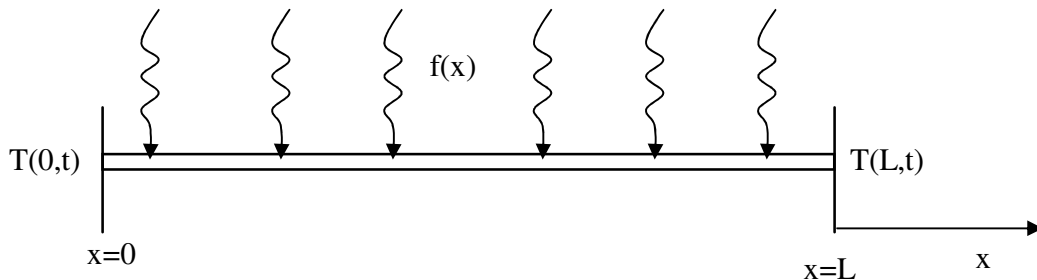


## CAPÍTULO VI

### Introdução ao Método de Elementos Finitos (MEF)

#### 1. Formulação Teórica - MEF em uma dimensão

Consideremos a equação abaixo que representa a distribuição de temperatura na barra mostrada na figura:



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + f(x) = 0 \quad T(0)=A \text{ e } T(L)=B \quad (1)$$

onde  $f(x)$  representa uma fonte uniforme de calor.

A solução por diferenças finitas (já comentada) consiste em se transformar a equação num sistema de 1ª ordem e resolvê-lo substituindo as definições de diferenciações numéricas (também já comentadas). Ao final obtém-se um sistema de equações onde as variáveis são os valores da grandeza a ser calculada (por exemplo  $T$ , no caso). A principal desvantagem dessa abordagem é que estamos tentando obter a solução exata de  $T$ . Pequenos erros no valor de  $T$  fazem com que a equação acima não seja satisfeita (seja igual à zero), e a princípio nada é previsto no **método de diferenças finitas (MDF)** para contornar o problema.

Já o **método de elementos finitos (MEF)** é baseado em dois conceitos principais que ajudam a contornar o problema acima:

- a) Solução baseada numa "Integral" da equação;
- b) Aproximação da solução por uma função definida num subdomínio resultante da discretização do domínio.

A idéia básica é a seguinte. Vamos supor que ao invés de tentar obter a solução exata como no MDF, nós tentamos obter uma solução aproximada que reduza a um mínimo o erro na aproximação da equação. Existem vários métodos para se definir a forma como o

erro será minimizado, um deles, bastante usado, é o chamado **método de resíduos ponderados**. Nesse caso, sendo  $R$  o resíduo da solução aproximada:

$$R = \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + f(\tilde{x}) \quad (2)$$

deve-se encontrar uma solução aproximada ( $\tilde{T}$ ) que minimize o resíduo de acordo com fórmula:

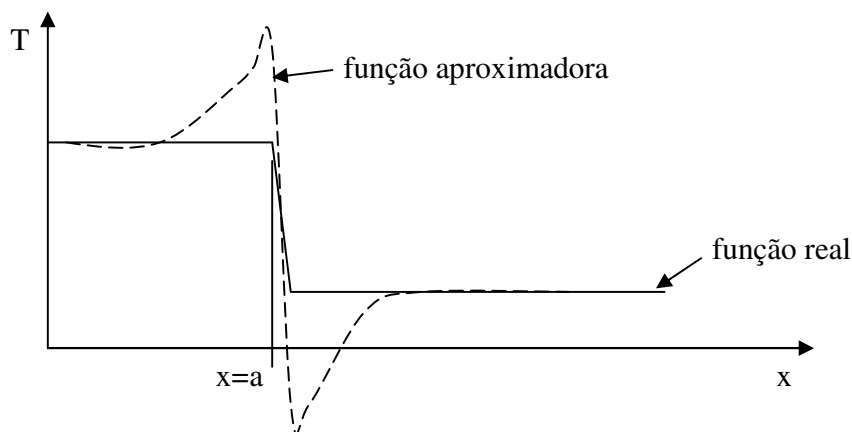
$$\int_D R W_i dD = 0 \text{ onde } i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

onde  $D$  é o domínio da solução e  $W_i$  são as funções de peso linearmente independentes.

