

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL BASEADOS NO CÁLCULO
NUMÉRICO DE FUNÇÕES DE GREEN ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

Felipe dos Santos Loureiro

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Delfim Soares Júnior, D.Sc.

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Cláudio José Martins, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2007

LOUREIRO, FELIPE DOS SANTOS

Métodos de Integração Temporal Baseados no
Cálculo Numérico de Funções de Green Através
do Método dos Elementos Finitos [Rio de Janeiro]
2007.

XII, 116 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 2007)

Dissertação – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Função de Green
2. Integração temporal
3. Método dos Elementos Finitos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio ao longo de todos esses anos e ao meu irmão pelas inúmeras discussões construtivas para a minha formação.

Ao professor Webe Mansur pela excelente orientação e por todo aprendizado adquirido ao longo desses anos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL BASEADOS NO CÁLCULO
NUMÉRICO DE FUNÇÕES DE GREEN ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

Felipe dos Santos Loureiro

Fevereiro/2007

Orientadores: Webe João Mansur

Delfim Soares Júnior

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho descreve uma nova família de métodos de integração temporal denominados ExGA (“Explicit Green Approach”). A função de Green, em coordenadas nodais, é calculada numericamente pelo método dos elementos finitos. As matrizes de Green e suas derivadas são computadas explicitamente no intervalo $[0, \Delta t]$ utilizando os métodos clássicos de marcha no tempo, por exemplo, Newmark, Runge Kutta, etc.. Afim de melhorar o algoritmo ExGA, uma matriz adicional chamada Degrau é também calculada resultando no método ExGAH. Os novos métodos tornam-se mais estáveis e precisos quando um procedimento de sub-passos é adotado para calcular as matrizes de Green, Degrau e suas derivadas no final do primeiro intervalo de tempo, i.e., em $t = \Delta t$.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TIME INTEGRATION METHODS BASED ON THE CALCULATION OF
NUMERICAL GREEN'S FUNCTIONS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Felipe dos Santos Loureiro

February/2007

Advisors: Webe João Mansur

Delfim Soares Júnior

Department: Civil Engineering

The present work describes a new family of time integration methods called ExGA (Explicit Green Approach). The Green's function is calculated numerically in nodal coordinates by the finite element method. The Green's matrix and its time derivative are computed explicitly through the range $[0, \Delta t]$ with classical time integration schemes, such as Newmark, Runge Kutta, etc.. In order to improve the ExGA algorithm, an additional matrix called Step matrix is also calculated, originating the ExGAH method. The new methods become more stable and accurate when a sub-step procedure is adopted to obtain the Green's and Step matrices and their time derivatives at the end of the first time step, i.e., at $t = \Delta t$.

Índice

1. INTRODUÇÃO	1
2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	5
2.1. EQUAÇÃO DA ONDA	5
2.2. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	8
2.3. MAPEAMENTO ISOPARAMÉTRICO E INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	11
2.4. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	13
2.5. MATRIZ MASSA DIAGONAL	15
3. MÉTODOS DE GREEN	17
3.1. FORMULAÇÃO	17
3.2. INTEGRAL NUMÉRICA DE CONVOLUÇÃO	23
3.3. SUB-DOMÍNIOS OU SUB-REGIÕES	26
4. ALGORITMOS DE MARCHA NO TEMPO	29
4.1. EXGA-NEWMARK	29
4.1.1. <i>ExGA-Diferença Central Tarnow</i>	30
4.2. EXGA-WILSON θ	31
4.3. EXGA-HHT- α E EXGA-BOSSAK- α	32
4.4. EXGA-RUNGE KUTTA	33
4.5. MATRIZES SIMÉTRICAS	35
4.5.1. <i>Definições</i>	35
4.5.2. <i>ExGA-Runge Kutta Simétrico</i>	37
4.5.3. <i>ExGA-Newmark Simétrico</i>	38
4.6. MÉTODO GREEN SIMÉTRICO	39
4.7. MÉTODO EXGAH COM MATRIZ MASSA NÃO DIAGONAL	41
5. ESTABILIDADE	43
5.1. MUDANÇA DE BASE	43
5.2. CONCEITO	45
5.2.1. <i>Matriz de amplificação analítica</i>	47

5.3. MÉTODO EXGA -----	49
5.3.1. Matriz de amplificação e gráficos -----	49
5.3.2. Relação entre ExGA-Newmark e Newmark-----	55
5.4. MÉTODO EXGAH -----	59
5.4.1. Matriz de amplificação e gráficos -----	59
6. ANÁLISE DE ERRO-----	64
6.1. PRECISÃO-----	64
6.1.1. Conceito e gráficos -----	64
6.2. ERRO DO OPERADOR DE CARGA-----	72
6.3. ESTIMATIVA DO INTERVALO DE TEMPO -----	78
7. ANÁLISE DE RESULTADOS -----	82
7.1. DEFINIÇÕES -----	82
7.2. BARRA HOMOGÊNEA -----	84
7.3. BARRA NÃO-HOMOGÊNEA -----	89
7.4. MEMBRANA SOB CONDIÇÃO INICIAL DE VELOCIDADE -----	91
7.5. MEIO GEOFÍSICO -----	97
8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES-----	104
9. REFERÊNCIAS-----	106
10. APÊNDICE -----	112
10.1. APÊNDICE A: SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A BARRA ENGASTADA-----	112
10.2. APÊNDICE B: SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A MEMBRANA -----	115

Índice de Figuras

Figura 2.1 - Discretização do domínio por elementos finitos.....	8
Figura 2.2 - Mapeamento entre as coordenadas (x,y,z) e (ξ,η,ζ)	11
Figura 2.3 - Continuidade da função de interpolação para um agrupamento de 4 elementos quadriláteros bilineares.....	14
Figura 3.1 – Representação dos domínios Ω e Ω^* em 2D e suas respectivas discretizações.....	27
Figura 5.1 – Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para o método RK e ExGA-RK ⁿ	51
Figura 5.2 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos ; (a) RK e ExGA-RK ⁿ ; (b) DC e ExGA-DC ⁿ ; (c) ExGA-DCT ⁿ	52
Figura 5.3 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) WS e ExGA-WS ⁿ ; (b) HHT, BK, ExGA-HHT ⁿ e ExGA-BK ⁿ	53
Figura 5.4 – Superfície $\rho(A)=1$ em função de γ e β para os métodos: (a) Newmark (NW); (b) ExGA-NW ¹	58
Figura 5.5 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) DC e ExGAH-DC ⁿ ; (b) NW e ExGAH-NW ⁿ	60
Figura 5.6 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) WS e ExGAH-WS ⁿ ; (b) HHT, BK, ExGAH-HHT ⁿ e ExGAH-BK ⁿ	61

Figura 6.1 - Ilustração do alongamento de período (AP) e decaimento da amplitude (DA) para $\xi = 0.0$	65
Figura 6.2 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) RK e ExGA-RK ⁿ , (b) DC e ExGA-DC ⁿ	67
Figura 6.3 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) ExGA-DCT ⁿ ; (b-c) NW e ExGA-NW ⁿ ; (d) WS e ExGA-WS ⁿ	68
Figura 6.4 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: HHT, BK, ExGAH-HHT ⁿ e ExGAH-BK ⁿ	69
Figura 6.5 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) DC e ExGAH-DC ⁿ ; (b) NW e ExGAH-NW ⁿ	70
Figura 6.6 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) NW e ExGAH-NW ⁿ ; (b) WS e ExGAH-WS ⁿ ; (c) HHT, BK, ExGAH-HHT ⁿ e ExGAH-BK ⁿ	71
Figura 7.1 - Representação da sub-malha e comparação entre o raio teórico e o raio teórico numérico.....	83
Figura 7.2 - Barra engastada. (a) Geometria e condições de contorno; (b) Carregamento adotado ao longo do tempo.....	84
Figura 7.3 – Deslocamento nos pontos A e B e velocidade no ponto A para os métodos: (a) RK, ExGA-RK ¹ , ExGA-RK ² ; (b) DC, ExGA-DC ¹ , ExGA-DC ² , ExGA-DCT ¹ ; (c) NW, ExGA/H-NW ¹	73

Figura 7.4 - Deslocamento nos pontos A e B para os métodos NW, ExGA-RK ¹⁵ , ExGA-DCT ¹⁵ , ExGA/H-NW ¹⁵ ($\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$).....	87
Figura 7.5 – Método ExGA-RK1 com $\Delta t = 8.10^{-6}s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 0.1$ m.....	88
Figura 7.6 - Geometria e condições de contorno para a barra.....	89
Figura 7.7 - Deslocamento nos pontos A e B para os métodos DC, NW, ExGAH-DC ¹ , ExGA/H-NW ¹⁴ e ExGAH-DC ¹⁴	90
Figura 7.8 - Membrana engastada. (a) Definição da geometria e condições de contorno; (b) Campo inicial de velocidade.....	91
Figura 7.9 – Deslocamento no ponto A ($a/2, a/2$) para os métodos: (a) ExGA-RK ¹ , ExGA-DC ¹ , ExGA-DCT ¹ , NW, ExGA-RK ¹⁵ , ExGAH-DC ¹⁵ ; (b) ExGA/H-NW ¹ e ExGA/H-NW ¹⁵	94
Figura 7.10 – Campo de deslocamento considerando instantes de tempo variando de 0.25s a 1.5s para a membrana sob condição inicial de velocidade utilizando o método ExGAH-DC ¹ com $\Delta t = 0.05s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 0.02$ m.....	95
Figura 7.11 - Campo de deslocamento considerando instantes de tempo variando de 1.75s a 3.0s para a membrana sob condição inicial de velocidade utilizando o método ExGAH-DC ¹ com $\Delta t = 0.05s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 0.02$ m.....	96
Figura 7.12 – Modelo em camadas para o meio geofísico.....	97
Figura 7.13 – Amplitude da fonte sísmica versus tempo.....	98

Figura 7.14 – Pressões nos pontos A e B, calculadas pelos métodos RK, ExGA-RK ⁴ e ExGAH-DC ⁴	100
Figura 7.15 - Pressões nos pontos C, D e E, calculadas pelos métodos RK, ExGA-RK ⁴ e ExGAH-DC ⁴	101
Figura 7.16 – Campo de pressão considerando instantes de tempo variando de 0.25s a 1.5s obtidos pelo método ExGAH-DC ¹ com $\Delta t = 0.0005s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 20$ m.....	102
Figura 7.17 - Campo de pressão considerando instantes de tempo variando de 1.75s a 3.0s obtidos pelo método ExGAH-DC ¹ com $\Delta t = 0.0005s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 20$ m.....	103

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 - Pontos e pesos de integração para a regra de Newton-Cotes.....	23
Tabela 5.1 – Notação para os métodos de integração temporal*	47
Tabela 6.1 - Expansão em série de Taylor do operador de carga numérico para o método ExGA-RK ⁿ	75
Tabela 6.2 - Expansão em série de Taylor do operador de carga numérico para o método ExGA-DC ⁿ	76
Tabela 6.3- Auto-valores para cálculo da maior frequência do elemento onde $\omega_{max}^e = \sqrt{\lambda_{max}^e}; \lambda_{max}^e = \max_{i=1,2,...} \lambda_i^e . *$	81

1. Introdução

Métodos numéricos são de grande importância para a resolução de problemas complexos, entre eles se destacam, o método dos elementos finitos, volumes finitos, diferenças finitas e elementos de contorno. Esses métodos, quando aplicados a problemas dependentes do tempo, geram um sistema matricial de equações diferenciais ordinárias. Entre vários métodos de solução, métodos diretos ou de integração temporal são os mais utilizados.

O método de Newmark (NEWMARK, 1959) é um dos mais utilizados em certas aplicações, como por exemplo, em problemas estruturais. No entanto, o algoritmo de Newmark não é dissipativo, i.e., capacidade de amortecer frequências mais altas ou espúrias, mantendo uma precisão de segunda ordem, sendo dissipativo apenas quando sua precisão for de primeira ordem.

Para contornar este problema inúmeros métodos foram propostos com as seguintes características: estabilidade incondicional, dissipativo e precisão de segunda ordem. Entre eles se destacam os métodos, Wilson- θ (BATHE & WILSON, 1973), Houbolt (HOUBOLT, 1950), Park (PARK, 1975), HHT- α (HILBER *et al.*, 1977), α -generalizado (HULBERT & CHUNG, 1996), Bazzi Anderheggen- ρ (BAZZI & ANDERHEGGEN, 1982), etc.. ZIENKIEWICZ *et al.* (1984) utilizando o método dos resíduos ponderados no tempo generalizou os métodos de passo único através dos algoritmos *SSpj* (“Single Step algorithms”), mostrando que uma grande classe de métodos podem ser obtidos, incluindo alguns dos métodos clássicos. Posteriormente, CAMPBELL & ROBINSON (1997) generalizaram ainda mais os métodos de passo único através do algoritmo *MVpq* (“Multivalued algorithms”) que inclui os algoritmos *SSpj* como caso especial, sua grande vantagem se dá pela possibilidade de utilização de

intervalos de tempo variáveis e integrações não uniformes com refinamento tipo- p no tempo para diferentes equações diferenciais do sistema global.

Métodos com ordem de precisão mais alta vêm sendo desenvolvidos a fim de diminuir erros de origem distinta, podendo melhor representar a solução em longos períodos de tempo. KUTTA (1901) generalizou o método proposto por RUNGE (1895) para a obtenção de métodos de ordem s . ARGYRIS *et al.* (1973) utilizaram polinômios hermitianos de ordem $2n$ para aproximar a força inercial, obtendo uma família de algoritmos incondicionalmente estáveis de ordem variável. Posteriormente FUNG (1996) utilizou polinômios hermitianos e o método dos resíduos ponderados para obter métodos incondicionalmente estáveis de terceira e quarta ordem.

Com o objetivo de melhorar a precisão do método de Newmark, AUSTIN (1993) propôs um processo de sub-marcha para obter algoritmos de ordem elevada, utilizando técnicas de extrapolação de Romberg. Entretanto, o método é incondicionalmente instável sendo preciso apenas para intervalos de tempo relativamente pequenos. TARNOW & SIMO (1994) apresentaram um processo de sub-marcha para obter métodos de quarta ordem a partir de métodos de segunda ordem, bastando apenas efetuar três intervalos de tempo específicos para avançar no tempo. FUNG (1997) estabeleceu métodos incondicionalmente estáveis de ordem variável a partir do método de Newmark, diferentemente do método de TARNOW & SIMO (1994), o método efetua processos de sub-marcha independentes, sendo posteriormente combinados linearmente.

Recentemente, ZHONG & WILLIAMS (1994) apresentaram um método de integração temporal bastante preciso denominado de “Precise Time Step Integration Method”, onde a equação diferencial de segunda ordem é transformada para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e resolvida em função de uma matriz

exponencial e uma integral de convolução. Para problemas homogêneos, o método pode representar precisamente a solução para qualquer valor de intervalo de tempo quando a matriz exponencial é calculada recursivamente. Entretanto, o método perde precisão quando aplicado a problemas não homogêneos, já que a parcela não homogênea requer a inversão de uma matriz. Vários trabalhos tentam aprimorar a parte não homogênea do método (LIN *et al.*, 1995, GU *et al.*, 2000), mas todos continuam com a inversão da matriz em suas formulações. WANG & AU (2006) efetuaram a integral de convolução sem inversão de matriz e utilizando integração de Gauss, melhorando assim o método.

O método proposto por ZHONG & WILLIAMS (1994) é melhor aplicado em problemas com equações de primeira ordem, e.g., condução de calor, onde a equação original não precisa ser modificada (ZHONG *et al.*, 1996, XIKUI *et al.*, 2000, CHEN *et al.*, 2001, CHEN *et al.*, 2004). FUNG (1997) sugeriu um novo algoritmo bastante preciso, baseado no cálculo numérico de uma função impulso e degrau. Este método tem a vantagem de operar com a equação diferencial de segunda ordem diretamente sem requerer qualquer tipo de transformação, o que do ponto de vista computacional é bastante vantajoso. No entanto, seu trabalho não menciona o cálculo da parte não homogênea da equação diferencial. SOARES & MANSUR (2004a) através do método ImGA (“Implicit Green Approach”) estabeleceram novos algoritmos de integração temporal, tal método baseia-se no cálculo numérico e implícito da função de Green.

O presente trabalho tem por objetivo estabelecer novos métodos de integração temporal ou de marcha no tempo baseados no cálculo numérico da função de Green. Diferentemente do método ImGA, o presente método denominado ExGA (“Explicit Green Approach”) calcula a função de Green explicitamente utilizando algoritmos clássicos de integração temporal. Uma versão preliminar da teoria dos métodos de Green, i.e., ImGA e ExGA, pode ser encontrada em MANSUR (1983). Também é

proposto uma variação do método ExGA denominado ExGAH, onde além do cálculo numérico da função de Green, uma função Degrau também deve ser calculada. Com a intenção de diminuir o custo computacional tanto a função de Green quanto a função Degrau são calculadas em pequenas regiões do domínio. Assim como o método proposto por ZHONG & WILLIAMS (1994), os métodos ExGA e ExGAH calculam precisamente a solução para qualquer intervalo de tempo incluindo a parte não-homogênea, bastando apenas calcular as funções de Green e Degrau recursivamente.

De forma sucinta os seguintes tópicos são abordados: no capítulo 2 são apresentadas as equações governantes do problema, tendo como enfoque maior a equação escalar da onda, bem como sua discretização espacial pelo método dos elementos finitos. No capítulo 3 é discutido toda a metodologia necessária para o desenvolvimento do método de Green e apresentado o conceito de sub-malha, na qual a função de Green e Degrau são calculadas. Algoritmos clássicos de marcha no tempo, tais como Newmark, Wilson- θ , Runge Kutta, etc., estão apresentados no capítulo 4, sendo utilizados para o cálculo numérico das funções de Green e Degrau. No capítulo 5 e 6 são discutidos conceitos de estabilidade e análise de erro, respectivamente, os quais têm por objetivo validar os métodos ExGA e ExGAH para que possam ser utilizados na prática. Exemplos de aplicação e os correspondentes resultados obtidos são analisados no capítulo 7, mostrando a eficácia dos métodos ExGA e ExGAH.

2. Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes, assim como a formulação pelo método dos elementos finitos. A formulação adotada neste trabalho é um caso particular do método dos resíduos ponderados denominado método de Galerkin. Tendo como enfoque a equação escalar da onda, é mostrada a metodologia necessária para efetuar o cálculo das matrizes de massa, amortecimento e rigidez nas coordenadas naturais, bem como a condição necessária para a determinação das funções de interpolação do elemento. Também são apresentados conceitos de integração numérica e metodologias para a obtenção de matriz massa diagonal.

2.1. Equação da Onda

Considerando-se o meio elástico isotrópico, a equação de Navier-Stokes (GRAFF, 1991) se reduz a:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla.\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ representa o vetor deslocamento, $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ a força de volume, ρ a massa específica e μ, λ as constantes de Lamé.

De acordo com o teorema de Helmholtz (MORSE & FESHBACH, 1973), o vetor deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ na equação (2.1) pode ser transformado em uma soma contendo um potencial escalar φ e um potencial vetorial $\boldsymbol{\psi}$, i.e.:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad \nabla.\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.1) e ignorando o termo da força de volume, duas equações desacopladas são obtidas:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi = \rho\ddot{\varphi} \quad (2.3)$$

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{\psi} = \rho\ddot{\boldsymbol{\psi}} \quad (2.4)$$

As equações acima podem ser atribuídas a fenômenos físicos tais como propagação de ondas do tipo P e S . Considerando $\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}$ a dilatação volumétrica e utilizando a equação (2.2), tem-se:

$$\varepsilon = \nabla \cdot (\nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla^2\varphi \quad (2.5)$$

Analogamente, definindo o vetor rotacional como $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$ e considerando a equação (2.2), o vetor $\boldsymbol{\omega}$ pode ser reescrito como:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times (\nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2}\nabla^2\boldsymbol{\psi} \quad (2.6)$$

Aplicando o operador de Laplace ∇^2 nas equações (2.3) e (2.4), duas equações são geradas, uma para a dilatação volumétrica ε e outra para o rotacional $\boldsymbol{\omega}$:

$$\ddot{\varepsilon} = c_1^2\nabla^2\varepsilon, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (2.7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = c_2^2\nabla^2\boldsymbol{\omega}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho} \quad (2.8)$$

As constantes de Lamé μ e λ podem ser reescritas em função do módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν como:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Fisicamente a equação (2.7) mostra que qualquer dilatação ou mudança de volume ε , a onda resultante se propaga com uma velocidade c_1 sem sofrer nenhum tipo de rotação, essas ondas irrotacionais também são conhecidas como ondas P. Já para as ondas rotacionais, equação (2.8), sua velocidade de propagação é dada por c_2 , esse tipo de onda também é conhecido como ondas S ou cisalhantes.

A equação da onda acústica pode ser obtida através da equação escalar (2.7), assumindo $\nu = 0$ em (2.9) e supondo $E \equiv K$. Considerando um domínio Ω com contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Figura 2.1), a equação (2.7) pode ser ampliada resultando na seguinte equação:

$$K\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \varsigma \dot{u}(\mathbf{x}, t) - \rho \ddot{u}(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Omega\tag{2.10}$$

com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned}u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u} && \text{em } \Gamma_1 \\ K \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n} &= \bar{p} && \text{em } \Gamma_2\end{aligned}\tag{2.11}$$

e condições iniciais expressas como

$$\begin{aligned}u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{em } \Omega \\ \dot{u}(\mathbf{x}, 0) &= \dot{u}_0(\mathbf{x}) && \text{em } \Omega\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde K representa o coeficiente de compressibilidade, ς o amortecimento viscoso, ρ a massa específica, n o vetor unitário normal ao contorno orientado para fora do domínio, $s(\mathbf{x}, t)$ representa possíveis fontes no domínio e $u(\mathbf{x}, t)$ a solução do campo escalar.

2.2. Discretização espacial

Em elementos finitos o domínio $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ é dividido em um conjunto de sub domínios, i.e., $\bar{\Omega}^e = \Omega^e \cup \Gamma^e$, chamado de elemento, como visto na Figura 2.1.

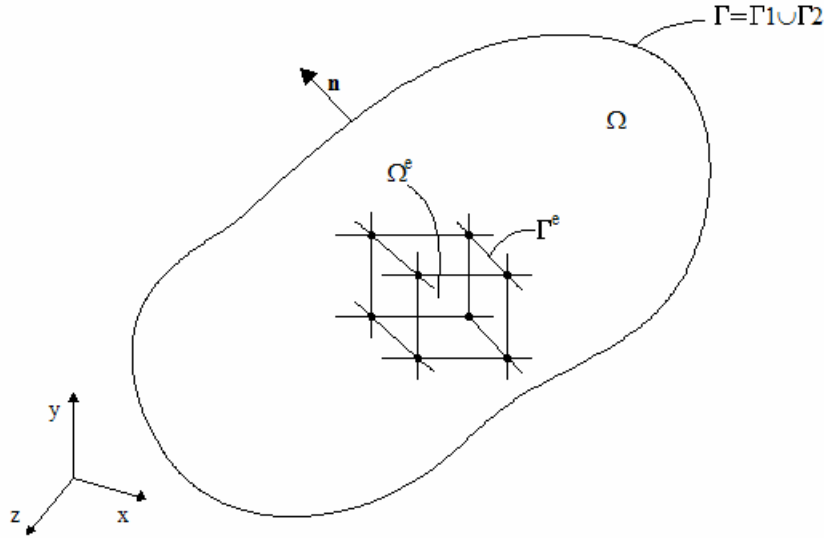


Figura 2.1 - Discretização do domínio por elementos finitos.

Aplicando para cada elemento o método dos resíduos ponderados na equação da onda acústica (2.10), tem-se (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005):

$$\int_{\Omega^e} (K \nabla^2 \tilde{u} - \varsigma \dot{\tilde{u}} - \rho \ddot{\tilde{u}} - s) w d\Omega = \int_{\Gamma_2^e} (K \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} - \bar{p}) w d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_1^e} (\tilde{u} - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma_1 \quad (2.13)$$

O campo de deslocamento aproximado $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ e a função de ponderação $w(\mathbf{x}, t)$ são obtidos pelas seguintes expressões desacopladas em relação ao tempo e espaço:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{ns} N_i(\mathbf{x}) u_i^e(t) \quad (2.14)$$

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{ns} \phi_j(\mathbf{x}) w_j^e(t) \quad (2.15)$$

onde N_i são funções de interpolação, ϕ_j funções pré-definidas, $u_i^e(t)$ e $w_j^e(t)$ coeficientes nodais do elemento e ns o número de nós do elemento utilizado.

Na equação (2.13), a função de ponderação w representa uma função escalar diferente de zero e integrável. Utilizando-se o método de Galerkin, tem-se que, a função ϕ_j é igual à própria função de interpolação, i.e., $\phi_j = N_j$, em geral essa aproximação gera matrizes simétricas.

Aplicando-se o teorema de Green-Gauss (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005) no primeiro termo da equação (2.13) e admitindo-se solução exata no contorno Γ_1 , i.e., $\tilde{u} - \bar{u} = 0$, é possível desacoplar as integrais em Γ_1 do restante do sistema. Após feitas às etapas descritas anteriormente, chega-se então na forma fraca para a equação diferencial da onda. Aplicando a equação integral (forma fraca) em todos os elementos, chega-se em um sistema linear de equações diferenciais de segunda ordem dado pela seguinte equação matricial (WEAVER & JOHNSTON, 1987, ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.16)$$

As matrizes acima e o vetor $\mathbf{F}(t)$ são definidos como:

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{M}^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{C}^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varsigma} \mathbf{N} d\Omega \quad (2.18)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{K}^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.19)$$

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{e=1}^{nel_c} \mathbf{F}_1^e(t) - \sum_{e=1}^{nel_f} \mathbf{F}_2^e(t) = \sum_{e=1}^{nel_c} \int_{\Gamma_{2,e}} \bar{p} \mathbf{N} d\Gamma_2 - \sum_{e=1}^{nel_f} \int_{\Omega_e} s \mathbf{N} d\Omega \quad (2.20)$$

Sendo \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, geradas a partir de um total de nel elementos. $\mathbf{F}(t)$ representa o vetor resultante proveniente das contribuições do contorno e fontes aplicadas sob o domínio, com nel_c representando o número total de elementos pertencentes ao contorno Γ_2 e nel_f o número total de elementos sob a região na qual esta sendo aplicada a fonte.

$\mathbf{U}(t)$, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ representam os vetores globais deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, \mathbf{N} o vetor contendo as funções de interpolação ou de aproximação e \mathbf{D} a matriz constitutiva, i.e., matriz diagonal (meio isotrópico ou ortotrópico) contendo os coeficientes de compressibilidade K do meio.

A matriz \mathbf{B} (matriz gradiente $\mathbf{B} = \nabla^T \mathbf{N}$) na equação (2.19) contém as derivadas das funções de interpolação no sistema global xyz , i.e.:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{ns}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{ns}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{ns}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

2.3. Mapeamento isoparamétrico e integração numérica

Para se estudar o problema em função das coordenadas naturais, é necessário fazer um mapeamento, por exemplo isoparamétrico, entre as duas coordenadas como ilustrado na Figura 2.2. Esta transformação é feita utilizando-se as funções de interpolação N_i e as coordenadas dos pontos nodais x_i, y_i e z_i do elemento. As coordenadas (x,y,z) em função de (ξ,η,ζ) são dadas por:

$$\begin{aligned} x(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{ns} N_i(\xi,\eta,\zeta) x_i \\ y(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{ns} N_i(\xi,\eta,\zeta) y_i \\ z(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{ns} N_i(\xi,\eta,\zeta) z_i \end{aligned} \quad (2.22)$$

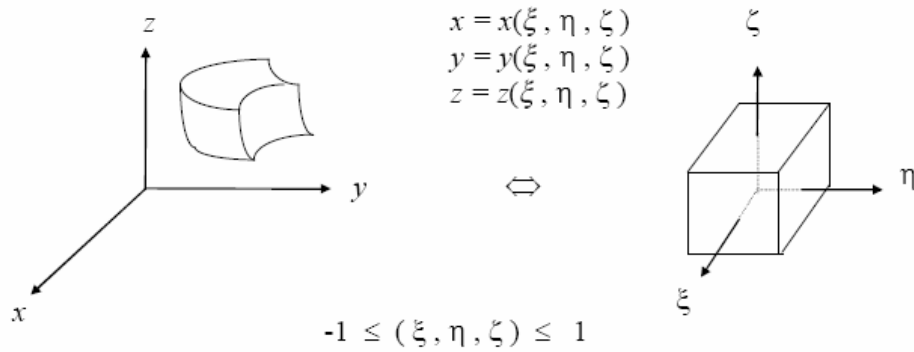


Figura 2.2 - Mapeamento entre as coordenadas (x,y,z) e (ξ,η,ζ) .

As derivadas das funções de interpolação em relação a (x,y,z) são obtidas através da matriz jacobiana que relaciona as derivadas entre a coordenada global e natural (local), sendo as expressões obtidas através da regra da cadeia, como indicado a seguir (BATHE, 1996):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

com

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

As integrais de volume definidas nas equações (2.17) a (2.20) também são calculadas nas coordenadas naturais, através da seguinte transformação:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{f}(x, y, z) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.25)$$

onde a função \mathbf{f} representa o integrando e pode ser por exemplo $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$.

Em muitos casos a integral definida acima não possui solução analítica e precisa ser integrada numericamente. Em elementos finitos é usual adotar integração por Gauss, onde se obtém a seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi, \eta, \zeta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta = \sum_{k=1}^{n_{\text{int}}^3} \sum_{j=1}^{n_{\text{int}}^2} \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}^1} \mathbf{f}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k \quad (2.26)$$

onde $n_{\text{int}}^1, n_{\text{int}}^2$ e n_{int}^3 representam o número de pontos de integração, (ξ_i, η_j, ζ_k) são os pontos de Gauss e w_i, w_j e w_k seus respectivos pesos, todos tabelados.

O número de pontos de Gauss para elementos unidimensionais, quadrangulares (2D) ou hexaédricos (3D) é selecionado através da seguinte expressão $n_{\text{int}} = \text{inteiro}\left(\frac{p+1}{2}\right) + 1$ (REDDY, 1993), com p sendo a ordem do polinômio do integrando, para outros elementos a seguinte referência é indicada BATHE, (1996).

2.4. Funções de interpolação

A obtenção das funções de interpolação são mais facilmente deduzidas através das coordenadas naturais (ξ, η, ζ) . Funções de interpolação para elementos em duas ou três dimensões podem ser obtidas multiplicando-se o polinômio de Lagrange nos eixos coordenados. Os polinômios de Lagrange (l_k^{ns}) em uma dimensão podem ser obtidos utilizando-se a seguinte expressão:

$$l_k^{ns}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_{ns})}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_{ns})} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{ns} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_k - \xi_i)} \quad (2.27)$$

onde se tem $l_k^{ns}(\xi_k) = 1$ e $l_k^{ns}(\xi_i) = 0$ para $i \neq k$.

As funções de interpolação para um elemento com domínio Ω^e e contorno Γ^e são escolhidas obedecendo certas regras de convergência (HUGHES, 2000), entre as quais se destacam:

i) funções de classe C^m no interior do domínio Ω^e .

ii) funções de classe C^{m-1} através do contorno Γ^e entre os elementos.

iii) funções completas, i.e., polinômio completo de ordem no mínimo m deve ser utilizado.

Sendo que, nestas regras, m representa a ordem da derivada encontrada no integrando (como por exemplo, da matriz de rigidez) e C^m expressa continuidade até a derivada m da função.

De acordo com *i* e *ii*, as funções de interpolação para a equação da onda acústica podem ser no mínimo de classe C^1 e C^0 , respectivamente. Para exemplificar, as funções de interpolação para um elemento quadrilátero bilinear (4 nós) serão analisadas. Suas funções de interpolação são dadas por:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.28)$$

Nota-se claramente que a função (2.28) satisfaz a condição *i*. Considerando-se um ponto nodal A com quatro elementos adjacentes (Figura 2.3), percebe-se que a condição *ii* também é satisfeita.

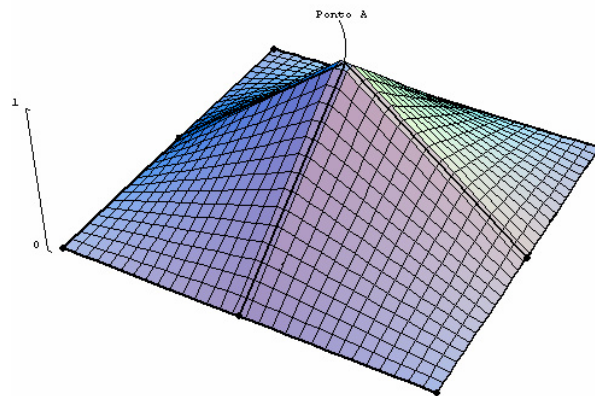


Figura 2.3 - Continuidade da função de interpolação para um agrupamento de 4 elementos quadriláteros bilineares.

