**TRABALHO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA**

**MODELAGEM DE UMA ESTRUTURA INTELIGENTE COMPOSTA POR UMA VIGA BI APOIADA UTILIZANDO O METODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**BRUNO MELLO SILVEIRA**

**ORIENTADOR: PROF, PHD SERGIO DE ALMEIDA OLIVEIRA**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA FONSECA**

**RESUMO**

O presente trabalho destinou-se em projetar uma aplicação na linguagem de programação C# (C Sharp) capaz de analisar os movimentos oscilatórios em vigas sujeitas a vibrações livre e forçada através do Método de Elementos Finitos, considerando a influência de absorvedores dinâmicos de vibração e, principalmente, chapas piezoelétricas.

O principal objetivo deste estudo foi analisar a vibração em uma viga com chapas piezoelétricas em diferentes configurações, comparando-se os potenciais piezoelétricos e as deflexões para o caso sem as chapas. O modelo analisado consistiu em uma viga de alumínio pinada em suas duas extremidades, vista somente no plano.

**Palavras chave**: Vibrações. Elementos Finitos. Piezoelétrico.

1. **INTRODUÇÃO**

Recentemente, percebe-se um crescente foco no estudo do controle de vibrações que consiste em sistemas que integram estrutura, sensores, atuadores e controladores que tem convencionado em chamá-los de estruturas inteligentes. Vale salientar que há vários materiais que têm sido investigados e propostos para o desenvolvimento destes tipos de estruturas, especialmente os que possuem propriedades piezoelétricas, como cerâmicas PZT (Lead Zirconate Titanate) e os filmes plásticos PVDF (PolyVinyliDene Fluoride).

Os PZTs foram descobertos por Jaffet et al. Em 1954 (Clark, Saunders e Giggs, 1998), este material é constituído principalmente de óxido de chumbo, zircônio e titânio, muito utilizado para a confecção de atuadores. Já o PVDF, suas propriedades piezoelétricas foram descobertas por Kawai após 1960 (Tseng, 1989), o qual é um polímero piezoelétrico robusto e maleável, que devido as suas propriedades é altamente indicado para sensoriamento distribuído.

O fenômeno piezoelétrico é baseado na indução de um dipolo elétrico. Como consequência, essa classe de materiais apresenta um acoplamento eletromecânico recíproca. Em outras palavras, uma vez que um campo elétrico é aplicado, o material apresenta uma deformação mecânica, por outro lado, quando o material sofre uma carga mecânica, um potencial elétrico é gerado. Essa reciprocidade permite que esse tipo de material possa ser utilizado como sensores ou atuadores em estruturas inteligentes.

Os dois comportamentos presentes nos piezoelétricos são conhecidos como efeito direto, que transforma a tensão mecânica em uma fonte de voltagem, sendo típico dos sensores; e o efeito inverso, que converte uma fonte de voltagem externa em energia de deformação mecânica (deslocamento ou força), sendo típico de atuadores.

A altas temperaturas, normalmente definida acima da temperatura de Curie , o material é paraelétrico, não-polarizado. Para baixas temperaturas, as moléculas sofrem uma mudança cristalográfica, originando dipolos orientados aleatoriamente em toda a estrutura (Figura 1a). A aplicação de um campo elétrico (polarização) tende a reorientar os dipolos elétricos em relação ao campo elétrico, levando a uma manifestação de dipolo elétrico em escala macroscópica (Figura 1b). Com a remoção do campo elétrico, os dipolos não retornam à sua configuração original, permanecendo orientados (Figura 1c). Esse processo gera um corpo piezoelétrico permanente, com o eixo de polarização estabelecido.



Eletrodo

Eletrodo

(a) (b) (c)

Figura 1 - Polarização para obter o efeito piezoelétrico (Oliveira, 2013).

(a) orientação polar aleatória; (b) Polarização através de uma fonte de voltagem DC;

(c) Polarização permanente depois da remoção da fonte de voltagem DC.

Segundo o enfoque supracitado, o uso integrado de sensores, atuadores e controladores, capacitaria um sistema a responder de modo controlado a excitações externas, com o objetivo de controlar os efeitos que impactam nos níveis de amplitude. Além disso, para alcançar bons resultados na aplicação destas tecnologias, faz-se necessário obter modelos matemáticos capazes de descrever de forma adequada a dinâmica da estrutura, para isso, faz-se necessário o uso do método de Elementos Finitos. Essa tecnologia tem sido usada com grande frequência na engenharia, pois é possível simular em softwares as condições previstas de trabalho da peça ou equipamento com grande precisão e confiabilidade, propiciando redução de custos.

* 1. **HISTÓRICO SOBRE O ESTUDO DOS MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Existe na literatura vários trabalhos que utilizam modelos matemáticos que descrevem o comportamento de uma estrutura inteligente com material piezoelétrico utilizando o Método de elementos finitos.

