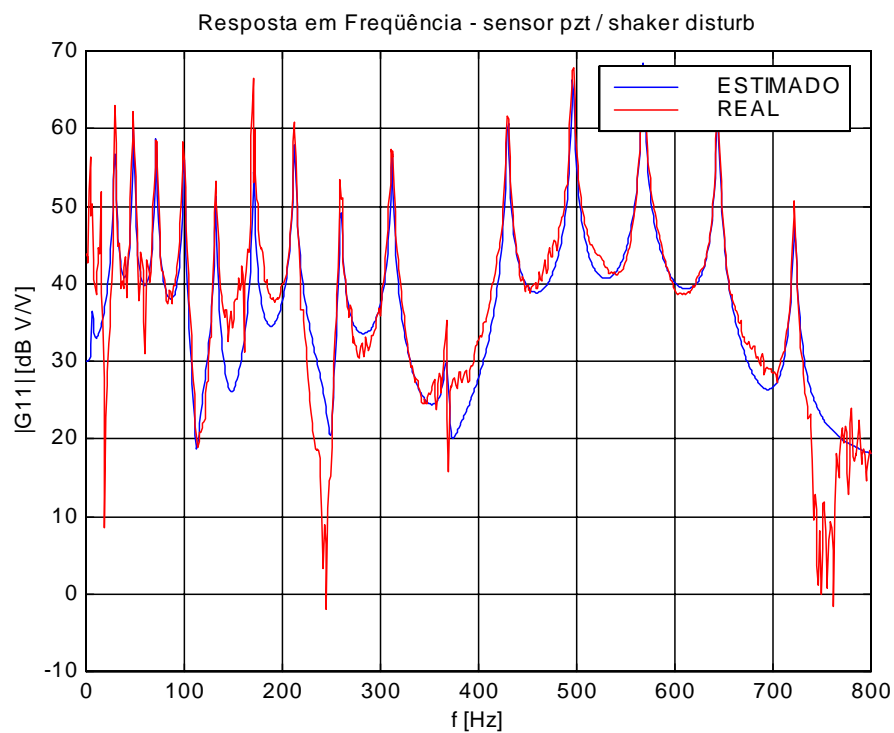


Figura 53 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{11}$

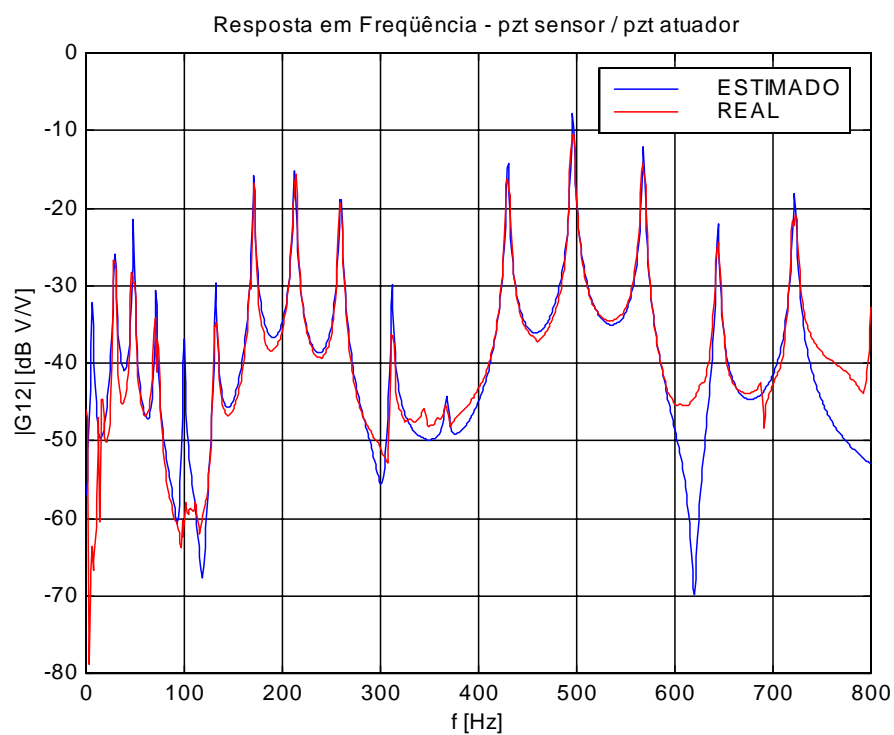


Figura 54 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{12}$

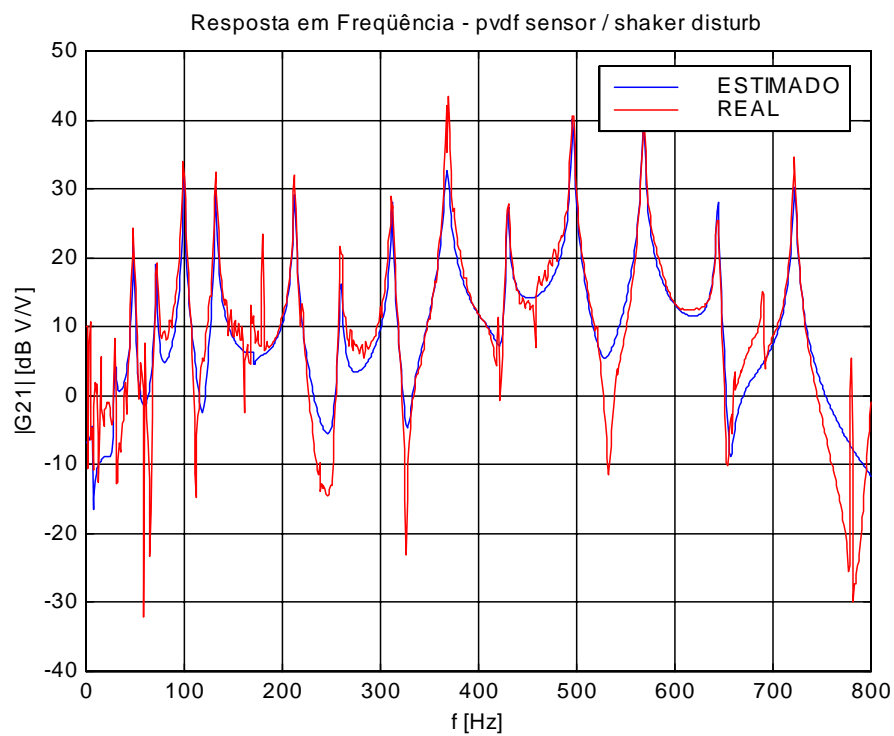


Figura 55 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{21}$

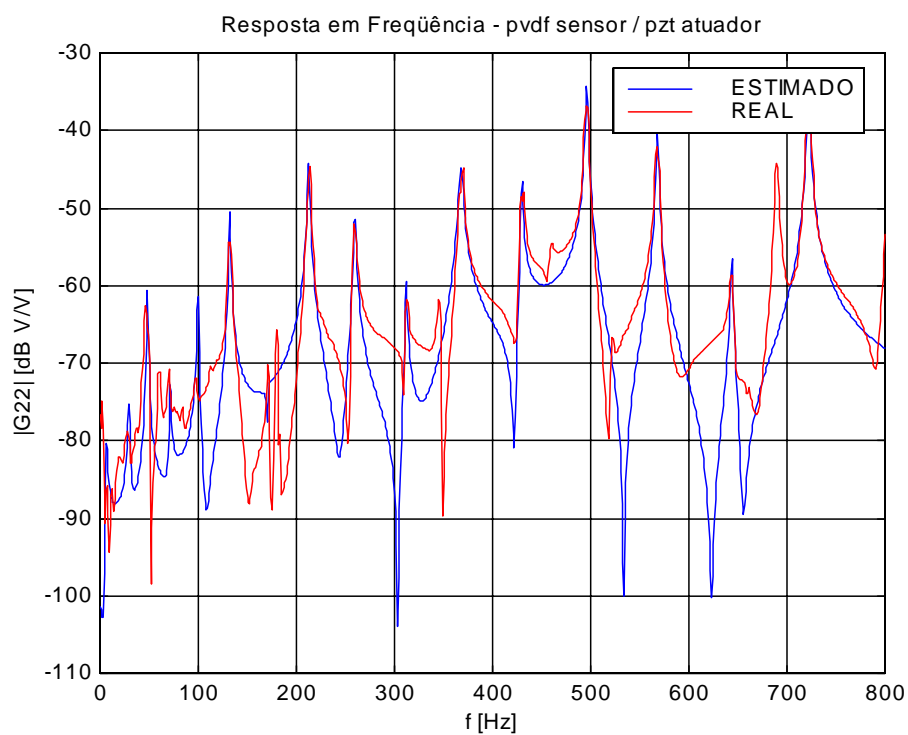


Figura 56 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{22}$

### 5.1.3 Modelo via M.E.F.

A estrutura foi modelada com 50 elementos de viga de Euler – Bernoulli, resultando em um modelo com 51 nós e 102 gdl. Esse foi ajustado usando o Método de Ajuste de Modelos das Variáveis Instrumentais (*FRISWELL & MOTTERSHEAD, 1995*).

Para projetar o controlador a partir do modelo teórico, devemos representar o conjunto de equações dinâmicas, gerado pelo modelo teórico para meios piezelétricos, em variáveis de estado, equação (313).

Definindo as variáveis de estado como:

$$\begin{aligned}\{x_1\} &= \{q\} \\ \{x_2\} &= \{\dot{q}\}\end{aligned}\tag{412}$$

Um sistema em malha aberta pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem em termos das variáveis de estado, definidas pela equação (412):

$$\begin{aligned}\{\dot{x}_1\} &= \{x_2\} \\ \{\dot{x}_2\} &= -[M_{qq}]^{-1}[K_{qq}^*]\{x_1\} - [M_{qq}]^{-1}[C_{qq}]\{x_2\} + [M_{qq}]^{-1}\{F\}\end{aligned}\tag{413}$$

e:

$$[C_{qq}] = \alpha[M_{qq}] + \beta[K_{qq}]\tag{414}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes de Rayleigh e foram obtidos através do modelo identificado ( $\alpha = 10$  e  $\beta = 10^{-7}$ ).

Escrevendo a equação (413) na forma matricial, temos:



$$\begin{bmatrix} \{\dot{x}_1\} \\ \{\dot{x}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ -[M_{qq}]^{-1}[K_{qq}^*] \end{bmatrix} - [M_{qq}]^{-1}[C_{qq}] \begin{bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M_{qq}]^{-1} \end{bmatrix} \{F\} \quad (415)$$

$$\{\phi\}_s = \left( \begin{bmatrix} [0] \\ -[K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi q}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{bmatrix} \right) \quad (416)$$

ou, simplesmente

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (417)$$

$$\{y\} = [C]\{x\} \quad (418)$$

onde  $\{x\}$  é o vetor de estado ( $2n \times 1$ );  $[A]$  é a matriz do sistema ( $2n \times 2n$ );  $[B]$  é a matriz de controle ( $2n \times n$ );  $\{u\}$  é o vetor de entrada ( $n \times 1$ );  $\{y\}$  é o vetor de saída ( $p \times 1$ ) e  $[C]$  é uma matriz ( $p \times 2n$ ).

O efeito do eletrodo sobre a resposta do sensor é obtido fazendo a média dos potenciais elétricos nos nós dos elementos. Um procedimento mais preciso seria realizar uma condensação estática impondo um potencial elétrico igual em todos os nós.

Os gráficos da Figura 57 à Figura 60 apresentam as respostas em frequência do modelo teórico colocado na forma de estado com truncamento modal, tomando os 19 primeiros modos e as obtidas experimentalmente.

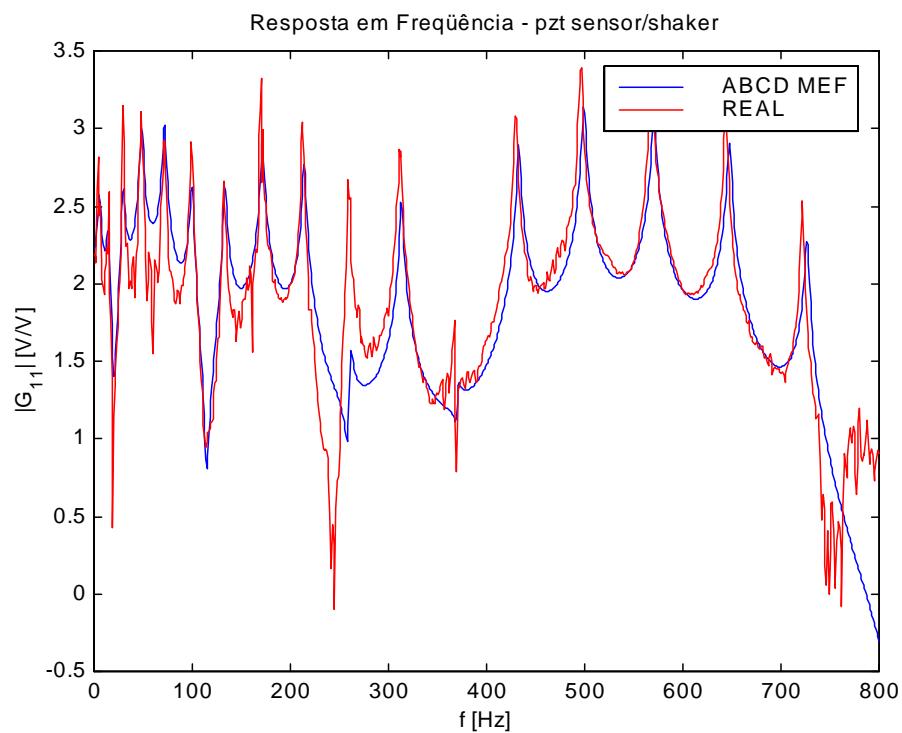


Figura 57 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF –  $G_{11}$

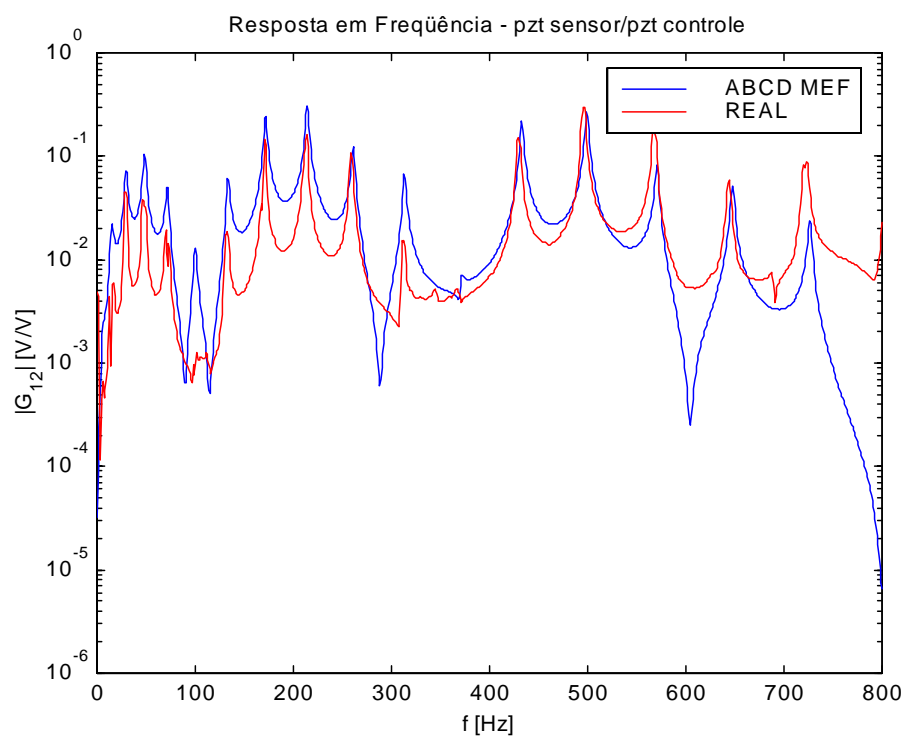


Figura 58 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF –  $G_{12}$

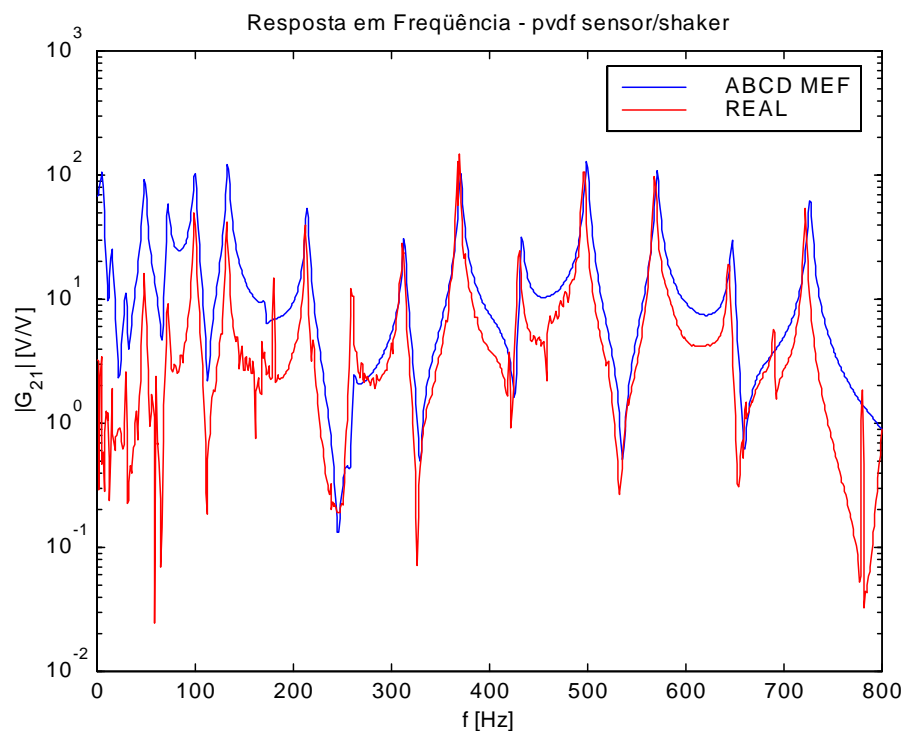


Figura 59 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF –  $G_{21}$

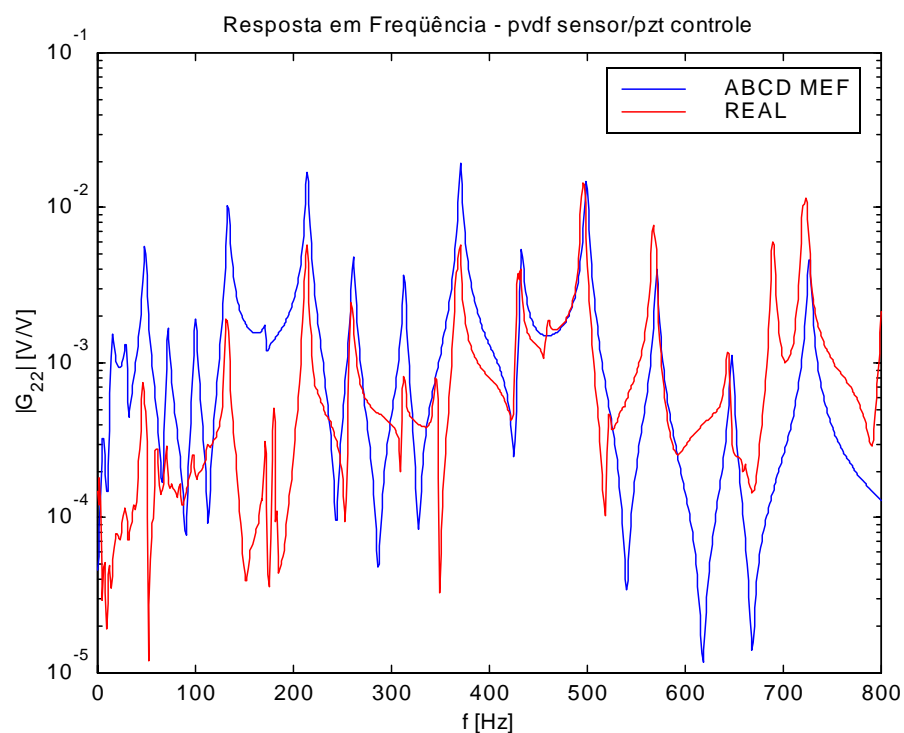


Figura 60 – Comparação entre a FRF Experimental e a Gerada com o Modelo MEF –  $G_{22}$

*Tabela 21 – Comparação entre o Modelo Identificado e o Gerado via M.E.F.*

Modos	Frequência Naturais (Hz)		Desvio %
	ABCD Ident	ABCD MEF	$(MEF/Ident-1)*100$
1	6.1970	5.3866	13.0778
2	29.1521	29.3415	0.6494
3	48.0310	48.2723	0.5025
4	71.3157	71.7007	0.5398
5	99.6918	99.8784	0.1872
6	132.0988	133.2196	0.8484
7	170.7266	171.5639	0.4904
8	212.4793	214.1717	0.7965
9	259.5261	261.0567	0.5898
10	311.7978	313.2206	0.4564
11	367.5482	370.3851	0.7718
12	429.5699	432.7372	0.7373
13	496.1686	499.2161	0.6142
14	567.8318	570.7107	0.5070
15	643.7847	647.4460	0.5687
16	721.9987	726.4319	0.6140

O grande desvio percentual apresentado pela primeira frequência na Tabela 21 deve-se a problemas experimentais, como baixo nível do sinal e o efeito da suspensão da estrutura em baixa frequência que interferiram no processo de identificação.