A condição *iii* é necessária para representar várias possibilidades da solução, i.e., constante, linear, quadrática e assim por diante. Logo da condição *iii*, as funções de

interpolação para a equação da onda devem satisfazer no mínimo uma aproximação para o campo escalar u^e através de um polinômio linear, i.e.:

$$u^e = \sum_{i=1}^n N_i u_i^e = \sum_{i=1}^{ns} N_i (c_0 + c_1 x_i^e + c_2 y_i^e) = \left(\sum_{i=1}^{ns} N_i \right) c_0 + \left(\sum_{i=1}^{ns} N_i x_i^e \right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^{ns} N_i y_i^e \right) c_2 \quad (2.29)$$

tal que, a seguinte função seja obtida

$$u^e = c_0 + c_1 x + c_2 y \quad (2.30)$$

Na função (2.29) x_i^e e y_i^e representam as coordenadas nodais do elemento.

Analisando as expressões (2.29) e (2.30) conclui-se que o somatório das funções de interpolação deve ser igual a um, i.e., $\sum_{i=1}^{ns} N_i = 1$; para casos tridimensionais basta acrescentar a variável z nas equações acima.

As funções de interpolação também possuem a seguinte característica:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{i,j} \quad (2.31)$$

onde $\delta_{i,j}$ representa o delta de Kronecker.

2.5. Matriz massa diagonal

A matriz massa definida em (2.17) é denominada matriz consistente e não é diagonal; entretanto, matriz massa diagonal possui um grande atrativo, principalmente do ponto de vista computacional e quando aplicadas a métodos explícitos de marcha no tempo. Dentre as matrizes massa diagonais, se destacam, as técnicas: “Row Sum”, HRZ e quadratura nodal.

A matriz massa “Row Sum” (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005, COOK, 2001), é definida como:

$$M_{i,j}^e = \begin{cases} \sum_{j=1}^{ns} \int_{\Omega^e} N_i \rho N_j d\Omega = \int_{\Omega^e} N_i \rho d\Omega & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.32)$$

note que $\sum_{j=1}^{ns} N_j = 1$ como definido na seção anterior.

A matriz massa HRZ, proposta por HINTON *et al.* (1976) é construída como sendo proporcional à matriz massa consistente, tal que toda a massa se conserve quando multiplicada por uma constante α . Sua principal vantagem é que a matriz massa sempre será positiva, sua expressão é dada por:

$$M_{i,j} = \begin{cases} \alpha \int_{\Omega^e} N_i \rho N_j d\Omega & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.33)$$

onde

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega^e} \rho d\Omega}{\sum_{i=1}^{ns} \int_{\Omega^e} N_i \rho N_j d\Omega} \quad (2.34)$$

Outra possibilidade é considerar os pontos de integração localizados nos nós do elemento (FRIED & MALKUS, 1975), isto é feito utilizando, em certos casos, integração numérica de Lobatto (HUGHES, 2000). Portanto, a matriz massa consistente definida em (2.17) pode ser reescrita como:

$$M_{i,j} = \begin{cases} \rho(\xi_i) \det \mathbf{J}(\xi_i) w_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.35)$$

3. Métodos de Green

Funções de Green são geralmente utilizadas para se resolver equações diferenciais ordinárias e parciais. Sua aplicabilidade também se estende às metodologias numéricas como o método dos elementos de contorno e a problemas de controle onde funções de transferências no domínio de Laplace são bastante utilizadas. No entanto, sua utilização em algoritmos numéricos no domínio do tempo, ainda não é de total conhecimento sendo um campo em aberto para futuras pesquisas.

No presente capítulo é exposta a metodologia necessária para a utilização da função de Green para resolver a equação de movimento no tempo após ser discretizada espacialmente pelo método dos elementos finitos. Será mostrado que somente a função de Green no instante $t = \Delta t$ é necessária para se efetuar o processo de marcha no tempo e será apresentado também o conceito de sub-domínios ou sub-regiões nas quais a função de Green é calculada, reduzindo assim o custo computacional.

3.1. Formulação

A dedução de uma expressão para o vetor deslocamento utilizando-se a função de Green pode ser feita aplicando a transformada de Laplace na equação de movimento representada por (2.16), ou seja:

$$\mathbf{M} \left(s^2 \mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] - s\mathbf{U}(0) - \dot{\mathbf{U}}(0) \right) + \mathbf{C} \left(s \mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] - \mathbf{U}(0) \right) + \mathbf{K} \mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] = \mathcal{L}[\mathbf{F}(t)] \quad (3.1)$$

A notação $\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)]$ e $\mathcal{L}[\mathbf{F}(t)]$ representa a transformada de Laplace do vetor deslocamento e força, respectivamente. Simplificando a equação (3.1), o vetor $\mathbf{U}(t)$ pode ser reescrito no domínio de Laplace como:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] = \mathbf{T}(s) \left(s\mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \mathbf{C}\mathbf{U}(0) \right) + \mathbf{T}(s)\mathcal{L}[\mathbf{F}(t)] \quad (3.2)$$

onde a matriz $\mathbf{T}(s)$ representa a função de transferência dada por:

$$\mathbf{T}(s) = (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (3.3)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (3.2), tendo em vista a equação (3.3) e posteriormente derivando o vetor deslocamento no tempo, chega-se às seguintes expressões para o vetor deslocamento e velocidade:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{C}\mathbf{U}(0) + \dot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \mathbf{G}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \dot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{C}\mathbf{U}(0) + \ddot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \dot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}(t-\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau$$

onde $\mathbf{G}(t)$ representa a função de Green na forma matricial, dada por:

$$\mathbf{G}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{T}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}] \quad (3.5)$$

A função de Green $\mathbf{G}(t)$ é geralmente chamada de resposta impulsiva do sistema, pois a mesma pode ser obtida aplicando-se a seguinte equação de equilíbrio discretizada via MEF:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{G}(t) = \mathbf{I}\delta(t) \quad (3.6)$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{G}}(0) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac aplicada no instante $\tau = 0$ expressa como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & , \quad \forall t \in [0, \Delta t]; \quad \Delta t \rightarrow 0 \\ 0 & , \quad \forall t \notin [0, \Delta t] \end{cases}\tag{3.8}$$

A equação (3.6) pode ser reescrita levando em consideração a integral da segunda lei de Newton, i.e., $\mathbf{F} = \mathbf{M} \frac{d\dot{\mathbf{G}}}{dt}$, onde se conclui que o impulso ($\mathbf{I_p}$) é igual à variação da quantidade de movimento, ou seja:

$$\mathbf{I_p} = \int_{0^-}^0 \mathbf{F} dt = \int_{0^-}^0 \mathbf{M} d\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{M} (\dot{\mathbf{G}}(0) - \dot{\mathbf{G}}(0^-)) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{G}}(0)\tag{3.9}$$

Tendo em vista a força aplicada na equação (3.6), tem-se que a integral da força na equação (3.9) se transforma em:

$$\mathbf{I_p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\Delta t} \mathbf{F} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\Delta t} \mathbf{I} \delta(t) dt = \mathbf{I} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} dt = \mathbf{I}\tag{3.10}$$

As equações (3.9) e (3.10) demonstram que a aplicação de uma força expressa pela função delta de Dirac, como mostrado em (3.6), é equivalente à aplicação de uma condição inicial de velocidade, logo a equação (3.6) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{G}(t) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{G}}(0) &= \mathbf{M}^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que a função de Green para um sistema com um grau de liberdade, massa-mola-amortecedor, é dada por:

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp(-\omega_\xi t) \left(\frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \\ \dot{g}(t) &= \exp(-\omega_\xi t) \left(\cos(\omega_d t) - \frac{\omega_\xi}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ \dot{g}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$ com ω representando a frequência natural e ξ a taxa de amortecimento

A equação (3.4) é calculada numericamente, uma vez que, com exceção de casos simples, em problemas de engenharia não se tem a matriz de Green em sua forma analítica. Assumindo $t = \Delta t$ em (3.4), a solução em qualquer instante de tempo pode ser calculada recursivamente como:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \left(\mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{C} + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M} \right) \mathbf{U}^t + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \left(\dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{C} + \ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M} \right) \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)d\tau$$

Para se obter a resposta em qualquer intervalo de tempo, a equação (3.15) mostra ser necessário calcular as matrizes de Green $\mathbf{G}(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{G}}(\Delta t)$ e $\ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)$ uma única vez no instante de tempo $t = \Delta t$, além de se efetuar uma integral de convolução com limites de integração constantes.

Utilizando a equação de equilíbrio (3.11), o primeiro termo do vetor velocidade $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ expresso em (3.15) pode sofrer a seguinte transformação:

$$\dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{C} + \ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M} = -\mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{K} \quad (3.16)$$

Assumindo essa transformação o vetor velocidade não mais depende da matriz $\ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)$, o que pode tornar o método mais preciso. A relação (3.16) não será estudada na presente dissertação, já que a matriz de rigidez aparece explicitamente na formulação, sua implementação pode ser encontrada em SOARES (2002), SOARES & MANSUR (2003) e FUNG (1997). A expressão (3.16) torna-se inapropriada quando se adotam matrizes de massa e amortecimento diagonais, já que seu custo computacional é maior.

A equação (3.15) pode ser ainda mais aprimorada considerando a matriz Degrau $\mathbf{H}(\Delta t)$ dada por (CLOUGH & PENZIEN, 1993, PAZ, 1997, FUNG, 1997):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{M} &= \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{C} + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M} \\ \dot{\mathbf{H}}(\Delta t)\mathbf{M} &= \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{C} + \ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os vetores deslocamento e velocidade para qualquer intervalo de tempo podem ser reescritos como:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}^t + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \quad (3.18)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{H}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)d\tau$$

As equações (3.15) e (3.18) do ponto de vista matemático são idênticas, entretanto numericamente não o são. A expressão (3.15) requer o cálculo da matriz $\ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)$, o que não acontece em (3.18). No entanto, a expressão (3.18) além da matriz de Green é necessário calcular as matrizes $\mathbf{H}(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{H}}(\Delta t)$ denominadas matrizes Degrau. A mesma é calculada através da seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{H}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{H}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{H}(t) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(0) &= \mathbf{M}^{-1} \\ \dot{\mathbf{H}}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Diferentemente da matriz de Green a matriz Degrau é calculada através de uma condição inicial para o deslocamento. Numericamente, a equação (3.18) pode se tornar mais precisa, já que o cálculo da matriz $\ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)$ pode ser fonte de possíveis erros numéricos, os quais serão analisados no decorrer do trabalho.

Note que a função de Degrau para um sistema com um grau de liberdade, massa-mola-amortecedor, é dada por:

$$\begin{aligned} h(t) &= \exp(-\omega_\xi t) \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\omega_\xi}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \\ \dot{h}(t) &= -\exp(-\omega_\xi t) \left(\sin(\omega_d t) + \frac{\omega_\xi^2}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ \dot{h}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2. Integral numérica de convolução

Como feito anteriormente para as integrais de volume, a integral de convolução também pode ser normalizada e escrita em uma coordenada padrão como:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} f(\xi_i) w_i \tag{3.22}$$

onde $f(\xi_i)$ representa o integrando transformado para a coordenada ξ , ξ_i os pontos de integração e w_i seus pesos, ambos tabelados.

As integrais de convolução são calculadas utilizando a regra de Newton-Cotes, seus pontos de integração e pesos são dados pela Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Pontos e pesos de integração para a regra de Newton-Cotes.

N	Nome	ξ_i	w_i
1	Retângulo	-1.0000000000000000	2.0000000000000000
2	Trapézio	-1.0000000000000000	1.0000000000000000
		1.0000000000000000	1.0000000000000000
3	Simpson 1/3	-1.0000000000000000	0.3333333333333333
		0.0000000000000000	1.3333333333333330
		1.0000000000000000	0.3333333333333333
4	4 pontos	-1.0000000000000000	0.2500000000000000
		-0.3333333333333333	0.7500000000000000
		0.3333333333333333	0.7500000000000000
		1.0000000000000000	0.2500000000000000
5	5 pontos	-1.0000000000000000	0.1555555555555555
		-0.5000000000000000	0.7111111111111111
		0.0000000000000000	0.2666666666666667
		0.5000000000000000	0.7111111111111111
		1.0000000000000000	0.1555555555555555

As integrais de convolução apresentadas em (3.15) possuem um intervalo de integração de 0 a Δt , para a utilização da tabela 2 ou qualquer outra é necessário efetuar uma transformação de coordenadas. A relação entre a coordenada t e ξ é dada por:

$$\int_a^b f(t)dt \equiv \int_{-1}^1 f(\xi)d\xi \quad (3.23)$$

com

$$t = \frac{(b-a)\xi + (b+a)}{2} \quad dt = \frac{(b-a)}{2} d\xi \quad (3.24)$$

Como visto na Tabela 3.1, integração por Newton-Cotes tem como principal vantagem, possuir intervalos de integração iguais o que não acontece no Gauss, por exemplo. Supondo a força linear no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, i.e.:

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}^t + \frac{\mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^t}{\Delta t}(\tau - t), \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t \quad (3.25)$$

Sabendo que $f = \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)$, as integrais de convolução são calculadas como:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \approx \left\{ \sum_{j=1}^k \Psi_1(j) \right\} \mathbf{F}^t + \left\{ \sum_{j=1}^k \Psi_2(j) \right\} \mathbf{F}^{t+\Delta t} \quad (3.26)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \approx \left\{ \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \Psi_1(j) + \frac{1}{2} \Psi_1(j-1) \right) \right\} \mathbf{F}^t + \left\{ \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \Psi_2(j) + \frac{1}{2} \Psi_2(j-1) \right) \right\} \mathbf{F}^{t+\Delta t} \quad (3.27)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau) \mathbf{F}(t + \tau) d\tau \approx \left\{ \sum_{j=1}^{k/2} \left(\frac{1}{3} \Psi_1(2j) + \frac{4}{3} \Psi_1(2j-1) + \frac{1}{3} \Psi_1(2j-2) \right) \right\} \mathbf{F}^t + \left\{ \sum_{j=1}^{k/2} \left(\frac{1}{3} \Psi_2(2j) + \frac{4}{3} \Psi_2(2j-1) + \frac{1}{3} \Psi_2(2j-2) \right) \right\} \mathbf{F}^{t+\Delta t} \quad (3.28)$$

onde $\Psi_1(j) = \frac{\Delta t}{k} \mathbf{G}(\Delta t - \frac{j\Delta t}{k})(1 - \frac{j}{k})$ e $\Psi_2(j) = \frac{\Delta t}{k} \mathbf{G}(\Delta t - \frac{j\Delta t}{k}) \frac{j}{k}$.

Nas expressões (3.26) a (3.28), foram adotados sub-intervalos iguais de integração com dimensão $\Delta t / k$ sendo k um número inteiro, a qual a expressão (3.22) é aplicada sucessivamente. A equação (3.26) é a mais simples (regra do retângulo) e assume que a função a ser integrada é constante em cada sub-intervalo. A equação (3.27) é aproximada pela regra de Newton-Cotes com $n=2$ (regra do trapézio), onde um polinômio de ordem um é utilizado para cada sub-intervalo. A equação (3.28) é aproximada por um polinômio de 2º ordem (Simpson 1/3 com $n=3$), precisando portanto de três pontos, implicando em um número k múltiplo de dois. Note que a integral de convolução referente ao vetor velocidade é feita de forma análoga, bastando apenas derivar as matrizes de Green nas equações acima.

O método proposto pode ser utilizado para Δt 's relativamente grandes, bastante incomuns para os métodos tradicionais, até mesmo para os implícitos. Para isso é necessário utilizar, por exemplo, uma aproximação linear da força em alguns sub-intervalos e posteriormente aplicar as deduções decorrentes das equações (3.26) a (3.28) com suas devidas modificações, isto é feito através da seguinte equação recursiva:

$$\mathbf{I}^{\bar{t}} = \mathbf{I}^{\bar{t}-\Delta t} + \int_{\bar{t}-\Delta t}^{\bar{t}} \mathbf{G}(\Delta t - \tau) \mathbf{F}(t + \tau) d\tau \quad (3.29)$$

onde \mathbf{I} representa a integral de convolução e $\bar{\Delta t}$ são os sub-intervalos de tempo a serem escolhidos para melhor ajustar as forças lineares, note que $\mathbf{I}^0 = \mathbf{0}$ e $\bar{t}_{final} = \Delta t$ com $\bar{\Delta t} \leq \Delta t$.

3.3. Sub-domínios ou sub-regiões

Na seção 3.1 a função de Green foi manipulada utilizando a equação de equilíbrio (2.16) já discretizada via MEF. Entretanto, a função de Green também pode ser obtida utilizando a equação diferencial diretamente, aplicando-se uma fonte impulsiva. Para a equação acústica (2.10), tem-se:

$$K \nabla^2 g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau) - c \dot{g}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau) - \rho \ddot{g}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(t - \tau) \quad \text{em } \Omega^* = \Omega \quad (3.30)$$

com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau) &= 0 & \text{em } \Gamma^* \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau)}{\partial n} &= 0 & \text{em } \Gamma^* \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

A equação (3.30) representa a função de Green em \mathbf{x} , para qualquer instante de tempo t , devido ao impulso localizado no ponto \mathbf{x}_j num instante de tempo $t = \tau$. Seja o domínio discretizado $\bar{\Omega} \approx \cup_e \bar{\Omega}^e$ (malha) com $\bar{\Omega}^e = \Omega^e \cup \Gamma^e$ para o domínio Ω e $\bar{\Omega}^* \approx \cup_e \bar{\Omega}^{*,e}$ (sub-malha) com $\bar{\Omega}^{*,e} = \Omega^{*,e} \cup \Gamma^{*,e}$ para o domínio Ω^* , onde j representa um ponto nodal qualquer da malha tal que $j \in \bar{\Omega}^{*,e}$ como visto na Figura 3.1.

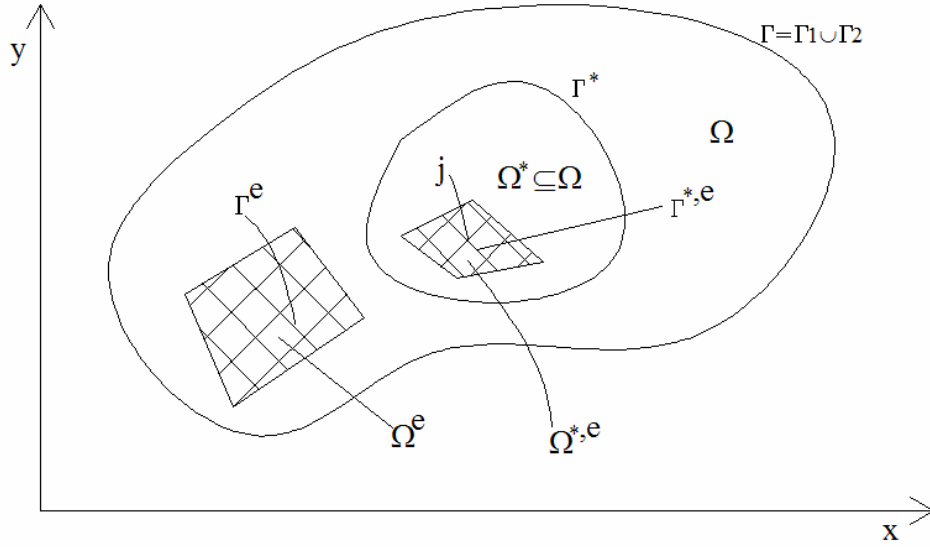


Figura 3.1 – Representação dos domínios Ω e Ω^* em 2D e suas respectivas discretizações.

Como mostrado na seção 3.1, a função de Green é calculada numericamente somente para $t = \Delta t$. Em geral, quando métodos de integração temporal são utilizados é usual adotar intervalos de tempo pequenos. Portanto, a condição $\Omega^* = \Omega$ adotada em (3.30) pode ser relaxada e o domínio pode ser truncado em um sub-domínio Ω^* , tal que $\Omega^* \subseteq \Omega$. O sub-domínio representa a menor região onde se tem alguma resposta devido ao impulso em \mathbf{x}_j e pode ser determinado como $c\Delta t$ para meio acústico homogêneo, por exemplo, onde c representa a velocidade da onda.

Na presente dissertação considera-se a mesma discretização espacial para os domínios Ω e Ω^* , ou seja:

$$\bar{\Omega}^{*,e} = \bar{\Omega}^e \quad (3.32)$$

A igualdade (3.32) garante que não existe qualquer tipo de refinamento dentro da sub-malha, refinamentos para a sub-malha, i.e., $\bar{\Omega}^{*,e} \neq \bar{\Omega}^e$, serão estudados em ocasiões futuras.

Varias condições de contorno podem ser consideradas para o contorno truncado

Γ^* do sub-domínio, no presente trabalho será adotado o seguinte contorno:

$$\Gamma^* \begin{cases} \Gamma^* = \Gamma & , \forall \Gamma^* \in \Gamma \\ g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau) = 0 & , \forall \Gamma^* \notin \Gamma \end{cases} \quad (3.33)$$

Note que a função de Green $g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau)$ representa uma coluna da matriz de Green, ou seja, $\mathbf{G}_{neq, j} \equiv g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_j, \tau)$ onde neq representa o número de equações do sistema. A mesma metodologia descrita acima também se aplica à função Degrau \mathbf{H} , considerando é claro, condições iniciais diferentes.

4. Algoritmos de Marcha no Tempo

Após feita a discretização espacial via MEF, a equação de movimento resultante envolvendo a função de Green pode então ser resolvida. Inúmeras metodologias podem ser aplicadas para a resolução da mesma, entre elas, se destacam os métodos de integração temporal.

O presente capítulo irá mostrar métodos explícitos e implícitos de integração temporal para a obtenção numérica da função de Green. Tendo em vista que a função de Green é obtida explicitamente sendo posteriormente substituídas nas expressões do deslocamento e velocidade, a metodologia decorrente é explícita, sendo portanto denominada ExGA (“Explicit Green Approach”). Com o objetivo de melhorar a função de Green no instante $t = \Delta t$, é adotado um processo de sub-marcha com sub-intervalos dados por $h = \Delta t / n$ com n representando o número de sub-passos. Também será mostrado uma transformação no método original de Green para a obtenção de matrizes simétricas, melhorando assim a eficiência computacional. Toda metodologia apresentada neste capítulo também se aplica ao método ExGAH onde a função Degrau também deve ser calculada.

4.1. ExGA-Newmark

No método de Newmark a equação de equilíbrio (3.11) é discretizada no tempo $t + h$ (NEWMARK, 1959), i.e.:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}^{t+h} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}^{t+h} + \mathbf{K}\mathbf{G}^{t+h} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

As matrizes de Green $\mathbf{G}(t)$ e $\dot{\mathbf{G}}(t)$ são aproximadas através da série de Taylor, cuja expansão se dá por:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{t+h} &= \mathbf{G}^t + h\dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^3}{6}\dddot{\mathbf{G}}^t + \dots \\ \dot{\mathbf{G}}^{t+h} &= \dot{\mathbf{G}}^t + h\ddot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{2}\dddot{\mathbf{G}}^t + \dots\end{aligned}\tag{4.2}$$

O método de Newmark apenas trunca a série (4.2), assumindo $\ddot{\mathbf{G}}^t = (\ddot{\mathbf{G}}^{t+h} - \ddot{\mathbf{G}}^t)/h$ e adicionando os parâmetros calibradores β e γ , chegando-se nos seguintes operadores de Newmark:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{t+h} &= \mathbf{G}^t + h\dot{\mathbf{G}}^t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\mathbf{G}}^t + \beta h^2\ddot{\mathbf{G}}^{t+h} \\ \dot{\mathbf{G}}^{t+h} &= \dot{\mathbf{G}}^t + (1 - \gamma)h\ddot{\mathbf{G}}^t + \gamma h\ddot{\mathbf{G}}^{t+h}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Substituindo a equação (4.3) na equação (4.1), a seguinte relação recursiva é encontrada para o termo da aceleração:

$$(\mathbf{M} + \gamma h \mathbf{C} + \beta h^2 \mathbf{K})\ddot{\mathbf{G}}^{t+h} = -\mathbf{C}(\dot{\mathbf{G}}^t + (1 - \gamma)h\ddot{\mathbf{G}}^t) - \mathbf{K}\left(\mathbf{G}^t + h\dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{G}}^t\right)\tag{4.4}$$

O método de Newmark é incondicionalmente estável para $1/2 \leq \gamma \leq 2\beta$ e condicionalmente estável para $\gamma \geq 1/2$ e $\beta < \gamma/2$ (HUGHES, 2000). Particularizações que podem ser destacadas são os métodos, Diferença Central com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 0$ e aceleração média (regra trapezoidal) com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$.

4.1.1. ExGA-Diferença Central Tarnow

Recentemente, TARNOW & SIMO (1994) apresentaram um processo de sub-marcha para construir algoritmos de quarta ordem a partir de métodos de segunda ordem. Este procedimento será aplicado ao método Diferença Central (Newmark $\gamma = 1/2$ e $\beta = 0$) para o cálculo das matrizes de Green, resultando no método chamado ExGA-Diferença Central Tarnow. Para avançar um intervalo de tempo, a seguinte seqüência deve ser feita:

- 1 - Calcular a resposta em αh
- 2 - Calcular a resposta em $(1 - 2\alpha)h$
- 3 - Calcular a resposta em αh

onde $\alpha = \frac{1}{3} \left(2 + 2^{-1/3} + 2^{1/3} \right)$.

Este procedimento tem a vantagem de conservar certas propriedades do método original, como por exemplo, estabilidade, melhorando apenas a precisão.

4.2. ExGA-Wilson θ

No método Wilson- θ a equação de equilíbrio é discretizada em $t = t + \theta h$, i.e. (BATHE & WILSON, 1973):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}^{t+\theta h} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}^{t+\theta h} + \mathbf{K}\mathbf{G}^{t+\theta h} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Assumindo a aceleração como sendo linear dentro do intervalo $0 \leq \tau \leq \theta h$, ou seja, $\ddot{\mathbf{G}}^{t+\tau} = \ddot{\mathbf{G}}^t + \tau / (\theta h) (\ddot{\mathbf{G}}^{t+\theta h} - \ddot{\mathbf{G}}^t)$ e integrando-a tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{G}}^{t+\tau} &= \dot{\mathbf{G}}^t + \tau \ddot{\mathbf{G}}^t + \frac{\tau^2}{2\theta h} (\ddot{\mathbf{G}}^{t+\theta h} - \ddot{\mathbf{G}}^t) \\
\mathbf{G}^{t+\tau} &= \mathbf{G}^t + \tau \dot{\mathbf{G}}^t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\mathbf{G}}^t + \frac{\tau^3}{6\theta h} (\ddot{\mathbf{G}}^{t+\theta h} - \ddot{\mathbf{G}}^t)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Assumindo $\tau = \theta h$ na equação (4.6) e resolvendo $\dot{\mathbf{G}}^{t+\theta h}$ e $\ddot{\mathbf{G}}^{t+\theta h}$ em função de $\mathbf{G}^{t+\theta h}$, chega-se a seguinte equação para $\mathbf{G}^{t+\theta h}$ após a utilização da equação (4.5):

$$\left(\mathbf{K} + \frac{3}{\theta h} \mathbf{C} + \frac{6}{\theta^2 h^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{G}^{t+\theta h} = \mathbf{M} \left(\frac{6}{\theta^2 h^2} \mathbf{G}^t + \frac{6}{\theta h} \dot{\mathbf{G}}^t + 2\ddot{\mathbf{G}}^t \right) + \mathbf{C} \left(\frac{3}{\theta h} \mathbf{G}^t + 2\dot{\mathbf{G}}^t + \frac{\theta h}{2} \ddot{\mathbf{G}}^t \right) \tag{4.7}$$

Os valores de \mathbf{G}^{t+h} , $\dot{\mathbf{G}}^{t+h}$ e $\ddot{\mathbf{G}}^{t+h}$ são calculados substituindo $\tau = h$ na equação (4.6) resultando em:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{G}}^{t+h} &= \frac{6}{\theta^3 h^2} (\mathbf{G}^{t+\theta h} - \mathbf{G}^t) - \frac{6}{\theta^2 h} \dot{\mathbf{G}}^t + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{\mathbf{G}}^t \\
\dot{\mathbf{G}}^{t+h} &= \dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h}{2} \ddot{\mathbf{G}}^{t+h} + \frac{h}{2} \ddot{\mathbf{G}}^t \\
\mathbf{G}^{t+h} &= \mathbf{G}^t + h \dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{6} \ddot{\mathbf{G}}^{t+h} + \frac{h^2}{3} \ddot{\mathbf{G}}^t
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3. ExGA-HHT- α e ExGA-Bossak- α

Como o método de Newmark não possui amortecimento numérico com uma precisão de segunda ordem, HILBER *et al.* (1977) e WOOD *et al.* (1980) propuseram uma variação no método de Newmark, apenas modificando a equação de movimento através de uma interpolação linear. Para o método HHT- α tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{G}}^{t+h} + (1+\alpha) \mathbf{C} \dot{\mathbf{G}}^{t+h} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{G}}^t + (1+\alpha) \mathbf{K} \mathbf{G}^{t+h} - \alpha \mathbf{K} \mathbf{G}^t = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

e para o método Bossak- α

$$(1+\alpha)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}^{t+h} - \alpha\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}^{t+h} + \mathbf{K}\mathbf{G}^{t+h} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Se $\alpha = 0$, as equações (4.9) e (4.10) se reduzem ao método de Newmark. Para $-1/3 \leq \alpha \leq 0$, $\gamma = 1/2 - \alpha$ e $\beta = (1 - \alpha)^2 / 4$, os métodos são incondicionalmente estáveis e com precisão de segunda ordem (HUGHES, 2000). As equações para \mathbf{G}^{t+h} , $\dot{\mathbf{G}}^{t+h}$ e $\ddot{\mathbf{G}}^{t+h}$ são obtidas da mesma forma descrita na seção 4.1.

4.4. ExGA-Runge Kutta

Antes de utilizar o método de Runge Kutta é necessário fazer uma transformação na equação de segunda ordem, i.e., $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{G}(t) = \mathbf{0}$, para um sistema de equações de primeira ordem, como:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

onde

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(t) \\ \dot{\mathbf{G}}(t) \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Sendo $\dot{\mathbf{Y}}(t) = \Phi(\mathbf{Y}(t), t)$, o algoritmo de Runge Kutta explícito de ordem s é dado pela seguinte expressão (SOLIN, 2005):

$$\mathbf{Y}^{t+\Delta t} = \mathbf{Y}^t + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i z_i \quad (4.13)$$

$$z_i = \Phi \left(\mathbf{Y}^t + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j, t + c_i \Delta t \right), \quad c_1 = 0$$

Os valores das constantes a_{ij} , b_i e c_i podem ser determinados através da matriz

de Butcher, dada por:

$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
 \end{array} \quad (4.14)$$

tal que satisfaça a seguinte relação, $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ e $\sum_{i=1}^s b_i = 1$.

O método Runge kutta 4º ordem clássico, possui a seguinte matriz de Butcher:

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
 \end{array} \quad (4.15)$$

Utilizando a equação (4.13) com $s=4$ e a matriz (4.15), o método Runge Kutta 4º ordem pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}^{t+h} &= \mathbf{G}^t + h\dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{6}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) \\
 \dot{\mathbf{G}}^{t+h} &= \dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h}{6}(\mathbf{W}_1 + 2\mathbf{W}_2 + 2\mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4)
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_1 &= \mathbf{M}^{-1} \left(-\mathbf{K}\mathbf{G}^t - \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}^t \right) \\
\mathbf{W}_2 &= \mathbf{M}^{-1} \left(-\mathbf{K} \left(\mathbf{G}^t + \frac{h}{2} \dot{\mathbf{G}}^t \right) - \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h}{2} \mathbf{W}_1 \right) \right) \\
\mathbf{W}_3 &= \mathbf{M}^{-1} \left(-\mathbf{K} \left(\mathbf{G}^t + \frac{h}{2} \dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{4} \mathbf{W}_1 \right) - \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h}{2} \mathbf{W}_2 \right) \right) \\
\mathbf{W}_4 &= \mathbf{M}^{-1} \left(-\mathbf{K} \left(\mathbf{G}^t + h \dot{\mathbf{G}}^t + \frac{h^2}{2} \mathbf{W}_2 \right) - \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{G}}^t + h \mathbf{W}_3 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Observe que a matriz $\ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)$ pode ser obtida utilizando-se a equação de movimento, como:

$$\ddot{\mathbf{G}}^{\Delta t} = \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}^{\Delta t} - \mathbf{K}\mathbf{G}^{\Delta t}) \tag{4.18}$$

4.5. Matrizes Simétricas

4.5.1. Definições

As matrizes de Green $\mathbf{G}(t)$ e Degrau $\mathbf{H}(t)$ geralmente não são simétricas, entretanto algumas modificações podem ser feitas afim de torná-las simétricas. Sendo a transformação dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{G}}(t) &= \mathbf{M}\mathbf{G}(t)\mathbf{M} \\
\bar{\mathbf{H}}(t) &= \mathbf{M}\mathbf{H}(t)\mathbf{M}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Será demonstrado que as matrizes $\bar{\mathbf{G}}(t)$ e $\bar{\mathbf{H}}(t)$ são simétricas, note que suas derivadas também são simétricas. A demonstração só é valida quando se adota a matriz de amortecimento de Rayleigh, i.e.:

$$\mathbf{C} = \bar{\alpha}\mathbf{M} + \bar{\beta}\mathbf{K} \tag{4.20}$$

onde as constantes $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são determinadas em geral de forma experimental (CHOPRA, 2006), mas tais constantes podem ser obtidas matematicamente em função de duas frequências do sistema (CLOUGH & PENZIEN, 1993).

