1

Sea $\mathcal{V} = H_0^1(0,1)$ y la forma bilineal $a_\kappa : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definida por

$$a_\kappa(y, v) := \int_0^1 \kappa(x) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad \forall y, v \in \mathcal{V}.$$

Asumiendo que la función parámetro κ verifica que, existen cotas $\kappa_U,\ \kappa_L > 0$ tal que

$$0 < \kappa_L \leq \kappa(x) \leq \kappa_U, \quad \forall x \in [0,1].$$

Se pide probar lo siguiente:

1. $a\kappa$ es continua.
2. $a\kappa$ es coerciva sobre $\mathcal{V}$.
3. $l \in \mathcal{V}'$.

1.1 a_κ es continua

Recordemos que $a_\kappa(\cdot,\cdot)$ es continua si $\exists c > 0$ tal que

$$|a_\kappa(y, v)| \leq c\|y\|_\mathcal{V}\|v\|_\mathcal{V}, \quad \forall y, v \in \mathcal{V}$$

Entonces desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} |a_\kappa(y, v)| &= \left| \int_0^1 \kappa(x) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right| \\ &\leq \kappa_U \left| \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right| \\ &\leq \kappa_U \|y'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2}, \end{aligned}$$

donde en la ultima desigualdad hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Como $(0,1)$ es acotado por la proposición 3 tenemos que la norma $\|v'\|_{L^2}$ es equivalente a la norma $\|v\|_\mathcal{V}$, por tanto $\exists c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |a_\kappa(y, v)| &\leq \kappa_U \|y'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \\ &\leq \kappa_U c_1 \|y\|_\mathcal{V} \|v\|_\mathcal{V}, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

1.2 a_κ es coerciva sobre $\mathcal{V}$

Recordemos que $a_\kappa(\cdot,\cdot)$ es coerciva si $\exists c>0$ tal que

$$a_\kappa(v,v) \geq c\|v\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Entonces desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} a_\kappa(y,v) &= \int_0^1 \kappa(x)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx \\ &\geq \kappa_L \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx \\ &= \kappa_L \left(\left[\int_0^1 \left[v'\right]^2 dx\right]^{1/2}\right)^2 \\ &= \kappa_L \|v'\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Como $(0,1)$ es acotado por la proposición 3 tenemos que la norma $\|v'\|_{L^2}$ es equivalente a la norma $\|v\|_{\mathcal{V}}$, por tanto $\exists c_2>0$ tal que

$$\begin{aligned} a_\kappa(y,v) &\geq \kappa_L\|v'\|_{L^2}^2 \\ &\geq \kappa_L c_2 \|v\|_{\mathcal{V}}^2, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

1.3 $l \in \mathcal{V}$

Asumiendo que $l(v)$ es igual que la definida en el apartado 1.5 Formulación débil o variacional,

$$l(v) = \int_0^1 fv dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Vemos que l es lineal

$$l(\alpha v_1+\beta v_2) = \int_0^1 f\cdot(\alpha v_1+\beta v_2)dx = \alpha\int_0^1 fv_1dx+\beta\int_0^1 fv_2dx = \alpha l(v_1)+\beta l(v_2)$$

para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $v_1,v_2 \in \mathcal{V}$. Por otro lado aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(0,1)$

$$|l(v)| = \left|\int_0^1 fvdx\right| = |\,(f,v)_{L^2}\,| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{\mathcal{V}},$$

lo que prueba que $\|l\|_{\mathcal{V}'} \leq \|f\|_{L^2}$, y por tanto $l \in \mathcal{V}'$.

2

Pruebe que ϕ_i es una base de $\mathcal{V}_h$.

Primero vemos que las funciones ϕ_i son independientes. Es decir que

$$a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n = 0. \tag{1}$$

solo si $a_i = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Tomando la primera derivada debil de las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$, tenemos

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & \forall x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\dfrac{1}{h}, & \forall x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x < x_{i-1} \text{ or } x > x_{i+1}, \end{cases}$$

donde ϕ' es un abuso de notacion para referise a la derivada debil de ϕ.