O Método de Elementos Finitos se baseia na discretização do domínio físico do problema, onde uma série de elementos dispostos sobre o domínio são utilizados, os quais são compostos por pontos nodais, onde é o sistema de equações algébricas resultante é equacionado

(Bathe e Wilson, 1976 e Huebner e Thornton, 1982). Alguns pesquisadores utilizam o princípio variacional para escrever uma equação manipulável pelo método de elementos finitos (Allik e Hughes, 1970). A modelagem de um toróide, modelados com elementos do tipo viga de Euler Bernoulli empregando elementos com PVDFs foi idealizado por Lewis (2000). Ha, Keilers e Chang (1992) aplicaram o elemento trilinear em materiais compósitos. Elementos piezoelétrico tridimensional de casca foi utilizado na pesquisa de Kim et al. (1999) para modelar uma estrutura ativa piezelétrica e Tzou e Ye (1996) também desenvolveu um elemento de casca triangular baseando na teoria de cisalhamento de ângulo constante.

Vários tipos de elementos foram desenvolvido em pesquisas com exemplo podemos citar o emprego de um o elemento hexaedro isoparamétrico de oito nós para modelagem de um sistema eletromecânico Tseng (1989), o desenvolvimento de um elemento quadrilátero isoparamétrico derivado da teoria de deformação por cisalhamento para placas laminadas Detwiller et al. (1995) e o desenvolvimento de um programa com a aplicação de um elemento trilinear de oito nós em estruturas com elementos piezelétricos incorporados.

Lima, 2013, na sua dissertação de mestrado apresenta o estudo de novas configurações de transdutores de deformação baseados em sensores piezoelétricos, operando sob diferentes solicitações mecânicas (tração, compressão e cisalhamento). Para isto, foram realizadas algumas análises numéricas de sensores piezoelétricos e de transdutores a base de sensores piezoelétricos pelo método dos elementos finitos, com auxílio do programa comercial ANSYS. Da silva, 2018 na sua monografia final de curso analisa os modos de vibração de uma viga de alumínio, na condição engastada-livre, com material piezoelétrico do tipo PZT-5H empregando o método de elementos finitos. Da rocha, 2004, implementa em ambiente MATLAB para modelagem, através do Método dos Elementos Finitos, de estruturas dos tipos vigas e placas com materiais piezelétricos incorporados. Barbosa, 2018.

[Balamurugan](https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168874X00000706#!) & [Narayanan](https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168874X00000706#!), 2001, considera a mecânica para a análise acoplada de placas piezolaminadas e estruturas de casca curvilínea piezolaminada e seu desempenho no controle de vibração. É considerada uma estrutura de placa / casca com camadas piezocerâmicas de PZT finas incorporadas nas superfícies superior e inferior para atuar como sensor e atuador distribuídos. Piefort & Preumont 2000 desenvolvem elementos piezoelétricos finitos com base em elementos de casca.

Xu & Koko, 2002, propõe um projeto de propósito geral de estruturas inteligentes ativamente controladas com sensores piezoelétricos e atuadores, em que pode fazer uso de qualquer código de elementos finitos com elementos piezoelétricos, e o projeto de controle é realizado na forma de espaço de estado estabelecido em análise modal de elementos finitos. Os autores demonstram um código de elementos finitos comercial complementado com lei de controle de feedback de saída empregado para projetar um conjunto de sistemas de estrutura para controle ativo de vibração.

Lammering & Mesecke-Rischmann, 2003, consideram a variação linear geralmente assumida do potencial elétrico através da espessura. É mostrado que uma variação quadrática do potencial elétrico ao longo da espessura pode ser deduzida diretamente da condição de conservação de carga. Esta variação quadrática do potencial elétrico na direção da espessura foi comparada com o gradiente linear da primeira formulação variacional de dois campos. Além disso, a fim de permitir a implementação de formulações alternativas das equações constitutivas, alternando as variáveis ​​independentes e o comportamento não linear do material, uma formulação variacional de três campos é apresentada em analogia ao princípio de Hu – Washizu.

Moradi-Dastjerdi & Rashahmadi, 2020, propuseram que os nanofios ecológicos (NWs) de óxido de zinco (ZnO) e nitreto de gálio (GaN) são dois candidatos usados ​​para introduzir materiais nanocompósitos piezoelétricos inteligentes. Os autores examinaram o desempenho eletromecânico das novas placas de compósitos reforçadas por ZnO NW e GaN piezoelétrico NO de frações de volume variadas. Também analisaram as deflexões estáticas e frequências naturais das placas de nanocompósito piezoelétrico bimorfo sujeitos a cargas eletromecânicas, ​​usando o método “Mesh-Free” em conjunto com as funções de forma do MLS. Além dos efeitos do carregamento eletromecânico e da espessura da placa na deflexão estática e frequências naturais das placas piezoelétricas. Suas previsões revelaram que a aplicação de entrada elétrica para as placas pode induzir maior deflexão do que aquelas introduzidas por cargas mecânicas e que ZnO NWs oferecem maior deflexão do que GaN NW. No entanto, a análise dinâmica indicou que as placas reforçadas com GaN NW têm frequências naturais mais altas do que aquelas reforçadas por ZnO NW.

