Gratis hjælp
til matematik
lokalt og digitalt

Materialesamling til **Matematik A** fra Webmatematik.dk

www.matematikcenter.dk
www.webmatematik.dk
www.webmatlive.dk

Version: December, 2024

Materialesamling til A-niveau

Matematikcenter

Version: December, 2024

Indhold

1 Vektorer i 3D

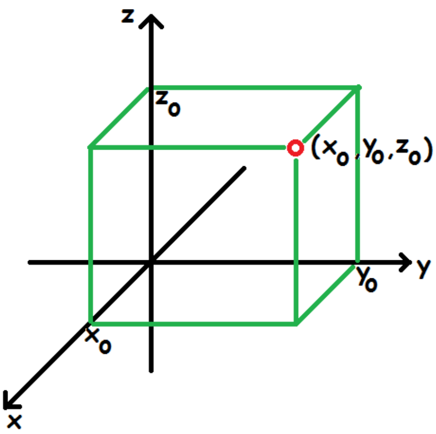
1.1 Koordinatsystemet i 3D

I rumgeometrien arbejder man med tredimensionelle koordinatsystemer. Hvor man i to dimensioner kun har to akser (x og y), har man i tre dimensioner tilføjet en ekstra akse, z-aksen.

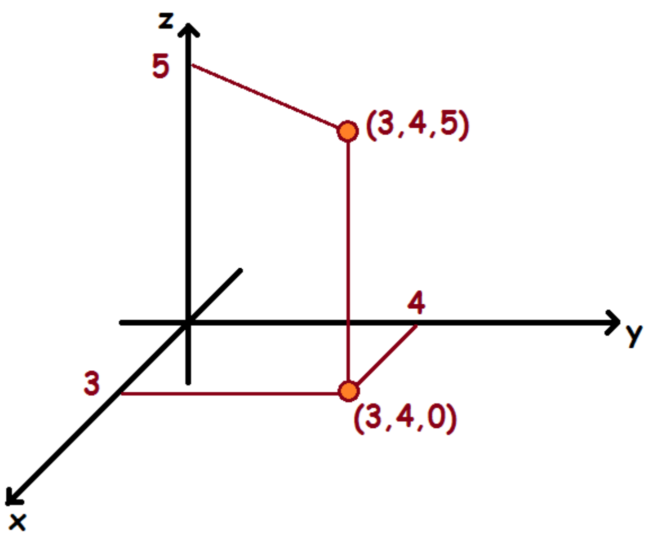
Man kan sammenligne det med et værelse. I to dimensioner har vi en plantegning, hvor vi ser værelset oppefra. Vi kan se hvordan møblerne står på gulvet i forhold til hinanden. Men vi kan ikke se, hvor høje de er. I tre dimensioner har vi tilføjet højden, så vi udover at se, hvordan møblerne er placeret i forhold til hinanden også skelner mellem øverste og nederste hylde i reolen.

Man tegner typisk akserne, så x-aksen peger udad, y-aksen henad og z-aksen opad.

Man aflæser et punkts koordinater ved først at gå ud af x-aksen, indtil man er nået på linje med punktets x-værdi. Derefter går man parallelt med y-aksen, indtil man er nået på linje med punktet, og til sidst går man op parallelt med z-aksen, indtil man når på linje med punktet.



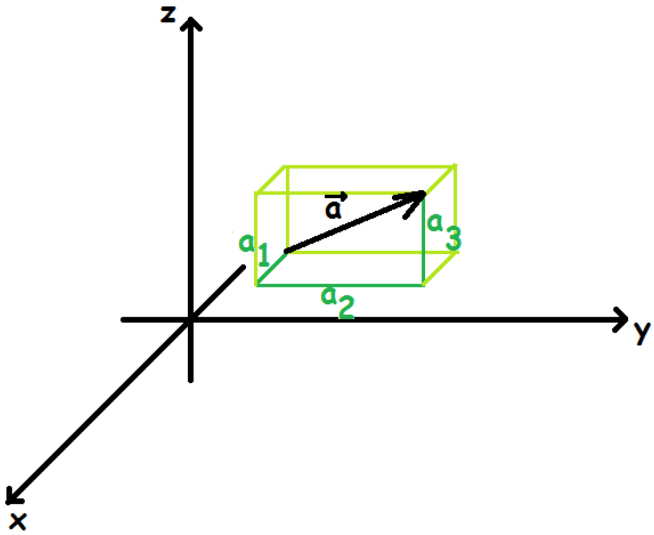
Hvis man skal afsætte et punkt i et tredimensionelt koordinatsystem, finder man punktet i xy-planen med de rigtige x- og y-værdier. Dette punkt har koordinaterne (x, y, 0). Herfra går man lodret op (eller ned) til man når den rigtige z-værdi. Herunder er punktet (3, 4, 5) indtegnet.



1.2 Vektorer i 3D

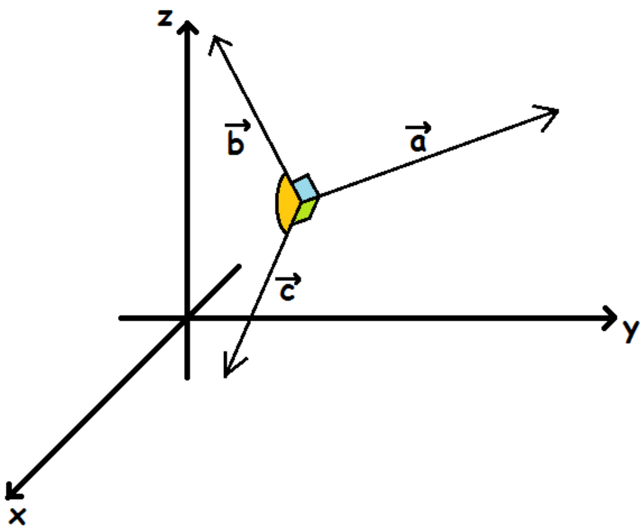
Præcis som i 2D er en 3D-vektor en pil med en retning og en længde.

I 3D har en vektor tre koordinater, der svarer til vektorens længde (regnet med fortegn) i hver af de tre aksers retninger. Første koordinaten svarer altså til, hvor langt man går langs x-aksen, andenkoordinaten hvor langt man går langs y-aksen, og tredjekoordinaten langs z-aksen.



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

De fleste begreber om vektorer fra 2D kan overføres direkte til 3D. Imidlertid gælder det ikke for tværvektor-begrebet. I rummet kan man nemlig ikke tale om at rotere en vektor 90^{o} mod uret, da "mod uret"afhænger af, hvor man ser fra. Der vil således være uendeligt mange måder at konstruere en vektor på, der står vinkelret på en bestemt vektor. Herunder er tegnet to vektorer, b og c, der begge står vinkelret på vektor a (men som ikke er vinkelrette på hinanden)



Udover tværvektorbegrebet, overfører vi heller ikke determinanten til 3D. Dette skyldes, at determinanten er defineret ud fra tværvektorer. Men ellers overføres alle de andre begreber. Nulvektoren i 3D er således

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En stedvektor har samme koordinater, som det punkt, den fører hen til. Man kan konstruere en vektor mellem to punkter ved at trække deres koordinater fra hinanden

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

1.3 Addition, subtraktion og prikprodukt

Man regner med vektorer i 3D på nogenlunde samme måde som i 2D. Vi definerer således regneoperationerne som

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ t \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Med ord siger vi, at vi lægger to vektorer sammen (eller trækker dem fra hinanden) ved at lægge sammen (eller trække fra) koordinatvist, og at vi forlænger/forkorter en vektor ved at gange med skaleringsfaktoren på hver koordinat.

Skalarproduktet/prikproduktet i 3D er også defineret på samme måde som i 2D ved at vi ganger sammen koordinatvist og lægger produkterne sammen.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Der gælder stadig, at to vektorer er ortogonale (vinkelrette på hinanden) hvis deres skalarprodukt er 0.

Regnereglerne minder meget om dem for vektorer i 2D. I videoen herunder kan du se nogle eksempler på udregninger af vektorsummer, -differenser og skalarprodukter i 2D.

1.4 Længde af vektor

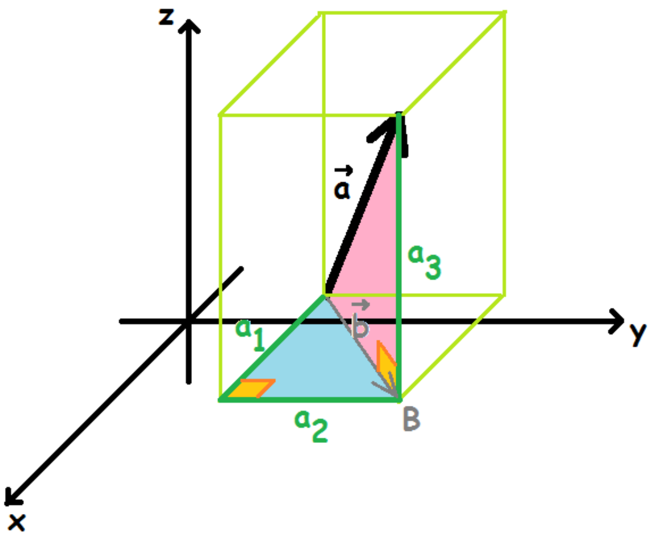
Når vi skal beregne længden af en vektor i 3D, bruger vi en formel der minder meget om 2D-formlen

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Som et eksempel kan vi udregne længden af vektoren med koordinaterne 2, 4 og 6.

$$\left|\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} \approx 7,48$$

Hvis vi skal forklare, hvorfor formlen ser sådan ud, skal vi holde tungen lige i munden og gøre brug af Pythagoras to gange.



Fra slutpunktet af vektor a går vi lodret ned indtil vi når ned i samme højde som startpunktet. Dette punkt kalder vi B. Vi tegner vektoren b mellem startpunktet for vektor a og punktet B.

Nu kan vi se, at vektor a udgør hypotenusen i en retvinklet trekant (lyserød) med vektor b som den ene katete, og a_3 som den anden. Altså kan vi udregne længden af vektor a, hvis vi bare kender længden af vektor b.

Vektor b udgør imidlertid hypotenusen i en anden retvinklet trekant (lyseblå) med kateterne a_1 og a_2. Derfor kan vi udregne længden af vektor b vha. Pythagoras.

$$|\overrightarrow{b}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2$$
$$|\overrightarrow{b}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Grunden til at vi brugte numeriske tegn om a_1 og a_2 var, at vi skulle bruge længderne af kateterne, og vi ikke vidste om koordinaterne var positive eller negative. Når vi sætter i anden, får vi imidlertid altid et positivt tal, hvorved vi kan ophæve de numeriske tegn.

Nu kan vi bruge Pythagoras til at udregne længden af vektor a

$$\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 + |a_3|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + |a_3|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.5 Krydsprodukt

Når man har med 3D-vektorer at gøre, findes der en ny regneart. Den kaldes *krydsproduktet* eller *vektorproduktet*. Man krydser to vektorer med hinanden på følgende måde

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at når man krydser to vektorer med hinanden, så får man en ny vektor.

Huskeregel

Der findes en måde, så det er lettere at huske, hvordan man udregner krydsproduktet.

Når man skal finde førstekoordinatet i krydsproduktsvektoren, så holder man en hånd over de to førstekoordinater og udregner determinanten af det tiloversblevne.

Når man skal udregne andenkoordinatet, holder man for de to andenkoordinater og udregner determinanten af det tiloversblevne. Når man har gjort det skal man huske at sætte et minus foran!

Når man skal udregne tredjekoordinatet i krydsproduktsvektoren holder man for tredjekoordinaterne og tager determinanten af det synlige.

Vi illustrerer huskereglen ved et eksempel.

Vi ønsker at udregne krydsproduktet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi holder en hånd over førstekoordinaterne og finder determinanten af de fire tal, der er synlige

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3$$

førstekoordinatet er altså -3

Nu holder vi for andenkoordinaterne og finder determinanten af de fire synlige tal

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6$$

Ved andenkoordinatet skal man huske at sætte minus foran! Så andenkoordinatet bliver altså 6

Til sidst holder vi en hånd over tredjekoordinaterne og udregner determinanten af de fire synlige tal

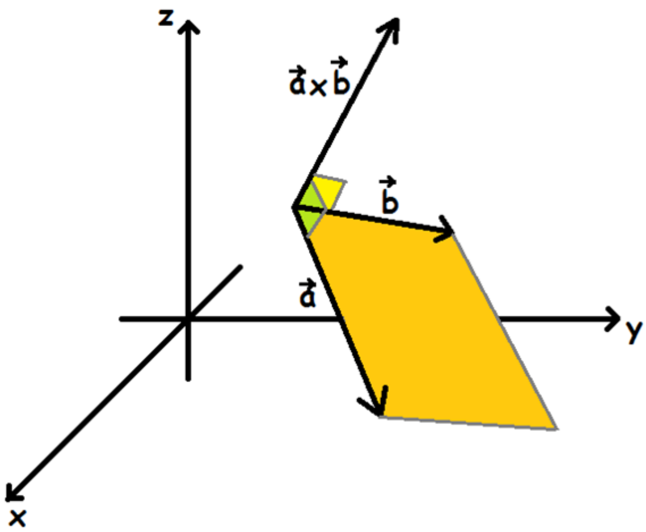
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$$

Krydsproduktet giver altså

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Egenskaber ved krydsproduktet

Når man finder krydsproduktet af to vektorer, vil krydsproduktsvektoren stå vinkelret på begge de to oprindelige vektorer.



Vi kan tjekke, at det er rigtigt i eksemplet ovenfor ved at prikke hver af vektorerne sammen med krydsproduktsvektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

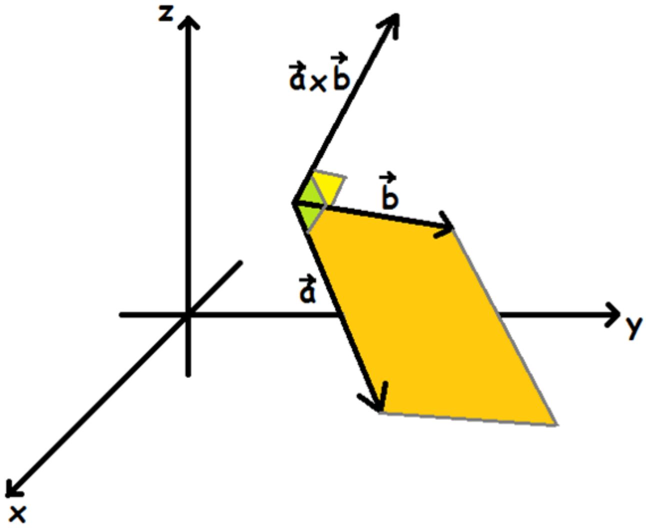
$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 6 \cdot (-3) = -12 + 30 - 18 = 0$$

Da begge prikprodukter giver 0, betyder det at hver af vektorerne er ortogonale med krydsproduktet.

Areal af parallellogram

Udover at stå vinkelret på begge vektorer, så er længden af krydsproduktet lig med arealet af det parallellogram, der udspændes af de to vektorer.

$$A_{parallellogram} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$$



F.eks. kan arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

udregnes som:

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54}$$
$$\approx 7,35$$

Parallelle vektorer

Hvis krydsproduktet af to vektorer giver nulvektoren, betyder det, at de to vektorer er parallelle.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \ .$$

Dette skyldes, at længden af krydsproduktet mellem to vektorer kan skrives som

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(v) \ ,$$

hvor v er den udspændte vinkel mellem de to vektorer. Da $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ betyder det altså, at hvis de to vektorer er enten ensrettede eller modsatrettede parallelle, så er længden af deres krydsprodukt nul. Da længden af krydsproduktet er givet som kvadratroden af en sum af positive størrelser medfører det altså at hvis længden er nul, må krydsproduktet nødvendigvis også være det.

1.6 Linjer i rummet

Når man arbejder med linjer i rummet, bruger man stort set kun deres parameterfremstilling. I princippet kan man også opskrive en ligning for linjer i rummet, men det er en grim formel, som er svær at anvende i praksis.

Parameterfremstillingen for linjen er stort set som i 2D bare med et tredje koordinat på retningsvektoren og det faste punkt.

Et punkt (x, y, z) ligger således på en ret linje, hvis det opfylder ligningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Dette kan også skrives som

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{r}$$

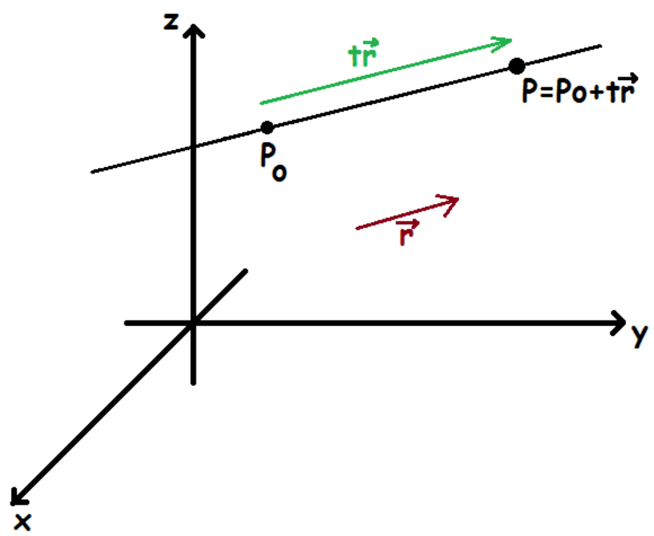
Man kan også skrive parameterfremstillingen som funktioner for hver koordinat:

$$x = x_0 + t \cdot r_1$$

$$y = y_0 + t \cdot r_2$$

$$z = z_0 + t \cdot r_3$$

Parameterfremstillingen for linjer i rummet fungerer på samme måde som i planen. Man starter i et punkt på linjen og derfra kan man nå alle punkter på linjen ved at gå en forlængelse/forkortelse af retningsvektoren ud fra punktet.



Et eksempel på en parameterfremstilling er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Parameterfremstillingen beskriver en linje, der går gennem punktet (2, 3, 0) og har retningen

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.7 Vindskæve linjer

Hvis man har to linjer i rummet kan de ligge på tre forskellige måder i forhold til hinanden. De kan

1. være parallelle
2. skære hinanden i et punkt
3. være vindskæve

Lad os se på de tre tilfælde hver for sig.

Parallelle

Man kan undersøge, om to linjer er parallelle ved at se om deres to retningsvektorer er parallelle. Dette kan gøres på to måder. Enten kan man undersøge om den ene er en forlængelse af den anden. F.eks. er

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

en forlængelse af

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

fordi man kan skrive

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Den anden metode til at tjekke for parallelitet er ved at undersøge om krydsproduktet giver 0. Hvis de to retningsvektorer betegnes med r og q gælder nemlig:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} \parallel \vec{q}$$

Hvis linjerne er parallelle har de enten 0 skæringspunkter eller uendeligt mange skæringspunkter (dette sker, hvis de to linjer er ens)

Ét skæringspunkt

Hvis linjerne ikke er parallelle, kan man undersøge, om de skærer hinanden i ét punkt. Det gør man ved først at sætte ligningerne for de to x- og y-koordinater lig hinanden. Det vil give to ligninger med to ubekendte (de to parametre), som vi kan løse.

Når vi så har fundet løsningerne, så sætter vi parametrene ind i ligningerne for z-koordinaterne og ser, om vi får samme z-koordinat. Hvis dette er tilfældet, har vi fundet et skæringspunkt. Og hvis vi ikke får samme z-koordinat, så skærer de to linjer ikke hinanden.

Vi prøver med et eksempel. Vores linjer l og m er givet ved

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan skrive ligningerne for x- og y-koordinaterne således:

$$x_l = 1 + 3t$$

$$y_l = 2 + 1 \cdot t$$

$$x_m = 5 + 2s$$

$$y_m = 1 + 4s$$

Vi sætter x-værdierne lig hinanden og y-værdierne lig hinanden

$$1 + 3t = 5 + 2s$$

$$2 + t = 1 + 4s$$

Vi løser de to ligninger med to ubekendte og når frem til

$$s = 0,7 \quad \text{og} \quad t = 1,8$$

Nu skal vi indsætte disse s- og t-værdier i ligningerne for z-værdierne.

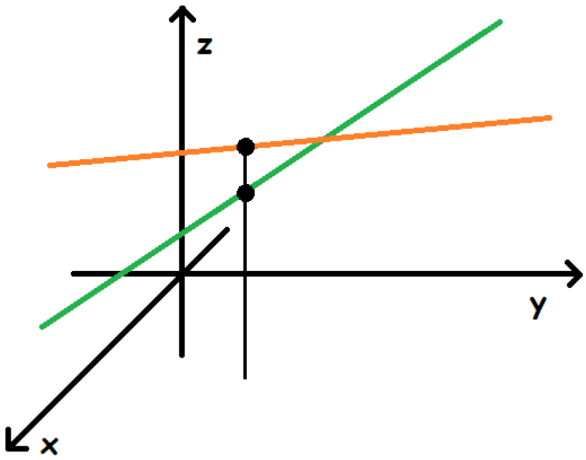
$$z_l = 4 + 2t = 4 + 2 \cdot 1,8 = 7,6$$

$$z_m = 3 + 2s = 3 + 2 \cdot 0,7 = 4,4$$

Da vi får to forskellige z-værdier, betyder det, at de to linjer ikke skærer hinanden.

Vindskæve linjer

Hvis to linjer hverken er parallelle eller skærer hinanden, så kaldes de ”vindskæve”. På billedet herunder har vi forsøgt at afbilde to vindskæve linjer. Deres retningsvektorer er ikke parallelle, og i det punkt, hvor de har samme x- og y-værdier (de to sorte punkter), er deres z-værdier forskellige.



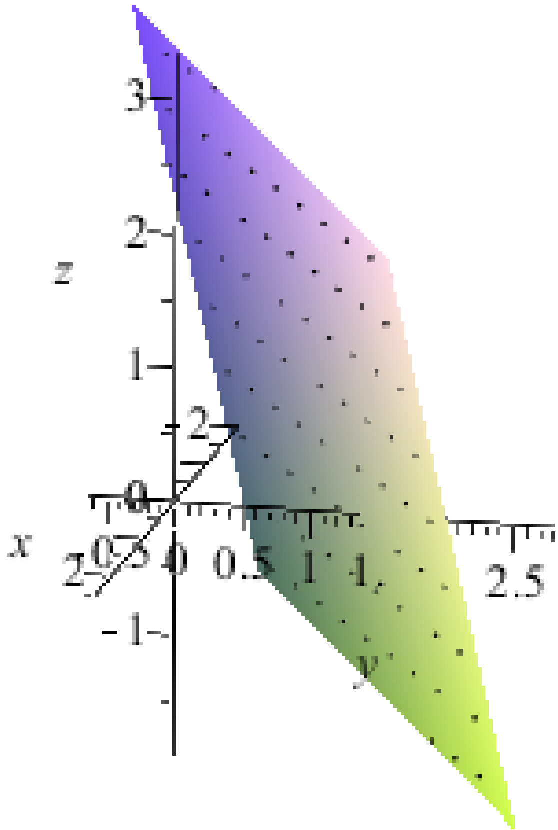
Det ligner, de skærer hinanden et sted, men det er fordi, det er svært at tegne tredimensionelt i to dimensioner. I det tilsyneladende skæringspunkt er den grønne linje "længere inde i skærmen", mens den orange er tættere på os.

Man kan forestille sig to vindskæve linjer som en bil, der kører ad en lige vej nede på jorden (den ene linje) og et fly, der flyver ligeud oppe i luften (den anden linje). Selvom flyet krydser henover vejen, så vil bilen og flyet ikke støde sammen, da flyet befinder sig flere km over vejen.

1.8 Planer

Et plan er en to-dimensional størrelse i et tredimensionelt rum. Man kan forestille sig et plan som et stykke papir, der befinder sig i et tredimensionelt rum, og som breder sig uendeligt ud. Ligesom du kan hæve eller sænke et stykke papir eller rotere det, således at det vender på alle mulige skæve måder, så kan du også gøre det med et plan.

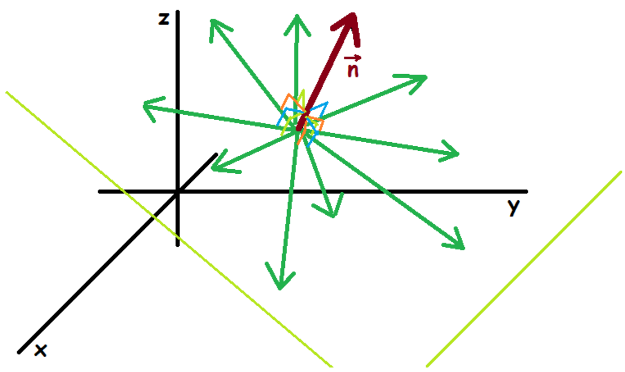
Nedenfor er tegnet et plan.



Normalvektor

Ligesom vi i 2D snakkede om at linjer havde normalvektorer, snakker vi i 3D om at planer har normalvektorer. Man kan faktisk definere et plan som alle de vektorer, der står vinkelret på en (normal)vektor.

Herunder har vi tegnet en rød vektor og 9 grønne vektorer, der alle står vinkelret på den. Det ses, at de grønne vektorer ligger i den samme plan.



Man betegner tit planer med græske bogstaver såsom α og β

1.9 Planens ligning

Man kan beskrive et plan ved hjælp af en ligning. Planens ligning er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Her er (x_0, y_0, z_0) et punkt i planen og

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til planen.

Man kan også skrive ligningen om til

$$ax + by + cz + d = 0$$

hvor man har ganget parenteserne ud og samlet alle konstanterne i én, nemlig d.

At planen har denne ligning, betyder, at planen består af alle de punkter (x,y,z), der opfylder ligningen. Dvs. alle de punkter (x,y,z), der gør, at der står det samme på venstre og højre side af lighedstegnet.

Man kan afgøre om et punkt ligger i et plan ved at indsætte dets koordinater i ligningen, og se om man får 0 ud af det. F.eks. kunne man ønske at finde ud af om (2, 4, 5) ligger i planen med ligningen 3x+5y-2z+7=0.

Vi sætter ind

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 7 = 6 + 20 - 10 + 7 = 23 \neq 0$$

Da punktet ikke opfylder ligningen, ligger det ikke i planen.

Finde ligningen for planen, hvis man kender to vektorer

Hvis man tegner to ikke-parallelle vektorer (fra samme begyndelsespunkt), vil de udspænde et plan. Det vil sige, at man kan finde én (og kun én) plan, som de begge to ligger i. Det er let at opskrive en ligning for det plan. Alt vi skal kende er et punkt i planen og en normalvektor til planen.

Som punkt kan vi bruge begyndelsespunktet for vektorerne. Som normalvektor kan vi bruge krydsproduktet af de to vektorer, fordi krydsproduktet står vinkelret på begge vektorer.

Hvorfor ser ligningen sådan ud?

Lad os prøve at se på, hvorfor planens ligning ser ud som den gør. Vi ved, at normalvektoren står vinkelret på alle vektorer i planen. Hvis punktet P(x,y,z) ligger i planen, så må vektoren

$$\overrightarrow{P_0P}$$

også ligge i planen, fordi den er en vektor mellem to punkter i planen.

Det betyder, at den er vinkelret på normalvektoren

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$$

Og det betyder så igen, at deres prikprodukt er 0.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Vi skriver de to vektorer ud med koordinater

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Nu prikker vi vektorerne sammen, og får

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

hvilket er planens ligning.

1.10 Planens parameterfremstilling

Ligesom linjen har en parameterfremstilling, så kan man også lave en parameterfremstilling for planen. Det kræver, at man kender ét punkt i planen og to ikke-parallelle vektorer, der ligger i planen.

Parameterfremstillingen for planen ser således ud:

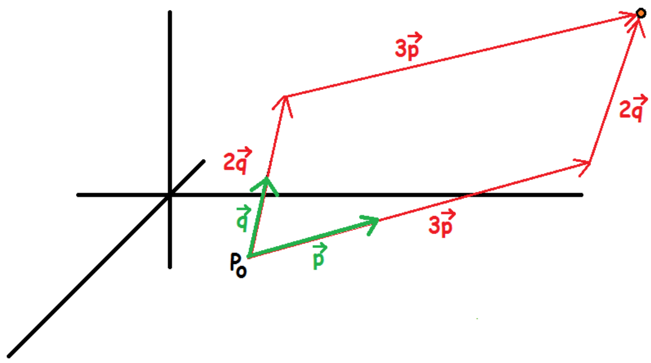
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

eller skrevet kortere

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{p} + t \cdot \vec{q}$$

Vektorerne p og q kaldes retningsvektorer for planen.

Planens parameterfremstilling fungerer på den måde, at man kan nå ud til alle punkter i planen ved at starte i P_0 og derfra gå først et stykke parallelt med den ene vektor og dernæst et stykke parallelt med den anden. Nedenfor er tegnet, hvor man går 3 af den ene vektor og 2 af den anden ud fra punktet for at nå frem til det orange punkt.



Ved at sætte forskellige tal ind på s's og t's plads kan man nå ud til alle punkter i planen.

Finde ligning når man kender parameterfremstilling

Hvis man kender parameterfremstillingen for et plan, kan man let finde dens ligning. Man finder normalvektoren ved at krydse de to retningsvektorer med hinanden

$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$$

og man kender allerede et punkt i planen. Så kender man alt, hvad man har brug for for at kunne opskrive en ligning for planen

Finde parameterfremstilling, hvis man kender ligning

Hvis man kender ligningen for et plan, kan man gå den anden vej og finde en parameterfremstilling for planen.

Vi illustrerer metoden med et eksempel.

$$\alpha : \quad 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

Først isolerer man den ene variable. Man bestemmer selv hvilken. Vi vælger at isolere x.

$$x = \frac{1}{2} - 2y + 3z$$

Nu lader man de to andre variable være parametrene. Vi sætter y=s og z=t. Dermed har vi de tre ligninger

$$x = \frac{1}{2} - 2s + 3t$$

$$y = s$$

$$z = t$$

Vi kan også skrive det som

$$x = \frac{1}{2} - 2 \cdot s + 3 \cdot t$$

$$y = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$

$$z = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

og dette kan på vektorform skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvorved vi er nået frem til en parameterfremstilling for planen.

1.11 Vinkel mellem linje og plan

Hvis man har en linje og et plan, vil de skære hinanden i et punkt (medmindre de er parallelle), og der vil dannes en vinkel imellem dem.

Denne vinkel kan vi beregne.

Først finder man vinklen mellem planens normalvektor og linjens retningsvektor.

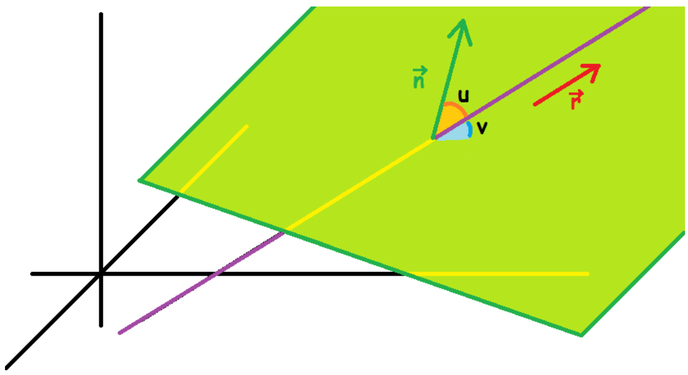
Dette gør man med den formel, vi kender fra 2D

$$\cos(u) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}$$

Hvis vi trækker denne vinkel fra 90º får vi vinklen mellem linjen og planen

$$v = 90^\circ - u$$

Det kan illustreres med følgende tegning



Der findes et lille trick man kan bruge, for at spare lidt tid. Sinus og cosinus er komplimentære funktioner, derfor gælder følgende

$$\sin(\theta) = \cos(90^\circ - \theta)$$

Vi viste før hvordan vi fandt vinklen v, nemlig ved at trække vinklen u fra 90 grader, hvilket minder meget om ovenstående ligning. Derfor kan man gøre følgende

$$\sin(v) = \cos(u) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}$$

Man kan med fordel bruge sinus, og dermed spare sig selv en beregning, men det er ikke forkert at bruge cosinus og derefter bestemme v, som det er vist ovenfor.

1.12 Vinkel mellem to planer

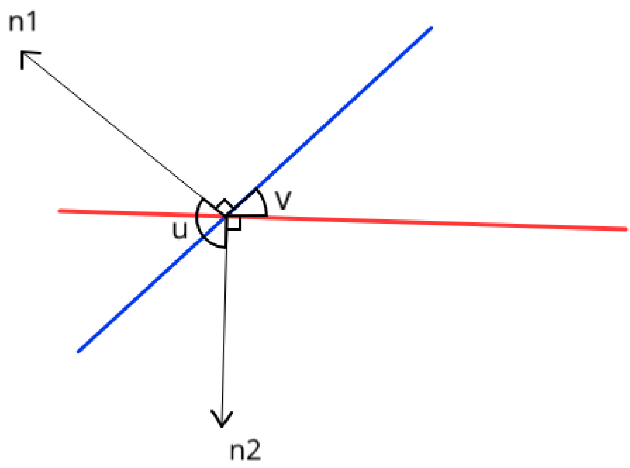
Hvis man har to planer α og β, kan man beregne vinklen mellem dem.

Man starter med at finde vinklen mellem de to planers normalvektorer. Dette gør man med den formel, vi kender fra 2D.

$$\cos(v) = \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|}$$

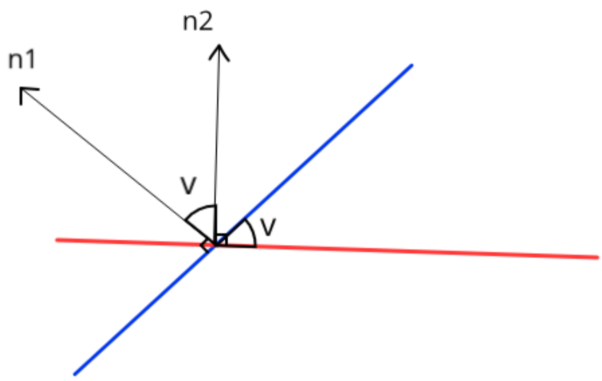
Vinklen mellem normalvektorerne danner dog to vinkler, en stump og en spids, alt efter hvordan man definerer sine normalvektorer. Hvis vinklen v er vinklen mellem planerne, så vil vinklen mellem normalvektorerne i det spidsvinklede tilfælde også være v. I det stumpvinklede tilfælde vil vinklen mellem normalvektorerne være u, hvoraf vinklen mellem planerne, v, findes ved $v = 180° - u$.

Man kan illustrere det stumpvinklede tilfælde ved hjælp af følgende tegning. Tegningen er kun 2D, men man kan forestille sig, at det er tværsnittet af to planer i rummet.



Her ses den stumpe vinkel, u, mellem de to normalvektorer, n1 og n2. Man finder vinklen mellem de to planer, rød og blå linje, ved $180° - u$.

Det spidsvinklede tilfælde kan ses nedenfor. Her ses det, at den spidse vinkel mellem de to normalvektorer er lig vinklen mellem planerne.



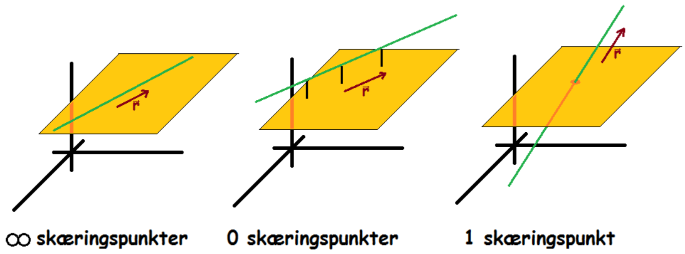
1.13 Skæring mellem linje og plan

Når man skal se, hvordan linjer og planer forholder sig i forhold til hinanden, er der tre muligheder.

• Hvis linjen ligger i planen (dvs. at både retningsvektoren og det faste punkt ligger i planen), er der uendeligt mange skæringspunkter.

• Hvis linjens retningsvektor ligger i planen, men det faste punkt ikke gør, så er der *ingen* skæringer.

- Hvis linjens retningsvektor ikke ligger i planen, er der ét skæringspunkt.



Man kan undersøge om retningsvektoren ligger i planen ved at prikke den med planens normalvektor. Hvis prikproduktet giver 0, er de to vektorer ortogonale og det vil sige, at retningsvektoren ligger i planen (hvis planen er givet ved en parameterfremstilling og ikke en ligning, kan man finde normalvektoren ved at krydse planens to retningsvektorer med hinanden)

Hvis retningsvektoren ligger i planen, kan man undersøge om linjens faste punkt også ligger i planen. Det gør man ved at indsætte punktet i planens ligning og se, om den er opfyldt. (Hvis planen er givet ved en parameterfremstilling, sætter man punktet ind på venstre side og bruger to af de tre ligninger til at isolere s og t. Dernæst indsætter man s- og t-værdierne i den tredje for at undersøge om den er opfyldt).

Hvis retningsvektoren ikke ligger i planen, kan man beregne skæringspunktets koordinater.

Find skæring, når plan er givet ved ligning

Hvis planen er givet ved en ligning og linjen ved parameterfremstilling, så finder man skæringen mellem dem på følgende måde:

Først indsætter man hver enkelt koordinatfunktion fra linjen i planens ligning. Dernæst isolerer man t. Den fundne t-værdi indsættes slutteligt i linjens parameterfremstilling, og det punkt, man når frem til er skæringspunktet.

Lad os tage et eksempel:

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha: \quad 2x + 3y - z + 4 = 0$$

Vi kan skrive linjens parameterfremstilling om til de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 5 - 2t$$

$$z = 0 + t = t$$

Disse funktioner sætter vi så ind på x's, y's og z's pladser i planens ligning

$$2(1 + 2t) + 3(5 - 2t) - (0 + t) + 4 = 0$$

$$2 + 4t + 15 - 6t - t + 4 = 0$$

$$-3t + 21 = 0$$

$$t = \frac{21}{3} = 7$$

Vi har altså fundet ud af, at linje og plan skærer hinanden, når t=7. Nu mangler vi bare at indsætte t=7 i linjens parameterfremstilling for at finde frem til skæringspunktet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 7 \cdot 2 \\ 5 - 7 \cdot 2 \\ 0 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet er derfor (15, -9, 7)

Find skæring, når plan er givet ved parameterfremstilling

Hvis planen er givet ved en parameterfremstilling, kan man enten omskrive parameterfremstilingen til en ligning og gøre som ovenfor, eller man kan løse tre ligninger med tre ubekendte.

Lad os tage et eksempel

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 2u \\ y = -u \\ z = 1 + u \end{array}$$

$$\alpha: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 1 + s + 3t \\ y = 1 + 2s \ (+0 \cdot t) \\ z = 2 + t \ (+0 \cdot s) \end{array}$$

Bemærk, at vi har givet alle parametrene forskellige navne, således at linjens parameter hedder u, mens planens hedder s og t.

Nu sætter vi ligningerne for x lig hinanden, ligningerne for y lig hinanden og ligningerne for z lig hinanden.

$$2u = 1 + s + 3t$$

$$-u = 1 + 2s$$

$$1 + u = 2 + t$$

Vi starter med at isolere en af parametrene i en af ligningerne. Lad os isolere u i den tredje ligning

$$u = 2 + t - 1 = 1 + t$$

Dette sætter vi nu ind på u's plads i de andre ligninger

$$2(1 + t) = 1 + s + 3t$$

$$-(1 + t) = 1 + 2s$$

Nu står vi med to ligninger med to ubekendte. Vi isolerer s i den øverste

$$s = 2(1 + t) - 1 - 3t = 2 + 2t - 1 - 3t = 1 - t$$

Dette sætter vi nu ind på s's plads i den anden ligning

$$-(1+t) = 1 + 2(1-t)$$

$$-1 - t = 1 + 2 - 2t$$

$$-t + 2t = 1 + 2 + 1$$

$$t = 4$$

Nu ved vi at t=4, og vi kan indsætte dette i udtrykkene for u og s

$$u = 1 + t = 1 + 4 = 5$$

$$s = 1 - t = 1 - 4 = -3$$

Nu indsætter vi enten u-værdien i linjens parameterfremstilling eller s- og t-værdierne i planens parameterfremstilling. Lige meget i hvilken vi indsætter, når vi frem til skæringspunktet. Vi indsætter u=5 i linjens parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 5 \cdot 2 \\ 0 + 5 \cdot (-1) \\ 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Altså skærer linjen planen i punktet (10, -5, 6).

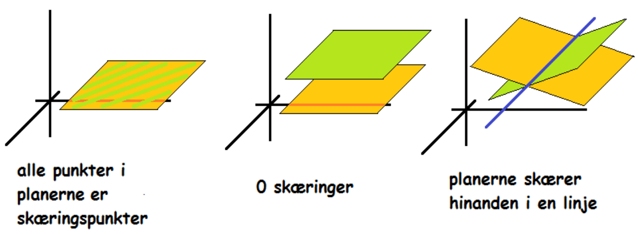
1.14 Skæring mellem planer

Hvis man har to planer, kan de ligge på tre forskellige måder i forhold til hinanden.

• Hvis de to planer er ens (deres normalvektorer er parallelle, og de har et fælles punkt), så skærer de hinanden over hele planen.

• Hvis de to planer er parallelle (deres normalvektorer er parallelle, men de har ingen fælles punkter), så skærer de to planer ikke hinanden.

• Hvis de to planers normalvektorer ikke er parallelle, vil planerne skære hinanden i en linje.



Man starter med at undersøge om planerne er parallelle. Det gør man ved at undersøge om deres normalvektorer er parallelle. Man krydser de to normalvektorer med hinanden. Hvis krydsproduktet giver nulvektoren, er de parallelle. (Hvis den ene (eller begge) planer er givet ved parameterfremstilling, finder man planens normalvektor ved at krydse dens to retningsvektorer med hinanden).

Hvis planerne er parallelle, undersøger man om de er sammenfaldende eller ej. Man undersøger om det faste punkt fra den ene plan ligger i den anden ved at indsætte i dens ligning. (Hvis en eller begge planer er givet ved parameterfremstilling kan man tage det faste punkt fra den ene og indsætte på venstresiden af den anden. Så løser man to af ligningerne med to ubekendte. De fundne parameterværdier indsættes så i den tredje ligning. Hvis den er opfyldt, ligger punktet i begge planer).

Hvis planerne ikke er parallelle, skærer de hinanden i en linje. Vi beviser først, at krydsproduktet af de to planers normalvektorer udgør en retningsvektor for skæringslinjen.

Bevis for skæringslinjens retningsvektor

Antag, at vi kender et punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, som ligger på skæringslinjen mellem to planer med ligningerne hhv. $\alpha : a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + k_\alpha = 0$ og $\beta : b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot z + k_\beta = 0$.

En normalvektorer til hver af planerne er da:

$$\overrightarrow{n}_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

og krydsproduktet mellem normalvektorerne er en vektor, $\overrightarrow{r}$:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vi betragter en linje l, som inkluderer punkt P og har $\overrightarrow{r}$ som retningsvektor. Denne linje kan beskrives ved parameterfremstillingen:

$l : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot \overrightarrow{r}$, hvor $-\infty < t < +\infty$

Vi indsætter nu parameterfremstillingen for linjen l i ligningerne for de to planer, idet vi i sidste linje af udregningerne for hver plan udnytter, at koordinatsættet til punkt P opfylder planens ligning:

Planen α:

$a_1 \cdot (x_0 + t \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)) + a_2 \cdot (y_0 + t \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)) + a_3 \cdot (z_0 + t \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)) + k_\alpha = (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + k_\alpha) + t \cdot (a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1) = (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + k_\alpha) + t \cdot 0 = 0$

Planen β:

$b_1 \cdot (x_0 + t \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)) + b_2 \cdot (y_0 + t \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)) + b_3 \cdot (z_0 + t \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)) + k_\beta = (b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + k_\beta) + t \cdot (b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1) = (b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + k_\beta) + t \cdot 0 = 0$

Parameterfremstillingen for linjen l ses at opfylde begge planers ligning, og vi har hermed bevist, at vektoren $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta$ er retningsvektor for skæringslinjen mellem de to planer.

Lad os herefter se på, hvordan vi i praksis bestemmer en parameterfremstilling for skæringslinjen.

Begge planer er givet ved ligninger

Hvis begge planer er givet ved ligninger, finder man skæringslinjen ved følgende fremgangsmåde. Først krydser man de to normalvektorer med hinanden. Deres krydsprodukt er retningsvektoren for skæringslinjen. Dernæst skal man finde et punkt på linjen. Det gør man ved at sætte et fast tal ind i stedet for en af de variable (typisk z=0) og løse de to ligninger med to ubekendte. Derved vil man opnå et punkt der ligger på skæringslinjen.

Nu kan man sammensætte det i en parameterfremstilling

Lad os illustrere med et eksempel.

$$\alpha: \quad x - 3y + z - 1 = 0$$

$$\beta: \quad 2x - 5y - 2z + 4 = 0$$

Vi aflæser normalvektorerne ud fra ligningerne

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Skæringslinjens retningsvektor er krydsproduktet af de to normalvektorer

$$\vec{r} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu sætter vi z=0 i de to ligninger

$$x - 3y + 0 - 1 = 0$$

$$2x - 5y - 2 \cdot 0 + 4 = 0$$

Vi løser de to ligninger med to ubekendte ved substitutionsmetoden

$$x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3y + 1$$

$$2(3y + 1) - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow 6y + 2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -6$$

$$x = 3 \cdot (-6) + 1 = -18 + 1 = -17$$

Nu har vi punktet (-17, -6, 0) som ligger på skæringslinjen.

Skæringslinjen har derfor parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et plan er givet ved ligningen, den anden ved parameterfremstilling

Hvis den ene plan er givet ved ligning og den anden ved parameterfremstilling, så finder man skæringslinjen på følgende måde.

Først indsætter man hver enkelt koordinatfunktion fra parameterfremstillingen i den anden plans ligning. Dernæst isolerer man den ene parameter. Dette indsætter man så igen i parameterfremstillingen, hvorved man kan reducere til linjens parameterfremstilling.

Lad os se på et eksempel:

$$\alpha: \quad 2x - y + 3z = 0$$

$$\beta: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan omskrive parameterfremstillingen til de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2s - t$$

$$y = 1 + 3t$$

$$z = s + 2t$$

Disse indsætter vi nu i ligningen og isolerer den ene parameter

$$2(1 + 2s - t) - (1 + 3t) + 3(s + 2t) = 0$$

$$2 + 4s - 2t - 1 - 3t + 3s + 6t = 0$$

$$1 + 7s + t = 0$$

$$t = -1 - 7s$$

Nu indsætter vi dette på t's plads i de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2s - (-1 - 7s) = 1 + 2s + 1 + 7s = 2 + 9s$$

$$y = 1 + 3(-1 - 7s) = 1 - 3 - 21s = -2 - 21s$$

$$z = s + 2(-1 - 7s) = s - 2 - 14s = -2 - 13s$$

Vi kan nu skrive det om til en parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -21 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Begge planer er givet ved parameterfremstillinger

Hvis begge planer er givet ved parameterfremstillinger vil vi anbefale, at man omskriver den ene til en ligning (man kender allerede et fast punkt, og som normalvektor kan man bruge krydsproduktet af de to retningsvektorer. Læs evt. mere her). Nu har man den ene plan som ligning og den anden som parameterfremstilling, og man kan således bruge metoden ovenfor.

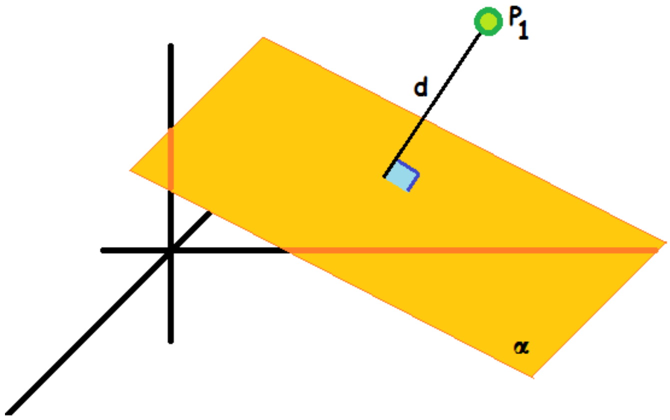
Der findes også en metode, hvor man ikke behøver omskrive til ligning, men den er relativt indviklet, så den vil vi forbigå her.

1.15 Afstand mellem punkt og plan

Hvis man har oplyst et punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ og et plan α: ax+by+cz+d=0, så er afstanden mellem dem givet ved formlen

$$\text{dist}(\alpha, P_1) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Den afstand, man måler, er den vinkelrette afstand mellem punktet og planen.



Læg mærke til, hvordan formlen minder om afstanden mellem en linje og et punkt i 2D.

Lad os se, hvordan formlen virker ved hjælp af et eksempel.

$$\alpha : \; 2x + y - 2z - 14 = 0$$

$$P_1(-1, -1, 2)$$

Altså er a=2, b=1, c= -2, d= -14, x_1= -1, y_1= -1, og z_1=2.

Nu sætter vi ind i formlen

$$\text{dist}(\alpha, P_1) = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (2) - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2 - 1 - 4 - 14|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$= \frac{|-21|}{\sqrt{9}} = \frac{21}{3} = 7$$

Altså er den korteste (den vinkelrette) afstand mellem punktet og planen 7 længdeenheder.

Hvis man får afstanden mellem et punkt og et plan til at være 0, så betyder det, at punktet ligger i planen.

Hvad hvis planen er givet ved parameterfremstilling?

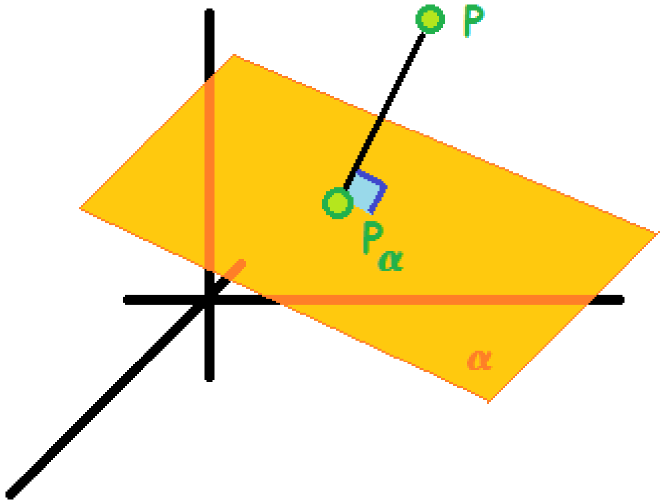
Hvis planen er givet ved parameterfremstilling, omregner man den til en ligning.

Man kender allerede et fast punkt, og man kan udregne en normalvektor ved at krydse de to retningsvektorer med hinanden.

Når man har omregnet planen fra parameterfremstilling til ligning, kan man bruge formlen ovenfor.

1.16 Projektion af punkt på plan

Hvis man har et punkt og et plan, kan man ønske at projicere punktet ned på planen. Projektionen svarer til det punkt i planen, man rammer, hvis man bevæger sig vinkelret fra punktet ind mod planen.

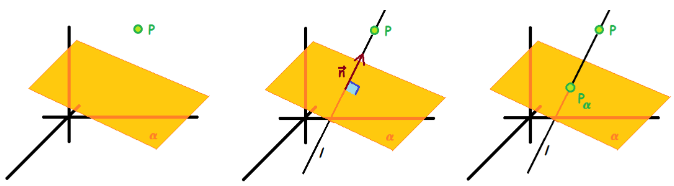


Hvordan finder man projektionen

Når man ønsker at finde koordinatsættet for projektionen af et punkt på et plan, gør man det i flere trin.

Først konstruerer man en linje, der står vinkelret på planen og som går gennem punktet.

Dernæst finder man skæringspunktet mellem planen og linjen. Skæringspunktet er projektionen.



Det er let at konstruere en linje gennem punktet som står vinkelret på planen. Man bruger planens normalvektor som retningsvektor for linjen (så sikrer man sig at linjen er vinkelret på planen) og man bruger punktet som det faste punkt på linjen.

Skæringspunktet mellem linjen og planen finder man på den måde, der er beskrevet i afsnittet om skæringer mellem linjer og planer.

Lad os se på et eksempel.

$$\alpha: \ 3x - y + 4z + 26 = 0$$
$$P(1, 2, 3)$$

Vi ønsker at projicere P ind på α.

Vi aflæser koordinaterne for planens normalvektor ud fra dens ligning

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Denne bruger vi som retningsvektor for linjen, l, gennem P og vinkelret på α.

Vi kan altså skrive linjens parameterfremstilling op således:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kan også skrive parameterfremstillingen op som de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 3t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = 3 + 4t$$

Nu skal vi finde skæringspunktet mellem linjen og planen. Det gør vi ved at sætte koordinatfunktionerne ind i planens ligning

$$3(1 + 3t) - (2 - t) + 4(3 + 4t) + 26 = 0$$

$$3 + 9t - 2 + t + 12 + 16t + 26 = 0$$

$$26t + 39 = 0$$

$$t = \frac{-39}{26} = -1,5$$

Nu har vi fundet ud af, at skæringspunktet findes, når t= -1,5.

Vi indsætter denne t-værdi i linjens parameterfremstilling for at se, hvilket punkt, det svarer til.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1,5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1,5 \cdot 3 \\ 2 - 1,5 \cdot (-1) \\ 3 - 1,5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4,5 \\ 2 + 1,5 \\ 3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Altså er projektionen af punktet på planen

$$P_\alpha = (-3.5,\ 3.5,\ -3)$$

1.17 Kuglen

Ligesom man i 2D arbejdede med cirkler, arbejder man i 3D med kugler. Når man siger, at et punkt ligger på en kugle, betyder det, at punktet ligger på kugleskallen (og altså ikke indeni kuglen).

Kuglens ligning er givet ved

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

hvor (a, b, c) er kuglens centrum, og r er kuglens radius.

Man kan aflæse kuglens centrum og radius ud fra ligningen.

For eksempel har kuglen med denne ligning

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 64$$

radius 8 og centrum i punktet (2, -3, 1) (vær opmærksom på fortegnene!).

Hvorfor ser ligningen sådan ud?

Lad os se lidt på, hvordan man er kommet frem til denne ligning.

Lad os antage at et punkt P(x,y,z) ligger på kuglen. Så må der gælde, at afstanden mellem punktet og centrum er lig med radius.

$$|CP| = r$$

Det svarer til, at længden af vektoren mellem de to punkter er lig med radius

$$|\overrightarrow{CP}| = r$$

Da vektoren mellem to punkter er slutpunktet fratrukket startpunktet, kan vi omskrive ovenstående til

$$\left| \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right| = r$$

Nu udregner vi længden af vektoren

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

Ved at sætte begge sider i anden potens får vi kuglens ligning.

Omskrive kuglens ligning

Det er ikke altid, man får kuglens ligning givet på formen ovenfor. Nogle gange er parenteserne ganget ud (ved hjælp af kvadratsætningerne). I det tilfælde kan man ikke direkte aflæse centrum og radius.

I dette afsnit skal vi se, hvordan man omformer tilbage til standardformen, så man kan aflæse centrum og radius direkte. Metoden man bruger, kaldes kvadratkomplettering, og vi har tidligere brugt den til at løse andengradsligninger.

Lad os illustrere metoden med et eksempel.

Vores kugle er givet ved

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 4z = 2$$

Det først vi gør er at rykke rundt, så vi samler hhv x'erne, y'erne og z'erne

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2$$

Nu er tricket at samle leddene med x'erne vha. en kvadratsætning. Vi kan se, at det ene tal i parentesen må være x. Vi betragter 6x som det dobbelte produkt (2*3*x). Derfor må det andet tal i parentesen være 3. Før vi kan samle det, kræver det dog, at vi lægger 3^2 til på begge sider.

$$x^2 + 3^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2$$

Nu kan vi samle de første tre led vha. en kvadratsætning

$$(x + 3)^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2$$

Nu gør vi det samme med y-leddene. -2y er det dobbelte produkt (2*(-1)*y). Derfor må tallene i parentesen være y og -1. Derfor lægger vi $(-1)^2$ til på begge sider.

$$(x + 3)^2 + y^2 + (-1)^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2$$

Nu samler vi y-leddene ved brug af kvadratsætningerne

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2$$

Til sidst gør vi det samme med z-leddene. 4z er det dobbelte produkt (2*2*z). Så tallene i parentesen må være z og 2. Vi lægger 2^2 til på begge sider.

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 + 2^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2$$

Nu samler vi ved hjælp af kvadratsætningerne

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2$$

Hvis vi regner højresiden ud, står vi med ligningen

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 16$$

Nu har vi omformet til standardformen og kan aflæse kuglens centrum til (-3, 1, -2) og radius til 4.

1.18 Skæring mellem plan og kugle

Hvis man har givet et plan og en kugle, kan man være interesseret i at finde ud af, om de to objekter skærer hinanden.

For at afgøre om de skærer hinanden, finder man afstanden mellem kuglens centrum og planen. Dette gøres ved hjælp af formlen for afstand mellem et punkt og et plan.

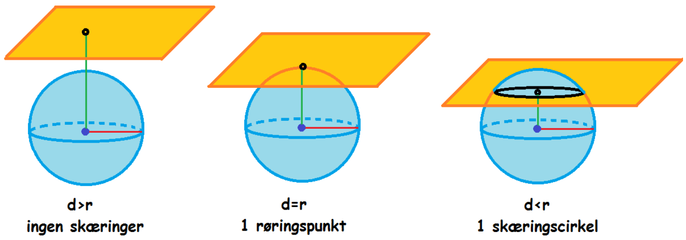
Man skal holde tungen lige i munden, for man plejer både at kalde kuglens centrum og koefficienterne i planens ligning for a, b og c. For at skelne kalder vi derfor kuglens centrum for

$$C(k_1, k_2, k_3)$$

Vi finder altså afstanden mellem centrum og plan ved formlen

$$\text{dist}(C, \alpha) = \frac{|ak_1 + bk_2 + ck_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Når man har fundet afstanden, sammenligner man med radius. Der er nu tre muligheder



Hvis der kun er et røringspunkt, er planen en tangentplan til kuglen. Hvis planen og kuglen skærer hinanden, vil det altid være i en cirkel. Der findes en formel for, hvordan man udregner ligningen for skæringscirklen, men den er relativt kompliceret, så den springer vi over her.

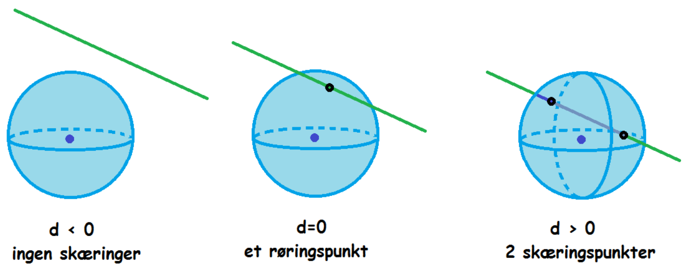
1.19 Skæring mellem linje og kugle

Hvis man har en linje og en kugle i rummet, kan man være interesseret i at finde ud af, om de skærer hinanden.

Man finder frem til eventuelle skæringspunkter ved at indsætte koordinatfunktionerne fra linjens parameterfremstilling i kuglens ligning.

Dette vil give en andengradsligning, hvor t er den ubekendte.

Man beregner andengradsligningens diskriminant, og der er tre muligheder



Hvis d $\geq$ 0, kan man finde frem til skæringspunkterne ved først at løse andengradsligningen, og dernæst indsætte de fundne t-værdier i linjens parameterfremstilling. Dermed vil man finde frem til røringspunkt/skæringspunkter.

Lad os tage et eksempel

Vores kugle har r=4 og C(-1, 2, 0). Dens ligning er

$$\mathcal{K}: \ (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$$

Vores linje har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver hver enkelt koordinatfunktion op

$$x = 1 + t$$

$$y = 1 + 2t$$

$$z = 3 + t$$

Nu sætter vi disse ind i kuglens ligning

$$((1+t)+1)^2 + ((1+2t)-2)^2 + (3+t)^2 = 16$$

$$(t+2)^2 + (2t-1)^2 + (t+3)^2 = 16$$

$$(t^2+4+4t) + (4t^2+1-4t) + (t^2+9+6t) = 16$$

$$6t^2 + 6t + 14 = 16$$

$$6t^2 + 6t - 2 = 0$$

Vi finder diskriminanten for andengradsligningen

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 36 + 48 = 84$$

Da diskriminanten er større end 0, er der to skæringer mellem kuglen og linjen.

Vi løser andengradsligningen

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{84}}{2 \cdot 6} \approx \frac{-6 \pm 9,17}{12}$$

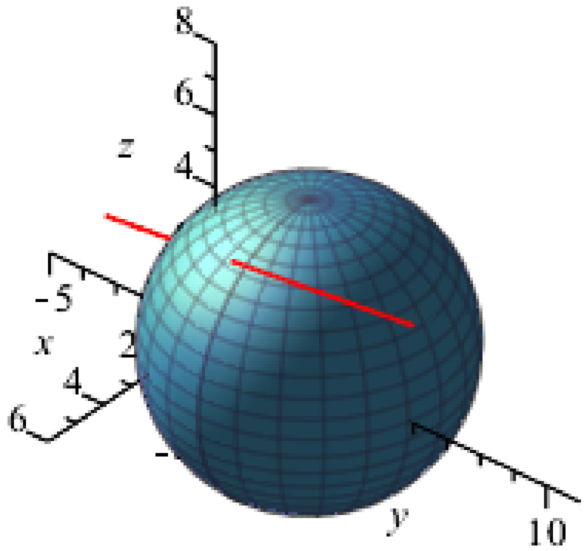
$$t_1 \approx 0,26 \qquad t_2 \approx -1,26$$

Ved at indsætte disse t-værdier i linjens parameterfremstilling, når vi frem til skæringspunkterne.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,26 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,26 \\ 1,52 \\ 3,26 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1,26 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,26 \\ -1,52 \\ 1,74 \end{pmatrix}$$

Altså har vi, at P_1(1.26, 1.52, 3,26) og P_2(-0.26, -1.52, 1.74) er de to skæringspunkter mellem kuglen og linjen.

Kuglen og linjen fra eksemplet er tegnet her



1.20 Tangentplan til kugle

Ligesom en cirkel i hvert punkt har en tangentlinje, så har en kugle i hvert punkt en tangentplan. En tangentplan er altså en plan, der rører kuglen i ét (og kun ét) punkt.

Man kan forestille sig tangentplanen som et stykke karton, der ligger op ad en fodbold.

I opgaver bliver man tit bedt om at bestemme en ligning for tangentplanen i et kendt punkt på kuglen.

Vi husker på, at man for at kunne opskrive en ligning for en plan skal kende et fast punkt i planen samt en normalvektor for planen. Som punktet, kan man bruge det punkt, man har fået opgivet, som altså ligger både på kuglen og i tangentplanen (røringspunktet). Så mangler man altså bare en normalvektor. Vektoren, der starter i det kendte punkt på kuglens overflade og slutter i centrum af kuglen vil være vinkelret på tangentplanen. Derfor kan vi bruge den som normalvektor.

Lad os se på et eksempel.

Vores kugle har ligningen

$$\mathcal{K}: \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$$

og punktet

$$P(-4, 3, 0)$$

ligger på kugleskallen (man kan tjekke efter, at P rent faktisk ligger på kugleskallen ved at indsætte det i kuglens ligning og se, om den er opfyldt).

Vi ønsker at bestemme en ligning for kuglens tangentplan i punktet P.

Vores faste punkt i planen er P.

Vores normalvektor er vektoren fra P til C.

Vi aflæser fra kuglens ligning, at centrum har koordinaterne C(-2,1,-1).

Nu udregner vi normalvektorens koordinater

$$\vec{n} = \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -2-(-4) \\ 1-3 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Til sidst skal vi bare sætte ind i formlen for planens ligning.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$2(x-(-4))+(-2)(y-3)+(-1)(z-0)=0$$

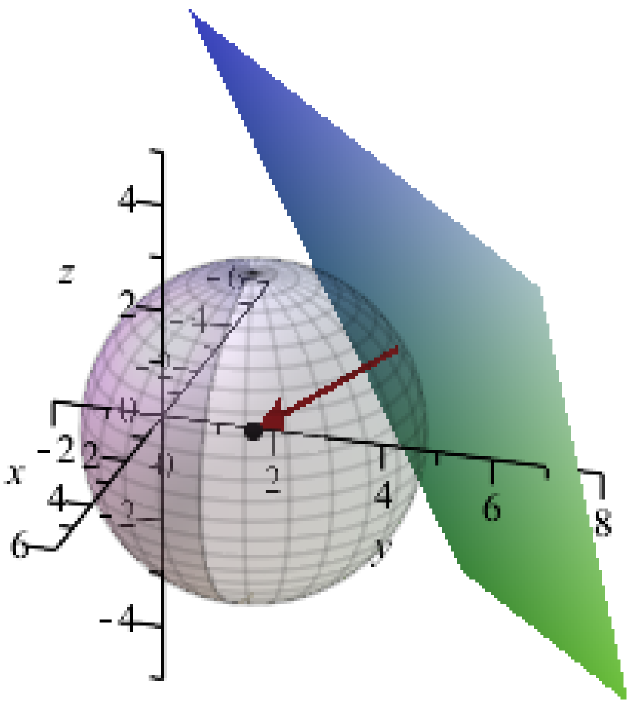
$$2(x+4)-2(y-3)-z=0$$

$$2x+8-2y+6-z=0$$

$$2x-2y-z+14=0$$

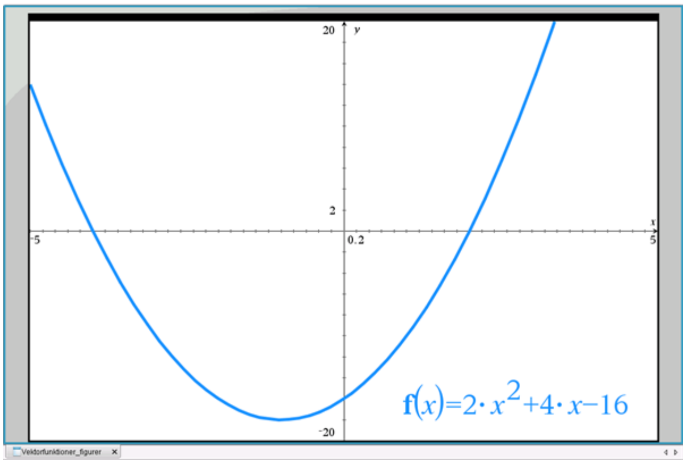
Og dette er så ligningen for tangentplanen til kuglen i punktet P.

Nedenfor er indtegnet kuglen, planen og normalvektoren fra eksemplet ovenfor.



2 Vektorfunktioner

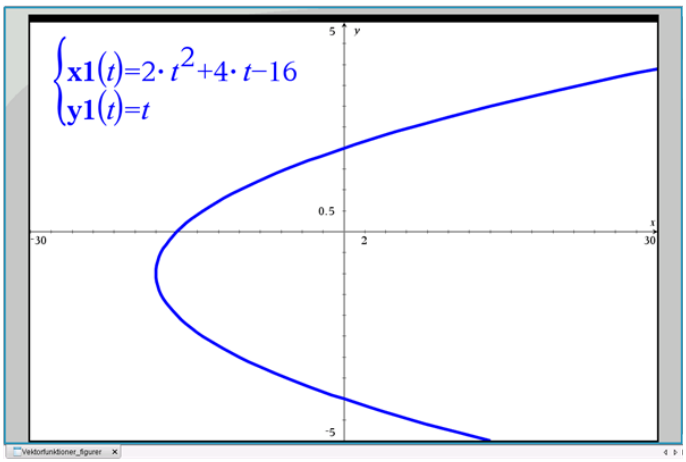
Du er vant til at arbejde med funktioner (og deres grafer) i et koordinatsystem, hvor y-værdien (den afhængige variabel) er beskrevet som en funktion af x (den uafhængige variabel). Det kunne eksempelvis være $y(x) = 2x^2+4x-16$, der er et andengradspolynomium, hvor grafen er en parabel, se figur 1.



Figur 1 Parablen $y(x) = 2x^2 + 4x - 16$

Når vi ser på funktioner og deres grafer, er det en forudsætning, at der er éntydighed, hvad angår funktionsværdier. Det betyder, at der for en hvilken som helst x-værdi i definitionsmængden skal være én og kun én tilhørende y-værdi. Dette er opfyldt for parablen i figur 1.

Men hvis du forestiller dig en liggende parabel, se figur 2, er denne betingelse **ikke** opfyldt. For alle x-værdier til højre for parablens toppunkt er der to tilhørende y-værdier. Vi vil vende tilbage til dette eksempel senere.



Figur 2 Liggende parabel.

2.1 Introduktion til parameterfremstillinger

Vektorfunktioner går ud på at beskrive kurver i et koordinatsystem ved hjælp af en parameterfremstilling.

Vi bruger betegnelsen kurver ifm. parameterfremstillinger, så der ikke sker forveksling med grafer, der hører til sædvanlige funktioner.

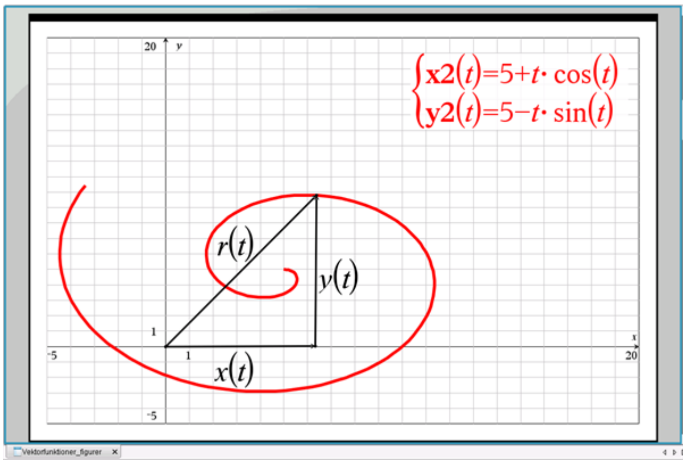
Tidligere har vi opfattet x som den uafhængige variabel og y som den afhængige variabel. Nu indfører vi en ny uafhængig variabel, t. Hermed bliver både x og y afhængig af t, og vi skriver hhv. x(t) og y(t).

Ofte vil vi benytte parameterfremstillingen til at beskrive banekurven for en bevægelse, hvor t

angiver tiden, og hvor $x(t)$ og $y(t)$ angiver positionen, dvs. hhv. x- og y-koordinaten for bevægelsen til tiden t.

Et vilkårligt punkt på kurven kan beskrives ved punktets stedvektor i et sædvanligt koordinatsystem, se figur:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t))$



Figur 3 Afbildning af en vektorfunktion. $\overrightarrow{r(t)}$ er stedvektor til punkter på kurven

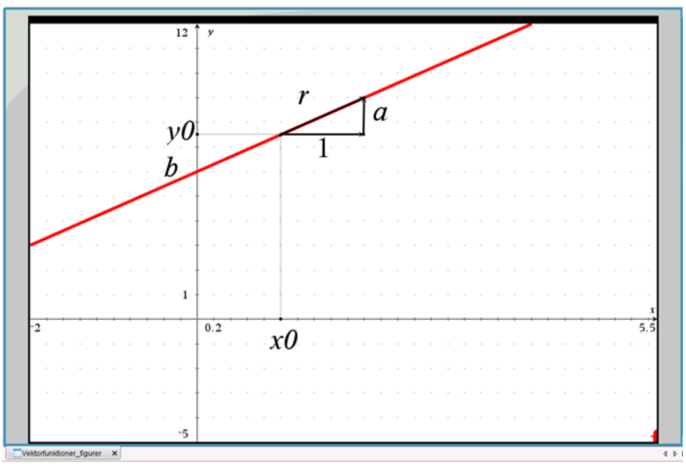
Vi kalder $\overrightarrow{r(t)}$ for en vektorfunktion, og for enhver værdi af t kan vi beregne de tilhørende værdier x(t) og y(t) og plotte punktet i koordinatsystemet. Når vi gør dette for alle værdier af t i definitionsmængden, fremkommer kurven.

Ved at bruge en parameterfremstilling til at beskrive en kurve, er vi - som det fremgår af figur 3 - ikke længere begrænset af, at der til enhver x-værdi kun er én tilhørende y-værdi.

2.2 Parameterfremstillingen for den rette linje

Den rette linje i et koordinatsystem er du vant til at se beskrevet ved forskriften $y(x) = a \cdot x + b$, hvor a angiver linjens hældningskoefficient (stigningstal) og b angiver linjens skæring med y-aksen.

At a er linjens hældningskoefficient, betyder, at vektoren $\overrightarrow{r} = (1, a)$ er en retningsvektor for linjen, se figur 4.



Figur 4 Afbildning af en ret linje

Linjen kan også beskrives ved en parameterfremstilling med udgangspunkt i retningsvektoren og et vilkårligt punkt på linjen (x_0, y_0). På figur 4 kan du se, at man kan få alle andre punkter på linjen ved at addere retningsvektoren $\overrightarrow{r} = (1, a)$ multipliceret med et vilkårligt tal til punktet (x_0, y_0):

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t \cdot \overrightarrow{r} = (t + x_0, a \cdot t + y_0)$, hvor $-\infty < t < +\infty$.

Hvis vi vælger linjens skæringspunkt med y-aksen som udgangspunkt for parameterfremstillingen, er $(x_0, y_0) = (0, b)$, og så bliver parameterfremstillingen:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (t, a \cdot t + b)$, hvor $-\infty < t < +\infty$.

Eksempel 1

Bestem hældningen og skæring med y-aksen - og dermed forskriften - for en linje givet ved parameterfremstillingen:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (t + 2, 2 \cdot t + 8)$, hvor $-\infty < t < +\infty$.

Skæring med y-aksen:

$x(t_0) = 0 \implies t_0 = -2$ og dermed $y(t_0) = 2 \cdot t_0 + 8 = 4$.

Hældningen er forholdet mellem faktorerne til t i hhv. $y(t)$ og $x(t)$:

$a = \dfrac{2 \cdot t}{t} = 2$ og dermed er $y(x) = 2x + 4$.

Eksempel 2

Find skæringspunktet mellem de to linjer givet ved:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (t + 2, 2 \cdot t + 8)$, hvor $-\infty < t < +\infty$

$\overrightarrow{r(s)} = (x(s), y(s)) = (s, 3 \cdot s - 6)$, hvor $-\infty < s < +\infty$.

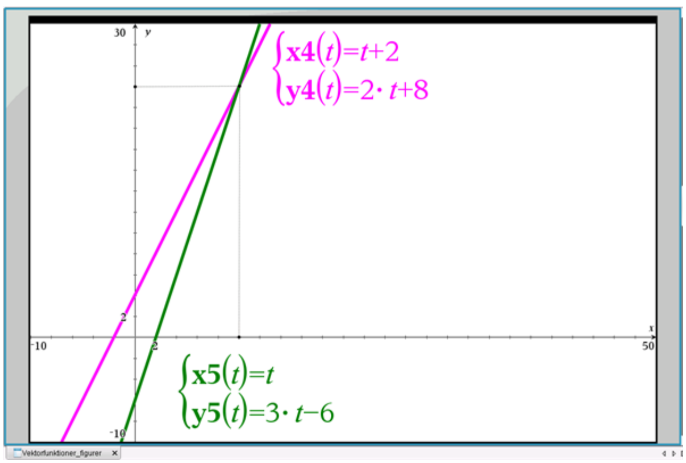
I linjernes skæringspunkt er $x(s) = x(t)$ og $y(s) = y(t)$:

$x(s) = x(t) \implies s = t + 2$, som indsættes i ligningen for y:

$y(s) = y(t) \implies 3(t + 2) - 6 = 2t + 8 \implies 3t = 2t + 8$

og dermed $t = 8$ og $s = t + 2 = 10$.

Ved at indsætte værdierne af s og t i de to parameterfremstillinger finder vi linjernes skæringspunkt $(x, y) = (10, 24)$, hvilket også ses i figur 5.



Figur 5 Skæringspunkt mellem to linjer

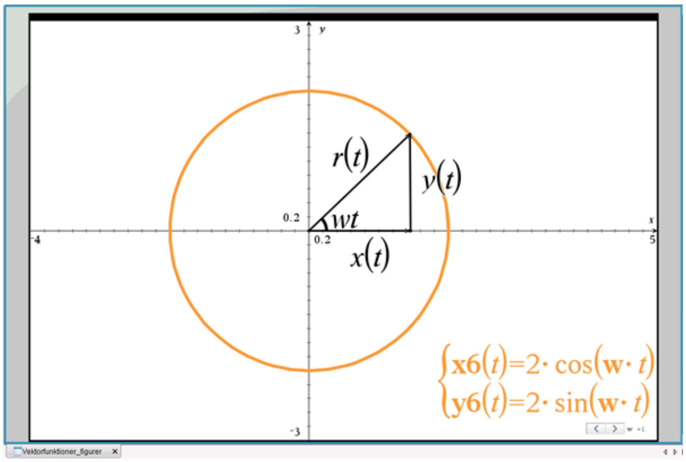
2.3 Parameterfremstillingen for en cirkel

Vi forestiller os en partikel, der gennemløber en cirkulær bevægelse med radius r og vinkelhastighed ω (rad/sek., positiv omdrejningsretning, dvs. mod uret). Tiden for ét gennemløb af cirklen betegnes partiklens omløbstid og er $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Vi afbilder bevægelsen i et koordinatsystem som cirklen med centrum i (0,0) og radius r, se figur 6. Ethvert punkt på cirkelperiferien kan beskrives ved stedvektoren:

$$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (r \cdot \cos(\omega t), r \cdot \sin(\omega t)),\ 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$$

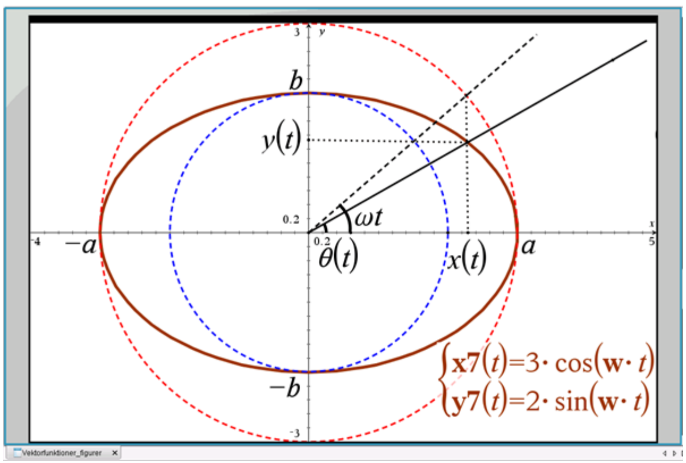
(hvor definitionsmængden for t her er afgrænset svarende til ét fuldt gennemløb af cirklen, men definitionsmængden for t kunne være opadtil ubegrænset svarende til uendeligt mange gennemløb af cirklen.)



Figur 6 Parameterfremstilling for en cirkel

2.4 Parameterfremstillingen for en elipse

Vi forestiller os en partikel, der gennemløber en ellipseformet bane, idet ellipsen har centrum i (0,0), storakse a i x-aksens retning og lilleakse b i y-aksens retning. I figur 7 er vist et eksempel, hvor $a = 3$ og $b = 2$.



Figur 7 Parameterfremstilling for en ellipse

På figuren er også indtegnet "storcirklen" med radius $a = 3$ og "lillecirklen" med radius $b = 2$.

Vi ser, at koordinaterne til et punkt $(x(t), y(t))$ i den ellipseformede bane svarer til hhv. x-koordinaten i storcirklen og y-koordinaten i lillecirklen, begge hørende til en vinkeldrejning $\omega \cdot t$, hvor ω (rad/sek) betegner den gennemsnitlige vinkelhastighed i ellipsebanen, og omløbstiden er $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

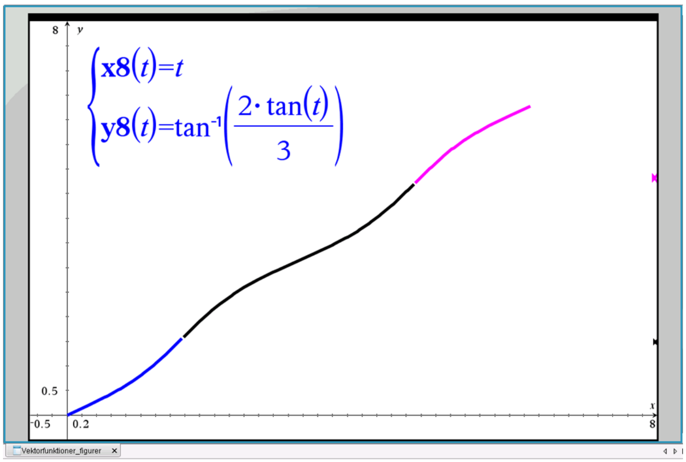
$$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(\omega t), b \cdot \sin(\omega t)),\ 0 \le t \le \tfrac{2\pi}{\omega}$$

(hvor definitionsmængden for t her igen er afgrænset svarende til ét fuldt gennemløb).

I figur 7 har vi med $\theta(t)$ angivet vinklen fra x-aksen til stedvektoren til partiklen i ellipsebanen, og her gælder:

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b \ \cdot \ \sin(\omega t)}{a \ \cdot \ \cos(\omega t)} = \frac{2}{3} \cdot \tan(\omega t),\ 0 \le t \le \tfrac{2\pi}{\omega}.$$

I figur 8 er vist grafen for $\theta(t)$ som funktion af tiden. Det fremgår, at vinkelhastigheden (aflæses som grafens hældning) i en ellipsebane ikke er konstant. Den er nemlig størst omkring lilleaksens poler og mindst omkring storaksens poler.



Figur 8 Vinkelhastigheden varierer i en elliptisk banekurve

2.5 Skæring med koordinatsystemets akser

På koordinatsystemets y-akse er $x = 0$, og på koordinatsystemets x-akse er $y = 0$.

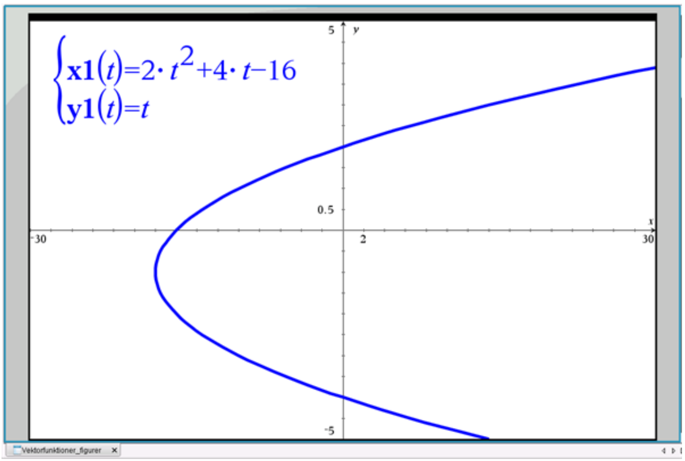
For at undersøge om en vektorfunktion med en given parameterfremstilling indeholder skæringspunkter med koordinatsystemets akser, skal vi derfor finde eventuelle løsninger til de to ligninger:

Skæring med y-aksen: $x(t) = 0$

Skæring med x-aksen: $y(t) = 0$

Eksempel:

Vi vender tilbage til den liggende parabel fra afsnit 1, se figur 9. Her er: $x(t) = 2t^2 + 4t - 16$ og $y(t) = t$, hvor $-\infty < t < +\infty$.



Figur 9 Liggende parabel

Skæring med y-aksen:

$x(t) = 2t^2 + 4t - 16 = 0$ med løsningerne $t = -4$ og $t = 2$, hvor $y(-4) = -4$ og $y(2) = 2$, og dermed er skæringspunkterne $(x, y) = (0, -4)$ og $(0, 2)$.

Skæring med x-aksen:

$y(t) = t = 0$ med løsningen $t = 0$, hvor $x(0) = -16$, og dermed er skæringspunktet $(x, y) = (-16, 0)$.

2.6 Dobbeltpunkt

Et dobbeltpunkt for en vektorfunktion er et punkt, hvor den tilhørende kurve skærer sig selv. (Vi medregner ikke kurver, der gennemløbes flere gange, hvor alle punkter på kurven kan siges at være et dobbeltpunkt.)

For at undersøge om parameterfremstillingen for en vektorfunktion indeholder et eller flere dobbeltpunkter, skal vi altså søge løsninger til ligningssystemet:

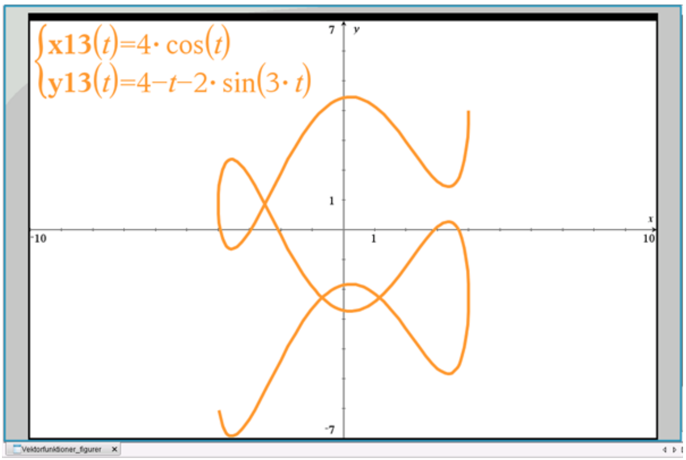
$\overrightarrow{r(t_2)} = \overrightarrow{r(t_1)}$ eller $x(t_2) = x(t_1)$ og $y(t_2) = y(t_1)$

Eksempel

Der er givet følgende vektorfunktion (t angiver radianer):

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (4 \cdot \cos(t), 4 - t - 2 \cdot \sin(3t))$

I figur 10 er tegnet en del af kurven, der starter ved $t = 0$ i $(x, y) = (4, 4)$. Bestem koordinaterne til parameterfremstillingens første dobbeltpunkt.



Figur 10 Dobbeltpunkter for en vektorfunktion er punkter, hvor kurven skærer sig selv

Betingelsen $x(t_2) = x(t_1)$ giver, at $\cos(t_2) = \cos(t_1)$. Denne ligning har flere (uendeligt mange) løsninger, men vi er her kun interesserede i den første: $t_2 = 2\pi - t_1$, som indsættes i $y(t_2) = y(t_1)$:

$4 - (2\pi - t_1) - 2 \cdot \sin(6\pi - 3t_1) = 4 - t_1 - 2 \cdot \sin(3t_1)$

Denne ligning omformes til: $2 \cdot t_1 - 2\pi + 4 \cdot \sin(3t_1) = 0$, som løses i et værktøjsprogram: $t_1 = 2,249$ og $t_2 = 2\pi - t_1 = 4,034$ og

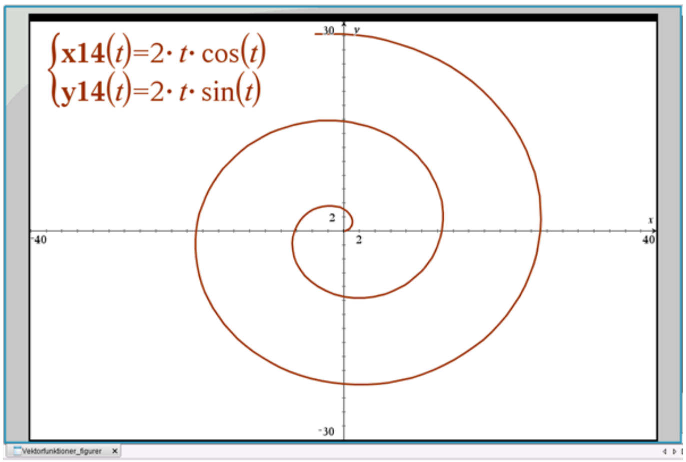
$\overrightarrow{r(t_1)} = \overrightarrow{r(t_2)} = (x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2)) = (-2,51, 0,85)$

2.7 Archimedes' spiral

Parameterfremstillingen for Archimedes' spiral, opkaldt efter den græske matematiker Archimedes, er (t angiver radianer):

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = a \cdot (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t)),\ 0 \leq t < +\infty$

Kurven er en spiral, der starter i (0,0) og har positiv omløbsretning mod uret, se figur 11, hvor vi har sat $a = 2$.



Figur 11 Archimedes spiral

Skæring med y-aksen:

For at finde skæringspunkter med y-aksen skal vi søge løsninger til ligningen $x(t) = 0$, dvs.:

$t \cdot \cos(t) = 0$, med løsningerne: $t = 0$ og $t = n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, hvor $n = 1, 2, 3...$

Skæring med x-aksen:

For at finde skæringspunkter med x-aksen skal vi søge løsninger til ligningen $y(t) = 0$, dvs.:

$t \cdot \sin(t) = 0$, med løsningerne: $t = 0$ og $t = n \cdot \pi$, hvor $n = 1, 2, 3...$

Ved at indsætte disse løsninger i vektorfunktionen ser vi, at afstanden (målt på akserne) mellem to på hinanden følgende skæringspunkter med enten y-aksen eller x-aksen er den samme for alle skæringspunkter, nemlig $a \cdot \pi$.

Vi formulerer det som, at Archimedes spiral skærer akserne i uendelig mange punkter med **ækvidistant** afstand $a \cdot \pi$.

2.8 Differentiation af vektorfunktion

Hvis vi betragter kurven hørende til en vektorfunktion som en partikels bevægelsesbane, kan vi være interesserede i at bestemme partiklens hastighed og acceleration.

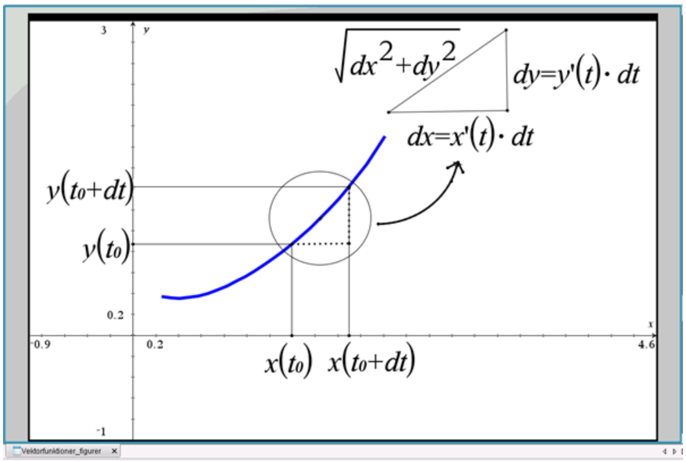
Her benytter vi vores viden om differentiation af funktioner. Vi antager, at både $x(t)$ og $y(t)$ i parameterfremstillingen er differentiable mht. t.

I figur 12 ser vi på partiklens position til tiden t_0 og $t_0 + dt$. Da både $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable mht. t, gælder:

$x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ og $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$

Ved at gange igennem med dt fremkommer:

$dx = x'(t) \cdot dt$ og $dy = y'(t) \cdot dt$



Figur 12 Differentiation af vektorfunktion

Vi kan bestemme kurvens hældning - og dermed tangentens hældning - i punktet (x_0, y_0):

$\text{hældning} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

Vi kan bestemme partiklens hastighedsvektor, som også er retningsvektor for tangenten til banekurven:

$\overrightarrow{v(t_0)} = (x'(t_0), y'(t_0))$

Partiklens fart er da længden af hastighedsvektoren:

$|\overrightarrow{v(t_0)}| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$

Fra bevægelseslæren ved vi, at accelerationen fremkommer ved differentiering af hastigheden, så partiklens accelerationsvektor er:

$\overrightarrow{a(t_0)} = (x''(t_0), y''(t_0))$

og længden af accelerationsvektoren er:

$|\overrightarrow{a(t_0)}| = \sqrt{x''(t_0)^2 + y''(t_0)^2}$

Eksempel 1

For en cirkulær banekurve med centrum i (0,0) er:

$(x(t), y(t)) = (r \cdot \cos(\omega t), r \cdot \sin(\omega t))$ og

$(x'(t), y'(t)) = (-\omega r \cdot \sin(\omega t), \omega r \cdot \cos(\omega t))$ og

$(x''(t), y''(t)) = (-\omega^2 r \cdot \cos(\omega t), -\omega^2 r \cdot \sin(\omega t))$, hvor

r er radius (meter), vinkelhastigheden $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rad/sek) og T er omløbstiden (sek).

Partiklens hastighed er konstant og følger overalt tangentens retning, der er vinkelret på radius til partiklens aktuelle position:

$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \omega \cdot r$ (m/s)

Partiklens acceleration er ligeledes konstant og har retning fra partiklens aktuelle position ind mod cirklens centrum med længden:

$|\overrightarrow{a(t)}| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2} = \omega^2 \cdot r$ (m/s^2)

Eksempel 2

For en ellipseformet banekurve med centrum i (0,0) er:

$(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(\omega t), b \cdot \sin(\omega t))$ og

$(x'(t), y'(t)) = (-\omega a \cdot \sin(\omega t), \omega b \cdot \cos(\omega t))$ og

$(x''(t), y''(t)) = (-\omega^2 a \cdot \cos(\omega t), -\omega^2 b \cdot \sin(\omega t))$, hvor

a, b er ellipsebanens akser (meter) i hhv. x-retningen og y-retningen, den gennemsnitlige vinkelhastighed $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rad/sek) og T er omløbstiden (sek).

Bemærk, at accelerationsvektoren - ligesom for cirklen - har retning fra partiklens aktuelle position ind mod ellipsens centrum.

Partiklens hastighed og acceleration er:

$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\sin^2(\omega t) + (\frac{b}{a})^2 \cdot \cos^2(\omega t)}$ (m/s)

$|\overrightarrow{a(t)}| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2} = \omega^2 \cdot a \cdot \sqrt{\cos^2(\omega t) + (\frac{b}{a})^2 \cdot \sin^2(\omega t)}$ (m/s^2)

Partiklens hastighed er størst omkring lilleaksens poler (hvis $a > b$: på y-aksen i hhv. $+b$ og $-b$), og partiklens acceleration er størst omkring storaksens poler (hvis $a > b$: på x-aksen i hhv. $+a$ og $-a$).

2.9 Lodret og vandret tangent for en vektorfunktion

Fra forrige afsnit ved vi, at tangentvektoren til en vektorfunktion er givet ved:

$\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t))$

For at undersøge om kurven for en vektorfunktion indeholder vandret eller lodret tangent, skal vi søge løsninger til de to ligninger:

Vandret tangent: $y'(t) = 0$

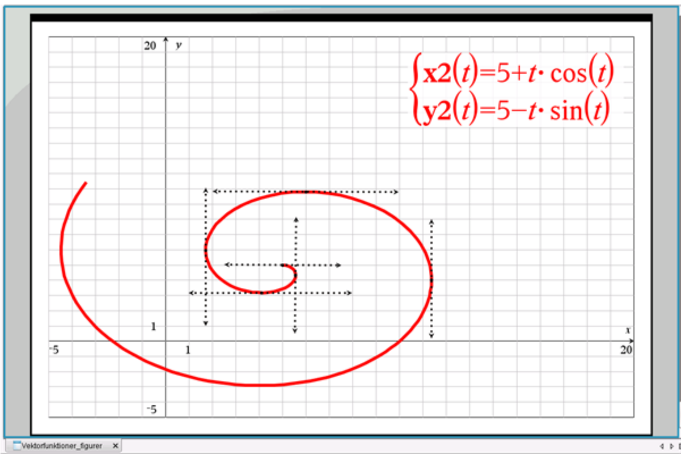
Lodret tangent: $x'(t) = 0$

Eksempel

Vi vender tilbage til spiralen fra afsnit 2, se figur 13. Her er: $x(t) = 5 + t \cdot \cos(t)$ og $y(t) = 5 - t \cdot \sin(t)$, hvor $t \geq 0$.

Vandret tangent: $y'(t) = -\sin(t) - t \cdot \cos(t) = 0$ og dermed $\tan(t) = -t$, hvor de tre første løsninger er $t = 0, t = 2,03$ og $t = 4,91$.

Lodret tangent: $x'(t) = \cos(t) - t \cdot \sin(t) = 0$ og dermed $\tan(t) = \dfrac{1}{t}$, hvor de tre første løsninger er $t = 0,86, t = 3,43$ og $t = 6,44$.



Figur 13 Spiralen fra afsnit 2, her gengivet med de tre første vandrette og lodrette tangenter indtegnet

Punkter på spiralen med hhv. vandret og lodret tangent:

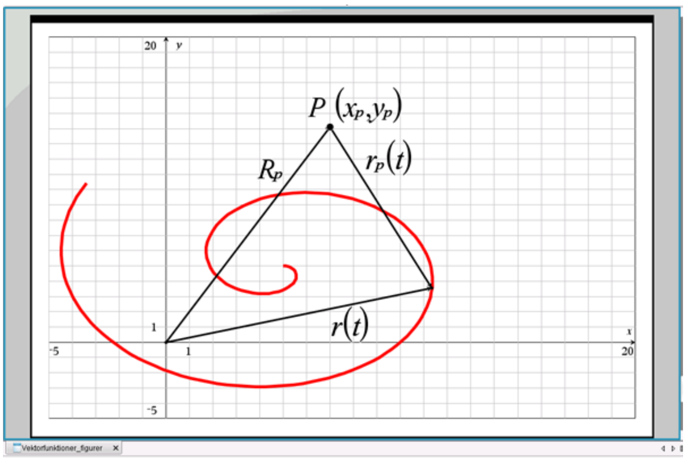
t	x	y	t	x	y
0,0	5,0	5,0	0,86	5,6	4,3
2,03	4,1	3,2	3,43	1,7	6,0
4,91	6,0	9,8	6,44	11,4	4,0

2.10 Afstand mellem kurven for en vektorfunktion og et punkt

Vi betragter en kurve for en vilkårlig vektorfunktion. Vi ønsker at bestemme den korteste afstand mellem kurven og et givent punkt $P(x_p, y_p)$ i koordinatsystemet.

Vi kan opskrive vektorligningen, se figur 14:

$$\overrightarrow{R_p} = \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{r_p(t)} \implies \overrightarrow{r_p(t)} = \overrightarrow{R_p} - \overrightarrow{r(t)} = (x_p - x(t), y_p - y(t))$$



Figur 14 Afstand mellem en kurve og et punkt

Længden af $\overrightarrow{r_p(t)}$ er da afstanden fra kurven til punkt P, og kvadratet på længden af $\overrightarrow{r_p(t)}$ er:

$$|\overrightarrow{r_p(t)}|^2 = (x_p - x(t))^2 + (y_p - y(t))^2 \qquad = (x_p^2 + y_p^2) + (x(t)^2 + y(t)^2) - 2 \cdot (x_p \cdot x(t) + y_p \cdot y(t))$$

Den korteste afstand mellem kurven og punkt P forekommer for en værdi af t, hvor grafen for højresiden har et minimumspunkt og dermed har vandret tangent. Fra differentialregningen ved vi, at vi skal differentiere højre siden mht. t og sætte den afledte funktion lig nul. Herefter skal vi undersøge, om der faktisk er tale om et minimumspunkt og ikke et maksimumspunkt:

$$\frac{d}{dt}(|\overrightarrow{r_p(t)}|^2) = 2 \cdot x'(t)(x(t) - x_p) + 2 \cdot y'(t)(y(t) - y_p) = 0 \implies \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x(t) - x_p}{y(t) - y_p} = -\frac{x_p - x(t)}{y_p - y(t)}$$

Samme ligning kommer vi frem til, hvis vi betragter problemstillingen rent geometrisk. Den korteste afstand mellem kurven og punkt P forekommer for en værdi af t, hvor $\overrightarrow{r_p(t)}$ står vinkelret på tangenten til vektorfunktionens kurve. Fra afsnittet om differentiation af vektorfunktion ved vi, at vektoren $\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t))$ er retningsvektor for tangenten, og om prikproduktet mellem $\overrightarrow{r_p(t)}$ og $\overrightarrow{v(t)}$ gælder da:

$$\overrightarrow{r_p(t)} \bullet \overrightarrow{v(t)} = (x_p - x(t)) \cdot x'(t) + (y_p - y(t)) \cdot y'(t) = 0 \implies \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x_p - x(t)}{y_p - y(t)}$$

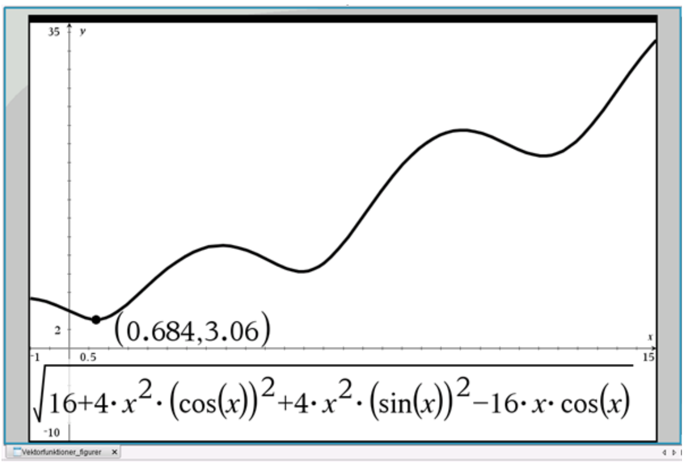
Eksempel

For Archimedes spiral, se figur 11 i afsnit 5, vil vi finde den korteste afstand til punkt $P(4, 0)$. Vi skal altså søge løsninger til følgende ligning for positive værdier af t:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2\sin(t) + 2t\cos(t)}{2\cos(t) - 2t\sin(t)} = -\frac{4 - 2t\cos(t)}{0 - 2t\sin(t)}$$

Vi løser ligningen vha. et CAS-værktøj, og der er flere løsninger, hvor $\overrightarrow{r_p(t)}$ står vinkelret på $\overrightarrow{v(t)}$. Vi ser dog hurtigt, at vi er interesserede i den mindste værdi af t: $t_0 = 0,684$, hvor $\overrightarrow{r(t_0)} = (1,061, 0,865)$, $\overrightarrow{r'(t_0)} = (0,684, 2,325)$, $\overrightarrow{r_p(t_0)} = (2,939, -0,865)$ og $|\overrightarrow{r_p(t_0)}| = 3,06$.

I figur 15 er vist grafen for længden af $\overrightarrow{r_p(t)}$ som funktion af t, og vi ser, at der er tale om et minimumspunkt i $t = t_0$.



Figur 15 Afstanden fra punkt $P(4,0)$ til punkter på Archimedes spiral som funktion af t

2.11 Længde af en kurve givet ved en vektorfunktion

Fra afsnittet om differentiering af vektorfunktion ved vi, at farten til tiden $t = t_0$ er:

$|\overrightarrow{v(t_0)}| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$

og længden af banekurven, der gennemløbes i tiden dt, er derfor:

$dL = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$

Længden af banekurven gennemløbet i perioden fra tiden $t = a$ til tiden $t = b$ finder vi ved at integrere dL:

$$L = \int_{t=a}^{t=b} dL = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Eksempel 1

Beregn for den liggende parabel, se figur 9 i afsnit 3, længden af den del af banekurven, der ligger i 2. og 3. kvadrant.

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (2t^2 + 4t - 16, t)$ og dermed

$\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t)) = (4t + 4, 1)$

Den del af banekurven, der ligger i 2. og 3. kvadrant, forløber mellem de to skæringspunkter med y-aksen. Vi har tidligere set, at disse svarer til t-værdierne - 4 og 2, som dermed er vores integrationsgrænser:

$$L = \int_{-4}^{2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_{-4}^{2} \sqrt{16t^2 + 32t + 17}\ dt$$

Integralet beregnes vha. et CAS-værktøj og giver 36,9.

Eksempel 2

Beregn for Archimedes spiral, se figur 11 i afsnit 5, længden af banekurven fra $t = 0$ og indtil første positive skæringspunkt med x-aksen.

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (2t\cos(t), 2t\sin(t))$og dermed

$\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t)) = (2\cos(t) - 2t\sin(t), 2\sin(t) + 2t\cos(t))$

Første positive skæringspunkt med x-aksen er for $t = 2\pi$, så integrationsgrænserne er 0 og 2π:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4t^2+4}\ dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+1}\ dt$$

Integralet beregnes vha. et CAS-værktøj og giver 21,3.

2.12 Omskrivning fra parameterfremstilling til sædvanlig funktion

For visse vektorfunktioner er det muligt at omskrive parameterfremstillingen $(x(t), y(t))$ til en sædvanlig funktion af typen $y = f(x)$.

Et tilfælde er allerede vist i eksempel 1 i afsnit 2.2, hvor vi omskrev parameterfremstillingen for en ret linje, nemlig $(x(t), y(t)) = (t+2, 2\cdot t+8)$, hvor $-\infty < t < +\infty$, til funktionen $y = 2\cdot x+4$, hvor $-\infty < x < +\infty$.

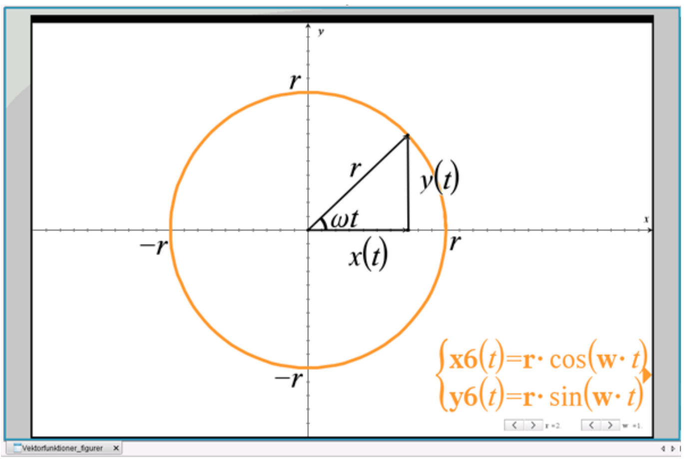
Når vi skal foretage omskrivning af en parameterfremstilling, skal vi først sikre os, at funktionen bliver éntydig. Det vil sige, at der for enhver x-værdi kun er én y-værdi. Det kan ofte kræve, at funktionen opdeles i to eller flere del-funktioner, som vist i eksemplerne nedenfor.

I nogle tilfælde er det ikke muligt (eller ikke anbefalelsesværdigt at forsøge!) at omskrive parameterfremstillingen. Det gælder f.eks. den snoede kurve i afsnit 4 og Archimedes spiral i afsnit 5.

Eksempel 1

Cirklen er som parameterfremstilling givet ved, se figur 16:

$(x(t), y(t)) = (r\cdot\cos(\omega t), r\cdot\sin(\omega t))$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$



Figur 16 Cirklen

Umiddelbart har cirklen to y-værdier for hver x-værdi (i intervallet $-r < x < r$), men hvis vi opdeler cirklen i to halvcirkler, hhv. over og under x-aksen, opnår vi den ønskede éntydighed.

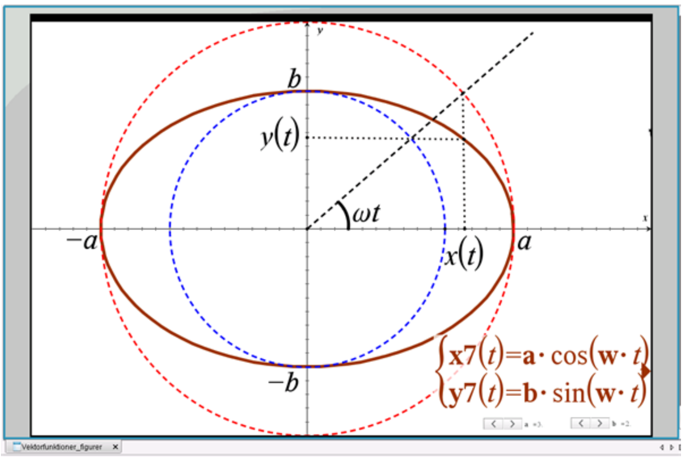
For ethvert punkt på cirklen gælder: $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, som ved omskrivning giver: $y(t)^2 = r^2 - x(t)^2$. Denne ligning har to løsninger:

halvcirklen over x-aksen: $y_1(x) = \sqrt{r^2-x^2} = r\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}$ halvcirklen under x-aksen: $y_2(x) = -\sqrt{r^2-x^2} = -r\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}$

For begge funktioner er definitionsmængden: $-r \le x \le r$.

Eksempel 2

På helt tilsvarende måde kan en ellipse, se figur 17:



Figur 17 Ellipsen

med parameterfremstillingen: $(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(\omega t), b \cdot \sin(\omega t))$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$, opdeles i to halv-ellipser, hhv. over og under x-aksen.

Vi udnytter, at der for ellipsen gælder: $(\frac{x(t)}{a})^2 + (\frac{y(t)}{b})^2 = 1$, og omskrivningen til to del-funktioner er:

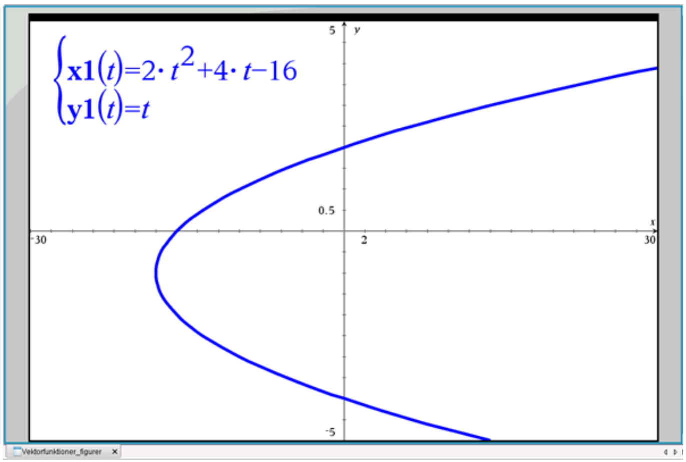
halv-ellipsen over x-aksen: $y_1(x) = b \cdot \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$

halv-ellipsen under x-aksen: $y_2(x) = -b \cdot \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$

For begge funktioner er definitionsmængden: $-a \leq x \leq a$.

Eksempel 3

Den liggende parabel fra afsnit 1 er givet ved parameterfremstillingen: $(x(t), y(t)) = (2t^2+4t-16, t)$, hvor $-\infty < t < +\infty$, se figur 18.



Figur 18 Liggende parabel

Vi kan opdele parablen i to halvdele, som vi kalder parabel-grene. De to parabelgrene ligger hhv. over og under den vandrette symmetriakse $y = -1$, der går gennem parablens toppunkt $(x_T, y_T) = (-18, -1)$.

For en vilkårlig x-værdi, hvor $-18 \leq x < +\infty$, kan vi bestemme de tilhørende y-værdier på de to parabel-grene som løsningerne til ligningen $2t^2 + 4t - 16 = x$, idet vi fra parameterfremstillingen har, at $y = t$.

Ligningen omskrives nemt til den velkendte form for en andengradsligning: $2y^2 + 4y - (x + 16) = 0$, som har to løsninger (idet diskriminanten er $d = b^2 - 4ac = 16 + 8 \cdot (x + 16) = 16 \cdot (\frac{x}{2} + 9)$):

øverste parabel-gren: $y_1(x) = \dfrac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \dfrac{-4 + 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 9}}{4} = -1 + \sqrt{\frac{x}{2} + 9}$

nederste parabel-gren: $y_1(x) = \dfrac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \dfrac{-4 - 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 9}}{4} = -1 - \sqrt{\frac{x}{2} + 9}$

For begge funktioner er definitionsmængden:$-18 \leq x < +\infty$.

3 Trigonometri

3.1 Grundlæggende trigonometri

De grundlæggende begreber om geometri kan du finde på hhv. C-niveau- og B-niveau-delen af webmatematik.dk.

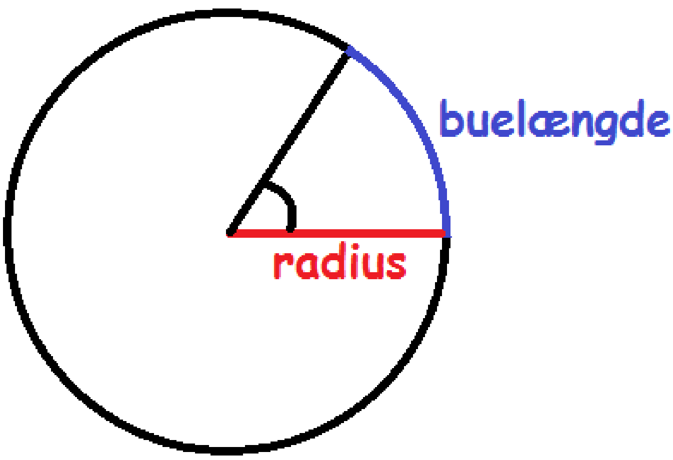
Her vil der kun blive gennemgået de ting, som er udelukkende A-niveaustof.

Så tag et kig i trigonometri-fanerne på C- og/eller B-niveau, hvis du ikke finder svar på dine spørgsmål her.

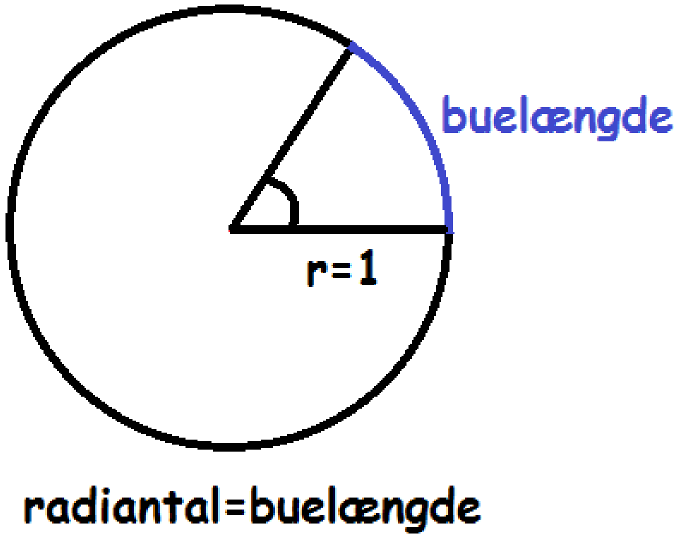
3.2 Radianer

Vi har været vant til at måle vinkler i grader. I dette tilfælde er der 360 grader rundt på en cirkel. I mange tilfælde kan det være nyttigt at måle vinkler i radianer. Skal man f.eks. differentiere de trigonometriske funktioner, kan det kun lade sig gøre, hvis man måler vinklerne i radianer. En vinkels radiantal er defineret som forholdet mellem vinklens buelængde og cirklens radius.

$$\text{vinkel i radianer} = \frac{\text{buelængde}}{\text{radius}}$$



Hvis vi har at gøre med enhedscirklen, er radius 1. Derfor svarer vinklens radiantal til den buelængde, den spænder over på enhedscirklen.



Da omkredsen af en cirkel er

$$O = 2\pi r$$

må omkredsen af enhedscirklen være

$$O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

Derfor er der 2π radianer hele vejen rundt på en cirkel. Vi kan opstille følgende tabel, der omregner radianer og grader

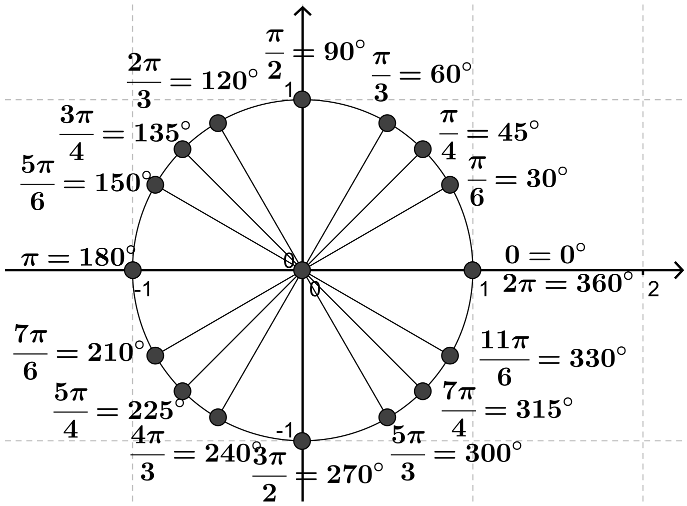
Grader	Radianer
$0°$	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$180°$	π
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
$360°$	2π

Hvis man skal omregne nogle vinkler, der ikke står i tabellen, kan man bruge følgende formler. Her er v vinklen målt i grader, og x er vinklen målt i radianer

$$x = \frac{v}{360°} \cdot 2\pi$$

$$v = \frac{x}{2\pi} \cdot 360°$$

Her er tegnet en enhedscirkel med de vigtigste vinkler tegnet ind



3.3 Overgangsformler

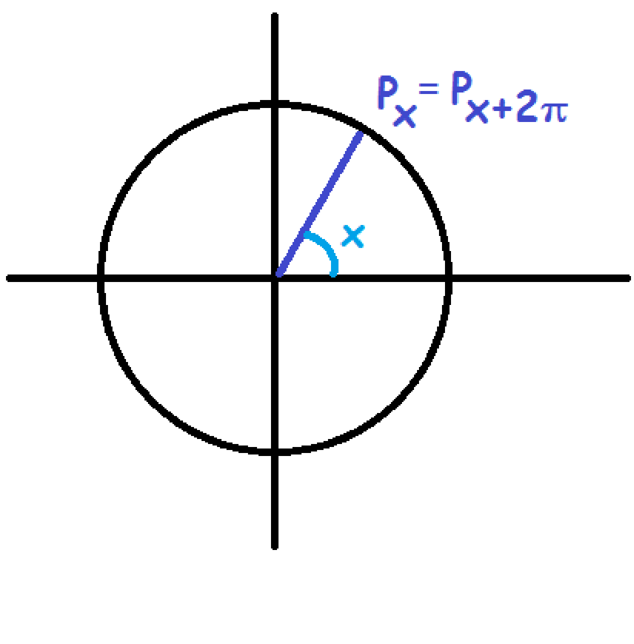
Der er en række formler for, hvordan man kan omskrive forskellige værdier af trigonometriske funktioner.

Vi begrunder dem alle sammen ved hjælp af en grafiske fremstilling.

De første overgangsformler er

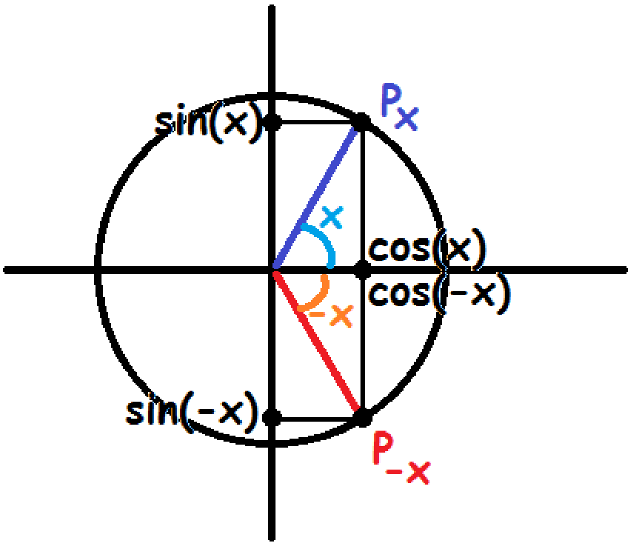
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$$

Disse formler skyldes, at når man lægger 2π til en vinkel, så kører man en hel runde på cirklen. Man når altså tilbage til det samme sted, og derfor er cosinus- og sinus-værdierne de samme. Og da tangens er sinus divideret med cosinus, så er tangens-værdien også uændret.



I de næste overgangsformler, vi skal se på, sammenligner vi vinkel x med vinkel $-x$.

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$



P_x og P_{-x} er spejlinger i x-aksen. Derfor er deres x-værdi den samme. Derfor er $\cos(x) = \cos(-x)$.

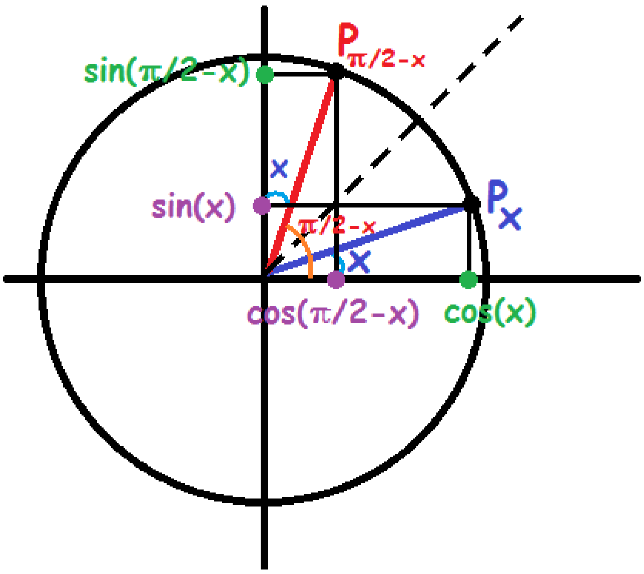
Deres y-værdier har derimod skiftet fortegn. Derfor er $\sin(-x) = -\sin(x)$ Tangens-værdien får man ved at dividere de to med hinanden

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Nu prøver vi at sammenligne vinklerne x og $\frac{\pi}{2} - x$. (Vi husker på at $\frac{\pi}{2}$ svarer til 90 grader).

Her er overgangsformlerne

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$



Punkterne P_x og $P_{\frac{\pi}{2}-x}$ er spejlinger i linjen $y = x$. Derfor svarer den enes x-værdi til den andens y-værdi.

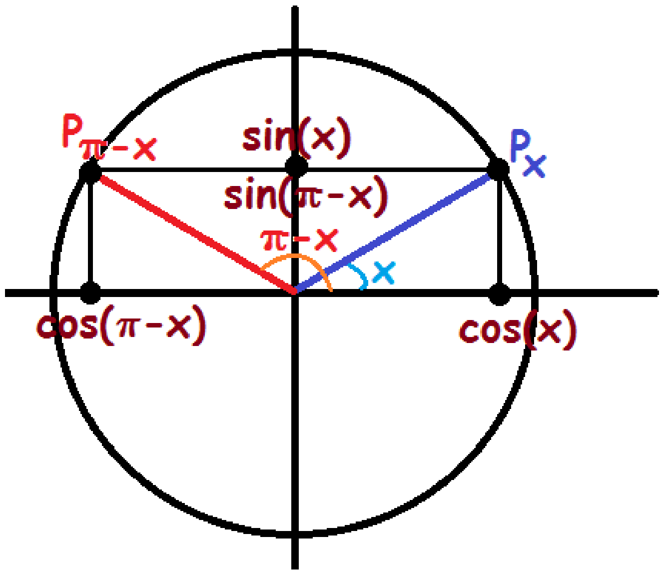
Vi dividerer sinus med cosinus for at nå frem til tangens

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)/\cos(x)}{\sin(x)/\cos(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

Nu sammenligner vi vinklerne x og $\pi - x$. (Vi husker på at π svarer til 180 grader).

Her er overgangsformlerne

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$



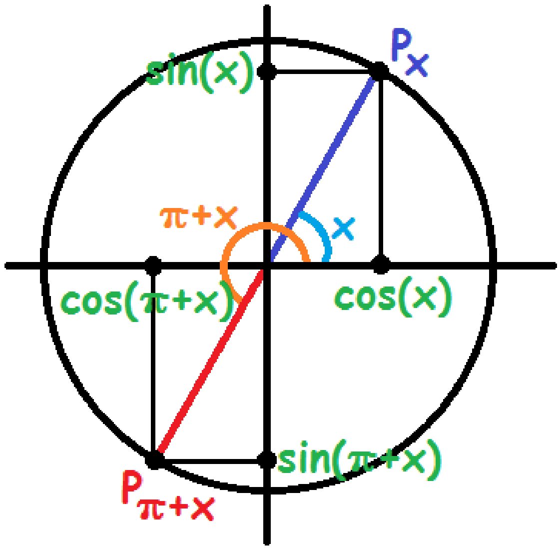
Punkterne P_x og $P_{\pi-x}$ er spejlinger i y-aksen. Derfor er deres y-værdier (deres sinus-værdier) ens. Deres x-værdier (cosinus-værdierne) har derimod skiftet fortegn.

Vi udregner tangens:

$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

De sidste overgangsformler, vi skal se på, er mellem vinklerne x og $\pi + x$ I dette tilfælde er overgangsformlerne

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$



Vi kan se, at punkternes x-koordinater er ens bortset fra et modsat fortegn. Det samme gælder y-koordinaterne.

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Opsamling

For lige at samle op skriver vi her alle overgangsformlerne op

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\tan(x+2\pi) = \tan(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

3.4 Additionsformlerne

Før lommeregnerens tid, kunne det være besværligt at udregne værdier for de trigonometriske funktioner.

Et nyttigt redskab til at bestemme sådanne vinkler var additionsformlerne. Hvis man skal finde cosinus eller sinus til en vinkel, kan man splitte vinklen om til en sum af to vinkler, som man kender cosinus- og sinusværdierne for, og bruge dette til at bestemme cosinus- eller sinusværdien for denne vinkel.

Additionsformlerne er

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

Lad os se, hvordan vi kan anvende dem i praksis

Vi ønsker at beregne

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ???$$

Vi kan dele det op så

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nu kan vi bruge den øverste af de fire additionsformler

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Vi ved at

$$\cos(\pi) = -1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad \sin(\pi) = 0,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(tjek selv værdierne efter ved at tegne vinklerne ind i enhedscirklen, og aflæs cos- og sinværdierne).

Nu er der bare tilbage at sætte ind

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

Et andet eksempel er, at vi ønsker at beregne

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ???$$

Vi omskriver til

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

Vi omskriver nu ved hjælp af den fjerde additionsformel

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi)$$

Vi husker at

$$\frac{\pi}{6}\ \text{rad} = 30°$$

og derfor ved vi, at

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ \cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0$$

Nu er det bare at sætte ind i formlen

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi)$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

3.5 Dobbeltvinkelformlerne

Ligesom additionsformlerne er også dobbeltvinkelformlerne brugbare, når man skal regne trigonometriske funktioners værdier ud uden brug af lommeregner.

Faktisk er dobbeltvinkelformlerne et særtilfælde af additionsformlerne, hvor de to vinkler man lægger sammen bare er ens.

Dobbeltvinkelformlerne ser således ud

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Lad os se, hvordan de kan anvendes.

Vi ved at

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Vi ønsker at beregne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = ???$$

Vi omskriver ved hjælp af dobbelvinkelformlerne

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

4 Infinitesimalregning

4.1 Grundlæggende infinitesimalregning

Hvis du leder efter det grundlæggende om infinitesimalregning (den samlede betegnelse for differential- og integralregning), så skal du kigge under fanerne Differentialregning på B-niveau og Integralregning på A-niveau-delen af webmatematik.dk.

På A-niveau-delen behandler vi udelukkende stof, der bygger ovenpå det grundlæggende. Bl.a. skal vi se, hvordan man differentierer sammensatte funktioner, finde voluminer af omdrejningslegemer og ikke mindst lære nogle tips og tricks til at integrere kringlede funktioner.

4.2 Kontinuitet og differentiabilitet

På B-niveau definerede vi kontinuitet ved at sige, at en funktion var kontinuert, hvis man kunne tegne den uden at løfte blyanten fra papiret. Den definition giver et godt visuelt billede af, hvad en kontinuert funktion er - den er sammenhængende.

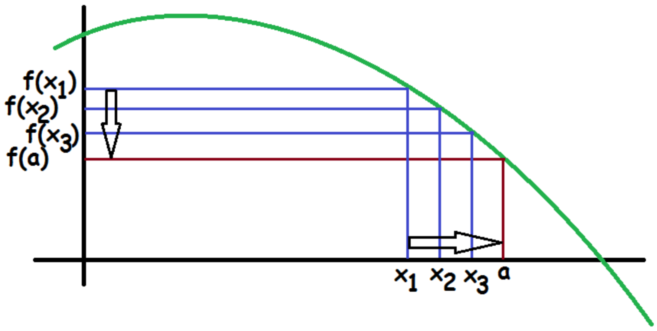
Imidlertid er det en definition, det er svært at arbejde med i praksis. Derfor indfører vi på A-niveau en mere matematisk definition.

$$f \text{ er kontinuert} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}(f(x)) = f(a)$$

Med ord ville man sige "f er kontinuert hvis og kun hvis grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod a er lig med $f(a)$".

Det, som definitionen egentlig siger, er, at hvis vi lader vores x-værdi komme uendeligt tæt på et fast punkt, så skal funktionsværdierne også komme uendeligt tæt på funktionsværdien i det faste punkt.

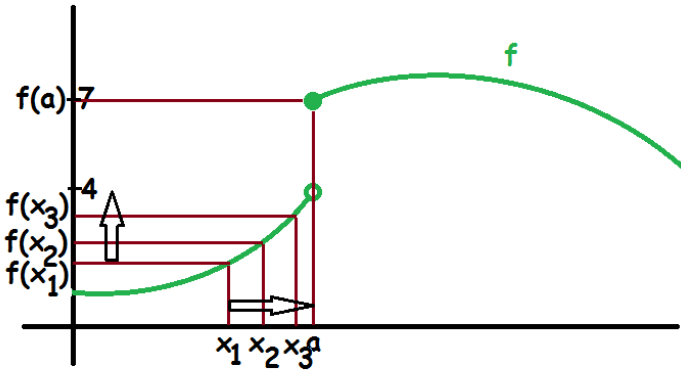
Definitionen kan måske virke kringlet, men måske kan følgende eksempler vise dig, hvordan den virker, og overbevise dig om, at den er smart.



På tegningen herover er tegnet grafen for en kontinuert funktion. Når vi lader vores x-værdier komme tættere og tættere på det faste punkt a, så kommer funktionsværdierne også tættere på $f(a)$. Vi kunne gå uendeligt tæt på a, og så ville funktionsværdien også være uendeligt tæt på $f(a)$.

Bemærk, at vi også kunne have startet med en x-værdi, der var større end a og bevæget os mod a fra højre.

Lad os se på et eksempel, hvor funktionen ikke er kontinuert.



Her kan vi se, at

$$f(a) = 7$$

Men lige meget hvor tæt vi kommer på a med vores x-værdi (gående fra venstre side), så vil funktionsværdien aldrig blive 7. Den vil i stedet nærme sig 4.

$$\lim_{x \to a^-} (f(x)) = 4 \neq 7 = f(a)$$

Bemærk, at hvis vi var startet med en x-værdi, der var større end a og havde nærmet os a fra højre, så ville funktionsværdierne nærme sig $f(a)$. Imidlertid kræves der, at både grænseværdien fra højre og fra venstre giver $f(a)$, før man kan tale om at en funktion er kontinuert.

Muligvis synes du, at det virker som en løs definition, at nogle tal nærmer sig hinanden uendeligt meget. Vi kan berolige med, at der findes en mere stringent definition, nemlig at en funktion er kontinuert hvis:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

men den slags indviklede sager skal du heldigvis ikke bekymre dig om, medmindre du vil studere matematik på universitetet :-)

Differentiabilitet

På B-niveau lærte vi, at en funktion f var differentiabel i et punkt x_0, hvis den var kontinuert, og der gjaldt, at dens differens-kvotient

$$a_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

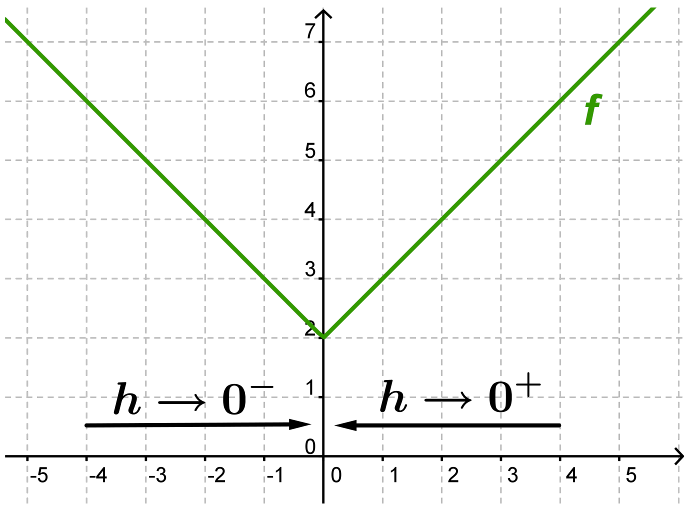
havde en grænseværdi for $h \to 0$

Dette betyder, at der skal være en grænseværdi, både når h nærmer sig 0 fra venstre og fra højre, og at de to grænseværdier skal være den samme.

Lad os se på et eksempel på en funktion, der ikke er differentiabel. Vores funktion er

$$f(x) = |x| + 2$$

Dens graf er



Vi vil se på differentialkvotienten i punktet 0.

Vi bruger tre-trins-reglen.

$$I: \qquad \triangle y = f(x+h) - f(x) = |0 + h| + 2 - (|0| + 2) = |h| + 2 - 0 - 2 = |h|$$

$$II: \qquad a_s = \frac{\triangle y}{h} = \frac{|h|}{h}$$

I det tredje trin tager vi grænseværdien for h gående mod 0 både fra højre og fra venstre.

Vi starter med at tage grænseværdien fra højre. Dvs. at h er et positivt tal, så $|h| = h$

$$III(\text{højre}): \qquad \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h}{h}\right) = \lim_{h \to 0^+} (1) = 1$$

Dernæst tager vi grænseværdien fra venstre. Dvs. at h er et negativt tal, og derfor er $|h| = -h$

$$III(\text{venstre}): \qquad \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{-h}{h}\right) = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Fra højre er grænseværdien altså 1 og fra venstre er den -1. Da grænseværdien ikke er den samme, er funktionen ikke differentiabel.

Læg mærke til, at dette stemmer overens med vores B-niveau-definition, hvor vi sagde, at differentiable funktioner ikke måtte have nogen "knæk".

4.3 Differentiation af trigonometriske funktioner

På B-niveau-delen af webmatematik.dk så vi hvordan man differentierede forskellige funktioner (se en liste her). Til den liste kan vi nu tilføje de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens.

Husk, at når man differentierer eller integrerer de trigonometriske funktioner, så SKAL man regne i radianer. Hvis du bruger en lommeregner til at differentiere for dig, så sørg for, at den er indstillet til at regne i radianer.

I første søjle har vi funktionerne, i anden søjle har vi de afledede funktioner, altså differentialkvotienterne. I tredje søjle har vi stamfunktionerne.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + c$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + c$

4.4 Integration ved substitution

Man kan differentiere alle differentiable funktioner. Der findes en række regler, og hvis man følger dem til punkt og prikke, kan man finde frem til den rigtige differentialkvotient. Det er ikke helt lige så let at integrere. Så snart man skal integrere et produkt af funktioner eller en sammensat funktion, er der ikke nogen klare regler, man bare kan følge slavisk. I stedet findes der en del forskellige metoder, man kan bruge til at omskrive integralet til noget, der er lettere at have med at gøre. Det er ikke altid til at sige, om den ene eller den anden metode vil virke; man må prøve sig frem.