Entonces derivando (1), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i' = 0,$$

entonces podemos ver que $a_1 = 0$ ya que $\phi_1'(x) = \frac{1}{h}, \forall x \in (0, h)$ y el resto de derivadas débiles de ϕ valen 0 en el intervalo $(0, h)$. De manera recursiva podemos argumentar lo mismo para el resto de a_i.

Por tanto tenemos que $a_i = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y por tanto $\{\phi_i\}$ son independientes.

Veamos que $\{\phi_i\}$ genera $\mathcal{V}_h$.

Sea $g \in \mathcal{V}_h$ vemos que se puede expresar como

$$g(x) = a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x).$$

Primero vemos que

$$\begin{aligned} g(0) &= a_1\phi_1(0) + \cdots + a_n\phi_n(0) = 0 + \cdots + 0 = 0 \\ g(1) &= a_1\phi_1(1) + \cdots + a_n\phi_n(1) = 0 + \cdots + 0 = 0, \end{aligned}$$

para todo $\{a_i\}$.

Por otro lado g restringida al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es un polinomio de primer grado, asi que

$$\begin{aligned} g|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) &= ax + b \\ &= a_1\ \phi_1|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) + \cdots + a_n\ \phi_n|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) \\ &= a_i\ \phi_i|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) + a_{i+1}\ \phi_{i+1}|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) \\ &= \frac{1}{h}(a_i(x_{i+1} - x) + a_{i+1}(x - x_i)), \end{aligned}$$

que nos lleva a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} ah &= -a_i + a_{i+1} \\ bh &= a_i x_{i+1} - a_{i+1} x_i, \end{aligned}$$

por tanto existe $\{a_i\}$ tal que $g(x) = a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$.

3

Supongamos que $f \in \mathcal{V}_h$, entonces tenemos que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\phi_i(x)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
P_i = l(\phi_i) &= \int_0^1 f(s)\phi_i(s)ds \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\phi_i(s)\right)\phi_i(s)ds \\
&= \int_0^1 \left(f_{i-1}\phi_{i-1}(s) + f_i\phi_i(s) + f_{i+1}\phi_{i+1}(s)\right)\phi_i(s)ds \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{i-1}\phi_{i-1}(s)\phi_i(s)ds + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_i\phi_i^2(s)ds + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{i+1}\phi_{i+1}(s)\phi_i(s)ds,
\end{aligned} \tag{2}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que $\phi_i \cdot \phi_j = 0, \forall |i-j| > 1$.

Estudiemos las tres integrales de la ultima igualdad,

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{i-1}\phi_{i-1}(s)\phi_i(s)ds &= \frac{h}{6}\left(4\phi_{i-1}\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\right)f_{i-1} \\
&= \frac{h}{6}4\left(\frac{1}{h}\left(x_i - \frac{2x_i - h}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{h}\left(\frac{2x_{i-1} + h}{2} - x_{i-1}\right)\right)f_{i-1} \\
&= \frac{h}{6}\cdot 4 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot f_{i-1} = \frac{h}{6}f_{i-1}
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que $\phi_i(x_{i-1}) = 0$ y que $\phi_{i-1}(x_i) = 0$. Notemos que la ultima integral de (2) es igual a esta cambiando los indices $i-1$ por i e i por $i+1$.

Por otro lado la segunda integral,

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_i\phi_i^2(s)ds &= \frac{h}{6}\left(4\phi_i^2\left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right)\right)f_i \\
&= \frac{h}{6}4\phi_i^2(x_i)f_i = \frac{h}{6}4\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\right)^2 f_i \\
&= \frac{h}{6}4f_i,
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que $\phi_i(x_{i-1}) = 0 = \phi_i(x_{i+1})$.

