MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
OPTIMIZACIÓN EN ESPACIOS DE BANACH

Prueba de capítulo 2

INSTRUCCIONES. Resuelva los ejercicios que se plantean, explicando todos los pasos a seguir hasta llegar a la solución final. Envíe la resolución en un único documento en formato pdf a través del curso virtual, en el apartado "Entrega de trabajos". Dispone del 13 de noviembre al 27 de noviembre, ambos inclusive, para entregar la prueba.

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio real normado, $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional convexo y $x_0 \in X$.

(a) Pruebe que $\partial f(x_0)$ es un conjunto convexo (contenido en el conjunto de funcionales lineales continuos $l : X \to \mathbb{R}$).

(b) Sea $x^* : X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo. Pruebe que

(b.1) $\partial(f + x^*)(x_0) = x^* + \partial f(x_0)$,

(b.2) $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$, para todo $\lambda > 0$.

2. Sea $\|\cdot\|_\diamond$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea

$$f(x) = \|x\|_\diamond.$$

Se define la norma dual del siguiente modo:

$$\|l\|_\star = \max_{h \neq 0} \frac{|\langle l, h\rangle|}{\|h\|_\diamond} = \max_{\|h\|_\diamond = 1} |\langle l, h\rangle|.$$

Pruebe que se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $\partial f(0) = \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|_\star \leq 1\}$. En particular, pruebe que

(a.1) $\partial\|0\|_2 = \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|_2 \leq 1\}$,

(a.2) $\partial\|0\|_1 = \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|_\infty \leq 1\}$,

(a.1) $\partial\|0\|_\infty = \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|_1 \leq 1\}$,

donde $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ denotan, respectivamente, las clásicas norma euclidea, norma de la suma y norma del máximo en $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

(b) $\partial f(x) = \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|_\star \leq 1,\ \langle l, x\rangle = \|x\|_\diamond\}$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables y convexas. Se considera la función

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Pruebe que l es un subgradiente de f en x_0 si y sólo si

$$l = \lambda \nabla f_1(x_0) + (1 - \lambda)\nabla f_2(x_0), \quad \text{para } \lambda \in [0, 1].$$

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio real normado y $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La función $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\},$$

se denomina la conjugada de Fenchel de f (X^* denota el conjunto de funcionales lineales y continuos $l : X \to \mathbb{R}$).

(a) Pruebe que

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle,\ \forall x \in X,\ x^* \in X^*.$$

La desigualdad anterior se conoce como *desigualdad de Young-Fenchel*.

(b) Sea $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Demuestre que

$$x^* \in \partial f(x_0)$$

si y sólo si

$$f(x_0) + f^*(x^*) = \langle x_0, x^* \rangle,$$

y que lo anterior implica que $x_0 \in \partial f^*(x^*)$.

(c) Sea $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Demuestre que

$$\partial f(x_0) \neq \emptyset \Longleftrightarrow f(x_0) = \max_{x^* \in X^*} (\langle x_0, x^* \rangle - f^*(x^*)).$$