1

Dado el problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujecto a} \quad & x_2 \leq x_1^3, \\ & x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Demuestra que $\bar{x} = (0,0)$ es una solución del problema de optimización.

(b) Se satisface MFCQ en el punto $\bar{x} = (0,0)$?

(c) Se satisfacen las condiciones KKT en el punto $\bar{x} = (0,0)$?

(a)

Dadas las restricciones

$$x_2 \leq x_1^3, \quad x_2 \geq 0,$$

tenemos que necesariamente

$$x_1 \geq 0,$$

como la funcion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

es positiva para todo $x_1, x_2 \geq 0$ tenemos que

$$f(0,0) = 0 \leq f(x_1, x_2),\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2,$$

por tanto $(0,0)$ es un mínimo de la función en el conjunto factible y una solución del problema.

(b)

Consideramos

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^3 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

y el cono $C = \mathbb{R}_+^2$. Entonces para todo $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$g(0,0) + g'(0,0)((0,0) - (y_1, y_2))^T = (0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} = (-y_2, y_2),$$

claramente $(-y_2, y_2) \notin -\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$, por tanto no se cumplen las condiciones MFCQ.

(c)

El sistema de condiciones KKT del problema viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1(x_2 + x_1^3) = 0,$$

$$u_2(x_2) = 0,$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0.$$

Si $u_2 = 0$ implica que $1 + u_1 = 0$ y por tanto $u_1 = -1 < 0!$ contradiciendo la condición que $u_1 \geq 0$, por otro lado si $u_1 = 0$ tenemos que $1 = 0!$ que es absurdo, concluimos que ambas g_1 y g_2 están activas.

Pero esto hace que la asunción de regularidad del problema, que existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nabla g_i(0,0)^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} < 0,$$

para todo g_i activo. Pero para g_1, tenemos

$$\nabla g_1(0,0)^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (0,1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2,$$

y para g_2, tenemos

$$\nabla g_2(0,0)^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (0,-1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -y_2,$$

claramente no existe $y_2 \in \mathbb{R}$ tal que $y_2 < 0$ y $-y_2 < 0$, por tanto el problema no cumple las condiciones KKT.

2

Encuentra una solución optima para los siguientes problemas de optimización

(a)

$$\begin{aligned} \min \quad & (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ \text{sujecto a} \quad & x^2 + y^2 \leq 5, \\ & x + y \leq 3, \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min \quad & (x-\frac{9}{4})^2 + (y-2)^2 \\ \text{sujecto a} \quad & x^2 - y \leq 0, \\ & x + y - 6 \leq 0, \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x - y - 4z^2 \\ \text{sujecto a} \quad & x + y + z \leq 0, \\ & -x + 2y + z^2 = 0, \\ & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a)

Las condiciones KKT para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en este problema son

$$\begin{pmatrix} 2x-6 \\ 2y-4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1(x^2 + y^2 - 5) = 0,$$

$$u_2(x + y - 3) = 0,$$

$$u_2(x + y - 3) = 0,$$

$$u_3 x = 0,$$

$$u_4 y = 0.$$

Consideramos el caso donde g_1 y g_2 están activas, por tanto $u_3 = u_4 = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, y las condiciones

$$\begin{aligned} (2x)(1 + u_1) + u_2 - 6 &= 0, \\ (2y)(1 + u_1) + u_2 - 4 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 5 &= 0, \\ x + y - 3 &= 0, \end{aligned}$$

de la ultima igualdad tenemos que $x = 3 - y$, substituyendo en la penúltima ecuación

$$9 - 6y + 2y^2 - 5 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, \ y_2 = 2,$$

por tanto $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Amabas soluciones cumplen $x > 0$ e $y > 0$, veamos que cumplen las dos primeras igualdades, para $(2, 1)$ tenemos que

$$\begin{cases} 4u_1 + u_2 - 2 = 0 \\ 2u_1 + u_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

por tanto $u_1 = 0 \geq 0$ y $u_2 = 2 \geq 0$, cumpliendo las condiciones KKT, para $(1, 2)$ se tiene

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 - 4 = 0 \\ \quad 4u_1 + u_2 = 0 \end{cases}$$

por tanto $u_1 = -2$ y $u_2 = 8$, pero $u_1 < 0$ incumpliendo $u_1 \geq 0$, por eso $(1, 2)$ no cumple las condiciones KKT.

Para ver que $(2, 1)$ es solución del problema queremos usar el Teorema 5.17 del texto base, para ello es suficiente ver que f, g_1, g_2 son convexas.

La Hessiana de la función objetivo f es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

es semi-definida positiva y la Hessiana de g_1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

es semi-definida positiva y la función g_2 es afina y por tanto convexa. De modo que f, g_1, g_2 son convexas y por el teorema 5.17 del libro de texto $(2, 1)$ es solución del problema de optimización.