Agora o problema consiste em se encontrar uma solução aproximada que minimize o erro acima, definido como a integral do resíduo vezes uma função peso. Nessa abordagem diz-se que o problema da solução da equação foi "relaxado", no sentido de que não se requer mais uma solução exata, mas apenas uma solução que minimize o erro definido acima. Existem várias possibilidades na escolha da função peso. Uma outra forma de se definir a minimização do erro seria usar o **método dos mínimos quadrados (MMQ)**, por exemplo.

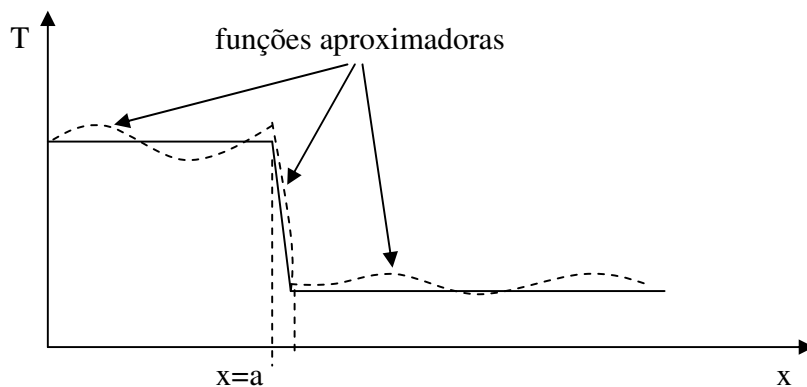
Para se resolver a equação de minimização do erro acima, a grandeza  $T$  é aproximada por uma função, por exemplo, um polinômio (poderia ser uma combinação linear de senos e cosenos, por exemplo) onde os coeficientes devem ser determinados de forma a minimizar o erro definido acima.

Como seria esse polinômio? a primeira idéia seria definir o polinômio usando todo o domínio onde a equação está definida. Por exemplo, se estamos calculando a variação de temperatura ( $T$ ) ao longo de uma barra de comprimento  $L$ , o polinômio seria definido de  $x=0$  à  $x=L$  o que define o domínio da solução. Esse método é chamado **método de Ritz**. No entanto existe uma desvantagem nessa abordagem como mostrado na figura abaixo:



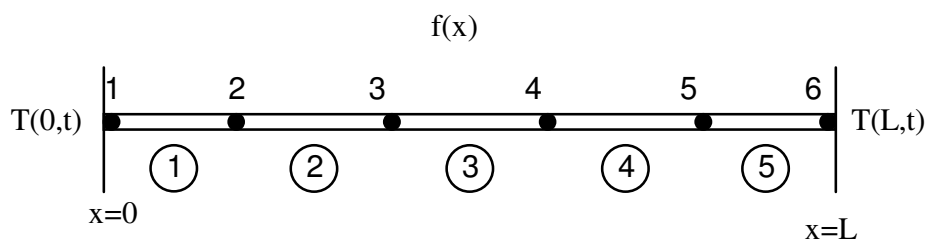
Suponhamos que a variação de  $T$  entre  $x=0$  e  $x=L$  seja representada pela função acima (que a princípio não é conhecida). Note que existe uma variação brusca da função em  $x=a$ . Assim, se tentarmos representar essa solução usando o polinômio definido em todo o domínio, o polinômio apresentará um comportamento indesejado, próximo à região de mudança brusca da função, que **não** representa a variação de  $T$  naquela região, embora o erro de aproximação seja minimizado pelo mesmo polinômio.

Para evitar esse problema, a solução seria "dividir" o domínio em três subdomínios, por exemplo, e em cada subdomínio usar um polinômio diferente que garanta uma melhor aproximação da solução verdadeira (ver figura abaixo). No entanto, nessa abordagem em geral a continuidade na derivada da função aproximadora (no caso, o polinômio) é sacrificada como observado na figura abaixo:



Dessa forma o MEF necessita a "divisão" ou a discretização do domínio em subdomínios que são chamados "elementos finitos".