Para o presente trabalho, foi proposto unificar ambos os temas citados, buscando desenvolver um código matemático capaz de analisar por elementos finitos os movimentos oscilatórios em vigas submetidas a forçamento harmônico, levando em consideração a ação de absorvedores dinâmicos de vibração e, principalmente, a ação de chapas piezoelétricas. Além disso, pretende-se comparar os resultados obtidos a vigas sem os componentes supracitados. Por fim, serão feitos programas adicionais em linguagem de programação C com rotinas específicas para dar continuidade à pesquisa desenvolvida pelo professor orientador deste trabalho.

Por se tratar de uma pesquisa que será continuada pelo professor orientador junto a outros alunos, o programa, que realizará os cálculos supracitados, seguirá o padrão API REST, que consiste em uma interface que fornece dados em um formato padronizado baseado em requisições HTTP, e o padrão SOLID, relacionada a programação orientada a objetos, que estabelece princípios com a finalidade de tornar o código mais limpo, simples e ter manutenibilidade.

* 1. **APLICAÇÕES PARA MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS**

A crescente busca em se estudar sobre materiais piezoelétricos não se concentra em única e exclusivamente no âmbito teórico, pesquisando sobre suas propriedades e características, mas sim em aplicações práticas e viáveis para a engenharia. Isso ocorre devido a sua principal característica, gerar movimento mecânico a partir da aplicação de uma tensão elétrica e vice-versa. Pode-se citar algumas de suas aplicações, como na produção e detecção de som, atuadores, na geração de energia limpa, além da aplicação que será abordada neste trabalho, a capacidade de absorção de vibração mecânica em estruturas.

Para o âmbito sonoro, pode-se citar aplicações em sonares e auto falantes. Os materiais piezoelétricos começaram a ser utilizados durante a Primeira Guerra Mundial em sonares, servindo como transmissor, que convertia tensão elétrica em ondas mecânicas, o efeito inverso do piezoelétrico, e como receptor, usando o efeito direto do piezoelétrico, convertendo ondas sonoras em sinal elétrico. Utilizando o mesmo princípio do transmissor do sonar, esses materiais foram utilizados em autofalantes de alta potência e pequenos equipamentos.

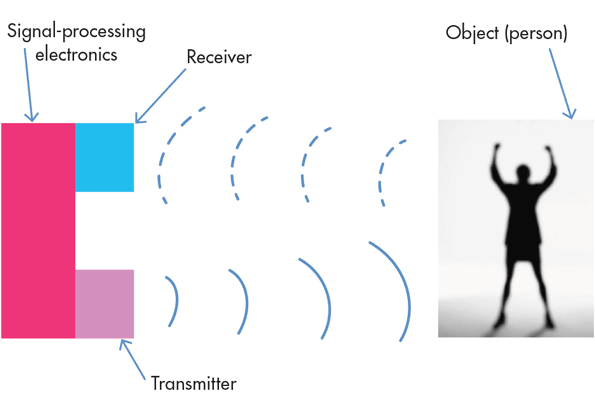


Figura 2 – Funcionamento de um sonar

Os atuadores piezoelétricos são atuadores cerâmicos que convertem energia elétrica diretamente em movimento linear com alta velocidade e força. Esses atuadores são usados ​​em todos os campos modernos de alta tecnologia, desde teste e inspeção de semicondutores até microscopia de super-resolução, bio-nanotecnologia e tecnologia aeroespacial.

Por possuir uma forte relação com geração de energia, este tema não poderia ser ignorado. Conforme supracitado, ao induzir um movimento ao material piezoelétrico, este gera uma tensão elétrica que pode ser aproveitada. Seguindo este pensamento, estudos como o Massone et al, 2019, foram realizados, apontando ser possível gerar energia de forma limpa, utilizando-se do conceito de energy harvesting, ou seja, o processo de retirar energia de fontes externas (solar, eólica, ondas, vibração, entre outros).

1. **ANÁLISE DE CORPO RÍGIDO**

A fim de iniciar os estudos sobre vibrações, buscou-se, analisar modelos simples envolvendo um conjunto massa-mola/amortecedor com um grau de liberdade e outro com dois graus de liberdade excitados harmonicamente. Para as soluções numéricas foram escolhidos o método Runge Kutta de Quarta Ordem, que consiste em um método iterativo para resolver equações diferenciais com problemas de valor inicial, pois os exemplos atuais se enquadram neste caso, em que foi considerado o deslocamento e a velocidade iniciais iguais a zero. O algoritmo base utilizado para este método está descrito no Apêndice 1.

Para esta tarefa, primeiramente, será analisado o diagrama de corpo livre para cada caso, seguindo as diretrizes da segunda lei de Newton, para obter a equação diferencial de movimento que servirá de input para o modelo matemático.