En af de vigtigste metoder til integration er integration ved substitution.

Hvornår kan integration ved substitution bruges?

Når integranden (indmaden i integralet) indeholder et *produkt* af funktioner, og når en af dem er *sammensat*. Det er ikke i alle disse tilfælde, det vil virke, men ofte er det et forsøg værd.

Hvad er integration ved substitution?

Integration ved substitution er egentlig følgende formler

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt, \qquad \text{hvor } t = g(x)$$

Formlerne ser meget uoverskuelige ud. Imidlertid er metoden ikke så vanskelig i praksis. Vi illustrerer den ved hjælp af nogle eksempler.

Vi ønsker at udregne følgende integral

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx$$

Vi ser, at der både er tale om et produkt af funktioner, og at den ene er sammensat. Derfor prøver vi os frem med integration ved substitution.

Det første, man gør, er at finde den indre funktion i den sammensatte funktion. I vores tilfælde er det x^2. Vi kalder den indre funktion for t.

$$t = x^2$$

Nu differentierer vi t:

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

venstresiden er bare et symbol, der betyder, at vi har differentieret t med hensyn til variablen x.

Imidlertid lades vi som om, at symbolet er en brøk og isolerer dx.

$$dx = \frac{1}{2x}dt$$

Nu sætter vi t ind i integralet samt det nye udtryk for dx.

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x}\,dt$$

Til sidst skal vi reducere integranden, og udføre integrationen.

$$\int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x}\,dt = \int \frac{1}{2}e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + c$$

Som rosinen i pølseenden substituerer vi den indre funktion tilbage ind på t's plads.

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Opsamling

• Find den indre funktion og kald den t • Differentier t, dvs. find dt/dx • Isolér dx • Indsæt nu t samt udtrykket for dx i integralet • Tilbage-substituer den indre funktion på t's plads.

Hvis der er tale om et bestemt integral, skal man huske at integrationsgrænserne også skal substitueres.

Lad os regne følgende eksempel med et bestemt integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 \cos(x)\,dx$$

Vi ser, at sin(x) er den indre funktion.

$$t = \sin(x)$$

Vi differentierer t.

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x)$$

Vi lades som om symbolet til venstre er en brøk, og isolerer dx.

$$dx = \frac{1}{\cos(x)} dt$$

Nu skal vi finde de nye integrationsgrænser. Det gør vi ved at sætte de gamle grænser ind i den funktion, vi substituerer ud (i vores tilfælde sin(x)).

$$\sin(0) = 0$$

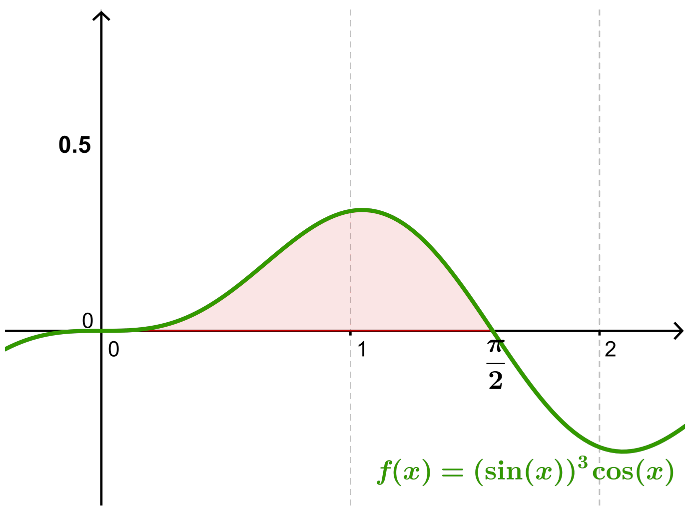
$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Nu sætter vi t og udtrykket for dx samt de nye grænser, ind i integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 \cdot \cos(x)\, dx = \int_0^1 t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\, dt$$

Vi ser, at cos(x)'erne går ud med hinanden.

$$\int_0^1 t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\, dt = \int_0^1 t^3\, dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}$$



Arealet markeret på figuren er altså $\frac{1}{4}$.

4.5 Partiel integration

Som nævnt i sidste afsnit er det ikke muligt at komme med en fremgangsmåde til at løse alle integraler. Alligevel har vi nogle værktøjer, nogle metoder, vi kan prøve os frem med for at løse integraler. Partiel (eller *delvis*) integration er en af disse metoder.

Man bruger partiel integration, når integranden (indmaden i integralet) er et produkt af funktioner.

Den formel, man bruger, når man integrerer partielt er:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

Man kan selv vælge, hvilken af de to funktioner, man vil differentiere og hvilken man vil integrere. Dette valg er vigtigt for, om det bliver et pænere eller et grimmere integral, man ender ud med efter den partielle integration.

Et hint er, at hvis der er en funktion af formen x eller x^n, så skal man vælge at differentiere den.

Vi tager et eksempel med et ubestemt integral

$$\int 2x \cdot \cos(x)\,dx$$

Vi vælger at det er 2x, der skal differentieres, mens cos(x) skal integreres.

Vi starter med at skrive de fire størrelser op:

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = \cos(x), \quad f'(x) = 2, \quad G(x) = \sin(x)$$

Nu sætter vi dem ind i formlen

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x)\,dx$$

Det integral, vi har på højre side kan vi sagtens udregne.

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x)\,dx$$

$$= 2x \cdot \sin(x) - 2 \cdot (-\cos(x)) + c = 2x \cdot \sin(x) + 2\cos(x) + c$$

Vi tager også et eksempel med et bestemt integral, hvor vi skal bruge partiel integration 2 gange, før det giver noget resultat.

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Vi vælger, at vi vil differentiere x^2 og integrere $e^{x/2}$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad f'(x) = 2x, \quad G(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Nu sætter vi ind i formlen

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx \; = [x^2 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Det integral, vi er nået frem til på højre side, kan vi endnu ikke udregne. Derfor bruger vi partiel integration endnu engang.

$$h(x) = 4x, \quad k(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad h'(x) = 4, \quad K(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Vi indsætter i formlen og får

$$[2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4x \cdot e^{\frac{x}{2}}\, dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \left([4x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\, dx \right)$$

Det sidste integral består kun af en enkelt funktion, og den kan vi sagtens integrere.

Alt i alt får vi:

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\, dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \left([4x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\, dx \right)$$

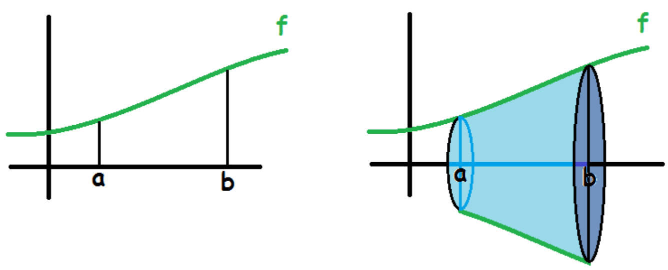
$$= [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - [8x \cdot e^{\frac{x}{2}}]_0^1 + 16e^{\frac{x}{2}}]_0^1$$

$$= (2 \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 0 \cdot e^0) - (8 \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot 0 \cdot e^0) + (16e^{\frac{1}{2}} - 16e^0)$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} + 16e^{\frac{1}{2}} - 16 = 10e^{\frac{1}{2}} - 16 = 10\sqrt{e} - 16$$

4.6 Omdrejningslegemer

Et omdrejningslegeme (eller et rotationslegeme) er den tredimensionale figur, man får, hvis man roterer en funktion 360 grader rundt om x-aksen. Det er vigtigt, at funktionen er kontinuert, og at den kun har positive værdier.



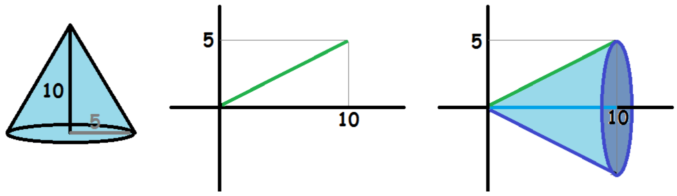
Man kan beregne volumen af omdrejningslegemet ved hjælp af følgende formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Lad os regne nogle eksempler.

Vi ønsker at beregne volumen af keglen med højde 10 og radius 5.

Vi indtegner siden af keglen i et koordinatsystem som vist nedenfor



Vi har to punkter på grafen, (0, 0) og (10,5), så vi kan bestemme den lineære funktions forskrift

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-0}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

og, da vi har lagt funktionen, så den skærer akserne i (0, 0), så er b=0.

Altså er

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

Vi er interesserede i intervallet [0;10]. Nu sætter vi ind i formlen for volumen af omdrejningslegeme:

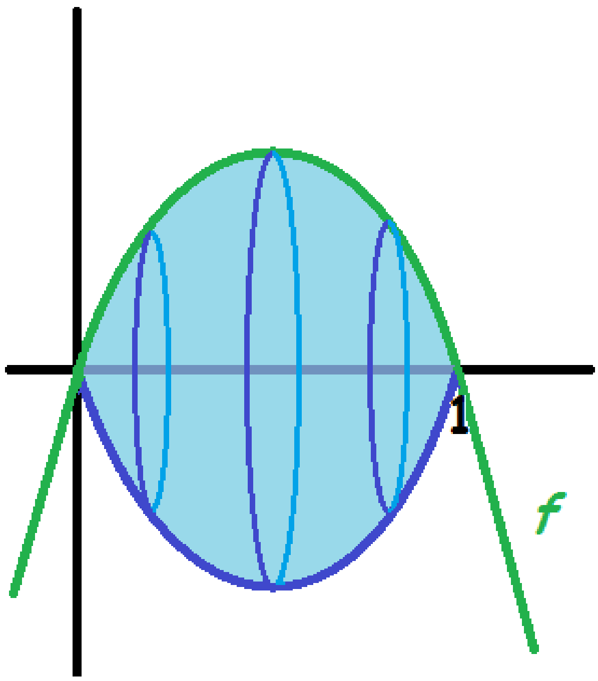
$$\begin{aligned} V = \pi \int_0^{10} (\frac{1}{2}x)^2 \, dx &= \pi \int_0^{10} \frac{1}{4}x^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}x^3\right]_0^{10} \\ = \pi \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 1000 - \frac{1}{2} \cdot 0\right) &= \frac{1000\pi}{12} \approx 261,8 \end{aligned}$$

Vi tager et andet eksempel.

Vi vil rotere andengradspolynomiet

$$f(x) = -5x^2 + 5x = -5x(x-1)$$

om x-aksen mellem dets to rødder 0 og 1.



Mellem de to rødder er polynomiet positivt, så derfor må vi benytte vores formel.

$$V = \pi \int_0^1 (-5x(x-1))^2 \, dx$$

Først regner vi lidt på integranden (indmaden i integralet) ved hjælp af potensregler og kvadratsætninger.

$$(-5x(x-1))^2 = (-5x)^2(x-1)^2$$
$$= 25x^2(x^2+1-2x) = 25x^4 + 25x^2 - 50x^3$$

Nu er vi klar til at udregne integralet.

$$V = \pi \int_0^1 25x^4 + 25x^2 - 50x^3 \, dx$$
$$= \pi \left[\frac{25}{5}x^5 + \frac{25}{3}x^3 - \frac{50}{4}x^4 \right]_0^1$$
$$= \pi \left(5 \cdot 1^5 + \frac{25}{3} \cdot 1^3 - \frac{50}{4} \cdot 1^4 - 0 \right)$$
$$= \pi \left(\frac{5 \cdot 12}{12} + \frac{25 \cdot 4}{12} - \frac{50 \cdot 3}{12} \right)$$
$$= \pi \left(\frac{60 + 100 - 150}{12} \right) = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,618$$

5 Differentialligninger

5.1 Hvad er differentialligninger?

En differentialligning er kort og godt en ligning, hvor der indgår en differentieret funktion som en af de ubekendte.

Løsningen til en differentialligning er de funktioner, der får ligningen til at være sand. Vi leder altså ikke efter talløsninger som i almindelige ligninger, men efter funktioner, der opfylder, at hvis man indsætter dem og deres afledede (differentierede), så står der det samme på begge sider af lighedstegnet. Eftersom løsningen er en funktion, så må den godt afhænge af en anden variabel (for det meste x).

Der er forskellig notation for den differentierede funktion i differentialligninger. Det kan f.eks. være

$$y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y \qquad f'(x) \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$$

Men de to første, er de mest almindelige.

Partikulær løsning og fuldstændig løsning

Lad os se på en meget simpel differentialligning

$$y' = 5$$

Ved at integrere på begge sider, får vi, at

$$y = f(x) = 5x$$

er en løsning til differentialligningen. Men

$$y = f(x) = 5x + 8$$

er også en løsning til differentialligningen.

Disse to løsninger, kalder man *partikulære løsninge*r. Der er nemlig uendeligt mange løsninger til differentialligningen, og disse to er blot nogle af løsningerne.

Den *fuldstændige løsning* på differentialligningen ville være

$$y = f(x) = 5x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ved at indsætte forskellige tal på c's plads, finder man de partikulære løsninger.

Ofte vil en opgave stilles med en startbetingelse, der afgør hvilken af de partikulære løsninger, man er på udkig efter.

F.eks.

$$y' = 5, \qquad y(2) = 4$$

Først finder vi den fuldstændige løsning

$$y = f(x) = 5x + c$$

og så finder vi den partikulære løsning ved at indsætte punktet $(2, 4)$ i ligningen og isolere c.

$$\begin{aligned}
&4 = 5 \cdot 2 + c \Leftrightarrow \\
&4 = 10 + c \Leftrightarrow \\
&c = -6.
\end{aligned}$$

Altså er løsningen til den givne opgave

$$y = f(x) = 5 \cdot x - 6$$

5.2 Gøre prøve

Ofte bliver man ikke bedt om at finde en løsning til en differentialligning, men bliver i stedet præsenteret for en funktion og spurgt om den løser differentialligningen.

Metoden til at bestemme dette kaldes "at gøre prøve".

Den går simpelthen ud på at indsætte funktionen på hhv. venstre- og højresiden og se om det giver det samme.

Eksempel

Vi ønsker at undersøge om ligningen

$$f(x) = 2e^{16x}$$

er en løsning til differentialligningen

$$y' = 16y.$$

Først differentierer vi f.

$$f'(x) = 16 \cdot 2 \cdot e^{16x} = 32e^{16x}$$

Først udregner vi venstresiden.

$$V: \quad f'(x) = 32e^{16x}$$

og så udregner vi højresiden

$$H: \quad 16 \cdot f(x) = 16 \cdot \underbrace{2e^{16x}}_{f(x)} = 32e^{16x}$$

Da højre- og venstresiden er ens, betyder det, at funktionen f er en løsning til differentialligningen.

Eksempel 2

Afgør om

$$g(x) = 2 + 5e^{-3x}$$

er en løsning til differentialligningen

$$y' - 6 = -3y.$$

Før vi indsætter g i differentialligningen, differentierer vi den lige

$$g'(x) = -3 \cdot 5e^{-3x} = -15e^{-3x}.$$

Så gør vi prøve på samme måde som før, ved først at indsætte på venstresiden, så på højresiden og til sidst sammenligner vi resultater

$$V: \quad g'(x) - 6 = -15e^{-3x} - 6,$$

$$H: \quad -3 \cdot g(x) = -3 \cdot (2 + 5e^{-3x}) = -6 - 15e^{-3x}.$$

Da venstre- og højresiden er ens, betyder det, at g er en løsning til differentialligningen.

5.3 Løsninger til differentialligninger

Herunder følger et skema over forskellige differentialligninger og deres fuldstændige løsninger.

I de næste par afsnit vil vi gå mere i dybden med nogle af de forskellige typer. Dette skal altså mest ses som en oversigt.

differentialligning	fuldstændige løsning
$y' = k$	$y = k \cdot x + c$
$y' = h(x)$	$y = \int h(x)\,\mathrm{d}x$
$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{kx}$
$y' = b - ay$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$
$y' = y \cdot (b - ay)$	$y = \frac{b/a}{1+c \cdot e^{-bx}}$
$y' = ay \cdot (M - y)$	$y = \frac{M}{1+c \cdot \exp(-a \cdot M \cdot x)}$
$y' + a(x) \cdot y = b(x)$	$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c \cdot e^{-A(x)}$

Skemaet skal forstås på den måde, at c er en konstant, som afhænger af hvilken begyndelsesbetingelse, vi har fået (se evt. afsnittet om partikulære og fuldstændige løsninger)

I den nederste linje er $a(x)$ og $b(x)$ to funktioner, der afhænger af x (dvs. der kun indgår faste tal og x'er i udtrykkene). $A(x)$ skal forstås som en (vilkårlig) stamfunktion til $a(x)$.

For at forstå, hvordan skemaet fungerer, kommer vi med et par eksempler.

Eksempel 1

Hvis vores differentialligning er

$$y' = 5y \cdot (2 - y)$$

så siger skemaet (næstsidste linje), at den fuldstændige løsning er

$$y = f(x) = \frac{2}{1 + c \cdot e^{5 \cdot (-2) \cdot x}} = \frac{2}{1 + ce^{-10x}}$$

Eksempel 2

Hvis vores differentialligning havde været

$$y' + 6x \cdot y = 18x$$

så siger skemaet (sidste linje) at

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &= e^{-3x^2} \int 18x \cdot e^{3x^2}\, \mathrm{d}x + ce^{-3x^2} = e^{-3x^2} \int 3 \cdot e^t \, \mathrm{d}t + ce^{-3x^2} \\
&= e^{-3x^2} \cdot 3e^{3x^2} + ce^{-3x^2} = 3e^0 + ce^{-3x^2} = 3 + ce^{-3x^2}
\end{aligned}
$$

Her har vi bl.a. substitueret $t = 3x^2$, $\mathrm{d}t = 6x\,\mathrm{d}x$ for at løse integralet.

5.4 Eksponentiel vækst

En vigtig type differentialligning er på formen

$$y' = ky.$$

Nogle gange optræder den på formen

$$\frac{y'}{y} = k,$$

men det ses let, at de to differentialligninger er ens (man skal bare gange med y på begge sider af lighedstegnet).

Eksempler på denne type differentialligninger er

$$y' = 2y, \qquad \frac{y'}{y} = 8, \qquad \frac{dy}{dx} = 17y$$

Den fuldstændige løsning til denne type differentialligning er

$$y = f(x) = ce^{kx}$$

Eksempel

Hvis vores ligning havde været

$$y' = 2y$$

så ville den fuldstændige løsning være

$$y = f(x) = ce^{2x}$$

Hvis vi oveni havde fået begyndelsesbetingelsen $y(0) = 8$, kunne vi bestemme c således

$$8 = ce^{2\cdot 0} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 8.$$

Altså ville den partikulære løsning være

$$y = f(x) = 8e^{2x}$$

Vi ser at løsningerne til differentialligningen er eksponentialfunktioner med startværdi c og fremskrivningsfaktor e^k.

Derfor siger man, at disse differentialligninger beskriver *eksponentiel vækst*.

5.5 Forskudt eksp. vækst

En anden vigtig type af differentialligninger er på formen

$$y' = b - ay$$

hvor a og b er konstanter.

Den kan eksempelvis optræde som

$$\frac{dy}{dx} = b - ay, \qquad y' + ay = b.$$

Eksempler på differentialligninger af denne type er

$$y' = 8 - 2y, \qquad \frac{dy}{dx} + 7y = 37, \qquad y' - 15y = 17.$$

Den fuldstændige løsning til disse differentialligninger er

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

Eksempel

Hvis vi vil løse differentialligningen

$$y' = 3 - 5y$$

er den fuldstændige løsning altså

$$y = f(x) = \frac{3}{5} + ce^{-5x} = 0{,}6 + ce^{-5x}$$

Havde vi fået startbetingelsen $y(0) = 14$, ville vi kunne isolere c

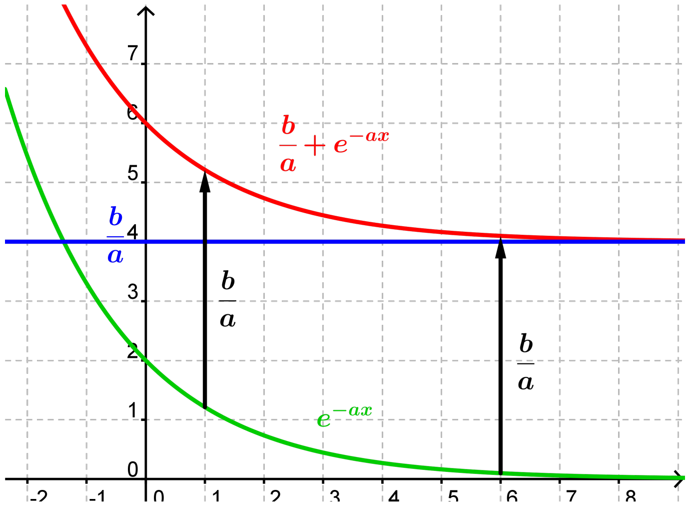
$$14 = 0{,}6 + ce^{-5\cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad 14 = 0{,}6 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 13{,}4$$

Den partikulære løsning ville så være

$$y = f(x) = 0{,}6 + 13{,}4e^{-5x}$$

Bemærk, at løsningerne til denne type differentialligninger er forskudte eksponentialfunktioner.

Dvs. eksponentialfunktioner, hvis grafer er forskudt lodret.



Newtons afkølingslov

Differentialligninger af formen

$$y' = b - ay$$

har en nær sammenhæng med Newtons afkølingslov.

Newtons afkølingslov siger

"Hastigheden hvormed temperaturen af et legeme ændres, er proportional med forskellen mellem legemets temperatur og det omgivende rums temperatur".

Hvis vi f.eks. har en kop skoldhed te, som vi stiller i et rum med stuetemperatur, så vil den afkøles hurtigt i starten (hvor forskellen mellem teens og rummets temperatur er stor), mens den efter et stykke tid kun vil afkøles langsomt (hvor forskellen mellem teens og rummets temperatur er lille).

Lad os prøve at skrive Newtons afkølingslov om til en differentialligning.

Differentialkvotienter siger noget om funktioners hastighed. "Hastigheden hvormed temperaturen af et legeme ændres"kan vi derfor omskrive til y'. Hvis vi kalder rummets temperatur for T, så kan "forskellen mellem legemets temperatur og det omgivende rums temperatur"omskrives til $(T - y)$.

At to ting er proportionale betyder, at der findes en konstant, a, så den ene er lig med a ganget med den anden (dvs. den ene er a gange større end den anden).

Nu siger vores differentialligning

$$y' = a(T - y)$$

Hvis vi ganger parentesen ud, får vi

$$y' = aT - ay$$

Det minder meget om vores differentialligning for forskudt eksponential vækst. Den eneste forskel er, at den konstant, vi kaldte b, her hedder $a \cdot T$.

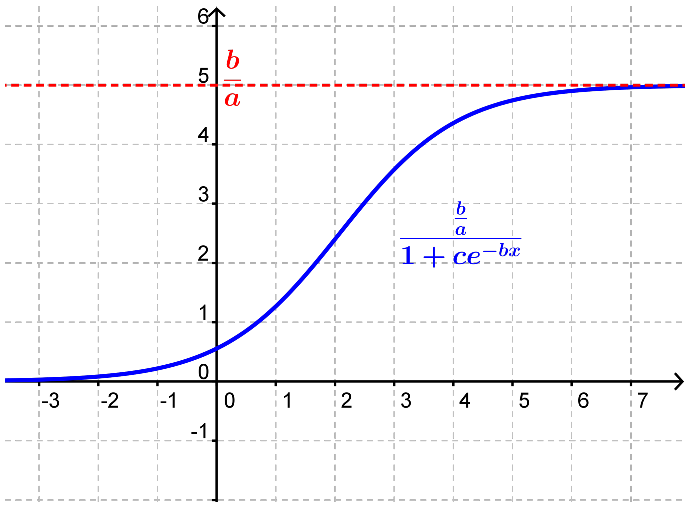
Løsningen (dvs. den funktion, der beskriver hvordan temperaturen af legemet ændrer sig ifht. tiden) kan skrives som

$$y = f(t) = \frac{b}{a} + ce^{-a \cdot t} = \frac{a \cdot T}{a} + ce^{-a \cdot t} = T + ce^{-a \cdot t}$$

For at kunne bestemme c og a skal man have to begyndelsesbetingelser (f.eks. begyndelsestemperaturen og temperaturen efter en time)

5.6 Logistisk vækst

En logistisk vækst er kendetegnet ved, at der er tale om en begrænset vækst. Der er altså et maksimum for, hvor funktionen kan vokse til. I starten vokser den med noget, der minder om en eksponentiel udvikling, men når den så nærmer sig sit maksimum, flader den ud.



Logistisk vækst bruges til at lave modeller over eksempelvis dyreverdenen. Hvis man sætter 10 kaniner ud på en ø, vil de til at starte med formere sig utroligt meget (høj væksthastighed). Når antallet af kaniner når en vis størrelse, vil øen ikke længere have mad nok til at brødføde alle kaninerne, og derfor vil væksthastigheden stilne af (kurven bliver fladere).

Differentialligningen

Logistisk vækst udtrykkes med differentialligningen

$$y' = y(b - ay)$$

Bemærk, at hvis man ganger parentesen ud, så får man en andengradsligning.

$$y' = b \cdot y - a \cdot y^2$$

Eksempler på denne type differentialligning er

$$y' = y(5 - 2y), \qquad y' = 10y - 3y^2, \qquad \frac{dy}{dx} = y \cdot (4 - 4y).$$

Løsningen på ligningen er

$$y = f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + ce^{-b \cdot x}}$$

Eksempel

Hvis vores differentialligning er

$$y' = y \cdot (10 - 5y)$$

så er løsningen

$$y = f(x) = \frac{\frac{10}{5}}{1 + ce^{-10x}} = \frac{2}{1 + ce^{-10x}}$$

Når x vokser, vil eksponentialfunktionen i nævneren nærme sig 0. Dermed vil hele nævneren nærme sig 1, og brøken vil dermed være lig med tælleren b/a. Funktionerne vil altså vokse noget nært eksponentielt i starten men så flade ud og nærme sig b/a.

Nært beslægtet differentialligning

I differentialligningen ovenfor, så vi at løsningerne ville smyge sig op ad b/a. Dette kaldes populationens "steady state", og beskriver den øvre grænse for populationen. Tit kender man "steady state", og derfor ville det være smart, hvis man kunne indsætte/aflæse det direkte i differentialligningen.

Hvis vi kalder "steady state"for M, så har vi, at:

$$M = \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b = a \cdot M$$

Hvis vi indsætter det i differentialligningen ovenfor, får vi

$$y' = y \cdot (aM - ay) = ay \cdot (M - y)$$

og løsningen bliver

$$y = f(x) = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}$$

Egentlig er der tale om den samme differentialligning som før, men hvor vi bare kan aflæse M i stedet for b ud fra differentialligningen.

Uddybende forklaring til løsningen

Løsning af den logistiske differentialligning: y' = y(b-a y):

$y' = \frac{dy}{dx} = y(b - ay) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(b-ay)} = dx;$

der integreres på begge side og integrations konstanten adderes

$\int \frac{1}{y(b-ay)} dy = x + c$

Brøken adskilles i to brøker, det antages at

$\frac{1}{y(b-ay)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-ay} = \frac{A(b-ay)+By}{y(b-ay)}$

Tælleren skal jo blive 1 og dermed $A(b - ay) + By = 1$.

Dette giver to ligninger $Ab = 1$ og $-aAy + By = 0$ hvoraf $A = \frac{1}{b}$ og $-aA + B = 0 \Leftrightarrow B = aA = \frac{a}{b}$.

Det vil sige

$\int \frac{1}{y(b-ay)} dy = \int \frac{1}{by} dy + \int \frac{a}{b(b-ay)} dy$
$= \frac{\log(y)}{b} - \int \frac{1}{b(b-ay)} d(b - ay)$
$= \frac{\log(y)}{b} - \frac{\log(b-ay)}{b} = \frac{\log(\frac{y}{b-ay})}{b} = x + c$

Eksponential funktionen tages på begge sider $\frac{y}{b-ay} = Exp(bx + bc)$ fra dette udtryk isoleres y

$y = \frac{b\exp(bx+bc)}{1+a\exp(bx+bc)} = \frac{b/a}{1+C\exp(-bx)}$ hvor den nye integrations konstant er C.

($C = \exp(-bc)/a$)

5.7 Inhomogene lineære førsteordens differentialligninger

Den absolut sværeste differentialligning, du kommer til at møde i gymnasiet er af formen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Den kaldes en *inhomogen lineær førsteordens differentialligning*. Inhomogen hentyder til, at højresiden er forskellig fra 0. Ordenen af differentialligningen er den højest afledede (her y', men i en andenordens differentialligning ville y" også optræde).

Et eksempel på en inhomogen lineær førsteordens differentialligning er

$$y' + e^{35x} y = \cos(x)$$

Her er

$$a(x) = e^{35x}$$

$$b(x) = \cos(x)$$

Et andet eksempel kunne være

$$y' + \ln(44x - \sin(x)) \cdot y = 1$$

Her er

$$a(x) = \ln(44x - \sin(x))$$

mens b(x) er konstant lig med 1.

Løsningen til den inhomogene lineære førsteordens differentialligning er

$$y = f(x) = e^{-A(x)} \cdot \int (b(x) \cdot e^{A(x)})\, dx + ce^{-A(x)}$$

Hvor A(x) er en vilkårlig stamfunktion til a(x).

Problemet med løsningsformlen er, at integralet kan være svært at udregne. Det er ikke altid, det overhovedet lader sig gøre. Men i visse tilfælde kan vi udregne det og nå frem til differentialligningens løsninger.

Her kommer to eksempler på lineære inhomogene førsteordens differentialligninger og deres løsninger.

Eksempel 1

$$y' + 4x^3 y = 16x^3$$

Vi ser først, at

$$a(x) = 4x^3$$

og vi udregner stamfunktionen

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int 4x^3\, dx = \frac{1}{4} \cdot 4x^4 = x^4$$

Nu indsætter vi i løsningsformlen

$$y = f(x) = e^{-x^4} \int (16x^3 e^{x^4})\, dx + ce^{-x^4}$$

For at udregne integralet, bruger vi integration ved substitution

Vi sætter

$$t = x^4$$

dermed bliver

$$\frac{dt}{dx} = 4x^3$$

$$dt = 4x^3 dx$$

$$4dt = 16x^3 dx$$

Dette sætter vi nu ind i integralet.

$$y = f(x) = e^{-x^4} \int (16x^3 e^{x^4})\, dx + ce^{-x^4} = e^{-x^4} \int 4e^t\, dt + ce^{-x^4}$$

$$= e^{-x^4} \cdot 4e^t + ce^{-x^4}$$

Nu mangler vi bare at substituere tilbage og reducere en smule.

$$y = f(x) = e^{-x^4} \cdot 4e^{t} + ce^{-x^4} = e^{-x^4} \cdot 4e^{x^4} + ce^{-x^4}$$

$$= 4e^{x^4 - x^4} + ce^{-x^4} = 4e^0 + ce^{-x^4} = 4 + ce^{-x^4}$$

Eksempel 2

$$y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$$

Her er

$$a(x) = \frac{1}{x}, \quad b(x) = \sin(x)$$

Vi starter med at udregne A(x)

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$$

Nu indsætter vi i løsningsformlen:

$$y = f(x) = e^{-\ln(x)} \int \sin(x) e^{\ln(x)}\, dx + ce^{-\ln(x)}$$

Før vi reducerer løsningen, husker vi på logaritmeregnereglerne, der giver

$$-\ln(x) = 0 - \ln(x) = \ln(1) - \ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$$

Derved er løsningen

$$y = f(x) = e^{\ln(\frac{1}{x})} \int \sin(x) e^{\ln(x)}\, dx + ce^{\ln(\frac{1}{x})}$$

Nu husker vi på, at e^x og ln(x) er omvendte funktioner, så de ophæver hinanden.

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \int \sin(x) \cdot x\, dx + \frac{c}{x}$$

Nu løser vi integralet vha. partiel integration.

$$\int \overbrace{\sin(x)}^{g(x)} \cdot \overbrace{x}^{f(x)}\, dx = \overbrace{x}^{f(x)} \cdot \overbrace{(-\cos(x))}^{G(x)} - \int \overbrace{1}^{f'(x)} \cdot \overbrace{(-cos(x))}^{G(x)}\, dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x)$$

Når vi sætter dette ind på integralets plads i formlen, når vi frem til vores løsning.

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \int \sin(x) \cdot x\, dx + \frac{c}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \left(-x\cos(x) + \sin(x)\right) + \frac{c}{x}$$

$$= -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{c}{x}$$

Specialtilfælde

Mange af de øvrige differentialligninger, vi har beskæftiget os med, er specialtilfælde af den inhomogene lineære førsteordens differentialligning.

Hvis funktionerne a(x) og b(x) begge er konstante, så bliver vores differentialligning

$$y' + a \cdot y = b$$

og hvis vi omformer den, får vi

$$y' = b - a \cdot y$$

som er differentialligningen for forskudt eksponentiel vækst, med løsningen

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

Hvis a er konstant og b(x)=0, får vi

$$y' + ay = 0$$

hvilket er det samme som

$$y' = -ay$$

som er differentialligningen for eksponentiel vækst, med løsningen

$$y = f(x) = ce^{-ax}$$

Hvis a(x)=0, og b(x) er en hvilken som helt funktion, får vi

$$y' = b(x)$$

som har løsningen

$$y = f(x) = \int b(x)\,dx$$

5.8 Separation af variable

Separation af variable er en metode til at løse differentialligninger, hvor y' er ganget med en funktion, der har med y at gøre.

Vi taler om differentialligninger på formen

$$y' \cdot f(y) = g(x)$$

Nogle eksempler på denne type differentialligninger er

$$\sin(y) \cdot y' = 5x^2$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos(x) + 8$$

$$(y^2 + 7\ln(y)) \cdot y' = \frac{\cos(x)}{e^x}$$

Man kan også være ude for, at man skal rykke lidt rundt på differentialligningen for at få den på den rigtige form.

Havde vi f.eks. differentialligningen

$$y' = y^3 \cdot x^2$$

så kunne vi rykke y^3 hen på venstre side (ved at dividere med det på begge sider af lighedstegnet).

Så ville vi få denne ligning:

$$\frac{1}{y^3} \cdot y' = x^2$$

Her er $f(y)=1/y^3$, og $g(x)=x^2$.

Separation af variable går ud på, at man må integrere på begge sider af lighedstegnet. Man integrerer f(y) mht y, og g(x) mht x.

$$f(y) \cdot y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

Bemærk, at y' forsvinder, når vi integrerer.

Hvorfor ser formlen sådan ud?

Formlen bliver lettere at huske, hvis man omskriver y' på denne måde:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Så siger vores differentialligning

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Vi integrerer mht x på begge sider

$$\int f(y) \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int g(x)\, dx$$

Ligesom ved substitutionsmetoden lader vi som om

$$\frac{dy}{dx}$$

er en brøk, selvom det bare er et symbol.

$$\int f(y) \cdot \frac{dy}{\color{red}{dx}}\, \color{red}{dx} = \int g(x)\, dx$$

Nu går de to røde dx'er ud med hinanden, og vi står tilbage med

$$\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

Ovenstående er ikke et bevis, men snarere en slags argumentation for, hvorfor formlen ser ud, som den gør.

Lad os nu i stedet prøve at bruge formlen i praksis.

Eksempler

Eksempel 1

Vores differentialligning er

$$y^2 \cdot y' = 3x^2 + 5$$

Her er f(y)=y^2 og g(x)=$3x^2$+5

Nu må vi integrere venstresiden (pånær y') mht y og højresiden mht x.

$$\int y^2\,dy = \int 3x^2 + 5\,dx$$

Vi udregner integralerne og får

$$\frac{1}{3}y^3 = x^3 + 5x + c$$

Man behøver ikke sætte en integrationskonstant på hver side. Det er nok, at sætte den på højresiden.

Vi er interesserede i at bestemme y, så der er stadig lidt arbejde tilbage med at isolere y.

Først ganger vi ligningen igennem med 3.

$$y^3 = 3x^3 + 15x + c$$

Det er ligegyldigt at gange konstanten med 3, da en konstant ganget med en konstant bare giver en ny konstant.

Nu tager vi kubikroden (den tredje rod) på begge sider af lighedstegnet:

$$y = \sqrt[3]{3x^3 + 15x + c}$$

og nu har vi vores løsning.

Eksempel 2

Et andet eksempel er differentialligningen

$$y' = 2x \cdot y$$

Vi starter med at rykke y hen på venstresiden:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x$$

Nu integrerer vi på begge sider

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$$

Ved at udregne begge integraler, får vi

$$\ln(|y|) = x^2 + c$$

For at komme af med den naturlige logaritme, husker vi på, at e^x og ln(x) er omvendte funktioner. Så vi sætter venstre- hhv. højresiden som eksponenter i potenser med e som grundtal.

$$e^{\ln(|y|)} = e^{x^2+c}$$

Da e og ln "spiser hinanden"har vi kun —y— tilbage på venstresiden:

$$|y| = e^{x^2+c}$$

Nu husker vi på vores potensregneregler, og omskriver højresiden

$$|y| = e^{x^2} \cdot e^c$$

Nu ophæver vi de numeriske tegn ved at sætte et "plus-minus-tegn på højresiden

$$y = \pm e^c \cdot e^{x^2}$$

Til sidst ser vi, at e^c bare er en (positiv) konstant. Og når vi tager plus-minus-tegnet med, så får vi bare, at det kan skrives som en vilkårlig konstant, k. Derfor er løsningen

$$y = k \cdot e^{x^2}$$

6 Integralregning

I kapitlet om integral regning lærer vi om stamfunktioner, det ubestemte integral, regnereglerne for integraler, det bestemte integral samt arealet af en funktion og mellem to funktioner.

6.1 Hvad går integralregning ud på?

Integration i matematik er noget helt andet end integration i andre sammenhænge. Matematisk integration kan ses som modstykket til differentiation. I differentialregning ønskede vi at finde en afledet funktion ud fra en givet funktion. Integralregning går den modsatte vej af differentialregning. Her er man givet en funktion, som man antager allerede er en afledet funktion. Med integralregning ønsker vi at finde den funktion, stamfunktionen, som vores givne funktion er afledet fra.

Differentialregning er et håndværk med nogle klare regler, som - hvis de følges korrekt - giver mulighed for at differentiere alle (differentiable) funktioner. I modsætning til dette kan integralregning karakteriseres som en "kunstart". Der er ikke på samme måde klare regler, der giver en fremgangsmåde til at løse alle integraler.

I stedet består integralregning af en række forskellige metoder, man kan forsøge sig med, når man ønsker at løse et integral.

Integralregning har stor betydning indenfor bl.a. statistik, fysik og kemi.

6.2 Stamfunktion

Stamfunktion

Stamfunktioner betegnes ofte med store bogstaver. Hvis vores oprindelige funktion hedder f, betegner vi således dens stamfunktion(er) med F. Det, der skal til for at være en stamfunktion, er, at hvis man differentierer stamfunktionen, får man den oprindelige funktion.

Man kan med andre ord sige, at F er en stamfunktion til f hvis

$$F'(x) = f(x)$$

Hvis man får givet funktionen

$$f(x) = 2x + 1$$

kan man gætte sig frem til, at en stamfunktion til f er

$$F(x) = x^2 + x$$

Dette skyldes, at

$$F'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1 = f(x)$$

og det var jo netop det, der skulle til for, F var en stamfunktion til f. På samme måde kan man sige, at

$$F(x) = 2x^3 + 4x$$

er stamfunktion til

$$f(x) = 6x^2 + 4$$

fordi

$$F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 2 \cdot 3x^{3-1} + 4 = 6x^2 + 4 = f(x)$$

Uendeligt mange stamfunktioner

Hvis man differentierer

$$x^2$$

får man

$$2x$$

Derfor er x^2 stamfunktion til 2x.

Hvis man differentierer

$$x^2 + 4$$

får man imidlertid også

$$2x$$

det vil sige at x^2+4 også er en stamfunktion til 2x

Hvad ville der ske, hvis man differentierede x^2+5? x^2-788? Man ville få 2x i alle tilfælde. Dette skyldes, at konstanterne forsvinder (bliver til 0) når man differentierer. Lige meget hvilken konstant, vi smider på x^2, vil det altså blive en stamfunktion til 2x.

Funktionen

$$f(x) = 2x$$

har altså uendeligt mange stamfunktioner. De minder allesammen meget om hinanden. De indeholder alle sammen x^2, og det eneste, der adskiller dem, er en konstant. Derfor kan vi være smarte og skrive alle stamfunktionerne på én gang som

$$F(x) = x^2 + k$$

hvor k er en konstant.

Integrationsprøven

Hvis man er i tvivl om man er kommet frem til den rigtige stamfunktion, findes der en måde at prøve det efter på. Man differentierer simpelthen bare den formodede stamfunktion og ser, om man får den oprindelige funktion frem. Denne metode (som egentlig bare er definitionen på hvad en stamfunktion er) er så nyttig, at den har fået sit eget navn: Integrationsprøven.

Eksempelvis kunne man blive bedt om at afgøre om

$$F(x) = 2x^2 + 3x^3$$

er stamfunktion til

$$f(x) = 4x + 10x^2$$

Vi tester det vha. integrationsprøven:

$$F'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} = 4x + 9x^2 \neq f(x)$$

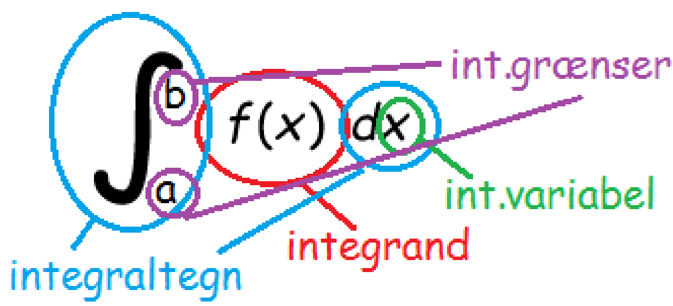
Da vi ikke nåede frem til f, er F ikke stamfunktion til f.

6.3 Ubestemt integral

Før vi går i gang med at definere bestemte og ubestemte integraler vil vi gennemgå lidt notation og terminologi.

For at vide, at man skal integrere en funktion, markerer man det med et integraltegn. Et integraltegn består af to dele. Til venstre skriver man et ”langt s”og til højre skriver man et ”d”efterfulgt af den variabel, man integrerer med hensyn til (oftest bare dx). S'et såvel som dx er bare rene symboler.

Imellem dem står den funktion, man ønsker at integrere. Denne kaldes *integranden*, men omtales tit som ”indmaden”. De bestemte integraler har derudover en øvre og en nedre integrationsgrænse, som man skriver ved hhv. top og bund af det lange s.



Ubestemt integral

I forrige afsnit definerede vi, hvad en stamfunktion er. At finde det ubestemte integral til en funktion f er simpelthen bare at bestemme en stamfunktion til f. Skrevet matematisk:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$$

Dette læses som ”det ubestemte integral af f (mht. x) er lig med en stamfunktion til f”.

Man skal huske at tilføje en konstant til den stamfunktion, man finder. På den måde har man nemlig skrevet alle stamfunktionerne op på én gang.

Lad os finde nogle ubestemte integraler.

Hvis

$$f(x) = x$$

så er

$$F(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + k \ .$$

Vi tjekker om det er rigtigt vha. integrationsprøven

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + k\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} + 0 = \frac{2}{2}x = x = f(x) \ .$$

Hvis vi i stedet har

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

så er

$$F(x) = \int x^4 + \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \ln(x) + k, \qquad x > 0 \ .$$

Igen tjekker vi efter med integrationsprøven

$$F'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 + \ln(x) + k\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^{5-1} + \frac{1}{x} + 0 = x^4 + \frac{1}{x} = f(x)$$

Bestem en stamfunktion gennem et punkt

Ovenfor har vi brugt det ubestemte integral til at finde alle stamfunktioner til en funktion. I visse tilfælde kan det være nyttigt at finde en bestemt stamfunktion.

En opgave kunne f.eks. lyde:

$$f(x) = 6x^2 + 4x$$

Find den stamfunktion til f, der går igennem punktet (-1, 3).

Først finder vi alle stamfunktionerne, og bagefter bestemmer vi k ud fra vores startbetingelse.

$$F(x) = \int 6x^2 + 4x \,\mathrm{d}x = 2x^3 + 2x^2 + k$$

(Du kan selv tjekke efter med integrationsprøven, at dette er rigtigt).

Nu ønsker vi at finde ud af hvilken af disse stamfunktioner, der går gennem (-1, 3). Vi sætter -1 ind på x's plads og 3 på stamfunktionsværdiens plads.

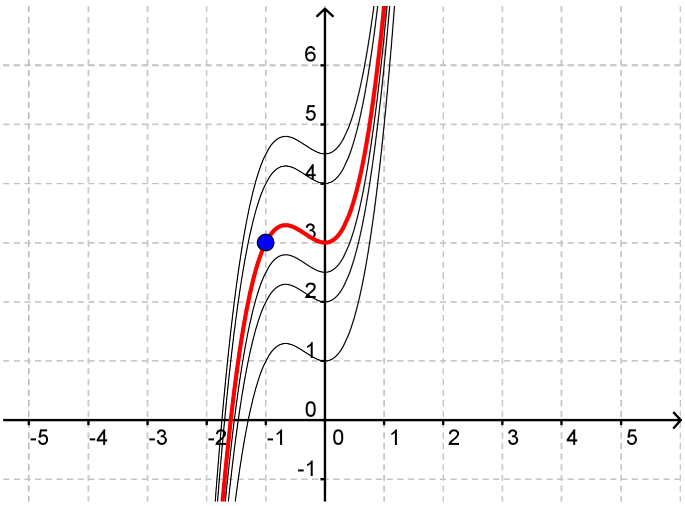
$$\begin{aligned} F(-1) &= 3 \\ 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + k &= 3 \\ -2 + 2 + k &= 3 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Den stamfunktion vi leder efter har altså $k = 3$. Derfor er svaret på opgaven

$$F(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$$

Nedenfor er indtegnet forskellige stamfunktioner til f.

Kun én af dem går igennem (-1, 3).



6.4 Integrerede funktioner

Nedenfor er en liste over, hvordan man integrerer forskellige funktioner. Det er underforstået, at man skal huske at lægge en konstant til stamfunktionerne. Man kan tjekke dem alle sammen efter vha. integrationsprøven.

$f(x)$	$F(x)$
x	$\frac{1}{2}x^2$
kx	$\frac{k}{2}x^2$
k	kx
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$

6.5 Regneregler for integraler

Ligesom med differentialregningen findes der også regneregler for, hvordan man integrerer summer og differenser af funktioner samt hvordan, man integrerer produktet af en funktion og en konstant. Alle disse regler kan eftervises vha. integrationsprøven

Sumreglen

Den første regel er sumreglen

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Hvis man skal integrere summen af to funktioner, integrerer man hver funktion for sig og lægger bagefter sammen. Med andre ord: "integralet af en sum er summen af integralerne" F.eks. kunne man blive bedt om at integrere

$$x^2 + \frac{1}{x}$$

så siger reglen, at vi skal integrere de to funktioner hver for sig

$$\int x^2 + \frac{1}{x}\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 + k_1) + (\ln(|x|) + k_2)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \ln(|x|) + k$$

hvor vi har samlet integrationskonstanterne k_1 og k_2 i en samlet konstant k.

Differensreglen

Differensreglen minder meget om sumreglen. Eneste forskel er, at man her betragter differensen af to funktioner

$$\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Med ord siger vi, at "integralet af en differens er differensen af integralerne". F.eks. kunne man blive bedt om at integrere

$$2x - 14x^6$$

Vi integrerer hvert led for sig og trækker dem fra hinanden til sidst.

$$\int 2x - 14x^6\,dx = \int 2x\,dx - \int 14x^6\,dx$$

$$= (x^2 + k_1) - (2x^7 + k_2)$$

$$= x^2 - 2x^7 + k$$

hvor vi igen har samlet integrationskonstanterne k_1 og k_2 i en samlet konstant k.

Produkt af konstant og funktion

Hvis vi ønsker at integrere produktet af en konstant og en funktion, så lader vi bare konstanten stå og ganger den på integralet af funktionen.

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

Vi har allerede benyttet denne regel et par gange ovenfor, men lad os tage et eksempel på den alligevel. Hvis vi skal integrere

$$3 \cdot x^2$$

så lader vi konstanten stå og integrerer funktionen:

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$$

$$= 3(\frac{1}{3}x^3 + k_1)$$

$$= x^3 + k$$

her har vi ladet ladet konstanten $3k_1$ blive integrationskonstanten k.

Der findes også regler for, hvordan man integrerer produktet af to funktioner samt sammensatte funktioner. Det lærer man mere om på universitetet, men en metode er integration ved substitution, som man også ser på matematik A.

6.6 Bestemt integral og areal

En af de vigtigste forskelle på det bestemte og det ubestemte integral er, at mens det ubestemte integral giver en funktion (nemlig stamfunktionen) så giver det bestemte integral et tal.

$$\int f(x)\,dx = \text{funktion}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{tal}$$

De to tal a og b kaldes integrationsgrænserne. Man udregner et bestemt integral på følgende måde

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dette betyder, at man først finder en stamfunktion til f. Denne stamfunktion skriver man inde i kantede parenteser med de to integrationsgrænser til højre. Derefter sætter man den øvre integrationsgrænse (b) ind på x's plads, hvorefter man sætter den nedre integrationsgrænse (a) ind på x's plads og trækker fra.

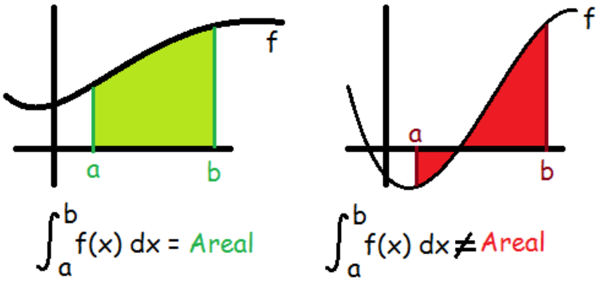
Et eksempel kunne være.

$$\int_0^2 \underbrace{6x^2}_{f(x)}\,dx = [\underbrace{2x^3}_{F(x)}]_0^2 = \underbrace{2\cdot 2^3}_{F(b)} - \underbrace{2\cdot 0^3}_{F(a)} = 16$$

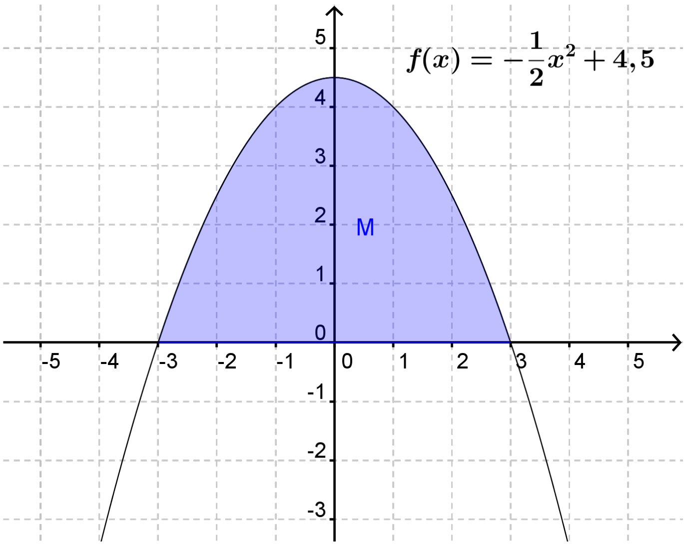
Bemærk, at vi bare fandt en tilfældig stamfunktion til f uden at tænke på at lægge en integrationskonstant til. Sådan er det altid med bestemte integraler.

Areal

Ovenfor sagde vi, at det bestemte integral giver et tal. Nogle gange er dette tal lig med arealet mellem funktionen f og x-aksen i intervallet [a;b]. Men det er ikke altid. Det er kun hvis f er positiv på hele intervallet [a;b]. Dvs. at grafen for f ligger ovenover x-aksen på hele intervallet.



Lad os tage et eksempel. Vi ønsker at finde arealet af figuren M på nedenstående tegning.



Vi kan se, at funktionen f er positiv (grafen ligger over x-aksen) på hele intervallet [-3;3].

Derfor vil det bestemte integral med integrationsgrænserne -3 og 3 give arealet af M.

$$Areal_M = \int_{-3}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + 4,5\,dx = [-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + 4,5x]_{-3}^{3}$$

$$= [\frac{-1}{6}x^3 + 4,5x]_{-3}^{3} = \frac{-1}{6} \cdot 3^3 + 4,5 \cdot 3 - (\frac{-1}{6} \cdot (-3)^3 + 4,5 \cdot (-3))$$

$$= \frac{-27}{6} + 13,5 - (\frac{27}{6} - 13,5) = \frac{-54}{6} + 27 = -9 + 27 = 18$$

Arealet af M er altså 18.

6.7 Areal mellem to grafer

Hvis vi ønsker at finde arealet mellem to grafer, kan vi også bruge det bestemte integral. Det kræver, at den ene funktion har større funktionsværdier end den anden på hele intervallet [a;b]. Hvis f har større funktionsværdier end g, er arealet mellem de to funktioner givet ved

$$Areal_{fg} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Bemærk, at det er ligegyldigt, om de to funktioner har positive eller negative funktionsværdier på intervallet, når bare f har større funktionsværdier end g.

Et eksempel kunne være, hvis vi ønskede at finde arealet af den punktmængde M, der er afgrænset af

$$f(x) = -0,5x^2 + 3x - 3$$

og

$$g(x) = x - 3$$

Først skal vi finde integrationsgrænserne a og b. Det er de punkter, hvor de to funktioners grafer skærer hinanden. Disse findes ved at sætte de to forskrifter lig hinanden.

$$f(x) = g(x)$$

$$-0,5x^2 + 3x - 3 = x - 3$$

$$-0,5x^2 + 2x = 0$$

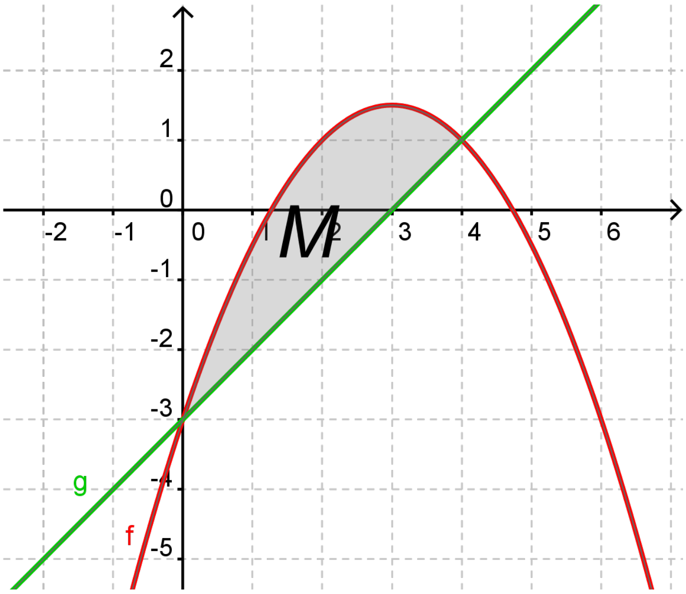
Dette er en andengradsligning, som vi løser ved nulreglen. Først sætter vi -0,5x uden for parentes.

$$-0,5x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee \; x = 4$$

Integrationsgrænserne må altså være a=0 og b=4.

Vi skitserer graferne for at finde ud af hvilken af funktionerne, der er størst på intervallet [0;4].



Vi kan se, at f har større funktionsværdier end g på hele intervallet [0;4].

Hvis vi ikke havde mulighed for at tegne graferne, så kunne vi have taget en vilkårlig x-værdi i intervallet og set hvilken funktionsværdi, der var størst. Mellem to skæringspunkter vil den ene nemlig være større end den anden i alle punkter, og derfor kan man frit vælge. F.eks.

$$f(2) = -0,5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 3 = -2 + 6 - 3 = 1$$

$$g(2) = 2 - 3 = -1$$

Nu ved vi hvilken funktion, der er størst, og vi kender integrationsgrænserne. Så er det bare med at komme i gang med selve integrationen.

$$A_M = \int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^4 -0,5x^2 + 3x - 3 - (x-3)\,dx$$

$$= \int_0^4 -0,5x^2 + 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1}\right]_0^4$$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2\right]_0^4 = \frac{-1}{6} \cdot 4^3 + 4^2 - \left(\frac{-1}{6} \cdot 0^3 + 0^2\right) = \frac{-64}{6} + 16 - 0$$

$$= 5,333...$$

7 Funktioner af to variable

7.1 Funktioner af to variable

Vi har allerede kigget meget på funktioner, hvor funktionsværdien kun afhænger af én variabel, typisk x. Altså $f(x)$.

Funktioner af to variable er ikke så meget anderledes end de funktioner af én variabel som du allerede har stiftet bekendtskab med i tidligere afsnit.

Forskellen er blot, at der i funktionen indgår to uafhængige variable. Funktionsværdien afhænger således af to parametre i stedet for blot en enkelt og det angives såldes: $f(x,y)$.

Et eksempel på dette kan være:

$f(x,y) = x - y + 10.$

Her afhænger funktionsværdien både af x og y.

Vi kan på sædvanlig vis evaluere vores funktion:

$f(0,10) = 0 - 10 + 10 = 0,$

Eller

$f(1,4) = 1 - 4 + 10 = 7.$

Lidt mere teknisk kan man sige at denne funktion tager et koordinatsæt fra $\mathbb{R}^2$ og afbilder dette over i $\mathbb{R}$.

7.2 Partielle afledede

Partielle afledede er en udvidelse af almindelig differentiation, der bliver brugt når man har at gøre med funktioner af flere variable. Det handler kort og godt om, at man på sædvanlig vis differentierer for én variabel, mens den anden variabel sættes som en konstant.

Alle regneregler for differentiation i én variabel $+, -, *, /$, sammensat funktion og invers funktion kan også benyttes ved partielle afledede.

Denne fremgangsmåde kan altså ikke bare anvendes til funktioner af to variable, men også til funktioner af flere variable.

Der er forskellig notation for de partielle afledede. Det kan f.eks. være

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) \quad \text{og}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y)$$

I den første af de to funktioner differentierer vi $f(x,y)$ i forhold til x. Altså anser vi blot y som en konstant i funktionen.

Eksempel

Vi kigger på ligningen: $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Hvis man ser y som en konstant, så er den partielle afledede ift. x $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$

Hvis man i stedet ser x som en konstant, så er den partielle aflede ift. y $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

7.3 Gradient

Når man arbejder med funktioner af flere variable, kan man finde det der hedder gradienten af funktionen. Gradienten er en vektor, der fortæller hvilken retning funktionen vokser mest i et givet punkt, og hvor meget funktionen vokser i den retning. Gradienten af en funktion $f(x,y)$ skrives $\nabla f(x,y)$, hvor ∇ kaldes *nabla-operatoren*, og betegner i to dimensioner vektoren:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Symbolet $\equiv$ betyder, at noget er defineret på denne måde. For eksempel er nabla defineret som ovenfor. Når vi tager gradienten af vores funktion $f(x,y)$ får vi altså:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$$

Det første koordinat er funktionen partielt afledt med hensyn til x, og det andet koordinat er funktionen partielt afledt med hensyn til y. Nabla-operatoren findes også i flere dimensioner, for eksempel (x,y,z):

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Men i denne gennemgang holder vi os til to dimensioner. Gradienten i et bestemt punkt, (x_0, y_0) er altså givet ved:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)\right)$$

Den vektor vi får ud, kaldes gradientvektoren, og vil pege i den retning funktionen vokser mest, og størrelsen af den vil vise, hvor meget funktionen vokser, som nævnt tidligere.

Lad os tage et eksempel. Vi ser på funktionen:

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y + 7$$

Vi ønsker nu at bestemme gradientvektoren i punktet (5,2). Til at starte med finder vi gradienten af funktionen. For at finde denne, skal funktionen partielt differentieres, både med hensyn til x og y:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + 4y + 7) = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + 4y + 7) = 3x + 4$$

De to partielt afledte funktioner er nu de to koordinater i gradienten:

$$\nabla f(x,y) = (2x + 3y, 3x + 4)$$

For at finde gradientvektoren i punktet (5,2), skal vi nu bare indsætte værdierne $x = 5$ og $y = 2$ i gradienten:

$$\nabla f(5,2) = (2 \cdot 5 + 3 \cdot 2, 3 \cdot 5 + 4) = (16, 19)$$

Og så har vi altså vores gradientvektor for funktionen i punktet (5,2).

7.4 Stationære punkter

Stationære punkter for en funktion $f(x,y)$ er de punkter, hvor funktionens gradient er lig nulvektoren. Det betyder altså, at begge koordinater i gradienten skal være 0, dvs.:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$

Det er i de stationære punkter vi kan finde de såkaldte ekstrema, altså lokale minimum og maksimum. Vi kan også finde det der kaldes et saddelpunkt, som vil blive beskrevet senere.

Hvis vi for eksempel ser på funktionen $f(x,y) = 3x^3 + 4y^3 + 6xy^2 - 9x^2$. De partielt afledede er:

$$f_x(x,y) = 9x^2 + 6y^2 - 18x \quad \text{og} \quad f_y(x,y) = 12y^2 + 12xy$$

Vi starter med at se på den y-afledede. Vi sætter et y udenfor parentesen, og bruger nulreglen til at bestemme to mulige værdier for y:

$$12y^2 + 12xy = 0 \Leftrightarrow 12y(y+x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -x$$

Nu løser vi ligningen for den x-afledede i hvert af de to tilfælde, først $y = 0$:

$$y = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6y^2 - 18x = 9x^2 - 18x = 9x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Og nu y= -x:

$$y = -x \Leftrightarrow 9x^2 + 6x^2 - 18x = 15x^2 - 18x = x(15x - 18) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}, y = -\frac{6}{5}$$

Vi har nu fundet tre stationære punkter. For $y = 0$ har vi mulighederne $x = 0$ og $x = 2$. For $y =$ -x har vi muligheden $x = \frac{6}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$. Vores tre punkter er derfor:

$$(0,0), (2,0) \quad \text{og} \quad \left(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right)$$

Arten af et stationært punkt

De stationære punkter vi har fundet, kan enten være minima, maksima eller saddelpunkter. For at bestemme det stationære punkts art, må vi indføre matrixregning. En matrix kan ses lidt som en vektor, som både har flere rækker og søjler. Vi starter med at indføre følgende forkortelser for de andenafledede funktioner:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = f_{xx} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = f_{yy} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = f_{xy}$$

I udtrykket for funktionen afledt både med hensyn til y og x kan man se, at det er ligegyldigt hvilken rækkefølge man differentierer i, det giver det samme. Dette gælder altid, og kaldes Youngs sætning. Når man har de tre størrelser, sættes de sammen til det, der kaldes Hesse-matricen:

$$Hf \equiv \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Når man har fundet alle elementerne til Hesse-matricen og opstillet den, skal man løse det, der kaldes en *egenværdiligning* eller *determinantligning*. Helt generelt finder man determinanten af en 2x2-matrix på følgende måde:

$$\left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = a \cdot d - b \cdot c$$

De lodrette streger omkring matricen angiver, at det er determinanten. I en egenværdiligning trækker man nu en værdi, som vi kan kalde *z*, fra i diagonalen, og sætter determinanten af den nye matrix lig 0. I praksis gøres det sådan:

$$\left| \begin{pmatrix} a - z & c \\ b & d - z \end{pmatrix} \right| = (a - z) \cdot (d - z) - b \cdot c = 0$$

Og vi ønsker så at finde løsningerne for z. Hvis vi vender tilbage til vores Hesse-matrice ser det således ud:

$$\left|\begin{pmatrix} f_{xx}-z & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}-z \end{pmatrix}\right| = (f_{xx}-z)\cdot(f_{yy}-z) - f_{xy}\cdot f_{xy} = 0$$

For at bestemme arten af et stationært punkt, skal vi indsætte punktets koordinater, og løse ligningen for z_1 og z_2. Fortegnet på z_1 og z_2 bestemmer nu arten efter reglerne:

Fortegn	Art
z_1 og z_2 er begge positive	f har lokalt minimum i (x_0, y_0)
z_1 og z_2 er begge negative	f har lokalt maksimum i (x_0, y_0)
z_1 og z_2 har forskelligt fortegn	f har hverken lokalt minimum eller maksimum i (x_0, y_0), det er et saddelpunkt
Enten $z_1 = 0$ eller $z_2 = 0$	Ingen konklusion

Eksempel

Hvis vi går tilbage til eksemplet fra før, med funktionen $f(x, y) = 3x^3 + 4y^3 + 6xy^2 - 9x^2$, kan vi nu finde de andenafledede, og opstille Hesse-matricen:

$$f_{xx} = 18x - 18 \quad f_{yy} = 24y + 12x \quad f_{xy} = 12y$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 18x-18 & 12y \\ 12y & 24y+12x \end{pmatrix}$$

Hvis vi starter med punktet (0,0):

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -18-z & 0 \\ 0 & 0-z \end{pmatrix}\right| = -z(-18-z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -18, z_2 = 0$$

Siden $z_2 = 0$ kan vi desværre ikke sige noget om punktets art. Vi kan prøve med punktet (2,0):

$$Hf(2,0) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 18-z & 0 \\ 0 & 24-z \end{pmatrix}\right| = (18-z)(24-z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 18, z_2 = 24$$

Nu har vi to positive værdier af z, og derfor kan vi konkludere, at funktionen har et lokalt minimum i (2,0).

Alternativ metode til at bestemme arten af et stationært punkt

Der findes en alternativ måde at bestemme arten af et stationært punkt. Vi kan kalde vores andenafledede funktioner i punktet (x_0, y_0), som vi ønsker at undersøge, for:

$$r = f_{xx}(x_0, y_0),$$

$$s = f_{xy}(x_0, y_0),$$

$$t = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Så kan man se på udtrykket $r \cdot t - s^2$ og r, og ud fra dette afgøre arten af det stationære punkt:

- Hvis $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r > 0$: Funktionen har lokalt minimum i (x_0, y_0).
- Hvis $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r < 0$: Funktionen har lokalt maximum i (x_0, y_0).
- Hvis $r \cdot t - s^2 < 0$: Funktionen har et saddelpunkt i (x_0, y_0).
- Hvis $r \cdot t - s^2 = 0$: Ingen konklusion.

7.5 Tangentplan

Ligesom man kan finde tangentplanen til et bestemt punkt på en kugle, kan man også finde en tangentplan for en funktion af to variable. Det er den plan, der kun rører funktionen lige præcis i ét punkt, omkring der hvor vi finder planen - ligesom en tangentlinje til en funktion af én variabel. For en kugle kan man sige med sikkerhed, at tangentplanen kun rører et eneste punkt, fordi alle punkter på kuglen kan ses som lokale maxima. Men når det kommer til funktioner af flere variable, så kan det godt være, at planen skærer kurven igen et andet sted, ligesom med en tangentlinje.

Den generelle ligning for tangentplanen til en funktion $f(x, y)$ i et punkt (x_0, y_0) er givet ved:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Hvor $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ angiver den partielt afledede i forhold til x i punktet (x_0, y_0). Vi skal altså kende vores funktion, samt vores punkt vi ønsker at bestemme tangentplanen i. Dette punkt skal ligge på kurven for $f(x, y)$.

Eksempel

Lad os se på funktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 3y + 1$, og finde tangentplanen i punktet $(3, 5, f(3, 5))$. Det første vi gør er, at bestemme funktionens værdi i (3,5):

$$f(3, 5) = 2 \cdot 3^2 + 5^2 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 1 = 18 + 25 - 12 - 15 + 1 = 17$$

Nu bestemmer vi de partielt afledede og evaluerer dem i punktet (3,5):

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 4x - 4$$

$$f_x(3, 5) = 4 \cdot 3 - 4 = 8$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y - 3$$

$$f_y(3, 5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

De fundne værdier kan nu indsættes i udtrykket for tangentplanens ligning:

$$z = 17 + 8(x - 3) + 7(y - 5) = 8x + 7y - 42$$

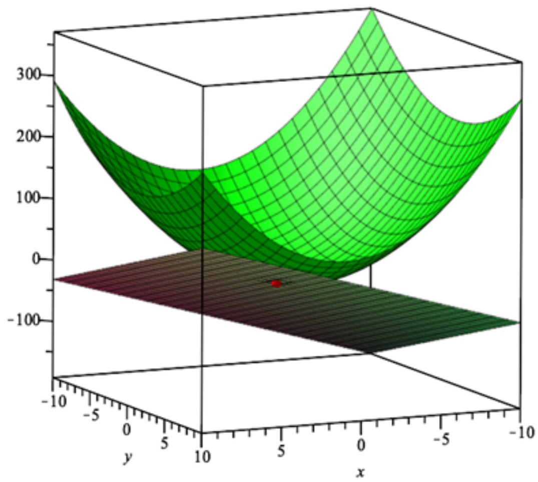
Omformer vi lidt får vi tangentplanens ligning i punktet $(3, 5, 17)$:

$$8x + 7y - z = 42$$

Det er altså ligningen for den plan, der lige rører vores funktion i det bestemte punkt. Ud fra denne ligning kan vi aflæse en normalvektor til planen fra koefficienterne:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nedenfor ses et plot af funktionen (den buede, grønne kurve), tangentplanen og punktet hvor de skærer hinanden:



I videoen kan du se, hvordan plottet er blevet lavet, og selv lære hvordan man plotter tangentplaner:

7.6 Niveaukurver

Du har sikkert set et kort over et landskab med mange højdeforskelle, hvor der var tegnet kurver ind, og måske endda farveforskelle. Disse kurver er det der kaldes niveaukurver, og fortæller hvilken højde man befinder sig i. Hvis man går langs en kurve, går man hele tiden i den samme højde, og man vil derfor ofte se noget der minder om cirkler rundt om bjerge på kortet. Til at beskrive kurver, der har højdeforskelle, bruger man funktioner af to variable. Man kan finde niveaukurver til funktionerne, der fortæller langs hvilke kurver funktionen har den samme værdi.

Hvis man har en funktion af to variable, $f(x, y)$, kan man finde niveaukurverne ved at sætte funktionen lig med en konstant, som vi kan kalde c. Vi kan således definere det, der kaldes *niveaumængden*:

$$K_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$

Måden dette skal læses på er, at niveaumængden K_c indeholder alle de punkter (x, y), der er den del af det to-dimensionelle koordinatsystem ((x, y)-planen), hvorom det gælder at $f(x, y) = c$. Det er altså de punkter der opfylder at funktionens værdi er c.

Vi kan for eksempel se på funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$. Hvis vi omformer den lidt, får vi noget vi kender:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

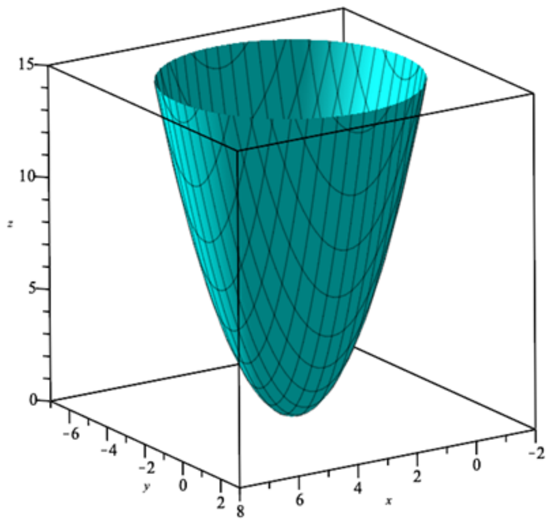
Sættes funktionen lig konstanten c får vi cirklens ligning, for en cirkel med centrum i (3,-2) og radius $\sqrt{c}$:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = c$$

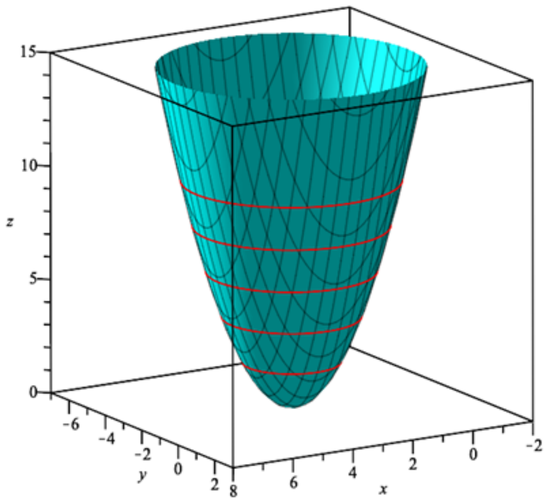
Da vi har to kvadrerede led på venstresiden, kan vores ligning ikke antage negative værdier. Den kan kun være positiv eller 0 i punktet (3,-2). Vi kan derfor opskrive vores niveaumængde i tre forskellige tilfælde:

$$K_c = \begin{cases} c < 0 & K_c \in \emptyset \\ c = 0 & K_c = \{(3,-2)\} \\ c > 0 & K_c = \text{cirkel med centrum i (3,-2) og radius} \sqrt{c} \end{cases}$$

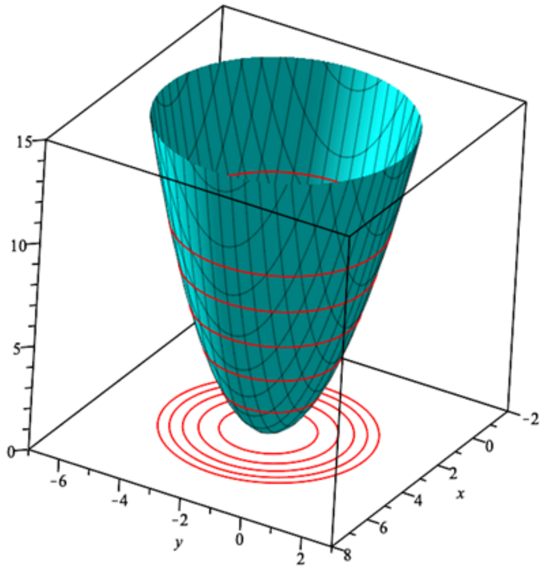
Her betyder Ø den tomme mængde, betydende at funktionen ikke har værdier mindre end 0 nogen steder. Det hele bliver lidt nemmere at forstå hvis man kan se det for sig. Vi kan starte med at plotte vores funktion $f(x,y)$, for at se hvordan den egentlig ser ud:



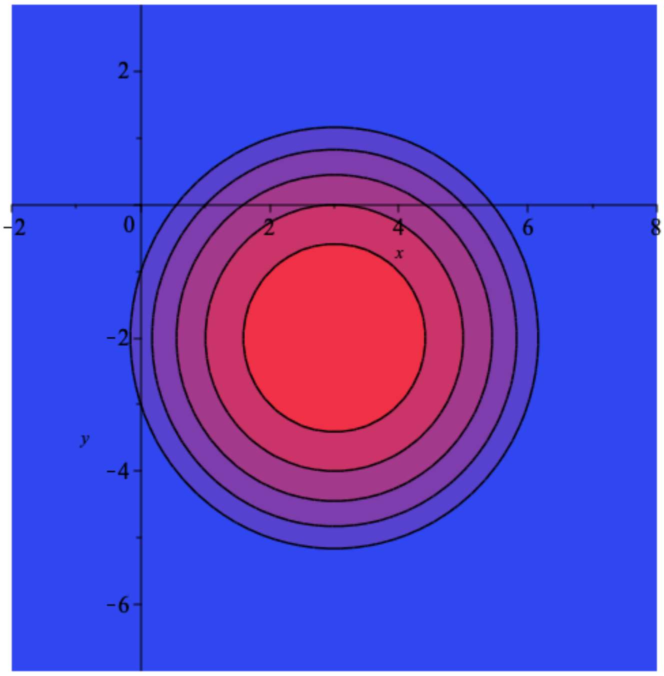
Vi kan se at funktionen har et minimum i (3,-2) med værdien 0. Derfor giver det mening, at der ikke er nogle niveaukurver tilhørende værdier mindre end 0. Vi kan også allerede nu se, at det giver mening, at funktionens niveaukurver vil være cirkler. Vi plotter nu figuren med nogle af dens niveaukurver, som farves røde:



Her er der plottet kurver i højderne 2, 4, 6, 8 og 10, men vi kunne have fortsat uendeligt højt op. Som vi forudsage har kurverne form som cirkler, der bliver større og større for større c. Nogle steder kaldes det vi har plottet her for *højdekurver*, og niveaukurverne er så højdekurverne projiceret ned i (x, y)-planet. Det kan ses her:



Cirklerne i planen angiver niveaukurverne, og det er en måde at afbilde noget tre-dimensionelt i det to-dimensionelle plan. Det er de kurver, man vil se på et landkort, der viser højder. Til sidst kan vi lave et konturplot, hvor de forskellige niveauer er blevet farvet, så man bedre kan visualisere højdeforskellene:



På det sidste plot er det også endnu tydeligere, at cirklerne alle har centrum i punktet (3,-2). Det kunne for eksempel være en afbildning af en bakke, som har sit toppunkt i (3,-2), og med en radius på lidt over 3.

I videoen nedenfor kan du se, hvordan alle plots i dette afsnit er lavet, og du kan selv lære at plotte niveaukurver, højdekurver og konturplots i Maple.

8 Statistik

8.1 Konfidensintervaller og frihedsgrader

8.1.1 Konfidensintervaller

Hvis vi ønsker at bestemme middelværdien for højden af alle gymnasieelever i Danmark, kan vi fx udvælge en 1.g-klasse i Københavnsområdet og beregne middelværdien for de studerendes højde i denne klasse.

Den beregnede middelværdi er så et estimat for middelværdien for højden for alle gymnasieelever i Danmark. Hvis vi nu vælger en anden klasse og igen beregner middelværdien, så får vi et andet estimat for middelværdien.

Dette estimat ligger sikkert tæt på den første beregnede middelværdi uden at være identisk med denne. Vi kalder det at udvælge en gymnasieklasse for tage en stikprøve ud af den samlede **population** bestående af samtlige gymnasieelever i Danmark.

Stikprøvens middelværdi kaldes også for et punktestimat for populationens middelværdi. Men hvis to forskellige stikprøver giver to forskellige estimater for middelværdien, hvordan kan vi så stole på estimatet? Hvad nu hvis vi i stedet for bare et enkelt punktestimat kunne bestemme et interval, som med stor sandsynlighed indeholder den rigtige ukendte middelværdi for hele populationen?

Et sådan interval kaldes også for et konfidensinterval. Et konfidensinterval er kendetegnet ved et niveau $1-\alpha$ og en typisk værdi for α er 5%, hvor man så taler om et $1-\alpha = 95\%$-konfidensinterval.

Formel

Hvis vi antager, at gymnasieelevers højde er normalfordelt med ukendt middelværdi μ og en kendt spredning på σ, så er formlen for et 95%-konfidensinterval

$$95\%\text{-konfidensinterval} = \left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

hvor

- $\bar{x}$ er stikprøvens middelværdi og
- n er stikprøvens størrelse.

Vi vender tilbage til konstanten 1,96.

Eksempel

Hvis vi antager at gymnasieelevers højde er tilnærmelsesvist normalfordelt med ukendt middelværdi μ og standard afvigelse på $\sigma = 10$cm, og vi har følgende stikprøve på 27 elevers højde (målt i cm)

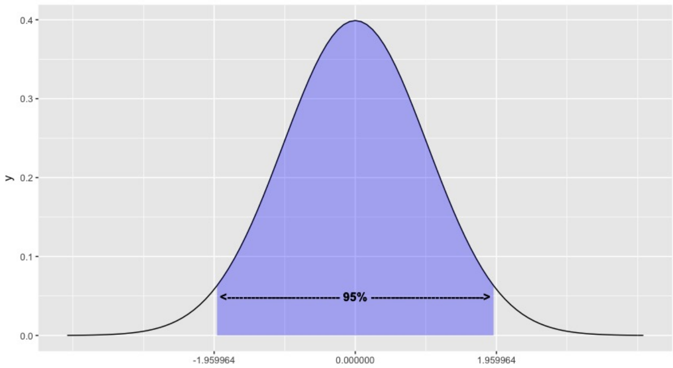
$$175, 161, 177, 173, 179, 174, 173, 184, 184, 170, 169, 175, 175, 186,$$
$$169, 169, 176, 166, 181, 175, 179, 179, 183, 166, 179, 160, 170$$

så kan vi beregne stikprøvens middelværdi til 174,33 og derfor er 95%-konfidensintervallet bestemt ved
$\left[174,33 - 1,96\frac{10}{\sqrt{27}}; 174,33 + 1,96\frac{10}{\sqrt{27}}\right]$

$$\begin{aligned} &= \left[174,33 - 3,77; 174,33 + 3,77\right] \\ &= \left[170,56; 178,10\right] \end{aligned}$$

Konstanten 1,96

Hvor kom konstanten 1,96 fra som indgik i formlen for 95%-konfidensintervallet? Hvis vi kigger for fordelingsfunktionen for en normalfordeling med middelværdi 0 og varians 1, så er det samlede areal under kurven 1. Hvis vi derfor er interesseret i at finde det område under grafen, som dækker 95% af arealet, skal vi altså fjerne 2,5% af arealet i begge ender.



De $\pm 1,96$ svarer præcis til det område under kurven som giver en areal på 95%. Andre ofte anvendte konfidensintervaller er angivet i denne tabel.

Konfidensniveau	konstant
68%	1
90%	1,645
95%	1,96
99%	2,58

Hvis man skal regne fx et 90% konfidensinterval skal konstanten 1,96 erstattes med 1,645.

Får man brug for at bestemme andre konstanter kan man bruge Microsoft Office Excel til at udregne disse. Skal man bestemme et 92% konfidensinterval kan man finde konstanten med funktionen NORMSINV i Excel. Her skal man så udregne $1-\alpha = 0,92$ så $\alpha = 0,08$ og herefter indsætter man

$$\text{NORMSINV}\Big(1 - \frac{0,08}{2}\Big) = 1,75$$

Bruger man den danske version af Excel, hedder funktionen STANDARD.NORM.INV. Matlab fra MathWorks har tilsvarende funktionalitet. Her bruger man funktionen norminv

$$\text{norminv}\big([0.04; 0.96], 0, 1\big),$$

hvor 0 angiver middelværdien og 1 variansen.

Konfidensinterval for binominalfordelinger

Ved en rundspørge på et gymnasie har 62 af 1.g. elever sagt, at de var tilfredse med introduktionsforløbet. 29 elever svarede, at de ikke var tilfredse.

Hvordan bestemmer man et 95%-konfidens-interval for andelen af tilfredse elever? Hvis X er antallet af elever som er tilfredse med introduktionsforløbet ud af en stikprøve på $62 + 29 = 91$, så er X binominalfordelt $X \sim b\big(n = 91, p\big)$

Vi har her en fast med ukendt sandsynlighed for at der bliver succes. Denne paramater kaldes sandsynlighedsparameteren og betegnes p. Sandsynlighedsparameteren kan estimeres til $\widehat{p}$

$$\widehat{p} = \frac{62}{91} = 0,68$$

Dette er en approksimation af $\widehat{p}$, der kun gælder når stikprøven er tilpas stor, og når p ikke er meget lille eller meget stor.

Formel

Formlen for et 95%-konfidens-interval i binominalfordelingen er

$$\left[\widehat{p}-1,96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}};\widehat{p}+1,96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$

Indsætter vi i denne formel findes konfidensintervallet

$$\left[0,68-1,96\sqrt{\frac{0,68(1-0,68)}{n}};0,68+1,96\sqrt{\frac{0,68(1-0,68)}{n}}\right]$$

$$=\left[0,58;0,78\right]$$

Altså vil tilfredsheden med introforløbet med 95% sikkerhed være mellem 58% og 78%.

8.1.2 Frihedsgrader

Hvad er en frihedsgrad?

Ordet frihedsgrad dækker over hver enkelt uafhængigt datapunkt, der kan variere og stadigvæk indgå i udregningen af en parameter. Frihedsgrader er nogle gange noteret med det græske bogstav ν (Ny), DOF (Degrees Of Freedom) eller bare *df*.

Frihedsgrader i en χ^2-test

I Tabel 1 nedenfor er givet en 2×2 tabel. En sådan 2×2 tabel vil have 1 frihedsgrad, da de forskellige observationer skal summere op til det totale antal observationer, her *n=20*.

	A_1	A_2	Total
B_1	?	5	5+?
B_2	5	5	10
Total	5+?	10	20

I de udvidede tilfælde med r rækker og k kolonner gælder at *df=(r-1)* $\times$ *(k-1)*. **NB:** I tilfældet med r rækker og *1* kolonne, gælder at *df=r-1*.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Total
B_1	?	?	5	15	10	40
B_2	?	?	0	20	5	40
Total	10	15	5	35	15	80

Tabel 2 vil have 4 frihedsgrader. Det forstås at man frit vil kunne variere indholdet af 4 celler, og resten vil så være låst i forhold til de bestemmelser, der gør sig gældende.

Frihedsgrader i en t-test

Hvis man har en talrække på n tal: $n_1, n_2, ...n_i$ vil man have $i-1$ frihedsgrader til at udregne gennemsnittet. Hvis man tester for gennemsnittet med 10 måleresultater vil man derfor have

$df = 10 - 9$frihedsgrader. Hvis man efterfølgende også estimerer variansen vil man have endnu en frihedsgrad mindre, da den første er brugt til at udregne gennemsnittet, som indgår i udregningen af varians. Dette er vigtigt at have in mente når man udregner konfidensintervaller hvor

$CI_\alpha = \bar{x} \pm t(\alpha, df) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$, hvor $t(\alpha, df)$ er din t-score på konfidensniveau α med df frihedsgrader.

8.2 Multipel regression

8.2.1 Multipel regression

Introduktion

Fra simpel lineær regressions analyse ved vi, hvordan man med mindste kvadraters metoden bestemmer den lineære funktion, som bedst passer til en række observationer i 2D planen.

Vi har altså her observationer (y_i, x_i) for $i = 1, \dots, n$ og ønsker at bestemme konstanterne a og b på en sådan måde, at den lineære funktion $y = a + bx$ ligger så tæt på alle observationer (y_i, x_i) som muligt.

Verden er dog sjældent så simpelt indrettet, at man kan beskrive en *afhængig*variabel y med kun en enkelt *forklarende* variabel x.

Multipel regression er en udvidelse af simpel regression, hvor vi i stedet for en enkelt forklarende variabel har to eller flere forklarende variable. Forklarende variable kaldes til tider også for *kovarianter* mens afhængige variable somme tider omtales som *respons* variable.

Model

Vi har n observationer $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ hvor $i = 1, \dots, n$ og ønsker at bestemme konstanter $b_0, b_1, b_2, \dots, b_p$, så funktionen $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots b_px_p$ ligger så tæt på alle punkterne $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ som muligt. Konstanterne kaldes for regressionskoefficienterne.

Bemærk, at der nu er et dobbelt indeks på x'erne. Det er nødvendigt, da vi nu har p forklarende variable i stedet for blot en enkelt forklarende variabel. Så når vi skriver $x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad$ og $\quad j = 1, \dots, p$ er der tale om den j'te forklarende variable for den i'te observation. Vi kan stille observationerne op i en tabel

Observation	Afhængig variabel	Forklarende variable			
	Y	X_1	X_2	$\cdots$	X_p
1	y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}
3	y_3	x_{31}	x_{32}	$\cdots$	x_{3p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{np}

for på den måde at vise, at vi har p forklarende variable og n observationer.

Regressionskoefficienter bliver normalt fundet (estimeret) ved brug af mindste kvadrater metoden, hvor man vælger $b_0, b_1, \dots, b_p$ således at udtrykket

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1x_{i1} - b_2x_{i2} - \cdots - b_px_{ip}\right)^2$$

minimeres. SSE er engelsk for Sum of Squares Errors. Dette er samme fremgangsmetode som kendes fra simpel lineær regression. b_0 kaldes for skæringen og de øvrige b'er kaldes hældninger.

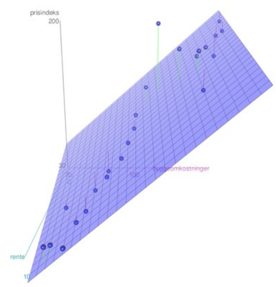
Formlen for koefficienterne $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ er noget mere kompliceret i det generelle tilfælde, så den springer vi over her. Men nedenfor gennemgår vi et eksempel på, hvordan man kan bestemme koefficienter ved brug af Microsoft Excel.

Residualer

Når vi har bestemt regressionskoefficienterne $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ så kan vi udregnede de *fittede* værdier for observationerne $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ hvor $i = 1, \ldots, n$. For den i'te observation er den fittede værdi $\widehat{y_i} = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \cdots b_p x_{ip}$ og vi definerer residualer som værende forskellen e_i mellem observationen y_i og den fittede værdi $\widehat{y_i}$ $e_i = y_i - \widehat{y_i}$ Bemærk at den før omtalte ligning for SSE også kan skrives $SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2} - \cdots - b_p x_{ip}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{y_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$ så når vi finder minimum for SSE, så minimerer vi residualerne eller med andre ord - forskellen mellem de observerede og fittede værdier.

Visualisering af løsningen

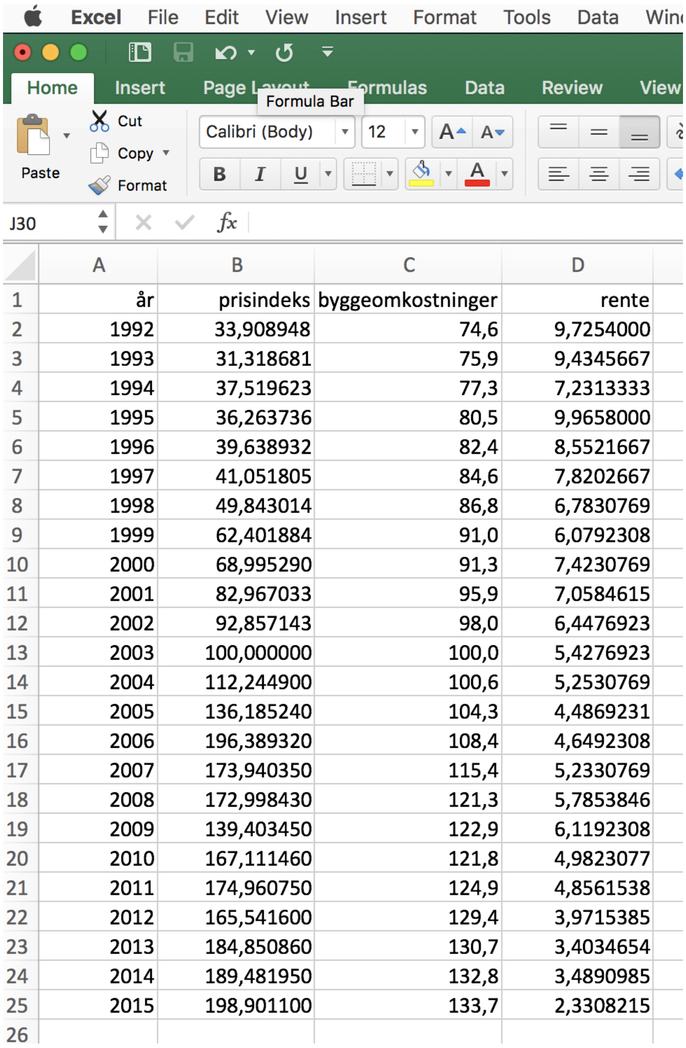
I tilfældet med simpel regression bestemmer vi en ret linje som passer bedst til observationerne. Det er umuligt at visualisere multipel regression i det generelle tilfælde. For det særlige tilfælde, hvor vi har to forklarende variable x_1 og x_2 og dermed modellen $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ så kan vi stadig visualisere løsningen. Vi kan tænke på observationerne $(x_{i1}, x_{i2}, y_i), i = 1, \ldots, n$ som punkter i rummet i 3D koordinatsystemet med akserne X_1, X_2 og Y.



Løsningen er nu ikke længere en ret linje, men derimod den plan som ligger tættest på alle punkterne. På figuren kan vi også se residualerne - de er plottet som linjer mellem observationerne og planen. Nogle observationer ligger over planen og er markeret med en grøn linje, mens andre observationer ligger under planen og er markeret med en rød linje. Det kan være svært ud fra en enkel vinkel at forestille sig, hvordan løsningen ud. Prøv at se på følgende optagelse, hvor vi kan se planen fra en række forskellige vinkler.

Eksempel

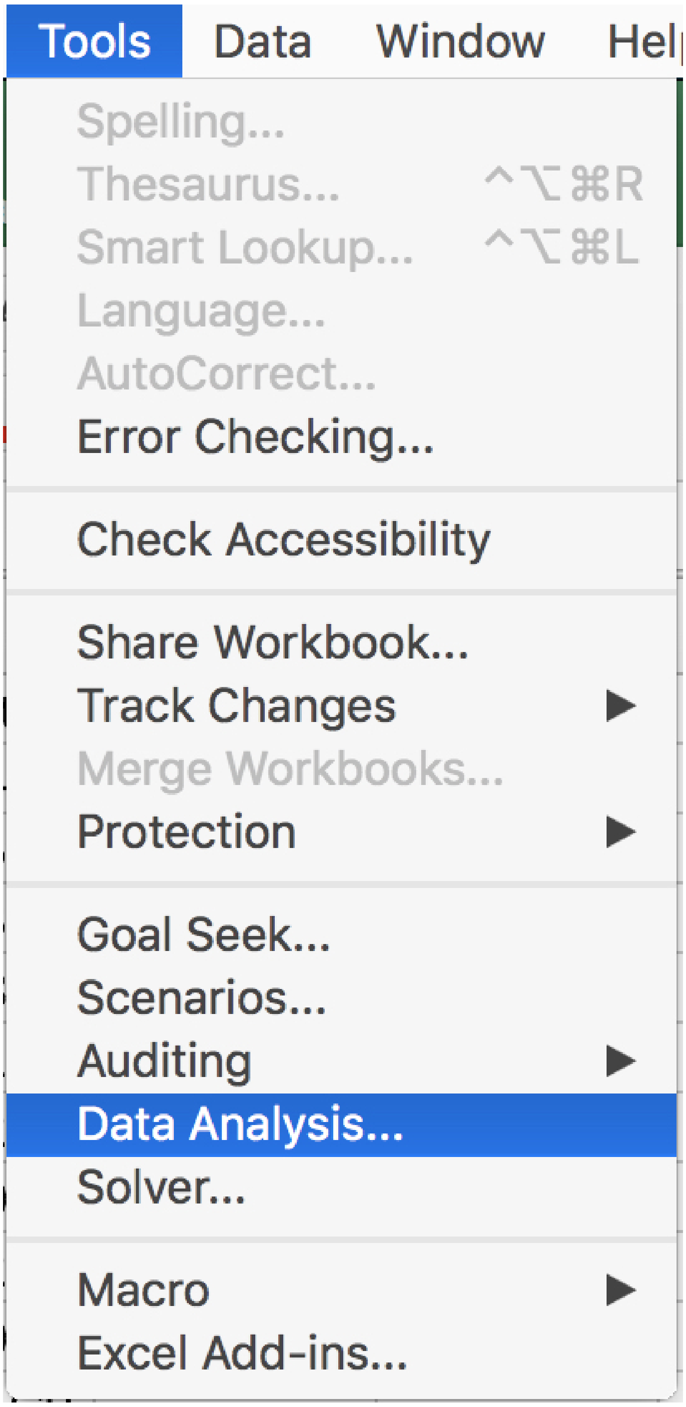
Lad os se på et (simplificeret) eksempel på multipel regressionsanalyse. Eksemplet er hentet fra opgaven Prisdannelse på ejerlejligheder i København af Vibeke Stål og Anne Melvej Stennevad. Forfatterne undersøger, om der er en lineær sammenhæng mellem prisen på ejerlejligheder i København og en række faktorer såsom fx rente og byggeomkostninger. prisindeks $= b_0 + b_1 * \text{byggeomkostninger} + b_2 * \text{rente}$ Hvordan bestemmer man regressionskoefficienterne b_0, b_1 og b_2, hvis vi har observationer som vist her i Excel



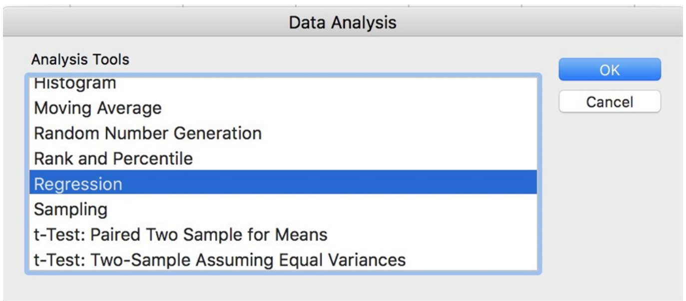
	A	B	C	D
1	år	prisindeks	byggeomkostninger	rente
2	1992	33,908948	74,6	9,7254000
3	1993	31,318681	75,9	9,4345667
4	1994	37,519623	77,3	7,2313333
5	1995	36,263736	80,5	9,9658000
6	1996	39,638932	82,4	8,5521667
7	1997	41,051805	84,6	7,8202667
8	1998	49,843014	86,8	6,7830769
9	1999	62,401884	91,0	6,0792308
10	2000	68,995290	91,3	7,4230769
11	2001	82,967033	95,9	7,0584615
12	2002	92,857143	98,0	6,4476923
13	2003	100,000000	100,0	5,4276923
14	2004	112,244900	100,6	5,2530769
15	2005	136,185240	104,3	4,4869231
16	2006	196,389320	108,4	4,6492308
17	2007	173,940350	115,4	5,2330769
18	2008	172,998430	121,3	5,7853846
19	2009	139,403450	122,9	6,1192308
20	2010	167,111460	121,8	4,9823077
21	2011	174,960750	124,9	4,8561538
22	2012	165,541600	129,4	3,9715385
23	2013	184,850860	130,7	3,4034654
24	2014	189,481950	132,8	3,4890985
25	2015	198,901100	133,7	2,3308215
26				

Hvis du selv ønsker at arbejde med dette datasæt, så kan det downloades via dette link.

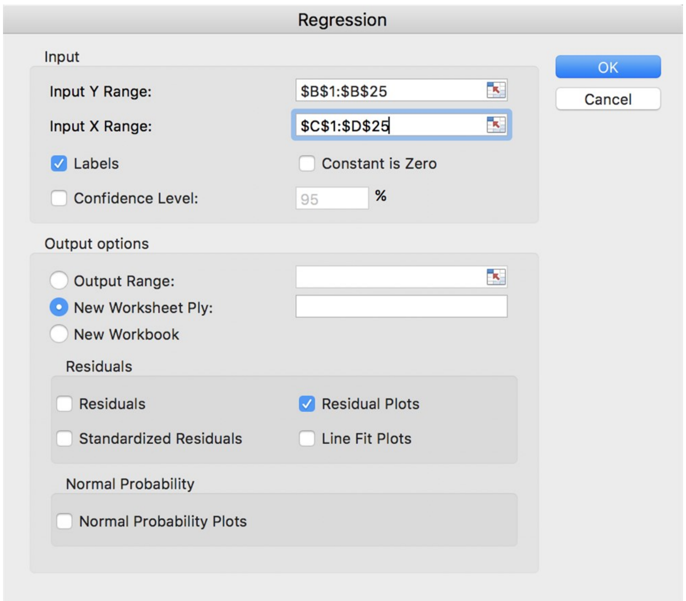
I menuen under "Tools" finder man "Data Analysis". Hvis Data Analysis ikke er en del af menuen, så er her en vejledning til hvordan man får den installeret i Excel.


Tools
Data
Window
Hel
Spelling...
Thesaurus... ^⌥⌘R
Smart Lookup... ^⌥⌘L
Language...
AutoCorrect...
Error Checking...
Check Accessibility
Share Workbook...
Track Changes
Merge Workbooks...
Protection
Goal Seek...
Scenarios...
Auditing
Data Analysis...
Solver...
Macro
Excel Add-ins...

og dernæst fås en oversigt over de forskellige analyseværktøjer. Vælg ”Regression”



Så dukker denne regression menu op



Her har vi som ”Input Y Range” valgt kolonnen med prisindeks (inkl. overskriften). Dette er vores afhængige variable. Dernæst har vi som ”Input X Range” valgt kolonnerne med data for byggeomkostninger og renter (igen inkl. overskrift). Ved at sætte kryds i ”Labels” checkboksen fortæller vi Excel, at vores valg af inputdata indeholder overskrifter. Det gør det nemmere at læse resultaterne. Som det sidste vælger vi også ”Residual Plots”.

Som udgangspunkt bliver alle resultater placeret i en nyt Excel sheet. Så er det lettere at slette dette sheet og begynde forfra, hvis man får behov for det.

Der er en masse output fra beregningen, men i første omgang fokuseres vi på regressionskoefficienterne

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-90,952334	67,417593	-1,349089	0,191676	-231,154894	49,250225	-231,154894	49,250225
byggeomkostninger	2,354345	0,423834	5,554869	0,000016	1,472933	3,235757	1,472933	3,235757
rente	-6,673565	4,156066	-1,605741	0,123265	-15,316578	1,969448	-15,316578	1,969448

Indsætter vi de fundne koefficienter i vores model får vi regressionsligningen $\text{prisindeks} = -90,95 + 2,35 * \text{byggeomkostninger} - 6,67 * \text{rente}$

Efter at have bestemt selve modellen kigger vi på tallene under overskriften ”Regression Statistics”:

Regression Statistics	
Multiple R	0,95530458
R Square	0,91260683
Adjusted R Square	0,90428368
Standard Error	19,1838084
Observations	24

Her sætter vi fokus på Multiple R og R Square. På dansk kaldes disse to værdier for korrelations- og determinationskoefficienten.

8.2.2 Korrelationskoefficienten

Det er med Excel altid muligt at bestemme regressionskoefficienterne $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$, så spørgsmålet er mere, om det giver mening at forsøge at modellere en lineær sammenhæng mellem en afhængig variabel og en eller flere forklarende variable. Det kan korrelationskoefficienten hjælpe os med at afklare. I Excel betegnes korrelationskoefficienten med "Multiple R". Men typisk bruger man blot betegnelsen R for korrelationskoefficienten.

Fortolkning af korrelationskoefficienten

Korrelation mellem to variable betyder, at hvis den ene variabel ændrer sig, så giver det en forudsigelig ændring i den anden variabel. Korrelationskoefficienten ligger altid mellem -1 og 1. En positiv korrelationskoefficient betyder, at når den uafhængige variable vokser, så vokser den afhængige variable også. En negativ korrelationskoefficient betyder, at hvis den uafhængige variabel vokser, så aftager den afhængige. Hvis den er -1 eller 1, er der en deterministisk korrelation mellem variablene, altså en ændring i den ene variabel vil helt sikkert medføre en ændring i den anden variabel. Hvis værdien derimod er 0, så er der absolut ingen lineær sammenhæng mellem de to variable. I gymnasiet kigger man i stedet ofte på den kvadrerede korrelationskoefficient R^2, kaldet forklaringsgraden. I tabellen kan du se fortolkninger af forskellige R^2-værdier:

R^2 værdi	Fortolkning
1,0	Perfekt lineær sammenhæng
0,9	Stærk lineær sammenhæng
0,5	Moderat lineær sammenhæng
0,2	Svag lineær sammenhæng
0,0	Absolut ingen sammenhæng

Bemærk at en høj grad af korrelation på ingen måder kan bruges til at postulere en årsagssammenhæng (kausalitet) mellem variable.

Hvis multipel lineær regression skal give mening, så *skal* der være en lineær sammenhæng mellem den afhængige variable og de forklarende variable. Hvis vi kigger på eksemplet fra tidligere, så ser vi, at der her er en korrelationskoefficient på ca. 0,9553 og at der dermed i dette tilfælde er en korrelation mellem variablerne pris, byggeomkostninger og rente.

Formel for korrelationskoefficienten for to uafhængige variable

Den generelle formel for korrelationskoefficienten er kompliceret og involverer matrixberegninger. I tilfældet hvor vi kun har to uafhængige variable er det lidt nemmere at skrive formlen ned. $R = \frac{\sqrt{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}}{\sqrt{1-r_{x_1x_2}^2}}$

hvor fx

$r_{yx_1} = (\frac{1}{n-1}) \sum \frac{(y-\bar{y})(x_1-\bar{x}_1)}{s_y \cdot s_{x_1}}$

og $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$, $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_1}{n}$, $s_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}}$, $s_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2}{n-1}}$ Størrelsen r_{yx_1} er dybest set korrelationskoefficienten mellem variablerne y og x_1. Når formlen er mere kompleks skyldes det, at vi også er nødt til at betragte korrelationen mellem y og x_2 og mellem x_1 og x_2.

Pointen med at opskrive formlen er ikke, at du skal kunne regne korrelationskoefficienten i hånden. Pointen er derimod at kunne sammenligne med simpel regressionsanalyse. Hvis vi nu kun har en enkelt forklarende variable x_1 og $x_2 = 0$, så forsvinder de fleste led i formlen. Tilbage bliver kun de led, hvor x_2 ikke indgår, $R = \frac{\sqrt{r_{yx_1}^2}}{\sqrt{1}} = r_{yx_1}$ hvilket præcis er korrelationskoefficienten for simpel lineær regression mellem den afhængige variabel y og den forklarende variabel x_1.

8.2.3 Determinationskoefficienten

Determinationskoefficienten

I Excel hedder determinationskoefficienten "R Square", hvilket giver god mening, da formlen for determinationskoefficienten er kvadratet på korrelationskoefficienten, determinationskoefficienten $= R^2$ Man hører jævnligt alternative betegnelser for determinationskoefficienten som fx forklaringsgraden eller tilpasningsgraden.

Alternativ formel

Der findes en alternativ formel for R^2 - som naturligvis giver samme værdi. Det er lettest at beregne determinationskoefficienten som kvadratet på korrelationskoefficienten, men den alternative formel gør det nemmere at fortolke determinationskoefficienten.

Vi har tidligere set, at SSE er forskellen mellem de fittede og observerede værdier. På samme måde kan man definere SSR som værende forskellen på de fittede værdier og gennemsnittet af observationerne, $\text{SSR} = \sum_{i=1}^n \left(\widehat{y_i} - \bar{y}\right)^2$ Definitionen på den totale "Sum of Squares" er $\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$

For observationerne y_i definerer man den totale "sum of squares" som $\text{SST} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \bar{y}\right)^2$ hvor $\bar{y}$ er gennemsnittet af y_i'erne. Tilsvarende defineres "sum of squares" for regressions. Den alternative formel for R^2 er $R^2 = \frac{SSR}{SST}$

Fortolkning af Determinationskoefficienten

Vi har altså ligningen

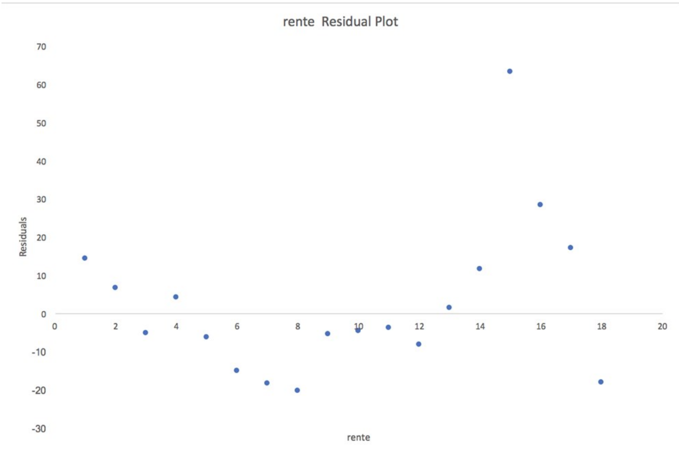
$$\begin{aligned} \text{SST} &= \text{SSR} + \text{SSE} \\ \text{Totale variation} &= \text{Forklaret variation} \\ &\quad + \text{Uforklaret variation} \end{aligned}$$

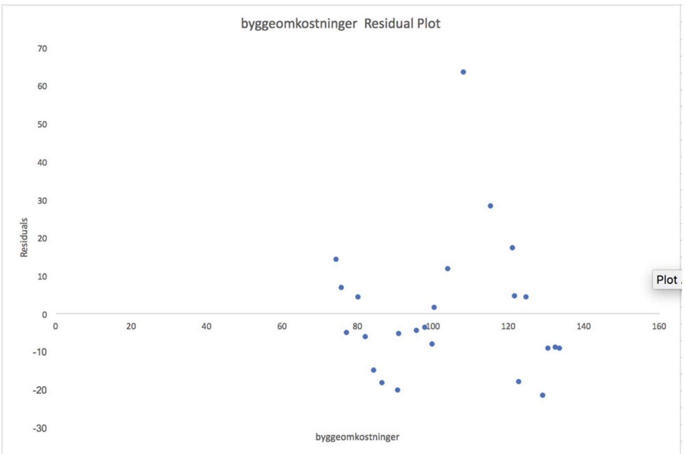
så formlen for R^2 er forholdet mellem den forklarede og totale variation i modellen. Så jo tættere

R^2 er på 1, desto mere variation er forklaret af modellen. Hvis R^2 kommer meget tæt på 1 eller ligefrem bliver 1, så er der dog grund til ekstra omtanke.

8.2.4 Residual plot

Det sidste output fra Excel som vi kigger nærmere på er residual plots. Husk, at vi i menuen sætter kryds ved "Residual Plots". Dette giver os disse to residual plots





Husk at residualerne er forskellen mellem de fittede og observerede værdier. Hvis residual plottene virker helt tilfældige, så giver den mening at bruge en lineær model. Kan man derimod spotte en trend i residual plottet, som fx en ret linje eller et polynomium, så giver det ikke mening med en lineær model. Begge ovenstående plots virker tilfældige, så i vores eksempel giver det mening at bruge en lineær model.

8.2.5 Kofidensintervaller for parametre

Konfidensinterval for parametre

Vi har tidligere behandlet konfidensintervaller for middelværdier og sandsynlighedparameteren. Man kan også bestemme konfidensintervaller for regressionskoefficienterne. Faktisk er de en del af output, når man bruger Excel til regressionsanalyse. Kig igen på tabellen som indeholdt regressionskoefficienterne. Der er nogle kolonner med overskriften "Lower 95%" og "Upper 95%". Tallene i disse kolonner er nedre og øvre grænse for et $100\% - 95\% = 5\%$ konfidensinterval omkring regressionskoefficienterne.

Det kan være lidt forvirrende, at kolonnerne "Lower 95%" og "Upper 95%" er gentaget to gange med samme værdier. Hvis du kigger på menuen i figuren her, kan du se, at man kan sætte kryds i "Confidence Level" og indtaste et konfidensniveau. Hvis man gør dette med fx 1% så får man kolonnerne "Lower 95%" og "Upper 95%" samt "Lower 99%" og "Upper 99%". Derfor får man som udgangspunkt altid 5% konfidensinterval med som resultat og derudover kan man få et ekstra interval efter eget valg.

Formel for konfidensinterval

Formel for $1-\alpha$ konfidensintervallet for de enkelte regressionskoefficienter er $b_i \pm t(v, 1-\alpha/2)\mathrm{se}(b_i)$ Her er

- t er t-test funktionen
- v er antallet af observationer minus antallet af regressionskoefficienter og
- $\mathrm{se}(b_i)$ er "standard error" for b_i

Størrelsen $\mathrm{se}(b_i)$ er svær at regne ud i hånden og formlen involvere matrix beregninger. Men kig igen på tabel for regressionskoefficienten. Faktisk er standardfejlen er del af output fra Excel. t-test funktionen er indbygget i Excel under navnet T.INV.2T.

Som eksempel kan vi regne et 90% konfidensinterval for b_1. Her er $v = 24 - 3 = 21$, $\alpha = 0,1$, $\mathrm{se}(b_i) = 0,42$ og $b_1 = 2,35$, så konfidensintervallet bliver

$$\begin{aligned}\Big[2,35 - \text{T.INV.2T(0,1;21)} * 0,42; 2,35 + \text{T.INV.2T(0,1;21)} * 0,42\Big] &= \\ \Big[2,35 - 1,72 * 0,42; 2,35 + 1,72 * 0,42\Big] &= \\ \Big[1,6276; 3,0724\Big]&\end{aligned}$$

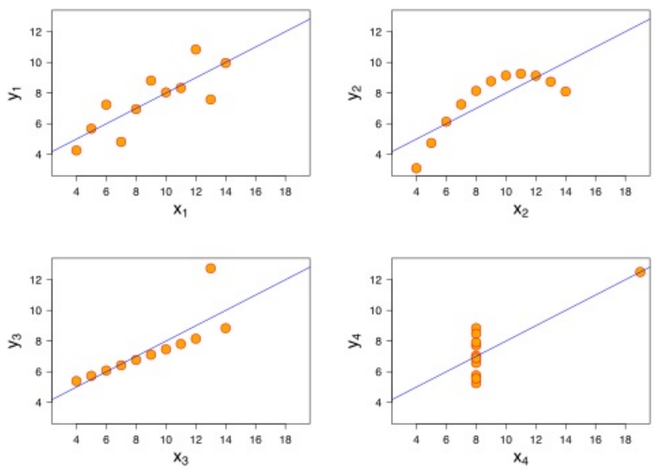
8.2.6 Avancerede emner

Disse emner falder udenfor pensum men for den nysgerrige er her en kort introduktion til emner, som er vigtige i forbindelse med regressionsanalyse.

Udforskende dataanalyse

Indenfor området data science arbejder man en del med udforskende dataanalyse. Dette indebærer, at man før man kaster sig hovedkuls ud i at vælge den ene eller anden model, så tager man sig tid til at undersøge data nærmere. Det giver fx ikke mening at bruge en lineær regressionsmodel, hvis man på en graf kan se, at der umuligt kan være en lineær sammenhæng mellem en afhængig variable og en forklarende variabel. Det er ikke helt nemt at afgøre, om der kan være en lineær sammenhæng mellem en afhængig variable og *flere* forklarende variable. Så på nuværende tidspunkt er det bedste man kan gøre, at undersøge om det er plausibelt, at der er en lineær sammenhæng mellem ens afhængige variabel og de forklarende variable en for en.

Der findes et klassisk eksempel under navnet Anscombes kvartet, hvor statistikeren Francis Anscombe viser fire forskellige datasæt med næsten identiske deskriptive statistikker (som fx middelværdi og varians), men når man laver en graf for hver af datasættene, så får man meget forskellige grafer.



Grafen er fra "Anscombe's quartet 3.svg. (2016, December 14). Wikimedia Commons, the free media repository", hvor den original fil findes her.

Model udvælgelse og multicollinearitet

Lad os sige, at vi har en model med en afhængig variabel og fire forklarende variable. $y = b_0 + b_1x_2 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4$ Hvordan kan vi være sikre på, at dette er den rigtige model. Måske skulle vi hellere udelade x_2 eller x_3 eller både x_2 og x_3. Sådanne spørgsmål forsøger man at besvare indenfor emnet model udvælgelse. Der findes en række statistiske tests, som kan være med til at afgøre, om det er en god ide eller ej at inkludere de enkelte variable.

Når man vælger de forklarende variable skal man også passe på med multicollinearitet. Derfor må ingen af de forklarende variable kunne skrives som lineære funktioner af de øvrige forklarende variable. I eksempel med fire forklarende variable kan vi fx ikke have at $x_2 = x_1 + x_4$

Justeret R^2

I forlængelse af forrige afsnit om model udvælgelse er det værd at bemærke følgende. Hvis vi tilføjer flere forklarende variable til vores model, så vil det stort set næsten altid være sådan, at værdien af R^2 bliver større. Betyder det, at det altid er godt at tilføje flere forklarende variable til ens model? Hvis vi har n observationer, så kan vi jo vælge en model med $n-1$ forklarende variable. Dette vil ofte give en værdi af R^2 meget tæt på 1. Så må det jo være en god model! Svaret er nej. Derfor bruger man ofte ikke determinationskoefficienten R^2 men en værdi, som kaldes justeret R^2, når man skal se på om det giver mening at tilføje en ekstra variable til modellen.

Korrelation og kausalitet

Når vi arbejder med lineær regressionsanalyse, leder vi efter korrelationer mellem den afhængige variable og en række forklarende variable. Det er meget vigtigt at have for øje, at en lineær sammenhæng mellem en række variable ikke er ensbetydende med en kausalitet eller årsagssammenhæng mellem de samme variable. På videnskab.dk kan du finde en let tilgængelig artikel om korrelation og kausalitet og lære mere om forskellen samt hvad man skal passe på med.

Matematik center

Gratis hjælp
til matematik
lokalt og digitalt

Materialesamling til **Matematik B** fra Webmatematik.dk

www.matematikcenter.dk
www.webmatematik.dk
www.webmatlive.dk

Version: December, 2024

Materialesamling til B-niveau

Matematikcenter

Version: December, 2024

Indhold

1 Andengradspolynomium og -ligning

I de følgende afsnit vil vi gennemgå de primære egenskaber ved andengradsligninger. En af de ting der gør andengradsligninger sværre at have med at gøre i forhold til førstegradsligninger er at vi ikke kan løse dem ved "bare"at flytte x'erne over på den ene side af lighedstegnet og resten over på den anden side. Vi vil gennemgå forskellige løsningsmetoder for andengradsligningen. Vi ser på den direkte løsningsmetode kaldet diskriminantmetoden. En anden løsningsmetode er hvor man benytter kvadratsætningerne til at simplificere sin andengradsligning således at man til sidst kan løse den ved at have x'erne på den ene side og tallene på den anden. Vi gennemgår også hvordan man i visse tilfælde kan faktorisere sin andengradsligning og derved benytte nulreglen til hurtigt at løse sin andengradsligning. Til sidst ser vi på hvordan man kan beregne toppunktet for et andengradspolynomium.

1.1 Polynomium vs ligning

Der er forskel på et andengradspolynomium og en andengradsligning. Et andengradspolynomium er en funktion, hvor den højeste potens af x har eksponenten 2.

Forskriften ser således ud:

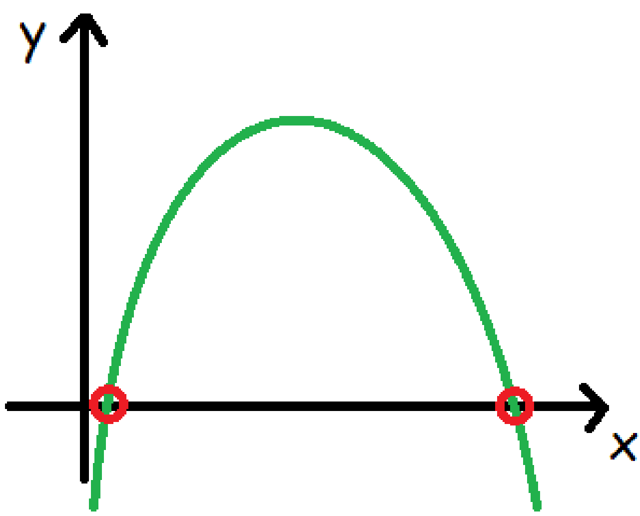
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

For hver x-værdi, man kommer ind i polynomiet, finder man en y-værdi (en funktionsværdi). En andengradsligning derimod er - som navnet antyder - en ligning, hvor det handler om at finde de x-værdier, der løser ligningen. En andengradsligning har formen

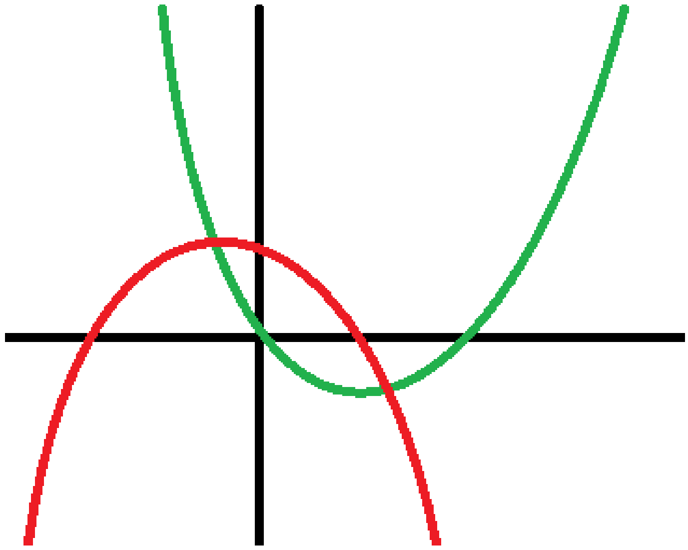
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Man skal altså finde ud af hvilke x-værdier, man kan sætte ind på venstresiden for at få 0.

At løse en andengradsligning svarer til at finde de x-værdier, hvor funktionsværdien (y-værdien) er 0 i andengradspolynomiet. Når y er 0, befinder vi os på x-aksen. Løsningerne til andengradsligningen er derfor skæringspunkterne mellem andengradspolynomiets graf og x-aksen. Nulpunkterne for et polynomium kaldes under tiden for polynomiets "rødder". Derfor kalder man tit løsningerne af en andengradsligning for det tilsvarende andengradspolynomiums rødder.



a og b kaldes koefficienterne til hhv. anden- og førstegradsleddet, mens c kaldes konstantleddet. Grafen for et andengradspolynomium kaldes en parabel. Man bruger tit betegnelserne "glad parabel" eller "sur parabel"alt efter hvilken vej, parabelbenene vender; om den ligner en sur eller en glad smiley. På tegningen herunder er den grønne parabel en glad parabel, mens den røde er sur.



I denne video vil vi forklare hvad forskellen på et polynomium og en ligning er samt til sidst giver vi nogle eksempler på disse.

1.2 Diskriminantformlen

En andengradsligning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Grunden til, at a ikke må være 0, er, at så ville andengradsleddet forsvinde, og vi ville stå tilbage med en førstegradsligning.

Eksempler på andengradsligninger er

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$5x^2 - 3x + 7 = 0$$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x^2 = 9$$

Bemærk, at 9 i den nederste ligning står på den forkerte side af lighedstegnet. Imidlertid er det stadig en andengradsligning, og den kan omskrives til standardformen

$$x^2 - 9 = 0,$$

og altså er $a = 1$, $b = 0$ og $c = -9$.

I den øverste ligning er $a = 3$, $b = 2$ og $c = -5$. I den næste er $a = 5$, $b = -3$ og $c = 7$. Det er vigtigt at huske på fortegnene, når man skal finde ud af hvilke tal, a, b og c er.

Det er ikke umiddelbart til at isolere x i andengradsligninger, som vi er vant til fra førstegradsligninger. Men heldigvis findes der en metode til at løse andengradsligninger. Denne metode kaldes diskriminantmetoden. Den er inddelt i to skridt.

Først finder man diskriminanten, d, som er givet ved formlen

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Når man har fundet diskriminanten, er der tre muligheder:

Hvis d er negativ ($d < 0$), så har ligningen ingen løsninger

Hvis $d = 0$, så har ligningen 1 løsning

Hvis d er positiv ($d > 0$), så har ligningen 2 løsninger

I de tilfælde, hvor der eksisterer løsninger, finder man dem ved formlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Tegnet $\pm$ læses som "plus-minus"og det betyder, at ved den ene løsning skal vi indsætte plus, og ved den anden skal vi indsætte minus.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Eksempel

Lad os se på et eksempel.

Hvis vores andengradsligning er

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

så er $a = 2$, $b = -10$ og $c = 8$.

Vi finder diskriminanten

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 100 - 64 = 36$$

Da $d > 0$ er der to løsninger på andengradsligningen.

Vi finder løsningerne således:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 6}{4} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Ligningen bliver altså løst, når $x = 4$ eller når $x = 1$. Man skriver nogle gange løsningerne således

$$x = 4 \quad \vee \quad x = 1$$

hvor det v-formede tegn betyder "eller".

I denne video gennemgår vi hvordan man løser en andengradsligning vha. diskriminantmetoden og regner derefter et par eksempler.

1.3 Kvadratkomplettering

Hvis man ikke er så god til at huske formler, så findes der også en anden metode til at løse andengradsligninger på, hvor man hverken behøver at huske formel for diskriminant eller x. Til gengæld kræver den, at man er stærk i kvadratsætningerne. Metoden kaldes kvadratkomplettering.

Navnet skyldes, at det gælder om at lave et "komplet kvadrat"altså omdanne venstresiden til noget, der har med en kvadratsætning at gøre.

Lad os gennemløbe metoden vha. et konkret eksempel.

Eksempel 1

Lad os prøve at løse ligningen:

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

Det første man gør er at rykke c (=24) hen på den anden side af lighedstegnet.

$$3x^2 - 18x = -24$$

Dernæst dividerer vi med a (=3). Man skal huske at dividere alle led med a.

$$x^2 - 6x = -8$$

Nu kommer det svære skridt. Man tager tallet foran x (=-6), dividerer det med 2 (så får vi -3), sætter resultatet i anden potens (=(-3)^2) og lægger det til på begge sider.

$$x^2 + (-3)^2 - 6x = -8 + (-3)^2$$

Nu kan vi samle venstre side til et "komplet kvadrat"ved at bruge anden kvadratsætning

$$x^2 + (-3)^2 - 6x = x^2 + (-3)^2 - 2 \cdot 3 \cdot x = (x-3)^2$$

Nu ser vores ligning sådan her ud:

$$(x-3)^2 = -8 + (-3)^2$$

og ved at reducere højresiden (-8 + 9) får vi

$$(x-3)^2 = 1$$

Nu tager vi kvadratroden på begge sider

$$x - 3 = \pm\sqrt{1}$$

Det er vigtigt at huske sit plus-minus-tegn foran kvadratroden, for ellers ville man komme til at miste en af løsningerne.

Nu er der kun tilbage at isolere x

$$x - 3 = \pm\sqrt{1}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{1}$$

$$x = 3 \pm 1$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 4$$

Eksempel 2

Vi prøver endnu et eksempel

Hvis ligningen er

$$2x^2 + 12x - 32 = 0$$

løser vi den på følgende måde

$$2x^2 + 12x - 32 = 0$$

$$2x^2 + 12x = 32$$

$$x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 + 3^2 + 6x = 16 + 3^2$$

$$x^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x = 16 + 3^2$$

$$(x+3)^2 = 16 + 3^2$$

$$(x+3)^2 = 16 + 9$$

$$(x+3)^2 = 25$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{25}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{25}$$

$$x = -3 \pm 5 = \begin{cases} 2 \\ \\ -8 \end{cases}$$

I denne video gennemgår vi nogle eksempler på hvordan man benytter kvadratsætningerne til at simplificere sin andengradsligning og dermed løse den uden brug af diskriminantmetoden.

1.4 Faktorisering og nulreglen

Hvis man ønsker at løse ligningen

$$3 \cdot x = 0$$

er det klart, at x=0. Hvis vi skal gange et tal med noget og få 0, er vi nødt til at gange med 0.

Hvis vi i stedet ønsker at løse følgende ligning

$$x \cdot y = 0$$

er det klart, at enten må x eller y være lig med 0(ellers skal de begge to være 0). Det er det, vi kalder nulreglen. Med ord siger vi: ”Hvis et produkt skal være lig med 0, skal mindst en af faktorerne være lig med 0”.

Lad os se, hvordan man kan anvende nulreglen til at løse ligninger.

Hvis vi bliver bedt om at løse ligningen

$$15 - 3x = 0$$

kan vi omskrive venstresiden til et produkt ved at sætte 3 uden for parentes.

$$V :\ 15 - 3x = 3(5 - x)$$

Når man omskriver noget til et produkt, kaldes det at faktorisere.

Nu er vores ligning

$$3(5 - x) = 0$$

Ifølge nulreglen, skal den første faktor (3) være 0, ellers skal den anden faktor (5-x) være 0.

Da 3 er et konstant tal, kan det aldrig være 0, derfor må (5-x)=0, hvilket svarer til x=5.

Faktorisering af andengradspolynomier

Hvis vi kender rødderne (nulpunkterne) for et andengradspolynomium, kan vi faktorisere det. I stedet for at skrive det på standardformen, kan vi skrive det således

$$f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

hvor r_1 og r_2 er de to rødder.

Grunden til, at faktoriseringen ser sådan ud, er, at vi gerne vil have, at polynomiet giver 0, når vi sætter en af rødderne ind på x’s plads. Lad os tjekke om det virker.

$$f(r_1) = a \cdot (r_1 - r_1) \cdot (r_1 - r_2) = a \cdot 0 \cdot (r_1 - r_2) = 0$$

$$f(r_2) = a \cdot (r_2 - r_1) \cdot (r_2 - r_2) = a \cdot (r_2 - r_1) \cdot 0 = 0$$

Lad os tage et eksempel.

Vi bliver bedt om at løse en andengradsligning, der er faktoriseret.

$$3(x - 5)(x + 1) = 0$$

Da venstresiden er faktoriseret, kan vi bruge nulreglen. Den siger, at for, at produktet af de tre faktorer (3, x-5 og x+1) kan være 0, så skal mindst en af faktorerne være 0. Den første faktor er konstant 3 og kan aldrig blive 0. Den anden faktor er 0 når x=5. Den tredje faktor er 0 når x= -1.

Derfor er løsningerne til andengradsligningen x=5 eller x= -1.

Lad os tage et andet eksempel.

Hvis vi nu får at vide at et andengradspolynomium har rødderne 1 og -2, samt at det går gennem punktet (0, 4), så kan vi finde dets forskrift.

$$f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - (-2)) = a \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

For at finde ud af, hvad a er, sætter vi punktet (0, 4) ind.

$$4 = a(0-1)(0+2)$$

$$4 = a \cdot (-2)$$

$$a = \frac{4}{-2} = -2$$

Derfor er vores forskrift

$$f(x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

Vi kan gange parenteserne ud for at skrive forskriften på standardformen

$$f(x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

$$f(x) = -2 \cdot (x^2 + 2x - 1x - 2)$$

$$f(x) = -2 \cdot (x^2 + x - 2)$$

$$f(x) = -2x^2 - 2x + 4$$

Gæt løsningerne til en andengradsligning

Man kan bruge faktoriseringsmetoderne til hurtigt at gætte sig til løsningerne af en andengradsligning.

Lad os starte med at se på de andengradsligniner, hvor a=1.

Så kan andengradsligningen skrives

$$0 = a(x-r_1)(x-r_2) = 1 \cdot (x-r_1)(x-r_2) = (x-r_1)(x-r_2)$$

Hvis vi nu ganger parenteserne ud, får vi

$$0 = (x-r_1)(x-r_2) = x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2$$

$$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2$$

Hvis vi sammenligner med standardformen for andengradsligninger, så er

$$b = -(r_1 + r_2) \Leftrightarrow r_1 + r_2 = -b$$

$$c = r_1r_2$$

Vi skal altså finde to tal, der sammenlagt giver -b, og hvis produkt er c. Så har vi fundet rødderne.

Lad os tage et eksempel. Vi skal løse ligningen

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Da a=1 kan vi bruge reglen ovenfor. De to løsninger, r1 og r2, skal altså give -2 (= -b), når man lægger dem sammen, og -3 (= c), når man ganger dem med hinanden. Der er selvfølgelig kun ét talpar, der opfylder det, og det er talparret 1 og -3

$$1 + (-3) = 1 - 3 = -2 = -b$$

$$1 \cdot (-3) = -3 = c$$

Derfor er rødderne (dvs. løsningerne til andengradsligningen) x=1 og x= -3.

Vi kan skrive andengradsligningen

$$0 = (x - 1)(x - (-3)) = (x - 1)(x + 3)$$

Hvis vi ganger disse parenteser ud, får vi vores oprindelige ligning.

Gæt løsningerne, hvis a ikke er 1

Hvis man ønsker at gætte løsningerne til en andengradsligning, hvor a ikke er 1, så skal man bare dividere med a på begge sider af lighedstegnet og så gøre som ovenfor.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Rødderne r_1 og r_2 skal nu opfylde

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Et eksempel.

$$4x^2 - 12x + 8 = 0$$

Vi beregner $\frac{-b}{a}$ og $\frac{c}{a}$:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = -(-3) = 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{8}{4} = 2$$

Vi skal altså finde to tal der lagt sammen giver 3 og hvis produkt er 2. Det er selvfølgelig kun 1 og 2, der opfylder dette

$$1 + 2 = 3 = -\frac{b}{a}$$

$$1 \cdot 2 = 2 = \frac{c}{a}$$

Løsningerne på andengradsligninen er derfor x=1 eller x=2.

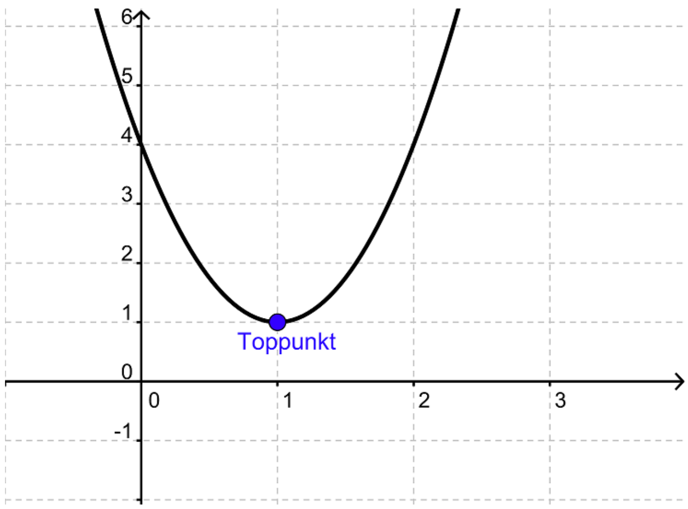
Nu, hvor vi kender rødderne, kan vi faktorisere andengradsligningen.

$$0 = 4x^2 - 12x + 8 = 4(x - 1)(x - 2)$$

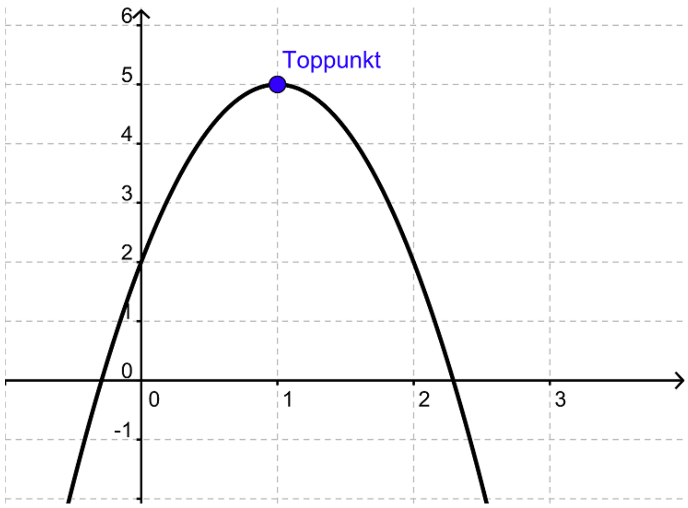
1.5 Toppunktsformlen

Toppunktet for et andengradspolynomium er det punkt, hvor parablen (andengradspolynomiets graf) har sit maksimum eller minimum.