(b)

Las condiciones KKT para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son

$$\begin{pmatrix} 2x - \frac{9}{2} \\ 2y - 4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1(x^2 - y) = 0,$$
$$u_2(x + y - 6) = 0,$$
$$u_3 x = 0,$$
$$u_4 y = 0.$$

Consideramos el caso donde solo g_1 esta activo, por tanto $u_2 = u_3 = u_4 = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $u_1 \geq 0$ y $x + y - < 6$, y las condiciones

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0, \\ 2x - \frac{9}{2} + 2u_1 x &= 0, \\ 2y - 4 - u_1 &= 0, \end{aligned}$$

de la primera condición tenemos que $x^2 = y$, substituyendo en la ultima ecuación tenemos,

$$u_1 = 2x^2 - 4,$$

finalmente substituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$4x^3 - 6x - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2},$$

por tanto $x = 1.5$, $y = 2.25$ y $u_1 = 0.5$ son solución del sistema, y $(1.5, 2.25)$ satisfacen las condiciones KKT.

La Hessiana de la función objetivo es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

es semi-definida positiva y la Hessiana de g_1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

también es semi-definida positiva, por tanto ambas son funciones convexas y podemos usar el Teorema 5.17 del libro de texto para concluir que $(1.5, 2.25)$ es un mínimo del problema de optimización.

(c)

En este caso el problema es de maximization, por tanto para aplicar el mismo método que en los apartados anteriores debemos reescribir el problema como

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x + y + 4z^2 \\ \text{sujecto a} \quad & x + y + z \leq 0, \\ & -x + 2y + z^2 = 0, \\ & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

En este caso las condiciones KKT para cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8z \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

reescribimos las condiciones como

$$\begin{cases} -3 + u_1 - v_1 = 0 \\ 1 + u_1 - 2v_1 = 0 \\ 8z + u_1 + 2zv_1 = 0 \end{cases}$$

y también deben cumplir

$$u_1(x + y + z) = 0,$$
$$-x + 2y + z^2 = 0.$$

Usando la primera igualdad tenemos que

$$u_1 = 3 + v_1,$$

substituyendo en la segunda

$$4 + 3v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{4}{3},$$

y por tanto $u_1 = \frac{5}{3}$, substituyendo ahora en la tercera igualdad obtenemos

$$8z + \frac{5}{3} - \frac{8}{3}z = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{16},$$

ahora usando la penúltima igualdad

$$x = \frac{5}{16} - y,$$

y substituyendo en la ultima igualdad tenemos que

$$3y - \frac{5}{16} + \frac{25}{256} = 0 \Rightarrow y = \frac{55}{768},$$

y por tanto $x = \frac{185}{768}$.

De modo que $(\frac{185}{768}, \frac{55}{768}, -\frac{5}{16})$ satisfacen las condiciones KKT. Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.17 del libro de texto.

La Hessiana de la función objetivo es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

que es semi-definida positiva y por tanto convexa, la función g_1 es linear y por tanto convexa.

Por otro lado la función h_1 no es quasi-linear, y este es un requisito del Teorema 5.17. Consideramos la siguiente variación del problema (1) relajando la condición h_1,

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x - y - 4z^2 \\ \text{sujecto a} \quad & x + y + z \leq 0, \\ & -x + 2y + z^2 \leq 0, \\ & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Las condiciones KKT de el nuevo problema so idénticas a las del problema original excepto que debe cumplir

$$v_1(-x + 2y + z^2) = 0,$$

donde mantenemos la natación con v_1 por conveniencia.

Tal y como hemos visto anteriormente

$$u_1 = \frac{5}{3}, \quad v_1 = \frac{4}{3}, \quad x = \frac{185}{768}, \quad y = \frac{55}{768}, \quad z = -\frac{5}{16},$$

cumplen las condiciones KKT para el problema (2), en este caso la función h_1 tiene como matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que es semi-definida positiva y por tanto h_1 es convexa. En este caso por tanto podemos aplicar el Teorema 5.17 para confirmar que $(\frac{185}{768}, \frac{55}{768}, -\frac{5}{16})$ es una solución del problema (2). Como en el problema (2) la función h_1 esta activa, se cumple que $-x + 2y + z^2 = 0$ y podemos afirmar que $(\frac{185}{768}, \frac{55}{768}, -\frac{5}{16})$ también es solución del problema original (1).

3

Cada punto de la recta entre $(0,0)$ y $(6,0)$ es solución del problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{x+3y+3}{2x+y+6} \\ \text{sujecto a} \quad & 2x+y \leq 12, \\ & -x+2y \leq 4, \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0? \end{aligned}$$

Consideramos la recta

$$R = \{(x,0) | 0 \leq x \leq 6\},$$

para todo $(x,0) \in R$ tenemos que la función objetivo

$$f(x,0) = \frac{x+3}{2x+6} = \frac{1}{2}\frac{x+3}{x+3} = \frac{1}{2}.$$

Ademas para todo $(x,0) \in R$ se cumple

$$\begin{aligned} g_1(x,0) &= 2x - 12 \leq 0, \\ g_2(x,0) &= x - 4 \leq 0, \\ g_3(x,0) &= -x \leq 0, \\ g_4(x,0) &= 0 \leq 0, \end{aligned}$$

por tanto la recta R esta contenida dentro del conjunto factible del problema.