Finalmente continuado con (2) tenemos,

$$P_i = l(\phi_i) = \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right)$$

4

Podemos extender la base de $\mathcal{V}_h$, $\{\phi_i\}$, a $\mathcal{A}_h$ añadiendo

$$\phi_0 = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & \forall x \in (x_0, x_1) \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$\phi_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{h}, & \forall x \in (x_n, x_{n+1}) \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

las cuales tienes como derivadas débiles,

$$\phi_0' = \begin{cases} \dfrac{-1}{h}, & \forall x \in (x_0, x_1) \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$\phi_{n+1}' = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & \forall x \in (x_n, x_{n+1}) \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces tenemos que $\kappa = \sum_{i=0}^{n+1} \kappa(x_i)\phi_i(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \kappa_i \phi_i(x)$.
Con esto empecemos por calcular K_{ii},

$$\begin{aligned} K_{ii} = a_\kappa(\phi_i, \phi_i) &= \int_0^1 \kappa(s)\phi_i'^2(s)ds \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \kappa_{i-1}\phi_{i-1}(s) + \kappa_i\phi_i(s) + \kappa_{i+1}\phi_{i+1}(s)ds \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\kappa_{i-1}\frac{h}{2} + \kappa_i \frac{2h}{2} + \kappa_{i+1}\frac{h}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2h} \left(\kappa_{i-1} + 2\kappa_i + \kappa_{i+1} \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(s)ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(s)ds = \frac{h}{2}.$$

Finalmente calculamos K_{ii+1},

$$\begin{aligned} K_{ii+1} = a_\kappa(\phi_i, \phi_{i+1}) &= \int_0^1 \kappa(s)\phi_i'(s)\phi_{i+1}'(s)ds \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa_i\phi_i(s) + \kappa_{i+1}\phi_{i+1}(s)ds \\ &= -\frac{1}{h^2} \left(\kappa_i \frac{h}{2} + \kappa_{i+1}\frac{h}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2h} \left(\kappa_i + \kappa_{i+1} \right). \end{aligned}$$

5

Para ver que $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ es suficiente ver que todo elemento, ϕ_i de la base the $\mathcal{V}_h$ pertenece a $\mathcal{V}$.

Primero tenemos por definición que $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$.

Veamos que $\phi_i \in L^2(0,1)$,

$$\begin{aligned}
\|\phi_i\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \phi_i(x)^2 dx \\
&= \int_{x_i-h}^{x_i} \left(\frac{x - x_i - h}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_i+h} \left(\frac{x_i + h - x}{h}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{h^2}\left(\int_0^{2h} u^2 du\right) = \frac{8h}{3} < \infty.
\end{aligned}$$

En el ejercicio 2 ya hemos visto que existen las derivadas debiles de ϕ_i, veamos que $\phi_i' \in L^2(0,1)$,

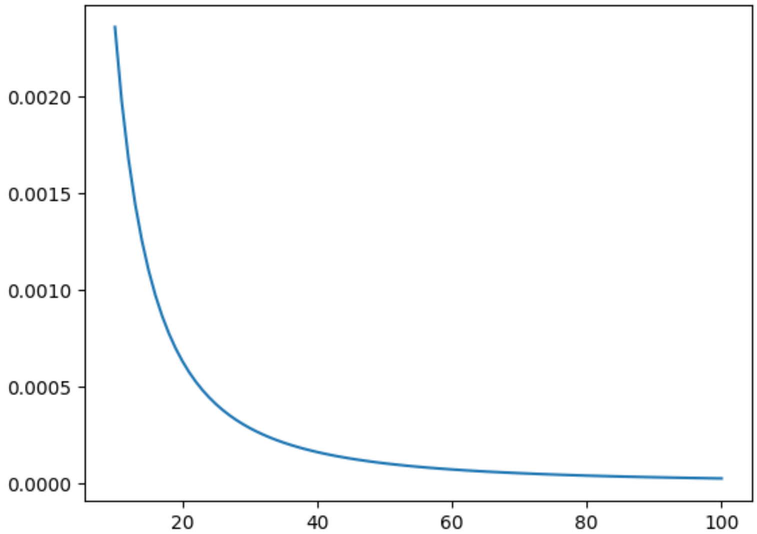
$$\begin{aligned}
\|\phi_i'\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \phi_i'(x)^2 dx \\
&= \int_{x_i-h}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{1}{h^2} dx \\
&= \frac{2}{h},
\end{aligned}$$

por tanto $\|\phi_i'\|_{L^2} < \infty$ si $h > 0$.