Hvis der er tale om en glad parabel, så vil toppunktet være minimum for grafen



og hvis der er tale om en sur parabel, så vil toppunktet være maksimum for grafen.



Der findes en formel for, hvordan man regner toppunktet ud. x-koordinaten, der under tiden betegnes T_x, udregnes således:

$$T_x = \frac{-b}{2a}$$

og y-koordinaten, der betegnes T_y, udregnes således:

$$T_y = \frac{-d}{4a}$$

Toppunktet er altså punktet:

$$(T_x,\, T_y) = \left(\frac{-b}{2a},\, \frac{-d}{4a}\right)$$

Lad os tage et eksempel.

Vi ønsker at finde toppunktet for andengradspolynomiet

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 2$$

Først udregner vi diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 36 + 24 = 60$$

Nu er vi klar til at bestemme toppunktet

$$T_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$T_y = \frac{-d}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

$$(T_x,\ T_y) = (1,\ 5)$$

1.6 Sammenhæng mellem forskrift og graf

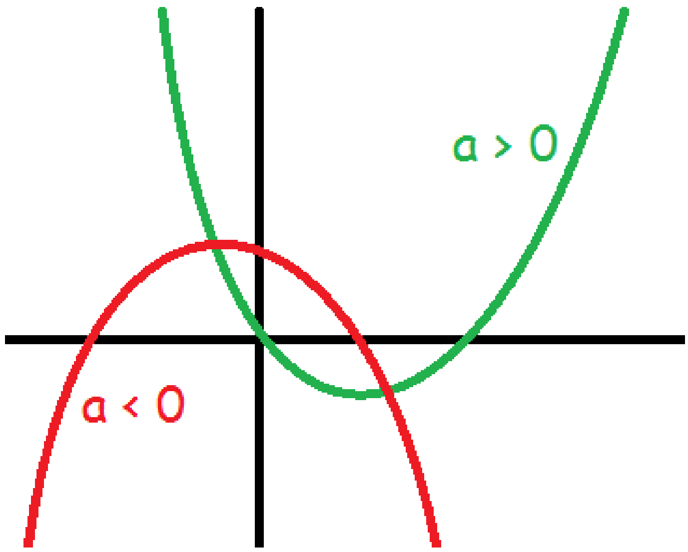
Ud fra et andengradspolynomiums forskrift kan man sige rigtig meget om grafens udseende. Det betyder, at man let kan danne sig et overblik over, hvordan grafen ser ud, uden, at man behøver tegne den.

Betydningen af a

Fortegnet på tallet a afgør, om parablens grene peger opad eller nedad.

$$a > 0 \Leftrightarrow \text{parablens grene peger opad}$$

$$a < 0 \Leftrightarrow \text{parablens grene peger nedad}$$



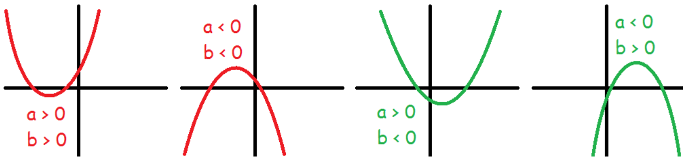
Betydningen af b

Fortegnene af tallene a og b afgør, om toppunktet ligger til højre eller venstre for y-aksen.

$$a \text{ og } b \text{ samme fortegn} \Leftrightarrow \text{Toppunkt til venstre for y-aksen}$$

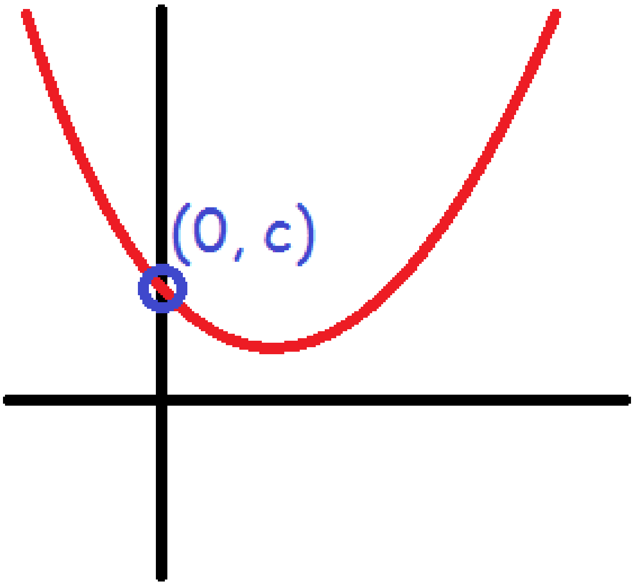
$$a \text{ og } b \text{ forskellige fortegn} \Leftrightarrow \text{Toppunkt til højre for y-aksen}$$

$$b = 0 \Leftrightarrow \text{Toppunkt på y-aksen}$$



Betydning af c

Tallet c afgør, hvor grafen skærer y-aksen. Dette sker i punktet (0, c).



Dette skyldes, at når vi sætter x=0 i forskriften for andengradspolynomiet, så får vi, at funktionsværdien er c.

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

Betydningen af d

d, diskriminanten, udregnes som bekendt således:

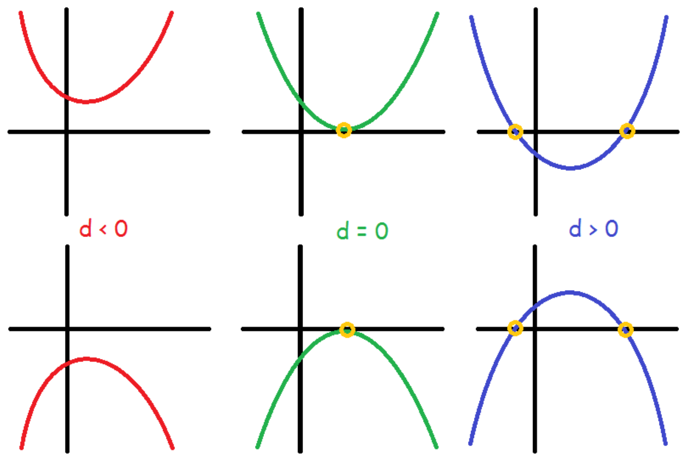
$$d = b^2 - 4ac$$

Som vi husker fra afsnittet om diskriminantformlen, så afhænger antallet af løsninger af fortegnet på d.

Vi husker også på, at løsningerne til en andengradsligning svarer til nulpunkterne for det tilsvarende andengradspolynomium.

Derfor siger diskriminanten noget om, hvor mange nulpunkter grafen har.

$$d < 0 \Leftrightarrow \text{ingen nulpunkter}$$
$$d = 0 \Leftrightarrow 1 \text{ nulpunkt}$$
$$d > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ nulpunkter}$$



Eksempel:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

I denne andengradsligning er a=2, b=3, c= -1 og

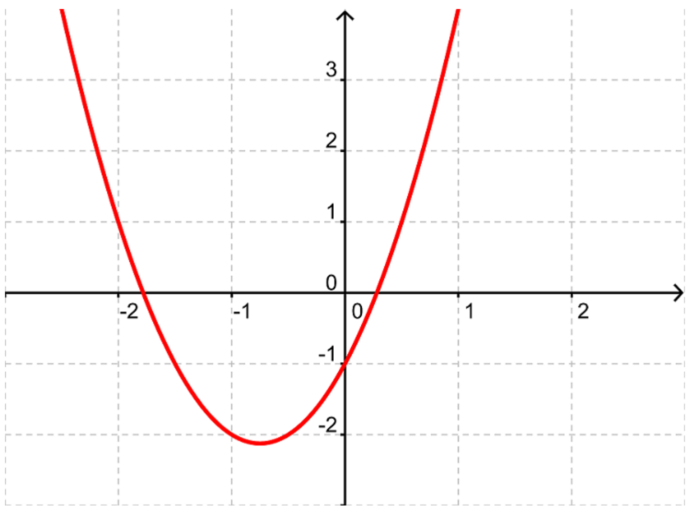
$$d = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 + 8 = 17$$

Da a er positiv, er grafen en glad parabel

Da b også er positiv, befinder toppunktet sig til venstre for y-aksenDa c er -1, vil grafen skære y-aksen i punktet (0, -1)

Da d er positiv vil grafen have to nulpunkter.

Vi kan tegne grafen og tjekke, at vi har ret:



2 Trigonometri

I dette afsnit gennemgår vi hvordan vi kan benytte trigonometrien til at regne med vilkårlige trekanter. Vi ser på cosinus- og sinusrelationerne samt hvornår vi bør, og kan, anvende den ene eller den anden. Bagefter ser vi på hvordan vi vha. sinus kan beregne arealet af en trekant i stedet for at skulle bruge højden og grundlinjen. Til sidst ser vi grundrelationen/idiotformlen for sinus og cosinus.

2.1 Grundlæggende

Hvis du er interesseret i det grundlæggende om cosinus, sinus og tangens, så kan du læse følgende afsnit fra vores C-niveau-del.

Definitioner af cosinus og sinus

Definition af tangens

Cosinus, Sinus og tangens i retvinklede trekanter

I de følgende afsnit vil vi se nærmere på, hvordan du kan bruge cosinus og sinus i vilkårlige trekanter.

2.2 Cosinusrelationerne

Ofte kommer man ud for opgaver, hvor man i en trekant kender nogle sider og vinkler og bliver bedt om at finde nogle andre sider eller vinkler. Til at løse den slags opgaver er cosinusrelationerne et stærkt værktøj.

Det, der gør cosinusrelationerne til et stærkt redskab, er, at de gælder i vilkårlige trekanter. Det er altså ligegyldigt, om den trekant, vi arbejder med, er retvinklet, ligebenet, ligesidet eller ingen af delene. Vi kan bruge cosinusrelationerne til dem alle sammen. Klik her for at se et eksempel på, hvor cosinusrelationerne kan bruges i virkeligheden.

Hvis man vil finde en side

Hvis man kender to sider og den vinkel, der er imellem siderne, kan man bruge cosinusrelationerne til at finde længden af den tredje side. Det gør man på følgende måde:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

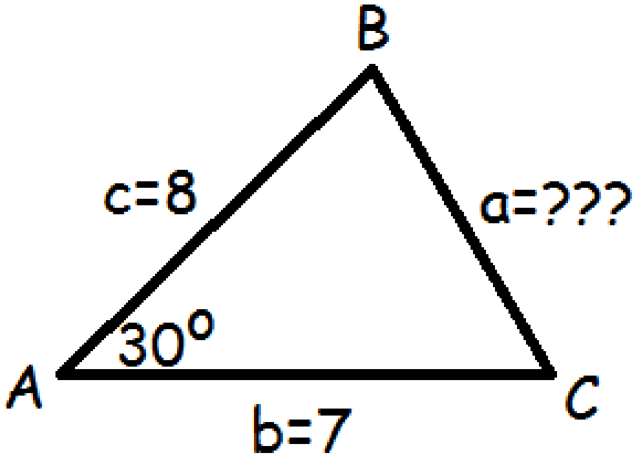
Grunden til de tre formler er, at det kommer an på hvilke sider, man kender, og hvilken, man vil finde.

Læg mærke til, at formlerne minder en del om Pythagoras' læresætning, hvor der blot er tale om et ekstra led.

Det kan være svært at huske disse formler udenad. En god huskeregel er dog, at siden til venstre har samme bogstav som vinklen til højre, man skal tage cosinus til.

Eksempel:

Vi bliver bedt om at finde siden a i denne trekant



Da vi kender vinkel A og siderne b og c, er det den øverste formel, vi skal bruge.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

$$a^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos(30^\circ)$$

$$a^2 = 49 + 64 - 112 \cdot 0,866$$

$$a^2 = 16,01$$

$$a = \sqrt{16,01} \approx 4$$

Hvis man vil finde en vinkel

Hvis man kender alle tre sider i en trekant, og man ønsker at finde en vinkel, kan man bruge følgende formler

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Formlerne er faktisk præcist de samme som ovenfor, hvor man bare har isoleret cosinus til vinklen i stedet for en af siderne. Neden for ser vi, hvordan man kommer fra en af de tre øverste fomler til en af de tre nederste. Farverne markerer hvilke ting, vi har rykket rundt på.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

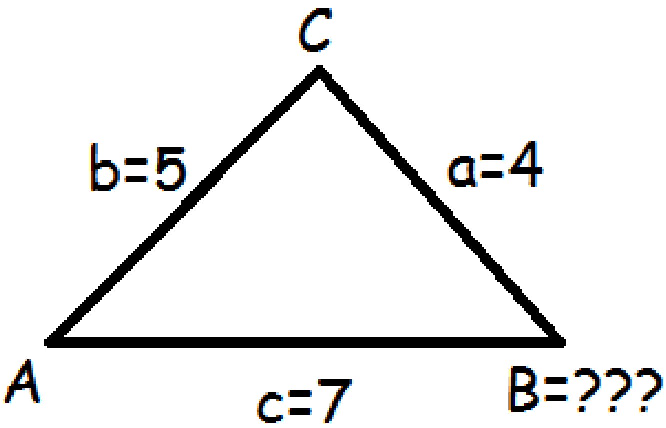
$$a^2 + 2bc\cos(A) = b^2 + c^2$$

$$2bc\cos(A) = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Lad os tage et eksempel.

Vi ønsker at finde vinkel B i følgende trekant



Da det er vinkel B, vi ønsker at finde, bruger vi formel nummer to i rækken.

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(B) = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 7}$$

$$\cos(B) = \frac{16 + 49 - 25}{56}$$

$$\cos(B) = \frac{40}{56} = \frac{5}{7} \approx 0,714$$

Nu ved vi, hvad cos(B) er, men vi blev bedt om at finde selve B. Derfor tager vi $\cos^{-1}$ på begge sider.

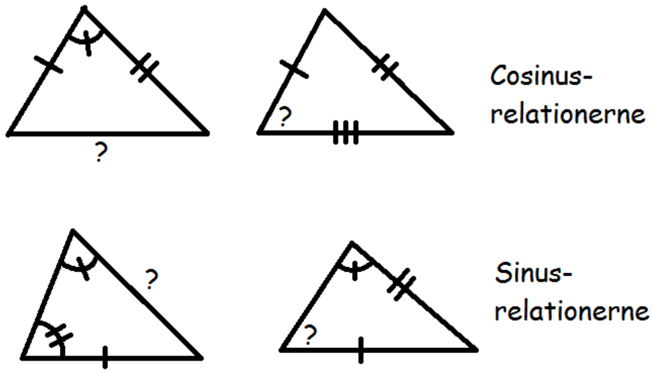
$$\cos(B) = 0,714$$

$$B = \cos^{-1}(0,714)$$

$$B = 44,42^\circ$$

Skal jeg bruge cosinus- eller sinusrelationerne?

Her er en oversigt over, hvornår det er smartest at bruge hhv. cosinus- og sinusrelationerne. De vinkler og sider, der er markeret med streger, er de ting, vi kender på forhånd. Spørgsmålstegnene markerer de sider eller vinkler, vi er interesserede i at finde.



2.3 Sinusrelationerne

Ofte kommer man ud for opgaver, hvor man i en trekant kender nogle sider og vinkler og bliver bedt om at finde nogle andre sider eller vinkler. Til at løse den slags opgaver er sinusrelationerne et stærkt værktøj.

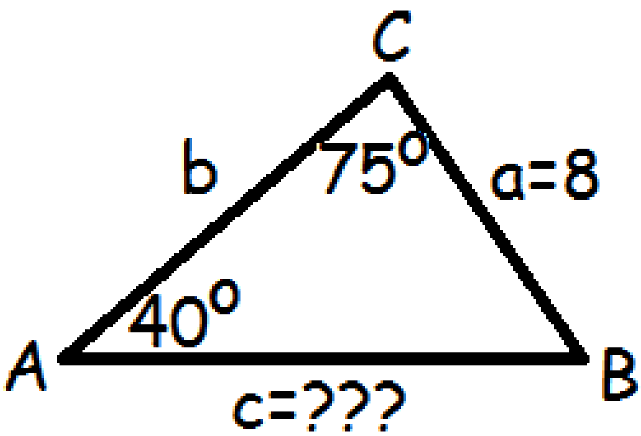
Det, der gør sinusrelationerne til et stærkt redskab, er, at de gælder i vilkårlige trekanter. Det er altså ligegyldigt, om den trekant, vi arbejder med, er retvinklet, ligebenet, ligesidet eller ingen af delene. Vi kan bruge sinusrelationerne til dem alle sammen.

Hvis vi vil finde en side

Hvis vi kender to vinkler og den side, der står over for den ene, så kan vi bestemme den side, der står over for den anden vinkel ved hjælp af følgende formel.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

For eksempel kunne vi blive bedt om at finde siden c i følgende trekant



Vi kender vinklerne A og C samt den side, der står overfor vinkel A. Vi bruger sinusrelationerne. Vi tager kun de ting med, der er relevante for os, så i vores tilfælde udelader vi b'erne.

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

Vi starter med at isolere c ved at gange med sin(C) på begge sider.

$$c = \frac{a \cdot \sin(C)}{\sin(A)}$$

Nu sætter vi tal ind på pladserne

$$c = \frac{8 \cdot \sin(75°)}{\sin(40°)}$$

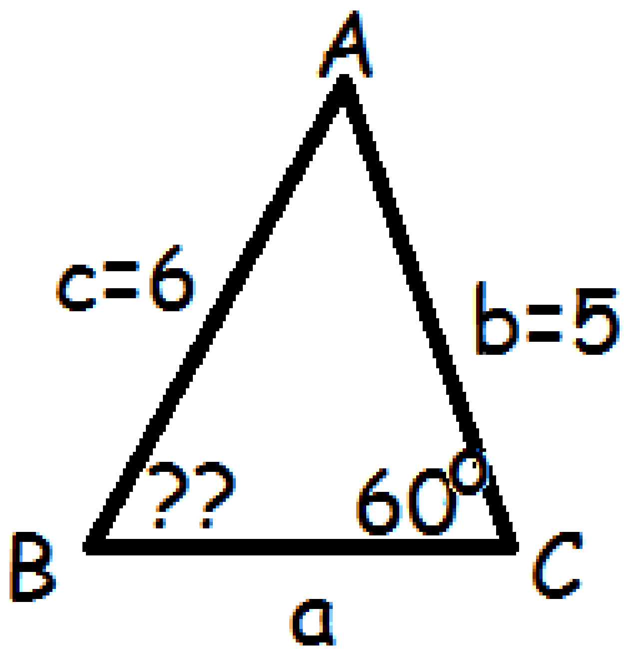
$$c = \frac{8 \cdot 0,966}{0,643} \approx 12,02$$

Hvis vi skal finde en vinkel

Hvis vi kender to sider og en vinkel, der står over for en af siderne, så kan vi finde den vinkel, der står over for den anden side. Vi bruger disse formler.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Forskellen mellem disse og dem, vi nævnte ovenfor, er, at man har byttet rundt på alle tællere og nævnere. Det er altid smartest, at det man skal finde står i tælleren! Lad os se på et eksempel. Vi bliver bedt om at finde vinkel B i følgende trekant.



Vi kender siderne b og c samt den vinkel, der ligger over for c. Så kan vi finde b ved hjælp af sinusrelationerne. Vi skriver kun de dele op, vi har brug for, og undlader således a'erne.

$$\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Vi isolerer sin(B) ved at gange med lille b på begge sider

$$\sin(B) = \frac{b \cdot \sin(C)}{c}$$

Nu sætter vi tal ind

$$\sin(B) = \frac{5 \cdot \sin(60°)}{6}$$

$$\sin(B) = \frac{5 \cdot 0,866}{6} \approx 0,722$$

Vi ved nu, hvad sin(B) er. For at finde B tager vi $\sin^{-1}$ til dette tal.

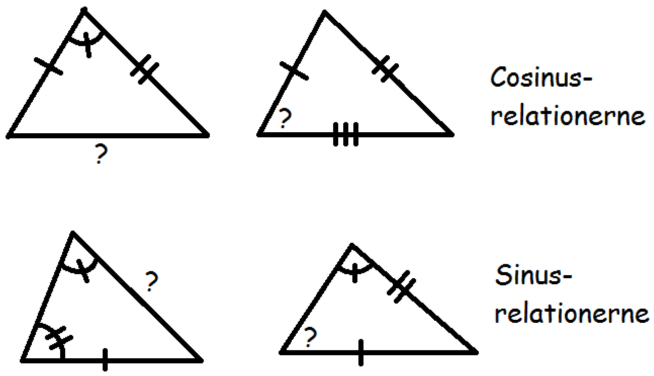
$$\sin(B) = 0,722$$

$$B = \sin^{-1}(0,722)$$

$$B = 46,19°$$

Skal jeg bruge cosinus- eller sinusrelationerne?

Her er en oversigt over, hvornår det er smartest at bruge hhv. cosinus- og sinusrelationerne. De vinkler og sider, der er markeret med streger, er de ting, vi kender på forhånd. Spørgsmålstegnene markerer de sider eller vinkler, vi er interesserede i at finde.



2.4 Sinusrelationerne i stumpvinklede trekanter

Man skal være varsom med at bruge sinusrelationerne i stumpvinklede trekanter.

Hvis vi får at vide, at vi har en trekant ABC, hvor A=22º, a=5 og c=10 og bliver bedt om at finde vinkel C, så ville vi normalt bruge sinusrelationerne.

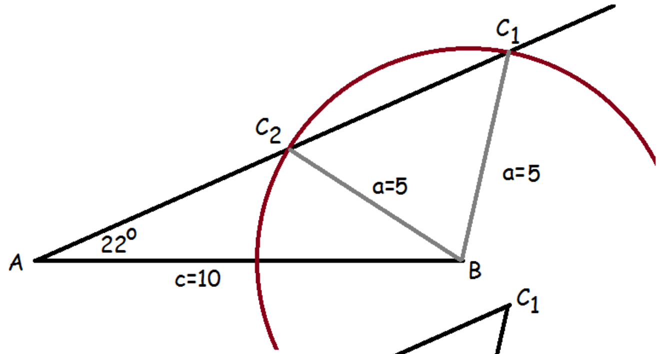
$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

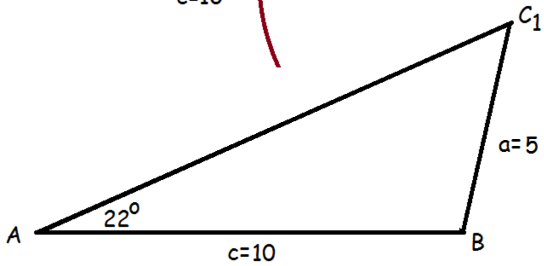
$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$$

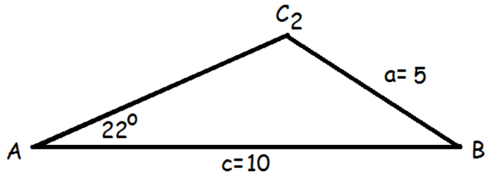
$$\sin C = \frac{10 \cdot \sin(22)}{5} \approx 0,75$$

$$C = \sin^{-1}(0,75) = 48,5°$$

Vi får altså, at vinkel C er 48,5 grader, hvilket er mindre end 90, så vinkel C er spids. Imidlertid kan man konstruere en trekant, hvor A=22º, a=5 og c=10, men hvor vinkel C er stump.







Vi kan altså konstruere to forskellige trekanter, der opfylder de givne oplysninger: En hvor vinkel C er spids, og en hvor den er stump. Når vi bruger sinusrelationerne, finder vi altid frem til den spidse vinkel.

Men heldigvis findes der er sammenhæng mellem vinklerne C_1 og C_2 Der gælder nemlig at

$$C_1 = 180° - C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 180° - C_1$$

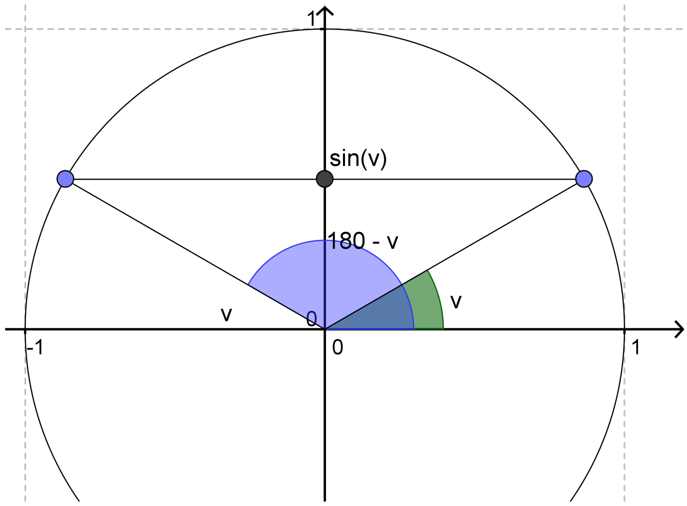
Hvis vores opgave i stedet havde lydt I trekanten ABC er A=22^{o}, a=5, c=10, og der oplyses, at C er stump så kunne vi finde den spidse vinkel C_1 ved at bruge sinusrelationerne (som vist ovenfor). Men da C_2 er den stumpe vinkel, kunne vi finde den ved hjælp af formlen ovenfor.

$$C_2 = 180° - C_1 = 180° - 48,5° = 131,5°$$

Grunden til at sammenhængen er sådan skyldes at

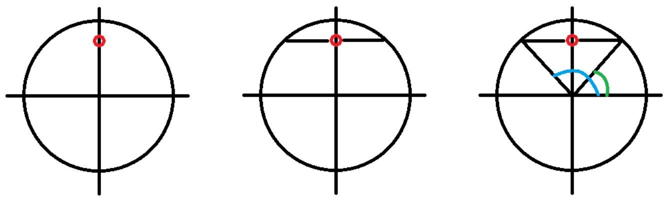
$$\sin(v) = \sin(180° - v)$$

Dette kan illustreres ved følgende tegning



På illustrationen har vi indtegnet enhedscirklen og i denne har vi indtegnet en vinkel v (grøn) samt en vinkel, hvis størrelse er 180^{o}-v (blå). Vi husker, at sinus til en vinkel findes ved at gå vandret ind fra skæringspunktet mellem vinkelbenet og enhedscirklen til man støder på y-aksen. Vi kan se, at de to vinkler har samme sinusværdi.

For at vende tilbage til vores eksempel, så startede vi jo med at regne ud, at sinC=0,75. Hvis vi markerer 0,75 på y-aksen i et koordinatsystem med enhedscirklen indtegnet, så kan vi ud fra denne sinusværdi konstruere to vinkler ved at gå vandret hhv til højre og venstre fra vores punkt.



De to vinkler er hhv 48,5 og 131,5 grader store. Når man bruger $\sin^{-1}$ på sin lommeregner, vil den altid give den spidse vinkel. Ønsker man i stedet den stumpe, skal man trække den spidse fra 180.

2.5 Arealformlen

Indenfor trigonometrien findes der en smart måde at regne arealet af en trekant ud, hvis man blot kender to sider og den mellemliggende vinkel. Man betegner tit arealet af en trekant med T (hvis man brugte A ville man nemlig forveksle det med vinkel A).

$$T = \frac{1}{2}ab\sin(C)$$

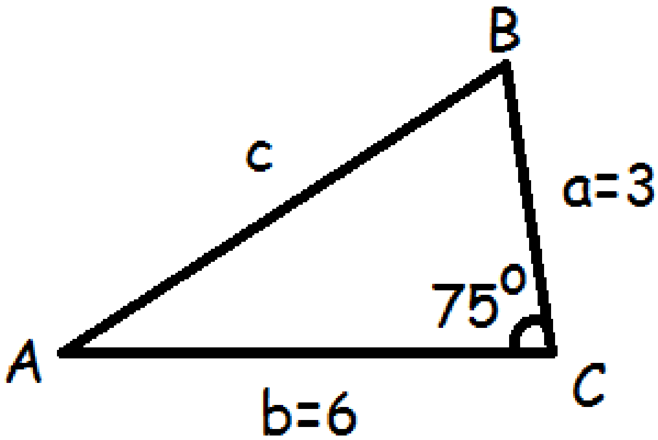
For lettere at kunne huske denne formel, kaldes den ofte for ”en halv appelsin-formlen - prøv selv at udtale højresiden og find ud af hvorfor.

Formlen gælder i vilkårlige trekanter, og man kan derfor også udtrykke den ved de andre sider og vinkler.

$$T = \frac{1}{2}ab\sin(C) = \frac{1}{2}bc\sin(A) = \frac{1}{2}ac\sin(B)$$

Lad os tage et eksempel.

Vi ønsker at finde arealet af denne trekant



Vi kender to sider (a og b) samt den mellemliggende vinkel (C). Derfor kan vi beregne arealet ved hjælp af ”en halv appelsin-formlen

$$T = \frac{1}{2}ab\sin(C)$$

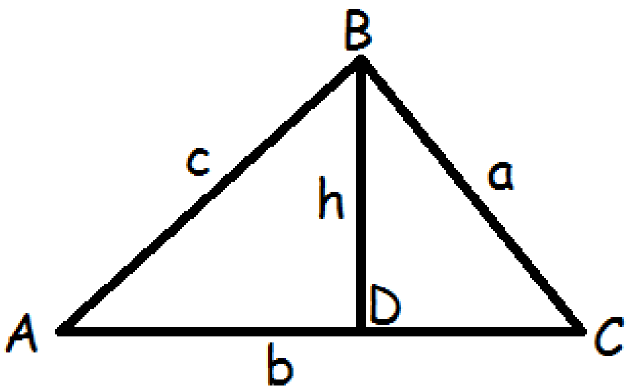
$$T = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin(75^\circ)$$

$$T = 9 \cdot 0,966$$

$$T \approx 8,69 \text{ arealenheder}$$

Hvorfor ser formlen sådan ud?

Det er let at bevise $\frac{1}{2}$ appelsin-formlen. Vi husker på, at arealet af en trekant er en halv højde gange grundlinje.



På ovenstående tegning er b grundlinje til højden h.

$$T = \frac{1}{2}bh$$

Trekanten BDC er retvinklet, og derfor kan vi bruge regnereglerne for sinus i retvinklede trekanter.

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\sin(C) = \frac{h}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h = a \cdot \sin(C)$$

Dette sætter vi ind på h's plads

$$T = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \sin(C) = \frac{1}{2}ab\sin(C)$$

og så er formlen bevist. (Hvis vi ville have vist den med nogle af de andre sider, kunne vi have taget udgangspunkt i en anden højde).

2.6 Grundrelationen

Grundrelationen er en sammenhæng mellem cosinus og sinus, som det er vigtigt at kunne. Man kan tit bruge den til at reducere udtryk.

Den lyder sådan her:

$$(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1$$

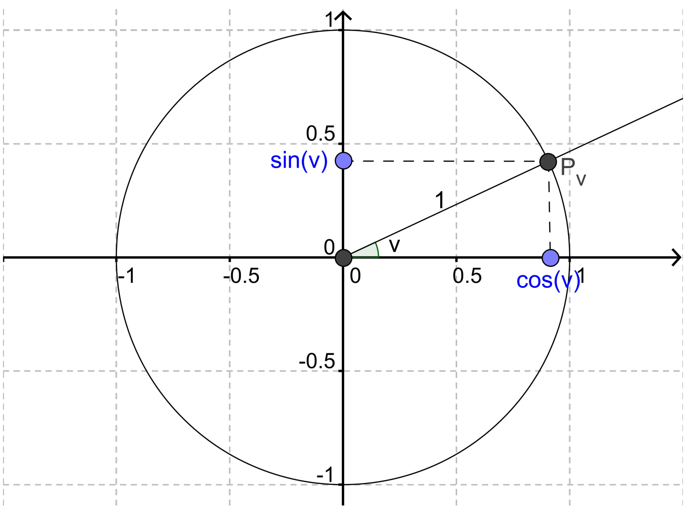
Relationen gælder lige meget hvilken vinkel, man putter ind i cosinus og sinus (så længe det er den samme i begge to).

Undertiden skriver man $\cos^2$(v) i stedet for $(\cos(\text{v}))^2$. Der er udelukkende tale om notation. Det betyder stadig cos(v)*cos(v). Med den nye notation bliver grundrelationen

$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$$

Hvorfor er sammenhængen sådan?

Når vi skal forstå, hvordan grundrelationen er opstået, må vi se på, hvordan cosinus og sinus er defineret. Det er de ud fra enhedscirklen.



Punkterne origo, P_v og (cos(v), 0) danner en retvinklet trekant. Derfor kan vi bruge Pythagoras' læresætning. Vi ser, at den vandrette katete har længden cos(v), mens den lodrette har længden sin(v). Hypotenusen er radius i enhedscirklen og har derfor længden 1 pr. definition.

$$(1.\mathrm{kat})^2 + (2.\mathrm{kat})^2 = \mathrm{hyp}^2$$

$$(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1^2$$

$$(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1$$

Grundrelationen kaldes undertiden for "idiotreglen".

3 Funktioner

I kapitlet om funktioner lærer vi om definitions- og værdimængden for en funktion. Vi ser på hvad en sammensat funktion er og hvordan dette hænger sammen med at finde den omvendte funktion.

3.1 Definitions- og værdimængde

En funktion beskriver sammenhænge mellem variable. Vi kalder tit de variable for x og y. Man kan se funktioner som maskiner. Den uafhængige variabel, x, kommes ind i funktionen/makineriet, og så kommer den afhængige variabel, y, ud på den anden side. For hvert x må der kun være et y. Men der må godt være flere x'er der rammer det samme y. For mere om funktioner, klik her.

Definitionsmængde

Definitionsmængden er alle de tal, vi må komme ind i funktionen. Tit er det alle de reelle tal, men nogle gange er der visse tal, hvor det ikke giver mening at komme dem ind i funktionen. Vi betegner definitionsmængden *Dm*, og hvis vi vil skrive, at det er definitionsmængden for en funktion ved navn f, så skriver vi *Dm(f)*.

Hvis vi f.eks. har funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

så må vi ikke sætte x=0, fordi man aldrig må dividere med 0. Vores definitionsmængde er derfor

$$Dm(f) =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$$

Tegnet mellem intervallerne betyder "foreningsmængde", dvs. at det er begge intervaller, der er definitionsmængden. Man kunne også skrive

$$Dm(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

her betyder backslashen "bortset fra". Det vil sige, at definitionsmængden er alle de reelle tal bortset fra mængden, der består af tallet 0.

Et andet eksempel kunne være funktionen

$$g(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{4 \cdot x}{x-3}$$

Den første brøk får 0 i nævneren, når x=-1. Derfor er -1 ikke med i definitionsmængden.

Den anden brøk får 0 i nævneren, når x=3. Derfor er 3 heller ikke med i definitionsmængden.

Definitionsmængden kan altså skrives på følgende måder.

$$Dm(g) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 3\}$$

$$Dm(g) =]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]3, \infty[$$

Det øverste læses som "de reelle tal bortset fra mængden bestående af tallene -1 og 3".

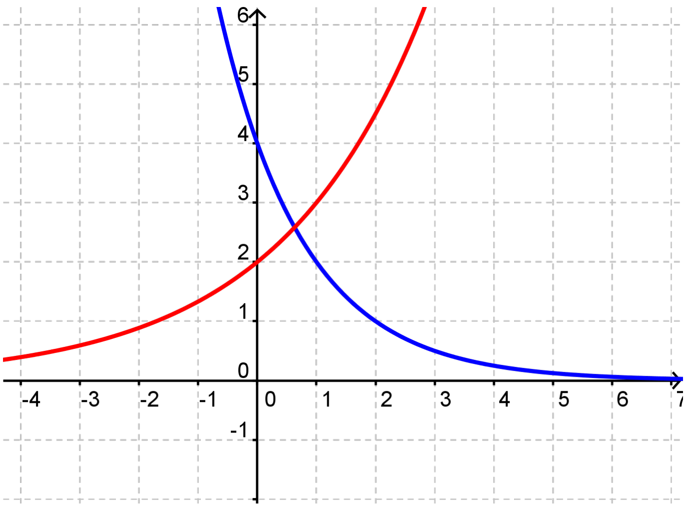
Lineære og eksponentielle funktioner har ikke nogen forbudte værdier. Deres definitionsmængde er derfor alle de reelle tal.

Værdimængde

Mens definitionsmængden er alle de tal, man må komme ind i funktionen (alle de mulige x-værdier), så er værdimængden alle de mulige funktionsværdier (y-værdier). Værdimængden betegnes *Vm*, og hvis vi vil skrive værdimængden for funktionen f, så skriver vi *Vm(f)*.

Tit kan det være en fordel at se på grafen for at finde værdimængden.

En eksponentialfunktion har kun positive y-værdier.



I koordinatsystemet er indtegnet en voksende og en aftagende eksponentialfunktion. De har begge positive y-værdier. Lige meget hvor stor en y-værdi man kunne tænke sig, kan man finde en x-værdi der passer til. Begge grafer smyger sig op af x-aksen (den røde ude mod venstre, den blå ude mod højre). De nærmer sig altså y-værdien 0, men de når aldrig helt derned. Derfor er 0 ikke med i værdimængden. Værdimængden for eksponentialfunktionen er derfor

$$Vm(f) =]0, \infty[$$

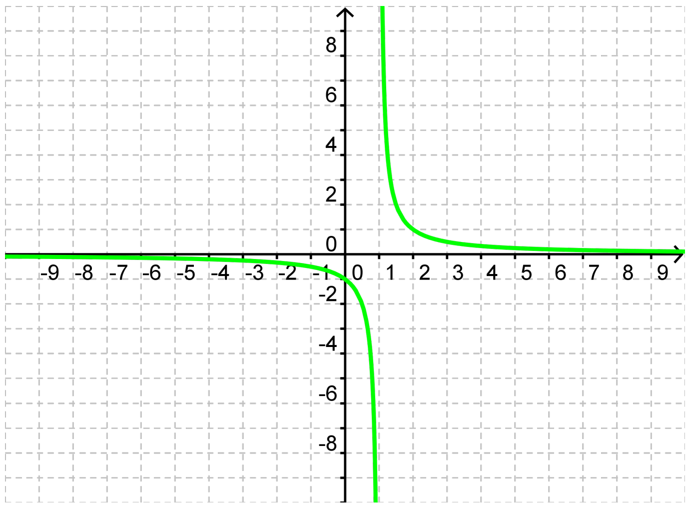
$$Vm(f) = \mathbb{R}_+$$

Det nederste skal læses som de positive reelle tal.

Et andet eksempel kunne være funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

hvis graf er tegnet her

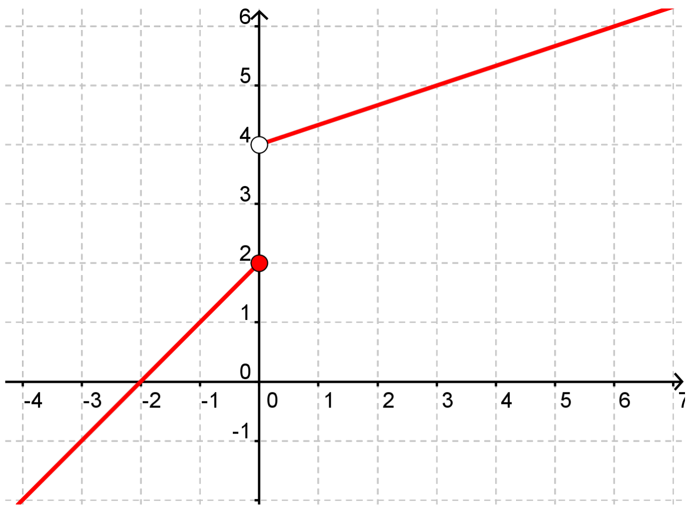


Ude til venstre smyger den sig op ad x-aksen, og funktionsværdierne er derfor tæt på 0, men dog en smule negative. Når vi bevæger os mod højre, falder funktionsværdierne, og når vi nærmer os x=1, bliver y-værdierne uendeligt små. Lige på den anden side af x=1 er funktionsværdierne pludselig uendeligt store, hvorfra de igen falder og nærmer sig 0. Til venstre for x=1 gennemløber vi altså alle de negative y-værdier, og til højre gennemløber vi alle de positive y-værdier. Værdimængden er altså alle de positive og negative reelle tal. Det vil sige alle de reelle tal bortset fra 0.

$$Vm(f) =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$$

$$Vm(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Man kan også forestille sig en funktion hvis graf ser sådan her ud



Definitionsmængden er alle de reelle tal, fordi funktionen er defineret for alle x-værdier. Men der er et interval på y-aksen som ikke er med i værdimængden. Man skal holde tungen lige i munden med om det er åbne eller lukkede intervaller, man har med at gøre. Tallet 2 er med i værdimængden, mens 4 ikke er.

$$Vm(f) =]-\infty, 2] \cup]4, \infty[$$

$$Vm(f) = \mathbb{R} \backslash]2, 4]$$

3.2 Sammensatte funktioner

Hvis man har to (eller flere) funktioner, kan man sætte dem sammen. At sætte funktioner sammen vil sige, at man først kommer sin x-værdi ind i den ene funktion. Det resultat man så når frem til kommer man så ind i den anden funktion. Den funktion, man først bruger, kalder man den indre funktion, mens nummer to kaldes den ydre funktion.

Tænk på et tal, læg 3 til. Gang resultatet med 2.

Her er den indre funktion

$$f(x) = x + 3$$

mens den ydre funktion er

$$g(x) = 2x$$

Hvis vi havde tænkt på tallet 4, skulle vi altså først komme det ind i f.

$$f(4) = 4 + 3 = 7$$

Dette resultat, skulle vi så komme ind på x's plads i g.

$$g(7) = 2 \cdot 7 = 14$$

I stedet for at gøre det af to omgange som ovenfor, så kan man spare tid og gøre det i én omgang. Det vi gjorde var jo at komme x ind i f, og så komme resultatet (dvs. f(x)) ind i g. Skrevet i en omgang g(f(x)). Man kommer altså f(x) ind på x's plads i g. Med eksemplet ovenfor svarer det til:

$$g(f(x)) = 2f(x) = 2(x+3) = 2x + 6$$

Altså har vi fundet en forskrift for den sammensatte funktion g(f(x)). Man kan sætte sit x direkte ind her, og så slipper man for at gøre det af to omgange som ovenfor. Vi tjekker, at vi får samme resultat som før ved at sætte 4 ind:

$$g(f(4)) = 2 \cdot 4 + 6 = 8 + 6 = 14$$

Man skal holde tungen lige i munden, for det er ikke ligegyldigt, hvilken funktion der er indre og ydre. Hvis vi f.eks. havde gjort det i den anden rækkefølge ovenfor ville vi få

$$f(g(x)) = g(x) + 3 = 2x + 3$$

Bolle-notationen

For at undgå de mange parenteser, som opstår ved sammensatte funktioner, bruger man en anden notation kaldet for *bolle-notation*.

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Man læser det som "f bolle g af x", og man kan sige, at man "boller funktionen f med funktionen g".

Hvis

$$f(x) = \sqrt{x} \quad og \quad g(x) = 3x$$

så er

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{3x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) = 3\sqrt{x}$$

Hvis

$$f(x) = 2x + 1 \quad og \quad g(x) = x^2$$

så er

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 1 + 4x$$

Man kan også sætte sin funktion sammen med sig selv.

Hvis

$$f(x) = 2x^3$$

så er

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2f(x)^3 = 2(2x^3)^3 = 2(2^3x^9) = 16x^9$$

3.3 Omvendte funktioner

Identitetsfunktionen

Identitetsfunktionen er en funktion, hvor det tal man kommer ind i funktionen er det samme som kommer ud

$$Id(x) = x$$

Omvendte funktioner

To funktioner kaldes omvendte, hvis man får identitetsfunktionen ved at sammensætte dem. Man kan tænke på det som, at de to funktioner virker modsatrettet, så den ene annullerer det, den anden gør ved et x.

Et eksempel på omvendte funktioner er

$$f(x) = x^2 \quad og \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

Vi tjekker at de er omvendte funktioner ved at sammensætte dem både den ene og den anden vej.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x$$

Da vi ved at sammensætte dem fik x ud, er g og f omvendte funktioner. Hvis f er en funktion, betegner man tit dens omvendte funktion med f $^{-1}$.

F.eks.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = x^2$$

Det er vigtigt at bemærke, at -1"ikke skal forstås som en potens. Det er simpelthen bare et symbol, der betyder "omvendt funktion".

$$f^{-1}(x) \neq (f(x))^{-1}$$

Andre eksempler på omvendte funktioner er

$$e^x \quad og \quad \ln(x)$$

$$10^x \quad og \quad \log(x)$$

$$2x \quad og \quad \frac{x}{2}$$

$$x+8 \quad og \quad x-8$$

Alle de trigonometriske funktioner har også omvendte funktioner.

$$\sin(x) \quad og \quad \sin^{-1}(x)$$

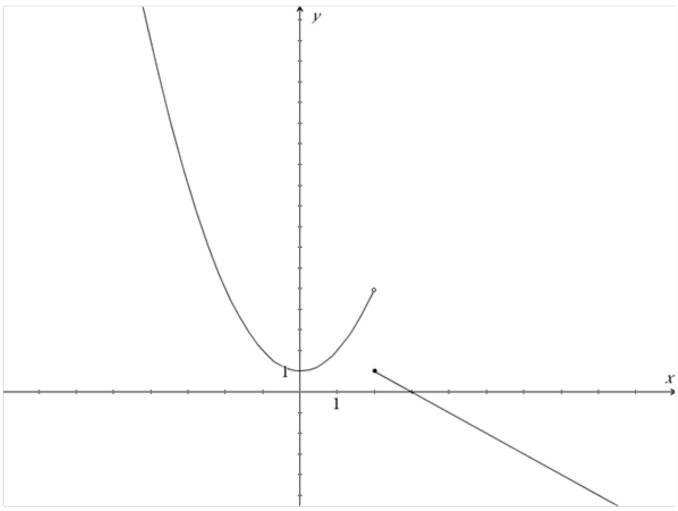
$$\cos(x) \quad og \quad \cos^{-1}(x)$$

$$\tan(x) \quad og \quad \tan^{-1}(x)$$

Omvendte funktioner kaldes også for inverse funktioner.

3.4 Stykkevise funktioner

Stykkevise funktioner er funktioner, hvor funktionsforskriften ændrer sig i forskellige intervaller. En stykkevis funktion kunne f.eks. se således ud:



Vi ser, at denne kurve ikke er kontinuert, og at den skifter funktionsforskrift i punktet (2,1). Læg også mærke til, at punktet på enden af grafen for $f(x) = x^2 + 1$ har en "åben bolle- et punkt, der ikke er fyldt ud i midten. Dette markerer at $x = 2$ ikke ligger på grafen for $x^2 + 1$. Den "lukkede bolle"i starten af grafen for $f(x) = -3x + 3$ markerer, at $x = 2$ er med på denne graf.

Hvordan skrives de op?

Funktionsforskriften for en stykkevis funktion skrives lidt anderledes, end man normalt er vant til. I funktionsforskriften er det nemlig vigtigt, at man definerer intervallerne, hvor de forskellige funktionsforskrifter er gældende. Dette kaldes også en gaffelforskrift. En funktion som den ovenfor kan skrives som.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{for } x < 2 \\ -x + 3 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

Differentiering af stykkevise funktioner

Når vi differentierer stykkevise funktioner, differentierer vi i virkeligheden bare i de forskellige intervaller hver for sig. Dette kan beskrives ved:

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) \\ h'(x) \end{cases}$$

Vi ser her, at funktionen $f(x)$ bliver differentieret ved, at differentiere de to funktioner $g(x)$ og $h(x)$ hver for sig. I dette eksempel har vi dog ikke defineret de intervaller, hvor $g(x)$ og $h(x)$ gælder i. Når vi definerer disse intervaller er det vigtigt at vide, at funktionen ikke er differentiabel i punktet eller punkterne, hvor funktionen bliver "splittet". I vores ovenstående tilfælde er funktionen $f(x)$ altså ikke differentiabel i $x = 2$, selvom denne værdi er inkluderet i funktionen.

4 Geometri

I kapitlet om geometri studerer vi den 2-dimensionelle plangeometri. Vi lærer om afstandsformlen, distanceformlen samt cirklens ligning. Til sidst ser vi på skæring mellem en cirkel og en linje.

4.1 Afstandsformlen

Afstandsformlen er en formel til at finde afstanden mellem to punkter, hvis vi blot kender deres koordinatsæt.

Hvis punktet A har koordinaterne (x_1, y_1) og punktet B har koordinaterne (x_2, y_2), så er afstanden mellem punkterne:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

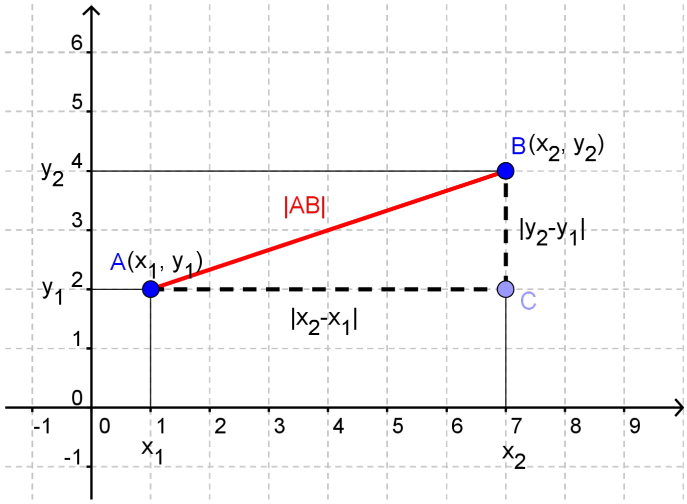
De lodrette linjer betyder "afstanden mellem A og B"eller "længden af linjestykket mellem A og B".

Hvis f.eks. A(1, 2) og B(3, 5), så er

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

Hvorfor ser formlen ud, som den gør?

Grunden til, at formlen ser ud, som den gør, skyldes Pythagoras. Hvis vi ud fra vores ene punkt tegner en vandret stiplet linje, og ud fra det andet tegner en lodret stiplet linje, så vil de to linjer mødes, og der vil dannes en retvinklet trekant.



Det er let at finde længden af kateterne. Den enes længde er forskellen i x-koordinaterne, og den andens er forskellen i y-koordinaterne.

Nu følger formlen ved at bruge Pythagoras' læresætning

$$\text{hyp}^2 = 1.\text{kat}^2 + 2.\text{kat}^2$$

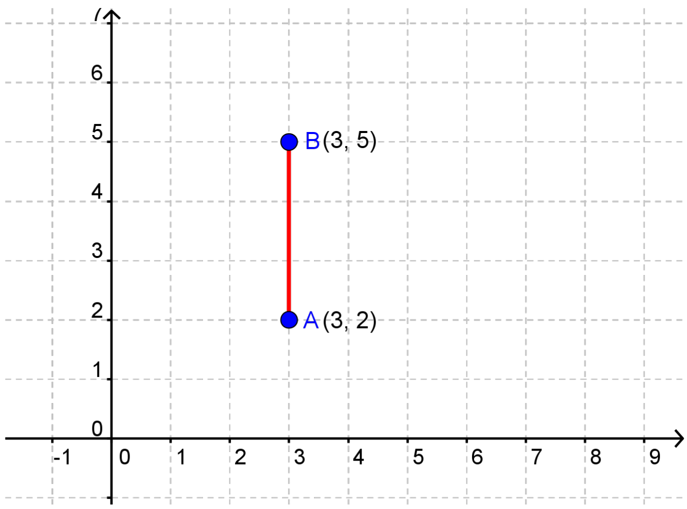
$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Så skal vi til sidst tage kvadratroden på begge sider

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

OBS: Formlen gælder også, selvom linjestykket mellem punkterne er parallelt med x- eller y-aksen.



$$|AB| = \sqrt{(3-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{0 + 3^2} = 3$$

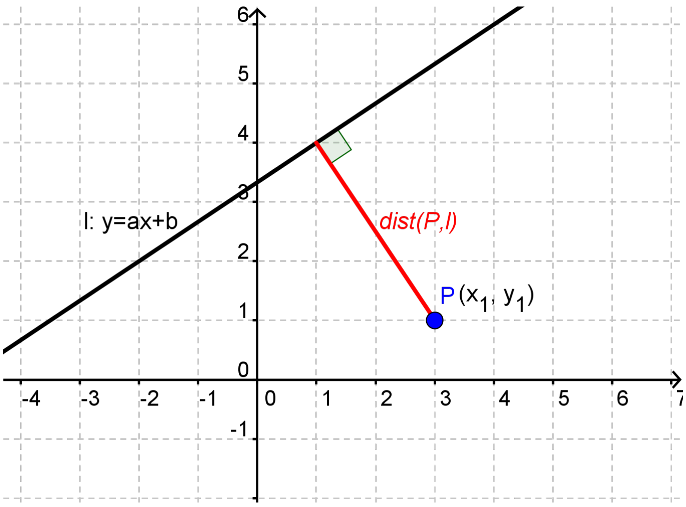
4.2 Distanceformlen

Mens afstandsformlen bruges til at bestemme afstanden mellem to punkter, så bruges distanceformlen til at bestemme den korteste afstand mellem en ret linje og et punkt.

Vi kalder vores rette linje for l, og vores punkt for P. Da l er ret, har den ligningen $y{=}ax{+}b$, og Phar koordinatsættet (x_1, y_1). Den korteste afstand mellem P og l er

$$\mathrm{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Den korteste afstand betyder den vinkelrette afstand, som man kan se på tegningen nedenfor.



Hvis vores linje og punkt er givet ved

$$l : y = 3x + 2 \quad \text{og} \quad P(5,\ 7)$$

så er

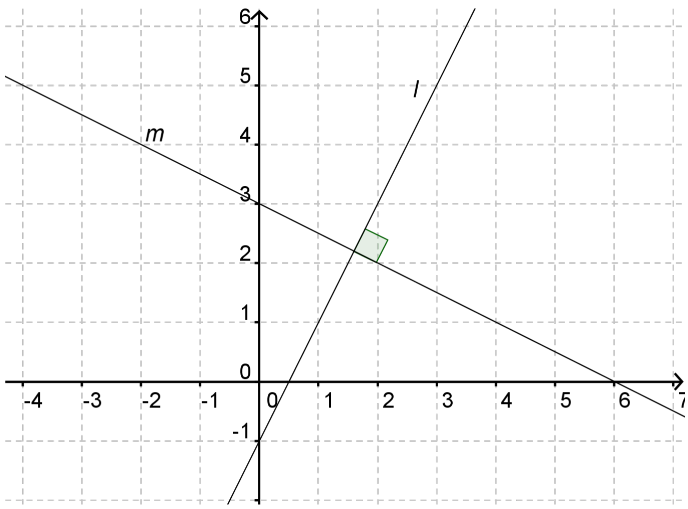
$$\mathrm{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|3 \cdot 5 + 2 - 7|}{\sqrt{3^2+1}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \approx 3,16$$

4.3 Ortogonale linjer

Hvis to rette linjer ikke er parallelle, så vil de skære hinanden i et punkt. I dette punkt kan man måle vinklen mellem dem. Hvis vinklen mellem dem er 90°, så siger man, at de to linjer står vinkelret på hinanden, eller at de er ortogonale.

At to linjer er ortogonale er altså det samme som at de står vinkelret på hinanden.

På følgende tegning er linjerne l og m ortogonale.



Man skriver at to linjer er ortogonale ved at bruge følgende tegn

$$l \perp m$$

Der gælder en ret vigtig sætning om ortogonale linjer. Hvis vores linjer er givet ved ligningerne l:y=ax+b og m:y=cx+d, så gælder der:

$$l \perp m \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c = -1$$

Med ord vil det sige "to linjer er ortogonale hvis og kun hvis produktet af deres hældningskoefficienter er -1".

Dette gør det meget let at undersøge om to linjer er ortogonale. Man skal bare gange hældningerne med hinanden og se, om man får -1.

Lad os tage et par eksempler:

Eksempel 1

Er linjerne l: y=2x-1 og m: y=-0,5x+3 ortogonale?

Linjen l har hældningen a=2 og linjen m har hældningen c=-0,5

$$a \cdot c = 2 \cdot (-0,5) = -1$$

Da produktet af hældningerne er -1, så er linjerne ortogonale. Det er faktisk dem, der er indtegnet ovenfor.

Eksempel 2

Find ligningen for den linje m, der er ortogonal med l: y=4x+1 og som går gennem punktet P(2,3).

Vi skal altså finde m's hældning (c) og m's skæring med y-aksen (d). Vi starter med at finde c. Da m står vinkelret på l, ved vi, at produktet af deres hældninger skal være -1

$$a \cdot c = -1$$

$$4 \cdot c = -1$$

$$c = \frac{-1}{4}$$

$$c = -0,25$$

Altså må ligningen for m være

$$y = -0,25x + d$$

Vi kan bestemme d, fordi vi ved, at punktet (2, 3) ligger på m. Det betyder, at vi kan indsætte dette punkt i ligningen for m.

$$y = -0,25x + d$$

$$3 = -0,25 \cdot 2 + d$$

$$3 = -0,5 + d$$

$$3 + 0,5 = d$$

$$3,5 = d$$

Altså er ligningen for m

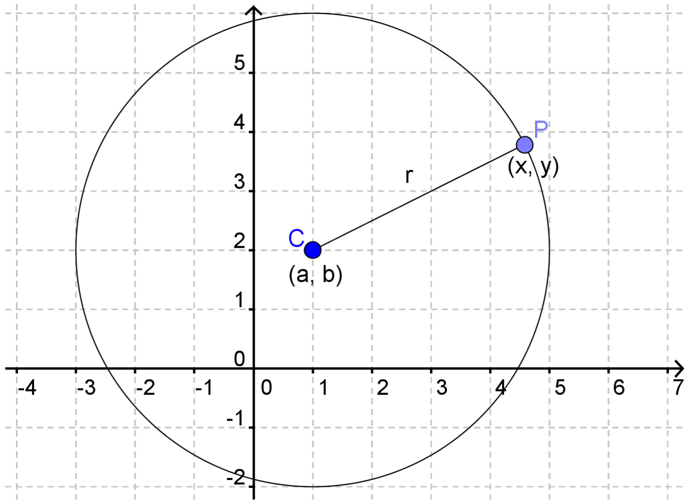
$$y = -0,25x + 3,5$$

4.4 Cirklens ligning

$$y = 5x - 3$$

er ligningen for en ret linje. Det betyder, at hvis man sætter et punkt (x, y) ind i ligningen, så vil ligningen være sand (der står det samme på begge sider af lighedstegnet) hvis punktet ligger på linjen, og den vil være falsk (der står noget forskelligt på de to sider) hvis punktet ikke ligger på linjen.

På samme måde kan man lave en ligning for en cirkel. En cirkel er bestemt ud fra to ting: dens centrum og dens radius.



Hvis et punkt P(x,y) ligger på cirklens periferi, så er afstanden mellem punktet og centrum lig med radius.

$$|PC| = r$$

Vi kan bruge afstandsformlen til at skrive lidt om på det.

$$|PC| = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Den nederste ligning er den, vi kalder for cirklens ligning. Hvis en cirkel har centrum i C(a, b) og radius r, så er dens ligning

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Det vil sige, at et punkt P(x, y) ligger på cirklen hvis og kun hvis koordinatsættet (x, y) tilfredsstiller ligningen.

Eksempel

Cirklen med centrum i (1, 4) og med r=5 har ligningen

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

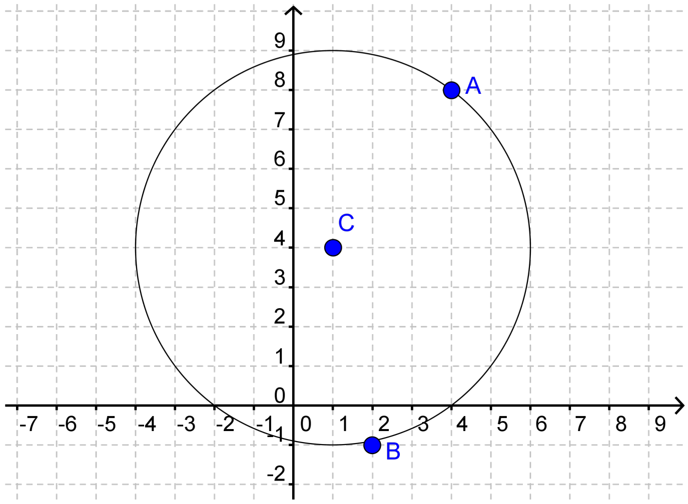
Punktet A(4, 8) ligger på cirkelens periferi, fordi

$$(4-1)^2 + (8-4)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = r^2$$

Punktet B(2,-1) ligger ikke på cirkelens periferi, fordi

$$(2-1)^2 + (-1-4)^2 = 1^2 + (-5)^2 = 1 + 25 = 26 \neq r^2$$

Cirklen og punkterne er indtegnet på figuren nedenfor



4.5 Omformning af cirklens ligning

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16$$

er ligningen for cirklen med centrum i C(2, -1) og radius 4.

Ved hjælp af kvadratsætningerne kan vi udregne parenteserne

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16$$

$$(x^2+4-4x)+(y^2+1+2y)=16$$

$$x^2+y^2-4x+2y+5=16$$

$$x^2+y^2-4x+2y=11$$

Den nederste ligning er en omformning af den øverste, og derfor er den nederste også en ligning for cirklen. Imidlertid kan man ikke aflæse centrum og radius direkte ud af den. Vi vil derfor prøve at finde en metode til at omforme ligninger af den nederste slags til den øverste slags.

Vi starter med en ligning af den nederste type

$$x^2+y^2-10x+4y=-25$$

Idéen er at få samlet nogle af leddene ved hjælp af kvadratsætningerne.

$$x^2-10x \quad og \quad y^2+4y$$

skal altså ses som dele af kvadrater på toledede størrelser, hvor -10x og 4y svarer til de dobbelte produkter.

$$(x-5)^2=x^2+25-10x$$

$$(y+2)^2=y^2+4+4y$$

Vi har valgt tallene i parenteserne, således at vi får -10x og 4y til at være de dobbelte produkter. Hvis vi rykker tallene fra højre side hen på venstre, får vi

$$(x-5)^2 - 25 = x^2 - 10x$$

$$(y+2)^2 - 4 = y^2 + 4y$$

Højresiden er nu identisk med det, vi startede med. Derfor kan vi omforme vores ligning

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y = -25$$

$$x^2 - 10x + y^2 + 4y = -25$$

$$(x-5)^2 - 25 + (y+2)^2 - 4 = -25$$

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = -25 + 25 + 4$$

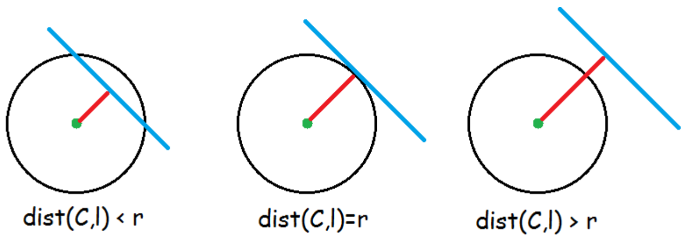
$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Nu kan vi aflæse cirklens centrum til (5, -2) og radius til 2 (kvadratroden af 4).

4.6 Cirkler og linjers skæring

Når man har med cirkler og linjer at gøre, kan det ofte være nyttigt at finde ud af, om de skærer hinanden, og hvad koordinatsættene til skæringspunkterne i så fald er.

Der er 3 muligheder for antal skæringer, når man ser på cirkler og linjer. Hvis linjen skærer cirklen er der to skæringspunkter, hvis linjen tangerer cirklen er der ét røringspunkt, og hvis cirklen og linjen slet ikke krydser hinanden er der (selvfølgelig) ingen skæringspunkter.



Hvis man kender cirklens centrumkoordinater og linjens ligning, kan man beregne den vinkelrette afstand mellem centrum og linje ved hjælp af distanceformlen. Hvis denne afstand er mindre end radius vil der være to skæringer, hvis den er lig radius vil der være et røringspunkt, og hvis den er større end radius vil der ikke være nogen skæringer.

Eksempel:

Skærer linjen l: y=2x+4 cirklen C: $(x\text{-}1)^2+(y+3)^2=36$?

Cirklens centrum er altså (1, -3) og radius er 6.

Vi finder afstanden mellem linjen og cirklen vha. distanceformlen

$$\mathrm{dist}(C,l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|2\cdot 1 + 4 - (-3)|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,02$$

Da afstanden mellem centrum og linje er mindre end radius er der altså to skæringer.

Bestemme koordinaterne for skæringspunkterne

Når man har bestemt antallet af skæringspunkter, kan man måske også være interesseret i at finde koordinaterne for disse skæringer.

Dette gør man ved at sætte de to ligninger sammen. Man sætter linjens ligning ind på y's plads i cirklens ligning. Derved får vi en andengradsligning med x som eneste ubekendte. Den løser vi, og vi har så x-koordinaterne for. Disse indsættes så i linjens ligning for at finde de tilsvarende y-koordinater.

Vi illustrerer det med et eksempel.

Lad cirklen være givet ved ligningen

$$(x-2)^2+(y+1)^2=20$$

og linjen ved ligningen

$$y=x+3$$

Man kan tjekke efter, at de har to skæringer. For at finde koordinaterne til skæringerne sættes udtrykket for y i linjens ligning ind i cirklens ligning.

$$(x-2)^2+(y+1)^2=20$$

$$(x-2)^2+(x+3+1)^2=20$$

$$(x-2)^2+(x+4)^2=20$$

Nu udregner vi parenteserne ved hjælp af kvadratsætningerne

$$(x-2)^2+(x+4)^2=20$$

$$x^2+4-4x+x^2+16+8x=20$$

$$2x^2+4x+20=20$$

$$2x^2+4x=0$$

Vi har nu en andengradsligning, som vi løser ved hjælp af nulreglen

$$2x^2+4x=0$$

$$2x(x+2)=0$$

$$x=0 \vee x=-2$$

Disse to x-værdier er x-koordinaterne for de to skæringspunkter. Ved at indsætte dem i linjens ligning, får vi de tilsvarende y-værdier.

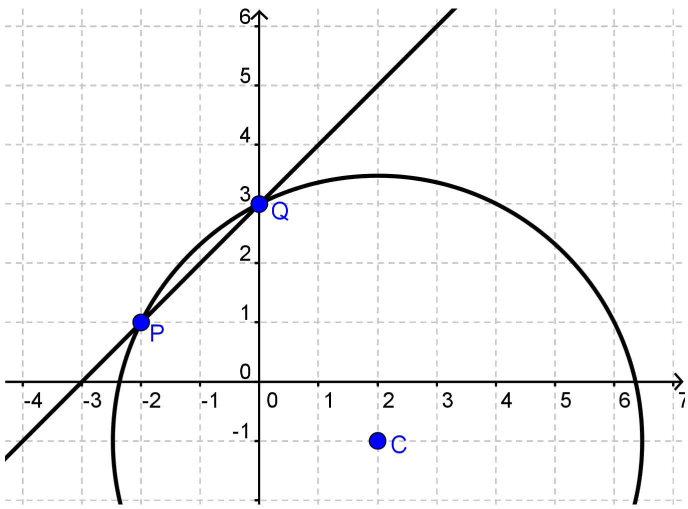
$$y=x+3$$

$$y_1=0+3=3$$

$$y_2=-2+3=1$$

Skæringspunkterne er altså

$$(0,\ 3) \quad \text{og} \quad (-2,\ 1)$$



5 Differentialregning

I kapitlet om differentialregning lærer vi om kontinuitet og differentiabilitet af funktioner. Vi lærer om funktionstilvækst, differentialkvotienter, regnereglerne for differentialkvotienter, tangentens ligning samt optimering.

5.1 Hvad er differentialregning?

Differentialregning er en vigtig disciplin indenfor analytisk matematik. Det går kort og godt ud på at bestemme hvor hurtigt funktioner vokser/aftager i et bestemt punkt. Med andre ord ønsker man at bestemme hældningen af tangenten i det enkelte punkt.

Differentialregning viser sig at være meget anvendeligt i funktionsanalyse. Man kan således bruge det til at bestemme funktioners maksimums- og minimumspunkter, funktioners monotoniforhold, optimering af funktioner og meget andet. Differentialregning er også meget anvendt inden for andre fag og bliver brugt af bl.a. fysikere, ingeniører og økonomer.

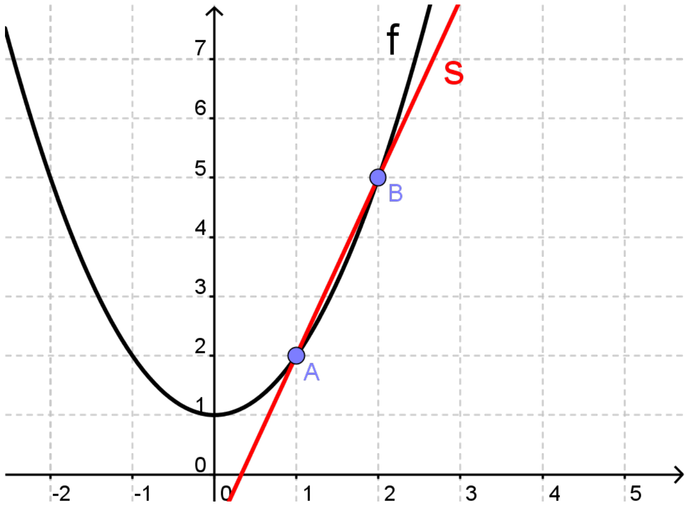
Her på WebMatematik kan du læse om de vigtigste begreber i differentialregning samt dens anvendelsesmuligheder.

5.2 Sekant og tangent

I differentialregning bruger man meget begreberne *sekant* og *tangent*. Derfor starter vi med at forklare dem her.

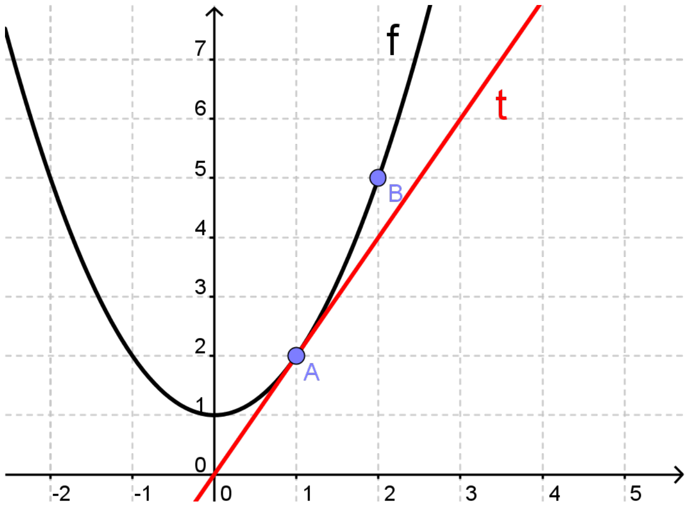
En sekant er en ret linje, der skærer grafen for en funktion i to punkter. Man kan tegne sekanten ved at tegne de to punkter på grafen og (vha. en lineal) tegne linjen gennem dem.

Neden for er tegnet grafen for en funktion og sekanten gennem punkterne A(1, 2) og B(2, 5)

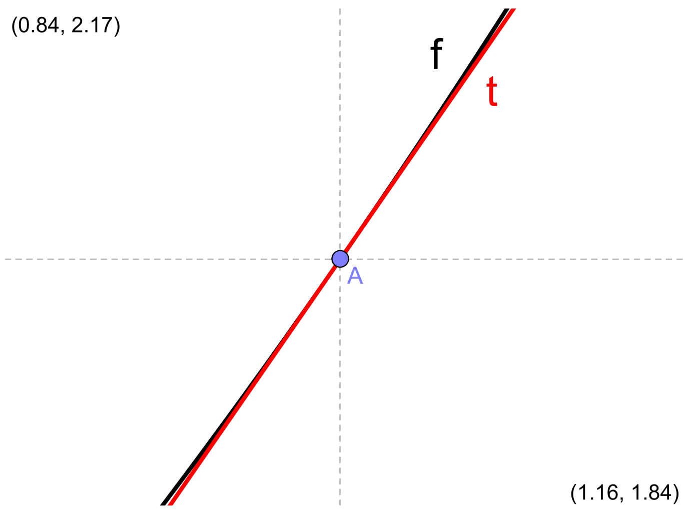


En tangent er også en ret linje. Men i modsætning til en sekant, så rører en tangent kun funktionsgrafen i ét punkt. Tangenten lægger sig op ad grafen, og hvis man zoomer tæt nok ind, kan det være svært at se forskel på tangenten og funktionsgrafen.

Nedenfor er tegnet samme funktion som ovenfor med tangenten i punktet A(1, 2)



Og hvis vi zoomer tilpas meget ind, kan det være svært at se forskel på grafen og tangenten



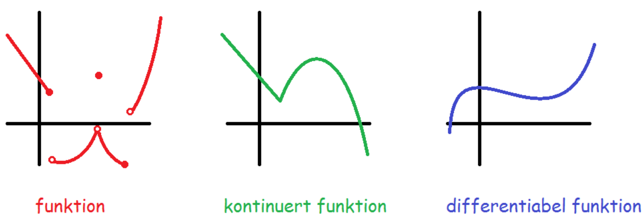
Det er ikke altid muligt at tegne tangenten i et punkt. Det kræver at grafen ikke har et knæk i punktet.

5.3 Kontinuitet og differentiabilitet

Kontinuitet og differentiabilitet er to vigtige begreber indenfor matematisk analyse. Det er begreber, der omhandler egenskaber ved funktioner.

Vi skal huske på, at en funktion bare er en ordning, der til hver x-værdi i definitionsmængden knytter én og kun én y-værdi.

Følgende grafer er grafer for funktioner.



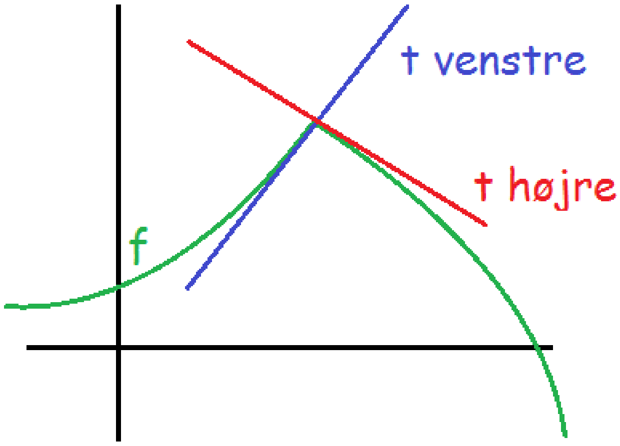
Den første graf er godt nok en funktion (for hver x-værdi er der netop én y-værdi), men den er ikke særligt pæn at regne på. Den hopper og springer.

Den anden funktion er noget pænere. Den er nemlig sammenhængende. Vi kan tegne den uden at løfte blyanten fra papiret. Den type af funktioner kaldes kontinuerte (IKKE kontinuerlige!)

Den tredje graf viser en funktion, der både er sammenhængende og som desuden er "glat". Dvs. at den ikke har nogen "knæk". Den type af funktioner kaldes differentiable.

At en funktion er differentiabel betyder også, at man kan tegne en entydig tangent i hvert eneste punkt på grafen. Det kan man ikke, hvis der er et knæk. I knækpunkter kan man tegne to tangenter, og det bliver noget rod.

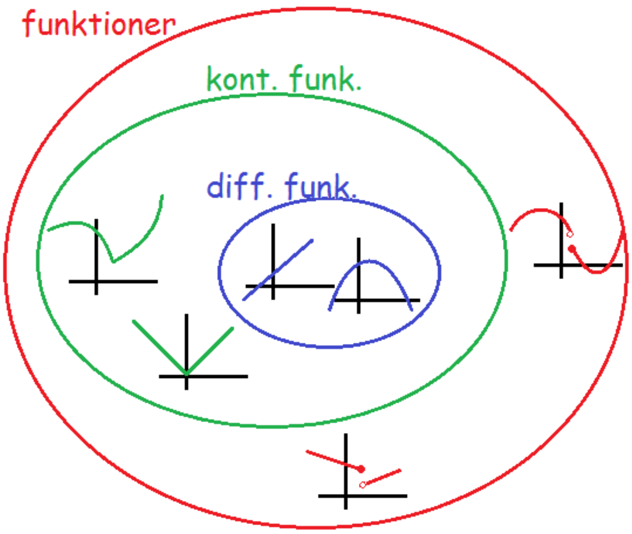
Nedenfor er tegnet en funktionsgraf (grøn) med et knæk. I knækket kan man tegne tangenten fra venstre og tangenten fra højre.



Det er kun de differentiable funktioner, man kan differentiere.

Alle de differentiable funktioner er også kontinuerte (fordi de er sammenhængende). Derved kan man sige, at differentiabilitet er en "finere"egenskab end kontinuitet.

Man kan tegne det som følgende diagram. Den røde cirkel er mængden af alle funktioner. Inde i den ligger delmængden af kontinuerte funktioner (de sammenhængende) (grøn cirkel). Inde i de kontinuerte funktioner ligger delmængden af differentiable funktioner (sammenhængende og glatte) (den blå cirkel).



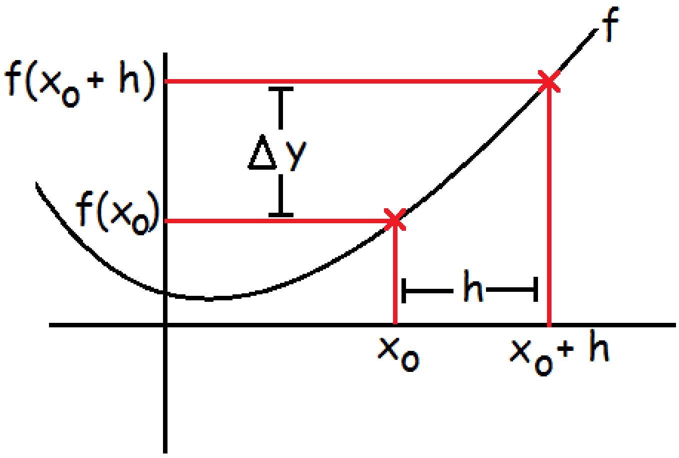
5.4 Funktionstilvækst

Som nævnt tidligere handler differentialregning om at finde ud af, hvor hurtigt funktioner vokser/aftager.

Derfor er man nødt til først at finde ud af, hvor meget funktionen vokser. Man bruger indenfor matematikken tit det græske bogstav Δ (delta) til at beskrive en tilvækst.

Hvis man har et fast punkt x_0 og man ønsker at se, hvor meget funktionen ændres (vokser/aftager), hvis man går et lille stykke, h, hen på x-aksen, så kan man beregne funktionstilvæksten, Δy.

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$



Lad os tage et eksempel. Vores funktion er f(x) = x^2 - 2x, og det punkt, vi ønsker at bestemme funktionstilvæksten fra er $x_0 = 3$

Vores formel for funktionstilvæksten er altså

$$\Delta y = f(3 + h) - f(3)$$

Vi finder først f(3+h) ved at sætte 3+h ind på x's plads i funktionsudtrykket.

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 - 2(3 + h) = (3 + h)^2 - 6 - 2h$$

Vi bruger kvadratsætningerne til at reducere udtrykket

$$(3 + h)^2 - 6 - 2h = (9 + h^2 + 6h) - 6 - 2h = h^2 + 4h + 3$$

Nu udregner vi f(3):

$$f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$$

Funktionstilvæksten er derfor

$$\Delta y = f(3 + h) - f(3) = (h^2 + 4h + 3) - (3) = h^2 + 4h$$

Afhængig af, hvor stor h er (hvor stort et skridt vi tager på x-aksen), kan vi altså bestemme, hvor stor funktionstilvæksten vil blive ved at sætte denne h-værdi ind.

Eksempel med tredjegradspolynomium

Vi kan også tage et eksempel med et tredjegradspolynomium. Vi betragter funktionen f(x)=x^3+4x, og vælger nu vores begyndelsespunkt x_0 til at være 2. Vi har igen, at:

$$\Delta y = f(2 + h) - f(2)$$

Vi finder f(2+h) på samme måde som før:

$$f(2 + h) = (2 + h)^3 + 4(2 + h) = (2 + h)^3 + 8 + 4h$$

Denne gang skal vi bruge en kubiksætning på udtrykket, da det står i tredje potens:

$$(2+h)^3+8+4h = 2^3+h^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+8+4h$$
$$= 8+h^3+12h+6h^2+8+4h = h^3+6h^2+16h+16$$

Så udregner vi f(2):

$$f(2) = 2^3+4\cdot 2 = 8+8 = 16$$

Nu kan vi bestemme funktionstilvæksten:

$$\Delta y = h^3+6h^2+16h+16-16 = h^3+6h^2+16h$$

Det er altså samme princip for polynomier af højere orden, men vi får nogle noget mere besværlige udtryk at arbejde med.

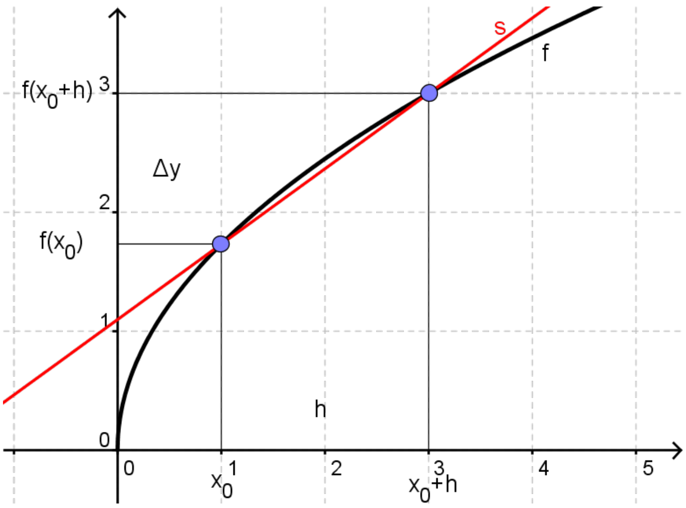
5.5 Differenskvotient og differentialkvotient

Når man differentierer en funktion, finder man tangenthældningen i et bestemt punkt. Den hældning, man finder, kaldes *differentialkvotienten* i punktet.

Men hvordan finder man tangenthældningen i ét punkt?

Vi ved fra c-niveau, hvordan man finder hældningen af en ret linje, hvis man kender to punkter på linjen. Det gør man ved at dividere ændringen af y-værdierne med ændringen af x-værdierne (læs mere her).

Vi starter på samme måde, når vi skal finde hældningen i ét punkt. Hvis vi ønsker at finde hældningen i punktet (x_0, f(x_0)), så starter vi med at gå et stykke, h, hen ad x-aksen og indtegner punktet (x_0+h, f(x_0+h)). Vi kan tegne sekanten, s, gennem de to punkter.



Vi kan beregne hældningen af sekanten som

$$a_s = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Man kan også skrive det som

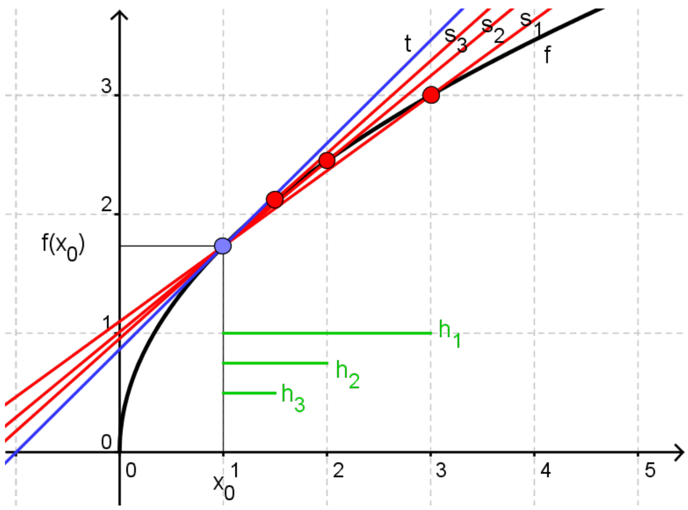
$$a_s = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Man kalder sekanthældningen for *differenskvotienten.*Differenskvotienten er altså funktionstilvæksten divideret med h. Navnet kommer af, at der er tale om en kvotient (en brøk) hvor tælleren er differensen mellem funktionsværdierne.

Differentialkvotient

Hvis man nu gør h mindre, så nærmer hjælpepunktet sig vores faste punkt, og så vil sekanten komme til at ligne tangenten mere og mere.

Herunder er indtegnet tangenten (blå) og tre sekanter (røde) lavet ud fra forskellige h-værdier.



Hvis vi lader h blive uendelig lille, så vil sekanten nærme sig tangenten. Det er det, der er tricket i differentialregning!

Vi finder differenskvotienten og så ser vi, hvad der sker, når h bliver uendelig lille. Det resultat, vi får, kalder vi differentialkvotienten, og det svarer til tangentens hældning.

Man siger, at differentialkvotienten er grænseværdien af differenskvotienten for h gående mod 0.

$$a_t = \lim_{h \to 0}(a_s) = \lim_{h \to 0}(\frac{\Delta y}{h})$$

Man skriver også tit differentialkvotienten i x_0 som

$$f'(x_0)$$

Dette læses "f mærke x_0"

Eksempel

Vores funktion er $f(x)=x^2+3$. Vi ønsker at finde differentialkvotienten når $x_0=4$

Først finder vi funktionstilvæksten

$$f(4+h) = (4+h)^2 + 3 = (\underbrace{16 + h^2 + 8h}_{\text{kvadratsætning}}) + 3 = h^2 + 8h + 19$$

$$f(4) = 4^2 + 3 = 16 + 3 = 19$$

$$\Delta y = f(4+h) - f(4) = (h^2 + 8h + 19) - 19 = h^2 + 8h$$

Så finder vi differenskvotienten (dvs. sekanthældningen)

$$a_s = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h^2 + 8h}{h} = \frac{h(h+8)}{h} = h + 8$$

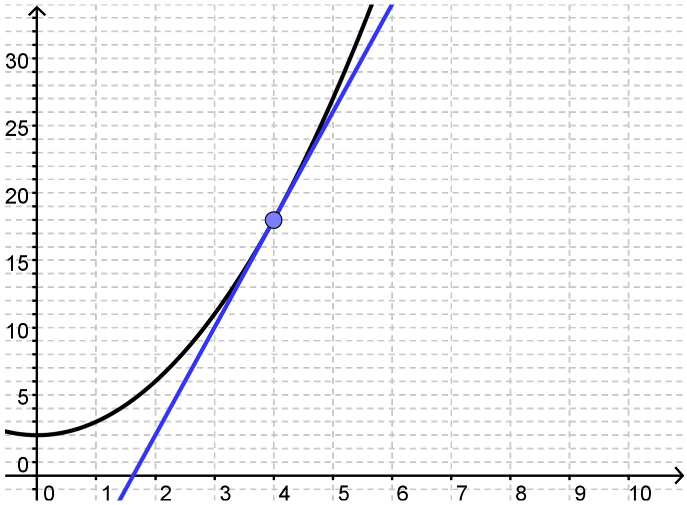
Så ser vi, hvad der sker, når h bliver uendeligt lille. Lige meget, hvor lille h bliver, så vil der ikke ske noget med 8-tallet. Men da h bliver meget lille vil det til sidst være så småt, at det er helt ubetydeligt.

$$a_t = \lim_{h \to 0}(a_s) = \lim_{h \to 0}(h + 8) = 8$$

Altså er differentialkvotienten

$$f'(4) = 8$$

Det vil sige, at tangenten til f i punktet (4, f(4)) har en hældning på 8.



5.6 Tretrinsreglen

Tretrinsreglen er en metode til, hvordan man differentierer funktioner. Den er en kombination af afsnittene funktionstilvækst og differenskvotient og differentialkvotient herover, så det anbefales at du læser dem først.

Tretrinsreglen består - som navnet antyder - af tre trin.

Trin 1: Find funktionstilvæksten

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Trin 2: Find differenskvotienten

$$a_s = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Trin 3: Find differentialkvotienten

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{h \to 0}(a_s) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right)$$

I stedet for at indsætte et bestemt tal på x_0's plads, så plejer man at tage udgangspunkt i et tilfældigt x_0. Resultatet bliver således en funktion, der kaldes den *afledede funktion*. Ved at indsætte et punkt i den afledede funktion, finder man hældningen i det punkt.

Eksempel

Vores funktion er f(x)= $3x^2$

Trin 1: Vi starter med at finde f(x_0+h) ved at sætte x_0+h ind på x's plads i funktionsudtrykket.

$$f(x_0+h)=3(x_0+h)^2=3(x_0^2+h^2+2x_0h)=3x_0^2+3h^2+6x_0h$$

Vi brugte undervejs en kvadratsætning

Nu finder vi f(x_0)

$$f(x_0)=3x_0^2$$

Vi finder funktionstilvæksten ved at trække dem fra hinanden

$$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)=(3x_0^2+3h^2+6x_0h)-(3x_0^2)=3h^2+6x_0h$$

Trin 2: Nu finder vi differenskvotienten (dvs. sekanthældningen)

$$a_s=\frac{\Delta y}{h}=\frac{3h^2+6x_0h}{h}=\frac{h(3h+6x_0)}{h}=3h+6x_0$$

Undervejs satte vi et h uden for parentes i tælleren for at kunne reducere brøken med h (lade h i tælleren gå ud med h i nævneren)

Trin 3: Til sidst skal vi finde differentialkvotienten.

Vi skal altså undersøge, hvad der sker med differenskvotienten, når h bliver uendelig lille. Når h bliver uendelig lille, så bliver 3h også uendelig lille. Derfor kan vi se bort fra 3h. Derimod bliver $6x_0$ overhovedet ikke påvirket af, hvor stor h er.

$$a_t=\lim_{h\to 0}(a_s)=\lim_{h\to 0}(3h+6x_0)=6x_0$$

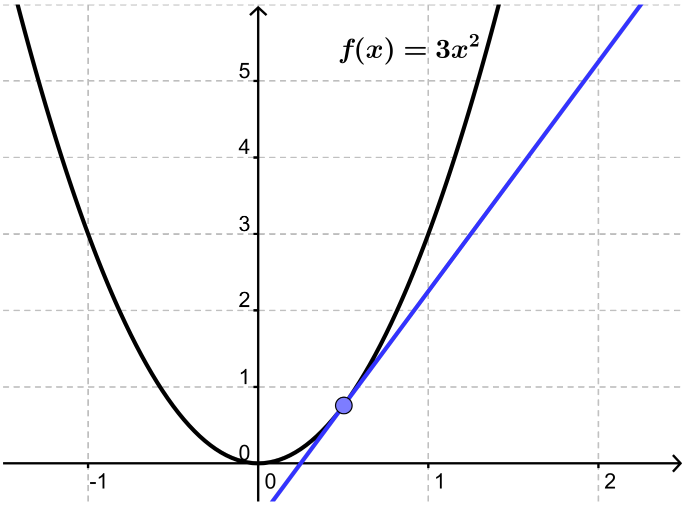
Differentialkvotienten er dermed

$$f'(x_0)=6x_0$$

Det betyder, at hvis vi vil finde hældningen i et bestemt punkt, så indsætter vi det bare på x_0's plads, og så finder vi hældningen. F.eks. er hældningen, når x_0=0,5

$$f'(0,5)=6\cdot 0,5=3$$

Dette kan vi også aflæse på nedenstående tegning, hvor f er tegnet ind samt tangenten i punktet x_0=0,5



5.7 Afledede funktioner

I praksis gider man ikke bruge tretrinsreglen hver gang, man skal differentiere en funktion. Der er derfor nogle regler, man kan bruge. De er alle sammen udledt vha. tretrinsreglen

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
kx	k
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Hvis man f.eks. vil differentiere

$$f(x) = x^7$$

så får man

$$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

Hvis man vil differentiere

$$g(x) = e^{5x}$$

så får man

$$g'(x) = 5e^{5x}$$

Hvis man vil differentiere

$$h(x) = 4x$$

så får man

$$h'(x) = 4$$

5.8 Regneregler for differentialkvotienter

Sumreglen

Hvis man ønsker at differentiere summen af to funktioner, så kan man bare differentiere dem hver for sig. Det samme gælder med differensen af to funktioner. Med symboler, kan vi skrive det således.

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \qquad \Rightarrow$$

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Med ord siger vi "differentialkvotienten af en sum er lig med summen af differentialkvotienterne".

F.eks. hvis

$$h(x) = 2x + x^3$$

så kan vi kalde

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^3$$

Vi differentierer de to funktioner hver for sig

$$f'(x) = 2, \quad g'(x) = 3x^2$$

Hvis vi vil differentiere h, skal vi altså bare lægge de to sammen.

$$h'(x) = 2 + 3x^2$$

Konstantreglen

Hvis vi ønsker at differentiere en funktion, der er ganget med en konstant, så skal vi bare lade konstanten stå og så differentiere funktionen.

$$g(x) = k \cdot f(x) \Rightarrow$$

$$g'(x) = k \cdot f'(x)$$

Hvis

$$g(x) = 4\sqrt{x}$$

så skal vi altså bare lade 4-tallet stå og differentiere kvadratroden af x

$$g'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Produktreglen

Hvis man vil differentiere to funktioner, der er ganget med hinanden, er det desværre ikke nær så let.

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \Rightarrow$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Man kan huske reglen ved at man skal "diffe, beholde + beholde og diffe".

Hvis f.eks.

$$h(x) = 5x^2 \cdot \ln(x)$$

Denne funktion er et produkt af de to funktioner:

$$f(x) = 5x^2, \quad g(x) = \ln(x)$$

Vi differentierer de to funktioner hver for sig:

$$f'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} = 10x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Vi kan nu bestemme h'(x) med produktreglen ud fra de fundne differentialkvotienter og funktionerne:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 10x \cdot \ln(x) + 5x^2 \cdot \frac{1}{x} = 10x\ln(x) + 5x$$

Kvotientreglen

Hvis man vil differentiere to funktioner, der er divideret med hinanden, så er regnereglen endnu sværere.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \Rightarrow$$

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Hvis f.eks.

$$h(x) = \frac{x^3}{5\ln(x)}$$

Så er h en kvotient (brøk) af funktionerne

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = 5\ln(x)$$

Vi differentierer dem hver især

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

Hvis vi vil differentiere h, kan vi altså nu sætte ind i kvotientreglen

$$h'(x) = \frac{3x^2 \cdot 5\ln(x) - x^3 \cdot \frac{5}{x}}{(5\ln(x))^2} = \frac{15x^2\ln(x) - 5x^2}{25 \cdot (\ln(x))^2} = \frac{3x^2\ln(x) - x^2}{5 \cdot (\ln(x))^2}$$

Regnereglerne

For at opsummere er reglerne:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

5.9 Tangentens ligning

Man kan bruge differentialregning til at bestemme en ligning for tangenten i et bestemt punkt på en funktion.

Hvis funktionen f er differentiabel i punktet (x_0, f(x_0)) - dvs. hvis der ikke er et knæk i det punkt - så er ligningen for tangenten i det punkt givet ved

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Når vi bruger denne formel, skal vi sætte noget ind, der hvor der står x_0, f(x_0) og f '(x_0). Men x og y skal vi lade være variable.

Hvorfor ser formlen sådan ud?

Fra teorien om rette linjer ved vi, at man finder hældningen til en ret linje ved denne formel:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hvis man i stedet for at have to faste punkter på grafen ((x_1, y_1) og (x_2, y_2)) har ét fast og ét løbende punkt (hhv. (x_0, y_0) og (x, y)), kan man skrive den rette linjes ligning sådan her

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Hvis vi ganger over med (x-x_0) får vi

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

Nu lægger vi y_0 til på begge sider

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

Det vi står med nu er altså ligningen til en ret linje, der går gennem det faste punkt (x_0, y_0). Vi ønsker at bestemme ligningen for tangenten i punktet (x_0, f(x_0)). Vores faste y-værdi er altså funktionsværdien til punktet x0. Derfor kan vi sætte y_0=f(x_0).

Vi ved fra teorien om differentialregning, at tangentens hældning i x_0 er f '(x_0). Derfor kan vi sætte a=f '(x_0). Altså har vi nu

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Eksempel

Vi har givet en funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

og vi ønsker at finde dens tangent i punktet (1, f(1)).

Altså er

$$x_0 = 1$$

Så skal vi finde f(x_0) ved at sætte x_0 ind på x's plads i funktionsudtrykket.

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

Nu mangler vi bare at bestemme f '(x_0). Det gør vi ved først at differentiere f og derefter at sætte x_0 ind.

$$f'(x) = 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 3x^2 - 6x$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3$$

Nu kan vi sætte x_0, f(x_0) og f '(x_0) ind i formlen for tangentens ligning.

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

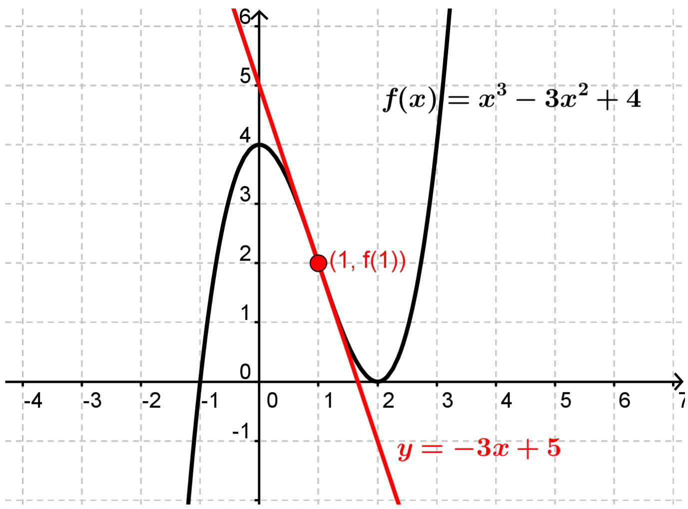
$$y = 2 + (-3) \cdot (x - 1)$$

$$y = 2 - 3 \cdot (x - 1)$$

$$y = 2 - 3x + 3$$

$$y = -3x + 5$$

Og så er vi færdige.



5.10 Monotoniforhold

At bestemme en funktions monotoniforhold svarer til at bestemme i hvilke intervaller, funktionen er voksende, og i hvilke, den er aftagende. Kender man monotoniforholdene, har man en idé om, hvordan grafen ser ud uden man behøver at tegne den. Differentialregning gør det meget lettere at bestemme monotoniforholdene.

Differentialkvotienten i et punkt $x_0$er lig med tangentens hældning i punktet (x_0,$f(x_0)$), så derfor gælder det, at hvis differentialkvotienten er positiv i et punkt, vil tangenthældningen være positiv, og funktionen vil altså være voksende i det punkt. Hvis der er et åbent interval, hvor differentialkvotienten er positiv i alle punkter, så må alle tangenthældningerne altså være positive, og funktionen er derfor voksende på hele intervallet. På samme måde vil et interval med negative differentialkvotienter give et interval, hvor funktionen aftager. Hvis differentialkvotienten er 0 i et åbent interval, betyder det, at tangenthældningen er 0 (tangenten er vandret) og dermed er funktionen konstant på intervallet.

Ovenstående kan sammenfattes til det, der kaldes ***monotonisætningen***:

$$f'(x) > 0 \text{ for alle } x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad f \text{ voksende på }]a,b[$$

$$f'(x) < 0 \text{ for alle } x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad f \text{ aftagende på }]a,b[$$

$$f'(x) = 0 \text{ for alle } x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad f \text{ konstant på }]a,b[$$

Maksimum, minimum og vendetangent

Det første, man gør, når man skal bestemme monotoniforholdene for en funktion, er at differentiere funktionen og sætte den afledede lig med 0. Man løser altså ligningen

$$f'(x) = 0 \ .$$

De x-værdier, der løser denne ligning, er dem, hvor tangenten er vandret. Der er tre muligheder for, hvad disse punkter kan være. De kan være makismumspunkter, minimumspunkter eller vendetangentspunkter.

Imellem to punkter, hvor $f'(x_0) = 0$ er den enten positiv på hele intervallet eller negativ på hele intervallet. Hvis den skulle skifte mellem at være positiv og negativ ville den jo være nødt til at passere 0.

Altså kan vi undersøge, om $f'(x_0)$ er positiv eller negativ i intervallerne mellem nulpunkterne ved bare at vælge et tilfældigt punkt i intervallet og se på fortegnet af f' i dette punkt.

Hvis $f'(x_0)$ er positiv til venstre og negativ til højre for $f'(x_0)$=0, så er der tale om et maksimum.

Hvis $f'(x_0)$ er negativ til venstre og positiv til højre for $f'(x_0)$=0, er der tale om et minimum.

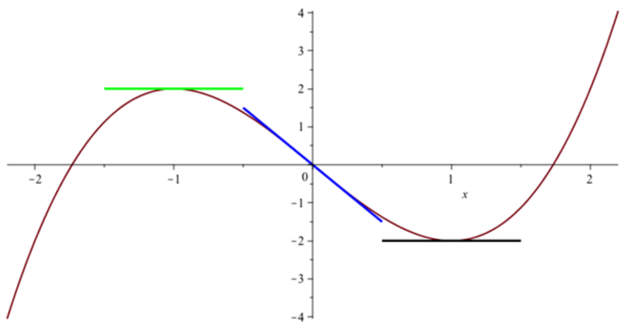
I forbindelse med undersøgelse af en funktions monotoniforhold har vi normalt at gøre med funktioner, der er kontinuerte i hele deres definitionsmængde og dermed også i ethvert delinterval. For sådanne funktioner gælder det, at når de er kontinuerte i et lukket interval [a;b], så er funktionen voksende, aftagende eller eventuelt konstant i hele intervallet [a;b], altså inklusiv intervalendepunkterne, når blot $f'(x)$ er positiv, negativ eller nul i hele det åbne interval]a;b[. Dette er en konsekvens af, at kontinuerte funktioner har en sammenhængende graf, så funktionsværdierne $f(a)$ og $f(b)$ fastlægges af værdierne i det åbne interval]a;b[, nemlig som grænseværdierne af $f(x)$ for $x$gående mod henholdsvis $a$og b.

Hvis vi derfor for en funktion $f(x)$ konstaterer, at $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$ og at $f'(x) > 0$ for alle xi intervallet]-2;0[, så er $f(x)$ voksende i hele intervallet [-2;0], inklusiv endepunkterne og ikke bare i det åbne interval]-2;0[(se senere i det gennemregnede eksempel).

Hvis $f'(x)$ har samme fortegn på begge sider af x_0, så er $f(x)$ voksende (fortegnsvariation: + 0 +) eller aftagende (fortegnsvariation: - 0 -) på begge sider af x_0 og grafen for $f(x)$ har da en vandret tangent i punktet $(x_0, f(x_0)$. Denne tangent krydser gennem grafen, dvs. på den ene side ligger den over grafen og på den anden side ligger den under grafen. En sådan tangent kaldes en vendetangent. Et eksempel på denne situation forekommer i funktionen $f(x) = (x-3)^3 + 2$, som har en vandret vendetangent i punktet (3,2) (kontroller eventuelt selv dette).

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion med et lokalt maksimum og et lokalt minimum (vandrette tangenter) og en vendetangent, men denne er ikke vandret som beskrevet ovenfor.

Vendetangenter vil typisk ikke blive introduceret på B-niveau, men først på A-niveau. Hvis vi forestiller os en tangent på figuren nedenfor starte helt ude til venstre på grafen, så vil den være ret stejl og have positiv hældning. Lader vi nu tangenten køre langs grafen vil den i starten stadig have positiv hældning, men hældningen bliver mindre og mindre, dvs. $f'(x)$ opfattet som funktion er aftagende. Dette fortsætter lidt endnu også efter at tangenten har passeret den grønne tangent, men et eller andet sted mellem grafens to toppunkter begynder hældningen igen at blive større og større, først negativ frem til det lokale minimum og derefter igen positiv. Her er $f'(x)$ opfattet som funktion altså voksende. Endvidere konstaterer vi, at samtidig med at $f'(x)$ skifter fra at være aftagende til at være voksende, så "skærer" tangenten gennem grafen for $f(x)$. Det kan ses som den blå tangent på grafen. Den x-værdi, x_0 , hvor skiftet sker, vil vi gerne finde. Tangenten i punktet $(x_0, f(x_0)$ kaldes en vendetangent. Da $f'(x)$ skifter fra at være aftagende til at være voksende i x_0 , må $f'(x)$ have et lokalt minimum i x_0 , dvs. den afledede funktion til $f'(x)$ må være nul, altså $f''(x) = 0$. Kandidaterne til mulige vende- tangenter skal altså søges blandt løsningerne til denne ligning, og kravet til en kandidat er, at $f'(x)$ har et toppunkt, lokalt maksimum eller lokalt minimum i x_0 . At finde vendetangenter til grafen for en funktion $f(x)$ kan altså ske ved at foretage en funktionsundersøgelse af den afledede funktion $f'(x)$. Dette indebærer, at vi skal lave en fortegnsundersøgelse af den dobbelt afledede funktion $f''(x)$ efter helt samme opskrift, som vi tidligere lavede fortegnsundersøgelse af $f'(x)$ for at bestemme monotoniforholdene for $f(x)$. Når vi løser ligningen $f''(x) = 0$ giver det følgende fire muligheder for fortegnsvariationerne omkring nulpunkterne/løsningerne: + 0 - , - 0 +, + 0 + og - 0 -. De to første muligheder fører til henholdsvis et lokalt maksimum og et lokalt minimum for $f'(x)$ i x_0 , dvs. vendetangenter i punktet $(x_0, f(x_0))$, mens de to sidste muligheder ikke giver en vendetangent, idet der ikke er lokale ekstrema til $f'(x)$ i disse to tilfælde.



Grøn tangent er lokalt maksimum, sort tangent er lokalt minimum og blå tangent er vendetangent.

Eksempel

Vi ønsker at bestemme monotoniforholdene for funktionen

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2 \; .$$

f er en differentiabel funktion, så vi starter med at differentiere den

$$f'(x) = -3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = -3x^2 - 6x \; .$$

Nu ønsker vi at finde de x-værdier, hvor $f'(x)$ er 0

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) \;\; \Leftrightarrow \\ 0 &= -3x^2 - 6x \;\; \Leftrightarrow \\ 0 &= \;\; -3x(x+2) \; . \end{aligned}$$

Nulreglen giver nu, at løsningerne er

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2 \; .$$

I disse to punkter er tangenten altså vandret. Vi undersøger fortegnet for f' i intervallerne mellem dem. Det er nok bare at se på et vilkårligt tal i hvert interval. Lad os starte med et tal mindre end -2. F.eks. -3

$$f'(-3) = -3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) = -3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 = -27 + 18 = -9 < 0 \; .$$

Altså kan vi slutte

$$x < -2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \; .$$

Dette kan vi også sige som

$$f \text{ aftager når } x < -2 \; .$$

Så undersøger vi fortegnet af f' når x ligger mellem -2 og 0. Vi tager et tilfældigt tal i intervallet. Det kunne f.eks. være -1,

$$f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = -3 \cdot 1 + 6 = 3 > 0 \; .$$

Altså kan vi slutte, at

$$x \in [-2, 0] \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \ .$$

Dette kan vi også sige som

$$f \text{ vokser når } x \in [-2; 0] \ .$$

Endelig ser vi på intervallet, hvor x er større end 0. Vi vælger et tilfældigt tal i dette interval. Det kunne f.eks. være 1,

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 - 6 = -9 < 0 \ .$$

Altså kan vi slutte, at

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \ .$$

Dette kan vi også sige som

$$f \text{ aftager når } x > 0 \ .$$

Vi kan også tjekke, om funktionen har en vendetangent. Som tidligere omtalt finder vi vendetangenter ved at løse ligningen $f''(x) = 0$, hvor $f''(x)$ er den anden afledede af $f(x)$. Vi kender allerede $f'(x)$ og differentierer derfor én gang til:

$$f''(x) = (-3x^2 - 6x)' = -6x - 6$$

Løser ligningen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Indsætter i $f''(x)$ en x-værdi fra hvert af intervallerne]- ∞ ;-1[og]-1; ∞ [, f.eks. -2 og 0 og får:

$$f''(-2) = 6 \quad \text{og} \quad f''(0) = -6$$

Heraf følger, at $f''(x) > 0$ i intervallet]- ∞ ;-1[og $f''(x) < 0$ i intervallet]-1; ∞ [, og dermed er $f'(x)$ voksende i intervallet]- ∞ ;-1] og aftagende i intervallet [-1; ∞ [. Altså har $f'(x)$ et toppunkt (her maksimum) i punktet $(-1, f(-1))$ og grafen for $f(x)$ dermed en vendetangent i dette punkt, jf. de tidligere bemærkninger om vendetangenter. Da vi kender tangentens hældningskoefficient $f'(-1) = 3$ og røringspunktet (-1,0) kan tangentens ligning bestemmes. Resultat:

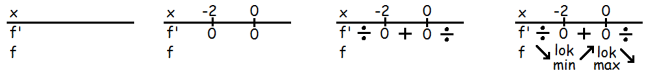
$$y = 3x + 3$$

Monotonilinje

Vi kan tegne resultaterne ind i en monotonilinje.

Man tegner en tallinje. Ovenover den har man x, under den f' og f.

Først tegner man de x-værdier ind, hvor $f'(x) = 0$. Man skriver derfor 0 ud for f' ved disse x-værdier. Dernæst indtegner man fortegnene for f' mellem disse værdier. Til sidst tegner man pile alt efter, hvad det betyder for f. Under et plus tegner man en pil der går opad mod højre og under et minus tegner man en pil, der går nedad mod højre. Når man har tegnet pilene kan man se, hvad der er lokale maksima og minima, og hvad der er vendetangenter. Her er monotonilinjen tegnet skridt for skridt for eksemplet herover.



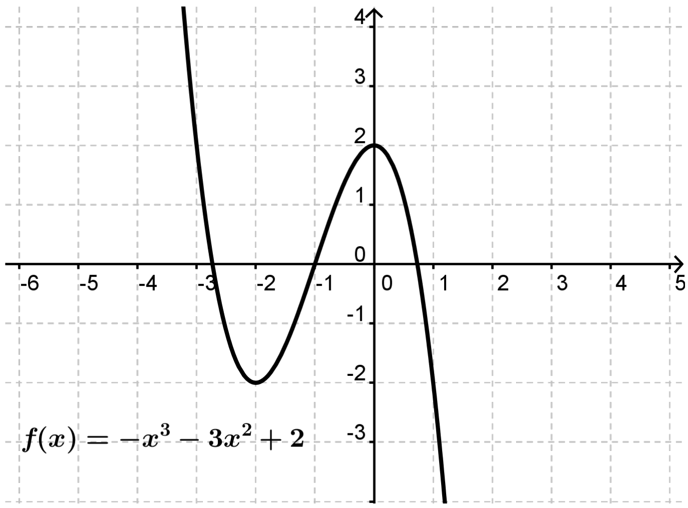
Man skal altid afslutte med at konkludere, hvordan monotoniforholdene er. I dette tilfælde ville man skrive:

$$f \text{ er aftagende på intervallerne }]-\infty;-2] \text{ og } [0;\infty[$$

$$f \text{ er voksende på intervallet } [-2;0]$$

$$f \text{ har lokalt minimum i } (-2, f(-2)) \text{ og lokalt maksimum i } (0, f(0)).$$

Herunder er f tegnet, så man kan se, at det er det rigtige, man er nået frem til



Opsummering

For at opsummere er der følgende opskrift, man altid kan følge for at finde monotoniforholdene for en funktion.

1. Differentier funktionen
2. Løs ligningen $f'(x) = 0$
3. Bestem fortegnet for $f'(x)$ mellem nulpunkterne.
4. Tegn monotonilinje
5. Konkluder med tekst

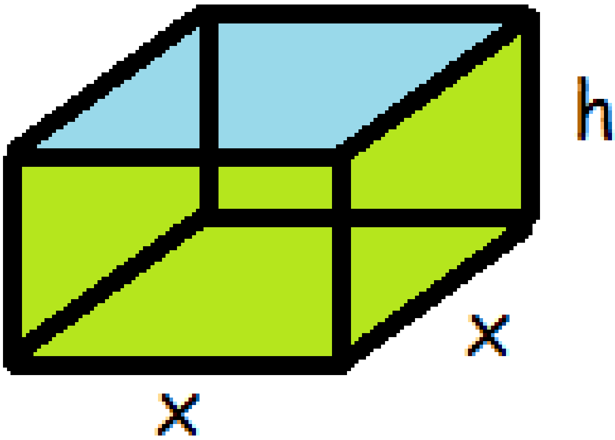
5.11 Optimering

En af de vigtigste anvendelser indenfor differentialregning er optimering. Det kunne f.eks. være en virksomhed, der ville maksimere sit overskud, eller en konservesfabrik, der ville minimere sit metalforbrug (overfladearealet af dåserne).

Vi vil først gennemgå et eksempel og bagefter komme med en opskrift på, hvordan man løser optimeringsproblemer.

En virksomhed producerer kasser med kvadratisk bund og uden låg. Kasserne skal kunne indeholde 1 dl (=100cm^3). Bestem sidelængden af kassens bund således at kassens overfladeareal bliver mindst muligt.

Først skal vi danne os et billede over hvilken figur, det er, vi arbejder med. Kassen har kvadratisk bund. Lad os kalde sidelængderne i bundstykket for x. Lad os kalde kassens højde for h. Både x og h skal (selvfølgelig) være positive. Det vi arbejder med er altså en kasse af følgende type:



Nu skal vi danne os et overblik over, hvad vi skal optimere (i dette tilfælde minimere). Det er overfladearealet. Lad os prøve at udtrykke overfladearealet, O, ved hjælp af x og h.

Kassen har fire sider, der hver har arealet

$$A_{side} = x \cdot h$$

Derudover har den en bund, der har arealet

$$A_{bund} = x \cdot x = x^2$$

Det samlede overfladeareal er altså

$$O(x,h) = 4 \cdot A_{side} + A_{bund} = 4xh + x^2$$

Det er altså denne funktion, vi vil finde minimum for. Imidlertid har vi et problem: den indeholder to variable (x og h), og vi kan kun finde maksima og minima for funktioner af en variabel. Heldigvis har vi fået en oplysning, der gør, at vi kan udtrykke den ene variabel med den anden. Vi har nemlig fået at vide, at kassens volumen skal være 100 cm^3.

$$V = x \cdot x \cdot h = 100$$

$$x^2 h = 100$$

$$h = \frac{100}{x^2}$$

Man skal være opmærksom på, om man er kommet til at dividere med 0 (man må aldrig dividere med 0). Men da x er en sidelængde, er den altid positiv, og derfor er x^2 aldrig 0. Derfor har vi ikke foretaget os noget forbudt.

Dette udtryk for kan vi nu sætte ind på h's plads i udtrykket for overfladearealet.

$$O(x) = 4x \cdot \frac{100}{x^2} + x^2 = \frac{400}{x} + x^2, \qquad x > 0$$

Nu er forarbejdet gjort. Vores funktion O(x) har kun en variabel, og vi er parat til at optimere den. Metoden er faktisk identisk med at finde dens monotoniforhold.

Først differentierer vi O(x).

$$O'(x) = 400 \cdot \frac{-1}{x^2} + 2x^{2-1} = \frac{-400}{x^2} + 2x$$

Nu sætter vi O'(x) lig med 0 for at finde de steder, hvor tangenthældningen er 0 (dvs. tangenten er vandret, dvs maksimum, minimum eller vendetangent).

$$O'(x) = 0$$

$$\frac{-400}{x^2} + 2x = 0$$

$$2x = \frac{400}{x^2}$$

$$2x^3 = 400$$

$$x^3 = 200$$

$$x = \sqrt[3]{200} \approx 5,85cm$$

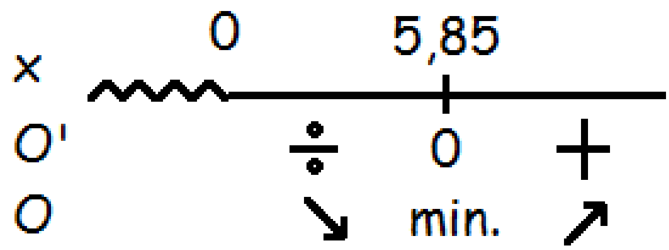
Det eneste sted, hvor tangenten er vandret er altså når x≈5,85 cm. Vi mangler stadig at undersøge, om dette punkt er et minimum. Dette gør vi ved at undersøge om O' er positiv eller negativ på hver side af 5,85. Vi starter med at undersøge fortegnet på O', når x er mindre end 5,85 (men stadig større end 0). Vi vælger et tilfældigt tal i intervallet. Lad os for bekvemmeligheds skyld vælge 1.

$$O'(1) = \frac{-400}{1^2} + 2 \cdot 1 = -400 + 2 = -398 < 0$$

Derefter undersøger vi fortegnet for O', når x er større end 5,85. Vi vælger at se på tallet 20.

$$O'(20) = \frac{-400}{20^2} + 2 \cdot 20 = \frac{-400}{400} + 40 = -1 + 40 = 39 > 0$$

Nu kan vi tegne en monotonilinje.

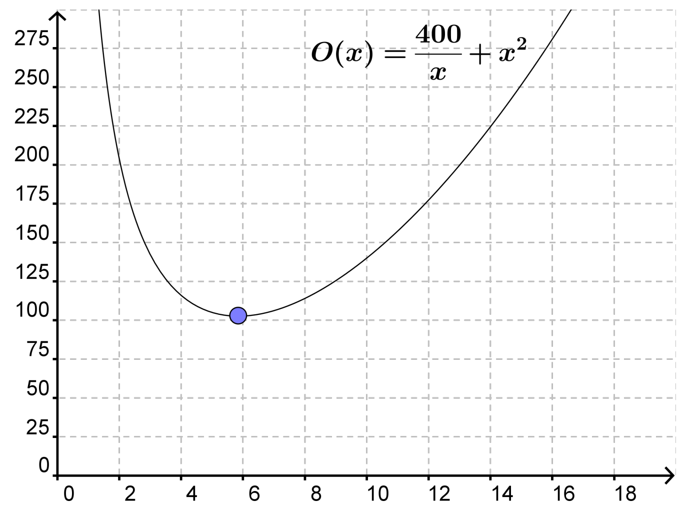


Hermed kan vi se, at 5,85 er et minimum for overfladearealet.

Vi kan tilmeld regne ud hvor stort overfladearealet bliver i dette punkt simpelthen ved at sætte 5,85 ind på x's plads i udtrykket for overfladearealet.

$$O_{min} = O(5,85) = \frac{400}{5,85} + 5,85^2 \approx 102,60cm^2$$

Herunder er tegnet en graf, der viser hvor stort overfladearealet bliver ved værdier af x.



Opskrift

Her følger en opskrift på hvordan du løser optimeringsproblemer

1. Opskriv den funktion, du skal optimere
2. Opskriv den bibetingelse, du er blevet givet.
3. Isoler den ene variabel i bibetingelsen
4. Indsæt udtrykket for denne variabel i den funktion, du skal optimere.
5. Nu står du tilbage med en funktion af en variabel.
6. Differentier funktionen
7. Løs ligningen f '(x)=0
8. Bestem fortegnene for f ' mellem løsningerne
9. Tegn monotonilinjen

5.12 Differentiation af sammensat funktion

Vi har tidligere set, hvordan man differentierer simple funktioner, hvordan man differentierer en sum af funktioner, en differens af funktioner samt et produkt eller en kvotient af funktioner. Vi kan dermed næsten differentiere alle differentiable funktioner. Det eneste, vi mangler, er, at kunne differentiere sammensatte funktioner. Når vi har dette værktøj på plads, findes der ikke en eneste differentiabel funktion, som vi ikke kan differentiere.

Reglen til at differentiere en sammensat funktion er

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Med ord, ville det lyde: "man differentierer en sammensat funktion ved at differentiere den ydre funktion med den indre urørt, og gange med den indre funktion differentieret". Reglen kaldes nogle gange for "*kædereglen*".

Lad os lige gennemgå nogle eksempler.

Vi ønsker at differentiere

$$h(x) = \sin(3x + 2)$$

h er sammensat af

$$y(x) = \sin(x), \qquad i(x) = 3x + 2$$

Vi starter med at differentiere den ydre funktion.

$$y'(x) = \cos(x)$$

så indsætter vi den indre urørt på x's plads

$$y'(i(x)) = \cos(3x + 2)$$

Dernæst differentierer vi den indre

$$i'(x) = 3$$

og dette skal vi så gange på. I alt får vi altså:

$$h'(x) = \cos(3x + 2) \cdot 3$$

Lad os tage endnu et eksempel.

$$k(x) = (x^3 + 5)^4$$

k er sammensat af de to funktioner

$$y(x) = x^4, \quad i(x) = x^3 + 5$$

Vi differentierer den ydre

$$y'(x) = 4x^3$$

og indsætter den indre på x's plads.

$$y'(i(x)) = 4(x^3 + 5)^3$$

Nu differentierer vi den indre funktion

$$i'(x) = 3x^2$$

Dette ganger vi på, for at få den samlede differentialkvotient

$$k'(x) = y'(i(x)) \cdot i'(x) = 4(x^3 + 5)^3 \cdot 3x^2 = 12x^2(x^3 + 5)^3$$

I videoen kan du se, hvordan man differentierer -ln(cos(x)) og forstå hvorfor det er stamfunktion til tan(x).

6 Sandsynlighed og kombinatorik

I dette kapitel lærer vi om fakultetsfunktion, multiplikations- og additionsprincippet, kombinatorik, stokastiske variable og binomialfordelingen.

6.1 Grundlæggende begreber

Inden for alle fag er der en særlig terminologi (nogle bestemte ord, der bruges meget og betyder noget helt særligt lige i denne sammenhæng). Sådan er det også inden for sandsynlighedsregningen. I dette afsnit vil vi gennemgå nogle af de vigtigste begreber indenfor sandsynlighedsregningen.

Udfaldsrum

Udfaldsrummet er det univers, vi bevæger os indenfor. Alle de mulige udfald, der er for det eksperiment, vi foretager os. Hvis vi kaster med en terning og er interesserede i, hvor mange øjne, den viser, er udfaldsrummet

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Der er altså 6 forskellige udfald.

Hvis vi i stedet havde kastet med to terninger, ville hvert udfald være to tal. F.eks (4,3), der ville betyde, at den første terning viste en 4'er og den anden en 3'er. I dette tilfælde ville udfaldsrummet bestå af 36, forskellige udfald (den første terning kan vise 6 forskellige værdier og for hver af dem kan den anden terning vise 6 forskellige værdier. I alt er der altså 6*6=36 forskellige muligheder)

$$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), ..., (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Hvis vi havde spillet poker (hvor man får 5 ud af 52 kort), havde en pokerhånd (et udfald) kunnet være (K5,S3,HE,RJ,KK) - altså Klør 5, Spar 3, Hjerter Es, Ruder Knægt og Klør Konge. I alt ville udfaldsrummet bestå af 2.598.960 forskellige pokerhænder. I afsnittet om kombinatorik vender vi tilbage til, hvordan vi udregnede dette tal.

Vi kunne også have haft en skål med 3 røde og 1 blå bold. Hvis vi trækker en bold, ville udfaldsrummet være

$$U = \{\text{Rød, Blå}\}$$

Sandsynlighed

Hvert element i udfaldsrummet er tilknyttet en sandsynlighed. Man betegner sandsynligheden med et lille p.

I tilfældet med én terning, er sandsynlighederne for hvert udfald den samme. Der er 6 sider på terningen, så sandsynligheden for hvert udfald er 1/6

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

I tilfældet med to terninger, er der 36 mulige udfald. De er alle sammen lige sandsynlige, så sandsynligheden er

$$\frac{1}{36} \approx 0,02778$$

for hvert udfald.

Hvis alle udfald er lige sandsynlige, kalder vi det et symmetrisk *sandsynlighedsfelt.*De to eksempler ovenfor er symmetriske sandsynlighedsfelter.

Eksemplet med skålen med 4 bolde, hvor 3 er røde og 1 er blå er ikke symmetrisk, da

$$p(\text{Rød}) = \frac{3}{4} = 0,75, \qquad p(\text{Blå}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Hvis man lægger sandsynlighederne for alle elementerne sammen, skal det give 1 (svarende til 100%).

Hændelse

En hændelse, H, er en delmængde af udfaldsrummet. F.eks. kunne man i forsøget med én terning se på hændelsen

$$H = \{\text{Antal øjne der er ulige}\}$$

De elementer i udfaldsrummet, der opfylder dette, er 1, 3 og 5.

Vi markerer sandsynligheden for, at en hændelse indtræffer med et stort P. Man finder frem til sandsynligheden for en hændelse ved at lægge alle sandsynlighederne for de enkelte elementer i hændelsen sammen.

$$P(H) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Hvis der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, er sandsynligheden for en hændelse

$$P(H) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}$$

F.eks. kunne en hændelse ved to terningekast være

$$H = \{\text{summen af øjnene er 5}\}$$

De gunstige udfald er (1,4), (2,3), (3,2) og (4,1). Altså er der 4 gunstige udfald. Vi indsætter i formlen:

$$P(H) = \frac{4}{36} \approx 0,1111$$

Komplementær hændelse

Nogle gange er det lettere at regne sandsynligheden ud for, at en hændelse ikke sker.

Hvis vores hændelse hedder, H, så betegner vi den hændelse, at H ikke indtræffer med

$$\overline{H}$$

Vi kalder det, den komplementære hændelse. Det er klart, at enten sker H eller også sker den ikke. Derfor gælder der, at summen af sandsynlighederne må blive 1 (altså 100%)

$$P(H) + P(\overline{H}) = 1$$

$$P(H) = 1 - P(\overline{H})$$

Vi slår med tre terninger, og ønsker at finde sandsynligheden for, at vi får mindst én sekser. Vores hændelse er altså

$$H = \{\text{mindst 1 sekser}\}$$

I dette tilfælde med terningerne er det imidlertid ikke helt let at beregne, hvor mange gunstige udfald, der er for denne hændelse.

Den komplementære hændelse må være:

$$\overline{H} = \{\text{ingen seksere}\}$$

Det er noget lettere at udregne sandsynligheden for, at denne hændelse indtræffer. Når der ikke må være nogen seksere, er der nemlig fem gunstige udfald på den første terning (1, 2, 3, 4 eller 5). For hver af dem er der 5 gunstige udfald på den næste terning, og for hver af dem er der endnu 5 gunstige udfald på den tredje. Altså må sandsynligheden være

$$P(\overline{H}) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal muligeudfald}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{125}{216} \approx 0,579$$

Ved at trække denne sandsynlighed fra 1, får vi sandsynligheden for H.

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - 0,579 = 0,421$$

Altså er der 42,1% sandsynlighed for at få mindst én sekser, hvis man har tre slag. Det kan være nyttigt at vide, når man spiller ludo!

6.2 Fakultetsfunktionen

En god del sandsynlighedsregning har med kombinatorik at gøre, og man får svært ved at klare sig gennem kombinatorik uden kendskab til fakultetsfunktionen. Man betegner fakultetsfunktionen med et udråbstegn.

De tal, man kan tage fakultet af er de naturlige tal samt nul. Man kan altså ikke bruge den på negative tal eller decimaltal.

Man tager fakultetsfunktionen til et tal ved at gange tallet med det tal, der er 1 mindre, og gange med det, der er 1 mindre end det, osv. indtil man når ned til at gange med 1.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

F.eks. er

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

og

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

I visse dele af kombinatorikken kan man komme ud for at man skal bruge 0!

Derfor har man defineret

$$0! = 1$$

Denne definition giver ikke mening i forhold til, hvordan man tager fakultet af de andre tal, men den er defineret sådan, for at man når frem til de rigtige resultater, når man bruger de kombinatoriske formler med samme værdi af n og r (se evt. de næste afsnit for mere om dette).

Fakultetsfunktionen vokser hurtigt, hvilket man bl.a. kan se af følgende oversigt over fakultet-værdierne af de mindste tal.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40.320$$

$$9! = 362.880$$

$$10! = 3.628.800$$

6.3 Multiplikations- og additionsprincipperne

Når man skal tælle kombinationer, er der nogle få regler, man skal huske på. Nogle af de vigtigste er multiplikations- og additionsprincipperne.

Multiplikationsprincippet

Hvis opgaven t_1 kan udføres på m forskellige måder, og opgaven t_2 kan udføres på n måder, så kan opgaven t_1 ***og*** t_2 udføres på m*n måder. Opgaven t_1 ***eller*** t_2 kan udføres på m+n måder.

Lad os tage et eksempel.

Vi går ind i en isbutik hvor vi vil have en is med 1 kugle.

- Man kan vælge, om man vil have i bæger eller vaffel.
- Man kan vælge mellem 3 slags is: chokolade, vanille og jordbær.
- Man kan vælge om man vil have: syltetøj, flødebolle, guf eller ingenting ovenpå.

På hvor mange måder kan man lave en is med 1 kugle?

Lad os kalde valget mellem bæger og vaffel for t_1. Det kan udføres på 2 måder.

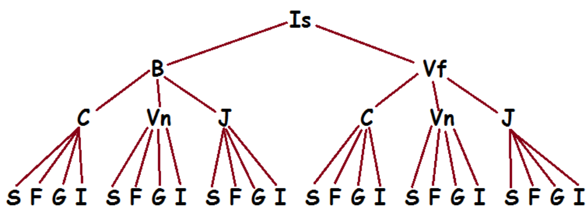
Lad os kalde valget af is for t_2. Det kan udføres på 3 forskellige måder.

Lad os endelig kalde valget af topping for t_3. Det kan udføres på 4 måder.

Da vi skal vælge en fra hver kategori, skal vi altså udføre t_1 ***og*** t_2 ***og*** t_3. Derfor gør vi brug af multiplikationsprincippet. Vi skal altså gange antallet af muligheder med hinanden.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Vi har illustreret det med en tegning, hvor alle valgmulighederne fremstår ved at gå oppefra og ned.



24 forskellige is med 1 kugle

Additionsprincippet

Hvis vi er lidt mere bestemte i vores valg af is, så kan vi se på hvor mange måder man kan lave en is med enten chokoladekugle eller flødebolle som topping. Det vil sige, hvor mange muligheder har vi, hvis vi godt kan lide chokoladekugle for sig og flødebolle som topping for sig, men ikke kan lide dem sammen.

Vi kalder antallet af muligheder med chokoladekugle for t_1. Nu skal vi vælge 1 af de 2 type beholdere, iskuglen er allerede bestemt til at være chokolade, og dernæst 1 af de 3 slags topping (syltetøj, guf eller ingenting, men IKKE flødebolle). Altså kan t_1 udføres på 6 (=2*1*3) måder.

Vi kalder antallet af muligheder med flødebolle for t_2. Her kan vi igen vælge 1 af 2 beholdere, dernæst 1 af 2 typer is (vanille eller jordbær men IKKE chokolade), mens toppingen er forudbestemt til at være flødebolle. Altså kan t_2 udføres på 4 (=2*2*1) måder.

Vi var interesserede i, at finde frem til, hvor mange måder, vi kunne vælge enten med flødebolle eller med én kugle chokoladeis. Altså t_1 ***eller*** t_2. Vi bruger additionsprincippet.

$$6 + 4 = 10$$

Der er altså 10 måder at lave en is med enten flødebolle eller chokoladeis.

De to principper ovenfor virker måske banale, men det er yderst vigtigt, du kan skelne mellem dem, når du skal udregne sandsynligheder i mere komplicerede tilfælde.

Hvis du vil se principperne anvendt, så kig på siden om kombinatorik og sandsynlighed!

6.4 Kombinatorik

Kombinatorik er læren om at tælle kombinationer. Det lyder måske åndssvagt, at der er en hel videnskab om dette, da det virker så banalt at tælle (selv børnehavebørn kan det!). Men kombinationer kan hurtigt blive uoverskuelige.

Tænk f.eks. på hvis du har lektier for i 8 fag, men du kun har tid til at lave lektier i 3 af dem. Hvor mange måder kan du udvælge de 3 fag, du skal lave dine lektier i? Pludselig er det ikke så lige til at tælle, hvor mange kombinationer, der er.

Lad os regne lidt på dette eksempel.

Når vi vælger det første fag, er der 8 muligheder. Når vi skal vælge fag nummer to, er der 7 valgmuligheder. Ved valget af nummer tre, er der kun 6 muligheder tilbage.

Vi bruger mulitplikationsprincippet:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ muligheder}$$

Et stort tal, hva? Imidlertid er vi ikke helt færdige! Hvis vi siger, at fagene hver er repræsenteret af et bogstav, og vi nu har valgt fagene a, b og c, så er der flere forskellige måder, vi kan have trukket de samme fag på: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b) og (c,b,a). Vi er ligeglade med i hvilken rækkefølge, vi laver lektierne i de tre fag, så alle kombinationerne ovenfor er egentlig den samme for os.

For at se, hvor mange måder, vi kan bytte om på de tre fag, må vi tænke at det første fag, vi laver lektier i er der 3 muligheder, det næste fag er der kun 2 muligheder, og det sidste er der kun 1 mulighed. Altså kan de tre fag byttes rundt på

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ måder}$$

Hver kombination af 3 fag går altså igen 6 gange blandt de 336 muligheder, vi fandt frem til ovenfor. Vi må altså dividere med 6 for at når frem til det rigtige svar.

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Så der er altså 56 forskellige kombinationer af tre-fags-pakker, du kan lave lektier i.

Lad os se lidt nærmere på udtrykket ovenfor

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Vi får den idé at forlænge brøken med 5·4·3·2·1.

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Dette kan vi omskrive ved hjælp af fakultetsfunktionen:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!}$$

Vi har altså fundet en formel til, hvordan man kan udvælge 3 elementer ud af en mængde på 8, hvis man kun må vælge den samme ting én gang, og hvis rækkefølgen er ligegyldig.

Denne formel kan generaliseres til hvis man ønsker at udvælge r elementer af en mængde, der består af n elementer.

$$K_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Hvis man f.eks. ville finde ud af, hvor mange pokerhænder, der eksisterer, altså hvor mange måder man kan uddele 5 kort fra en bunke på 52, hvor rækkefølgen er ligegyldig (vi er jo ligeglade med om vi får Spar Es som første eller sidste kort), bruger man formlen herover

$$K_{52,5} = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2.598.960$$

Der er altså over 2,5 millioner forskellige pokerhænder!

Hvis rækkefølgen betyder noget

Det er imidlertid ikke alle tilfælde, hvor rækkefølgen er ligegyldig. Det kunne f.eks. være, at du blev bedt om at vælge dine top-10 yndlings-CD'er ud fra en liste på 25 CD'er. Her er det i hvert fald ikke ligegyldigt, hvad du vælger som 1'er og som 10'er.

På hvor mange måder, kan man lave sådan en liste?