* 1. **MODELO COM UM GRAU DE LIBERDADE**

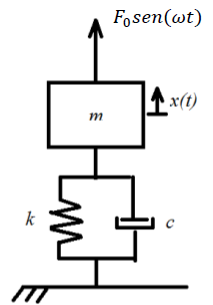


Imagem 3 – Modelo massa-mola/amortecedor com um grau de liberdade

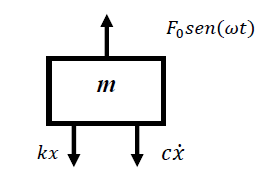


Imagem 3 – Diagrama de corpo livre para modelo massa-mola/amortecedor com um grau de liberdade

De acordo com a segunda lei de Newton e assumindo o sentido positivo para cima, temos que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Vale salientar que a aceleração, representada por a, pode ser reescrita como a segunda derivada do deslocamento, que neste caso é expressado por x.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Portanto, a equação 2.2 pode ser reescrita conforme abaixo e será possível obter a equação diferencial de movimento para um conjunto massa-mola/amortecedor com um grau de liberdade.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Já que esta é uma equação diferencial de segunda ordem, pretende-se converter essa equação em um sistema para facilitar a utilização do método numérico supracitado. Vale ressaltar que as mudanças a serem feitas serão baseadas nas relações bases entre deslocamento, velocidade e aceleração.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Isolando a derivada da velocidade para adequar-se ao padrão:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

* 1. **MODELO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

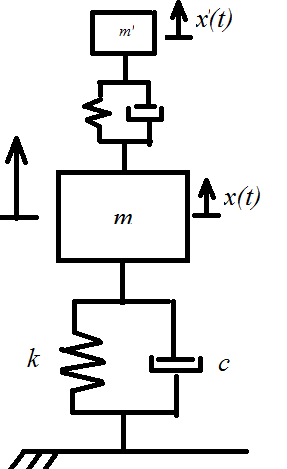


Imagem 4 – Modelo massa-mola/amortecedor com dois graus de liberdade

Para o caso de dois graus de liberdade, a mesma linha de raciocínio será utilizada, diferindo somente na quantidade de corpos. Vale ressaltar que as incógnitas que apresentam aspas simples ( ‘ ) correspondem ao absorvedor acoplado no sistema.

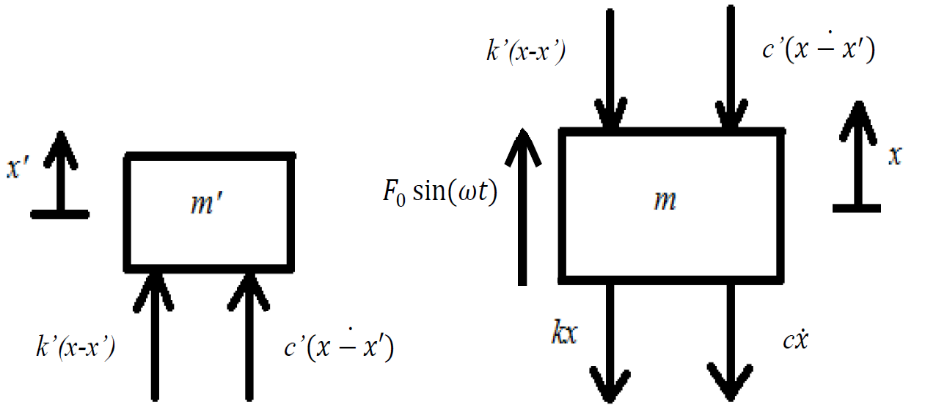


Imagem 5 – Diagrama de corpo livre para modelo massa-mola/amortecedor com dois graus de liberdade

De acordo com a segunda lei de Newton e assumindo o sentido positivo para cima, temos que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Abrindo as equações 2.7 e 2.8 temos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

A partir destas equações, pode-se organizá-las de duas maneiras. A primeira consiste em montar um sistema de equações de modo a ser utilizado no método Runge Kutta. Enquanto isso, a segunda difere bastante, de modo que as equações serão postas de maneira matricial, sendo possível utilizá-la em qualquer método numérico matricial, que será abordado mais à frente.

Para o primeiro caso, será feito similar ao caso de um grau de liberdade, assumindo e .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Isolando as derivadas da velocidade, temos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para o segundo caso, foram utilizadas as equações 2.9 e 2.10 para elaborar as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do conjunto, tornando essas equações em uma equação matricial que descreve o movimento do sistema.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

* 1. **RESULTADOS**

Para os casos de um e dois graus de liberdade, optou-se em utilizar os mesmos parâmetros utilizados na tese de conclusão de curso de Junior, 2017, a fim de ter uma base para comparações.