Vejamos com mais detalhes como o polinômio aproximador é definido no MEF. Consideremos uma barra de comprimento  $L$  que foi discretizada em elementos, como mostrado na figura abaixo:



Em cada elemento consideremos um polinômio de grau 1. Assim temos, que a solução  $\tilde{T}$  aproximada dentro do elemento é representada por:

$$\tilde{T}(x) = a_0 + a_1 x \quad (4)$$

Onde  $a_0$  e  $a_1$  devem ser determinados de forma a minimizar o erro na solução. Podemos escrever essas constantes em função dos valores de  $\tilde{T}$  nos pontos 1 e 2 (ver figura), que são chamados de "nós". Assim temos:

$$\begin{aligned} T_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\ T_2 &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

e portanto:

$$a_0 = \frac{T_1 x_2 - T_2 x_1}{x_2 - x_1}; a_1 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

Substituindo novamente  $a_0$  e  $a_1$  na equação de  $\tilde{T}(x)$ :

$$\tilde{T}(x) = N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 \quad (7)$$

onde:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (8)$$

e  $T_1$  e  $T_2$  são incógnitas. A equação (7) é chamada função aproximação ou de forma e  $N_1$  e  $N_2$  são chamadas **funções interpoladoras ou funções de forma**. A equação (7) nada mais é do que um polinômio interpolador de Lagrange.

Note que a soma das funções de forma é sempre igual à 1 e  $N_i(x_j) = 0$  para  $i \neq j$  e  $N_i(x_j) = 1$  para  $i = j$ .

Derivando-se a equação (7) temos:

$$\frac{d\tilde{T}(x)}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx}T_1 + \frac{dN_2(x)}{dx}T_2 \quad (9)$$

onde:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{-1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{dN_2(x)}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (10)$$

Então:

$$\frac{d\tilde{T}(x)}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (11)$$

que representa a inclinação da reta conectando os nós.

Assim, no MEF as incógnitas são representadas pelos valores de  $\tilde{T}$  nos nós  $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots, T_n$  para uma barra **unidimensional**.

Definido a função aproximadora no MEF, voltemos à discussão sobre a minimização do resíduo na solução da equação. Como comentado, no método de resíduos ponderados

existem várias possibilidades na escolha da função peso  $W_i$ . A abordagem mais comum em MEF é o emprego da função de forma  $N_i$  como a função peso, que é chamado **método de Galerkin**. Nesse caso:

$$\int_D RN_i dD = 0 \text{ onde } i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

Vamos considerar a solução da equação integral acima para uma barra **unidimensional** discretizada em  $m-1$  elementos. Assim devemos separar a integral acima em cada um dos elementos. Para um elemento genérico a integral será:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + f(x) \right] N_i(x) dx = 0 \text{ onde } i = 1, 2 \quad (13)$$

que pode ser expressa como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} N_i(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx \text{ onde } i = 1, 2 \quad (14)$$

Relembrando integração por partes:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (15)$$

Considerando  $N_i(x)$  como  $u$  e  $\frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2}$  como  $dv$ , no termo da esquerda:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} N_i(x) dx = N_i(x) \frac{d\tilde{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \quad (16)$$

Note que apenas primeiras derivadas aparecem do lado direito da equação. Para  $i=1$  temos:

$$N_1(x) \frac{d\tilde{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = N_1(x_2) \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - N_1(x_1) \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \quad (17)$$

mas:  $N_1(x_2) = 0$  e  $N_1(x_1) = 1$ , então:

$$N_1(x) \frac{d\tilde{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \quad (18)$$

Similarmente para  $i=2$ :

$$N_2(x) \frac{d\tilde{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} \quad (19)$$

$\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx}$  e  $\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx}$  são chamadas *condições naturais de contorno* do elemento. Assim, o primeiro termo do lado direito da equação (16) representa as condições naturais de contorno nas extremidades do elemento.

Assim, para  $i=1$ , temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x)dx \quad (20)$$

e para  $i=2$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{dN_2(x)}{dx} dx = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_2(x)dx \quad (21)$$

As equações (20) e (21) são chamadas de “Formulação fraca do problema”. Considerando a função aproximação

$$\tilde{T}(x) = a_0 + a_1x \quad (22)$$

que dá origem às funções de forma

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

e portanto:

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{x_2 - x_1}; \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (23)$$

temos para  $i=1$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{T_1 - T_2}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{(T_1 - T_2)}{x_2 - x_1} \quad (24)$$

Similarmente para  $i=2$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{-T_1 + T_2}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{(-T_1 + T_2)}{x_2 - x_1} \quad (25)$$

Agora, reescrevendo as equações na forma matricial:

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{dT(x_1)}{dx} \\ \frac{dT(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x)dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_2(x)dx \end{Bmatrix} \quad (26)$$