Jo ser du, på førstepladsen kan du vælge din favorit af de 25 CD'er. På andenpladsen kan du vælge din næst-yndlings af de 24 tilbageværende. På tredjepladsen kan du vælge blandt de 23 tilbageværende. Og så videre indtil du til sidst har 16 valgmuligheder til din tiendeplads.

Kombinationerne er derfor

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 11.861.676.288.000$$

Altså næsten 12 billioner måder at sammensætte en top-10 på!

Vi får en idé og ganger og dividerer med $15{\cdot}14{\cdot}13{\cdot}\ldots{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$.

$$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Vi omskriver igen ved hjælp af fakultetsfunktionen

$$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{25!}{15!} = \frac{25!}{(25-10)!}$$

Vi kan generalisere. Hvis vi vil udvælge r elementer fra en mængde på n mulige, hvor vi kun må vælge hvert element én gang, og hvor rækkefølgen betyder noget, kan det gøres på følgende antal måder:

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Vi spiller Mastermind, hvor man skal vælge en kode bestående af 4 farver ud af de 8, der er med i spillet. Hvis hver farve kun må vælges én gang, og rækkefølgen af farverne tæller, så spekulerer på, hvor mange forskellige kombinationer, man kan komme frem til. Svaret er

$$P_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680 \text{ forskellige koder}$$

6.5 Kombinatorik og sandsynlighed

Man kan bruge kombinatorik i sandsynlighedsregning. Her kommer nogle eksempler på hvordan. Det kan være en god idé at læse afsnittet om kombinatorik først.

Eksempel 1

En skål indeholder 10 bolde, 5 røde, 3 blå og 2 gule.

1. **Vi trækker 3 bolde. Hvad er sandsynligheden for at de alle sammen er røde?**
2. **Vi trækker 3 bolde. Hvad er sandsynligheden for, at 1 er gul og 2 er blå?**
3. **Vi trækker 4 bolde. Hvad er sandsynligheden for, at højst 1 er blå?**

a)

Vores hændelse er, at alle tre trukne bolde er røde. Sandsynligheden for hændelsen kan udregnes som

$$P(H) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}$$

Først finder vi de mulige udfald. Det må være antallet af måder, man kan trække 3 bolde ud af en skål med 10 bolde. Vi er ligeglade med rækkefølgen, vi trækker i, så derfor er antallet:

$$K_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

Nu skal vi regne antallet af gunstige udfald ud. Det svarer til alle de måder, hvor vi trækker alle tre bolde i rød farve. Da der er 5 røde bolde i alt, svarer det altså til, hvor mange forskellige måder, man kan trække 3 (røde bolde) ud af en mængde på 5 (røde bolde).

$$K_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Nu kan vi regne sandsynligheden ud:

$$P(H) = \frac{\text{gunstig}}{\text{mulig}} = \frac{K_{5,3}}{K_{10,3}} = \frac{10}{120} \approx 0,0833$$

Der er altså 8,33% sandsynlighed for, at vi trækker 3 røde bolde.

b)

Vi skal finde sandsynligheden for, at 1 bold er gul, og 2 blå. Antallet af mulige udfald er det samme som ovenfor.

Når vi skal beregne antal gunstige udfald, svarer det til først at se, hvor mange muligheder man kan trække 1 gul bold ud af de 2. Dernæst se på hvor mange muligheder man kan trække 2 blå bolde ud af de 3. De to tal, man når frem til, skal man gange med hinanden for at få det totale antal muligheder pga. multiplikationsprincippet.

Først ser vi på antallet af muligheder for at trække 1 gul bold ud af en mængde på 2.

$$K_{2,1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$$

Nu ser vi på hvor mange måder, man kan trække 2 blå bolde ud af en mængde på 3 blå bolde.

Sandsynligheden for at trække 2 blå og 1 gul bold må derfor være:

$$P(H) = \frac{K_{2,1} \cdot K_{3,2}}{K_{10,3}} = \frac{2 \cdot 3}{120} = 0,05$$

Der er altså 5% sandsynlighed for dette.

c)

Nu trækker vi 4 bolde, så antallet af mulige udfald er

$$K_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

Vi skal finde sandsynligheden for at højst 1 bold er blå. Vi får altså succes, hvis der er 0 blå bolde eller 1 blå bold.

Først ser vi hvor mange måder, vi kan trække 0 blå bolde på. Det svarer til at trække 0 bolde ud af de 3 blå, og 4 bolde ud af de øvrige 7 bolde (de gule og røde). Da begge disse ting skal være opfyldt, ganger vi dem med hinanden for at få antallet af muligheder.

$$K_{3,0} \cdot K_{7,4} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 1 \cdot 35 = 35$$

Nu ser vi, på hvor mange måder, vi kan trække 1 blå bold. Det svarer altså til at trække 1 bold ud af de 3 blå og 3 bolde ud af de øvrige 7.

$$K_{3,1} \cdot K_{7,3} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 3 \cdot 35 = 105$$

Da vi får succes både, hvis der er 0 blå bolde og hvis der er 1 blå bold, så skal vi lægge de to antal muligheder sammen for at få det samlede antal gunstige udfald.

$$P(H) = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{(K_{3,0} \cdot K_{7,4}) + (K_{3,1} \cdot K_{7,3})}{K_{10,4}} = \frac{35+105}{210}$$

$$= \frac{140}{210} \approx 0,6667$$

Der er altså 66,67% sandsynlighed for, at man højst trækker 1 blå bold, hvis man har fire forsøg.

Eksempel 2

Hvad er sandsynligheden for at få en pokerhånd med 3 esser?

En pokerhånd består af 5 kort, og i alt er der 52 kort. Antallet af forskellige pokerhænder må derfor være:

$$K_{52,5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2.598.960$$

At få en hånd med 3 esser svarer til at trække 3 esser ud af de 4 esser, samt at trække 2 øvrige kort ud af de 48 kort, der ikke er esser. Det bliver altså til

$$K_{4,3} \cdot K_{48,2} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{48!}{2! \cdot 46!} = 4 \cdot 1128 = 4512$$

forskellige hænder, der indeholder tre esser.

Nu kan vi udregne sandsynligheden

$$P(H) = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{K_{4,3} \cdot K_{48,2}}{K_{52,5}} = \frac{4.512}{2.598.960} \approx 0,00174$$

Der er altså kun 0,174 % chance for at få en hånd med tre esser i et spil poker.

6.6 Stokastisk variabel

Det er ikke alle udfaldsrum der består af tal. Kaster man f.eks. en mønt, er udfaldsrummet

$$U = \{\text{plat, krone}\}$$

Imidlertid kan det undertiden være en fordel at man kan beskrive alle udfald ved hjælp af tal.

Det er dét, man bruger en stokastisk variabel til.

En stokastisk variabel betegnes med et stort bogstav. Oftest X eller Y.

En stokastisk variabel er egentlig en funktion, hvor man til hvert element i udfaldsrummet har knyttet et tal.

F.eks. kunne man i eksemplet med møntkastet have tilknyttet den stokastiske variabel X, hvor

$$X(\text{krone}) = 1, \quad X(\text{plat}) = 0$$

Hvis vi skal skrive sandsynligheden for, at få krone, så gøres det på følgende måde

$$P(X = 1) = 0,5$$

Man skriver altså sandsynligheden for, at den stokastiske variabel antager værdien 1.

Og sandsynligheden for at slå plat, ville man skrive

$$P(X = 0) = 0,5$$

Lad os se på endnu et eksempel.

Hvis man kaster to terninger, kan man lave en stokastisk variabel Y, der måler summen af øjnene på de to terninger.

Læg mærke til, at så ville flere forskellige udfald antage den samme værdi.

Hvis vi havde slået en 5'er og en 2'er eller hvis vi havde slået en 1'er og en 6'er, ville summen være 7 i begge tilfælde.

$$Y(5,2) = Y(1,6) = 7$$

Summen af to terningkast kan aldrig blive mindre end 2 og aldrig større end 12. Derfor kan Y antage værdierne 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 og 12.

Hvis Y skal være 2, så er vi nødt til at have slået (1,1). Der er altså kun 1 mulighed ud af de 36. Derfor er:

$$P(Y = 2) = \frac{1}{36} \approx 0,02778$$

Hvis Y skal være 3 er der 2 mulige kast: (1,2) og (2,1). Altså er:

$$P(Y = 3) = \frac{2}{36} \approx 0,05556$$

Hvis Y skal være 8 er der 5 mulige kast: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2). Altså er

$$P(Y = 8) = \frac{5}{36} \approx 0,13889$$

Du kan selv regne sandsynlighederne ud for at Y antager de andre værdier.

Diskret vs. kontinuert

Der findes to slags stokastiske variable: de diskrete og de kontinuerte.

En diskret stokastisk variabel kan antage et endeligt antal værdier

En kontinuert stokastisk variabel kan antage uendeligt mange værdier (typisk et interval).

Eksemplerne ovenfor er begge diskrete stokastiske variable. Den stokastiske variable X kunne antage 2 værdier (0 og 1), men Y kunne antage 11 forskellige værdier (2,3,4,...,11,12).

Hvis vi laver en stokastisk variabel Z, der angiver højden på folk i din klasse, kunne den f.eks. antage værdierne

$$Z(\text{Pia}) = 162,3 \qquad Z(\text{Rasmus}) = 187,49 \qquad Z(\text{Peter}) = 179,88$$

Den ville derfor ikke være begrænset til et endeligt antal værdier, men kunne antage alle mulige positive værdier, hvor lang de fleste ville falde i intervallet [155;195].

Derfor er Z en kontinuert stokastisk variabel.

6.7 Binomialfordelingen

Man bruger binomialfordelingen, når man har et forsøg, der kun har to udfald: *succes* og *fiasko*. Man gentager forsøget et antal gange. Dette antal kaldes antalsparameteren og betegnes med n. Desuden skal der være en fast sandsynlighed for at der bliver succes. Denne kaldes sandsynligheds-parameteren og betegnes med p.

Vi laver en stokastisk variabel X, der angiver hvor mange succeser, vi har haft.

Vi kunne for eksempel have et spil 5-ternings-Yatzy, hvor vi manglede 3'erne. Vi er interesserede i, hvor mange 3'ere vi får.

I stedet for at se det som at kaste 5 terninger, kan vi se det som at kaste 1 terning 5 gange. Derfor er antalsparameteren n=5.

Vores succes er, at terningen viser 3. Det er altså fiasko, hvis den viser 1, 2, 4, 5 eller 6.

Der er 1 ud af 6, der giver succes, derfor er p=1/6.

Vores stokastiske variable X kan antage værdierne 0, 1, 2, 3, 4, 5, alt efter hvor mange 3'ere vi får.

Vi vil se, hvad sandsynligheden er for at få én 3'er. Dvs finde P(X=1). Det svarer til, at vi i 1 af de 5 terningkast får en 3'er, mens vi får noget andet i de 4 andre.

Pga. multiplikationsprincippet skal vi altså gange

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Imidlertid ved vi jo ikke i hvilket af de 5 terningkast, at 3'eren kommer. Det kan være i et hvilket som helst af dem. Derfor er der fem muligheder. I alt er sandsynligheden for at få én 3'er:

$$P(X = 1) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,402$$

Binomialfordelingen

Det vi har set her er faktisk et specialtilfælde af binomialfordelingen. Den siger nemlig, at

$$P(X = r) = K_{n,r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Tjek selv efter, at formlen passer med ovenstående eksempel, hvor

$$n = 5$$

$$r = 1$$

$$p = \frac{1}{6}$$

$$1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$n - r = 5 - 1 = 4$$

$$K_{n,r} = K_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$$

Vi kan regne ud, hvad sandsynligheden er for at få hhv. 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 treere i de fem terningkast.

$$P(X = 0) = K_{5,0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,402$$

$$P(X = 1) = K_{5,1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,402$$

$$P(X = 2) = K_{5,2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,161$$

$$P(X = 3) = K_{5,3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,032$$

$$P(X = 4) = K_{5,4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \approx 0,003$$

$$P(X = 5) = K_{5,5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 0,0001$$

Sandsynligheden for at få Yatzy med 3'erne i første forsøg er altså omkring 0,01%

7 Statistik

I dette kapitel introducerer vi sum-tegnet Σ. Dernæst lærer vi om ugrupperede og grupperede observationer, hvad middelværdi, varians og spredning fortæller os om et datasæt samt hvordan vi vha. sumkurver, kvartilsæt og boksplots kan vise dette grafisk. Bagefter ser vi på hvad normalfordelt data er, hvad χ^2-testen kan fortælle os og hvordan vi tager højde for fejlkilder i statistiske undersøgelser.

7.1 Grundlæggende begreber

Indenfor statstik er der en masse begreber, som det er værd at have styr på.

Stikprøve og population

Når man laver en statistisk undersøgelse, er det vigtigt at gøre sig det klart, hvem det er, man ønsker at sige noget om. Er det alle mennesker i Danmark? Alle mennesker i Høje Taastrup kommune? Alle tanglopper i Verden? Den gruppe, man vil undersøge noget om, kaldes *populationen*.

Ofte er en population meget stor. Man kan f.eks. ikke veje alle tanglopper i Verden, eller spørge alle mennesker i Danmark hvad de ville stemme til næste Folketingsvalg.

Derfor udtager man en *stikprøve*. En stikprøve er en mindre gruppe indenfor populationen. Der findes forskellige måder at udtage en stikprøve på, men det vigtigste er, at den repræsenterer hele populationen. Man indsamler data fra sin stikprøve, og denne data generaliserer man så til at gælde hele populationen.

Observation, hyppighed, frekvens og kumuleret frekvens

Observationer i statistik er de ting, vi måler i vores undersøgelse. Hvis vi f.eks. ønsker at undersøge hvor store fødder 15-19-årige danskere har, kunne vi spørge din gymnasieklasse, hvilken skostørrelse, de bruger. Observationerne kunne her være skostørrelserne: 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47.

Det totale antal i stikprøven betegner man med n.

Hyppigheden for hver observation er det antal gange observationen forekommer. Hyppigheden for den i'te observation, betegner man tit h_i.

Frekvensen er den procentdel, hvormed en observation forekommer.

$$\text{frekvens} = \frac{\text{hyppighed}}{\text{totalt antal observationer}}$$

Man betegner tit frekvensen for den i'te observation med f_i

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

Den *kumulerede frekvens* (kumulere betyder opsamle) for en observation, får man ved at lægge frekvensen for den givne observation sammen med alle de frekvenser, hvor observationen er lavere. Den højeste observation har en kumuleret frekvens på 100% (nogle gange kan afrundinger dog gøre, at den bliver 99,9 eller 100,1)

$$(\text{kum. } f)_i = f_1 + f_2 + ... + f_{i-1} + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

(Du kan læse om summationstegn her)

Lad os se på et eksempel, hvor vi har målt skostørrelsen på alle i en gymnasieklasse bestående af 28 elever.

Obs.	Hyp.	Frek. (%)	Kum.frek.
36	1	3,57	3,57
37	2	7,14	10,71
38	1	3,57	14,28
39	4	14,29	28,57
40	3	10,71	39,28
41	4	14,29	53,57
42	3	10,71	64,28
43	3	10,71	74,99
44	4	14,29	89,28
45	2	7,14	96,42
46	0	0	96,42
47	1	3,57	99,99
I alt	28 (=n)	99,99	

7.2 Summationstegn

Indenfor statistik skal man tit lægge mange tal sammen. Man har derfor opfundet en smart notation, så man på en kort måde kan skrive, at man lægger mange tal sammen. Denne notation gør brug af summationstegnet, Σ (det græske bogstav store sigma).

Hvis vi nu skulle lægge tallene fra 1 til 10 sammen, ville vi skrive det på denne måde

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

dette kan skrives meget kortere ved hjælp af sumtegn:

$$\sum_{k=1}^{10} k$$

Tallene over og under sumtegnet er summens grænser. Det nederste er det laveste heltal man skal sætte ind på k's plads, og det øverste er det højeste heltal, man skal sætte ind på k's plads.

Sumtegnet skal læses sådan, at man først sætter det laveste tal ind på k's plads i udtrykket efter sumtegnet. Derefter skal man sætte tallet 1 højere ind på k's plads, og lægge de to tal sammen. Så skal man sætte tallet endnu 1 højere ind på k's plads og lægge dette til, osv. osv. indtil vi sætter den øverste grænse ind på k's plads.

Lad os se på nogle eksempler,hvor vi til venstre skriver summationstegns-notationen og til højre skriver summen ud led for led.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

$$\sum_{k=2}^{8} \sqrt{k} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=2}^{5} k\cdot(k-1) = 2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4$$

Hvis man har n observationer: x_1, x_2, x_3,...,x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, kan man skrive deres sum således:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \quad = \quad x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

7.3 Ugrupperede vs. Grupperede

Der findes overordnet set to slags observationer: ugrupperede og grupperede.

I dette afsnit ser vi på, hvad forskellene er på dem. I de senere afsnit vil vi dele op og se på dem hver for sig, når det er nødvendigt.

Når vi har et datasæt, er data som udgangspunkt ikke grupperet. Det er op til os at vurdere, om det giver mening at gruppere datasættet i netop dette tilfælde. Når man grupperer et datasæt, inddeler vi observationerne i intervaller.

Et godt billede til at skelne er, om man måler folks skostørrelse eller højde.

Ved skostørrelse vil du observere 36, 37, 38, 39, . . . , 44, 45, 46, 47. Der er altså tale om ugrupperede observationer, hvor der ikke er så mange forskellige observationer, og hvor hyppigheden af hver observation ofte er større end 1. Vi kan godt gruppere data, men så ville data ikke være lige så detaljeret, som vi måske kunne ønske os. Ved at tegne et diagram over data, får vi fint overblik, selvom data ikke er grupperet.

Ved højder er der mange flere muligheder. Man kunne f.eks. forestille sig, at få højderne 165,4, 187,38, 176,7. De fleste ville forekomme med hyppighed 1. Derfor er det smartere at samle dem i intervaller. F.eks.]160;165],]165,170], . . . ,]185,190],]190,195].

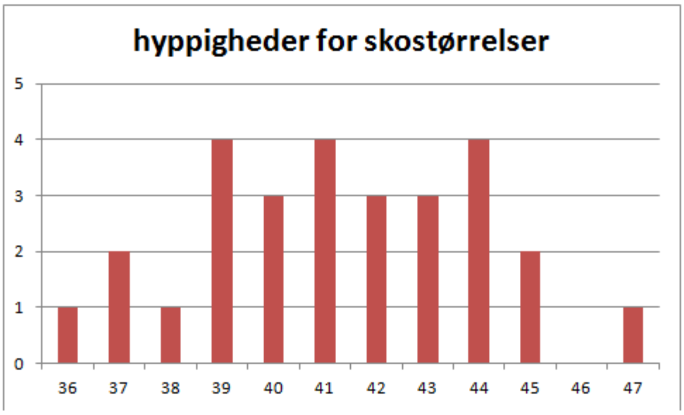
Her har vi altså valgt at gruppere vores data, fordi det giver det bedste overblik.

Ved grupperede observationer taler man om *intervalhyppighed* og *intervalfrekvens*, svarende til hvor mange observationer der falder indenfor hvert interval og hvor stor en procentdel af observationerne der falder inden for hvert interval.

Søjlediagrammer og histogrammer

Når man skal lave en oversigt over, hvordan observationerne fordeler sig, gør man det forskelligt alt efter om der er tale om grupperede eller ugrupperede observationer.

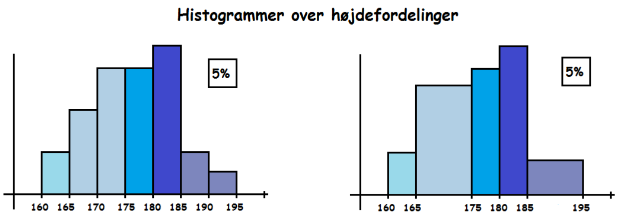
Ved ugrupperede observationer, vil man typisk tegne et *søjlediagram.* Man har observationerne henad x-aksen, og for hver observation sætter man en lodret søjle, der enten markerer hyppigheden eller frekvensen for denne observation.



For grupperede observationer kan man ikke lave søjlediagrammer. I stedet laver man såkaldte *histogrammer*.

Et histogram har intervalgrænserne på x-aksen. På y-aksen er der imidlertid ikke angivet nogen akseværdier. Den måde man aflæser et histogram på er nemlig ved at se på *arealet af hver søjle*. Øverst i højre hjørne er angivet hvor stort et areal 5% svarer til. Hvis man lægger arealerne af søjlerne sammen, får man 100%.

Hvis intervallerne har samme bredde, svarer søjlernes højde til intervalhyppigheden. Men det er ikke altid, at alle intervallerne har samme bredde. Nedenfor er tegnet to histogrammer, der repræsenterer de samme observationer. I det første histogram har alle intervallerne bredde 5, mens det i det andet varierer mellem intervalbredder af 5 og 10.



Når man slår to søjler sammen, skal man altså sørge for, at den nye søjle har samme areal som de to tidligere havde tilsammen.

7.4 Middelværdi, Varians og Spredning

Når man finder middelværdien af et datasæt, svarer det til at finde gennemsnittet at tallene. Man skriver det oftest som et x med en streg over

$$\overline{x} = \text{middelværdi}$$

Hvis vi havde spurgt 10 gymnasieelever om deres lommepenge og fået svarene at 5 fik 50kr/uge, 3 fik 70kr/uge og 2 fik 90kr/uge, så ville det gennemsnitlige antal lommepenge pr uge være

$$\overline{x} = \frac{50+50+50+50+50+70+70+70+90+90}{10} = 64$$

Det vi gjorde, da vi regnede middelværdien ud, var at finde summen af alle observationerne (640). Herefter dividerede vi til sidst med det totale antal observationer (10).

Dette leder os frem til følgende formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

I eksemplet ovenfor er N=10, x_1=70, x_2=90 osv.

Da vi i dag ofte benytter os af computere og diverse matematikværktøjer(TI-nSpire, Maple) eller programmeringssprog (Python, Matlab, R, osv.), så vil man finde middelværdien ved følgende

$$mean(x) = \frac{1}{N} sum(X)$$

hvor N er antallet af observationer (kan også defineres som length(X)) og x er en vektor(datarække, f.eks. en række eller kolonne i et regneark), der indeholder N værdier.

(Du kan læse mere om summationstegnet her)

Man kan også udregne middelværdien ved at gange frekvensen med observationen og summe det sammen

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + ... + f_n \cdot x_n$$

Man finder frekvensen ved

$$f_i = \frac{h_i}{N}$$

hvor f er frekvensen for observationen, h er hyppigheden af observationen og N er det samlede antal observationer. Altså er frekvensen den procentdel observation $i$udgør af datasættet.

I ovenstående eksempel fik 50% af eleverne 50kr/uge, 30% fik 70kr/uge og 20% fik 90kr/uge. Altså kunne man have udregnet gennemsnittet som

$$\overline{x} = 0,50 \cdot 50 + 0,30 \cdot 70 + 0,20 \cdot 90 = 64$$

Formlerne ovenfor kan vi bruge, når vi har med *ugrupperede* observationer at gøre. Men hvad gør vi så, når observationerne er *grupperede*?

Middelværdi for grupperede observationer

Når ens observationer er grupperede, kan man ikke bare tage og gange observationsværdien med hyppigheden. For observationerne er jo hele intervallet og ikke bare en enkelt værdi.

Det, man gør, er, at man udplukker midtpunktet af sit interval og bruger som observationsværdi. Når man finder middelværdien for grupperede observationer, så finder man ikke den rigtige middelværdi, men et estimat af middelværdien. Hvis ens interval har endepunkterne a og b, finder man altså midtpunktet på følgende måde:

$$m = \text{startværdi} + \text{halvdelen af intervallets længde} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

eller

$$m = \text{slutværdi} - \text{halvdelen af intervallets længde} = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Vi har altså formlen for intervalmidtpunktet:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Når man har fundet sit intervalmidtpunkt, sætter man det ind på x$_i$'ernes plads i formlerne for middelværdien af de ugrupperede observationer. Altså får vi

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_N}{N}$$

eller hvis man hellere vil bruge frekvenserne:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot m_i = f_1 \cdot m_1 + f_2 \cdot m_2 + ... + f_n \cdot m_n$$

Lad os se på et eksempel, hvor vi har målt højden af 25 elever.

Observation, x$_i$	Midtpunkt, m$_i$	Antal observationer i intervallet	Frekvens, f
]160;170]	165	8	32%
]170;180]	175	11	44%
]180;190]	185	6	24%

Så kan gennemsnitshøjden beregnes vha. de to formler ovenfor:

Nu kan vi summere antallet af observationer i hvert interval, så vi får følgende

$$\sum_{i=1}^{N} m_{i,[160;170]}$$

$$= 165 + 165 + 165 + 165 + 165 + 165 + 165 + 165 = 1320$$

Vi laver regnestykket for hvert interval og får så

$$\overline{x} = \frac{1320 + 1925 + 1110}{25} = 174,2$$

$$\overline{x} = 0,32 \cdot 165 + 0,44 \cdot 175 + 0,24 \cdot 185 = 174,2$$

Varians og spredning

Varians og *spredning* siger noget om, hvor stor spredning, der er i datasættet. Ligger observationerne kort eller langt fra middelværdien?

Varians betegnes Var(x) eller med $\sigma^2(x)$ (det græske bogstav lille sigma sat i anden). Man beregner *variansen* på følgende måde

$$\text{Var}(x) = \sigma^2(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_N - \overline{x})^2}{N}$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + f_n(x_n - \overline{x})^2$$

Man finder altså afstanden mellem hver observation og middelværdien. Denne kvadrerer man, og så finder man gennemsnittet af dette.

Spredningen (eller *standardafvigelsen*) betegnes $\sigma(x)$. Læg mærke til, at spredning og varians begge betegnes med det græske bogstav sigma, (σ), hvor den eneste forskel er, at variansen er opløftet i anden. Spredningen beregnes på følgende måde

$$\sigma(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

Lad os finde varians og spredning for eksemplerne med lommepenge og højder ovenfor.

For lommepengeeksemplet er de:

$$\sigma^2(x) = 0,50 \cdot (50-64)^2 + 0,30 \cdot (70-64)^2 + 0,20 \cdot (90-64)^2 =$$

$$= 244$$

$$\sigma(x) = \sqrt{244} \approx 15,62$$

og for højde-eksemplet er de

$$\mathrm{Var}(x) =$$

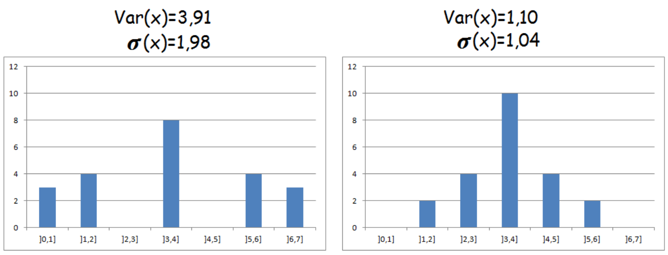
$$0,32 \cdot (165-174,2)^2 + 0,44 \cdot (175-174,2)^2 + 0,24 \cdot (185-174,2)^2$$

$$\approx 55,36$$

$$\sigma(x) = \sqrt{55,36} \approx 7,446$$

Bemærk, at vi brugte intervalmidtpunkterne til at finde variansen i tilfældet med grupperede observationer.

Man bruger tit spredning og varians til at sammenligne forskellige datasæt. Herunder er tegnet søjlediagrammer for to datasæt. Hver består af 22 observationer og de har samme middelværdi. Imidlertid er varians og spredning forskellig for de to datasæt.



7.5 Sumkurver, kvartilsæt og boksplots

Hvis man har lavet en statistisk undersøgelse over folks højde, kunne man være interesseret i at finde ud af, hvor mange procent, der er under 175 cm, hvor mange procent der er mellem 172 og 182 cm høje, hvor høje de 25% mindste er osv. osv.

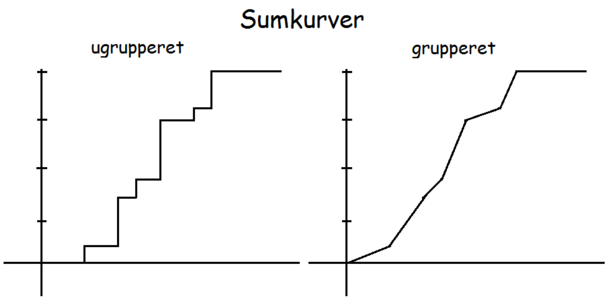
Spørgsmål af denne type kan let besvares ved hjælp af en sumkurve.

I en sumkurve har man sine observationer hen ad x-aksen og de kumulerede frekvenser op ad y-aksen.

Ugrupperede vs. grupperede

Hvis ens data er *ugrupperet*, tegner man sin sumkurve ved fra sin observation at gå lodret op til den kumulerede frekvens. Derefter går man vandret hen til næste observation, hvorefter man går lodret op til dennes kumulerede frekvens. Man vil altså få en trappelignende figur.

Hvis ens data derimod er *grupperet*, tegner man sin sumkurve ved fra højre endepunkt af intervallet at afsætte den kumulerede frekvens. Når man har gjort det for alle intervallerne, forbinder man alle punkterne med rette linjer.

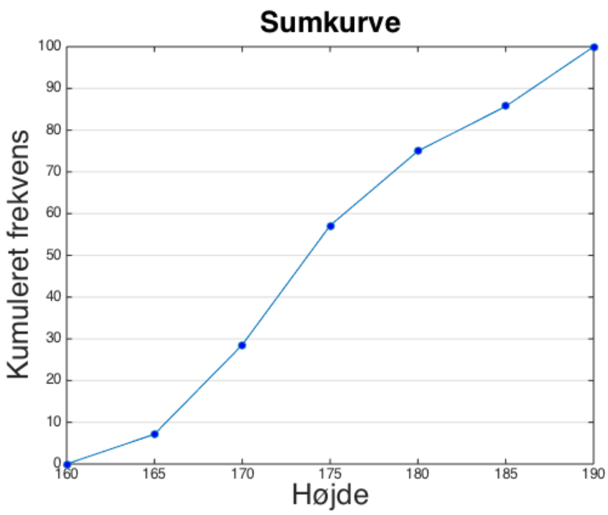


Lad os tegne en sumkurve ud fra et konkret datasæt og se, hvad man kan bruge den til.

Vores data er over højde

observation	hyppighed	frekvens	Kum.frekvens
]160;165]	2	7,14	7,14
]165;170]	6	21,43	28,57
]170;175]	8	28,57	57,14
]175;180]	5	17,86	75
]180;185]	3	10,71	85,71
]185;190]	4	14,29	100

Vi afsætter punkterne med højre endepunkt af intervallet på x-aksen og den kumulerede frekvens på y-aksen. Derefter forbinder vi dem, og får sumkurven:



Kvartilsæt

Kvartilsættet består af tre tal: øvre kvartil, median og nedre kvartil. Medianen (Med) er det midterste tal af alle observationerne. 50% af observationerne er altså mindre end medianen og 50% er større.

Nedre kvartil (Q_1) er det tal, som 25% af observationerne er mindre end (og 75% større end).

Øvre kvartil (Q_3) er det tal, som 75% af observationerne er mindre end (og 25% større end).

Man aflæser sit kvartilsæt i sumkurven.

For at finde nedre kvartil, finder man 25% på y-aksen. Herfra går man vandret, til man støder på sumkurven. Nu går man lodret ned. Det tal, man støder på på x-aksen, er nedre kvartil.

På samme måde finder man medianen ved bare at gå ud fra 50%, og øvre kvartil ved at gå ud fra 75%.

For sumkurven ovenfor svarer det til

$$Q_1 = 169{,}2$$

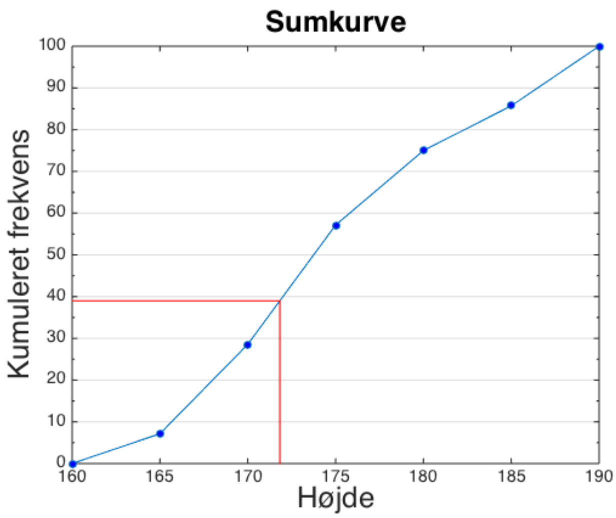
$$\text{Med} = 173{,}75$$

$$Q_3 = 180$$

Det vil altså sige, at :

- 25% af eleverne er 169,2 cm eller lavere.
- 50% af eleverne er 173,75 cm eller lavere
- 75% af eleverne er 180 cm eller lavere.

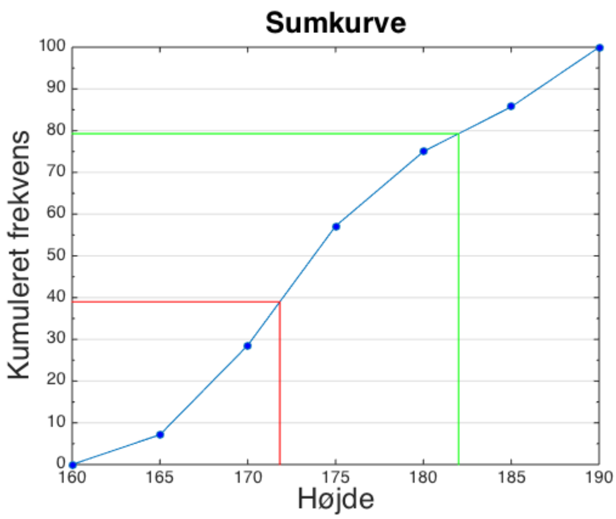
Hvis man vil finde ud af, hvor mange procent af eleverne, der er 172 cm eller lavere, så går man den anden vej end før. Man finder 172 på x-aksen, går lodret op til man rammer sumkurven og går derfra vandret ind til y-aksen.



Vi kan altså aflæse, at 39% af eleverne er 172 cm eller lavere.

Hvor mange procent er mellem 172 cm og 182 cm høje?

I dette tilfælde aflæser man først, hvor mange procent, der er 182 cm eller lavere. Derfra trækker man, hvor mange procent, der er 172 cm eller lavere.



Vi kan aflæse, at 79% er 182 cm eller lavere. Vi kan også aflæse, at 39% er 172 cm eller lavere. Andelen, der er mellem 172 og 182 cm må derfor være 40% (=79%-39%)

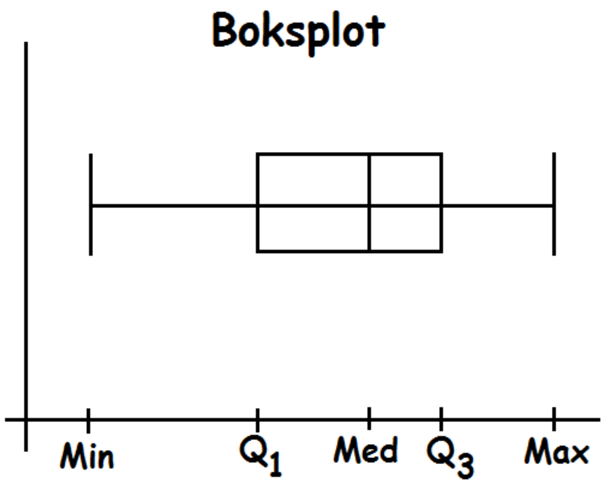
Boksplot

Et boksplot er en overskuelig måde at fremstille sit data på. For at kunne tegne et boksplot, skal man kende følgende værdier:

- mindste observation
- nedre kvartil
- median

- øvre kvartil
- største observation

Man har sine observationer hen ad x-aksen, og tegner sit boksplot på følgende måde:



Bemærk, at det er ligegyldigt, hvor højt oppe, vi tegner vores boksplot. y-aksen har ingen betydning.

I et boksplot gælder altid, at:

- 25% af observationerne ligger mellem Min og $Q_{1.}$
- 25% af observationerne ligger mellem Q_1 og Med.
- 25% af observationerne ligger mellem Med og $Q_{3.}$
- 25% af observationerne ligger mellem Q_3 og Max.

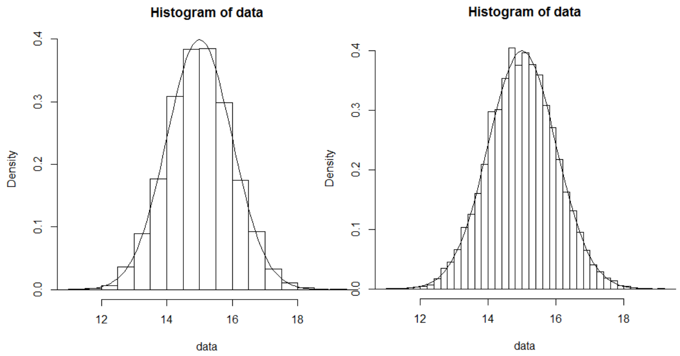
Boksplots er gode til at sammenligne forskellige data med hinanden. Hvis to gymnasieklasser har taget den samme eksamen, kan man sammenligne deres resultater ved at tegne et boksplot for hver af dem.

7.6 Fordelingsfunktion og frekvensfunktion

Efter at have udført en statistisk undersøgelse, vælger man ofte at gruppere sit data.

Man kan plotte sine data i et histogram med lige bredde søjler. I dette tilfælde svarer søjlens højde til frekvensen. Imidlertid bestemmer man selv, hvor bredde ens intervaller skal være.

Hvis man gør sine intervaller smallere og smallere, vil histogrammet til sidst blive tilpasset en glat kurve.



Den glatte kurve, de tilpasses kaldes *frekvensfunktionen* eller *tæthedsfunktionen*. Dette skyldes, at den for hver observation (x-værdi) siger hvor høj en frekvens (y-værdi), denne observation har.

Fordelingsfunktion

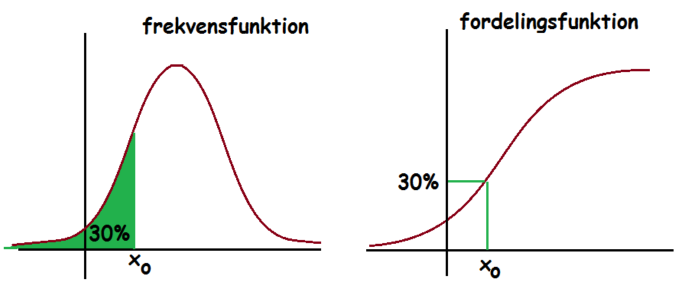
På samme måde hvis vi indtegner de kumulerede frekvenser for data i en sumkurve. Jo smallere vi gør intervallerne, des mere glat bliver sumkurven. Den glatte kurve er graf for *fordelingsfunktionen*.

Sammenhæng mellem frekvensfunktion og fordelingsfunktion

I afsnittet om sumkurver så vi, at vi ud for hver x-værdi kunne aflæse hvor mange procent i undersøgelsen, der var mindre end eller lig med denne værdi.

På samme måde svarer fordelingsfunktionens værdi i et bestemt punkt til, hvor mange procent af målingerne, der er mindre end eller lig med denne observation.

Men dette svarer jo til den kumulerede frekvens for denne observation. Det svarer altså til at lægge frekvenserne sammen for alle de observationer, der er mindre end eller lig med vores faste punkt. Dette er jo summen af arealet af søjlerne i histogrammet, svarende til arealet under frekvensfunktionen til venstre for det faste punkt.



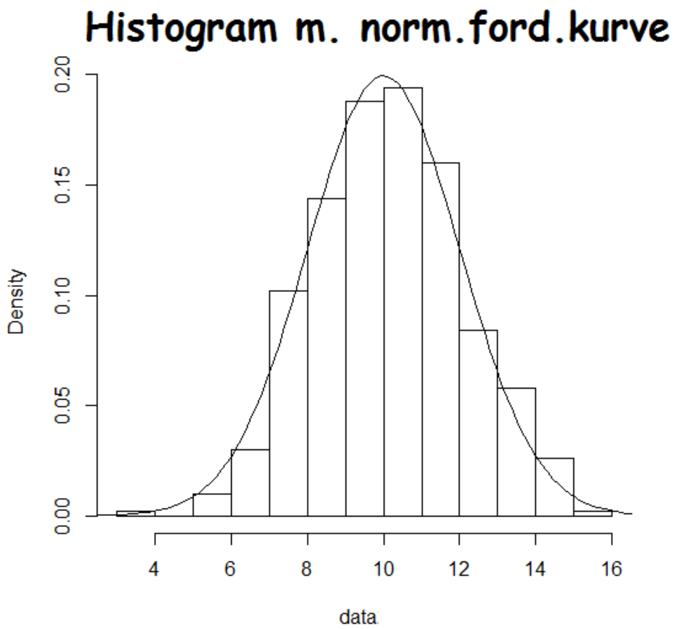
Med brug af integralregning får man altså denne sammenhæng mellem fordelings- og frekvensfunktion.

$$\text{Fordelingsfunktion}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \text{frekvensfunktion}(x)\, dx$$

7.7 Normalfordeling

Når man laver statistiske eksperimenter, er det ofte man observerer, at data fordeler sig som en "klokkeform". Der er flest observationer inde mod midten, og så fordeler de sig ellers symmetrisk ud til begge sider.

Et eksempel kunne være disse data:



Her er tegnet et histogram over noget data (søjlerne) og derudover er indtegnet en normalfordelingskurve (klokkeformet kurve). Man kan se, at data fordeler sig næsten ligesom kurven.

Hvis man lavede intervallerne mindre (herover har de længde 1), ville søjlerne passe endnu bedre til klokkekurven.

Klokkeformen kan variere i både højde og bredde (afhængig af vores spredning). Men hvis bare data opfylder at være fordelt nogenlunde som en klokke, siger vi, det er normalfordelt.

Tjek om data er normalfordelt

Hvis man skal tjekke om noget data er normalfordelt, så er det smart først at tegne et histogram over det og se, om det danner noget, der minder om en klokkeform.

Hvis det er tilfældet, kan man indtegne det i et normalfordelingspapir. Her skal det danne en ret linje.

Man kan tegne bedste rette linje af punkterne i normalfordelingspapiret og direkte aflæse middelværdi og spredning

Hvad er der særligt ved normalfordelingen?

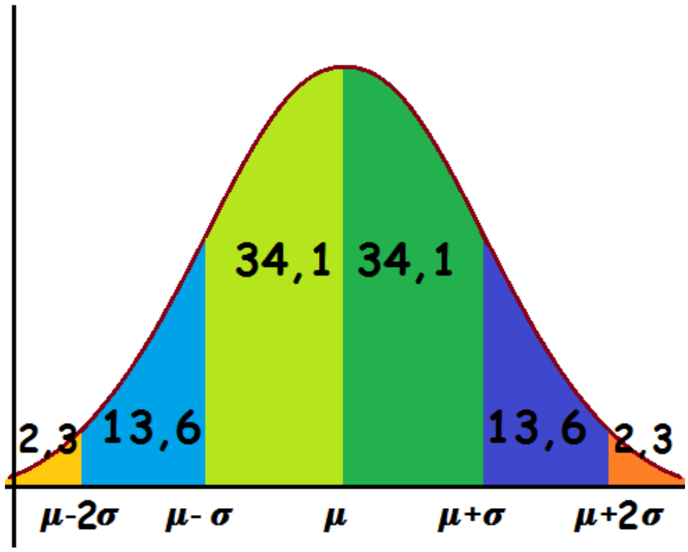
Hvis data er normalfordelt gælder der, at medianen (den midterste observation) er lig med middelværdien (gennemsnittet). Har man sumkurven for en normalfordeling, kan man altså aflæse middelværdien uden at lave nogen udregninger.

I en normalfordeling ligger data, så:

- 68,2 % ligger i intervallet [middelværdi - spredning ; middelværdi + spredning[
- 95,4 % ligger i intervallet [middelværdi - 2spredning ; middelværdi + 2spredning[

- 4,6 % ligger udenfor intervallet [middelværdi - 2spredning ; middelværdi + 2spredning[

På samme måde fordeler de sig på den anden side af middelværdien.



Der gælder desuden at normalfordelingens frekvensfunktion, ϕ, danner en klokkeformet graf og dens fordelingsfunktion, Φ, et symmetrisk S.

Frekvensfunktionen, som også er kaldet tæthedsfunktionen, er givet ved forskriften

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hvor μ er middelværdien og σ er spredningen.

Man kan finde værdier af fordelingsfunktionen ved at integrere frekvensfunktionen.

Hvis vi har en normalfordeling med middelværdi 10 og spredning 1, er frekvensfunktionen

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}$$

Hvis vi ønsker at se, hvor stor en del af vores observationer, der er 8,5 eller derunder, tager vi fordelingsfunktionens værdi i 8,5.

$$\phi(8,5) = \int_{-\infty}^{8,5} \phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{8,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}\, dx \approx 0,0668 = 6,68\%$$

Integralet ovenfor kan ikke umiddelbart beregnes. Hvis man integrerer normalfordelingen får man et udtryk der indeholder en fejlfunktion, Erf(z). På engelsk hedder den errorfunction, heraf Erf. Fejlfunktionen er kort sagt sandsynligheden for, at ens observation ligger i det interval man undersøger i integralet.

Da Erf(z) ofte forekommer i statistikken og visse differentialligninger kan den slås op i mange CAS-værktøjer, Excel, lommeregnere og andet.

Integralet kan bestemmes direkte ved brug af CAS-værktøjer (TI-Nspire, Maple), hvilket er den korrekte fremgangsmåde i gymnasiet.

Avanceret

Fejlfunktionen er ikke en simpel funktion og kan derfor ikke beregnes på en simpel måde. Den kan bestemmes ved bl.a. approksimation ved Taylorpolynomier, men det er ud over pensum i gymnasiet, og først noget man stifter bekendtskab med på universitetet.

Erf funktionen er defineret ved

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2} dt$$

Ved integration af normalfordelingen finder man

$$\int_{-\infty}^{z} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}(1 + Erf(\frac{z-\mu}{\sqrt{2\sigma}})), \text{ forudsat } \sigma \geq 0$$

Taylor ekspansionen for Erf(z)

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

Hvor z er et komplekst tal.

7.8 Chi i anden-test

Nogle gange laver man et forsøg, hvor man på forhånd har en idé om, hvordan udfaldene bør være. Man kan derfor teste, om de observerede værdier stemmer overens med de forventede værdier. Til at gøre det, kan man bruge χ^2-test (χ er det græske tegn chi (og altså ikke et x)).

Vi vil her gennemgå, hvordan et χ^2-test fungerer vha. et eksempel.

Vi kaster 60 terninger og får resultaterne

Antal øjne	1	2	3	4	5	6
Antal terninger	5	12	11	16	7	9

Forventede værdier

Når man laver et χ2-test, er det første, man skal gøre, at beregne sine forventede værdier.

I vores tilfælde havde vi regnet med at terningerne ville fordele sig med 1/6 (dvs 10 terninger) ud for hvert antal øjne.

Vi tilføjer en række med forventede værdier

Antal øjne	1	2	3	4	5	6
Antal terninger	5	12	11	16	7	9
Forventet	(1/6·60=) 10	10	10	10	10	10

Nu er det store spørgsmål: skyldes afvigelsen tilfældigheder, eller er der noget galt med vores terninger (eller den måde vi kastede dem på)?

Nulhypotese

Først opstiller man en nulhypotese, H_0.

Den vil typisk være, at forskellen mellem de forventede og observerede værdier skyldes tilfældigheder.

Hvis vi ender med at forkaste vores nulhypotese, kan vi altså sige, at der er en signifikant forskel mellem forventet og observeret.

Hvis vi ender med ikke at forkaste (dvs. acceptere) vores nulhypotese, kan vi sige, at der ikke er nogen signifikant forskel på forventede og observerede data.

Vores nulhypotese er: *H_0: Antallet af terninger, der viser et bestemt antal øjne er uafhængigt af, hvilket antal øjne, de viser.*Eller med andre ord: der er lige stor sandsynlighed for at få hvert antal øjne.

Valg af signifikansniveau

Før man laver testet, skal man blive enig med sig selv om, hvad der skal til, før man forkaster hypotesen.

Udkommet at testet er en procentsats. Den angiver, hvor stor sandsynligheden er for at få data, der passer lige så godt eller dårligere til nulhypotesen end de observerede data - under forudsætning af, at nulhypotesen er sand.

Typisk vil man vælge et signifikansniveau på 5%. Dvs. at hvis der (givet at nulhypotesen er sand) er mindre end 5% chance for at få de observerede data, så forkaster vi hypotesen.

Man kan også sige, at signifikansniveauet er risikoen for at forkaste en sand hypotese. Hvis vi gentog vores eksperiment mange gange, ville vi altså i 5% af tilfældene komme til at forkaste vores hypotese, selvom den var sand.

Det kan foranledige en til at vælge et lavere signifikansniveau. Men jo lavere man sætter sit signifikansniveau, des sværere bliver det at forkaste nulhypotesen, og derved øger man risikoen for at godtage en nulhypotese, selvom den faktisk er falsk.

Det er derfor en afvejning, hvor man sætter sit signifikansniveau, og det er normen at man bruger et signifikansniveau på 5%. Medicinske forsøg kræver dog tit et signifikansniveau på 1%.

Jo større forsøg man laver, des mindre bliver risikoen for både at afvise en sand hypotese og godkende en falsk hypotese. (Hvis vi f.eks. havde kastet 600 terninger i stedet for 60)

Frihedsgrader

Til et χ^2-test er knyttet et antal frihedsgrader. Hvis der er k observationer, er der k-1 frihedsgrader. I vores tilfælde er der 6 observationer, og derved er der 5 frihedsgrader.

Det betyder egentlig, at hvis vi tilfældigt skal fordele 60 terninger i de 6 bokse, så kan vi selv vælge hvor mange terninger vi kommer i hver af de fem første bokse, men i den sidste har vi ingen valgfrihed, den skal nemlig indeholde forskellen mellem 60 (det totale antal) og det vi har brugt på de 5 første.

Udregne χ^2-teststørrelsen

Nu er vi kommet til dér, hvor testet rigtigt starter. Nemlig beregningen af vores teststørrelse. Den beregnes ud fra følgende formel:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(O_1 - F_1)^2}{F_1} + \frac{(O_2 - F_2)^2}{F_2} + ... + \frac{(O_k - F_k)^2}{F_k}$$

hvor O står får observeret værdi, og F for forventet værdi.

Det er klart, at jo lavere χ^2-teststørrelsen er, des tættere ligger de observerede værdier på de forventede. Vi udregner χ^2-teststørrelsen for vores terningforsøg.

$$\chi^2 = \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(16-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} +$$

$$\frac{(9-10)^2}{10} = 7,6$$

Vores teststørrelse er altså 7,6.

Konklusion på test

Når vi har fundet vores χ^2-teststørrelse skal vi have omsat den til en konklusion på testet.

Der er to måder at gøre det på.

Den første (der er mest gammeldags og mest intuitiv) er at benytte et χ^2-skema. Man aflæser sin *kritiske værdi* ud for antallet af frihedsgrader og signifikansniveau.

I vores terningforsøg var der 5 frihedsgrader og vi havde valgt et signifikansniveau på 5% (0,05).

Vi kan dermed aflæse vores kritiske værdi til 11,07.

Degrees of Freedom	Probability										
	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59
	Nonsignificant								Significant		

Hvis vores teststørrelse er større end den kritiske værdi, forkaster vi nulhypotesen, og hvis den er lavere, accepterer vi den.

Vores χ^2-teststørrelse var 7,6, der er lavere end 11,07, og derfor accepterer vi nulhypotesen.

Den anden måde at konkludere på i χ^2-testet er ved at finde p-værdien: sandsynligheden for at de observerede data optræder givet at nulhypotesen er sand.

Den kan bl.a. findes i Excel ved at skrive =CHIFORDELING(*teststørrelse*;*frihedsgrader*)

I vores tilfælde ville det give

$$'' = \text{CHIFORDELING}(7,6\ ;\ 5)'' = 0,18 = 18\%$$

Det vil sige, at hvis nulhypotesen er sand, er der 18 % chance for at vores data (eller noget der er værre) optræder. Da de 18 % er højere end vores signifikansniveau på 5%, accepterer vi hypotesen.

Opsamling

- Find forventede værdier - Opstil H_0 - Vælg signifikansniveau og find antal frihedsgrader - Udregn teststørrelse

Og herefter: - Aflæs kritisk værdi i χ^2-skema. Hvis teststørrelsen er *større* end den kritiske værdi, afviser vi $H_{0.}$ - Eller find p-værdi. Hvis p-værdien er *mindre* end signifikansniveauet, afviser vi H_0.

7.9 Fejlkilder / Bias

Når man laver en statistisk undersøgelse, skal man holde tungen lige i munden. Man kan nemlig let komme til at lave nogle systematiske fejl. Vi vil gennemgå en række af dem her, så man ved, hvad man skal være på vagt for.

Repræsentativ stikprøve

Når man laver en statistisk undersøgelse, kan man ikke rende rundt og undersøge hele populationen. Man udtager derfor en stikprøve. Det er vigtigt, at denne stikprøve er repræsentativ for populationen. Der må altså ikke være overrepræsentation af en bestemt gruppering indenfor populationen. Over-/underrepræsentationer skævvrider undersøgelsen.

Vil man f.eks. undersøge danskernes holdning til offentlig transport, så nytter det ikke noget, hvis man kun spørger københavnerne.

Hvis man vil lave en undersøgelse om et lokalsamfunds holdninger, og man vælger at spørge forbipasserende ved et lokalt supermarked, kan man let få en ikke-repræsentativ stikprøve.

Er der nogle grupper, der kommer mere i supermarkedet end andre? (om formiddagen er der f.eks. forholdsvist mange ældre i forhold til voksne grundet arbejdstid)

Hvilket område ligger supermarkedet i? Er det nogle særlige typer, der handler lige netop i denne kæde? Ligger der et andet supermarked i den anden ende af byen, hvor halvdelen af byens indbyggere handler? Alle disse spørgsmål giver anledning til over-/underrepræsentation af bestemte grupper i populationen.

Et eksempel fra den virkelige verden er præsidentvalget i USA 1936 mellem Landon og Roosevelt. Et anerkendt tidsskrift *The Literary Digest* havde samlet en stikprøve på 2,4 mio. og spåede, at Landon ville vinde og få omkring 55% af stemmerne.

Den daværende journalist og marketingsekspert George Gallup lavede en mindre undersøgelse med kun ca. 30.000 respondenter. Imidlertid viste den, at Roosevelt ville vinde en klar sejr med over 60% af stemmerne. Gallup viste sig at få ret. Selvom hans stikprøve var lille, så havde han nøje udvalgt den, så alle dele af den amerikanske befolkning var repræsenteret. The Digest's fejl var, at de foretog deres stikprøve ud fra telefonbøger og bilregistreringsnumre. Dengang var telefoner og biler ikke så udbredte som i dag, så The Digest fik hovedsageligt fat i de rige amerikanere, mens den fattige del af befolkningen var underrepræsenteret. Dermed blev undersøgelsen skævvredet.

Formulering af spørgsmål

Mange statistiske undersøgelser foregår vha. spørgeskemaer. Her skal man passe på med, hvordan man formulerer sine spørgsmål. Et spørgsmål kan f.eks. være formuleret på en sådan måde, at svaret er givet på forhånd. F.eks. "Synes du, vi skal have bedre sygehuse?". Ingen (eller i hvert fald de færreste) ville svare nej til sådan et spørgsmål. Derfor er det ikke interessant at stille. Et mere relevant spørgsmål kunne være "Ville du acceptere en højere skat for at få bedre sygehuse?". Her går man ind og ser på bedre sygehuse i forhold til noget andet, hvor man skal prioritere.

Spørgsmål kan også være upræcist formulerede. F.eks. "Spiser du sundt?" Det er ikke klart defineret, hvad det vil sige at spise sundt. Derfor vil svarene afhænge af, hvad respondenterne selv lægger i begreberne, hvilket gør det umuligt at sammenligne det indsamlede data med hinanden. I stedet kunne man prøve at sætte nogle kvantitative mål op for hvad det ville sige at spise sundt. F.eks. "Hvor mange grøntsager spiser du om dagen?", "Hvor ofte drikker du sodavand?" etc.

Skjulte variable

Når man har foretaget en statistisk undersøgelse skal man passe på med at drage forhastede konklusioner. Nogle gange kan der nemlig være skjulte variable, der spiller ind på ens data. Man kan statistisk vise, at der er en sammenhæng mellem hvor mange stjerneskud der er observeret, og hvor mange, der bliver forkølede.

Heraf kan man ikke slutte, at stjerneskud gør folk forkølede. Årstiden er en skjult variabel. Om vinteren kan man se flere stjerneskud end resten af året, og om vinteren er der flere der bliver forkølede end resten af året. Den eneste virkelige sammenhæng mellem vores to variable er altså, at de begge bliver påvirket af den samme skjulte variabel.

8 Regression

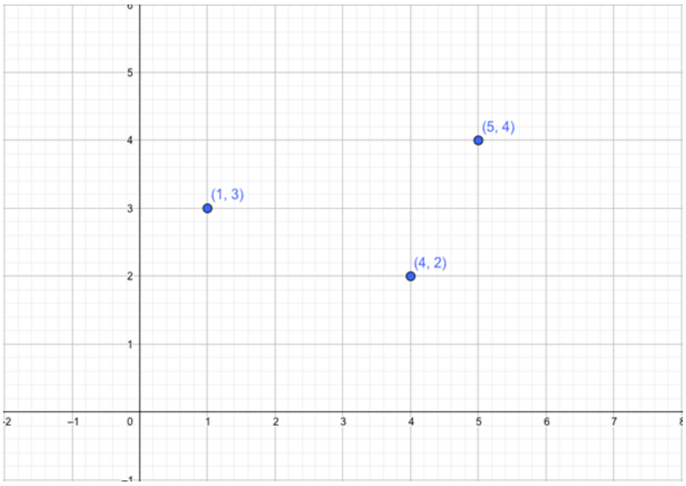
I Matematik C har vi undersøgt, hvordan man ud fra to punkter vil kunne finde netop den lineær, potens- eller eksponentialfunktion, der går gennem dem. I al forskning, fra mikrobiologi til psykologi, har man dog som regel mere end to punkter. Oftest har man på den anden side af tusind koordinatsæt.

Spørgsmålet er så: hvordan finder man den funktion, der bedst passer til punkterne? Det undersøger vi i dette afsnit.

Først undersøger vi, hvordan mindste kvadraters metode kan bruges som mål for, hvor god en funktion er. Herefter bruger vi differentialregning til at finde den absolut bedst funktion til et givent datasæt. Og slutteligt undersøger vi, hvordan R^2 er et udtryk for, om der er en sammenhæng mellem to variable.

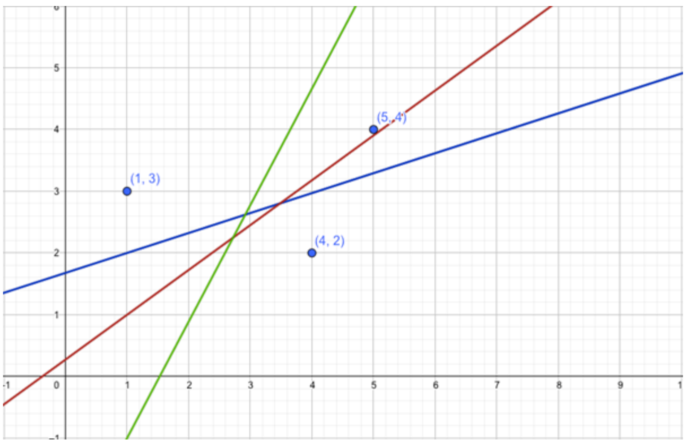
8.1 Mindste kvadraters metode

Når man arbejder med en mængde data, ønsker man nogle gange at lave en regression, for at undersøge om der kan findes en tendens. En meget almindelig type regression er den lineære regression. Lineær regression går ud på, at man ønsker at finde den rette linje, med forskriften $y = a \cdot x + b$, som beskriver datasættets tendens bedst. Hvad er det nu tendens er? Tendens er datasættets tilbøjelighed til at følge en bestemt udvikling. Den rette linje kan vi også kalde for tendenslinjen. Det betyder kort sagt, at vi har en idé om, at fremtidig data vil lægge sig i nærheden af tendenslinjen. Et eksempel: Vi har et datasæt, som indeholder 3 træers vægt og tykkelse på stammen. Vi indtegner datapunkterne i et koordinatsystem.



Datapunkter indtegnet i et koordinatsystem.

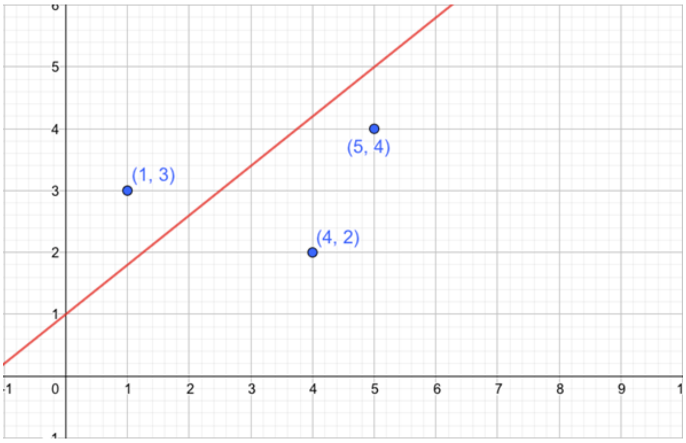
Her har vi vægten på y-aksen og tykkelsen på x-aksen. Vi vil gerne tegne den rette linje, som bedst beskriver datasættets udvikling. På den måde kan man give et kvalificeret bud på den fremtidige udvikling. Men hvordan tegner vi den bedste rette linje, altså den rette linje, som beskriver vores datasæt bedst?

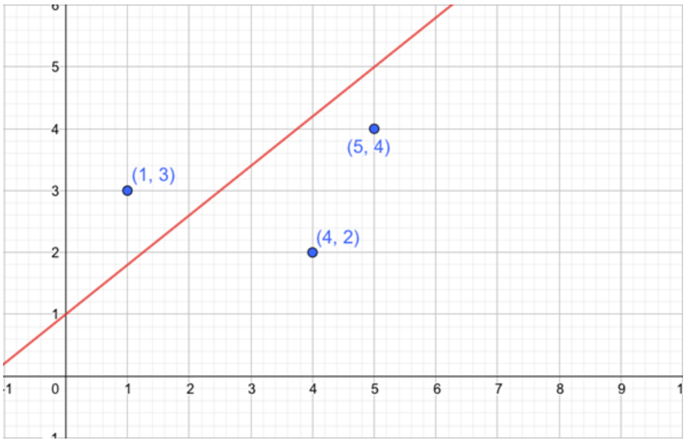


Tre eksempler på tendenslinjer, der alle beskriver datasættets udvikling. Hvilken er bedst?

Som vi kan se på figuren, kan man tegne mange rette linjer, som alle beskriver data, men vi ønsker at finde den ene rette linje, som beskriver data bedst. Typisk får man sit regneprogram (Maple, TI-nSpire, Excel, GeoGebra,...) til at udføre regressionen for en. Vi vil nu se på, hvordan lineær regression kan udføres, ved mindste kvadraters metode.

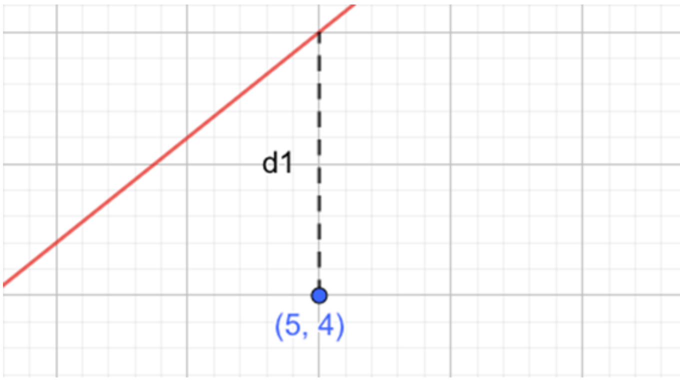
Vi tegner nu kun én linje, som vi på øjemål synes beskriver data bedst.





Den rette linje, vi har valgt at bruge til mindste kvadraters metode.

Nu kigger vi på det punkt, der ligger i (5,4). Vi vil gerne finde afstanden fra punktet og op til den rette linje. Den afstand kalder vi for d_1. Vi zoomer ind på punktet og tegner afstanden d_1:



Afstanden fra punktet (5,4) til den rette linje kalder vi d_1, er vist som den stiplede linje.

Vi kan gøre det samme for de to andre punkter, hvor afstandene vil være d_2 og d_3. Punktet (4,2) tilhører nu d_2 og punktet (1,3) tilhører d_3. Vi koncentrerer os om d_1 for nu, da fremgangsmåden er ens for alle punkterne og deres tilhørende afstande. Vi ønsker nu et udtryk, som beskriver afstanden, d_1. Vi husker, at den røde linje kan beskrives med den generelle forskrift: $y = a \cdot x + b$, som vi benytter, da vi ikke kender konstanterne a og b endnu.

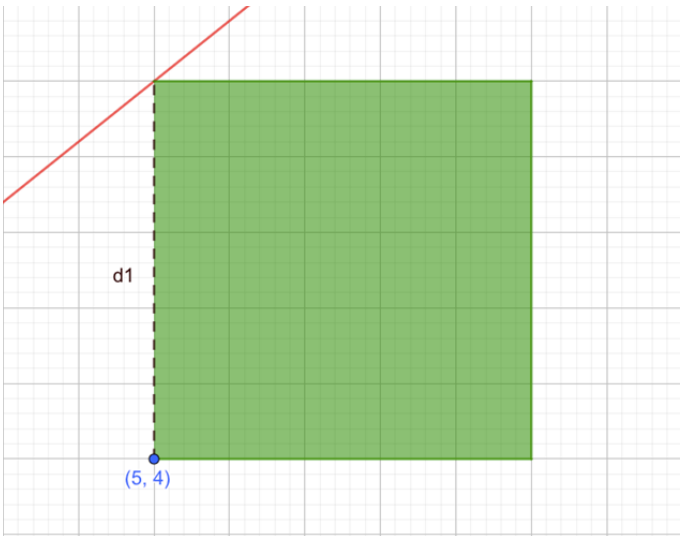
Afstanden mellem punktet og linjen er udelukkende en forskel i y-værdier, da vi ikke har bevæget os hen ad x-aksen. Fra forskriften for den røde linje ved vi, at y-værdien som ligger præcis over punktet (5,4) er lig med $a \cdot x + b$. Derfor kan forskellen beskrives ved følgende,

$$d_1 = a \cdot x_1 + b - y_1$$

Hvor x_1 og y_1 er koordinaterne i punktet (5,4). Vi indsætter x- og y-værdierne i udtrykket og får,

$$d_1 = a \cdot 5 + b - 4 = 5a + b - 4$$

Vi vil nu gerne opløfte d_1 i anden. Det smarte ved at opløfte afstanden i anden er, at kvadratet altid vil være positivt. Hvis et af punkterne ligger oven linjen, så er afstanden fra punktet til linjen negativt, og det duer ikke. Når man opløfter en linje i anden, får man kvadratet af linjen. Et kvadrat er netop en firkant med ens sidelængder. I vores tilfælde er sidelængden d_1. Arealet af et kvadrat er defineret som $A_{kvadrat} = d_1 \cdot d_1 = d_1^2$. Dette kan illustreres som:



Det grønne areal, som er kvadratet af d_1.

Det grønne areal er lig d_1 opløftet i anden. Vi ser nu på vores udtryk,

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (5a+b-4)^2 = (5a+b-4)\cdot(5a+b-4) \\ &= 25a^2+10ab-40a+b^2-8b+16 \end{aligned}$$

Hvis man er i tvivl om, hvordan ovenstående blev udregnet, så tag et kig på kvadratsætningerne. Vi husker på en ting: vi brugte den generelle forskrift for rette linjer, til at beskrive den røde linje. Det betyder, at havde vi tegnet den grønne eller blå eller en hvilken som helst anden ret linje, ville afstanden d_1 kunne beskrives ved ovenstående udtryk, da tallene a og b, netop er ukendte variable. Afstanden fra de to andre punkter, d_2 og d_3, kan man bestemme på præcis samme måde, som vi gjorde det med d_1. Vi har nu,

$$\begin{aligned} d_2^2 &= 16a^2+8ab-16a+b^2-4b+4 \\ d_3^2 &= a^2+2ab-6a+b^2-6b+9 \end{aligned}$$

Når vi sætter afstandene i anden, får vi dannet kvadrater. Det vi nu ønsker, det er at minimere det samlede areal af de tre kvadrater, således at den rette linje kommer til at ligge så tæt på punkterne som muligt, heraf navnet **mindste kvadraters metode**!

Vi lægger de tre arealer sammen, hvilket giver os det samlede areal, T:

$$T = d_1^2+d_2^2+d_3^2 = 42a^2+20ab-62a+3b^2-18b+29$$

Nu ønsker vi, at gøre det dette udtryk mindst muligt. Det betyder, at vi får lagt den rette linje, sådan at de tre kvadraters areal bliver mindst muligt.

Opfatter man udtrykket for det totale areal, som en funktion af a, sådan at b er en konstant, kan vi se, at vi kan opfatte T som et andengradspolynomium. Vi har netop tre led, et led med a^2, et led med a og et konstantled (alle led hvor b indgår alene). Det samme gælder for b. Der hvor andengradspolynomiet er mindst er dets minimum, altså der hvor parablen vender. Vi kan finde minimum ved at differentere T, og sætte den afledte lig med 0, og løse for a og b. Vi prøver nu at differentiere, først med hensyn til a og derefter med hensyn til b:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}a} = 84a+20b-62$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}b} = 6b+20a-18$$

Husk på, at når $3b^2-18b+29$ differentieres med hensyn til a, vil alle tre led ses som konstanter og derfor vil deres afledte være lig 0. Det samme gælder for $42a^2-62a+29$ differentieret med hensyn til b.

Vi har nu to afledte, som vi sætter lig 0:

$$\begin{aligned} 84a+20b-62 &= 0 \\ 6b+20a-18 &= 0 \end{aligned}$$

To ligninger med to ubekendte, a og b, er noget vi har set før og som vi nemt kan løse. Hvis du har brug for at få det genopfrisket, så kig på siden om emnet.

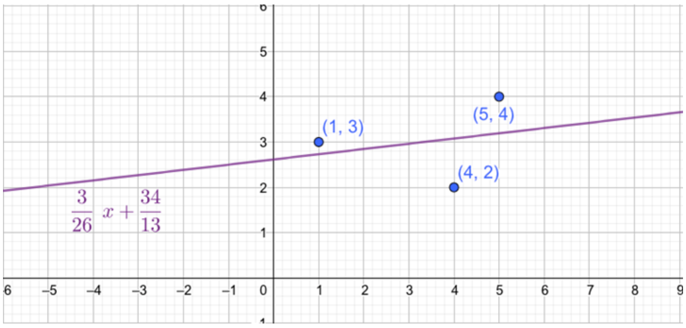
Vi løser de to ligninger, og får værdierne for a og b:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{26} \\ b &= \frac{34}{13} \end{aligned}$$

Vi har nu bestemt konstanterne a og b til vores lineære funktion, som beskriver den bedste rette linje til de tre punkter, som derfor har forsriften:

$$y = \frac{3}{26} \cdot x + \frac{34}{13}$$

Vi har tegnet det her:



Den bedste rette linje for vores datasæt.

Vi kan nu tydeligt se, hvordan vores oprindelige forsøg på at tegne den bedste rette linje ramte ved siden af. Faktisk var den blå linje, den som kom tættest på den bedste rette linje.

Det hele kan sammenfattes således:

Vi har n observationer, (1, 2, 3, ..., n), som har afstanden fra en vilkårlig ret linje ($y = a \cdot x + b$

$$d_i = a \cdot x_i + b - y_i$$

Vi ønsker at finde summen af de kvadrerede afstande, T,

$$T = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b - y_i)^2$$

Denne sum ønskes minimeret så meget som muligt, hvilket gøres ved at differentiere T med hensyn til a og b, og sætte differentialkvotienterne lig med 0, således,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}a} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}b} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) = 0$$

Vi har nu de to ovenstående ligninger, som vi løser som to ligninger med to ubekendte. På den måde bestemmes koefficienterne, a og b, til de rette linjer, og problemet er løst.

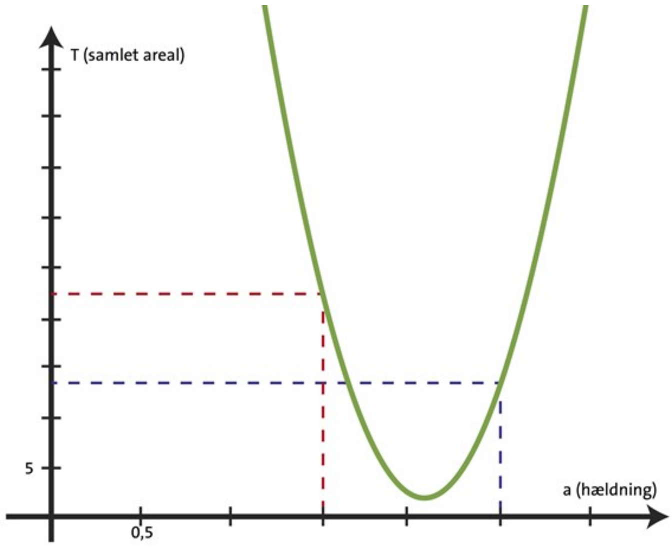
8.2 Regression

I forrige afsnit har vi kun vist, at $y = 2,5 \cdot x$ beskriver punkterne bedre end $y = 1,5 \cdot x$. Vi har stadig ikke fundet den optimale funktion. Her skal vi bruge den viden vi har fra et andet område af matematikken, der også beskæftiger sig med funktioner: differentialregning.

Hvis vi forestiller os kvadraternes samlede areal, T, som en funktion af proportionalitetsfaktoren, a, så vil den være et andengradspolynomium. Det kan vi vise med en udvidelse af kvadratreglen

$(c - a \cdot b)^2 = c^2 + a^2 \cdot b^2 - 2abc$. Da a er den eneste ubekendte, så kan alle andre led reduceres til et enklte tal, og når den samlede sum findes vil den højeste eksponent a har stadig være 2.

En af fordelene ved et andengradspolynomium er, at det altid har et toppunkt som kan findes ved at sætte den afledte funktion lig nul. At toppunktet i vores model vil være det globale minimum skyldes, at alle koefficienterne for a^2 er positive, da de er vores x-værdier kvadreret.



I eksemplet fra tidligere havde vi punkterne P, Q og S. Sætter vi dem ind i vores funktion for $T(a)$ får vi:

$T(a) = (2-a\cdot 1)^2+(7-a\cdot 4)^2+(15-a\cdot 7)^2 = 66\cdot a^2-270\cdot a+278$ $T'(a) = 66\cdot 2\cdot a-270 = 132\cdot a-270$

Hvis vi så sætter T'(a) lig nul får vi toppunktets førstekoordinat, der er:

$132 \cdot a - 270 = 0$ $a = \frac{270}{132} \approx 2,045$

Den bedst beskrivende proportionalitetsfaktor er altså cirka 2,045. Og det samlede areal er:

$T(\frac{270}{132}) = \frac{41}{22} \approx 1,86$

Den samme procedure kan overføres til eksponentialfunktioner af typen a^x og potensfunktioner x^a. Det næste logiske skridt ville være at tilføje en ekstra variabel til de tre tilfælde, dette overlader vi dog til et CAS-program.

8.3 R^2

I forrige afsnit viste vi en måde at finde den funktion, der bedst passer på en række koordinatsæt. At vi har fundet den bedste funktion til at beskrive en mængde koordinatsæt betyder dog ikke, at der er en sammenhæng mellem de to variable. I eksemplet vi brugte før, ser det ud som om, der er en sammenhæng, men vi vil gerne have et mål for sammenhængen.

Det første skridt er, at finde det samlede areal, under antagelse af, at der ikke er en sammenhæng mellem de to variable. Her måler vi ikke afstanden til en funktion $y = a \cdot x$, men derimod $\bar{y}$. Her er $\bar{y}$ lig den gennemsnitlige y-værdi for alle koordinatsættene. I vores eksempel er $\bar{y} = \frac{2+7+15}{3} = 8$.

Ved at bruge $\bar{y}$ til at finde det samlede areal hvis de er uafhængige, T_u, får vi:

$(2-8)^2 + (7-8)^2 + (15-8)^2 = 86$

Det er tydeligvis en meget dårligere funktion end den vi fandt tidligere. For at få et generelt udtryk for, hvor stor sammenhængen mellem variablerne er, skal vi nu finde det der hedder R^2-værdien. Den kan beskrives som følgende, der altid giver et tal mellem 0 og 1. Jo tættere på 1, jo bedre er sammenhængen.

$R^2 = 1 - \frac{T}{T_u}$

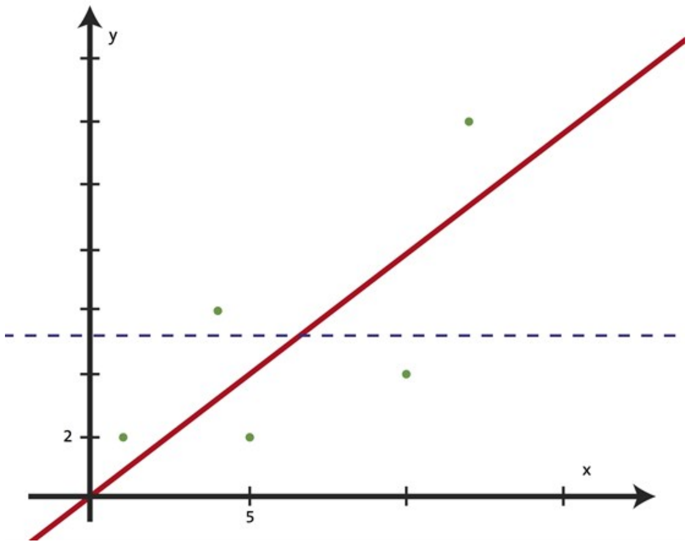
Inden for forskellige videnskaber har man forskellige krav for hvor god en sammenhæng skal være, før den er 'gyldig'. I naturvidenskab sigter man efter en R^2 på mere end 0,95 - hvorimod man inden for samfundsvidenskaben ofte godtager sammenhænge fra 0,65 og op.

I vores eksempel er vores R^2 lig:

$R^2 = 1 - \frac{T}{T_u} = 1 - \frac{T(\frac{270}{132})}{86} = \frac{1851}{1892} \approx 0,98$

Hvilket er udtryk for en meget stærk sammenhæng.

Et tilfælde med en dårlig sammenhæng er afbilledet herunder.



Den røde linje er den funktion, der bedst forklarer den proportionelle sammenhæng (fundet på den måde, der er beskrevet tidligere). Den har forskriften $y = \frac{10}{13} \cdot x$, og den stiplede blå linje er den gennemsnitlige y-værdi. R^2-værdien for dette eksempel er 0,49 - hvilket er meget lavt. Der er altså ikke tale om en proportionel sammenhæng. Dette udelukker dog ikke en anden type sammenhæng som f.eks. eksponentiel.

9 Vektorer i 2D

9.1 Vektorer

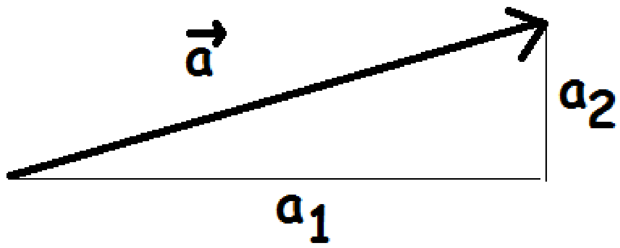
I dette afsnit kommer vi ind på det grundlæggende vektorbegreb.

En vektor er en pil, der har en længde og en retning. Man betegner oftest vektorer med små bogstaver med en lille pil over.

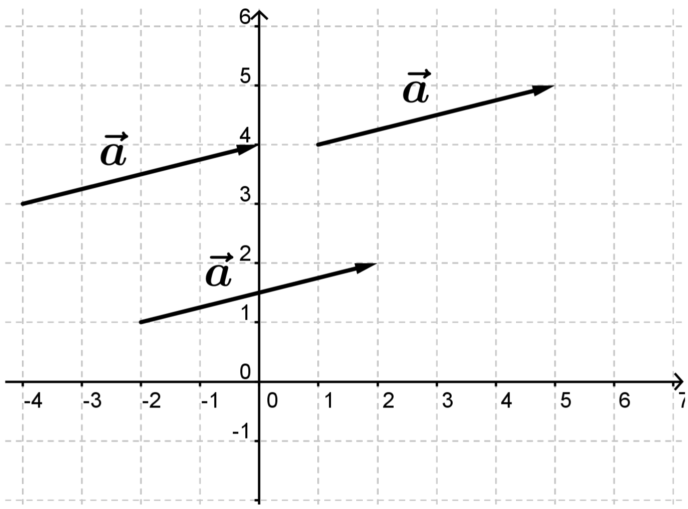
$$\vec{a}$$

En vektor har to koordinater, der beskriver hvor lang vektoren er i hhv. x-aksens og y-aksens retning. Man skriver koordinaterne i en søjle med x-koordinaten øverst og y-koordinaten nederst.

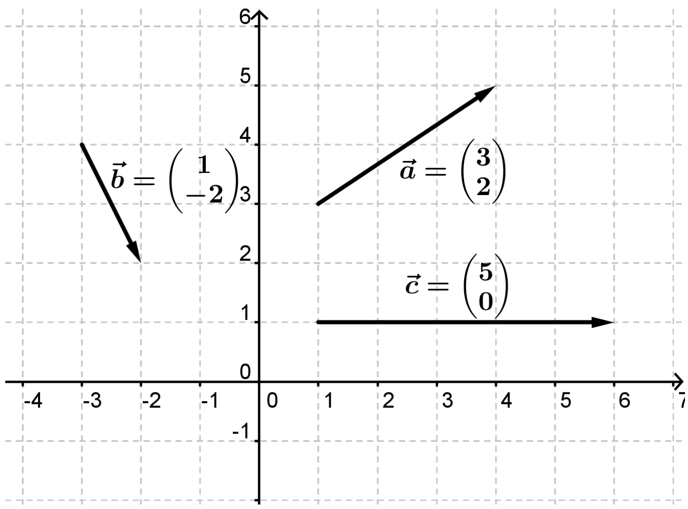
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



Når man tegner en vektor ind i et koordinatsystem, er det lige meget, hvor man starter. Så længe pilen har samme længde og retning, er det den samme vektor.

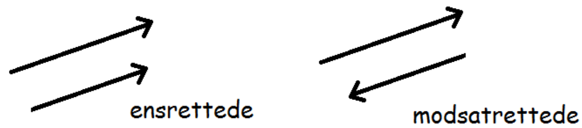


Her er eksempler på nogle vektorer med koordinater angivet



Ensrettede og modsatrettede vektorer

To vektorer, der er parallelle og har samme retning, kaldes ensrettede, mens to parallelle vektorer med hver sin retning kaldes modsatrettede.



Nulvektoren og egentlige vektorer

Den vektor, der har koordinaterne (0, 0) kaldes for nulvektoren

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

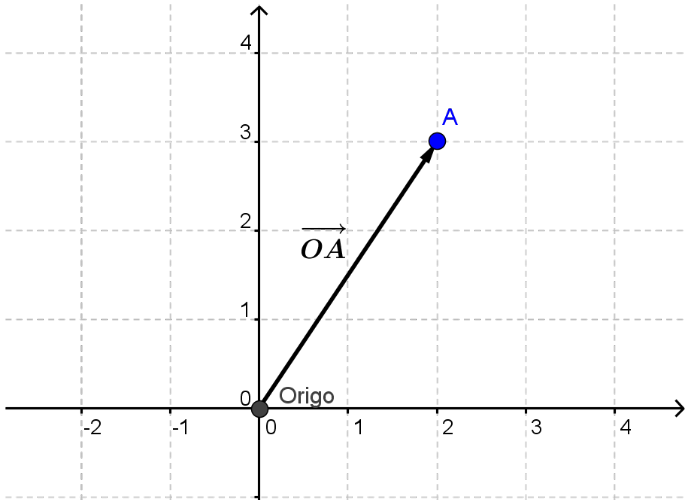
Nulvektoren har samme start- og slutpunkt. Den har derfor ingen længde.

Alle vektorer, der ikke er nulvektoren, kaldes for egentlige vektorer.

Stedvektor

Hvis man er givet et punkt i planen, kan man tegne en vektor fra origo (punktet (0, 0)) hen til punktet. Denne vektor kaldes punktets stedvektor. Den betegnes med

$$\overrightarrow{OA}$$

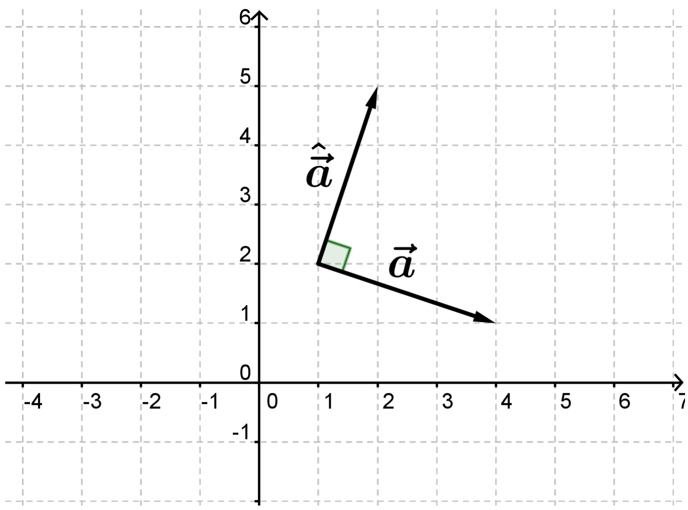


Stedvektoren til et punkt har samme koordinater som punktets koordinater.

$$A = (a_1, a_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Tværvektor

Hvis man har en vektor, kan man danne dens tværvektor. Tværvektoren har samme længde som den oprindelige vektor, men er drejet 90°mod urets retning. Tværvektoren betegnes med at sætte en lille "hat"(dvs "ˆ") ovenpå vektoren.



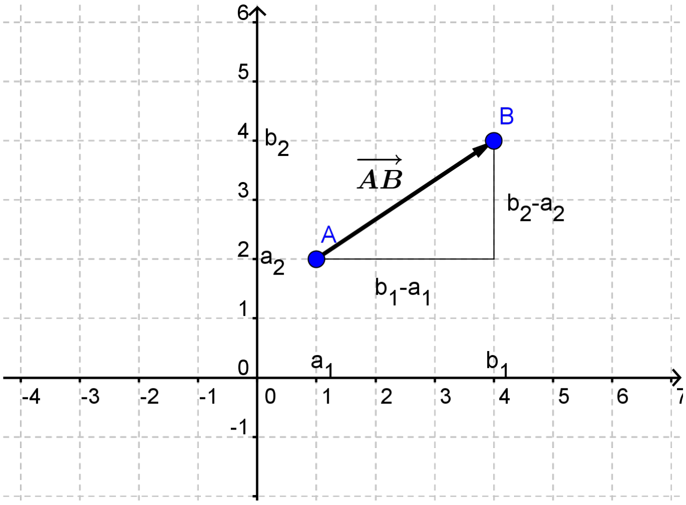
Tværvektorens koordinater fås ved at bytte om på den oprindelige vektors koordinater og sætte et minus foran første koordinaten.

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Tværvektoren til en vektor a kaldes tit for "a hat", og det at finde tværvektoren kaldes tit "at hatte a".

Vektor mellem to punkter

Hvis man har to punkter, kan man tegne en vektor mellem dem.



Vektoren vil have koordinaterne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Enhedsvektor

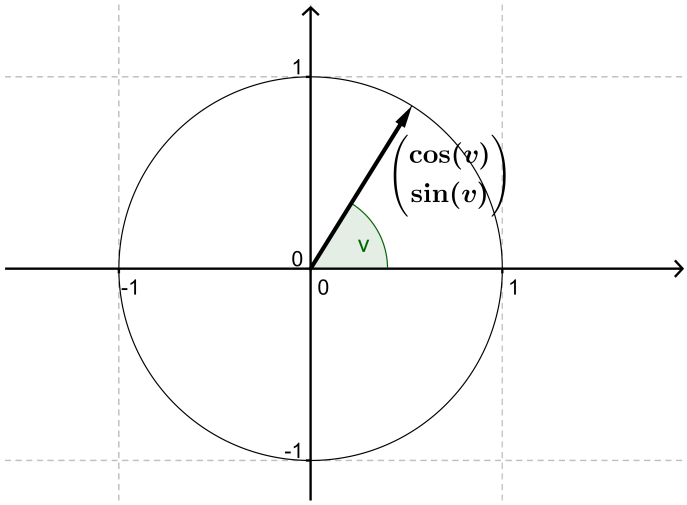
En enhedsvektor er en vektor, der har længde 1. F.eks vektoren

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For hver vinkel v, kan man danne enhedsvektoren

$$\begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

der har længde 1 på grund af grundrelationen



Hvis man har en vektor, a, kan man forkorte den, så man får en enhedsvektor, e, med samme retning ved hjælp af denne formel

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

9.2 Længde og afstandsformlen

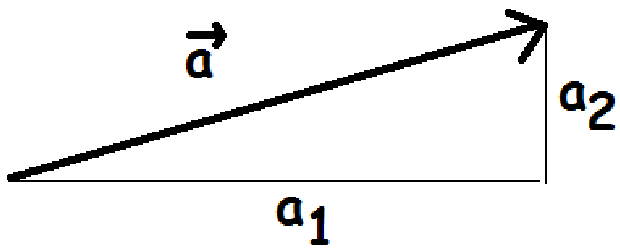
Man betegner længden af en vektor som

$$|\vec{a}|$$

Man finder længden af en vektor ved følgende formel

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Formlen er let at udlede ved hjælp af Pythagoras' læresætning.



Vi har en retvinklet trekant.

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |\vec{a}|^2$$

Bemærk at stregerne omkring a_1 og a_2 betyder "numerisk værdi", mens stregerne omkring vektor a betyder "længde". Dette skyldes at a_1 og a_2 bare er tal, mens vektor a er en vektor. Hvis man tager numerisk værdi af et tal og sætter det i anden, så får man det samme som hvis man bare havde sat tallet selv i anden (fordi minus gange minus giver plus, og plus gange plus giver plus). Derfor kan vi omskrive til:

$$a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$$

Nu er der bare tilbage at tage kvadratroden på begge sider, så har man formlen for længden af en vektor.

Hvis man f.eks. vil finde længden af vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

så er den

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Afstandsformlen

Når man vil bestemme afstanden mellem to punkter, så er det det samme som at finde længden af vektoren mellem de to punkter. Altså kan man sige, at

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

Her betyder venstresiden "længden af linjestykket mellem A og B"og højresiden betyder "længden af vektor AB".

For at finde afstanden mellem to punkter kan vi altså bruge formlen for længden af en vektor, hvor vi indsætter koordinaterne for vektor AB.

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Hvis man f.eks. vil finde afstanden mellem punkterne (1, 2) og (5,3) er den

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \approx 4,123$$

9.3 Regning med vektorer

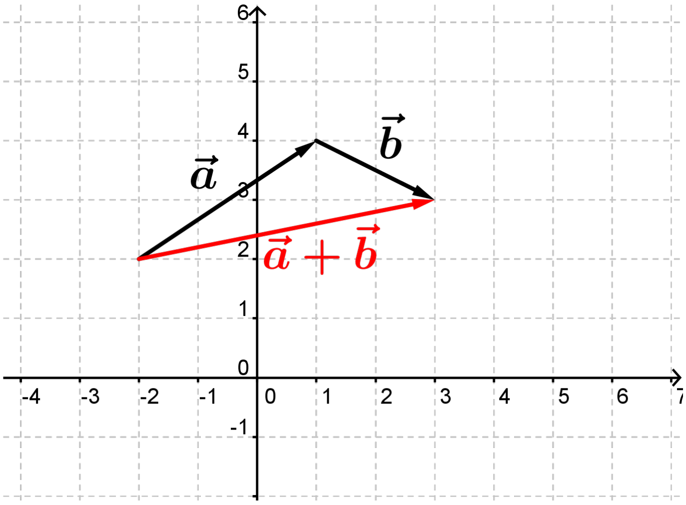
Ligesom med tal, kan man lægge vektorer sammen og trække dem fra hinanden. Man kan ikke gange vektorer med hinanden, men der findes noget der minder om, som vi kommer tilbage til senere. Man kan forlænge eller forkorte en vektor ved at gange den med et tal. Der findes ingen måder, hvorpå man kan dividere vektorer med hinanden!

Først vil vi definere, hvordan man adderer og subtraherer vektorer med hinanden, samt hvordan man ganger en vektor med et tal. Bagefter vil vi komme ind på, hvilke regneregler, der gælder for disse regneoperationer.

Man lægger to vektorer sammen ved at lægge dem sammen koordinatvist. Man lægger altså førstekoordinaterne sammen og bagefter lægger man andenkoordinaterne sammen

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Hvis man skal tegne en vektorsum, svarer det til først at tegne den ene vektor og i forlængelse af den tegne den den anden vektor. Når man forbinder den førstes startpunkt og den andens slutpunkt, får man vektorsummen.



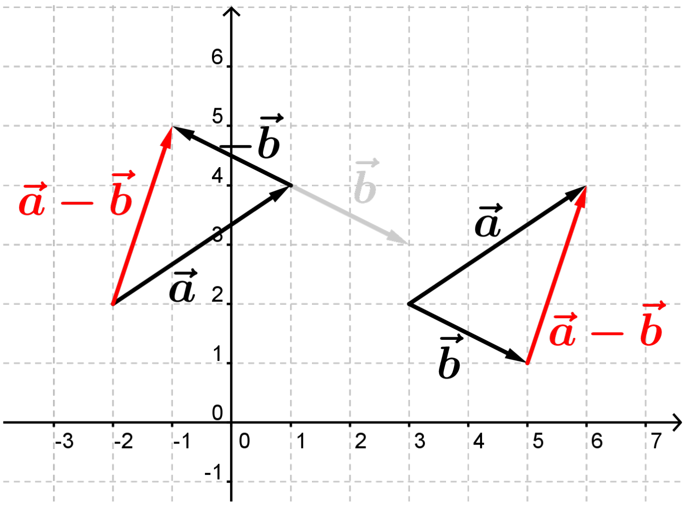
Når man trækker vektorer fra hinanden, gør man det ligeledes koordinatvist.

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$$

Der findes to måder at forklare det på grafisk.

Ved den første tegner man vektor a og i forlængelse af den tegner man vektor b bare i modsat retning. Når man forbinder start og slutpunkt, får man vektordifferensen.

Ved den anden tegner man vektor a og vektor b, hvor man starter i samme punkt. Den vektor der starter i spidsen af b og slutter i spidsen af a er vektordifferensen.



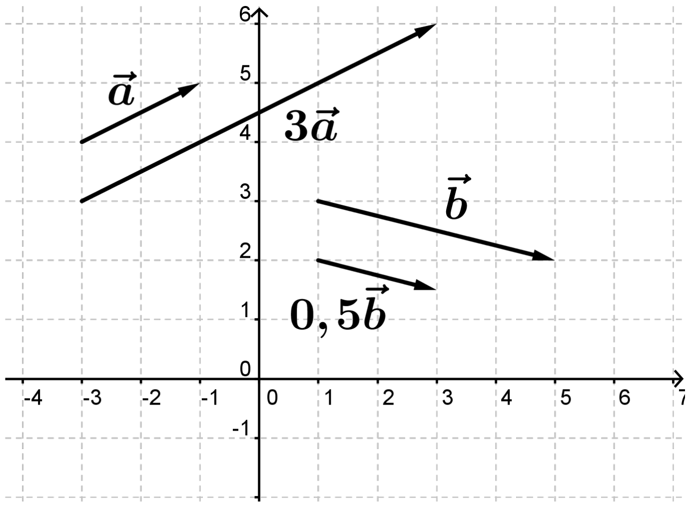
Når man ganger et tal med en vektor, ganger man tallet ind på hver koordinat.

$$t\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}t\cdot a_1\\t\cdot a_2\end{pmatrix}$$

F.eks. er

$$5\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 2\\5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$$

Grafisk svarer det til at forlænge/forkorte vektoren. Derfor kalder man ofte tallet, man ganger med for skaleringsfaktoren.



9.4 Regneregler

Der findes visse regneregler for vektorer

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
3. $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$
4. $(s + t)\bar{a} = s\bar{a} + t\bar{a}$
5. $s \cdot (t \cdot \bar{a}) = (s \cdot t)\bar{a}$

Den første regneregel siger, at det er ligegyldigt i hvilken rækkefølge man lægger to vektorer sammen.

Den anden siger, at hvis man skal lægge flere vektorer sammen, så er det ligegyldigt, hvor man starter.

Den tredje fortæller, at hvis man skal gange et tal med en vektorsum, så svarer det til at gange tallet med hver vektor og bagefter lægge dem sammen. Med andre ord, må man gange et tal ind i en parentes med en vektorsum.

Den fjerde regel siger, at man må gange en vektor ind i en parentes med sum af tal.

Og **den femte regel** siger, at det er ligegyldigt om man ganger to tal sammen og så ganger dem med en vektor, eller om man først ganger det ene tal med vektoren og dernæst ganger det andet på. Når man regner med vektorer til hverdag, tænker man måske ikke så meget over, at man bruger disse regneregler, men det dem der danner grundlaget for al regning med vektorer.

Alle fem regler ovenfor kan let eftervises ved at udregne venstresiden og højresiden med koordinater hver for sig.

F.eks. kunne vi vise den første regel:

$$V : \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$H : \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Da højre- og venstresiden giver det samme, er de ens.

9.5 Skalarprodukt

Som nævnt tidligere kan man ikke gange to vektorer med hinanden. I stedet kan man tage *skalarproduktet* af to vektorer. Man finder skalarproduktet ved at gange førstekoordinaterne med hinanden og lægge det til produktet af andenkoordinaterne.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Bemærk, at skalarproduktet af to vektorer giver et tal!

Lad os tage et eksempel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10$$

Man markerer skalarproduktet med en prik (ligesom man plejer at gøre med multiplikation), og under tiden kalder man også skalarproduktet for *prikproduktet*. Man kan således tale om "at prikke to vektorer med hinanden".

Regneregler for skalarprodukt

Ligesom der er regneregler for addition og subtraktion af vektorer, så gælder der regneregler for skalarproduktet.

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

2. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

3. $t(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = (t\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (t\overrightarrow{b})$

4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$

Den første regel siger, at det er ligegyldigt i hvilken rækkefølge man prikker to vektorer med hinanden.

Den anden siger, at hvis man vil prikke en vektor med en vektorsum, så svarer det til at prikke vektoren ind på hver vektor i summen. Med andre ord, kan man prikke ind i parentes.

Den tredje regel siger, at hvis du vil gange et tal med et skalarprodukt, så svarer det til at gange tallet på den ene vektor og derefter tage skalarproduktet eller at gange tallet på den anden vektor og derefter tage skalarproduktet.

Den fjerde regel er meget nyttig. Den siger, at hvis man prikker en vektor med sig selv, så får man længden af vektoren i anden.

Alle reglerne kan let bevises ved at regne venstre- og højresiden ud med koordinater hver for sig og se, at det giver det samme. F.eks kan regel 4 vises sådan her:

$$V : \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$H : |\overrightarrow{a}|^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = a_1^2 + a_2^2$$

9.6 Vinkel mellem vektorer

Hvis man tegner to (egentlige) vektorer ud fra samme begyndelsespunkt, vil der dannes en vinkel mellem dem. Man kan beregne denne vinkel vha. følgende formel

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} \quad , \qquad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$$

cosinus til vinklen mellem to vektorer er altså skalarproduktet af divideret med produktet af deres længder.

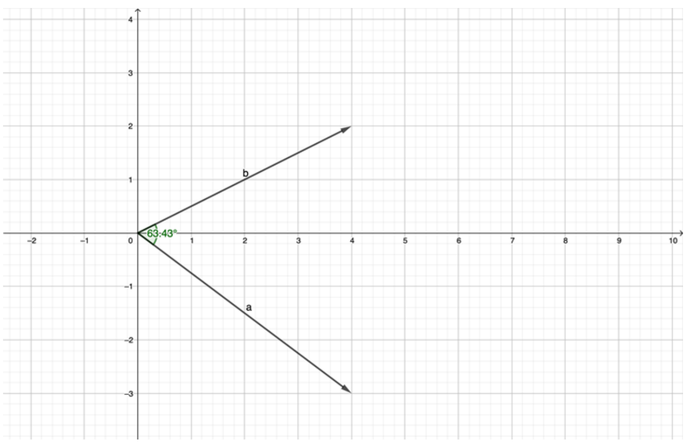
Hvis vi ønsker at finde vinklen mellem

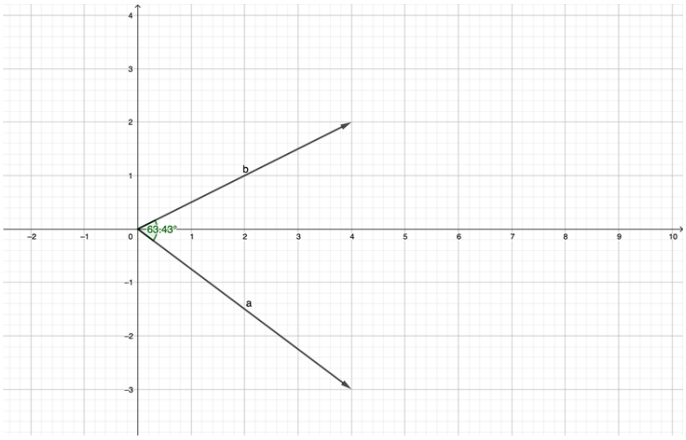
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kan vi beregne den således

$$\cos(v) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4 \cdot 4 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{16 - 6}{\sqrt{25}\sqrt{20}} \approx 0,455$$

$$v = \cos^{-1}(0,4545) \approx 62{,}96°$$





Skalarprodukt og vinkel

I formlen for vinklen mellem to vektorer indgår et skalarprodukt. Lad os prøve at isolere det.

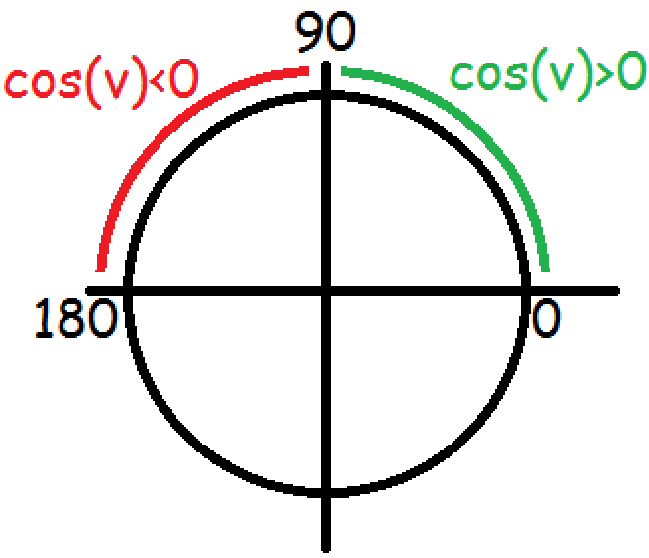
$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Hvis skalarproduktet (venstresiden) er positiv, så er højresiden også positiv. Da længderne af a og b altid er positive, betyder det at cos(v) er positiv. cos(v) er positiv, når v er under 90°.

Hvis skalarproduktet er negativt, så er højresiden også negativ. Men da længderne altid er positive, betyder det, at cos(v) er negativ. cos(v) er negativ når v ligger mellem 90 og 180°.

Hvis skalarproduktet er 0, så er højresiden 0. Det betyder at cos(v) er 0. Og det betyder at vinklen mellem vektorerne er 90°



Altså kan vi sige

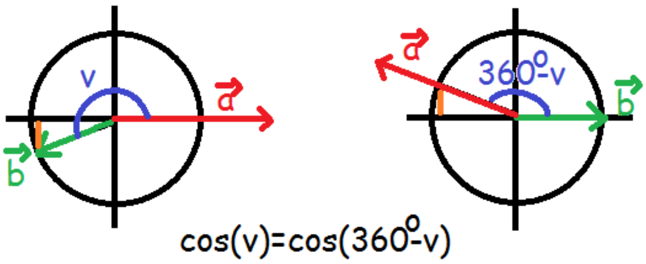
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ er spids}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ er stump}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ er ret}$$

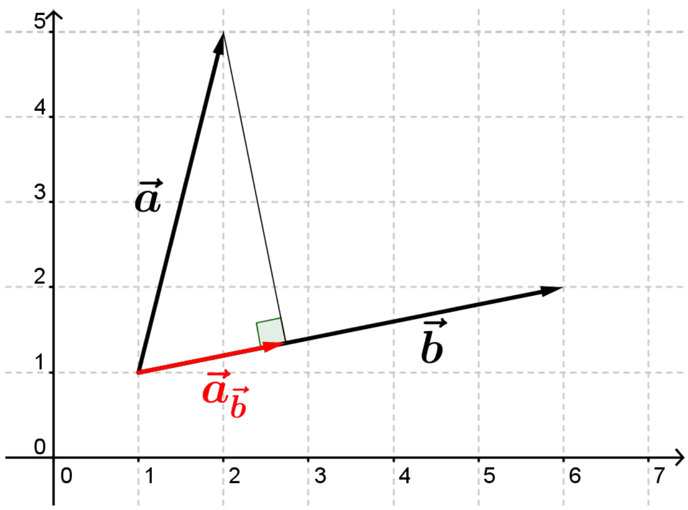
Hvad hvis vinklen mellem vektorerne er over 180º?

Hvis vinklen mellem vektor a og vektor b er over 180, så vil vinklen mellem vektor b og vektor a være mindre end 180. De to vinkler vil tilmed have samme cosinus-værdi, så det er ikke noget, man behøver tænke over i udregningerne. Når man taler om vinklen mellem to vektorer, vil man typisk tale om den under 180.



9.7 Projektion af vektor på vektor

Givet to egentlige vektorer kan man projicere den ene ned på den anden. Hvis man har tegnet de to vektorer fra samme begyndelsespunkt, svarer det til at gå vinkelret fra spidsen af den ene ned på den anden vektor. Vektoren fra begyndelsespunktet og hen til det punkt, man rammer, er projektionsvektoren.



Projektionsvektoren vil selvfølgelig være parallel med den vektor, man projicerer ned på.

Der findes en formel til at beregne projektionsvektorens koordinater

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Man skal holde tungen lige i munden med, hvad der er hvad. I tælleren har vi et skalarprodukt. Prikken er altså en prik. Skalarproduktet er et tal og nævneren, der består af en længde, er også et tal.

Dermed giver hele brøken et tal. Højresiden skal altså læses som et tal ganget med vektor b. Den sidste prik er altså et gangetegn og ikke en prik.

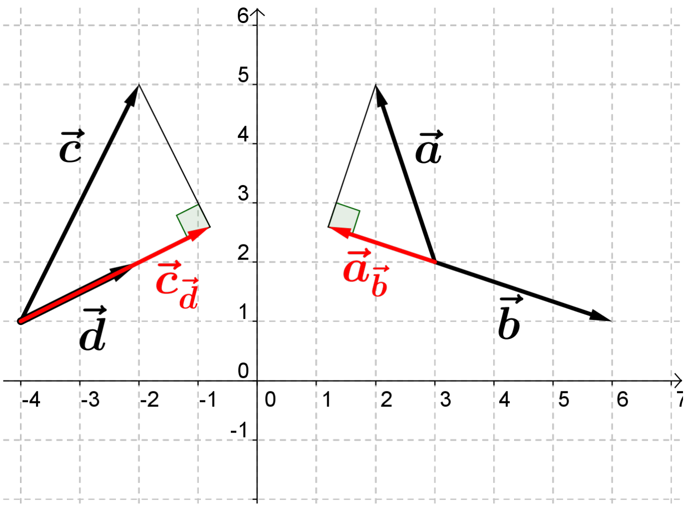
Lad os udregne koordinaterne for billedeksemplet ovenfor.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi sætter ind i formlen

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\vec{b}} &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 \cdot 5 + 4 \cdot 1}{\left(\sqrt{5^2 + 1^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{9}{26} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{26} \\ \frac{9}{26} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,73 \\ 0,35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

På tegningen ovenfor var projektionen en forkortelse af vektor b. Men sådan behøver det ikke at være. Projektionensvektoren kan godt være længere end den vektor, der projiceres på, og den kan endda være modsatrettet. Se f.eks. disse to eksempler



Længde af projektion

Projektionen af en vektor ned på en anden vektor har selvfølgelig også en længde. Formlen for længden af projektionen af en vektor er

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \ ,$$

som siger at længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$ er givet som den absolutte værdi (også kaldet den numeriske værdi) af skalarproduktet mellem de to vektorer delt med længden af vektor $\vec{b}$.

Lad os se på hvorfor formlen ser sådan ud. Hvis vi tager udgangspunkt i formlen for projektionen af en vektor på en vektor

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

så kan vi tage længden af dette udtryk og få

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \right| \ .$$

Da $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er et tal kan vi betegne det med k. Dermed har vi

$$\left| k \cdot \vec{b} \right|$$

stående i tælleren. Dette er dog det samme som

$$|k| \cdot \left| \vec{b} \right| \ .$$

Sætter vi dette ind i formlen ovenfor får vi

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{\left| \vec{a} \cdot \vec{b} \right|}{|\vec{b}|^2} \cdot \left| \vec{b} \right| = \frac{\left| \vec{a} \cdot \vec{b} \right|}{|\vec{b}|}$$

da

$$\left| \vec{b} \right|^2 = \left| \vec{b} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| .$$

Eksempel

Lad os regne længden af projektionen beregnet ovenfor. Vi har allerede regnet prikproduktet mellem de to vektorer til

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

så at tage den numeriske værdi ændrer ikke noget, da tallet er positivt. Længden af vektor $\vec{b}$ er desuden

$$\left| \vec{b} \right| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \ .$$

Sætter vi ind i formlen for længden af projektionen finder vi at længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{9}{\sqrt{26}} \approx 1{,}77 \ .$$

9.8 Determinant

Når man har to vektorer kan man finde deres determinant. Man får determinanten ved at hatte den første vektor og prikke med den anden.

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \hat{\overrightarrow{a}} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Der findes to måder at notere determinanten på. Enten ved at skrive *det* eller også ved at skrive de to vektorers koordinater op i et skema som vist nedenfor. Her betyder de lodrette streger altså hverken ”længde”eller ”numerisk værdi”men i stedet ”determinant”.

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Hvis man skriver determinanten op på den sidste måde, er den let at regne ud. Man skal nemlig bare gange over kryds.

Først ganger man øverste venstre med nederste højre, hvorfra man trækker nederste venstre ganget med øverste højre.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

F.eks. hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

så er

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 13$$

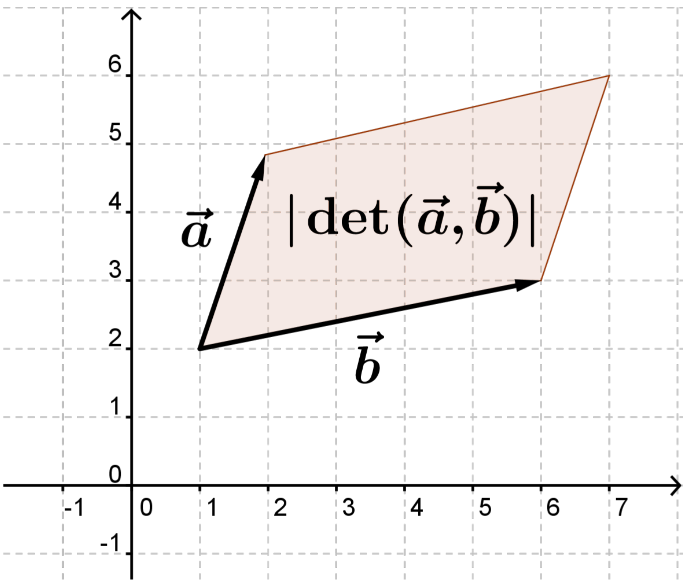
Areal og determinant

Determinanten af to vektorer er et tal. Den numeriske værdi af dette tal svarer til arealet af det parallelogram, som de to vektorer udspænder.

$$A_{parallelogram} = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

$$A_{parallellogram} = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$$

Her skal man igen være lidt opmærksom på de lodrette streger. De yderste betyder "numerisk værdi", mens de inderste betyder "determinant".



Hvis vi f.eks. ønsker at finde arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

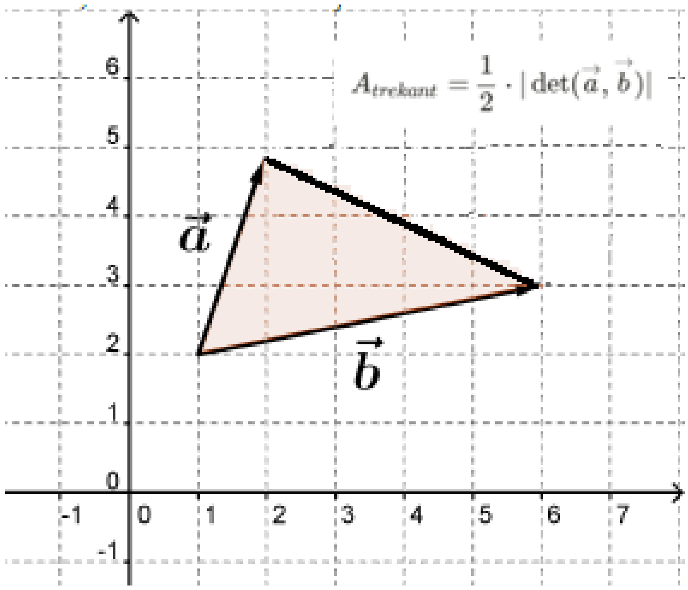
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så kan det beregnes således:

$$A_{parallelogram} = |\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})| = \left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} \right\| = |1 \cdot 2 - 4 \cdot 3| = |-10| = 10$$

Arealet, der udspændes mellem de to vektorer, er halvt så stort som arealet af parallelogrammet. Derfor kan arealet af trekanten med formlen:

$$A_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})|$$

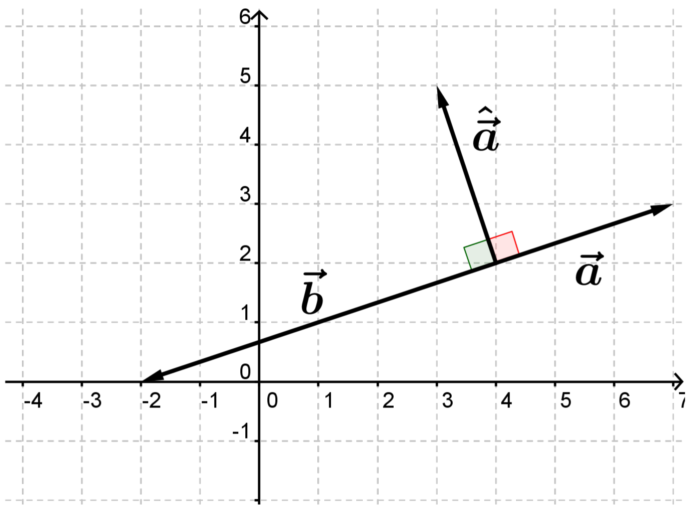


Parallelle vektorer og determinant

Hvis determinanten af to vektorer er 0, så er vektorerne parallelle. Skrevet matematisk er det:

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$$

Grunden til dette er, at determinanten er defineret som skalarproduktet mellem a hat og b. Hvis dette skalarprodukt giver 0, betyder det at de to vektorer står vinkelret på hinanden. Hvis b er vinkelret på a hat, så er b parallel med a.



Bemærk, at hvis a og b er parallelle, så kan de enten være ensrettede eller modsatrettede.

Lad os tage et eksempel. Vi skal afgøre om vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

er parallelle.

Vi ser at

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) = 23 \neq 0$$

Da determinanten er forskellig fra 0, er de to vektorer ikke parallelle.

9.9 Linjens ligning

Linjens ligning

På C-niveau lærte vi, at en ret linje har ligningen

$$y = ax + b$$

På B-niveau lærte vi, at en ret linje også kan have ligningen

$$y = y_0 + a(x - x_0)$$

hvor (x_0, y_0) er et kendt punkt på linjen.

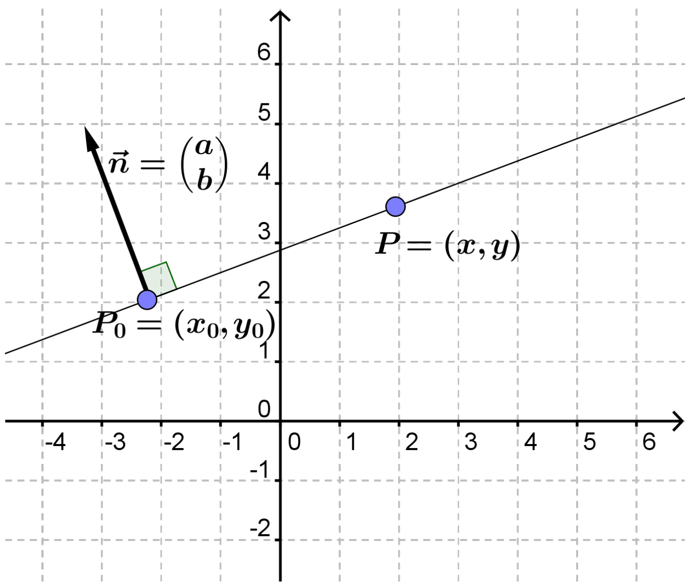
På A-niveau lærer vi en ny måde at skrive ligningen for en ret linje på. Det er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

hvor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til linjen. Dvs. den står vinkelret på linjen.



Så hvis vi kender en normalvektor til linjen og et punkt på linjen, så kan vi altså bestemme en ligning for linjen.

Hvis vi f.eks. ved, at

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

står vinkelret på vores linje, og at

$$P_0 = (1, 4)$$

ligger på linjen, så er linjens ligning

$$3(x - 1) + 2(y - 4) = 0$$

$$3x + 2y - 11 = 0$$

Til sidst gangede vi ind i parentesen. Det kan vi også gøre generelt.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$

$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

I det sidste skridt har vi samlet alle konstanterne i en samlet konstant som vi kalder c. Det nederste er en anden måde at skrive ligningen for den rette linje. Ulempen er, at man ikke kan aflæse et punkt på linjen direkte fra ligningen. Imidlertid kan man stadig aflæse en normalvektor.

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Hvorfor ser ligningen sådan ud?

Vi ved at normalvektoren står vinkelret på linjen. Hvis et punkt P ligger på linjen, så må vektoren fra P_0 til P altså være ortogonal (dvs. vinkelret) med normalvektoren.

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n}$$

Vi ved at skalarproduktet mellem to ortogonale vektorer er 0, så derfor kan vi slutte, at hvis P ligger på linjen så er

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Vi indsætter koordinaterne og udregner skalarproduktet

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

og det er simpelthen derfor, at ligningen for linjen ser sådan ud.

NB: I videoen skrives linjens ligning op soma$(y - y_0) + b(x - x_0) = 0$. *Det passer ikke ikke med en normalvektor der hedder* $\overrightarrow{n} = (a, b)$ *som i artiklen,men derimod* $\overrightarrow{n} = (b, a)$.

9.10 Linjens parameterfremstilling

I stedet for at beskrive en linje ved hjælp af en ligning, kan man gøre det ved hjælp af en *parameterfremstilling*. I en parameterfremtilling indfører man en parameter, der typisk kaldes t, og så ser man, hvordan et punkt (x, y) bevæger sig som funktion af t.

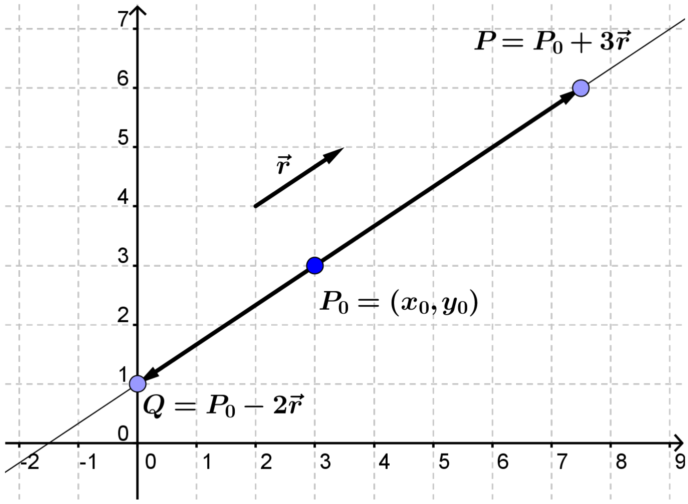
Linjens parameterfremstilling ser sådan her ud: Et punkt (x, y) ligger på linjen, når

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Her er (x_0,y_0) et punkt på linjen, og vektor r er en retningsvektor for linjen.

Parameterfremstillingen fungerer på den måde, at man starter i sit faste punkt, og så går man en eller anden forlængelse (eller forkortelse) af retningsvektoren ud. På den måde, kan man ramme alle punkter på linjen. Det er størrelsen af t, der afgør, hvor meget man forlænger/forkorter retningsvektoren.

Nedenfor er tegnet et eksempel, hvor man sætter t=3 og t=-2.



I stedet for at opskrive en parameterfremstilling som en ligning med vektorer, kan man opskrive forskrifter for hvert koordinat som funktion af t.

$$x(t) = x_0 + t \cdot r_1$$

$$y(t) = y_0 + t \cdot r_2$$

Kender punkt og retning

Hvis man kender et punkt på linjen og en retningsvektor, så kan man opskrive parameterfremstilling ved simpelthen at sætte ind i formlen ovenfor.

Hvis

$$P_0 = (1, 4) \text{ og } \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

så er parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eller hvis man skriver det som koordinatfunktioner

$$x(t) = 1 + 2t$$

$$y(t) = 4 + 3t$$

Kender to punkter

Hvis man kender to punkter på linjen, kan man opskrive parameterfremstillingen ved først at finde vektoren mellem punkterne. Denne må have samme retning som linjen. Dernæst kan man bruge et af punkterne som sit faste punkt, og vupti, så har man en parameterfremstilling.

Hvis vi kender

$$A = (1, 2) \text{ og } B = (4, 3)$$

så kan vi finde

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og så skal vi bare vælge os et fast punkt. Det kunne f.eks. være A (men B havde virket lige så godt!).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kender linjens ligning

Hvis man kender en ligning for linjen, kan man også omskrive til en parameterfremstilling.

I linjens ligning kan man aflæse en normalvektor. Denne står vinkelret på linjen. Hvis man hatter normalvektoren får man en vektor, der er parallel med linjen. Den kan man bruge som retningsvektor.

Man kan finde et punkt på linjen ved at sætte en bestemt værdi ind på den ene variables plads og så isolere den anden.

Vores linje har ligningen

$$2x + 5y + 1 = 0$$

Vi aflæser en normalvektor til linjen til at være:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Så må retningsvektoren være:

$$\vec{r} = \hat{\vec{n}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nu skal vi finde et punkt på linjen. Vi sætter x=0 og ser hvilken y-værdi der passer til (vi kunne have sat x lig med hvad som helst, men det er tit lettere at regne på udtryk, hvor 0 indgår)

$$2 \cdot 0 + 5y + 1 = 0$$

$$5y = -1$$

$$y = \frac{-1}{5} = -0,2$$

Så vores punkt er (0, -0,2)

Parameterfremstillingen er altså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

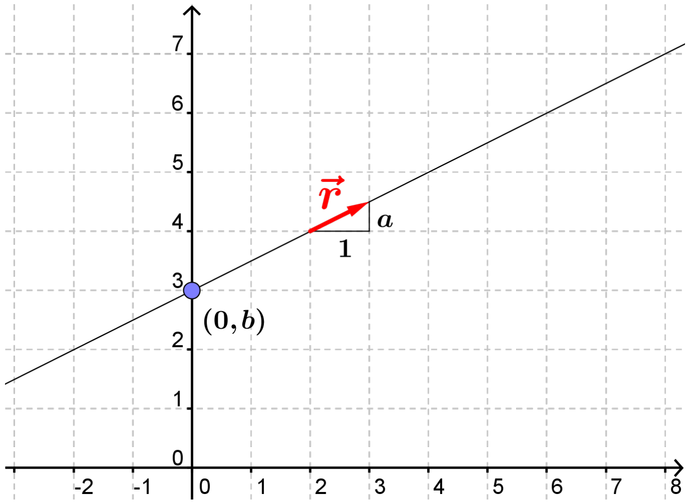
eller skrevet som koordinatfunktioner

$$x(t) = -5t$$

$$y(t) = -0,2 + 2t$$

Hvis man i stedet havde kendt ligningen på formen y=ax+b, havde det været lettere. Der kunne vi som fast punkt bruge (0, b) og som retningsvektor bruge

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$



9.11 Dist-formlen

Ligesom på B-niveau, hvor vi fandt afstande mellem punkter og linjer findes der en tilsvarende måde, når vi har givet linjens ligning på formen ax+by+c=0. Den er således:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

hvor P har koordinaterne (x_1, y_1) og linjen har ligningen ax+by+c=0.

Hvis vi f.eks. vil finde den korteste afstand mellem

$$P = (1, 2) \text{ og } l : 3x + 4y - 7 = 0$$

så indsætter vi i dist-formlen

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Denne formel er uundværlig, når vi skal finde ud af om cirkler og linjer skærer hinanden.

9.12 Cirkler og linjers skæringer

Cirkler

En cirkel er en punktmængde, hvorom der gælder, at alle punkter på cirklen har samme afstand til et punkt kaldet cirklens *centrum*. Denne afstand kaldes *radius*. Skrevet med mængdesymboler ser det således ud

$$\mathcal{C}(C, r) = \{P = (x, y) \mid |PC| = r\}$$

Hvis man skulle udtale det, ville det lyde "Cirklen med centrum C og radius r er mængden af punkter P, hvorom der gælder, at afstanden mellem P og C er r". Bemærk, at centrum ikke er en del af cirklen. Cirklen er udelukkende periferien.

Hvis centrumskoordinaterne er $C(a, b)$ kan vi omregne betingelsen for at $P(x, y)$ ligger på cirklen.

$$\begin{aligned}
r &= |PC| \\
r &= |\overrightarrow{PC}| \\
r &= |\overrightarrow{CP}| \\
r &= \left| \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right| \\
r &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\
r^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2.
\end{aligned}$$

En cirkel er altså alle punkter (x, y) der opfylder ligningen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Skæring mellem cirkel og linje givet ved ligning

Hvis vi har oplyst cirklens centrum og radius samt linjens ligning, kan vi finde ud af, om der er nogen skæringer mellem cirklen og ligningen. Vi bruger simpelthen dist-formlen til at finde den korteste afstand mellem linjen og cirklens centrum. Hvis afstanden er større end radius, er der ingen skæringer, hvis afstanden er lig med radius, er der et røringspunkt (linjen er i så fald tangent til cirklen), hvis afstanden er mindre end radius, er der to skæringspunkter.

Hvis vi blev spurgt, hvor mange skæringer der var mellem

$$\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 \text{ og } l : 4x - 5y + 6 = 0$$

så ville vi starte med at aflæse radius til $r = 4$ og centrumkoordinaterne til $C = (-2, 3)$. Man skal holde tungen lige i munden med fortegnene til koordinaterne! Nu sætter vi ind i dist-formlen

$$\text{dist}(C, l) = \frac{|4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{16+25}} = \frac{17}{\sqrt{41}} \approx 2,65 < 4$$

Da afstanden er mindre end radius, er der to skæringer mellem cirklen og linjen.

Skæringer mellem cirkel og linje givet ved parameterfremstilling

Hvis en linje er givet ved parameterfremstilling, kan vi ikke bruge dist-formlen til at bestemme antallet af skæringspunkter. I stedet kan vi indsætte parameterfremstillingen i cirklens ligning og dermed finde ud af for hvilke t (hvis nogen overhovedet) der er skæringer.

Det er lettest at gennemgå ved hjælp af et eksempel.

Vores cirkel er givet ved

$$\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

og vores linje er givet ved

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi starter med at skrive parameterfremstillingen om til koordinatfunktioner

$$\begin{aligned}
x(t) &= -5 + 3t \\
y(t) &= 1 + t
\end{aligned}$$

Disse sætter vi så ind på hhv. x's og y's plads i cirklens ligning

$$\begin{aligned}
(\underbrace{-5+3t}_{x}+2)^2+(\underbrace{1+t}_{y}-3)^2 &= 9\\
(3t-3)^2+(t-2)^2 &= 9\\
(9t^2+9-18t)+(t^2+4-4t) &= 9\\
10t^2-22t+13 &= 9\\
10t^2-22t+4 &= 0.
\end{aligned}$$

Nu står vi med en andensgradsligning, hvor t er den ubekendte. Vi starter med at finde diskriminanten. Hvis den er positiv er der to skæringer, hvis den er 0 er der et røringspunkt og hvis den er negativ skærer cirklen og linjen ikke hinanden.

$$d=(-22)^2-4\cdot 10\cdot 4=324$$

Der er altså to skæringspunkter.

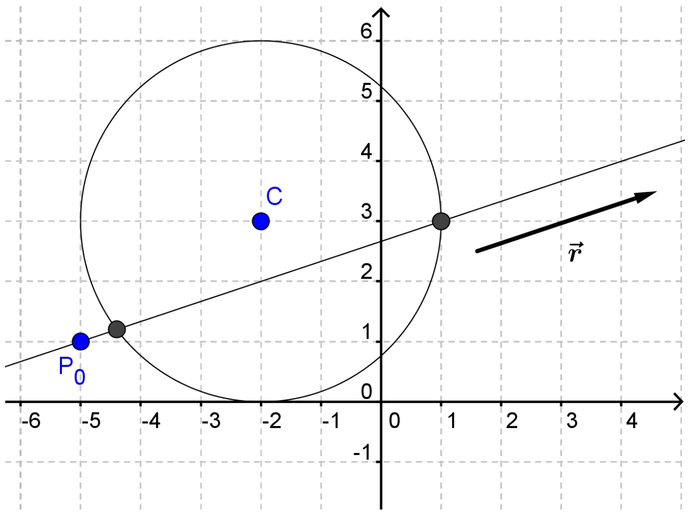
Nu kan vi finde ud af for hvilke t-værdier skæringerne finder sted.

$$t=\frac{22\pm\sqrt{324}}{2\cdot 10}=\frac{22\pm 18}{20}=\begin{cases}\frac{40}{20}=2\\ \frac{4}{20}=0{,}2\end{cases}$$

Nu indsætter vi disse t-værdier i linjens parameterfremstilling for at finde skæringspunkternes koordinater.

$$\begin{aligned}
t=2: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+2\cdot 3\\1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\
t=0{,}2: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}+0{,}2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+0{,}2\cdot 3\\1+0{,}2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}4\\1{,}2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cirkel og ligning skærer altså hinanden i $(1,3)$ og $(-4{,}4,1{,}2)$.



9.13 Tangentligning til en cirkel

Hvis man kender en cirkel, kan det være nyttigt at finde en ligning for tangenten i et givet punkt, P_0, på cirklen.

Tangenten er en ret linje, og man kan (som vi gennemgik i et tidligere afsnit) finde dens ligning ved at kende et punkt på linjen og en normalvektor.

Vi kender jo allerede et punkt på linjen, nemlig P_0. Vi mangler altså bare en normalvektor. Heldigvis ved vi, at vektoren fra centrum til P_0 står vinkelret på tangenten. Derfor kan vi bruge den som normalvektor.

Eksempel

Vores cirkel har ligningen

$$\mathcal{C}: \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

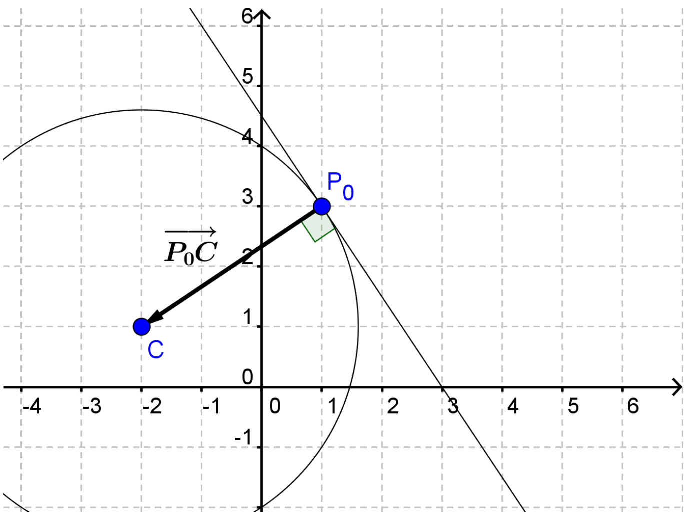
Punktet $P_0 = (1, 3)$ ligger på cirklen. Find en ligning for tangenten til cirklen i P_0. Vi kan aflæse centrumkoordinaterne til $(-2, 1)$ (Vær opmærksom på fortegnene!). Nu finder vi vektoren mellem P_0 og C

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{P_0C} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Så sætter vi simpelthen bare ind i linjens ligning

$$\begin{aligned}
0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) \Leftrightarrow \\
0 &= -3(x-1) - 2(y-3) \Leftrightarrow \\
0 &= (-3x+3) + (-2y+6) \Leftrightarrow \\
0 &= -3x - 2y + 9
\end{aligned}$$

og nu har vi en ligning for tangenten!



Gratis hjælp
til matematik
lokalt og digitalt

Materialesamling til **Matematik C** fra Webmatematik.dk

www.matematikcenter.dk
www.webmatematik.dk
www.webmatlive.dk

Version: December, 2024

Materialesamling til C-niveau

Matematikcenter

Version: December, 2024

Indhold

1 Tal og Regnearter

Lær om: former for tal, regnearters hierarki, negative tal og parenteser, kvadratsætningerne, forlænge og forkorte brøker, addere og subtrahere brøker, multiplicere og dividere brøker, potenser og 10er-potenser, enheder og præfikser, kvadratrødder og andre rødder, regnearternes egenskaber samt primtal.

1.1 Tal

Naturlige tal og heltal

De naturlige tal er de første tal, mennesket begyndte at bruge. Det er dem, vi kan tælle på vores fingre 1, 2, 3, 4, . . . , og de bliver ved i en uendelighed. Man betegner de naturlige tal med bogstavet

$$\mathbb{N}$$

Vi kan skrive de naturlige tal som følgende mængde.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Hvis man lægger alle de negative hele tal og 0 til de naturlige tal får man de hele tal, der fortsætter uendeligt i begge retninger. Vi betegner de hele tal med bogstavet

$$\mathbb{Z}$$

(efter det tyske ord for tal: "Zahl").