Podemos concluir que $\phi_i \in \mathcal{V}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y por lo tanto $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$.

6

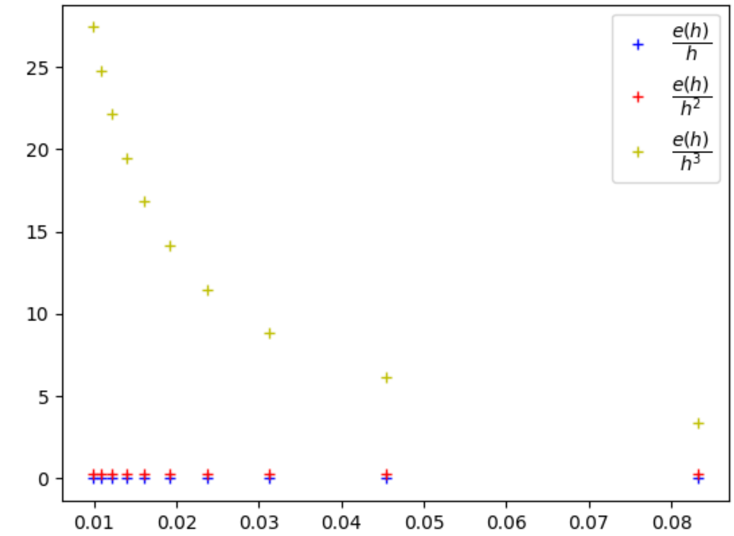
La grafica del error L^2 es



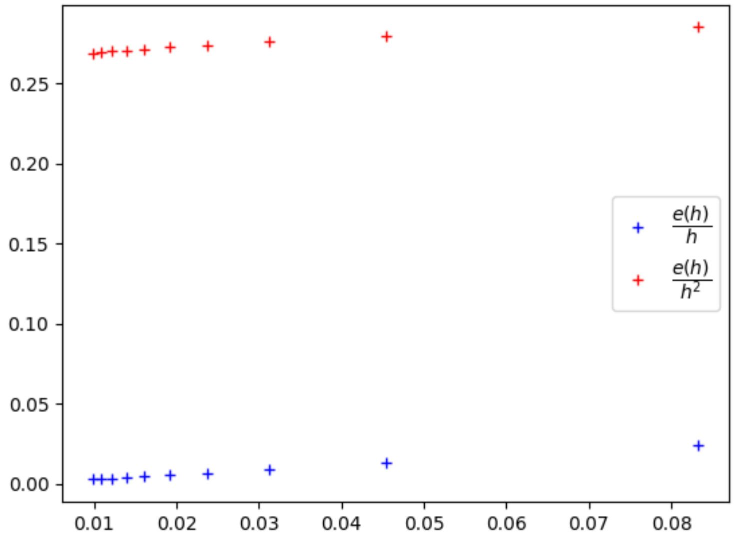
La siguiente tabla indica el error L^2 usando n puntos interiores

n	$\|y - y_h\|_{L^2}$
11	0.0019789446521015497
21	0.0005764876672852483
31	0.0002693026999544415
41	0.0001551708338519879
51	0.0001007010259283127

Para estudiar la convergencia usamos la siguiente grafica, que muestra el error de la solucion dividido entre h^k



Vemos que el error no es estable para h^3, para asegurarnos veamos mas de cerca h^2



Para h^2 el error si es estable, por lo tanto podemos concluir que la convergencia es de orden $O(h^2)$.

7

Sea $y \in C^2([0,1])$ tal que $-y'' + y = f$, multiplicado en ambos lados por $v \in H^1((0,1))$,

$$(-y'' + y)v = fv,$$

integrando a ambos lados,

$$\int_0^1 (-y'' + y)v dx = \int_0^1 fv dx.$$

Aplicando integración por partes,

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 y''v dx + \int_0^1 yv dx &= \int_0^1 y'v' dx + [y'v]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 yv dx \\
&= \int_0^1 y'v' dx + [y'(1)v(1) - y'(0)v(0)] + \int_0^1 yv dx \\
&= \int_0^1 y'v' + yv dx,
\end{aligned}$$

por tanto $y \in C^2([0,1])$ solución del problema clásico también es solución el problema variacional.