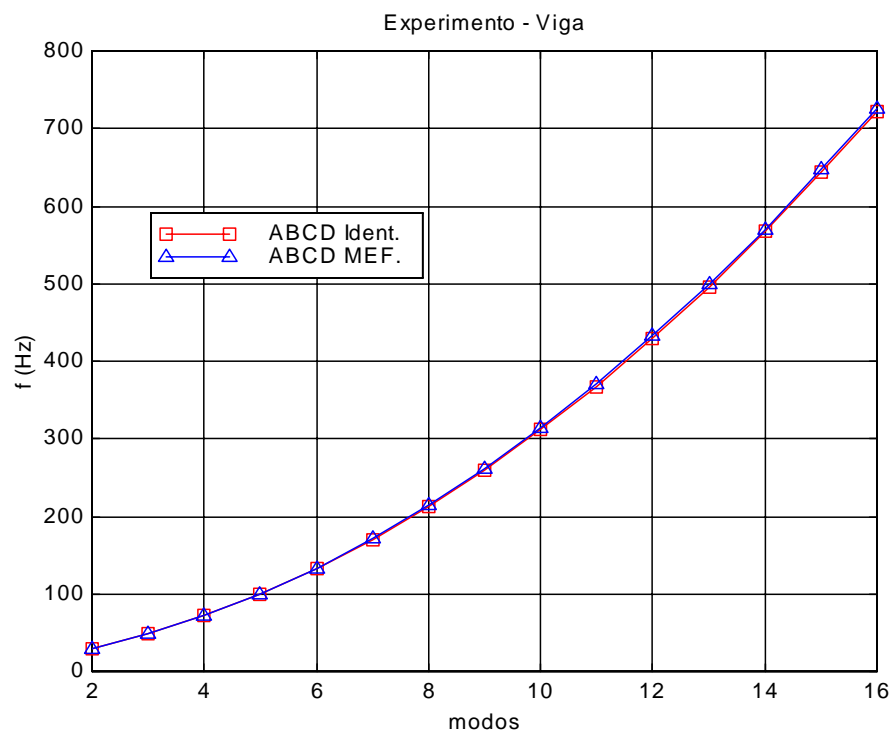


Figura 61 – Frequências dos Modelos Identificado e M.E.F.

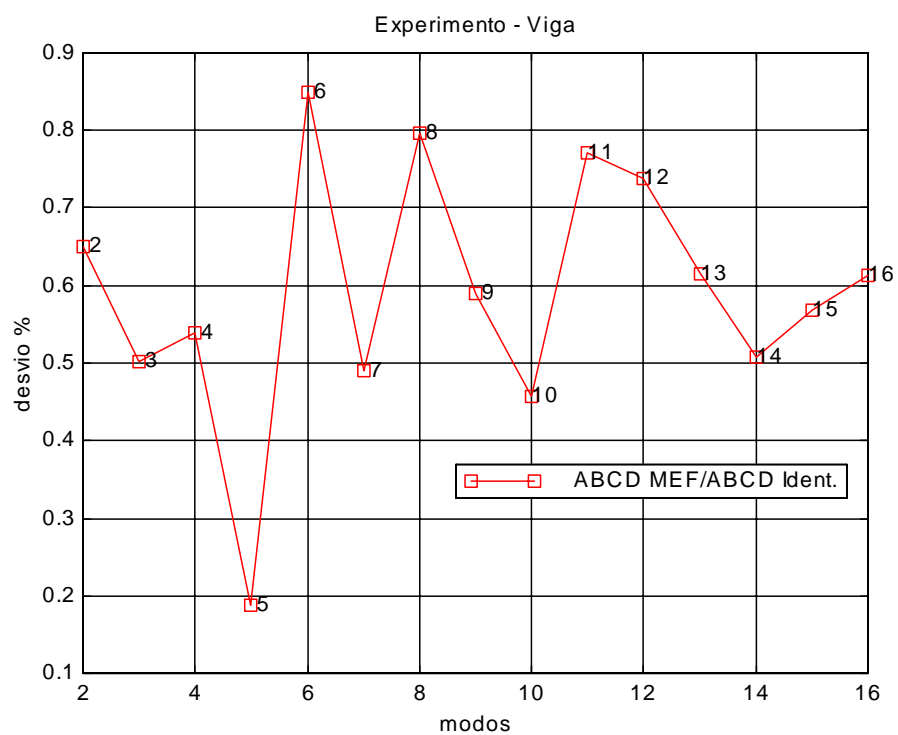
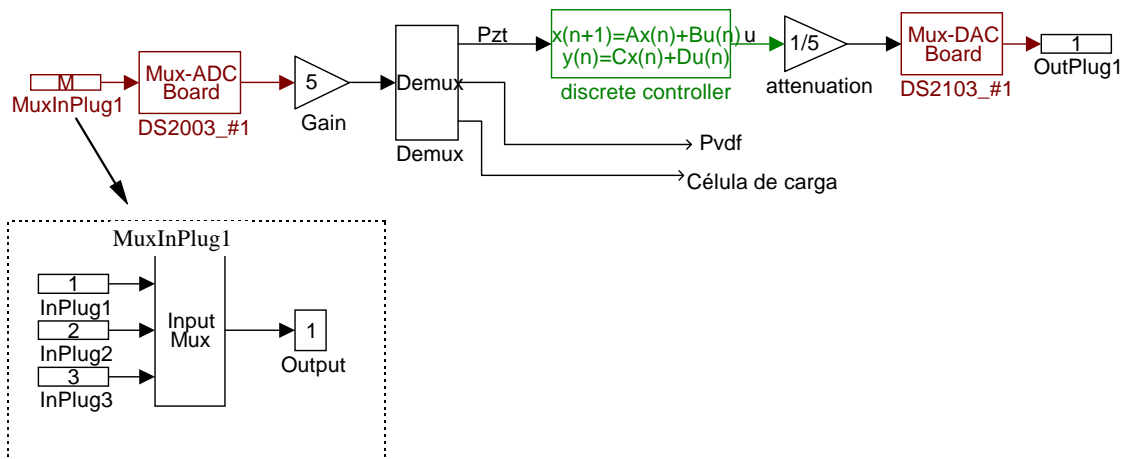


Figura 62 – Desvios Relativos Percentuais entre os Modelos Identificado e MEF

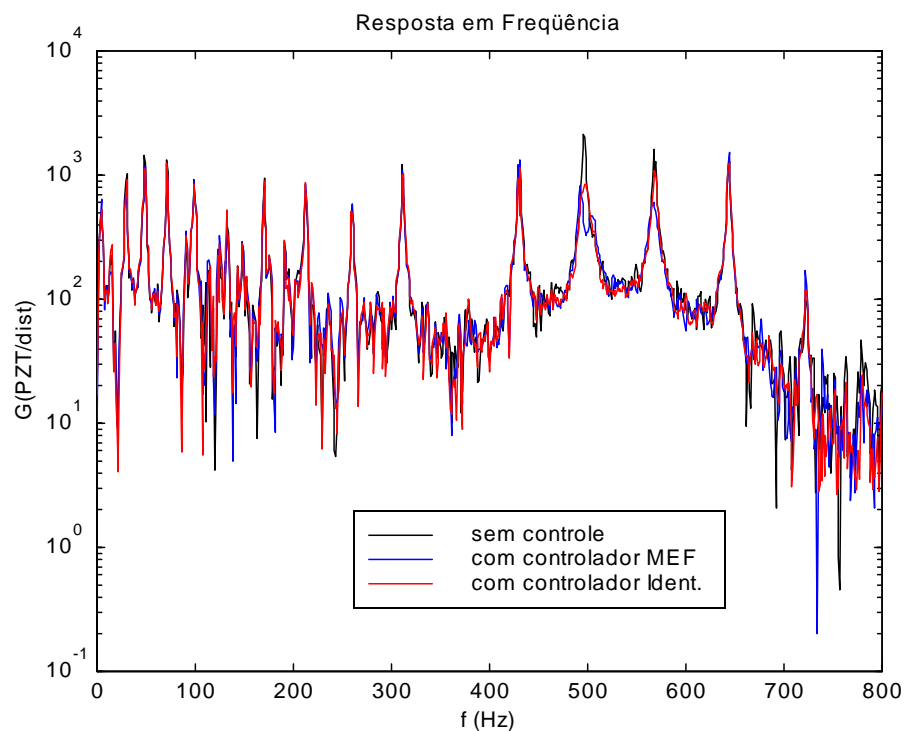
### 5.1.4 Controle Ativo da Estrutura.

O experimento de validação inclui a viga com sua instrumentação e o ambiente dSPACE, onde o controlador é implementado. O controlador empregado é do tipo robusto  $H_\infty$  de banda limitada, com modelo de incerteza não estruturada aditiva para a incerteza residual e com incerteza paramétrica na faixa de frequência controlada (MOREIRA, 1998). Nesse experimento, a viga é excitada por um sinal de distúrbio externo. A resposta do sistema é medida pelo sensor de PZT, e o sinal de distúrbio é medido pelo transdutor de força. O controlador digital, executado nas placa DSP, lê o sinal do sensor de PZT e gera o sinal de controle, que realimenta o sistema. O controlador contínuo é discretizado com um tempo de amostragem de 70  $\mu$ s, e é implementado no ambiente SIMULINK / dSPACE (Figura 63).

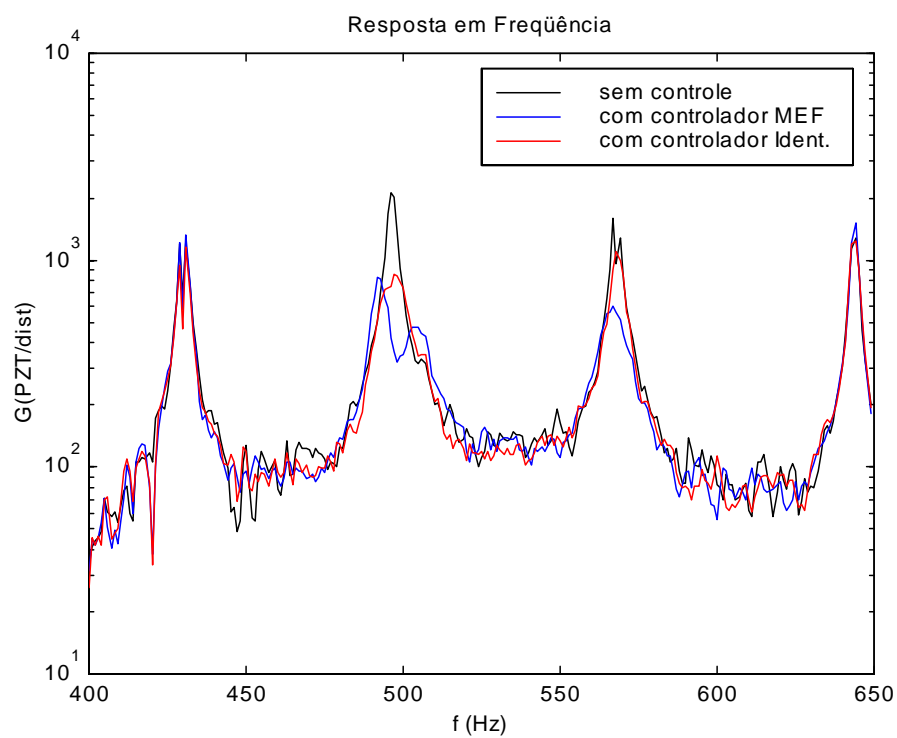


*Figura 63 – Diagrama do Controlador Implementado no Ambiente dSPACE*

Os dados da simulação em tempo real são monitorados e armazenados pelo programa TRACE40W do ambiente dSPACE. As variáveis Inplug1, Inplug2 e Inplug3 são o sinal do PZT, o sinal do PVDF e o sinal do transdutor de força, respectivamente. O sinal de controle é obtido através da variável OutPlug1. Tanto o conversor A/D como o D/A normalizam seus sinais de 1 V digital para 5 V analógicos. Para podermos fazer a comparação entre o desempenho do sistema com e sem controle, realizamos ensaios separadamente para cada condição, sem alterar a configuração do sistema. As respostas em frequência, apresentadas na Figura 64 e Figura 65, foram aquisitadas, usando o HP Analyzer.



*Figura 64 – Comparação entre os Controladores Projetados com os Modelos MEF e Identificado*



*Figura 65 – Comparação entre o Controlador MEF e Identificado – Zoom*

*Tabela 22 – Atenuação dos Modos para os Controladores Identificado e MEF*

Caso	Modo			
	Amplitude		Atenuação em dB	
	496 (Hz)	573 (Hz)	496 (Hz)	573 (Hz)
sem controle	2130,6	1606,4	0,00	0,00
controlador identificado	854,4	1091,3	7,92	3,35
controlador MEF	827,1	594,9	8,23	8,63

Os resultados apresentados pela Tabela 22 atestam que a viga teve a sua resposta minimizada pelos dois controladores, com um melhor desempenho para controlador sintetizado com o modelo de elementos finitos. Esse fato atesta a validade do modelo empregado e indica a possibilidade do emprego, no projeto do controlador, do modelo teórico



## 5.2 PLACA TOTALMENTE LIVRE

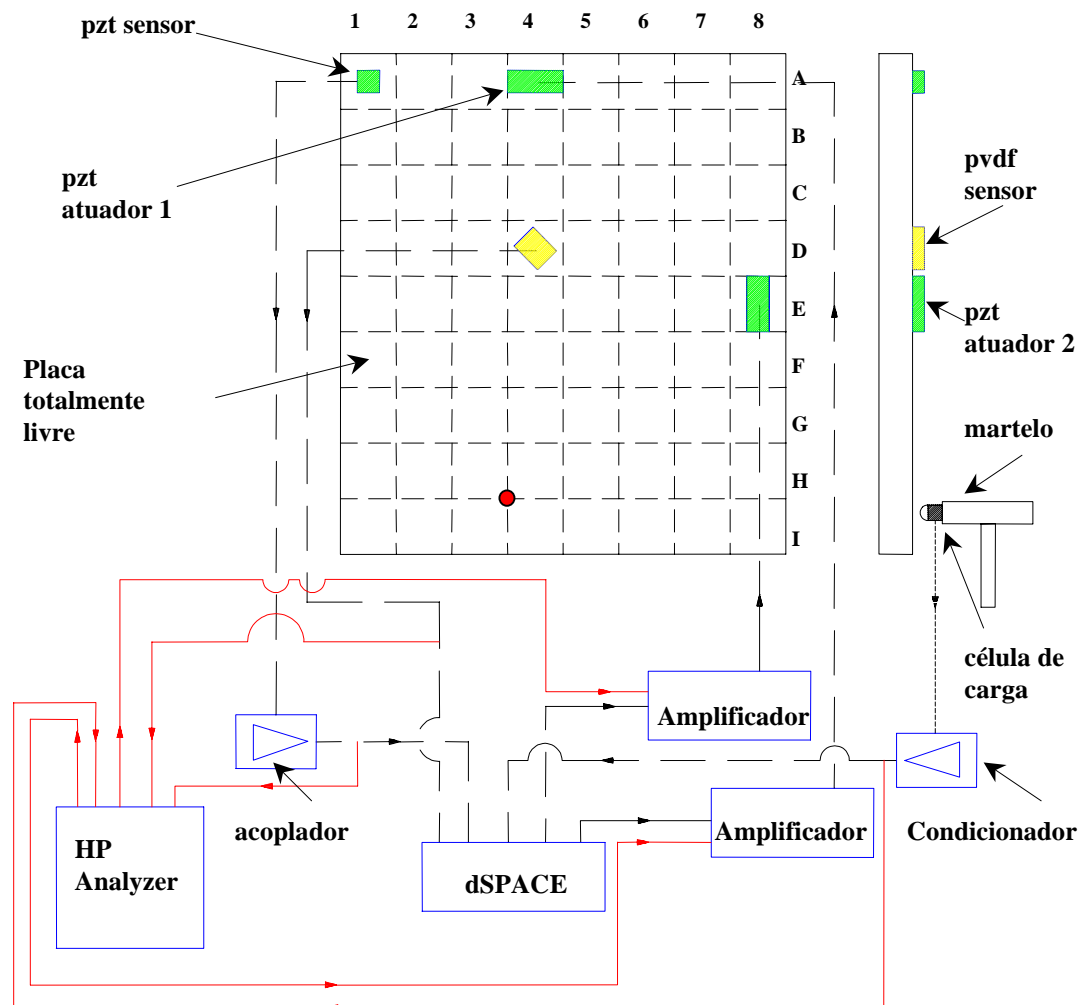
Seguindo a mesma metodologia apresentada no ensaio da viga, o ensaio da placa foi dividido em três fases: preparação e montagem da instrumentação, identificação da dinâmica e controle ativo da estrutura.