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Blandt dataloger har man tradition for at have tallet 0 med i de naturlige tal. Hvis man vælger denne definition på de naturlige tal, betegner man dem ofte

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Lige og ulige tal

Vi kan opdele de hele tal i lige tal (f.eks. 2, 16 og -42) og ulige tal (f.eks. 5, 19 og -31) Et lige tal kan skrives på formen

$$2 \cdot n$$

hvor n er et helt tal. Vi kan f.eks. sætte n=3 og få

$$2 \cdot n = 2 \cdot 3 = 6$$

hvilket er et lige tal.

Et ulige tal er et tal, der kan skrives på formen

$$2 \cdot n - 1$$

hvor n er et helt tal. For eksempel kan vi sætte n=4 og få

$$2 \cdot n - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$

som er et ulige tal.

Rationale og irrationale tal

De rationale tal er alle heltal samt de tal, der kan skrives som brøker med heltal i tæller og nævner.

$$\frac{a}{b}\,, \quad b \neq 0$$

De rationale tal betegnes med

$$\mathbb{Q}$$

og de vil fylde pladsen ud mellem heltallene på tallinjen. Imidlertid er der tal på tallinjen, der ikke kan skrives som brøker med heltal i tæller og nævner. Dem kalder vi irrationale. Dette er f.eks.

$$\pi,\ \sqrt{2},\ e$$

Hvis vi samler de rationale og irrationale tal, får vi de reelle tal. Ved de reelle tal har vi fyldt alle hullerne i tallinjen, så de reelle tal er med andre ord alle de tal, du kan komme i tanke om. Vi betegner de reelle tal med

$$\mathbb{R}$$

1.2 Regnearternes hierarki

Når man skal regne på et udtryk, hvor der er flere forskellige regnearter involveret, er det ikke lige meget, i hvilken rækkefølge man udfører udregningerne. Har man f.eks. regnestykket

$$3 + 2 \cdot 7$$

så får man forskellige resultater, alt efter om man multiplicerer (ganger) først

$$3 + 2 \cdot 7 = 3 + 14 = 17$$

eller adderer (plusser) først

$$3 + 2 \cdot 7 = 5 \cdot 7 = 35$$

Som vi ser, får vi forskellige resultater, hvor det første er det rigtige. Det ville være upraktisk i den virkelige verden, hvis det samme regnestykke kunne have flere forskellige resultater. Forestil dig at en ingeniør regnede på den ene måde, og en anden ingeniør på en anden. Så ville det let føre til, at bygninger styrtede sammen og mennesker kom til skade. Derfor er man blevet enige om at ordne regnearterne i et hierarki, så alle ved, i hvilken rækkefølge de forskellige regneoperationer skal udføres. På den måde sørger man for at alle regnestykker kun har ét rigtigt resultat (hvis ellers man regner rigtigt).

Hierarkiet er som følger

1. Rødder og potenser
2. Multiplikation (gange) og division
3. Addition (plus) og subtraktion (minus)

Hvis man vil afvige fra det almindelige hierarki, benytter man parenteser. Parenteserne skal *altid*udregnes først.

Se fx forskellen mellem

$$3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$$

og

$$(3 \cdot 4)^2 = (12)^2 = 144$$

1.3 Negative tal

De negative tal er de tal, der er mindre end nul.

På en tallinje er de negative tal placeret til venstre for 0. Der er visse ting, vi må huske på, når vi regner med negative tal. Når vi lægger noget til (adderer, +), bevæger vi os til højre på tallinjen, og når vi trækker noget fra (subtraherer, -), bevæger vi os til venstre.

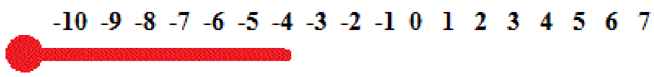
Det er præcis ligesom et termometer. Hvis det er frostvejr og temperaturen falder (det bliver endnu koldere), så øges antallet af negative grader eftersom vi kommer længere ned på skalaen, og hvis temperaturen stiger (det bliver varmere) så øges graderne, og vi får færre negative grader.

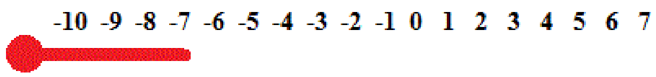
Hvis det f.eks. fryser 4 grader, og temperaturen falder med yderligere 3 grader, så får vi

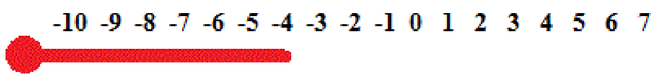
$$-4°C - 3°C = -7°C$$

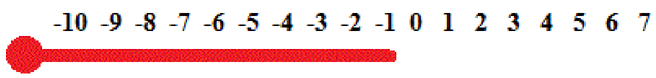
og hvis temperaturen i stedet var steget 3 grader, ville vi have fået

$$-4°C + 3°C = -1°C$$









Addition og subtraktion

At addere(lægge til, +) to tal er det samme som at se, hvor meget de er tilsammen. Et negativt tal er dog under nul, så det svarer til gæld. Hvis du f.eks. har 10 kr. i din pung, men du skylder 7 kr. væk, så har du kun 3 kr. til dig selv. Matematisk ville vi skrive det således:

$$10 + (-7) = 10 - 7 = 3$$

At lægge -7 til er altså det samme som at trække 7 fra.

At subtrahere(trække fra, -) et tal fra et andet er at se hvor stor forskel/differens, der er på de to tal. Hvis man passerer nul bliver afstanden selvfølgelig større. Hvis et fly befinder sig i 150 meters højde, og flyver over en sø, der er 50 meter dyb, så er afstanden fra flyet til søbunden 200 meter. Matematisk ser det således ud.

$$150 - (-50) = 150 + 50 = 200$$

At trække -50 fra er altså det samme som at lægge 50 til.

Når vi ophæver parentesen skal vi altså skifte fortegn, hvis der står et minus foran, og lade fortegnene være, hvis der står et plus foran.

Generelt kan vi skrive det således:

$$\begin{aligned} a + (-b) &= a - b \\ a - (-b) &= a + b \\ a - (b + c) &= a - b - c \end{aligned}$$

Multiplikation og division

Når vi ganger og dividerer, må vi også tage hensyn til fortegn.

Hvis du har lånt 5 kr. af hver af dine 3 venner, hvor mange penge skylder du så væk? 15 kr.

$$(-5) \cdot 3 = -15$$

Hvis man ganger et positivt og et negativt tal, bliver resultatet altså negativt.

$$(-a) \cdot b = -ab$$

Men hvad så, hvis vi skal gange to negative tal?

Lad os starte med et eksempel. Forestil dig, du er på en effektiv slankekur, hvor du taber dig 4 kg om måneden (-4 kg/md). Efter noget tid tænker du tilbage og spørger, hvor meget mere du vejede for 3 måneder siden (-3md)? Svaret er selvfølgelig, at du vejede 12 kg mere 3 måneder forinden. Dette kan vi skrive matematisk på denne måde:

$$(-4)\frac{\text{kg}}{\text{md}} \cdot (-3)\text{md} = 12\text{kg}$$

Når vi ganger to negative tal, får vi altså noget positivt ud af det. Mere generelt kan vi skrive det således:

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

Huskeregel

Hvis man ganger mange tal sammen er en god huskeregel, at hvis der er et lige (0, 2, 4, 6,...) antal negative tal, så bliver svaret positivt, og hvis der er et ulige (1, 3, 5, 7, ...) antal negative tal, så bliver svaret negativt.

Generelt kan man sige, at **minus gange minus giver plus**.

Eksempel: Hvis man har et regnestykke med fem negative tal, fx $-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$, kan man dele regnestykket op: Først ganges -1 og -2 sammen. Da det er "minus gange minus", giver det et positivt tal, nemlig 2. Derefter ganges -3 og -4 sammen, og igen giver de to negative tal ganget sammen et positivt tal, nemlig 12. Så kan vi gange de to positive tal sammen: $2 \cdot 12 = 24$. 24 skal derefter ganges med det negative tal, -5, og svaret bliver $24 \cdot (-5) = -120$. Fortegnet ender derfor med at være negativt, fordi man ender med at gange et negativt og et positivt tal sammen.

Nu ser vi lidt nærmere på division. En måde at tjekke efter, om man har divideret rigtigt, er, at gange nævneren med kvotienten og se om man får tælleren. Eksempelvis

$$\frac{12}{3} = 4 \quad \text{fordi} \quad 3 \cdot 4 = 12$$

Hvad vil der så ske, hvis vi dividerer 2 negative tal?

$$\frac{-12}{-3} = ?$$

Vi skal gange (-3) med 4 for at få (-12), så svaret er 4

$$\frac{-12}{-3} = 4 \quad \text{fordi} \quad (-3) \cdot 4 = (-12)$$

Generelt kan vi skrive

$$\frac{-a}{-b} = c$$

Hvordan ser divisionen ud, hvis vi har et positivt og et negativt tal?

$$\frac{-12}{3} = ?$$

Vi skal gange 3 med (-4) for at få (-12). Derfor er svaret (-4)

$$\frac{-12}{3} = -4 \quad \text{fordi} \quad 3 \cdot (-4) = (-12)$$

Og det samme resultat ville vi få, hvis nævneren var negativ.

$$\frac{12}{-3} = -4 \quad \text{fordi} \quad (-3) \cdot (-4) = 12$$

Generelt kan vi skrive

$$\frac{-a}{b} = -c \text{ og } \frac{a}{-b} = -c$$

Oversigt

$$a + (-b) = a - b$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$(-a) \cdot b = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

$$\frac{-a}{-b} = c$$

$$\frac{-a}{b} = -c$$

$$\frac{a}{-b} = -c$$

1.4 Parenteser

Når man vil afvige fra det almindelige hierarki hos regnearterne, bruger man parenteser.

Normal skal man gange, før man lægger til og trækker fra.

$$5 + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$$

men hvis man ville have plusset først, skulle man have sat parenteser om for at vise, at vi her afviger fra det almindelige hierarki

$$(5 + 3) \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$$

Vi kan se, at man får forskellige resultater, så parenteser er vigtige for at få den rette mening frem. Vi husker på, at man skal tage potenser, før man ganger, så et andet eksempel på at bruge parenteser er, hvis man vil se bort fra denne regel og altså gange, før man tager potenser.

$$4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$(4 \cdot 3)^2 = 12^2 = 144$$

Dette er især vigtigt, når man har med negative tal at gøre

$$-3^2 = -1 \cdot 3^2 = -1 \cdot 3 \cdot 3 = -9$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Man får altså forskelligt fortegn, alt efter om man har parentesen eller ej. I det første tilfælde sætter man tallet i anden potens, hvorefter man sætter minus foran. I det andet tilfælde sætter man det negative tal i anden potens.

Gange ind i parentes

Når man skal gange ind i en parentes, bruger man den distributive lov, der siger, at

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Et eksempel kunne være

$$5 \cdot (2 + x) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot x = 10 + 5x$$

Når man ganger ind i parentesen, skal man gange tallet på hvert *led*, altså på hver ting, der er adskilt af et plus eller minus.

$$2 \cdot (5 + 4 - 3 \cdot x + 8 \cdot y)$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3 \cdot x) + 2 \cdot 8 \cdot y$$

$$= 10 + 8 - 6x + 16y$$

Bemærk, at når vi har et produkt (noget, der er ganget sammen), så skal man kun gange på én gang og ikke på hver faktor i produktet. Et eksempel kunne være nedenstående,

$$2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$$

Her ganges 3 med 5, og så ganges 2 på produktet af 3 og 5. Her ganger vi altså ikke 2 på både 3 og 5, men på produktet af de to.

Gange to parenteser med hinanden

Når man ganger to parenteser med hinanden, så skal man gange hvert tal fra den første parentes ind i den anden.

$$(a + b)(x + y) = \underbrace{a \cdot x + a \cdot y}_{a\ ganget\ ind} + \underbrace{b \cdot x + b \cdot y}_{b\ ganget\ ind} = ax + ay + bx + by$$

Et eksempel kunne være

$$(3 + x)(5 + y) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot y + x \cdot 5 + x \cdot y = 15 + 3y + 5x + xy$$

Eller hvis vi har negative tal med:

$$(5 - x)(3 + y) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot y + (-x) \cdot 3 + (-x) \cdot y = 15 + 5y - 3x - xy$$

1.5 Kvadratsætningerne

Kvadratsætningerne bruger man ofte, når man skal reducere udtryk. De omhandler, hvad der sker, når man ganger to parenteser med hinanden, der indeholder de samme tal.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Med ord kan man sammenfatte den første kvadratsætning til "kvadratet af summen af to størrelser er lig med kvadratet af den første størrelse plus kvadratet af den anden størrelse **plus** produktet af de to størrelser ganget med to".

Den anden kvadratsætning kan sammenfattes til

"kvadratet af differensen mellem to størrelser er lig med kvadratet af den første størrelse plus kvadratet af den anden størrelse **minus** produktet af de to størrelser ganget med to"

.

Den tredje kvadratsætning kan med ord siges "produktet af to tals sum og de samme to tals differens er kvadratet på første led minus kvadratet på andet led".

Eksempler på de tre kvadratsætninger kunne være

$$(3+x)^2=3^2+x^2+2\cdot 3\cdot x=9+x^2+6x$$

$$(x-5)^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5=x^2+25-10x$$

$$(x+4)(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$$

Men hvordan kan det egentlig være, at de tre kvadratsætninger ser ud som de gør? De er ganske enkelt fremkommet ved at gange to parenteser med hinanden Lad os se på den første regel:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b$$

$$=a^2+ab+ba+b^2=a^2+b^2+2ab$$

Og den anden:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a\cdot a+a\cdot(-b)+(-b)\cdot a+(-b)\cdot(-b)$$

$$=a^2-ab-ba+b^2=a^2+b^2-2ab$$

Her er det orange plus fremkommet ved at minus gange minus giver plus (se afsnittet om negative tal).

Den tredje kvadratsætning er også forekommet ved at gange to parenteser med hinanden

$$(a+b)(a-b)=a\cdot a+a\cdot(-b)+b\cdot a+b\cdot(-b)$$

$$=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

Kvadratsætninger og ligningsløsning

Man kan nogle gange løse ligninger ved at bruge kvadratsætningerne.

Hvis man f.eks. har ligningen

$$x^2+9=6x$$

Kan man starte med at rykke 6x hen på den anden side af lighedstegnet

$$x^2 + 9 - 6x = 0$$

så kan man regne på venstresiden

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$$

og så kan vi bruge den anden kvadratsætning "baglæns"til at samle udtrykket

$$x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x = (x - 3)^2$$

Nu er vores ligning

$$(x - 3)^2 = 0$$

og for at venstresiden giver 0, skal x tydeligvis være 3. Altså er løsningen x=3.

1.6 Brøker

En brøk er en division, som man ikke har regnet helt ud. F.eks.

$$\frac{2}{7}$$

Tallet under brøkstregen kaldes nævneren, og tallet over brøkstregen kaldes tælleren. Regner man brøken ud, kaldes resultatet for kvotienten.

$$\frac{\text{Tæller}}{\text{Nævner}} = \text{Kvotient}$$

Det er vigtigt, at nævneren aldrig giver 0. (Hvordan skulle det give mening at dele noget i 0 stykker?)

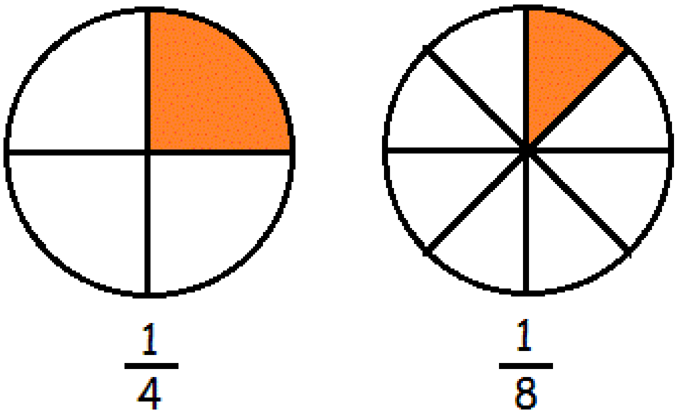
Der er flere årsager til at skrive tal som brøker. Nogle gange er det fordi tallet vil have uendeligt mange decimaler som f.eks.

$$\frac{1}{3} = 0,333333333\ldots$$

Her kan det være praktisk at beholde brøken i stedet for at regne ud. Andre gange er det fordi, man gerne vil beskrive et forhold mellem to størrelser.

Brøkers størrelse

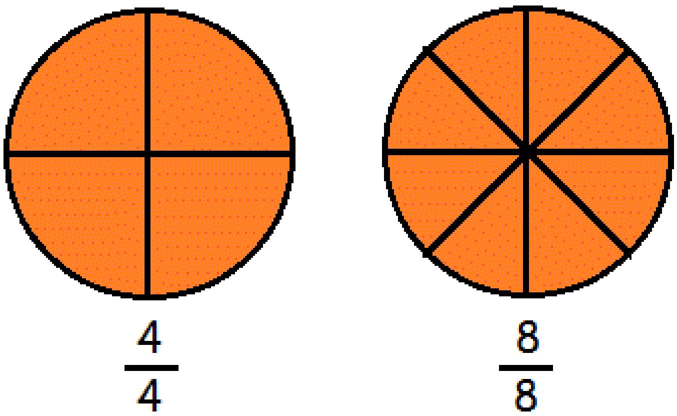
Hvis vi har en pizza er det klart, at jo flere stykker vi skærer den i, des mindre bliver stykkerne. Hvis pizzaen er skåret i 4 stykker repræsenterer hvert stykke 1/4, og hvis den er skåret i 8 stykker, repræsenterer hvert stykke 1/8



Det er tydeligt, at 1/8 er mindre end 1/4. Det vil altid være sådan, at jo større nævneren bliver, des mindre bliver kvotienten.

$$\text{Hvis} \quad m > n \quad \text{så er} \quad \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

For at blive i pizzaeksemplet, kunne man spørge sig selv, hvor stor en del af pizzaen vi har, hvis vi har alle 8 stykker? Dette er selvfølgelig en hel pizza.



En brøk der har samme tæller og nævner, har altid kvotient 1

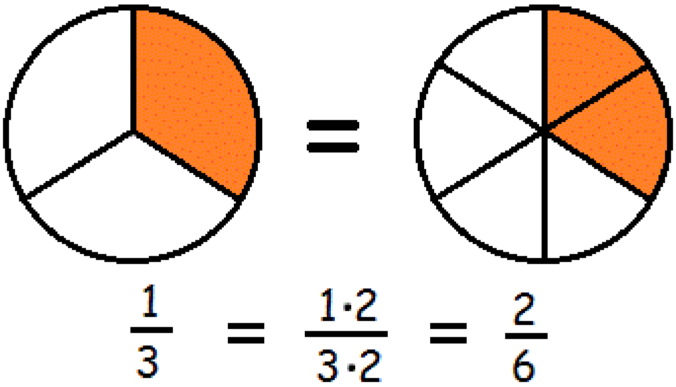
$$\frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{n}{n} = 1, \; n \neq 0$$

1.7 Forlænge og forkorte brøker

Når man regner med brøker, kan det ofte være praktisk at omforme dem. Hvis man vil have et større tal i tæller eller nævner, kan man forlænge brøken. Det gør man ved at gange det samme tal på i tæller og nævner.



Brøkens værdi er altså uændret, når vi forlænger den. Et eksempel fra virkelighedens verden er, at om man er 8 mennesker om at dele 1 pizza eller 80 mennesker om at dele 10, så får man lige meget pizza

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 10}{8 \cdot 10} = \frac{10}{80}$$

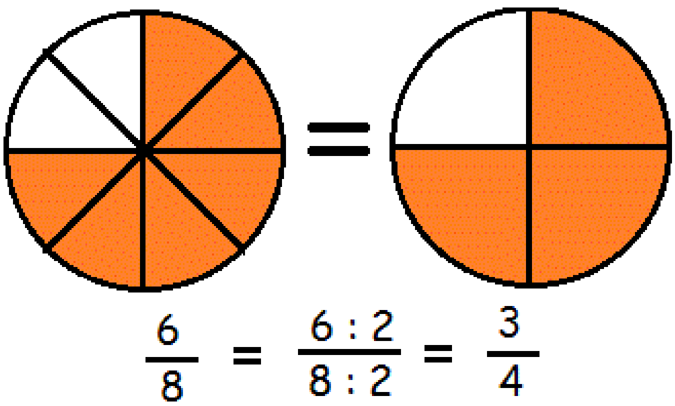
Generelt har vi reglen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad , \quad k \neq 0$$

Hvis vi derimod ønsker at gøre tælleren eller nævneren mindre, kan vi forkorte brøken. Dette gøres ved at dividere med det samme tal i både tæller og nævner. F.eks.

$$\frac{16}{24} = \frac{16 : 8}{24 : 8} = \frac{2}{3}$$

Vi kan også se på en tegning. Hvis pizzaen er delt i 8 stykker, og du spiser 6, så har du spist lige så meget, som hvis den var delt i 4 stykker, og du havde spist de 3.



Generelt kan vi skrive reglen som

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad , \quad k \neq 0$$

1.8 Addition og subtraktion af brøker

Som vi nævnte i i afsnittet om brøker, så gælder det, at jo færre dele noget er opdelt i, des større er hver del. Hvis vi vil lægge 1/6 og 1/4 sammen, får vi derfor problemer, da 1'erne ikke repræsenterer en lige stor del.

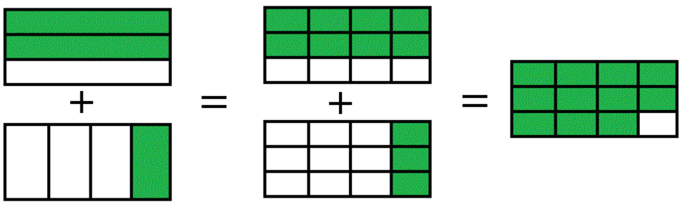
Hvis vi i stedet vil lægge brøker sammen, der har den samme nævner, så går det lettere, da nævnerne har samme størrelse, og delene derfor er sammenlignelige.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

Hvis vi vil lægge to brøker sammen, der har forskellige nævnere, skal vi altså først sørge for at give dem en fælles nævner, før vi kan udføre additionen. Vi bruger teknikkerne at forlænge og forkorte brøker for at opnå en fællesnævner. F.eks.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$$

Her har vi forlænget brøkerne med hhv. 4 og 3 for at opnå en fællesnævner på 12.



Når vi skal trække to brøker fra hinanden, gælder også, at vi skal have fællesnævner, før vi subtraherer (minusser). F.eks. dette stykke, hvor vi forlænger med hhv. 2 og 7 for at få en fællesnævner på 14.

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{10}{14}-\frac{7}{14}=\frac{3}{14}$$

Hvis vi skriver med symboler, har vi altså reglerne

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Bemærk, at når vi adderer og subtraherer brøker, er det kun tællerne vi regner på.

1.9 Multiplikation og division med brøker

Multiplikation med brøker er ganske enkelt. Man ganger simpelthen tæller med tæller og nævner med nævner. Eksempelvis

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 7}=\frac{8}{21}$$

Generelt skriver vi

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Vi kan bruge denne gangeregel til at forstå, hvordan man dividerer to brøker med hinanden. Hvis vi f.eks. vil dividere 2/3 med 4/5, så forlænger vi, så nævneren bliver 1.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}}$$

Vi ved, at

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 20$$

det gør, at nævneren bliver

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$$

Vi fortsætter nu med divisionen

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}$$

At dividere med 4/5 er altså det samme som at gange med 5/4 Dette eksempel har givet os en generel metode til at dividere brøker med hinanden. I stedet for at dividere med brøken, ganger vi simpelthen med den omvendte brøk (hvor tæller og nævner har byttet plads).

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{6}$$

Generelt skriver vi

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Vi kan også bruge ovenstående regel til at dividere en brøk med et heltal. F.eks.

$$\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5} : \frac{4}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

Dette kan vi generelt udtrykke som:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} \quad c \neq 0$$

1.10 Potenser

I stedet for at skrive den samme matematiske operation mange gange i træk, kan det være smart med en genvej. F.eks. kan vi skrive

$$5 \cdot 4$$

i stedet for

$$5 + 5 + 5 + 5$$

Multiplikation er altså en kort skrivemåde for at plusse med det samme tal mange gange. På samme måde findes der en kort skrivemåde for at gange med det samme tal mange gange.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

5^4 læses som "5 opløftet til fjerde potens"eller bare "5 i fjerde"og betyder ganske enkelt 5 ganget med sig selv 4 gange. Et tal skrevet på denne måde kaldes en potens. 5 er grundtallet og 4 er eksponenten.

$$\text{grundtal}^{\text{eksponent}} = \text{potens}$$

Der findes et væld af potensregneregler, som det er godt at lære. Vi præsenterer først et eksempel, og så skriver vi den generelle regel

Reglen for multiplikation af to potenser med samme grundtal

$$7^2 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$$

Dette kan også skrives som

$$7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$$

Generelt lyder reglen

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Med ord siger vi, at ved multiplikation af potenser (med samme grundtal) lægges eksponenterne sammen.

Reglen for division af to potenser med samme grundtal

$$\frac{6^5}{6^2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot \cancel{6}} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{1} = 6^3$$

Dette kan også skrives som

$$\frac{6^5}{6^2} = 6^{5-2} = 6^3$$

Generelt lyder reglen

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Med ord siger vi, at ved division af potenser (med samme grundtal) trækkes eksponenterne fra hinanden.

Reglen for potenser af potenser

$$(11^3)^4 = 11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3$$

Ved brug af reglen for multiplikation af potenser får vi nu

$$11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3 = 11^{3+3+3+3} = 11^{12}$$

Vi kan også skrive det som

$$(11^3)^4 = 11^{3\cdot 4} = 11^{12}$$

Den generelle regel lyder

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

Med ord siger vi, at når vi tager en potens af en potens, ganger vi eksponenterne.

Reglen for potens af et produkt

$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2^3 x^3$$

Vi kan også skrive dette som

$$(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3$$

Generelt er formlen

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Reglen for potens af en brøk

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

Vi ganger brøkerne sammen og får

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Vi kan sammenfatte ovenstående til

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$$

Den generelle regel er

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad b \neq 0$$

Negative eksponenter

Ovenfor har vi forklaret hvad en positiv eksponent betyder. Det er antallet af gange, man skal gange grundtallet med sig selv. Men hvad betyder en negativ eksponent? Lad os prøve at belyse det med et eksempel. Vi betragter brøken

$$\frac{3^2}{3^6}$$

Først regner vi den om til en potens.

$$\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4}$$

Men vi kan jo også regne brøken ud på en anden måde

$$\frac{3^2}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{3^4}$$

Brøken er altså både lig med 3^{-4} og med $1/3^4$. Derfor må de to være ens.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

Generelt kan vi skrive

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$$

Et vigtigt specialtilfælde af denne regel er

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad , \quad a \neq 0$$

Eksponenten nul

Nu har vi styr på de positive og negative eksponenter. Men hvad, hvis eksponenten er 0? Lad os se på et eksempel. Vi betrager brøken

$$\frac{5^3}{5^3}$$

Vi bruger regnereglen for division af potenser med samme grundtal og får

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$$

Men samtidig ved vi, at en brøk med det samme tal i tæller og nævner giver 1

$$\frac{5^3}{5^3} = 1$$

Så brøken er både lig med 5^0 og med 1. Altså må de være lig hinanden

$$5^0 = 1$$

Generelt kan vi skrive

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

Oversigt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,gange}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad b \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad , \quad a \neq 0$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

1.11 10er-potenser

10er-potenser er en smart måde at skrive enormt store tal (som f.eks. Jordens masse) og enormt små tal (f.eks. vægten af et hydrogen-atom) på en overskuelig måde. Disse tal er ikke lette at håndtere, hvis man er nødt til at skrive alle nullerne. Hvis vi bruger potenser med 10 som grundtal, så ser vi at

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

Eksponenten svarer altså til antallet af nuller efter 1-tallet.

Denne sammenhæng kan vi bruge til at skrive store tal på en kort måde:

$$4000 = 4 \cdot 1000 = 4 \cdot 10^3$$

Man kalder ovenstående for at skrive 4000 med *videnskabelig notation*.

Definitionen på et tal skrevet med videnskabelig notation er

$$a \cdot 10^b$$

hvor a er et tal mellem 1 og 10, og hvor b er et heltal. Grunden til, at vi forlanger, at a ligger mellem 1 og 10 er, at hvis det er større, så kan vi forkorte tallet endnu mere ved at lade b vokse. F.eks. kan man skrive 28000 om således:

$$28.000 = 28 \cdot 1000 = 28 \cdot 10^3$$

men det er ikke den korteste videnskabelige notation, da 28 er større end 10. Derfor kan man i stedet omskrive således.

$$28.000 = 2,8 \cdot 10000 = 2,8 \cdot 10^4$$

Lad os nu omskrive Jordens masse

$$6.000.000.000.000.000.000.000.000 \text{kg} = 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

Meget små tal

Lad os nu se, hvordan vi kan regne på meget små decimaltal. Vi husker på potensregnereglen at

$$\frac{1}{a^b} = a^{-b} \quad , \quad a \neq 0$$

Nu har vi, at

$$0,1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

Størrelsen på den negative potens svarer altså til, hvor mange decimaler der er. Denne sammenhæng kan også udnyttes.

$$0,005 = 5 \cdot 0,001 = 5 \cdot 10^{-3}$$

Hvis vi vil skrive vægten af et hydrogenatom kan det gøres således

$$0,\underbrace{0000000000000000000000000017}_{\text{28 decimaler}}\text{kg} = 1,7 \cdot 10^{-27}\text{kg}$$

Læg mærke til, at selvom der var 28 decimaler, så bliver tierpotensens eksponent kun -27, fordi vi lader en decimal blive ved med at være decimal. Nogle lommeregnere og computerprogrammer bruger E (eller EE) i stedet for 10 til at beskrive videnskabelig notation. I de tilfælde skriver man bare eksponenten efter E'et i stedet for at skrive den hævet. Eks.:

$$6 \cdot 10^{24} = 6_{\text{E}}24 = 6_{\text{EE}}24$$

1.12 Enheder og præfikser

Når man taler om afstanden mellem København og Roskilde, siger man sjældent, at der er 30000 meter (selvom det er rigtigt nok), men snarere at der er 30 kilometer mellem byerne. Meter er en længdeenhed og kilo er et præfiks, der kommer fra græsk og betyder tusind. Man skriver et præfiks før en enhed for at gøre enheden større eller mindre, end den var før. "Kilo"i kilometer betyder, at vi har gjort enheden (meter) tusind gange større.

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$$

Her er en tabel over de fleste af de præfikser, du kommer ud for

Tal	Potensform	Navn	Prefiks	Symbol
1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{24}	Kvadrillion	yotta	Y
1 000 000 000 000 000 000 000	10^{21}	Trilliard	zetta	Z
1 000 000 000 000 000 000	10^{18}	Trillion	exa	E
1 000 000 000 000 000	10^{15}	Billiard	peta	P
1 000 000 000 000	10^{12}	Billion	tera	T
1 000 000 000	10^{9}	Milliard	giga	G
1 000 000	10^{6}	Million	mega	M
1 000	10^{3}	Tusind	kilo	k
100	10^{2}	Hundrede	hekto	h
10	10^{1}	Ti	deka	da
1	10^{0}	Et	-	-
0,1	10^{-1}	Tiendel	deci	d
0,01	10^{-2}	Hundrededel	centi	c
0,001	10^{-3}	Tusindedel	milli	m
0,000 00 1	10^{-6}	Milliontedel	mikro	μ
0,000 000 001	10^{-9}	Milliardtedel	nano	n
0,000 000 000 001	10^{-12}	Billiontedel	piko	p
0,000 000 000 000 001	10^{-15}	Billiardtedel	femto	f
0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}	Trilliontedel	atto	a
0,000 000 000 000 000 000 001	10^{-21}	Trilliardtedel	zepto	z
0,000 000 000 000 000 000 000 001	10^{-24}	Kvadrilliontedel	yokto	y

Man behøver ikke kunne alle sammen udenad, men det er godt at kende til dem, der bruges til dagligt (de fleste fra nano til giga).

Eksempler

Vi mennesker udleder 34 gigatons CO_2 til atmosfæren pr. år. Fra tabellen kan vi se, at

$$1 \text{ Gt} = 1 \cdot \textbf{giga}\text{tons} = 1 \cdot 10^9 \text{ tons} = \text{ En milliard tons}$$

Man siger, at et hårstrå vokser 2 cm om måneden. Men hvad svarer det til i meter?

$$2 \text{ cm} = 2 \ \textbf{centi}\text{meter} = 2 \cdot 10^{-2} \ \text{ meter} = 0,02 \text{ m}$$

1.13 Kvadratrødder og andre rødder

Rødder er det omvendte af potenser. Feks. Kan vi sige

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{fordi} \quad 3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{fordi} \quad 5^3 = 125.$$

Kvadratrødder

Fordi kvadratroden af 9 er 3, og 3^2 er 9, kan vi skrive:

$$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9.$$

Eller generelt

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \qquad a > 0.$$

På den måde kan man sige, at kvadratrod og "i anden potens"går ud med hinanden.

Hvis vi husker på potensregnereglerne kan vi se, at

$$(9^{\frac{1}{2}})^2 = 9^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 9^1 = 9.$$

Nu har vi, at både $9^{1/2}$ og $\sqrt{9}$, når vi opløfter det til anden potens, giver 9. Altså må de to være ens

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}.$$

Generelt har vi, at

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad a > 0.$$

Da kvadratroden kan skrives om til en potens, betyder det at alle potensregnereglerne også gælder for kvadratrødder.

Definitionen af kvadratrod

Kvadratroden af et tal, a, er defineret som det positive tal, der ganget med sig selv giver a. Derfor er kvadratroden af 9 lig med 3, selvom både $(-3)^2$ og 3^2 giver 9. Ved at definere kvadradrod på denne måde, sikrer man bl.a at kvadratrodsfunktionen er entydigt defineret.

En anden måde at sige dette på, er:

$$\sqrt{a} = b \;\text{ såfremt }\; b \geq 0 \;\text{ og }\; b^2 = a.$$

Kvadratroden af 0

Man kan godt tage kvadratroden af 0. $\sqrt{0} = 0$, ligesom at $0^{\frac{1}{2}} = 0$.

Andre rødder

Når man finder kvadratroden af et tal a handler det om at finde et tal, der ganget med sig selv giver a. Dette kan man udvide. Kubikroden, k, af a er det tal, der ganget med sig selv to gange giver a: $k \cdot k \cdot k = a$. Den fjerde rod af a er det tal, der ganget med sig selv 3 gange giver a. osv. Når vi skal finde kubikroden af a, skriver vi $\sqrt[3]{a}$, og når vi skal finde den fjerde rod, skriver vi $\sqrt[4]{a}$. Vi skriver ikke 2 over rodtegnet, når vi skal finde en kvadratrod.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{fordi} \quad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{fordi} \quad 3^4 = 81.$$

Ligesom at man kan skrive kvadratroden om til en potens, kan man også skrive alle andre rødder om til potenser.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Bemærk, at da alle rødder kan skrives om til potenser, så gælder potensregnereglerne for alle rødder.

Roden af en potens

Hvis vi tager den n'te rod af a^n får vi selvfølgelig a

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1 = a.$$

Men hvad nu, hvis rod og eksponent er forskellige?

$$\sqrt[3]{4^2} = ?$$

Vi omskriver simpelthen bare roden til en potens.

$$\sqrt[3]{4^2} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = 4^{2 \cdot \frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}.$$

Generelt har vi reglen

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Regneregler for rødder

Vi omskriver nogle af potensregnereglerne, så vi også kan bruge dem med rødder.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

1.14 Primtal

Alle positive heltal kan skrives som et produkt af 1 og sig selv. F.eks.

$$42 = 1 \cdot 42.$$

Det er det, det betyder, at 1 er det multiplikative neutralelement (se regneartarternes egenskaber).

Nogle tal kan også skrives som et produkt af andre faktorer. F.eks.

$$42 = 2 \cdot 21$$

eller

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Tallene 2, 3 og 7 kan dog ikke skrives som faktorer af andre tal. Tal som ikke kan faktoriseres, og derfor kun har divisorerne 1 og sig selv, kaldes for primtal. Et tal p, større end 1, hvorom der gælder, at den eneste faktorisering af p er

$$p = 1 \cdot p$$

er et primtal.

Her er en liste over alle primtal mindre end 100:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,$$
$$43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Alle tal som ikke selv er primtal, kaldes sammensatte tal, fordi de kan skrives som et produkt af primtal. Dette kaldes en *primfaktorisering* af tallet. Faktisk kan alle sammensatte tal primfaktoriseres på én og kun én måde. F.eks. er primfaktoriseringen af 42

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

og primfaktoriseringen af 24 er

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Der findes nogle metoder, der gør det lettere at primtalsfaktorisere. Lad os se på nogen af dem

Primtalsfaktorisering

De små primtals tabeller

Hvis du skal primtalsfaktorisere et tal, kan man begynde med at se, hvilke primtals tabeller tallet indgår i. Man kan starte med at se, om ens tal er deleligt med to. Hvis det ikke er tilfældet, kan man gå videre til 3, 5 osv. Hvis man finder et primtal, som ens tal er deleligt med, er dette primtal en del af primfaktoriseringen. Denne proces fortsætter man med, indtil resultatet af disisionen er et primtal.

Lad os se på et eksempel:

Vi vil primfaktorisere tallet 414, og starter med at dividere med 2: $\frac{414}{2} = 207$. Vi ved altså, at 2 indgår i primfaktoriseringen. Nu skal vi finde næste tal ved at primfaktorisere 207. Da det ikke er et lige tal, indgår det ikke i 2-tabellen, men giver i stedet 103,5. Vi prøver med 3-tabellen i stedet: $\frac{207}{3} = 69$. Vi har nu fundet ud af, at både 2 og 3 indgår i primfaktoriseringen. Tallet 69 er ikke et primtal, så vi går videre med at primfaktorisere dette. Da 69 er ulige, indgår det ikke i 2-tabellen, så vi prøver med 3-tabellen: $\frac{69}{3} = 23$. Vi har nu fundet ud af, at 2, 3 og 3 indgår i primfaktoriseringen. Da 23 også er et primtal, er vi færdige, og den endelige primfaktorisering af $414 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 23$.

Genkend tal fra tabeller

Hvis man skal primfaktorisere et tal som fx 90, behøver man ikke starte med de små tabeller som ovenfor, hvis man kan genkende, at man får 90 ved at gange 9 og 10 sammen. Derefter kan man primfaktorisere 9 og 10: $9 = 3 \cdot 3$ og $10 = 2 \cdot 5$. Altså er primfaktoriseringen: $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Eratosthenes si

Eratosthenes (276 f.v.t.-194 f.v.t.) var en græsk astronom og matematiker, der bl.a. bestemte jordens omkreds. Derudover opfandt han en metode til at finde ud af, hvilke tal, der er primtal, og hvilke der ikke er.

Man starter med at skrive alle de naturlige tal større end 1 op på en liste. Det svarer til, at alle tallene er i sien. Så markerer man det første tal og "ryster sien". At ryste sien betyder at alle multipla af det første tal ryger ud af sien, dvs. vi krydser dem af listen, markeret ved en streg over tallet (hvis det mindste tal er 2, skal vi altså fjerne 4(=2·2), 6(=2·3), 8(=2·4), 10(=2·5), 12(=2·6), 14(=2·7), ...).

Dernæst markerer vi det mindste umarkerede tal og ryster alle multipla af det tal ud af sien (hvis det er 3, skal vi fjerne 6(=3·2), 9(=3·3), 12(=4·3), 15(=5·3), 18(=6·3), 21(=7·3), ...).

Hvis man gør det uendeligt mange gange, ender man med at have alle primtallene tilbage.

Lad os prøve at ryste sien et par gange. Først fylder vi sien op med alle de naturlige tal større end 1 (alle umærkede)

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

Nu markerer vi 2, og ryster sien.

$$\underline{2}, 3, \overline{4}, 5, \overline{6}, 7, \overline{8}, 9, \overline{10}, 11, \overline{12}, 13, \overline{14}, 15, \overline{16}, 17, \overline{18}, 19, \overline{20}, \ldots$$

$$\underline{2}, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, \ldots$$

Nu markerer vi igen det laveste umærkede tal, 3, og ryster sien:

$$\underline{2}, \underline{3}, 5, 7, \overline{9}, 11, 13, \overline{15}, 17, 19, \overline{21}, 23, 25, \overline{27}, 29, 31, \ldots$$

$$\underline{2}, \underline{3}, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, \ldots$$

Nu er det blevet 5's tur til at blive markeret. Vi ryster sien:

$$\underline{2}, \underline{3}, \underline{5}, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \overline{25}, 29, 31, \overline{35}, 37, 41, \ldots$$

$$\underline{2}, \underline{3}, \underline{5}, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots$$

og sådan ville vi kunne blive ved.

Mindste fælles multiplum

Ovenfor snakkede vi om multipla (flertal af multiplum) af et tal. Et multiplum af et tal a er et tal på formen

$$a \cdot k$$

hvor k er et helt tal. F.eks. er 15 et multiplum af 5 (med $k = 3$) fordi

$$15 = 5 \cdot 3.$$

Med andre ord er et multiplum af a et tal, som a går op i. Man kan også snakkes om et *fælles multiplum* af to tal. Det er et tal, som begge tal går op i. F.eks. er 24 et fælles multiplum af 4 og 6, fordi både 4 og 6 går op i 24.

I mange sammenhænge - f.eks. når man skal finde fællesnævnere - er det vigtigt at kunne finde et fælles multiplum, der er lavt. Hvis man ganger nævnerne med hinanden, får man et fælles multiplum, men det er ikke sikkert, det er det *mindste fælles multiplum*.

F.eks. havde vi ovenfor, at et fælles multiplum af 4 og 6 er 24, men det mindste fælles multiplum (mfm) er

$$\mathrm{mfm}(4;6) = 12$$

Med små tal som 4 og 6 er det ret let at finde det mindste fælles multiplum. Men hvad gør man, hvis det f.eks. er tallene 42 og 48 man har med at gøre? Hvis man ganger dem sammen, får man

$$42 \cdot 48 = 2016$$

men mon ikke der findes et lavere tal, som både 42 og 48 går op i? Heldigvis findes der en metode til at bestemme det mindste fælles multiplum af to tal.

Man starter med at primfaktorisere de to tal

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

og

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Vi kan se, at de har primfaktorerne 2 og 3 til fælles (markeret med rødt). Det mindste fælles multiplum er nu det tal, hvor man stiller alle de fælles primfaktorer op (hvor de altså kun skrives én gang) og alle de øvrige primfaktorer.

$$\mathrm{mfm}(42;48) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 336.$$

Altså et tal, der er noget lavere end produktet af de to tal.

Et andet eksempel. Vi ønsker at finde det mindste fælles multiplum af 30 og 105. Vi prøver først at gange de to tal med hinanden.

$$30 \cdot 105 = 3150$$

Nu prøver vi at se, om vi ikke kan finde et lavere fælles multiplum. Vi primfaktoriserer.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Nu tager vi de fælles primfaktorer og skriver dem op én gang, og de øvrige primfaktorer bagefter

$$\mathrm{mfm}(30;105) = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 210.$$

1.15 Regnearternes egenskaber

Når vi regner med reelle tal, er der forskellige egenskaber, vi kan bruge.

Kommutativitet

En regneart er kommutativ, hvis resultatet er ens, uanset hvilket tal der står foran og bagved regnetegnet. Generelt skrives den kommutative lov for addition som

$$a + b = b + a.$$

Et par eksempler er

$$4 + 3 = 7$$

$$3 + 4 = 7.$$

Vi får det samme resultat i begge tilfælde. Derfor er addition (plus) altså kommutativ. Ligeledes er multiplikation (gange) kommutativ. Generelt udtrykkes dette som

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

F.eks. får vi det samme i dette tilfælde:

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$2 \cdot 4 = 8.$$

Imidlertid er de to andre regnearter (division og subtraktion) IKKE kommutative. Dette kan vi overbevise os om med følgende eksempler:

$$8 - 5 = 3$$

$$5 - 8 = -3$$

og

$$\frac{5}{2} = 2,5$$

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

hvor rækkefølgen af tallene altså ikke er ligegyldig.

Associativitet

Hvis man skal addere (lægge) 3 (eller flere) tal sammen, er det ligegyldigt, om man starter med at plusse de to første tal sammen eller de to sidste. Generelt skrives dette som

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Et par eksempler kunne være

$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9.$$

Denne egenskab kaldes associativitet. Multiplikation (gange) er også associativ. Generelt udtrykkes dette som

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

F.eks. kan vi se, at

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24.$$

De to øvrige regnearter (division og subtraktion (minus)) er IKKE associative. F.eks. kan vi se, at

$$(4 - 2) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$4 - (2 - 1) = 4 - 1 = 3$$

og (se evt. multiplikation og division med brøker)

$$\frac{\left(\frac{10}{5}\right)}{2} = \frac{10}{5 \cdot 2} = 1$$

$$\frac{10}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{10 \cdot 2}{5} = 4.$$

Distributivitet

Den distributive lov handler om, hvordan man ganger ind i en parentes. Den siger

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Her er et eksempel på den distributive lov:

$$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

Vi kan samle regneart
ernes egenskaber i et skema

Egenskaber	Addition	Multiplikation
Slutenhed	a+b er et reelt tal	ab er et reelt tal
Associativitet	a+(b+c)=(a+b)+c	a(bc)=(ab)c
Kommutativitet	a+b=b+a	ab=ba
Distributivitet		a(b+c)=ab+ac
Invers-element	a+(-a)=0	a·(1/a)=1
Neutral-element	a+0=a	a·1=a

2 Ligninger

I afsnittet om ligninger lærer vi hvordan man løser både første -og andengradsligninger. Vi gennemgår forskellige regnemetoder til at løse to ligninger med to ubekendte og viser derefter hvordan man også kan finde en grafisk løsning på to ligninger med to ubekendte. Herefter forklarer vi hvad en andengradsligning er og hvordan den løses. Sidste emne i Ligninger er uligheder, som minder meget om ligninger. Vi lærer om hvad en ulighed er, hvilke tegn der bruges til at betegne uligheder og hvilke regneregler der gælder for ulighederne.

2.1 Ligninger

En ligning er et udtryk, der indeholder et lighedstegn. F.eks. er

$$5x + 3 = 48, \quad 54 - 2x = 6, \quad x + 45 = 3x$$

ligninger.

Ligninger vil typisk indeholde en ubekendt, som vi kalder x. At løse ligningen svarer til at finde ud af, hvad x skal være, for at der står det samme på højre og venstre side af lighedstegnet. I det første eksempel ovenfor er løsningen

$$x = 9$$

fordi

$$5 \cdot 9 + 3 = 45 + 3 = 48$$

Løsning af ligninger

Når vi skal løse ligninger, kan det være rart at bruge nogle tricks til at nå frem til det rigtige svar. Den metode, vi bruger hedder "ensbetydende ligninger". Det går simpelthen ud på at omforme den ligning, vi har stillet, samtidig med vi sørger for, at løsningerne til den omformede ligning er de samme som til den oprindelige.

Når vi omformer ligninger, er det tilladt at lægge tal til eller trække tal fra, så længe man gør det på begge sider af lighedstegnet.

$$\text{Hvis} \quad 5x + 3 = 48 \quad \text{så er} \quad 5x + 3 - 3 = 48 - 3$$

$$\text{dvs. så er} \quad 5x = 45$$

Vi har her trukket 3 fra på begge sider af lighedstegnet. Løsningen er stadig x=9. Det er også tilladt at gange eller dividere med et tal på begge sider af lighedstegnet. Dog må man hverken gange eller dividere med 0.

$$\text{Hvis} \quad 3x = 39 \quad \text{så er} \quad \frac{3x}{3} = \frac{39}{3}$$

$$\text{dvs. så er} \quad x = 13$$

Mange ligninger kan vi løse udelukkende ved hjælp af disse simple omformningsregler.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= x + 3 \Leftrightarrow \\ 3x + 4 - 4 &= x + 3 - 4 \Leftrightarrow \\ 3x - x &= x - 1 - x \Leftrightarrow \\ 2x &= -1 \Leftrightarrow \\ \tfrac{2x}{2} &= \tfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \\ x &= -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ligninger af højere grad

De ligninger, vi har set ovenfor, kaldes førstegradsligninger, fordi der ikke optræder nogen potenser af x. Graden af en ligning svarer til den højeste eksponent af x. F.eks. er

$$x^4 = 81$$

en fjerdegradsligning, og

$$2x^3 - 7 = 9$$

er en tredjegradsligning.

$$x^2 + 3x = 0$$

er en andengradsligning. Ligningen indeholder både et førstegradsled ($2x$) og et andengradsled (x^2), men så er det den højeste eksponent, der bestemmer hvilken grad, ligningen har.

2.2 To ligninger med to ubekendte

Ligninger bruges tit til at løse problemer fra virkeligheden, og her indgår der tit flere ubekendte end bare en. Forestil dig en slikbutik, hvor du får at vide, at hvis du køber 3 slikkepinde og 4 slikposer, bliver det 35 kr, og hvis du i stedet køber 4 slikkepinde og 2 slikposer, så bliver det 20 kr. Hvordan finder vi frem til, hvad prisen er på en slikkepind? Og på en slikpose? Vi har her to ubekendte (prisen på en slikkepind (x) og prisen på en slikpose (y)). Vi kan stille oplysningerne op som to ligninger

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 35 \\ 4x + 2y &= 20. \end{aligned}$$

Der findes et væld af metoder til at løse to ligninger med to ubekendte. Vi vil her gennemgå tre af de vigtigste.

Substitution

Substitutionsmetoden går ud på at isolere en af de ubekendte i en af ligningerne. Derpå kan man sætte dette udtryk ind i den anden ligning, og så har man kun en ubekendt tilbage. Lad os prøve at bruge metoden på ligningerne ovenfor. Vi tager udgangspunkt i den første ligning og isolerer y.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 35 \Leftrightarrow \\ 4y &= 35 - 3x \Leftrightarrow \\ y &= \tfrac{35-3x}{4}. \end{aligned}$$

Nu kan vi sætte dette udtryk for y ind i den anden ligning

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 20 \Leftrightarrow \\ 4x + 2 \cdot \left(\tfrac{35-3x}{4}\right) &= 20. \end{aligned}$$

Nu er der kun én ubekendt tilbage (x), og vi løser ligningen på almindelig vis

$$\begin{aligned} 4x + 2 \cdot \left(\tfrac{35-3x}{4}\right) &= 20 \Leftrightarrow \\ 4x + \tfrac{70-6x}{4} &= 20 \Leftrightarrow \\ 4x + \tfrac{70}{4} - \tfrac{6x}{4} &= 20 \Leftrightarrow \\ \tfrac{5}{2}x + \tfrac{35}{2} &= 20 \Leftrightarrow \\ \tfrac{5}{2}x &= 20 - \tfrac{35}{2} \Leftrightarrow \\ \tfrac{5}{2}x &= \tfrac{5}{2} \Leftrightarrow \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Nu ved vi, at x skal være 1. Dvs at prisen på en slikkepind er 1 kr. Men vi mangler stadig at finde prisen på en slikpose. Heldigvis fandt vi jo tidligere frem til et udtryk for y, hvor vi nu kan indsætte vores værdi for x

$$\begin{aligned} y &= \frac{35-3x}{4} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{35-3\cdot 1}{4} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{32}{4} \Leftrightarrow \\ y &= 8. \end{aligned}$$

Altså er prisen på en slikpose er 8 kr. Vi kan prøve at sætte $x = 1$ og $y = 8$ i vores oprindelige ligninger for at tjekke, om det er det rigtige svar

$$3x + 4y = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 3 + 32 = 35$$

$$4x + 2y = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20,$$

og det er det heldigvis.

Lige store koefficienters metode

Koefficienterne er de tal, der står foran x'erne og y'erne i en ligning. I denne metode omformer vi de to ligninger, så koefficienterne foran en af de to variable er ens. Derefter lægger vi de to ligninger sammen eller trækker dem fra hinanden. På den måde forsvinder den ene variable, og vi står tilbage med en almindelig ligning. Lad os prøve med eksemplet ovenfor.

$$3x + 4y = 35$$

$$4x + 2y = 20$$

Vi ganger den nederste ligning med 2 (det vil sige ganger med 2 på begge sider af lighedstegnet) for at opnå 4 som koefficient foran y.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4x + 2y) &= 2 \cdot 20 \Leftrightarrow \\ 8x + 4y &= 40. \end{aligned}$$

Nu har vi de to ligninger:

$$3x + 4y = 35$$

$$8x + 4y = 40$$

Vi ser, at y har koefficienten 4 i begge ligninger. Nu trækker vi dem fra hinanden.

$$(3x + 4y) - (8x + 4y) = 35 - 40$$

Og ved at reducere lidt får vi

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 8x - 4y &= 35 - 40 \Leftrightarrow \\ 3x - 8x &= -5 \Leftrightarrow \\ -5x &= -5 \Leftrightarrow \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Igen nåede vi altså frem til, at prisen på en slikkepind er 1 kr. Nu finder vi y (prisen på en slikpose) ved at sætte vores x-værdi ind i en af de to oprindelige ligninger; vi bestemmer helt selv hvilken, fordi det ALTID vil give samme resultat. Vi tager den første

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 35 \Leftrightarrow \\ 3 \cdot 1 + 4y &= 35 \Leftrightarrow \\ 4y &= 35 - 3 \Leftrightarrow \\ y &= \frac{32}{4} = 8 \end{aligned}$$

og så har vi fundet frem til, at prisen på en slikpose er 8 kr.

Determinant-metoden

Determinant-metoden er i realiteten det samme som "lige store koefficienters"metoden, men vi vil her stille ligningerne op i en bestemt orden og i en bestemt rækkefølge. I modsætning til de to foregående metoder vil vi her starte med to generelle ligninger da det illustrerer metoden bedre.

Vi starter med at opskrive de to generelle ligninger med to ubekendte x og y

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Her er $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ konstanter som vi i princippet kender, da vi får dem opgivet i det konkrete eksempel. Hvis vi f.eks. ser på eksemplet ovenfor med slikkepinde og slikposer så kan vi identificere disse konstanter således

$$\begin{aligned} \overbrace{3}^{a_1} x + \overbrace{4}^{b_1} y &= \overbrace{35}^{c_1} \\ \underbrace{4}_{a_2} x + \underbrace{2}_{b_2} y &= \underbrace{20}_{c_2} \ . \end{aligned}$$

Hvis vi så benytter fremgangsmetoden fra "lige store koefficienters"metoden kan vi gange alle led i den første ligning med a_2 samt alle led i den anden ligning med a_1 hvorved vi får følgende to ligninger (hvor vi også har samlet x'erne alene på venstre side og resten på højre side af lighedstegnet)

$$\begin{aligned} a_1a_2x &= a_2c_1 - a_2b_1y \\ a_1a_2x &= a_1c_2 - a_1b_2y. \end{aligned}$$

Nu kan vi se, at de to ligningers venstreside er ens, hvilket vil sige at højresiden af de to ligninger er lig det samme. Vi kan derfor sætte højresiden af den øverste ligning lig med højresiden af den nederste ligning hvorved vi får ligningen

$$a_2c_1 - a_2b_1y = a_1c_2 - a_1b_2y.$$

Vi kan nu samle alle leddene hvor y indgår på venstre siden og resten på højresiden

$$a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1 \ .$$

Så kan vi sætte y udenfor en parentes

$$y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1,$$

og så dele med parentesen på begge sider af lighedstegnet hvorved vi får følgende udtryk for y

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ .$$

Vi kan nu gennemgå samme beregninger for x, hvor vi i stedet for at gange ligningerne med hhv. a_1 og a_2 skulle gange med hhv. b_1 og b_2. Gøres dette får man følgende udtryk for x

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - \ a_2b_1}\ .$$

Vi vil nu indføre to nye begreber; **matrix** og **determinant**. En matrix skrives matematisk som

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

og består af to rækker (der indeholder hhv. a_1 og b_1 samt a_2 og b_2) og to søjler (der indeholder hhv. a_1 og a_2 samt b_1 og b_2). Determinanten af en matrix betegner vi med bogstavet D og den beregnes på følgende måde

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Bemærk at den firkantede parentes der før omsluttede vores matrix blev ændret til to lodrette streger. Dette er en ofte brugt metode til at visualisere om man taler om en matrix eller om determinanten af en matrix. Bemærk desuden at måden hvorpå vi beregnede determinanten af en matrix med 2 søjler og 2 rækker var ved at tage øverste venstre indgang (a_1) og gange med nederste højre indgang (b_2) hvorefter vi trækker nederste venstre indgang (a_2) ganget med øverste højre indgang (b_1) fra. Betrager vi nu vores udtryk for x og y kan vi identificere determinanten D beregnet ovenfor som nævneren i begge udtryk. Vi er desuden i stand til at konstruere to nye matricer D_x og D_y på følgende måde

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

hvor vi kan identificere D_x som tælleren i udtrykket for x samt D_y som tælleren i y. Til sidst kan vi nu opskrive udtrykkene for x og y på følgende lette og overskuelige måde vha. ovenstående 3 determinanter

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Eksempel

Nu da vi har fået etableret teorien for determinant-metoden kan vi tage udgangspunkt i eksemplet med at udregne stykprisen for slikkepinde og slikposer brugt i de to foregående metoder.

Vi har som sagt ligningssystemet

$$3x + 4y = 35$$
$$4x + 2y = 20$$

hvor vi i udledningen af metoden identificerede de forskellige konstanter. Vi kan derfor opskrive de tre determinant-udtryk som følgende

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 35 & 4 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = 35 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = -10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 35 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 3 \cdot 20 - 4 \cdot 35 = -80.$$

Nu kan vi beregne værdierne for x og y der løser ligningssystemet til

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-80}{-10} = 8,$$

hvilket er præcis den samme løsning som de to andre metoder gav.

2.3 Grafisk løsning af to ligninger med to ubekendte

I nogle tilfælde kan man løse to ligninger med to ubekendte ved brug af grafer. Vi starter med at isolere den ene variable i begge ligninger. Derefter tegner vi de to grafer ind i et koordinatsystem. Koordinatsættene til skæringspunktet/-erne er løsningen/-erne til ligningssystemet.

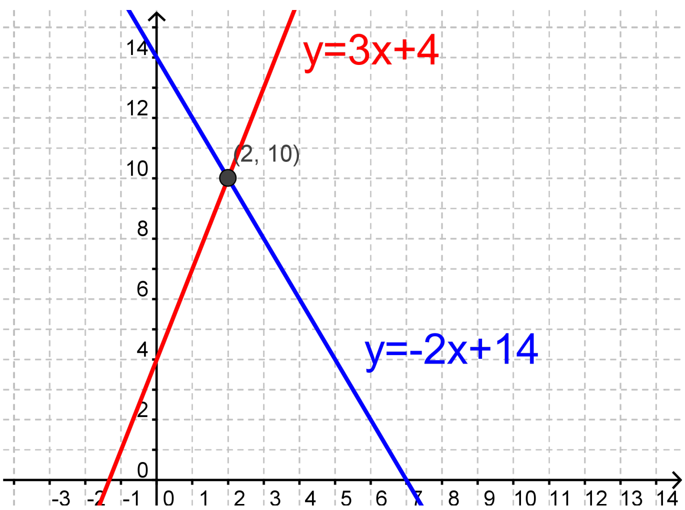
Lad os se på et eksempel. Vores ligninger er

$$\begin{aligned} y &= 3x + 4 \\ 2x + y &= 14. \end{aligned}$$

Vi kan se at y allerede er isoleret i den første ligning. Så vi isolerer den blot i den anden ligning

$$\begin{aligned} 2x + y &= 14 \Leftrightarrow \\ y &= -2x + 14. \end{aligned}$$

Nu tegner vi de to ligninger ind i et koordinatsystem



Vi kan se, at ligningerne har løsningen

$$x = 2, \quad y = 10$$

Vi prøver at sætte ind i de oprindelige ligninger for at sikre, at vi har regnet rigtigt. Indsættes løsningen i første ligning ($y = 3x + 4$) får vi

$$\begin{aligned} &\text{V}: \quad 10 = 10 \\ &\text{H}: \quad 3 \cdot 2 + 4 = 6 + 4 = 10. \end{aligned}$$

samt for den anden ligning ($2x + y = 14$)

$$\begin{aligned} &\text{V}: \quad 2 \cdot 2 + 10 = 4 + 10 = 14 \\ &\text{H}: \quad 14 = 14. \end{aligned}$$

Lad os se på et andet eksempel. Vores ligninger er

$$\begin{aligned} 2y + 2x &= 2x^2 \\ y - 2x &= 0 \end{aligned}$$

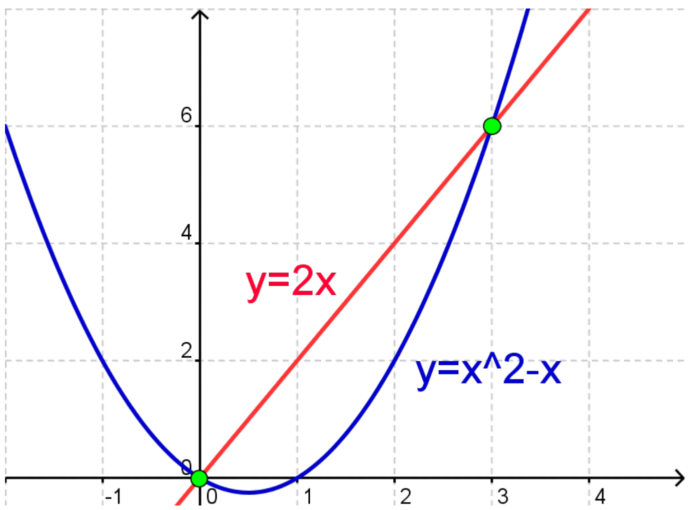
Vi starter med at isolere y i den første ligning

$$\begin{aligned} 2y + 2x &= 2x^2 \Leftrightarrow \\ 2y &= 2x^2 - 2x \Leftrightarrow \\ y &= x^2 - x. \end{aligned}$$

og så isolerer vi y i den anden ligning

$$\begin{aligned} y - 2x &= 0 \Leftrightarrow \\ y &= 2x. \end{aligned}$$

Nu indtegner vi graferne i et koordinatsystem



Vi aflæser skæringspunkterne til (0, 0) og (3, 6). Dvs. at en løsning er $x = 0$ og $y = 0$, mens en anden løsning er $x = 3$ og $y = 6$. For at sikre os, at vi har aflæst rigtig, prøver vi at indsætte punkterne i de oprindelige ligninger.

Først tjekker vi at (0, 0) er en løsning. For begge ligninger skal venstre og højre side af lighedstegnet give det samme

$$\begin{aligned} &\text{V}: \quad 2y + 2x = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ &\text{H}: \quad 2x^2 = 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

og

$$\begin{array}{ll} \text{V}: & y - 2x = 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ \text{H}: & 0 = 0. \end{array}$$

Da venstre og højresiderne gav det samme i begge ligninger, er $x = 0$ og $y = 0$ en løsning. Nu ser vi på den anden løsning hvor $x = 3$ og $y = 6$

$$\begin{array}{ll} \text{V}: & 2y + 2x = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18 \\ \text{H}: & 2x^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \end{array}$$

samt

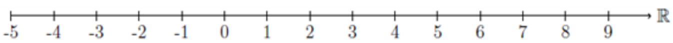
$$\begin{array}{ll} \text{V}: & y - 2x = 6 - 2 \cdot 3 = 0 \\ \text{H}: & 0 = 0. \end{array}$$

Igen får vi at højre- og venstresiderne stemmer overens i de to ligninger.

2.4 Numeriske ligninger

Numerisk værdi

Når man arbejder med numeriske ligninger, bliver man nødt til at vide, hvad den "numeriske værdi af et tal"betyder. Lad os betragte den reelle tal linje:



Tallene går fra $-\infty$ til $+\infty$, og 0 skiller de positive og negative tal fra hinanden. Den numeriske værdi af et tal er lig med tallets afstand fra 0. Sagt med andre ord: Den numeriske værdi af et tal er altid selve tallet selv med positivt fortegn.

Eksempler:

- Den numeriske værdi af tallet -4 er 4
- Den numeriske værdi af tallet -10 er 10
- Den numeriske værdi af tallet 5 er 5

I stedet for at skrive "den numeriske værdi af tallet -4"kan man skrive "$|-4|$- det to lodrette streger betyder "den numeriske værdi af".

Vi kan derfor skrive $|-4| = 4, \quad |-10| = 10$ og $|5| = 5$

Lad os generalisere disse eksempler til en vilkårlig størrelse x og definere den numeriske værdi:

Lad x være et reelt tal. Da vil den numeriske værdi af tallet x være defineret ud fra følgende:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{når } x \geq 0 \text{ og} \\ -x, & \text{når } x < 0. \end{cases}$$

Denne definition skal forstås (og læses) på følgende måde: Den numeriske værdi af x er lig med x hvis x er større end, eller lig med 0. Hvis derimod at x er mindre end 0 så er den numeriske værdi af x lig med $-x$.

I eksemplet ovenfor udnyttede vi denne definition: 5 er eksempelvis større end 0, så den numeriske værdi af 5 er 5. -10 er mindre end 0, så den numeriske værdi af -10 er 10.

Numeriske ligninger

Løser man en ligning, hvor der indgår en numerisk værdi, bliver man nødt til at bruge denne definition. Når vi skal til at løse numeriske ligninger er vi nemlig nødt til at afgøre, hvilke værdier der er tilladte for x at antage. Dette interval af tilladte værdier for x kaldes senere hen for definitionsmængden for x. I modsætning til almindelige ligninger, kan numeriske ligninger have mere end 1 løsning. Lad os tage udgangspunkt i et par eksempler.

Eksempel 1

Vi ønsker at løse ligningen

$$|7-x| = 4x+11,$$

men før vi kan gå videre skal vi som sagt have fundet ud af hvilke værdier vores x kan antage for de to forskellige tilfælde, altså for hhv. $7-x \geq 0$ samt $7-x < 0$. Vi ser at

$$|7-x| = \begin{cases} 7-x, & \text{når } 7-x \geq 0 \Rightarrow 7 \geq x \\ -(7-x), & \text{når } 7-x < 0 \Rightarrow 7 < x. \end{cases}$$

Nu har vi fundet ud af, at hvis 7 er større end, eller lig med x (eller at x er mindre end, eller lig med 7), så kan vi helt fjerne det numeriske tegn og bare skrive $7-x$ på venstresiden. Hvis derimod at x er større end 7 så skal vi skrive $-(7-x)$ på venstresiden. Vi har altså nu to ligninger vi kan løse for x. Lad os starte med at antage at $7 \geq x$. Vores ligning kan så skrives som

$$\begin{aligned} 7-x &= 4x+11 \Leftrightarrow \\ -4 &= 5x \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{4}{5} = -0{,}8. \end{aligned}$$

Hvis vi derimod antager at $x > 7$ kan vores ligning skrives som

$$\begin{aligned} -(7-x) &= 4x+11 \Leftrightarrow \\ -7+x &= 4x+11 \Leftrightarrow \\ -18 &= 3x \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{18}{3} = -6. \end{aligned}$$

Lad os nu se på de to løsninger og se om en, eller begge, opfylder vores antagelse om hvilke værdier x kan antage. Hvis vi ser på den sidste løsning først, så antog vi at x var skarpt større end 7, men da vi løste ligningen så skulle x være -6 for at den var opfyldt. Da -6 ikke er større end 7 er dette ikke en gyldig løsning. Kigger vi derimod på den første løsning, så antog vi at x var mindre end, eller lig med 7, og da vi løste ligningen fandt vi at x skulle være -0,8 for at den var opfyldt. Da -0,8 er mindre end 7 er denne løsning gyldig og dermed kan vi konkludere at løsningen til vores numeriske ligning

$$|7-x| = 4x+11,$$

er $x =$ -0,8.

Eksempel 2

Lad os tage endnu et eksempel. Denne gang skal vi løse ligningen

$$|2x - 13| = |-2 - x|.$$

Igen skal vi have fundet ud af, hvilke intervaller x skal ligge i, men hvor vi før kun gjorde det for den ene side, og fik to intervaller, skal vi nu gøre det for begge sider, hvilket vil give os tre intervaller for x. Lad os starte med venstresiden

$$|2x - 13| = \begin{cases} 2x - 13, & \text{når } 2x - 13 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6{,}5 \\ -(2x - 13), & \text{når } 2x - 13 < 0 \Rightarrow x < 6{,}5 \end{cases}$$

og så højresiden

$$|-2 - x| = \begin{cases} -2 - x, & \text{når } -2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq x \\ -(-2 - x), & \text{når } -2 - x < 0 \Rightarrow -2 < x. \end{cases}$$

Fra venstresiden fandt vi, at x enten skulle være større end eller lig med 6,5, eller mindre end 6,5. Fra højresiden fandt vi derimod at x enten skulle være mindre end eller lig med -2, eller større end -2. Dette kan vi omformulere til tre intervaller for x. I det første interval kræver vi at x er mindre end, eller lig med -2. I det næste interval skal x både være større end -2 og samtidig mindre end 6,5. Dette skrives $-2 < x < 6{,}5$. Det sidste interval kræver at x er større end eller lig med 6,5. Som før kan vi nu løse ligningen i disse tre tilfælde.

Først antager vi at $x \leq -2$, hvilket gør at vi kan skrive ligningen som

$$\begin{aligned} -(2x - 13) &= -2 - x \Leftrightarrow \\ -2x + 13 &= -2 - x \Leftrightarrow \\ 15 &= x. \end{aligned}$$

Så antager vi at $-2 < x < 6{,}5$, hvorved vi kan skrive

$$\begin{aligned} -(2x - 13) &= -(-2 - x) \Leftrightarrow \\ -2x + 13 &= 2 + x \Leftrightarrow \\ 11 &= 3x \Leftrightarrow \\ x &= \frac{11}{3} \approx 3{,}67. \end{aligned}$$

Til sidst antager vi at $x \geq 6{,}5$

$$\begin{aligned} 2x - 13 &= -(-2 - x) \Leftrightarrow \\ 2x - 13 &= 2 + x \Leftrightarrow \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Lad os nu se på om løsningerne opfylder de krav vi har for de værdier x kan antage. I det første tilfælde krævede vi at $x \leq -2$ hvilket gav os løsningen $x = 15$. Da 15 tydeligvis ikke er mindre end eller lig med -2 er denne løsning ikke gyldig. I det andet tilfælde krævede vi at $-2 < x < 6{,}5$ hvilket gav os løsningen $x \approx 3{,}67$. Da 3,67 er større end -2 og mindre end 6,5 er dette en gyldig løsning. I sidste tilfælde krævede vi at $x \geq 6{,}5$ og fandt løsningen $x = 15$. Da 15 er større end 6,5 er dette også en gyldig løsning og vi kan dermed konkludere at løsningen til ligningen

$$|2x - 13| = |-2 - x|$$

er $x \approx 3{,}67$ eller $x = 15$. Dette kan også skrives mere matematisk korrekt som $x \approx 3{,}67 \vee x = 15$.

Eksempel 3

Vi vil løse ligningen $|x + 3| = |20 - 4x|$:

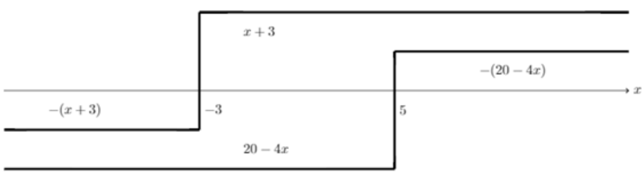
Først bestemmes intervallerne for hhv. $|x + 3|$ og $|20 - 4x|$:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{når } x+3 \geq 0 \implies x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{når } x+3 < 0 \implies x < -3 \end{cases}$$

$$|20-4x| = \begin{cases} 20-4x & \text{når } 20-4x \geq 0 \implies x \leq 5 \\ -(20-4x) & \text{når } 20-4x < 0 \implies x > 5 \end{cases}$$

Herved får vi fire forskellige intervaller: $x < -3$, $x \geq -3$, $x \leq 5$ og $x > 5$.

Hvis intervallerne tegnes, ses det, at der i realiteten kun er tale om tre intervaller:



- Det første interval er $x < -3$, og det løses: $-(x+3) = 20 - 4x \implies x = 7,67$. Denne løsning ligger uden for intervallet, hvorfor denne løsning kasseres.
- Det andet interval er $-3 \leq x \leq 5$. Dette løses på denne måde: $x+3 = 20-4x \implies x = 3,4$. Denne løsning ligger inden for intervallet, så den forkastes ikke.
- Det tredje interval er $x > 5$. Det løses på denne måde: $x + 3 = -(20 - 4x) \implies x = 7,67$ Denne løsning ligger nu inden for intervallet, så den forkastes ikke.

2.5 Andengradsligningen

En andengradsligning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Eksempler på andengradsligninger er

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ 2x^2 + 6x + 4 &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

I den første ligning er $a = 1$, $b = -2$ og $c = -3$. I den anden ligning er $a = 2$, $b = 6$ og $c = 4$. I den tredje ligning er $a = 1$, $b = 0$ og $c = -9$.

Andengradsligninger har fået deres navn, fordi de indeholder et led, hvor x står i anden potens (x^2). Vi kalder a og b for koefficienterne til hhv x^2 og x, og vi kalder c for konstantleddet. Det er klart at a ikke må være 0, for så ville andengradsleddet (ax^2) jo forsvinde, og så ville det være en almindelig førstegradsligning. Når man skal løse en andengradsligning, kan det være svært at isolere x, som vi er vant til fra almindelige førstegradsligninger. Derfor findes der en løsningsmetode til at finde x, når man har at gøre med en andengradsligning. Metoden er inddelt i to skridt.

Først skal man finde *diskriminanten*. Diskriminanten betegnes med bogstavet d. Diskriminanten fortæller os, hvor mange løsninger andengradsligningen har.

Hvis d er positiv ($d > 0$), har ligningen 2 løsninger. Hvis $d = 0$, har ligningen 1 løsning. Hvis d er negativ ($d < 0$), har ligningen ingen løsninger.

Man beregner diskriminanten ved formlen

$$d = b^2 - 4ac$$

For ligningen $2x^2 + 6x + 4 = 0$ vil diskriminanten være

$$d = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4.$$

Denne diskriminant er positiv, og ligningen har derfor to løsninger.

Når vi skal finde løsningerne, bruger vi formlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Tegnet efter $-b$ skal læses ”plus minus”, og det betyder, at vi finder den ene løsning ved at indsætte et plus, og den anden løsning ved at indsætte et minus. Hvis diskriminanten er 0, kan ligningen forsimples til:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Hvis vi ser på eksemplet ovenfor, så får vi

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 2}{4} = \begin{cases} \frac{-6+2}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ \\ \frac{-6-2}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Ligningen har altså to løsninger; $x = -1$ eller $x = -2$. Vi prøver at indsætte dem i den oprindelig ligning for at tjekke, at det virkelig er løsninger.

$$2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 4 = 2 - 6 + 4 = 0$$

$$2 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

2.6 Uligheder

Når man løser ligninger, har man en venstreside og en højreside, og imellem dem er placeret et lighedstegn, =. Når vi skal løse uligheder, er der fire forskellig ulighedstegn, vi skal holde styr på.

$x \leq y$ ”x er mindre end eller lig med y”

$x \geq y$ "x er større end eller lig med y"

$x < y$ "x er mindre end y"

$x > y$ "x er større end y"

Hvis man er i tvivl om, hvad der betyder hvad, så kan man se ulighedstegnet som en krokodillemund, der altid vil spise den største værdi.

En ulighed består af en venstreside, en højreside og et af de fire ulighedstegn imellem.

Regneregler for uligheder

Når man skal løse en ulighed, så må man lægge til eller trække fra på begge sider af ulighedstegnet.

$$x + 5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < 8 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$$

Man må også godt gange eller dividere med et positivt tal.

$$4x \geq 100 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{100}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 25$$

Hvis man vil gange eller dividere med et *negativt* tal, så skal man vende ulighedstegnet om.

$$-5x > 35 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{35}{-5} \quad \Leftrightarrow \quad x < -7$$

Når man løser uligheder, kan man ikke uden videre gange eller dividere med en ubekendt (f.eks. x). Man ved nemlig ikke, om den er positiv eller negativ, og derfor ved man ikke, om man skal vende ulighedstegnet eller ej.

Ulighedstegn og intervaller

Der er en sammenhæng mellem, om man bruger svagt eller skarpt ulighedstegn, og om man har med åbne eller lukkede intervaller at gøre.

$$\begin{aligned} 2 < x < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in]2;4[\\ 2 \leq x \leq 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [2;4] \\ x > 8 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in]8;\infty[\\ x \geq 5 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [5;\infty[. \end{aligned}$$

Her er et par eksempler på løsning af uligheder.

$$3x + 17 < 5x - 8$$

Først rykker vi x'erne hen på venstresiden og tallene hen på højresiden. Da vi bare lægger til og trækker fra, skal vi ikke vende ulighedstegnet

$$\begin{aligned} 3x - 5x &< -8 - 17 \Leftrightarrow \\ -2x &< -25. \end{aligned}$$

Nu dividerer vi med -2 på begge sider. Da -2 er negativt, betyder det, at vi skal vende ulighedstegnet

$$x > \frac{25}{2} = 12,5.$$

Nu er uligheden løst. Man kan også skrive løsningen som

$$x \in \left] \frac{25}{2}; \infty \right[.$$

En anden ulighed er

$$15x < 10x^2$$

Selvom, der står x'er på begge sider, kan vi ikke dividere med x, da vi ikke ved om x er positivt eller negativt (eller evt. 0). Derfor starter vi med at trække $10x^2$ fra på begge sider

$$15x - 10x^2 < 0$$

Nu sætter vi $10x$ udenfor en parentes

$$10x \cdot (1,5 - x) < 0$$

Nu har vi et produkt, der skal være negativt. Det betyder, at faktorerne skal have forskellige fortegn.

Lad os undersøge for hvilke x-værdier dette gælder.

Når $x < 0$, så er $10x$ negativ, mens $1,5 - x$ er positiv. Derfor er deres produkt negativt. Når $x = 0$, så er $10x = 0$ og så er produktet 0 Når $0 < x < 1,5$ er $10x$ positiv, og $1,5 - x$ er også positiv. Derved er deres produkt positivt. Når $x = 1,5$ er $1,5 - x = 0$, og derved er produktet 0. Når $x > 1,5$ er $10x$ positiv og $1,5 - x$ er negativ. Derved er deres produkt negativt.

Svaret er de x-værdier, der giver et negativt produkt. Vi kan skrive det op på følgende måder:

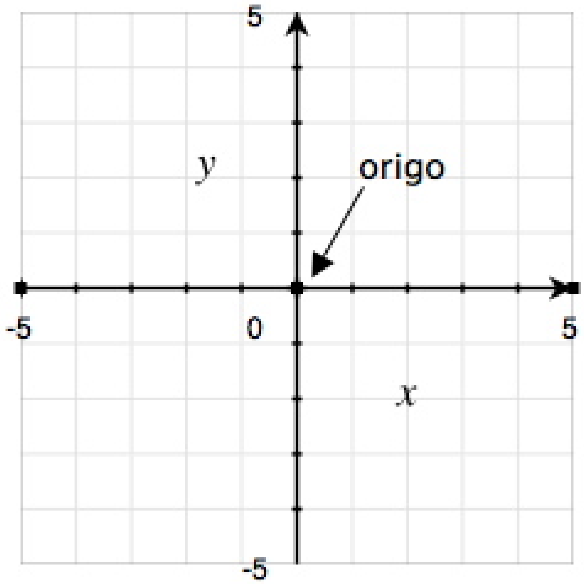
$$x < 0 \quad \vee \quad x > 1,5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; 0[\cup]1,5; \infty[.$$

3 Funktioner

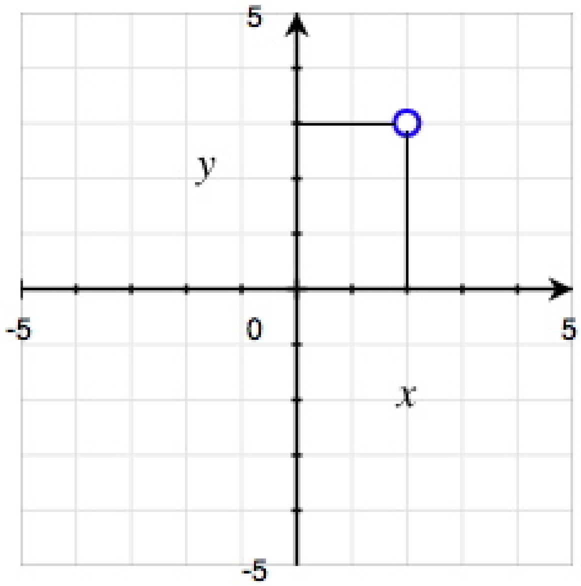
I dette afsnit om funktioner lærer vi om koordinatsystemet og lineære ligninger i koordinatsystemet. Vi finder herefter hældningsgraden og skæringspunktet ved hjælp af to tilfældige punkter på grafen. Vi regner os frem til renteformlen, som er et eksempel på en eksponentiel udvikling, hvilket vi lærer om i de to næste afsnit. Vi regner os frem til fordoblingskonstanten og halveringskonstanten for eksponentielle funktioner og får forklaret hvorfor eksponentielle funktioner altid har enten en fordoblingskonstant eller en halveringskonstant. Vi lærer om potensfunktioner og betydningen af koefficienterne, samt hvordan man finder x og y i en potensfunktion. Vi lærer også hvordan man finder koefficienterne a og b, når man kender to punkter på grafen for en potensfunktion. I sidste afsnit under funktioner ser vi på logaritmer og logaritme regneregler.

3.1 Koordinatsystemet

Et koordinatsystem er en to-dimensional tallinje. Dvs. to tallinjer, såkaldte akser, der står vinkelret på hinanden. Den, der går vandret, kaldes for det meste for x-aksen eller førsteaksen, mens den lodrette oftest kaldes y-aksen eller andenaksen. X-aksen og y-aksen skærer hinanden i deres respektive 0-punkter. Dette punkt kaldes *origo*.

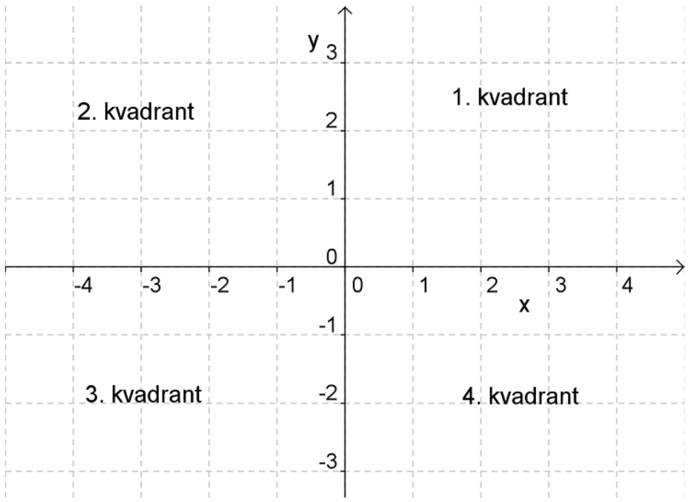


Hvis vi placerer et punkt i koordinatsystemet, kan vi aflæse dets koordinater. Dette gør vi ved at tegne vinkelrette linjer fra punktet til akserne.



Punktet, vi har indtegnet i ovenstående koordinatsystem, har 2 som x-koordinat og 3 som y-koordinat. Man skriver et koordinatsæt i en parentes (x, y), hvor x- koordinaten altid står først, og y-koordinaten sidst. Man adskiller x- og y-koordinaten af et komma eller et semikolon. Punktet, som er indtegnet ovenfor, ville man skrive (2, 3).

De fire områder i koordinatsystemer kaldes kvadranter.

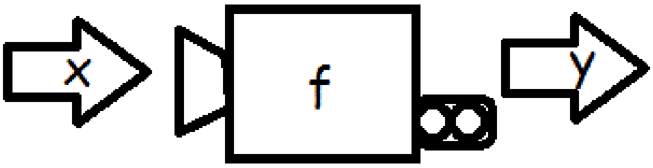


De adskilles fra hinanden således.

1. kvadrant er både x og y positive
2. kvadrant er x negativ og y positiv
3. kvadrant er både x og y negative
4. kvadrant er x positiv og y negativ

3.2 Hvad er en funktion?

En funktion er i matematik en regel, der til hvert x knytter nøjagtigt et y. Man kan forstå funktioner som en slags maskine, hvor man kommer et x ind, og så spytter den et y ud på den anden side.



Funktionen beskriver en sammenhæng mellem de to variable x og y. Vi siger, at x er den uafhængige variabel, fordi vi helt selv kan bestemme, hvilket x vi "kommer ind i maskinen". Derimod er vi ikke selv herrer over, hvad der kommer ud af maskinen. Derfor kalder vi y den afhængige variabel. Vi siger, at y afhænger af, hvilket x vi kommer ind, eller at y er en funktion af x. Dette skriver vi kort som y=f(x)

Et eksempel på en funktion er

$$y = f(x) = 2x + 5$$

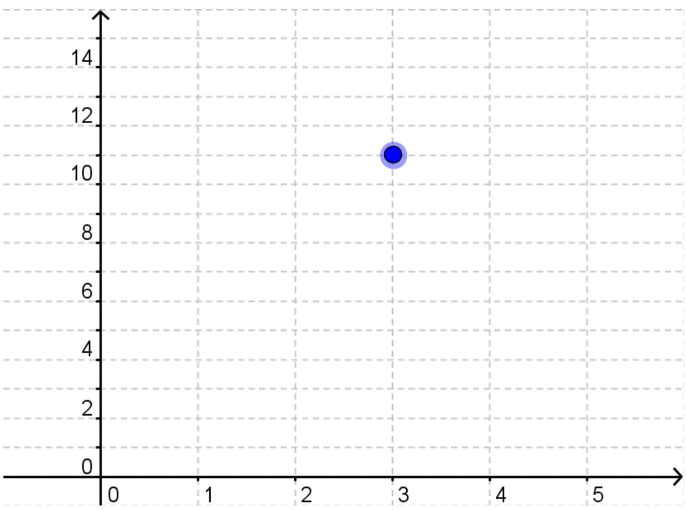
Vi vælger selv, hvilket x vi kommer ind. Dette kunne f.eks. være 3

$$y = f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$

så spytter funktionen tallet 11 ud. Når x er 3, bliver y altså 11. Bemærk, at vi selv valgte, hvilket tal vi kom ind i funktionen, mens det var funktionen, der bestemte, hvilket tal den spyttede ud.

Grafer

Funktioner beskriver som nævnt ovenfor sammenhænge mellem variable. Hvis man finder et sammenhørende par (som f.eks. 3 og 11 ovenfor), så kan man tegne det ind i et koordinatsystem med x-koordinaten på førsteaksen og y-koordinaten på andenaksen.

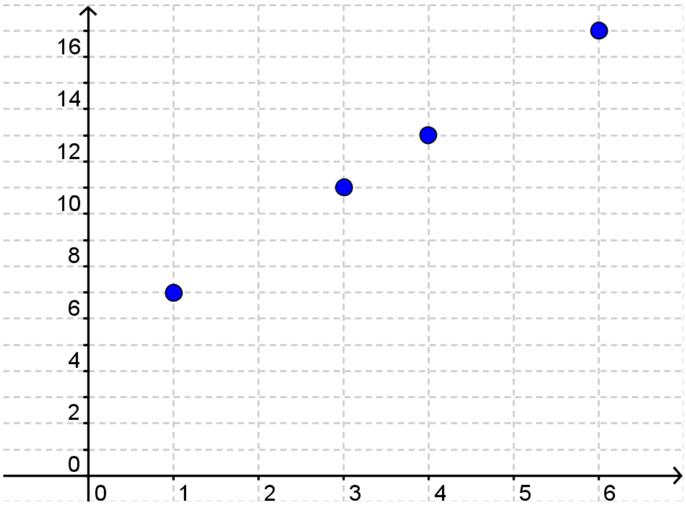


Hvis vi for forskellige x-værdier finder funktionsværdier (y-værdier), kan vi også tegne dem ind.

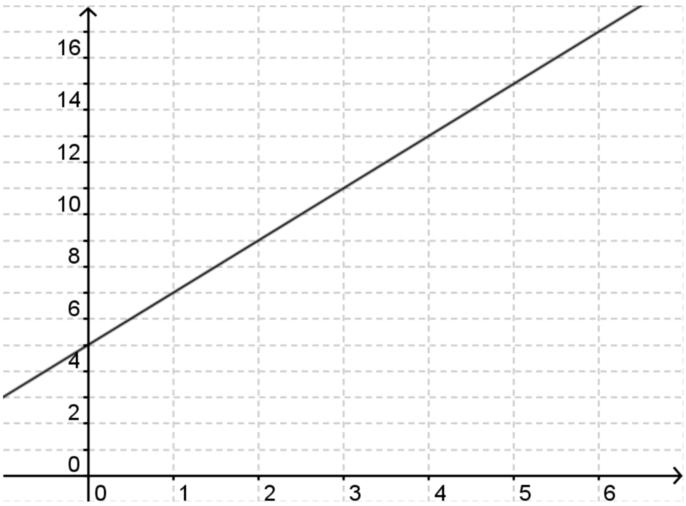
$$f(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$$

$$f(6) = 2 \cdot 6 + 5 = 12 + 5 = 17$$



Hvis vi endelig forestiller os, at vi tager alle x-værdier og beregner deres funktionsværdier og tegner de sammenhørende koordinatsæt ind i koordinatsystemet, så får vi grafen for funktionen.



3.3 Lineære funktioner

Hvis alle punkter på en graf ligger på en ret linje, siger vi, at funktionen er lineær. Dette kunne f.eks. være funktionen

$$y = x + 3$$

Hvis vi kommer forskellige tal ind på x's plads, får vi de tilsvarende y-værdier. Vi kan altså se, at x og y er variable, og at y afhænger af x. Derfor siger vi, at y er en funktion af x. Vi kan skrive de forskellige talpar ind i en tabel, der ofte kaldes et sildeben.

x	0	1	3	8	10	100
y	3	4	6	11	13	103

Generelt kan vi sige, at en lineær funktion er en funktion, der har forskriften

$$y = ax + b$$

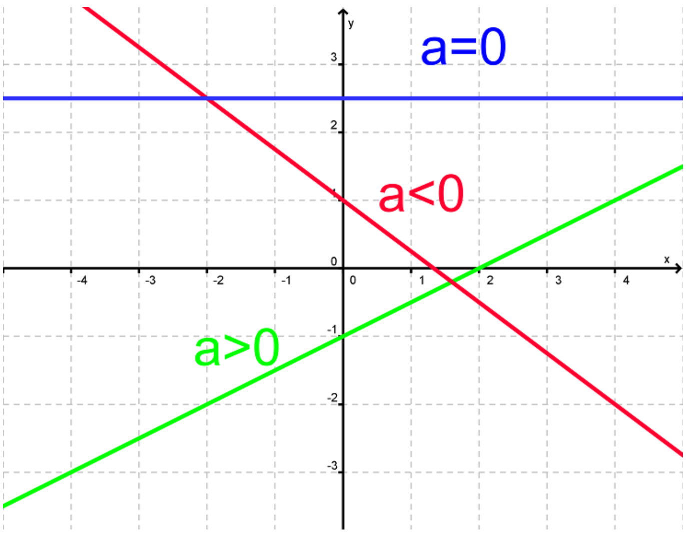
x og y er variable. Men hvad betyder tallene a og b?

Tallet a kaldes hældningskoefficienten, og tallet b kaldes skæringspunktet med y-aksen.

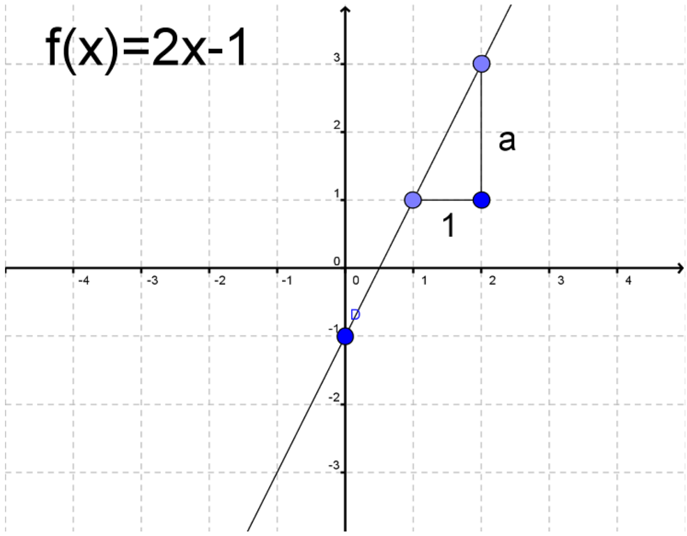
Hældningskoefficienten skal forstås som så meget, vores y-værdi vokser, hver gang vores x-værdi vokser med 1.

Hvis hældningskoefficienten er positiv vil funktionen altså vokse (så grafen starter nede til venstre og bevæger sig op mod højre), og hvis hældningskoefficienten er negativ, vil funktionen aftage (så grafen starter oppe til venstre og bevæger sig ned mod højre).

Hvis hældningskoefficienten er 0, vil funktionen hverken vokse eller aftage, og grafen vil således være parallel med x-aksen.



Da hældningskoefficienten bestemmes ud fra, hvor meget y vokser for hvert x, er det muligt at aflæse hældningskoefficienten på grafen ved (fra et valgfrit startpunkt) at gå 1 ud på x-aksen og se, hvor meget grafen bevæger sig opad.



På grafen ovenfor kan vi se, at man går 2 op, hver gang man bevæger sig 1 hen ad x-aksen. Derfor er a=2.

b er en konstant, der afgør, hvor grafen skærer y-aksen. Hvis b er positiv finder skæringen sted ovenfor origo, og hvis b er negativ er skæringen placeret under origo. Hvis b=0, skærer grafen yaksen i origo. I dette tilfælde skriver man funktionen som y=ax, og vi kalder det for ligefrem proportionalitet.

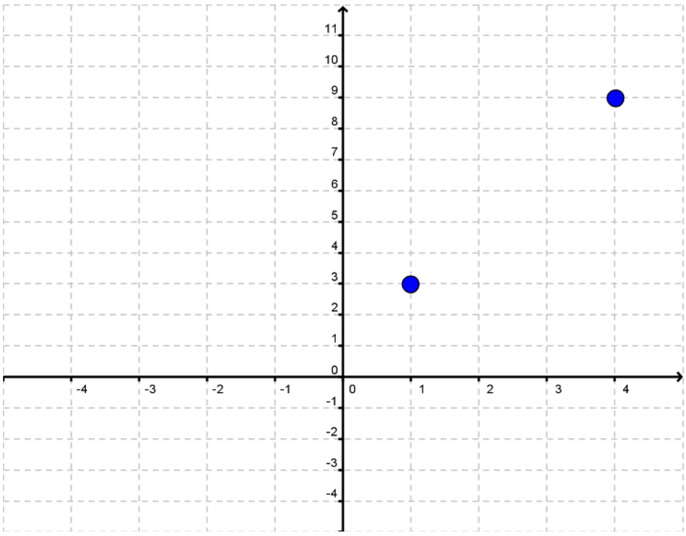
På billedet ovenfor kan vi aflæse b ved at se hvor grafen skærer y-aksen. Denne skæring er i punktet (0, -1). Derfor er b= -1

Grafen

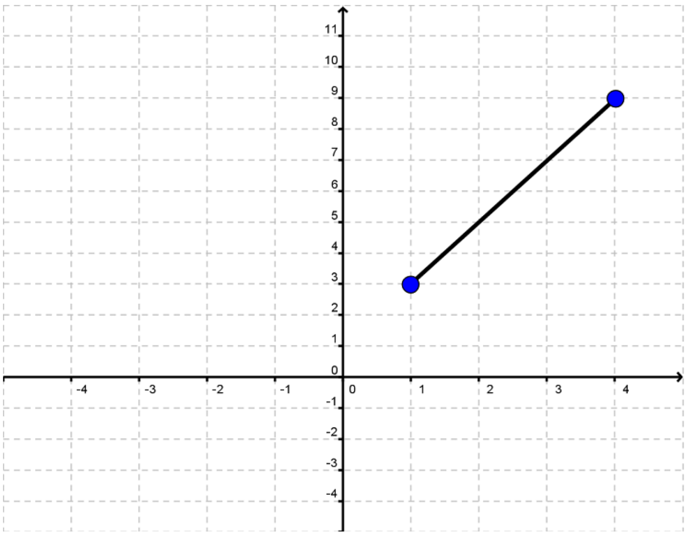
Alle lineære funktioner har grafer, der er rette linjer. Man kan tegne grafen ud fra 2 punkter. Hvis vi f.eks. gerne vil tegne grafen for y=2x+1, så starter vi med at lave et sildeben

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

Vi udvælger to punkter, det kunne være det første og det sidste, og tegner dem ind i et koordinatsystem.

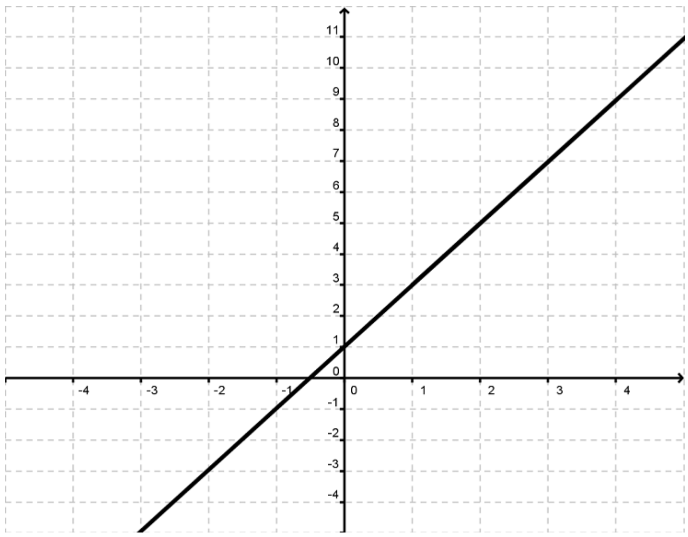


Nu kan vi tegne en ret linje mellem de to punkter



Vi kan se, at de øvrige punkter fra sildebenet (2, 5) og (3, 7) også ligger på denne linje.

Til sidst kan vi fortsætte linjen ud til både højre og venstre for at få grafen for y=2x+1

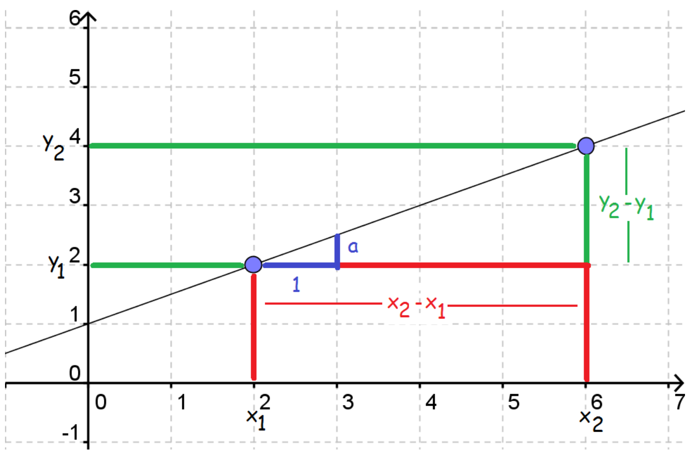


3.4 Find a og b (lineær)

Vi vil her gennemgå, hvordan man finder konstanterne a og b (hældningskoefficienten og skæringen med y-aksen), når man kender to punkter på grafen.

Lad os starte med at kalde de to punkter på grafen for hhv.

$$(x_1,\, y_1) \text{ og } (x_2,\, y_2)$$



Vi kan på billedet se, at de to trekanter er ensvinklede dvs. at

$$a = k \cdot (y_2 - y_1)$$

$$1 = k \cdot (x_2 - x_1)$$

Hvis vi dividerer den øverste ligning med den nederste, får vi

$$\frac{a}{1} = \frac{k \cdot (y_2 - y_1)}{k \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$a = \frac{\cancel{k} \cdot (y_2 - y_1)}{\cancel{k} \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Det vil altså sige, at hvis vi kender koordinaterne til to punkter, kan vi beregne a ved hjælp af formlen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Når vi først har fundet a, kan vi let finde b. Da vores to punkter ligger på grafen, betyder det, at vi kan sætte dem ind på hver sin side af lighedstegnet i den rette linjes ligning.

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

$$y_2 = a \cdot x_2 + b$$

Herefter er det bare at isolere b

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - a \cdot x_1$$

$$y_2 = a \cdot x_2 + b \Leftrightarrow b = y_2 - a \cdot x_2$$

Og vi har således to formler for at finde b.

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2$$

Lad os se på et eksempel.

Lad os sige, at vi har punkterne (2, 3) og (4, 7). Dvs x_1=2, y_1=3, x_2=4 og y_2=7. Vi starter med at finde a

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Nu ved vi at a=2, og vi kan finde b ved en hvilken som helst at de to formler ovenfor.

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2 = 7 - 2 \cdot 4 = 7 - 8 = -1$$

Altså er a=2 og b= -1. Forskriften for den rette linje vil således være

$$y = 2x - 1$$

3.5 Renteformlen

Hvis du sætter K_0=2.000 kr i banken til en årlig rente r=5%, hvor mange penge har du så efter 5 år? Det er noget vi kan udregne med renteformlen. Når man regner procentopgaver er det vigtigt, at man omregner procentdelen til decimaltal. Det gør man ved at dividere med 100, og i vores tilfælde får vi altså

$$5\% = \frac{5}{100} = 0.05$$

For hvert år har man altså det man havde før + 5% (0,05) af det man havde før. Eller sagt på en anden måde:

$$2000 \cdot 1 + 2000 \cdot 0,05 = 2000 \cdot (1 + 0,05) = 2000 \cdot 1,05$$

For hvert år skal man altså gange 1,05 på.

$$K_1 = 2000 \cdot 1,05 = 2100$$

$$K_2 = 2100 \cdot 1,05 = 2205$$

$$K_3 = 2205 \cdot 1,05 = 2315,25$$

$$K_4 = 2315,25 \cdot 1,05 = 2431,0125$$

$$K_5 = 2431,0125 \cdot 1,05 = 2552,56$$

Efter 5 år vil man altså have 2552,56 kr.

Det, vi gjorde, var jo at gange vores startværdi med 1,05 for hvert år, der gik. Dette kan vi generelt skrive som

$$K_n = 2000 \underbrace{\cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot \ldots \cdot 1,05}_{n \text{ gange}}$$

$$K_n = 2000 \cdot 1,05^n$$

For en generel startkapital K_0 og en generel rente r er renteformlen således

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Man beregner altså, hvor stort beløbet er efter n *terminer*. (Termin er et ord lånt fra bankverdenen, hvor det betyder perioden mellem to rentetilskrivninger).

I det første eksempel var det altså beløbet efter n terminer vi ikke kendte. Det er også muligt at isolere de øvrige størrelser i renteformlen

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n}$$

$$r = -1 + \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log(1 + r)}$$

Nedenfor gennemgåes eksempler hvor vi ønsker at finde K_0, r eller n.

Vi ønsker at finde K_0

For 5 terminer siden blev der sat et ukendt beløb i banken til 4% i rente pr. termin. Beløbet er vokset til 10000kr. Hvor mange penge blev der sat i banken?

Formlen opskrives, og de kendte størrelser indsættes:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$10000 = K_0 \cdot (1+0,04)^5$$

$$10000 = K_0 \cdot 1,04^5$$

$$K_0 = \frac{10000}{1,04^5} = 8219,27$$

For 5 terminer siden blev der altså sat 8219,27kr. i banken.

Vi ønsker at finde r

For 10 terminer siden blev der sat 15000kr. i banken. Nu står der 20000kr. på kontoen. Hvor stor har rentesatsen været?

Formlen opskrives, og de kendte størrelser indsættes:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$20000 = 15000 \cdot (1+r)^{10}$$

$$\frac{20000}{15000} = (1+r)^{10}$$

$$\sqrt[10]{\frac{20000}{15000}} = 1+r$$

$$\sqrt[10]{\frac{20000}{15000}} - 1 = r$$

$$r = 0,02919 = 2,919\%$$

Rentesatsen var altså 2,919%

Ligningen i denne opgave kan også let løses med et CAS-værktøj, som TI-Nspire eller Maple.

Vi ønsker at finde n

For længe siden blev der sat 15000kr. i banken til 2,5% i renter pr. termin. Nu står der 21194,60kr. på kontoen. Hvor længe er det siden de 15000kr. blev sat i banken?

Formlen opskrives, og de kendte størrelser indsættes:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$21194,60 = 15000 \cdot (1+0,025)^n$$

$$\frac{21194,60}{15000} = (1,025)^n$$

Nu står n alene som eksponent i vores ligning. Løsning af ligninger af denne slags, kræver at man kender til logaritmer. Hvis man ikke gør det, kan ligningen dog også nemt løses med et CAS-program som TI-Nspire eller Maple, men her gennemgåes resten af regnestykket med logaritmeregneregler:

$$\log\left(\frac{21194,60}{15000}\right) = \log\big((1,025)^n\big)$$

$$0,150134 = n \cdot \log(1,025)$$

$$n = \frac{0,150134}{\log(1,025)} = 14$$

De 15000kr. blev altså sat i banken for 14 terminer siden.

Renteformlen er et eksempel på eksponentiel udvikling

3.6 Eksponentiel udvikling

Hvis du har at gøre med noget, der vokser/aftager med en fast procent pr. tidsenhed, så er der tale om eksponentiel udvikling. Et vigtigt eksempel på eksponentiel udvikling er renteformlen.

Et andet eksempel kunne være en slags bakterie der fordobles (stiger med 100%) hver time. Hvis vi starter med at have 3 bakterier, vil vi efter en time have

$$3 \cdot 2 = 6$$

6 bakterier. Efter to timer vil vi have

$$6 \cdot 2 = 12$$

12 bakterier. Efter tre timer vil vi have

$$12 \cdot 2 = 24$$

24 bakterier, osv...

Læg mærke til, at vi kan skrive tallene om

$$6 = 3 \cdot 2^1$$

$$12 = 3 \cdot 2^2$$

$$24 = 3 \cdot 2^3$$

Hvis vi kalder antallet af bakterier efter x antal timer for y, så kan vi skrive at

$$y = 3 \cdot 2^x$$

Dette er et eksempel på en eksponentiel udvikling.

Generelt er eksponentielle udviklinger på formen

$$y = b \cdot a^x, \quad a > 0$$

Vi har allerede set, at x og y er variable, hvor y-værdien afhænger af, hvilken x-værdi vi propper ind på højre side. y er altså den afhængige og x den uafhængige variabel.

Men hvad er så a og b?

a er en konstant, der kaldes *fremskrivningsfaktoren*. Den fortæller noget om, hvor mange procent y vokser eller aftager med for hvert x. Hvis y vokser med r procent pr x har vi nemlig at

$$a = 1 + r$$

hvilket er det samme som at sige

$$r = a - 1$$

Hvis vi får at vide, at y vokser med 5 procent for hvert x, så er

$$a = 1 + r = 1 + 5\% = 1 + 0,05 = 1,05$$

Og hvis vi får at vide, at y aftager med 7 procent for hvert x, så er

$$a = 1 + r = 1 + (-7\%) = 1 - 0,07 = 0,93$$

Og hvis vi får at vide, at a=1,23, så kan vi finde r således

$$r = a - 1 = 1,23 - 1 = 0,23 = 23\%$$

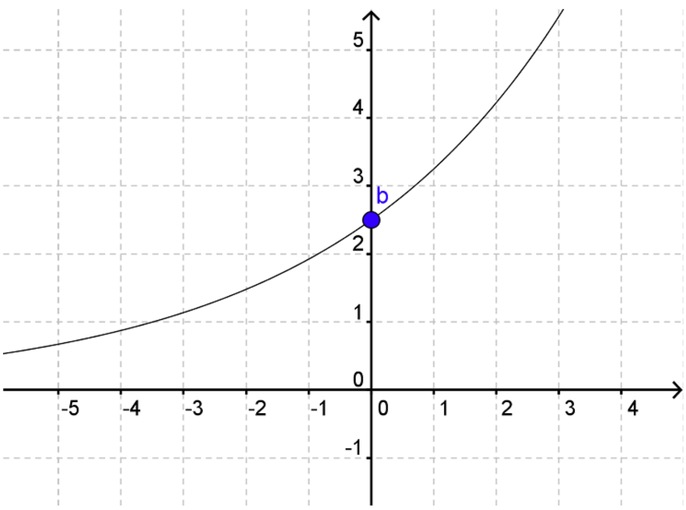
Generelt kan vi sige, at

Hvis a¿1, så er udviklingen voksende

Hvis 0¡a¡1, så er udviklingen aftagende.

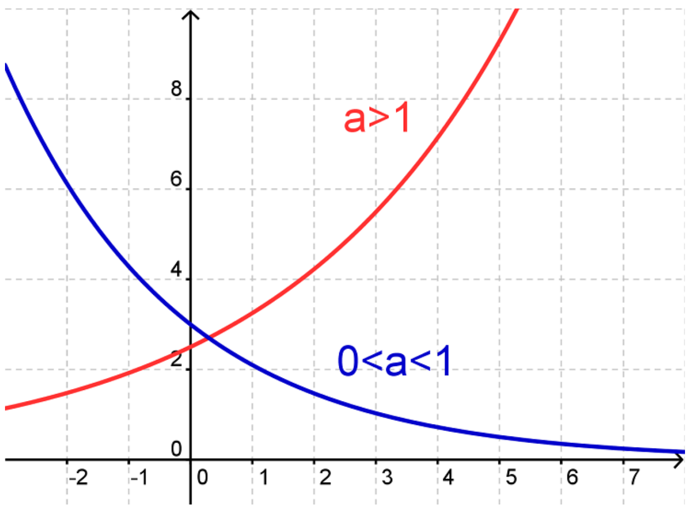
Konstanten b kaldes begyndelsesværdien. Det er den værdi, vi starter med. I eksemplet med bakterierne ovenfor var b=3.

På en graf kan vi aflæse b som skæringen med y-aksen.



I dette eksempel kan vi se, at b=2,5.

Man kan ikke på samme måde aflæse a ved at se på grafen. Dog kan man se, at hvis a er større end 1, så vil grafen krænge opad, og hvis a er mindre end 1 (men større end nul), så vil grafen krænge nedad.



Bemærk, at grafen aldrig krydser x-aksen

Her er en tabel over, hvordan man finder begyndelsesværdi, fremskrivningsfaktor og vækstrate ud fra forskriften for en eksponentiel udvikling.

Forskrift	Begyndelsesværdi (b)	Fremskrivningsfaktor (a)	Vækstrate/Rentefod (r)	Udvikling
$y = 450 \cdot 1,13^x$	450	$1,13$	$1,13 - 1 = 13\%$	voksende
$y = 217 \cdot 1,56^x$	217	$1,56$	$1,56 - 1 = 56\%$	voksende
$y = 132 \cdot 0,81^x$	132	$0,81$	$0,81 - 1 = -19\%$	aftagende
$y = 1,7 \cdot 0,1^x$	$1,7$	$0,1$	$0,1 - 1 = -90\%$	aftagende
$y = 2,3 \cdot 5^x$	$2,3$	5	$5 - 1 = 400\%$	voksende

Hvis man tegner grafen for en eksponentiel funktion i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem (dvs hvor y-skalaen er logaritmisk, og x-skalaen er almindelig), så får man en ret linje.

Find x og y

Når vi kender x og ønsker at finde det tilhørende y, så kan vi bare indsætte x på højresiden og så se, hvilket y, der kommer ud.

Hvis vi derimod kender y og ønsker at finde ud af, hvilket x der hører til, så skal vi først have isoleret

x. Til det skal vi bl.a. bruge logaritmeregnereglerne.

$$y = b \cdot a^x$$

$$\frac{y}{b} = a^x$$

$$\log(\frac{y}{b}) = \log(a^x)$$

$$\log(y) - \log(b) = x \cdot \log(a)$$

$$\frac{\log(y) - \log(b)}{\log(a)} = x$$

Nu kan vi bestemme x ved formlen

$$x = \frac{\log(y) - \log(b)}{\log(a)}$$

Lad os tage et eksempel.

Hvis vores funktion er

$$y = 5 \cdot 2^x$$

og vi får at vide, at x=3, så kan vi finde y sådan her

$$y = 5 \cdot 2^x = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$$

Hvis vi derimod får at vide, at y=80, så kan vi bestemme x som

$$x = \frac{\log(y) - \log(b)}{\log(a)} = \frac{\log(80) - \log(5)}{\log(2)} = \frac{1,903 - 0,699}{0,301} = 4$$

3.7 Find a og b (eksponentiel)

Vi vil her gennemgå, hvordan man finder konstanterne a og b (fremskrivningsfaktoren og skæringen med y-aksen) for en eksponentiel funktion, når man kender to punkter på grafen.

Lad os starte med at kalde de to punkter på grafen for hhv.

$$(x_1, y_1) \text{ og } (x_2, y_2)$$

Først finder vi fremskrivningsfaktoren. Den findes ved hjælp af formlen

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Når vi kender fremskrivningsfaktoren, finder vi skæringen med y-aksen ved at isolere b i en af de to ligninger:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1}$$

$$y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Dvs

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

$$b = \frac{y_2}{a^{x_2}}$$

Lad os se på et eksempel. Vi ønsker at bestemme forskriften for den eksponentielle funktion, der går gennem punkterne (1, 10) og (4, 80). Så er $x_1=1$, $y_1=10$, $x_2=4$ og $y_2=80$.

Vi finder først a

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[4-1]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

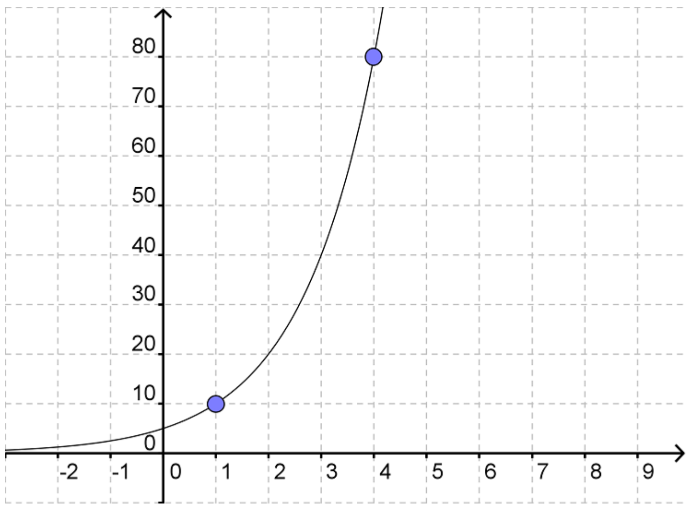
Nu kender vi a og kan beregne b. Vi behøver kun bruge en af formlerne for b, men nu viser vi, at man kan bruge begge.

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{10}{2^1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$b = \frac{y_2}{a^{x_2}} = \frac{80}{2^4} = \frac{80}{16} = \frac{16 \cdot 5}{16} = \frac{\cancel{16} \cdot 5}{\cancel{16}} = 5$$

Altså er forskriften for den eksponentielle funktion

$$y = 5 \cdot 2^x$$

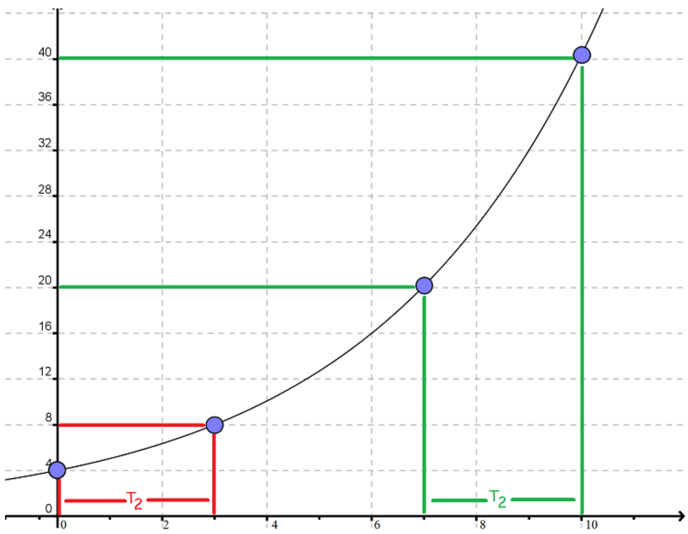


3.8 Fordoblings- og halveringskonstant

Når man har at gøre med en voksende eksponentiel funktion, så vil den vokse med en fast procent pr enhed på x-aksen. Efter et vist antal x-enheder vil den være vokset med 100% - dvs. den er fordoblet. Det stykke vi skal gå ud ad x-aksen, før funktionsværdien er fordoblet, kalder vi fordoblingskonstanten . Denne betegnes med T_2

Grunden til, at der er tale om en konstant, er, at da udviklingen sker med en vis procent, så er det ligegyldigt, hvorhenne vi starter, da der stadig skal et lige langt stykke x-akse til at nå op på 100%.

Det kan virke lidt abstrakt, men prøv at se på følgende billede. Her er fordoblinskonstanten 3. Når vi går fra 0 til 3 på x-aksen, bliver y-værdien fordoblet (fra 4 til 8). Når vi går fra 7 til 10 på x-aksen bliver y-værdien imidlertid også fordoblet (fra 20 til 40).



Men hvordan beregner vi så sådan en fordoblingskonstant? Lad os tage udgangspunkt i en eksponentialfunktion, der vokser med 26% for hvert x. Det betyder, at hver gang vi går 1 hen ad x-aksen, så skal vi gange med 1,26 på y-aksen.

Nu spørger vi os selv: Hvor mange gange skal vi gange med 1,26, før vi når op på 2 (en fordobling)?

x-stigning	y-stigning
1	$1,26$
2	$1,26 \cdot 1,26 = 1,5876$
3	$1,26 \cdot 1,26 \cdot 1,26 = 2$

Vi skal altså gå 3 skridt på x-aksen, før vi får fordoblet, og derfor er T2=3. Denne metode virkede kun, fordi vores fordoblingskonstant var et heltal. Generelt lyder

spørgsmålet: hvor mange gange skal man gange a med sig selv for at få 2? Eller udtrykt matematisk:

$$a^{T_2} = 2$$

For at finde T_2 bruger vi logaritmeregnereglerne

$$\log(a^{T_2}) = \log(2)$$

$$T_2 \cdot \log(a) = \log(2)$$

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Altså kan vi finde fordoblingskontanten ved formlen

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Hvis vores funktion således hedder

$$y = 323 \cdot 1,12^x$$

kan vi altså beregne fordoblingskontanten som

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1,12)} \approx 6,12$$

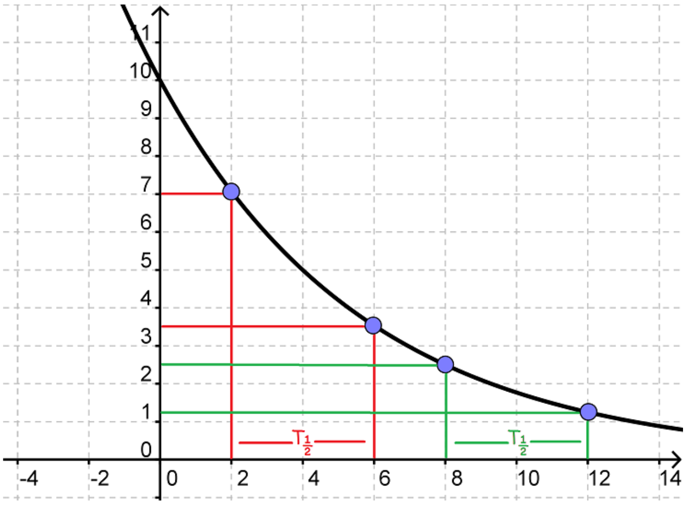
Dvs. at lige meget hvor vi starter, så vil vores y-værdi blive fordoblet, når vi går 6,12 ud ad x-aksen.

Halveringskonstant

Ligesom de voksende eksponentialfunktioner har en fordoblingskonstant, så har de aftagende eksponentialfunktioner en halveringskonstant. Denne betegnes med $T_{\frac{1}{2}}$

Her er der også tale om en konstant, da y-værdien aftager med en fast procent pr. x, og på et tidspunkt når man ned til 50% af det oprindelige.

På tegningen er halveringskonstanten 4.



Når vi går 4 ud ad x-aksen fra 2 til 6, så bliver vores y-værdi halveret fra 7 til 3,5. Og hvis vi var startet et andet sted f.eks. ved 8 og var gået 4 ud til 12, så ville vores y-værdi igen blive halveret, denne gang fra 2,5 til 1,25.

Lige meget, hvor vi var startet ville y-værdien halveres ved et 4trinsskridt på x-aksen. (F.eks. ville vi fra 0 til 4 halvere y-værdien fra 10 til 5).

Ligesom der fandtes en formel for fordoblingskonstanten, findes der også en for halveringskonstanten. Her stiller man sig selv spørsmålet "hvor mange gange skal jeg gange a med sig selv for at få $\frac{1}{2}$?".

$$a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

Løsningen på denne ligning findes på samme måde som ved fordoblingskonstanten og er

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$$

Hvis vores eksponentielle udvikling aftager med 10% (dvs a=0,90), så er halveringskontanten

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0,90)} \approx 6,58$$

Altså skal man gå 6,58 ud på x-aksen for at få halveret sin y-værdi.

Da eksponentialfunktioner ofte har at gøre med udvikling over tid, så kalder man til tider også fordoblingskonstanten for fordoblings*tiden* og halveringskonstanten for halverings*tiden*.

3.9 Potensfunktioner

Den tredje vigtige type funktion (udover lineære og eksponentielle) er potensfunktionerne.

Et eksempel på en potensfunktion kunne være

$$y = 5 \cdot x^2$$

Og den generelle forskrift for en potensfunktion er

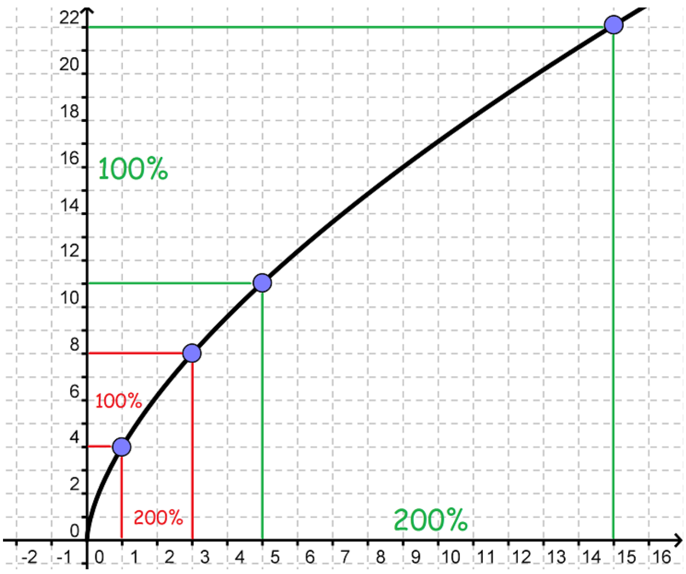
$$y = b \cdot x^a$$

Den hedder en potensfunktion, fordi den består af en potens (x^a) med fast eksponent (a) og variabelt grundtal (x). Derudover er der en koefficient, b, der ganges på.

Potensfunktionen har den egenskab, at når x-værdien stiger med en fast procent, så stiger y-værdien også med en fast procent. Under tiden kaldes potensfunktioner også procent-procent-vækst.

Det betyder med andre ord, at når vi ganger vores x-værdi med et tal, k, så skal vi gange vores y-værdi med k^a.

Læg mærke til, hvordan det adskiller sig fra eksponentialfunktionen, hvor y steg med en vis procent, når x steg med et tal. I potensvæksten skal x stige med en procent og ikke et tal, før y stiger med en bestemt procent.



Vi kan se på grafen, at når x vokser med 200% (dvs. vi ganger med 3), så vokser y med 100% (dvs. vi ganger med 2).

Når x=1, og vi stiger 200%, er vi oppe på 3. Og y er steget med 100% (fra 4 til 8)

Når x=5, og vi stiger med 200%, er vi oppe på 15. Og y er steget med 100% (fra 11 til 22).

Lige meget hvor vi starter, vil en forøgelse på 200% på x-aksen resultere i, at y forøges med 100%.

Man kan også udtrykke det på en anden måde.

Hvis vi fremskriver en x-værdi med faktoren F_x så fremskrives y-værdien med faktoren F_y, og sammenhængen mellem de to faktorer er

$$F_y = {F_x}^a \quad \Leftrightarrow \quad F_x = \sqrt[a]{F_y}$$

Hvis vi f.eks. har potensfunktionen

$$y = 5x^2$$

og vil fremskrive vores x-værdi med 20 % (Dvs F_x=1,20), så er

$$F_y = {F_x}^a = 1,20^2 = 1,44$$

Dvs. at når x stiger med 20% så vil y stige med 44%

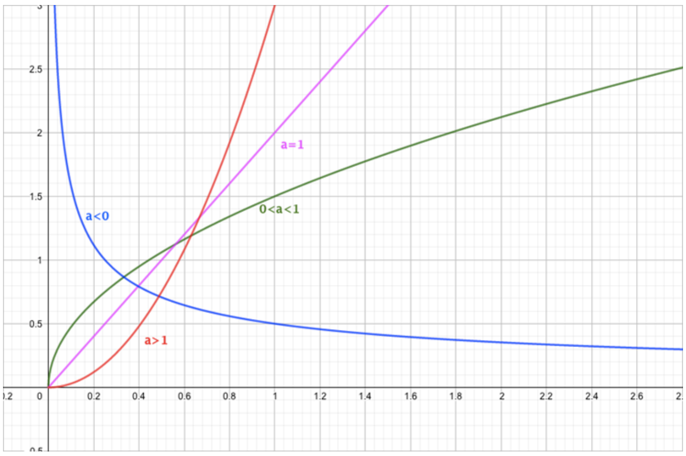
Hvis vi gerne vil have y til at stige med 69 % (dvs. F_y=1,69), hvor mange procent skal vores x så fremskrives?

$$F_x = \sqrt[a]{F_y} = \sqrt[2]{1,69} = \sqrt{1,69} = 1,30$$

Dvs. når y stiger med 69 % så stiger x med 30%.

Betydningen af a

I modsætning til de to andre funktionstyper, kan grafen for potensfunktioner se meget forskellige ud. Udseendet afhænger i høj grad af, hvilken værdi a har.



Vi ser, at hvis a er mindre end 0, vil grafen starte højt oppe og smyge sig ned langs y-aksen for så at nærme sig 0 og så smyge sig henad x-aksen. Bemærk, at den aldrig krydser nogen af akserne! Funktionen er altså aftagende.

Hvis a er 0, er funktionen konstant med y=b.

Hvis a ligger mellem 0 og 1, vil vi have en voksende graf, som flader mere og mere ud.

Hvis a er 1, har vi en ret linje (med hældning b). Og sidst men ikke mindst: hvis a er større end 1, har vi en graf, der vokser og bliver mere og mere stejl.

Når a ligger mellem 0 og 1, er potensfunktionen faktisk også en "rodfunktion". Som eks. Er

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

(se evt. afsnittet om kvadratrødder og andre rødder).

Derfor vil en funktion som

$$y = 5x^{\frac{1}{3}}$$

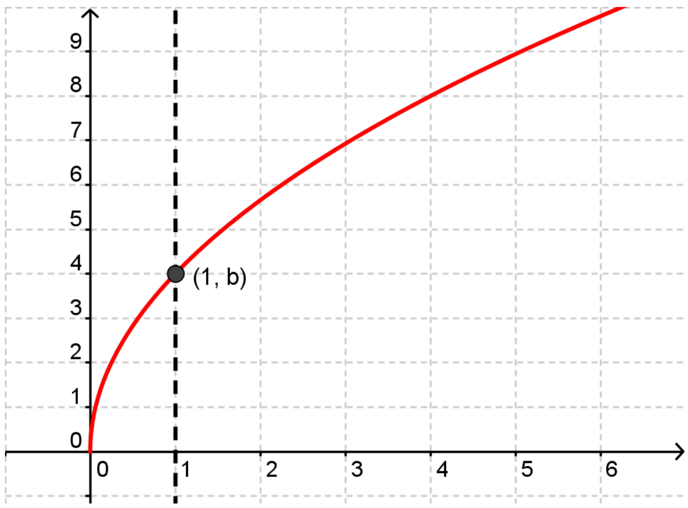
være det samme som

$$y = 5 \cdot \sqrt[3]{x}$$

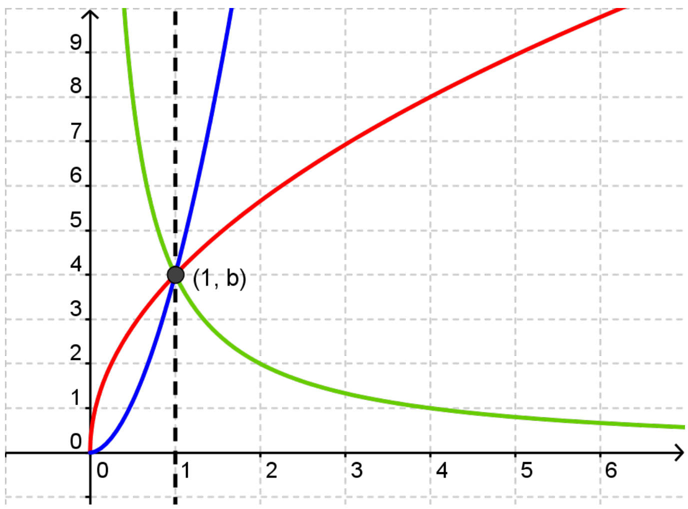
Betydning af b

Ovenfor har vi set, hvad tallet a betyder for grafens udseende.

Imidlertid siger tallet b også noget om, hvordan grafen ser ud. Det er nemlig den værdi, der er på y-aksen, når x er 1. For at aflæse b ud fra en graf skal man altså gå ud ad x-aksen til man støder på 1, og derefter gå op ad y-aksen, til man støder på grafen; y-værdien i dette punkt er så b.



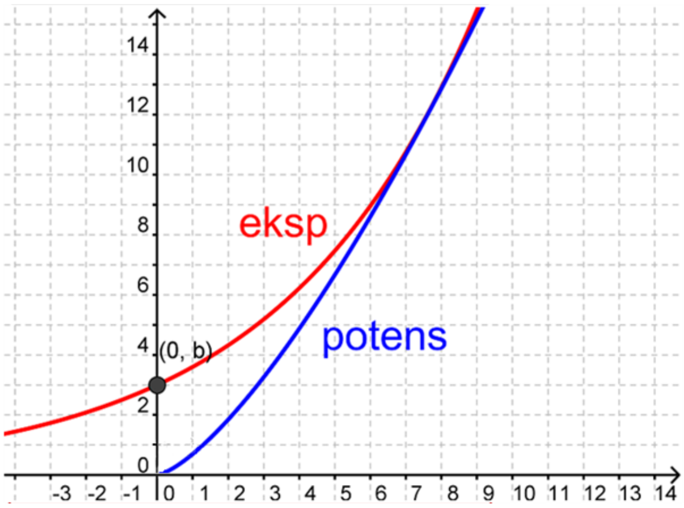
Her ser vi forskellige potensfunktioner med samme b-værdi (men vidt forskellige a-værdier).



Grafen

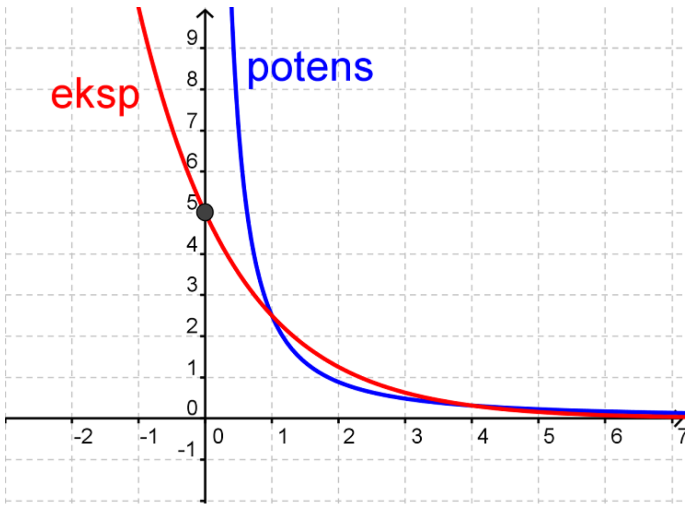
Nogle gange kan grafen for en potensfunktion ligne grafen for en eksponentiel funktion til forveksling. Imidlertid er der nogle tommelfingerregler, så man kan kende forskel.

Når a er større end 1, ligner grafer en voksende eksponentialfunktion. Der hvor de adskiller sig er, at grafen for en eksponentialfunktion vil skære y-aksen i punktet (0,b), mens potensfunktionens graf kommer uendeligt tæt på origo (0,0), men aldrig helt vil skære y-aksen (selvom det på grafen ser sådan ud), fordi potensfunktionen kun er defineret for positivie reelle tal.



Man kan også komme til at forveksle grafen for en potensfunktion med a mindre end 0 med aftagende eksponentialfunktioner.

Her skal vi igen huske, at en aftagende eksponentialfunktion skærer y-aksen i punktet (0, b), mens en potensfunktion med a mindre end 0 *aldrig skærer y-aksen.*



Hvis man har nogle punkter og vil finde ud af, om de tilhører en eksponentiel eller potensvækst, kan man tegne dem ind i forskellige koordinatsystemer.

En potensfunktion vil danne en ret linje i et *dobbeltlogaritmisk koordinatsystem*, mens en eksponentialfunktion vil danne en ret linje i et *enkeltlogaritmisk*(semilogaritmisk) koordinatsystem.

Find x og y

I en potensfunktion er y en funktion af x. Hvis vi kender x, kan vi altså sætte det ind på højre side og så finde ud af, hvad det tilhørende y er.

Hvis vi derimod kender y og gerne vil bestemme x, skal vi først have isoleret x i udtrykket.

$$y = b \cdot x^a$$

$$\frac{y}{b} = x^a$$

$$\sqrt[a]{\frac{y}{b}} = x$$

Vi kan altså finde x ved formlen

$$x = \sqrt[a]{\frac{y}{b}}$$

Lad os tage et eksempel.

Hvis

$$y = 4x^3$$

og vi får at vide, at x=2. Så kan vi beregne y ved at indsætte 2 på x's plads.

$$y = 4x^3 = 4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$$

y er altså 32.