El desarrollo de la sección 1.7 nos lleva a la misma estructura $KU = P$

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & \cdots & a(\phi_p, \phi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_p, \phi_1) & \cdots & a(\phi_p, \phi_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\phi_1) \\ \vdots \\ l(\phi_p) \end{pmatrix}$$

En el caso del vector de carga el resultado es el mismo que en el apartado,

$$P_i = l(\phi_i) = \frac{h}{6}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}).$$

Por otro lado para calcular la matriz usaremos,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_i' \phi_{i+1}' dx &= -\frac{1}{h}, \quad 2 \leq i \leq p \\
\int_0^1 (\phi_i')^2 dx &= \frac{2}{h}, \quad 1 \leq i \leq p-1 \\
\int_0^1 \phi_i \phi_{i+1} dx &= \frac{h}{6}, \quad 2 \leq i \leq p \\
\int_0^1 (\phi_i)^2 dx &= \frac{2h}{3}, \quad 1 \leq i \leq p-1 \\
\int_0^1 (\phi_p')^2 dx &= \frac{1}{h}, \\
\int_0^1 (\phi_p)^2 dx &= \frac{h}{3}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Entonces tenemos que, para todo $1 \leq i \leq p-1$,

$$K_{ii} = a(\phi_i, \phi_i) = \int_0^1 (\phi_i')^2 + (\phi_i)^2 dx = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3},$$

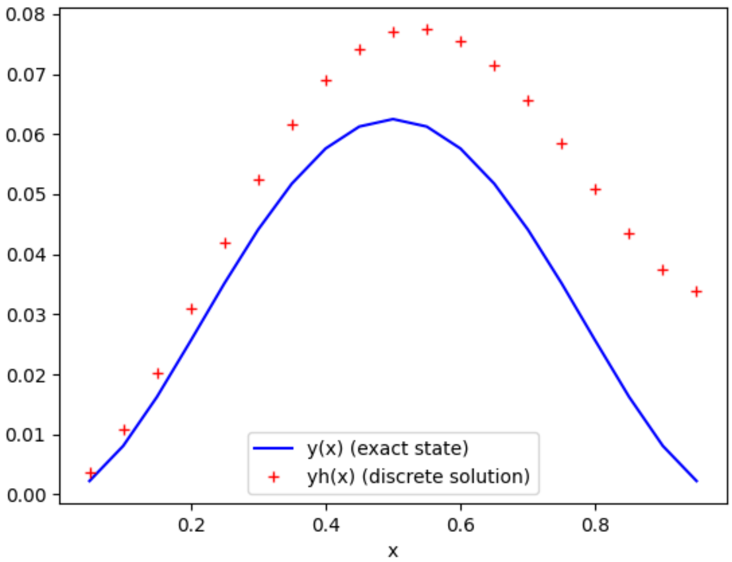
para $i = p$,

$$K_{pp} = a(\phi_p, \phi_p) = \int_0^1 (\phi_p')^2 + (\phi_p)^2 dx = \frac{1}{h} + \frac{h}{3},$$

finalmente para $2 \leq i \leq p$,

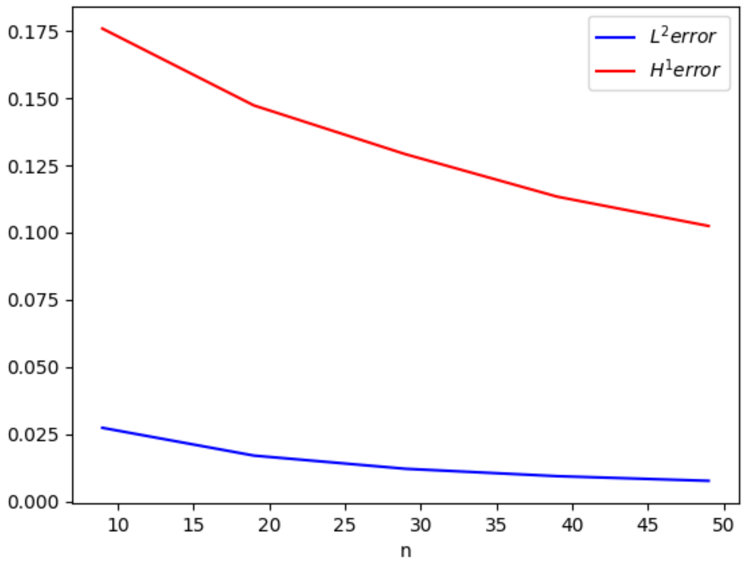
$$K_{i-1i} = a(\phi_{i-1}, \phi_i) = \int_0^1 \phi_{i-1}'\phi_i' + \phi_{i-1}\phi_i dx = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}.$$