Considerando duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} quaisquer, simétricas e não singulares, as seguintes propriedades serão utilizadas para a demonstração da expressão (4.19) (MEYER, 2001):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (4.21)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (4.22)$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (4.23)$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad (4.24)$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (4.25)$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (4.26)$$

Das propriedades (4.21) a (4.23) conclui-se que \mathbf{A}^{-1} e $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ são simétricas. Da propriedade (4.26), pode-se mostrar que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} \quad (4.27)$$

Como \mathbf{A} é uma matriz simétrica e positiva definida, a mesma pode ser decomposta pelo método de Cholesky como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (4.28)$$

onde \mathbf{L} representa a matriz triangular inferior. Note que pela propriedade (4.22) sua inversa é dada por $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{L}^{-1}$.

4.5.2. ExGA-Runge Kutta Simétrico

A expressão definida pela equação (4.13) é equivalente a utilizar a série de Taylor diretamente para análise linear, onde suas derivadas são calculadas recursivamente. A matriz de Green $\mathbf{G}^{\Delta t}$, supondo $h = \Delta t$ (i.e., $n=1$), pode ser calculada através da seguinte aproximação:

$$\mathbf{G}^{\Delta t} = \mathbf{G}^0 + \Delta t \dot{\mathbf{G}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{G}}^0 + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{\mathbf{G}}^0 + \dots + \frac{\Delta t^k}{k!} \mathbf{G}^{(k)0} \quad (4.29)$$

Sendo $\mathbf{G}^0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{G}}^0 = \mathbf{M}^{-1}$, as derivadas de ordem superiores na equação (4.29) são calculadas recursivamente através da equação de equilíbrio, i.e., $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}^0 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{G}}^0 + \mathbf{K}\mathbf{G}^0 = \mathbf{0}$, sendo dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{G}}^0 &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \\ \dddot{\mathbf{G}}^0 &= \left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\right)^2 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{G}^{(4)0} &= -\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\right)^3 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.30)$$

Multiplicando e pré-multiplicando a equação (4.29) pela matriz massa como descrito em (4.19) e analisando, por exemplo, o termo $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}$ da expressão (4.30) e utilizando a expressão (4.20) para a matriz amortecimento tem-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}(\bar{\alpha}\mathbf{M} + \bar{\beta}\mathbf{K}) = \bar{\alpha}\mathbf{K} + \bar{\beta}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad (4.31)$$

Sendo \mathbf{K} e \mathbf{M} matrizes simétricas e utilizando a decomposição (4.28) no último termo de (4.31), aplicando-se posteriormente as propriedades (4.24) e (4.25), obtém-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \left(\mathbf{L}_K \mathbf{L}_K^T \mathbf{L}_M^{-T}\right) \left(\mathbf{L}_M^{-1} \mathbf{L}_K \mathbf{L}_K^T\right) = \left(\mathbf{L}_K \mathbf{L}_K^T \mathbf{L}_M^{-T}\right) \left(\mathbf{L}_K \mathbf{L}_K^T \mathbf{L}_M^{-T}\right)^T \quad (4.32)$$

Utilizando a decomposição de Cholesky (4.28) conclui-se que $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}$ é simétrico. Nota-se claramente que os demais termos da expressão (4.30) também são simétricos após a aplicação da transformação (4.19). As matrizes $\dot{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ e $\ddot{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ são obtidas derivando a equação (4.29) e utilizando a equação de equilíbrio (4.18), respectivamente.

4.5.3. ExGA-Newmark Simétrico

As expressões das matrizes $\mathbf{G}^{\Delta t}$, $\dot{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ e $\ddot{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ utilizando o método de Newmark com $h = \Delta t$, podem ser obtidas, utilizando-se as equações da seção 4.1 ou podem ser encontradas em SOARES (2004b):

$$\mathbf{G}^{\Delta t} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{I} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{2\beta} \right) \mathbf{CM}^{-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \mathbf{CM}^{-1} \mathbf{CM}^{-1} \right) \quad (4.33)$$

$$\dot{\mathbf{G}}^{\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{G}^{\Delta t} - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{M}^{-1} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{CM}^{-1} \quad (4.34)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}^{\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{G}^{\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M}^{-1} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{CM}^{-1} \quad (4.35)$$

onde a matriz efetiva $\hat{\mathbf{K}}$ é dada por

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (4.36)$$

Multiplicando e pré-multiplicando, por exemplo, o segundo termo em (4.33), i.e., $\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{CM}^{-1}$, pela matriz massa como descrito em (4.19) e utilizando a matriz de amortecimento de Rayleigh, expressão (4.20), tem-se:

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}(\bar{\alpha}\mathbf{M} + \bar{\beta}\mathbf{K}) = \bar{\alpha}\mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M} + \bar{\beta}\mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K} \quad (4.37)$$

A segunda parcela da equação (4.37), i.e., $\mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K}$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{M}(a_1\mathbf{M} + a_0\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K} = \frac{1}{a_1}a_1\mathbf{M}(a_1\mathbf{M} + a_0\mathbf{K})^{-1}a_0\mathbf{K}\frac{1}{a_0} \quad (4.38)$$

$$\text{onde } a_0 = \left(1 + \frac{\gamma\bar{\beta}}{\beta\Delta t}\right) \text{ e } a_1 = \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\bar{\alpha}}{\beta\Delta t}\right).$$

Da propriedade (4.27) conclui-se que a expressão (4.38) é simétrica, para o primeiro termo de (4.37), i.e., $\mathbf{M}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M}$, a demonstração por Cholesky pode ser aplicada. Note que depois de efetuada a transformação (4.19), as equações (4.34) e (4.35), i.e., $\dot{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ e $\ddot{\mathbf{G}}^{\Delta t}$, tornam-se simétricas. O mesmo procedimento também se aplica ao método ExGAH-Newmark.

4.6. Método Green Simétrico

Como visto na seção 4.5 as matrizes $\bar{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{G}(t)\mathbf{M}$ e $\bar{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{H}(t)\mathbf{M}$ são simétricas. Portanto, a equação original (3.15) para os vetores deslocamento $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ e velocidade $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{t+\Delta t} &= \left(\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)\right)\mathbf{U}^t + \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} &= \left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{M}^{-1}\ddot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)\right)\mathbf{U}^t + \mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t - \tau)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como na equação (3.11), as matrizes $\bar{\mathbf{G}}^{\Delta t}$, $\dot{\bar{\mathbf{G}}}^{\Delta t}$ e $\ddot{\bar{\mathbf{G}}}^{\Delta t}$ são calculadas através da seguinte equação de equilíbrio modificada:

$$\ddot{\bar{\mathbf{G}}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}(0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\bar{\mathbf{G}}}(0) &= \mathbf{M} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Da mesma forma a equação (3.18) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{t+\Delta t} &= \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{H}}(\Delta t)\mathbf{U}^t + \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} &= \mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{H}}}(\Delta t)\mathbf{U}^t + \mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t - \tau)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.42)$$

A função Degrau $\mathbf{H}(t)$ é calculada através da seguinte equação de equilíbrio modificada:

$$\ddot{\bar{\mathbf{H}}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{H}}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}(0) &= \mathbf{M} \\ \dot{\bar{\mathbf{H}}}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Tanto a equação (4.39) quanto a equação (4.42) são adequadas apenas quando a matriz massa for diagonal, em geral, quando métodos explícitos de integração temporal são utilizados. Toda a demonstração feita na seção 4.5 também é válida quando subpassos $n > 1$ são utilizados para a obtenção das matrizes de Green e Degrau, aumentado é claro o número de operações entre as matrizes, mas mantendo a simetria.

4.7. Método ExGAH com matriz massa não diagonal

Como visto na seção 3.1, o método ExGAH em sua forma tradicional necessita da inversão da matriz massa na condição inicial para o cálculo da função de Green e Degrau, i.e., $\dot{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{M}^{-1}$ e $\mathbf{H}(0) = \mathbf{M}^{-1}$. Entretanto quando a matriz massa não for diagonal, sua inversão torna-se um processo caro e oneroso. Afim de tornar o processo menos oneroso, a seguinte transformação é realizada:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{G}}}(t) &= \mathbf{G}(t)\mathbf{M} \\ \bar{\bar{\mathbf{H}}}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{M}\end{aligned}\tag{4.45}$$

Substituindo a transformação (4.45) na equação (3.18), chega-se na seguinte expressão para o vetor deslocamento e velocidade:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{t+\Delta t} &= \bar{\bar{\mathbf{H}}}(\Delta t)\mathbf{U}^t + \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t - \tau)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t + \tau)d\tau \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} &= \dot{\bar{\bar{\mathbf{H}}}}(\Delta t)\mathbf{U}^t + \dot{\bar{\bar{\mathbf{G}}}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^t + \int_0^{\Delta t} \dot{\bar{\bar{\mathbf{G}}}}(\Delta t - \tau)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t + \tau)d\tau\end{aligned}\tag{4.46}$$

As matrizes $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\Delta t)$ e $\dot{\bar{\bar{\mathbf{G}}}}(\Delta t)$ são calculadas utilizando a equação de equilíbrio (3.11), substituindo é claro $\mathbf{G}(t)$ por $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(t)$ através da expressão (4.45) e utilizando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{G}}}(0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\bar{\bar{\mathbf{G}}}}(0) &= \mathbf{I}\end{aligned}\tag{4.47}$$

As matrizes $\bar{\bar{\mathbf{H}}}(\Delta t)$ e $\dot{\bar{\bar{\mathbf{H}}}(\Delta t)}$ também são calculadas utilizando a equação de equilíbrio (3.19), substituindo $\mathbf{H}(t)$ por $\bar{\bar{\mathbf{H}}}(t)$ e utilizando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{H}}}(0) &= \mathbf{I} \\ \dot{\bar{\bar{\mathbf{H}}}}(0) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.48}$$

A transformação acima não mais depende da inversão da matriz massa para a condição inicial, entretanto na convolução surge a inversa da matriz massa. Será mostrado nos capítulos subseqüentes que a parte não homogênea da equação, i.e., a convolução, é menos importante que a parte homogênea com relação à estabilidade e precisão. Portanto, a inversa da matriz massa na integral de convolução pode ser aproximada como sendo diagonal. Observe que na presente discussão as matrizes de Green e Degrau são calculadas utilizando a matriz massa consistente (não diagonal).

Para que o método seja o mais geral possível, a matriz massa diagonal HRZ definida na seção 2.5 pode se tornar uma boa aproximação, já que a mesma sempre resultará em uma matriz positiva, o que não acontece com a técnica “ROW SUM”, por exemplo, onde para determinados elementos a matriz massa possui valores negativos, o que é fisicamente inadmissível. Caso a matriz massa da convolução não possa ser diagonal, deve-se multiplicar a equação (4.46) pela matriz massa, entretanto tal procedimento necessitará de um “Solver”, e.g., PCG, Gauss, etc., para o cálculo da resposta ao longo do tempo. Note que a equação (4.46) também pode ser utilizada para os métodos explícitos.

5. Estabilidade

O presente capítulo irá mostrar o conceito de estabilidade para os métodos ExGA e ExGAH aplicados a um sistema com um grau de liberdade e compara-los com os métodos clássicos. Será mostrado que a utilização de sub-passos n para o cálculo numérico da função de Green melhora consideravelmente a estabilidade principalmente para os métodos explícitos. Utilizando expansões em série de Taylor, também é mostrado a relação entre os métodos ExGA-Newmark ou ExGAH-Newmark com $n=1$ e o método de Newmark, mostrando quando esses métodos se equivalem.

5.1. Mudança de Base

A equação de movimento pode ser transformada para uma coordenada modal no intuito de obter equações desacopladas, admitindo $\mathbf{U}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(t)$ e pré-multiplicando a equação de movimento por $\mathbf{\Phi}^T$, a seguinte mudança de base pode ser efetuada (CLOUGH & PENZIEN, 1993, BATHE, 1996):

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) \quad (5.1)$$

Na equação (5.1) a matriz $\mathbf{\Phi}$ representa os auto-vetores considerando a equação de movimento $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{0}$, cuja solução é $\mathbf{U}(t) = \mathbf{\phi} \sin(\omega(t-t_0))$, gerando o seguinte problema de auto-valor:

$$\mathbf{K}\mathbf{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{\phi} \quad (5.2)$$

onde ω representa as frequências de vibração.

A equação (5.2) resultará em n auto-vetores e auto-valores, dados por $(\omega_1^2, \boldsymbol{\varphi}_1), (\omega_2^2, \boldsymbol{\varphi}_2), \dots, (\omega_{neq}^2, \boldsymbol{\varphi}_{neq})$. Ortonormalizando os auto-vetores pela matriz massa, i.e., $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$ com $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{neq})$ e admitindo a matriz amortecimento como sendo uma combinação linear das matrizes massa e rigidez (Rayleigh), então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{\Omega}^2 \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} &= \bar{\alpha} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} + \bar{\beta} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \bar{\alpha} \mathbf{I} + \bar{\beta} \boldsymbol{\Omega}^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_{neq}^2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

A equação (5.1) possui agora neq equações desacopladas dadas por:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = r_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, neq \quad (5.5)$$

com condições iniciais expressas como

$$\begin{aligned} x_i(0) &= \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{U}(0) \\ \dot{x}_i(0) &= \Phi_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}(0) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Após resolver as equações descritas em (5.5), a resposta na coordenada original é obtida através de uma superposição modal utilizando a expressão $\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) \mathbf{X}(t)$.

5.2. Conceito

A estabilidade de um método numérico é analisada, utilizando-se a equação desacoplada obtida depois de realizada a decomposição modal. Não se considera nenhum tipo de carregamento na equação, i.e., $r(t) = 0$ com $0 \leq \xi < 1$, ou seja:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (5.7)$$

Resolvendo a equação (5.7) numericamente, por qualquer um dos métodos descritos no capítulo anterior, chega-se na seguinte expressão matricial (BATHE, 1996):

$$\hat{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}^t \quad (5.8)$$

Na equação (5.8) \mathbf{A} representa a matriz de amplificação e $\hat{\mathbf{X}}$ representa o vetor contendo todas as variáveis pertencentes a cada método, como por exemplo, deslocamento, velocidade e aceleração. Note que no método de Newmark $\hat{\mathbf{X}}$ pode conter apenas deslocamento e velocidade, o mesmo acontece para o método Runge Kutta.

Na equação (5.8) a matriz \mathbf{A} é aplicada sucessivamente ao vetor $\hat{\mathbf{X}}^t$ ao longo do tempo, para se estudar a estabilidade considera-se o seguinte problema de auto-valor:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (5.9)$$

A equação (5.9) resulta em k auto-valores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ com k auto-vetores $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ linearmente independentes, esses auto-vetores formam uma base para o espaço vetorial \mathbb{R}^k , onde qualquer vetor desse espaço pode ser expresso como uma combinação linear dos auto-vetores. Supondo $k=2$ e aplicando \mathbf{A} i vezes no vetor $\hat{\mathbf{X}}^0$ e

escrevendo $\hat{\mathbf{X}}^0$ em função dos auto-vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 (base) tendo em vista a equação (5.9), tem-se:

$$\mathbf{A}^i \hat{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{A}^i (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \lambda_1^i \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^i \mathbf{v}_2; \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Analisando a equação (5.10) nota-se claramente que se a magnitude dos auto-valores forem menores que um, $\mathbf{A}^i \hat{\mathbf{X}}^0$ ira convergir para zero, caracterizando um fenômeno chamado de amortecimento numérico. Caso exista apenas um auto-valor com magnitude maior que um $\mathbf{A}^i \hat{\mathbf{X}}^0$ ira divergir para infinito. Uma maneira mais formal de determinar esse comportamento é através do raio espectral da matriz, definido como:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{j=1,2,\dots} |\lambda_j|, \quad \lambda_j \text{ é um auto-valor de } \mathbf{A} \quad (5.11)$$

Um método de integração temporal será estável, se e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$.
2. Auto-valores de \mathbf{A} com multiplicidade maior que um, i.e., auto-valores repetidos, devem possuir módulo menor que um.

Afim de tornar mais fácil a análise de estabilidade, a matriz de amplificação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \quad (5.12)$$

onde \mathbf{P} representa a matriz dos auto-vetores e \mathbf{J} a matriz de Jordan.

Quando a matriz de amplificação \mathbf{A} não possui auto-valores repetidos a matriz de Jordan é dada por $\mathbf{J} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

Para simplificar os nomes dos métodos, a seguinte notação será utilizada para os métodos ExGA, ExGAH e os clássicos como Newmark, Wilson- θ , etc.

Tabela 5.1 – Notação para os métodos de integração temporal*.

Método	notação
Newmark	NW
Diferença Central (Newmark $\gamma = 1/2$ e $\beta = 0$)	DC
Wilson- θ	WS
Runge Kutta 4º ordem	RK
HHT- α ($\beta = (1-\alpha)^2/4$ e $\gamma = (1-2-\alpha)/2$)	HHT
Bossak- α ($\beta = (1-\alpha)^2/4$ e $\gamma = (1-2-\alpha)/2$)	BK
ExGA-Newmark	ExGA-NW ⁿ
ExGA-Diferença Central	ExGA-DC ⁿ
ExGA-Wilson- θ	ExGA-WS ⁿ
ExGA-Runge Kutta 4º ordem	ExGA-RK ⁿ
ExGA-HHT- α ($\beta = (1-\alpha)^2/4$ e $\gamma = (1-2-\alpha)/2$)	ExGA-HHT ⁿ
ExGA-Bossak- α ($\beta = (1-\alpha)^2/4$ e $\gamma = (1-2-\alpha)/2$)	ExGA-BK ⁿ
ExGA-Diferença Central Tarnow	ExGA-DCT ⁿ

* o sobrescrito n significa o número de sub-passos, para o método ExGAH, basta substituir ExGA por EXGAH.

5.2.1. Matriz de amplificação analítica

Sendo $t = \Delta t$ e utilizando a função de Green definida pela equação (3.13) a matriz de amplificação analítica para a equação (5.7) (massa-mola-amortecedor) é dada por:

$$\mathbf{A} = e^{-\xi\omega\Delta t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_d\Delta t) + \frac{\xi\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d\Delta t) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d\Delta t) \\ -\frac{\omega^2}{\omega_d} \sin(\omega_d\Delta t) & \cos(\omega_d\Delta t) - \frac{\xi\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d\Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

onde $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$.

Como a matriz de amplificação analítica possui dimensão 2x2, seus auto-valores são determinados através da seguinte equação característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2 = 0 \quad (5.14)$$

com

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) \\ A_2 &= \det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{aligned} \quad (5.15)$$

As raízes da equação (5.14) são dadas por:

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (5.16)$$

Utilizando a equação (5.16), os auto-valores para a matriz de amplificação analítica (5.13) são dados por:

$$\lambda_{1,2} = e^{-\xi\omega\Delta t \pm I\omega_i\Delta t} \quad (5.17)$$

onde $I = \sqrt{-1}$ representa a unidade imaginária.

Calculando o módulo da equação (5.17), chega-se ao seguinte raio espectral analítico:

$$\rho(\mathbf{A}) = e^{-\xi\omega\Delta t} \quad (5.18)$$

Note que para $\xi = 0.0$ o raio espectral analítico possui valor unitário, i.e., $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Assumindo Δt pequeno suficiente e $\xi = 0.0$, a matriz de amplificação indicada na equação (5.13) pode ser expandida em série de Taylor, resultando em:

$$A_{11} = 1 - \frac{\omega^2\Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4\Delta t^4}{24} - \frac{\omega^6\Delta t^6}{720} + \frac{\omega^8\Delta t^8}{40320} - \frac{\omega^{10}\Delta t^{10}}{3628800} + \dots \quad (5.19)$$

$$A_{12} = \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{6} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{120} - \frac{\omega^6 \Delta t^7}{5040} + \frac{\omega^8 \Delta t^9}{362880} - \dots \quad (5.20)$$

$$A_{21} = -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{6} - \frac{\omega^6 \Delta t^5}{120} + \frac{\omega^8 \Delta t^7}{5040} - \frac{\omega^{10} \Delta t^9}{362880} + \dots \quad (5.21)$$

$$A_{22} = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} - \frac{\omega^6 \Delta t^6}{720} + \frac{\omega^8 \Delta t^8}{40320} - \frac{\omega^{10} \Delta t^{10}}{3628800} + \dots \quad (5.22)$$

5.3. Método ExGA

5.3.1. Matriz de amplificação e gráficos

Utilizando a equação (5.8), a solução numérica da equação (5.7) pelo método ExGA é dada como:

$$\begin{pmatrix} x^{t+\Delta t} \\ \dot{x}^{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{ExGA} \begin{pmatrix} x^t \\ \dot{x}^t \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

A matriz de amplificação \mathbf{A}_{ExGA} para o método ExGA é escrita como:

$$\mathbf{A}_{ExGA} = \begin{pmatrix} \dot{g}(\Delta t) + 2\xi\omega g(\Delta t) & g(\Delta t) \\ \ddot{g}(\Delta t) + 2\xi\omega\dot{g}(\Delta t) & \dot{g}(\Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Diferentemente da matriz analítica (5.13), as funções de Green são agora calculadas numericamente através dos métodos discutidos no capítulo 4.

Como escrito no capítulo 4 a função de Green é calculada recursivamente em $t = \Delta t / n$, tal que $t_{final} = \Delta t$, com n representando o número de sub-passos. Sendo \mathbf{A}_{cap4} a matriz de amplificação obtida através dos métodos apresentados no capítulo 4, ou seja, ExGA-Newmark, ExGA-Wilson- θ , ExGA-Runge Kutta, etc.. A função de Green em $t = \Delta t$ é calculada como:

$$\hat{\mathbf{G}}^{\Delta t} = \mathbf{A}_{cap4}^n \hat{\mathbf{G}}^0 \quad (5.25)$$

onde $\hat{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ representa o vetor contendo, por exemplo, $g(\Delta t)$ e $\dot{g}(\Delta t)$ para determinados métodos.

Na equação (5.25) a expressão para $\hat{\mathbf{G}}^0$ depende obviamente do método implementado, mas o vetor $\hat{\mathbf{G}}^0$ é geralmente escrito em função das condições iniciais $g(0)$, $\dot{g}(0)$ e $\ddot{g}(0)$, que são dadas por:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ \dot{g}(0) &= 1 \\ \ddot{g}(0) &= -2\xi\omega \end{aligned} \quad (5.26)$$

Utilizando a decomposição indicada na equação (5.12), a matriz de amplificação \mathbf{A}_{cap4}^n pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}_{cap4}^n = \left(\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \right)^n = \mathbf{P} \mathbf{J}^n \mathbf{P}^{-1} \quad (5.27)$$

Como a matriz de amplificação numérica (5.24) também possui dimensão 2x2, as expressões para seus auto-valores λ_1 e λ_2 são dadas pela equação (5.16), note que a condição 2 de estabilidade não precisa ser analisada visto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ para $0 \leq \xi < 1$.

Substituindo as expressões numéricas da função de Green $g(\Delta t)$, $\dot{g}(\Delta t)$ e $\ddot{g}(\Delta t)$ obtidas pela equação (5.25), com auxílio da equação (5.27), na matriz de amplificação numérica \mathbf{A}_{ExGA} descrita pela equação (5.24), torna-se trivial a obtenção de funções para o raio espectral em função do número de sub-passos n para o método ExGA. Adotando

$\xi = 0.0$, a função raio espectral para o método ExGA-Runge Kutta (ExGA-RKⁿ) em função do período T , i.e., $T = 2\pi / \omega$, é dada por:

$$\rho(\mathbf{A}, n) = 3^{-n} \left(a - 2 \frac{b}{\sqrt{-n^6}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(a + 2 \frac{b}{\sqrt{-n^6}} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (5.28)$$

com $a = 3 - 6\pi^2 / (n^2) \Delta t^2 / T^2 + 2\pi^4 / (n^4) \Delta t^4 / T^4$ e $b = 3n^2 \pi \Delta t / T - 2\pi^3 \Delta t^3 / T^3$.

Para o método ExGA-Newmark (ExGA-NWⁿ), a seguinte função pode ser encontrada para o caso $\xi = 0.0$:

$$\rho(\mathbf{A}, n) = Abs \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a - \sqrt{b}}{c} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{a + \sqrt{b}}{c} \right)^n + \frac{(\Delta t / T) \pi \left(\left(\frac{a - \sqrt{b}}{c} \right)^n - \left(\frac{a + \sqrt{b}}{c} \right)^n \right) (2n\sqrt{-b} + (\Delta t / T) \pi (-1 + 2\gamma) \sqrt{b})}{2b} \right] \quad (5.29)$$

com $a = n^2 - (\pi^2 - 4\beta\pi^2 + 2\gamma\pi^2) \Delta t^2 / T^2$, $b = -4n^2 \pi^2 \Delta t^2 / T^2 + \pi^4 (-16\beta + (1 + 2\gamma)^2) \Delta t^4 / T^4$ e $c = n^2 + 4\beta\pi^2 \Delta t^2 / T^2$.

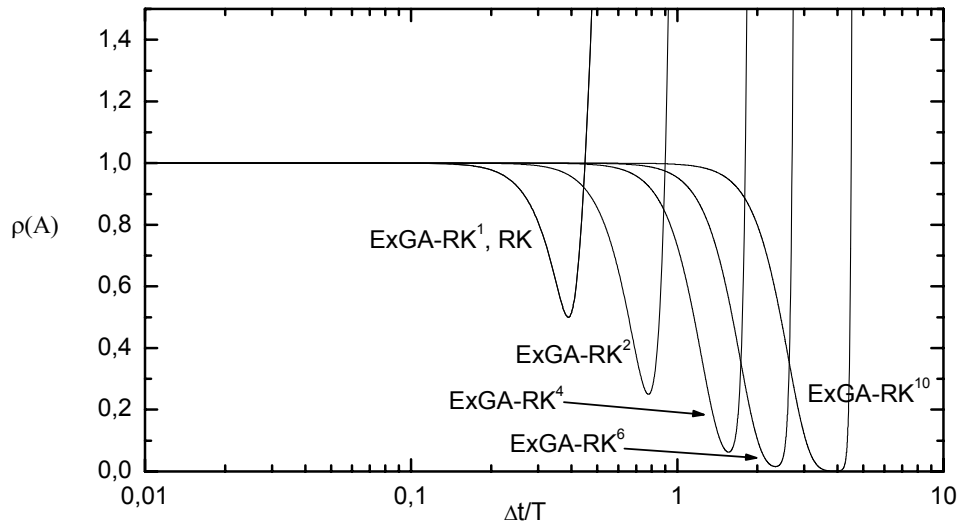


Figura 5.1 – Raio espectral $\rho(\mathbf{A}) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para o método RK e ExGA-RKⁿ.

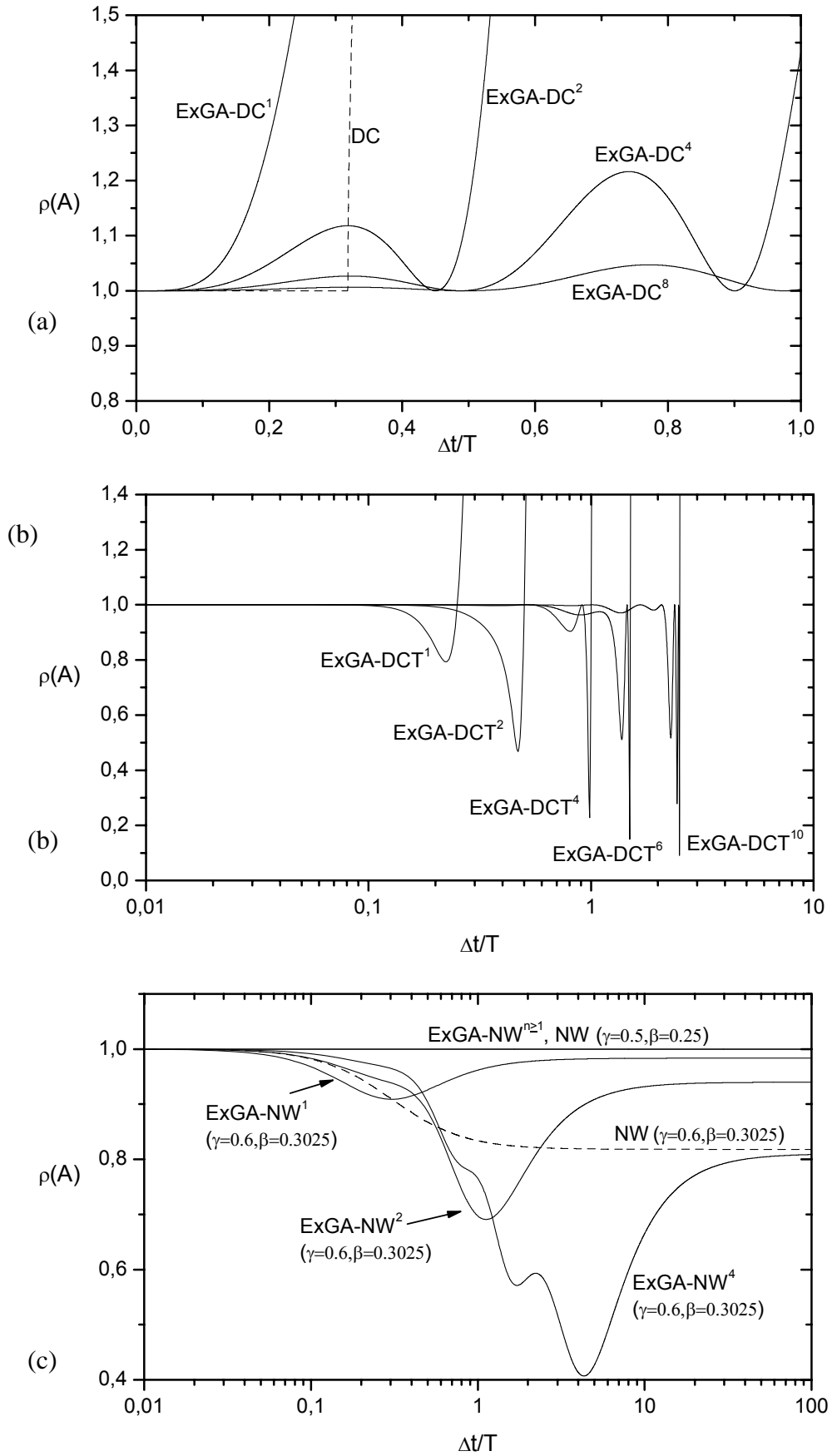


Figura 5.2 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t/T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) DC e ExGA-DCⁿ; (b) ExGA-DCTⁿ; (c) NW e ExGA-NWⁿ.

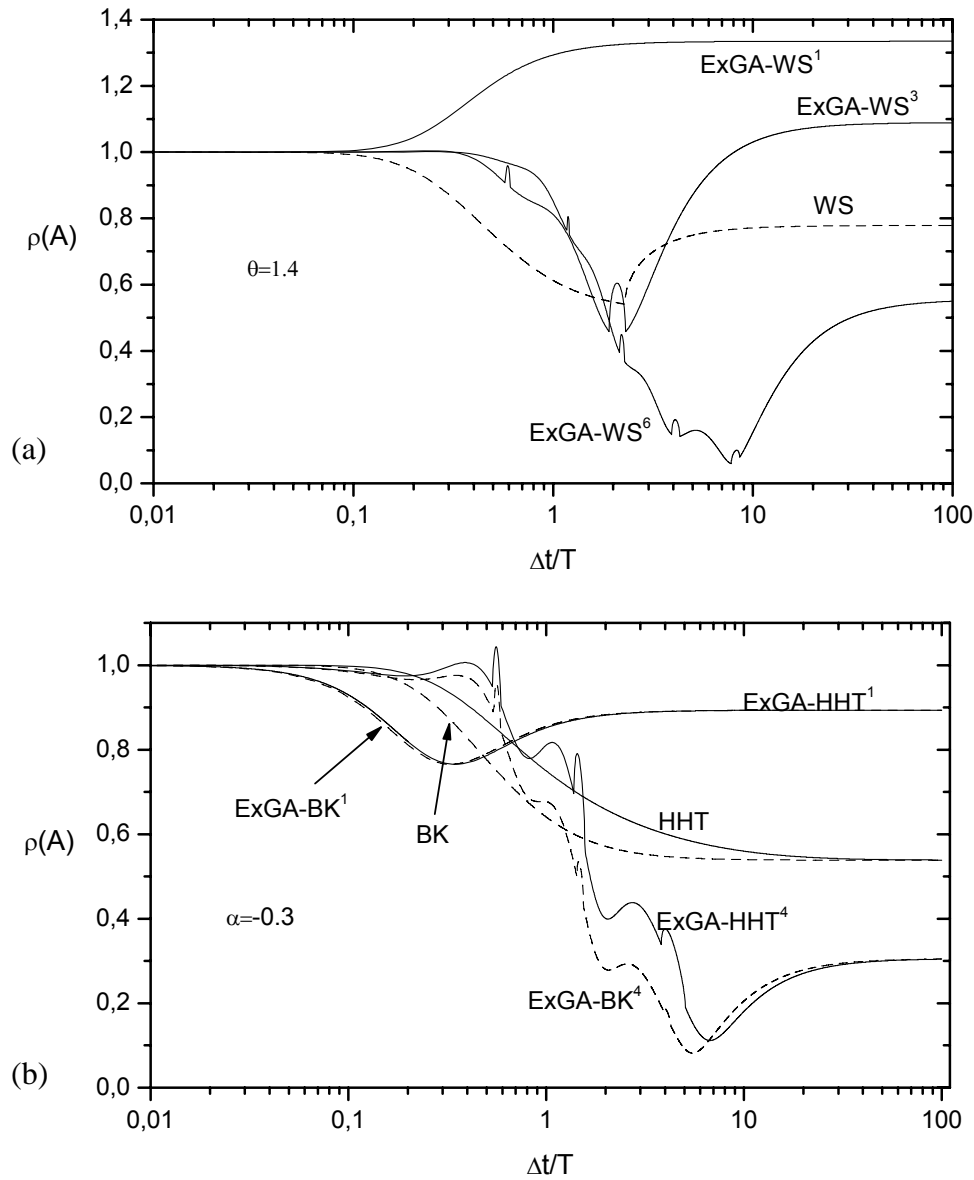


Figura 5.3 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t/T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) WS e ExGA-WSⁿ; (b) HHT, BK, ExGA-HHTⁿ e ExGA-BKⁿ.