### 5.2.1 Descrição do Experimento

A estrutura a ser ensaiada é uma placa de alumínio, suspensa de modo que simule a condição totalmente livre, representada esquematicamente na Figura 66. Esta placa é instrumentada com dois atuadores, um sensor piezocerâmico (PZT) e um sensor de filme plástico piezelétrico (PVDF). O sinal de distúrbio é gerado na forma de uma excitação impulsiva, via martelo instrumentado com um transdutor de força.

Os atuadores são alimentados por dois amplificadores de potência; já o sinal do sensor de PZT passa por um acoplador de impedância. Os sinais dos sensores, atuadores e transdutor de força são carreados para o sistema de aquisição de dados HP35650, onde são tratados pelo software HP3566A. A lei de controle é executada pelo sistema dSPACE. Como apresentado pela Figura 66, as linhas contínuas apresentam as ligações utilizadas no ensaio de identificação da dinâmica da placa, enquanto as linhas tracejadas indicam as ligações utilizadas no ensaio de controle ativo da estrutura.

Para facilitar o posicionamento dos sensores e atuadores, a placa foi dividida em elementos com dimensões 50 por 50 mm, identificadas por letras na posição vertical e números na posição horizontal.



*Figura 66 – Esquema da Montagem utilizada nos Ensaios*

*Tabela 23 – Tamanho e Posicionamento dos Elementos na Placa*

Tamanho e Posicionamento dos Elementos na Placa		
Descrição	Tamanho (mm)	Posição (coord.)
Sensor de PZT	20 x 20 x 0,254	A1
Sensor de PVDF	12 x 30 x 0,040	D4
Atuador 1 de PZT	50 x 20 x 0,254	A4
Atuador 2 de PZT	50 x 20 x 0,254	E8
Martelo	----	H3 $\cap$ I4

Esse ensaio foi concebido de modo que valide, também, os trabalhos de posicionamento de sensores e atuadores *COSTA E SILVA (1998)* e controle ativo de estruturas, usando controlador robusto de banda limitada *MOREIRA (1998)*.

Após a modelagem da estrutura, com o programa de elementos finitos, e a realização de um pré-teste, para determinarmos os modos de vibrar e frequências naturais da placa, chegamos à escolha das seguintes frequências a serem controladas: 144 e 156 Hz. Baseado no método de posicionamento de sensores e atuadores, proposto por *COSTA E SILVA (1998)*, determinamos a posição destes na estrutura.

### 5.2.2 Ensaio de Identificação

O ensaio de identificação segue o mesmo procedimento apresentado no ensaio da viga. O ensaio é dividido em três etapas, sendo que, em cada uma delas, obtemos os sinais dos sensores de PZT e PVDF, a saber: excitação com o martelo (distúrbio); excitação com o PZT atuador 1; excitação com PZT atuador 2. Assim, obtemos as funções de reposta em frequência e respostas impulsivas, relacionadas aos sinais de entrada e saída. Os dados são convertidos em arquivos *.mat* do MATLAB®. Usando o programa de identificação, desenvolvido por *MORREIRA & ARRUDA (1997)*, obtemos o modelo de estado identificado da placa.

A Tabela 24 apresenta a nomenclatura, utilizada para identificar os resultados da identificação.

*Tabela 24 – Nomenclatura dos Gráficos de Identificação*

Nomenclatura dos Gráficos		
Gij →	i=1 → PZT sensor	j=1 → martelo distúrb.
	i=2 → PVDF sensor	j=2 → PZT atuador 1
		j=3 → PZT atuador 2

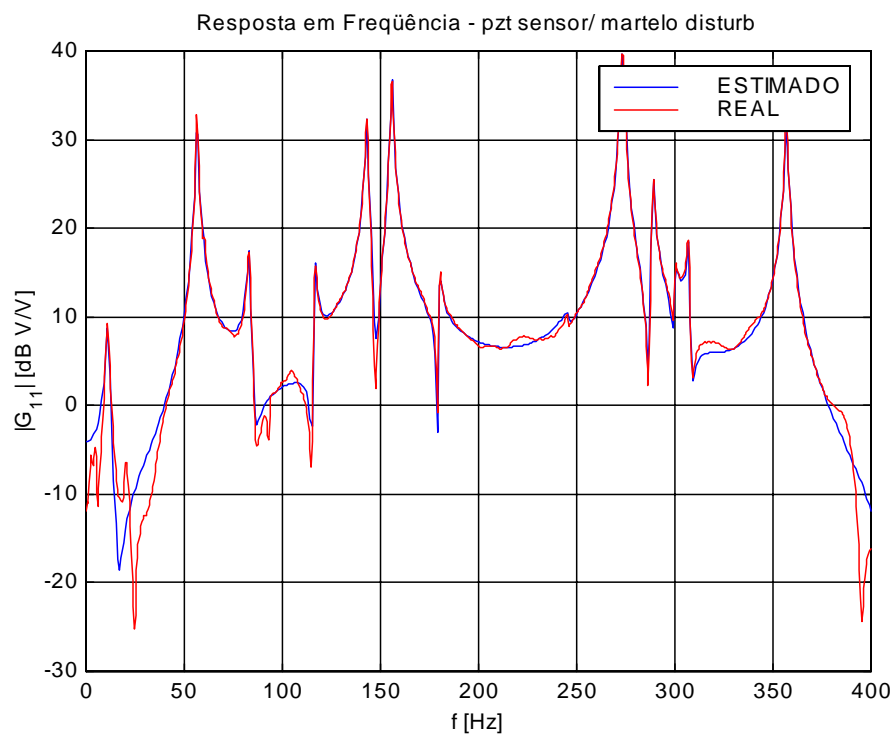


Figura 67 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{11}$

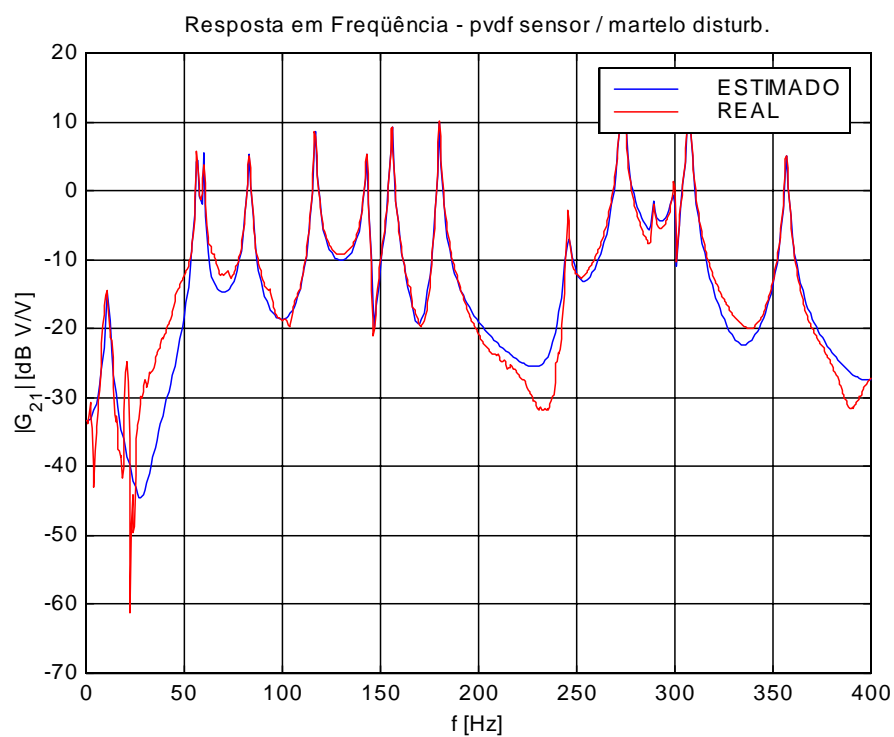


Figura 68 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{21}$

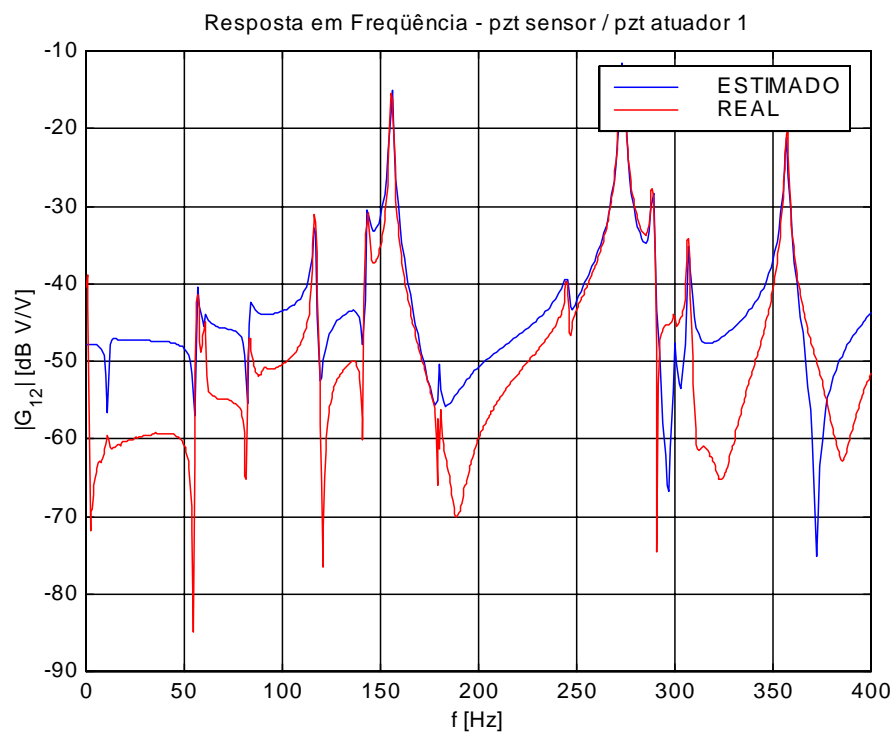


Figura 69 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{12}$

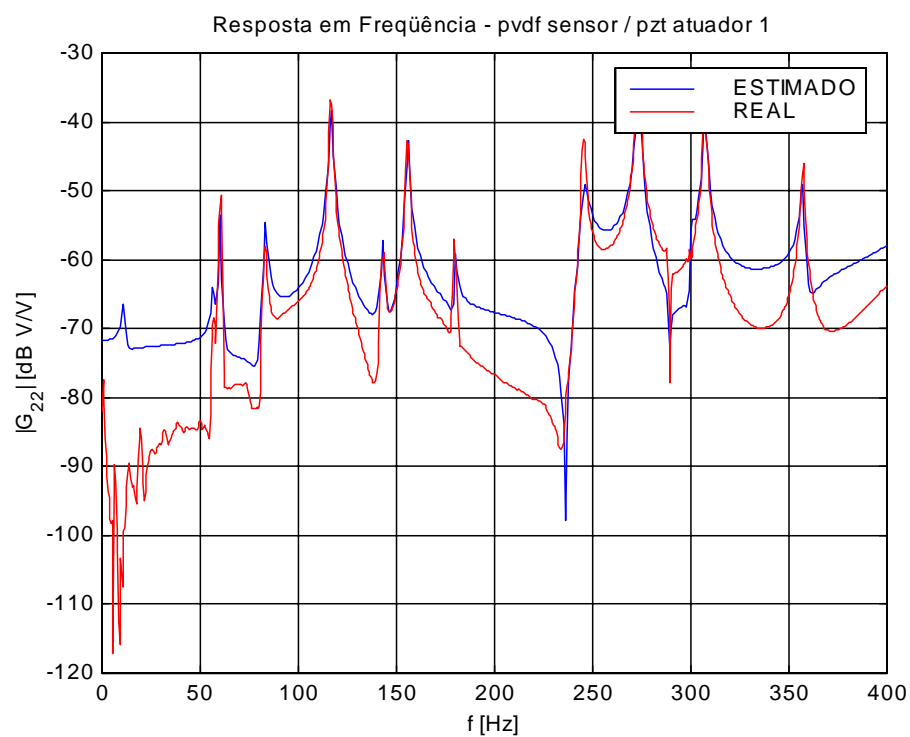


Figura 70 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{22}$

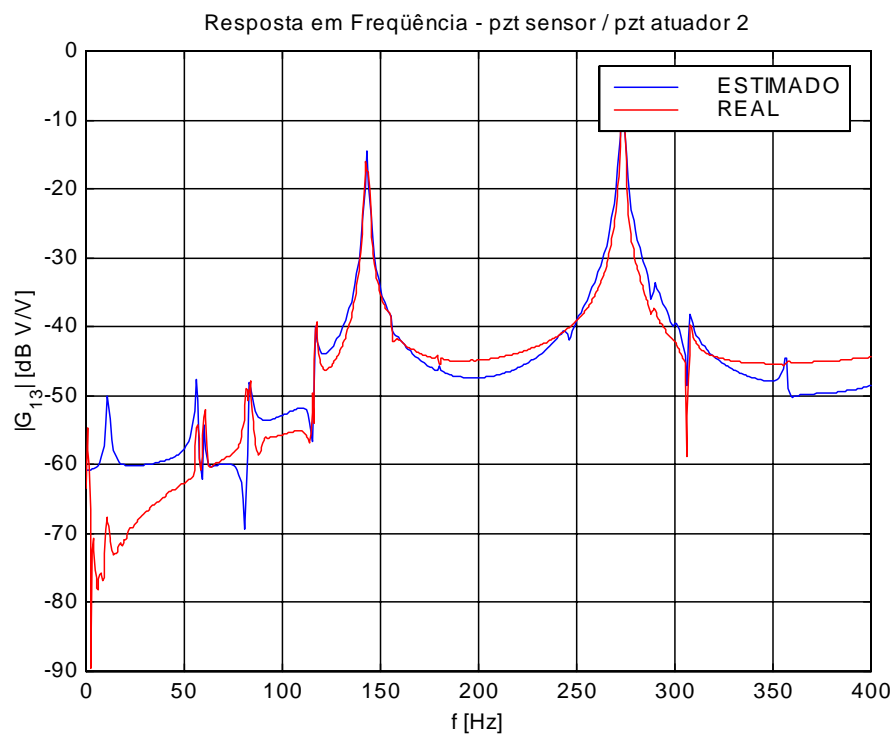


Figura 71 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{13}$

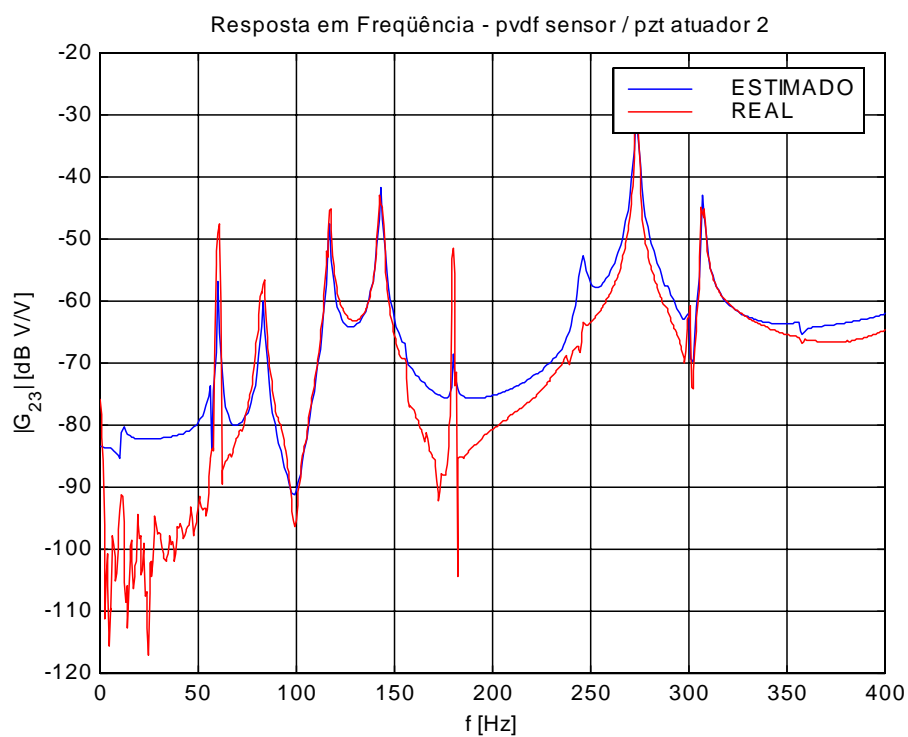


Figura 72 – Comparação entre o Modelo Estimado e o Sistema Real –  $G_{23}$

### 5.2.3 Modelo via M.E.F.

O modelo de placa via elementos finitos tem malha de 32 x 36 elementos de placa de Kirchhoff, 1221 nós e 3663 gdl. Esse foi ajustado usando o Método de Ajuste de Modelos das Variáveis Instrumentais (*FRISWELL & MOTTERSHEAD, 1995*). O modelo com truncamento modal tem ordem 38. Os gráficos da Figura 73 à Figura 78 apresentam as respostas em frequência desse modelo e as obtidas experimentalmente.