A matriz do lado esquerdo da equação é chamada matriz de rigidez do elemento. O vetor do lado esquerdo é o vetor de grandezas nodais. O primeiro vetor do lado direito é o vetor de condições naturais de contorno e o segundo vetor representa o vetor de carregamento. Usando uma notação mais compacta:

$$[K]_e \{T\}_e = \{C\}_e + \{F\}_e \quad (27)$$

Nesse sistema devemos substituir ainda as condições de contorno impostas do problema como  $T(0)=A$  e  $T(L)=B$ . O índice  $e$  indica que se refere ao elemento  $e$ . Os sistemas

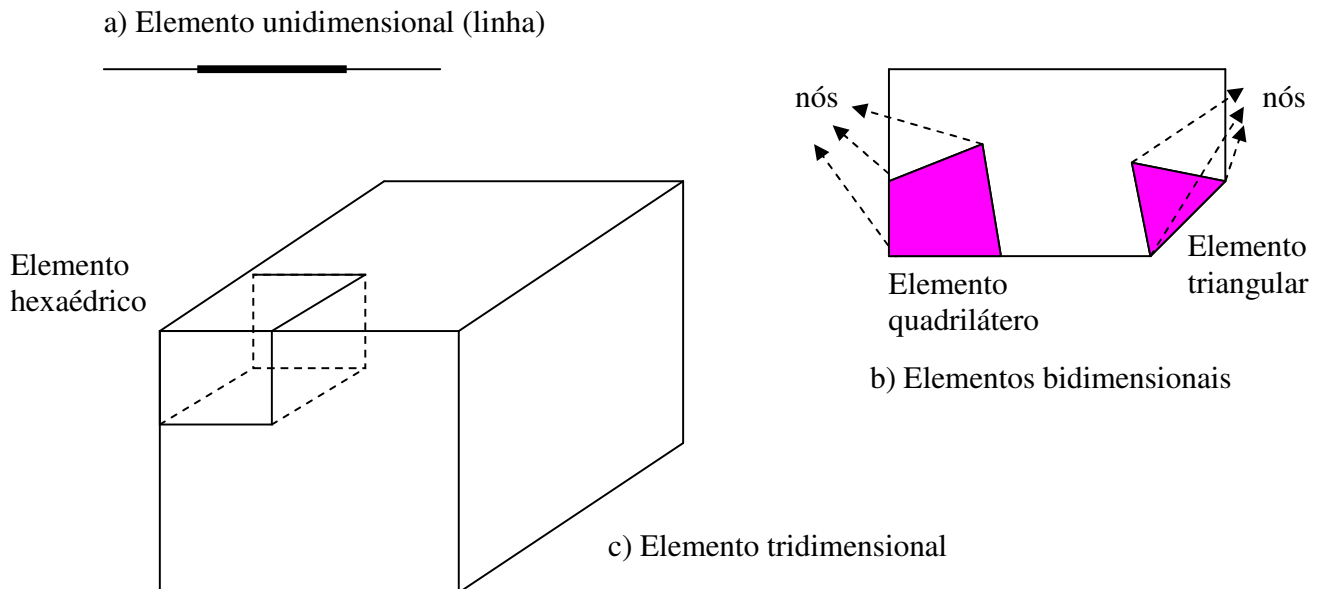
matriciais de todos os elementos devem ser "montados" de forma a dar origem ao sistema matricial global que descreve o comportamento de todo o problema (ver exemplo adiante).

## 2. Procedimento passo a passo para a implementação do MEF

Vamos descrever o procedimento passo a passo para a implementação do MEF para a solução de uma equação diferencial parcial linear genérica.

### a) Discretização

Consiste na divisão em elementos finitos. Para cada dimensão do espaço onde se resolve o problema, teremos um tipo de discretização. O elemento é definido pelos "nós".



### b) Formulação do Elemento:

Deve-se escolher a função aproximadora para representar a solução dentro de cada elemento (ou subdomínio). Essa função deve conter coeficientes não conhecidos que serão determinados de forma a minimizar o erro na solução. Esses coeficientes devem ser escritos em função dos valores nos "nós" da grandeza em estudo (por exemplo, temperatura). As funções aproximadoras mais comuns são os polinômios. Note que escrevendo os coeficientes do polinômio em função das valores nodais, se aumentarmos o grau do polinômio serão necessários mais nós na definição do elemento para poder representar o novo polinômio. No caso unidimensional esses nós podem ser definidos no interior do elemento, por exemplo.

