MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
OPTIMIZACIÓN EN ESPACIOS DE BANACH

Prueba de capítulo 3

INSTRUCCIONES. Resuelva los ejercicios que se plantean, explicando todos los pasos a seguir hasta llegar a la solución final. Envíe la resolución en un único documento en formato pdf a través del curso virtual, en el apartado "Entrega de trabajos". Dispone del 27 de noviembre al 11 de diciembre, ambos inclusive, para entregar la prueba.

1. *Definición 1.* Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $D \subset X$ un cono convexo, con $X \neq D \neq \{0_X\}$.

(a) *Base de un cono.* Se dice que un conjunto no vacío y convexo $B \subset D$ es una base de D, si cada elemento $x \in D \backslash \{0_X\}$ admite una única representación de la forma

$$x = \lambda b, \text{ con } \lambda > 0 \text{ y } b \in B.$$

(b) *Cono polar.* El cono

$$D^* := \{\mu \in X^* : \mu(d) \geq 0, \forall d \in D\}$$

recibe el nombre de cono polar o cono dual de D (X^* denota el espacio dual topológico de X).

(b) *Cono polar estricto.* El conjunto

$$D^{s*} := \{\mu \in X^* : \mu(d) > 0, \forall d \in D\backslash\{0_X\}\}$$

recibe el nombre de cono polar estricto de D.

Para los conceptos introducidos en la definición anterior, se pide probar las propiedades que se indican a continuación. En lo que sigue $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado y $D \subset X$ un cono convexo, con $X \neq D \neq \{0_X\}$.

Propiedades.

1. Supóngase que $\operatorname{int} D \neq \emptyset$. Se tiene que

$$\operatorname{int} D \subset \{x \in X : \mu(x) > 0, \forall \mu \in D^* \backslash \{0_{X^*}\}\}.$$

2. Si $\operatorname{int} D \neq \emptyset$, entonces D^* es puntiagudo (pointed).
3. Si D tiene una base, entonces D es puntiagudo.
4. Supóngase que $D^{s*} \neq \emptyset$. Entonces, para cada $\mu \in D^{s*}$ se tiene que el conjunto

$$B := \{x \in D : \mu(d) = 1\}$$

es una base de D.

5. Si $D^{s*} \neq \emptyset$, entonces D es puntiagudo.

2. Obtenga el cono contingente al conjunto

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 + 3 \text{ and } y \leq -x + 8\}$$

en el punto $(4, 4)$, y determine una base para este cono.

3. *Definición 2.* Sea S un conjunto convexo no vacío de un espacio vectorial real y $f : S \to \mathbb{R}$.

(a) *Pseudoconvexidad estricta.* Supóngase que f tiene derivada direccional en un punto $\bar{x} \in S$ en cada dirección $x - \bar{x}$, con $x \in S$. Se dice que f es estrictamente pseudoconvexo en $\bar{x}$ si

$$f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0, \text{para } x \in S,\, x \neq \bar{x} \Longrightarrow f(x) > f(\bar{x}).$$

(b) *Cuasi convexidad fuerte.* Se dice que f es cuasi convexo fuerte en S si para cada $x_1, x_2 \in S$, con $x_1 \neq x_2$, se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \text{ para cada } \lambda \in (0, 1).$$

Se pide probar el siguiente resultado:

Teorema. Sea S un conjunto convexo no vacío de un espacio vectorial normado.

(a) Considérese el problema

$$\min_{x \in S} f(x),$$

con $f : S \to \mathbb{R}$. Supóngase que f es cuasi convexo fuerte en S. Si $\bar{x}$ es un mínimo local del problema, entonces $\bar{x}$ es la única solución global del problema.

(b) Sea f un funcional definido en un conjunto abierto que contiene a S. Si f es diferenciable Fréchet en cada punto $\bar{x} \in S$ y estrictamente pseudoconvexo en cada punto $\bar{x} \in S$, entonces f es cuasi convexo fuerte en S.