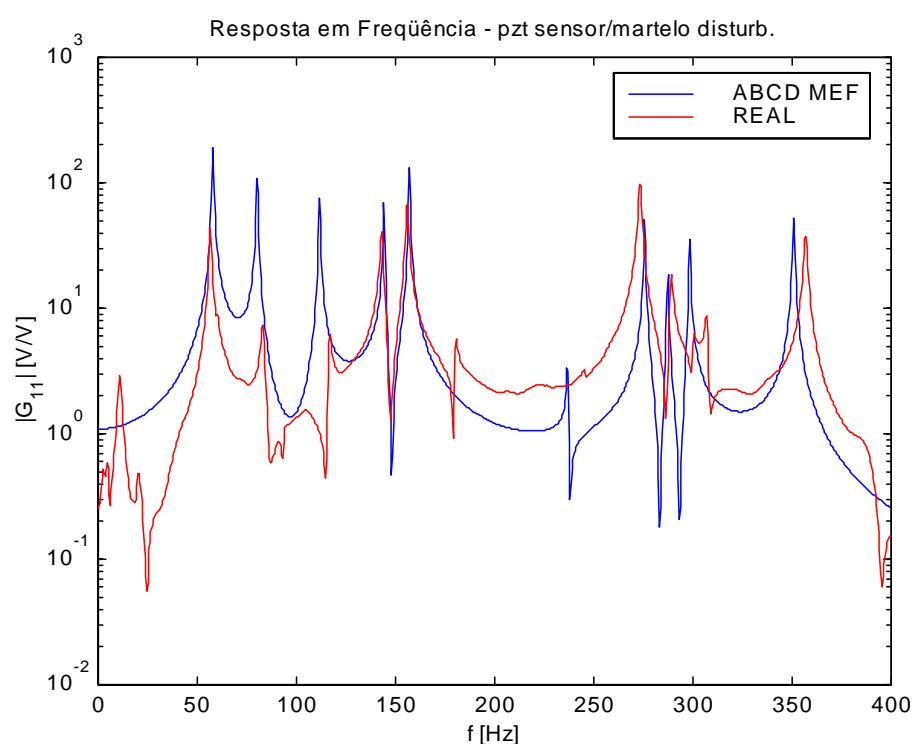


Figura 73 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real –  $G_{11}$

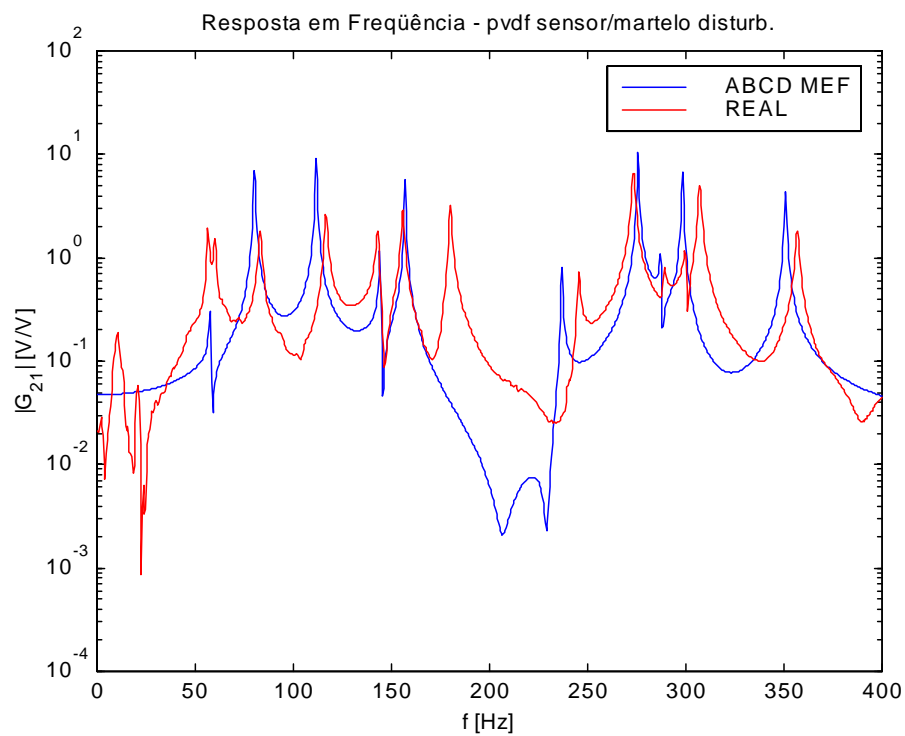


Figura 74 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real –  $G_{21}$

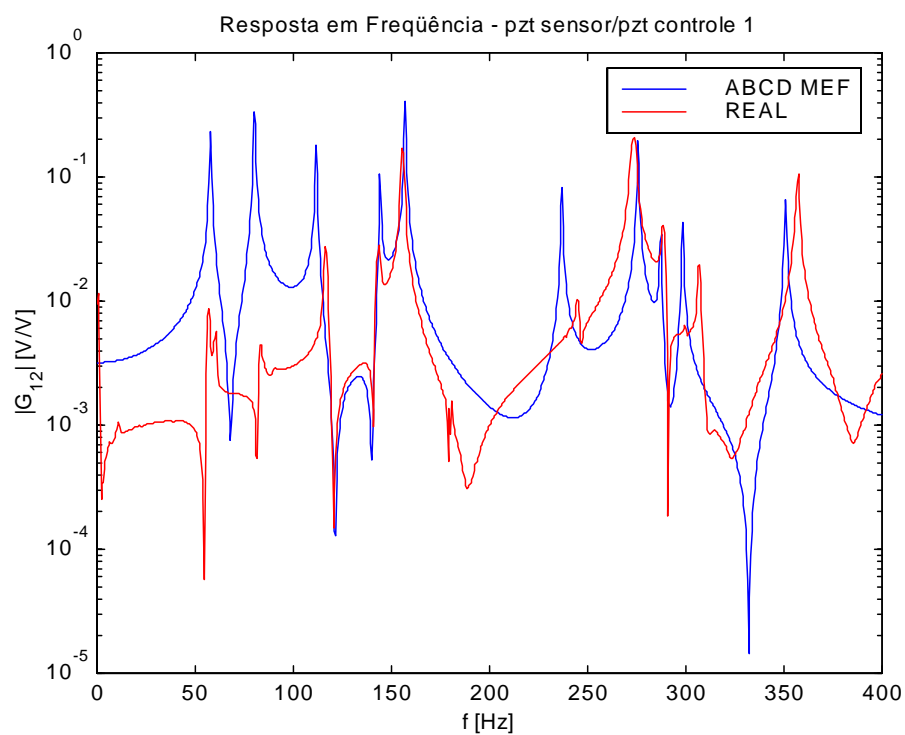


Figura 75 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real –  $G_{12}$



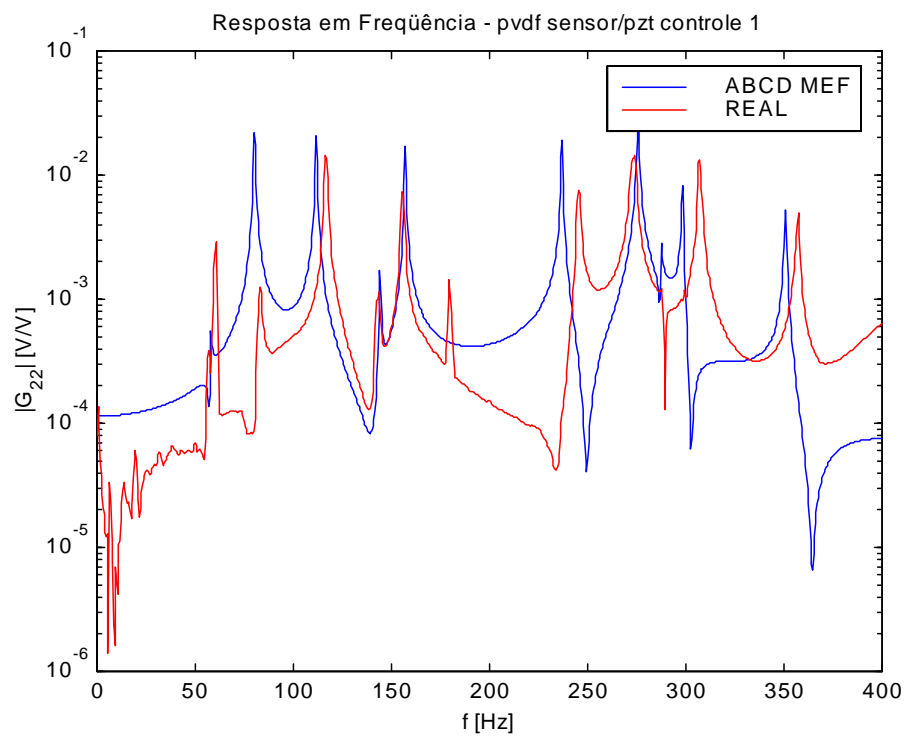


Figura 76 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real –  $G_{22}$

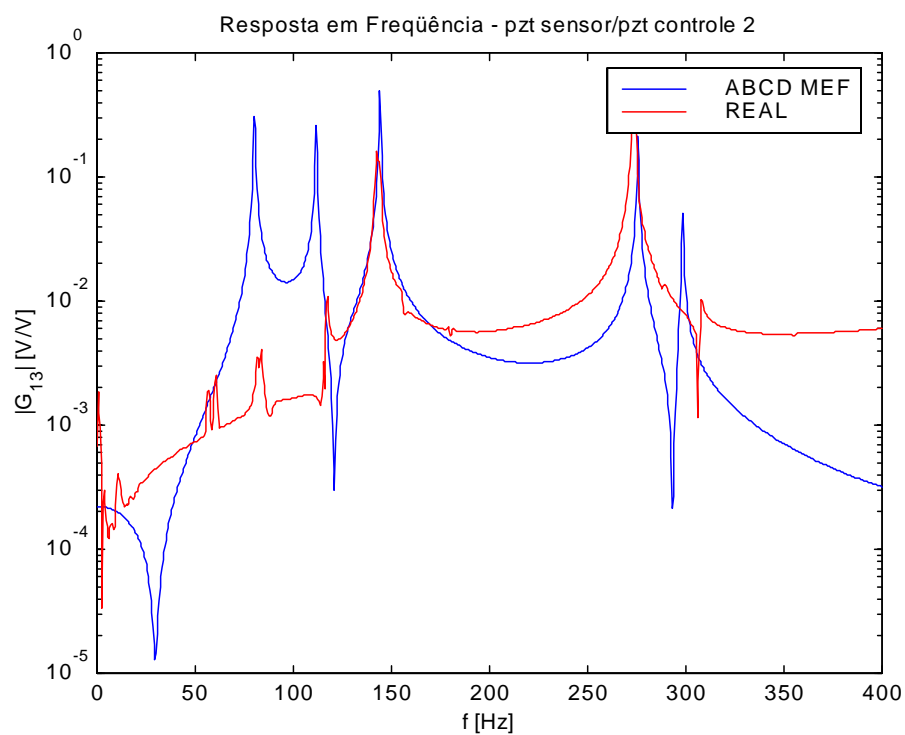


Figura 77 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real –  $G_{13}$

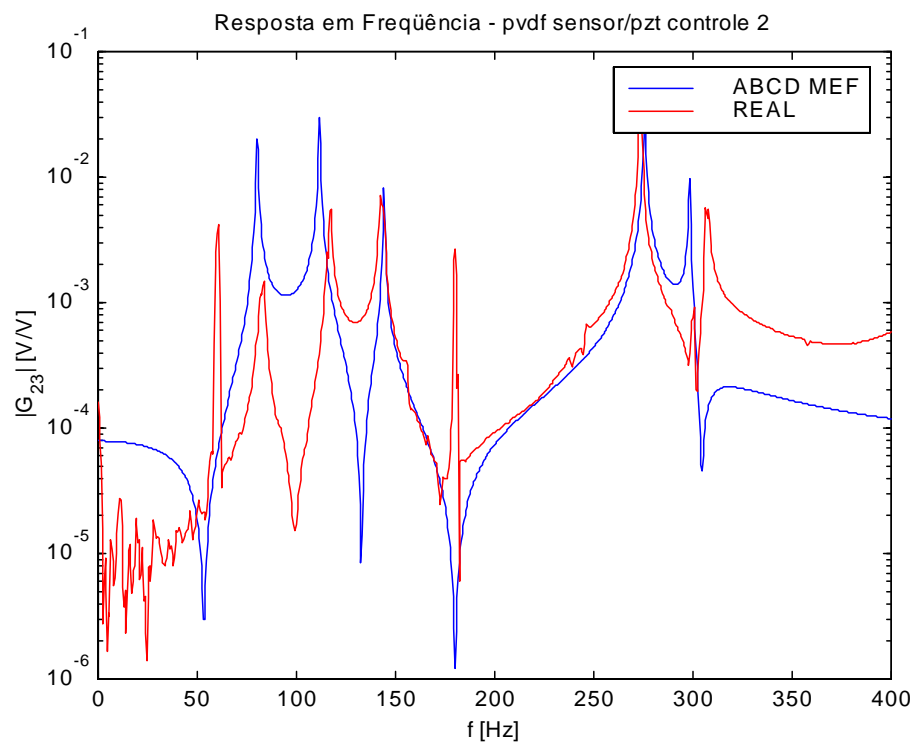


Figura 78 – Comparação entre o Modelo ABCD MEF e o Sistema Real –  $G_{23}$

Tabela 25 – Comparação entre os Modelos Identificado e M.E.F.

Modos	Frequência Naturais (Hz)		Desvio %
	ABCD Ident	ABCD MEF	(MEF/Ident-1)*100
1	56.4700	57.8335	2.4146
2	82.9960	80.1795	-3.3935
3	116.6736	111.6122	-4.3380
4	143.0254	144.0475	0.7146
5	155.7704	157.0133	0.7979
6	245.5934	236.8525	-3.5591
7	278.9307	275.6120	-1.1898
8	288.9000	287.3485	-0.5370
9	300.0256	298.4159	-0.5365
10	356.8460	350.7806	-1.6997

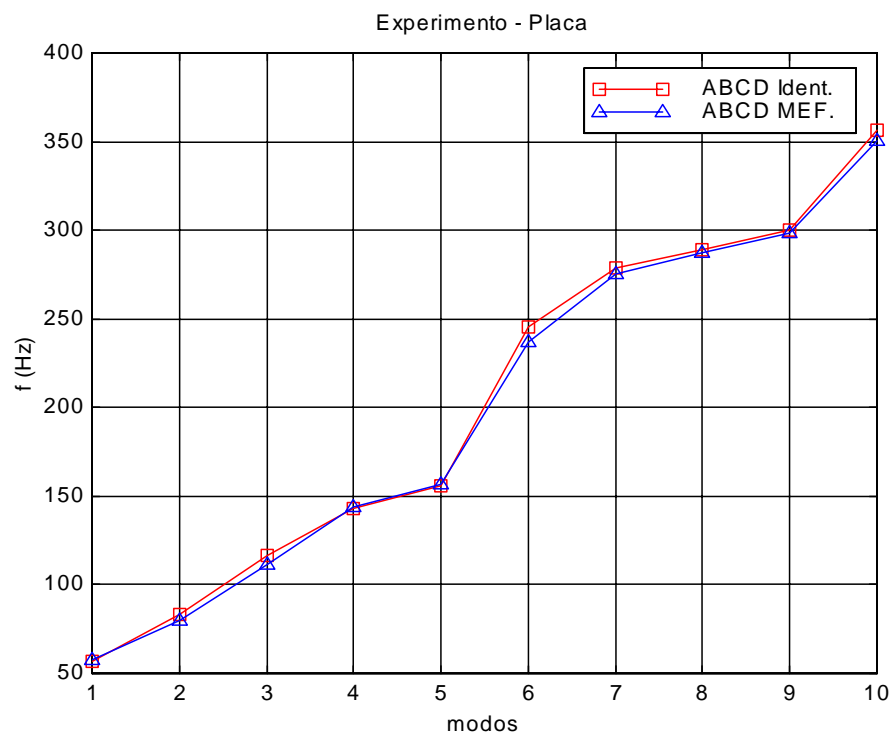


Figura 79 – Frequências Naturais dos Modelos Identificado e M.E.F.

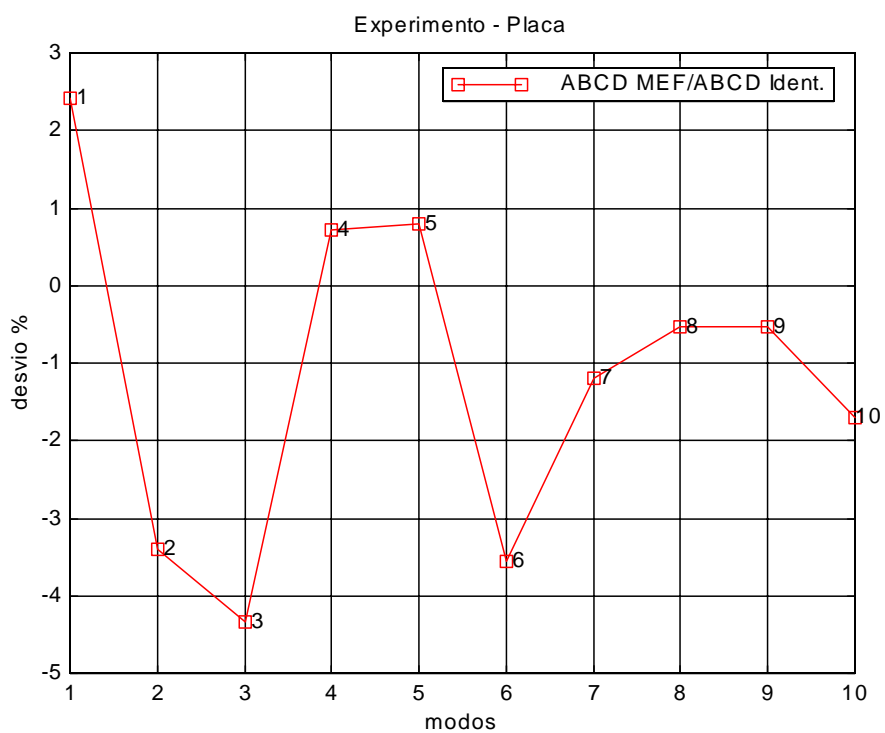


Figura 80 – Desvios Relativos Percentuais entre o Modelo Identificado e MEF

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

#### 6.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Foi apresentada uma metodologia, pela qual a interação entre a estrutura e o elemento piezelétrico é modelada. Com esse modelo, obtivemos as equações de movimento de placa, Kirchhoff e Mindlin – Reissner, e de viga, Euler–Bernoulli e Timoshenko, a partir das equações de casca, com base nos postulados de Love, na escolha apropriada dos raios de curvatura e nos parâmetros de Lamé.

Foram considerados, nesses modelos, os efeitos da incorporação do elemento piezelétrico na estrutura, os quais divididos em duas categorias, chamados de interno (material) e externo (força e momentos). O primeiro altera as propriedades do material da estrutura, como massa, rigidez e amortecimento, devido à presença do elemento piezelétrico, e aparece mesmo quando não existe um potencial elétrico aplicado ao elemento piezelétrico, e o segundo, é a deformação induzida, obtida através da ativação do elemento piezelétrico com um potencial elétrico, aparecendo nas equações de movimento como carga externa.

Esses modelos propiciaram não só a compreensão do comportamento da interação entre a estrutura e o elemento piezelétrico, como também apresentaram as considerações necessárias para se obterem modelos de viga e placa através das equações de casca.

Trabalhando com o método dos elementos finitos, aplicado ao princípio variacional para meios piezelétricos, implementamos vários modelos numéricos de estruturas, com elementos piezelétricos incorporados. Esses modelos têm, como atrativo, a possibilidade de serem aplicados em estruturas complexas, em que a solução por meio de modelos analíticos se torna, em muitos casos, proibitiva, e, em outros, impossível.

Uma contribuição deste trabalho foi o desenvolvimento de um programa, baseado no método dos elementos finitos, aplicado a estruturas com elementos piezelétricos incorporados. Nele existem vários modelos disponíveis, como: de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, de placa de Kirchhoff e Mindlin–Reissner e o 3D sólido.

O programa permite não só analisar o comportamento estático e dinâmico dessas estruturas, como também se constitui em ferramenta, na análise e implementação do controle ativo das mesmas.