Vemos ademas que para todo $(x,y) \in S$ la función objetivo cumple

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x+3y+3}{2x+y+6} \\ &= \frac{x+\frac{1}{2}y+3}{2x+y+6} + \frac{\frac{5}{2}y}{2x+y+6} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x+\frac{1}{2}y+3}{x+\frac{1}{2}y+3} + \frac{\frac{5}{2}y}{2x+y+6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}y}{2x+y+6}, \end{aligned}$$

como $(x,y) \in S$ tenemos que $\frac{5}{2}y \geq 0$ y $2x+y+6 \geq 0$, por tanto

$$\frac{\frac{5}{2}y}{2x+y+6} \geq 0,$$

que implica $f(x,y) \geq \frac{1}{2}$ para todo $(x,y) \in S$, concluyendo que todo punto de la recta R es solución del problema de optimización.

4

Encuentra $\bar{u} \in L^2_\infty[0,1]$ un control optimo del problema

$$\min \quad \int_0^1 \left[u_1(t) - \frac{1}{3}x_1(t) + 2u_2(t) - \frac{2}{3}x_2(t) \right] dt$$

sujecto a

$$\left.\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= 12u_1(t) - 2u_1(t)^2 - x_1(t) - u_2(t) \\ \dot{x_2}(t) &= 12u_2(t) - 2u_2(t)^2 - x_2(t) - u_1(t) \end{aligned}\right\} \text{ a.e. on } [0,1],$$

$$x_1(0) = x_{0_1}, \quad x_2(0) = x_{0_2},$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &\geq 0 \\ u_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ a.e. on } [0,1],$$

donde $x_{0_1}, x_{0_2} \in \mathbb{R}$.

Para encontrar la solución del problema queremos usar el teorema 5.22 del libro de texto, la ecuación adjunta del problema es

$$-\dot{p}(t) = p(t)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ a.e en } [0,1],$$

es decir que tenemos

$$-\dot{p}_1(t) = -p_1(t) + \frac{1}{3},$$

y

$$-\dot{p}_2(t) = -p_2(t) + \frac{2}{3},$$

por tanto

$$p_1(t) = c_1 e^t + \frac{1}{3}, \quad p_2(t) = c_2 e^t + \frac{2}{3}.$$

La condición de transversalidad viene dada por

$$-p(1)^T = (0,0),$$

por tanto tenemos que

$$p_1(1) = c_1 e + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{3}e^{-1},$$
$$p_2(1) = c_2 e + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3}e^{-1},$$

y resulta en que

$$p(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{t-1})\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora usamos el principio máximo de Pontryagin local para encontrar $\bar{u}$, para ello nos ayudamos de la observación 5.20c del libro de texto, y tenemos que

$$\frac{1}{3}(1 - e^{t-1})\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 12 - 4\bar{u}_1(t) & -1 \\ -1 & 12 - 4\bar{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

por tanto

$$\frac{1}{3}(1 - e^{t-1})(10 - 4\bar{u}_1(t)) = 1 \Rightarrow \bar{u}_1(t) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4(1 - e^{t-1})},$$

como $\bar{u}_1(t) \geq$ a.e. en $[0,1]$ y

$$\frac{5}{2} \leq \frac{3}{4(1-e^{t-1})} \Leftrightarrow 1 - e^{t-1} \leq \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{7}{10} \leq e^{t-1} \Leftrightarrow 1 + \ln\left(\frac{7}{10}\right) \leq t,$$

por tanto

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4(1-e^{t-1})} & \text{a.e. en } [0, 1 + \ln(7/10)], \\ 0 & \text{a.e. en } [1 + \ln(7/10), 1]. \end{cases}$$

Y por otro lado

$$\frac{1}{3}(1-e^{t-1})(23 - 8\bar{u}_2(t)) = 2 \Rightarrow \bar{u}_2(t) = \frac{23}{8} - \frac{3}{4(1-e^{t-1})},$$

como $\bar{u}_2(t) \geq$ a.e. en $[0,1]$ y

$$\frac{23}{8} \leq \frac{3}{4(1-e^{t-1})} \Leftrightarrow 1 - e^{t-1} \leq \frac{6}{23} \Leftrightarrow \frac{17}{23} \leq e^{t-1} \Leftrightarrow 1 + \ln\left(\frac{17}{23}\right) \leq t,$$

por tanto

$$\bar{u}_2(t) = \begin{cases} \dfrac{23}{8} - \dfrac{3}{4(1-e^{t-1})} & \text{a.e. en } [0, 1 + \ln(17/23)], \\ 0 & \text{a.e. en } [1 + \ln(17/23), 1]. \end{cases}$$