A função (5.28) plotada na Figura 5.1 mostra que o método ExGA-RK¹, com $n=1$, possui o mesmo raio espectral que o método Runge Kutta (RK), ambos são condicionalmente estáveis se $\Delta t/T \leq \sqrt{2}/\pi$. O método ExGA-RK² possui a seguinte restrição de estabilidade $\Delta t/T \leq 2\sqrt{2}/\pi$; logo, pode ser mostrado que o limite crítico para $\Delta t/T$ varia linearmente com n , ou seja, a seguinte condição de estabilidade é satisfeita $\Delta t/T \leq n\sqrt{2}/\pi$. Uma característica importante a se considerar é a diminuição de $\rho(A)$ à medida que n aumenta, provocando um amortecimento numérico na solução.

Curvas do raio espectral $\rho(\mathbf{A})$ versus $\Delta t/T$ para distintos valores de n (distintos sub-passos), baseadas na função (5.29), são plotadas na Figura 5.2-(a). Percebe-se que a curva para o método Diferença Central permanece constante, $\rho(\mathbf{A})=1$, até atingir seu valor crítico, nesse ponto $\rho \rightarrow \infty$. No entanto o mesmo não ocorre para o método ExGA-DC¹, sua curva é assintótica tendendo ao valor unitário na origem, ou seja, $\lim_{\Delta t/T \rightarrow 0} \rho(\mathbf{A}) = 1$, caracterizando um método instável.

Para sub-passos maiores que um ($n > 1$), a curva do raio espectral do método ExGA-DCⁿ possui um comportamento oscilatório. A amplitude das oscilações diminui à medida que o número de sub-passos aumenta. Entretanto, uma investigação mais detalhada mostra que essas oscilações apenas tendem ao valor unitário para valores usuais de n . Para que o método possa ser utilizado seria necessário um número muito grande de sub-passos n para que apenas as primeiras amplitudes tendam ao valor unitário, o que torna o método oneroso e não confiável. Portanto, conclui-se que o método ExGA-DCⁿ pode ser considerado instável, ou seja, $\rho(\mathbf{A}) > 1$.

Como visto na Figura 5.2-(b) o método ExGA-DCT¹ diferentemente do método ExGA-DC¹ é estável, entretanto seu limite crítico é aproximadamente 0.25 cerca de 21.46% menor comparativamente com o limite crítico para o método Diferença Central. A medida que n aumenta seu raio espectral começa a sofrer oscilações, mas mantendo-se estável, seu valor crítico também varia linearmente com n gerando a seguinte condição de estabilidade $\Delta t/T \leq n0.25$. Note que a medida que n cresce há também um aumento do amortecimento numérico.

Na Figura 5.2-(c) percebe-se que o método ExGA-NWⁿ, função (5.29), possui a mesma estabilidade que o método de Newmark para $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ (regra trapezoidal). Sendo $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$, a curva do método ExGA-NW¹ possui um amortecimento numérico maior para valores de $\Delta t/T$ pequenos comparativamente ao

método de Newmark onde se tem um amortecimento numérico maior para valores de $\Delta t/T$ grandes. A medida que n cresce os valores do raio espectral tendem a um para valores de $\Delta t/T$ pequenos, diminuindo assim o amortecimento numérico, mas aumentando o mesmo a medida que $\Delta t/T$ cresce.

Da Figura 5.3-(a) conclui-se que o método ExGA-WS¹ é instável, i.e., $\rho(\mathbf{A}) > 1$. Quando n aumenta, os métodos ExGA-WS³ e ExGA-WS⁶ possuem regiões estáveis e instáveis, tem-se $\rho(\mathbf{A}) > 1$ para certos valores dentro da região $\Delta t/T < 0.4$ tornando a ser estável para valores $\Delta t/T > 0.4$.

Analisando a Figura 5.3-(b) observa-se que as curvas para os métodos ExGA-HHT¹ e ExGA-BK¹ se assemelham, possuindo um amortecimento numérico maior para pequenos valores de $\Delta t/T$ quando comparados aos métodos HHT e BK, invertendo esse comportamento para $\Delta t/T$ grande. Já para o método ExGA-HHT⁴ pode ser observado que $\rho(\mathbf{A}) > 1$ para certas regiões de $\Delta t/T$, o que não acontece com o método ExGA-BK⁴ onde $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ para todo valor de $\Delta t/T$.

5.3.2. Relação entre ExGA-Newmark e Newmark

Será demonstrado que o método ExGA-NW¹, i.e., $n=1$ ou $h = \Delta t$, torna-se idêntico ao método de Newmark quando se adotam valores específicos para os parâmetros γ e β . Antes de analisar os dois métodos é necessário definir a matriz de amplificação do método de Newmark, dada por (GÉRADIN & RIXEN, 1994, HUGHES, 2000):

$$\mathbf{A}_{\text{NW}} = \begin{pmatrix} \frac{2(2\beta - \gamma)\xi\omega^3\Delta t^3 + (2\beta - 1)\omega^2\Delta t^2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} & \frac{4(2\beta - \gamma)\xi^2\omega^2\Delta t^3 + (2\gamma - 1)2\xi\omega\Delta t^2 + 2\Delta t}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} \\ \frac{-(2\beta - \gamma)\omega^4\Delta t^3 - 2\omega^2\Delta t}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} & \frac{-(2\beta - \gamma)2\xi\omega^3\Delta t^3 + (\beta - \gamma)2\omega^2\Delta t^2 + 4(\gamma - 1)\xi\omega\Delta t + 2}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Sendo Δt pequeno e $\xi = 0.0$, a matriz de amplificação \mathbf{A}_{NW} pode ser expandida em série de Taylor como:

$$A_{\text{NW}}(1,1) = 1 - \frac{\omega^2\Delta t^2}{2} + \frac{1}{2}\beta\omega^4\Delta t^4 - \frac{1}{2}\beta^2\omega^6\Delta t^6 + \frac{1}{2}\beta^3\omega^8\Delta t^8 - \frac{1}{2}\beta^4\omega^{10}\Delta t^{10} + \dots \quad (5.31)$$

$$A_{\text{NW}}(1,2) = \Delta t - \beta\omega^2\Delta t^3 + \beta^2\omega^4\Delta t^5 - \beta^3\omega^6\Delta t^7 + \beta^4\omega^8\Delta t^9 - \beta^5\omega^{10}\Delta t^{11} + \dots \quad (5.32)$$

$$A_{\text{NW}}(2,1) = -\omega^2\Delta t + \frac{1}{2}\gamma\omega^4\Delta t^3 - \frac{1}{2}\gamma\beta\omega^6\Delta t^5 + \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^8\Delta t^7 - \frac{1}{2}\gamma\beta^3\omega^{10}\Delta t^9 + \dots \quad (5.33)$$

$$A_{\text{NW}}(2,2) = 1 - \gamma\omega^2\Delta t^2 + \gamma\beta\omega^4\Delta t^4 - \gamma\beta^2\omega^6\Delta t^6 + \gamma\beta^3\omega^8\Delta t^8 - \gamma\beta^4\omega^{10}\Delta t^{10} + \dots \quad (5.34)$$

A matriz de amplificação $\mathbf{A}_{\text{ExGA-NW}^1}$ para o método ExGA-NW¹ é obtida utilizando a equação (5.25) com $n=1$ e posteriormente substituindo os valores de $g(\Delta t)$, $\dot{g}(\Delta t)$ e $\ddot{g}(\Delta t)$ na matriz de amplificação (5.24). Assumindo $\xi = 0.0$, sua expansão em série de Taylor é dada por:

$$A_{\text{ExGA-NW}^1}(1,1) = 1 - \gamma\omega^2\Delta t^2 + \gamma\beta\omega^4\Delta t^4 - \gamma\beta^2\omega^6\Delta t^6 + \gamma\beta^3\omega^8\Delta t^8 - \gamma\beta^4\omega^{10}\Delta t^{10} + \dots \quad (5.35)$$

$$A_{\text{ExGA-NW}^1}(1,2) = \Delta t - \beta\omega^2\Delta t^3 + \beta^2\omega^4\Delta t^5 - \beta^3\omega^6\Delta t^7 + \beta^4\omega^8\Delta t^9 - \beta^5\omega^{10}\Delta t^{11} + \dots \quad (5.36)$$

$$A_{\text{ExGA-NW}^1}(2,1) = -\omega^2\Delta t + \beta\omega^4\Delta t^3 - \beta^2\omega^6\Delta t^5 + \beta^3\omega^8\Delta t^7 - \beta^4\omega^{10}\Delta t^9 + \dots \quad (5.37)$$

$$A_{\text{ExGA-NW}^1}(2,2) = 1 - \gamma\omega^2\Delta t^2 + \gamma\beta\omega^4\Delta t^4 - \gamma\beta^2\omega^6\Delta t^6 + \gamma\beta^3\omega^8\Delta t^8 - \gamma\beta^4\omega^{10}\Delta t^{10} + \dots \quad (5.38)$$

Analisando a equação (5.35) (i.e., $A_{\text{ExGA-NW}^1}(1,1)$) e a equação (5.31) (i.e., $A_{\text{NW}}(1,1)$) e posteriormente as equações (5.37) e (5.33), respectivamente, conclui-se que para $\xi = 0.0$ os métodos ExGA-NW¹ e Newmark são idênticos se e somente se:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}\tag{5.39}$$

Analisando as superfícies $\rho(\mathbf{A})=1$ em função dos parâmetros β e γ , Figura 5.4-(a)/(b), para os métodos de Newmark e ExGA-NW¹, observa-se também o resultado encontrado em (5.39) e a diferença de estabilidade entre os dois métodos quando $\gamma \neq 1/2$ e $\beta \neq 1/4$. Note que os parâmetros acima obedecem a regra trapezoidal do método de Newmark. Para o método ExGA-DC¹ (ExGA-NW¹ com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 0$), a equação (5.37), que representa a segunda derivada da função de Green quando $\xi = 0.0$, se reduz a $A_{\text{ExGA-NW}^1}(2,1) \equiv \ddot{g}(\Delta t) = -\omega^2 \Delta t$. Já para o método de Newmark com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 0$ tem-se $A_{\text{NW}}(2,1) = -\omega^2 \Delta t + \frac{1}{2} \gamma \omega^4 \Delta t^3$. Como o coeficiente $A_{\text{ExGA-NW}^1}(2,1)$ possui menos um termo comparativamente ao método de Newmark, a estabilidade do método ExGA-DC¹ é afetada tornando o mesmo instável.

Com a intenção de melhorar o método ExGA-DC¹, foi implementado o método ExGA-DCT¹, cuja expansão em série de Taylor da matriz de amplificação para $n=1$ com $\xi = 0.0$ é dada por:

$$A_{\text{ExGA-DCT}^1}(1,1) = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} + \frac{15541 \omega^6 \Delta t^6}{240000}\tag{5.40}$$

$$A_{\text{ExGA-DCT}^1}(1,2) = \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{6} - \frac{138019 \omega^4 \Delta t^5}{1440000}\tag{5.41}$$

$$A_{\text{ExGA-DCT}^1}(2,1) = -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{6} + \frac{138019 \omega^6 \Delta t^5}{1440000} \quad (5.42)$$

$$A_{\text{ExGA-DCT}^1}(2,2) = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} + \frac{15541 \omega^6 \Delta t^6}{240000} \quad (5.43)$$

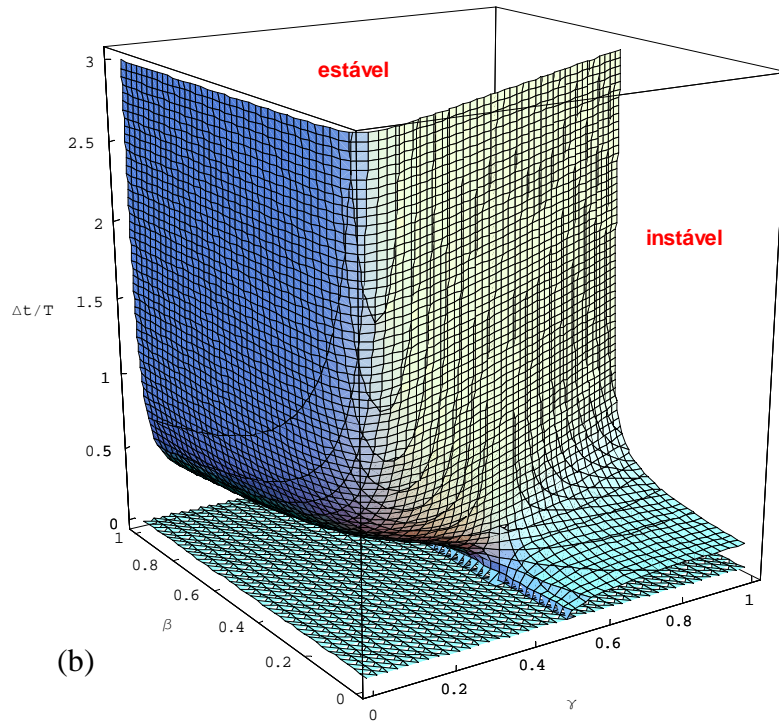
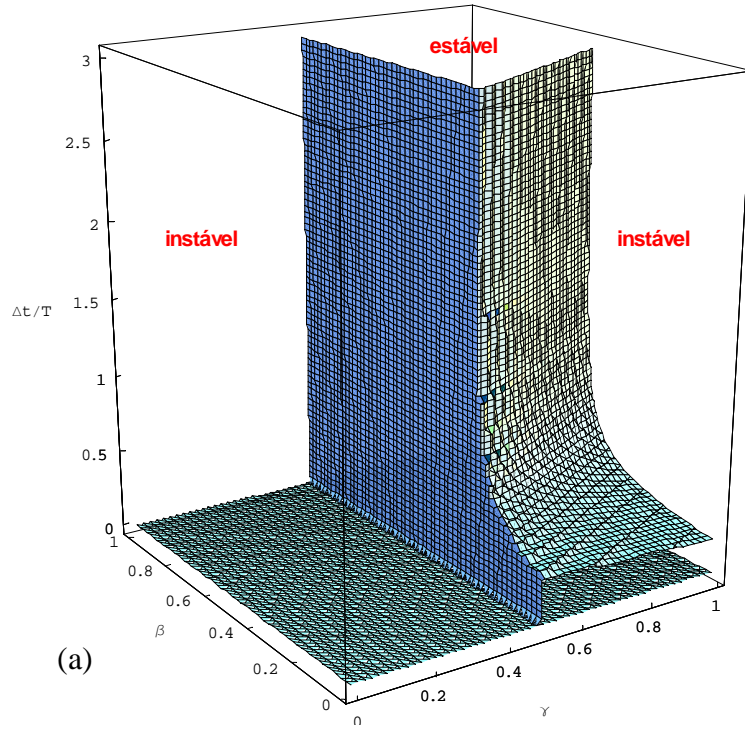


Figura 5.4 – Superfície $\rho(\mathbf{A})=1$ em função de γ e β para os métodos: (a) Newmark (NW); (b) ExGA-NW¹.

Assim como nas demonstrações de TARNOW & SIMO (1994), o método ExGA-DCT¹ também é de quarta ordem. Isto pode ser demonstrado, analisando as equações (5.40) a (5.43) e as equações analíticas (5.19) a (5.22), observando que todos os termos até Δt^4 são idênticos provando assim que o método é de 4º ordem.

5.4. Método ExGAH

5.4.1. Matriz de amplificação e gráficos

Diferentemente do método ExGA, a matriz de amplificação para o método ExGAH pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}_{ExGAH} = \begin{pmatrix} h(\Delta t) & g(\Delta t) \\ \dot{h}(\Delta t) & \dot{g}(\Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Além do cálculo da função de Green discutida em 5.3.1, a função Degrau $h(\Delta t)$ e sua derivada $\dot{h}(\Delta t)$ também devem ser calculadas. A função Degrau numérica é obtida através da utilização da equação (5.25) para um sistema com um grau de liberdade, substituindo $\hat{\mathbf{G}}^{\Delta t}$ e $\hat{\mathbf{G}}^0$ por $\hat{\mathbf{H}}^{\Delta t}$ e $\hat{\mathbf{H}}^0$, respectivamente, sendo que o vetor $\hat{\mathbf{H}}^0$ agora depende das seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ \dot{h}(0) &= 0 \\ \ddot{h}(0) &= -\omega^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Como descrito anteriormente funções para o raio espectral são facilmente obtidas. Apenas a função raio espectral para o método ExGAH-NWⁿ para $\xi = 0.0$ será mostrada nesta dissertação, cuja função é dada por:

$$\rho(\mathbf{A}, n) = Abs \left[\left(\frac{a - \sqrt{b}}{c} \right)^n \right] \quad (5.46)$$

onde $a = n^2 - (\pi^2 - 4\beta\pi^2 + 2\gamma\pi^2)\Delta t^2 / T^2$, $b = -4n^2\pi^2\Delta t^2 / T^2 + \pi^4(-16\beta + (1+2\gamma)^2)\Delta t^4 / T^4$ e $c = n^2 + 4\beta\pi^2\Delta t^2 / T^2$.

A seguir são apresentados os gráficos do raio espectral para $\xi = 0.0$, comparando o método ExGAH e os métodos clássicos.

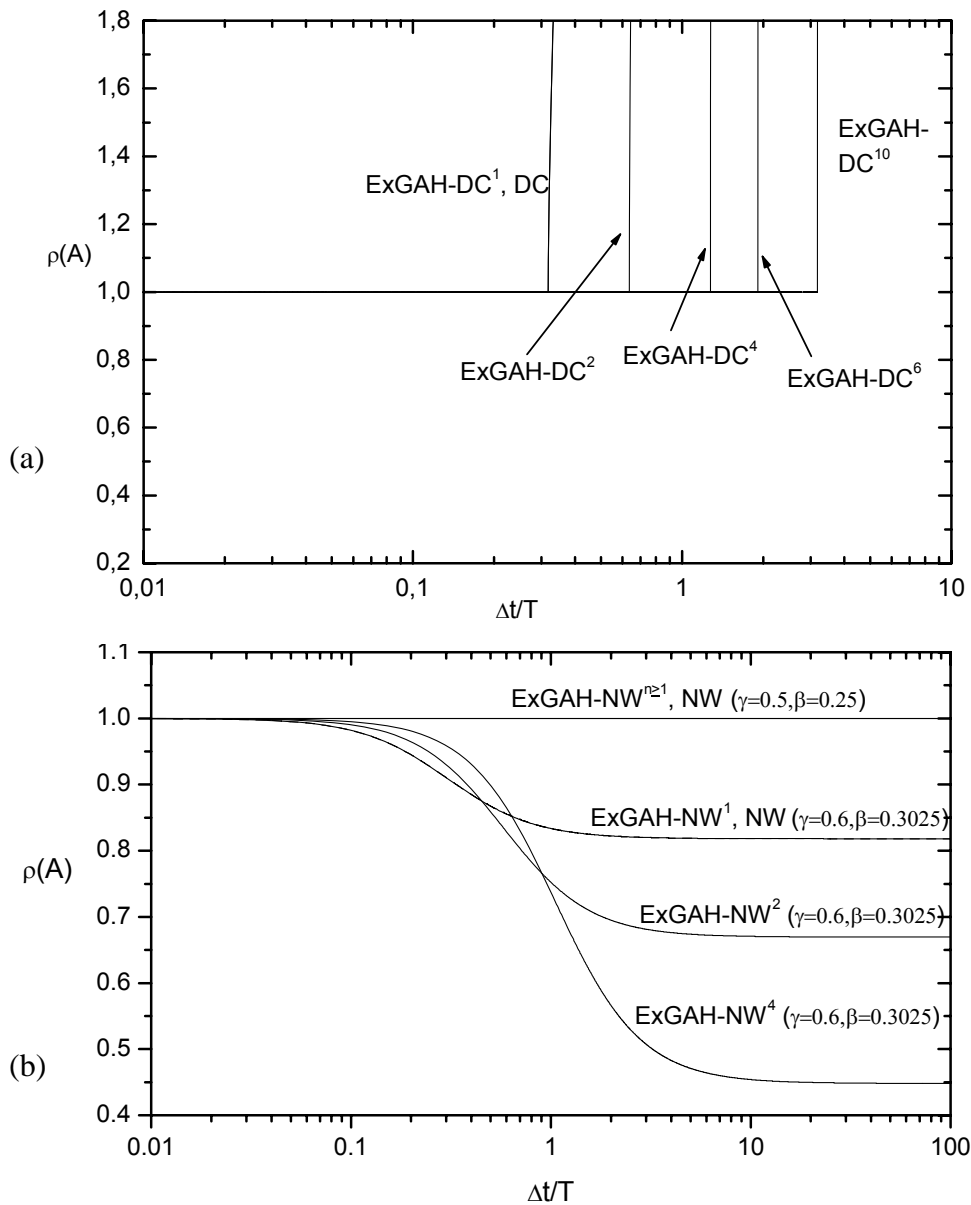


Figura 5.5 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t / T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) DC e ExGAH-DCⁿ; (b) NW e ExGAH-NWⁿ.

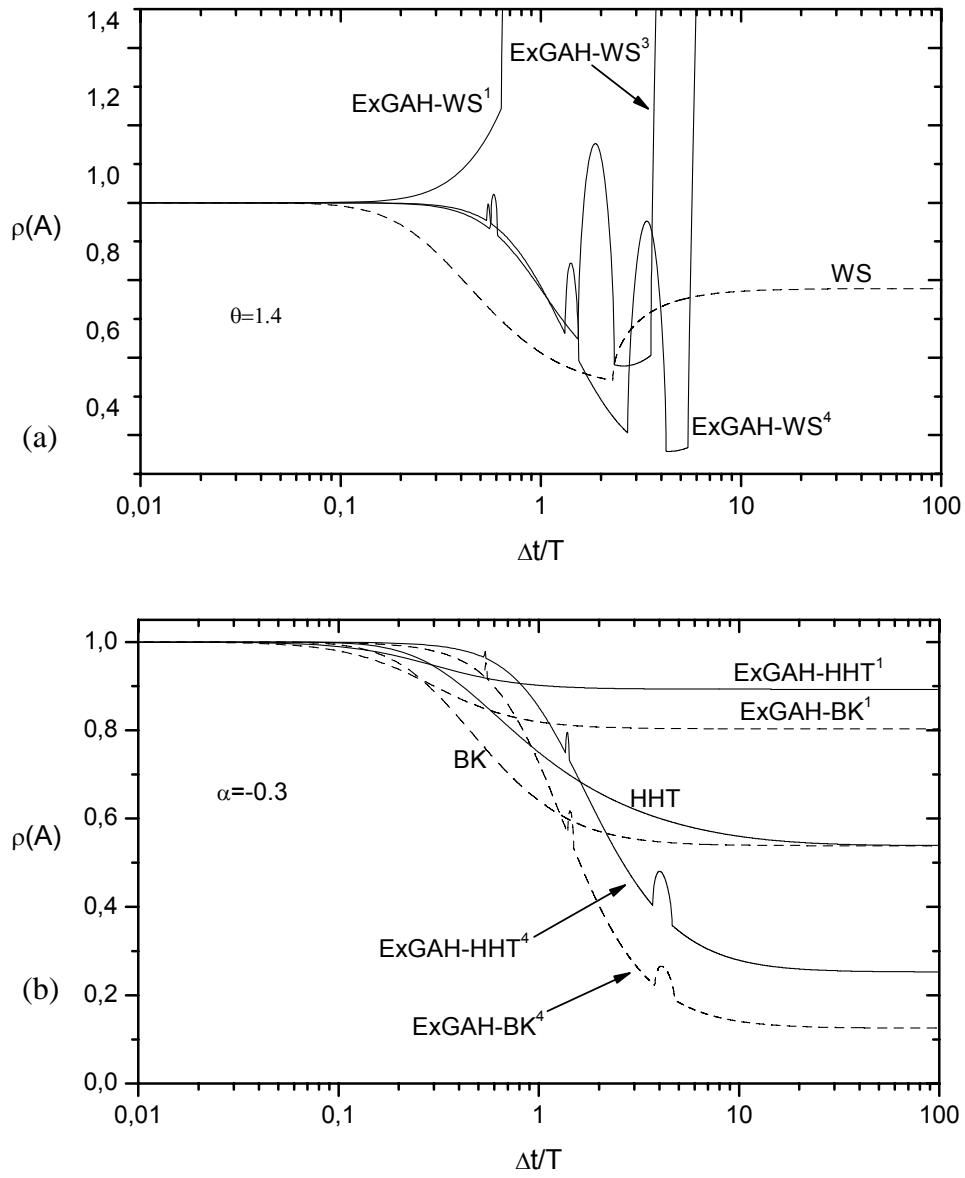


Figura 5.6 - Raio espectral $\rho(A) \times \Delta t/T$ com $\xi = 0.0$ para os métodos: (a) WS e ExGAH-WSⁿ; (b) HHT, BK, ExGAH-HHTⁿ e ExGAH-BKⁿ.

Analisando a Figura 5.5-(a), nota-se que o método ExGAH-DCⁿ é condicionalmente estável para qualquer valor de n . Quando $n=1$, o método ExGAH-DC¹ possui a mesma estabilidade do tradicional método Diferença Central, i.e., $\Delta t/T \leq 1/\pi$. Para $n=2$ o método tem como limite crítico $\Delta t/T = 2/\pi$, pode-se no entanto mostrar que esse valor crítico possui uma variação linear à medida que se aumenta o número de sub-passos n , cuja relação é dada por, $\Delta t/T \leq n/\pi$.

A Figura 5.5-(b) mostra que os métodos ExGAH-NWⁿ, i.e., $n \geq 1$ e Newmark (NW) para $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ possuem a mesma estabilidade, o mesmo acontece para os métodos ExGAH-NW¹ e Newmark quando $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$ com ambos possuindo o mesmo amortecimento numérico. A medida que o número de sub-passos (n) aumenta o método ExGAH-NWⁿ com $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$ vai diminuindo o amortecimento numérico para valores pequenos de $\Delta t/T$ e aumentado para valores grandes de $\Delta t/T$.

O método ExGAH-WSⁿ começa a ficar estável a medida que n aumenta, como visto na Figura 5.6-(a). Para $n=1$, o método é instável com $\rho(\mathbf{A}) > 1$ para todo valor de $\Delta t/T$ (curva assintótica), para $n=3$ existem regiões onde o método é instável e vice-versa, já para $n=4$, o método possui todos seus valores abaixo de um, i.e., $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, até atingir seu valor crítico.

Diferentemente dos métodos ExGA-HHTⁿ e ExGA-BKⁿ, os métodos ExGAH-HHTⁿ e ExGAH-BKⁿ são estáveis para qualquer valor de n , como visto na Figura 5.6-(b). Nota-se que o método ExGAH-BKⁿ possui um amortecimento numérico maior comparativamente com o método ExGAH-HHTⁿ. Analisando as curvas para os métodos ExGAH-HHT⁴ e ExGAH-BK⁴, percebe-se que o raio espectral sofre pequenos “saltos” para certos valores de $\Delta t/T$. Esses “saltos”, indicam que o auto-valor da matriz de amplificação é um número real, o que não ocorre para os demais pontos, onde valores imaginários são encontrados. Note que tal característica também ocorre em outros métodos aqui apresentados, como por exemplo, ExGA-WSⁿ, ExGAH-WSⁿ, etc.

Assim como feito para o método ExGA-NW¹ e Newmark, pode-se demonstrar a relação entre o método ExGAH-NW¹ e o método de Newmark. Para tal assumindo amortecimento nulo, i.e., $\xi = 0.0$, a matriz de amplificação para o método ExGAH-NW¹ possui a seguinte expansão em série de Taylor:

$$A_{\text{ExGAH-NW}^1}(1,1) = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{1}{2} \beta \omega^4 \Delta t^4 - \frac{1}{2} \beta^2 \omega^6 \Delta t^6 + \frac{1}{2} \beta^3 \omega^8 \Delta t^8 - \frac{1}{2} \beta^4 \omega^{10} \Delta t^{10} + \dots \quad (5.47)$$

$$A_{\text{ExGAH-NW}^1}(1,2) = \Delta t - \beta \omega^2 \Delta t^3 + \beta^2 \omega^4 \Delta t^5 - \beta^3 \omega^6 \Delta t^7 + \beta^4 \omega^8 \Delta t^9 - \beta^5 \omega^{10} \Delta t^{11} + \dots \quad (5.48)$$

$$A_{\text{ExGAH-NW}^1}(2,1) = -\omega^2 \Delta t + \frac{1}{2} \gamma \omega^4 \Delta t^3 - \frac{1}{2} \gamma \beta \omega^6 \Delta t^5 + \frac{1}{2} \gamma \beta^2 \omega^8 \Delta t^7 - \frac{1}{2} \gamma \beta^3 \omega^{10} \Delta t^9 + \dots \quad (5.49)$$

$$A_{\text{ExGAH-NW}^1}(2,2) = 1 - \gamma \omega^2 \Delta t^2 + \gamma \beta \omega^4 \Delta t^4 - \gamma \beta^2 \omega^6 \Delta t^6 + \gamma \beta^3 \omega^8 \Delta t^8 - \gamma \beta^4 \omega^{10} \Delta t^{10} + \dots \quad (5.50)$$

Comparando as equações (5.47) a (5.50) com as equações (5.31) a (5.34) do método de Newmark, conclui-se que as mesmas são idênticas, provando assim que os métodos ExGAH-NW¹ e Newmark são iguais para qualquer valor de γ e β com relação as suas matrizes de amplificação para $\xi = 0.0$. Apesar de não mostrado nas expansões em série de Taylor os dois métodos também são iguais quando se adota $\xi \neq 0.0$.

Note que para os métodos ExGA-HHTⁿ, ExGA-BKⁿ, ExGAH-HHTⁿ e ExGAH-BKⁿ, as funções de Green e Degrau são calculadas utilizando o mesmo parâmetro α dos métodos originais, i.e, HHT e Bosak. Entretanto, deve-se realizar um estudo mais detalhado para determinar o melhor valor do parâmetro α para os métodos ExGA e ExGAH, observe que tal estudo também se aplica aos métodos ExGA-WSⁿ e ExGAH-WSⁿ para a determinação do parâmetro θ .

6. Análise de Erro

Este capítulo analisa o erro cometido pela matriz de amplificação dos métodos ExGA e ExGAH, o algoritmo além de ser estável deve também garantir soluções precisas, o método pode ser estável e fornecer resultados não precisos. A precisão é medida através do alongamento ou contração de período e decaimento da amplitude ou através da taxa ou razão de amortecimento numérico. Obviamente, a taxa de amortecimento numérico é a forma quantitativa do amortecimento numérico definido no capítulo anterior através do raio espectral.

Posteriormente o erro cometido pelo operador de carga, i.e., a parte não homogênea da equação diferencial, será analisado e demonstrado sua alta precisão principalmente quando sub-passos são utilizados para o cálculo da função de Green. Também é descrita a obtenção de intervalos de tempo críticos através do cálculo da maior frequência do sistema, principalmente quando métodos explícitos são utilizados. Essas frequências são calculadas a nível de elemento através de funções pré-definidas, fornecendo portanto uma estimativa para o intervalo de tempo sem qualquer custo computacional.

6.1. Precisão

6.1.1. Conceito e gráficos

O erro da matriz de amplificação é medido quantitativamente através do alongamento ou diminuição de período $(\bar{T} - T)/T$ e da taxa de amortecimento $\bar{\xi}$, como visto na Figura 6.1.

