MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
OPTIMIZACIÓN EN ESPACIOS DE BANACH

Prueba de capítulo 1

INSTRUCCIONES. Resuelva los cuatro ejercicios que se plantean, explicando todos los pasos a seguir hasta llegar a la solución final. Envíe la resolución en un único documento en formato pdf a través del curso virtual, en el apartado "Entrega de trabajos". Dispone del 30 de octubre al 13 de noviembre, ambos inclusive, para entregar la prueba.

1. Resuelva el ejercicio (2.3) de la página 31 del texto base.

2. Sea $f : S \to \mathbb{R}$, donde S es un conjunto convexo no vacío de un espacio normado X. Se dice que f es estrictamente cuasi convexa si para todo $x_1, x_2 \in S$, con $f(x_1) \neq f(x_2)$, se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}), \text{ para cada } \lambda \in (0,1).$$

Considérese el problema de optimización dado por:

$$\min_{x \in S} f(x).$$

Se pide demostrar el siguiente teorema:

Teorema. Supóngase que f es estrictamente cuasi convexa. Si en $x_0 \in S$ se alcanza un mínimo local (x_0 is a local minimal point), entonces en x_0 se alcanza, de hecho, un mínimo global (x_0 is a global minimal point).

3. Se considera en este ejercicio un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ poliédrico. Se recuerda que S es poliédrico si se describe como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, es decir,

$$S = \{x : \langle v_i, x\rangle \leq \alpha_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, m\},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, v_i es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ y α_i un escalar, para todos $i = 1, 2, \ldots, m$ (el producto escalar viene denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

De la definición, se deduce que todo conjunto poliédrico es convexo y cerrado. Indique la demostración.

Por otro lado, se dice que $x \in S$ es un punto extremo de S si $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1)$, implica que $x = x_1 = x_2$. El número de puntos extremos de S es finito.

Se recuerda también que, si S es un conjunto poliédrico compacto, entonces todo punto x de S se puede expresar como combinación lineal convexa de los puntos extremos de S. Es decir, si $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ denota el conjunto de puntos extremos de S, entonces para cada $x \in S$ existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geq 0$, con $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i.$$

Teniendo en cuenta la teoría anteriormente expuesta, se pide probar el siguiente resultado:

Teorema. Sea S un conjunto poliédrico compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Considérese el problema

$$\max_{x \in S} f(x),$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es cuasi convexa y continua en S, entonces existe un punto extremo en el que f alcanza un máximo global.

4. Resuelva el ejercicio (2.8) de la página 31 del texto base.