Em nosso estudo, a espessura da camada do adesivo, não foi considerada nos modelos desenvolvidos, isto é, o elemento piezelétrico está perfeitamente fixo na estrutura. Dependendo das relações entre a espessura da estrutura do elemento piezelétrico e da camada de adesivo, essa consideração levaria à redução significativa, no momento induzido (*CRAWLEY & DE LUIZ, 1987*). Conseqüentemente, em situações em que essa espessura é considerável, isto é, onde a relação entre a espessura da camada de adesivo e da estrutura é da ordem de 0,25, a influência do adesivo sobre o momento induzido deve ser considerada (*KIM & JONES, 1991*).

O elemento 3D foi empregado, tanto na modelagem de estruturas do tipo viga, como do tipo placa. Houve concordância entre os resultados obtidos, analítica e numericamente, na análise dinâmica, com desvios de até 4,3 % para a 8ª frequência de viga, conforme **Tabela 9**, e até 2,5 %

para a 7ª frequência de placa, conforme Tabela 16. Esse elemento obteve resultados mais precisos, quando aplicado a estruturas do tipo placa, conforme, Tabela 16.

Como era esperado as estruturas, modeladas com o elemento 3D, apresentaram grande número de graus de liberdade, quando comparadas com os correspondentes modelos, empregando elementos de viga e placa. Consequentemente, na determinação dos resultados, necessitam de um grande esforço computacional, sem, no entanto, aumentar significativamente a qualidade das respostas. Por exemplo, para uma viga livre – livre com 798 mm de comprimento, 19,3 mm de largura e 3,4 mm de espessura, o modelo da estrutura com 50 elementos do tipo viga, apresentou 102 graus de liberdade. Com o elemento 3D, o modelo com o mesmo número de elementos apresentou 612 graus de liberdade. O número de flops necessários na análise dinâmica, correspondente à obtenção dos 102 primeiras frequências naturais, foi de 21,91 Mflop, para o elemento de viga e 20.125,40 Mflop para o elemento 3D, conforme valores mostrados na **Tabela 10** e

**Tabela 13.** O mesmo fato ocorreu, quando comparamos o elemento 3D com os elementos de placa. Os resultados comparativos do número de operações de ponto flutuante são apresentados na **Tabela 17**.

O mesmo fenômeno ocorreu entre os modelos de placa de Kirchhoff e Mindlin – Reissner, conforme a **Figura 48**. Segundo *IDE (1995)*, uma placa é considerada fina, quando a relação entre o seu menor comprimento e a sua espessura é menor do que 20. A placa ensaiada possui uma relação igual a 121, claramente uma placa fina. Logo, o modelo de Kirchhoff aproxima-se melhor do comportamento da estrutura ensaiada. Outro fato é que o modelo de Kirchhoff usa o elemento de Melosh, e o modelo de Mindlin–Reissner usa o elemento isoparamétrico bilinear MITC4.

Com base nos resultados, apresentados nos capítulos 4 e 5, os modelos, desenvolvidos para estruturas com e sem elementos piezelétricos incorporados, foram validados e estão em conformidade com os resultados experimentais e analíticos, encontrados na literatura.

Os ensaios foram conduzidos de modo a validar os modelos numéricos desenvolvidos, e implementar o controle ativo da estrutura tipo viga. Com base nos valores apresentados na **Figura 53** à **Figura 62**, e na **Tabela 21**, observamos que o modelo numérico empregado apresentou concordância com os resultados experimentais.

Em geral, os modelos, obtidos via elementos finitos, apresentaram resultados compatíveis com os modelos identificados, principalmente nas frequências de controle. Analisando a **Tabela 25** e a **Figura 80**, observamos que houve uma excelente concordância entre as frequências naturais dos modelos, identificado e MEF.

O controle ativo da viga foi implementado, ora usando o controlador projetado com a dinâmica identificada, ora projetado com o modelo de elementos finitos. Observamos, pela **Figura 64** e **Figura 65**, que a estrutura teve a sua resposta minimizada pelos dois controladores propostos. Entretanto, o desempenho do controlador MEF foi superior. Esse fato, que precisa, ainda, ser melhor investigado, indica que o emprego, no projeto do controlador, do modelo teórico, pode ser benéfico, visto que este não apresenta ruídos externos, como os verificados no modelo identificado. Esses resultados comprovam a validade do modelo numérico empregado e a efetividade da técnica de controle.

Como conclusão final, podemos afirmar que foi apresentada uma metodologia para a modelagem analítica e numérica da interação entre a estrutura e o elemento piezelétrico; um programa, usando a técnica dos elementos finitos, foi desenvolvido e validado, através de várias comparações entre a literatura e os resultados experimentais; foi implementado o controle ativo de uma estrutura, verificando a eficácia do uso de elementos piezelétricos como componentes de estrutura inteligente; foi realizada a comparação entre dois projetos de controladores, observando-se que o controlador, usado no modelo numérico, apresentou bons resultados e pode constituir-se uma ferramenta útil, no projeto e análise de estruturas inteligentes.

Foram, portanto, desenvolvidas ferramentas que certamente serão úteis no projeto e análise de estruturas inteligentes.

## 6.2 PROPOSTAS

Como propostas para futuros trabalhos, podemos citar:

- implementação da modelagem de estruturas do tipo casca, com elementos piezelétricos incorporados, no programa SMART MEF;
- implementação, no programa SMART MEF, da modelagem de estruturas do tipo viga, placa e casca para materiais compósitos, onde o elemento piezelétrico ficaria imerso na estrutura;
- a inclusão, nos modelos do programa SMART MEF, dos efeitos térmicos, em que, dependendo do ambiente de trabalho da estrutura, a variação de temperatura pode ser fator importante no comportamento da estrutura;
- a modelagem de estruturas inteligentes geometricamente não lineares. Em situações em que a estrutura trabalhe sob o efeito de grandes carregamentos, a dinâmica não linear pode conduzir a avaliações diferentes das previstas pela teoria linear;
- a apresentação de um estudo mais detalhado, analisando a viabilidade de se empregar o controlador projetado via modelo de elementos finitos como alternativa ao projeto do controlador com a dinâmica identificada.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGRAWAL, B. N., BANG, H. (1993)**, “Active Vibration Control of Flexible Space Structures by Using Piezoelectric Sensors and Actuators”, *Vibration and Control of Mechanical Systems*, ASME, v DE-61, pp 169-179.
- ALDRAIHEM, O. J., WETHERHOLD, R. C., SINGH, T. (1996)**, “Intelligent Beam Structures: Timoshenko Theory vs. Euler - Bernoulli Theory”, *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*, Dearborn, MI, WPO2, v4, n 15, pp 976-981.
- ALLIK, H., HUGHES, T. J. R. (1970)**, “Finite Element Method for Piezoelectric Vibration”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v 2, pp 151-157.
- ANDERSON, E. H., HAGOOD, N. W. (1994)**, “Simultaneous Piezoelectric Sensing / Actuation: Analysis and Application to Controlled Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, v 174, n 5, pp 617-639.
- ANDERSSON, A. J., CRAWLEY, E. F. (1996)**, “Transfer Function Shaping Using Distributed Actuator-Sensor Pairs”, *Adaptive Structures Forum*, AIAA/ASME/AHS, CP-963, AIAA-96-1267-CP, pp 12-22.
- ARRUDA, J. R. F., MOREIRA, F. J., PEREIRA, A. K. A. (1997)**, “Comparing Feedback Vibration Control and Feedforward Power-Flow Based Control Strategies Using a Simple Plate Example”, *Proceeding of the 1997 International Symposium on Active Control of Sound and Vibration*, ACTIVE97, Budapest, Hungary, August 21-23, pp. 75-92.

- BAILEY, T., HUBBARD JR. J. E. (1985)**, “Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v 8, n 5, pp 605-611.
- BANKS, H. T., ITO, K., KING, B. B. (1993)**, “Theoretical and Computational Aspects of Feedback in Structural Systems with Piezoceramic Controllers”, *Center for Research in Scientific Computation*, North Carolina State University, NC, CRSC TR93-2, pp 1-23.
- BANKS, H. T., ITO, K., WANG, Y. (1992)**, “Computational Methods for Identification and Feedback Control in Structures with Piezoceramic Actuators and Sensors”, *Center for Research in Scientific Computation*, North Carolina State University, NC, CRSC TR92-2, pp 1-9.
- BANKS, H. T., SMITH, R. C., WANG, Y. (1992)**, “Modeling Aspects for Piezoelectric Patch Activation of Shells, Plates and Beams”, *Center for Research in Scientific Computation*, North Carolina State University, NC, CRSC TR92-12, pp. 1-63.
- BANKS, H. T., SILCOX, R. J., SMITH, R. C. (1994)**, “Modeling and Control of Acoustic Structure Interaction Problems Via Piezoceramic Actuators: 2-D Numerical Examples”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 116, pp 387-396.
- BANKS, H. T., SMITH, R. C., WANG, Y. (1995)**, “The Modeling of Piezoceramic Patch Interactions with Shells, Plates, and Beams”, *Quarterly of Applied Mathematics*, v LIII, n 2, pp 353-381.
- BANKS, H. T., WANG, Y., INMAN, D. J., SLATER, J. C. (1992)**, “Variable Coefficient Distributed Parameter System Models for Structures with Piezoceramic Actuators and Sensors”, *Center for Research in Scientific Computation*, North Carolina State University, NC, CRSC TR92-9, pp. 1-13.
- BANKS, H. T., ZHANG, Y. (1996)**, “Computational Methods for a Curved Beam with Piezoceramic Patches”, *Center for Research in Scientific Computation*, North Carolina State University, NC, CRSC TR96-22, pp 1-31.

- BARRETT, R. (1994)**, “Active Plate and Missile Wing Development Using Directionally Attached Piezoelectric Elements”, *AIAA Journal*, v 32, n 3, pp 601-609.
- BATHE, K.-J. (1996)**, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1051p.
- BEAM, W. R. (1965)**, *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, Physical and Quantum Electronics Series, 633p.
- BIRMAN, V., ADALI, S. (1993)**, “Active Optimum Control of Orthotropic Plates Using Piezoelectric Stiffeners”, *Intelligent Structures, Materials and Vibrations*, v 58, pp 43-49.
- BISHOP, R. E. D., GLADWELL, G. M. L., MICHAELSON, S. (1979)**, *The Matrix Analysis of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge, 2a ed., 404p.
- BLEVINS, R. D. (1979)**, *Formula for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 15 ed., 492p.
- BORESI, A. P., LYNN, P. P. (1974)**, *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice-Hall, Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, 10a ed., 475p.
- BRENNAN, M. C., MCGOWAN, A.-M. R. (1997)**, “Piezoelectric Power Requirements for Active Vibration Control”, *NASA Langley Research Center*, Hampton, VA, 10p.
- BRISAUD, M. (1991)**, “Characterization of Piezoceramics”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v 38, n 6, pp 603-617.
- BURKE, S. E., HUBBARD JR., J. E. (1991)**, “Distributed Transducer Vibration Control of Thin Plates”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v 90, n 2, pp 937-944.
- CADY, W. G. (1946)**, *PIEZOELECTRICITY - An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, McGraw-Hill, 806p.
- CAWLEY, P., GUO, N., HITCHING, D. (1992)**, “The Finite Element Analysis of the Vibration Characteristics of Piezoelectric Discs”, *Journal of Sound and Vibration*, v 159, n 1, pp 115-138.

- CHALLANDE, P. (1990)**, “Optimizing Ultrasonic Transducers Based on Piezoelectric Composites Using a Finite Element Method”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v 37, n 2, pp 135-140.
- CHANDRASHEKHARA, K., VARADARAJAN, S., AGARWAL, S. (1996)**, “Adaptive Shape Control of Laminated Composite Plates Using Piezoelectric Materials”, *Adaptive Structures Forum*, AIAA/ASME/AHS, CP-963, AIAA-96-1288-CP, pp 197-206.
- CHANG-QING, C., XIAO-MING, W., YA-PENG, S. (1996)**, “Finite Element Approach of Vibration Control Using Self-Sensing Piezoelectric Actuators”, *An International Journal Computers & Structures*, v 60, n. 3, pp 505-512.
- CHAUDHRY, Z., ROGERS, C. A. (1993)**, “Enhancing Induced Strain Actuator Authority Through Discrete Attachment to Structural Elements”, *AIAA Journal*, v 31, n 7, pp 1287-1292.
- CHEN, C.-T., (1984)**, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, 662p.
- CLARK, R. L., FLEMMING, M. R., FULLER, C. R. (1993)**, “Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates: A Comparison Between Theory and Experiment”, *Journal of Vibration and Acoustic*, v 115, n 3, pp 332-339.
- CLARK, R. L., SAUNDERS, W. R., GIBBS, G. P. (1998)**, *Adaptive Structures Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York, 467p.
- COLE, D. G., SAUNDERS, W. R., ROBERTSHAW, H. H. (1995)**, “Modal Parameter Estimation for Piezostructures”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 117, pp 431-438.
- COLLINS, S. A., MILLER, D. W., VON FLOTOW, A. H. (1994)**, “Distributed Sensors as Spatial Filters in Active Structural Control”, *Journal of Sound and Vibration*, v 173, n 4, pp 471-501.
- COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. (1989)**, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 648p.

- COSTA e SILVA, V. M. da, ARRUDA, J. R. F. (1997)**, “Otimização do Posicionamento de Atuadores Piezocerâmicos em Estruturas Flexíveis usando um Algoritmo Genético”, *XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, COBEM 97, Bauru, SP, COB. 489, 8p.
- COSTA e SILVA, V. M. da, ARRUDA, J. R. F. (1998)**, *Otimização do Posicionamento de Sensores e Atuadores em Estruturas Flexíveis*, Relatório FAPESP, Proc. no. 95/0061-0, Laboratório de Vibroacústica, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 126p.
- COULOMB, J. L., MEUNIER, G. (1984)**, “Finite Element Implementation of Virtual Work Principle for Magnetic or Electric Force and Torque Computation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v MAG-20, n 5, pp 1894-1896.
- CRAIG JR., R. R. (1981)**, *Structural Dynamics – An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, New York, 542p.
- CRAWLEY, E. F., ANDERSON, E. H. (1990)**, “Detailed Models of Piezoceramic Actuation of Beams”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v 1, pp 4-25.
- CRAWLEY, E. F., DE LUIS, J. (1987)**, “Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures”, *AIAA Journal*, v 25, n 10, pp 1373-1385.
- DALLY, J. W., RILEY, W. F., McCONNELL, K. G. (1993)**, *Instrumentation for Engineering Measurements*, 2<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 605p.
- DHATT, G., TOUZOT, G., CANTIN, G. (1985)**, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, New York, 508p.
- DIMITRIADIS, E. K., FULLER, C. R., ROGERS, C. A. (1991)**, “Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 113, pp 100-107.
- EDBERG, D. L., BICOS, A. S., FULLER, C. M., TRACY J. J., FECHTER, J. S. (1992)**, “Theoretical and Experimental Studies of Truss Incorporating Active Members”, *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, v 3, pp 333-347.

- EWINS, D. J. (1984)**, *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, New York, 269p.
- FANNIN, C. A. (1997)**, *Design of an Analog Adaptive Piezoelectric Sensoriactuator*, mechanical engineering MSc. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 80p.
- FANSON, J. L, CAUGHEY, T. K. (1990)**, “Positive Position Feedback Control for Large Space Structures”, *AIAA Journal*, v 28, n 4, pp 717-724.
- FARIA, A. R. (1995)**, *Simulação de Viga Flexíveis Contendo Atuadores Piezelétricos*, Dissertação de Mestrado em Engenharia, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 79p.
- FRISWELL, M. I., MOTTERSHEAD, J. E. (1995)**, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, London, 292p.
- GARZERI, F. J. (1991)**, *Elementos Finitos na Análise Dinâmica de Placa de Comportamento Linear*, Escola Politécnica, USP, 138p.
- GAMA, A. L. (1998)**, *Modelagem de Elementos Piezoelétricos para Excitação e Sensoriamento de Sinais Acústicos de Alta Frequência em Vigas Compósitas*, Tese de Doutorado, Depto. de Engenharia Mecânica, PUC-RIO, 124p.
- GAUDILLER, L., DER HAGOPIAN, J. (1996)**, “Active Control of Flexible Structures Using a Minimum Number of Components”, *Journal of Sound and Vibration*, v 193, n3, pp 713-741.
- GHONEIM, H. (1996)**, “Application of the Electromechanical Surface Damping to Vibration Control of a Cantilever Plate”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 118, pp 551-557.
- GIBBS, G. P., FULLER, C. R. (1992)**, “Experiments on Active Control of Vibration Power Flow Using Piezoceramic Actuator/Sensors”, *AIAA Journal*, v 30, n 2, pp 457-463.

- GIURGIUTIU, V., CHAUDHRY, Z., ROGERS, C. A. (1995a)**, “Effective Use of Induced Strain Actuators in Static and Dynamic Applications”, *Proceedings 35th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-95-1095-CP, pp 2813-2823.
- GIURGIUTIU, V., CHAUDHRY, Z., ROGERS, C. A. (1995b)**, “Energy-Based Comparison of Solid-State Actuators”, *Center for Intelligent Material Systems and Structures*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, report n. CIMSS 95 –101, pp 1-13.
- GU, Y., CLARK, R. L., FULLER, C. R., ZANDER, A. C. (1994)**, “Experiments on Active Control of Plate Vibration Using Piezoelectric Actuator and Polyvinylidene Fluoride (PVDF) Modal Sensors”, *Journal of Vibration and Acoustics*, V 116, pp 303-308.
- GUALTIERI, J. G., KOSINSKI, J. A. BALLATO, A. (1994)**, “Piezoelectric Materials for Acoustic Wave Applications”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v 41, n 1, pp 53-59.
- GUY, A. G. (1980)**, *Ciências dos Materiais*, Livros Técnicos e Científicos, 435p.
- GUYAN, R. J. (1965)**, “Reduction of Stiffness and Mass Matrices”, *AIAA Journal*, v 3, n 3, pp 380
- HA, S. K., KEILERS, C., CHANG, F.-K. (1992)**, “Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators”, *AIAA Journal*, v 30, n 3, pp 772-780.
- HAC, A., LIU, L. (1993)**, “Sensor and Actuator Location in Motion Control of Flexible Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, v 167, n 2, pp 239-261.
- HÄGGBLAD, B., ERIKSSON, L. (1993)**, “Model Reduction Methods for Dynamic Analyses of Large Structures”, *An International Journal Computers & Structures*, v 47, n 4/5, pp 735-749.