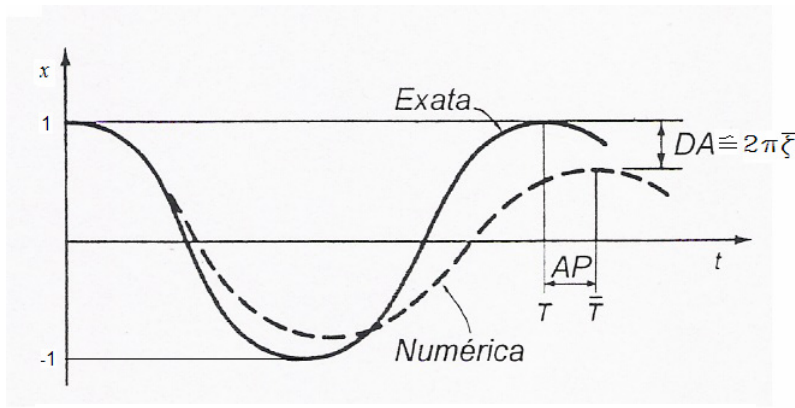


Figura 6.1 - Ilustração do alongamento de período (AP) e decaimento da amplitude (DA) para $\xi = 0.0$.

Assim como feito para a estabilidade, adota-se também a equação massa-mola-amortecedor sem nenhum tipo de força externa, i.e.:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (6.1)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

A solução da equação (6.1) para $0 \leq \xi < 1$ é dada como (RAO, 1995, CLOUGH & PENZIEN, 1993):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left(x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \quad (6.3)$$

com $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$.

Utilizando a equação (5.23), a solução numérica da equação (6.1) é dada por:

$$\begin{aligned} x^{t+\Delta t} &= A_{\text{ExGA/H}}(1,1)x^t + A_{\text{ExGA/H}}(1,2)\dot{x}^t \\ \dot{x}^{t+\Delta t} &= A_{\text{ExGA/H}}(2,1)x^t + A_{\text{ExGA/H}}(2,2)\dot{x}^t \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde $\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}}$ representa a matriz de amplificação do método ExGA ou ExGAH.

O termo da velocidade na equação (6.4) pode ser eliminado criando-se mais um sistema de equações no tempo anterior, admitindo $t = t - \Delta t$ na equação acima. A seguinte equação para o deslocamento é obtida (BELYTSCHKO & HUGHES, 1983):

$$x^{t+\Delta t} - tr(\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}})x^t + \det(\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}})x^{t-\Delta t} = 0 \quad (6.5)$$

Como os auto-valores são distintos para a matriz de amplificação $\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}}$ quando $0 \leq \xi < 1$, i.e., $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução da equação (6.5) é calculada como:

$$x^t = c_1 \lambda_1^i + c_2 \lambda_2^i \quad (6.6)$$

onde i representa o número do intervalo de tempo, tal que, $t = i\Delta t$.

De maneira similar aos auto-valores da matriz de amplificação analítica, equação (5.17), os auto-valores da matriz de amplificação $\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}}$ podem ser expressos como:

$$\lambda_{1,2} = e^{-\bar{\xi}\bar{\omega}\Delta t \pm I\bar{\omega}_d\Delta t} \equiv A \pm BI \quad (6.7)$$

com $\bar{\xi}$, $\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}_d$ representando a versão numérica de ξ , ω e ω_d , resultando em

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\arctan(B/A)}{\sqrt{1-\xi^2}\Delta t} \\ \bar{\xi} &= \frac{-\ln(A^2 + B^2)\sqrt{1-\xi^2}}{2\arctan(B/A)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Substituindo a equação (6.7) na equação (6.6), a forma discreta da solução da equação (6.3) é dada por:

$$\bar{x}^T = e^{-\bar{\xi}\bar{\omega}\bar{t}} \left(x_0 \cos(\bar{\omega}_d \bar{t}) + \bar{c} \sin(\bar{\omega}_d \bar{t}) \right) \quad (6.9)$$

com $\bar{x}^T \equiv x^T$ (pontos discretos) e $\bar{c} = \frac{(A_{\text{ExGA/H}}(1,1) - A_{\text{ExGA/H}}(2,2))x_0/2 + A_{\text{ExGA/H}}(1,2)\dot{x}_0}{\left(\det(\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}}) - (tr(\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}})/2)^2\right)^{1/2}}$.

Utilizando a equação (6.8), tanto o alongamento de período como a taxa de amortecimento podem ser calculados, note que $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$ e $T = 2\pi/\omega$. Sendo $\bar{t} = T$ na parcela $e^{-\bar{\xi}\bar{\omega}\bar{t}}$ da equação (6.9) e expandindo-a em série de Taylor, obtém-se a expressão $DA \cong 2\pi\bar{\xi}$ (HUGHES, 2000). A seguir são apresentados os gráficos para o alongamento de período e taxa de amortecimento para o método ExGA.

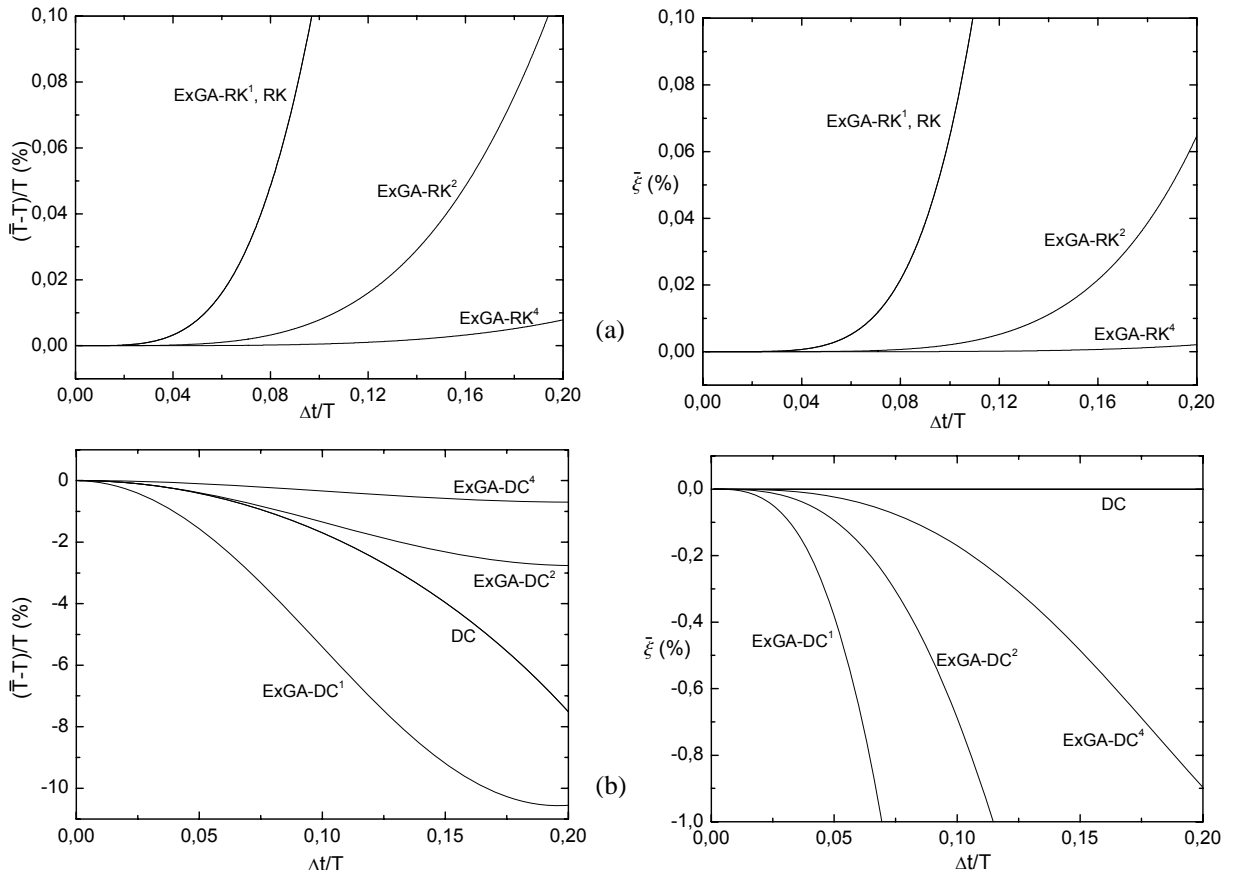


Figura 6.2 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) RK e ExGA-RKⁿ, (b) DC e ExGA-DCⁿ.

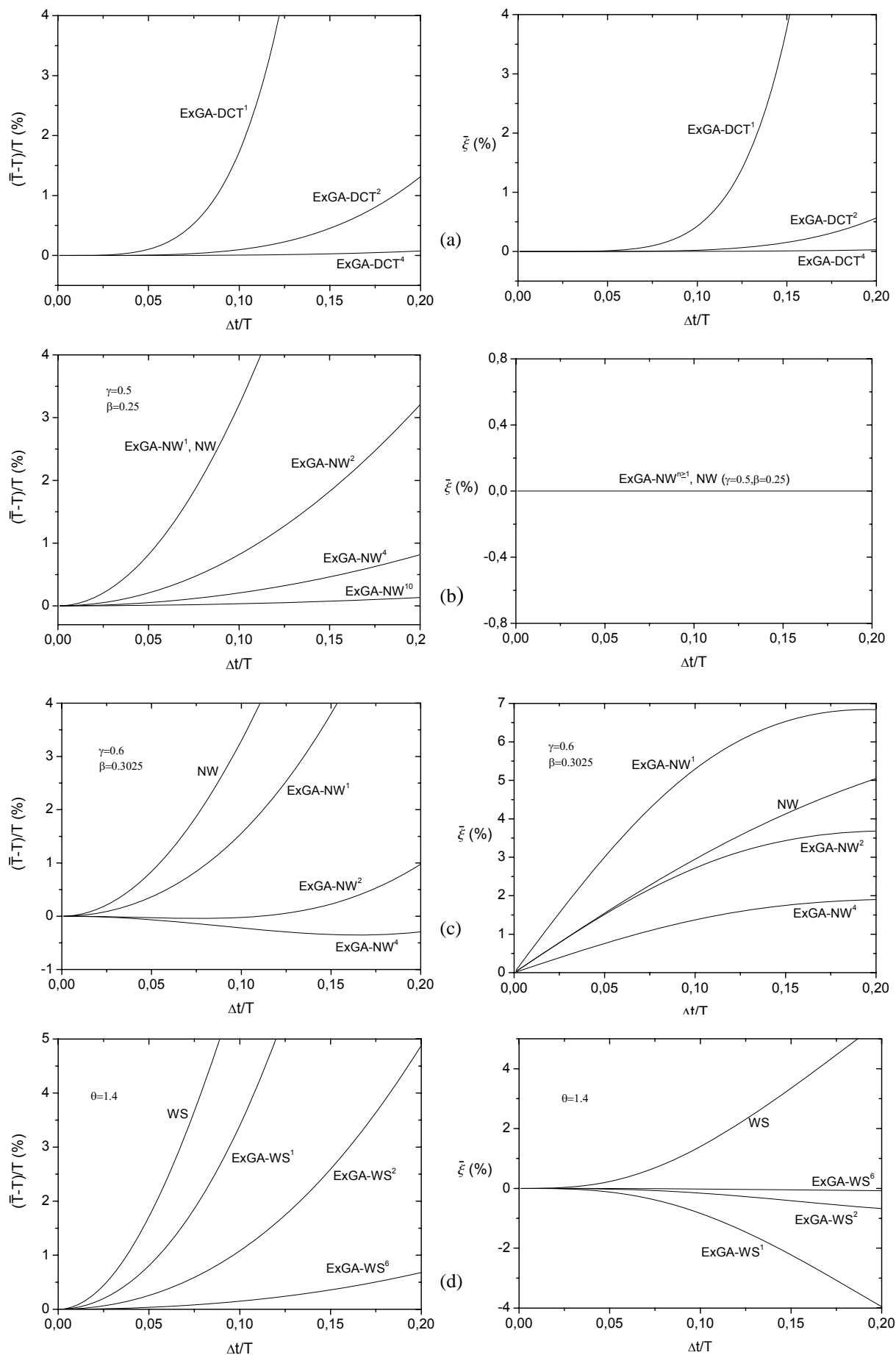


Figura 6.3 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) ExGA-DCTⁿ; (b-c) NW e ExGA-NWⁿ; (d) WS e ExGA-WSⁿ.

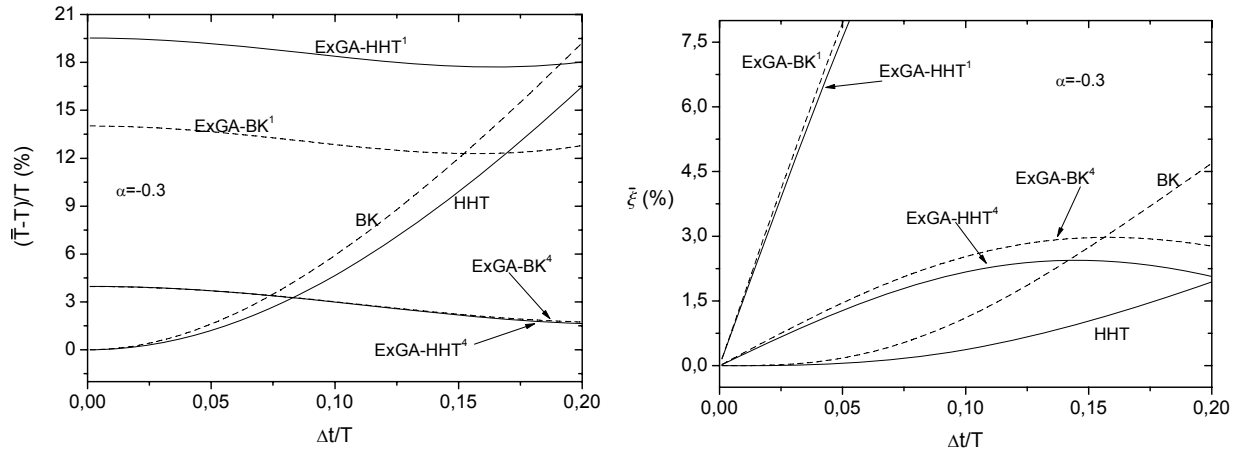


Figura 6.4 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: HHT, BK, ExGAH-HHTⁿ e ExGAH-BKⁿ.

Pode-se observar na Figura 6.2-(a) que tanto o erro percentual do período quanto o erro da taxa de amortecimento numérico diminuem a medida que o numero de sub-passos n aumenta. Para $n=1$ o método ExGA-RK¹ possui o mesmo erro que o método de Runge Kutta. Note que os erros decrescem rapidamente com apenas alguns sub-passos n .

Na Figura 6.2-(b) observa-se que o método ExGA-DC¹ possui um erro (contração) de período maior comparativamente ao método DC, mas a medida que n aumenta esse erro diminui. Já a taxa de amortecimento possui valores negativos para $n \geq 1$, isto ocorre devido ao seu raio espectral ser maior que um, i.e., $\rho(\mathbf{A}) > 1$, o que indica um aumento da amplitude, caracterizando um método instável. O mesmo não acontece para o método ExGA-DCTⁿ, Figura 6.3-(a), onde a taxa de amortecimento numérico possui valores sempre positivos indicando que $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$.

Os métodos ExGA-NW¹ e NW para $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ são exatamente iguais como visto na Figura 6.3-(b). Como seus raios espectrais são iguais a $\rho(\mathbf{A}) = 1$, tanto o método ExGA-NWⁿ quanto o método NW não possuem amortecimento artificial. Já para os parâmetros $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$, Figura 6.3-(c), o método ExGA-NW¹ possui um menor erro para o período e uma taxa de amortecimento numérico maior quando

comparado ao método NW; a medida que n aumenta tanto o alongamento do período quanto a taxa de amortecimento numérico diminuem.

Da Figura 6.3-(d) percebe-se que o alongamento de período para o método ExGA-WSⁿ diminui quando sub-passos (n) são utilizados, para a taxa de amortecimento numérico tem-se que os métodos ExGA-WS¹, ExGA-WS² e ExGA-WS⁶ possuem valores negativo, significando que $\rho(\mathbf{A}) > 1$. Analisando a Figura 6.4, fica evidente que os métodos ExGA-HHTⁿ e ExGA-BKⁿ apesar de estáveis para certos valores de n , não possuem nenhuma precisão como visto no gráfico de alongamento de período e portanto não devem ser utilizados.

Os seguintes gráficos para o alongamento de período e taxa de amortecimento são encontrados para o método ExGAH.

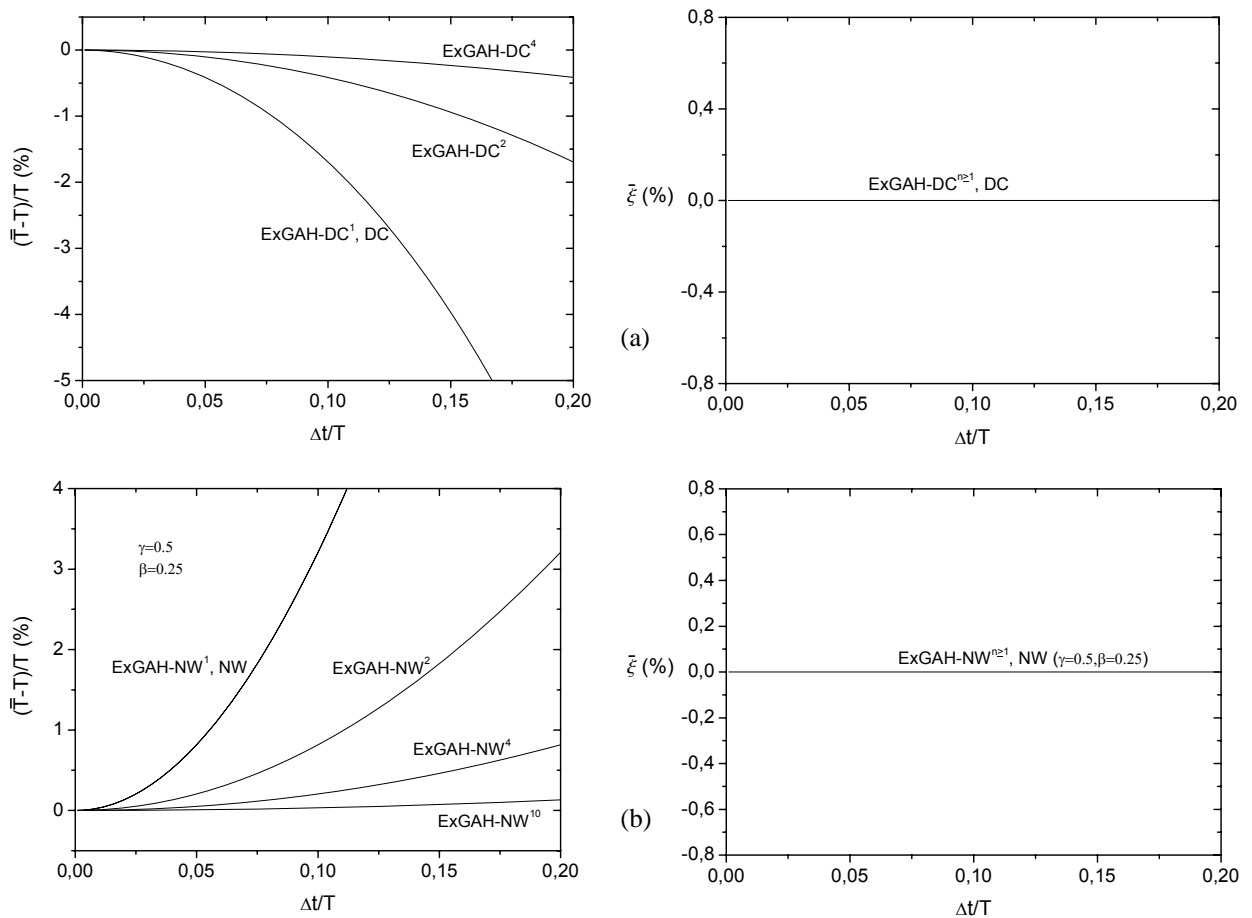


Figura 6.5 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) DC e ExGAH-DCⁿ; (b) NW e ExGAH-NWⁿ.

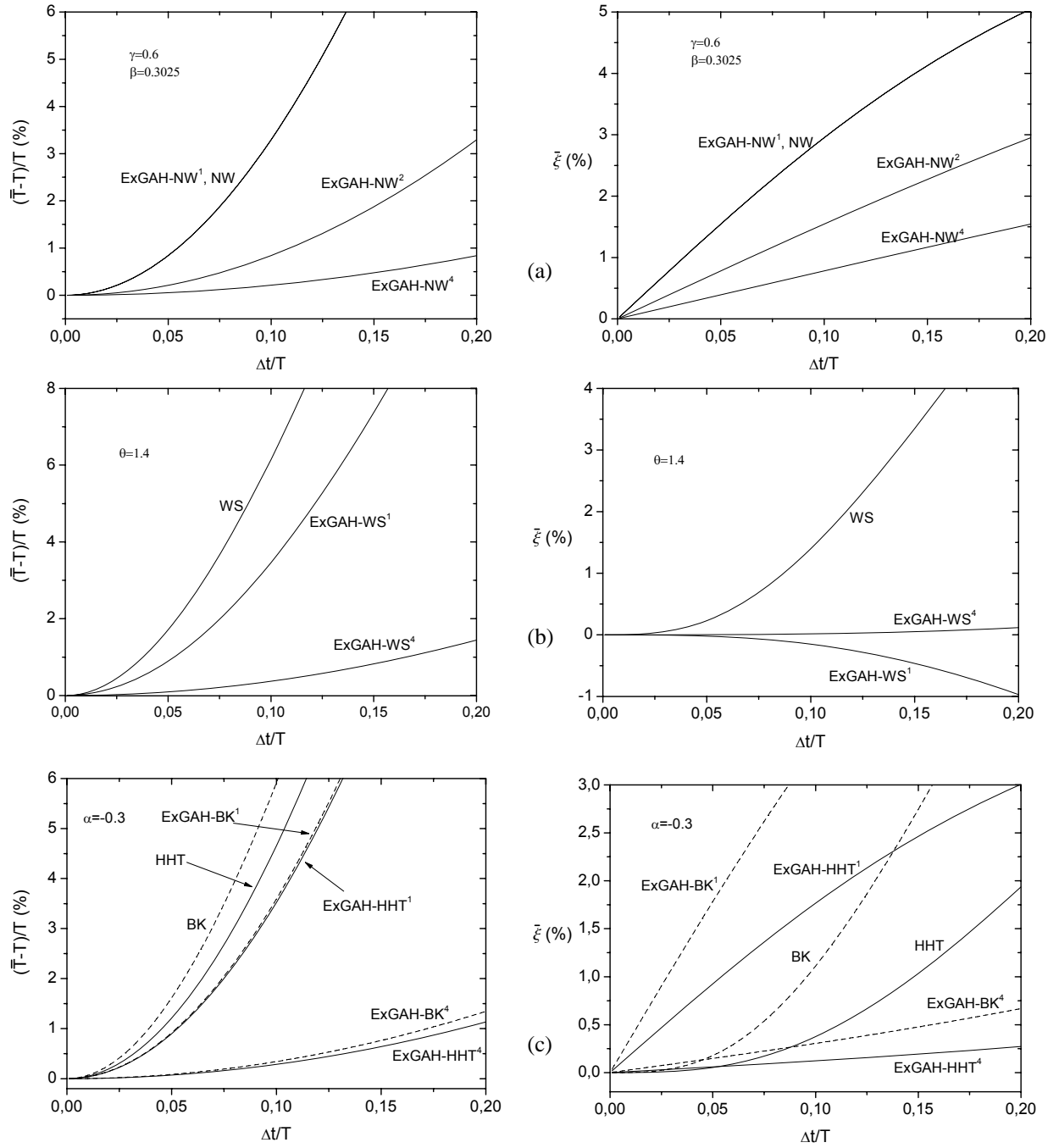


Figura 6.6 - Alongamento de período e taxa de amortecimento para os métodos: (a) NW e ExGAH-NWⁿ; (b) WS e ExGAH-WSⁿ; (c) HHT, BK, ExGAH-HHTⁿ e ExGAH-BKⁿ.

Como visto na Figura 6.5-(a), o método ExGAH-DC¹ é idêntico ao método DC possuindo a mesma contração (diminuição) de período e taxa de amortecimento numérico. Note que o método não possui qualquer tipo de amortecimento numérico já que seu raio espectral é dado por $\rho(\mathbf{A})=1$, a medida que n aumenta o erro percentual do período diminui. O método ExGAH-NW¹ com $\gamma=1/2$ e $\beta=1/4$, Figura 6.5-(b),

também é igual ao método NW, ambos possuindo taxa de amortecimento numérico nulo. Para $n > 1$ tem-se uma diminuição do alongamento de período, a mesma característica é também encontrada no método ExGAH-NWⁿ com $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$ exceto pela taxa de amortecimento numérico onde $\bar{\xi}$ é diferente de zero, Figura 6.6-(a).

Da Figura 6.6-(b), percebe-se que o método ExGA-WS¹ é instável, possuindo uma taxa de amortecimento negativa, já para $n=4$ o método torna-se estável com valores positivos para a taxa de amortecimento, ambos possuem um erro percentual do período menor comparativamente ao método WS. Diferentemente dos métodos ExGA-HHTⁿ e ExGA-BKⁿ, os métodos ExGAH-HHTⁿ e ExGAH-BKⁿ são estáveis e precisos, possuindo um alongamento de período menor que os métodos HHT e BK mas apresentando uma taxa de amortecimento maior para certos valores de n , como visto na Figura 6.6-(c) .

6.2. Erro do operador de carga

Como visto anteriormente a equação homogênea com um grau de liberdade foi estudada, no entanto a solução geral considerando-se a parte não-homogênea para os métodos ExGA e ExGAH pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} x^{t+\Delta t} \\ \dot{x}^{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{ExGA/H}} \begin{pmatrix} x^t \\ \dot{x}^t \end{pmatrix} + \mathbf{L}_{\text{ExGA/H}} \begin{pmatrix} r^t \\ r^{t+\Delta t} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

onde $\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}$ representa a matriz do operador de carga para os métodos ExGA ou ExGAH.

Diferentemente da matriz de amplificação $\mathbf{A}_{\text{ExGA/H}}$, o operador de carga para os métodos ExGA e ExGAH são iguais, i.e., $\mathbf{L}_{\text{ExGA}} = \mathbf{L}_{\text{ExGAH}}$. Note que o operador de carga

é obtido utilizando uma aproximação linear da força entre $[t, t + \Delta t]$ expresso pelas integrais numéricas de convolução previamente definidas no capítulo 3. Qualquer outra aproximação para a força conduziria a operadores diferentes.

Afim de medir o erro causado pela integração numérica das integrais de convolução descritas pelas equações (3.26) a (3.28), o operador de carga analítico \mathbf{L}_{AN} é comparado com o operador numérico para um sistema com um grau de liberdade. Assumindo a força como sendo linear no intervalo $[0, \Delta t]$, as integrais de convolução para $\xi = 0.0$ podem ser calculadas utilizando a função de Green analítica dada pela equação (3.13) como:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} g(\Delta t - \tau) f(\tau) d\tau &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\omega} \sin(\omega(\Delta t - \tau)) \left[\left(\frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t} \right) \tau + f(0) \right] d\tau \\ \int_0^{\Delta t} \dot{g}(\Delta t - \tau) f(\tau) d\tau &= \int_0^{\Delta t} \cos(\omega(\Delta t - \tau)) \left[\left(\frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t} \right) \tau + f(0) \right] d\tau \end{aligned} \quad (6.11)$$

Depois de efetuada a integral da equação (6.11), a mesma pode ser reescrita na seguinte forma matricial, chegando-se no operador de carga analítico dado por:

$$\mathbf{L}_{AN} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\omega\Delta t)}{\omega^2} + \frac{\sin(\omega\Delta t)}{\omega^3\Delta t} & \frac{1}{\omega^2} - \frac{\sin(\omega\Delta t)}{\omega^3\Delta t} \\ -\frac{1}{\omega^2\Delta t} + \frac{\cos(\omega\Delta t)}{\omega^2\Delta t} + \frac{\sin(\omega\Delta t)}{\omega} & \frac{1}{\omega^2\Delta t} - \frac{\cos(\omega\Delta t)}{\omega^2\Delta t} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Admitindo Δt suficientemente pequeno, todos os elementos do operador de carga na equação (6.11) podem ser expandidos em série de Taylor como:

$$\begin{aligned}
L_{\text{AN}}(1,1) &= \frac{\Delta t^2}{3} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{30} + \frac{\omega^4 \Delta t^6}{840} - \frac{\omega^6 \Delta t^8}{45360} + \frac{\omega^8 \Delta t^{10}}{3991680} - \dots \\
L_{\text{AN}}(1,2) &= \frac{\Delta t^2}{6} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{120} + \frac{\omega^4 \Delta t^6}{5040} - \frac{\omega^6 \Delta t^8}{362880} + \frac{\omega^8 \Delta t^{10}}{39916800} - \dots \\
L_{\text{AN}}(2,1) &= \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{8} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{144} - \frac{\omega^6 \Delta t^7}{5760} + \frac{\omega^8 \Delta t^9}{403200} - \dots \\
L_{\text{AN}}(2,2) &= \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{24} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{720} - \frac{\omega^6 \Delta t^7}{40320} + \frac{\omega^8 \Delta t^9}{3628800} - \dots
\end{aligned} \tag{6.13}$$

As matrizes dos operadores de carga numéricos para um sistema com um grau de liberdade podem ser obtidas utilizando as equações (3.26) a (3.28) e reescritas na seguinte forma matricial, respectivamente:

$$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \psi_1(j) & \sum_{j=1}^k \psi_2(j) \\ \sum_{j=1}^k \dot{\psi}_1(j) & \sum_{j=1}^k \dot{\psi}_2(j) \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \psi_1(j) + \frac{1}{2} \psi_1(j-1) \right) & \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \psi_2(j) + \frac{1}{2} \psi_2(j-1) \right) \\ \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}_1(j) + \frac{1}{2} \dot{\psi}_1(j-1) \right) & \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}_2(j) + \frac{1}{2} \dot{\psi}_2(j-1) \right) \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

$$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k/2} \left(\frac{1}{3} \psi_1(2j) + \frac{4}{3} \psi_1(2j-1) + \frac{1}{3} \psi_1(2j-2) \right) & \sum_{j=1}^{k/2} \left(\frac{1}{3} \psi_2(2j) + \frac{4}{3} \psi_2(2j-1) + \frac{1}{3} \psi_2(2j-2) \right) \\ \sum_{j=1}^{k/2} \left(\frac{1}{3} \dot{\psi}_1(2j) + \frac{4}{3} \dot{\psi}_1(2j-1) + \frac{1}{3} \dot{\psi}_1(2j-2) \right) & \sum_{j=1}^{k/2} \left(\frac{1}{3} \dot{\psi}_2(2j) + \frac{4}{3} \dot{\psi}_2(2j-1) + \frac{1}{3} \dot{\psi}_2(2j-2) \right) \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

com

$$\begin{aligned}
\psi_1(j) &= \left(1 - \frac{j}{k}\right) \frac{\Delta t}{k} g\left(\Delta t - \frac{j\Delta t}{k}\right); & \psi_2(j) &= \frac{j}{k} \frac{\Delta t}{k} g\left(\Delta t - \frac{j\Delta t}{k}\right) \\
\dot{\psi}_1(j) &= \left(1 - \frac{j}{k}\right) \frac{\Delta t}{k} \dot{g}\left(\Delta t - \frac{j\Delta t}{k}\right); & \dot{\psi}_2(j) &= \frac{j}{k} \frac{\Delta t}{k} \dot{g}\left(\Delta t - \frac{j\Delta t}{k}\right)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Calculando-se a função de Green pelo método de Runge Kutta com $\xi = 0.0$, chega-se na seguinte tabela contendo a expansão em série de Taylor de todos os elementos da matriz operador de carga numérico para diferentes valores de n :

Tabela 6.1 - Expansão em série de Taylor do operador de carga numérico para o método ExGA-RKⁿ.

	$k=n=1$	$k=n=2$
$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^1$	$L_{\text{ExGA/H}}^1(1,1) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(1,2) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,1) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,2) = \Delta t$	$L_{\text{ExGA/H}}^1(1,1) = L_{\text{ExGA/H}}^1(1,2) = \frac{\Delta t^2}{8} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{192}$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,1) = \frac{\Delta t}{4} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{32} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{1536}$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,2) = \frac{3\Delta t}{4} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{32} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{1536}$
$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^2$	$L_{\text{ExGA/H}}^2(1,1) = \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{12}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(1,2) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,1) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{4} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{48}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,2) = \frac{\Delta t}{2}$	$L_{\text{ExGA/H}}^2(1,1) = \frac{3\Delta t^2}{2} - \frac{3\omega^2 \Delta t^4}{64} + \frac{\omega^4 \Delta t^6}{512} - \frac{\omega^6 \Delta t^8}{36864}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(1,2) = \frac{\Delta t^2}{8} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{192}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,1) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{5\omega^2 \Delta t^3}{32} + \frac{17\omega^4 \Delta t^5}{1536} - \frac{5\omega^6 \Delta t^7}{18432} + \frac{\omega^8 \Delta t^9}{589824}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,2) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{32} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{1536}$
$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3$	-	$L_{\text{ExGA/H}}^3(1,1) = \frac{\Delta t^2}{3} - \frac{5\omega^2 \Delta t^4}{144} + \frac{\omega^4 \Delta t^6}{768} - \frac{\omega^6 \Delta t^8}{55296}$ $L_{\text{ExGA/H}}^3(1,2) = \frac{\Delta t^2}{6} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{144}$ $L_{\text{ExGA/H}}^3(2,1) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{8} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{128} - \frac{5\omega^6 \Delta t^7}{27648} + \frac{\omega^8 \Delta t^9}{884736}$ $L_{\text{ExGA/H}}^3(2,2) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{24} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{1152}$

Comparando as expressões (6.13) com a Tabela 6.1, pode ser observado que o erro do operador de carga numérico diminui quando n aumenta. Como visto, o operador matricial $\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3$ produz melhores resultados que os demais, entretanto o operador

$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^2$ seria uma escolha suficientemente precisa e computacionalmente menos oneroso quando comparado com o operador $\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3$, além de não ter nenhuma restrição quanto ao número inteiro n como ocorre em $\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3$ (ver seção 3.2). Vale ressaltar que tanto o operador numérico quanto o analítico foram calculados assumindo a força como sendo linear dentro do intervalo de tempo. Qualquer outra aproximação levaria a diferentes valores tanto numéricos como analíticos.