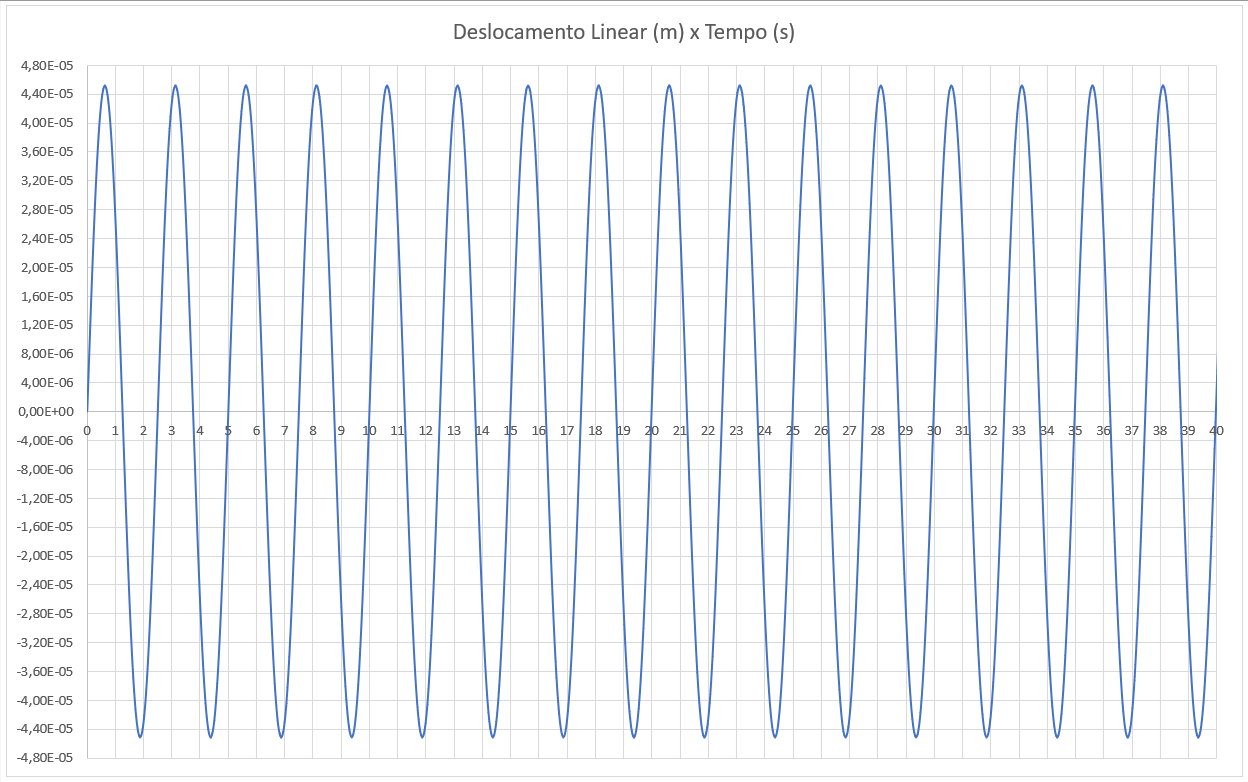


Figura 6 – Amplitude sob ressonância para um grau de liberdade

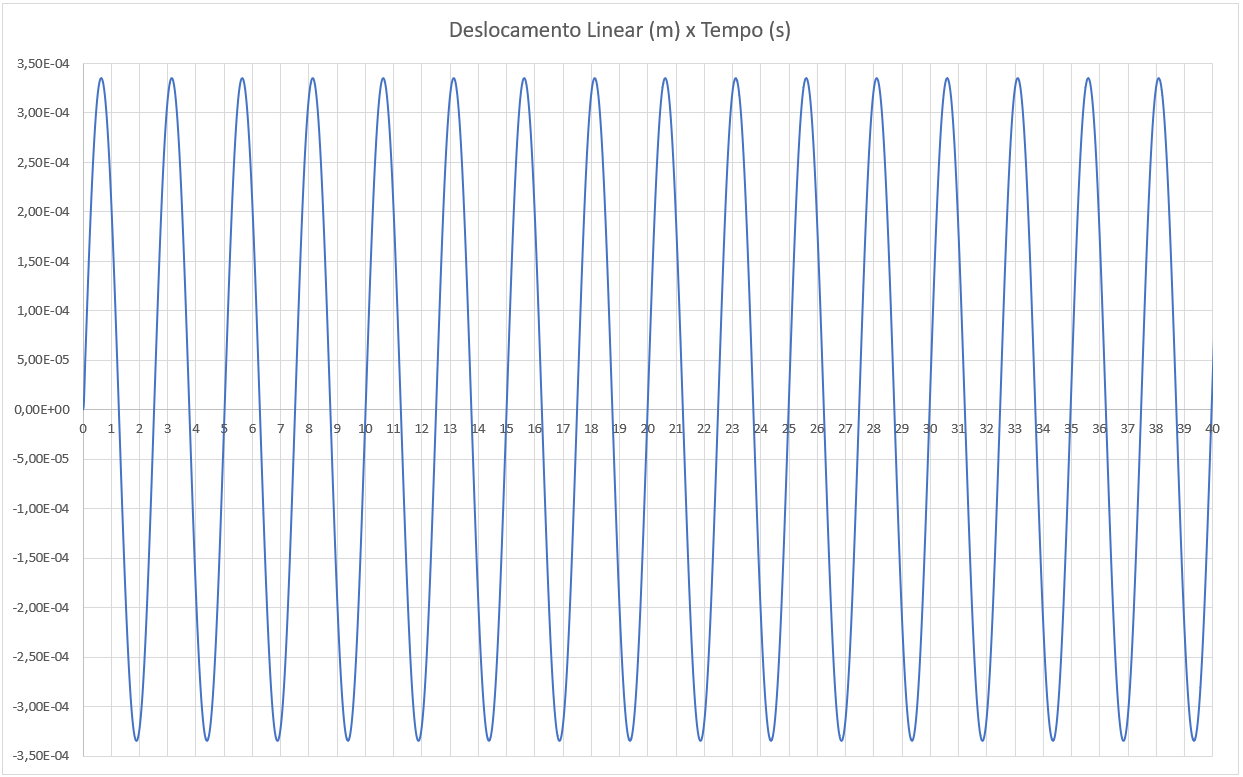


Imagem 7 – Amplitude sob ressonância para dois graus de liberdade

Ao analisar este resultado, percebeu-se que este diferiu bastante do encontrado na tese supracitada. Percebeu-se divergências, principalmente, por, no caso de dois graus de liberdade, a amplitude não ser menor do que no caso de um grau de liberdade. Após investigações, chegou-se na conclusão que podem existir limitações no método numérico escolhido ou que haja problemas na aplicação, para este caso, vale ressaltar que diversas buscas foram feitas no código, porém não encontrou-se pontos a se consertar, as possíveis tratativas para estes problemas serão abordado nas considerações finais.

Mediante isto, como os resultados obtidos para as análises de corpo rígido não foram de acordo com o esperado, optou-se por não dar prosseguimento nesta vertente, visto que este não era o foco desta pesquisa e o principal objetivo desta etapa foi atingido, que era de introduzir ao aluno orientado os conhecimentos de vibrações e algoritmos para análises estruturais de vibrações.

1. **ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS**

Neste capítulo é apresentado o objetivo principal da pesquisa: análise por elementos finitos de vigas com e sem chapas piezoelétricas sob excitação harmônica. Será utilizado a equação diferencial de movimento na forma matricial usado juntamente ao método de integração numérica de Newmark. Vale ressaltar que outros métodos numéricos também foram implementados no código, permitindo que este seja escolhido no corpo da requisição HTTP.

* 1. **MODELO DE VIGA DE EULER-BOURNOULLI**