- HAGOOD, N. W., BENT, A. A. (1993)**, “Development of Piezoelectric Fiber Composites for Structural Actuation”, *Proceedings 34th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-93-1717-CP, pp 3625-3638.
- HAGOOD, N. W., McFARLAND, A. J. (1995)**, “Modeling of Piezoelectric Rotary Ultrasonic Motor”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v 42, n 2, pp 210-224.
- HANAGUD, S., OBAL, M. W., CALISE, A. J. (1992)**, “Optimal Vibration Control by Use of Piezoceramic Sensors and Actuators”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v 15, n 5, pp 1199-1206.
- HOLNICKI-SZULC, J., LÓPEZ-ALMANSA, F., RODELLAR, J. (1993)**, “Optimal Location of Actuators for Active Damping of Vibration”, *AIAA Journal*, v 31, n 7, pp 1274-1279.
- HOM, C. L., SHANKAR, N. (1996)**, “A Finite Element Method for Electrostrictive Ceramic Devices”, *International Journal Solids Structures*, v 33, n 12, pp 1757-1779.
- HSU, H. P. (1972)**, *Análise Vetorial*, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 286p.
- HWANG, W.-S., PARK, H. C., HWANG, W. (1993)**, “Vibration Control of a Laminated Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator: Finite Element Formulation and Modal Analysis”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v 4, pp 317-329.
- HWANG, W.-S., HWANG, W., PARK, H. C. (1994)**, “Vibration Control of Laminated Composite Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator: Active and Passive Control Methods”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v 8, n 5, pp 571-583.
- HWANG, W.-S., PARK, H. C. (1993)**, “Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators”, *AIAA Journal*, v 31, n 5, pp 930-937.
- IDE, P. S. (1995)**, *Análise de Vibrações Livres em Trono de Configurações Deformadas em Placa de Comportamento Geometricamente Não-Linear pelo Método dos Elementos Finitos*, Tese de Doutorado em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, 140p.



- IM, S., ATLURI, S. N. (1989)**, “Effects of a Piezo-Actuator on a Finitely Deformed Beam Subjected to General Loading”, *AIAA Journal*, v 27, n 12, pp 1801-1807.
- INMAN, D., J. (1989)**, *VIBRATION With Control, Measurement, and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 351p.
- INMAN, D. J. (1994)**, *Engineering Vibration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 650p.
- INDRI, M., TORNAMBÈ, A., (1994)**, “Robust Trajectory Tracking for Flexible Piezoelectric Structures”, *IEE Proceedings - Control Theory Applied*, v 141, n 5, pp 289-294.
- JORDAN, R. (1993)**, *Contribuição ao Estudo do Controle Ativo de Vibrações de Estruturas Flexíveis*, Tese de Doutorado em Engenharia, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, J766c, 140p.
- JUNKINS, J. L., KIM, Y. (1993)**, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, AIAA Inc., Washington, DC, 452p.
- KAGAWA, Y., TSUCHIYA, T., KATAOKA, T. (1996)**, “Finite Element Simulation of Dynamic Response of Piezoelectric Actuators”, *Journal of Sound and Vibration*, v 191, n 4, pp 519-538.
- KIM, S. J., JONES, J. D. (1991)**, “Optimal Design of Piezoactuators for Active Noise and Vibration Control”, *AIAA Journal*, v 29, n 12, pp 2047-2053.
- KRAUS, H. (1967)**, *Thin Elastic Shells - An Introduction to the Theoretical Foundations and Analysis of Their Static and Dynamic Behaviour*, John Wiley & Sons, 476p.
- KWON, Y. W., BANG, H. (1997)**, *The Finite Element Method using MATLAB*, CRC press, New York, 524p.
- LAMBERTI, N., PAPPALARDO, M. (1995)**, “A General Approximated Two Dimensional Model for Piezoelectric Array Elements”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v 42, n 2, pp 243-252.

- LAMMERING, R., JIA, J., ROGERS, C. A. (1994)**, “Optimal placement of Piezoelectric Actuators in Adaptive Truss Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, v 171, n 1, pp 67-85.
- LEE, C. K. (1990)**, “Theory of Laminated Piezoelectric Plates for the Design of Distributed Sensors / Actuators. Part I: Governing Equations and Reciprocal Relationships”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v 87, n 3, pp 1144-1158.
- LEE, C.-K., MOON, F. C. (1990)**, “Modal Sensors / Actuators”, *Journal of Applied Mechanics*, v 57, pp 434-441.
- LEE, C.-K., O'SULLIVAN, T. C. (1991)**, “Piezoelectric Strain Rate Gages”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v 90, n 2, pp 945-953.
- LEE, H.-J., SARAVANOS, D. A., (1995)**, “On the Response of Smart Piezoelectric Composite Structures in Thermal Environments”, *Proceedings 35th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-95-1101-CP, pp 2876-2885.
- LEE, H.-J., SARAVANOS, D. A. (1996)**, “Active Compensation of Thermally Induced Bending and Twisting in Piezoceramic Composite Plates”, *Adaptive Structures Forum*, AIAA/ASME/AHS, CP-963, AIAA-96-1277-CP, pp 120-130.
- LEE, J. S., JIANG, L. Z. (1996)**, “Exact Electroelastic Analysis of Piezoelectric Laminae via State Space Approach”, *International Journal Solids Structures*, v 33, n 7, pp 977-990.
- LEFEBVRE, S., GUIGOU, C., FULLER, C. R. (1992)**, “Experiments on Active Isolation Using Distributed PVDF Error Sensors”, *Journal of Sound and Vibration*, v 155, n 1, pp 177-184.
- LEISSA, A. W. (1969)**, *Vibration of Plates*, NASA, Washington, DC, 353p.
- LERCH, R. (1990)**, “Simulation of Piezoelectric Devices by Two and Three Dimensional Finite Elements”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v 37, n 2, pp 233-247.

- LI, Z., BAINUM, P. M. (1994)**, “Vibration Control of Flexible Spacecraft Integrating a Momentum Exchange Controller and a Distributed Piezoelectric Actuator”, *Journal of Sound and Vibration*, v 177, n 4, pp 539-553.
- LIANG, C., SUN, F. P., ROGERS, C. A. (1993)**, “An Impedance Method for Dynamic Analysis of Active Material Systems”, *Proceedings 34th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-93-1713-CP, pp 3587-3599.
- LIMA JR., J. J. de, ARRUDA, J. R. F. (1997)**, “Finite Element Modeling of Piezoceramic Sensors and Actuators”, *Anais do XVIII CILAMCE*, Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Brasília, v 1, ref 198, pp 751-757.
- LIMA JR., J. J. de, ARRUDA, J. R. F. (1998)**, *Modelagem da Interação Atuador Piezelétrico / Estrutura*, Relatório FAPESP, Proc. no. 95/0061-0, Laboratório de Vibroacústica, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 126p.
- LIN, M. W., ROGERS, C. A. (1993)**, “Modeling of the Actuation Mechanism in a Beam Structure with induced Strain Actuators”, *Proceedings 34th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, pp 3608-3617.
- LIU, X., ONODA, J. (1996)**, “Partitioned Model Reduction for Large Space Structural Control Problem”, *AIAA Journal*, v 34, n 10, pp 2149-2153.
- LOVE, A. E. H. (1944)**, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, 643p.
- MAIN, J. A., GARCIA, E. (1997)**, “Piezoelectric Stack Actuators and Control System Design: Strategies and Pitfalls”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v 20, n. 3, pp 479-485.
- MATLAB (1998)**, *Using MATLAB*, The Math Works Inc., Natick, MA, 500p.
- MAYERGOYZ, I. D., CHARL, M. V. K., D'ANGELO, J. (1987)**, “A New Scalar Potential Formulation for Three Dimensional Magnetostatic Problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v MAG-23, n 6, pp 3889-3894.

- MEIROVITCH, L. (1986)**, *Element of Vibration Analysis*, 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, Singapore, 560p.
- MEIROVITCH, L. (1990)**, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York, 424p.
- MOLLENHAUER, D. H., THOMPSON, D. M., GRIFFIN JR, O. H. (1993)**, “Finite Element Analysis of Smart Structures”, *Advances in Engineering Software*, v 17, pp 7-12.
- MOREIRA, F. J. O. (1998)**, *Um Controlador  $H^\infty$  de Banda Limitada para Controle Ativo de Vibração Estrutural*, Tese de Doutorado, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 199p.
- MOREIRA, F. J. O., ARRUDA, J. R. F. (1997)**, “Model Identification Using ERA and Q-Markov Cover: An Experimental Example”, *Anais do VI DINAME*, Simpósio Internacional sobre Problemas Dinâmicos da Mecânica, ABCM, Angra dos Reis, RJ, pp 242-244.
- MOREIRA, F. J. O., ARRUDA, J. R. F. (1998)**, *Controle Ativo de Estruturas Flexíveis com Sensores e Atuadores Distribuídos*, Relatório FAPESP, Proc. no. 95/0061-0, Laboratório de Vibroacústica, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 41p.
- MUCHERONI, M. F. (1988)**, *Método da Superposição para Análise de Vibrações Livres de Placa Retangulares*, Tese de Doutorado em Engenharia, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 211p.
- NAILLON, M., COURSAINT, R. H., BESNIER, F. (1983)**, “Analysis of Piezoelectric Structures by a Finite Element Method”, *ACTA Electronica*, v 25, n 4, pp 341-362.
- NEWLAND, D. E. (1989)**, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific and Technical, 583p.
- NOVOZHILOV, V. V. (1970)**, *Thin Shell Theory*, trad. by. P. G. Lowe., 2<sup>nd</sup> ed., Groninger : Wolters-Noordhoff, 422p.

- NURRE, G. S., RYAN, R. S., SCOFIELD, H. N., SIMS, J. L. (1984)**, “Dynamics and Control of Large Space Structures”, *Journal of Guidance and Control*, v 7, pp 512-526.
- OGATA, K. (1994)**, *Solving Control Engineering Problems with MATLAB®*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 359p.
- OGUAMANAN, D. C. D., ALMEIDA, S. F. M. de, HANSEN, J. S. (1997)**, “Stress Stiffening Effects on Laminated Timoshenko Beams with Piezoelectric Actuators”, *XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, COBEM97, cob-831, 8p.
- PALAZZOLO, A. B., JAGANNATHAN, S., KASCAK, A. F., MONTAGUE, G. T., KIRALY, L. J. (1993)**, “Hybrid Active Vibration Control of Rotorbearing Systems Using Piezoelectric Actuators”, *Journal of Vibration and Acoustic*, v 115, n 1, pp 111-119.
- PAN, X., HANSEN, C. H. (1993)**, “The Effect of Error Sensor Location and Type on the Active Control of Beam Vibration”, *Journal of Sound and Vibration*, v 165, n 3, pp 497-510.
- PAPADOPOULOS, M., GARCIA, E. (1996)**, “Improvement in Model Reduction Schemes Using the System Equivalent Reduction Expansion Process”, *AIAA Journal*, v 34, n 10, pp 2217-2218.
- PILKEY, W. D., WUNDERLICH, W. (1994)**, *Mechanics of Structures Variational and Computational Methods*, CRC Press, Inc., 855p.
- POH, S., BAZ, A. (1990)**, “Active Control of a Flexible Structures Using a Modal Positive Position Feedback Controller”, *NASA*, Washington, DC, pp 1-31.
- RAO, S. S., SUNAR, M. (1993)**, “Analysis of Distributed Thermopiezoelectric Sensors and Actuators in Advanced Intelligent Structures”, *AIAA Journal*, v 31, n 7, pp 1280-1286.
- RAO, S. S., SUNAR, M. (1994)**, “Piezoelectricity and its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey”, *Applied Mechanical Review*, v 47, n 4, pp 113-123.

- RAY, M. CH., RAO, K. M., SAMANTA, B. (1993)**, “Exact Solution for Static Analysis of an Intelligent Structure under Cylindrical Bending”, *An International Journal Computers & Structures*, v 47, n 6, pp 1031-1042.
- RAY, M. C., BHATTACHARYA, R., SAMANTA, B. (1993)**, “Exact Solutions for Static Analysis of Intelligent Structures”, *AIAA Journal*, v 31, n 9, pp 1684-1691.
- REITZ, J. R., MILFORD, F. J., CHRISTY, R. W. (1988)**, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus, 3a. ed., 516p.
- RESCH, M., JEGER, M., ELSPASS, W. J. (1996)**, “Optimal Design of Laminated Plates for Active Vibration Control”, *ISMA 21 - Noise and Vibration Engineering*, pp 283-294.
- RESNICK, R., HALLIDAY, D. (1984)**, *Física 4*, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 4a ed., 353p.
- ROHMAN, M. A., SEBAKHY, O. A., HALABI, M. AL (1993)**, “Identification and Control of Flexible Civil Structures with Time Delays”, *An International Journal Computers & Structures*, v 47, n 6, pp 977-986.
- ROWLAND, J. R. (1986)**, *Linear Control Systems: Modeling, Analysis, and Design*, John Wiley & Sons, New York, 511p.
- SAMANTA, B., RAY, M. C., BHATTACHARYYA, R. (1996)**, “Finite Element Model for Active Control of Intelligent Structures”, *AIAA Journal*, v 34, n 9, pp 1885-1893.
- SEGERLING, L. J. (1984)**, *Applied Finite Element Analysis*, 2<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 427p.
- SHAH, D. K., CHAN, W. S., JOSHI, S. P. (1993)**, “Finite Element Analysis of Plates with Piezoelectric Layers”, *Proceedings 34th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-93-1678-CP, pp 3189-3197.
- SHAHIAN, B., HASSUL, M. (1993)**, *Control System Design Using MATLAB®*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 502p.

- SHAMES, I. H. (1983)**, *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Prentice-Hall do Brasil, 10a ed., 556p.
- SHEN, I. Y. (1994)**, “Hybrid Damping Through Intelligent Constrained Layer Treatments”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 116, pp 341-349.
- SHIEH, R. C. (1994)**, “Governing Equations and Finite Element Models for Multiaxial Piezoelectric Beam Sensors/Actuators”, *AIAA Journal*, v 32, n 6, pp 1250-1258.
- SHIEH, R. C. (1993)**, “Finite Element Formulation for Dynamic Response Analysis of Multiaxially Active 3-D Piezoelectric Beam Element Structures”, *Proceedings 34th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-93-1687-CP, pp 3250-3260.
- SIAO, J. C-T., DONG, S. B., SONG, J. (1994)**, “Frequency Spectra of Laminated Piezoelectric Cylinders”, *Journal of Vibration and Caustics*, v 116, pp 364-370.
- SKELTON, R., CARPENTER, M., HALLAUER, W. (1994)**, “A General Energy Method for Beam Finite Element Models Including Induced Strain Actuation”, *Space System Control Lab.*, Purdue University, West Lafayette, pp 1-15.
- SMITH, B. T. et al. (1976)**, *Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide*, Lecture Notes in Computer Science, 2<sup>a</sup> ed., vol. 6, Springer - Verlag.
- SMITH, I. M., GRIFFITHS, D. V. (1988)**, *Programming the Finite Element Method*, 2<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, London, 469p.
- SPIEGEL, M. R. (1975)**, *Análise Vetorial - com Introdução a Análise Tensorial*, 5<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, 300p.
- SUNAR, M., RAO, S. S. (1996)**, “Distributed Modeling and Actuator Location for Piezoelectric Control Systems”, *AIAA Journal*, v 34, n 10, pp 2209-2211.

- TAYLOR, R. L., BERESFORD, P. J., WILSON, E. L. (1976)**, “A Non-Conforming Element for Stress Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v 10, pp 1211-1219.
- TIERSTEN, H. F., MINDLIN, R. D. (1962)**, “Forced Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates”, *Quarterly of Applied Mathematics*, v XX, n 2, pp 107-119.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. (1970)**, *Theory of Elasticity*, 3<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, 591p.
- TSENG, C. I. (1989)**, *Electromechanical Dynamics of a Coupled Piezoelectric / Mechanical System Applied to Vibration Control and Distributed*, Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Kentucky, 240 p.
- TSENG, C. I., TZOU, H. S. (1993)**, “Distributed Observing and Active Control of a Cantilever Plate”, *Intelligent Structures Materials and Vibrations*, v 58, pp 59-65.
- TZOU, H. S. (1991)**, “Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Shells: Theory and Experiment”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v 5, n 3, pp 199-214.
- TZOU, H. S., FU, H. Q. (1994a)**, “A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part I: Theoretical Analysis”, *Journal of Sound and Vibration*, v 172, n 2, pp 247-259.
- TZOU, H. S., FU, H. Q. (1994b)**, “A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators. Part II: Parametric Study and Active Vibration Controls”, *Journal of Sound and Vibration*, v 172, n 2, pp 261-275.
- TZOU, H. S., GADRE, M. (1989)**, “Theoretical Analysis of a Multi-Layered Thin Shell Coupled with Piezoelectric Shell Actuators for Distributed Vibration Control”, *Journal of Sound and Vibration*, v 132, n 2, pp 433-450.
- TZOU, H. S., TSENG, C. I. (1990)**, “Distributed Piezoelectric Sensor/Actuator Design for Dynamic measurement/Control of Distributed Parameter Systems: A Piezoelectric Finite Element Approach”, *Journal of Sound and Vibration*, v 138, n 1, pp 17-34.



- TZOU, H. S., TSENG, C. I. (1991a)**, “Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems: Finite Element Formulation and Applications”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v 5, n 3, pp 215-231.
- TZOU, H. S., TSENG, C. I. (1991b)**, “Distributed Modal Identification and Vibration Control of Continua: Piezoelectric Finite Element Formulation and Analysis”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v 113, pp 500-505.
- TZOU, H. S., YE, R. (1993)**, “Piezothermoelasticity and Control of Piezoelectric Laminates Exposed to a Steady-State Temperature Field”, *Intelligent Structures, Materials and Vibrations*, v 58, pp 27-34.
- TZOU, H. S., YE, R. (1994)**, “Piezothermoelasticity and Precision Control of Piezoelectric Systems: Theory and Finite Element Analysis”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 166, n 4, pp 489-495.
- TZOU, H. S., YE, R. (1996a)**, “Pyroelectric and Thermal Strain Effects of Piezoelectric (PVDF and PZT) Devices”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v 10, n 4, pp 459-469.
- TZOU, H. S., YE, R. (1996b)**, “Analysis of Piezoelastic Structures with Laminated Piezoelectric Triangle Shell Elements”, *AIAA Journal*, v 34, n 1, pp 110-115.
- TZOU, H. S., YE, R., VENKAYYA, V. B. (1996)**, “Active Control of Mechanical and Thermal Shock Induced Vibrations”, *Adaptive Structures Forum*, AIAA/ASME/AHS, CP - 963, AIAA-96-1270-CP, pp 39-45.
- TZOU, H. S., ZHONG, J. P., HOLLKAMP, J. J. (1994)**, “Spatially Distributed Orthogonal Piezoelectric Shell Actuators: Theory and Applications”, *Journal of Sound and Vibration*, v 177, n 3, pp 363-378.
- TZOU, H. S., ZHONG, J. P., NATORI, M. (1993)**, “Sensor Mechanics of Distributed Shell Convolution Sensors Applied to Flexible Rings”, *Journal of Vibration and Acoustic*, v 115, n 1, pp 40-46.
- TZOU, H. S., ZHONG, J. P. (1993)**, “Adaptive Piezoelectric Shell Structures: Theory and Experiments”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v 7, n 4, pp 307-319.