Para o método ExGA-DCⁿ a seguinte expansão em série de Taylor é encontrada para $\xi = 0.0$:

Tabela 6.2 - Expansão em série de Taylor do operador de carga numérico para o método ExGA-DCⁿ.

	$k = n = 1$	$k = n = 2$
$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^1$	$L_{\text{ExGA/H}}^1(1,1) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(1,2) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,1) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,2) = \Delta t$	$L_{\text{ExGA/H}}^1(1,1) = L_{\text{ExGA/H}}^1(1,2) = \frac{\Delta t^2}{8}$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,1) = \frac{\Delta t}{4} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{32}$ $L_{\text{ExGA/H}}^1(2,2) = \frac{3\Delta t}{4} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{32}$
$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^2$	$L_{\text{ExGA/H}}^2(1,1) = \frac{\Delta t^2}{2}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(1,2) = 0$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,1) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{4}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,2) = \frac{\Delta t}{2}$	$L_{\text{ExGA/H}}^2(1,1) = \frac{3\Delta t^2}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{32}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(1,2) = \frac{\Delta t^2}{8}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,1) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{5\omega^2 \Delta t^3}{32} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{128}$ $L_{\text{ExGA/H}}^2(2,2) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{32}$
$\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3$	-	$L_{\text{ExGA/H}}^3(1,1) = \frac{\Delta t^2}{3} - \frac{\omega^2 \Delta t^4}{48}$ $L_{\text{ExGA/H}}^3(1,2) = \frac{\Delta t^2}{6}$ $L_{\text{ExGA/H}}^3(2,1) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{8} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{192}$ $L_{\text{ExGA/H}}^3(2,2) = \frac{\Delta t}{2} - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{24}$

Comparando a Tabela 6.2 com as equações (6.13), nota-se que o operador $\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^3$ também produz melhores resultados e que o operador de carga para o método ExGA-RKⁿ é mais preciso que operador para o método ExGA-DCⁿ.

O operador de carga para o método de Newmark pode ser escrito da seguinte forma (HUGHES, 2000):

$$\mathbf{L}_{\text{NW}} = \begin{pmatrix} \frac{(1-2\beta)\Delta t^2 + 2\xi(\gamma-2\beta)\omega\Delta t^3}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} & \frac{2\beta\Delta t^2}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} \\ \frac{2(1-\gamma)\Delta t - (\gamma-2\beta)\omega^2\Delta t^3}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} & \frac{2\gamma\Delta t}{2 + 4\gamma\xi\omega\Delta t + 2\beta\omega^2\Delta t^2} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

A seguinte expansão em série de Taylor é encontrada para o operador \mathbf{L}_{NW} assumindo $\xi = 0.0$:

$$\begin{aligned} L_{\text{NW}}(1,1) &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\omega^2\Delta t^4 + \left(\frac{\beta^2}{2} - \beta^3\right)\omega^4\Delta t^6 + \dots \\ L_{\text{NW}}(1,2) &= \beta\Delta t^2 - \beta^2\omega^2\Delta t^4 + \beta^3\omega^4\Delta t^6 - \beta^4\omega^6\Delta t^8 + \beta^5\omega^8\Delta t^{10} - \dots \\ L_{\text{NW}}(2,1) &= (1-\gamma)\Delta t + \left(\beta\gamma - \frac{\gamma}{2}\right)\omega^2\Delta t^3 + \left(\frac{\beta\gamma}{2} - \beta^2\gamma\right)\omega^4\Delta t^5 + \dots \\ L_{\text{NW}}(2,2) &= \gamma\Delta t - \beta\gamma\omega^2\Delta t^3 + \beta^2\gamma\omega^4\Delta t^5 - \beta^3\gamma\omega^6\Delta t^7 + \beta^4\gamma\omega^8\Delta t^9 - \dots \end{aligned} \quad (6.19)$$

Comparando as expressões de (6.19) e admitindo $\beta = 0$ e $\gamma = 1/2$, conclui-se que o operador do método ExGA-DC¹, i.e., $\mathbf{L}_{\text{ExGA/H}}^2$ para $k=n=1$ da Tabela 6.2 é exatamente o mesmo operador do método Diferença Central, ou seja, o método de

Newmark com $\beta = 0$ e $\gamma = 1/2$. Comprovando assim a alta precisão dos operadores para os métodos ExGA quando $n > 1$.

6.3. Estimativa do intervalo de tempo

Como visto nos gráficos de estabilidade, métodos explícitos são condicionalmente estáveis, tendo portanto um intervalo de tempo crítico. Para a determinação do intervalo de tempo crítico é necessário calcular o menor período T do sistema, ou seja, o método de integração deve ser capaz de integrar corretamente todas ou as mais importantes equações originadas da análise modal. O processo de determinação do menor período, i.e., a maior frequência, considerando as matrizes globais é extremamente oneroso e não usual. Entretanto este cálculo é realizado a nível de elemento. Utilizando a expressão do quociente Rayleigh (BATHE, 1996), pode-se mostrar que:

$$\lambda_{\max} \leq \max_e \lambda_{\max}^e \quad (6.20)$$

com λ_{\max} representando o máximo auto-valor do sistema global e λ_{\max}^e o máximo auto-valor do elemento.

O máximo auto-valor λ_{\max}^e é calculado através da seguinte equação:

$$(\mathbf{k}^e - \lambda^e \mathbf{m}^e) \boldsymbol{\varphi}^e = 0 \quad (6.21)$$

com $\omega_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}}$ e $T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}}$.

Também não é aconselhável adotar rotinas numéricas para o cálculo dos auto-valores nos elementos, exceto para casos bastantes específicos onde longos períodos de tempo precisam ser analisados (KOTERAS & LEHOUCQ, 2006). Portanto, em geral os auto-valores são calculados de forma analítica através de expressões pré-definidas. FLANAGAN & BELYTSCHKO (1984) reduzindo a equação (6.21) e utilizando apenas um ponto de Gauss estabeleceu expressões para os auto-valores de elementos quadriláteros e hexaédricos, mas tal procedimento em geral gera resultados bastante conservativos. LIN (1989), propôs um teorema provando que os auto-valores mínimos e máximos de um elemento são determinados pela soma dos menores e maiores auto-valores obtidos nos ponto de Gauss, respectivamente. Sua expressão é dada por:

$$\lambda_{\min}^e \geq \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} \lambda_{\min}^{e,i}; \quad \lambda_{\max}^e \leq \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} \lambda_{\max}^{e,i} \quad (6.22)$$

onde $n_{\text{int}} = n_{\text{int}}^1 n_{\text{int}}^2 n_{\text{int}}^3$ representa o número total de pontos de Gauss.

O auto-valor $\lambda^{e,i}$ no ponto de Gauss i do elemento é calculado através da seguinte equação:

$$\left(\mathbf{k}_i^e - \lambda^{e,i} \mathbf{m}^e \right) \boldsymbol{\varphi}^e = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_{\text{int}} \quad (6.23)$$

sendo $\mathbf{k}_i^e = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} W_i$.

Posteriormente, LIN (1991) com o intuito de tornar a equação (6.23) mais fácil de ser calculada, propôs a seguinte transformação:

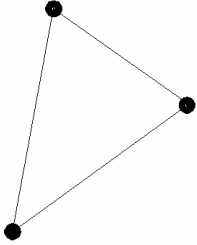
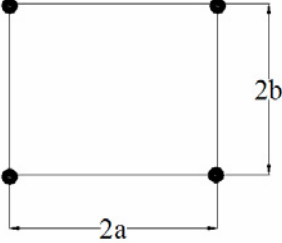
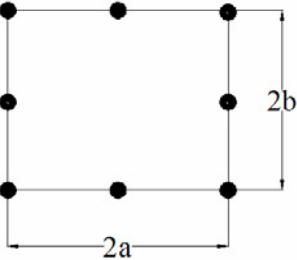
$$\begin{aligned}
\mathbf{m}^e &= m\mathbf{I} \\
\bar{\mathbf{k}}_i^e &= \frac{1}{m} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_i \\
(\bar{\mathbf{k}}_i^e - \lambda^e \mathbf{I}) \boldsymbol{\phi}^e &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_{\text{int}}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Na equação (6.24) a matriz do elemento $\bar{\mathbf{k}}_i^e$ tem a vantagem de possuir a mesma dimensão da matriz \mathbf{D} , sendo, portanto menor comparativamente com a matriz original \mathbf{k}_i^e . A transformação (6.24) produz bons resultados para elementos triangulares lineares e quadriláteros bilineares.

Tanto as deduções de FLANAGAN & BELYTSCHKO e LIN geram uma aproximação para a equação original (6.21). Assumindo matriz massa diagonal, a equação (6.21) é manipulada diretamente e expressões para os auto-valores de elementos triangulares com 3 nós e quadriláteros com 4 e 8 nós, com seus lados paralelos aos eixos globais de coordenadas, são obtidos utilizando computação simbólica, e.g., *Mathematica*, como visto na Tabela 6.3.

Os cálculos dos auto-valores para o meio elástico foram efetuados considerando o estado plano de tensão (EPT). Para o estado plano de deformação (EPD) deve-se substituir E por $E/(1-\nu^2)$ e ν por $\nu/(1-\nu)$ na Tabela 6.3 (MALVERN, 1969). Expressões para auto-valores de elementos de maior ordem e/ou distorcidos podem também ser obtidos, mas necessitam de muitas simplificações e suposições para que possam ser utilizados de forma eficiente.

Tabela 6.3- Auto-valores para cálculo da maior frequência do elemento onde $\omega_{max}^e = \sqrt{\lambda_{max}^e}$; $\lambda_{max}^e = \max_{i=1,2,...} \lambda_i^e$.*

Elemento	Meio Acústico	Meio Elástico (EPT)
	$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_{2,3} = \frac{3Ka_1 \pm 3K\sqrt{-4(-2a_3 + a_6b_1^2 + a_5b_2^2 + a_2b_3^2 - 2a_4b_2c_2) + a_1}}{8A^2\rho}$ $a_1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, a_2 = c_1^2 + c_2^2, a_3 = b_1b_3c_1c_3$ $a_4 = b_1c_1 + b_3c_3, a_5 = c_1^2 + c_2^2, a_6 = c_2^2 + c_3^2$	$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = \frac{3a_1E}{8A^2(1+\nu)\rho},$ $\lambda_{5,6} = \frac{-12a_1E \pm E\sqrt{144a_1^2 + 576(\nu^2 - 1)(b_3^2a_2 - 2a_3 - 2b_2c_2a_4 + b_2^2a_7 + b_1^2a_6)}}{32A^2(\nu^2 - 1)\rho}$ $a_1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, a_2 = c_1^2 + c_2^2, a_3 = b_1b_3c_1c_3$ $a_4 = b_1c_1 + b_3c_3, a_5 = c_1^2 + c_2^2, a_6 = c_2^2 + c_3^2, a_7 = c_1^2 + c_3^2$
	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{K}{a^2\rho}, \lambda_3 = \frac{K}{b^2\rho}, \lambda_4 = \frac{K(a^2 + b^2)}{3a^2b^2\rho}$	$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = \frac{(a^2 + b^2)E}{2a^2b^2(1+\nu)\rho}, \lambda_5 = \frac{(-2b^2 + a^2(\nu - 1))E}{6a^2b^2(\nu^2 - 1)\rho},$ $\lambda_6 = \frac{(-2a^2 + b^2(\nu - 1))E}{6a^2b^2(\nu^2 - 1)\rho},$ $\lambda_{7,8} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2(2\nu^2 - 1)}}{2a^2b^2(\nu^2 - 1)\rho}$
	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3(a^2 + b^2)K}{a^2b^2\rho},$ $\lambda_{3,4} = \frac{5(5a^2 + 3b^2)K \pm K\sqrt{5}\sqrt{125a^4 - 30a^2b^2 + 9b^4}}{10a^2b^2\rho},$ $\lambda_{5,6} = \frac{5(3a^2 + 5b^2)K \pm K\sqrt{5}\sqrt{9a^4 - 30a^2b^2 + 125b^4}}{10a^2b^2\rho},$ $\lambda_{7,8} = \frac{15(a^2 + b^2)K \pm K\sqrt{25a^4 + 14a^2b^2 + 25b^4}}{2a^2b^2\rho}$	-

* K coeficiente de compressibilidade, E módulo de elasticidade, ν coeficiente de Poisson, A área do elemento e $b_1 = y_2 - y_3, b_2 = y_3 - y_1, b_3 = y_1 - y_2,$
 $c_1 = x_3 - x_2, c_2 = x_1 - x_3, c_3 = x_2 - x_1$ onde (x_i, y_i) representa as coordenadas dos nós para o triângulo.

7. Análise de Resultados

O presente capítulo tem por objetivo demonstrar a aplicabilidade dos métodos de integração temporal denominados ExGA e ExGAH desenvolvidos neste trabalho e comparar os resultados obtidos com os métodos clássicos e soluções analíticas quando existentes. A obtenção desses resultados se faz mediante a consideração de quatro exemplos. O primeiro exemplo é dedicado a analisar o método ExGA considerando-se uma barra homogênea sob um carregamento externo, para o segundo exemplo considera-se a mesma barra sob o mesmo carregamento considerando-se agora um meio heterogêneo, tal exemplo é dedicado ao método ExGAH. No exemplo seguinte, uma membrana homogênea sob condição inicial de velocidade é analisada. Por fim é mostrado um exemplo mais complexo mostrando a propagação da onda gerada por uma fonte sísmica em um meio geofísico.

7.1. Definições

Antes de começar os exemplos serão definidos alguns parâmetros que serão utilizados. Como visto na seção 3.3 tanto a função de Green quanto a função Degrau são calculadas em uma sub-região do domínio com sua respectiva sub-malha. Seja j um ponto nodal qualquer de uma sub-malha definida por um domínio $\Omega^{*,e}$, contorno $\Gamma^{*,e}$ e dimensão $h^{*,e}$ para o elemento, aplicando-se uma condição inicial de velocidade (função de Green) ou de deslocamento (função Degrau) em j irá perturbar o meio gerando assim uma resposta, ver Figura 7.1. Supondo $R_T = c\Delta t$ o raio de ação teórico devido a uma condição inicial no ponto j e R_{TN} o raio de ação teórico numérico, tem-se que tais regiões são as menores possíveis onde se tem influência das condições iniciais.

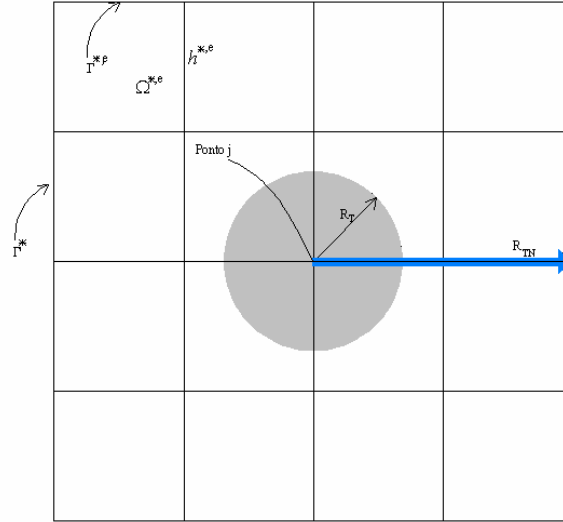


Figura 7.1 - Representação da sub-malha e comparação entre o raio teórico e o raio teórico numérico.

Apesar da onda não chegar ao contorno Γ^* é necessário colocar essa última camada de elementos para não haver deficiência nas matrizes massa e rigidez da camada anterior, ou melhor dos últimos nós da camada anterior. Vale lembrar, que a discretização da sub-malha é idêntica a da malha original, i.e., $\Omega^e = \Omega^{*,e}$ e que n significa o número de sub-passos para o cálculo da função de Green ou Degrau no instante $t = \Delta t$ com $h = \Delta t / n$. Para melhor comparar com os métodos clássicos, a integral de convolução é aproximada pela equação (3.27) com $k=n=1$, ou seja, aproximação por trapézio. Como visto na seção 6.2, tal aproximação produz resultados tão precisos quanto as aproximações dos métodos clássicos como Newmark, Runge Kutta, etc. Para o método ExGAH, pode ocorrer sub-malhas diferentes para a função de Green e Degrau, a sub-malha adotada nos exemplos corresponde ao pior caso entre as duas sub-malhas. Matriz massa diagonal é adotada tanto para métodos explícitos quanto implícitos.

7.2. Barra homogênea

Tal exemplo consiste em uma barra prismática engastada em uma de suas extremidades, submetida a um carregamento do tipo Heaviside, dado por, $F(t) = -10^6 H(t)$ N na outra extremidade como ilustrado na Figura 7.2. Seus parâmetros físicos e geométricos são dados por $\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$ (massa específica), $K = 3.2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ (coeficiente de compressibilidade), $\nu = 0.0$ (coeficiente de Poisson), $c = 4000 \text{ m/s}$ (velocidade da onda), $A = 1 \text{ m}^2$ (área transversal), $a = 10.0 \text{ m}$ (comprimento em x) e $b = 1.0 \text{ m}$ (comprimento em y). Para o presente modelo foi utilizada uma malha uniforme com 4000 elementos quadriláteros bilineares, ou seja, $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ m}$. O deslocamento tanto na extremidade livre (ponto B) quanto no centro da barra (ponto A) foram calculados assim como a velocidade no centro da barra. Não foi considerado amortecimento na presente análise.

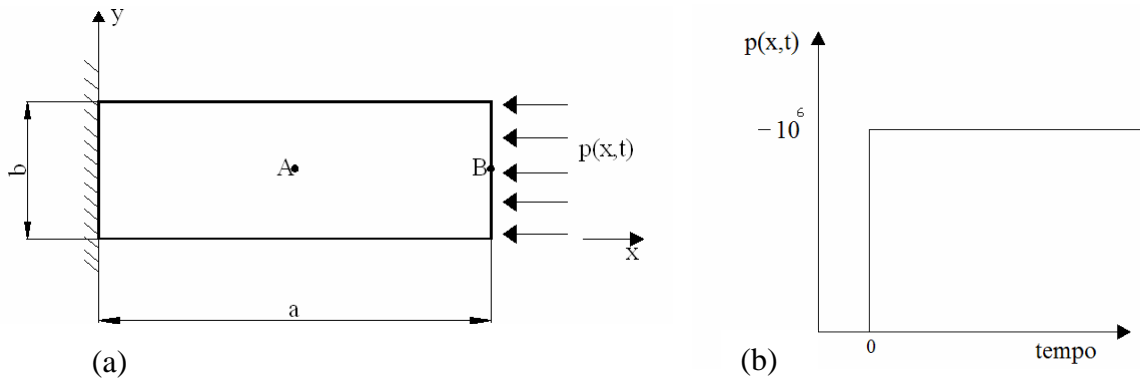


Figura 7.2 - Barra engastada. (a) Geometria e condições de contorno; (b) Carregamento adotado ao longo do tempo.

Utilizando a Tabela 6.3, a maior frequência calculada para os elementos é dada por $\omega_{\max}^e = 1.6 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$. Sendo $\Delta t / T_{\min}^e \approx 0.2$, condição suficiente para garantir estabilidade dos métodos explícitos, a resposta para $\Delta t = 8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ foi computada. Analisando a Figura 7.3-(a), os métodos RK e ExGA-RK¹ geram bons resultados

quando comparados com a solução analítica, note que o raio numérico (R_N) da submalha para o método ExGA-RK¹ é $1.5 R_{TN}^I$. Aumentando o intervalo de tempo para $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5} s$, o método ExGA-RK² continua estável e fornecendo resultados precisos, o que não acontece para o método RK (não mostrado para este Δt) onde se tem instabilidade, i.e., $\Delta t > \Delta t_{crítico}$. Como na discretização espacial via MEF ocorre erro no espectro de frequência em comparação ao problema real (BATHE, 1996), é usual adotar algoritmos que possuam amortecimento numérico, i.e., $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Isso pode ser visto mais claramente no gráfico de velocidade, observando que os métodos RK e ExGA-RK² possuem tal amortecimento numérico.

Afim de analisar o método ExGA-DCⁿ, o intervalo de tempo foi diminuído para $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6} s$. Observa-se na Figura 7.3-(b), que o método ExGA-DC¹ ou ExGA-DC² torna-se instável. Diferentemente do método DC, o método ExGA-DCⁿ possui uma instabilidade “fraca” para valores pequenos de $\Delta t/T$, já que a curva de seu raio espectral é assintótica próximo a origem. Observe que o raio numérico para o método ExGA-DC¹ é igual ao raio teórico numérico, i.e., $R_N = R_{TN}^I$; o que não acontece com o método ExGA-RK¹; isto acontece devido ao número menor de operações de multiplicação matriz-vetor, tornando o vetor resultante, i.e., $\mathbf{G}_{neq,j}$ com um número menor de elementos diferentes de zero. Note que o método ExGA-DCT¹ é estável fornecendo bons resultados; entretanto, seu raio numérico é maior comparativamente ao método ExGA-DC¹, isto é resultado do processo de marcha inerente ao método, resultando em um número maior de operações.

Na Figura 7.3-(c), os métodos ExGA-NW¹ com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ e ExGA-NW¹ com $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$ são analisados. Percebe-se que o raio numérico de tais métodos é relativamente grande, sendo $4 R_{TN}$, tal característica será descrita no exemplo

7.4. Como demonstrado nesta tese, os métodos ExGA-NW¹ e ExGAH-NW¹ com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ são iguais, além disso, os dois métodos possuem também a mesma sub-malha. Analisando o gráfico da velocidade, fica evidente a diferença entre um método com amortecimento numérico (ExGA-NW¹ $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$) e sem amortecimento numérico (ExGA-NW¹ $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$).

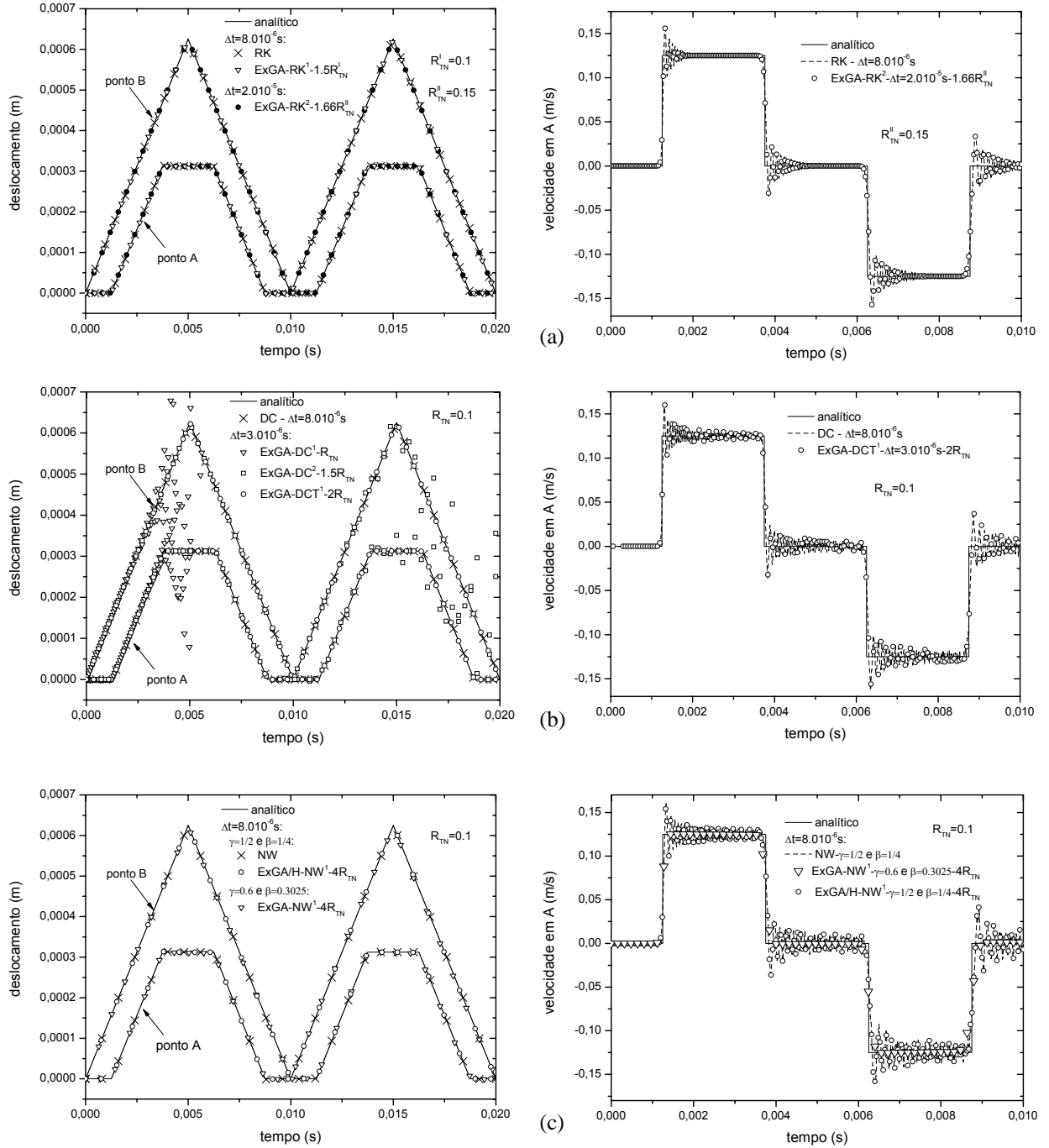


Figura 7.3 – Deslocamento nos pontos A e B e velocidade no ponto A para os métodos: (a) RK, ExGA-RK¹, ExGA-RK²; (b) DC, ExGA-DC¹, ExGA-DC², ExGA-DCT¹; (c) NW, ExGA/H-NW¹.

Aumentando o intervalo de tempo para $\Delta t = 10^{-4} s$ (Figura 7.4), nota-se que os métodos ExGA-RK¹⁵, ExGA-DCT¹⁵ e ExGA/H-NW¹⁵ ainda conseguem atingir resultados satisfatórios, entretanto os métodos começam a ter um erro maior devido à integração numérica de convolução adotada, principalmente no termo da velocidade. Para se obter resultados mais precisos a integral de convolução deve ser calculada utilizando-se um número maior de pontos, i.e, $k > 1$; para maiores detalhes da integral numérica de convolução com $k > 1$, o trabalho de LOUREIRO (2006) é indicado. Na Figura 7.5, o campo de deslocamento e velocidade ao longo do tempo e em função do comprimento L são plotados utilizando-se o método ExGA-RK¹.

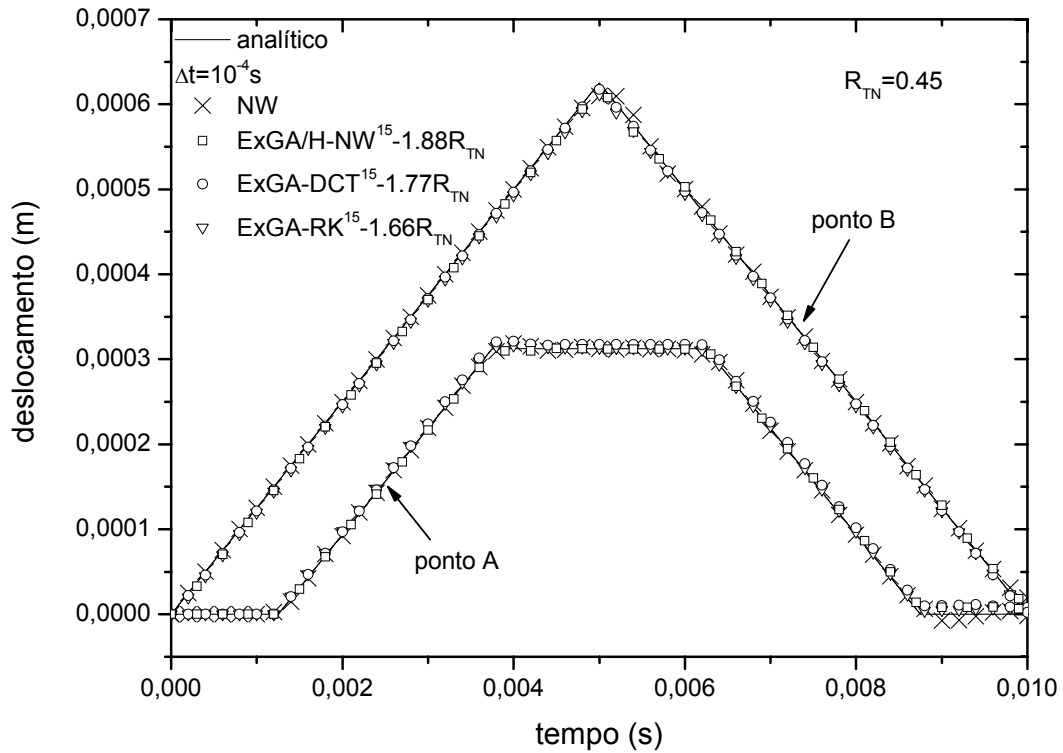


Figura 7.4 - Deslocamento nos pontos A e B para os métodos NW, ExGA-RK¹⁵, ExGA-DCT¹⁵, ExGA/H-NW¹⁵ ($\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$).

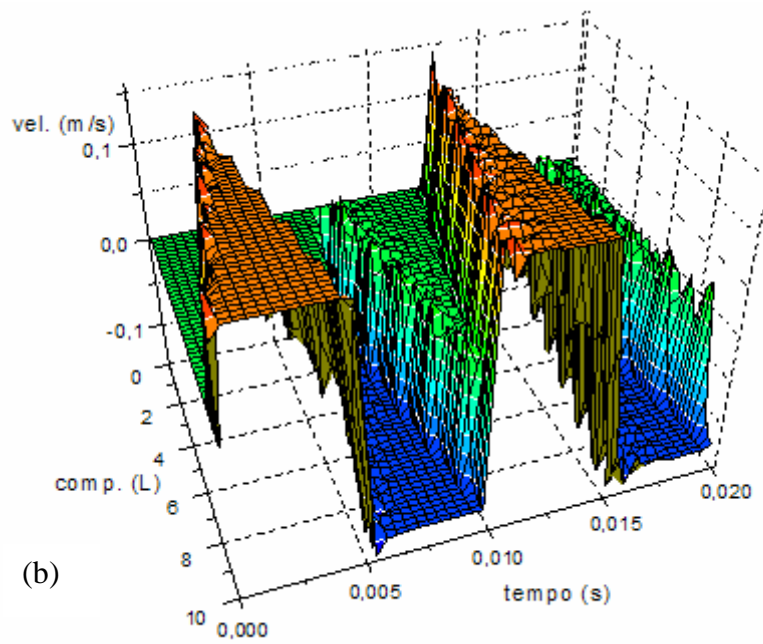
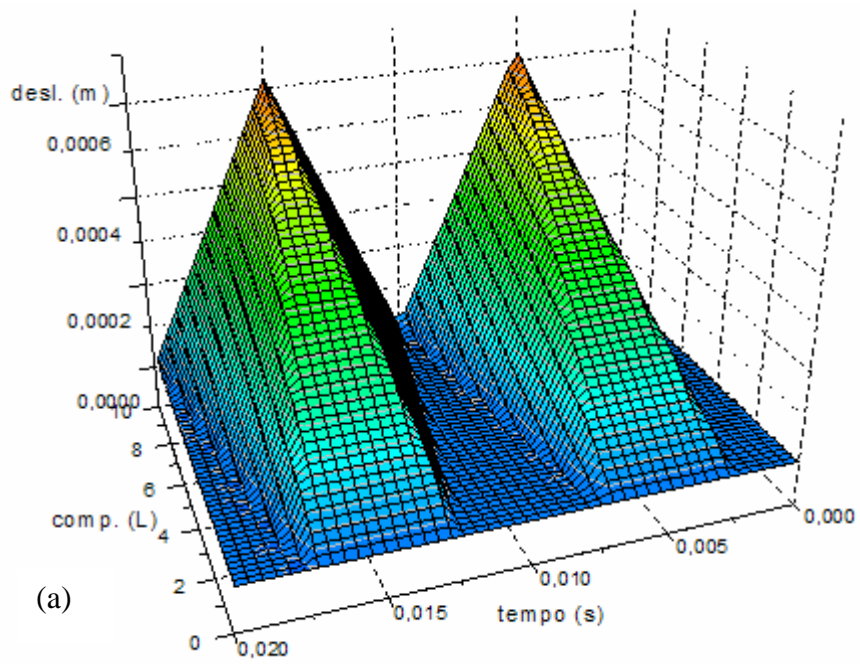


Figura 7.5 – Método ExGA-RK¹ com $\Delta t = 8.10^{-6} s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 0.1 m$.
(a) Campo de deslocamento; (b) campo de velocidade.