Hvis vi får at vide, at y=108, så kan vi beregne x.

$$x = \sqrt[a]{\frac{y}{b}} = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

3.10 Find a og b (potens)

Vi vil her gennemgå, hvordan man finder konstanterne a og b (eksponenten og skæringen med linjen x=1) for en potensfunktion, når man kender to punkter på grafen.

Lad os starte med at kalde de to punkter på grafen for hhv.

$$(x_1, y_1) \text{ og } (x_2, y_2)$$

Først finder vi a. Den findes ved hjælp af formlen

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

Når vi har fundet a, kan vi finde b. Vi indsætter punkterne i forskriften for potensfunktionen og isolerer b. Det giver os to formler for b, og vi vælger selv, hvilken vi vil bruge.

$$y_1 = b \cdot {x_1}^a \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{y_1}{{x_1}^a}$$

$$y_2 = b \cdot {x_2}^a \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{y_2}{{x_2}^a}$$

Lad os se på et eksempel.

Hvis vores punkter er

$$(1,\ 4) \ \text{ og } \ (3,\ 36)$$

kan vi finde forskriften for potensfunktionen således.

Først finder vi a:

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{\log(36) - \log(4)}{\log(3) - \log(1)} = \frac{1,556 - 0,602}{0,477 - 0} = 2$$

Så finder vi b:

$$b = \frac{y_1}{{x_1}^a} = \frac{4}{1^2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$b = \frac{y_2}{{x_2}^a} = \frac{36}{3^2} = \frac{36}{9} = 4$$

Derfor er vores forskrift

$$y = 4x^2$$

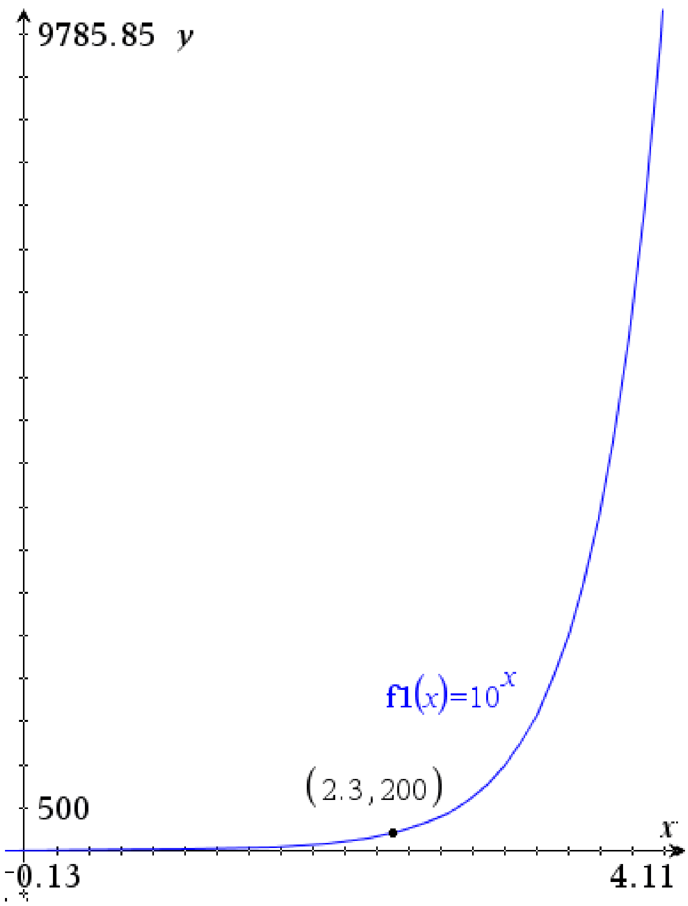
$$y1/(x1^{ln(y2/y1)/ln(x2/x1)})$$

3.11 Logaritmer

Hvordan løser vi ligningen

$$10^x = 200\,?$$

En måde er at gøre det grafisk



Vi kan altså se, at løsningen til ligningen er x=2,3.

Det ville imidlertid være smart, hvis vi kunne regne det ud uden at være nødt til at aflæse på en graf.

Det er derfor man har opfundet logaritmer.

Den eksponent, man skal opløfte 10 til for at få 200 kaldes 10tals-logaritmen til 200

Vi siger

$$\log_{10}(200) = 2,3 \quad \text{fordi} \quad 200 = 10^{2,3}$$

Vi kan gøre det mere generelt:

$$\text{Hvis} \quad y = 10^x \quad \text{så er} \quad \log_{10}(y) = x$$

eller sagt på en anden måde

$$\log_{10}(10^x) = x$$

Med ord ville man sige

10tals-logaritmen til et positivt tal er den eksponent, 10 skal opløftes til for at give tallet.

Her er nogle eksempler på, hvordan vi finder logaritmen til nogle tal.

$$\log_{10}(1000) = 3 \quad fordi \quad 10^3 = 1000$$

$$\log_{10}(100) = 2 \quad fordi \quad 10^2 = 100$$

$$\log_{10}(10) = 1 \quad fordi \quad 10^1 = 10$$

$$\log_{10}(1) = 0 \quad fordi \quad 10^0 = 1$$

$$\log_{10}(0,1) = -1 \quad fordi \quad 10^{-1} = 0,1$$

$$\log_{10}(0,01) = -2 \quad fordi \quad 10^{-2} = 0,01$$

Og her ser vi, hvordan vi finder 10tals-logaritmen til de første par naturlige tal.

$$\log_{10}(1) = 0 \quad fordi \quad 10^0 = 1$$

$$\log_{10}(2) = 0,301 \quad fordi \quad 10^{0,301} = 2$$

$$\log_{10}(3) = 0,477 \quad fordi \quad 10^{0,477} = 3$$

$$\log_{10}(4) = 0,602 \quad fordi \quad 10^{0,602} = 4$$

$$\log_{10}(5) = 0,699 \quad fordi \quad 10^{0,699} = 5$$

$$\log_{10}(6) = 0,778 \quad fordi \quad 10^{0,778} = 6$$

Ligesom vi så at

$$\log_{10}(10^x) = x$$

kan vi også vende det om og se at

$$10^{\log_{10}(x)} = x$$

Logaritmeregneregler

Når vi regner med logaritmer, er der nogle vigtige regneregler.

$$1. \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$2. \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$3. \quad \log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

Med ord kan vi sige

1. logaritmer oversætter gange til plus
2. logaritmer oversætter dividere til minus

3. når man tager logaritmen til en potens, må man rykke eksponenten ned foran.

Man kan bruge reglerne til at omforme udtryk, så de bliver lettere at regne ud. Lad os tage nogle eksempler

Hvis vi ønsker at udregne

$$\log_{10}(30)$$

kan vi benytte 1. regel

$$\log_{10}(30) = \log_{10}(6 \cdot 5) \stackrel{1.}{=} \log_{10}(6) + \log_{10}(5) = 0,778 + 0,699 = 1,477$$

Hvis vi ønsker at beregne

$$\log_{10}(0,9)$$

kan vi benytte regel 2 og regel 3, på følgende måde

$$\log_{10}(0,9) = \log_{10}(\frac{9}{10}) \stackrel{2.}{=} \log_{10}(9) - \log_{10}(10) = \log_{10}(3^2) - \log_{10}(10)$$

$$\stackrel{3.}{=} 2 \cdot \log_{10}(3) - \log_{10}(10) = 2 \cdot 0,477 - 1 = -0,046$$

I afsnittet om potensfunktioner, skulle vi udregne

$$\frac{\log_{10}(36) - \log_{10}(4)}{\log_{10}(3) - \log_{10}(1)}$$

Umiddelbart ser det svært ud, men ved at bruge reglerne ovenfor kan vi udregne det uden brug af lommeregner.

$$\frac{\log_{10}(36) - \log_{10}(4)}{\log_{10}(3) - \log_{10}(1)} \stackrel{2.}{=} \frac{\log_{10}(\frac{36}{4})}{\log_{10}(\frac{3}{1})} = \frac{\log_{10}(3^2)}{\log_{10}(3)} \stackrel{3.}{=} \frac{2 \cdot \log_{10}(3)}{\log_{10}(3)} = 2$$

Nu har vi set eksempler på, hvordan vi kan bruge logaritmeregnereglerne. Men hvorfor virker de egentlig? Det spørgsmål besvarer vi her ved at forklare reglerne. For at forstå den første logaritmeregneregel skal vi huske på tre ting.

$$\log_{10}(10^x) = x$$
$$10^{\log_{10}(x)} = x$$

samt potensregnereglen:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Nu er vi klar til at forklare den første logaritmeregneregel.

$$\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10}(10^{\log_{10}(a)} \cdot 10^{\log_{10}(b)})$$
$$= \log_{10}(10^{\log_{10}(a)+\log_{10}(b)}) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$$

På samme måde kan vi forklare 2. logaritmeregneregel

$$\log_{10}(\frac{a}{b}) = \log_{10}(\frac{10^{\log_{10}(a)}}{10^{\log_{10}(b)}})$$
$$= \log_{10}(10^{\log_{10}(a)-\log_{10}(b)}) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

Til at forklare den tredje regneregel, skal vi benytte den første.

$$\log_{10}(a^x) = \log_{10}(\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{x\ gange}) \stackrel{1.}{=} \underbrace{\log_{10}(a) + \ldots + \log_{10}(a)}_{x\ gange} = x \cdot \log_{10}(a)$$

Den naturlige logaritme og andre logaritmer

Den almindelige logaritme kaldes ofte for 10tals-logaritmen. Dette skyldes, at man jo skal se, hvilken eksponent man skal opløfte 10 til for at få tallet. Vi siger, at 10 er grundtallet. Men man kan også forestille sig logaritmer med andre grundtal.

En af de mest anvendte er *Den Naturlige Logaritme*. Denne betegnes ofte med $\ln(x)$ eller bare $\log(x)$. Grundtallet i den naturlige logaritme er Eulers tal.

$$e \approx 2,71828$$

For den naturlige logaritme gælder altså

$$\text{Hvis} \quad y = e^x \quad \text{så er} \quad \ln(y) = x$$

eller sagt på en anden måde

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

Man kan også bruge andre grundtal end 10 og e. I alle tilfælde markerer man hvilket grundtal man bruger ved at skrive det med sænket skrift efter log. F.eks. ville man skrive 2tals-logaritmen således:

$$\text{Hvis} \quad y = 2^x \quad \text{så er} \quad \log_2(y) = x$$

Man kan gøre det helt generelt med at skrive

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

Den naturlige logaritme skrives altid som

$$\log(x) \text{ eller } \ln(x)$$

BEMÆRK:

logaritmeregnereglerne gælder for alle logaritmer uanset grundtallet!

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

3.12 Opsparingsannuitet

Opsparingsannuitets-formlen bruges, når man regner på situationer, hvor der for eksempel indsættes et beløb hver måned på en opsparingskonto, som har en vis rente. Formlen ser således ud:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Som vi kan se, indgår der fire størrelser: A_n, b, $r$og$n$. b er det beløb du indbetaler hver termin, r er renten på din konto pr. termin, n er antal terminer (og antallet af indbetalinger) og $A_n$er det beløb du har på din konto efter n indbetalinger. Vi vil her gennemgå eksempler på at finde alle fire størrelser.

Vi ønsker at finde A_n

Du laver en opsparingsannuitet ved at foretage 10 indbetalinger på hver 2000kr. i banken til 1,7% i rente pr. termin. Hvor mange penge er der så på kontoen efter de 10 indbetalinger?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$A_{10} = 2000 \cdot \frac{(1+0,017)^{10} - 1}{0,017}$$

$$A_{10} = 2000 \cdot \frac{0,183612}{0,017}$$

$$A_{10} = 21601,50$$

Dvs., efter 10 indbetalinger er der 21601,50kr. på kontoen.

Vi ønsker at finde b

Efter 24 indbetalinger til en rente på 0,7% pr. termin står der nu 50000kr. på bankbogen. Hvor stort et beløb blev der sat i banken ved hver indbetaling?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$50000 = b \cdot \frac{(1+0,007)^{24} - 1}{0,007}$$

$$50000 = b \cdot \frac{0,182244}{0,007}$$

$$50000 = b \cdot 26,0349$$

$$b = \frac{50000}{26,0349} = 1920,50$$

Der blev altså sat 1920,50kr. i banken ved hver indbetaling.

Vi ønsker at finde r

Du har 18 gange indbetalt 2500kr. på en annuitetsopsparings konto, og nu står der 50000kr. på kontoen. Hvor stor har rentesatsen pr. termin været?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$50000 = 2500 \cdot \frac{(1+r)^{18}-1}{r}$$

Denne type af ligning, hvor den ubekendte størrelse $\boldsymbol{r}$ indgår både i en parentesudregning i tælleren og som en størrelse i nævneren, kan ikke umiddelbart løses vha. en lommeregner. Her kunne man gætte sig frem, men det kan være meget besværligt. Derfor løses ligningen i et CAS-værktøj som TI-Nspire eller Maple, og vi får løsningen:

$$r = 0.0122155 \cdot 100\% = 1,22\%$$

Rentesatsen pr. termin var altså 1,22%

Vi ønsker at finde $\boldsymbol{n}$

Du ønsker at spare 75000kr. sammen ved at lave en opsparingsannuitet på 3000kr. pr. indbetaling til 1,2% pr. termin. Hvor mange indbetalinger skal der foretages for at nå de 75000kr.?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$75000 = 3000 \cdot \frac{(1+0,012)^n - 1}{0,012}$$

Nu står n alene som eksponent i vores ligning. Løsning af ligninger af denne slags, kræver at man kender til logaritmer. Hvis man ikke gør det, kan ligningen dog også nemt løses med et CAS-program som TI-Nspire eller Maple, men her gennemgåes resten af regnestykket med logaritmeregneregler:

$$\frac{75000}{3000} = \frac{(1+0,012)^n - 1}{0,012}$$

$$\frac{75000}{3000} \cdot 0,012 = (1,012)^n - 1$$

$$\frac{75000}{3000} \cdot 0,012 + 1 = (1,012)^n$$

$$1,3 = (1,012)^n$$

$$\log(1,3) = \log\big((1,012)^n\big)$$

$$\log(1,3) = n \cdot \log(1,012)$$

$$n = \frac{\log(1,3)}{\log(1,012)} = 21,99 \approx 22$$

Der skal altså foretages 22 indbetalinger for at spare de 75000kr. sammen.

3.13 Gældsannuitet

Gældsannuitets-formlen bruges, når man regner på situationer, hvor man for eksempel har taget et lån med renter, der skal betales tilbage over et vist antal terminer. Formlen ser således ud:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Der indgår fire størrelser i denne formel, G, r, $y$og n. Derfor kaldes formlen også Gryn-formlen. G er lånets samlede beløb, r er renten hvormed lånet vokser, y er det beløb du afdrager hver termin, og n er antal terminer. Vi vil nu gennemgå eksempler på, hvordan man finder hver af de fire størrelser, når man kender de tre andre.

Vi ønsker at finde G

Du vil gerne optage et lån (eller købe en eller anden ting på afbetaling). Lånet skal afdrages over 12 terminer, og terminsrenten er 1,7 %. Du har kun råd til at afdrage 2000 kr. hver termin. Hvor stort et lån (eller hvor dyr en ting) har du råd til at optage?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$G = 2000 \cdot \frac{1-(1+0,017)^{-12}}{0,017}$$

$$G = 2000 \cdot \frac{0,183138}{0,017}$$

$$G = 21545,68$$

Du har altså råd til at optage et lån på 21.545,68 kr .

Vi ønsker at finde r

Du har lånt 50.000kr. i banken. Du har aftalt med banken, at lånet skal tilbagebetales over 36 terminer med 2000kr. pr. termin. Hvor stor er rentesatsen i % pr. termin?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$50000 = 2000 \cdot \frac{1-(1+r)^{-36}}{r}$$

Denne type af ligning, hvor den ubekendte størrelse $\boldsymbol{r}$ indgår både i en parentesudregning i tælleren og som en størrelse i nævneren, kan ikke umiddelbart løses vha. en lommeregner. Her kunne man gætte sig frem, men det kan være meget besværligt. Derfor løses ligningen i et CAS-værktøj som TI-Nspire eller Maple, og vi får løsningen:

$$r = 0,021211 \cdot 100\% = 2,12\%$$

Rentesatsen på dit lån er altså 2,12% .

Vi ønsker at finde $\boldsymbol{y}$

Du har lånt 50.000kr. i banken. Du har aftalt med banken, at lånet skal tilbagebetales over 24 terminer med en rentesats på 1,5% pr. termin. Hvor meget skal du betale i ydelse hver termin?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$50000 = y \cdot \frac{1-(1+0,015)^{-24}}{0,015}$$

$$50000 = y \cdot \frac{0,300456}{0,015}$$

$$50000 = y \cdot 20,0304$$

$$y = \frac{50000}{20,0304} = 2496,21$$

Du skal altså betale 2496,21 kr hver termin, for at betale dit lån af.

Vi ønsker at finde $\boldsymbol{n}$

Du har lånt 75.000kr. i banken til 1,2% i rente pr. termin. Du har råd til at tilbagebetale 3000kr. hver termin. Hvor lang tid tager det at afvikle lånet?

Vi opskriver formlen og indsætter de kendte størrelser:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$75000 = 3000 \cdot \frac{1-(1+0,012)^{-n}}{0,012}$$

Nu står n alene som eksponent i vores ligning. Løsning af ligninger af denne slags, kræver at man kender til logaritmer. Hvis man ikke gør det, kan ligningen dog også nemt løses med et CAS-program som TI-Nspire eller Maple, men her gennemgåes resten af regnestykket med logaritmeregneregler:

$$\frac{75000}{3000} = \frac{1-(1+0,012)^{-n}}{0,012}$$

$$\frac{75000}{3000} \cdot 0,012 = 1-(1,012)^{-n}$$

$$0,3 = 1-(1,012)^{-n}$$

$$(1,012)^{-n} = 1-0,3$$

$$\log((1,012)^{-n}) = \log(0,7)$$

$$-n \cdot \log((1,012)) = \log(0,7)$$

$$-n = \frac{\log(0,7)}{\log((1,012))}$$

$$-n = -29,9009$$

$$n = 29,9009$$

Gælden vil altså være afbetalt på 30 terminer .

4 Trigonometri

Trigonometri er en gren af matematikken som behandler relationen mellem sider og vinkler i trekanter. I afsnittet om trekanter og vinkler præsenteres vi for trigonometriens primære objekter, nemlig trekanterne, deres sider og vinkler. I de følgende afsnit lærer vi om de forskellige typer af trekanter og de nemmeste metoder til at udregne deres sider og vinkler. Vi gennemgår ensvinklede trekanter, ligesidede og ligebenede trekanter. I afsnittet om retvinklede trekanter gennemgået beviset for Pythagoras sætning, som bruges til at udregne sider og vinkler i en retvinklet trekant. Vi præsenteres desuden for cosinus, sinus og tangens, samt deres brug i retvinklede trekanter.

4.1 Trekanter og vinkler

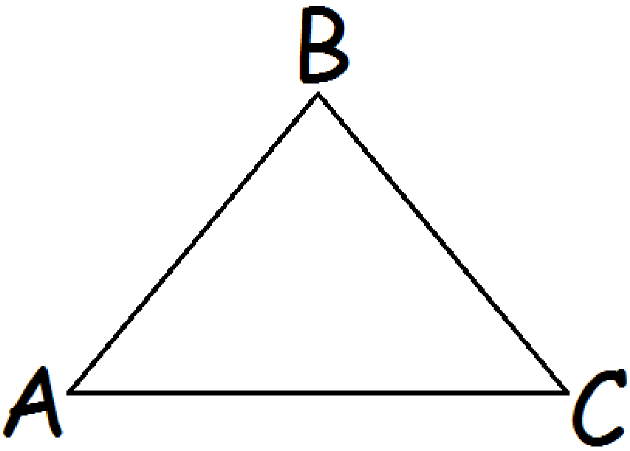
Trekanter og udregninger af sider og vinkler har udgjort en vigtig del af geometrien gennem flere tusinde år.

I dette afsnit skal vi prøve at få styr på nogle af de grundlæggende ting ved trekanterne.

Når vi med symboler skal omtale en trekant, så tegner vi først en lille trekant Δ, hvorefter vi skriver navnene på de tre hjørner i trekanten. F.eks. ville man skrive

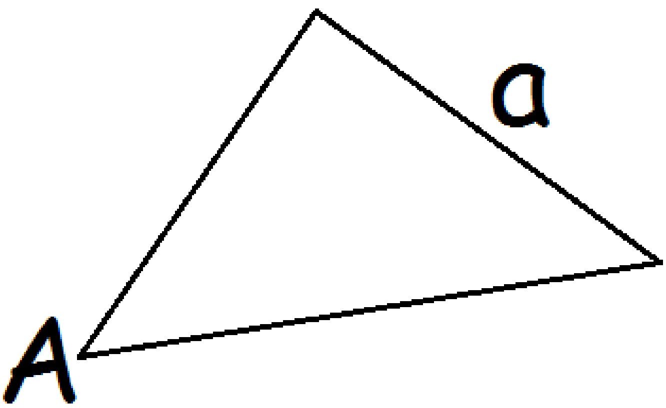
$$\triangle ABC$$

for at benævne denne trekant



Det er smart at skrive det på den måde for at kunne skelne to trekanter fra hinanden.

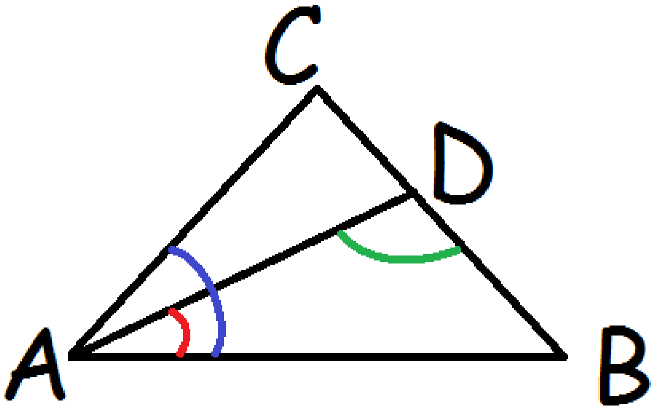
Vi plejer at betegne hjørnerne i en trekant med store bogstaver, og de overfor liggende sider med små bogstaver



Vinklerne i en trekant plejer vi at betegne med et vinkeltegn efterfulgt af hjørnets bogstav. F.eks.

$$\angle A$$

Nogle gange kan der imidlertid være flere vinkler fra samme hjørne. For at markere hvilken vinkel, man så taler om, kan man efter vinkeltegnet skrive højre vinkelbens endepunkt, hjørnet vinklen er i, og venstre vinkelbens endepunkt.



Her vil den blå vinkel hedde

$$\angle BAC$$

mens den røde vinkel vil hedde

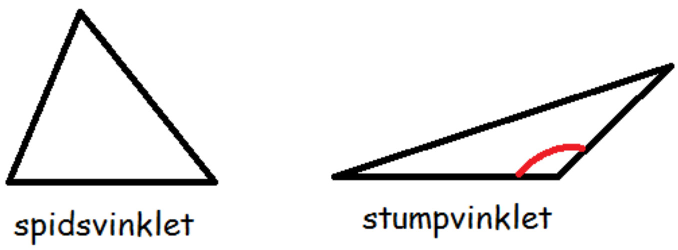
$$\angle BAD$$

og den grønne vil hedde

$$\angle ADB$$

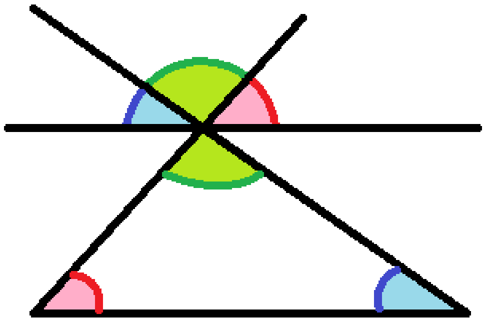
Spidsvinklede og stumpvinklede trekanter

En trekant er spidsvinklet, hvis alle vinklerne i den er spidse (det vil sige under 90°) Hvis en af vinklerne er stump (større end 90°), kaldes trekanten stumpvinklet.



Vinkelsum

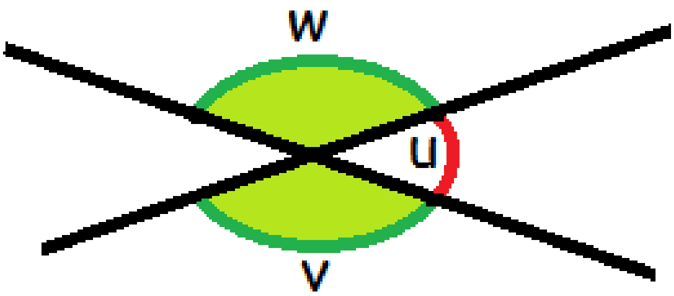
Vinkelsummen i en trekant vil altid være 180 grader. Argumentet for at det er sådan fat er følgende tegning.



Det er tydeligt, at de tre vinkler foroven udgør 180º. Den blå vinkel foroven er tydeligvis lige så stor som den blå vinkel i trekanten, fordi de er tegnet ud fra to parallelle linjer. På samme måde er de to røde vinkler lige store. Det er ikke lige så klart, at de to grønne vinkler er ens, men det er de, fordi de er topvinkler (hvilket vi kommer tilbage til nedenfor). Altså har vi at de tre vinkler i trekanten er ens med de tre vinkler foroven, der tilsammen udgør 180º. Derfor må de tre vinkler i trekanten sammenlagt være 180º.

Topvinkler

Når man har at gøre med to rette linjer, der skærer hinanden, kan man tale om topvinkler. Topvinkler er sådan nogle som v og w på tegningen herunder. Der gælder, at topvinkler er lige store.



Vi kan se, at

$$u + v = 180^\circ$$

og at

$$u + w = 180^\circ$$

Hvis vi isolerer v i den første ligning og w i den næste får vi

$$v = 180^\circ - u$$

$$w = 180^\circ - u$$

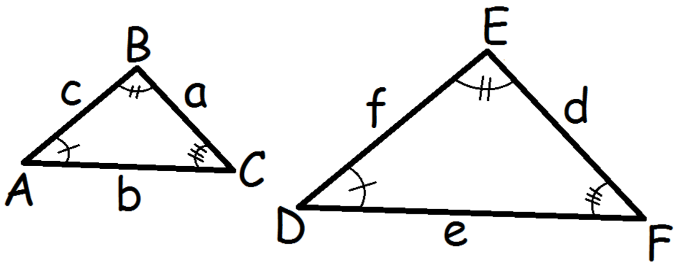
Altså er v og w lig med det samme, og derfor er de ens.

4.2 Ensvinklede trekanter

Ensvinklede trekanter spiller en vigtig rolle i teorien for trigonometri, så de er rigtig vigtige at få styr på.

Vi siger, at to trekanter er ensvinklede (eller ligedannede), hvis deres vinkler er parvist lige store.

Ensvinklede trekanter vil have samme form, og den eneste forskel på dem vil være, at den ene er en forstørrelse/formindskelse af den anden.



På tegningen kan vi se at

$$\angle A = \angle D$$

$$\angle B = \angle E$$

$$\angle C = \angle F$$

Derfor er de to trekanter ensvinklede. Hvis man med symboler vil skrive, at de er ensvinklede, skriver man:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

De sider der ligger overfor ens vinkler kaldes *ensliggende*. F.eks. er a og d ensliggende sider på tegningen herover, fordi de ligger overfor vinklerne A og D, der er lige store. Siderne b og e er også ensliggende, og lige så er c og f.

Som nævnt ovenfor vil ΔDEF være en forstørrelse af ΔABC.

Der findes altså et målestoksforhold mellem de to trekanter. Hvis vi siger, at de er i målestok 1:k, så gælder der at

$$d = k \cdot a$$

$$e = k \cdot b$$

$$f = k \cdot c$$

Dette betyder, at forholdet mellem de ensliggende sider vil være konstant.

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k$$

Dette er en meget vigtig egenskab ved ensvinklede trekanter, som man blandt meget andet bruger til at forklare cosinus og sinus.

Målestokforholdet betyder også, at forholdet mellem to sider i den samme trekant vil være det samme som forholdet mellem de ensliggende sider i den anden trekant. F.eks.

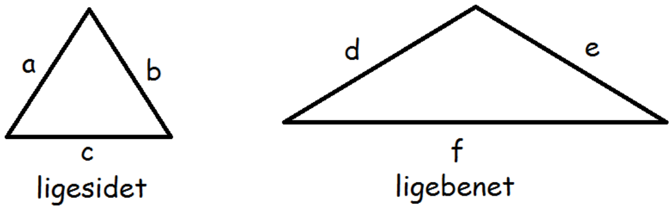
$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{d}{e}$$

Her forlængede vi brøken med k, hvorefter vi så at $d = k \cdot a$ og $e = k \cdot b$.

4.3 Ligebenede og ligesidede trekanter

Hvis alle tre sider i en trekant er lige lange, kalder vi den ligesidet.

Hvis det kun er to af siderne, der er lige lange, så kalder vi den ligebenet. De to lige lange sider kalder vi for "benene", mens den tredje side kaldes for grundlinjen.



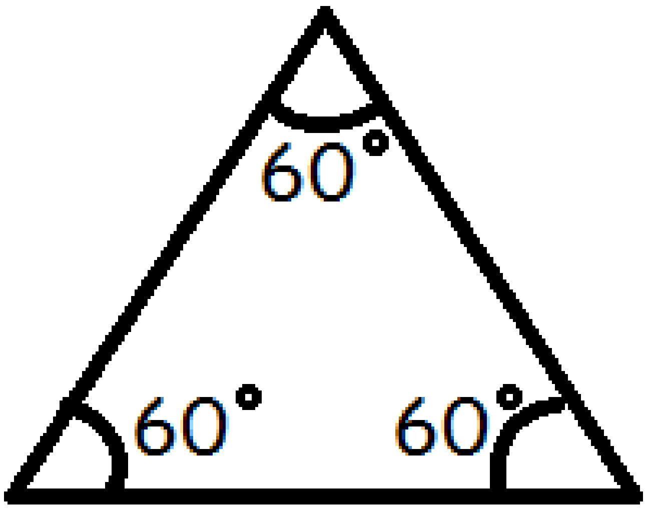
I den første trekant er alle tre sider lige lange, a=b=c

I den anden trekant er siderne d og e lige lange, d=e, mens vi ikke ved noget om hvor lang grundlinjen f er i forhold til dem.

Ligesidede trekanter

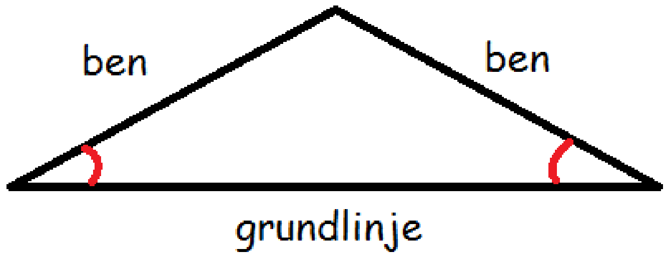
I ligesidede trekanter vil alle tre vinkler også være lige store. Og når vi husker at vinkelsummen i en trekant er 180º, så må hver vinkel i en ligesidet trekant være:

$$\frac{180°}{3} = 60°$$

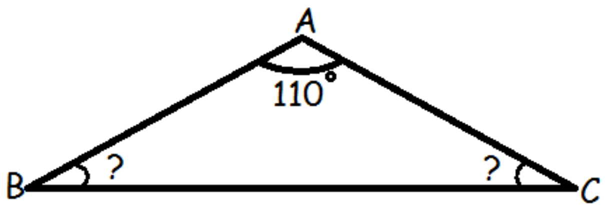


Ligebenede trekanter

I ligebenede trekanter vil de to vinkler, der ligger mellem benene og grundlinjen være ens.



Hvis vi f.eks. får at vide, at ΔABC er ligebenet, samt at vinklen overfor grundlinjen er 110º, og vi bliver bedt om at finde de to øvrige vinkler, kan vi gøre på følgende måde.



Vi ved, at vinkelsummen i en trekant er 180º. Derfor må

$$\angle B + \angle C + 110° = 180°$$

$$\angle B + \angle C = 180° - 110°$$

$$\angle B + \angle C = 70°$$

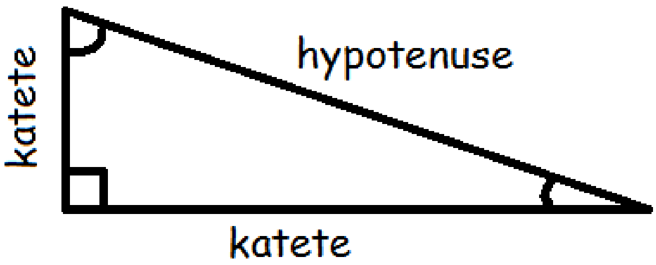
Altså ved vi nu, at de to vinkler tilsammen er 70º. Men fordi trekanten er ligebenet, ved vi, at de to vinkler ved grundlinjen er ens, og derfor må

$$\angle B = \angle C = \frac{70°}{2} = 35°$$

således, at de hver er 35 grader.

4.4 Retvinklede trekanter

En trekant, hvor en af vinklerne er 90º, kaldes retvinklet. Når man tegner en ret vinkel, plejer man at markere, at den er ret ved at tegne den firkantet i stedet for buet. Den side, der stå overfor den rette vinkel, kalder man hypotenusen, og de to sider, der er vinkelben for den rette vinkel, kaldes kateter.



I retvinklede trekanter gælder Pythagoras' læresætning:

$$(1.\text{katete})^2 + (2.\text{katete})^2 = (\text{hypotenusen})^2$$

Du kender den måske snarere som

$$a^2 + b^2 = c^2$$

men hvis man skiver den på den måde, så er det vigtigt at gøre opmærksom på, at det er vinkel C, der er ret.

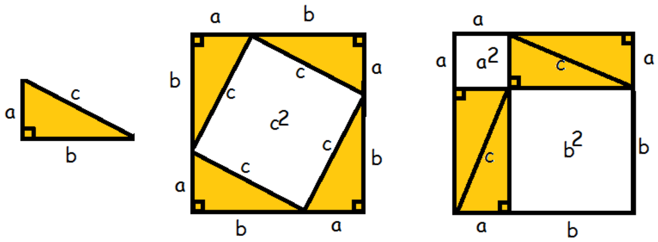
Hvis det f.eks. var vinkel A, der var ret, ville sætningen være:

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Hvis du vil se et eksempel på, hvor Pythagoras' læresætning bruges i virkeligheden, kan du klikke her.

Bevis for Pythagoras' læresætning

Man kan bevise Pythagoras' læresætning på mange måder. En af de letteste er ved hjælp af følgende tegning



Vi betragter den retvinklede trekant ΔABC, hvor det er vinkel C, der er ret (I).

Vi tegner 4 af disse trekanter ind i et kvadrat med sidelængde a+b (II).

Den del af kvadratet, der ikke bliver dækket af trekanterne er selv et kvadrat med sidelængde c, og har derfor arealet

$$c \cdot c = c^2$$

Nu rykker vi rundt på de fire trekanter (III). Det område, der ikke er dækket af trekanterne danner to kvadrater. Det første har areal a^2, det andet har b^2.

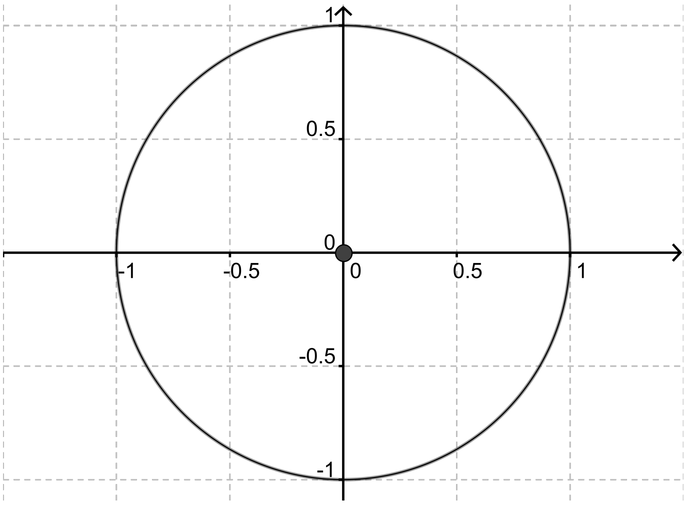
Da vi bare har flyttet rundt på trekanterne mellem (II) og (III) må arealet af det udækkede område være uændret. Derfor er

$$a^2 + b^2 = c^2$$

4.5 Cosinus og sinus

Enhedscirklen

Indenfor trigonometrien benytter man en særlig cirkel kaldet enhedscirklen. Det særlige ved den er, at den har centrum i origo (dvs. punktet (0, 0)), og har radius 1.



Enhedscirklen er vigtig, fordi det er ud fra den, vi definerer funktionerne cosinus og sinus.

Cosinus og Sinus

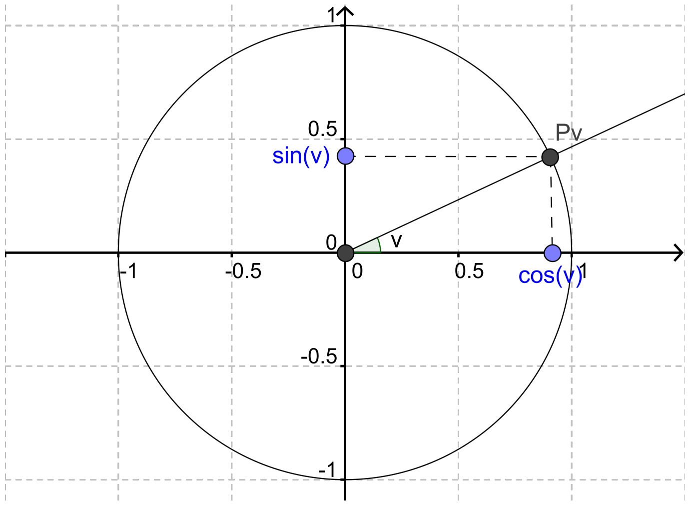
Cosinus og Sinus er to funktioner, hvor man putter en vinkel ind, og hvor der så kommer et tal mellem -1 og 1 ud. De kaldes trigonometriske funktioner, fordi man kan bruge dem til at beregne ting, der har med trekanter at gøre.

Men hvad er de egentlig for nogle funktioner? Hvis du vil se et eksempel på, hvor cosinus og sinus kan bruges i virkeligheden, kan du klikke her.

Mens mange funktioner er givet direkte ved en forskrift, er cosinus og sinus givet ud fra enhedscirklen.

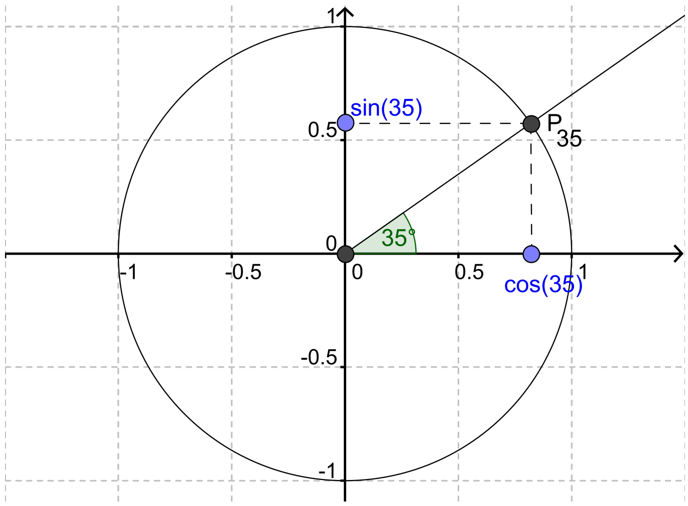
Lad os kalde den vinkel, vi ønsker at putte ind i cosinus eller sinus, for v. Nu indtegner vi vinkel v i samme koordinatsystem som en enhedscirkel. Vi placerer v, så den har toppunkt i origo og har sit højre vinkelben langs x-aksen. Det venstre vinkelben vil skære enhedscirklen i et punkt, som vi kalder P_v, retningspunktet.

Koordinat-sættet til Pv er simpelthen cos(v) og sin(v), således at x-koordinaten er cos(v) og y-koordinaten er sin(v).



Så hvis du bliver spurgt, hvad sinus og cosinus er, kan du svare, at det simpelthen bare er koordinatsættet til et punkt på enhedscirklen.

Lad os prøve at indtegne en vinkel på 35º



Hvis man kunne aflæse meget præcist, kunne man se at

$$P_{35}(0.819,\, 0.574)$$

hvilket betyder at

$$\cos(35^\circ) = 0,819$$

$$\sin(35^\circ) = 0,574$$

Der er ingen, der kan aflæse så præcist. Så i praksis benytter man en lommeregner, der har indbygget knapper for cosinus og sinus.

Her er en tabel med nogle af de vigtige værdier for cosinus og sinus.

Vinkel	Cosinus	Sinus
0°	**1**	**0**
30°	0,866	0,5
45°	0,707	0,707
60°	0,5	0,866
90°	**0**	**1**
120°	-0,5	0,866
135°	-0,707	0,707
150°	-0,866	0,5
180°	**-1**	**0**
210°	-0,866	-0,5
225°	-0,707	-0,707
240°	-0,35	-0,866
270°	**0**	**-1**
300°	0,5	-0,866
315°	0,707	-0,707
330°	0,866	-0,5
360°	**1**	**0**

$\cos^{-1}$ og $\sin^{-1}$

Det er også muligt at regne den anden vej. Hvis man har et tal mellem -1 og 1 og vil vide, hvilken vinkel det er sinus- (eller cosinus-)værdi for, så kan man bruge funktionerne $\sin^{-1}$ eller $\cos^{-1}$ (som også findes på lommeregneren).

Hvis vores tal f.eks. er 0,574, og vi vil finde ud af hvilken vinkel, v, det er cosinus for, kan vi gøre således.

$$\begin{aligned} \cos(v) &= 0,574 \Leftrightarrow \\ v &= \cos^{-1}(0,574) \\ v &= 54,97^\circ \end{aligned}$$

En anden måde at forklare det på er, at hvis man vil rykke cos hen på den anden side af lighedstegnet, så bliver det til $\cos^{-1}$. Præcis ligesom plus bliver til minus, og gange til dividere, når man rykker det over lighedstegnet.

4.6 Tangens

Tangens er en trigonometrisk funktion ligesom cosinus og sinus. Det er ligeledes en funktion, hvor man kommer en vinkel ind, men i modsætning til cosinus og sinus, hvor man kun kunne få et tal ud mellem -1 og 1, så kan man få alle reelle tal ud med tangens.

Tangens er defineret til at være

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$$

Som et eksempel kan man beregne tangens til en vinkel på 35 grader således

$$\tan(35) = \frac{\sin(35)}{\cos(35)} = \frac{0,574}{0,819} = 0,700$$

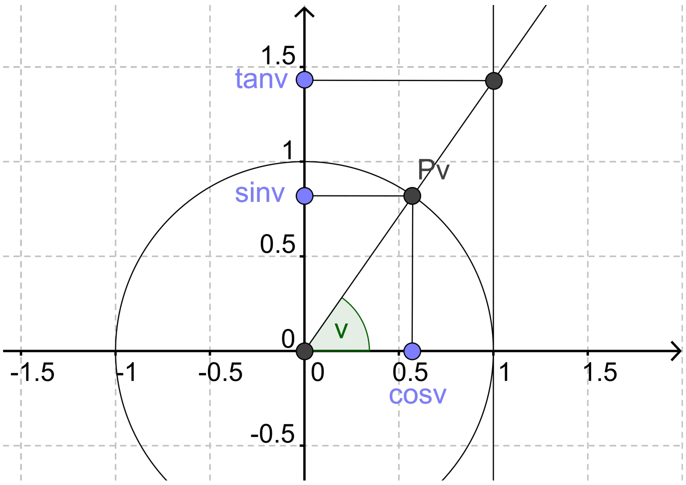
Bemærk, at mens man må komme alle vinkler ind i cosinus og sinus, så er der nogle forbudte værdier for tangens. Tangens er nemlig defineret som en brøk, og i en brøk må nævneren aldrig give 0. Så de vinkler, der gør at nævneren (cos(v)) giver 0, er forbudte.

Ved at se på enhedscirklen kan man indse, at de vinkler, der giver cos(v)=0 er

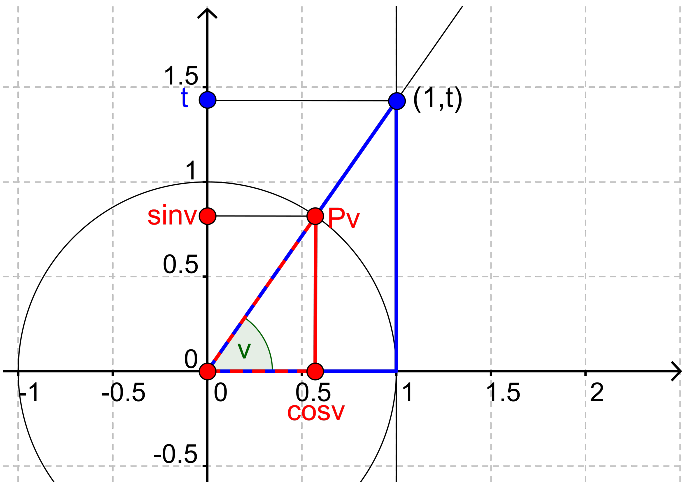
$$90°, 270°, 450°, 630° \ldots$$

hvor man lægger 180 til hver gang.

Ligesom cosinus og sinus kunne visualiseres ved hjælp af enhedscirklen, så kan tangens også aflæses på en sådan tegning. Man starter med at indtegne linjen x=1, altså en lodret linje, der tangerer enhedscirklen i punktet (1, 0). Så ser man på, hvor venstre vinkelben skærer denne linje. Skæringspunktets y-koordinat er tangens til vinklen.



Det er ikke umiddelbart klart, hvorfor det forholder sig sådan. Tricket til at gennemskue det er, at den blå og den røde trekant på tegningen nedenfor er ensvinklede



Vi vil gerne vise, at det, der hedder "t"på tegningen, er det samme som tangens til v.

Vi ser, at cos(v) i den røde trekant er ensliggende med 1 i den blå, og at sin(v) i den røde trekant er ensliggende med t i den blå.

Da den røde og den blå trekant er ensvinklede, er forholdet mellem to sider i den røde trekant det samme som forholdet mellem de to ensliggende sider i den blå trekant.

Altså har vi

$$\frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{t}{1} = t$$

men vi har også at

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$$

og derfor er

$$\tan(v) = t$$

4.7 Cosinus, Sinus og Tangens i retvinklede trekanter

I de forrige afsnit så vi, hvordan man definerer cosinus, sinus og tangens. I dette afsnit skal vi se, hvordan man kan bruge dem til at beregne sider og vinkler i retvinklede trekanter.

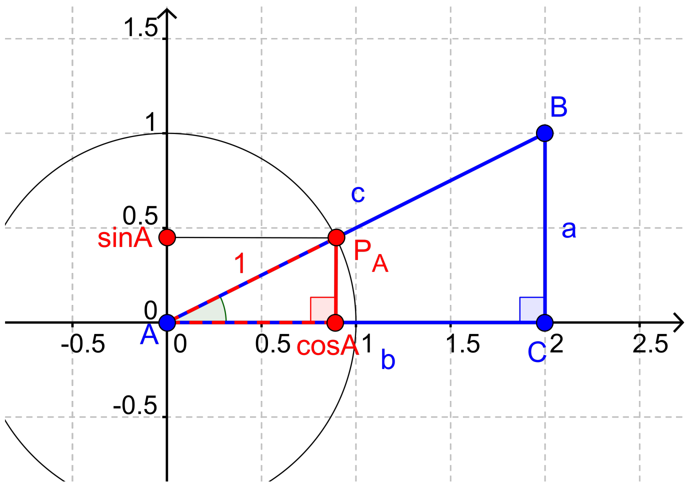
Det viser sig nemlig, at hvis v er en vinkel i en retvinklet trekant, så vil

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Grunden til, at det forholder sig sådan, er, at hvis vi har en retvinklet trekant ΔABC (som den blå nedenfor), kan vi tegne den ind i et koordinatsystem sammen med en enhedscirkel, således at vinkel A er i origo.



Den røde trekant på tegningen har sidelængderne cos(A), sin(A) og 1, (fordi linjestykket fra A til P_A er en radius på enhedscirklen og derfor har længde 1)

Nu kan vi se, at vores oprindelige trekant (den blå) er ensvinklet med den røde (fordi de begge indeholder vinkel A og begge har en ret vinkel, så deres tredje vinkel også er nødt til at være ens).

Vi kan se, at

cos(A) er ensliggende med b,

sin(A) er ensliggende med a,

og 1 er ensliggende med c.

Nu bruger vi egenskaben ved ensvinklede trekanter, at forholdet mellem to sider i den ene trekant er lig med forholdet mellem de ensliggende sider i den anden trekant.

$$\frac{\cos(A)}{1} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \cos(A) = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sin(A)}{1} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin(A) = \frac{a}{c}$$

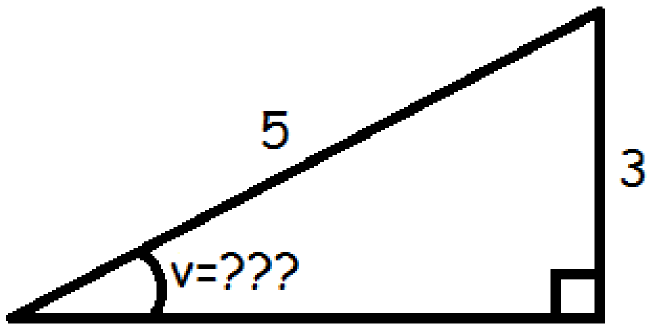
Vi kan også finde tangens til A:

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{a}{b}$$

Altså de samme formler, som vi skrev øverst (da a er modstående katete, b er hosliggende katete og c er hypotenuse i den retvinklede trekant).

Lad os tage nogle eksempler.

Vi ønsker at finde v i følgende trekant.



Vi ser at vi kender den modstående katete (modstående i forhold til vinkel v) og hypotenusen.

Derfor skal vi have fat i sinus.

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\sin(v) = \frac{3}{5} = 0,6$$

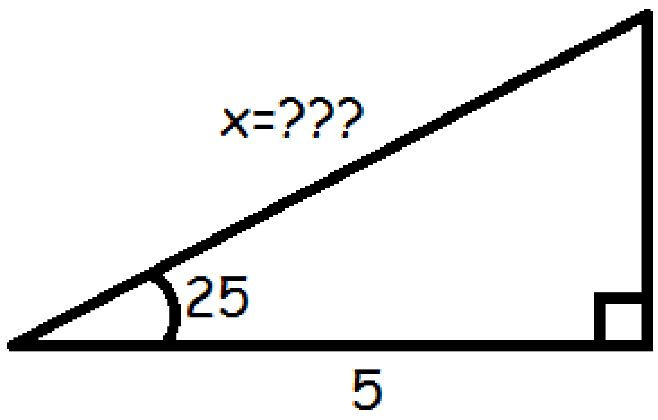
Nu tager vi $\sin^{-1}$ på begge sider for at finde frem til vinklen.

$$v = \sin^{-1}(0,6)$$

$$v = 36,87°$$

Et andet eksempel:

Vi ønsker at bestemme hypotenusen i følgende trekant.



Vi kender den hosliggende katete (hosliggende i forhold til vinklen), og ønsker at bestemme hypotenusen. Altså er det cosinus, vi skal have fat i.

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\cos(25°) = \frac{5}{x}$$

$$x \cdot \cos(25°) = 5$$

$$x = \frac{5}{\cos(25°)}$$

$$x \approx 5,52$$

5 Geometri

I geometri beskæftiger man sig bl.a. med 2- og 3-dimensionale figurer. Når man regner på den slags, skal man være opmærksom på enhederne. Enhederne er det første vi gennemgår i afsnittet om geometri. Herefter lærer vi metoder til at beregne arealet af de hyppigst forekommende todimensionelle figurer (forskellige former for firkanter og trekanter samt cirklen). I sidste afsnit lærer vi at beregne tredimensionelle figurers rumfang (kasser, pyramider, cylindre, kegler og kegler og kuglen). Her bruger vi også et vi tidligere har lært om todimensionelle figurers areal.

5.1 Enheder

I geometri beskæftiger man sig bl.a. med 2- og 3-dimensionale figurer. Når man regner på den slags, skal man være opmærksom på enhederne.

Hvis man ikke har specificeret, hvilke enheder man måler siderne i, vælger man typisk ikke at angive noget. Man kan dog vælge at udtrykke arealet i ”arealenheder - ae”og voluminet i ”volumenenheder - ve”.

Hvis man derimod har angivet en enhed, skal man være på vagt, hvis man vil omregne den til andre enheder.

Hvis vi har et kvadrat, med sidelængderne 1 m, så må arealet være

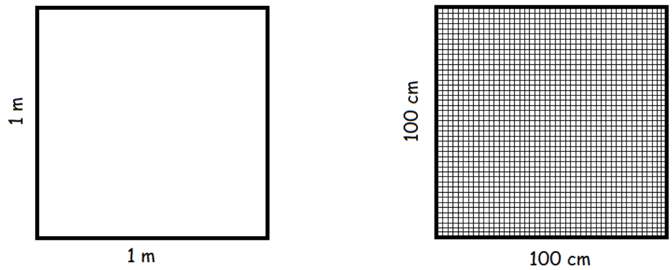
$$1\ \text{m} \cdot 1\,\text{m} = (1\ \text{m})^2 = 1^2\,\text{m}^2 = 1\,\text{m}^2$$

1 kvadratmeter.

Men hvor mange kvadratcentimeter svarer 1 kvadratmeter til? Man fristes til at sige 100, men det er faktisk forkert. Det viser sig, at 1 kvadratmeter svarer til 10.000 kvadratcentimeter.

$$(1\,\text{m})^2 = (100\text{cm})^2 = 100^2\text{cm}^2 = 10.000\text{cm}^2$$

Måske kan denne tegning hjælpe med at forstå det intuitivt. Når vi inddeler siderne i cm, så er der jo 100 på hver led. Altså er der 100*100 tern på billedet til højre.



Hvis en figur har et areal på

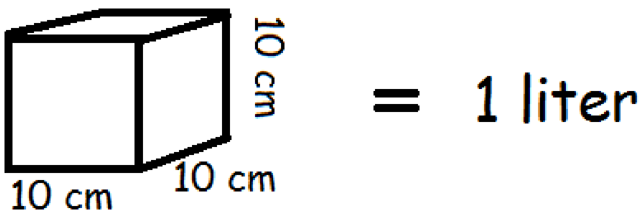
$$400.000\,\text{cm}^2$$

kan vi omregne det til kvadratmeter således

$$\begin{aligned} 400.000\,\text{cm}^2 &= 40 \cdot 10.000\,\text{cm}^2 \\ &= 40 \cdot 100^2\text{cm}^2 \\ &= 40 \cdot (100\,\text{cm})^2 \\ &= 40 \cdot (1\text{m})^2 \\ &= 40\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Volumen

Den mest gængse volumen-enhed i dagligdagen er liter. 1 liter svarer til 1 kubikdecimeter. Hvis en mælkekarton havde været kubisk, ville alle siderne altså have været en decimeter (10 cm).



Men hvor mange liter går der så på en kubikmeter?

$$1 \text{ m}^3 = (10 \text{ dm})^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ liter}$$

Der skal altså 1000 liter til, før man har en kubikmeter.

Vi kunne også have spurgt, hvor mange kubikcentimeter, der går på en kubikmeter. Det kan du se svaret på i videolektionen.

5.2 Areal

I dette afsnit vil vi gennemgå, hvordan man beregner arealet af forskellige geometriske figurer. Vi starter med rektanglet og bevæger os derefter videre til andre figurer. For hver af dem giver vi et argument for, hvorfor arealformlen ser ud, som den gør.

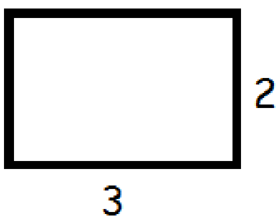
Rektanglet

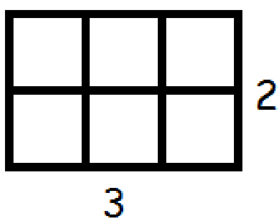
Et rektangel er en firkant, hvor alle vinkler er 90^{o}.

Man finder arealet ved at gange længden med bredden.

$$A = l \cdot b$$

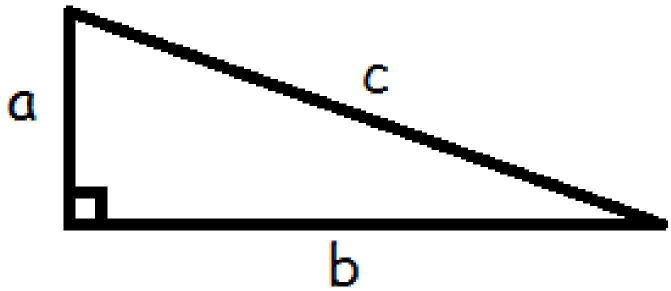
Et eksempel på dette er, at et rektangel med længde 3 og bredde 2 har areal 6. Dette fremgår af denne tegning





Retvinklet trekant

Når vi har med trekanter at gøre, så betegnes arealet ofte med T.



Vi finder arealet af en retvinklet trekant ved at gange de to kateter med hinanden og dividere med to.

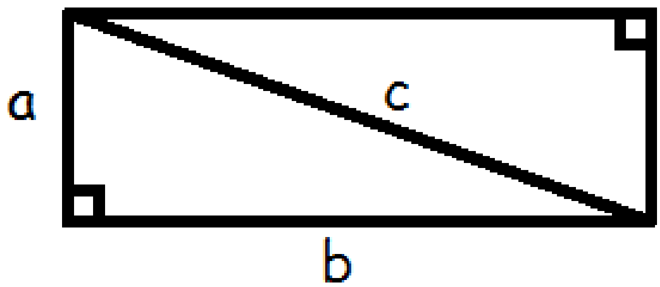
$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Læg mærke til, at hvis vi kalder b for grundlinjen, så er a højden til b. Derfor kan vi også skrive formlen

$$T = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Lad os prøve at se på, hvorfor formlen ser ud, som den gør. Hvis vi "kopierer"vores retvinklede trekant, vender kopien på hovedet og sætter den fast ovenpå den originale, så har vi et rektangel.



Arealet af to retvinklede trekanter er altså det samme som arealet af et rektangel (længde gange bredde)

$$2T = a \cdot b$$

Vi ganger med en halv på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

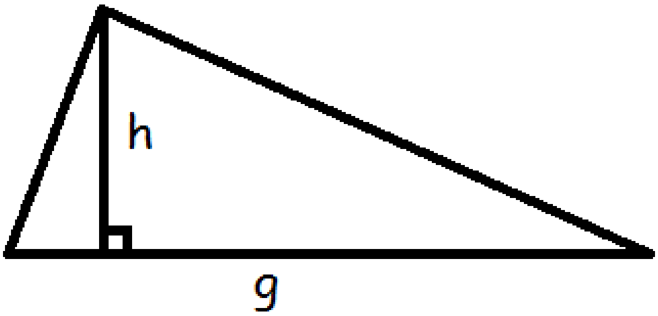
$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

og så nåede vi frem til formlen.

Trekant

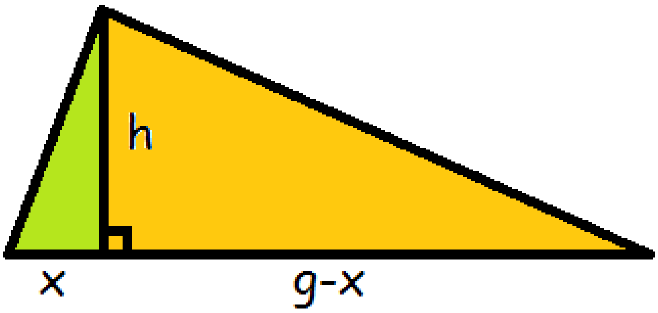
Hvis vi har at gøre med en vilkårlig trekant, så er formlen for arealet den samme

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$



Grunden til at formlen ser sådan ud skyldes, at højden deler trekanten i to retvinklede trekanter.

Vi ved ikke hvor store dele grundlinjen bliver delt i, men hvis vi kalder den lille del for x, så må den store del være resten af grundlinjen (altså grundlinjen foruden x (g-x)).



Arealet af trekanten må være arealet af den grønne trekant + arealet af den orange trekant. Den grønne trekant har kateterne x og h, derfor bliver arealet

$$T_{\text{grøn}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot x$$

Den orange trekant har kateterne h og (g-x), derfor må arealet være

$$T_{\text{orange}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (g - x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g - \frac{1}{2} \cdot h \cdot x$$

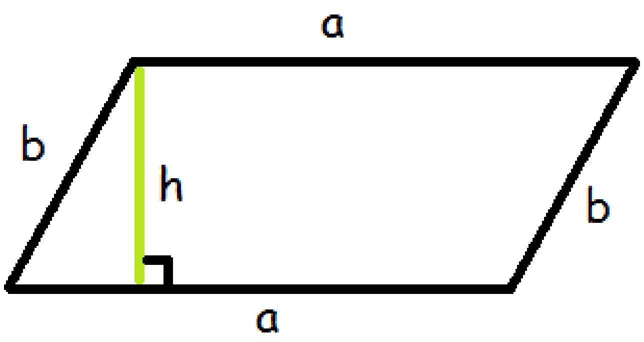
Når vi lægger dem sammen, får vi arealet af hele trekanten.

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot h \cdot x}_{T_{\text{grøn}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot h \cdot g - \frac{1}{2} \cdot h \cdot x}_{T_{\text{orange}}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Og sådan er man nået frem til arealformlen.

Parallellogram

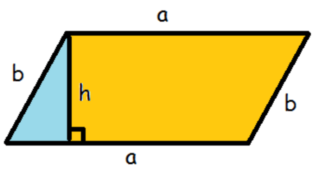
Et parallelogram er en firkant, hvor siderne er parvist parallelle.

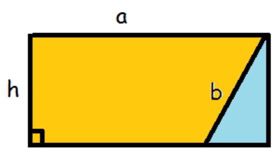


Man finder arealet af parallelogrammet ved at gange højden med grundlinjen.

$$A = \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$$
$$A = h \cdot a$$

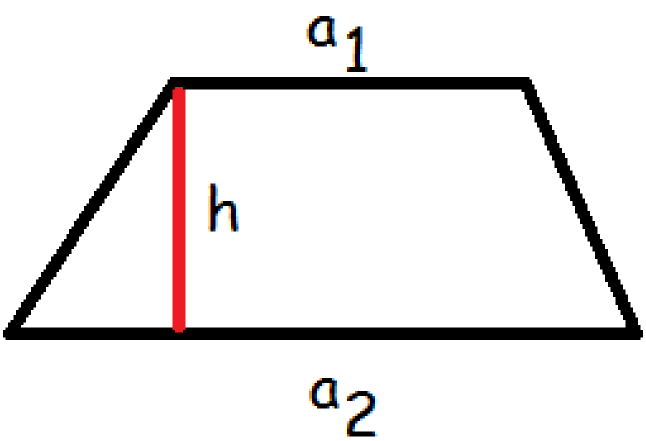
Grunden til, at formlen ser sådan her ud, er, at hvis man rykker den blå retvinklede trekant fra venstre hen til højre, så har man en rektangel, der har arealet længde gange bredde, altså a gange h.





Trapez

Et trapez er en firkant, hvor to af siderne er parallelle. De parallelle sider kalder vi a_1 og a_2 . De øvrige sider kunne man have kaldt b og c, men de er ligegyldige, når vi skal finde arealet.

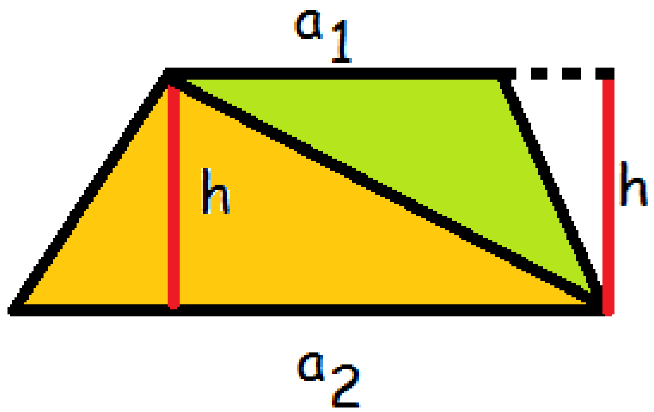


Arealet af et trapez er givet ved formlen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a_1 + a_2)$$

Man lægger altså de to parallelle sider sammen, ganger med højden og dividerer med to.

Lad os nu se, hvorfor den formel ser ud som den gør. Vi kan inddele trapezet i to trekanter.



Den orange trekant har grundlinje a_2 og højde h, mens den grønne har grundlinje a_1 og højde h. Altså er deres arealer

$$T_{\text{grøn}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a_1$$

$$T_{\text{orange}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a_2$$

Trapezets areal må være summen af de to trekanters areal.

$$A_{trapez} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot h \cdot a_2$$

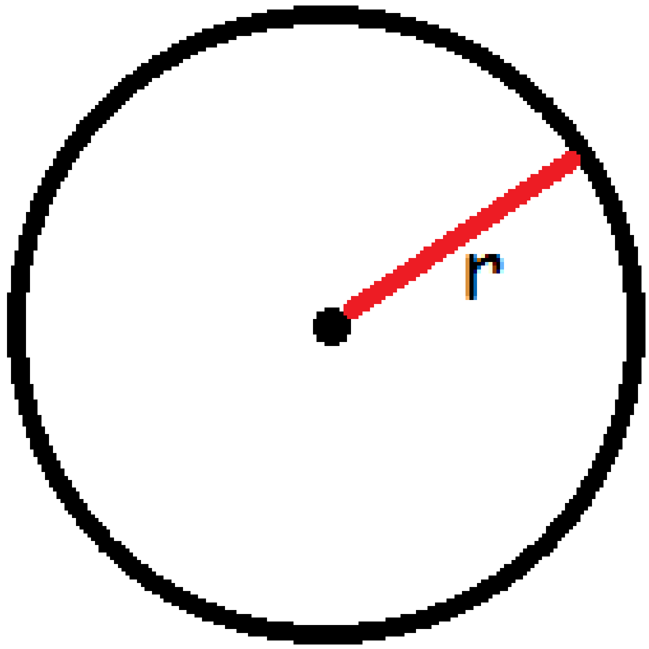
Nu sætter vi $\frac{1}{2}$h uden for parentes.

$$A_{trapez} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a_1 + a_2)$$

Og sådan nåede vi frem til den formel.

Cirkel

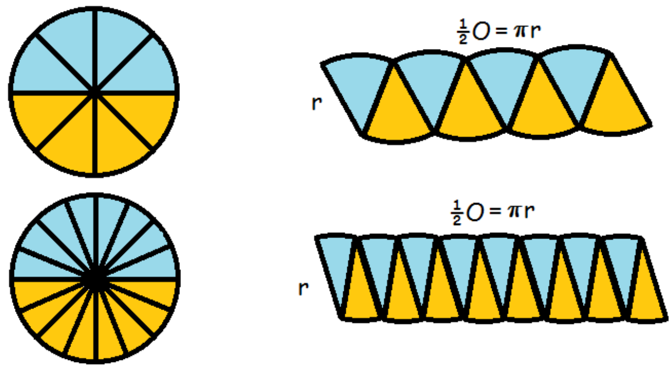
Den sidste figur, vi skal se på, er cirklen.



Man finder arealet af en cirkel ved at gange π med radius i anden.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Den her formel er lidt sværere at forklare. Lad os prøve at inddele cirklen i mange små stykker,klippe dem ud, og omforme dem som på figuren nedenfor



Jo flere stykker, vi har inddelt cirklen i, des mere kommer det til at ligne et rektangel. Hver af stykkerne har sidelængde r, så rektanglets bredde bliver r. Rektanglets længde består af en masse små buer. De svarer i alt til halvdelen af cirklens omkreds. Vi husker på, at en cirkels omkreds er 2πr

$$A = l \cdot b = \frac{1}{2}O \cdot r = \frac{1}{2}(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot r = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

5.3 Volumen og overfladeareal

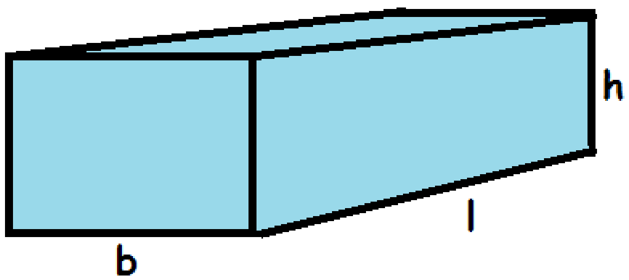
I dette afsnit skal vi se lidt nærmere på volumen/rumfang. Hvor arealet målte noget 2 dimensionalt, så er volumen et 3dimensionalt mål. Man kan sige, at areal er et flademål, og volumen et rummål.

At bestemme volumen er det samme som at finde ud af, hvor meget der kan være inde i figuren. Når vi har at gøre med 3dimensionale figurer, så har de jo en overflade, og man kan derved beregne overfladearealet. I de fleste figurer er det blot at beregne arealet af hver af siderne, men i nogle er det mere kompliceret.

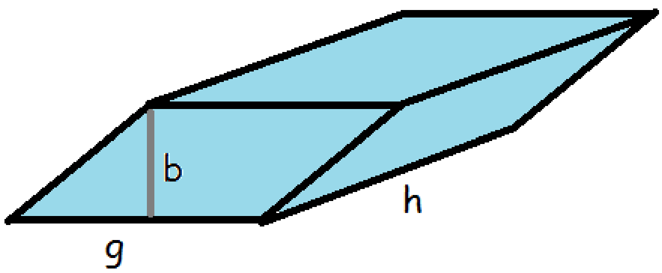
Kasse

En kasse, der er sammensat af rektangler (dvs. alle vinkler er 90 grader) er let at beregne volumen af. Man ganger simpelthen bare længde, bredde og højde med hinanden.

$$V = l \cdot b \cdot h$$



Man kunne også forestille sig en kasse, hvor endestykkerne er parallelogrammer I så fald skal man finde arealet af grundfladen og gange med figurens højde.



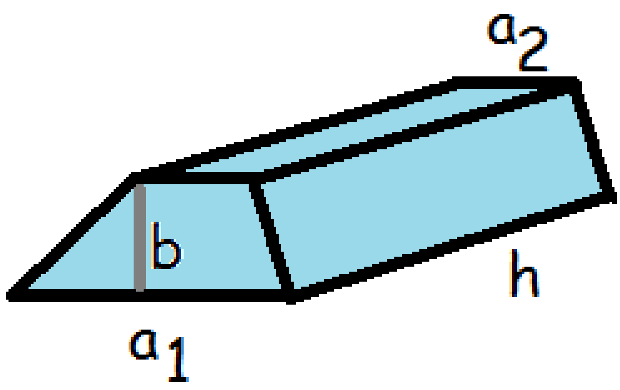
Her skal man holde tungen lige i munden. Der er nemlig dels kassens højde (markeret med h) og så er der højden i parallelogrammet, der markeres med b for at kende forskel. Parallelogrammets areal er højde gange grundlinje.

Vi udregner altså volumen således:

$$V = \text{grundflade} \cdot \text{højde}$$

$$V = b \cdot g \cdot h$$

Hvis vi havde at gøre med en kasse, hvis grundflade var et trapez, ville vi også skulle gange kassens højde med grundfladens areal for at få volumen.



Her er arealet af grundfladen (se areal)

$$A_{grundflade} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (a_1 + a_2)$$

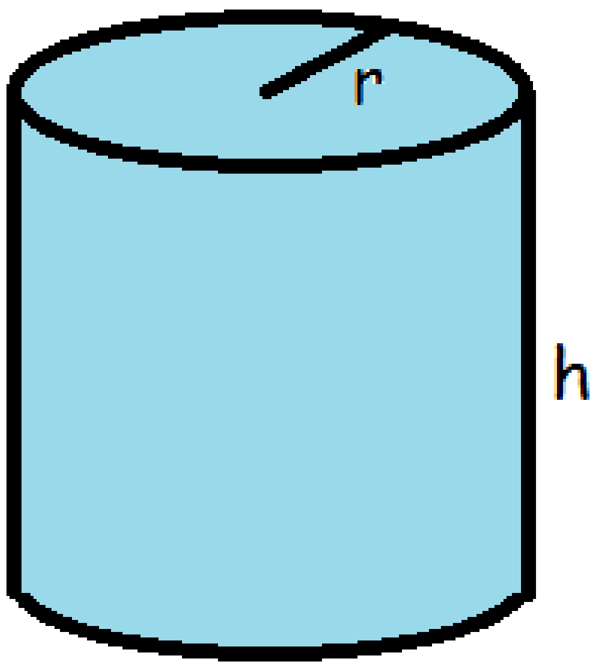
Så volumen bliver

$$V = \text{højde} \cdot \text{grundflade}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot (a_1 + a_2)$$

Cylinder

Det er også tit nyttigt at beregne volumen af en cylinder.



Her skal man gøre præcist som ovenfor. Først skal man finde arealet af grundfladen (cirklen) og dernæst gange det med cylinderens højde.

Fra afsnittet om arealer ved vi, at en cirkels areal er

$$A_{cirkel} = \pi \cdot r^2$$

Nu kan vi finde volumen af cylinderen

$$V_{cylinder} = h \cdot \pi \cdot r^2$$

Vi finder arealet af den krumme overflade, O, ved at gange cirklens omkreds med højden

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

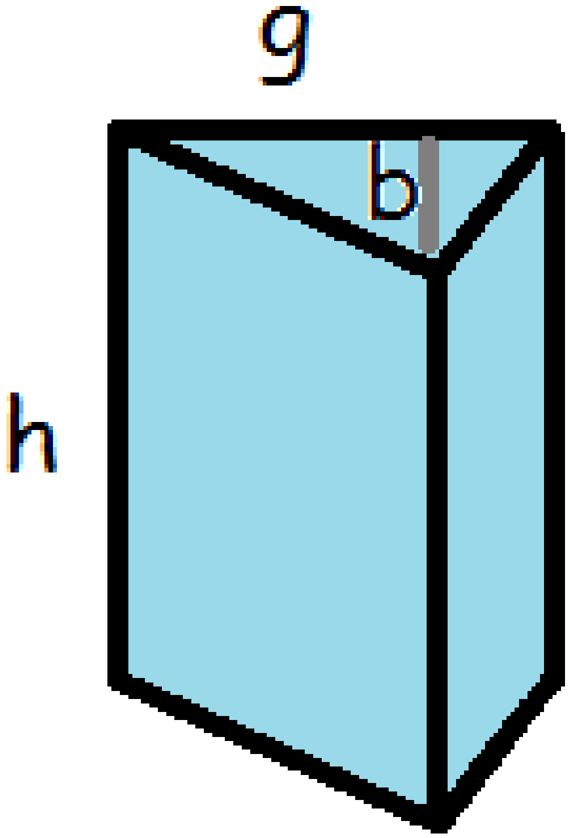
Hvis vi vil have det samlede overfladeareal, A, inklusiv top og bund, skal vi lægge arealet af to cirkler til

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Prisme

Prismen har lige som de ovenfor nævnte figurer en højde og en grundflade. Grundfladen er her en trekant.

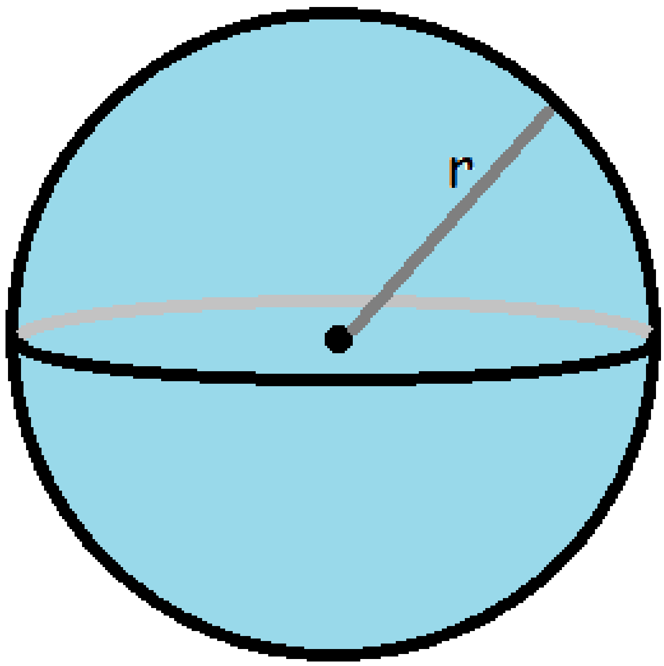


$$V = \text{højde} \cdot \text{grundflade}$$

$$V_{prisme} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot g$$

Kugler

Ovenfor har vi beskæftiget os med figurer, der har en grundflade. Men ikke alle figurer har det. Tag f.eks. kuglen.



Man beregner kuglens volumen ved hjælp af formlen

$$V_{kugle} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

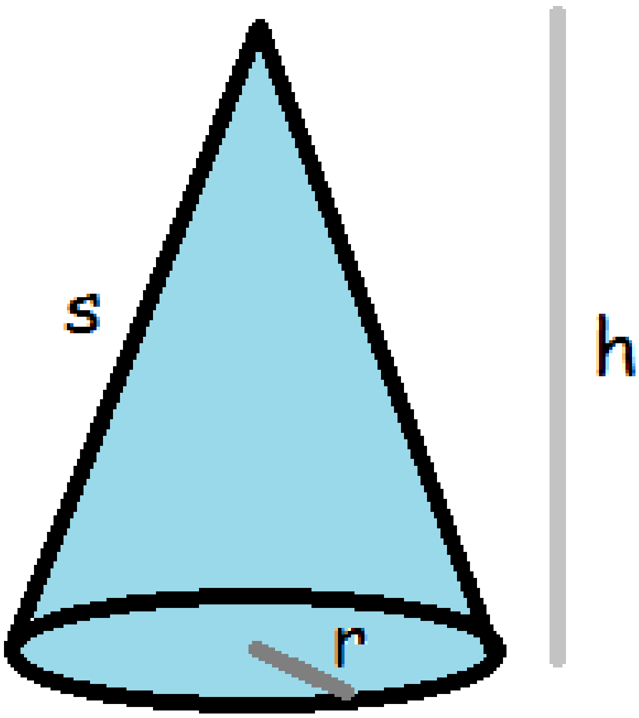
og overfladearealet beregner man således:

$$A_{kugle} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Kegle

Volumen af en kegle er præcis en tredjedel af en cylinder med samme radius og højde.

$$V_{kegle} = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3}$$



Arealet af den krumme overflade beregnes således

$$O_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s$$

Det samlede overfladeareal (inklusiv bunden) er derfor

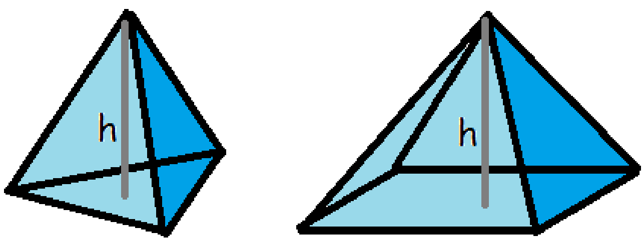
$$A_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$$

$$A_{kegle} = \pi \cdot r \cdot (s + r)$$

Pyramide

En pyramide er en figur, der har en grundflade, hvor hvert af grundfladens hjørner er forbundet til et punkt, der ligger over grundfladen.

Grundfladen kan eksempelvis være trekantet eller firkantet, som det ses på tegningerne, men kan også have flere kanter (den skal altså være en *polygon*. *Polygon* er det græske ord for mangekant).



Det forholder sig ligesom med keglen, at rumfanget af en pyramide er en tredjedel af den tilsvarende kasse/prisme. Altså højden gange grundfladens areal divideret med 3.

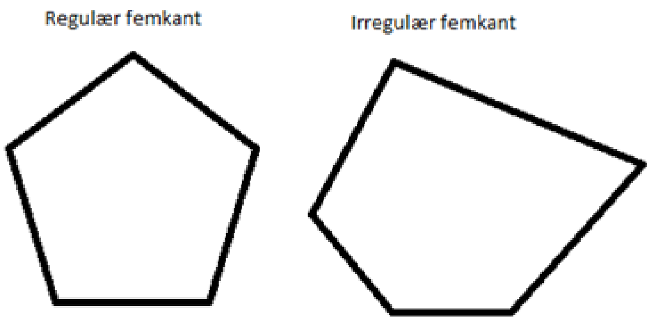
$$V_{\text{pyramide}} = \frac{\text{A}_{\text{grundflade}} \cdot \text{højde}}{3}$$

Overfladearealet af en pyramide findes ved at lægge grundfladearealet sammen med de trekantede sidefladers samlede areal. Du kan finde arealet af en trekant med

$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot h_{\text{trekant}} \cdot g$$

Vær opmærksom på de to forskellige højder: Pyramidens højde og trekantens højde.

En regulær polygon er en polygon, hvor alle sider er lige lange.



Hvis en pyramide har en regulær polygon som grundflade, og polygonen har n sider (der alle har længden g), kan overfladearealet A for pyramiden findes ved

$$A_{\text{pyramide}} = A_{\text{grundflade}} + \ n \cdot \frac{1}{2} \cdot h_{\text{trekant}} \cdot g$$

Hvis pyramiden har en irregulær polygon som grundflade, er man nødt til at udregne arealet af hver trekant for sig og lægge alle disse arealer sammen med arealet af grundfladen.

6 Sandsynlighed

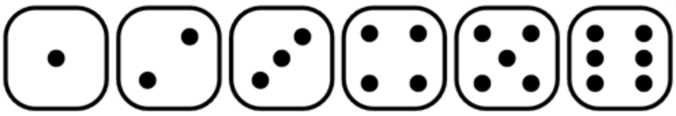
I dette kapitel kan du lære de grundlæggende begreber om sandsynlighed.

6.1 Grundlæggende begreber

Inden for alle fag er der en særlig terminologi (nogle bestemte ord, der bruges meget og betyder noget helt særligt lige i denne sammenhæng). Sådan er det også inden for sandsynlighedsregningen. I dette afsnit vil vi gennemgå nogle af de vigtigste begreber indenfor sandsynlighedsregningen.

Udfaldsrum

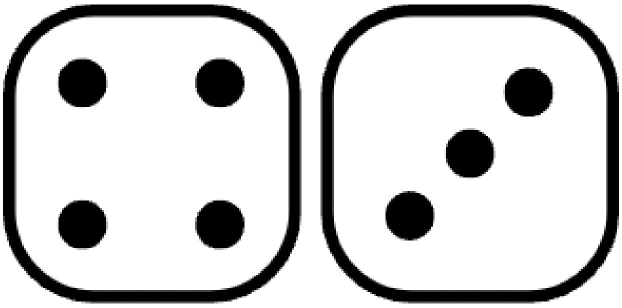
Udfaldsrummet er det univers, vi bevæger os indenfor. Alle de mulige udfald, der er for det eksperiment, vi foretager os. Hvis vi kaster med en terning og er interesserede i, hvor mange øjne, den viser, vil de mulige udfald være:



Der er 6 forskellige udfald, og udfaldsrummet er:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Hvis vi i stedet havde kastet med to terninger, ville hvert udfald være to tal. F.eks (4,3), der ville betyde, at den første terning viste en 4'er og den anden en 3'er:

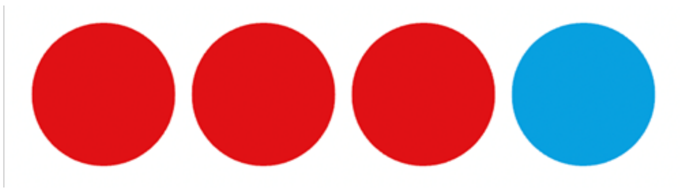


I dette tilfælde ville udfaldsrummet bestå af 36 forskellige udfald (den første terning kan vise 6 forskellige værdier og for hver af dem kan den anden terning vise 6 forskellige værdier. I alt er der altså 6*6=36 forskellige muligheder)

$$U = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),...,(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Hvis vi havde spillet poker (hvor man får 5 ud af 52 kort), havde en pokerhånd (et udfald) kunnet være (K5,S3,HE,RJ,KK) - altså Klør 5, Spar 3, Hjerter Es, Ruder Knægt og Klør Konge. I alt ville udfaldsrummet bestå af 2.598.960 forskellige pokerhænder. I afsnittet om kombinatorik vender vi tilbage til, hvordan vi udregnede dette tal.

Vi kunne også have haft en skål med 3 røde og 1 blå bold:



Hvis vi trækker en bold, kan den kun være enten rød eller blå. Udfaldsrummet vil derfor være

$$U = \{\text{Rød, Blå}\}$$

I udfaldsrummet kan man altså ikke se, om nogle udfald er mere sandsynlige end andre.

Sandsynlighed

Hvert element i udfaldsrummet er tilknyttet en sandsynlighed. Man betegner sandsynligheden med et lille p.

I tilfældet med én terning, er sandsynlighederne for hvert udfald den samme. Der er 6 sider på terningen, så sandsynligheden for hvert udfald er 1/6

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

I tilfældet med to terninger, er der 36 mulige udfald. De er alle sammen lige sandsynlige, så sandsynligheden er

$$\frac{1}{36} \approx 0,02778$$

for hvert udfald.

Hvis alle udfald er lige sandsynlige, kalder vi det et symmetrisk *sandsynlighedsfelt.*De to eksempler ovenfor er symmetriske sandsynlighedsfelter.

Eksemplet med skålen med 4 bolde, hvor 3 er røde og 1 er blå er ikke symmetrisk, da

$$p(\text{Rød}) = \frac{3}{4} = 0,75, \qquad p(\text{Blå}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

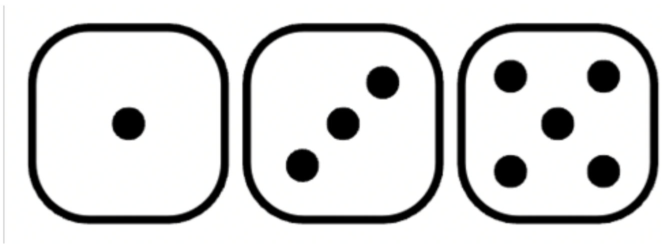
Hvis man lægger sandsynlighederne for alle elementerne sammen, skal det give 1 (svarende til 100%).

Hændelse

En hændelse, H, er en delmængde af udfaldsrummet. F.eks. kunne man i forsøget med én terning se på hændelsen

$$H = \{\text{Antal øjne der er ulige}\}$$

De elementer i udfaldsrummet, der opfylder dette, er 1, 3 og 5:



Vi markerer sandsynligheden for, at en hændelse indtræffer med et stort P. Man finder frem til sandsynligheden for en hændelse ved at lægge alle sandsynlighederne for de enkelte elementer i hændelsen sammen.

$$P(H) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

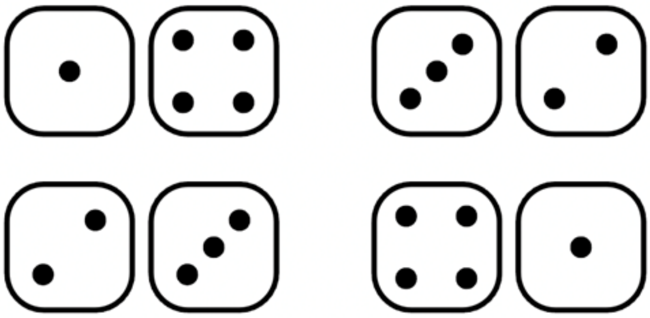
Hvis der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, er sandsynligheden for en hændelse

$$P(H) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}$$

F.eks. kunne en hændelse ved to terningekast være

$$H = \{\text{summen af øjnene er 5}\}$$

De gunstige udfald er (1,4), (2,3), (3,2) og (4,1):



Altså er der 4 gunstige udfald. Vi indsætter i formlen:

$$P(H) = \frac{4}{36} \approx 0,1111$$

Komplementær hændelse

Nogle gange er det lettere at regne sandsynligheden ud for, at en hændelse ikke sker.

Hvis vores hændelse hedder, H, så betegner vi den hændelse, at H ikke indtræffer med

$$\overline{H}$$

Vi kalder det, den komplementære hændelse. Det er klart, at enten sker H eller også sker den ikke. Derfor gælder der, at summen af sandsynlighederne må blive 1 (altså 100%)

$$P(H) + P(\overline{H}) = 1$$

$$P(H) = 1 - P(\overline{H})$$

Vi slår med tre terninger, og ønsker at finde sandsynligheden for, at vi får mindst én sekser. Vores hændelse er altså

$$H = \{\text{mindst 1 sekser}\}$$

Det er imidlertid ikke helt let at beregne, hvor mange gunstige udfald, der er for denne hændelse.

Den komplementære hændelse må være:

$$\overline{H} = \{\text{ingen seksere}\}$$

Det er noget lettere at udregne sandsynligheden for, at denne hændelse indtræffer. Når der ikke må være nogen seksere, er der nemlig fem gunstige udfald på den første terning (1, 2, 3, 4 eller 5). For hver af dem er der 5 gunstige udfald på den næste terning, og for hver af dem er der endnu 5 gunstige udfald på den tredje. Altså må sandsynligheden være

$$P(\overline{H}) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal muligeudfald}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{125}{216} \approx 0,579$$

Ved at trække denne sandsynlighed fra 1, får vi sandsynligheden for H.

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - 0,579 = 0,421$$

Altså er der 42,1% sandsynlighed for at få mindst én sekser, hvis man har tre slag. Det kan være nyttigt at vide, når man spiller ludo!

Gratis hjælp
til matematik
lokalt og digitalt

Materialesamling til **HTX** fra Webmatematik.dk

www.matematikcenter.dk
www.webmatematik.dk
www.webmatlive.dk

Version: December, 2024

Materialesamling til HTX

Matematikcenter

Version: December, 2024

Indhold

1 Ligninger og uligheder

Ligninger

En ligning består af to matematiske udtryk på hver sin side af et lighedstegn. Lighedstegnet er et matematisk symbol, der fastslår, at de to matematiske udtryk er lig med hinanden, og vi refererer til de to matematiske udtryk ved deres placering i forhold til lighedstegnet, dvs.:

Venstre side = Højre side

Uligheder

Tilsvarende består en ulighed af to matematiske udtryk på hver sin side af et ulighedstegn. Ulighedstegnet er et matematisk symbol, der fastslår størrelsesforholdet mellem de to matematiske udtryk. Igen refererer vi til de to matematiske udtryk ved deres placering i forhold til ulighedstegnet, og vi læser uligheden fra venstre mod højre:

Venstre side ¿ Højre side $\gg$**"læses "er større end" Venstre side ¡ Højre side**
$\ll$**"læses "er mindre end"**

1.1 Ligninger og uligheder

Ligninger

I en ligning indgår der typisk en ubekendt størrelse, der ofte bliver repræsenteret ved x eller et andet bogstav, f.eks.

$$x - 4 = 8 \qquad 3x + 2 = 25 \qquad -2x - 2 = 14$$

Den første ligning løses ved at finde ud af, hvad x skal være for at "venstre side"er lig med "højre side- dvs. hvad skal x være, for at udtrykket giver $8 = 8$? De to andre ligninger løses på tilsvarende måde - det viser vi om lidt.

Der er nogle regler man skal huske, når man løser ligninger, og disse regler er følgende:

	Regel
1	Man må lægge det samme tal til på hver side af lighedstegnet.
2	Man må trække det samme tal fra på hver side af lighedstegnet.
3	Man må multiplicere med det samme tal på hver side af lighedstegnet.
4	Man må dividere med det samme tal på hver side af lighedstegnet.
5	**MAN MÅ ALDRIG DIVIDERE ELLER GANGE MED NUL**

Kun for regel 1 og 2:

Man må flytte et led fra én side af lighedstegnet til den anden side af lighedstegnet ved at skifte leddets fortegn.

Eksempler:

Vi prøver nu at løse ligningerne $x - 4 = 8$, $3x + 2 = 23$ og $-2x - 2 = 14$:

Løsning til ligningen $x - 4 = 8$*:*

$$\begin{aligned} x - 4 &= 8 && \textit{Først lægger vi 4 til på begge sider} \\ x - 4 + 4 &= 8 + 4 && \textit{Reducerer udtrykkene på begge sider} \\ x - \cancel{4} + \cancel{4} &= 12 && \\ x &= 12 && \textit{Løsning} \end{aligned}$$

Løsningen til x - 4 = 8 er 12, fordi 12 - 4 = 8 er sandt, og vi siger at $x = 12$ opfylder ligningen.

Løsning til ligningen $3x + 2 = 23$

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 23 && \textit{Først trækker vi 2 fra på begge sider} \\ 3x + 2 - 2 &= 23 - 2 && \textit{Vi reducerer udtrykket på begge sider} \\ 3x + \cancel{2} - \cancel{2} &= 21 && \\ 3x &= 21 && \textit{Vi dividerer med 3 på begge sider} \\ \frac{3x}{3} &= \frac{21}{3} && \textit{Vi reducerer udtrykkene på begge sider} \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= 7 && \\ x &= 7 && \textit{Løsning} \end{aligned}$$

Løsning til ligningen $-2x - 2 = 14$

$$\begin{aligned} -2x - 2 &= 14 && \textit{Først lægger vi 2 til på begge sider} \\ -2x - 2 + 2 &= 14 + 2 && \textit{Reducerer udtrykkene på begge sider} \\ -2x - \cancel{2} + \cancel{2} &= 16 && \\ -2x &= 16 && \textit{Vi dividerer med -2 på begge sider} \\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{16}{-2} && \textit{Reducerer udtrykkene på begge sider} \\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} &= -8 && \\ x &= -8 && \textit{Løsning} \end{aligned}$$

Uligheder

Vi har tidligere set på uligheder, og vi er stødt på fire forskellige ulighedssymboler. Lad os lige se på dem igen:

1) $x > y$, der læses " x er større end y"

2) $x < y$, der læses "x er mindre end y"

3) $x \geq y$, der læses "x er større end eller lig med y"

4) xy, der læses "x er mindre end eller lig med y"

Symbolerne ¿ og ¡ kaldes for skarpe eller stærke ulighedstegn (man kan eksempelvis sige, at x er skarpt større end y), mens ≥ og kaldes for de svage ulighedstegn.

Når man løser uligheder, gælder der som udgangspunkt de samme 5 regler som ovenfor for løsning af ligninger. Det er dog vigtigt, at man er opmærksom på, hvilket tal man ganger eller dividerer med på begge sider af ulighedstegnet, da der gælder en særlig regel for uligheder, når man ganger eller dividerer med et **NEGATIVT TAL**.

Regler, der kun gælder for uligheder:

1. Når du ganger med det samme negative tal på begge sider af ulighedstegnet, skal du vende ulighedstegnet.
2. Når du dividerer med det samme negative tal på begge sider af ulighedstegnet, skal du vende ulighedstegnet.

Eksempel:

Vi løser følgende ulighed: 12x - 5 $\geq$ 17x + 45

$$
\begin{aligned}
12x - 5 &\geq 17x + 45 && \textit{Lægger 5 til og trækker 17x fra på begge sider}\\
12x - 17x &\geq 45 + 5 && \textit{Reducerer}\\
-5x &\geq 50 && \textit{Dividerer med -5 på begge sider og}\\
& && \textit{vender ulighedstegnet}\\
x &\leq -10 && \textit{Løsning}
\end{aligned}
$$

1.2 Mængdebyggeren og symboler

En mængde er en veldefineret samling af elementer , f.eks . mængden af Matematikcenter lektiecafeer i København , mængden af elever i en given klasse eller mængden af primtal mellem 1 og 100. Man angiver ofte en mængde med et stort bogstav og mængdens elementer ved små bogstaver . Rækkefølgen af elementerne i mængden er ligegyldig . Et eksempel på en mængde er;

$M := 1, 2, 3, 4, \{5, 6\}$

Symbolet := betyder, at M bliver defineret ved $1, 2, 3, 4, \{5, 6\}$. Vi kan se, at antallet af elementer for M er 5, nemlig 1, 2, 3, 4 og $\{5, 6\}$. Ud fra det kan vi fx sige, at:

$1 \in M \qquad 4 \in M \qquad \{5, 6\} \in M \qquad 6 \notin M$

Symbolet $\in$ betyder "tilhører"og $\notin$ betyder "tilhører ikke". Det vil sige, at 1, 4 og $\{5, 6\}$ tilhører mængden M, mens 6 tilhører ikke mængden M. Med andre ord betyder "$\in$" "er element i en mængde", og "$\notin$" betyder "er ikke element i en mængde".

En mere korrekt og fancy måde at skrive mængder op på er denne:

$$M = \{ \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{Grundmængde} | \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{ligning} \}$$

Denne notation kaldes også for mængdebyggeren .

Et eksempel kunne være:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \textit{ er lige tal}\}$$

$\mathbb{N}$ er alle de naturlige tal, men fx ikke de negative tal, dvs . 1, 2 ,3,.... Symbolet — læses som "der opfylder "eller "for hvilket det gælder ".

Hvis vi vil nu skrive mængden M, så vil det være ved

$$M = \{x \in \mathbb{N} | x \ \textit{er lige tal}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

da vi ved, at elementer eller grundmængden i mængden M kun er de naturlige, lige tal .

Definition:

Grundmængden er de værdier af x, som det er tilladt at bruge som løsning til en ligning

Hvis vi kigger på en af de ligninger, vi så på tidligere, kan vi skrive løsningsmængden som

$$L = \{x \in \mathbb{R} | -2x - 2 = 14\}$$

Det læses som ”Løsningsmængden L er lig med mængden af elementer x tilhørende $\mathbb{R}$ (de reelle tal), for hvilke det gælder at $-2x - 2 = 14$. Løsningsmængden skrives som $L = \{-8\}$.

Når vi arbejder med uligheder vil løsningsmængden være mere end et element. Eksempelvis kan løsningsmængden være alle x-værdier større end 2, der skrives som:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$$

eller alle x-værdier mellem 2 og 5, der skrives som:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x > 2 \wedge x < 5\}$$

Symbolet $\wedge$ betyder ”og ”, mens det omvendte symbol $\vee$ betyder ”eller ”.

Til at beskrive sådanne løsningsmængder benytter vi **intervaller**. Et interval er en mængde af reelle tal mellem to værdier . Intervaller kan være lukkede (indeholder talværdierne i intervallets endepunkter) eller åbne (indeholder ikke talværdierne i intervallets endepunkter).

Et lukket interval er lukket i begge ender og skrives : [x,y]. Intervallet indeholder x og y.

Et åbent interval er åbent i begge ender og skrives:]x,y[. Intervallet indeholder værdier uendeligt tæt på x og y, men ikke x og y.

Et interval kan også være lukket i den ene ende og åbent i den anden ende - eller omvendt: [x,y[eller]x,y]. Disse intervaller kaldes halvåbne intervaller.

Hvis vi kigger på de forrige løsningsmængder, kan vi skrive dem som intervaller. Lad os se på det åbne interval $]2, 5[$, som indeholder de reelle tal mellem 2 og 5. At intervallet er åbent, betyder, at tallene 2 og 5 ikke er en del af løsningsmængden , men alle tal større end 2 og alle tal mindre end 5 er med i løsningsmængden .

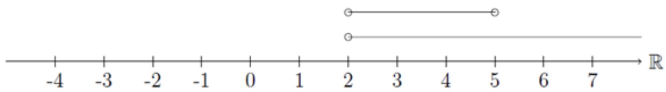
D et lukkede interval $[2, 5]$ indeholder ligeledes de reelle tal mellem 2 og 5, men her er tallene 2 og 5 en del af løsningsmængden.

Intervaller kan illustreres ved at indtegne mængden på en tal linje . Lad os prøve det:

$$L1 = \{x \in \mathbb{R} \ | x > 2\} =]2, \infty[$$

$$L2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 2 \wedge x < 5\} =]2, 5[$$

L1 er vist med den nederste streg over tallinjen og L2 er vist med den øverste streg over tallinjen. Tegningen gør det måske nemmere at forstå intervallerne.



Endepunktet i et interval tegnes med en åben bolle, hvis talværdien ikke er en del af mængden, og med en udfyldt bolle, hvis talværdien er en del af mængden.

1.3 Tre ligninger med tre ubekendte

Hvis man uden problemer kan løse to ligninger med to ubekendte , kan man også løse tre ligninger med tre ubekendte . Der er flere metoder til at løse sådan et problem på: Den ene er vha. et CAS-værktøj som fx Maple eller TI-Nspire . Den anden metode er ved håndkraft, og den skal vi se lidt nærmere på her.

L ad os starte med at se på disse ligninger:

$$(I): \qquad x+y+z=5$$

$$(II): \qquad 2x-y+z=9$$

$$(III): \qquad x-2y+3z=16.$$

Disse ligninger kan kombineres på følgende måder : (I) og (II), (I) og (III) og (II) og (III). Vi starter med at vælge to af kombinationerne, og det er faktisk ligegyldigt, hvilke man vælger . Vi vælger (I) og (II) samt (I) og (III). Vi skal også vælge, hvilken variabel vi vil eliminere, dvs. hvilken variabel vi vil beskrive vha . de andre variable . Igen er det ligegyldigt, hvilken variabel, vi vælger her. Vi vælger varablen z og isolerer altså z i ligningerne (I) og (II).

$$(I): \qquad x+y+z=5 \Leftrightarrow z=5-x-y$$

$$(II): \qquad 2x-y+z=9 \Leftrightarrow z=9-2x+y$$

I den første ligning har vi trukket x og y fra på begge sider af lighedstegnet, og i den anden ligning har vi trukket $2x$ fra og lagt y til på begge sider af lighedstegnet . Nu har vi to forskellige udtryk, der beskriver variablen z. Vi definerer nu en 4. ligning ved at sætte udtrykkene for z lig med hinanden, og derefter isolerer vi en af de tilbageværende variable, enten x eller y. Her vælger vi at isolere x.

$$(IV): \qquad 5-x-y=9-2x+y$$

$$\Leftrightarrow 2x-x=9+y+y-5$$

$$\Leftrightarrow x=2y+4$$

Her har vi lagt $2x$ og y til på begge sider og trukket 5 fra på begge sider, og den 4. ligning er altså: $x=2y+4$.

Nu kigger vi på den anden kombination, nemlig ligningerne (I) og (III). Her skal vi først isolere den samme variabel, som vi startede med at isolere i ligningerne (I) og (II), dvs. variablen z.

$$(I): \qquad x + y + z = 5 \Leftrightarrow z = 5 - x - y$$

$$(III): \qquad x - 2y + 3z = 16$$

$$\Leftrightarrow 3z = 16 - x + 2y$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$$

I (III) har vi først trukket x fra og lagt $2y$ til på begge sider , hvorefter vi har divideret med 3 for at isolere z . Igen har vi nu to udtryk, der beskriver z ud fra x og y. Nu sætter vi disse to udtryk lig med hinanden og isolerer x:

$$(V): \qquad \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 5 - x - y$$

$$\Leftrightarrow 16 - x - 2y = 15 - 3x - 3y$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = 15 - 3y - 2y - 16$$

$$\Leftrightarrow 2x = -5y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Først har vi ganget med 3 på begge sider for at fjerne nævneren på venstre side, og derefter har vi isoleret x ved at lægge $3x$ til på begge sider og trække $2y$ og 16 fra på begge sider. Til sidst har vi divideret med 2 på begge sider, og den 5. ligning er altså: $x = -\frac{5}{2}y - \frac{1}{2}$.

Vi har nu to nye ligninger (IV) og (V), som begge udtrykker variablen x. Nu sætter vi ligningerne (IV) og (V) lig med hinanden. På den måde får vi én ligning med én ubekendt :

$$2y + 4 = -\frac{5}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4y + 8 = -5y - 1$$

$$\Leftrightarrow 9y = -9$$

$$\Leftrightarrow y = -1$$

Først har vi ganget med 2 på begge sider for at fjerne nævneren på højre side, og derefter har vi isoleret y ved at lægge $5y$ til på begge sider og trække 8 fra på begge sider.

Nu har vi bestemt værdien for y, nemlig -1, og vi bestemmer værdien for x ved at indsætte værdien for y i et af de forrige udtryk for x og får:

$$x = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2$$

Nu har vi bestemt værdien for x, nemlig 2, og vi bestemmer værdien for z ved at indsætte værdierne for x og y i et af de forrige udtryk for z og får:

$$z = 5 - 2 - (-1) = 5 - 2 + 1 = 4$$

Løsningen er hermed: $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 4$

Vi kontrollerer, om løsningen er rigtig, ved at indsætte de fundne værdier i de tre oprindelige ligninger og tjekke, om de giver hhv. 5, 9 og 16:

$$(I): \quad 2 + (-1) + 4 = 2 - 1 + 4 = 5$$

$$(II): \quad 2 \cdot 2 - (-1) + 4 = 4 + 1 + 4 = 9$$

$$(III): \quad 2 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 2 + 2 + 12 = 16$$

Det passer med de fundne værdier. Denne metode kaldes for elimineringsmetoden , fordi man eliminerer de variable én efter én, indtil man kun har én variabel tilbage , som man kan bestemme værdien af. Herefter bruger man den kendte værdi til at bestemme værdien af de andre variable.

Der er også en anden metode, vi kan bruge inden for eliminering. Her eliminerer vi de variable én efter én ved enten at trække hele ligninger fra hinanden og/eller lægge hele ligninger sammen, indtil vi står tilbage med én ligning med én ubekendt.

Vi bruger de samme ligninger som i eksemplet før til at vise denne metode, og vi bruger igen de tre kombinationer, vi har beskrevet: (I) og (II), (I) og (III) samt (II) og (III). Vi husker, at det er tilladt at gange ligninger med en konstant på begge sider, så længe vi ikke ganger med 0.

Ligningerne er:

$$\begin{aligned} (I): &\quad x + y + z = 5 \\ (II): &\quad 2x - y + z = 9 \\ (III): &\quad x - 2y + 3z = 16 \end{aligned}$$

Vi starter med at lægge (I) og (II) sammen:

$$\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 2x-y+z=9 \\ \hline 3x+2z=14 \end{array}$$

Vi ser, at variablen y er blevet elimineret. Vi kalder den nye ligning for $IV:\ 3x+2z=14$.

Nu ser vi på (I) og (III). Vi skal igen have elimineret variablen y, og det kan vi gøre ved at gange ligning (I) med 2 og derefter lægge den sammen med ligning (III):

$$\begin{array}{r} 2x+2y+2z=10 \\ x-2y+3z=16 \\ \hline 3x+5z=26 \end{array}$$

Vi kalder den nye ligning for: $V:\quad 3x+5z=26$.

Nu bruger vi ligningerne (IV) og (V) til at eliminere variablen x ved at udregne (V) - (IV), og vi får:

$$\begin{aligned} 3x + 5z &= 26 \\ -3x - 2z &= 14 \\ \hline 3z &= 12 \end{aligned}$$

Vi har nu kun én variabel, z, tilbage , og vi bestemmer værdien for denne ved at dividere med 3 på begge sider, dvs. $z = 4$.

Vi bestemmer værdien for x ved at indsætte værdien for z enten i ligning (IV) eller i ligning (V) og får:

$$\begin{aligned} 3x + 5 \cdot 4 &= 26 \\ 3x + 20 &= 26 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Nu har vi bestemt værdierne for x og z , og vi bestemmer værdien for y ved at indsætte værdierne for hhv . x og z i en af de oprindelige ligninger, og vi får:

$$\begin{aligned} 2 + y + 4 &= 5 \\ y + 6 &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Hermed er løsningen (heldigvis) den samme som ved den første metode; $x = 2$, $y = -1$, $z = 4$.

Husk at kontrollere, om løsningen er rigtig, ved at indsætte de fundne værdier i de tre oprindelige ligninger og tjekke, om venstre side er lig med højre side.

Elimineringsmetoden kan beskrives ved disse 5 trin:

Trin	TAG UNRECOGNIZED
Trin 1	TAG UNRECOGNIZED
Trin 2	TAG UNRECOGNIZED
Trin 3	TAG UNRECOGNIZED
Trin 4	TAG UNRECOGNIZED
Trin 5	TAG UNRECOGNIZED

1.4 Skjulte/kamuflerede andengradsligninger

Vi har tidligere set på andengradspolynomier på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ - hvor det grafiske billede er en parabel - og den tilhørende andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$. Løsningerne til en sådan andengradsligning angiver parablens skæringspunkter med x-aksen, som er givet ved:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Her er $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, diskriminanten, hvor der gælder følgende:

- Hvis d er negativ ($d < 0$), så har ligningen ingen løsninger
- Hvis $d = 0$, så har ligningen 1 løsning
- Hvis d er positiv ($d > 0$), så har ligningen 2 løsninger

Du kan se et eksempel på brugen af diskriminantformlen her.

Nogle gange møder vi ligninger som fx:

$$ax^{10} + bx^5 + c = 0 \text{ eller } ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Selvom disse to ligninger indeholder potenser af højere orden end to, har de samme opbygning som andengradsligninger. De kaldes derfor skjulte (eller maskerede eller kamuflerede) andengradsligninger. Derfor kan vi benytte løsningsmetoden for andengradsligninger til at løse dem. Det gør vi via et lille trick, som vi kalder for substitution.

Hvis vi f.eks. kigger på den første ligning $ax^{10} + bx^5 + c = 0$, skal vi substituere x^{10} med en anden variabel, som er opløftet i anden .

Vi benytter en af vores potensregneregler på x^{10}, som vi kan omskrive til$(x^5)^2$, og vi vælger en anden variabel, t, som vi sætter til $t = x^5$. Nu kan vi erstatte x^5 med t i ligningen og får $at^2 + bt + c = 0$. Og denne ligning er på samme form som en sædvanlig andengradsligning og kan løses med hensyn til t.

Eksempel

Lad os se på ligningen $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$:

Vi kigger på x^6 og omskriver til $x^6 = (x^3)^2$, dvs . vi sætter $t = x^3$ og ligningen ser nu således ud :

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Først finder vi diskriminanten ;

$$d = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

Vi kan se, at der er to løsninger til ligningen, da diskriminanten er positiv. Vi finder de to løsninger:

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{og} \qquad t_2 = \frac{8}{2} = 4$$

Vi har endnu ikke fundet løsningerne til vores oprindelig ligning $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$, da vi har substitureret med $t = x^3$. For at bestemme de x-værdier, der opfylder den oprindelige ligning, løser vi nu følgende :

$$x_1^3 = t_1 = 1 \qquad \text{og} \qquad x_2^3 = t_2 = 4$$

Dvs.

$$x_1 = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$x_2 = \sqrt[3]{4} = 1,587$$

Dermed er løsningerne til ligningen $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$ hhv. $x_1 = 1$ og $x_2 = 1,587$.

Brug af nulreglen

Nogle gange skal vi løse en ligning f.eks. på formen $ax^6 + bx^4 + cx^2 = 0$, men denne ligning har ikke samme form som en sædvanlig andengrads-ligning. I nogle tilfælde kan vi komme nærmere en løsning ved at omskrive ligningen til et produkt, dvs. et gangestykke bestående af flere led.

I eksemplet her ser vi, at x^2 indgår i hvert af de tre led på venstresiden, så vi kan sætte x^2 udenfor en parentes:

$$ax^6 + bx^4 + cx^2 = \; x^2 \cdot (ax^4 + bx^2 + c) = 0$$

Her bruger vi nul -reglen, som siger , at hvis produktet af flere led skal være lig med nul , så må (mindst) ét af leddene være lig med 0. Derfor er løsningerne:

$$x^2 = 0 \qquad \textit{eller} \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

I dette tilfælde giver den første ligning umiddelbart løsningen $x = 0$. Den anden ligning $ax^4 + bx^2 + c = 0$ løser vi som en sædvanlig andengrads-ligning i t, idet vi substituerer x^2 med t. Hermed får vi følgende samlede løsning til den oprindelige ligning: $x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{t_1}$ eller $x = \pm\sqrt{t_2}$, hvor t_1 og t_2 er positive rødder i andengradsligningen. Negative rødder i andengradsligningen kan ikke omsættes til reelle løsninger til den oprindelige ligning.

1.5 Andengradsuligheder

Du har tidligere arbejdet med andengradsligninger, som typisk kan skrives på formen:

$ax^2 + bx + c = 0$

For at løse ligningen kan du formentlig genkende formlen: $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ til bestemmelse af diskriminanten, og derefter løses andengradsligningen ved: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Andengradsuligheder adskiller sig fra andengradsligningen ved, at ligheds-tegnet erstattes af et ulighedstegn. Der er fem forskellige ulighedstegn at vælge imellem:

$ax^2 + bx + c \neq 0$	hvor "$\neq$"læses som "er forskellig fra"
$ax^2 + bx + c > 0$	hvor $\gg$"læses som "er større end "
$ax^2 + bx + c \geq 0$	hvor "$\geq$"læses som "er større end eller lig med"
$ax^2 + bx + c < 0$	hvor $\ll$"læses som "er mindre end"
$ax^2 + bx + c \leq 0$	hvor "$\leq$"læses som "er mindre end eller lig med"

Alle disse tilfælde løses ved først at løse den sædvanlige andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$ og derefter finde intervallerne, hvor uligheden passer.

Eksempel

Der er givet andengradsuligheden $2x^2+2x-4 \geq 0$. Først løser vi andengradsligningen $2x^2+2x-4 = 0$. Vi starter med at bestemme diskriminanten:

$d = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)$

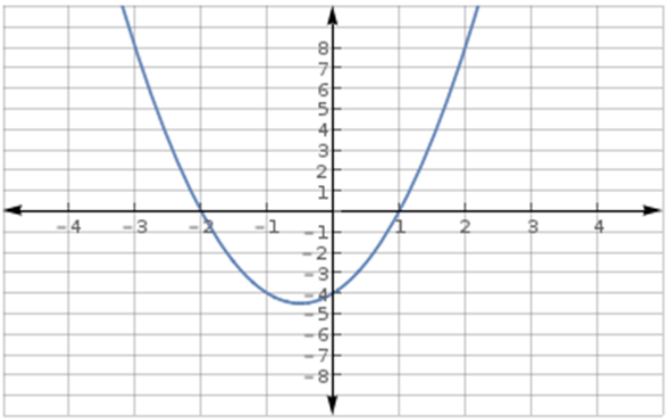
$d = 36$

Nu kan vi så bestemme rødderne eller nulpunkterne:

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 2}$

$x_1 = 1 \wedge x_2 = -2$

For at løse andengradsuligheden er det en rigtig god ide at tegne eller skitsere grafen for andengradspolynomiet $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$:



For at løse andengradsuligheden $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$ søger vi de x-værdier, der gør, at værdien af venstresiden bliver større end eller lig med 0. Ud fra grafen kan vi se, at værdien af venstresiden er mindre end 0, hvis x ligger i intervallet mellem -2 og 1. Løsningen til andengradsuligheden er derfor alle de x-værdier, der ligger udenfor dette interval:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x \leq -2 \vee 1 \leq x < \infty\}$$

1.6 Dobbelte uligheder

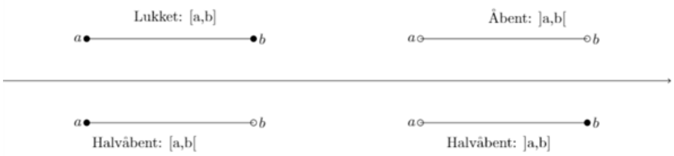
Når man arbejder med uligheder, vurderer man altid i hvilket interval, det giver mening at betragte uligheden. Intervaller kan opskrives på to måder:

$$x \in \mathbb{R} |\, b < x < a \qquad \text{eller} \qquad]b; a]$$

Intervaller opdeles i åbne, halvåbne og lukkede intervaller (se mængdebyggeren og symboler).

Grafisk markeres åbne intervaller med symbolet "$\circ$" og lukkede intervaller markeres med symbolet "$\bullet$".

Grafisk ser det sådan ud:



Når man skal løse uligheder, kan man møde både lukkede, halvåbne og åbne intervaller:

$$a < x < b =]a, b[$$
$$a \leq x < b = [a, b[$$
$$a < x \leq b =]a, b]$$
$$a \leq x \leq b = [a, b]$$

En dobbeltulighed indeholder to ulighedstegn, som vender samme vej. Nu ser vi på, hvordan vi løser sådan en ulighed:

Vi skal løse denne dobbeltudlighed $4x - 14 < 18x + 20 < 35x - 15$. For at gøre det, deler vi den op i to uligheder: $4x - 14 < 18x + 20$ og $18x + 20 \ < 35x - 15$.

Vi betragter først $4x - 14 < 18x + 20$. Vi rykker rundt på leddene og reducerer:

$$\begin{aligned} 4x - 14 &< 18x + 20 && \iff \\ -20 - 14 &< 18x - 4x && \iff \\ -34 &< 14x && \iff \\ -2,4 &< x \end{aligned}$$

Ud fra det kan vi konkludere, at x skal være større end -2,4.

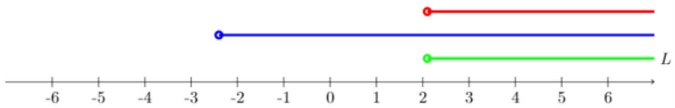
Så ser vi på den næste ulighed, nemlig $18x + 20 < 35x - 15$, som vi behandler på samme måde:

$$\begin{aligned} 18x + 20 &< 35x - 15 && \iff \\ 20 + 15 &< 35x - 18x && \iff \\ 35 &< 17x && \iff \\ 2,1 &< x \end{aligned}$$

Ud fra det kan vi konkludere, at x skal være større end 2,1.

Når x er større end 2,1, er x automatisk også større end -2,4, så løsningen på uligheden er $L = \{x \in \mathbb{R} | x > 2,1\} =]2,1; \infty[$

Grafisk ser løsningen sådan ud:



Her viser den blå markering løsningen til første del af uligheden, mens den røde viser løsningen til anden del. Den grønne viser den samlede løsning.

1.7 Fortegnsbestemmelse

Nogle gange skal vi løse uligheder, der indeholder en eller flere brøker, og i disse tilfælde er det en god idé at bestemme intervallerne for, hvornår brøkens værdi er henholdsvis positiv og negativ, samt fastlægge hvornår brøkens værdi er 0 og hvornår brøken ikke er defineret (nævneren = 0). Dette kalder vi under ét for fortegnsbestemmelse.

Vi ser på brøken $\frac{a}{b}$, hvor a og b er to regneudtryk (f.eks. funktioner af x) og vi antager, at begge regneudtryk giver reelle tal.

Da vi ikke må dividere med 0, må b ikke være lig med 0. b kan derfor være et hvilket som helst reelt tal, bortset fra nul.

Vi kan desuden se, at brøkens værdi er lig med 0, når $a = 0$. Ud fra regnereglerne om negative tal kan vi endvidere konkludere, at brøken er positiv, hvis a og b har samme fortegn, og brøken er negativ, hvis a og b har forskelligt fortegn.

Når vi kender regneudtrykkene a og b, kan vi bestemme fortegnene for hver af dem som funktion af x, og indtegne dette på en tallinje. Ud fra ovenstående kan vi herefter vurdere brøkens fortegn i de forskellige x-intervaller.

Lad os se på et eksempel:

Vi vil løse uligheden $\frac{x-8}{x-3} > 0$

Først bestemmer vi det, vi kunne kalde grundmængden, nemlig de x-værdier for hvilke brøken er defineret. Nævneren er 0, når $x = 3$, så denne værdi må x ikke antage:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$$

Det er herefter en god idé at finde ud af, hvornår brøken er nul. Hvis $x = 8$, vil tælleren have værdien $8 - 8 = 0$, og derfor vil brøken være 0, når $x = 8$. Her bemærker vi, at da uligheden indeholder et skarpt ulighedstegn, er værdien $x = 8$ ikke en del af løsningsmængden.

Ser vi herefter på tælleren, vil den være negativ, når $x < 8$, og positiv, når $x > 8$. For nævnerens vedkommende er den negativ, når $x < 3$, og positiv, når $x > 3$.

Vi kan nu konkludere, at hvis $x < 3$, er både tælleren og nævneren negativ, og dermed er brøken positiv. Hvis $3 < x < 8$, er tælleren negativ og nævneren positiv, og dermed er brøken negativ. Hvis $x > 8$, er både tælleren og nævneren positiv, og dermed er brøken positiv.

Vi kan derfor konkludere, at løsningen til uligheden $\frac{x-8}{x-3} > 0$ er:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < 3 \vee 8 < x < \infty\}$$

2 Geometriske grundkonstruktioner

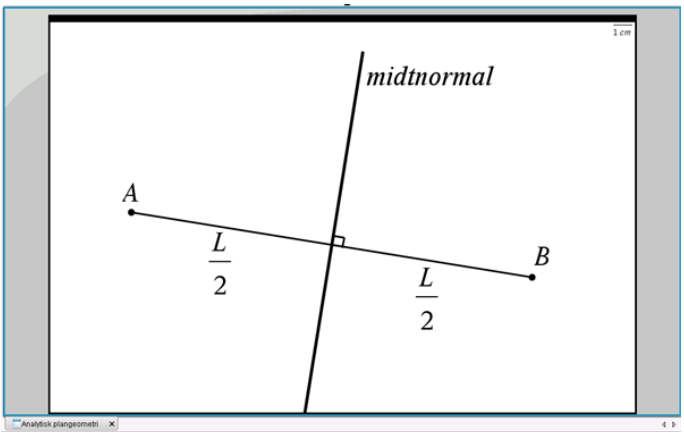
I denne sektion gennemgår vi de 8 klassiske geometriske grundkonstruktioner.

For at få disse grundkonstruktioner helt ind under huden skal du for en stund glemme alt om elektroniske hjælpemidler som Geogebra, TI-Nspire og Maple.

I stedet skal du finde papir frem fra skuffen og sørge for at få støvet lineal og passer af og få spidset blyanten. Måske får du også brug for et viskelæder. Det er ingen fordel at bruge kvadreret papir, tværtimod anbefales almindeligt hvidt printerpapir.

2.1 Konstruktion af midtnormal

En midtnormal for et linjestykke (AB) er en linje, der står vinkelret på linjestykket og deler linjestykket på midten, dvs. i to lige store dele, se figur 1.

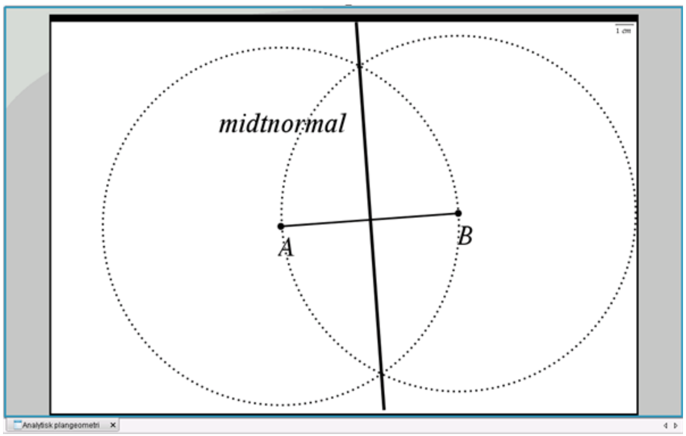


Figur 1 Midtnormalen for et linjestykke

Midtnormalen kan også opfattes som en symmetrilinje (spejlingsakse) for linjestykket. Derudfra kan vi udlede en vigtig egenskab ved midtnormalen: Ethvert punkt på midtnormalen ligger lige langt fra linjestykkets to endepunkter A og B.

For at kunne tegne midtnormalen har vi brug for at fastlægge to punkter på den - f.eks. et punkt over linjestykket og et punkt under linjestykket. Da punkter på midtnormalen har samme afstand til punkt A og punkt B, kan vi løse opgaven i følgende tre simple trin, se figur 2:

- tegn en cirkel med centrum i punkt A og radius AB (dvs. denne cirkel går gennem punkt B)
- tegn en cirkel med centrum i punkt B og radius AB (dvs. denne cirkel går gennem punkt A)
- tegn en linje gennem de to cirklers to skæringspunkter - denne linje er midtnormal for linjestykket AB.



Figur 2 Konstruktion af midtnormalen for et linjestykke

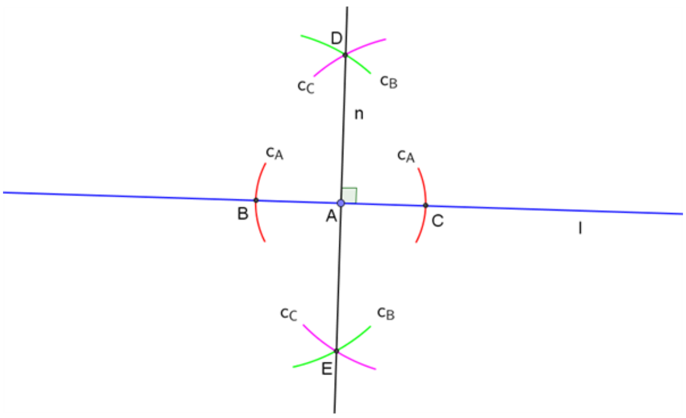
Bemærk: Cirklerne i de to første trin skal ikke nødvendigvis have radius AB. Du kan benytte en anden radius, men radius **skal** være den samme i begge cirkler, og radius **skal** være større end halvdelen af AB.

Når man konstruerer midtnormalen manuelt på papir med brug af en passer og en lineal, opnår man en hensigtsmæssig nøjagtighed ved at bruge AB som radius i cirklerne. Hvis man benytter en radius, der kun er lidt større end halvdelen af AB, vil en lille fejlplacering af passeren kunne resultere i en forholdsvis stor afvigelse set i forhold til, om man opnår en ret vinkel mellem midtnormalen og linjestykket.

Når man konstruerer midtnormalen med et IT-værktøj, har størrelsen af radius i cirklerne derimod ingen praktisk betydning for nøjagtigheden - den skal bare være større end halvdelen af AB.

2.2 At rejse en normal i et punkt på en linje

Der er givet en linje (l) og et punkt (A) på linjen, som vist med blåt i figur 1. Vi skal rejse en normal til linjen l i punkt A, dvs. konstruere en linje (n) der står vinkelret på linjen l og går gennem punkt A.



Figur 1 At rejse en normal

Fremgangsmåde, se figur 1:

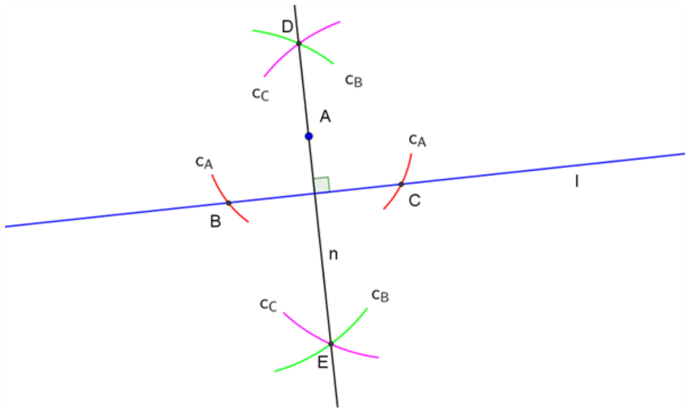
1. tegn - med centrum i punkt A - en cirkel (c_A) med en selvvalgt radius (i figur 1 er kun vist de to cirkelbuer (røde), der hører til cirklen c_A, som skærer linjen l hhv. til venstre og til

højre for punkt A)

2. de to skæringspunkter mellem linjen l og cirkelbuerne, der hører til cirklen c_A, betegnes hhv. B (til venstre for punkt A) og C (til højre for punkt A)
3. tegn - med centrum i punkt B - en cirkel (c_B), der går gennem punkt C (i figur 1 er kun vist de to cirkelbuer (grønne) hørende til cirklen c_B, som set i forhold til linjen l ligger hhv. ca. vinkelret over og ca. vinkelret under punkt A)
4. tegn - med centrum i punkt C - en cirkel (c_C), der går gennem punkt B (i figur 1 er kun vist de to cirkelbuer (lyserøde) hørende til cirklen c_C, som set i forhold til linjen l ligger hhv. ca. vinkelret over og ca. vinkelret under punkt A)
5. de to skæringspunkter mellem cirkelbuerne hørende til cirklerne c_B og c_C betegnes hhv. D (over linjen l) og E (under linjen l)
6. linjen gennem punkterne D og E er den ønskede normal (n), der står vinkelret på linjen l og går gennem punkt A.

2.3 At rejse en normal gennem et punkt

Der er givet en linje (l) og et punkt (A), der ikke ligger på linjen, som vist med blåt i figur 1. Vi skal rejse en normal til linjen l, som går gennem punkt A, dvs. konstruere en linje (n), der står vinkelret på linjen l og går gennem punkt A.



Figur 1 At rejse en normal

Fremgangsmåde, se figur 1:

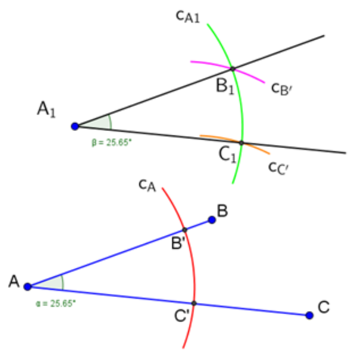
1. tegn - med centrum i punkt A - en cirkel (c_A) med en selvvalgt radius, som er noget større end afstanden mellem punkt A og linjen l (i figur 1 er kun vist de to cirkelbuer (røde) hørende til cirklen c_A, som skærer linjen l hhv. til venstre og til højre for punkt A)
2. de to skæringspunkter mellem linjen l og cirkelbuerne hørende til cirklen c_A betegnes hhv. B (til venstre for punkt A) og C (til højre for punkt A)
3. tegn - med centrum i punkt B - en cirkel (c_B), der går gennem punkt C (i figur 1 er kun vist de to cirkelbuer (grønne) hørende til cirklen c_B, som set i forhold til linjen l ligger hhv. vinkelret over og vinkelret under punkt A)
4. tegn - med centrum i punkt C - en cirkel (c_C), der går gennem punkt B (i figur 1 er kun vist de to cirkelbuer (lyserøde) hørende til cirklen c_C, som set i forhold til linjen l ligger hhv. vinkelret over og vinkelret under punkt A)

5. de to skæringspunkter mellem cirkelbuerne hørende til cirklerne c_B og c_C betegnes hhv. D (over linjen l) og E (under linjen l)

6. tegn linjen, der går gennem punkterne D og E. Denne linje er den ønskede normal (n), der står vinkelret på linjen l og går gennem punkt A.

2.4 At flytte en vinkel

Der er givet en vinkel ($\angle BAC$) med toppunkt i punkt A og vinkelbenene AB og AC som vist med blåt i figur 1. Vi skal flytte vinklen til en ny position med toppunkt i punkt A_1.



Figur 1 At flytte en vinkel

Fremgangsmåde, se figur 1:

1. tegn - med centrum i punkt A - en cirkel (c_A), der går gennem punktA_1, og bevar radius på din passer (i figur 1 er kun vist den cirkelbue (rød) hørende til cirklen c_A, som skærer begge vinkelben AB og AC)

2. skæringspunkterne mellem cirkelbuen hørende til cirklen c_A og vinkelbenene AB og AC betegnes hhv. B' og C'

3. tegn - med centrum i punkt A_1 - en cirkel (c_{A1}) med samme radius som i cirklen c_A (i figur 1 er kun vist den cirkelbue (grøn) hørende til cirklen c_{A1}, som svarer til den røde cirkelbue hørende til cirklen c_A)

4. tegn - med centrum i punkt B' - en cirkel ($c_{B'}$) med samme radius som i cirklen c_A (i figur 1 er kun vist den cirkelbue (lyserød) hørende til cirklen $c_{B'}$, som skærer cirkelbuen hørende til cirklen c_{A1})

5. tegn - med centrum i punkt C' - en cirkel ($c_{C'}$) med samme radius som i cirklen c_A (i figur 1 er kun vist den cirkelbue (orange) hørende til cirklen $c_{C'}$, som skærer cirkelbuen hørende til cirklen c_{A1})

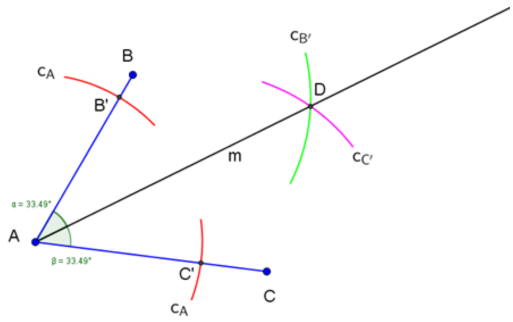
6. skæringspunktet mellem cirkelbuerne hørende til cirklerne c_{A1} og $c_{B'}$ betegnes B_1

7. skæringspunktet mellem cirkelbuerne hørende til cirklerne c_{A1} og $c_{C'}$ betegnes C_1

8. vinkel $\angle B_1A_1C_1$ med toppunkt i punkt A_1 og vinkelbenene A_1B_1 og A_1C_1 er den ønskede flytning af vinkel $\angle BAC$

2.5 At halvere en vinkel

Der er givet en vinkel ($\angle BAC$) med toppunkt i punkt A og vinkelbenene AB og AC som vist med blåt i figuren. Vi skal halvere vinklen, dvs. konstruere en linje (m) i vinkelrummet mellem de to vinkelben, der deler vinkel $\angle BAC$) i to lige store vinkler.



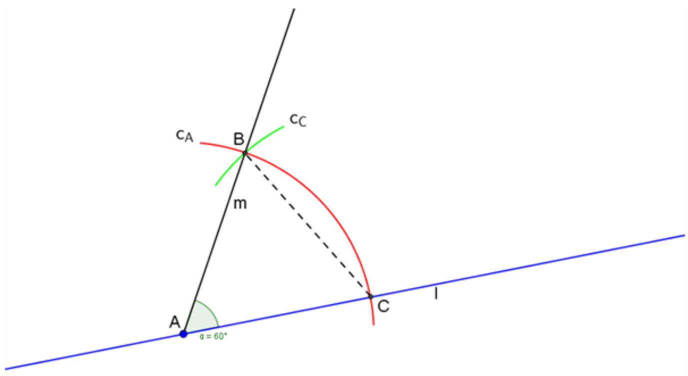
Figur At halvere en vinkel

Fremgangsmåde, se figuren:

1. tegn - med centrum i punkt A - en cirkel (c_A) med en selvvalgt radius (i figuren er kun vist de to cirkelbuer (røde) hørende til cirklen c_A, som skærer de to vinkelben)
2. skæringspunkterne mellem cirklen c_A og vinkelbenene AB og AC betegnes hhv. $B\,'$ og $C\,'$
3. tegn - med centrum i punkt $B\,'$ - en cirkel ($c_{B\,'}$) med en selvvalgt radius, og bevar radius på din passer (i figuren er kun vist den cirkelbue (grøn) hørende til cirklen $c_{B\,'}$, som er midt i vinkelrummet mellem de to vinkelben)
4. tegn - med centrum i punkt C' - en cirkel ($c_{C\,'}$) med samme radius som i cirklen $c_{B\,'}$ (i figuren er kun vist den cirkelbue (lyserød) hørende til cirklen $c_{C\,'}$, som er midt i vinkelrummet mellem de to vinkelben og skærer cirkelbuen hørende til cirklen $c_{B\,'}$)
5. skæringspunktet mellem cirkelbuerne hørende til cirklerne $c_{B\,'}$ og $c_{C\,'}$ betegnes D
6. halvlinjen (m) fra punkt A gennem punkt D er den ønskede vinkelhalveringslinje i vinkelrummet mellem de to vinkelben, der deler vinkel $\angle BAC$ i to lige store vinkler.