La solución de sistema en $h = 1/20$ es

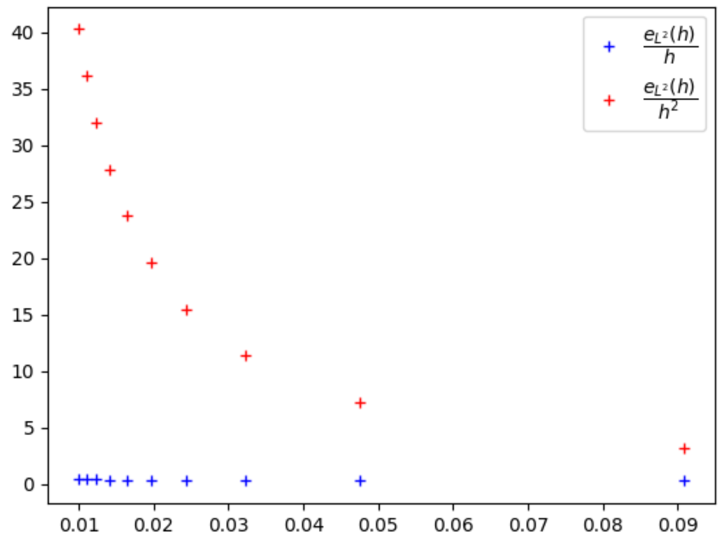


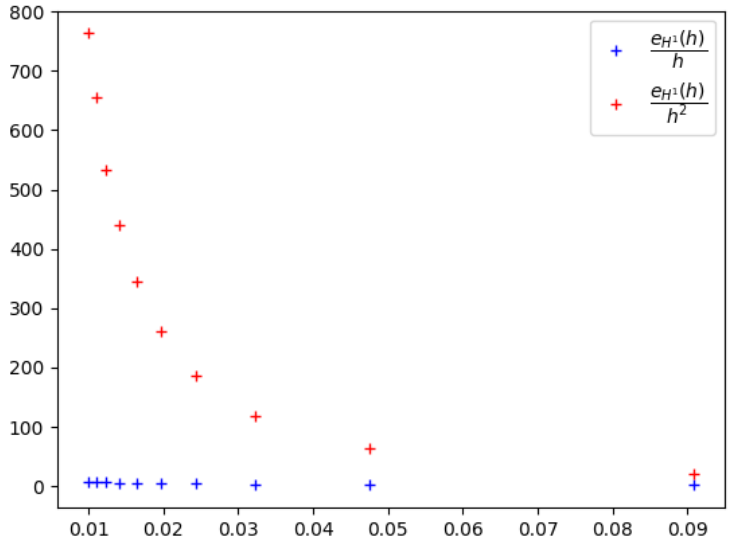
El error de la solución,

h	$\|y - y_h\|_{L^2}$	$\|y - y_h\|_{H^1}$
$\frac{1}{10}$	0.0273981240511847	0.1760585878272073
$\frac{1}{20}$	0.0170630953086795	0.1467514165268919
$\frac{1}{30}$	0.0121585957379206	0.1262226493473558
$\frac{1}{40}$	0.0094177301604370	0.1129957853054767
$\frac{1}{50}$	0.0076785509658391	0.1019941189517640



Finalmente analizando la convergencia de las dos normas numéricamente, tenemos





Con lo que podemos concluir que la solución del problema mediante la discretización converge de manera lineal para las dos normas.