1

Resuelva el ejercicio (2.3) de la página 31 del texto base.

Consideramos f un funcional cuasi convexo, entonces para todo $x, y \in S$ definimos $m = \max\{f(x), f(y)\}$, tenemos que $x, y \in S_m = \{p \in S | f(p) \leq m\}$, y como f es cuasi convexo S_m es un conjunto convexo, por tanto para todo $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_m \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq m = \max\{f(x), f(y)\}.$$

Como queríamos ver.

Consideramos el funcional f que cumple para todo $x, y \in S$, $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ veamos que el conjunto $S_\alpha = \{p \in S | f(p) \leq \alpha\}$ es convexo. Para todo $x, y \in S_\alpha$, notemos que $f(x) \leq \alpha$ y $f(y) \leq \alpha$, y para todo $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha,$$

y por tanto $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_\alpha$, implicando que S_α es convexo.

2

Sea $f : S \to \mathbb{R}$, donde S es un conjunto convexo no vacío de un espacio normado X. Se dice que f es estrictamente cuasi convexa si para todo $x_1, x_2 \in S$, con $f(x_1) \neq f(x_2)$, se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \ \forall \lambda \in (0,1).$$

Considérese el problema de optimización dado por:

$$\min_{x \in S} f(x).$$

Se pide demostrar el siguiente teorema:

Theorem 1. *Supóngase que f es estrictamente cuasi convexa. Si en $x_0 \in S$ se alcanza un mínimo local (x_0 is a local minimal point), entonces en x_0 se alcanza, de hecho, un mínimo global (x_0 is a global minimal point).*

Siguiendo la misma idea que el Teorema 2.16 del texto base.

Sea $x_0 \in S$ un mínimo local de un funcional estrictamente cuasi convexo f. Entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in S \cap B(x_0, \varepsilon)$.

Consideremos un punto $x \in S \setminus B(x_0, \varepsilon)$, tal que $f(x) \neq f(x_0)$. Definimos $\lambda := \frac{\varepsilon}{\|x_0 - x\|} \in (0,1)$, obteniendo $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)x_0 \in S$,

$$\|x_\lambda - x_0\| = \|\lambda x + (1-\lambda)x_0 - x_0\| = \lambda\|x - x_0\| = \varepsilon,$$

es decir $x_\lambda \in B(x_0, \varepsilon)$.

Por tanto, utilizando la cuasi convexidad estricta de f,

$$f(x_0) \leq f(x_\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)x_0 - x_0) < \max\{f(x), f(x_0)\},$$

lo que implica $f(x_0) < f(x)$, por tanto para todo $x \in S$ tenemos que $f(x_0) = f(x)$ o bien $f(x_0) < f(X)$, asi que x_0 es un mínimo global.

3

Se considera en este ejercicio un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ poliédrico. Se recuerda que S es poliédrico si se describe como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, es decir,

$$S = \{x : \langle v_i, x\rangle \leq \alpha_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m\},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, v_i es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ y α_i un escalar, para todos $i = 1, 2, ..., m$ (el producto escalar viene denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

De la definición, se deduce que todo conjunto poliédrico es convexo y cerrado. Indique la demostración.

Por otro lado, se dice que $x \in S$ es un punto extremo de S si $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1)$, implica que $x = x_1 = x_2$. El número de puntos extremos de S es finito.

Se recuerda también que, si S es un conjunto poliédrico compacto, entonces todo punto x de S se puede expresar como combinación lineal convexa de los puntos extremos de S. Es decir, si $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ denota el conjunto de puntos extremos de S, entonces para cada $x \in S$ existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geq 0$, con $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{r} x_i \lambda_i$$

Teniendo en cuenta la teoría anteriormente expuesta, se pide probar el siguiente resultado:

Theorem 2. *Sea S un conjunto poliédrico compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Considérese el problema*

$$\max_{x \in S} f(x), \tag{1}$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es cuasi convexa y continua en S, entonces existe un punto extremo en el que f alcanza un máximo global.

Lema 3. *Todo conjunto poliédrico es cerrado y convexo.*

Proof. Sea S un conjunto poliédrico. Como S es la intersección de conjuntos cerrados es cerrado.

Los semi-espacios $S_i = \{x : \langle v_i, x\rangle \leq \alpha_i\}$, que forman S, son convexos. Para todo $x, y \in S_i$,

$$\langle v_i, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle = \lambda\langle v_i, x\rangle + (1-\lambda)\langle v_i, y\rangle \leq \lambda\alpha_i + (1-\lambda)\alpha_i = \alpha_i, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Y la intersección de conjuntos convexos es convexa. Por tanto S es convexo. $\square$

Para probar el Teorema 2, primero vemos que como S es compacto y f es continuo y convexo existe un máximo global. Consideramos el conjunto de puntos extremos de S y lo denotamos como E_S, sea $\hat{x} \in E_S$ el punto extremo en el que f alcanza un mayor valor, es decir $f(\hat{x}) \geq x$ para todo $x \in E_S$. Podemos considerarlo ya que el conjunto E_S es finito.