2.6 At afsætte en vinkel på 60°

Der er givet en linje (l) og et punkt (A) på linjen, som vist med blåt på figuren. Vi skal afsætte en 60°vinkel i punkt A, dvs. konstruere en linje (m), som danner vinklen 60°med linjen l og går gennem punkt A.



Figur At afsætte en vinkel på 60°

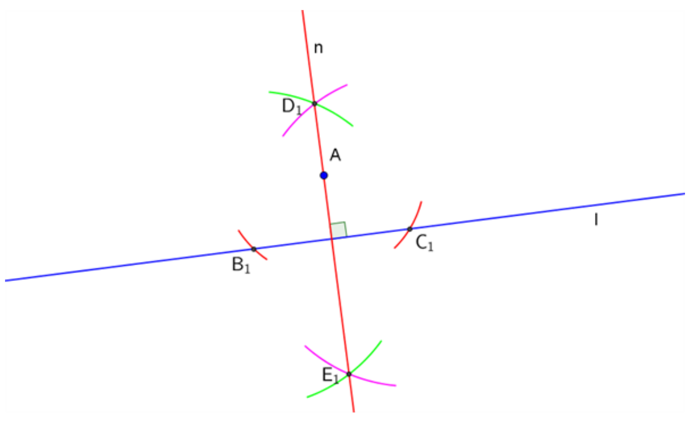
Fremgangsmåde, se figuren:

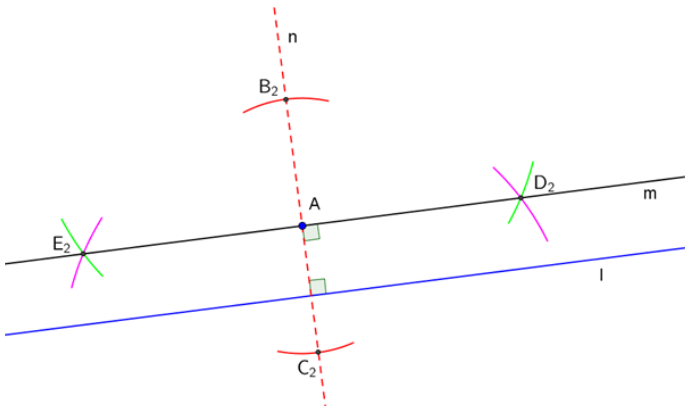
1. tegn - med centrum i punkt A - en cirkel (c_A) med en selvvalgt radius, og bevar radius på din passer (på figuren er kun vist den cirkelbue (rød) hørende til cirklen c_A, som forløber fra skæring med linjen l op til lidt mere end 60°over linjen l set fra punkt A)
2. skæringspunktet mellem cirkelbuen hørende til cirklen c_A og linjen l betegnes C
3. tegn - med centrum i punkt C - en cirkel (c_C) med samme radius som i cirkel c_A (på figuren er kun vist den cirkelbue (grøn) hørende til cirklen c_C, som skærer cirkelbuen hørende til cirklen c_A)
4. skæringspunktet mellem cirkelbuerne hørende til cirklerne c_A og c_C betegnes B
5. vinkel $\angle BAC$ er 60°, og halvlinjen (m) fra punkt A gennem punkt B er dermed den ønskede linje, som danner vinklen 60°med linjen l og går gennem punkt A

Trekant ABC er i øvrigt en regulær (dvs. ligesidet og ligevinklet) trekant, hvor vinklerne $\angle ACB$ og $\angle CBA$ også er 60°.

2.7 At konstruere en parallel linje gennem et punkt

Der er givet en linje (l) og et punkt (A), der ikke ligger på linjen, som vist med blåt på figuren. Vi skal konstruere en linje (m), som er parallel med linjen l og går gennem punkt A.





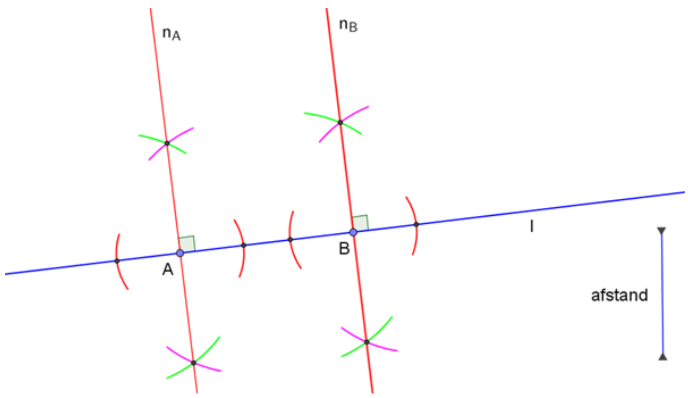
Figur At konstruere en parallel linje gennem et punkt

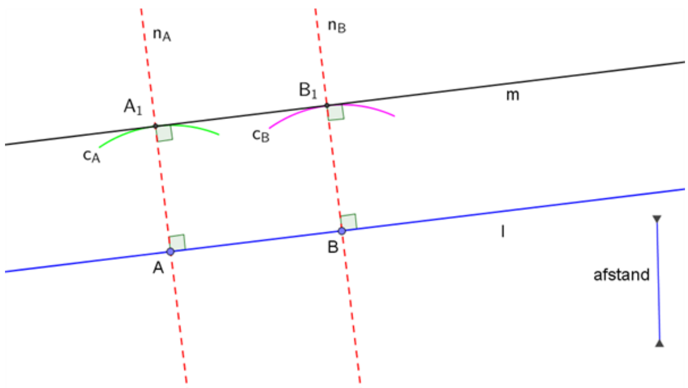
Fremgangsmåde:

1. rejs en normal (n) til linjen l, som går gennem punkt A (se figuren (øverst) og afsnittet om at rejse en normal gennem et punkt)
2. rejs en normal til normalen n i punkt A (se figuren (nederst) og afsnittet om at rejse en normal i et punkt på en linje)
3. normalen til normalen n er den ønskede linje (m), som er parallel med linjen l og går gennem punkt A.

2.8 At konstruere en parallel linje i en given afstand

Der er givet en linje (l) og en afstand som vist med blåt på figuren. Vi skal konstruere en linje (m), som er parallel med linjen l og ligger i den givne afstand fra denne.





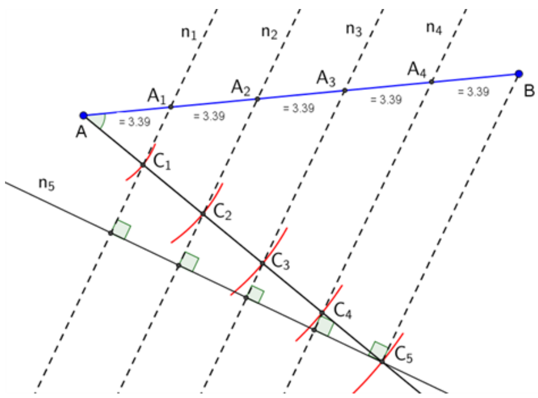
Figur At konstruere en parallel linje i en given afstand

Fremgangsmåde:

1. markér to punkter A og B på linjen l (se figuren, øverst)
2. rejs to normaler til linjen l, henholdsvis i punkt A (n_A) og i punkt B (n_B) (se figuren (øverst) og afsnittet om at rejse en normal i et punkt på en linje)
3. tegn - med centrum i punkt A - en cirkel (c_A) med den givne afstand som radius (på figuren (nederst) er kun vist den cirkelbue (grøn) hørende til cirklen c_A, som skærer normalen n_A over linjen l)
4. tegn - med centrum i punkt B - en cirkel (c_B) med den givne afstand som radius (på figuren (nederst) er kun vist den cirkelbue (lyserød) hørende til cirklen c_B, som skærer normalen n_B over linjen l)
5. skæringspunkterne mellem cirkelbuerne og de tilhørende normaler til linjen l betegnes henholdsvis A_1 og B_1
6. linjen gennem A_1 og B_1 er den ønskede linje (m), som er parallel med linjen l og ligger i den givne afstand fra denne.

2.9 At dele et linjestykke i N lige store dele

Der er givet et linjestykke (AB), som vist med blåt på figuren. Vi skal dele linjestykket i N lige store dele, hvor N er et vilkårligt, naturligt tal.



Figur At dele et linjestykke i N lige store dele

Fremgangsmåde, se figuren (eksempel på 5-deling af linjestykke):

1. afsæt i punkt A en halvlinje, som danner en vinkel med linjestykket AB på i størrelsesordenen 40°og 50°
2. afsæt med din passer (med udgangspunkt i punkt A) N punkter (C_i) på halvlinjen med en vilkårlig, men lige stor, afstand imellem hvert punkt (eksemplet i figuren bruger 5 punkter)
3. forbind det N'te punkt (C_N) på halvlinjen med punkt B (på figuren: linjestykket C_5B)
4. rejs en normal (n_N) til linjestykket C_NB i punkt C_N (på figuren: n_5), se afsnittet om at rejse en normal i et punkt på en linje
5. rejs normaler (n_i) til normalen n_N gennem hvert af de øvrige punkter på halvlinjen (på figuren: n_1, n_2, n_3 og n_4), se afsnittet om at rejse en normal gennem et punkt
6. skæringspunkterne mellem normalerne (n_i) og linjestykket AB deler linjestykket AB i N lige store dele (på figuren deler punkterne A_1, A_2, A_3 og A_4 linjestykket AB i 5 lige store dele).

3 Geometri

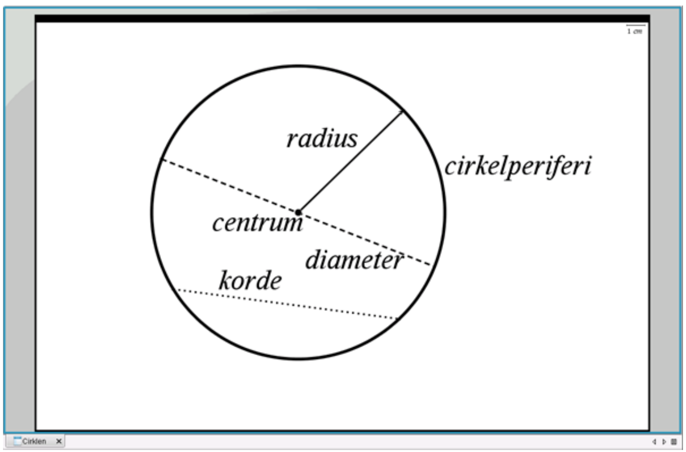
I denne sektion kan du lære om forskellige egenskaber ved cirklen, hvad en skruelinje er og anvendelse af Guldins regler for rumfang af en cirkulær ring.

God fornøjelse!

3.1 Cirklen: Introduktion

Cirklen, se figur 1, er en plan, lukket figur, som er kendetegnet ved, at alle punkter på cirklens omkreds (også kaldet ***cirkelperiferien***) har samme afstand - som vi kalder cirklens ***radius*** - til et punkt i midten af cirklen - som vi kalder cirklens ***centrum***.

Den dobbelte radius kalder vi cirklens ***diameter***.



Figur 1 Cirklen

I cirklen kan tegnes uendelig mange linjestykker, som forbinder to punkter på cirkelperiferien - disse linjestykker kalder vi ***korder***. Den længste korde i en cirkel er cirklens diameter, som går gennem cirklens centrum.

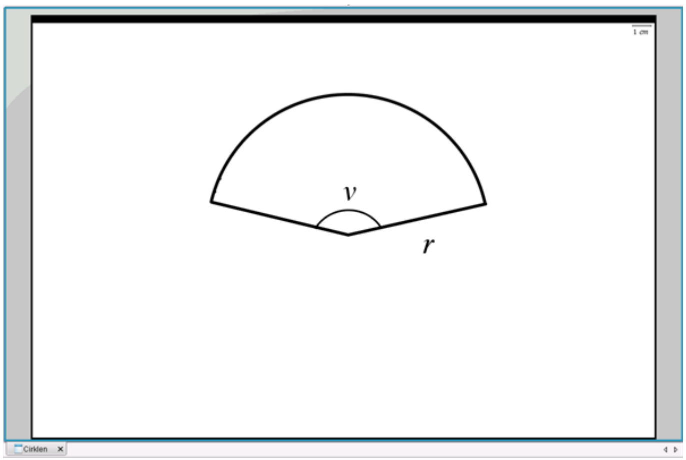
Cirklen omslutter 360°, eller angivet i radianer: 2π.

Cirklens omkreds $= \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$

Cirklens areal $= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \pi \cdot r^2$

3.2 Cirkeludsnit

Et cirkeludsnit, se figur 2, er en del af en cirkel - som vi populært kalder et lagkage- eller pizzastykke - bestemt ved cirklens radius, r, og vinklen, v, mellem de to radier, der afgrænser cirkeludsnittet.



Figur 2 Cirkeludsnit

I næste afsnit ser vi på bestemmelse af cirkelbuens længde.

Cirkeludsnittets areal er direkte proportionalt med vinklen v.

Hvis vinklen, v, angives i grader $(0 \leq v \leq 360°)$:

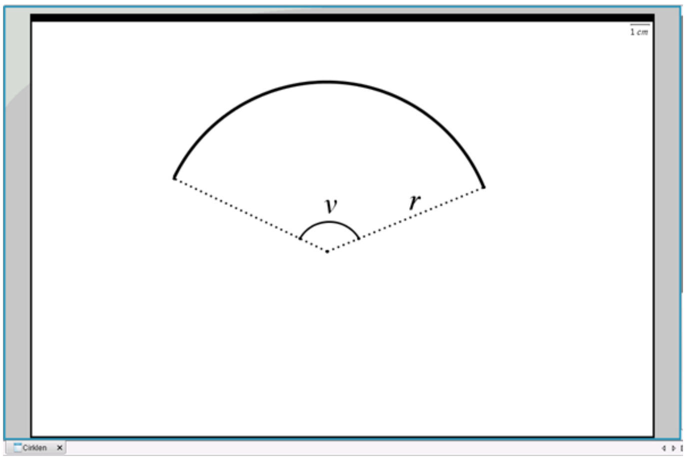
Cirkeludsnittets areal $A_{udsnit} = \frac{v}{360} \cdot (\frac{\pi}{4} \cdot d^2) = \frac{v}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

Hvis vinklen, v, angives i radianer $(0 \leq v \leq 2\pi)$:

Cirkeludsnittets areal $A_{udsnit} = \frac{v}{2\pi} \cdot (\frac{\pi}{4} \cdot d^2) = \frac{v}{2} \cdot r^2$

3.3 Cirkelbue

En cirkelbue, se figur 3, er en del af en cirkelperiferi bestemt ved cirklens radius, r, og vinklen, v, mellem radierne til cirkelbuens to endepunkter.



Figur 3 Cirkelbue afgrænset af to radier

Cirkelbuens længde er direkte proportional med vinklen v.

Hvis vinklen, v, angives i grader ($0 \leq v \leq 360°$), kan cirkelbuens længde findes med formlen:

$$L_{bue} = \frac{v}{360} \cdot (\pi \cdot d) = \frac{v}{180} \cdot \pi \cdot r$$

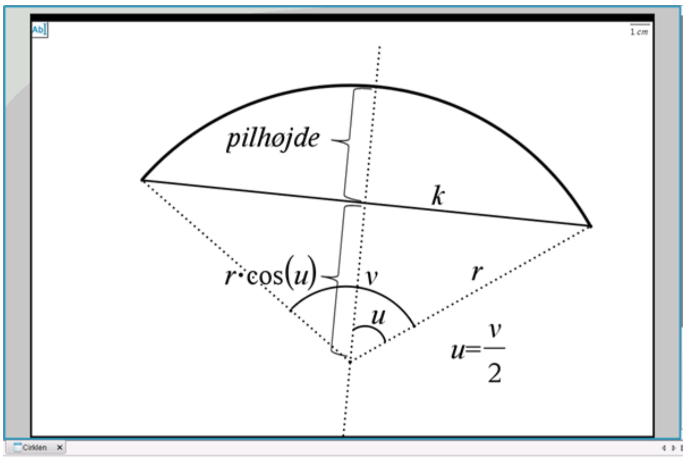
Hvis vinklen, v, angives i radianer ($0 \leq v \leq 2\pi$), kan cirkelbuens længde findes med formlen:

$$L_{bue} = \frac{v}{2\pi} \cdot (\pi \cdot d) = v \cdot r$$

3.4 Pilhøjde

For både cirkeludsnittet og cirkelbuen fastlægges korden, k, som linjestykket, der forbinder cirkelbuens to endepunkter. Vinkelhalveringslinjen for cirkeludsnittet/cirkelbuen er samtidig midtnormal til korden, k, dvs. den står vinkelret på korden og deler den i to lige store dele, se figur 4.

Pilhøjden defineres som afstanden - målt langs vinkelhalveringslinjen - fra korden, k, til cirkelperiferien.



Figur 4 Pilhøjde for et cirkeludsnit/en cirkelbue

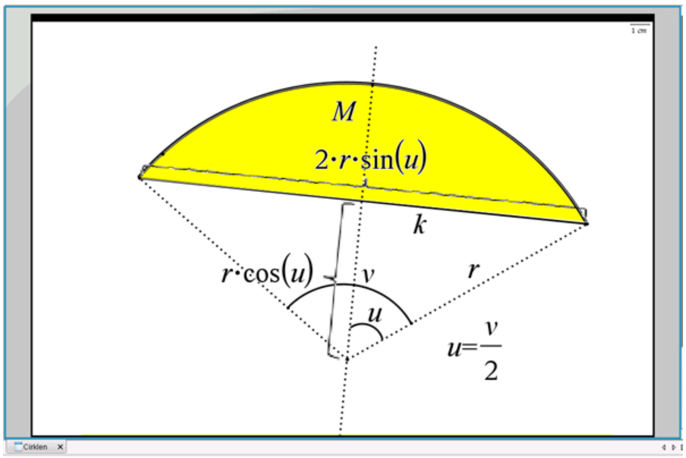
Det ses af figuren, at pilhøjden er givet ved $r - r \cdot \cos(\frac{v}{2}) = r \cdot (1 - \cos(\frac{v}{2}))$,

hvor $0 < v \leq 180°$ eller $0 < v \leq \pi$

Nogle taleksempler:

v (grader)	v (radianer)	Pilhøjde
30°	$\frac{\pi}{6}$	$r \cdot (1 - \cos(15°)) = 0{,}034 \cdot r$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$r \cdot (1 - \cos(22,5°)) = 0{,}076 \cdot r$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$r \cdot (1 - \cos(30°)) = r \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}134 \cdot r$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$r \cdot (1 - \cos(45°)) = r \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}293 \cdot r$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$r \cdot (1 - \cos(60°)) = r \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}5 \cdot r$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$r \cdot (1 - \cos(67,5°)) = 0{,}617 \cdot r$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$r \cdot (1 - \cos(75°)) = 0{,}741 \cdot r$
180°	π	$r \cdot (1 - \cos(90°)) = r \cdot (1 - 0) = r$

Området mellem cirkelbuen og korden, k, betegner vi M, se figur 5.



Figur 5 Areal af område mellem cirkelbue og korde

Arealet af M kan beregnes som arealet af hele cirkeludsnittet hørende til cirkelbuen fratrukket arealet af trekanten under korden, k. I trekanten under korden, k, er grundlinjen $g = 2 \cdot r \cdot \sin(\frac{v}{2})$ og højden $h = r \cdot \cos(\frac{v}{2})$, og dermed er arealet af trekanten under korden: $A_k = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot h = r^2 \cdot \sin(\frac{v}{2}) \cdot \cos(\frac{v}{2})$.

Hvis vinklen, v, angives i grader ($0 < v \leq 180°$), er arealet af M :

$$A_M = A_{udsnit} \; - \; A_k = \frac{v}{360} \cdot \pi \cdot r^2 - r^2 \cdot \sin(\tfrac{v}{2}) \cdot \cos(\tfrac{v}{2})$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot (\frac{v}{360} - \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\tfrac{v}{2}) \cdot \cos(\tfrac{v}{2}))$$

Hvis vinklen, v, angives i radianer ($0 < v \leq \pi$), er arealet af M:

$$A_M = A_{udsnit} \; - \; A_k = \frac{v}{2} \cdot r^2 - r^2 \cdot \sin(\tfrac{v}{2}) \cdot \cos(\tfrac{v}{2})$$

$$= r^2 \cdot (\frac{v}{2} - \sin(\tfrac{v}{2}) \cdot \cos(\tfrac{v}{2}))$$

Alternativ formel

Hvis man gerne vil undgå cosinus og sinus, kan følgende formel også bruges til at bestemme pilhøjden:

$$r = \frac{k^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

Idet vi ved, at pilhøjden altid har en værdi mellem 0 og radius r, og at $r \geq \frac{k}{2}$kan vi få følgende udtryk:

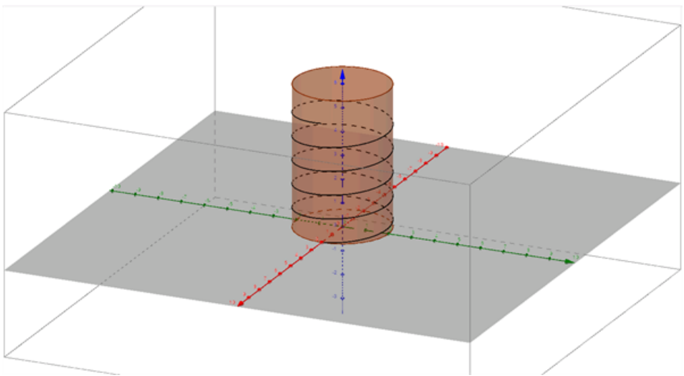
$$h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

3.5 Skruelinje

En skruelinje er en tredimensionel kurve, der kan opfattes som beliggende på ydersiden af en cylinder, se figur 6. Den sorte skruelinje snor sig om cylinder-ens længdeakse. Når der indlægges et (x,y,z)-koordinatsystem med z-aksen sammenfaldende med cylinderens længdeakse, kan skruelinjen beskrives ved koordinaterne:

$(x(t), y(t), z(t)) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), \frac{h}{2\pi} \cdot t)$

hvor t angiver radianer, og h angiver højden af én vinding langs z-aksen. I figur 6 er x-aksen rød, y-aksen grøn og z-aksen blå. Skruelinjens projektion på (x,y)-planen er en cirkel med radius, r, og centrum i (0,0).



Figur 6 En skruelinje kan opfattes som beliggende på ydersiden af en cylinder

Eksempler på skruelinjer er gevind og fjedre inden for mekanik og DNA-molekyler inden for biologi.

Længden af et infinitesimalt stykke af skruelinjen er:

$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt = \sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2} \cdot dt$

Her har vi benyttet, at $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t), \frac{h}{2\pi})$

og at $(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = 1$.

Ved at integrere dL over én vinding, dvs. fra $t = 0$ til $t = 2\pi$, finder vi længden af én vinding af skruelinjen:

$$L_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}\, dt = 2\pi \cdot \sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2} = 2\pi r \cdot \sqrt{1 + (\frac{h}{2\pi r})^2}$$

Her bemærker vi, at $2\pi r$ er omkredsen af en cirkel med radius r, hvilket er længden af én vinding, hvis vi ignorerer vindingens højde. Faktoren under kvadratrodstegnet illustrerer dermed betydningen af vindingens højde for skruelinjens længde, og vi ser, at det er vindingens højde målt i forhold til cirklens omkreds - hvilket vi kunne betegne som den relative højde af en vinding - der er afgørende. Ikke overraskende er sammenhængen, at jo større den relative højde af en vinding er, desto større er indflydelsen på længden af skruelinjen.

Eksempler

Regneeksempel 1:

Bestem længden af en 5 cm høj fjeder bestående af 10 vindinger, hvor diameteren er 0,8 cm.

Først bestemmes højden af én vinding: $h = \frac{5}{10} = 0,5$ cm. Idet radius er: $r = \frac{d}{2} = 0,4$ cm, er længden af fjederen:

$$L = 10 \cdot L_1 = 10 \cdot 2\pi r \cdot \sqrt{1 + (\frac{h}{2\pi r})^2} = 20 \cdot \pi \cdot 0,4 \cdot \sqrt{1 + (\frac{0,5}{2 \cdot \pi \cdot 0,4})^2}\ L = 25,6 \text{ cm}$$

Den relative højde af en vinding er 0,20, og hvis vi ignorerede vindingernes højde, ville vi komme frem til en længde af fjederen på 25,1 cm. Vindingernes højde giver altså her en forøgelse af skruelinjens længde på 2 %.

Regneeksempel 2

Bestem længden af en 56 mm høj fjeder bestående af 8 vindinger, hvor diameteren er 30 mm.

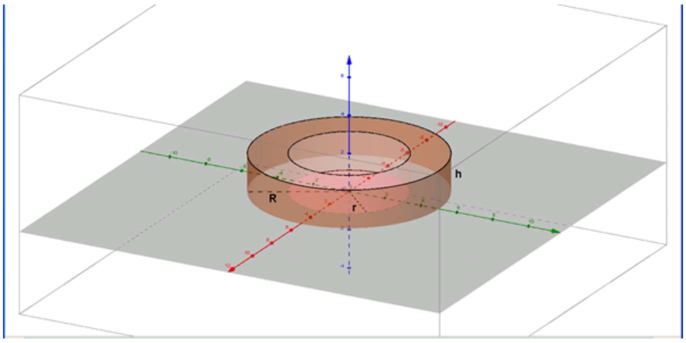
Først bestemmes højden af én vinding: $h = \frac{56}{8} = 7$ mm. Idet radius er $r = \frac{d}{2} = 15$ mm, er længden af fjederen:

$$L = 8 \cdot L_1 = 8 \cdot 2\pi r \cdot \sqrt{1 + (\frac{h}{2\pi r})^2} = 16 \cdot \pi \cdot 15 \cdot \sqrt{1 + (\frac{7}{2 \cdot \pi \cdot 15})^2}\ L = 756 \text{ mm}$$

Den relative højde af en vinding er 0,074, og hvis vi ignorerede vindingernes højde, ville vi komme frem til en længde af fjederen på 754 mm. Vindinger-nes højde giver altså her en forøgelse af skruelinjens længde på kun 0,3 %.

3.6 Guldins regler

En cirkulær ring, f.eks. et stenhjul, kan betragtes som en cylinder med et hul i midten, se figur 1. Hullet har også form som en cylinder, og de to cylindre (benævnt hhv. den ydre og den indre cylinder) kaldes koncentriske, da de har sammenfaldende længdeakse.



Figur 1 En cirkulær ring

Rumfanget af den cirkulære ring er forskellen i rumfang for den ydre cylinder og den indre cylinder:

$V_{ring} = h \cdot (\pi \cdot R^2) - h \cdot (\pi \cdot r^2) = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$

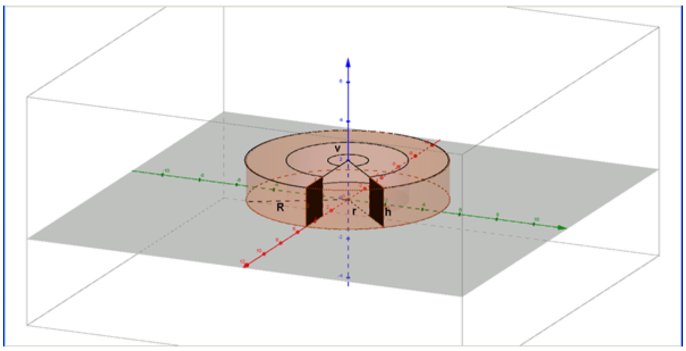
hvor R er radius i den ydre cylinder, r er radius i den indre cylinder og h er ringens højde.

Men vi kan også nå frem til formlen for rumfanget ved en lidt anden betragtning af ringen. Ringens tværsnit er et rektangel med bredden $(R - r)$ og højden h, og altså er ringens tværsnitsareal $A = h \cdot (R - r)$. Og ringens omkreds målt langs midten af ringens tykkelse er $O = 2 \cdot \pi \cdot a$, hvor a er middelværdien af de to radier: $a = \frac{R+r}{2}$. Rumfanget fremkommer ved at gange tværsnitsarealet med omkredsen:

Guldins regel: $V_{ring} = O \cdot A = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot A$

som kan omskrives til $V_{ring} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R+r}{2} \cdot\ h \cdot (R - r) = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$

Hvis vi skærer et vinkeludsnit af ringen væk, se figur 2, kan den tilbageværende del af ringen karakteriseres ved vinklen, v, hvor $0 < v < 360°$ eller $0 < v < 2\pi$.



Figur 2 En cirkulær ring, hvor et vinkeludsnit er skåret væk

Rumfanget af den tilbageværende del af ringen er direkte proportionalt med vinklen, v, og med v angivet i grader:

Guldins regel giver: $$V_{del-ring} = \frac{v}{360} \cdot\ 2 \cdot \pi \cdot a \cdot A$$

som kan omskrives til:

Hvis v angives i grader: $$V_{del-ring} = \frac{v}{360} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$$

Hvis v angives i radianer: $$V_{del-ring} = \frac{v}{2} \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$$

Areal

Guldin havde en lignende regel for tilfældet hvor ringen ikke har et rumfang, men er en flade, det kunne f.eks. være et enkelt bånd i en guirlande. Her findes overfladearealet ved næsten samme metode

Guldins regel: $$O_{A_{del-ring}} = \frac{v}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

Hvor den eneste forskel er, at R nu betegner radius for cirkelfladen og ikke den ydre radius.

Eksempel

På taget af kunstmuseet ARos i Århus er etableret kunstværket Your Rainbow Panorama - udformet som en cirkulær ring, en rundgang - som man kan gå hele vejen rundt i, og som er skabt af den dansk/islandske kunstner Olafur Eliasson i 2011.

Figur 3 Your Rainbow Panorama på ARoS

Rundgangens ydre diameter er 52 m, den indre diameter er 46 m og rundgangens højde er 3 m.

Tværsnittet er kvadratisk, idet bredden af rundgangen er $\frac{1}{2} \cdot (D - d) = 3$ m, og tværsnitsarealet er derfor $A = b \cdot h = 3 \cdot 3 = 9$ m^2. Rundgangens omkreds målt langs midten af gangens bredde er $O = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R+r}{2} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{26+23}{2} = 153,9$ m, og rumfanget er $V_{ring} = A \cdot O = 9 \cdot 153,9 = 1.385$ m^3. Samme rumfang kommer man frem til med formlen $V_{ring} = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot 3 \cdot (26^2 - 23^2)$.

Vi har tidligere regnet på Your Rainbow Panorama - se her.

4 Trigonometri

I denne sektion kan du lære om bl.a. de trigonometriske grundligninger og om nogle af de steder, de trigonometriske funktioner bruges.

4.1 Introduktion til cosinus og sinus

Her definerer vi funktionerne cos og sin og beskriver sammenhængen mellem grader og radianer.

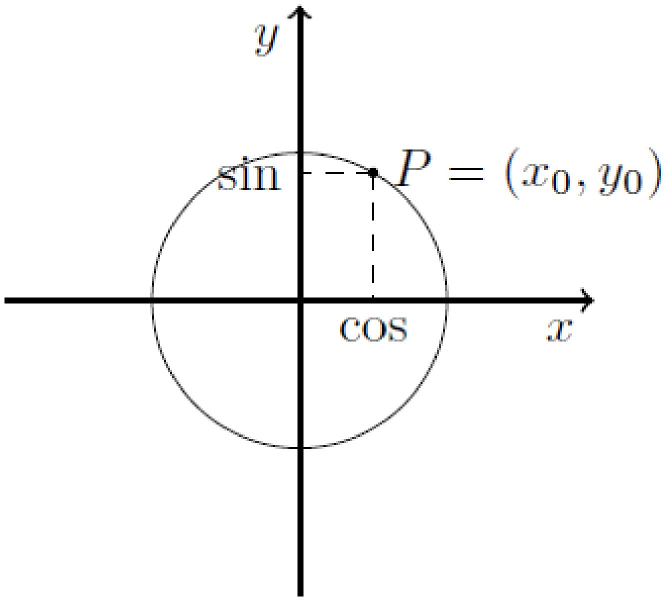
Cosinus og sinus

Betragt cirklen nedenfor med centrum i origo, altså $(0,0)$, og radius 1. Denne specifikke cirkel kaldes *enhedscirklen*. Det smarte ved cirkler er, at alle punkterne, der ligger på cirklen, har samme afstand til dens centrum. Det vil sige at enhedscirklen består af de punkter, hvor afstanden fra punktet til $(0,0)$ er 1.

Et punkt $P=(x,y)$ ligger dermed på enhedscirklen, når afstanden fra punktet til origo er lig med 1. Ifølge Pythagoras er dette præcist, når

$$x^2+y^2=1^2=1$$

Betragt figuren nedenfor: Punktet $P=(x_0,y_0)$ ligger på enhedscirklen.



Definition: Hvis et punkt $P=(x_0,y_0)$ ligger på enhedscirklen, defineres

$$\cos(P)=x_0$$

$$\sin(P)=y_0$$

Med andre ord, hvis du har et punkt, der ligger på enhedscirklen, er cos til punktet lig med x -værdien for punktet, mens sin er lig y- værdien for punktet.

Eksempel: Betragt punktet $P=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Lad os først tjekke, om punktet ligger på enhedscirklen. Ifølge diskussionen ovenfor, er dette, når afstanden til origo er 1. Vi finder afstanden ved hjælp af Pythagoras:

$$x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Dermed ligger punktet på enhedscirklen. Vi kan nu beregne cosinus og sinus til punktet:

Da cos er defineret som x-værdien for punktet, er

$$\cos(P)=\frac{1}{2}$$

Da sin er defineret som y-værdien for punktet, er

$$\sin(P) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866.$$

En lille bemærkning: Ifølge Pythagoras' læresætning

$$a^2 + b^2 = c^2$$

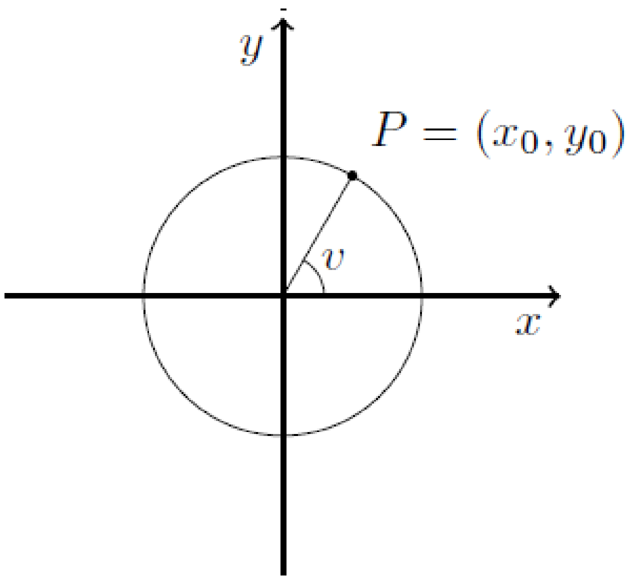
får vi ligheden

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1^2 = 1.$$

Denne lighed går tit under det ikke særligt flatterende navn, **idiotformlen.**

Grader og radianer

Nu har vi defineret, hvad vi mener med cosinus og sinus. Nu skal vi koble disse to begreber til vinkler. Den mest intuitive måde, vi kan gøre dette på, er, at angive hvilken vinkel punktet har med x-aksen, se figuren nedenfor.



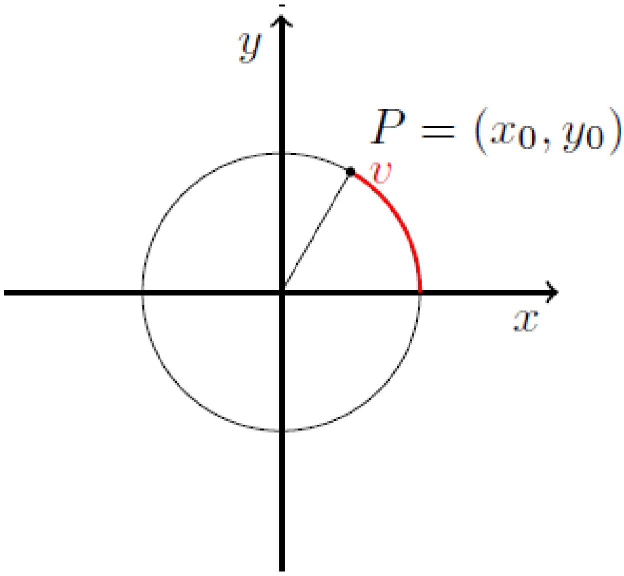
Her er markeret det punkt $P = (x_0, y_0)$, der har vinklen v til x-aksen. Ifølge definitionen ovenfor er

$$\cos(v) \;= x_0$$

$$\sin(v) \;= y_0$$

Her skal bemærkes, at vi altid regner positive vinkler til at gå *imod*urets omløbsretning (positiv omløbsretning) og negative vinkler *med* urets omløbsretning (negativ omløbsretning).

En anden metode er, at angive vinklen i *radianer,*betragt figuren nedenfor



Vinklen angives nu som følger: Stil dig i punktet $(1, 0)$ på enhedscirklen. Bevæg dig afstanden v langs cirklen. Det punkt, du ender i, er dit punkt P.

Enhedscirklen har radius 1. Det vil sige, at omkredsen er $O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Et helt omløb i cirklen, altså en vinkel, der svarer til 360 grader, er dermed 2π. Ligeledes svarer 90 grader, en kvart gang rundt i cirklen, til $\frac{\pi}{2}$, 180 grader, en halv gang rundt i cirklen, svarer til π osv.

Omregning fra grader til radianer:

Hvis vi har en vinkel v i grader, og gerne vil bestemme, hvor mange radianer, det er, gøres det ud fra følgende formel:

$$r = \frac{v}{360} \cdot 2\pi$$

Her er r vinklen i radianer, som vi er på jagt efter.

Lad os prøve at tænke over, hvad denne formel indeholder:

- $\frac{v}{360}$ svarer til den brøkdel, vi går rundt i cirklen. For eksempel er en 90 graders vinkel en kvart gang rundt, da

$$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$$

.

- 2π er omkredsen af cirklen, altså hvor langt er der rundt i hele cirklen.

Når vi ganger de to størrelser sammen, finder vi hvor stor en brøkdel af omkredsen, vores vinkel udspænder - det vil præcis sige, hvad vinklen er i radianer.

Eksempel:

Hvor mange radianer svarer 90 grader til?

Vi bruger formlen $r = \frac{v}{360} \cdot 2\pi$

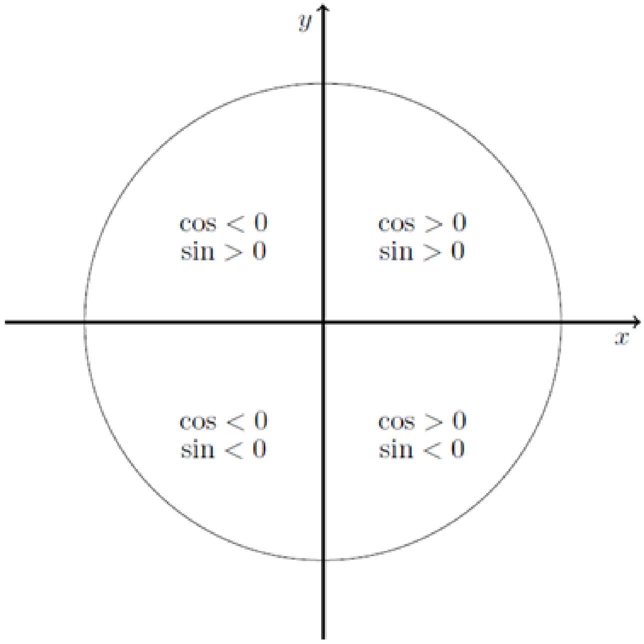
$$r = \frac{90}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

.

4.2 Trigonometriske grundligninger

Fortegn på cos, sin og tan

Før vi begynder at diskutere løsninger til såkaldte trigonometriske grundligninger, ser vi lidt på fortegnene for de forskellige trigonometriske funktioner. For cos og sin handler det om at undersøge, om $x-$ og y-værdien til et givet punkt er positivt, idet cos er defineret som x-værdien til et punkt til enhedscirklen, mens sin er y-værdien. Fortegnene er illustreret i figuren nedenfor.

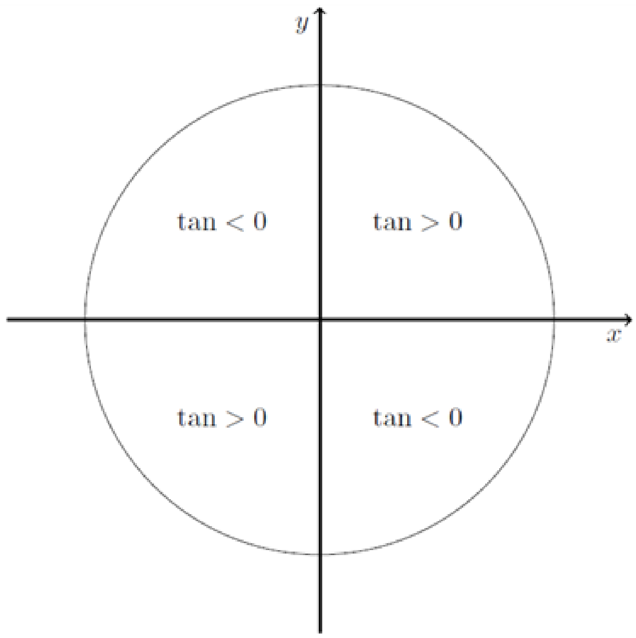


Når vi skal bestemme fortegnene for tangens, skal vi tænke os lidt mere om. Husk, at tangens er defineret som

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

Da vi ikke må dividere med 0, kan fortegnene for tangens bestemmes ved hjælp af fortegnene for sinus og cosinus, så længe cosinus ikke er 0, som er ved $\pm\frac{\pi}{2}$.

Hvis cosinus og sinus begge er positive, bliver tangens også positiv, da vi dividerer to positive tal. Ligeledes bliver tangens også positiv, hvis både cosinus og sinus er negative, da vi kan gange både tæller og nævner med -1, så vi kommer tilbage til en brøk med positiv tæller og nævner. Hvis *enten* cosinus eller sinus er negativ, mens den anden er positiv, får vi at tangens er negativ (se regneregler for negative tal). Det giver fortegnene illustreret i figuren nedenfor.



Trigonometriske grundligninger

Trigonometriske grundligninger er ligninger på formen

$$\cos(v) = k$$
$$\sin(v) = k$$
$$\tan(v) = k$$

Lad os starte med at overveje, hvilke værdier af k, der kan have en løsning. Da cosinus og sinus udgør henholdsvis x- og y-koordinaten for punkter på enhedscirklen. Alle punkterne på enhedscirklen har både x- og y-værdier mellem -1 og 1, så der er kun løsninger til $\cos(v) = k$ og $\sin(v) = k$, hvis

$$-1 \leq k \leq 1.$$

Tilfældet er lidt mere kompliceret for tangens, da det er en brøk på formen

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

Lidt viften med hænderne: Hvis $\cos(v)$ bliver meget, meget lille, bliver $\tan(v)$ meget, meget stor. På denne måde kan man finde vinkler, så $\tan(v) = k$ for ethvert reelt tal k.

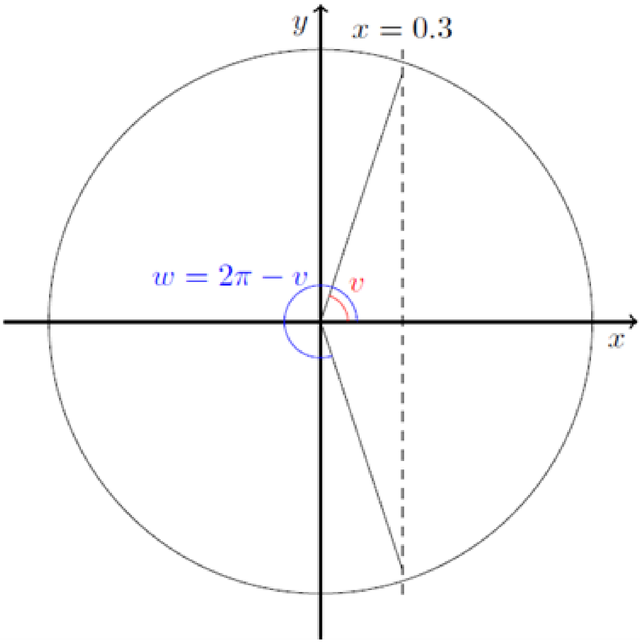
Hvordan løser man det så?

Cosinus:

Lad os illustrere det ved hjælp af eksempler. For cosinus skal vi huske på, at det er x-værdien for punkterne på enhedscirklen. Det vil sige, at hvis vi skal løse den trigonometriske grundligning

$$\cos(v) = 0,3$$

skal vi finde de punkter på enhedscirklen, der har x-værdi lig $0,3$. Nedenfor er skitseret en metode til at løse sådan en ligning:



Metoden kan beskrives som en 3-trins raket:

1. Da vi er på jagt efter x-værdier (vi arbejder med cosinus), tegn en linje ved $x = k$, her er tegnet en stiplet linje ved $x = 0,3$.
2. Identificér en vinkel, så cosinus til den vinkel har den ønskede x-værdi. Her har vi tegnet vinklen v ved at forbinde origo, $(0;0)$, med skæringspunktet mellem cirklen og den stiplede linje. Vi måler vinklen til ca. 72° eller 1,26 radianer
3. For at finde den anden vinkel, tager vi $w = 2\pi - v = 5,01$ radianer.

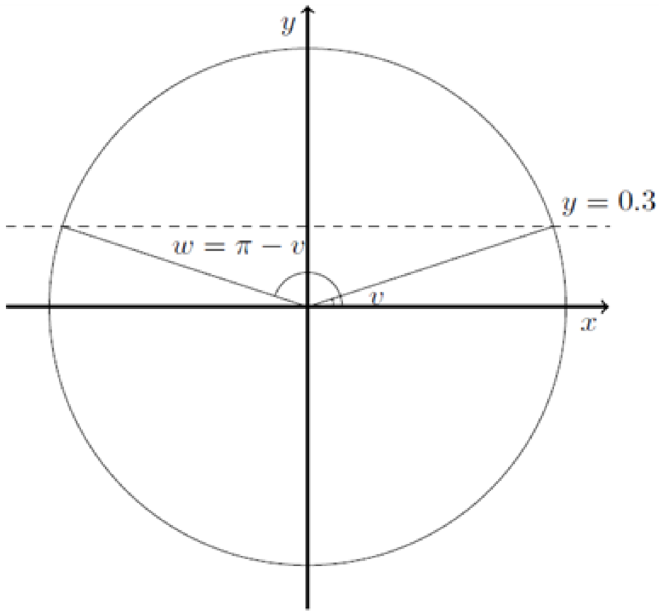
De 2π kommer fra, at vinklen, der går ned under x-asken ud til den stiplede linje, er lige så stor som v, men med modsat fortegn. Det vil sige, vi skal hele vejen rundt i cirklen, bortset fra de sidste v radianer.

Sinus

Vi gentager 3-trinsraketten. Vi vil nu løse ligningen

$$\sin(v) = 0,3$$

Illustrationen er givet nedenfor:



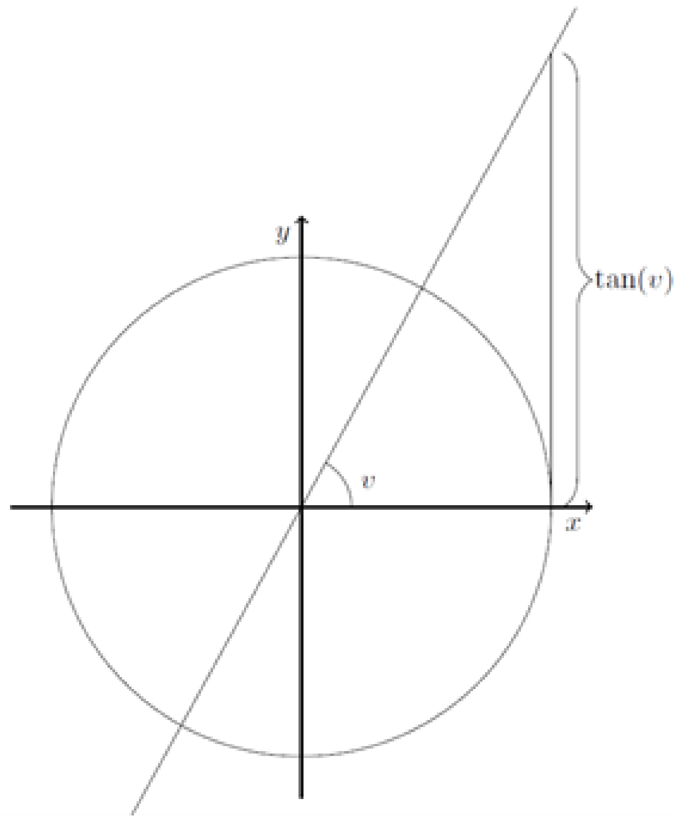
1. Da vi er på jagt efter y-værdier (vi arbejder med sinus), tegn en linje ved $y = k$, her er tegnet en stiplet linje ved $y = 0,3$.
2. Identificer en vinkel, så sinus til den vinkel har den ønskede y-værdi. Her har vi tegnet vinklen v ved at forbinde origo, $(0; 0)$, med skæringspunktet mellem cirklen og den stiplede linje. Vi måler vinklen til ca. 19° eller 0,33 radianer
3. For at finde den anden vinkel, tager vi $w = \pi - v = 2,81$ radianer.

π kommer fra, at den vinklen v er spejlet i y-aksen, så vi skal gå halvvejs rundt i cirklen, π, bortset fra en vinkel v.

Tangens

Lad os nu sige, at vi vil løse grundligningen $\tan(v) = k$. Som diskuteret før, kan denne ligning løses for et hvert reelt tal, k.

Husk, at den geometriske fortolkning af tangens er som beskrevet i figuren nedenfor (se afsnit om tangens).



Vi indtegner en vinkel v. Derefter tegner vi en tangent til cirklen i punktet $(1, 0)$ og ser, hvor vinklen skærer denne linje. Tangens til vinklen er defineret som y-værdien til dette skæringspunkt.

Lad os nu sige, vi skal løse ligningen $\tan(v) = 1,7$. Vi løser denne, som vi løste ligningerne for cosinus og sinus.

1. Tegn et linjestykke, der ligger som linjestykket $\tan(v)$ i figuren ovenfor. Linjestykket skal have længde $1,7$.
2. Tegn en linje fra origo, $(0; 0)$, ud til enden af linjestykket med længde $1,7$
3. Mål vinklen. Her måler vi vinklen til $v = \ 1,08\ $ radianer. De to løsninger til $\tan(v) = 1,7$ er v og $v + \pi$.

4.3 Trigonometriske uligheder

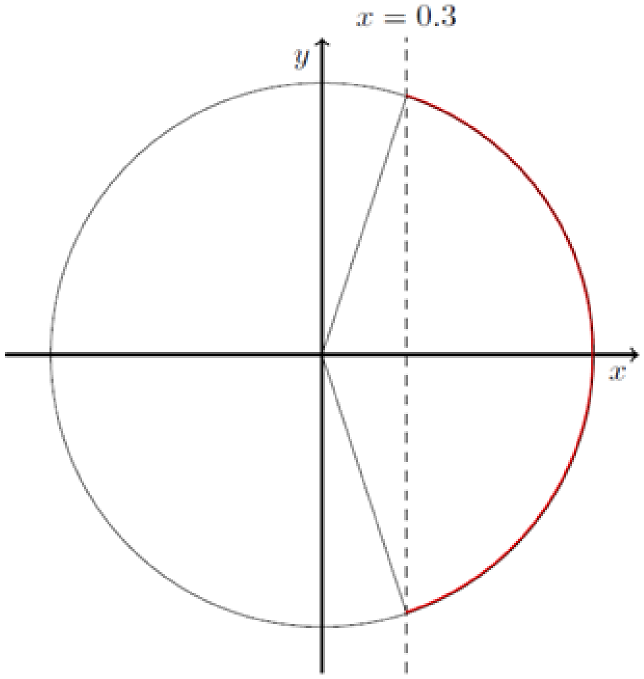
Trigonometriske uligheder er udtryk på formen

$$\cos(v) \geq k$$
$$\sin(v) \geq k$$
$$\tan(v) \geq k$$

Lad os igen beskrive metoden for én type af gangen.

Cosinus

Hvis vi skal løse uligheden $\cos(v) \geq 0,3$, husker vi igen på, at cosinus til en vinkel er x-værdien for et punkt på enhedscirklen. Det vil sige, at alle de vinkler der opfylder, at $\cos(v) \geq 0,3$, kan findes som vinklerne markeret med rød i figuren nedenfor.



I afsnittet om trigonometriske grundligninger bestemte vi løsningerne til ligningen $\cos(v) = 0,3$, og vi fandt, at løsningerne var $1,26$ og $5,01$ radianer.

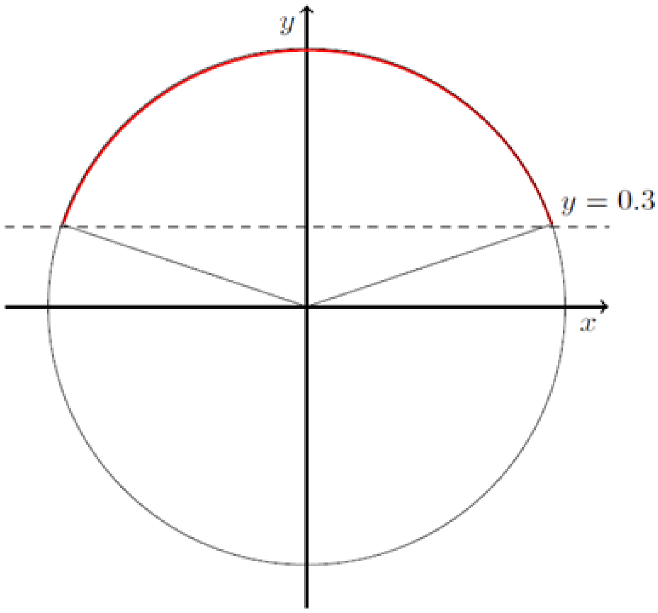
Løsninger til $\cos(v) \geq 0,3$ er præcis punkter på enhedscirklen, der har x-værdi større end $0,3$. Det vil sige, at vi skal have de vinkler, der ligger imellem 1,26 radianer og 5,01 radianer. Dermed bliver løsningerne de vinkler, der er mindre end 1,26, og større end 5,01 radianer. Hvis vi skriver det i intervaller, bliver løsningerne

$$[0; 1.26] \cup [5.01, 2\pi]$$

Her betyder $\cup$, at løsningerne bliver de vinkler, der *enten* ligger i $[0; 1.26]$ *eller* $[5.01, 2\pi]$ opfylder den ønskede ulighed.

Sinus

Hvis vi skal løse uligheden $\sin(v) \geq 0,3$, husker vi igen på, at sinus til en vinkel er y-værdien for et punkt på enhedscirklen. Det vil sige, at alle de vinkler der opfylder, at $\sin(v) \geq 0,3$, kan findes som vinklerne markeret med rød i figuren nedenfor.



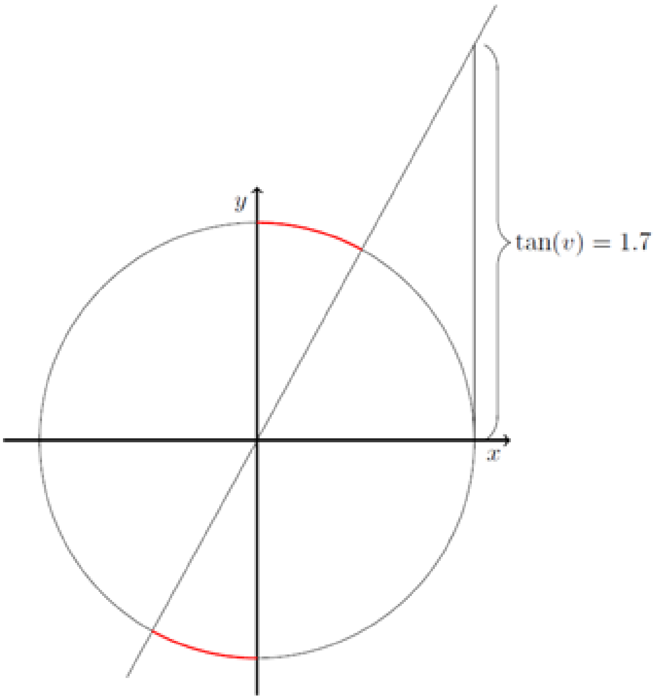
I afsnittet om trigonometriske grundligninger bestemte vi løsningerne til ligningen $\sin(v) = 0,3$, og vi fandt, at løsningerne var $0,33$ og $2,81$ radianer.

Løsninger til $\sin(v) \geq 0,3$ er præcis punkter på enhedscirklen, der har y-værdi større end $0,3$. Det vil sige, vi skal have de vinkler, der ligger imellem 0,33 radianer og 2,81 radianer. Dermed bliver løsningerne de vinkler, der er større end 0,33 og mindre end 2,81. Hvis vi skriver det i intervaller, bliver løsningerne

$$[0.33; 2.81]$$

Tangens

Vi ønsker nu at løse uligheden $\tan(v) \geq 1,7$. Vi har allerede løst den trigonometriske lighed $\tan(v) = 1.7$, løsningerne var $1,08$ radianer og $4,22$ radianer. Bemærk, at der vil være to områder, hvor uligheden gælder: Et område, der indeholder hver af de to vinkler, se eventuelt figuren nedenfor.



Vi vil starte med at tage udgangspunkt i den første vinkel, der løste ligheden $\tan(v) = 1,7$, det vil sige, vi betragter $v = 1,08$ radianer. Hvis vi gør vinklen en lille smule større, bliver tangens til vinklen også lidt større, da kateten modsat vinklen bliver længere. Det vil sige, vi skal blot finde ud af, hvornår tangens stopper med at vokse, når vinklen vokser. Dette sker netop, når vinklen bevæger sig over på den anden side af y-aksen, det vil sige, når vinklen bliver større end $\frac{\pi}{2}$, bliver tangens negativ. Det vil sige, at alle vinklerne, der ligger mellem $1,08$ radianer og $\frac{\pi}{2}$ radianer opfylder, at $\tan(v) \geq 1,7$.

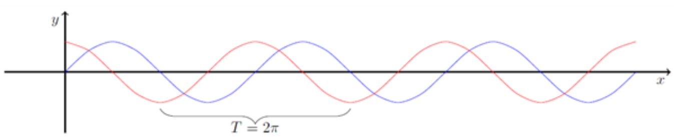
Bemærk, at $\frac{\pi}{2}$ ikke er med, da tangens slet ikke er defineret, når vinklen er lig $\frac{\pi}{2}$!

Det vil sige, at alle vinklerne i intervallet $[1,08, \frac{\pi}{2}[$ opfylder uligheden. For at finde de resterende vinkler, lægger vi blot π til alle vinklerne i intervallet, (da $\tan(v) = \tan(v + \pi)$). Det vil sige, at alle vinklerne, der opfylder, at $\tan(v) \geq 1,7$ er vinklerne i intervallet

$$\left[1,08;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[4.22;\ \frac{3\pi}{2}\right[$$

4.4 Svingninger og periodiske funktioner

En *periodisk funktion* er en funktion, der opfylder, at $f(x+T) = f(x)$ for et tal T. Tallet T kaldes ofte *perioden*eller *svingningstiden*. T fortæller, hvor langt du skal gå ud ad x-aksen, før du får samme funktionsværdi, som du havde i det punkt, du startede i. Typiske eksempler på periodiske funktioner er vores trigonometriske funktioner, cosinus, sinus og tangens. Perioden for $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er 2π, da det svarer til, at vi er gået en hel gang rundt i enhedscirklen, og vi dermed står i det punkt, vi startede i. Se figuren nedenfor, den røde graf er $\cos(x)$, mens den blå graf er $\sin(x)$.



En periodisk funktion kan være på formen

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + k$$

Før vi begynder at undersøge betydningen af alle konstanterne, A, ω, φ, k, lad os lige give navnene til konstanterne

- A kaldes *amplituden.*
- ω (det græske bogstav, omega), kaldes *vinkelfrekvensen.*
- φ (det græske bogstav, phi, udtales fi), kaldes *faseforskydningen.*
- k har ikke noget særligt navn. Den kan kaldes en forskydningskonstant - *hvilket ikke bør blandes sammen med faseforskydningen.*

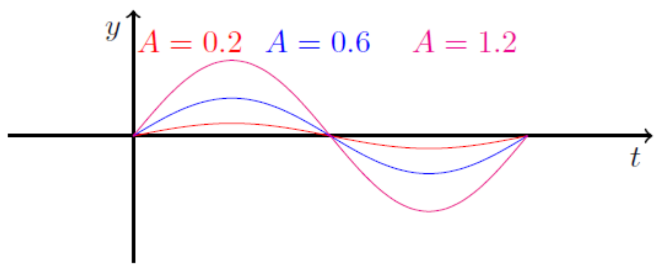
Lad os nu undersøge en konstant af gangen.

Amplituden

Lad os betragte funktionen

$$f(t) = A\sin(t).$$

Da $\sin(t)$ svinger mellem -1 og 1, vil $A\sin(t)$ svinge mellem $-A$ og A, idet vi bare har ganget alle værdierne, som $\sin(t)$ spytter ud med A. Ved at variere A kan vi således ændre funktionens udsving. I figuren herunder har vi skitseret f med forskellige værdier for A:



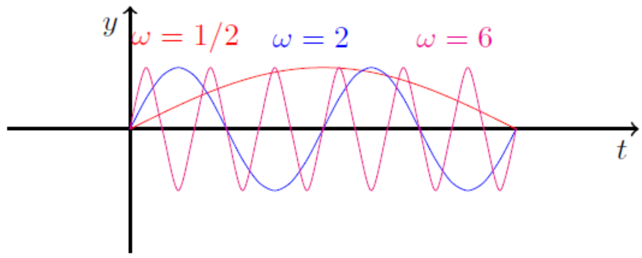
Vinkelfrekvensen

Lad os betragte funktionen

$$f(t) = \sin(\omega t).$$

Hvis ω er stor, vil ωt være større end t. For eksempel, hvis $\omega = 2$ og t løber fra 0 til 2π, vil ωt løbe fra 0 til 4π. Det vil sige, at $\sin(\omega t)$ vil nå at løbe 2 perioder igennem på samme tid som $\sin(t)$ når 1 periode igennem, altså er frekvensen for $\sin(\omega t)$ dobbelt så stor som for $\sin(t)$.

Omvendt gælder det, hvis ω er lille, vil ωt være mindre end t. Eksempelvis gælder det, at hvis $\omega = 1/2$ og t løber fra 0 til 2π, vil ωt løbe fra 0 til π. Det vil sige, $\sin(\omega t)$ vil nå at løbe en halv periode igennem på samme tid som $\sin(t)$ når 1 periode igennem, altså er frekvensen for $\sin(\omega t)$ halvt så stor som for $\sin(t)$. I figuren nedenfor er der skitseret 3 grafer med forskellige værdier for ω.

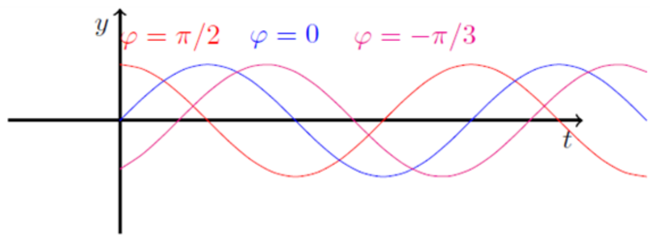


Faseforskydningen

Lad os betragte funktionen

$$f(t) = \sin(t + \varphi).$$

Igen gælder det, at hvis t løber fra 0 til 2π, vil $\sin(t + \varphi)$ løbe fra $0 + \varphi = \varphi$ til $2\pi + \varphi$. Det vil sige, at vi får forskudt hele svingningen med tiden φ. Nedenunder er et par eksempler på forskellige valg af φ.



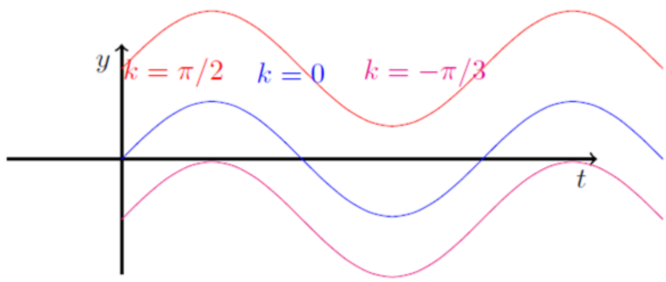
Bemærk, at hvis der er positiv faseforskydning, rykkes grafen mod venstre, mens en negativ faseforskydning giver en forskydning af grafen mod højre.

Konstanten k

Hvis du har et udtryk på formen

$$f(t) = \sin(t) + k,$$

bliver der lagt k til alle funktionsværdierne for $\sin(t)$. I modsætning til faseforskydningen, vil dette føre til en forskydningen langs y-aksen. Se figuren nedenfor



Svingningstid, frekvens og vinkelfrekvens

Alle disse 3 ord er forskellige udtryk for, hvor hurtigt en svingning oscillerer (svinger). Lad os prøve at italesætte forskellene.

Vi betragter en svingning på formen

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + k.$$

Svingningstid er den tid det tager svingningen at gennemløbe en periode. Det vil sige det, vi kaldte T ovenfor. Først bemærker vi, at amplituden, A, faseforskydningen φ og k ikke har nogen indflydelse på, hvor hurtigt grafen svinger. Svingningstiden skal opfylde at

$$\sin(\omega(t+T) = \sin(\omega t).$$

Da $\sin(t)$ har periode 2π, skal forskellen på $\omega(t+T)$ og ωt være en periode for $\sin(t)$, altså 2π. Det vil sige, at vi kan finde T ved at løse ligningen

$$\omega(t+T) - \omega(t) = 2\pi,$$

hvilket betyder, at $\omega T = 2\pi$, så

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Vinkelfrekvensen er antallet af perioder en svingning gennemløber på et omløb i enhedscirklen, det vil sige antallet af perioder på et tidsinterval af længde 2π sekunder (motivation kan findes i figuren i afsnittet om vinkelfrekvensens betydning).

Frekvensen er antallet af perioder en svingning gennemløber på et sekund. Hvis husker på, at vinkelfrekvensen var antallet af svingninger på et 2π sekunders interval, vil antallet af svingninger på et sekund være vinkelfrekvensen divideret med 2π. Det vil sige, at

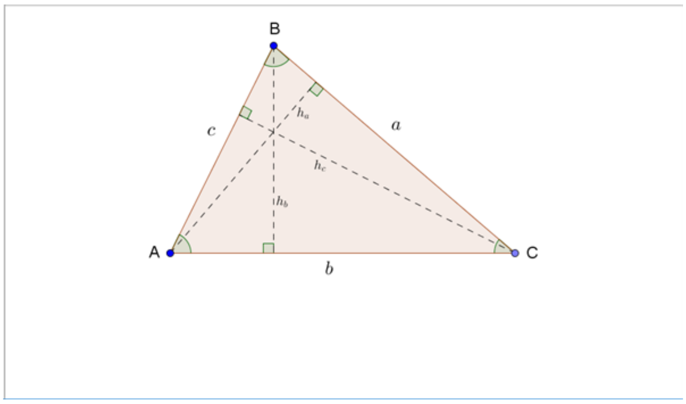
$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Hvis vi husker, at $T = \frac{2\pi}{\omega}$, genkender vi frekvensen som

$$f = \frac{1}{T}.$$

4.5 Arealet af trekanten

En trekant er karakteriseret ved de tre sidelængder a, b og c og de tilhørende modstående vinkler A, B og C, se figur 1.



Figur 1 Trekanten med dens tre højder indtegnet

Fra barnsben har vi lært, at arealet af trekanten kan bestemmes vha. en grundlinje og en højde i trekanten (vi kan vilkårligt vælge siden a, b eller c som grundlinje sammen med den tilhørende højde):

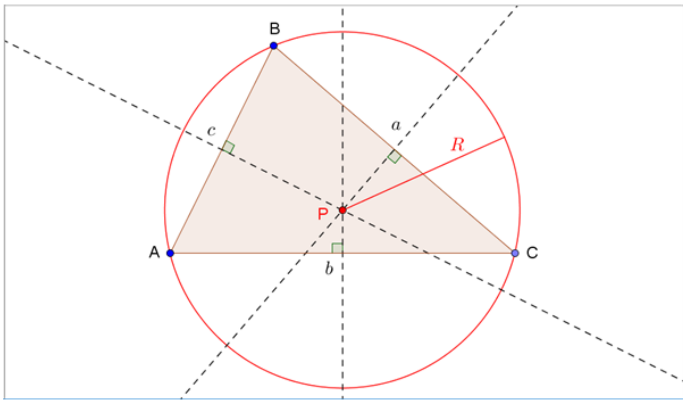
$$A_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot h_b \cdot b = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c$$

Af de grundlæggende trigonometriske regneregler ses af figur 1, at højderne i trekanten kan bestemmes ud fra en sidelængde og sinus til en vinkel, derfor kan arealet af trekanten også bestemmes vha. to sider og den mellemliggende vinkel (vi kan vilkårligt vælge vinkel A, B eller C som den mellemliggende vinkel sammen med de to tilhørende sider):

$$A_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Den omskrevne cirkel

I en vilkårlig trekant kan vi indtegne de tre siders midtnormaler, se figur 2. En sides midtnormal står vinkelret på siden og deler den i to lige store dele. Midtnormalerne har et fælles skæringspunkt, P, som er centrum for den omskrevne cirkel, der går gennem de tre vinkelspidser.



Figur 2 Trekanten med dens tre midtnormaler og den omskrevne cirkel indtegnet

Den omskrevne cirkels radius betegnes R, og der gælder følgende sammenhæng mellem trekantens areal og R, hvilket samtidig giver os en ligning til bestemmelse af R, hvis vi kender arealet via en af de øvrige arealformler:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \implies R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$$

Bevis:

Vi forestiller os et koordinatsystem lagt henover trekanten i figur 3 med Origo i punkt A og x-aksen sammenfaldende med AC. Trekantens vinkelspidser og den omskrevne cirkels centrum har da koordinaterne:

$A = (0,0), B = (x_B, y_B), C = (b, 0),\ \ P = (x_P, y_P)$

Afstanden fra A til P er radius i den omskrevne cirkel, så $x_P^2 + y_P^2 = R^2$, og da $|AB| = c$, er $x_B^2 + y_B^2 = c^2$. Vi kan opstille følgende udtryk for kvadratet på afstanden fra B til P:

$|BP|^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 \ = (x_P^2 + y_P^2) + (x_B^2 + y_B)^2 - 2x_Bx_P - 2y_By_P = R^2 + c^2 - 2x_Bx_P - 2y_By_P = R^2$

Da punkt P ligger på midtnormalen til siden b, er $x_P = \frac{b}{2}$, hvilket vi indsætter ovenfor og får:

$$y_P = \frac{c^2 - b \cdot x_B}{2 \cdot y_B}$$

Vi indsætter nu udtrykkene for x_P og y_P i afstandsformlen for $|AP|$:

$$|AP|^2 = \ R^2 = x_P^2 + y_P^2 = \frac{1}{4} \cdot b^2 + \frac{c^4 + b^2 \cdot x_B^2 -\ 2 \cdot b \cdot c^2 \cdot x_B}{4 \cdot y_B^2}$$

Vi sætter på fælles brøkstreg og udnytter, at $x_B^2 + y_B^2 = c^2$, $y_B = c \cdot \sin A$ og $x_B = c \cdot \cos A$:

$$R^2 = \frac{b^2 \cdot y_B^2 + c^4 + b^2 \cdot x_B^2 -\ 2 \cdot b \cdot c^2 \cdot x_B}{4 \cdot y_B^2} = \frac{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}{4 \cdot \sin^2 A}$$

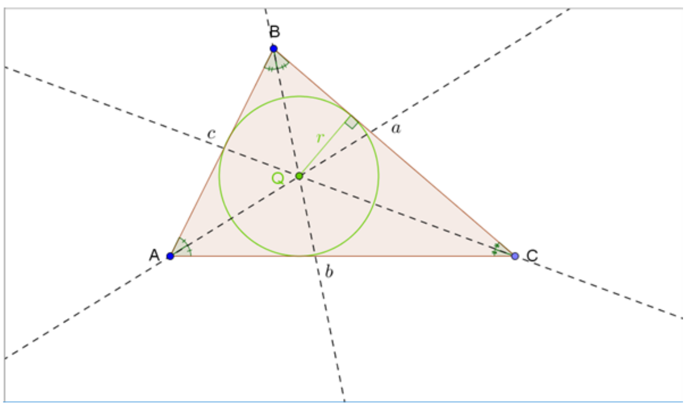
Vi genkender tælleren på højresiden som cosinus-relationen til bestemmelse af sidelængden a^2 og udnytter afslutningsvis, at $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ og dermed at $\sin A = \frac{2 \cdot A}{b \cdot c}$, hvilket fører os frem til:

$$R^2 = \frac{a^2}{4 \cdot \sin^2 A} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{16 \cdot A^2} \implies A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

Hermed er arealformlen vha. den omskrevne cirkels radius bevist.

Den indskrevne cirkel

I en vilkårlig trekant kan vi indtegne de tre vinklers vinkelhalveringslinjer, se figur 3. Vinkelhalveringslinjerne har et fælles skæringspunkt, Q, som er centrum for den indskrevne cirkel, der netop tangerer alle tre sider i trekanten.



Figur 3 Trekanten med dens tre vinkelhalveringslinjer og den indskrevne cirkel indtegnet

Den indskrevne cirkels radius betegnes r, og der gælder følgende sammenhæng mellem trekantens areal og r, hvilket samtidig giver os en ligning til bestemmelse af r, hvis vi kender arealet via en af de øvrige arealformler:

$A = r \cdot s \implies r = \dfrac{A}{s}$, hvor $s \ = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$

Hjælpestørrelsen s er lig med halvdelen af trekantens omkreds.

Bevis:

I figur 3 kan trekant ABC opdeles i tre mindre trekanter: ABQ, BCQ og AQC, som hver har en af trekant ABC's sidelængder som grundlinje. Da alle tre sider i trekant ABC er tangent til den indskrevne cirkel, er højden i hver af de små trekanter = den indskrevne cirkels radius r, så:

$A_{ABC} = A_{ABQ} + \ A_{BCQ} + \ A_{AQC} \quad = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r + \ \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \cdot r = \ r \cdot s$

Hermed er arealformlen vha. den indskrevne cirkels radius bevist.

Herons formel

Trekantens areal kan også bestemmes vha. Herons formel, opkaldt efter den græske matematiker Heron:

$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, hvor $s \ = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$

Hjælpestørrelsen s er lig med halvdelen af trekantens omkreds.

Bevis:

Vi tager udgangspunkt i, at trekantens areal kan bestemmes vha. siden b og højden h_b:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$

Vi opløfter til anden potens på begge sider:

$A^2 = \ \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 C = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \cos^2 C)$

Her indsætter vi cosinus-relationen for $\angle C$: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$:

$A^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}) = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \ = \ \frac{1}{16} \cdot (4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2)) = \ \frac{1}{16} \cdot (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4))$

Vi gætter på, at højresiden kan omskrives til: $s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)$, hvor s er den halve omkreds: $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$:

$s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) = \frac{1}{2} \cdot \ (a + b + c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ (b + c - a) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ (a + c - b) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ (a + b - c) = \frac{1}{16} \cdot (ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ab + bc + c^2 - ac) \cdot (a^2 + ab - ac + ac + bc - c^2 - ab - b^2 + bc) = \frac{1}{16} \cdot (-a^2 + 2bc + b^2 + c^2) \cdot (a^2 + 2bc - b^2 - c^2) = \frac{1}{16} \cdot (-a^4 - 2a^2bc + a^2b^2 + a^2c^2 + 2a^2bc + 4b^2c^2 - 2b^3c - 2bc^3 + a^2b^2 + 2b^3c - b^4 - b^2c^2 + a^2c^2 + 2bc^3 - b^2c^2 - c^4) = \frac{1}{16} \cdot (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4))$

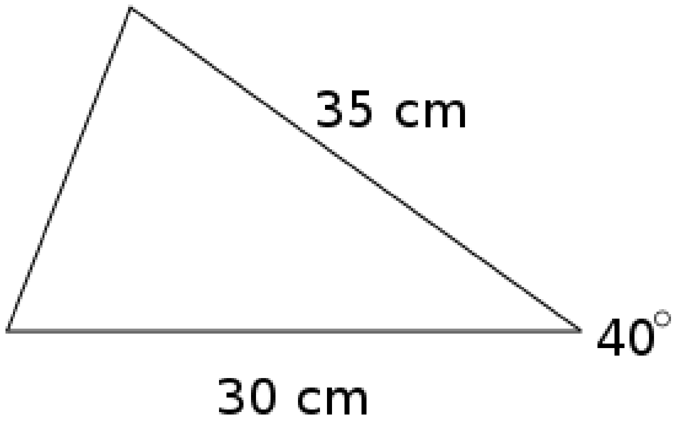
Det var et godt gæt (!), og vi har hermed bevist Herons formel:

$A^2 = s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \implies A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

Eksempler

Vi ser på to eksempler på brugen af formlerne.

Eksempel på arealbestemmelse vha. to sidelængder og den mellemliggende vinkel:



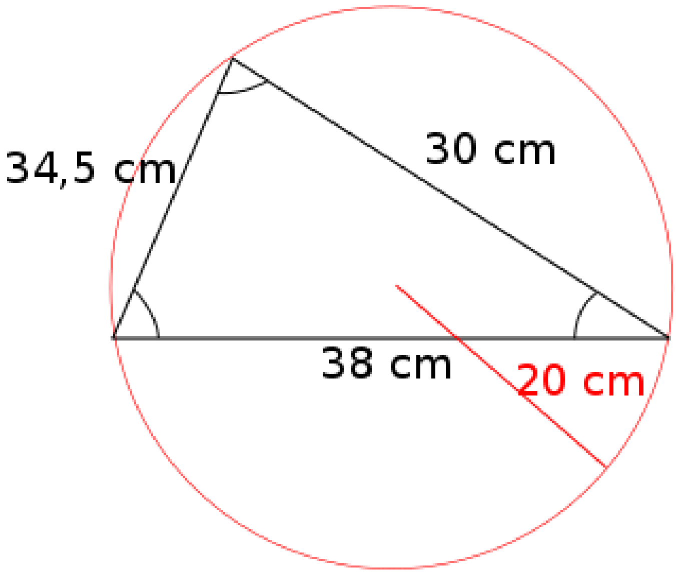
Her kender vi to sidelængder og den mellemliggende vinkel, og derfor beregner vi arealet ved:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$

Længden a er 35 cm, længden b er 30 cm og vinklen er 40°:

$A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \sin 40° = 337,5\, cm^2$

Eksempel på arealbestemmelse vha. den omskrevne cirkel:



Her kan arealet af trekanten beregnes med den omskrevne cirkel:

$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$

$A = \frac{30 \cdot 38 \cdot 34,5}{4 \cdot 20} = \ 491,6\, cm^2$

4.6 Additionsformlerne og den dobbelte vinkel

Additionsformlerne er en samling formler, der fortæller, hvordan man tager cosinus og sinus til en sum af vinkler. De er som følger

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v)+\cos(u)\sin(v)\\ \sin(u-v) &= \sin(u)\cos(v)-\cos(u)\sin(v)\\ \cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v)-\sin(u)\sin(v)\\ \cos(u-v) &= \cos(u)\cos(v)+\sin(u)\sin(v)\end{aligned}$$

Med disse formler ved hånden er det en simpel opgave at finde udtryk for både $\cos(2v)$ og $\sin(2v)$.

$$\sin(2v)=\sin(v+v)=\sin(v)\cos(v)+\cos(v)\sin(v)=2\cos(v)\sin(v)$$

Ved at benytte idiotformlen, $\cos(v)^2+\sin(v)^2=1$, finder vi at

$$-\sin(v)^2 = \cos(v)^2-1$$

Dermed er

$$\cos(2v)=\cos(v+v)=\cos(v)^2-\sin(v)^2=2\cos(v)^2-1=\frac{2\tan(v)}{1-\tan(v)^2}$$

5 Funktioner

I denne sektion udforsker vi emnet funktioner. Vi ser på lige- og ulige funktioner, stykkevise funktioner, andengradspolynomier, andengradsuligheder mm.

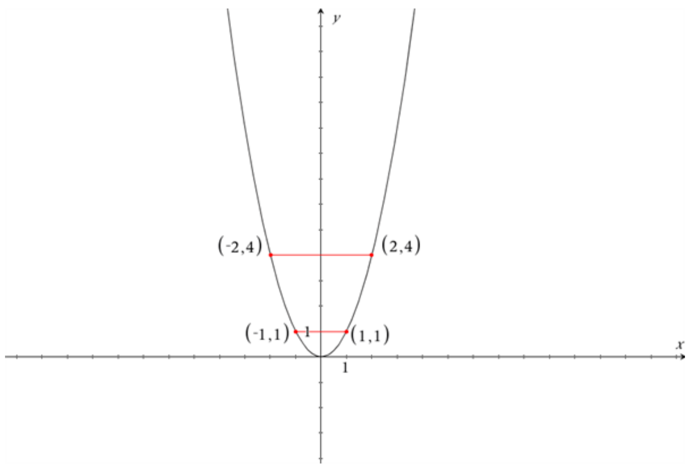
5.1 Lige- og ulige funktioner

Lige funktioner

En lige funktion er i princippet en funktion, der kan spejlvendes i y-aksen. Det vil sige, at enhver y-værdi i funktionen har to tilhørende x-værdier, der har samme værdi, men modsat fortegn. Matematisk kan dette beskrives som:

$f(x)=f(-x)$

Et eksempel på en lige funktion er $f(x)=x^2$.



I funktionen $f(x) = x^2$ har alle y-værdier to tilhørende x-værdier, givet at y-værdien ligger inden for funktionens værdimængde. Værdimængden betegner alle mulige funktionsværdier.

Hvis vi kigger på funktionsværdien $f(x) = 4$, har denne de to tilhørende x-værdier $x = 2$ og $x = -2$. Samme forhold gør sig gældende for alle funktionsværdierne i $f(x) = x^2$, og derfor er det en lige funktion.

Andre eksempler på lige funktioner kunne være: $f(x) = x^4$ og $f(x) = cos(x)$

Eksempler

Når vi skal undersøge om en funktion er lige eller ej kan vi benytte definitionen $f(x) = f(-x)$. Vi kan igen tage $f(x) = x^2$ som eksempel. Hvis denne funktion er lige, skal den opfylde $f(x) = f(-x)$. Vi kan nu indsætte vores funktion, og finde ud af om dette er tilfældet. Vi indsætter derfor først $f(x) = x^2$.

$f(-x) = x^2$

På venstre side står der, at vi skal indsætte $-x$ i vores funktion $f(x) = x^2$.

$(-x)^2 = x^2$

Uanset hvilken værdi, vi nu vælger for x, vil venstresiden blive positiv, da ethvert reelt tal i anden giver en positiv værdi. Selv en negativ x-værdi vil gøre venstresiden positiv, da produktet af to negative tal altid er positivt. Derfor får vi:

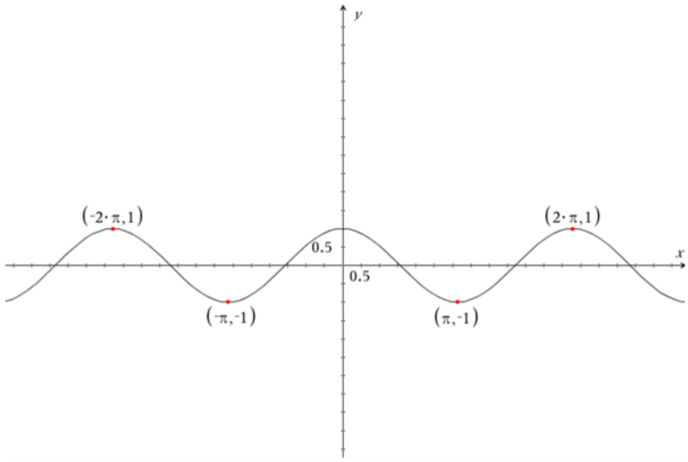
$x^2 = x^2$

Dette går altså op, og derfor opfylder funktionen $f(x) = x^2$ vores krav for lige funktioner.

Vi kan også undersøge $f(x) = cos(x)$: Ligesom før kan vi indsætte vores funktion i $f(x) = f(-x)$, og undersøge om vores funktion er lige:

$\cos(x) = \cos(-x)$

Om cosinus ved vi dog, at enhver værdi x indsat i cosinus, har den samme værdi som den negerede værdi $-x$. Udsagnet $\cos(x) = \cos(-x)$ passer derfor. På grafen herunder ser vi også hvorfor.



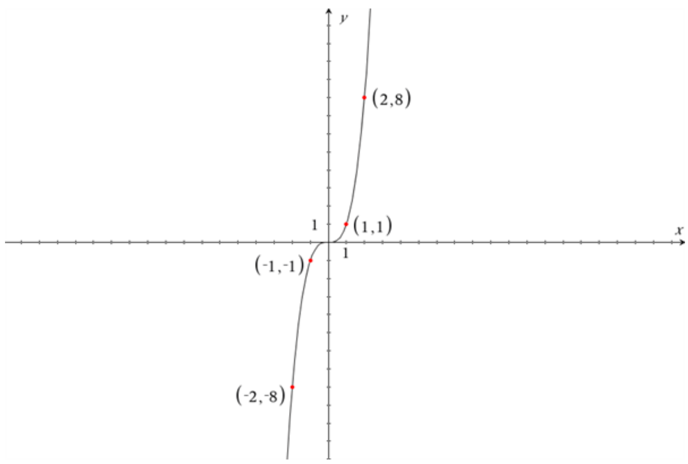
Uanset hvilken værdi, du vælger for x, vil den negerede værdi $-x$ have samme y-værdi. $f(x) = \cos(x)$ opfylder derfor vores krav for lige funktioner.

Ulige funktioner

En ulige funktion er en funktion, der er symmetrisk ift. origo. Det betyder, at den kan spejlvendes først i den ene akse og derefter i den anden. Det vil sige, at for ethvert punkt (x,y) er der et tilsvarende punkt (-x,-y) med samme x- og y- værdier - bare med omvendt fortegn. Når dette er tilfældet, kaldes funktionen for ulige. Matematisk beskrives det som:

$-f(x) = f(-x)$

Et eksempel på en ulige funktion er: $f(x) = x^3$



I funktionen $f(x) = x^3$ finder vi blandt andet punktet (1,1). Hvis funktionen skal være ulige må der derfor også findes et punkt (-1,-1), hvilket der gør. Da denne sammenhæng gør sig gældende for alle reelle tal, må funktionen altså være ulige. For ethvert koordinat (x, y) er der altså et tilsvarende koordinat $(-x, -y)$ med samme værdier for x og y. Generelt kan det siges, at alle funktioner på formen $f(x) = x^n$, hvor n er et ulige tal, giver anledning til en ulige funktion.

Andre eksempler på ulige funktioner kunne være: $f(x) = x$, $f(x) = x^5$ og $f(x) = \sin(x)$.

Eksempler

Vi kan teste om funktionen $f(x) = x^3$ er en ulige funktion ved, at indsætte den i udtrykket $-f(x) = f(-x)$.

$-f(x) = -x^3$

Da vi ved, at $f(x) = x^3$ kan vi nu sætte den negerede værdi ind på venstresiden

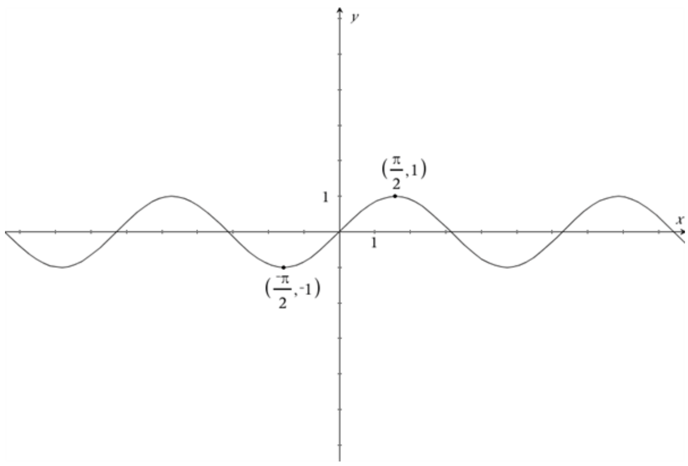
$-x^3 = -x^3$

Dette udtryk går altså op, og derfor må $f(x) = x^3$ være en ulige funktion.

Vi kan også tjekke om $f(x) = \sin(x)$ er en ulige funktion. Vi indsætter først vores funktion i definitionen for ulige funktioner.

$sin(x) = \sin(-x)$

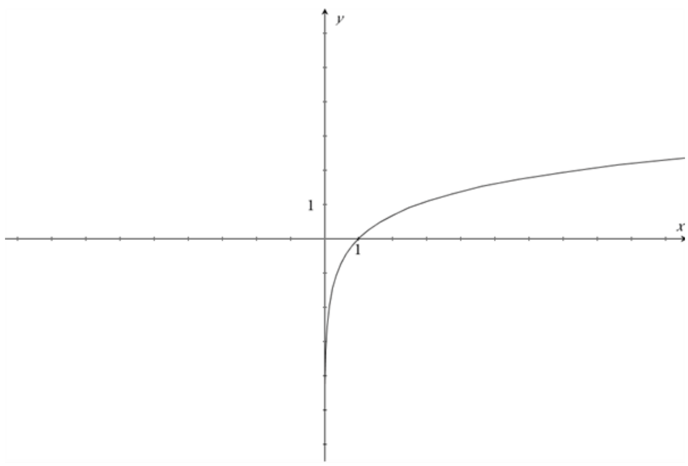
Ligesom det var tilfældet ved funktionen for cosinus går dette også op, selvom det måske ikke ser sådan ud ved første blik.



På grafen ovenfor kan vi se, at $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Ifølge udtrykket bør den negerede x-værdi $-\frac{\pi}{2}$ give samme værdi for $f(x)$, men med modsat fortegn. Vi forventer derfor at: $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Dette udsagn passer, og det kan vi også se på grafen. Vi kan lave samme test for alle x-værdier, og de vil alle gå op. $f(x) = sin(x)$ er derfor en ulige funktion.

Andre eksempler

Indtil videre har du stiftet bekendskab med et par lige og ulige funktioner. Det er dog langtfra altid, at en funktion er enten lige eller ulige. En funktion, der er hverken lige eller ulige, er $f(x) = ln(x)$.



Vi kan se, at funktionen har grænseværdien 0 for y. Det er derfor ikke muligt, at sætte negative x-værdier eller 0 ind i denne funktion.

Et eksempel på en funktion, der kunne være både lige og ulige er $f(x) = 0$. Når vi indsætter denne funktion i udtrykkene for lige- og ulige funktioner vil det gå op i begge tilfælde. $f(x) = 0$ er derfor både en lige- og en ulige funktion.

Eksempel

Vi vil teste om funktionen $f(x) = 2x + 1$ er lige eller ulige. Vi tester først om den er lige. Hvis $f(x)$ skal være lige må det passe at $f(x) = f(-x)$. Vi indsætter nu funktionen, og finder ud af om det passer.

$2x + 1 = 2(-x) + 1$

Vi ser, at det ikke går op, da det første led af forskellige fortegn på hver side af lighedstegnet. Vi kan nu i stedet teste om $f(x)$ er en ulige funktion. Hvis $f(x)$ skal være ulige må det passe at $-f(x) = f(-x)$. Vi indsætter nu funktionen, og finder ud af om det passer.

$-(2x + 1) = 2(-x) + 1$

Vi kan omskrive dette udtryk

$-2x - 1 = -2x + 1$

Igen ser vi, at det ikke går op, og vi må derfor konkludere at $f(x)$ hverken er lige eller ulige.

I denne videolektion fortæller Christian om lige og ulige funktioner. Han viser bl.a. at funktioner, der hverken er lige eller ulige, er bygget op af en lige og en ulige del.

5.2 Andengradspolynomium

Typisk er andengradspolynomier (parabler) beskrevet ved en funktionsforskrift af typen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Selvom dette er en god måde, at skrive funktionsforskriften på, findes der også en anden udemærket måde, at gøre det på. Det er nemlig også muligt, at skrive et andengradspolynomium på formen:

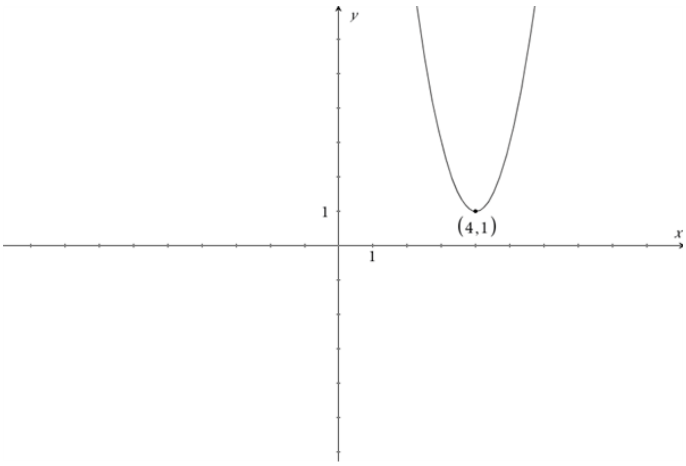
$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

Fordelen ved at beskrive et andengradspolynomium på formen $f(x) = a(x-x_0)^2+y_0$ er, at vi kan aflæse toppunktet for funktionen direkte i funktionsforskriften. Toppunktet ligger nemlig i (x_0, y_0).

Vi kan derfor blot aflæse på funktionsforskriften.

Eksempel

Vi har fået givet en funktion $f(x) = 2(x-4)^2 + 1$. I dette eksempel aflæser vi blot forskriften, og finder derved ud af, at toppunktet ligger i $(4,1)$. Man skal huske at tjekke fortegnet foran x_0 og y_0 . Havde fortegnet foran vores x_0- værdi været positiv, ville vores x_0 ikke være 4, men -4.



Et andet scenarie kunne være $f(x) = 2 \cdot x^2 - 16x + 33$. I dette tilfælde kan vi ikke direkte aflæse toppunktet, da funktionen ikke står på formen $f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$

. Vi kan derimod omskrive funktionsforskriften vha. kvadratsætningerne. Se eventuelt afsnit om kvadratsætningerne. Vi starter med vores oprindelige funktion:

$f(x) = 2 \cdot x^2 - 16x + 33$

Nu hvor vi benytter kvadratsætningerne, kunne det være interessant at se, om vi kunne omskrive sidste led til noget, der er lidt nemmere at arbejde videre med. Vi identificerer at: $32 = 2 \cdot 4^2$. Vi skal blot huske, at lægge én mere til dette udtryk, så vi får 33:

$f(x) = 2 \cdot x^2 - 16x + 2 \cdot 4^2 + 1$

Vi kan nu faktorisere 2 ud for de første tre led:

$f(x) = 2 \cdot (x^2 + 4^2 - 8x) + 1$

Vi kigger nu på kvadratsætningerne, og vi ser at $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$. Vi benytte nu denne information til, at omskrive funktionen:

$f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 + 1$

Ved at gøre dette, kommer vi frem til $f(x) = 2(x-4)^2 + 1$, altså nøjagtigt denne samme funktion som før. Denne gang var den blot skrevet på en anden form.På den måde kan man omskrive mellem de to måder at opskrive andengradspolynomiers funktionsforskrifter på.

6 Differentialregning

I denne sektion går vi i dybden med nogle emner inden for differentialregning. Først ser vi på baggrunden for Eulers tal, e, og beviserne for differentiation af logaritmefunktioner, og derudover behandler vi implicit differentaition og krumning, hvor den anden afledede af funktioner kommer i spil..

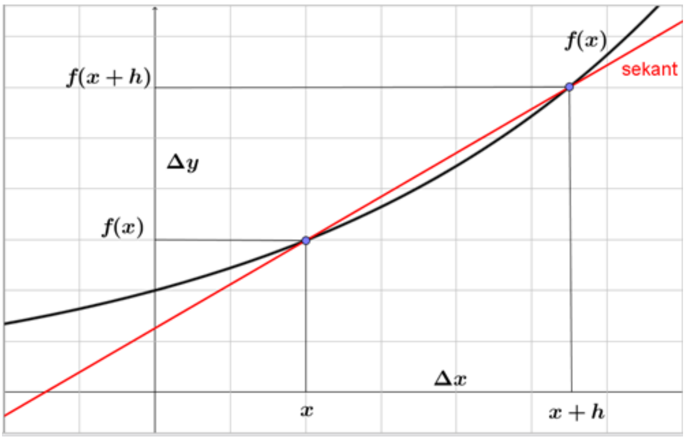
6.1 Baggrunden for Eulers tal, e

Eulers tal, e, har værdien = 2,71828 (afrundet). Vi vil nu se på, hvorfor e har netop denne værdi.

Vi ønsker at finde frem til en funktion, $f(x)$, hvorom det gælder, at $f'(x) = f(x)$ - altså hvor den første afledede af funktionen er lig med funktionen selv. Hvis der findes en sådan funktion, vil det betyde, at grafens hældning og dermed tangentens hældning overalt på grafen er lig med den aktuelle funktionsværdi.

Vi gætter på, at funktionen er af typen $f(x) = k^x$, hvor k er et eller andet tal.

For at bestemme $f'(x)$ starter vi med at forestille os en sekant, der går gennem to punkter $(x, f(x))$ og $(x+h, f(x+h))$ på grafen for $f(x)$, hvor h er en lille tilvækst til x-værdien, se figur 1.



Figur 1 Sekant gennem to punkter på grafen for $f(x) = k^x$

Vi opstiller herefter et udtryk for sekantens hældning, a_s:

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{k^{x+h} - k^x}{h}$$

Dette udtryk kan vi omskrive med potensregneregler og ved at sætte k^x uden for parentes:

$$a_s = \frac{k^x \cdot k^h - k^x}{h} = k^x \cdot \frac{k^h - 1}{h} = f(x) \cdot \frac{k^h - 1}{h}$$

$f'(x)$ bestemmer vi herefter som grænseværdien for a_s, når h bliver uendelig lille, eller udtrykt matematisk:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} a_s = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h}$$

Hvis der findes et tal k, hvorom det gælder, at $\lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h} = 1$, har vi altså fundet en funktion, hvor $f'(x) = f(x)$.

Frem for at arbejde med en betingelse i grænseværdiudtrykket om, at $h \to 0$, vil vi i stedet arbejde med betingelsen $n \to \infty$. Det kan vi opnå ved at indføre substitutionen $h = \frac{1}{n}$, idet betingelsen $n \to \infty$ er ensbetydende med, at $h \to 0$, og grænseværdiudtrykket bliver dermed:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{k^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \implies k^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}, n \to \infty$$

Idet $k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{k}$ og $(\sqrt[n]{k})^n = k$ kan vi omskrive ligningen ved at opløfte både venstresiden og højresiden til den n'te potens:

$$(k^{\frac{1}{n}})^n = k = (1 + \tfrac{1}{n})^n = (1 + \tfrac{1}{n}) \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) \cdot \ldots\ldots \cdot (1 + \tfrac{1}{n})$$

hvor højresiden skal forstås som, at det er n paranteser $(1+\frac{1}{n})$, der multipliceres, og $n \to \infty$.

Vi forestiller os multiplikationen af parenteserne gennemført først med alle n 1-taller, derefter med $(n-1)$ 1-taller og en brøk $\frac{1}{n}$, så med $(n-2)$ 1-taller og to brøker $\frac{1}{n}$, osv. Hermed kan vi sammenfatte multiplikationen ved at benytte skrivemåden fra kombinatorikken med $K_{n,i} = \dfrac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$, hvilket fører til følgende udtryk:

$$k = 1 + K_{n,1} \cdot (\tfrac{1}{n}) + K_{n,2} \cdot (\tfrac{1}{n})^2 + K_{n,3} \cdot (\tfrac{1}{n})^3 + ... + K_{n,n-2} \cdot (\tfrac{1}{n})^{n-2} + K_{n,n-1} \cdot (\tfrac{1}{n})^{n-1} + (\tfrac{1}{n})^n$$

$$= 1 + \tfrac{1}{1!} \cdot \tfrac{n}{n} + \tfrac{1}{2!} \cdot \tfrac{n \cdot (n-1)}{n^2} + \tfrac{1}{3!} \cdot \tfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} + ... + \tfrac{1}{2!} \cdot \tfrac{n \cdot (n-1)}{n^{n-2}} + \tfrac{1}{1!} \cdot \tfrac{n}{n^{n-1}} + \tfrac{1}{n^n}$$

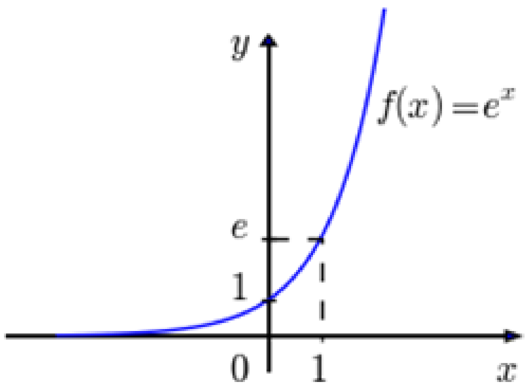
De første mange brøker med n^i i nævneren vil hver især tilnærmelsesvis være lig med 1, når $n \to \infty$. Grænseværdien for k bliver dermed, når vi lader $n \to \infty$, 1 plus summen af den reciprokke værdi af alle naturlige tals fakulteter:

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + osv.$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + osv. \approx 2,71828$$

Vi har hermed bestemt den værdi af tallet k i funktionen $f(x) = k^x$, der bevirker, at $f'(x) = f(x)$. Vi benytter symbolet e for dette tal, som betegnes Eulers tal opkaldt efter den scweiziske matematiker og fysiker Leonhard Euler, som levede i 1700-tallet.

Funktionen, hvor den første afledede er lig med funktionen selv, er således $f(x) = e^x$, der også i nogle sammenhænge skrives som $f(x) = exp(x)$, se figur 2. Og lad os for en god ordens skyld repetere, at det betyder, at grafens hældning og dermed tangentens hældning overalt på grafen er lig med den aktuelle funktionsværdi.



Figur 2 Grafen for $f(x) = e^x$

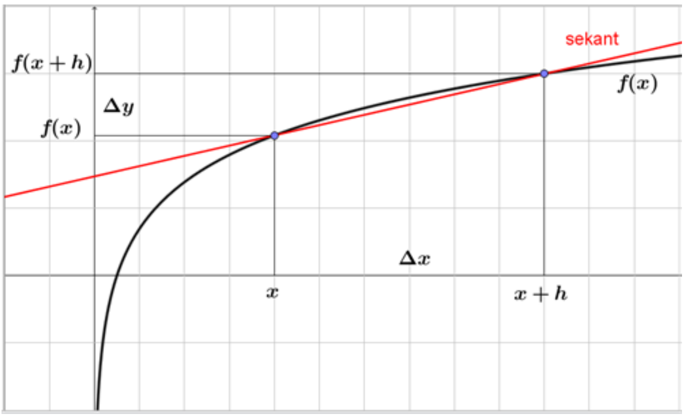
Når den første afledede af funktionen $f(x) = e^x$ er lig med funktionen selv, så er også alle de øvrige afledede af funktionen lig med funktionen selv, dvs. $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = osv. = e^x$.

Eulers tal er desuden grundtallet i den naturlige logaritme, $\ln(x)$. Derudover er e^r grænseværdien for en rente, r, tilskrevet kontinuert. Hvis du har 1 krone i banken til renten $r = 1 = 100\%$, der tilskrives kontinuert, så har du $e^1 = e$ kroner efter én termin.

6.2 Differentiation af funktionen f(x) = ln(x)

Vi ønsker at differentiere funktionen for den naturlige logaritme (med Eulers tal e som grundtal), $f(x) = \ln(x), x > 0$, dvs. vi vil bestemme $f'(x)$.

For at bestemme $f'(x)$ starter vi med at forestille os en sekant, der går gennem to punkter $(x, f(x))$ og $(x+h, f(x+h))$ på grafen for $f(x)$, hvor h er en lille tilvækst til x-værdien, se figur 1.



Figur 1 Sekant gennem to punkter på grafen for $f(x) = \ln(x)$

Vi opstiller herefter et udtryk for sekantens hældning, a_s:

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}$$

idet vi her har benyttet en af logaritme-regnereglerne, nemlig at logaritmen til en brøk er lig med logaritmen til tælleren minus logaritmen til nævneren.

$f'(x)$ bestemmer vi herefter som grænseværdien for a_s, når h bliver uendelig lille, eller udtrykt matematisk:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} a_s = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}$$

Frem for at arbejde med en betingelse i grænseværdiudtrykket om, at $h \to 0$, vil vi arbejde med betingelsen $n \to \infty$. Dette kan vi opnå ved at indføre substitutionen $h = \frac{1}{n}$, idet betingelsen $n \to \infty$ er ensbetydende med, at $h \to 0$, og grænseværdibestemmelse af $f'(x)$ bliver dermed:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{\frac{1}{n}}{x})}{\frac{1}{n}} \implies \frac{1}{n}\cdot f'(x) = \ln(1+\frac{\frac{1}{x}}{n}), n \to \infty$$

Hvis vi her beregner e opløftet til hhv. venstresiden og højresiden og udnytter, at $e^{\frac{1}{n}\cdot f'(x)} = (e^{f'(x)})^{\frac{1}{n}}$ og at $e^{\ln(x)} = x$, får vi:

$$(e^{f'(x)})^{\frac{1}{n}} = (1+\frac{\frac{1}{x}}{n}), n \to \infty.$$

Idet $k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{k}$ og $(\sqrt[n]{k})^n = k$ kan vi nu opløfte både venstre- og højresiden til den n'te potens og indføre substitutionen $z = \frac{1}{x}, x > 0$ på højresiden:

$$((e^{f'(x)})^{\frac{1}{n}})^n = e^{f'(x)} = (1+\frac{z}{n})^n = (1+\frac{z}{n})\cdot(1+\frac{z}{n})\cdot(1+\frac{z}{n})\cdot \ldots\ldots \cdot(1+\frac{z}{n})$$

hvor højresiden skal forstås som, at det er n paranteser $(1+\frac{z}{n})$, der multipliceres, og $n \to \infty$.

Vi forestiller os multiplikationen af parenteserne gennemført først med alle n 1-taller, så med $(n-1)$ 1-taller og en brøk $\frac{z}{n}$, derefter med $(n-2)$ 1-taller og to brøker $\frac{z}{n}$, osv. Hermed kan vi sammenfatte multiplikationen ved at benytte skrivemåden fra kombinatorikken med $K_{n,i} = \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$, hvilket fører til følgende udtryk:

$$e^{f'(x)} = 1 + K_{n,1}\cdot(\tfrac{z}{n}) + K_{n,2}\cdot(\tfrac{z}{n})^2 + K_{n,3}\cdot(\tfrac{z}{n})^3 + \ldots + K_{n,n-2}\cdot(\tfrac{z}{n})^{n-2} + K_{n,n-1}\cdot(\tfrac{z}{n})^{n-1} + (\tfrac{z}{n})^n$$

$$= 1 + \tfrac{1}{1!}\cdot\tfrac{n}{n}\cdot z + \tfrac{1}{2!}\cdot\tfrac{n\cdot(n-1)}{n^2}\cdot z^2 + \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3}\cdot z^3 + \ldots + \tfrac{1}{2!}\cdot\tfrac{n\cdot(n-1)}{n^{n-2}}\cdot z^{n-2} + \tfrac{1}{1!}\cdot\tfrac{n}{n^{n-1}}\cdot z^{n-1} + \tfrac{1}{n^n}\cdot z^n$$

Når $n \to \infty$ er højresiden netop rækkeudviklingen af funktionen e^z: $e^z = e^0 + \frac{1}{1!} \cdot z + \frac{1}{2!} \cdot z^2 + \frac{1}{3!} \cdot z^3 + osv.$

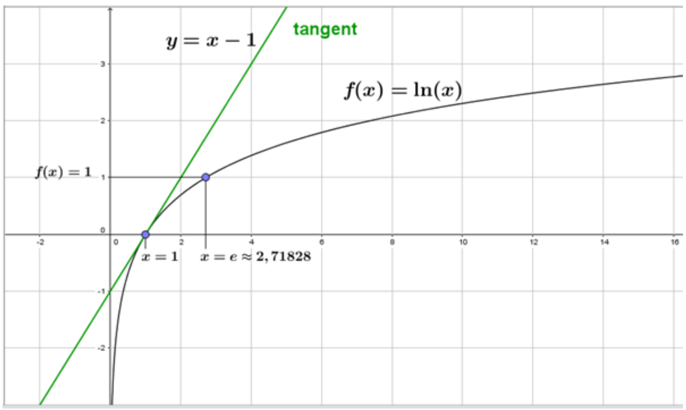
Hermed når vi frem til:

$e^{f'(x)} = e^z = e^{\frac{1}{x}}, x > 0$

For at komme helt i mål med vores anstrengelser beregner vi afslutningvis den naturlige logaritme til hhv. venstresiden og højresiden, hvilket - idet $\ln(e^x) = x$ - giver:

$f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$

Vi har hermed vist, at differentialkvotienten for den naturlige logaritme $f(x) = \ln(x), x > 0$ er: $f'(x) = \frac{1}{x}$. Det betyder, at overalt på grafen for den naturlige logaritme, se figur 2, kan vi beregne grafens hældning og dermed tangentens hældning som den reciprokke værdi af x.



Figur 2 Grafen for $f(x) = \ln(x)$

I den forbindelse kan det særligt bemærkes, at i grafens skæringspunkt med x-aksen - punktet (1,0) - er tangentens hældning 1, og ligningen for denne tangent er derfor: $y(x) = x - 1$, som er vist med grønt i figur 2.

6.3 Differentiation af funktionen $f(x) = \log_{10}(x)$

Sammenhængen mellem 10-tals logaritmen og den naturlige logaritme er:

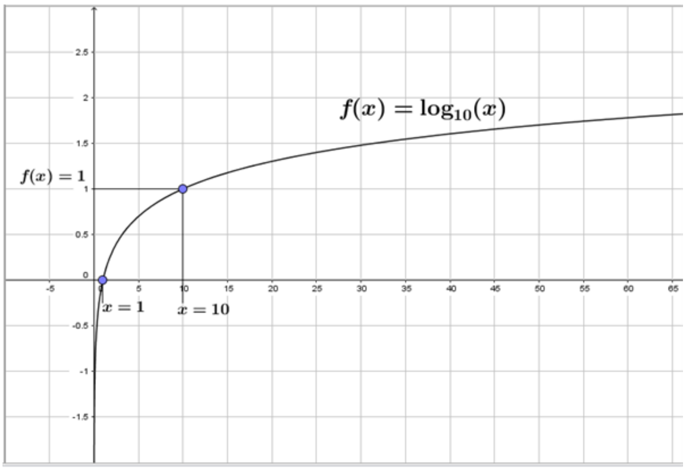
$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x), x > 0$$

Vi ser, at 10-tals logaritmen er lig med den naturlige logaritme multipliceret med et tal (den reciprokke værdi af $\ln(10)$), og differentialkvotienten for 10-tals logaritmen er dermed lig med differentialkvotienten for den naturlige logaritme divideret med den naturlige logaritme til 10.

Da differentialkvotienten for den naturlige logaritme er $\frac{1}{x}$, når vi frem til:

$$f(x) = \log_{10}(x) \implies f'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(10)}, x > 0$$

Overalt på grafen for 10-tals logaritmen, se figuren, kan vi altså beregne grafens hældning og dermed tangentens hældning som den reciprokke værdi af x divideret med $\ln(10) \approx 2,30$.



Figur Grafen for $f(x) = \log_{10}(x)$

6.4 Implicit differentiation

For en lang række eksplicitte funktioner $y = f(x)$ er der simple regler for differentiation, f.eks. n'te grads polynomier, de trigonometriske funktioner og mange andre. Ved sædvanlig differentiation bestemmer vi $f'(x)$, som er en forskrift til - for en vilkårlig værdi af x - at beregne grafens hældning og dermed også hældningen for tangenten til grafen for $f(x)$.

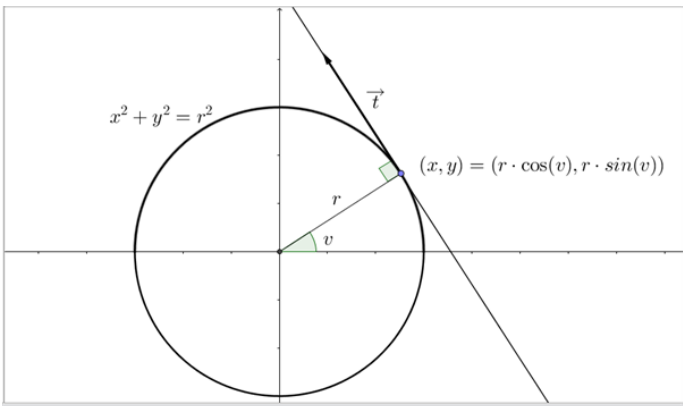
Hvis der er tale om implicitte funktioner, må vi gribe differentiation lidt anderledes an. Ved en implicit funktion forstår vi en forskrift, der ikke er givet på den eksplicitte form ved $y = f(x)$, men derimod ved enten $x = f(y)$ eller $f(x, y)$.

Som altid, når vi taler differentiation, husker vi på, at differentialkvotienten $\dfrac{dy}{dx}$ angiver hældningen for tangenten til grafen. Ved implicit differentiation tilvejebringer vi et regneudtryk for $\dfrac{dy}{dx}$ uden at kende den eksplicitte funktion $y = f(x)$.

Implicit differentiation illustreres bedst gennem konkrete eksempler.

Eksempel 1

Cirklen med centrum i Origo (0,0) og radius r er som bekendt givet ved ligningen: $x^2 + y^2 = r^2$, se figur 1.



Figur 1 Cirklen, $x^2 + y^2 = r^2$

Hvis vi i cirklens ligning opfatter y som $y(x)$ og differentierer på begge sider af lighedstegnet med hensyn til x, får vi:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}, y \neq 0$$

Overalt på cirklen (bortset fra ved skæringspunkter med x-aksen) kan vi altså beregne tangentens hældning ved udtrykket $\frac{-x}{y}$. Ved cirklens skæringspunkter med x-aksen er tangenten lodret, og for lodrette linjer er hældningen som bekendt ikke defineret, så begrænsningen $y \neq 0$ giver god mening og udgør ikke en reel indskrænkning.

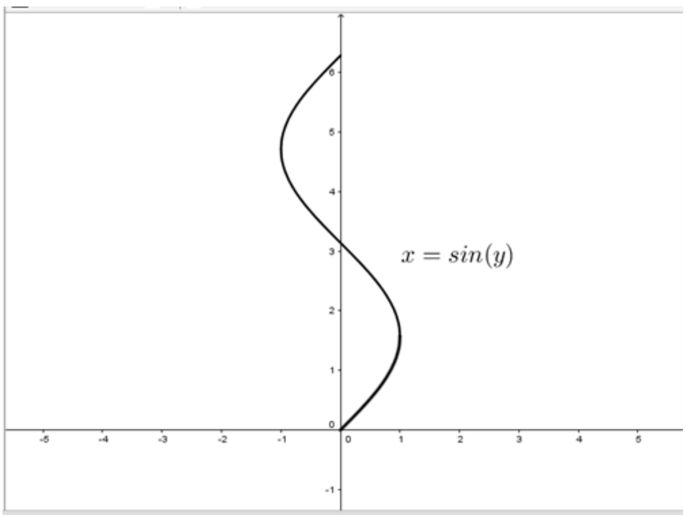
Samme resultat for tangentens hældning kan vi komme frem til ved en anden betragtning. Hvis vi - som vist i figur 1 - beskriver punkterne (x, y) på cirkelperiferien ved vinklen v, som radius til punktet danner med x-aksen, er $(x, y) = (r \cdot \cos v, r \cdot \sin v)$. Tangenten til cirklen står vinkelret på radius, og en retningsvektor for tangenten finder vi dermed ved f.eks. at dreje radius 90 ° mod uret:

$$\overrightarrow{t} = (-y, x) = (-r \cdot \sin v, r \cdot \cos v) \ = -r \cdot \sin v \cdot (1, \frac{-r \cdot \cos v}{r \cdot \sin v}) = -r \cdot \sin v \cdot (1, \frac{-x}{y})$$

Denne vektor ses netop at have hældningen $\frac{-x}{y}$, hvilket den implicitte differentiation også førte frem til.

Eksempel 2

Lad sammenhængen mellem x og y være givet ved forskriften $x = \sin y, 0 \leq y \leq 2\pi$, som vist i figur 2.



Figur 2 Lodretstående sinuskurve $x = \sin y, 0 \leq y \leq 2\pi$

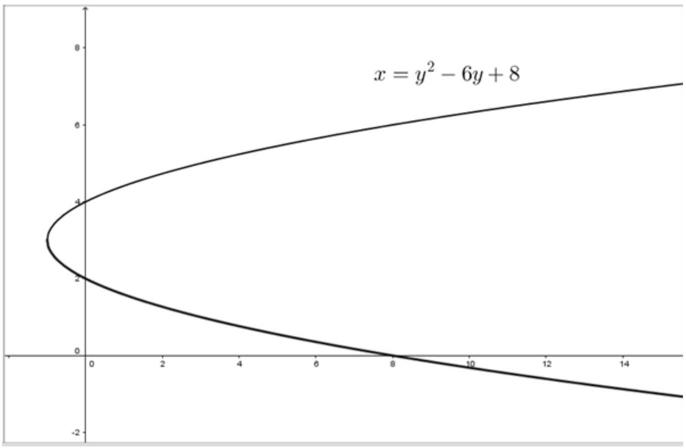
Hvis vi i forskriften opfatter y som $y(x)$ og differentierer på begge sider af lighedstegnet med hensyn til x, får vi:

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}, 0 \leq y \leq 2\pi \text{ og } y \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Overalt på grafen (bortset fra ved y-værdierne $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$) kan vi beregne tangentens hældning ved udtrykket $\frac{1}{\cos y}$. Ved de to anførte y-værdier er tangenten lodret, hvor hældningen ligesom før ikke er defineret.

Eksempel 3

En liggende parabel, som skærer y-aksen i både 2 og 4 og har toppunkt i (-1,3), kan beskrives ved forskriften: $x = (y-2)\cdot(y-4) = y^2 - 6y + 8$, se figur 3.



Figur 3 Liggende parabel $x = \ y^2 - 6y + 8$

Hvis vi i forskriften opfatter y som $y(x)$ og differentierer på begge sider af lighedstegnet med hensyn til x, får vi:

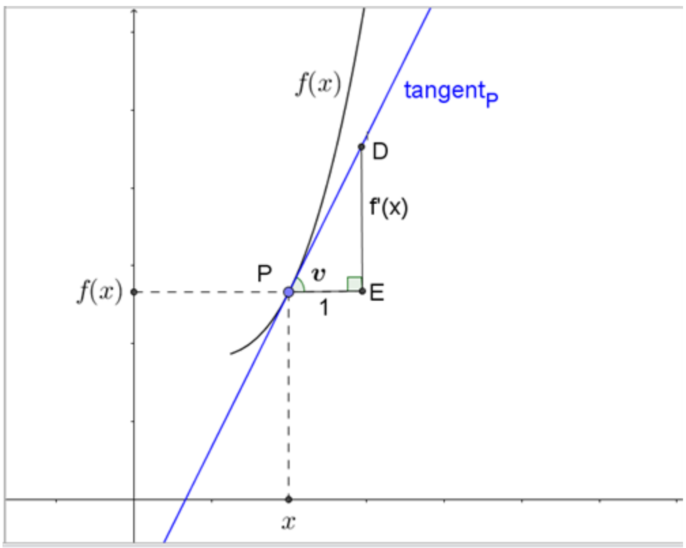
$$1 = 2y\cdot\frac{dy}{dx} - 6\cdot\frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-6}, y \neq 3$$

Overalt på den liggende parabel (bortset fra ved $y = 3$, hvor tangenten er lodret) kan vi beregne tangentens hældning ved udtrykket $\frac{1}{2y-6}$. Heraf ser vi f.eks., at hældningen for parablens tangent er -1, når $y = 2,5$, og $+1$, når $y = 3,5$.

6.5 Krumning

For en graf anvender vi betegnelsen krumning til at beskrive, hvor meget grafen buer. I dette afsnit vil vi kvantificere grafens krumning og opstille et udtryk til at beregne krumningen.

I figur 1 er indtegnet et udsnit af en vilkårlig graf og en tilhørende tangent til grafen i punktet $P(x, f(x))$.



Figur 1 Grafen for en funktion med tangent i punkt P

Vi erindrer, at vi kan bestemme tangentens hældning ved at differentiere funktionen, og sammenhængen mellem tangentens hældning, $f'(x)$, og den vinkel, v, som tangenten danner med x-aksen, fremgår af den retvinklede trekant PDE:

$$\tan(v) = \frac{f'(x)}{1} = f'(x)$$

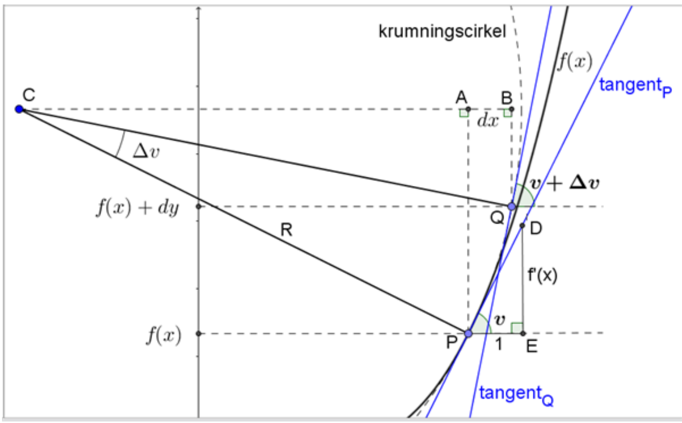
For at bestemme hypotenusen i trekant PDE benyttes Pythagoras: $PD = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ og dermed er $\cos v = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$.

Intuitivt betragtet, må grafens krumning have noget at gøre med, hvor meget tangentens hældning ændrer sig. Hvis hældningen ændrer sig meget, vil vi betegne krumningen som stor, og hvis hældningen kun ændrer sig lidt, vil vi betegne krumningen som lille. I grænsetilfældet, hvor grafens hældning er konstant, dvs. for en ret linje, vil det give mening at sige, at krumningen er 0.

Tangenthældningens ændring kan vi udtrykke matematisk som den anden afledede af funktionen:

$$\frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = f''(x)$$

I figur 2 har vi indtegnet en cirkel med centrum i et punkt $C(x_C, y_C)$ (som vi endnu ikke kender) og radius R (som vi endnu heller ikke kender). Cirklen går gennem punkt P, og i nærheden af x vil vi benytte denne cirkel - vi kan kalde den krumningscirklen - som en tilnærmelse til grafen for $f(x)$.



Figur 2 Grafen for en funktion med tilørende krumningscirkel

Ved en lille tilvækst dx til x-værdien bevæger vi os fra punktet P på cirklen til punktet $Q(x + dx, f(x) + dy)$ på cirklen, hvor radius er drejet en vinkel, Δv, i forhold til den radius, der går til punktet P.

I ethvert punkt på en cirkel står tangenten vinkelret på radius, så i punkt Q er tangenten drejet Δv i forhold til tangenten i punkt P. For tangenten i punkt Q gælder, idet dx er lille:

$$\tan(v + \Delta v) = f'(x + dx) = f'(x) + f''(x) \cdot dx$$

Når Δv er lille, kan venstresiden tilsvarende omskrives, og idet $\frac{d}{dv}(\tan v) = \frac{1}{\cos^2 v}$, får vi:

$$\tan(v + \Delta v) = \tan v + \frac{d}{dv}(\tan v) \cdot \Delta v = f'(x) + \frac{\Delta v}{\cos^2 v}$$

Ved at sammenligne de to udtryk for $\tan(v + \Delta v)$ og udnytte, at $\cos v = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$, fremkommer følgende sammenhæng mellem Δv og dx:

$$\frac{\Delta v}{\cos^2 v} = f''(x) \cdot dx \implies \Delta v = f''(x) \cdot \cos^2 v \cdot dx = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Idet $\angle CPA = v$ og $\angle CQB = v + \Delta v$ i figur 2 gælder: $CB = R \cdot \sin(v + \Delta v)$ og $CA = R \cdot \sin v$ og dermed:

$$dx = CB - CA = R \cdot \Big(\sin(v + \Delta v) - \sin v\Big)$$

Når Δv er lille, og idet $\frac{d}{dv}(\sin v) = \cos v$, får vi:

$$dx = R \cdot \Big(\sin v + \frac{d}{dv}(\sin v) \cdot \Delta v - \sin v\Big) = R \cdot \Delta v \cdot \cos v \implies R = \frac{dx}{\Delta v \cdot \cos v}$$

Heri indsættes udtrykkene ovenfor for hhv. Δv og $\cos v$. Herved kan dx forkortes ud, og vi får følgende udtryk for R som fuktion af x:

$$R(x) = \frac{(1 + f'(x)^2) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}}{f''(x)} = \frac{(1 + f'(x)^2)^{1{,}5}}{f''(x)}, f''(x) \neq 0$$

$R(x)$ er radius i krumningscirklen og kaldes for grafens krumningsradius i punktet x. Vi indfører med det græske bogstav kappa, κ, betegnelsen grafens krumning som den reciprokke krumningsradius:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{1{,}5}}$$

I overensstemmelse med vores intuitive betragtning i indledningen ser vi, at krumningen er proportional med $f''(x)$, dvs. proportional med ændringen af tangentens hældning. Når $f''(x)$ er stor, er krumningen stor, og når $f''(x)$ er lille, er krumningen lille.

En stor krumning modsvares af en lille krumningsradius og vice versa.

For den rette linje er $f''(x) = 0$, og dermed er krumningen $\kappa(x) = 0$. Krumningsradius for den rette linje er ikke defineret, hvilket vi i nogle sammenhænge kan finde på at udtrykke som, at den rette linjes krumningsradius er uendelig stor.

Vi lægger mærke til, at både krumningsradius og krumning kan antage såvel positive som negative værdier alene afhængigt af fortegnet for $f''(x)$. Det giver ikke nogen mening, et en cirkel kan have en negativ radius, og det er da heller ikke tilfældet her. Fortegnet for krumningsradius og krumning fortæller, om krumningscirklens centrum ligger over eller under grafen. Krumningscirklens radius er således den numeriske værdi af $R(x)$.

Når $f''(x)$ (og dermed krumningsradius og krumning) er positiv, er tangentens hældning voksende - i dette tilfælde bliver grafen enten stejlere for stigende x-værdier (hvis $f'(x) > 0$) eller fladere for stigende x-værdier (hvis $f'(x) < 0$). Her krummer grafen opad, og krumningscirklens centrum ligger over grafen, se figur 3 øverst.

Når $f''(x)$ (og dermed krumningsradius og krumning) er negativ, er tangentens hældning aftagende - i dette tilfælde bliver grafen enten stejlere for stigende x-værdier (hvis $f'(x) < 0$) eller fladere for stigende x-værdier (hvis $f'(x) > 0$). Her krummer grafen nedad, og krumningscirklens centrum ligger under grafen, se figur 3 nederst.

Figur 3 Placering af krumningscirklens centrum, afhængigt af fortegnet for $f'(x)$ og $f''(x)$

Afslutningsvis beregner vi beliggenheden af krumningscirklens centrum C. Trekant PAC i figur 2 giver, idet $\sin v = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ og $\cos v = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$:

$$x_C = x - R(x) \cdot \sin v = x - R(x) \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = x - \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \cdot f'(x)$$

$$y_C = f(x) + R(x) \cdot \cos v = f(x) + R(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}$$

$f''(x) \neq 0.$

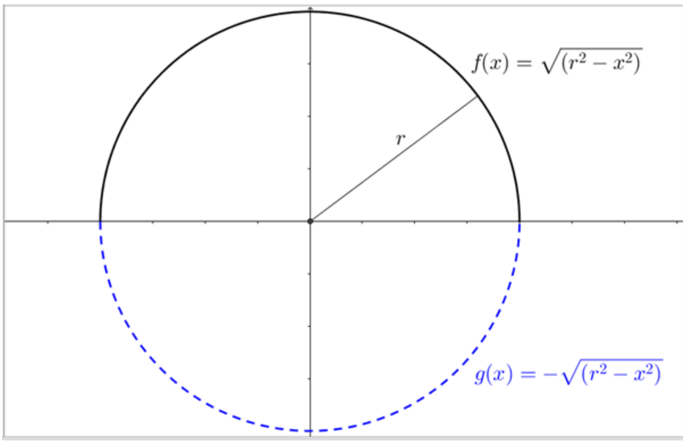
Eksempel 1: Cirklen

Cirklen er et godt eksempel at prøve teorien af på, for her kender vi faktisk resultatet på forhånd. Krumningscirklen må overalt være sammenfaldende med cirklen, så krumningsradius må være den samme som cirklens radius, og krumningscentrum må være sammenfaldende med cirklens centrum.

Ligningen for en cirkel med radius r og centrum i Origo (0,0) er som bekendt

$$x^2 + y^2 = r^2 \implies y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Højresiden viser, at der for hver x-værdi er to tilhørende y-værdier, hvilket modsvarer hhv. den øvre halvcirkel og den nedre halvcirkel. Her vil vi indskrænke os til at kigge på den øvre halvcirkel med positiv y-værdi, $f(x)$ i figur 4. Du kan selv foretage eftervisningen for den nedre halvcirkel med negative y-værdier, $g(x)$ i figur 4.



Figur 4 Cirkel med radius r og centrum i Origo (0,0) opdelt i to halvcirkler

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\cdot\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{(-x)\cdot(-2x)}{(-2)\cdot(\sqrt{r^2 - x^2})^3} = \frac{-(r^2 - x^2) - x^2}{(r^2 - x^2)\cdot\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{1,5}}$$

Vi kan herefter bestemme krumningsradius og krumning:

$$R(x) = \frac{(1 + f'(x)^2)^{1,5}}{f''(x)} = \frac{(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2})^{1,5}}{\frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{1,5}}} = \frac{(r^2)^{1,5}}{(r^2 - x^2)^{1,5}} \cdot \frac{(r^2 - x^2)^{1,5}}{-r^2} = -r$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{-1}{r}$$

Vi når altså frem til det forventede resultat.

At krumning og krumningsradius er negativ betyder, at krumningscentrum ligger under grafen, hvilket også passer med vores forventning om, at krumningscentrum skal ligge i Origo (0,0).

Dette kan vi også eftervise:

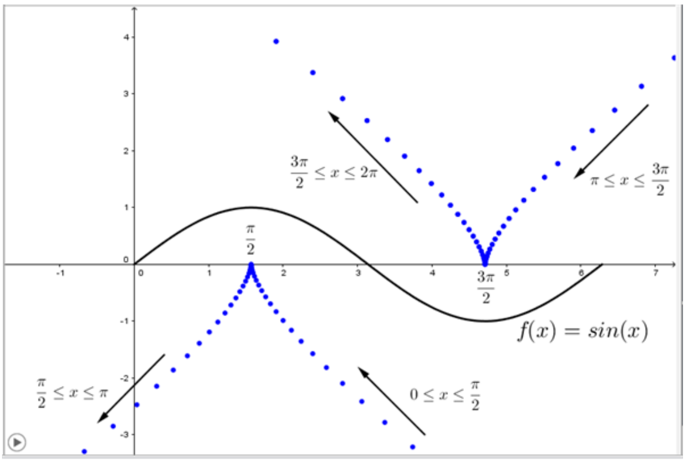
$$x_C = x - \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \cdot f'(x) = x - \frac{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}{\frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{1,5}}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = x - \frac{r^2}{r^2 - x^2} \cdot \frac{(r^2 - x^2)^{1,5}}{-r^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$
$$x - x = 0$$

$$y_C = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} = f(x) + \frac{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}{\frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{1,5}}} = f(x) + \frac{r^2}{r^2 - x^2} \cdot \frac{(r^2 - x^2)^{1,5}}{-r^2} = f(x) - \sqrt{r^2 - x^2} =$$
$$f(x) - f(x) = 0$$

Eksempel 2 Sinuskurve

Lad os kigge på sinuskurven med amplituden 1, se figur 5.

$f(x) = \sin(x), 0 \leq x \leq 2\pi$



Figur 5 Sinuskurve med amplituden 1, og krumningscirklers centrum indtegnet med blåt

Vi vil bestemme krumningsradius, krumning og koordinaterne til krumningscirklens centrum:

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$R(x) = \dfrac{(1 + f'(x)^2)^{1,5}}{f''(x)} = -\dfrac{(1 + \cos^2(x))^{1.5}}{\sin(x)}, x \neq 0, \pi, 2\pi$

$\kappa(x) = \dfrac{1}{R(x)} = -\dfrac{\sin(x)}{(1 + \cos^2(x))^{1.5}}$

$x_C = x - \dfrac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \cdot f'(x) = x + \dfrac{1 + \cos^2(x)}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = x + \dfrac{1 + \cos^2(x)}{\tan(x)}, x \neq 0, \pi, 2\pi$

$y_C = f(x) + \dfrac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} = \sin(x) - \dfrac{1 + \cos^2(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin^2(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x)) - \cos^2(x)}{\sin(x)} = -\dfrac{2\cos(x)}{\tan(x)}, x \neq 0, \pi, 2\pi$

I figur 5 er med blåt vist krumningscirklens centrums placering som funktion af x. Når x løber fra 0^+ til π^-, krummer grafen nedad, og krumningscirklens centrum ligger her under grafen og vandrer fra det sydøstlige hjørne i koordinatsystemet op til x-aksen i $(\frac{\pi}{2}, 0)$ og videre til det sydvestlige hjørne i koordinatsystemet. Når x løber fra π^+ til $2\pi^-$, krummer grafen opad, og krumningscirklens centrum ligger her over grafen og vandrer fra det nordøstlige hjørne i koordinatsystemet ned til x-aksen i $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ og videre til det nordvestlige hjørne i koordinatsystemet.