7.3. Barra não-homogênea

No presente exemplo considera-se as mesmas dimensões e carregamento do exemplo anterior, mudando apenas o meio como visto na Figura 7.6. Os meios possuem as seguintes propriedades:

Meio 1: $\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$; $K = 3.2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.0$ e $c = 4000 \text{ m/s}$.

Meio 2: $\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$; $K = 6.4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.0$ e $c = 5657 \text{ m/s}$.

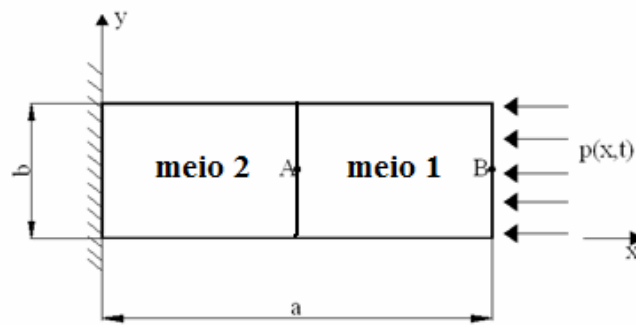


Figura 7.6 - Geometria e condições de contorno para a barra.

Como o presente exemplo não possui solução analítica, a solução numérica com $\Delta t = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ obtida pelo método DC foi utilizada como padrão, onde a maior frequência estimada para o problema é dada por $\omega_{\max}^e = 2.26274 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$. Aumentando o intervalo de tempo para $\Delta t = 8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, a resposta utilizando o método ExGAH-DC¹ foi computada (Figura 7.7), percebe-se que o método é estável alcançando excelentes resultados; entretanto, seu raio numérico é dado por $R_N = 1.5 R_{TN}^1$. Pode-se mostrar que o método ExGAH-DCⁿ requer um domínio de sub-malha com área maior que para o método ExGA-DCⁿ. Na verdade, a sub-malha necessária para o cálculo da função Degrau deve ser maior que a sub-malha para o cálculo da função de Green, visto que o

vetor resultante, ou seja, $\mathbf{H}_{neq,j}$ com j um ponto nodal qualquer da malha, possui mais elementos diferentes de zero.

Aumentando o intervalo de tempo para $\Delta t = 10^{-4} s$, os métodos ExGA-DC¹⁴ e ExGA/H-NW¹⁴ atingem resultados satisfatórios, como previsto para o método ExGA/H-NW¹⁴ possui um raio numérico maior comparativamente ao método ExGAH-DC¹⁴, pode-se notar também que a resposta começa a sofrer erros devido a integral numérica de convolução adotada. Note que tal intervalo de tempo é proibitivo para o método DC.

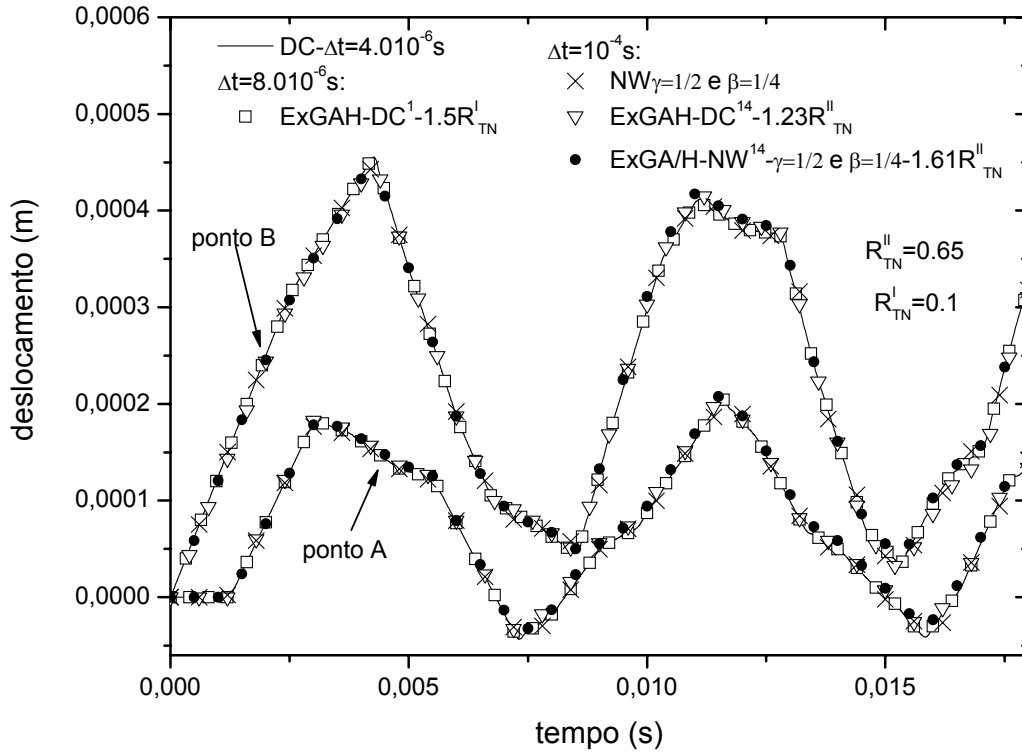


Figura 7.7 - Deslocamento nos pontos A e B para os métodos DC, NW, ExGAH-DC¹, ExGA/H-NW¹⁴ e ExGAH-DC¹⁴.

7.4. Membrana sob condição inicial de velocidade

Neste exemplo considera-se uma membrana quadrada engastada em suas extremidades submetida a um campo inicial de velocidade na região sombreada, Figura 7.8-(a), dado por $\dot{u}(x, y, 0) = c$, conforme ilustrado na Figura 7.8-(b). Seus parâmetros físicos e geométricos são dados por $c = 1.0 \text{ m/s}$ (velocidade da onda) e $a = 1.0 \text{ m}$ (comprimento em x e y), respectivamente. Para o presente modelo foi utilizada uma malha uniforme com 10000 elementos quadriláteros bilineares, ou seja, $\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$. O deslocamento no centro da membrana (ponto A($a/2, a/2$)) é computado. Não foi considerado amortecimento na presente análise.

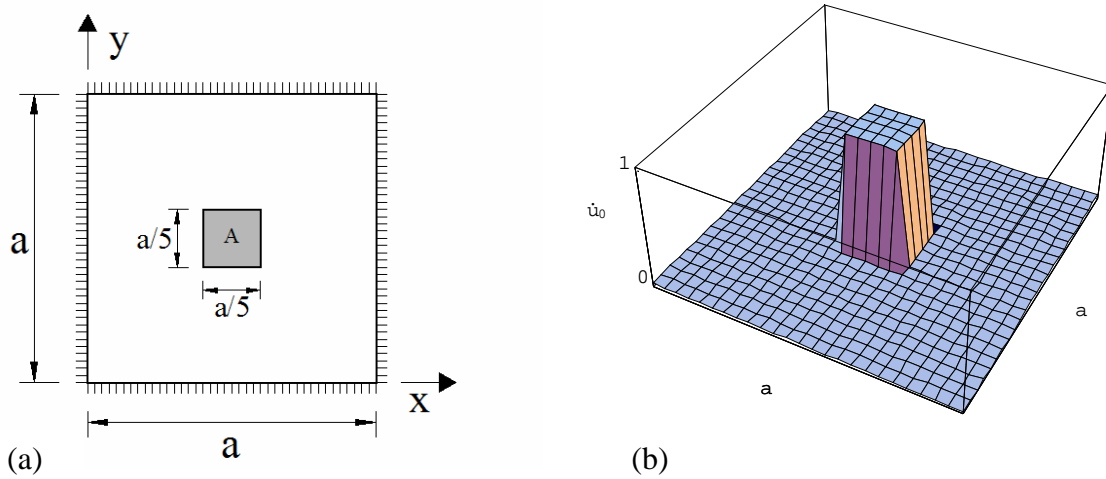


Figura 7.8 - Membrana engastada. (a) Definição da geometria e condições de contorno; (b) Campo inicial de velocidade.

A maior frequência calculada utilizando a Tabela 6.3 foi de $\omega_{\max}^e = 2.10^2 \text{ rad/s}$; portanto o intervalo de tempo $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ foi utilizado para a obtenção do deslocamento no centro da membrana, satisfazendo aproximadamente o seguinte valor $\Delta t / T_{\min}^e \approx 0.16$. Analisando a Figura 7.9-(a), o método ExGA-RK¹ alcança resultados precisos. Como mostrado nesta tese o método ExGA-RK¹ é exatamente o mesmo que o

método RK quando a parte não-homogênea da equação é inexistente. Note que o raio numérico da sub-malha para o cálculo da função de Green é $1.5 R_{TN}^I$.

Como esperado, o resultado para o método ExGA-DC¹ é instável, mas vale mostrar que seu raio numérico é exatamente igual ao raio teórico numérico, i.e., $R_N = R_{TN}^I$. Já para o método ExGA-DCT¹, resultados precisos e estáveis são encontrados; entretanto o raio numérico, ou seja, a sub-malha adotada para o cálculo da função de Green, é maior (dobro) comparativamente ao método ExGA-DC¹, devido ao processo de sub-marcha do método, como discutido anteriormente.

Aumentando o intervalo de tempo para $\Delta t = 0.145s$. Comparando-se os métodos ExGA-RK¹⁵ e ExGAH-DC¹⁵ com o método NW, nota-se claramente que o método NW gera resultados estáveis, porém não precisos. Já os métodos ExGA-RK¹⁵ e ExGAH-DC¹⁵ obtiveram resultados extremamente precisos acompanhando a solução analítica, mostrando assim a alta precisão dos métodos ExGA e ExGAH.

Como visto até agora, o método explícito ExGA-DCTⁿ seguido pelo método ExGA-RKⁿ requerem raios numéricos maiores que o previsto. Como discutido anteriormente, raios numéricos maiores é resultado do grande número de operações matriz-vetor, gerando assim um vetor coluna $\mathbf{G}_{neq,j}$ ou $\mathbf{H}_{neq,j}$ com mais elementos diferentes de zero ou de forma global há um aumento na banda das matrizes de Green ($\mathbf{G}(\Delta t)$) e Degrau ($\mathbf{H}(\Delta t)$).

Sabe-se que o produto \mathbf{K}^2 aumenta sua banda de M para $2M-1$, \mathbf{K}^3 de M para $3M-1$ e assim por diante. Como descrito, por exemplo, na seção 4.5.2 para o método ExGA-Runge Kutta, a matriz de Green para métodos explícitos nada mais é que multiplicações recursivas entre as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , ocasionando no aumento da banda das matrizes $\mathbf{G}(\Delta t)$ e $\mathbf{H}(\Delta t)$ à medida que o número de sub-passos (n) aumenta, supondo obviamente \mathbf{M} diagonal. Entretanto, para métodos implícitos o mesmo não

acontece, sendo necessário resolver um sistema de equações, o que matematicamente corresponde a calcular a inversa da matriz efetiva $\hat{\mathbf{K}}$, tornando as matrizes de Green e Degrau “cheias”, ou seja, não possuindo valores iguais a zero. Contudo, um método numérico deve ser capaz de representar o fenômeno físico com precisão e obedecendo certos critérios de convergência, logo a inversa da matriz efetiva $\hat{\mathbf{K}}$ possui elementos cujos valores não representam significado físico algum; sendo portanto, desprezíveis. Esses valores desprezíveis também acontecem para os métodos explícitos quando o número de sub-passos n aumenta mantendo-se o intervalo de tempo constante.

Na Figura 7.9-(b), o método implícito ExGA/H-Newmark é analisado. Para o método ExGA-NW¹ com $\Delta t = 0.005s$ resultados ruins são encontrados assumindo $R_N = 2R_{TN}^I$, à medida que o raio numérico aumenta a resposta converge para a solução analítica. Como os métodos ExGA-NW¹ e ExGAH-NW¹ são exatamente os mesmos que o método NW para equações homogêneas, o método ExGA/H-NW¹ com $R_N = 2.5R_{TN}^I$ gera resultados bons; no entanto, uma investigação mais precisa mostra que tal método não é igual ao método NW. Aumentando o raio numérico para $R_N = 3R_{TN}^I$, o método ExGA/H-NW¹ se aproxima ainda mais do método NW, mas sendo ainda diferentes. Uma investigação mais detalhada da solução numérica, i.e., os pontos numéricos, mostrou que os métodos NW e ExGA/H-NW¹ são iguais quando o raio numérico for aproximadamente $R_N = 4R_{TN}^I$. Aumentando o intervalo de tempo para $\Delta t = 0.145s$, o método ExGA/H-NW¹⁵ fornece resultados mais precisos que o método NW, note que a solução vai convergindo para a solução analítica observando a resposta dos métodos ExGA/H-NW¹⁵ com $R_N = 1.375R_{TN}^{II}$ e ExGA/H-NW¹⁵ com $R_N = 1.5R_{TN}^{II}$. Uma grande vantagem do método ExGA/H-Newmark é que não se precisa utilizar nenhum tipo de “Solver” para se obter a resposta ao longo do tempo, sendo necessária

apenas utilizar tal técnica na sub-malha. Esta característica não é encontrada no método de Newmark ou em qualquer outro método implícito, onde a resposta ao longo do tempo é feita mediante a utilização de “Solvers”, como por exemplo, PCG, Gauss, Cholesky, etc.

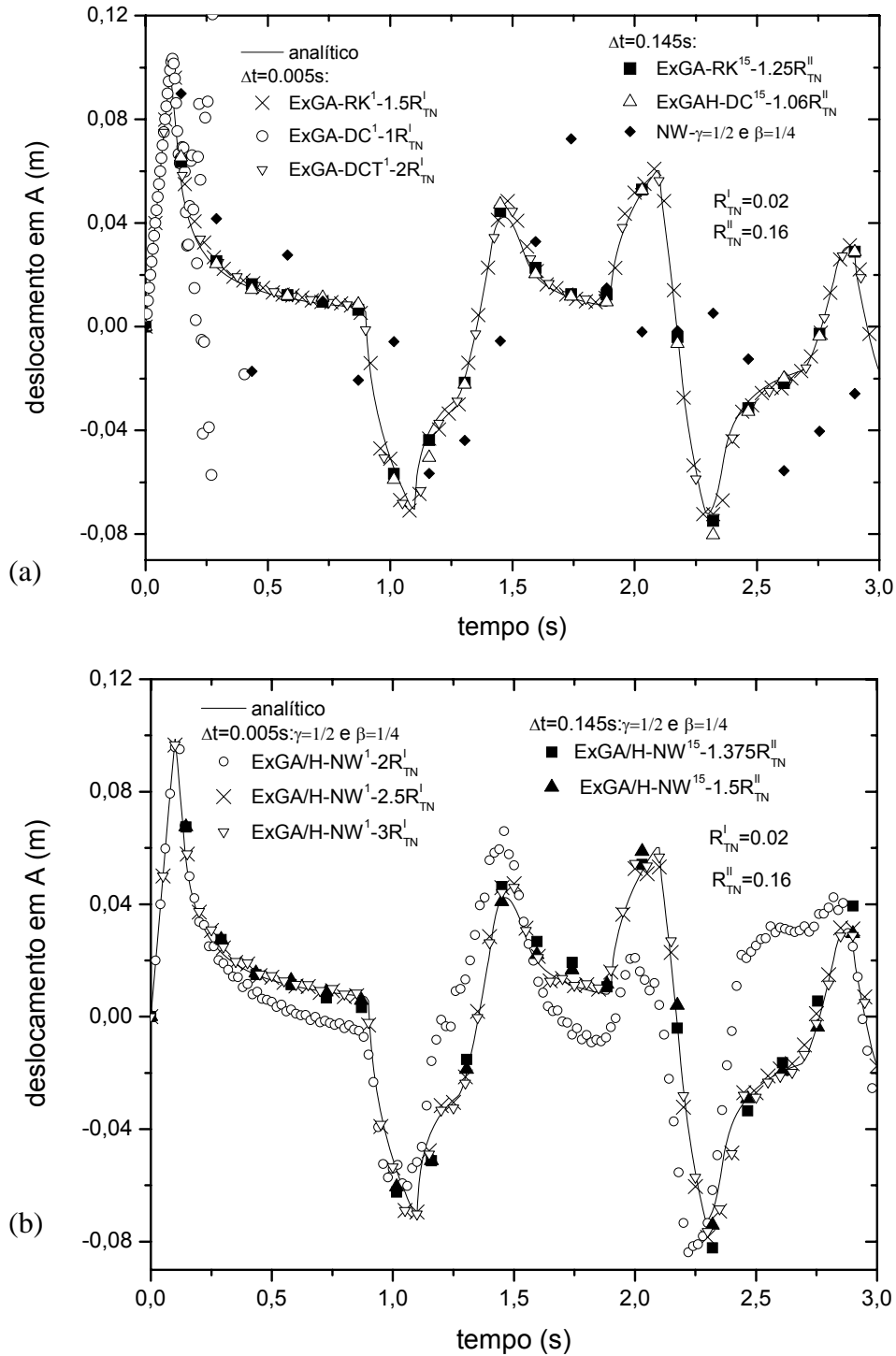


Figura 7.9 – Deslocamento no ponto A (a/2,a/2) para os métodos: (a) ExGA-RK¹, ExGA-DC¹, ExGA-DCT¹, NW, ExGA-RK¹⁵, ExGAH-DC¹⁵; (b) ExGA/H-NW¹ e ExGA/H-NW¹⁵.

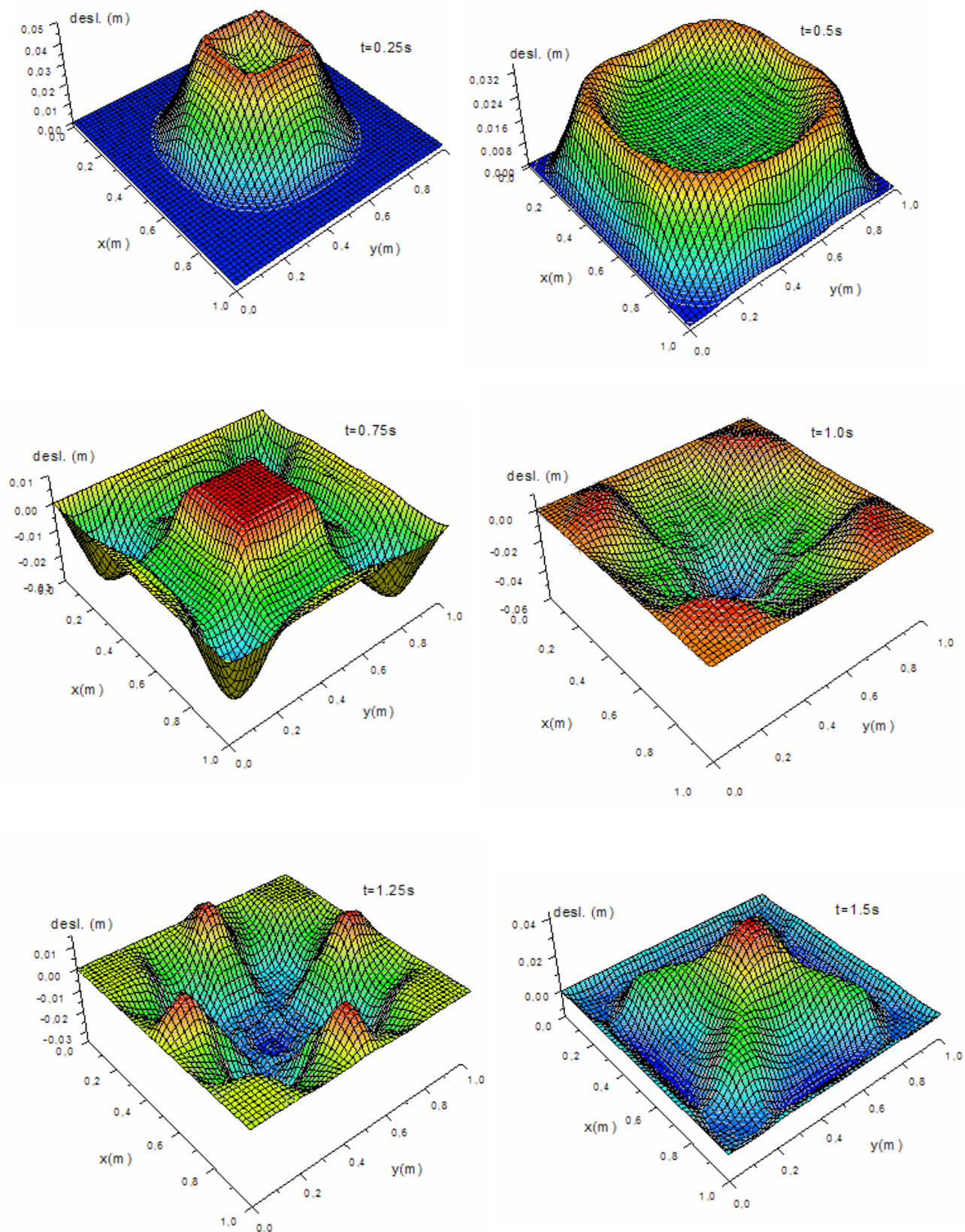


Figura 7.10 – Campo de deslocamento considerando instantes de tempo variando de 0.25s a 1.5s para a membrana sob condição inicial de velocidade utilizando o método ExGAH-DC¹ com $\Delta t = 0.05s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 0.02$ m.

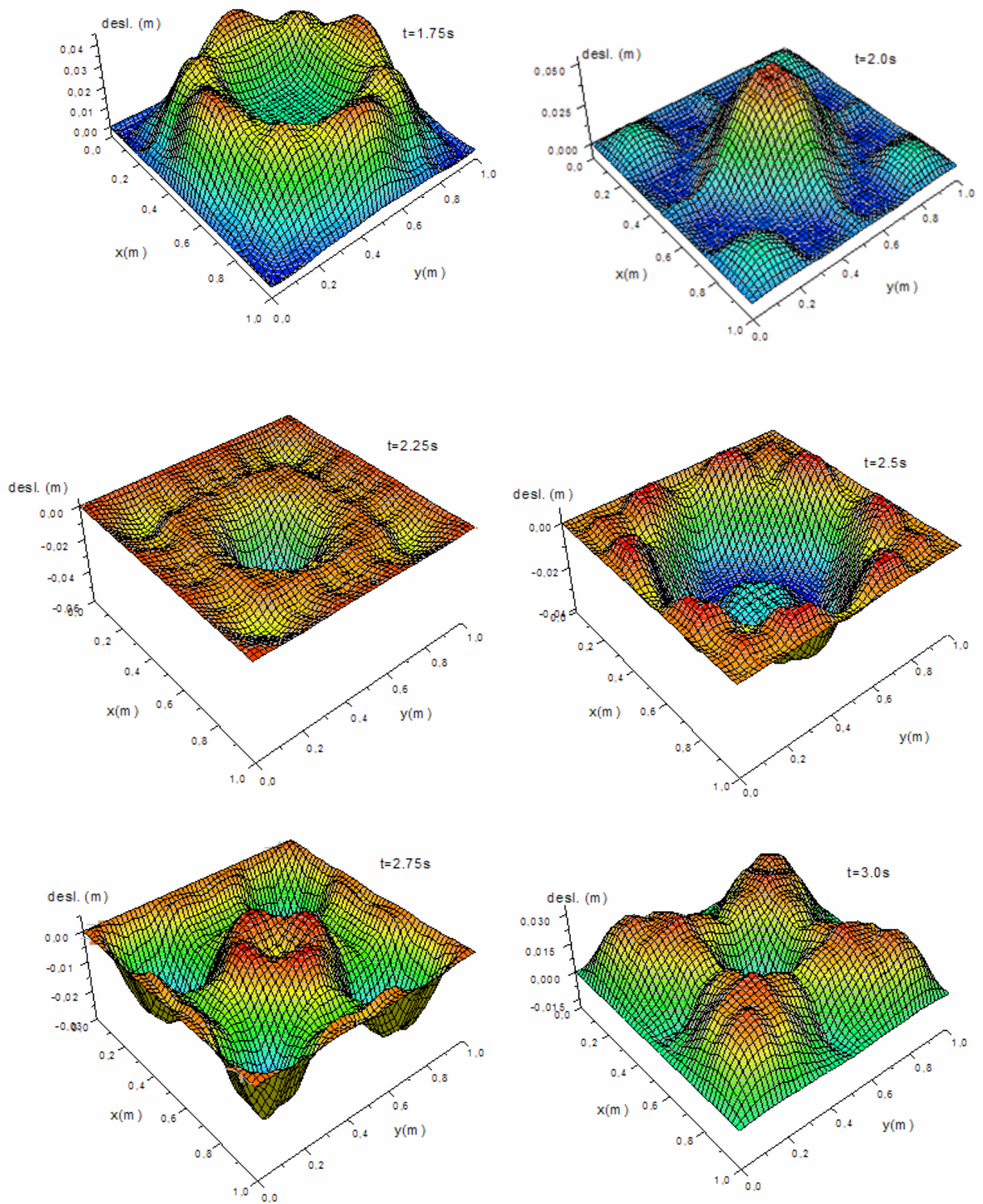


Figura 7.11 - Campo de deslocamento considerando instantes de tempo variando de 1.75s a 3.0s para a membrana sob condição inicial de velocidade utilizando o método ExGAH-DC^I com $\Delta t = 0.05s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 0.02$ m.

7.5. Meio geofísico

Neste exemplo a propagação de onda gerada por uma fonte sísmica em um meio geofísico representado através de um modelo acústico bidimensional é estudado. O meio é semi-infinito, sendo a fonte localizada no centro a 20 metros de profundidade em relação à superfície. O meio é composto por três camadas com as seguintes propriedades físicas, Figura 7.12:

Camada 1: $\rho = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3$; $c = 1000 \text{ m} / \text{s}$

Camada 2: $\rho = 2000 \text{ kg} / \text{m}^3$; $c = 2000 \text{ m} / \text{s}$

Camada 3: $\rho = 3000 \text{ kg} / \text{m}^3$; $c = 3000 \text{ m} / \text{s}$

O meio é discretizado através de uma malha estruturada de elementos finitos com 90000 elementos quadriláteros bilineares sendo $\Delta x = \Delta y = 10 \text{ m}$. No contorno superior (superfície) é aplicada a condição de contorno natural, sendo seu valor prescrito igual a zero. Nos demais contornos aplicam-se condições de contorno não-reflexivas, com o intuito de representar a continuidade do meio.

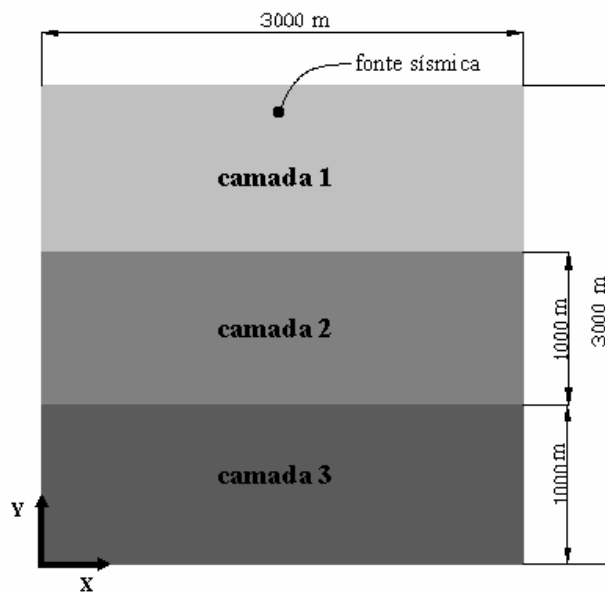


Figura 7.12 – Modelo em camadas para o meio geofísico.

A função para representar o termo relativo à fonte, é dada por, $f(t) = \text{mag} (2\pi^3 f_c^2 t^2 - 1) e^{-\pi^3 f_c^2 t^2}$ com mag representando a magnitude da fonte e f_c a frequência de corte, ou seja, frequências acima deste valor não são incluídas na análise. A fonte sísmica adotada neste exemplo tem uma frequência de corte de 30 HZ e uma magnitude de 1.0. A frequência de corte sofre uma correção dada por $f'_c = f_c / (3\sqrt{\pi})$, esta correção é utilizada para promover uma redução da frequência de corte, além disso, a fonte também possui uma defasagem de tempo dada por $t_d = 2\sqrt{\pi} / f_c = 0.118s$, como visto na Figura 7.13:

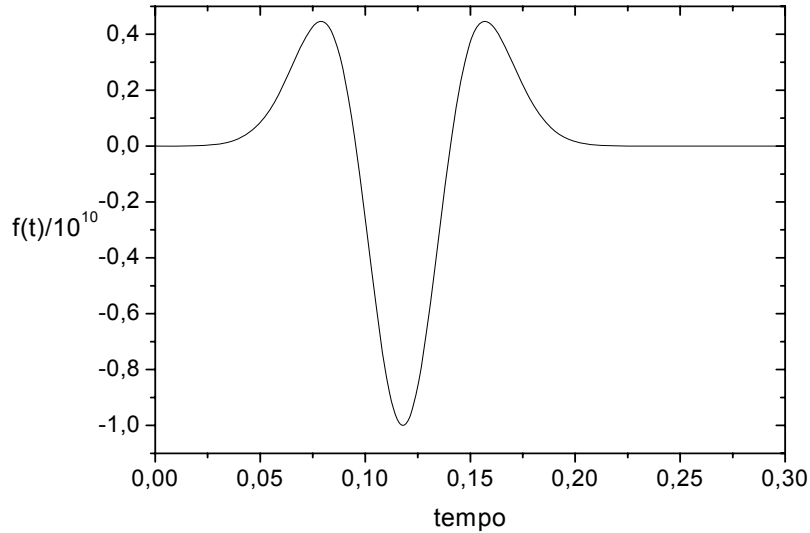


Figura 7.13 – Amplitude da fonte sísmica versus tempo.

A condição de contorno não-reflexiva é agrupada diretamente na matriz de amortecimento através da seguinte expressão $K \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{K}{c} \frac{\partial u}{\partial t}$. Para melhor comparar os métodos explícitos, a condição de contorno é diagonalizada através da técnica “ROW SUM”, i.e., a matriz amortecimento contendo a condição de contorno não reflexiva é agora diagonal.

Como não existe solução analítica para o problema, a resposta (pressão) foi computada utilizando-se o método RK com $\Delta t = 0.0005s$, visto que a maior frequência encontrada para os elementos foi $\omega_{\max}^e = 6.10^2 \text{ rad} / s$. O intervalo de tempo foi então aumentado para $\Delta t = 0.005s$ e os métodos ExGA-RK⁴ e ExGAH-DC⁴ foram utilizados para calcular as pressões nos seguintes pontos e compara-los com o método RK:

Ponto A: $x=1500 \text{ m}$ e $y=2500 \text{ m}$

Ponto B: $x=1500 \text{ m}$ e $y=3000 \text{ m}$

Ponto C: $x=1000 \text{ m}$ e $y=3000 \text{ m}$

Ponto D: $x=500 \text{ m}$ e $y=3000 \text{ m}$

Ponto E: $x=0.0 \text{ m}$ e $y=3000 \text{ m}$

Os campos de pressão foram computado utilizando-se o método ExGAH-DC¹ como visto na Figura 7.16 e na Figura 7.17, note que todos os campos de pressão possuem a mesma escala. Analisando os campos de pressão, percebe-se que para a frente de onda chegar a camada 2 leva-se $(1000-20)/1000+t_d=1.1s$ entre os instantes $t = 1.25s$ e $t = 1.5s$, onde se percebe a influência da onda refletida na interface entre as camadas 1 e 2, observe também que há uma perda de intensidade da onda ao passar pela interface. Entre os instantes $t = 1.5s$ e $t = 1.75s$, no tempo $1500/1000+t_d=1.62s$, a frente de onda atinge pela primeira vez o contorno, note que não há nenhuma reflexão visível no contorno, validando assim a condição de contorno adotada. Para o campo de pressão no instante $t = 1.75s$, já é visível a reflexão da onda entre as camadas 2 e 3, que ocorre no tempo $1.1+1000/2000=1.60s$, nota-se também que a intensidade desta onda é menor do que aquela provocada pela reflexão na primeira interface.

No instante $1.6+1000/3000=1.93s$, a frente de onda atinge a maior profundidade do modelo, como visto no campo de pressão em $t = 2.0s$, observe que não há reflexões

visíveis no contorno inferior. No instante $1.1+1000/1000=2.1s$, a frente de onda chega a superfície, como observado no campo para $t = 2.25s$, nota-se também que houve a passagem da onda refletida entre a interface 2 e 3 e entre a interface 1 e 2. Analisando a Figura 7.14 e a Figura 7.15 para as pressões medidas em vários pontos, percebe-se que além da onda incidente existe também a chegada de ondas refletidas, note que após a passagem da onda, há pequenas oscilações que ocorrem nas pressões, isto se deve a malha adotada indicando que a malha precisa ser mais refinada.