No capítulo anterior foi analisado o comportamento oscilatório para massas pontuais ou discretas, que não leva em consideração as dimensões do corpo, assumindo-se que suas medidas são aproximadamente iguais ao longo dos eixos e suas massas estão concentradas em seu centro de massa. Vale salientar que esta abordagem, por não considerar os parâmetros mencionados, apresenta limitações e os resultados obtidos podem apresentar grande disparidade com os valores reais.

Para contornar a dificuldade citada acima, foi utilizado o método de elementos finitos, que consiste em dividir o corpo a ser analisado em pequenos elementos com dimensões finitas, utilizando uma abordagem matricial. Para isso, uma fundamentação teórica faz-se necessária e, dentre diversos modelos, optou-se por utilizar o de Euler-Bernoulli.

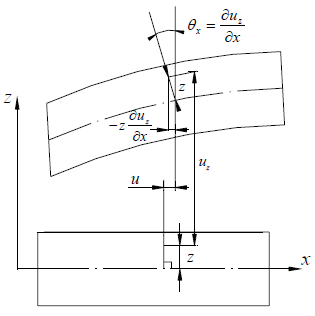


Figura 8– Modelo de viga de Euler-Bernoulli

Designa-se por Euler-Bernoulli a formulação do elemento finito de viga em que se considera que as secções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação. Deste modo não é considerada a deformação devida ao corte.



Colocar uma figura parecida com esta para explicar os nós nos elementos (NÃO ENTENDI)

Expressando o deslocamento, , e o potencial elétrico, , em termos das variáveis nodais, tem-se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1)  (3.2) |

Sendo as direções positivas de:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.3)  (3.4) |

Para elementos de viga Euler-Bernoulli, uma função de interpolação comumente usada:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.5) |
|  |  | (3.6) |

Assim, diferenciando o deslocamento em um ponto qualquer, em função de , tem-se:

Onde:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.7)  (3.8) |

De acordo Da Rocha 2004, tem-se que as matrizes de inércia da viga e da placa piezoelétrica estão descritas abaixo. Vale ressaltar que a memória de cálculo está presente no anexo 1.

