1

Se considera el siguiente problema de optimización:

$$(P) \quad \min \quad 2x_1 + x_2$$
$$\text{sujecto a} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 4,$$

(a) Obtenga gráficamente la solución del problema (P).

(b) Obtenga el problema dual (D) de (P).

(c) Resuelva el problema dual (D) obtenido y demuestre que los valores óptimos de (P) y (D) coinciden.

(a)

El problema tiene un minimo en $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, como se ve en la figura.

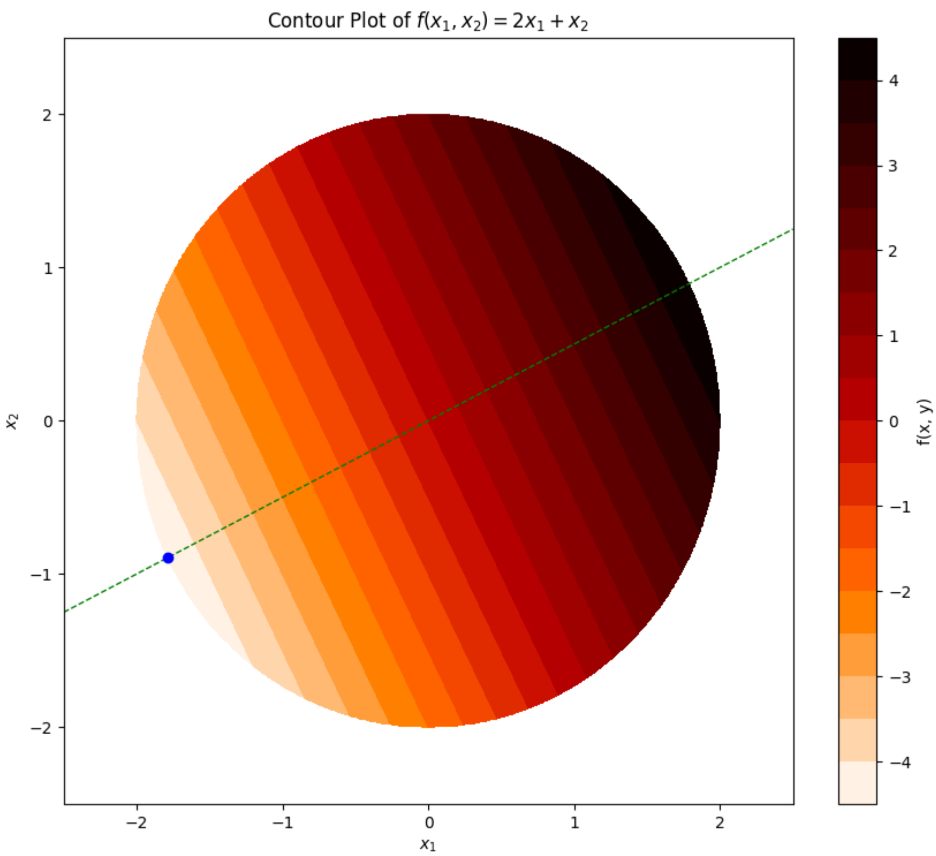

Figure 1: Solución gráfica del problema.

(b)

El problema dual de (P) se puede escribir como

$$\max_{u\geq 0} \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2 + u(x_1^2 + x_2^2 - 4).$$

(c)

En el caso en que $x_1^2 + x_2^2 > 4$ entonces cuando $u \to \infty$ el valor del problema tiende a ∞, si $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ entonces el máximo se alcanza cuando $u = 0$. Por tanto el problema dual es equivalente al primal

$$\begin{aligned} (D) \quad & \inf \quad 2x_1 + x_2 \\ \text{sujecto a} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \end{aligned}$$

y sus valores óptimos coinciden.

Para encontrar el valor optimo, planteamos el sistema de condiciones KKT

$$\begin{aligned} 2 + 2u_1x_1 &= 0, \\ 2 + 2u_1x_2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0, \\ u_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

de la primera ecuacion tenemos que $x_1 = -\frac{1}{u_1}$ de la segunda $x_2 = -\frac{1}{2u_1}$, substituyendo en la tercera igualdad

$$\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{4u_1^2} - 4 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

por tanto $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ es un mínimo del problema, como la función $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ es afín y la función $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4$ es convexa, por el Teorema 5.17 del libro de texto $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ es solución del problema con valor $-\frac{10}{\sqrt{5}}$.

2

Determine la solución (máximo) del problema dual asociado al siguiente problema primal

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & x_1 + 2(x_2-1)^2 \\ \text{sujecto a} \quad & -x_1 - x_2 + 1 \leq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

El problema dual asociado a (P) se puede escribir como

$$\max_{u\geq 0} \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} x_1 + 2(x_2-1)^2 - u(x_1+x_2-1),$$

que es equivalente a

$$\max_{u\geq 0} \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} 2x_2^2 - 4x_2 + 2 + u(1-x_2) + (1-u)(x_1),$$

vemos que si $u < 1$ y $x_1 \to -\infty$ la function anterior tiende a $-\infty$, por tanto $u \geq 1$, pero si $u > 1$ entonces el ínfimo se alcanzaría cuando $x_1 \to \infty$ valiendo $-\infty$, de modo que $u = 1$. Y tenemos el problema

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} 2x_2^2 - 5x_2 + 3,$$

que tiene como mínimo $-\frac{1}{8}$, y por tanto la solución del problema dual es $-\frac{1}{8}$.