- TZOU, H. S., ZHONG, J. P. (1994)**, “A Linear Theory of Piezoelectric Shell Vibrations”, *Journal of Sound and Vibration*, v 175, n 1, pp 77-88.
- TZOU, H. S., HOWARD, R. V. (1994)**, “A Piezothermoelastic Thin Shell Theory Applied to Active Structures”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 116, pp 295-302.
- VIPPERMAN, J. S., CLARK, R. L. (1996)**, “Complex Adaptive Compensation of Non-linear Piezoelectric Sensoriactuators”, *Adaptive Structures Forum*, AIAA/ASME/AHS, CP-963, AIAA-96-1266-CP, pp 1-11.
- WALKER, J. G., LIANG, C., ROGERS, C. A. (1993)**, “Finite Element Analysis of Adhesively-Bonded Piezoceramic Patches Implementing Modelling Techniques and Design Considerations to Reduce Critical Stresses”, *Proceedings 34th Structures, Structural Dynamics and Materials*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, AIAA-93-1685-CP, pp 3244-3249.
- WANG, J. H., LIOU, C. M. (1991)**, “Experimental identification of Mechanical Joint Parameters”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v 113, n 1, pp 28-36.
- YAE, H. K., INMAN, D. J., (1992)**, “Model Reduction in Subset of the Original States”, *Journal of Sound and Vibration*, v 155, n 1, pp 165-176.
- YANG, J. S. (1995)**, “Variational Formulations for the Vibration of a Piezoelectric Body”, *Quarterly of Applied Mathematics*, v LIII, n 1, pp 95-104.
- YANG, S. M., LEE, Y. J. (1994)**, “Modal Analysis of Stepped Beams with Piezoelectric Materials”, *Journal of Sound and Vibration*, v 176, n 3, pp 289-300.
- YIN, L., SHEN, Y. (1997)**, “Strain Sensing of Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact with Distributed Piezoelectric Sensor: A Mixed Finite Element Approach”, *Journal of Sound and Vibration*, v 199, n 1, pp 17-31.
- YOKOYAMA, T. (1990)**, “Vibrations of a Hanging Timoshenko Beam Under Gravity”, *Journal of Sound and Vibration*, v 141, n 2, pp 245-258.

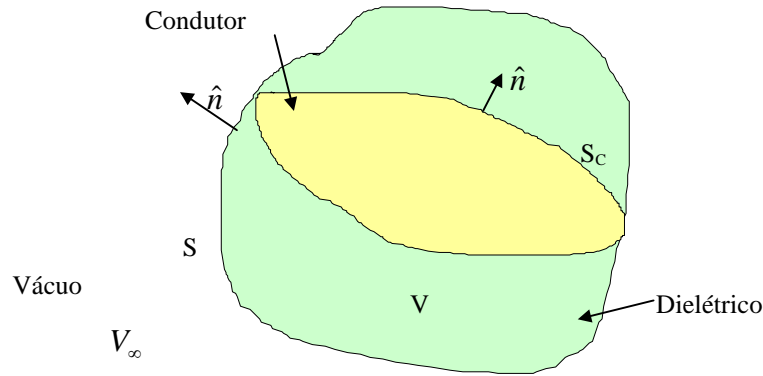
- YOUN, S.-K., BECKER, E., B. (1992)**, “A Finite Element Method for the Analysis of Piezoelectric Composite Hydrophones”, *An International Journal Computers & Structures*, v 44, n 6, pp 1215-1223.
- YOUSEFI-KOMA, A., VUKOVICH, G. (1996)**, “Use of Distributed Sensors and Actuators in Moment Rate Feedback for Active Wave Control of Flexible Structures”, *Adaptive Structures Forum*, AIAA/ASME/AHS, CP-963, AIAA-96-1269-CP, pp 32-38.
- ZHOU, R. C., LAI, Z., XUE, D. Y., HUANG, J.-K., MEI, C. (1995)**, “Suppression of Non-linear Panel Flutter with Piezoelectric Actuators Using Finite Element Method”, *AIAA Journal*, v 33, n 6, pp 1098-1105.
- ZHOU, S-W., ROGERS, C. A. (1995)**, “Power Flow and Consumption in Piezoelectrically Actuated Structures”, *AIAA Journal*, v 33, n 7, pp 1305-1311.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (1989)**, *The Finite Element Method*, Basic Formulation and Linear Problems, v 1, 4<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, London, 648p.

## APÊNDICE A

### PRINCÍPIO VARIACIONAL APLICADO EM MEIOS PIEZELÉTRICOS

## EQUAÇÕES PARA MEIOS DIELÉTRICOS

Vamos apresentar as equações de campo e as condições de contorno para um sólido deformável, material piezelétrico, contendo cargas elétricas e sujeito a forças mecânicas. Essas equações asseguram que as Equações de Maxwell e as Equações de Equilíbrio Mecânico sejam satisfeitas.



*Figura 81 - Sólido Composto por um Condutor e um Dielétrico*

Considerando um corpo sólido, ocupando uma região  $V$  no espaço, cuja superfície externa é representada por  $S$ , como mostra a Figura 81, chamamos de  $V_\infty$  o volume externo a  $S$ , o qual, por simplicidade, é o vácuo e não contém carga elétrica. O sólido é composto por um material condutor, no qual a carga elétrica é livre para se mover, e um material dielétrico, no qual a carga elétrica é fixa. A interface entre o dielétrico e o condutor é definida pela superfície  $S_C$ . O vetor  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal às superfícies  $S$  e  $S_C$ .

Se o corpo possui densidade volumétrica de carga elétrica  $\rho_q$  (C/m<sup>3</sup>) em  $V$ , e densidade superficial de carga elétrica  $\sigma_q$  (C/m<sup>2</sup>) em  $S$  e  $S_C$ , a carga total  $Q$  sobre o corpo é dada pela Lei de Gauss:

$$Q = \iiint_V \rho_q dV + \iint_{S+S_C} \sigma_q dS \quad (419)$$

A presença de um campo elétrico significa que as forças elétricas são exercidas sobre qualquer partícula carregada no sólido. Se uma pequena carga de prova  $q_0$  é introduzida na vizinhança do corpo sólido, uma força elétrica, resultando de  $Q$ , age sobre ela. O campo elétrico  $\vec{E}$  é um vetor definido tal que a força  $\vec{F}$  sobre a carga de prova seja dada por:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (420)$$

Quando a carga de prova sofre um deslocamento  $\Delta \vec{l}$ , ao longo de sua trajetória, o trabalho elementar, realizado pelo agente externo, será igual a:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l} = -q_0 \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} \quad (421)$$

O trabalho realizado quando a carga de prova sai de um potencial  $\phi$  para outro  $\phi + \Delta\phi$ , é:

$$\Delta W = q_0 \Delta\phi \quad (422)$$

Igualando as equações (421) e (422), vem:

$$E = \frac{\Delta\phi}{\Delta l \cos\theta} \quad (423)$$

No limite, quando  $\Delta \vec{l} \rightarrow 0$ , e sendo sua trajetória a mesma de  $\vec{E}$ , tem-se:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (424)$$

A Equação de Maxwell relacionada à Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (425)$$

explica o efeito elétrico de um campo magnético variável no tempo. Para problemas quase-estáticos,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (426)$$

Então:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (427)$$

No condutor, a carga livre é distribuída ao longo de sua superfície, e o campo elétrico no seu interior é igual a zero. No dielétrico, o campo elétrico polariza o material, induzindo momentos de dipolos. O vetor de polarização  $\vec{P}$  (C/m<sup>2</sup>) de um dielétrico é definido como a densidade de dipolos induzidos (carga/área). A polarização de um sólido dielétrico cria uma densidade volumétrica de carga elétrica induzida

$$\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (428)$$

que está encerrado no volume  $V$ , e uma densidade superficial de carga elétrica induzida,

$$\rho_{si} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (429)$$

que está encerrada nas superfícies  $S$  e  $S_C$ . Para o vácuo  $V_\infty$  e para o sólido condutor,  $\vec{P}$  é igual a zero e, conseqüentemente, nenhuma carga adicional é induzida.

A Lei de Gauss para a eletrostática diz que o fluxo resultante externo, através de qualquer superfície, é igual à carga total encerrada, livre e induzida, dividida pela permissividade do vácuo  $\epsilon_0$ .

Se a superfície fechada é  $S$ , então podemos expressar a Lei de Gauss para um corpo sólido como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V [\rho_q - \nabla \cdot \vec{P}] dV + \oint_{S+S_C} (\sigma_q - \vec{P} \cdot \hat{n}) dS \quad (430)$$

Aplicando o Teorema da Divergência sobre o campo elétrico, a equação (430) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_0 \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV + \varepsilon_0 \oiint_{S+S_C} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V [\rho_q - \nabla \cdot \vec{P}] dV + \oiint_{S+S_C} (\sigma_q - \vec{P} \cdot \hat{n}) dS \quad (431)$$

Desde que esta relação é válida para  $V$ ,  $S$  e  $S_C$  arbitrários, a Lei de Gauss para um sólido dielétrico e condutor torna-se:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_q - \nabla \cdot \vec{P} \text{ em } V \quad (432)$$

e

$$\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = \sigma_q - \vec{P} \cdot \hat{n} \text{ em } S \text{ e } S_C \quad (433)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para o vácuo que cerca o sólido, admitindo que o sólido e o vácuo são limitados por uma superfície fictícia  $S_\infty$ . Uma vez que a densidade de carga em  $V_\infty$  é zero, a Lei de Gauss conduz a:

$$\oiint_{S_\infty} \vec{E} \cdot \hat{n} dS - \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (434)$$

No vácuo, não existem descontinuidades em  $\vec{E}$ . Portanto, podemos aplicar o teorema da divergência, obtendo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ em } V_\infty \quad (435)$$

Considerando o meio livre de cargas, isto é,  $\rho_q = 0$ , a equação (432) será válida para o sólido. Como o deslocamento elétrico é proporcional ao campo elétrico (HALLIDAY 1976), resulta:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (436)$$

Substituindo a equação (433) na equação (432), temos:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (437)$$

## EQUILÍBRIO ELÉTRICO

A energia dielétrica armazenada pelo material dielétrico é (*HALLIDAY, 1976*):

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (438)$$

Tomando o variacional da energia dielétrica, vem:

$$\delta U_d = \iiint_V \delta \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (439)$$

Substituindo a equação (424) na equação (439), temos:

$$\delta U_d = - \iiint_V \delta \nabla \phi \cdot \vec{D} dV \quad (440)$$

O Teorema da Divergência estendido (*SPIEGEL 1975*), é:

$$\iiint_V \nabla \phi \cdot \vec{A} dV = \iint_S \phi \vec{A} \cdot \hat{n} dS - \iiint_V \phi \nabla \cdot \vec{A} dV \quad (441)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar e  $\vec{A}$  é um campo vetorial.

Fazendo  $\vec{D} = \vec{A}$  na equação (441), vem:



$$-\iiint_V \delta \nabla \phi \cdot \vec{D} dV = -\iint_S \delta \phi \vec{D} \cdot \hat{n} dS + \iiint_V \delta \phi \nabla \cdot \vec{D} dV \quad (442)$$

Substituindo a equação (437) na equação (442), temos:

$$\iiint_V \delta \nabla \phi \cdot \vec{D} dV = \iint_S \delta \phi \vec{D} \cdot \hat{n} dS \quad (443)$$

Aplicando a Lei de Gauss para um dielétrico, vem:

$$\iiint_V \delta \nabla \phi \cdot \vec{D} dV - \iint_S \delta \phi \sigma_q dS = 0 \quad (444)$$

Da equação (424), vem:

$$\iiint_V \delta \vec{E} \cdot \vec{D} dV + \iint_S \delta \phi \sigma_q dS = 0 \quad (445)$$

ou em notação tensorial, temos:

$$\iiint_V D_k \delta E_k dV + \iint_S \delta \phi \sigma_q dS = 0 \quad (446)$$

## EQUILÍBRIO MECÂNICO

O Princípio dos Trabalhos Virtuais para um sólido pode ser obtido das equações de equilíbrio e vice-versa. Seja um sólido sobre o qual atuam forças de corpo, onde as condições de equilíbrio esperadas em todos os pontos do sólido é:

$$\sigma_{kj,j} + f_{V_k} = 0 \text{ em } V \quad (447)$$

As condições de contorno essenciais (deslocamentos impostos) e naturais (equilíbrio de forças nas fronteiras) são dadas sobre a superfície do sólido, isto é:

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{u}_k \text{ sobre } S_u \\ f_{S_k} &= \bar{f}_{S_k} \text{ sobre } S_f \end{aligned} \quad (448)$$

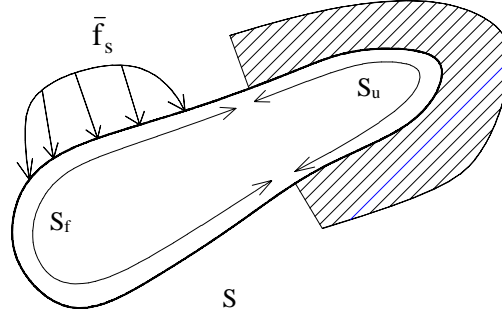


Figura 82 - Superfície de um Sólido

onde  $\bar{f}_s$  são forças aplicadas na superfície  $S_f$ .

Então, multiplicando as equações (447) e (448) pelo deslocamento virtual  $\delta u_k$ , e integrando a primeira equação sobre  $V$  e a segunda sobre  $S_f$ , vem:

$$-\iiint_V (\sigma_{kj,j} + f_{V_k}) \delta u_k dV + \iint_{S_p} (f_{S_k} - \bar{f}_{S_k}) \delta u_k dS = 0 \quad (449)$$

Desde que  $S = S_f + S_u$ , onde  $S_u$  é a superfície onde os deslocamentos  $\bar{u}_k$  são aplicados, é possível escrever:

$$\iint_S f_{S_k} \delta u_k dS = \iint_{S_f} f_{S_k} \delta u_k dS + \iint_{S_u} f_{S_k} \delta u_k dS \quad (450)$$

Usando o Teorema de Gauss sobre o primeiro termo da equação (450), vem:

$$\iint_S f_{S_k} \delta u_k dS = \iiint_V (\sigma_{kj} \delta u_k)_{,j} dV = \iiint_V \sigma_{kj,j} \delta u_k dV + \iiint_V \sigma_{kj} \delta u_{k,j} dV \quad (451)$$

Substituindo as equações (450) e (451) na equação (449), vem:

$$\iiint_V \sigma_{kj} \delta u_{k,j} dV - \iiint_V f_{V_k} \delta u_k dV - \iint_{S_u} f_{S_k} \delta u_k dS - \iint_{S_f} \bar{f}_{S_k} \delta u_k dS = 0 \quad (452)$$

Vamos considerar, agora, que o sólido esteja sofrendo a ação de um carregamento dinâmico, que gera acelerações

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \ddot{u}_k \quad (453)$$

na estrutura. Este campo de acelerações produz forças de inércia de D'Alembert,

$$f_{d_k} = -\rho \ddot{u}_k \quad (454)$$

no sentido oposto ao da aceleração. Se a força de inércia for incluída no princípio dos trabalhos virtuais, a equação (452) fica:

$$\iiint_V \sigma_{kj} \delta u_{k,j} dV + \iiint_V \rho \ddot{u}_k \delta u_k dV - \iiint_V \bar{f}_{V_k} \delta u_k dV - \iint_{S_u} f_{S_k} \delta u_k dS - \iint_{S_f} \bar{f}_{S_k} \delta u_k dS = 0 \quad (455)$$

onde:

$$f_{V_k} = \bar{f}_{V_k} + f_{d_k} \quad (456)$$

Para introduzir a deformação na equação (455), o deslocamento virtual  $\delta u_k$  será definido através de uma família de funções vizinhas, a saber:

$$\hat{u}_k = u_k + \delta u_k \quad (457)$$

A relação correspondente entre deslocamentos e deformações é:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{kj} &= \frac{1}{2}(\hat{u}_{k,j} + \hat{u}_{j,k}) = \frac{1}{2}(u_{k,j} + u_{j,k}) + \frac{1}{2}[(\delta u_k)_{,j} + (\delta u_j)_{,k}] \\ &= \frac{1}{2}(u_{k,j} + u_{j,k}) + \frac{1}{2}\delta(u_{k,j} + u_{j,k}) = \varepsilon_{kj} + \delta\varepsilon_{kj}\end{aligned}\quad (458)$$

Se os deslocamentos  $u_k$  e  $\hat{u}_k$  obedecem a suas respectivas relações de deformação versus deslocamento, então:

$$\delta\varepsilon_{kj} = \frac{1}{2}\delta(u_{k,j} + u_{j,k}) \text{ em } V \quad (459)$$

Usando a convenção da soma e a equação (459), podemos demonstrar que:

$$\sigma_{kj}\delta u_{k,j} = \sigma_{kj}\delta\varepsilon_{kj} \quad (460)$$

Então, a equação (455) pode ser escrita como:

$$\iiint_V \sigma_{kj}\delta\varepsilon_{kj}dV + \iiint_V \rho\ddot{u}_k\delta u_k dV - \iiint_V \bar{f}_{V_k}\delta u_k dV - \iint_{S_u} f_{S_k}\delta u_k dS - \iint_{S_f} \bar{f}_{V_k}\delta u_k dS = 0 \quad (461)$$

Se  $u_k$  e  $\hat{u}_k$  satisfazem as condições de contorno essenciais, equação (448), então:

$$\delta u_k = 0 \text{ em } S_u \quad (462)$$

O deslocamento virtual, que satisfaz simultaneamente as equações (461) e (462), é dito cinematicamente admissível. A aplicação da equação (462) na equação (461) faz com que a integral sobre  $S_u$  seja igual a zero. Assim:

$$\iiint_V \sigma_{kj}\delta\varepsilon_{kj}dV + \iiint_V \rho\ddot{u}_k\delta u_k dV - \iiint_V \bar{f}_{V_k}\delta u_k dV - \iint_{S_f} \bar{f}_{S_k}\delta u_k dS = 0 \quad (463)$$

Para representar o comportamento do material piezelétrico, onde existem os efeitos elétricos e mecânicos, devemos somar algebricamente as equações (446) e (463) (TZOU & TSENG, 1990):

$$\begin{aligned} & \iiint_V \rho \ddot{u}_k dV + \iiint_V \sigma_{kj} \delta \varepsilon_{kj} dV - \iiint_V D_k \delta E_k \\ & - \iiint_V \bar{f}_{V_k} \delta u_k dV - \iint_{S_f} \bar{f}_{S_k} \delta u_k dS + \iint_{S_q} \sigma_q \delta \phi dS = 0 \end{aligned} \quad (464)$$

Colocando a equação (464) na forma matricial, temos:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iiint_V \{\delta E\}^T \{D\} dV = \\ & \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{f}_V\} dV + \iint_{S_f} \{\delta u\}^T \{\bar{f}_S\} dS - \iint_{S_q} \delta \phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (465)$$

Numa análise mais detalhada do lado esquerdo da equação (465), temos os termos de energias cinéticas (trabalho virtual da Força de Inércia) e potenciais (trabalho virtual de deformação e elétrico). Já no lado direito da mesma equação, temos termos, relacionando os trabalhos externos (trabalho virtual das forças externas e carga elétrica externa).