### c) Montagem do Sistema Matricial para o elemento

Seguindo o procedimento descrito anteriormente procede-se a montagem do sistema matricial em função das grandezas nodais. Os coeficientes desse sistema dependem do polinômio aproximador escolhido para o elemento. São determinados inicialmente a matriz de rigidez e o vetor de efeitos externos para cada elemento isolado.

$$[K]_e \{T\}_e = \{C\}_e + \{F\}_e \quad (28)$$

#### d) Montagem

Posteriormente realiza-se a montagem das matrizes dos elementos de forma a constituir as matrizes e vetores globais. Nessa montagem deve-se observar a numeração dos valores nodais (graus de liberdade) em cada elemento:

$$[K]\{T\} = \{C\} + \{F\} \quad (30)$$

#### e) Aplicação das Condições de Contorno

Antes da equação (30) ser resolvida ela deve ser modificada para levar em conta as condições de contorno do sistema:

$$[\bar{K}]\{\bar{T}\} = \{\bar{C}\} + \{\bar{F}\} \quad (31)$$

#### f) Solução

O sistema matricial (31) deve ser resolvido utilizando métodos diretos ou iterativos para a solução de sistemas lineares. No caso de matrizes esparsas deve-se tirar vantagem do grande número de termos nulos para tornar a solução do sistema mais eficiente.

#### g) Pós-processamento

A solução obtida (valores nodais) deve ser organizada na forma de tabelas, plotagens de gráficos bi e tridimensionais, curvas de contorno, etc. para poder ser interpretada. Além disso, variáveis secundárias também podem ser determinadas. Essas variáveis são dadas pelas derivadas dos valores nodais (tensões mecânicas, fluxo de calor, campo elétrico, etc.) e podem ser plotadas usando vetores.

### 3. Comparação entre MEF e MDF

#### MDF

Alguns pontos importantes (vantagens e desvantagens) de MDF são citados abaixo:

- a) Solução limitada a um certo número de pontos;
- b) Solução deve satisfazer exatamente a equação diferencial;
- c) Implementação é simples porém específica para cada tipo de equação diferencial;



- d) Em muitos casos são obtidos sistemas matriciais não simétricos ou não esparsos, o que torna a solução dos mesmos ineficiente do ponto de vista computacional;
- e) Difícil de aplicar em domínios com geometrias irregulares;
- f) Na tentativa de se formular o problema para domínios irregulares surgem condições de contorno não usuais (artificiais).

### MEF

Alguns pontos importantes (vantagens e desvantagens) de MEF são citados abaixo:

- a) Graças ao conceito de função interpoladora (ou aproximadora) a solução é conhecida para qualquer ponto do domínio;
- b) A equação é resolvida na forma integral, ou seja, a equação diferencial é satisfeita segundo um certo critério de minimização do resíduo. Isso "relaxa" o problema e dá mais flexibilidade e generalidade no método para resolver equações diferenciais;
- c) Os sistemas matriciais obtidos são em geral simétricos e esparsos, o que torna eficiente a sua solução;
- d) Implementação é complexa porém genérica;
- e) Não há problemas em se aplicar o MEF em domínios irregulares;

A comparação acima explica em parte o porque a maior parte dos softwares comerciais em engenharia utilizam o MEF e não MDF para a solução de equações diferenciais (seja na área de mecânica, elétrica, etc..). A formulação genérica do MEF é um dos principais pontos na sua popularidade. Uma outra boa razão é que nos primórdios da computação (década de 60) havia um grande problema com a limitação de memória dos computadores. Assim, observando-se a formulação do MEF, nota-se que a princípio necessita-se de menos nós (e portanto memória) no MEF do que no MDF para se obter a mesma precisão na solução da equação, uma vez que a precisão do MEF conta com a ajuda do grau da função aproximadora que pode ser aumentado sem aumentar consideravelmente o número de nós. Assim, o MEF torna-se mais atrativo quando há limitação de memória, o que não é um problema atualmente.

Já o MDF apresenta uma formulação mais simples e que pode ser facilmente implementada usando processamento em paralelo, sendo de grande vantagem quando se possui um supercomputador com processamento em paralelo. Assim, embora seja necessário um maior número de nós, o processamento em paralelo compensa a análise. Por isso, o MDF é muito utilizado na análise de escoamento de fluidos e propagação de ondas, onde a grande discretização necessária no domínio, reduz as vantagens do MEF.

Recentemente, os cientistas têm aplicado MEF utilizando-se de domínios altamente discretizados com malhas quadradas o que simplifica a formulação do método e permite que o mesmo seja paralelizado na solução. Assim unem-se as vantagens dos dois métodos.