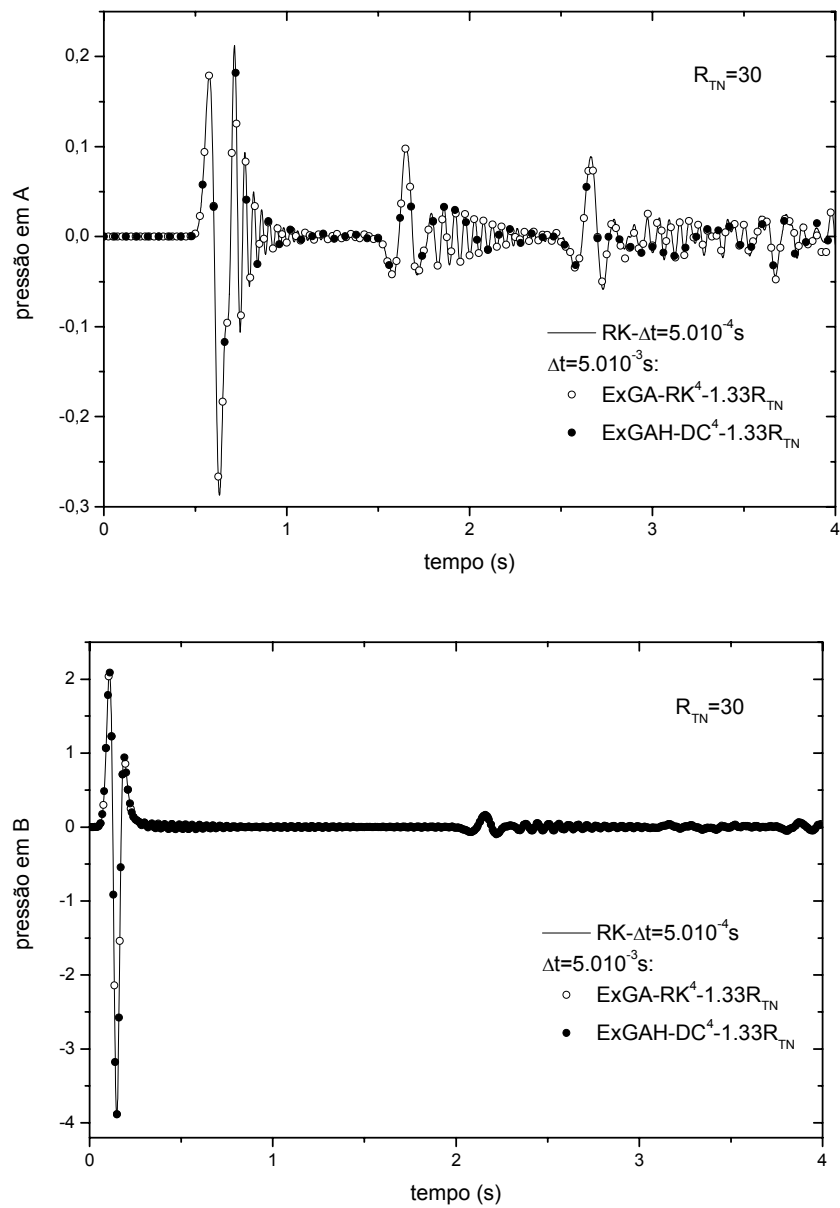


Figura 7.14 – Pressões nos pontos A e B, calculadas pelos métodos RK, ExGA-RK⁴ e ExGAH-DC⁴.

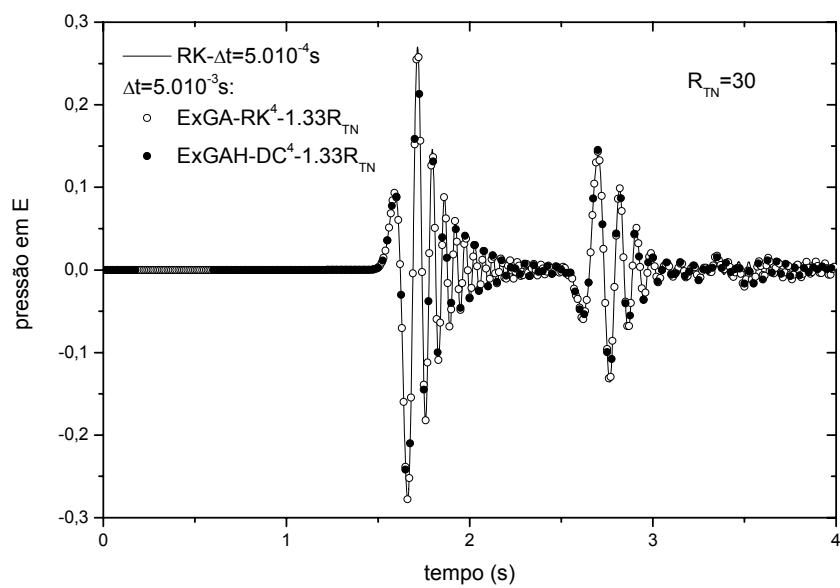
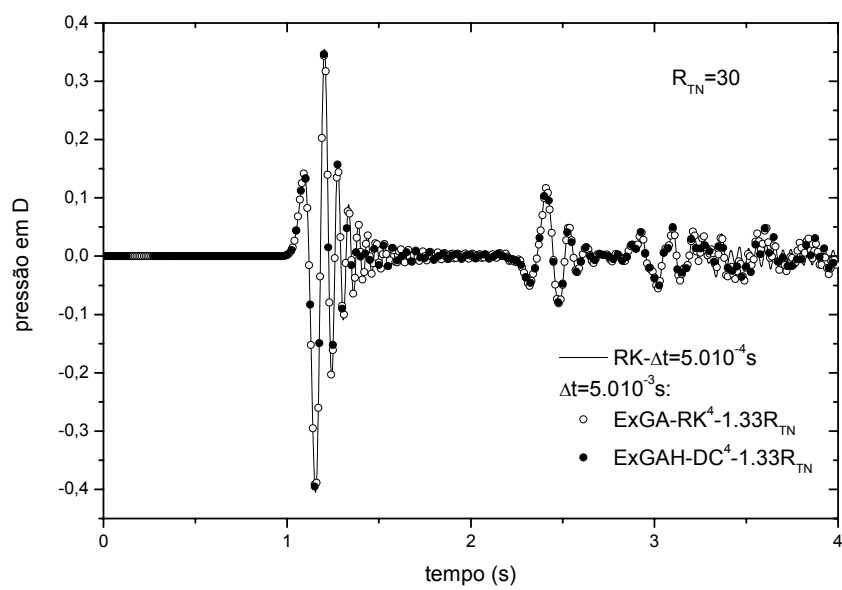
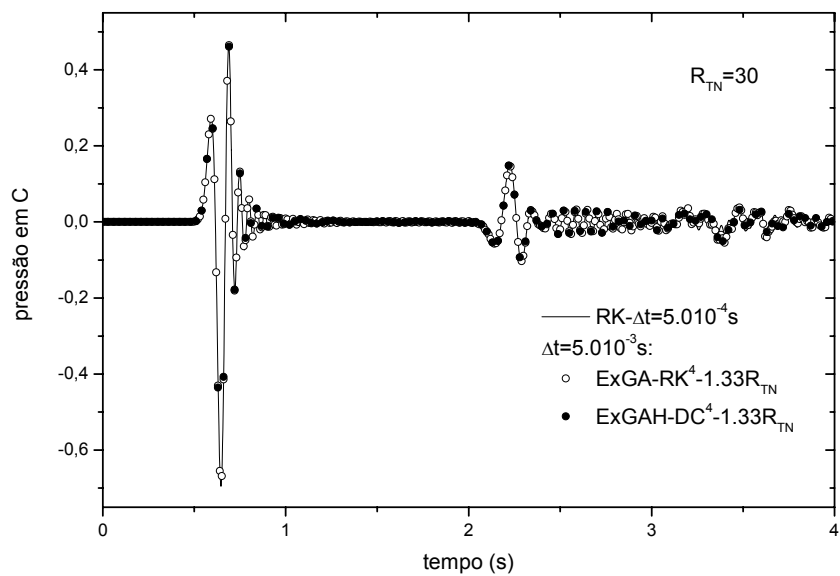


Figura 7.15 - Pressões nos pontos C, D e E, calculadas pelos métodos RK, ExGA-RK⁴ e ExGAH-DC⁴.

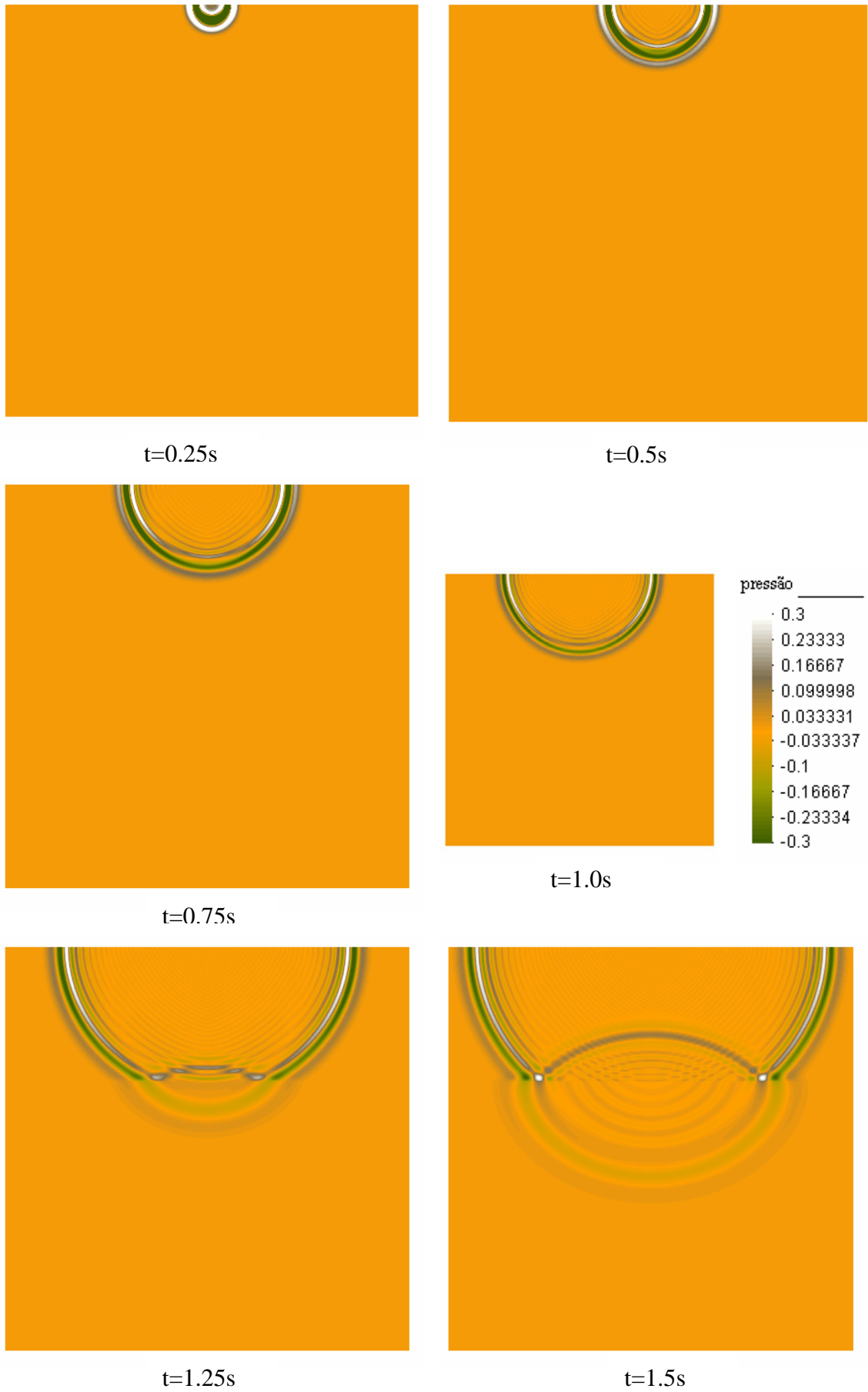


Figura 7.16 – Campo de pressão considerando instantes de tempo variando de 0.25s a 1.5s obtidos pelo método ExGAH-DC¹ com $\Delta t = 0.0005s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 20$ m.

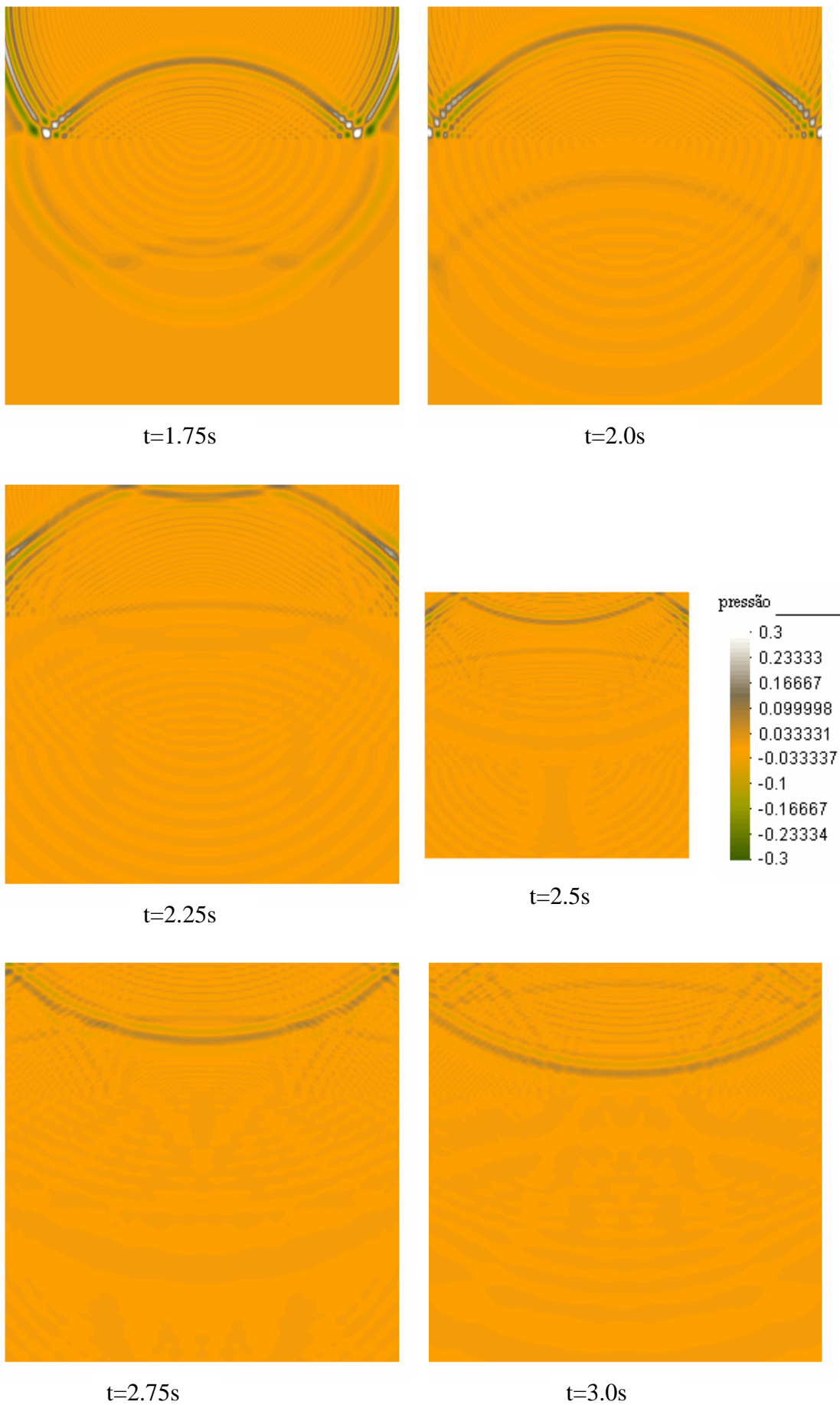


Figura 7.17 - Campo de pressão considerando instantes de tempo variando de 1.75s a 3.0s obtidos pelo método ExGAH-DC¹ com $\Delta t = 0.0005s$ e $R_N = 1.5R_{TN}$ onde $R_{TN} = 20$ m.

8. Conclusões e Sugestões

No presente trabalho, desenvolveu-se uma família de algoritmos de integração temporal denominados ExGA e ExGAH para análise dinâmica. Foi apresentada toda a metodologia necessária para a obtenção das funções de Green e Degrau, tais funções são obtidas numericamente pelo método dos elementos finitos e calculadas somente no primeiro intervalo de tempo utilizando-se algoritmos já conhecidos de integração temporal.

Baseando-se nos resultados obtidos para os exemplos analisados, e também na sólida teoria desenvolvida, pode-se concluir que os métodos ExGA e ExGAH são altamente precisos e estáveis quando as funções de Green e Degrau são também obtidas de forma precisa através dos métodos clássicos de marcha no tempo. Métodos explícitos clássicos como Runge Kutta, Diferença Central, Alfa Generalizado, entre outros; possuem um intervalo de tempo crítico relativamente pequeno, o que, em muitos casos, leva à opção pela utilização de métodos implícitos. Os novos algoritmos explícitos ExGA-Runge Kutta, ExGA/H-Diferença Central e ExGA-Diferença Central Tarnow aqui apresentados não possuem tal restrição.

Como visto nos exemplos, intervalos de tempo relativamente grandes podem ser utilizados sem deteriorar a resposta, característica não existente nos métodos implícitos, onde erros excessivos são introduzidos quando se utiliza intervalos de tempo maiores. A alta precisão e estabilidade dos métodos ExGA e ExGAH só é possível quando se adota um processo de sub-marcha para o cálculo das matrizes de Green e Degrau no primeiro intervalo de tempo, i.e., $t = \Delta t$, utilizando-se sub-intervalos (sub-passos) n . Quando este procedimento é adotado, tem-se um aumento no intervalo de tempo crítico da análise,

assim como uma diminuição dos erros de alongamento de período e razão ou taxa de amortecimento.

Com o objetivo de tornar os métodos ExGA e ExGAH viáveis, as funções de Green e Degrau são calculadas em sub-malhas para reduzir o custo computacional. Também foi apresentada uma variação do método de Green para a obtenção de matrizes simétricas, visto que as matrizes de Green e Degrau não são simétricas. No entanto, tal formulação só possui vantagem quando a matriz massa for diagonal.

Como outras sugestões para a continuidade do estudo realizado podem-se citar o desenvolvimento de metodologias para o cálculo preciso do raio numérico para a sub-malha podendo ser feito, por exemplo, através de teorias de erro. Outra grande vantagem do método ExGA e ExGAH é o desacoplamento das funções de Green e Degrau para cada nó da malha, ou seja, pode-se calcular tais funções separadamente sendo as mesmas posteriormente agrupadas, sendo possível desta forma desenvolver algoritmos computacionais eficientes. Outra possibilidade é o refinamento das sub-malhas com a intenção de aumentar a precisão das matrizes de Green e Degrau e também diminuir o número de graus de liberdade do sistema global. Extensões da teoria aqui apresentada a problemas em três dimensões e a problemas não-lineares são outras áreas de aplicação que devem ser consideradas.

9. Referências

- ARGYRIS, J.H., DUNNE P.C., ANGELOPOULOS, T., 1973, “Dynamic Response by Large Step Integration”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 2, pp. 185-203.
- AUSTIN, M., 1993, “Higher-Order Integration of Smooth Dynamical Systems: Theory and Numerical Experiments”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, pp. 2107-2122.
- BAZZI, G., ANDERHEGGEN, E., 1982, “The ρ -Family of Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, pp. 537-550.
- BELYTSCHKO, T., HUGHES T.J.R., 1983, *Computational Methods for Transient Analysis*. Computational Methods in Mechanics, v. 1, New York, Elsevier Science Publishers.
- BATHE, K.J., WILSON E.L., 1973, “Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 1, pp. 283-291.
- BATHE, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- CAMPBELL, J.S., ROBINSON, J.C., 1997, “ p -Adaptivity in Time Domain Using MVpq Multivalued Time-Marching Integrators”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, pp. 2343-2367.
- CHEN, B.S., GU, Y.X., GUAN, Z.Q., ZHANG, H.W., 2001, “Nonlinear Transient Heat Transfer Conduction Analysis with Precise Time Integration Method”, *Numerical Heat Transfer B*, v. 40, pp. 325-341.

- CHEN, B.S., TONG, L., GU, Y.X., ZHANG, H.W., OCHOA, O., 2004, “Transient Heat Transfer Analysis of Functionally Graded Materials Using Adaptive Precise Time Integration and Graded Finite Elements”, *Numerical Heat Transfer B*, v. 45, pp. 181-200.
- CHOPRA, A.K., 2006, *Dynamic of Structures*. 3 ed. Prencite-Hall, Upper, Saddle River, N.J.
- CLOUGH, R.W., PENZIEN J., 1993, *Dynamics of Structures*. 2 ed. New York, McGraw-Hill.
- COOK, R.D., 2001, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3 ed. New York, John Wiley & Sons.
- FLANAGAN, D.P., BELYTSCHKO, T., 1984, “Eigenvalues and Stable Time Steps for the Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 51, pp. 35-40.
- FRIED, I., MALKUS D.S., 1975, “Finite Element Mass Matrix Lumping by Numerical Integration with no Convergence Rate Loss”, *International Journal of Solids & Structures*, v. 11, pp. 461-466.
- FUNG, T.C., 1996, “Unconditionally Stable Higher-Order Accurate Hermitian Time Finite Elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, pp. 3475-3495.
- FUNG, T.C., 1997, “A Precise Time-Step Integration Method by Step-Response and Impulsive-Response Matrices for Dynamic Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, pp. 4501-4527.
- GÉRADIN, M., RIXEN D., 1994, *Mechanical Vibrations Theory and Application to Structural Dynamics*. Paris, John Wiley & Sons.

- GRAFF, K. F., 1991, *Wave Motion in Elastic Solids*. New York, Dover Publications INC.
- GU, Y.X., CHEN, B.S., ZHANG, H.W., 2000, "Precise Time-Integration with Dimension Expanding Method", *Acta Mech Sin*, v. 32, pp. 447-456.
- HILBER, H.M., HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., 1977, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, pp. 283-292.
- HINTON, E., ROCK, T., ZIENKIEWICZ, O.C., 1976, "A Note on Mass Lumping and Related Processes of Mass Lumping", *Finite Elements in Fluids*, v. 3, pp. 335-350.
- HOUBOLT, J.C., 1950, "A Recurrence Matrix Solution for The Dynamic Response of Elastic Aircraft", *Journal of Aeronautic Science*, v. 17, pp. 540-550.
- HUGHES, T.J.R., 2000, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New York, Dover Publications INC.
- HULBERT, G.M., CHUNG, J., 1996, "Explicit Time Integration Algorithms for Structural Dynamics with Optimal Numerical Dissipation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 137, pp. 175-188.
- KOTERAS, J.R., LEHOUCQ, R.B., 2006, "Estimating the Critical Time-Step in Explicit Dynamics Using the Lanczos Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.
- KREYSZIG, E., 2006, *Advanced Engineering Mathematics*, 9 ed. New York, John Wiley & Sons.
- KUTTA, W., 1901, "Beitrag Zur Näherungsweise Integration Totaler Differentialgleichungen", *Zeitschrift für Mathematisch Physik*, v. 46, p.p. 435-453.

- LIN, J.H., SHEN W.P., WILLIAMS F.W., 1995, “A High Precision Direct Integration Scheme for Structures Subjected to Transient Dynamic Loading”, *Computers & Structures*, v. 56, pp. 113-120.
- LIN, J.I., 1989, “An Element Eigenvalue Theorem and its Application for Stable Time Steps”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, pp. 283-294.
- LIN, J.I., 1991, “Bounds on Eigenvalues of Finite Element Systems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, pp. 957-967.
- LOUREIRO, F.S., 2006, *Um Procedimento de Marcha no Tempo Baseado em Função de Green Calculada pelo Método dos Elementos Finitos*. Projeto Final, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica, Brasil.
- MALVERN, L.E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- MANSUR, W.J., 1983, *A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*. Ph.D. Thesis, Southampton University, UK.
- MEYER, C., 2001, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- MORSE, P.M., FESHBACH H, 1973, *Methods of Theoretical Physics*. New York, Toronto and London, McGraw-Hill.
- NEWMARK, N.M., 1959, “A Method of Computation for Structural Dynamics”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 85, pp. 67-94.
- PARK, K.C., 1975, “Evaluating Time Integration Methods for Non-Linear Dynamic Analysis”, *ASME-AMD*, v. 14, pp. 35-58.

- PAZ, M., 1997, *Structural Dynamics – Theory and Computation*, 4 ed., New York, Chapman and Hall.
- RAO, S.S., 1995, *Mechanical Vibrations*. New York, Addison-Wesley Publishing Company.
- REDDY, J.N., 1993, *An Introduction to the Finite Element Method*, 2 ed. McGraw-Hill, New York.
- RUNGE, C., 1895, “Über Die Numerische Auflösung Von Differentialgleichungen”, *Mathematische Annalen*, vol. 46, p.p. 167-178.
- SOARES JR, D., 2002, *Análise Dinâmica nos Domínios do Tempo e da Freqüência de Modelos Não Lineares Discretizados por Elementos Finitos*. Tese de M. Sc., COPPE-UFRJ, Brasil.
- SOARES JR, D., MANSUR, W.J., 2003, “A Frequency-Domain FEM Approach Based on Implicit Green’s Functions for Non-Linear Dynamic Analysis”, *IJSS*, v.42, pp. 6003-6014.
- SOARES, JR D., MANSUR, W.J., 2004a, “A Time Domain FEM Approach Based on Implicit Green’s Functions for Nonlinear Dynamic Analysis”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, pp. 664-681.
- SOARES JR, D., 2004b, *Análise Dinâmica de Sistemas Não Lineares com Acoplamento do Tipo Solo-Fluido-Estrutura por Intermédio do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Elementos de Contorno*. Tese de D.Sc., COPPE-UFRJ, Brasil.
- SOLIN, P., 2005, *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*. Wiley-Interscience.
- TARNOW, N., SIMO, J.C., 1994, “How to Render Second-Order Accurate Time Stepping Algorithms Fourth-Order Accurate while Retaining the Stability and

- Conservation Properties”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 115, pp. 233-252.
- XIKUI, L., WENHUA, W., ZIENKIEWICZ, O.C., 2000, “Implicit Characteristic Galerkin Method for Convection-Diffusion Equations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 47, pp. 1689-1708.
- WANG, M., AU, F.T.K., 2006, “Assessment and Improvement of Precise Time Step Integration Method”, *Computers & Structures*, v. 84, pp. 779-786.
- WEAVER, J.R. W., JOHNSTON, P.R., 1987, *Structural Dynamics by Finite Elements*. New Jersey, Prentice-Hall: Englewood Cliffs.
- WOOD, W.L., BOSSAK, M., ZIENKIEWICZ, O.C., 1980, “An Alpha Modification of Newmark’s Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, pp. 1562-1566.
- ZHONG, W.X., WILLIAMS, F.W., 1994, “A Precise Time Step Integration Method”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 208, pp. 427-450.
- ZHONG, W., JIANING, Z., ZHONG, X.X., 1996, “On A New Time Integration Method for Solving Time Dependent Partial Differential Equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 130, pp. 163-168.
- ZIENKIEWICZ, O.C., WOOD, W.L., HINE, N.W., 1984, “A Unified Set of Single Step Algorithms Part 1: General Formulation and Applications”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, pp. 1529-1552.
- ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. & ZHU, J.Z., 2005, *The Finite Element Method Its Basis & Fundamentals*, 6 ed. Oxford, Butterworth-Heinemann.

10. Apêndice

10.1. Apêndice A: solução analítica para a barra engastada

O modelo matemático representado para a barra engastada em uma extremidade e livre na outra (Figura 10.1) é dado pela seguinte equação diferencial parcial:

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ EA \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} &= p(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

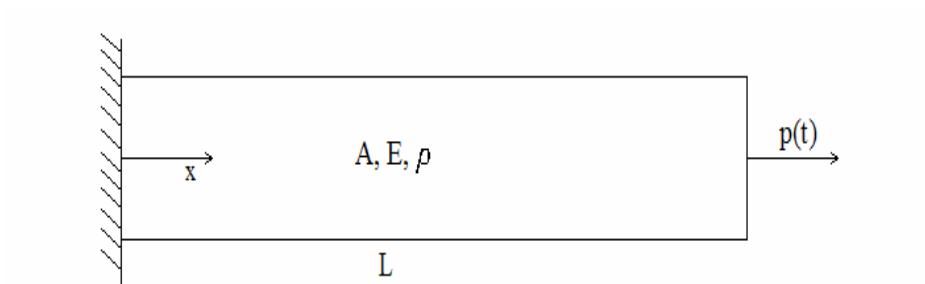


Figura 10.1 - Geometria e condições de contorno para a barra.

onde

$E \rightarrow$ Módulo de Elasticidade;
 $\rho \rightarrow$ Massa específica;
 $c \rightarrow$ velocidade da onda ; $c = \sqrt{E / \rho}$;
 $L \rightarrow$ comprimento da barra;
 $A \rightarrow$ Área transversal;

Sua expressão analítica se dá através dos seguintes passos, para maiores detalhes ver GRAFF (1991). Aplicando a transformada de Laplace na equação (A.1) a (A.3), a solução no domínio de Laplace é dada por:

$$\bar{u}(x, s) = \frac{\bar{p}(s)}{A\rho c} \frac{\sinh(sx/c)}{s \cosh(sL/c)} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando a transformada inversa em (A.4), chega-se na solução do problema dada pela seguinte integral de convolução:

$$u(x, t) = \frac{1}{A\rho c} \int_0^t p(\tau) g(x, t - \tau) d\tau \quad (\text{A.5})$$

$$\text{com } g(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sinh(sx/c)}{s \cosh(sL/c)} \right].$$

A equação $\bar{g}(x, s)$ acima a ser invertida pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\bar{g}(x, s) = \frac{\sinh(sx/c)}{s \cosh(sL/c)} = \frac{1}{1 + e^{-2Ls/c}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2Lsn/c} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e^{-\alpha s}}{s} - \frac{e^{-\beta s}}{s} \right) \quad (\text{A.6})$$

onde $\alpha = ((2n+1)L - x)/c$ e $\beta = ((2n+1)L + x)/c$.

Sabendo que $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-as}}{s} \right] = H(t - a)$, a inversa de cada termo do somatório (A.6) é

dado por:

$$g(x,t) = \left[H\left(t - \frac{L-x}{c}\right) - H\left(t - \frac{L+x}{c}\right) \right] - \left[H\left(t - \frac{3L-x}{c}\right) - H\left(t - \frac{3L+x}{c}\right) \right] + \left[H\left(t - \frac{5L-x}{c}\right) - H\left(t - \frac{5L+x}{c}\right) \right] - \dots \quad (\text{A.7})$$

e que

$$t < \frac{L-x}{c}, \quad H\left(t - \frac{L-x}{c} - \tau\right) = 0; \quad \tau > 0$$

$$t > \frac{L-x}{c}, \quad H\left(t - \frac{L-x}{c} - \tau\right) = \begin{cases} 1; & 0 < \tau < t - \frac{L-x}{c} \\ 0; & \tau > t - \frac{L-x}{c} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Conclui-se que a expressão final é dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{A\rho c} \left\{ H\left(t - \frac{L-x}{c}\right) \int_0^{t - \frac{L-x}{c}} p(\tau) d\tau - H\left(t - \frac{L+x}{c}\right) \int_0^{t - \frac{L+x}{c}} p(\tau) d\tau - H\left(t - \frac{3L-x}{c}\right) \int_0^{t - \frac{3L-x}{c}} p(\tau) d\tau + H\left(t - \frac{3L+x}{c}\right) \int_0^{t - \frac{3L+x}{c}} p(\tau) d\tau + \dots \right\} \quad (\text{A.9})$$

10.2. Apêndice B: solução analítica para a membrana

A equação diferencial parcial que rege o problema mostrado na Figura 10.2 é dada por:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.1})$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0 \\ u(a, y, t) &= 0 \\ u(x, 0, t) &= 0 \\ u(x, b, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

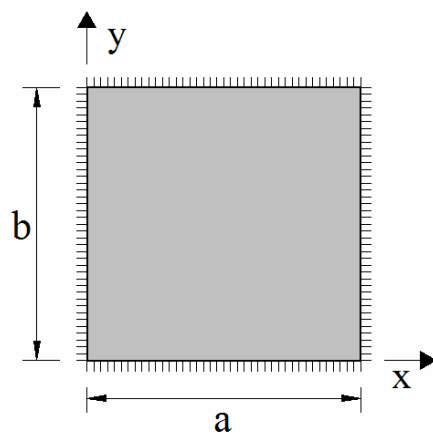


Figura 10.2 - Geometria e condições de contorno para a membrana.

sendo

$E \rightarrow$ Módulo de Elasticidade;

$\rho \rightarrow$ Massa específica;

$c \rightarrow$ velocidade da onda ; $c = \sqrt{E / \rho}$;

$a, b \rightarrow$ dimensões da membrana;

A equação diferencial parcial descrita acima pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis, por exemplo, chegando-se na seguinte solução (KREYSZIG, 2006):

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}; \quad m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.5})$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \quad m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.6})$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \quad m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.7})$$