Sea $S_{f(\hat{x})} = \{x \in S | f(x) \leq f(\hat{(x)})\}$, notemos que $E_S \subset S_{f(\hat{x})}$, como f es cuasi convexa $S_{f(\hat{x})}$ es un conjunto convexo.

Supongamos que existe $y \in S$ tal que $y \notin S_{f(\hat{x})}$. Consideramos la recata $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)y$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, esta intersección con S en $\hat{x}$ y en un punto de una cara del poliedro, $x^{(1)}$, dicha cara es a su vez un poliedro $S^{(1)}$ en una un espacio de dimension menor. Podemos iterar este proceso eligiendo un punto extremo, $\hat{x}^{(1)}$ del poliedro $S^{(1)}$ y considerando la entre este y $x^{(1)}$, este proceso es finito ya que la dimension del nuevo poliedro es menor en cada iteración.

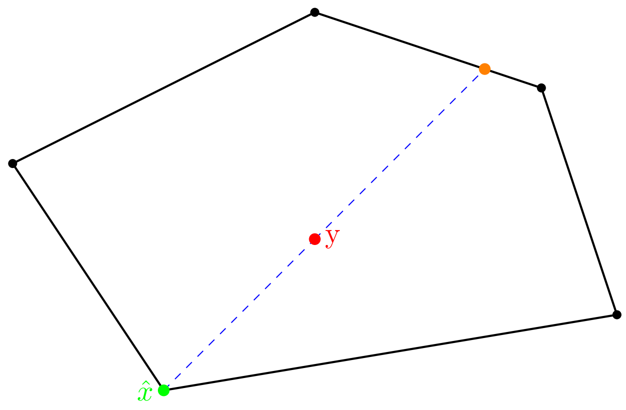

Figure 1: Explicación visual de la demostración

Paramos en cuanto $x^{(l)}$ sea un punto extremo de S, en este caso tenemos que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $x^{(l-1)} = \lambda x^{(l)} + (1-\lambda)\hat{x}^{(l-1)}$, como $S_{f(\hat{x})}$ es convexo y $x^{(l)}, \hat{x}^{(l-1)} \in E_S \subset S_{f(\hat{x})}$, entonces $x^{(l-1)} \in S_{f(\hat{x})}$. Propagando el razonamiento hacia atrás tenemos que $y \in S_{f(\hat{x})}$. Que contradice la hipótesis y por tanto $S_{f(\hat{x})} = S$, que implica que para todo $y \in S$ tenemos que $f(y) \leq f(\hat{x})$, y por tanto el punto extremo $\hat{x}$ es un máximo global de f en S como queríamos ver.

4

Resuelva el ejercicio (2.8) de la página 31 del texto base.

Inspirándonos en la demostración del Teorema 2.23 del texto base, debemos ver que el nuevo funcional f es quasi convexo y continuo, ya que el conjunto S no ha cambiado y sigue siendo cerrado, acotado y convexo. De esta manera resolveríamos el ejercicio aplicando el Teorema 2.12 del texto base.

Veamos que el funcional f es convexo.

Dados $u, v \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$
\begin{aligned}
f(\lambda u + (1-\lambda)v) &= \max_{t\in[t_0,t_1]} \left| x_0 - \hat{x}(t) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(\lambda u(s) + (1-\lambda)v(s)) \right| \\
&= \max_{t\in[t_0,t_1]} \left| x_0 - \hat{x}(t) + \lambda \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s) + (1-\lambda) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bv(s) \right| \\
&= \max_{t\in[t_0,t_1]} \left| \lambda \left(x_0 - \hat{x}(t) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s) \right) + (1-\lambda) \left(x_0 - \hat{x}(t) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bv(s) \right) \right| \\
&\leq \max_{t\in[t_0,t_1]} \left(\lambda \left| x_0 - \hat{x}(t) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s) \right| + (1-\lambda) \left| x_0 - \hat{x}(t) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bv(s) \right| \right) \\
&\leq \lambda \max_{t\in[t_0,t_1]} \left| x_0 - \hat{x}(t) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s) \right| + (1-\lambda) \max_{t\in[t_0,t_1]} \left| x_0 - \hat{x}(t) \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bv(s) \right| \\
&= \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v),
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la desigualdad triangular y el hecho que el máximo de la suma de dos funciones positivas es menor que la suma de sus máximos.

Para ver la continuidad de f, definimos el operador lineal

$$
Lu(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s) ds,
$$

que es acotado y por tanto continuo, como se muestra en la demostración del Teorema 2.23 del texto base y en un documento proporcionado por la coordinadora de la asignatura.

El valor absoluto es una función continua, por tanto aplicado a otra función continua el resultado sigue siendo una función continua, con esto tenemos que $|x_0 - \hat{x}(t) + Lu(t)|$ es continuo.

Finalmente como L es continuo en un conjunto compacto es también uniformemente continuo con respecto a t, por tanto el máximo respecto a t de la function $|x_0 - \hat{x}(t) + Lu(t)|$ es continuo, resultando en que f es continuo.