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{kj} \delta \varepsilon_{kj} dV - \iiint_V D_k \delta E_k dV \quad (466)$$

$$\delta W = \iiint_V \bar{f}_{V_k} \delta u_k dV + \iint_{S_f} \bar{f}_{S_k} \delta u_k - \iint_{S_q} \sigma_q \delta \phi dS \quad (467)$$

Integrando, por partes, o termo cinético, entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \ddot{u}_k \delta u_k dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \dot{u}_k \delta \dot{u}_k dV dt + \iiint_V \rho \dot{u}_k \delta u_k dV \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (468)$$

Uma vez que as condições, inicial e final, são assumidas conhecidas, isto é,  $\delta u_i = 0$  em  $t = t_1$  e  $t = t_2$ , a equação (468) fica:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \ddot{u}_k \delta u_k dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta T \quad (469)$$

onde:

$$\delta T = \iiint_V \rho \dot{u}_k \delta \dot{u}_k dV \quad (470)$$

Uma descrição equivalente ao problema de valor de contorno, apresentado pela equação (465), é obtida pela aplicação do Princípio Variacional de Hamilton, estendido a meios piezelétricos.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (471)$$

Substituindo as equações (466), (467) e (469) na equação (471), obteremos a equação (465). Com a equação constitutiva da piezoelectricidade linear, equação (137), e a equação (465), obteremos finalmente o *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos*.

$$\begin{aligned} & \iiint_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T [c^E] \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \iiint_V \{\delta E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV \\ & - \iiint_V \{\delta E\}^T [\xi] \{E\} dV = \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{f}_v\} dV + \iint_{S_f} \{\delta u\}^T \{\bar{f}_s\} dS - \iint_{S_q} \delta \phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (472)$$

Cuja equação está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \sigma_{kj} n_j &= \bar{f}_{S_k} & \text{em } S_f \\ u_k &= \bar{u}_k & \text{em } S_u \\ \phi_k &= \bar{\phi}_k & \text{em } S_\phi \end{aligned} \quad (473)$$



## **APÊNDICE B**

### **MANUSEIO DE ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS**

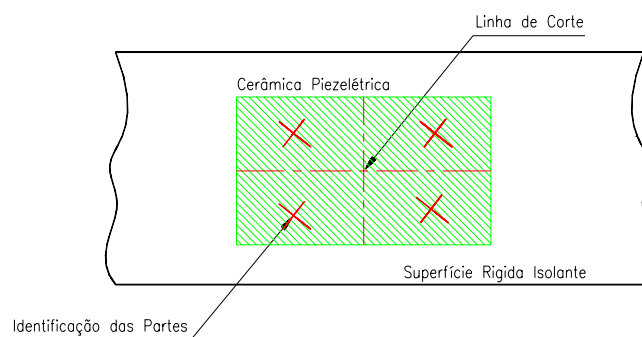
Neste apêndice, descrevem-se os procedimentos, empregados no corte, na colagem e soldagem dos eletrodos na cerâmica piezelétrica. É, também, apresentado o esquema de um dispositivo eletrônico, para transformar a carga elétrica, gerada pelo elemento piezelétrico, quando sujeito a esforços mecânicos.

#### **CORTE DA CERÂMICA**

Para cortar a cerâmica piezelétrica, devemos proceder do seguinte modo:

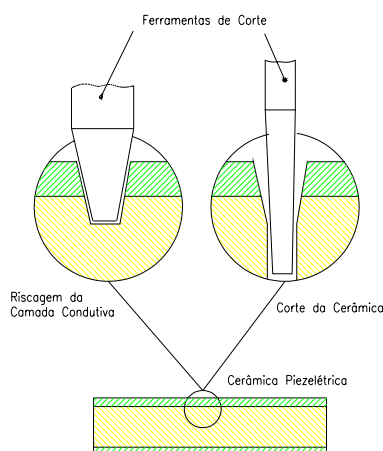
- colocar a cerâmica sobre uma superfície rígida, lisa e isolante, como, por exemplo, madeira, fórmica ou vidro;
- marcar, com uma caneta de ponta porosa, uma das superfícies da cerâmica, com um “x”, para que, depois do corte, possamos identificar as direções de polarização das partes. Ainda com a caneta de ponta porosa, riscar as linhas, onde deverão ser feitos os cortes na cerâmica (Figura 83);





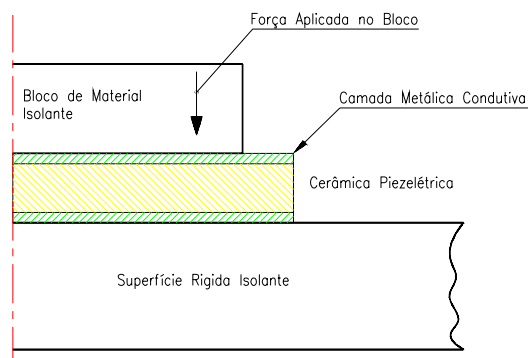
*Figura 83 – Preparação da Cerâmica para o Corte*

- com um objeto metálico pontiagudo e usando um esquadro, riscar a cerâmica nas linhas de corte. Esse procedimento tem por objetivo abrir um rasgo na camada metalizada da cerâmica, não permitindo que haja contato simultâneo entre a lâmina de corte e as camadas metálicas da cerâmica. Isto evitar que haja um curto-circuito na cerâmica, pois, no momento do corte, a cerâmica está sob o efeito de um carregamento e, por consequência, existe um potencial elétrico induzido (Figura 84);



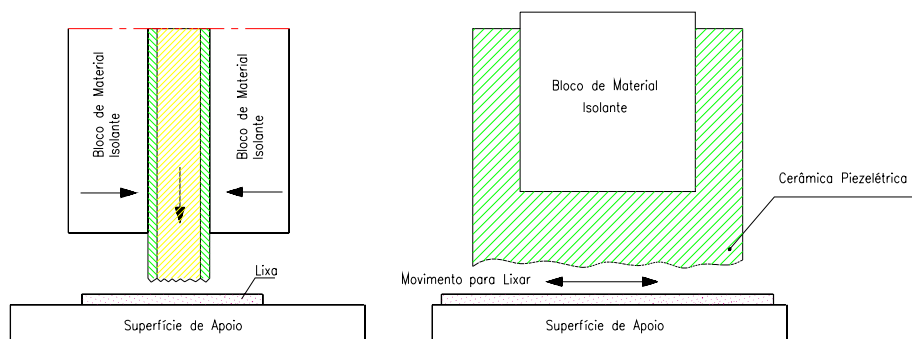
*Figura 84 – Corte da Cerâmica*

- com uma lâmina bem fina, proceda o corte da cerâmica, devendo esta ficar apoiada entre duas superfícies rígidas, lisas e isolantes (Figura 85);



*Figura 85 – Fixação da Cerâmica para posterior Corte*

- finalmente, proceda o acabamento da superfície cortada, usando para isso uma lixa fina. Nesse caso, a cerâmica deve ser colocada entre duas superfícies isolantes (Figura 86).



*Figura 86 – Procedimento para Lixar Superfície Cortada da Cerâmica*

## COLAGEM DA CERÂMICA

Para realizar a colagem da cerâmica em uma estrutura, recomendamos alguns procedimentos básicos. Entretanto, maiores informações podem ser obtidas nos “sites” dos fabricantes dos adesivos e da cerâmica piezelétrica (<http://www.loctite.com>, <http://www.measurementsgroup.com>, <http://www.bhl.de> e <http://www.piezo.com>)

- proceda a limpeza mecânica das superfícies, para retirada de resíduos sólidos e poeira e, posteriormente, a limpeza química (solvente), para retirada de graxas, gorduras e óleos;
- com um lápis, demarcar o perímetro da cerâmica na superfície da estrutura, na posição onde se deseja colar a cerâmica;
- espalhar, ao longo da superfície demarcada, uma camada fina e uniforme do adesivo;
- posicionar a cerâmica sobre a superfície demarcada. Usar um bloco de material isolante e espalhar sobre a sua superfície uma camada de um líquido (óleo mineral). Pressionar, levemente, o bloco contra a cerâmica, até que ocorra a sua fixação. O líquido tem por finalidade evitar que o excesso de cola, que aparece nas laterais de cerâmica, quando esta é pressionada, cole o bloco na estrutura;
- aguardar o tempo de curar e proceder à limpeza final do conjunto, estrutura e cerâmica piezelétrica (Tabela 26).

Indicamos alguns adesivos para a fixação da cerâmica na estrutura. Uma fixação temporária pode ser conseguida com o uso de adesivos a base de *cianoacrilato*, como: SuperBond ou M-Bond 200. São de fácil aplicação e possuem tempo de cura pequeno, mas são muito sensíveis à umidade. Para fixações duradouras são recomendados adesivos a base de *epoxy*, como: RS 186-3616, ELECOLIT 2036, ELECOLIT 324 e M-Bond AE-10.

Tabela 26 – Características Principais dos Adesivos

Adesivos		
Adesivo	SR4 EPY-150	Superbond
Temp. de Trabalho °C	-196 a 66	-32 a 55
Temp. de Cura °C	ambiente até 66	ambiente
Tempo de Cura	1 – 72 h	5 – 100 s
Fabricante	BLH Electronic	Loctite
Comentários	fixação permanente <a href="http://www.blh.de">http://www.blh.de</a>	fixação temporária <a href="http://www.loctite.com">http://www.loctite.com</a>

## CONEXÃO DO ELETRODO NA CERÂMICA

Os seguintes procedimentos podem ser usados para conectar o eletrodo na superfície metalizada da cerâmica piezoelétrica:

### Adesivo Condutivo

Adesivos condutivos à base de prata ou cobre podem ser usados para fixar um fio elétrico sobre a superfície da cerâmica.

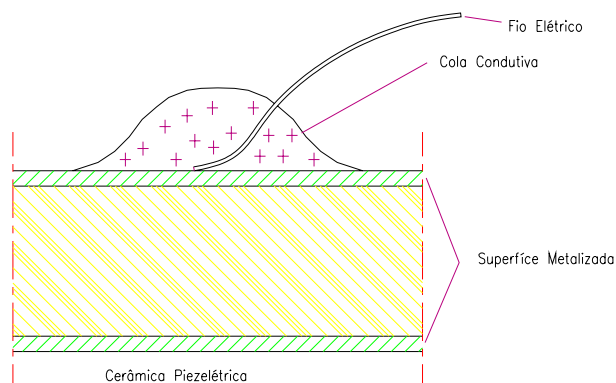
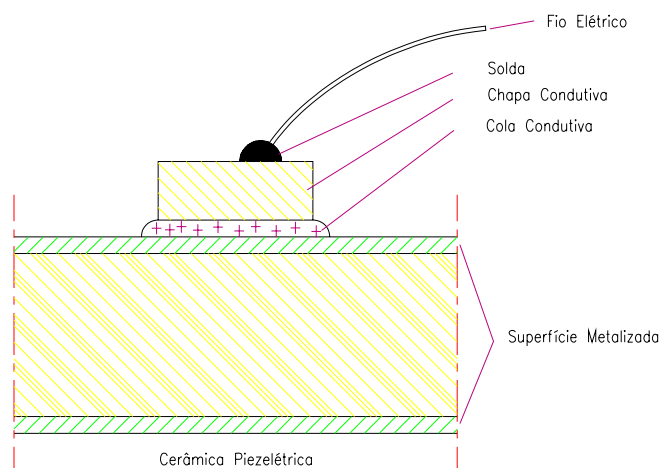


Figura 87 – Colagem do Fio Elétrico com Adesivo Condutivo

Podemos soldar o fio elétrico em uma chapa de material condutivo, como, por exemplo, cobre e, posteriormente, colar o conjunto na cerâmica, com adesivo condutivo.



*Figura 88 – Colagem do Fio Elétrico com uma Chapa de Material Condutivo*

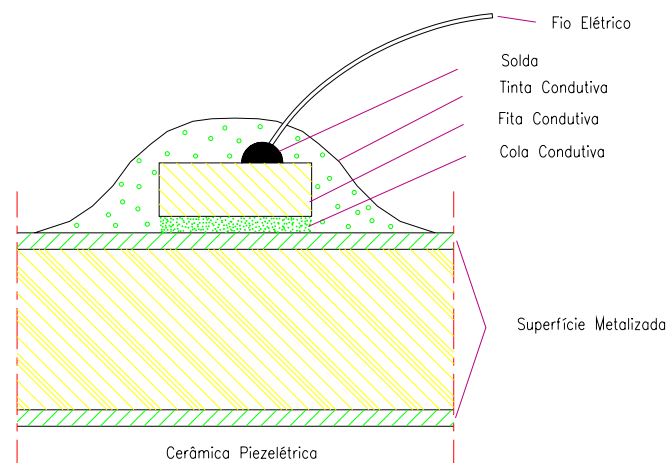
*Tabela 27 – Características Principais dos Adesivos Condutivos*

Adesivo Condutivo			
Cola	RS 186-3616	ELECOLIT 2036	ELECOLIT 324
Temp. de Trabalho °C	-55 a 150	-30 a 160	-60 a 150
Temp. de Cura °C	ambiente	ambiente	ambiente
Tempo de Cura	24 h	16 h	24 h
Fabricante	RS Components	QUALITAPE	QUALITAPE
Comentários	a base de prata resistividade $0,1 \Omega\text{m}^{-1}$ <a href="http://www.rsdobrasil.com.br">http://www.rsdobrasil.com.br</a>	a base de cobre resistividade $0,1 \Omega\text{m}^{-1}$ <a href="http://users.skynet.be/sky77430/qualitap.html">http://users.skynet.be/sky77430/qualitap.html</a>	a base de prata resistividade $0,1 \Omega\text{m}^{-1}$ <a href="http://users.skynet.be/sky77430/qualitap.html">http://users.skynet.be/sky77430/qualitap.html</a>

## Fita Adesiva Condutiva

Corte um pedaço da fita condutiva, cerca de 15 mm, e solde o fio elétrico diretamente sobre ela. Então, pressione firmemente a fita adesiva sobre a superfície metalizada da cerâmica, assegurando que haja um bom contato elétrico. Para melhorar o contato elétrico, é interessante cobrir a região colada com uma tinta condutiva à base de prata, ou usar a adesivo condutivo. Outras informações sobre a fita adesiva condutiva podem ser encontradas no seguinte “site”:

<http://www.mmm.com>.



*Figura 89 – Colagem do Fio Elétrico com uma Fita Condutiva*

## DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS

Um dispositivo eletrônico foi projetado para medir a carga elétrica produzida pelo piezo, sujeito a uma tensão mecânica.

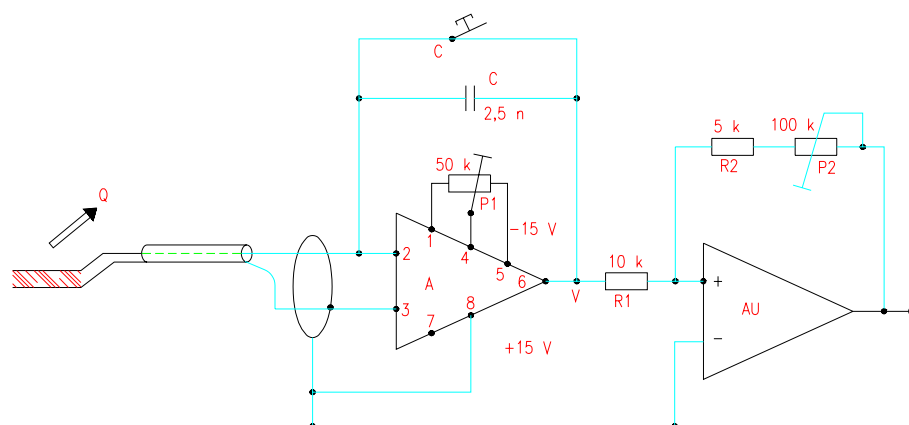


Figura 90 – Dispositivo Eletrônico Empregado com o Piezo

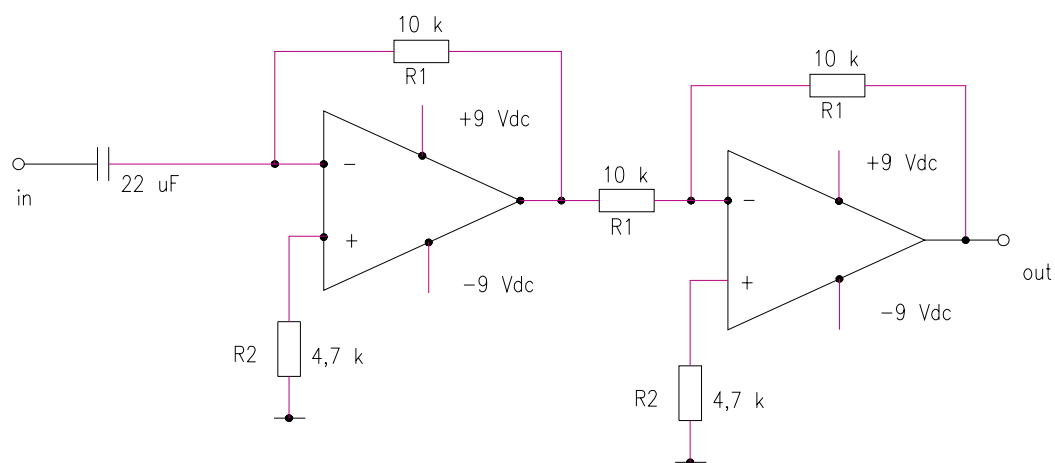
O diagrama da Figura 90 consiste em dois estágios: o primeiro converte a carga  $Q$ , produzida pelo piezo, em voltagem elétrica  $V$ ; enquanto o segundo amplifica essa voltagem.

O amplificador operacional A (OPA128JM BURR-BROWN) dever ter alta impedância e baixa corrente de entrada. Para diminuir as interferências externas, os cabos empregados na montagem da instrumentação devem ser blindados.

O potenciômetro P1 (“Zero Shift”) do amplificador permite ajustar em zero a voltagem de saída dos dois estágios, quando não existirem tensões mecânicas, aplicadas sobre o piezo.

O potenciômetro P2 do segundo estágio do amplificador permite ajustar os ganhos do estágio entre 0,5 a 10,5. O amplificador AU, do segundo estágio, é do tipo (OP07 BURR-BROWN).

O dispositivo eletrônico apresentado na Figura 91 é um acoplador de impedância que foi projetado para fazer o casamento de impedância ente a cerâmica piezelétrica e a placa dSPACE. Esse circuito foi projetado por MOREIRA (1998) e o amplificador operacional empregado foi o MC1558 da ANALOG DEVICE.



*Figura 91 – Acoplador de Impedância*