Matriz massa do elemento da viga:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.9) |

Matriz massa do elemento da placa piezoelétrica:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.10) |

Matriz rigidez do elemento da viga:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.11) |

Matriz rigidez do elemento da placa piezoelétrica:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.12) |

Matriz acoplamento eletromecânico da placa piezoelétrica:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.13) |

Matriz capacitância piezoelétrica do elemento da placa piezoelétrica:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.14) |

* 1. **MÉTODO DE NEWMARK**

A fim de resolver o problema proposto neste trabalho, faz-se necessário utilizar um método numérico que se adeque às necessidades, sendo assim, optou-se por utilizar o método de Newmark de equações diferenciais de segunda ordem de sistemas lineares, o qual se baseou no desenvolvimento em série de Taylor, chega-se as Equações de Newmark, (Newmark, 1959) demonstradas abaixo. Vale salientar que outros métodos numéricos foram implementados na aplicação desenvolvida para este trabalho, a saber foram: Newmark-β, que possui pequenas mudanças comparadas ao utilizado, Aceleração Linear Implícita e Diferença Central, em que seus algoritmos estão explicados na referência (Fall, 2018) presente na bibliografia.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | (3.15) | |
|  | (3.16) | |

Onde e .

A análise será realizada após a aplicação de um carregamento senoidal com amplitude de 5 N e frequência de 30 Hz no centro da viga na posição do nó 3 conforme a Figura 1.

Para a solução do deslocamento, velocidade e aceleração para o tempo tem-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.18) |

Onde e são as constantes de proporcionalidade com valores e 0 respectivamente.

Resolvendo a equação 1 para em termos de e substituindo por na equação 2 obtêm-se as equações para e , cada em termos de do desconhecido deslocamento somente. Estas duas relações para e são substituída na equação 3 para a solução de , depois disto usando as equações 1 e 2, calcula-se e

* + 1. **ALGORITIMO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NEWMARK**
       1. **CÁLCULOS INICIAIS**
* Construir as matrizes de rigidez K, matriz massa M e matriz amortecimento C.
* Iniciar , e .
* Selecione o e os parâmetros e e calcule as constantes de integração.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

* Construa a matriz de rigidez efetiva , .
* Calcule a inversa de , .
  + - 1. **PARA CADA PASSO DE TEMPO**
* Calcule os carregamentos efetivos para o tempo .

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.19) |

* Calcule os deslocamentos para o tempo

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.20) |

* Calcule as acelerações e as velocidades para o tempo .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.21)  (3.22) |

* 1. **RESULTADOS**

1. **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

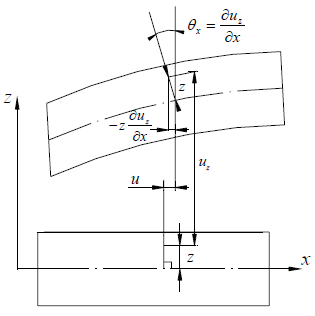
Tentar usar outro método numérico no lugar do runge kutta

Falar que a aplicação está pronta para receber mais de um coeficiente de amortecimento por request e analisar para todos e que isso pode ser algo a ser focado.

Falar sobre a possibilidade de adicionar qualquer novo método numérico e qualquer perfil, só instanciando as classes adequadas e criando o endpoint para perfil.

**ANEXO 1 – MEMÓRIA DE CÁLCULO**

Equações de Euler-Bernoulli para modelo de viga.



Matriz massa do elemento da viga:

Resultado da multiplicação :

Coluna 1

Coluna 2

Coluna 3

Coluna 4

Resolvendo a integral:

Coluna 1

Coluna 2

Coluna 3

Coluna 4

Aplicando de 0 a L o resultado da integral:

Coluna 1

Coluna 2

Coluna 3

Coluna 4

Matriz massa do elemento da placa piezoelétrica:

Análogo a :

Matriz rigidez do elemento da viga:

Resultado da multiplicação :

Coluna 1

Coluna 2

Coluna 3

Coluna 4

Resolvendo a integral:

Coluna 1

Coluna 2

Coluna 3

Coluna 4

Aplicando de 0 a L:

Coluna 1

Coluna 2

Coluna 3

Coluna 4

Matriz rigidez do elemento da placa piezoelétrica:

Analogamente à rigidez do elemento da viga, temos que:

Matriz acoplamento mecânico do elemento da placa piezoelétrica:

Resolvendo a multiplicação :

Retornando a integral, temos:

Sendo assim, pode ser reescrita como:

Matriz capacitância piezoelétrica do elemento da placa piezoelétrica:

Resolvendo a multiplicação

Retornando à integral :

Sendo assim, pode ser reescrita como:

# **BIBLIOGRAFIA**

x

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | LEWIS, J. A. **Finite Element Modeling and Active Control of an Inflated Torus Using Piezoelectric Devices**. Blacksburg: Master Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic, 2000. |
| 2. | ALLIK , H.; HUGHES, T. J. R. Finite Element Method for Piezoelectric Vibration. In: \_\_\_\_\_\_ **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. [S.l.]: [s.n.], v. 2, 1970. p. 151-157. |
| 3. | BATHE, K.; WILSON, E. L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1976. |
| 4. | CLARK, R. K.; SAUNDERS, W. R.; GIBBS, G. P. **Adaptive Structures:** Dynamics and Control. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 1998. |
| 5. | HUEBNER, K. H.; THORNTON, E. A. **The Finite Element Method for Engineers**. New York: John Wiley & Sons, 1982. |
| 6. | LOPES , V.; PEREIRA, J. A.; INMAN, D. J. Structural FRF Acquisition via Electric Impedance Measurement Applied to Damage Location. In: \_\_\_\_\_\_ **XVIII IMAC – International Modal Analysis Conference．San Antonio**. Texas: [s.n.], 2000a. p. 1549-1555. |
| 7. | ROY R. CRAIG, J. **Structure Dynamics, An Introduction to Compution Methods**. John Wiley & Sons: New York, 1981. |
| 8. | TSENG, C. I. **Electromechanical Dynamics of a Coupled Piezoelectric / Mechanical System Applied to Vibration Control and Distributed**. [S.l.]: University of Kentucky，Department of Mechanical Engineering, 1989. |
| 9. | HA, S. K.; KEILERS, C.; CHANG, F. K. Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators. In: \_\_\_\_\_\_ **AIAA Journal**. [S.l.]: [s.n.], v. 30, 1992. p. 772-780. |
| 10. | KIM, J. et al. Finite Element Modelling of a Piezoelectric Smart Structure for the Cabin Noise Problem. In: \_\_\_\_\_\_ **Smart Material and Structure**. [S.l.]: [s.n.], v. 8, 1999. p. 380-389. |
| 11. | TZOU, H. S.; YE, R. Analysis of Piezoelastic Structures with Laminated Piezoelectric Triangle Shell Elements. In: \_\_\_\_\_\_ **AIAA Journal**. [S.l.]: [s.n.], 1996. p. 110–115. |
| 12. | DETWILLER, D. T.; SHEN, H. H.; VENKAYYA, V. B. Finite Element Analysis of Laminated Composite Structures Containing Distributed Piezoelectric Actuators and Sensors. In: \_\_\_\_\_\_ **Finite Elements in Analysis and Design**. [S.l.]: [s.n.], v. 20, 1995. p. 87-100. |
| 13. | DE LIMA, B. **Transdutores de deformação a base de sensores piezoelétricos**. Niterói: PGMEC/UFF, 2013. |
| 14. | DA SILVA, R. H. V. **Análise dinâmica de uma viga com material piezoelétrico aplicando o método de elementos finitos**. Ouro Preto: UFOP, 2018. |
| 15. | DA ROCHA, T. L. **Modelagem de estruturas inteligentes**. Ilha Solteira: UNESP, 2004. |
| 16. | BARBOSA, R. M. **Estudo sobre a redução da vibração de uma viga por atuador piezoelétrico utilizando o método de elementos finitos**. Ouro Preto: UFOP, 2018. |
| 17. | BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. **Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control**. [S.l.]: [s.n.], 2001. |
| 18. | PIEFORT, V.; PREUMONT, A. **Modeling of smart piezoelectric shell structures with finite elements**. Leuven: Belgium, 2000. |
| 19. | LARBI, W.; DEÜ, J. F.; OHAYON, R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid. In: \_\_\_\_\_\_ **Composite Structures**. [S.l.]: [s.n.], 2012. p. 501-509. |
| 20. | XU, S. X.; KOKO, T. S. **Finite element analysis and design ofactively controlled piezoelectric smart structures**. Halifax: [s.n.], 2002. |
| 21. | LAMMERING, R.; MESECKE-RISCHMANN,. Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. **IOP Science**, 2003. Disponivel em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/12/6/007/meta>. Acesso em: 14 Agosto 2020. |
| 22. | MORADI-DASTJERDI, R.; RASHAHMADI, S.; MEGUID, S. Electro-mechanical performance of smart piezoelectric nanocomposite plates reinforced by zinc oxide and gallium nitride nanowires. In: \_\_\_\_\_\_ **Mechanics Based Design of Structures and Machines**. [S.l.]: [s.n.], 2020. p. 1-14. |
| 23. | PI MOTION | POSITIONING. Piezoelectric Actuators, Piezo Transducers: Piezo Stacks, Flexures, Tubes, Benders, Shear Actuators. **PI Motion | Positioning**. Disponivel em: <https://www.pi-usa.us/en/products/piezo-actuators-stacks-benders-tubes/>. Acesso em: 17 Agosto 2020. |
| 24. | MASSONE, A. C. C.; DE OLIVEIRA,. **Colheita de energia vibracional utilizando materiais piezoelétricos**. [S.l.]: UnilaSalle, 2019. |
| 25. | AUTODESK. How Piezoelectricity Works. **Autodesk**. Disponivel em: <https://www.autodesk.com/products/eagle/blog/piezoelectricity/>. Acesso em: 17 Agosto 2020. |
| 26. | NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. In: \_\_\_\_\_\_ **ASCE Journal of the Engineering Mecahics Division**. [S.l.]: University of Illinois, v. 85, 1959. p. 67-95. |
| 27. | FALL, H. P. G. **Numerical Integration in Structural Dynamics**. [S.l.]: Duke University, 2018. |
| 28. | JUNIOR, E. D. S. L. **Projeto de Absorvedores dinâmicos para vigas em flexão**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2017. |

x

Apêndice 1 – Algoritmo base para o método numérico Runge Kutta de Quarta Ordem