Når x er $0, \pi$ og 2π er krumningen 0, og her er hverken krumningsradius eller krumningscirklens centrum defineret. Ved disse x-værdier skifter krumning og krumningsradius fortegn, fordi $f''(x)$ skifter fortegn, og krumningscirklens centrum skifter mellem placering over og under grafen. I punkter, hvor $f''(x)$ skifter fortegn, siger vi, at grafen for $f(x)$ har en vendetangent.

Vi ser, at krumningsradius er mindst (= 1,0) og krumningen er numerisk størst (= 1,0), når x er $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$. Krumningsradius er størst (uendelig stor), når x er tæt på $0, \pi$ og 2π.

I denne video giver vi en introduktion til begrebet krumning.

I denne video udleder vi formlen for beregning af krumning ud fra krumningscirklens radius.

7 Integralregning

I denne sektion kan du lære, hvordan du ved hjælp af integralregning beregner længden af en graf og udregner rumfang af omdrejningslegemer roteret om y-aksen.

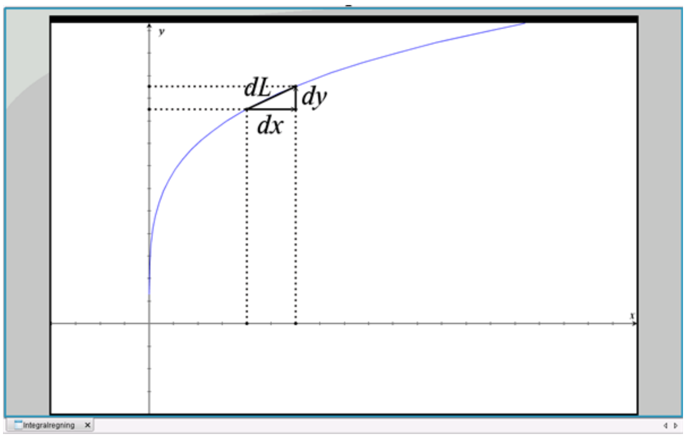
God fornøjelse!

7.1 Længde af graf

Hvis grafen for en funktion er en ret linje, kan vi til hver en tid - med Pythagoras - beregne længden af grafen. For andre grafer må vi tage integralregning i brug.

For længden af kurver, hvor x- og y-koordinaterne er givet ved en parameterfremstilling, henvises til afsnittet om vektorfunktioner.

Her kigger vi på grafer for funktioner, hvor y er beskrevet som en funktion af x. For at komme frem til en formel for grafens længde, betragter vi først et lille stykke af grafen med udbredelsen dx i x-retningen og dy i y-retningen, se figur 1.



Figur 1 Bestemmelse af infinitesimalt bidrag til længden af en graf

Ved at bruge Pythagoras finder vi: $dL^2 = dx^2 + dy^2$.

Vi omskriver til $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, og i det sidste led under kvadratroden dividerer og ganger vi med dx^2: $dL = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2}dx^2}$.

Vi benytter omskrivningen: $\frac{dy^2}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2$ og får: $dL = \sqrt{dx^2 + (\frac{dy}{dx})^2 \cdot dx^2}$. Nu indgår dx^2 i begge led under kvadratroden, så vi kan sætte dx^2 udenfor en parentes: $dL = \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2) \cdot dx^2}$.

Vi deler kvadratroden op: $dL = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \cdot \sqrt{dx^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \cdot dx \ = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$

Vi har forudsat, at grafen er differentiabel og har indsat $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

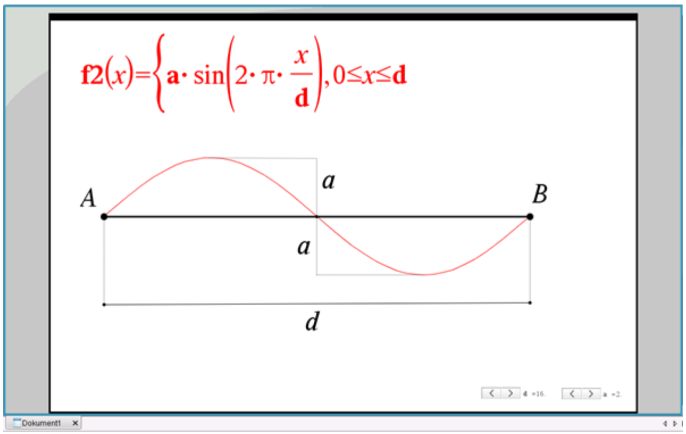
Længden af grafen kan vi nu bestemme ved at integrere udtrykket for dL over det ønskede x-interval:

$$L = \int dL = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

OBS: Denne formel er rigtig, men udledningsmetoden er ikke stringent, da man ser dx og dy som selvstændige matematiske objekter. I anden del af videolektionen i bunden af siden kan du se en stringent udledning.

Eksempel 1

En mand skal bevæge sig fra punkt A til punkt B. Afstanden i fugleflugtslinje mellem punkterne betegner vi d. Uvist af hvilke grunde er manden ikke i stand til at følge den rette linje, i stedet viser det sig, at hans rute svarer præcist til én periode på en sinuskurve med amplituden a i forhold til fugleflugtslinjen. Se figur 2.



Figur 2 Bevægelse fra A til B i en sinuskurve

Sinuskurven beskrives ved funktionen $f(x) = a \cdot \sin(2\pi\frac{x}{d})$, $0 \le x \le d$. For at beregne længden af sinuskurven skal vi bruge $f'(x) = 2\pi \cdot \frac{a}{d} \cdot \cos(2\pi\frac{x}{d})$, og længden af sinuskurven beregnes ved hjælp af integralet:

$$L = \int_0^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \ = \int_0^d \sqrt{1 + 4\pi^2 \cdot (\frac{a}{d})^2 \cdot \cos^2(2\pi\frac{x}{d})}\, dx$$

Her indfører vi substitutionen $z = \frac{x}{d}$ og $dx = d \cdot dz$, hvor $z_1 = 0$ og $z_2 = 1$:

$$L = d \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + 4\pi^2 \cdot (\frac{a}{d})^2 \cdot \cos^2(2\pi z)}\, dz$$

Længden beregnes altså som afstanden i fugleflugtslinje d ganget med integralet, og integralet ses kun at være afhængigt af forholdet mellem amplituden a og afstanden d. Integralet giver os derfor en talværdi for, hvor meget sinuskurven er længere end afstanden målt i fugleflugtslinje som funktion af forholdet mellem amplituden a og afstanden d.

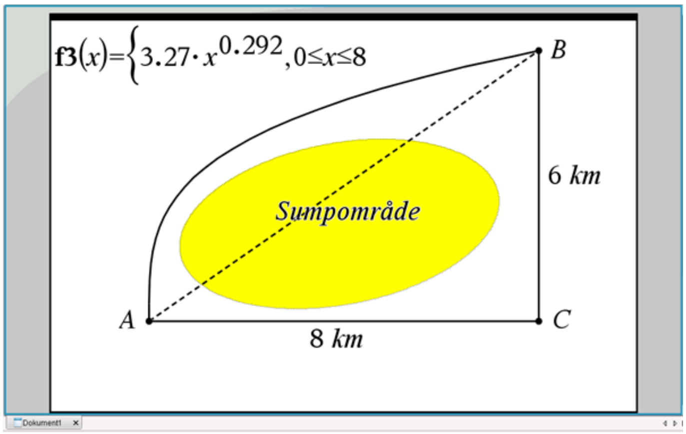
Integralet kan beregnes i CAS med forskellige værdier af forholdet mellem amplituden a og afstanden d indsat. Nogle resultater er gengivet her:

Forholdet $\frac{a}{d}$	Længde af sinuskurve
0,1 = 10 %	$d \cdot 1,09$
0,2 = 20 %	$d \cdot 1,32$
0,3 = 30 %	$d \cdot 1,65$

Det ses, at sinuskurvens længde vokser relativt hurtigt. Hvis sinuskurvens amplitude udgør 10 % af afstanden d mellem A og B, er sinuskurven 9 % længere end d. Men hvis sinuskurvens amplitude stiger til 20 % af d, er sinuskurven 32 % længere end d, og ved en amplitude på 30 % af d, er sinuskurven hele 65 % længere end d.

Eksempel 2

En vej skal anlægges mellem to punkter A og B, se figur 3. Pythagoras giver, at afstanden mellem A og B er 10 km: $a^2 + b^2 = 8^2 + 6^2 = 100 = c^2 = 10^2$.



Figur 3 Linjeføring af vej mellem A og B

På grund af et sumpområde på strækningen kan vejen ikke anlægges som en ret linje. Jordbundsundersøgelser har kortlagt sumpområdets udstrækning, og det har vist sig, at vejen kan anlægges enten langs en nordlig linjeføring beskrevet ved potensvækst-funktionen $f(x) = b \cdot x^a = 3,27 \cdot x^{0,292}$, eller som to rette linjer hhv. fra A til C og fra C til B.

Beregn forskellen i længde mellem de to linjeføringer.

Vi ser først, at linjeføringen som to rette linjer giver en længde på 8 + 6 = 14 km.

For linjeføringen beskrevet ved $f(x)$ skal vi differentiere funktionen: $f'(x) = b \cdot a \cdot x^{a-1} = 3,27 \cdot 0,292 \cdot x^{-0,708} = 0,955 \cdot x^{-0,708}$ og længden af linjeføringen beregnes ved hjælp af integralet:

$$L = \int_0^8 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^8 \sqrt{1 + 0,955^2 \cdot x^{-2 \cdot 0,708}}\, dx$$

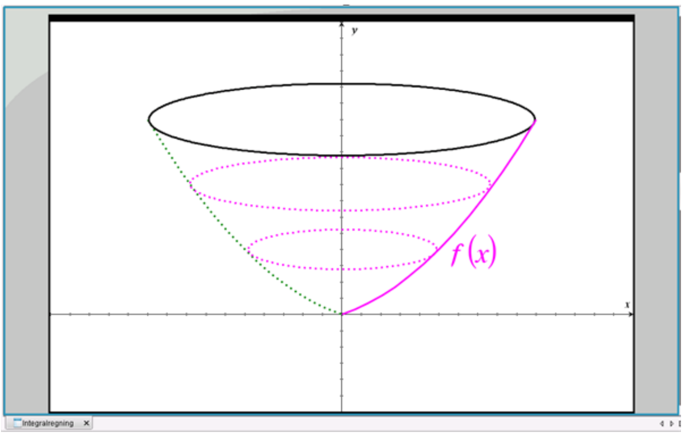
Integralet beregnes i CAS og giver, at L er 11,1 km.

Forskellen i vejlængde mellem de to linjeføringer er altså 14 - 11,1 = 2,9 km.

7.2 Rumfang af omdrejnings-legeme drejet om y-aksen

Beregning af rumfang af omdrejningslegemer har du nok mødt tidligere, hvor x-aksen har været omdrejningsakse. Hvis ikke - eller hvis du vil genopfriske det - er her et link.

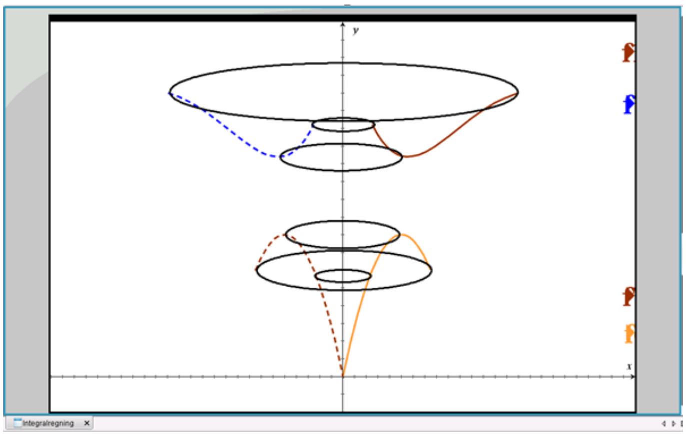
I dette afsnit vil vi kigge på omdrejningslegemer, hvor y-aksen er omdrejningsakse. I 1. kvadrant i et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem er givet en funktion $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, og denne funktion roteres 360° omkring y-aksen. Der fremkommer herved et rumligt omdrejningslegeme, se figur 1, og vi kunne være interesseret i at beregne dets rumfang.



Figur 1 Rumligt legeme frembragt ved drejning af $f(x)$ omkring y-aksen

Om funktionen $f(x)$ vil vi i det aktuelle x-interval forlange, for det første at den er kontinuert, og for det andet at der for enhver y-værdi kun er én tilhørende x-værdi. Det kan oversættes til, at funktionens differentialkoefficient ikke må skifte fortegn, og dermed at henholdsvis største og mindste y-værdi skal forekomme i x-intervallets to endepunkter.

Figur 2 viser eksempler på funktioner, hvor dette **ikke** er opfyldt.

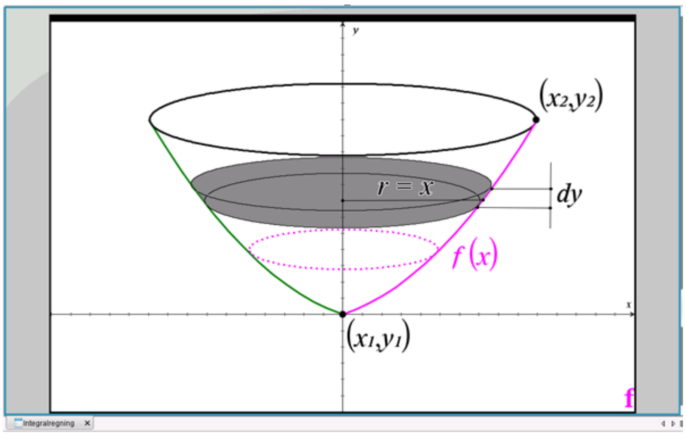


Figur 2 Funktioner, hvor hældningskoefficienten skifter fortegn i x-intervallet

Der fremkommer også her, som vi kan se, rumlige legemer ved drejning om y-aksen, men hvis vi skal beregne rumfanget af dem, vil vi være nødsaget til at foretage beregningen ad flere omgange.

Forestil dig, at vi skal beregne rumfanget af den øverste skål i figur 2. Først må vi finde rumfanget af den massive sokkel i midten, dvs. omdrejningslegemet hørende til den aftagende del af funktionen. Dernæst må vi finde rumfanget af omdrejningslegemet hørende til den voksende del af funktionen. Ved at trække disse to rumfang fra hinanden får vi skålens netto-rumfang.

Nu vender vi tilbage til skålen fra figur 1. For at komme frem til en formel for rumfanget, betragter vi en tynd skive af omdrejningslegemet ved en given y-værdi, se figur 3.



Figur 3 Bidrag til rumfang af omdrejningslegeme fra en infinitesimal skive

Skivens tykkelse er dy, og den har et cirkulært tværsnit med radius x. Skivens bidrag til rumfanget er derfor cirklens areal gange tykkelsen:

$dV = (\pi \cdot r^2) \cdot dy = \pi \cdot x^2 \cdot dy$

I udtrykket indgår x sammen med dy, og derfor kan vi ikke umiddlebart integrere udtrykket. Vi må først enten omskrive x til en funktion af y eller omskrive dy til en funktion af dx.

I nogle tilfælde kan $y = f(x)$ ved simpel omskrivning omformes til $x = g(y)$, i andre tilfælde udnytter vi:

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ og dermed $\qquad dy = f'(x) \cdot dx$

Ved indsætning i udtrykket for dV og integrering får vi nu to adgange til at beregne rumfanget:

Integral over y:

$$V = \int dV = \int_{y_1}^{y_2} \pi \cdot x^2 \, dy = \int_{y_1}^{y_2} \pi \cdot g(y)^2 \, dy$$

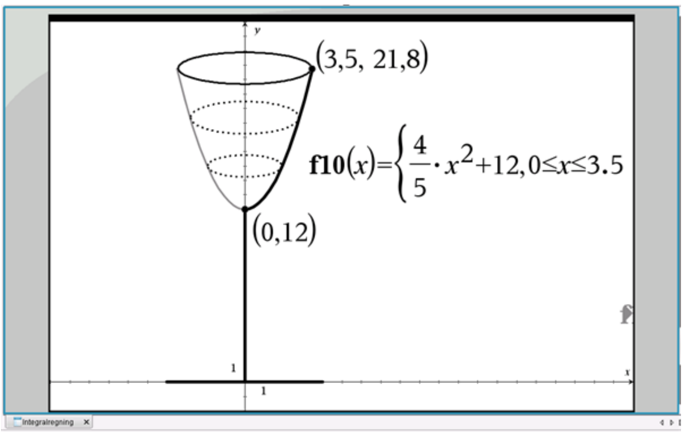
Integral over x:

$$V = \int dV = \int_{y_1}^{y_2} \pi \cdot x^2 \, dy = \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot f'(x) \cdot x^2 \, dx$$

hvor punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er de to endepunkter på grafen for $f(x)$.

Eksempel 1

I figur 4 er vist et vinglas.



Figur 4 Vinglas stående på x-aksen

Foden står på x-aksen og stilken når op i højden 12 på y-aksen. Den indvendige kontur af vinglassets skål er givet ved funktionen $y = f(x) = \frac{4}{5}x^2 + 12$, $0 \leq x \leq 3,5$, og vi beregner det tilhørende y-interval: $12 \leq y \leq 21,8$.

Vinglassets skål fremkommer ved at dreje $f(x)$ 360° om y-aksen, og vi skal bestemme skålens rumfang, idet alle mål er i cm.

Vi omskriver her funktionen $y = f(x)$ til $x = g(y) = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot (y-12)}$ og benytter integralet med integration over y. $g(y)$ indsættes og rumfanget bestemmes:

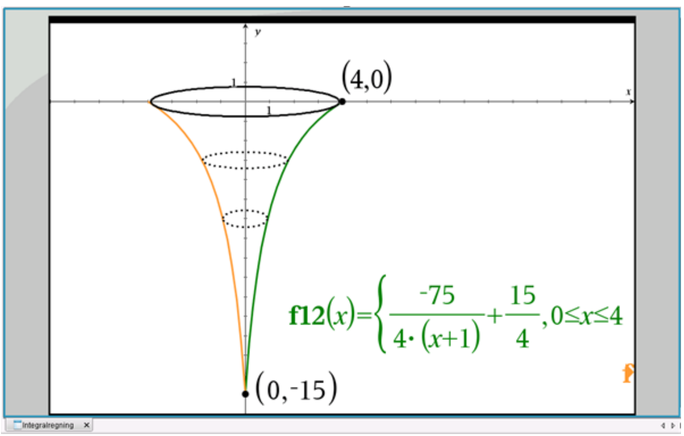
$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi \cdot g(y)^2 \, dy = \int_{12}^{21,8} \pi \cdot \frac{5}{4} \cdot (y-12) \, dy$$
$$= \frac{5}{4} \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 - 12y\right]_{12}^{21,8}$$
$$= \frac{5}{4} \cdot \pi \cdot \{(\frac{1}{2} \cdot 21,8^2 - 12 \cdot 21,8) - (\frac{1}{2} \cdot 12^2 - 12 \cdot 12)\}$$

$V = 189 \text{ cm}^3 = 0,189$ liter

Vinglasset kan altså rumme lidt under en femtedel liter.

Eksempel 2

I figur 5 er vist en isvaffel. Isvaflens bund er i -15 på y-aksen, og isvaflens overside flugter med x-aksen og har en diameter på 8.



Figur 5 Isvaffel

Den indvendige kontur af isvaflen er givet ved funktionen $y = f(x) = \dfrac{-75}{4\cdot(x+1)} + \dfrac{15}{4}$, $0 \le x \le 4$, og isvaflens inderside fremkommer ved at dreje $f(x)$ 360° om y-aksen.

Vi skal bestemme isvaflens rumfang, idet alle mål er i cm.

Vi differentierer: $f'(x) = \dfrac{75}{4\cdot(x+1)^2}$, og vi benytter integralet med integration over x. $f'(x)$ indsættes og rumfanget bestemmes:

$$V = \int dV = \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot f'(x)\cdot x^2\,dx = \int_0^4 \pi \cdot \frac{75}{4}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$$
$$= \frac{75}{4}\cdot\pi\cdot\int_0^4 \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} + \frac{2-1}{(x+1)^2} - \frac{2x+2}{(x+1)^2}\,dx$$

Omskrivningen til tre brøker under integraltegnet giver os mulighed for at løse opgaven analytisk:

$$V = \frac{75}{4}\cdot\pi\cdot\left\{\int_0^4 1+(x+1)^{-2}\,dx - \int_1^{25}\frac{1}{z}\,dz\right\}$$

idet vi til det sidste integral har benyttet substitutionen: $z = (x+1)^2$, $dz = (2x+2)\cdot dx$ samt $z_1 = (0+1)^2 = 1$ og $z_2 = (4+1)^2 = 25$. Vi får:

$$V = \frac{75}{4}\cdot\pi\cdot\left\{\left[x - \frac{1}{x+1}\right]_0^4 - \left[ln(z)\right]_1^{25}\right\}$$
$$= \frac{75}{4}\cdot\pi\cdot\left\{(4-\frac{1}{5}) - (0-1) - (ln(25) - \ln(1))\right\}$$
$$= \frac{75}{4}\cdot\pi\cdot\left\{5 - \frac{1}{5} - 2\cdot\ln(5)\right\}$$

$V = 93\ \text{cm}^3 = 0,093$ liter

I udregningen har vi benyttet regnereglen for logaritmen af et kvadrattal: her $\ln(25) = \ln(5^2) = 2\cdot\ln(5)$ og at $\ln(1) = 0$.

Isvaflen kan altså rumme lidt under en tiendedel liter, men heri er selvfølgelig ikke indregnet, at der kan fyldes is eller softice langt op over vaflens kant.

8 Differentialligninger

Denne sektion er en udvidelse af denne gennemgang af differentialligninger.

Det er en god idé at have helt styr på, hvad differentialligninger er, og hvordan man kan løse dem, inden du går videre med denne sektion.

Her ser vi på differentialligninger af anden orden og differentialligninger med to funktioner.

God fornøjelse!

8.1 Anden ordens differentialligninger

Differentialligninger af typen $y'' = g(x)$

Denne form for differentialligning betegnes som en anden ordens differentialligning. Det betyder, at der er blevet differentieret af to omgange.

Først er den originale funktion blevet differentieret. Det giver os en afledt funktion. Denne afledte funktion bliver herefter differentieret. Den oprindelige funktion er altså blevet dobbeltdifferentieret.

For at finde frem til den oprindelige funktion skal vi altså gøre det omvendte af at differentiere af to omgange- nemlig at INTEGRERE af to omgange.

Vi har givet følgende differentialligning:

$$y'' = g(x)$$

Da der er to "mærker" ved y'et, betyder det, at den oprindelige funktion er differentieret to gange.

Vi lægger derfor ud med at integrere denne. Ud fra integralregnereglerne ved vi, at dette ender ud i:

$$y' = \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + k_1$$

Dette kan ses at være sandt, da den afledte af denne (den differentierede) er:

$$(G(x) + k_1)' = g(x) = y''$$

(jf. Regnereglen om, at konstanter differentierede er lig 0. Altså, $k\,' = 0$.)

Denne er altså nu integreret én gang. Vi integrerer nu endnu en gang for at komme frem til stamfunktionen:

$$y = \int G(x) + k_1\,\mathrm{d}x = \int G(x)\mathrm{d}x + k_1 x + k_2$$

$$y = \int G(x) + k_1\,\mathrm{d}x = \int G(x)\ \mathrm{d}x + k_1 x + k_2$$

Vi kan tjekke, at det er korrekt ved at differentiere denne ligning. Differentieres den, så fås:

$$(\int G(x)\mathrm{d}x + k_1 x + k_2)' = G(x) + k_1$$

(jf. regnereglen $(kx)' = k$ og $k' = 0$) Det ses, at denne ligning differentieret er den samme som vores førsteordensdifferentierede. Altså er dette også sandt, og vi har fundet løsningen på vores oprindelige førsteordens differentialligning.

Eksempel:

Vi kan for eksempel betragte differentialligningen $y'' = 3x^3$

Vi integrerer nu første gang og får derved:

$$y' = 3\frac{1}{4}x^4 + k_1$$

jf. regnereglen $\int kx^a\,\mathrm{d}x = k \cdot \frac{1}{a+1}\,x^{(a+1)}$

Vi integrerer nu endnu en gang:

$$y = \int 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 + k_1\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^5 + k_1 x + k_2 = \frac{3}{20} \cdot x^5 + k_1 x + k_2$$

Differentialligningen er således løst.

8.2 Differentialligninger med to funktioner

Differentialligninger af typen $y' = h(x) \cdot g(y)$

Denne type differentialligning er anderledes fra de andre, vi har set på her og i afsnittet til STX, da den indeholder to funktioner, nemlig $h(x)$ og $g(y)$.

I denne situation benytter vi os af udtrykket $\frac{dy}{dx}$ i stedet for y', så vi får $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$

Vi separerer nu de variable, så alt, hvad der indeholder x, er samlet på den ene side af lighedstegnet og tilsvarende for y på den anden side. Det gør vi ved at gange med dx på begge sider og dividere med $g(y)$ på begge sider. Det giver os følgende:

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = h(x)\,\mathrm{d}x$$

Da du samler alle x'erne på den ene side og alle y'erne på den anden, får du adskilt de to variable, hvorfor denne metode også kaldes for separationsmetoden.

Vi integrerer nu på begge sider af lighedstegnet:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int h(x)\mathrm{d}x$$

Dette er løsningsformlen.

En differentialligning af typen

$$y' = h(x) \cdot g(y) \qquad g(y) \neq 0$$

løses altså ved at løse ligningen

$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int h(x)\mathrm{d}x$ med hensyn til y.

Eksempel

Vi kan for eksempel betragte differentialligningen

$$y' = 3xy$$

Du kan se det, som om du har to funktioner, da der er to variable:

$h(x) = 3x$ og $g(y) = y$.

Vi antager desuden, at $y \neq 0$

Vi benytter os nu af den løsningsformel, vi udledte ovenfor:

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int h(x)\mathrm{d}x$$

Her indsætter vi $h(x) = 3x$ og $g(y) = y$, så vi får:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 3x\,\mathrm{d}x$$

Ved at integrere $\frac{1}{y}$ og $3x$ får vi:

$$\ln(y) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + k$$

(jf. regnereglen $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + k$ og $\int kx\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2} \cdot x^2 + k$)

Vi ophæver nu den naturlige logaritme, $\ln(x)$, så y står isoleret ved at udnytte at $e^{\ln(x)} = x$ på begge sider af lighedstegnet. Vi sætter altså alle leddene i eksponenten i e^x:

$$e^{\ln(y)} = e^{\frac{3}{2} \cdot x^2 + k}$$

og får herved:

$$y = e^{\frac{3}{2} \cdot x^2 + k}$$

Vi har nu løst differentialligningen.

Differentialligninger af typen $y' = g(y)$

Denne type differentialligning er et specialtilfælde af differentialligningen ovenfor, så vi betragter den samme måde som $y' = h(x) \cdot g(y)$. Her er $h(x)$ blot lig 1.

Dette betyder, at vi kan omskrive vores oprindelige løsningsformel:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int h(x)\mathrm{d}x$$

til

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int 1\mathrm{d}x$$

Ud fra regnereglen om integralet af tallet 1 ved vi, at $\int 1\mathrm{d}x = x + k$. Vi får altså:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = x + k$$

Det er således løsningsformlen til differentialligningen $y' = g(y)$

Eksempel

Vi betragter differentialligningen

$$y' = (y - 5)^2$$

Vi betegner nu y' som g(y) i dette tilfælde. Altså,

$$g(y) = (y - 5)^2$$

Dette indsætter vi nu i vores løsningsformel:

$$\int \frac{1}{(y-5)^2}\mathrm{d}y = x + k$$

Vi finder nu integralet af venstre side:

$$\int \frac{1}{(y-5)^2}\mathrm{d}y = \frac{-1}{y-5}$$

Altså får vi:

$$\frac{-1}{y-5} = x + k$$

Vi kan nu omforme denne ligning med henblik på at isolere y:

$$\frac{-1}{y-5} = x + k$$

$$-1 = (x+k) \cdot (y-5)$$

$$\frac{-1}{x+k} = y - 5$$

$$\frac{-1}{x+k} + 5 = y$$

Altså, er $y = \frac{-1}{x+k} + 5$ løsningen på differentialligningen $y' = (y-5)^2$

9 Andre koordinatsystemer

I denne sektion kan du lære om både enkelt- og dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer og polære koordinatsystemer, samt hvordan man kan bruge dem.

God fornøjelse!

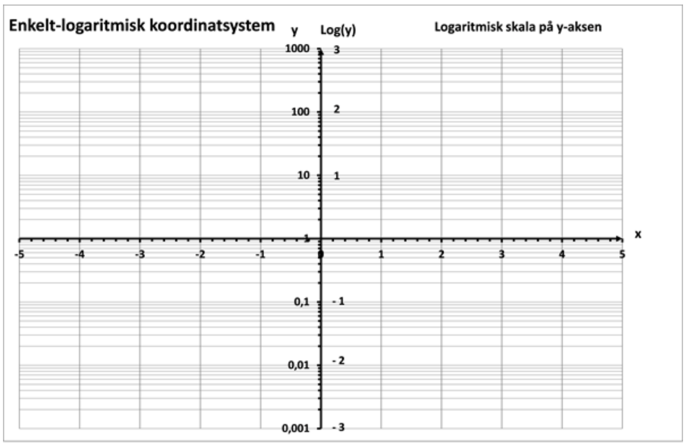
9.1 Logaritmiske skalaer: Introduktion

I et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem er skalaen på hver af akserne lineær, dvs. overalt på hver af akserne svarer en bestemt afstand, f.eks. 1 cm, til en fast ændring i koordinaten. Skalaen (og enheden) på de to akser kan dog selvfølgelig være vidt forskellig - f.eks. kan x-aksen angive årstal og y-aksen angive mio. kr.

I nogle sammenhænge kan man med fordel ændre skalaen på den ene eller på begge akser til at være logaritmisk. Inden vi ser nærmere på nogle eksempler, må vi dog lige forstå, hvad en logaritmisk skala er.

Som logaritmisk skala benytter vi sædvanligvis logaritmen med grundtallet 10 (også kaldet 10-tals logaritmen og betegnet Log), da den giver nogle "pæne" tal at se på og regne med. (Men vi kunne som logaritmisk skala principielt lige så godt benytte den naturlige logaritme (ln) med grundtallet e eller en logaritme-funktion med et vilkårligt andet grundtal.)

Som bekendt er Log(1) = 0, Log(10) = 1, Log(100) = 2, Log(1.000) = 3, osv. Vi kan introducere en logaritmisk skala på den positive del af y-aksen ved at lade heltallene 0, 1, 2, 3, osv. med samme afstand på aksen repræsentere y-værdierne hhv. 1, 10, 100, 1.000, osv. Se figur 1a.

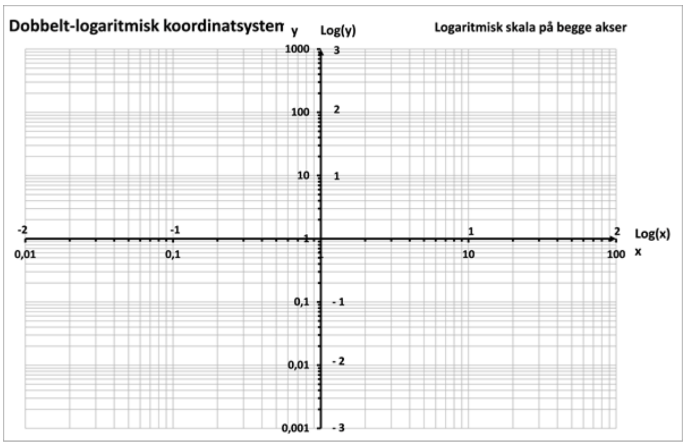


Figur 1a Enkelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på y-aksen

En ændring på 1 på den logaritmiske skala giver altså en 10-dobling af y-værdien. Og afstanden på y-aksen mellem y = 1 og y = 10 er den samme som afstanden mellem y = 10 og y = 100 og afstanden mellem y = 100 og y = 1.000, osv. Jo længere vi bevæger os op ad y-aksen, desto grovere bliver skalaen.

På den negative del af y-aksen kan vi tilsvarende lade heltallene - 1, - 2, - 3 osv. med samme afstand på aksen repræsentere y-værdierne hhv. $\frac{1}{10} = 0,1$, $\frac{1}{100} = 0,01$, $\frac{1}{1.000} = 0,001$, osv., idet Log(0,1) = - 1, Log(0,01) = - 2, Log(0,001) = - 3, osv. Jo længere vi bevæger os ned ad y-aksen, desto finere bliver skalaen.

På samme måde kan vi introducere en logaritmisk skala på x-aksen. Koordinatsystemet betegnes hhv. enkelt- og dobbelt-logaritmisk alt efter, om skalaen på kun den ene eller på begge akser er logaritmisk. I figur 1b er vist et dobbelt-logaritmisk koordinatsystem.



Figur 1b Dobbelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på både x-aksen og y-aksen

For at forstå anatomien i et logaritmisk koordinatsystem vil vi i det følgende se nærmere på, hvad der sker med punkter, når vi går fra et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem til et logaritmisk koordinatsystem. Vi taler om, at punkter og punktområder i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem "spejles" til en ny position i det logaritmiske koordinatsystem.

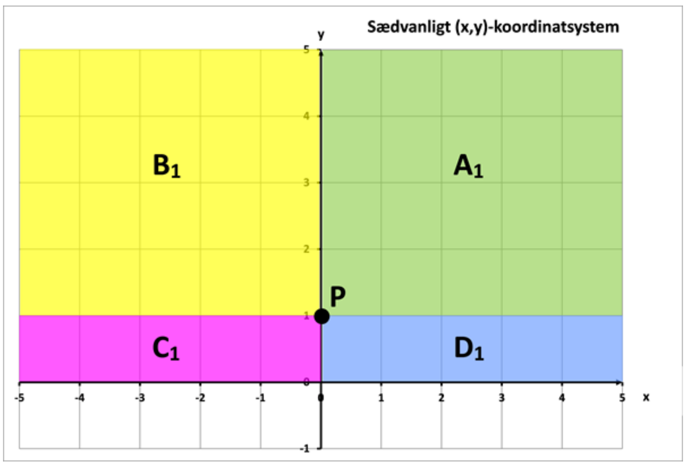
9.2 Logaritmisk skala på y-aksen

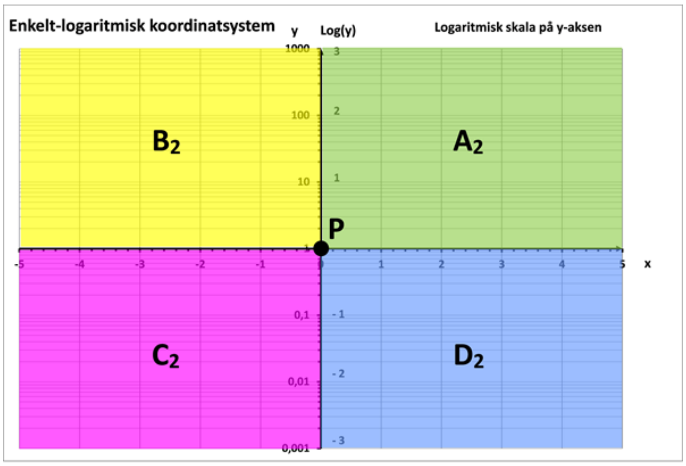
Vi starter med det enkelt-logaritmiske koordinatsystem med logaritmisk skala på y-aksen. Vi bemærker først, at logaritmen kun er defineret for positive parametre. Altså er det kun punkt-områder med positiv y-værdi, dvs. 1. og 2. kvadrant i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem, der kan spejles til punkter i dette enkelt-logaritmiske koordinatsystem.

Vi bemærker videre, at punktet P (0,1) i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem spejles over i Origo (0,0) i det enkelt-logaritmiske koordinatsystem, idet Log(y=1) = 0.

Hvis vi inddeler 1. og 2. kvadrant i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem i 4 områder (A_1, B_1, C_1, D_1) som vist øverst i figur 2, bliver disse spejlet over i de 4 kvadranter (A_2, B_2, C_2, D_2) i det enkelt-logaritmiske koordinatsystem, som vist nederst i figur 2:

(x.y)-koordinatsystem		Enkelt-logaritmisk koordinatsystem		
A_1:	x ≥ 0, y ≥ 1		A_2:	x ≥ 0, Log(y) ≥ 0
B_1:	x 0, y ≥ 1		B_2:	x 0, Log(y) ≥ 0
C_1:	x 0, 0 ¡ y 1		C_2:	x 0, Log(y) 0
D_1:	x ≥ 0, 0 ¡ y 1		D_2:	x ≥ 0, Log(y) 0





Figur 2 Spejling af punktområder i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem (øverst) til et enkelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på y-aksen (nederst)

Punkter på x-aksen i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem er ikke med i hverken C_1 eller D_1, da disse punkter (med y-værdien 0) ikke kan spejles til dette enkelt-logaritmiske koordinatsystem.

For en god ordens skyld bemærker vi, at logaritmen til meget små, positive y-værdier, der kommer uendelig tæt på nul, er store negative tal. Vi formulerer det matematisk som $lim_{y \to 0^+} Log(y) = -\infty$.

Anvendelse

Funktionsværdien i en eksponentiel vækstmodel kan vokse hurtigt, og allerede ved foholdsvis små værdier af x kan y-værdien blive meget stor. Det giver en udfordring, hvis vi har en lineær skala på y-aksen. Her vil vi være tvunget til at vælge enten en skala, der er velegnet for aflæsning af funktionsværdien ved små x-værdier, eller en skala, der er velegnet for aflæsning af funktionsværdien ved større x-værdier. Her kan et enkelt-logaritmisk koordinatsystem hjælpe os.

En eksponentiel vækstmodel har forskriften:

$f(x) = b \cdot a^x$, hvor $a > 0$ og $b > 0$

Hvis vi beregner logaritmen på begge sider af lighedstegnet, får vi ved brug af regnereglerne for logaritmer:

$Log(f(x)) = Log(b \cdot a^x) = Log(b) + Log(a^x)$ og dermed

$Log(f(x)) = Log(b) + x \cdot Log(a) = Log(a) \cdot x + Log(b)$

hvor $a > 0$ og $b > 0$.

Vi genkender højresiden som forskriften for en ret linje, hvor skæringen med y-aksen er Log(b) og hældningen er Log(a). Vi kan altså konkludere, at hvis vi afbilder logaritmen til $f(x)$ som funktion af x, er resultatet en ret linje.

Og så er det jo netop det enkelt-logaritmiske koordinatsystem, hvor vi har en logaritmisk skala på y-aksen og en sædvanlig lineær skala på x-aksen, der kommer i spil.

Vi ser på et eksempel lidt senere, men inden da kan vi benytte ovenstående omskrivning til at bevise reglen om, at en eksponentiel vækstmodel har indbygget en fordoblingstid/halveringstid.

Fordoblingstid/halveringstid

I en eksponentiel vækstmodel, hvor $a > 1$, betragter vi to x-værdier, x_1 og x_2, hvorom det gælder, at funktionsværdien hørende til x_2 er det dobbelte af funktionsværdien hørende til x_1: $f(x_2) = 2 \cdot f(x_1)$. Vi beregner logaritmen på begge sider af lighedstegnet:

$$Log(f(x_2)) = Log(2 \cdot f(x_1)) = Log(2) + Log(f(x_1))$$

Herefter indsætter vi udtrykket for Log($f(x)$) for begge x-værdier:

$$Log(f(x_2)) = Log(a) \cdot x_2 + Log(b) = Log(2) + (Log(a) \cdot x_1 + Log(b))$$

Dette fører til:

$$Log(a) \cdot (x_2 - x_1) = Log(2) \quad \text{og dermed} \quad (x_2 - x_1) = T_2 = \frac{Log(2)}{Log(a)}$$

For en given værdi af $a > 1$ er højresiden et fast tal og altså uafhængigt af x-værdien. Dvs. at overalt på den eksponentielle vækstmodels graf er forskellen mellem to x-værdier, der giver en fordobling af y-værdien, den samme. Denne forskel betegner vi T_2, som vi kalder fordoblingstiden eller fordoblings-konstanten (for netop at understrege, at der er tale om en konstant).

Måske genkender du formlen for fordoblingstiden, men er vant til at se den med den naturlige logaritme i både tæller og nævner på højresiden. Det giver dog præcis samme talværdi som med 10-talslogaritmen. Prøv selv med forskellige værdier af a.

Der er kun tale om en fordoblingstid, hvis $a > 1$.

Hvis $0 < a < 1$ kan vi foretage helt tilsvarende udregninger for to x-værdier, x_1 og x_2, hvor vi forudsætter, at funktionsværdien hørende til x_2 er det halve af funktionsværdien hørende til x_1: $f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot f(x_1)$. Her kommer vi frem til:

$$Log(a) \cdot (x_2 - x_1) = Log(\tfrac{1}{2}) \text{ og} \quad (x_2 - x_1) = T_{\frac{1}{2}} = \frac{Log(\frac{1}{2})}{Log(a)} = \frac{-Log(2)}{Log(a)}$$

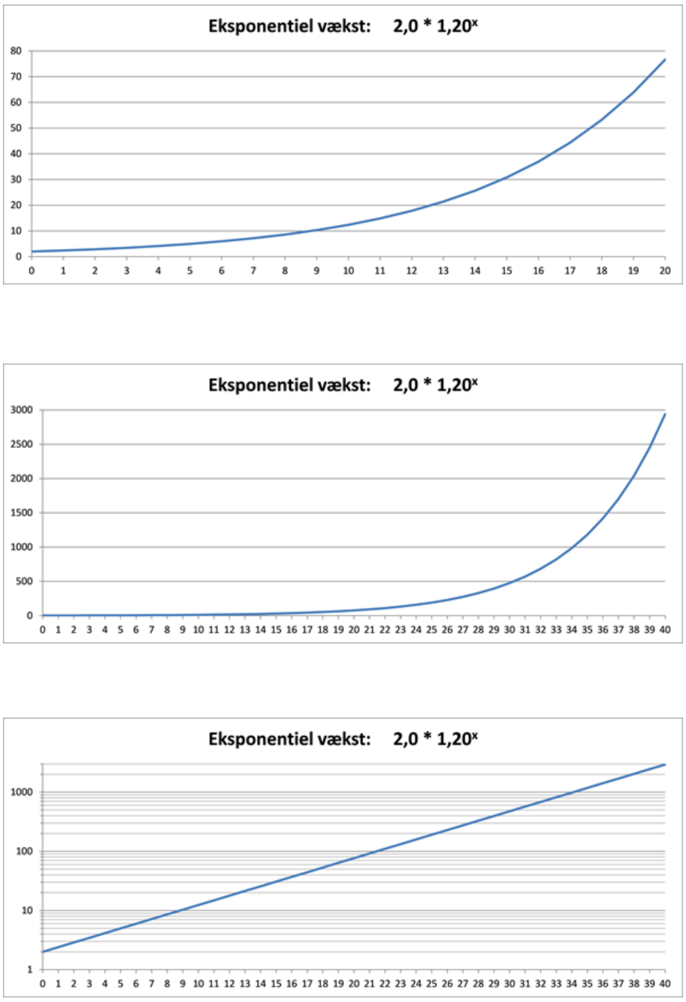
For en given værdi af a ($0 < a < 1$) er højresiden et fast tal og altså uafhængigt af x-værdien. Dvs. overalt på den eksponentielle vækstmodels graf er forskellen mellem to x-værdier, der giver en halvering af y-værdien, den samme. Denne forskel betegner vi $T_{\frac{1}{2}}$, som vi kalder halveringstiden eller halveringskonstanten (for netop at understrege, at der er tale om en konstant).

Eksempel

Vi ser på den eksponentielle vækstmodel $f(x) = 2,0 \cdot 1,20^x$, hvor $x \geq 0$. Indledningsvist kan vi beregne fordoblingstiden til: $T_2 = \frac{Log(2)}{Log(1,2)} = 3,8$.

Hvis vi vil kunne aflæse y-værdierne for x-værdier op til 40, kan vi afbilde funktionen i et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem med en y-akse gående fra 0 til 3000, som vist i det midterste diagram i figur 5. Men her er det mere end vanskeligt at aflæse y-værdierne for x-værdier under 20. Hvis vi med rimelig nøjagtighed vil kunne aflæse y-værdierne for x-værdier under 20, kan vi afbilde funktionen i et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem med en y-akse gående fra 0 til 80, som vist i det øverste diagram i figur 5.

I det enkelt-logaritmiske koordinatsystem nederst i figur 5 kan vi se, at funktionen som forventet afbildes som en ret linje, og vi kan med rimelig nøjagtighed aflæse y-værdierne i hele x-intervallet fra 0 til 40.



Figur 5 Eksponentiel vækstmodel vist i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem (øverst og i midten med forskellig skalering på akserne) og i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på y-aksen (nederst).

9.3 Logaritmisk skala på x-aksen

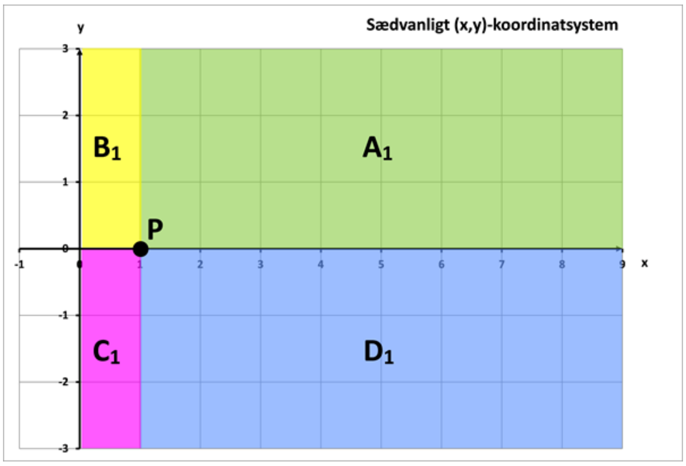
På samme måde som i det tidligere afsnit kan vi analysere spejlingen af punktområder i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem til en ny position i det enkelt-logaritmiske koordinatsystem med logaritmisk skala på x-aksen.

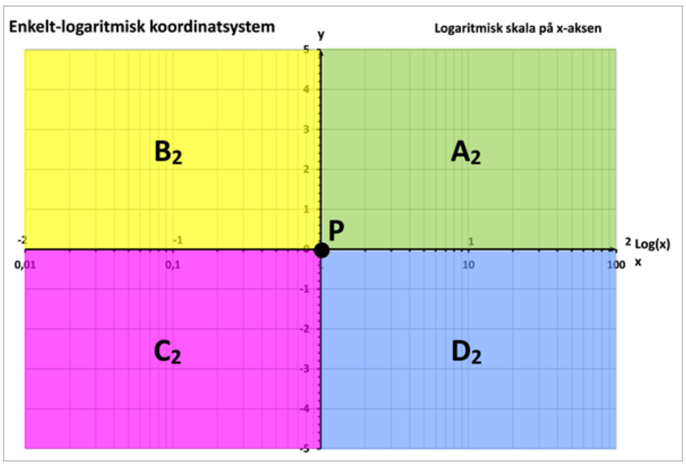
Vi bemærker igen, at logaritmen kun er defineret for positive parametre. Altså kan kun punkter med positiv x-værdi, dvs. 1. og 4. kvadrant i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem, spejles til punkter i dette enkelt-logaritmiske koordinatsystem.

Vi bemærker videre, at punktet P (1,0) i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem spejles over i Origo (0,0) i det enkelt-logaritmiske koordinatsystem, idet Log(x=1) = 0.

Hvis vi inddeler 1. og 4. kvadrant i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem i 4 områder (A_1, B_1, C_1, D_1) som vist øverst i figur 3, bliver disse spejlet over i de 4 kvadranter (A_2, B_2, C_2, D_2) i det enkelt-logaritmiske koordinatsystem, som vist nederst i figur 3:

(x.y)-koordinatsystem		Enkelt-logaritmisk koordinatsystem	
A_1:	x ≥ 1, y ≥ 0	A_2:	Log(x) ≥ 0, y ≥ 0
B_1:	0 ¡ x 1, y ≥ 0	B_2:	Log(x) 0, y ≥ 0
C_1:	0 ¡ x 1, y 0	C_2:	Log(x) 0, y 0
D_1:	x ≥ 1, y 0	D_2:	Log(x) ≥ 0, y 0





Figur 3 Spejling af punktområder i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem (øverst) til et enkelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på x-aksen (nederst)

Punkter på y-aksen i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem er ikke med i hverken B_1 eller C_1, da disse punkter (med x-værdien 0) ikke kan spejles til dette enkelt-logaritmiske koordinatsystem.

For en god ordens skyld bemærker vi, at logaritmen til meget små, positive x-værdier, der kommer uendeligt tæt på nul, er store negative tal. Vi formulerer det matematisk som $lim_{x \to 0^+} Log(x) = -\infty$.

9.4 Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

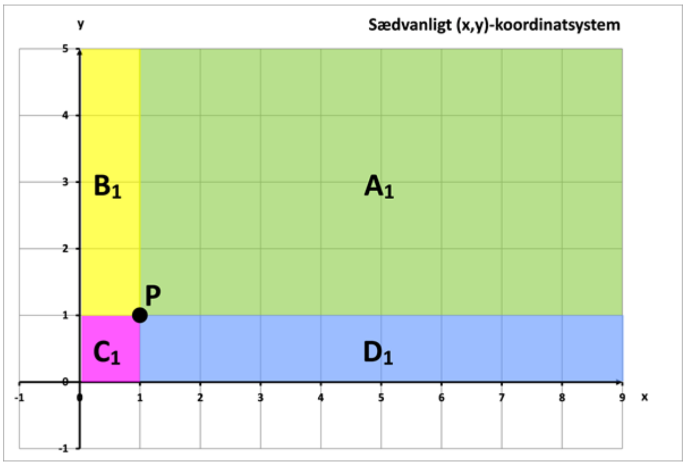
Efter at have set på de to typer enkeltlogaritmiske koordinatsystemer, kan vi analysere spejlingen af punktområder i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem til en ny position i det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem med logaritmisk skala på både x- og y-aksen.

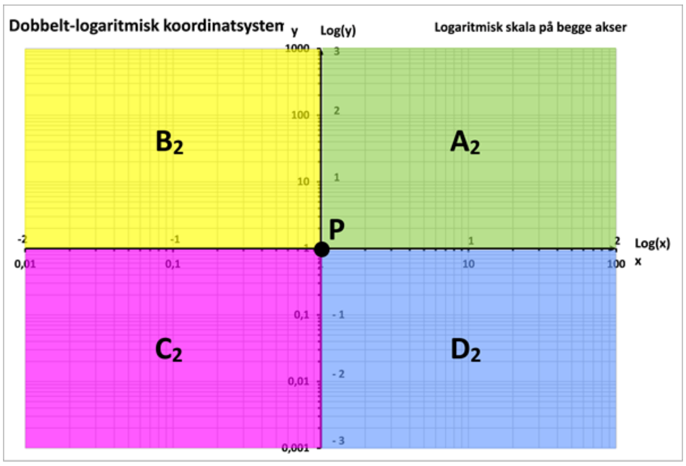
Idet logaritmen stadig kun er defineret for positive parametre, kan kun punkter med både positiv x-værdi og positiv y-værdi, dvs. 1. kvadrant i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem, spejles til punkter i det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem.

Vi bemærker videre, at punktet P (1,1) i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem spejles over i Origo (0,0) i det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem, idet både Log(x=1) = 0 og Log(y=1) = 0.

Hvis vi inddeler 1. kvadrant i det sædvanlige (x.y)-koordinatsystem i 4 områder (A_1, B_1, C_1, D_1) som vist øverst i figur 4, bliver disse spejlet over i de 4 kvadranter (A_2, B_2, C_2, D_2) i det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem, som vist nederst i figur 4:

(x.y)-koordinatsystem		Dobbelt-logaritmisk koordinatsystem	
A_1:	x ≥ 1, y ≥ 1	A_2:	Log(x) ≥ 0, Log(y) ≥
B_1:	0 ¡ x 1, y ≥ 1	B_2:	Log(x) 0, Log(y) ≥ 0
C_1:	0 ¡ x 1, 0 ¡ y 1	C_2:	Log(x) 0, Log(y) 0
D_1:	x ≥ 1, 0 ¡ y 1	D_2:	Log(x) ≥ 0, Log(y) 0





Figur 4 Spejling af punktområder i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem (øverst) til et dobbelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på begge akser (nederst)

Punkter på y-aksen i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem er ikke med i hverken B_1 eller C_1, og punkter på x-aksen i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem er ikke med i hverken C_1 eller D_1, da disse punkter (med hhv. x-værdien 0 og y-værdien 0) ikke kan spejles til det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem.

For en god ordens skyld bemærker vi, at logaritmen til meget små, men positive, såvel x-som y-værdier uendelig tæt på nul er store negative tal. Vi formulerer det matematisk som $lim_{x\to 0^+} Log(x) = -\infty$ og $lim_{y\to 0^+} Log(y) = -\infty$.

Anvendelse

Også i arbejdet med potensvækstmodeller kan vi i et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem med en lineær skala på y-aksen være tvunget til at vælge enten en skala, der er velegnet for aflæsning af funktionsværdien ved små x-værdier, eller en skala, der er velegnet for aflæsning af funktionsværdien ved større x-værdier. Her kan et dobbelt-logaritmisk koordinatsystem hjælpe os.

En potensvækstmodel har forskriften:

$f(x) = b \cdot x^a$, hvor $b > 0$ og $x > 0$

Hvis vi beregner logaritmen på begge sider af lighedstegnet, får vi ved brug af regnereglerne for logaritmer:

$Log(f(x)) = Log(b \cdot x^a) = Log(b) + Log(x^a)$ og dermed

$Log(f(x)) = Log(b) + a \cdot Log(x) = a \cdot Log(x) + Log(b)$

hvor $b > 0$ og $x > 0$.

Vi genkender højresiden som forskriften for en ret linje, hvor skæringen med y-aksen er Log(b) og hældningen er a. Vi kan altså konkludere, at hvis vi afbilder logaritmen til $f(x)$ som funktion af logaritmen til x, er resultatet en ret linie.

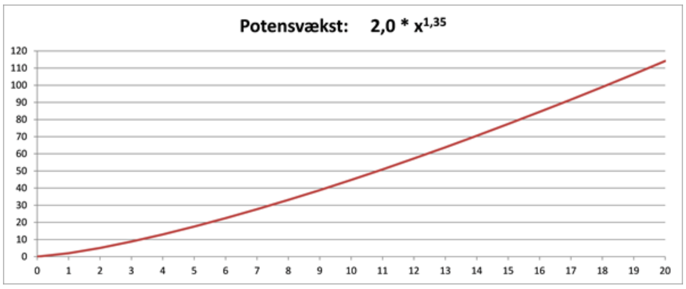
Og så er det jo netop det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem, hvor vi har en logaritmisk skala på både y-aksen og x-aksen, der kommer i spil.

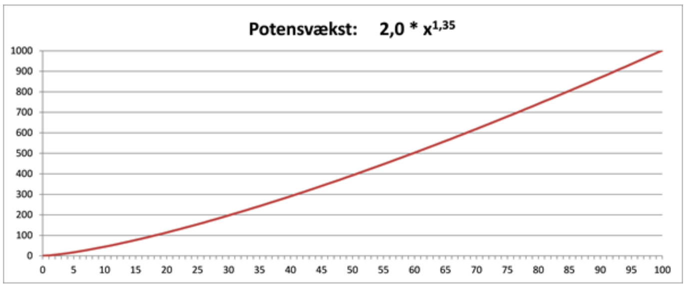
Eksempel

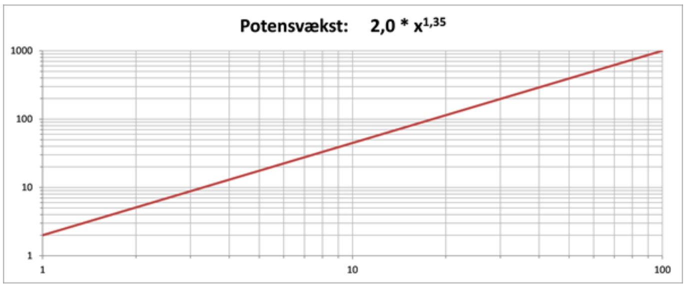
Vi vil afbilde potensvækstmodellen $f(x) = 2,0 \cdot x^{1,35}$, hvor $x \geq 0$.

Hvis vi vil kunne aflæse y-værdierne for x-værdier op til 100, kan vi afbilde funktionen i et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem med en y-akse gående fra 0 til 1000, som vist i det midterste diagram i figur 6. Men her er det mere end vanskeligt at aflæse y-værdierne for x-værdier under 20. Hvis vi med rimelig nøjagtighed vil kunne aflæse y-værdierne for x-værdier under 20, kan vi afbilde funktionen i et sædvanligt (x,y)-koordinatsystem med en y-akse gående fra 0 til 120, som vist i det øverste diagram i figur 6.

I det dobbelt-logaritmiske koordinatsystem nederst i figur 6 kan vi se, at funktionen som forventet afbildes som en ret linje, og vi kan med rimelig nøjagtighed aflæse y-værdierne i hele x-intervallet fra 0 til 100.





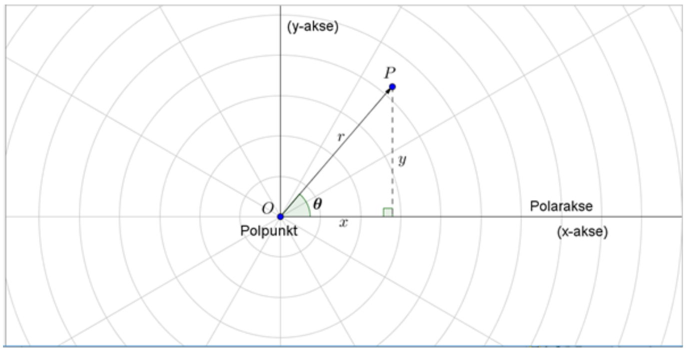


Figur 6 Potensvækstmodel vist i det sædvanlige (x,y)-koordinatsystem (øverst og i midten med forskellig skalering på akserne) og i et dobbelt-logaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på begge akser (nederst)

9.5 Polært koordinatsystem

Vi er vant til at arbejde i et retvinklet (x,y)-koordinatsystem - også kaldet et Cartesisk koordinatsystem - hvor punkter og vektorer beskrives ved den vandrette x-koordinat og den lodrette y-koordinat.

I nogle sammenhænge kan man med fordel istedet benytte et polært koordinatsystem, hvor punkter og vektorer beskrives med polære koordinater. Polære koordinater består dels af afstanden, angivet ved r, fra ***polpunktet*** (svarende til Origo i et (x,y)-koordinatsystem) og dels af vinklen, angivet ved det græske bogstav theta θ, med den vandrette ***polarakse*** (svarende til den positive x-akse i et (x,y)-koordinatsystem), se figur 1.



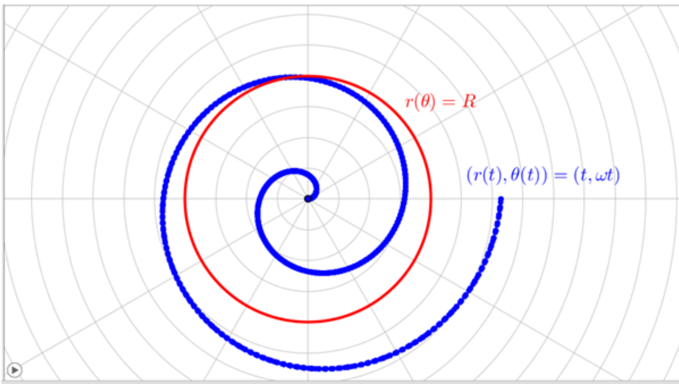
Figur 1 Polært koordinatsystem og sammenhæng med (x,y)-koordinatsystem

Et punkt P kan i et polært koordinatsystem beskrives ved stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ fra polpunktet O til punkt P, og sammenhængen mellem (r, θ)-koordinaterne og (x,y)-koordinaterne er:

Polære koordinater	(x,y)-koordinater
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = r \cdot \cos\theta$
$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$	$y = r \cdot \sin\theta$

I et polært koordinatsystem angives funktioner som $r(\theta)$, hvor vinklen, θ, er den uafhængige variabel, og afstanden, r, er den afhængige variabel.

Lad os se på et par eksempler, hvor polære koordinater med fordel kan benyttes, nemlig cirklen og en spiral, se figur 2.



Figur 2 Cirklen og en spiral i et polært koordinatsystem

Ligningen for cirklen med centrum i Origo og radius R kender vi i et (x,y)-koordinatsystem som: $x^2 + y^2 = R^2$. I et polært koordinatsystem bliver ligningen meget simplere, nemlig: $r(\theta) = R$, vist med rødt i figur 2. Uanset størrelsen af vinklen θ er afstanden fra polpunktet til cirkelperiferien lig med R.

Et eksempel på en spiral i et (x,y)-koordinatsystem er givet ved parameterfremstillingen: $(x(t), y(t)) = (t \cdot \cos\omega t, t \cdot \sin\omega t)$, hvor $\omega = \frac{2\pi}{T}$ er vinkelhastigheden og T er tiden for en 360° drejning. I et polært koordinatsystem bliver parameterfremstillingen noget simplere, nemlig: $(r(t), \theta(t)) = (t, \omega t)$, $0 \leq t < \infty$, som vist med blåt i figur 2 for intervallet $0 \leq t \leq 2 \cdot T$.

Der er dog også mange eksempler på funktioner, hvor det polære koordinatsystem ikke er hensigtsmæssigt at bruge. Tænk eksempelvis på den rette linje, der skærer y-aksen i b og har hældningen

a. I et (x,y)-koordinatsystem kan denne linje beskrives ved den simple funktion: $y = a \cdot x + b$. I et polært koordinatsystem bliver beskrivelsen noget mere kompliceret:

$$r(\theta) = |\frac{b}{\sin\theta \; - \; a \cdot \cos\theta}|$$

hvor | | angiver numerisk værdi og definitionsmængden for θ er: hvis $b > 0$: $\tan^{-1}(a) < \theta < \tan^{-1}(a) \; + \; \pi$ hvis $b < 0$: $\tan^{-1}(a) \; - \; \pi < \theta < \tan^{-1}(a)$

Ovenstående gælder kun, når $b \neq 0$. Hvis $b = 0$, går linjen gennem polpunktet og kan i polære koordinater beskrives som to halvlinier ved:

$\theta = \tan^{-1}(a)$ og $0 \leq r < \infty$ $\theta = \tan^{-1}(a) \; + \; \pi$ og $0 \leq r < \infty$

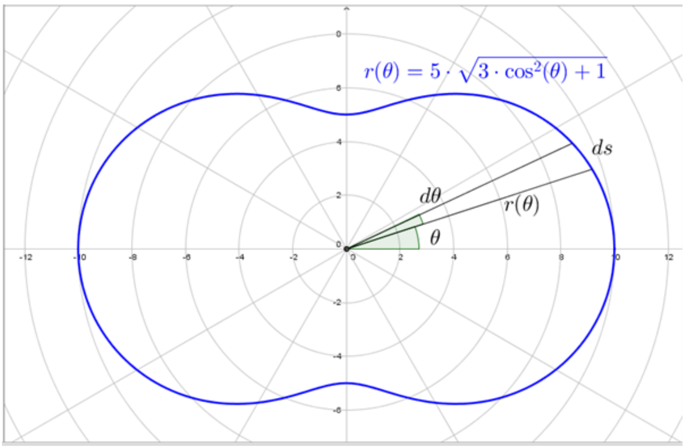
Når vi arbejder med funktioner givet ved polære koordinater, bliver integralregning forholdsvis simpelt at have med at gøre (ikke nødvendigvis udregning af integralet, men ihvertfald opstilling af integralet). Årsagen er, at infinitesimal-betragtningen med polære koordinater bliver en lille vinkeltilvækst, $d\theta$, til vinklen θ, og vi har dermed at gøre med enten en infinitesimal cirkelbue, når vi skal beregne længden af en kurve, eller et infinitesimalt cirkeludsnit, når vi skal beregne areal. Begge dele giver simple regneudtryk, hvilket fremgår af de følgende par eksempler.

Eksempel 1

En lukket vejstrækning, som skal bruges til et cykelløb, er givet ved den polære funktion:

$r(\theta) = 5 \cdot \sqrt{3 \cdot \cos^2(\theta) + 1}, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Enheden for $r(\theta)$ er km. Vejstrækningen er vist i figur 3.



Figur 3 Vejstrækning til et cykelløb

Bestem længden af et cykelløb, hvor vejstrækningen givet ved $r(\theta)$ gennemkøres 4 gange. Angiv længden i km med én decimals nøjagtighed.

I figur 3 betragter vi en lille vinkeltilvækst, $d\theta$, til vinklen θ. Bidraget fra dette vinkeludsnit til omkredsen og dermed til vejstrækningens længde er en cirkelbue, bidraget er proportionalt med $d\theta$ og kan beregnes som: $ds = r(\theta) \cdot d\theta$. Hele omkredsen finder vi ved at integrere over definitionsområdet for θ:

$$O = \int_{start}^{slut} ds = \int_{0}^{2\pi} 5 \cdot \sqrt{3 \cdot \cos^2(\theta) + 1} \cdot d\theta$$

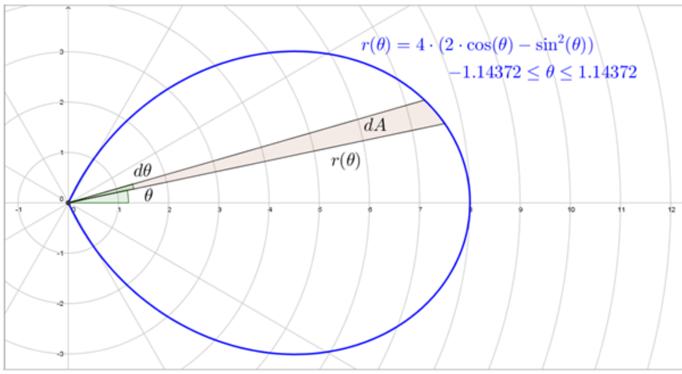
Dette integral udregnes i CAS og giver en omkreds på O = 48,442 km. Når vejstrækningen skal gennemkøres 4 gange, er løbets længde: $L = 4 \cdot O$ = 193,8 km.

Eksempel 2

Et smykkevedhæng i sølv har form som givet ved den polære funktion:

$r(\theta) = 4 \cdot (2 \cdot \cos(\theta) - \sin^2(\theta)), \quad -1,14372 \leq \theta \leq 1,14372$

Enheden for $r(\theta)$ er cm. Formen er vist i figur 4.



Figur 4 Formen på et smykkevedhæng

Bestem vægten af vedhænget, når vedhængets tykkelse, t, er 2 mm og sølvets massefylde, ρ, er 10 g/cm^3.

Vi skal bestemme rumfanget af vedhænget og starter derfor med at bestemme arealet af formen i figur 4. Vi betragter en lille vinkeltilvækst, $d\theta$, til vinklen θ. Bidraget fra dette vinkeludsnit til arealet er et cirkeludsnit, bidraget er proportionalt med $d\theta$ og kan beregnes som: $dA = \pi \cdot r(\theta)^2 \cdot (\frac{d\theta}{2\pi}) = \frac{1}{2} \cdot r(\theta)^2 \cdot d\theta$. Hele arealet finder vi ved at integrere over definitionsområdet for θ:

$$A = \int_{start}^{slut} dA = \int_{-1,14372}^{1,14372} \frac{1}{2} \cdot r(\theta)^2 \cdot d\theta = \int_{-1,14372}^{1,14372} \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (2 \cdot \cos(\theta) - \sin^2(\theta))^2 \cdot d\theta = 32 \cdot \int_{-1,14372}^{1,14372} (\cos^2(\theta) + \frac{1}{4} \cdot \sin^4(\theta) - \cos(\theta) \cdot \sin^2(\theta)) \cdot d\theta$$

Dette integral udregnes i CAS og giver et areal på $A = 11{,}5$ cm^2.

Rumfanget af vedhænget bestemmer vi ved at gange arealet med tykkelsen (i cm), og vægten af vedhænget bestemmer vi ved at gange rumfanget med massefylden:

$M = V \cdot \rho = A \cdot t \cdot \rho = 11,5 \cdot 0,2 \cdot 10 = 23$

Vedhængets vægt er altså 23 gram.

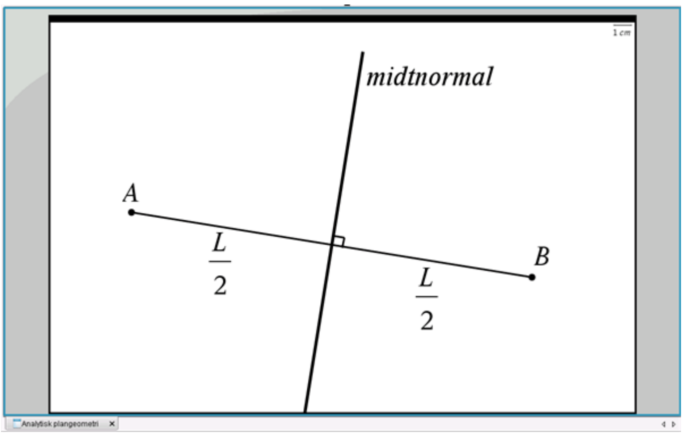
10 Analytisk plangeometri

Denne sektion behandler forskellige emner inden for analytisk plangeometri.

God fornøjelse!

10.1 Konstruktion af midtnormalen for et linjestykke

En midtnormal for et linjestykke (AB) er en linje, der står vinkelret på linjestykket og deler linjestykket på midten, dvs. i to lige store dele, se figur 1.

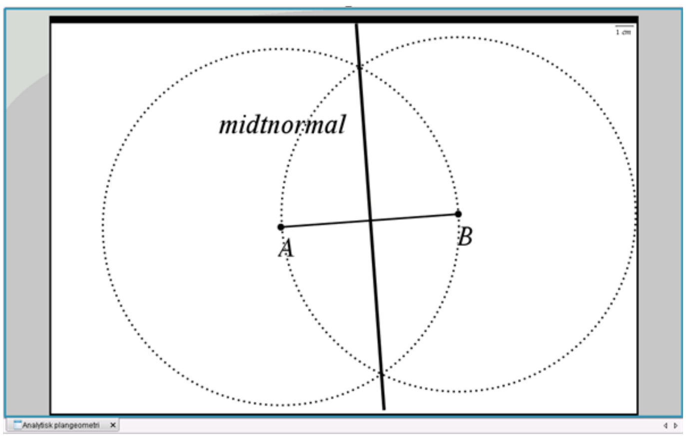


Figur 1 Midtnormalen for et linjestykke

Midtnormalen kan også opfattes som en symmetrilinje (spejlingsakse) for linjestykket. Derudfra kan vi udlede en vigtig egenskab ved midtnormalen: Ethvert punkt på midtnormalen ligger lige langt fra linjestykkets to endepunkter A og B.

For at kunne tegne midtnormalen har vi brug for at fastlægge to punkter på den - f.eks. et punkt over linjestykket og et punkt under linjestykket. Da punkter på midtnormalen har samme afstand til punkt A og punkt B, kan vi løse opgaven i følgende tre simple trin, se figur 2:

- tegn en cirkel med centrum i punkt A og radius AB (dvs. denne cirkel går gennem punkt B)
- tegn en cirkel med centrum i punkt B og radius AB (dvs. denne cirkel går gennem punkt A)
- tegn en linje gennem de to cirklers to skæringspunkter - denne linje er midtnormal for linjestykket AB.



Figur 2 Konstruktion af midtnormalen for et linjestykke

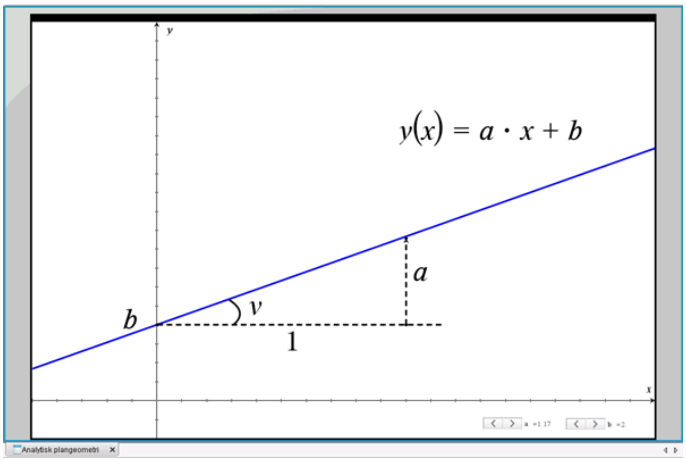
Bemærk: Cirklerne i de to første trin skal ikke nødvendigvis have radius AB. Du kan benytte en anden radius, men radius **skal** være den samme i begge cirkler, og radius **skal** være større end halvdelen af AB.

Når man konstruerer midtnormalen manuelt på papir med brug af en passer og en lineal, opnår man en hensigtsmæssig nøjagtighed ved at bruge AB som radius i cirklerne. Hvis man benytter en radius, der kun er lidt større end halvdelen af AB, vil en lille fejlplacering af passeren kunne resultere i en forholdsvis stor afvigelse set i forhold til, om man opnår en ret vinkel mellem midtnormalen og linjestykket.

Når man konstruerer midtnormalen med et IT-værktøj, har størrelsen af radius i cirklerne derimod ingen praktisk betydning for nøjagtigheden. Den skal bare være større end halvdelen af AB.

10.2 Stigningstal (hældnings-koefficient) for en ret linje

Forskriften for en ret linje er som bekendt $y(x) = ax + b$, hvor b angiver skæring med y-aksen og a angiver linjens stigningstal (hældningskoefficient) (se evt. her).



Figur: Stigningstal (hældningskoefficient) for en ret linje

Linjens stigningstal er defineret som "stigningen i y-værdi, når x-værdien vokser med 1". Hvis vi kender den vinkel (v), som den rette linje danner med en vandret linje, kan vi beregne stigningstallet:

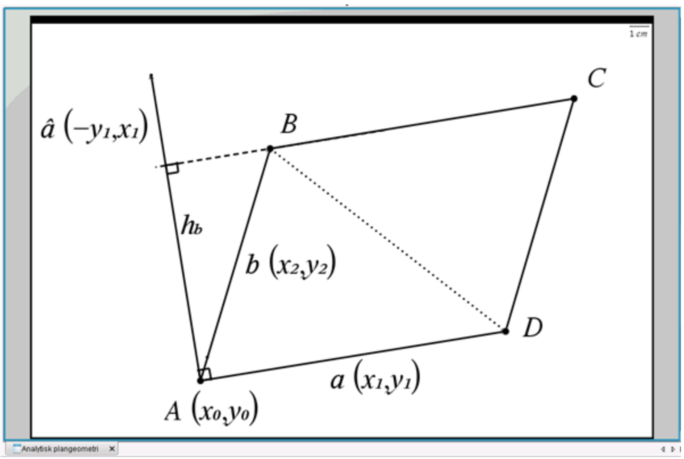
$a = \tan(v)$ og dermed er: $y(x) = \tan(v) \cdot x + b$

Her har vi udnyttet vores barnelærdom om de trigonometriske funktioner i en retvinklet trekant: "Tangens til en vinkel er lig med modstående katete (her a) divideret med hosliggende katete (her 1)".

	Vinkel	*Stigningstal*	*Forskrift*
	$0°$	$\tan(v) = 0$	$y = b$
Taleksempler:	$30°$	$\tan(v) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$	$y(x) = 0,577 \cdot x + b$
	$45°$	$\tan(v) = 1$	$y(x) = x + b$
	$60°$	$\tan(v) = \sqrt{3} = 1,732$	$y(x) = 1,732 \cdot x + b$

10.3 Areal af parallelogram/ trekanter udspændt af to vektorer

I et koordinatsystem har vi givet to vektorer $\overrightarrow{a}(x_1, y_1)$ og $\overrightarrow{b}(x_2, y_2)$. Dem afsætter vi med udgangspunkt i punkt $A(x_0, y_0)$, se figuren. Vektorerne udspænder et parallelogram $ABCD$, som er sammensat af to kongruente (dvs. identiske) trekanter ABD og CDB.



Figur Parallelogram/trekanter udspændt af to vektorer i planen

Vi er interesserede i at bestemme arealet af parallelogrammet $ABCD$ og af hver trekant. Vi kan se, at tværvektoren til vektor $\overrightarrow{a}(x_1, y_1)$ er givet ved $\overrightarrow{\hat{a}}(-y_1, x_1)$. Tværvektoren er også vist i figuren med afsæt i punkt A.

Af figuren ses det, at højden h_b i parallelogrammet er lig med længden af projektionen af vektor $\overrightarrow{b}$ på tværvektoren $\overrightarrow{\hat{a}}$. Vi bruger vores viden om vektorer i planen og sammenhængen mellem to vektorers prikprodukt og længden af den ene vektors projektion på den anden vektor:

$$h_b = \frac{|\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{\hat{a}}|}{|\overrightarrow{\hat{a}}|} = \frac{|x_2 \cdot (-y_1) + y_2 \cdot x_1|}{|\overrightarrow{\hat{a}}|} = \frac{|x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|}{|\overrightarrow{\hat{a}}|}$$

hvor $|\ldots|$ i tælleren indikerer numerisk værdi og $|\ldots|$ i nævneren indikerer længden af vektoren.

Idet $|\overrightarrow{\hat{a}}| = \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = |\overrightarrow{a}|$ og arealet af et parallelogram er produktet af sidelængden og højden får vi:

$$A_{ABCD} = |\overrightarrow{a}| \cdot h_b = |x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1| = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

hvor $det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ angiver determinanten af vektorerne $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$. Vi har flere skrivemåder for determinanten:

$$det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|.$$

Ud fra den midterste skrivemåde er huskereglen for beregning af determinanten: ”at gange på kryds og trække fra”.

Trekanterne ABD og CDB er kongruente og har derfor samme areal:

$$A_{ABD} = A_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|$$

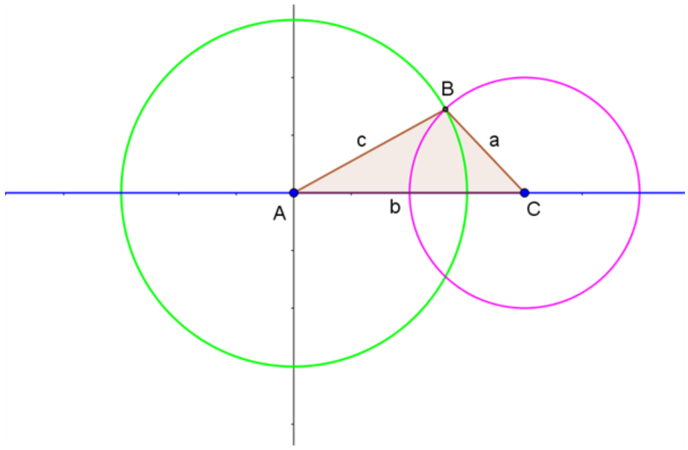
10.4 Konstruktion af trekanter

Metoden for konstruktion af en trekant afhænger af, hvilke sidelængder og vinkler, der er kendt. I denne introduktionsvideo gennemgås de forskellige scenarier:

Til hvert scenarie hører en separat videolektion.

Alle tre sidelængder i trekanten er kendt

Der er givet en trekant ABC, hvor vi kender alle tre sidelængder: a, b og c. For at fastlægge trekanten tager vi udgangspunkt i et koordinatsystem, hvor punkt A ligger i Origo, og punkt C ligger på x-aksen med x-koordinaten b, som vist med blåt i figur 1.



Figur 1 Konstruktion af trekant med alle tre sidelængder kendt

Geometrisk løsning

Vi kender sidelængden c, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på periferien af en cirkel med centrum i punkt A og radius c. Cirklen er tegnet med grønt i figur 1.

Vi kender også sidelængden a, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på periferien af en cirkel med centrum i punkt C og radius a. Cirklen er tegnet med lyserød i figur 1.

Vi kan dermed konstruere trekanten geometrisk, idet punkt B er skæringspunkt mellem de to cirkler. Der er egentlig to løsninger, idet punkt B også kan spejles i x-aksen og ligge under linjestykket AC, men det ses i figur 1, at dette vil give en trekant, der er kongruent med trekant ABC, så vi nøjes med at beskrive trekant ABC som løsningen.

Hvis summen af sidelængderne a og c er mindre end sidelængden b, vil de to cirkler ikke skære hinanden. Konklusionen bliver i dette tilfælde, at trekanten ikke kan konstrueres, og de opgivne sidelængder repræsenterer dermed ikke en trekant.

Analytisk løsning

Vi kan også fastlægge placeringen af punkt B analytisk. Den grønne cirkel i figur 1 har ligningen:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2 = c^2$$

Og den lyserøde cirkel i figur 1 har ligningen:

$$(x-b)^2 + (y-0)^2 = x^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + y^2 = a^2$$

Ud fra disse to ligninger kan vi bestemme koordinaterne til punkt $B\,(x_B, y_B)$, som opfylder begge ligninger. Hvis vi trækker de to venstresider fra hinanden, får vi:

$$x^2 + y^2 - (x^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + y^2) = c^2 - a^2$$

$$2 \cdot b \cdot x_B - b^2 = c^2 - a^2$$

Her kan vi isolere x_B og derefter benytte den øverste ligning til bestemmelse af y_B:

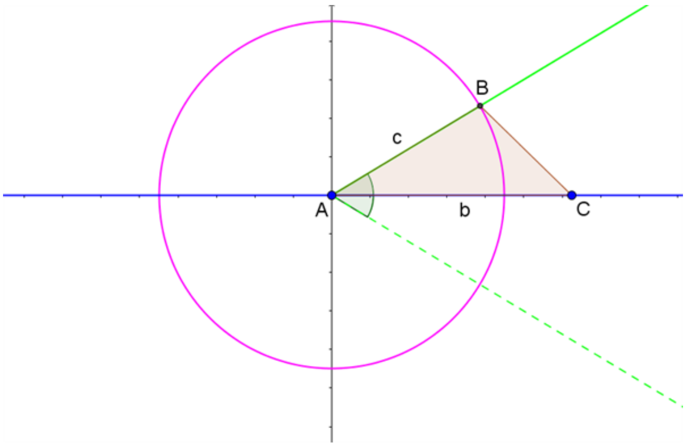
$x_B = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b}$ og $y_B = \sqrt{c^2 - x_b^2}$

I denne videolektion gennemgås begge løsningsmetoder.

Længden af to sider i trekanten og den mellemliggende vinkel er kendt

Der er givet en trekant ABC, hvor vi kender to sidelængder og den mellemliggende vinkel. I eksemplet her forudsætter vi, at vi kender sidelængderne b og c og den mellemliggende vinkel A. Tilsvarende fremgangsmåde kan benyttes, hvis det er andre sidelængder og deres mellemliggende vinkel, der er kendt.

For at fastlægge trekanten tager vi udgangspunkt i et koordinatsystem, hvor punkt A ligger i Origo, og punkt C ligger på x-aksen med x-koordinaten b, som vist med blåt i figur 2.



Figur 2 Konstruktion af trekant med længden af to sider og den mellemliggende vinkel kendt

Geometrisk løsning

Vi kender vinkel A, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på en halvlinje fra punkt A, der danner denne vinkel med x-aksen. Halvlinjen er tegnet fuldt optrukkent med grønt i figur 2.

Vi kender også sidelængden c, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på periferien af en cirkel med centrum i punkt A og radius c. Cirklen er tegnet med lyserød i figur 2.

Vi kan dermed konstruere trekanten geometrisk, idet punkt B er skæringspunkt mellem den fuldt optrukne halvlinje og cirklen. Der er egentlig to løsninger, idet punkt B også kan spejles i x-aksen og ligge under linjestykket AC. Men det ses i figur 2, jf. den stiplede halvlinje, at dette vil give en trekant, der er kongruent med trekant ABC, så vi nøjes med at beskrive trekant ABC som løsningen.

Uanset størrelsesforholdet mellem sidelængderne b og c og vinkel A vil der altid være en løsning til placeringen af punkt B, og trekanten ABC vil altid kunne konstrueres.

Analytisk løsning

Vi kan også fastlægge placeringen af punkt B analytisk. Den grønne, fuldt optrukne halvlinje i figur 2 har parameterfremstillingen:

$(x, y) = (t \cdot \cos(A), t \cdot \sin(A)), t \geq 0$

Den lyserøde cirkel i figur 2 har ligningen:

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2 = c^2$

Ud fra disse to ligninger kan vi bestemme koordinaterne til punkt $B\,(x_B, y_B)$, som opfylder begge ligninger. Vi indsætter parameterfremstillingen for halvlinjen i cirklens ligning:

$t^2 \cdot \cos^2(A) + t^2 \cdot \sin^2(A) = t^2 \cdot (\cos^2(A) + \sin^2(A)) = \; c^2$

Her udnytter vi, at $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$ og får, at $t^2 = c^2$ eller $t = c$, således at:

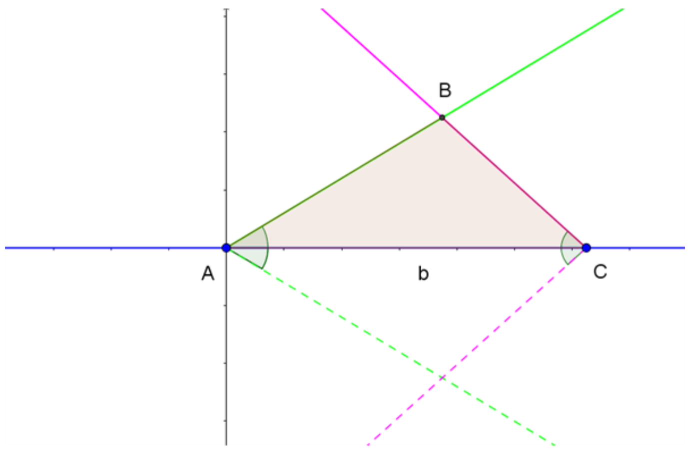
$(x_B, y_B) = (c \cdot \cos(A), c \cdot \sin(A))$

I denne videolektion gennemgås begge løsningsmetoder:

To vinkler i trekanten og længden af den mellemliggende side er kendt

Der er givet en trekant ABC, hvor vi kender to vinkler og den mellemliggende side. I eksemplet her forudsætter vi, at vi kender vinklerne A og C og sidelængden b. Tilsvarende fremgangsmåde kan benyttes, hvis det er andre vinkler og/eller sidelængder, der er kendt.

For at fastlægge trekanten tager vi udgangspunkt i et koordinatsystem, hvor punkt A ligger i Origo, og punkt C ligger på x-aksen med x-koordinaten b, som vist med blåt i figur 3.



Figur 3 Konstruktion af trekant med to vinkler og den mellemliggende side kendt

Geometrisk løsning

Vi kender vinkel A, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på en halvlinje fra punkt A, der danner denne vinkel med x-aksen. Halvlinjen er tegnet fuldt optrukkent med grønt i figur 3.

Vi kender også vinkel C, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på en halvlinje fra punkt C, der danner denne vinkel med x-aksen. Halvlinjen er tegnet fuldt optrukkent med lyserød i figur 3.

Vi kan dermed konstruere trekanten geometrisk, idet punkt B er skæringspunkt mellem de to fuldt optrukne halvlinjer. Der er egentlig to løsninger, idet punkt B også kan spejles i x-aksen og ligge under linjestykket AC. Men det ses i figur 3, jf. de stiplede halvlinjer, at dette vil give en trekant, der er kongruent med trekant ABC, så vi nøjes med at beskrive trekant ABC som løsningen.

Hvis summen af vinkel A og vinkel C er 180°eller mere, vil de to halvlinjer ikke skære hinanden, og konklusionen bliver i så fald, at trekanten ikke kan konstrueres, og den opgivne sidelængde sammen med de opgivne vinkler repræsenterer dermed ikke en trekant. Det ville vi også kunne konkludere alene ud fra reglen om vinkelsummen i en trekant.

Analytisk løsning

Vi kan også fastlægge placeringen af punkt B analytisk. Den fuldt optrukne grønne halvlinje i figur 3 har parameterfremstillingen:

$(x, y) = (t_1 \cdot \cos(A), t_1 \cdot \sin(A)), t_1 \geq 0$

Den fuldt optrukne lyserøde halvlinje i figur 3 har parameterfremstillingen:

$(x, y) = (b - t_2 \cdot \cos(C), t_2 \cdot \sin(C)), t_2 \geq 0$

Ud fra disse to ligninger kan vi bestemme koordinaterne til punkt B (x_B, y_B), som opfylder begge ligninger. Vi starter med y-koordinaten:

$t_1 \cdot \sin(A) = t_2 \cdot \sin(C))$ og dermed: $t_2 = t_1 \cdot \dfrac{\sin(A)}{\sin(C)}$

Vi indsætter dette i x-koordinaten:

$t_1 \cdot \cos(A) = b - t_1 \cdot \dfrac{\sin(A)}{\sin(C)} \cdot \cos(C)$ og dermed:

$$t_1 = \frac{b}{\cos(A) + \frac{\sin(A) \cdot \cos(C)}{\sin(C)}} = \frac{b \cdot \sin(C)}{\cos(A) \cdot \sin(C) + \sin(A) \cdot \cos(C)}$$

Her har vi sat nævneren på fællesnævner og ganget nævneren's nævner op i tælleren (vi dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte).

Vi bestemmer herefter t_2 og koordinaterne til punkt B:

$$t_2 = \frac{b \cdot \sin(A)}{\cos(A) \cdot \sin(C) + \sin(A) \cdot \cos(C)}$$

$$(x_B, y_B) = (t_1 \cdot \cos(A), t_1 \cdot \sin(A))$$

$$= \left(\frac{b \cdot \sin(C) \cdot \cos(A)}{\cos(A) \cdot \sin(C) + \sin(A) \cdot \cos(C)}, \frac{b \cdot \sin(C) \cdot \sin(A)}{\cos(A) \cdot \sin(C) + \sin(A) \cdot \cos(C)}\right)$$

I denne videolektion gennemgås begge løsningsmetoder.

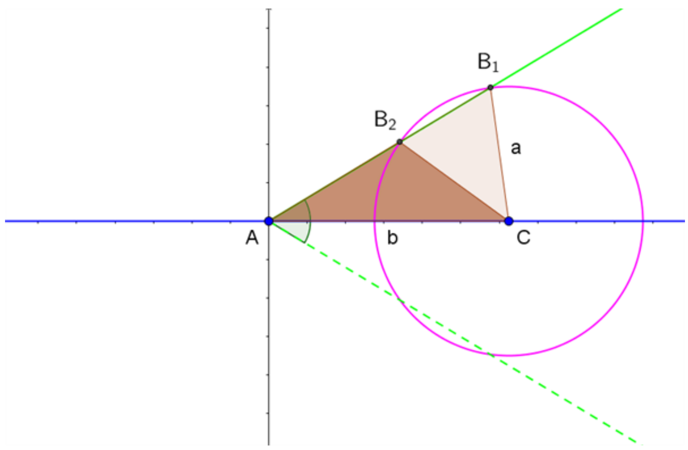
Længden af en side, den modstående vinkel samt yderligere en vinkel i trekanten er kendt

Der er givet en trekant ABC, hvor vi kender en sidelængde, den modstående vinkel og yderligere en vinkel. Vi benytter reglen om vinkelsummen i en trekant til at beregne den tredje vinkel som 180°minus summen af de to kendte vinkler. Herefter kan vi benytte fremgangsmåden i forrige afsnit til at fastlægge/konstruere trekanten, idet vi nu kender vinklen i begge ender af den kendte sidelængde.

Længden af en side, den modstående vinkel samt yderligere en sidelængde i trekanten er kendt

Der er givet en trekant ABC, hvor vi kender en sidelængde, den modstående vinkel og yderligere en sidelængde. I eksemplet her forudsætter vi, at vi kender vinkel A og sidelængderne a og b. Tilsvarende fremgangsmåde kan benyttes, hvis det er en anden vinkel og/eller andre sidelængder, der er kendte.

For at fastlægge trekanten tager vi udgangspunkt i et koordinatsystem, hvor punkt A ligger i Origo, og punkt C ligger på x-aksen med x-koordinaten b, som vist med blåt i figur 4.



Figur 4 Konstruktion af trekant med længden af en side, den modstående vinkel samt yderligere en sidelængde kendt

Geometrisk løsning

Vi kender vinkel A, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på en halvlinje fra punkt A, der danner denne vinkel med x-aksen. Halvlinjen er tegnet fuldt optrukkent med grønt i figur 4. (Vi forudsætter i første omgang, at vinkel A er spids og at $a < b$).

Vi kender også sidelængden a, og dermed ved vi, at punkt B må ligge på periferien af en cirkel med centrum i punkt C og radius a. Denne cirkel er tegnet med lyserød i figur 4.

Vi kan dermed konstruere trekanten geometrisk, idet punkt B er skæringspunkt mellem den fuldt optrukne halvlinje og cirklen. Skæringspunkterne giver her to forskellige løsninger til trekanten, henholdsvis trekant AB_1C, hvori vinkel B er spids, og trekant AB_2C, hvori vinkel B er stump. Der er egentlig fire løsninger, idet punkt B også kan spejles i x-aksen og ligge under linjestykket AC. Men det ses i figur 4, jf. den stiplede halvlinje, at dette vil give to trekanter, der er kongruente med trekanterne AB_1C og AB_2C, så vi nøjes med at beskrive disse to trekanter som løsningen.

I et særligt tilfælde er punkt B_1 og punkt B_2 sammenfaldende, og de to løsninger smelter sammen til én og samme trekant. Her er halvlinjen tangent til cirklen, hvilket opnås, når $\sin(A) = \frac{a}{b}$. Løsningen er en retvinklet trekant, hvori vinkel B er den rette vinkel.

Hvis $\sin(A) > \frac{a}{b}$, vil halvlinjen og cirklen ikke skære hinanden. Konklusionen bliver i dette tilfælde, at trekanten ikke kan konstrueres, og de opgivne sidelængder sammen med den opgivne vinkel repræsenterer dermed ikke en trekant.

Hvis vinkel A er spids og $a \geq b$, er der kun ét skæringspunkt mellem halvlinjen og cirklen (svarende til punkt B_1) og dermed kun én trekant AB_1C som løsning, hvori vinkel B er spids.

Hvis vinkel A er ret eller stump, vil halvlinjen i punkt A med retning mod punkt B enten være lodret eller være rettet mod venstre i figur 4. Hvis $a > b$, ses der i dette tilfælde kun at være ét skæringspunkt mellem halvlinjen og cirklen (svarende til punkt B_1) og dermed kun én trekant AB_1C som løsning.

Hvis vinkel A er ret eller stump og $a \leq b$, vil halvlinjen og cirklen ikke skære hinanden, og konklusionen bliver i så fald, at trekanten ikke kan konstrueres, og de opgivne sidelængder sammen med den opgivne vinkel repræsenterer dermed ikke en trekant.

Analytisk løsning

Vi kan også fastlægge placeringen af punkt B analytisk. Den fuldt optrukne grønne halvlinje i figur 4 har parameterfremstillingen:

$(x, y) = (t_1 \cdot \cos(A), t_1 \cdot \sin(A)), t_1 \geq 0$

Den lyserøde cirkel i figur 4 har ligningen:

$(x - b)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + y^2 = a^2$

Ud fra disse to ligninger kan vi bestemme koordinaterne til punkt $B\ (x_B, y_B)$, som opfylder begge ligninger. Vi indsætter parameterfremstillingen for halvlinjen i cirklens ligning:

$t_1^2 \cdot \cos^2(A) + b^2 - 2 \cdot b \cdot t_1 \cdot \cos(A) + t_1^2 \cdot \sin^2(A) = a^2$

Dette giver en andengradsligning i t_1, og vi udnytter, at $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$:

$t_1^2 - 2 \cdot b \cdot \cos(A) \cdot t_1 + (b^2 - a^2) = 0$

Vi beregner diskriminanten, udnytter igen $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$ og en kvadratsætning:

$$d = (-2 \cdot b \cdot \cos(A))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 - a^2) = 4 \cdot b^2 \cdot (\cos^2(A) - 1 + \frac{a^2}{b^2})$$

$$= 4 \cdot b^2 \cdot (\frac{a^2}{b^2} - \sin^2(A)) = 4 \cdot b^2 \cdot (\frac{a}{b} + \sin(A)) \cdot (\frac{a}{b} - \sin(A))$$

Andengradsligningens løsning(er) er:

$$t_1 = \frac{2 \cdot b \cdot \cos(A) \pm \sqrt{4 \cdot b^2 \cdot (\frac{a}{b} + \sin(A)) \cdot (\frac{a}{b} - \sin(A))}}{2 \cdot 1}$$

$$= b \cdot \left\{ \cos(A) \pm \sqrt{(\frac{a}{b} + \sin(A)) \cdot (\frac{a}{b} - \sin(A))} \right\}$$

Og:

$(x_B, y_B) = (t_1 \cdot \cos(A), t_1 \cdot \sin(A))$

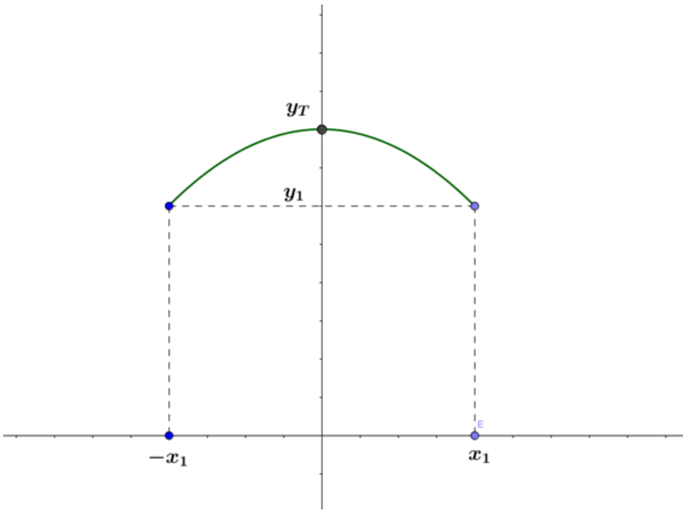
Fortegnet for udtrykket under kvadratrodstegnet til bestemmelse af t_1 sammen med betingelsen, at kun positive værdier af t_1 kan bruges, afgør antallet af løsninger til placeringen af punkt B:

- hvis $a < b$ og $\cos(A) > 0$ svarende til, at vinkel A er spids:
  - hvis $\sin(A) < \frac{a}{b}$ er der to løsninger til placeringen af punkt B
  - hvis $\sin(A) = \frac{a}{b}$ er der kun én løsning til placeringen af punkt B
  - hvis $\sin(A) > \frac{a}{b}$ er der ingen løsning til placeringen af punkt B
- hvis $a = b$ og $\cos(A) > 0$ svarende til, at vinkel A er spids, er der kun én løsning til placeringen af punkt B
- hvis $a \leq b$ og $\cos(A) \leq 0$ svarende til, at vinkel A er ret eller stump, er der ingen løsning til placeringen af punkt B
- hvis $a > b$ er der kun én løsning til placeringen af punkt B, uanset om vinkel A er spids, ret eller stump

I denne videolektion gennemgås begge løsningsmetoder.

10.5 Bestem forskriften for et andengradspolynomium ud fra toppunktet og to punkter på grafen

Parablens toppunkt er på y-aksen i y_T, og vi får derudover oplyst y-værdien, y_1, i to punkter beliggende symmetrisk omkring toppunktet, i hhv. $+x_1$ og $-x_1$, se figur 1.



Figur 1 Parabel med toppunkt på y-aksen og to symmetriske punkter kendt

Vi tager udgangspunkt i den generelle form for forskriften for et andengradspolynomium: $y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$:

- vi ved, at tallet c i forskriften angiver skæring med y-aksen - så vi kan direkte på grafen aflæse tallet $c = y_T$
- vi ved, at x-koordinaten for parablens toppunkt er givet ved: $x_T = \frac{-b}{2a}$. Da toppunktet ligger på y-aksen (hvor x-koordinaten er 0), kan vi konkludere, at tallet $b = 0$
- vi kan heraf udlede: $y(x_1) = y(-x_1) = a \cdot {x_1}^2 + 0 \cdot x_1 + c = a \cdot {x_1}^2 + y_T = y_1$, som giver os en ligning til bestemmelse af a:

$$a = \frac{y_1 - y_T}{x_1^2}$$

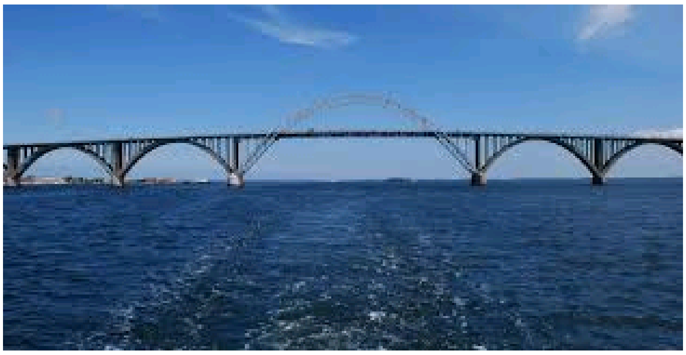
- og forskriften for andengradspolynomiet er dermed:

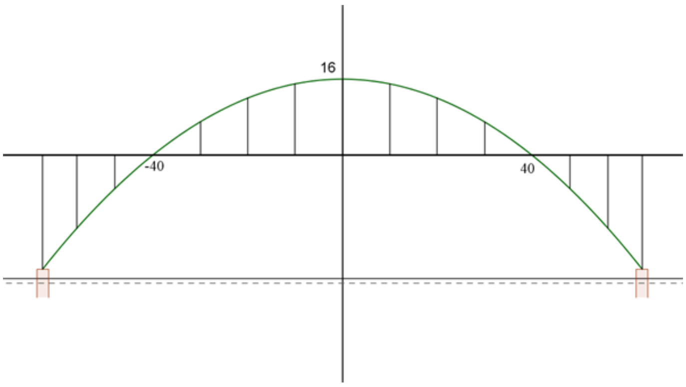
$$y(x) = \frac{y_1 - y_T}{x_1^2} \cdot x^2 + y_T$$

Hvis $y_1 > y_T$ er parablen glad, og hvis $y_T > y_1$ er parablen sur.

Eksempel

For en bro, der til forveksling ligner Dronning Alexandrines Bro (også kaldet Mønbroen, se foto), er i figur 2 vist et tværsnit af gennemsejlingsfaget.





Figur 2 Tværsnit af gennemsejlingsfag

Koordinatsystemets x-akse flugter med kørebanens underside, og buen er symmetrisk omkring koordinatsystemets y-akse.

Buen kan beskrives ved et andengradspolynomium. Buens toppunkt har y-værdien 16 m, og buen skærer x-aksen ved hhv. +40 m og - 40 m.

a) Bestem en forskrift for buen.

Vi aflæser af figur 2, at $y_T = 16$ m, $y_1 = 0$ m og $x_1 = 40$ m. Dermed er forskriften for buen: $y = \frac{-16}{40^2} \cdot x^2 + 16 = -0,01 \cdot x^2 + 16$

Det oplyses, at gennemsejlingshøjden (forstået som afstanden fra vandoverfladen ved normal vandstand til undersiden af kørebanen) er 26 m, og at oversiden af buens fundamenter er 2 m over vandoverfladen ved normal vandstand.

b) Bestem buens spændvidde, dvs. afstanden mellem buens understøt- ningspunkter på de to fundamenter (i meter) afrundet til én decimal.

Vi beregner y-værdien ved understøtningspunkterne: $y_u = -26 + 2 = -24$ m. Dette indsættes i forskriften, der løses mht. x: $-0,01 \cdot x_u^2 + 16 = -24$, hvilket giver: $x_u = \sqrt{4000} = 63,25$ m, og buens spændvidde er derfor $2 \cdot 63,25$ m $= 126,5$ m.

11 Vektorer i planen

Denne sektion er en udvidelse til afsnittet Vektorer i 2D. I denne sektion kan du lære mere om fx enhedsvektorer, vektorers komposanter, trekanters tyngdepunkt og meget andet. Alle kapitler indeholder et industrieksempel, hvor du kan se, hvordan formlerne kan anvendes, fx i forbindelse med konstruktion af en bro, retningsskifte for et fly, kørsel i gaffeltruck og meget andet.

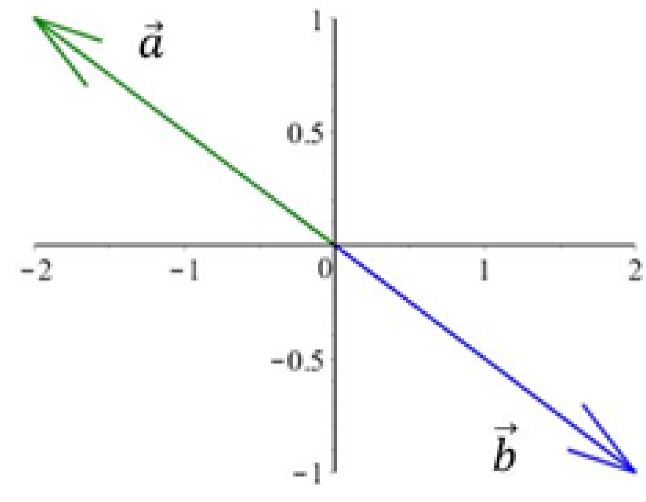
God fornøjelse!

11.1 Ligevægt (lige store modsatrettede vektorer)

Ligevægt med 2 vektorer:

Vi kan kigge på to vektorer, som er lige store og modsatrettede. Vi kan se på et eksempel, hvor

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad og \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Hvis vi addere disse to vektorer

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

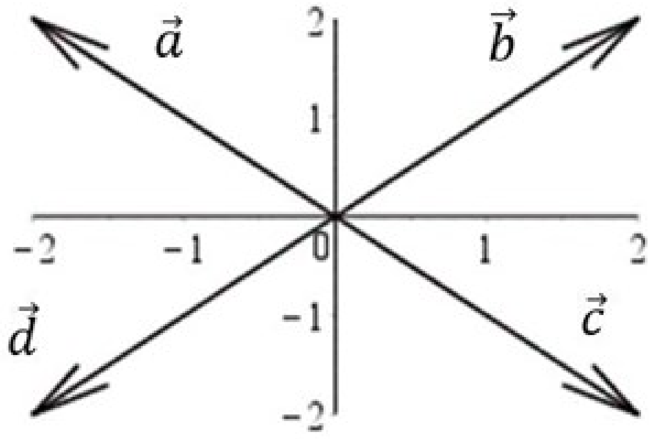
får vi, at summen af de vektorer er lig nul-vektoren. Generelt kan vi sige, at for lige store modsatrettede vektorer gælder, at:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

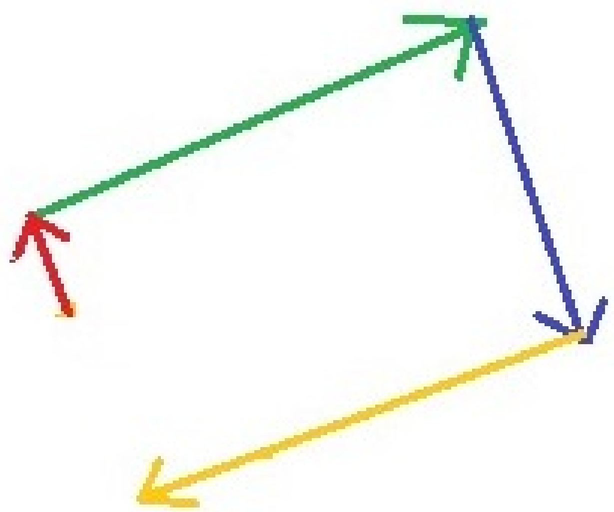
Vi siger, at vi har **ligevægt**, når vi har lige store modsatrettede vektorer.

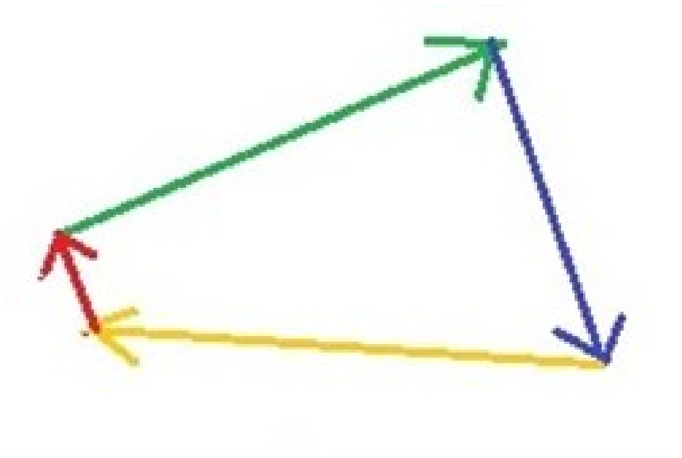
Ligevægt for et vilkårlig antal vektorer: Vi har her kun betragtet et tilfælde med 2 vektorer, men dette gælder selvfølgelig også for et vilkårligt antal vektorer. Her er det illustreret med 4 vektorer:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Visuel måde at se ligevægt: En visuel måde at vide, om et system er i ligevægt, er ved at tjekke om vektorerne danner en lukket struktur. Dvs. vi kan nu kigge på 2 eksempler og se visuelt om systemet er i ligevægt:



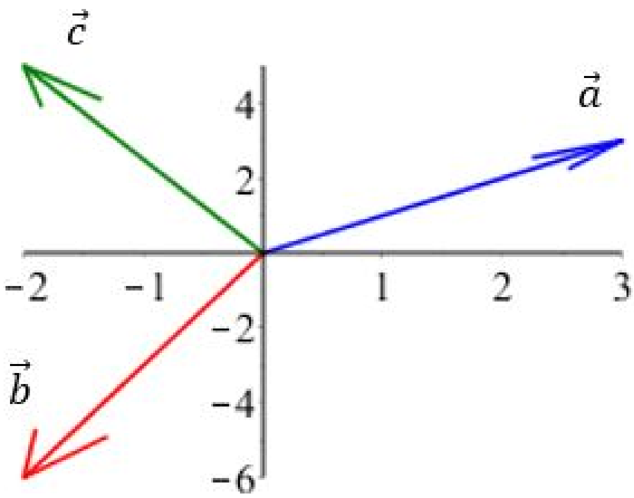


Ikke i ligevægt! I ligevægt!

Eks. 1 - finde en vektor for at skabe ligevægt:

Vi har vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \ og \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



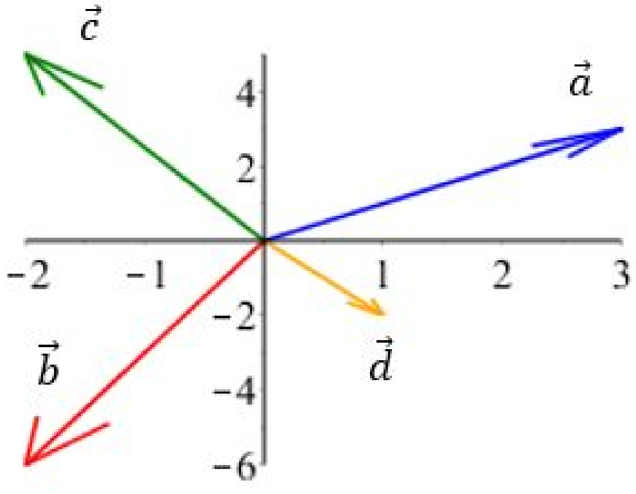
Hvilken vektor d vil skabe ligevægt i systemet?

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2+2 \\ -3+6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

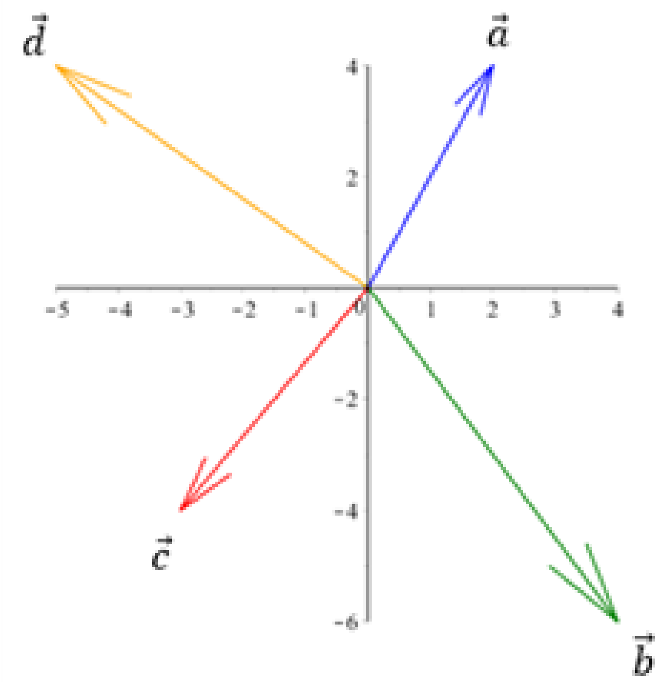
Vi kan nu indtegne vektor d, som skaber ligevægt i systemet.



Eks. 2 - er systemet i ligevægt?

Vi har fået givet vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \;,\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \;,\; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



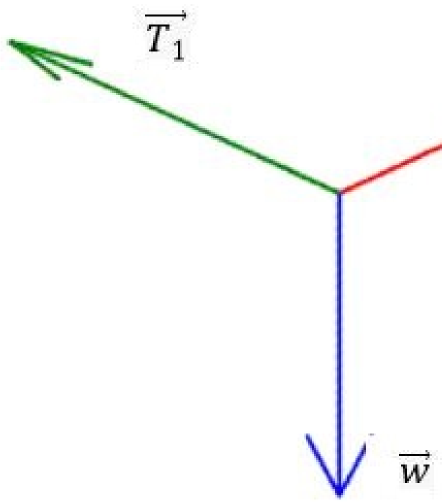
Vi kan udregne ved brug af vores formler, om der er ligevægt i systemet:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da det ikke giver en nulmatrice ved vi, at systemet IKKE er i ligevægt.

Eks. 3 - bringe et system i ligevægt:

Vi hænger et maleri op i to snore på væggen i 45 graders vinkler. Tyngdekraften w har størrelsen 20 N. Vi ønsker ligevægt, så billedet hænger lige og stille,



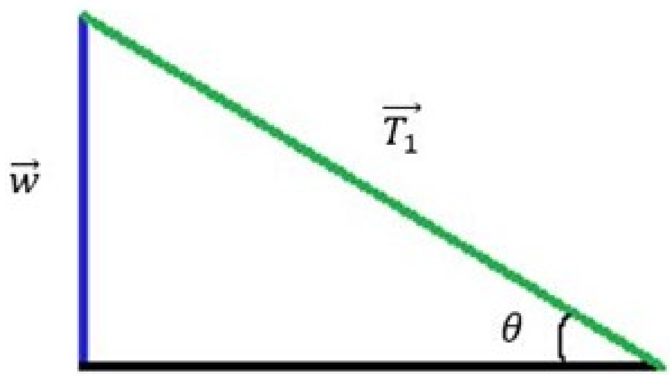
dvs.

$$\overrightarrow{w} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi får oplyst, at tyngdekraften w har størrelsen

$$|\overrightarrow{w}| = 20N = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} N$$

og at vinklen mellem spændingskrafterne T_1 og T_2 og tyngdekraften er 45 grader. Spændingskrafter er de krafter, som påvirker maleriet, fordi der er en spænding i snorene, som maleriet hænger i. Vi kan benytte viden om retvinklede trekanter for at finde de resterende krafter.



$$sin(\theta) = \frac{modstående}{hypotenusen} = \frac{\frac{|\overrightarrow{w}|}{2}}{\left|\overrightarrow{T_1}\right|}$$

$$\rightarrow \sin(45) = \frac{\frac{20N}{2}}{\left|\overrightarrow{T_1}\right|}$$

$$\rightarrow \left|\overrightarrow{T_1}\right| = \frac{10N}{sin(45)} = 14.14N$$

Vi ved at de to spændingskrafter hiver i hver sin retning, dvs. de er modsatrettede og skal være lige store, da der ellers ikke vil være ligevægt i systemet. Derfor er

$$\left|\overrightarrow{T_1}\right| = \left|\overrightarrow{T_2}\right| = 14.14N$$

Vi har nu alle længderne af vektorerne, så nu skal selve vektorerne findes for de to "spændingskrafter". Y-komponenten for begge spændingskrafter er halvdelen af tyngdekraftens y-komponent, da de har samme størrelse i y-retningen, dvs.

$$\overrightarrow{T_{y_1}} + \overrightarrow{T_{y_2}} + \overrightarrow{w_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{T_{y_1}} = \overrightarrow{T_{y_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Nu skal x-komponenten udregnes. Vi ved at de to spændingskrafter hiver i hver deres retning, dvs. de er modsatrettede og skal være lige store, da der ellers ikke vil være ligevægt i systemet. Vi udregner først størrelsen af de to x-komponenter:

$$\left|\overrightarrow{T_x}\right| = \left|\overrightarrow{T}\right| \cdot \cos(\theta) \implies \left|\overrightarrow{T_x}\right| = 14.14N \cdot \cos(45) = 10N$$

Dvs. vi ved, at de skal have størrelsen 10N i hver deres retning:

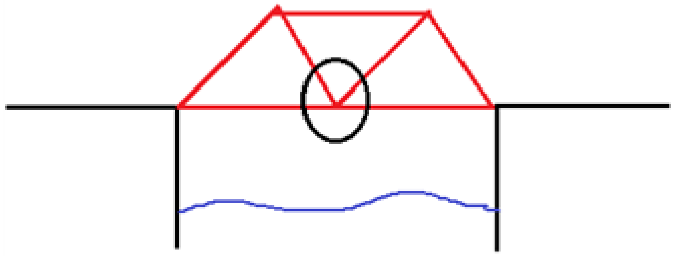
$$\overrightarrow{T_{x_1}} + \overrightarrow{T_{x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{T_{x_1}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} N \;\; og \;\; \overrightarrow{T_{x_2}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

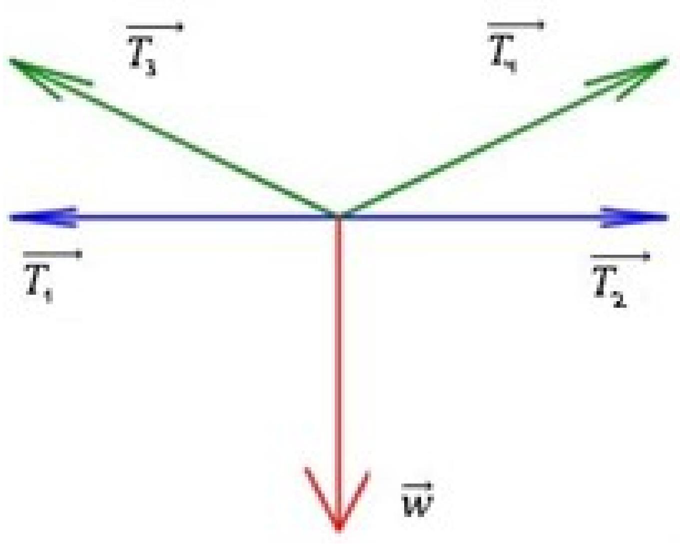
Dvs. vi har komponenterne for de to spændingsvektorer nu. Vi kan derfor tjekke om der er ligevægt i systemet

$$\overrightarrow{w} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Industrieksempel - Ligevægt i en bro

Vi fokuserer på en bestemt del af broen, som bliver påvirket af 5 forskellige krafter, som vist på figuren. Her er størrelsen af T_1 lig T_2 og størrelsen af T_3 er lig T_4 .





Vi får oplyst, at tyngdekraften w har størrelsen 1000N , og at de horisontale krafter T_1 og T_2 har størrelsen 200N. Desuden får vi at vide, at vinklen mellem T_1 og T_3 er 45 grader, og det samme med T_2 og T_4 .

Vi skal udregne størrelserne og værdierne af krafterne, så systemet er i ligevægt, dvs. vi ønsker en situation, hvor

$$\overrightarrow{w} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De to krafter, som kun virker i det vandrette plan, T_1 og T_2, har lige stor størrelse, så de skaber ligevægt med hinanden.

$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu kigge på de resterende 3 krafter, som skal give ligevægt.

$$\overrightarrow{w} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nu kan vi se tilbage på eksemplet med maleriet (eks. 3) Det er samme situation (3 vektorer, hvor 2 er lige store, mens at den sidste er en tyngdekraft med kun y-komponent), og vi skal derfor bruge samme fremgangsmåde (evt. se eks. 3)

$$sin(\theta) = \frac{\frac{|\overrightarrow{w}|}{2}}{\left|\overrightarrow{T_3}\right|}$$

$$\implies \sin(45) = \frac{\frac{1000N}{2}}{\left|\overrightarrow{T_3}\right|}$$

$$\implies \left|\overrightarrow{T_3}\right| = \left|\overrightarrow{T_4}\right| = \frac{500N}{sin(45)} = 707N$$

Ligesom i eks. 3, så er T_3 og T_4 halvdelen af tyngdekraftens størrelse:

$$\overrightarrow{T_{y_3}} + \overrightarrow{T_{y_4}} + \overrightarrow{w_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{T_{y_3}} = \overrightarrow{T_{y_4}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \end{pmatrix} N$$

Nu skal x-komponenterne udregnes for T_3 og T_4:

$$\left|\overrightarrow{T_{x_3}}\right| = \left|\overrightarrow{T_{x_4}}\right| = \left|\overrightarrow{T_3}\right| \cdot \cos(\theta) \to \left|\overrightarrow{T_{x_3}}\right| = 707N \cdot \cos(45) = 500N$$

Dvs. vi har et system i ligevægt (mellem de 3 krafter), når

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix} N$$

$$\overrightarrow{T_3} = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} N$$

$$\overrightarrow{T_4} = \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \end{pmatrix} N$$

$$\implies \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu se, at hele systemet er i ligevægt:

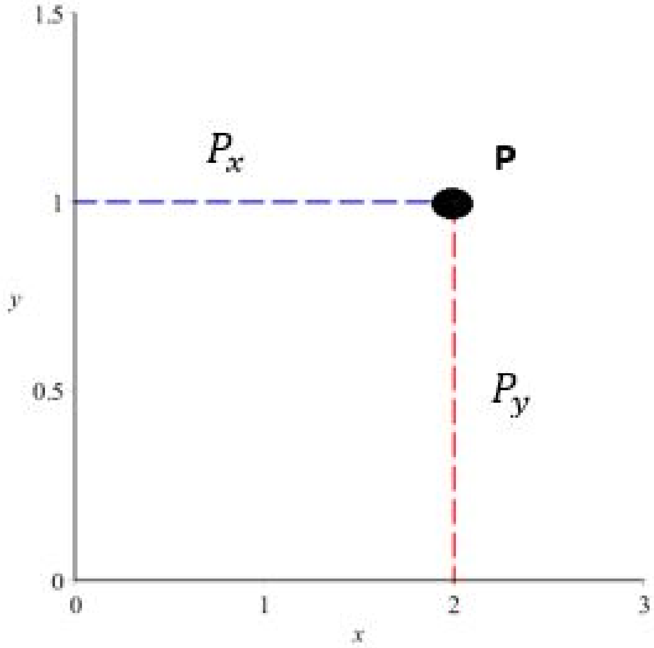
$$\overrightarrow{w} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11.2 Komposanter

Opdeling af komponenter:

Vi ved, at et punkt P kan opdeles i dens x- og y-komponenter:

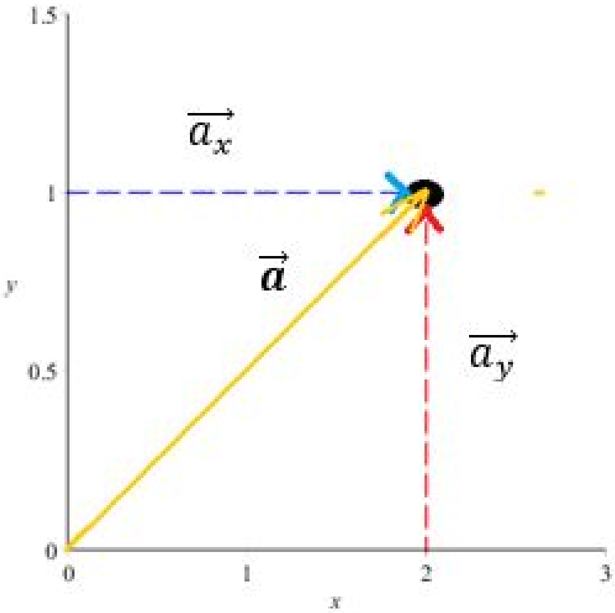


$$P = (P_x, P_y)$$

I dette eksempel har vi

$$P = (2, 1)$$

Vi kan bruge samme koncept med vektorer, hvor de også kan opdeles i x og y-dele. Hvis vi har en vektor a, kan vi opdele denne vektor i dens x- og y-komponenter:



og det skriver vi som

$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y}$$

I vores eksempel har vi, at

$$\vec{a} = \binom{2}{0} + \binom{0}{1} = \binom{2}{1}$$

Længden af vektor ud fra komponenterne:

Hvis vi vil kende længden af en vektor a, og vi allerede kender dens komponenter, kan vi udregne længden med flg. formel:

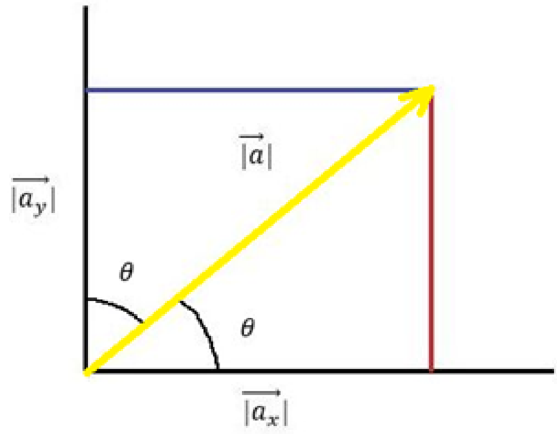
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Længder af komponenter:

Ud fra enhedscirklen ved vi, at vi kan udtrykke koordinater

$$(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Hvis vi kigger på vores opdeling af komposanter for vores vektor a, kan vi se, at det danner to retvinklede trekanter. Trekanternes sider er længderne af komposanterne (kateterne) og længden af vektoren a (hypotenusen):



I en retvinklet trekant ved vi:

$$\cos(\theta) = \frac{hos}{hyp} = \frac{|\overrightarrow{a_x}|}{|\overrightarrow{a}|}$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{a_x}| = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos(\theta)$$

Og på samme måde fås:

$$\sin(\theta) = \frac{mod}{hyp} = \frac{|\overrightarrow{a_y}|}{|\overrightarrow{a}|}$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{a_y}| = |\overrightarrow{a}| \cdot \sin(\theta)$$

Eksempel 1 - længden af en vektor ud fra komponenter

Vi har en vektor

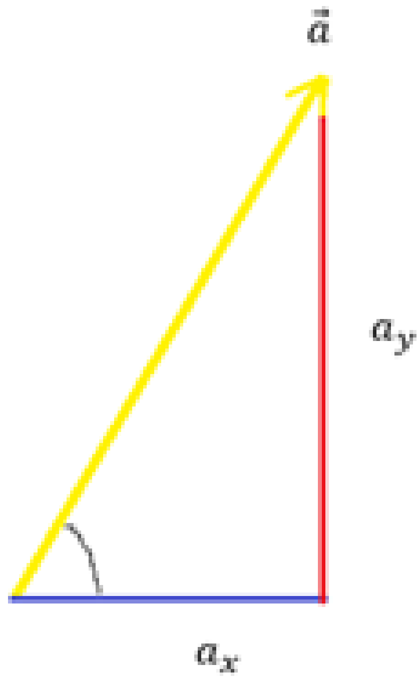
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og ud fra dens komposanter, vil vi gerne finde dens længde.

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7.21$$

Eksempel 2 - finde komposanter til en vektor ud fra længde og vinkel

Vi har en vektor a med længden 5, som danner en vinkel på 60 grader. Vi skal finde komponenterne til vektoren a.



Vi finder først længderne af komposanterne:

$$|\overrightarrow{a_x}| = 5 \cdot \cos(60) = 2.50$$

$$|\overrightarrow{a_y}| = 5 \cdot \sin(60) = 4.33$$

Ud fra billedet kan vi se, at komponenterne kun har én koordinat hver som har en værdi, og vi har derfor komponenterne:

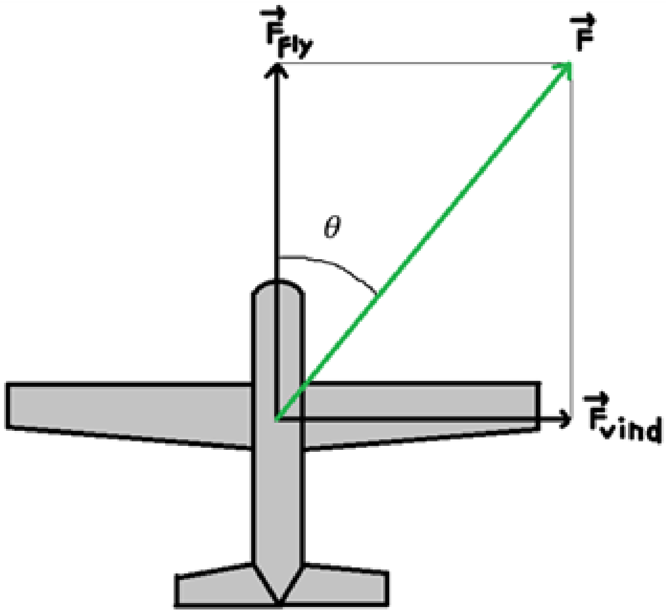
$$a_x = \begin{pmatrix} 2.50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad og \quad a_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.33 \end{pmatrix}$$

Vi kan tjekke om vores resultat er rigtigt ved at indsætte de fundne størrelser ind i formlen:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2.50)^2 + (4.33)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Industrieksempel - Resulterende kraft og retningsændring på et fly

Et fly bliver ramt af et vindstød, som påvirker flyet med en kraft, så flyet skifter retning. Vi vil gerne finde den resulterende kraft F, og retningsændringen på flyet kaldet .



Ud fra figuren kan vi se, at den resulterende kraft F bliver beskrevet ved flyets fremdrift kaldet F_{fly} og vindstødets kraft kaldet F_{vind}. Vi får oplyst, at de 2 komponenter har størrelserne:

$$\left|\overrightarrow{F_{fly}}\right| = 10000N \ \ og \ \ \left|\overrightarrow{F_{vind}}\right| = 8000N$$

Komposanterne har kun én værdi på enten x- eller y-delen, så vi kan opskrive komposanterne ud fra deres størrelser:

$$\overrightarrow{F_{fly}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cdot 10^4 \end{pmatrix} N$$

$$\overrightarrow{F_{vind}} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

Og den resulterende kraft kan findes ved at addere komposanterne:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{fly}} + \overrightarrow{F_{vind}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cdot 10^4 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^3 \\ 1 \cdot 10^4 \end{pmatrix} N$$

Vi kan nu finde størrelsen af den resulterende kraft.

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_{fly}^2 + F_{vind}^2} = \sqrt{(1 \cdot 10^4 N)^2 + (8 \cdot 10^3 N)^2} = 1.28 \cdot 10^4 N$$

Herfra kan vi finde retningsændringen af flyet.

$$\sin(\theta) = \frac{mod}{hyp} = \frac{\left|\overrightarrow{F_{vind}}\right|}{\left|\vec{F}\right|}$$

$$\implies \sin(\theta) = \frac{8 \cdot 10^3 N}{1.28 \cdot 10^4 N} = 0.625$$

$$\implies \theta = 38.68^\circ$$

11.3 Enhedsvektor

Hvad er en enhedsvektor?

Vi kan have et specialtilfælde hvor længden af en vektor er 1, dvs.

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1$$

Vi kalder denne specielle vektor med længden 1 for en enhedsvektor. Dvs. en enhedsvektor er givet ved:

$$|\overrightarrow{e}| = 1$$

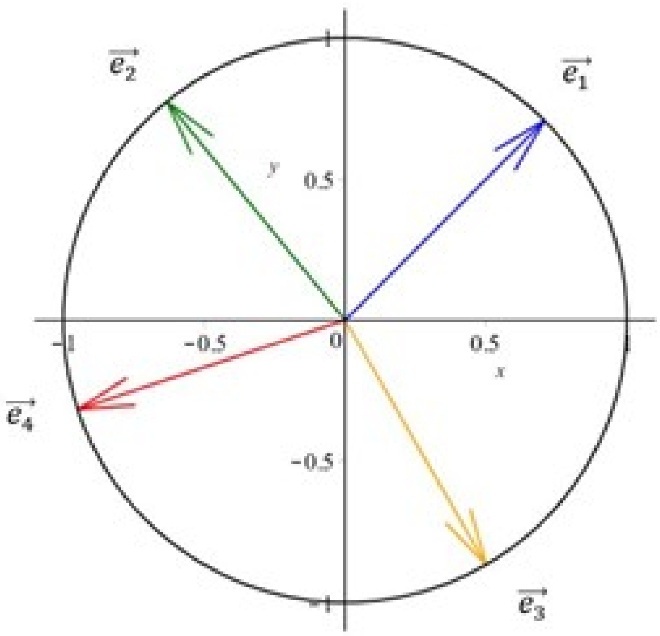
Enhedsvektorer kan have forskellige retninger, men altid samme længde. Her er eksempler på nogle enhedsvektorer:

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix} \ , \ \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -0.632 \\ 0.774 \end{pmatrix} \ , \ \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0.500 \\ -0.866 \end{pmatrix} \ og \ \overrightarrow{e_5} = \begin{pmatrix} -0.948 \\ -0.316 \end{pmatrix}$$

Vi kan tjekke længden af en af enhedsvektorerne for at se, om den nu også har længden 1:

$$\overrightarrow{e_2} = \sqrt{(-0.632)^2 + (0.774)^2} = \sqrt{0.4 + 0.6} = \sqrt{1} = 1$$

Vi kan illustrere enhedsvektorerne i et koordinatsystem og indsætte enhedscirklen i det samme koordinatsystem:



Vi kan se, at alle enhedsvektorerne berører enhedscirklen. Dette giver også god mening, da en enhedsvektor svarer til radius på enhedscirklen (og begge har størrelsen 1).

Lav en vilkårlig vektor om til en enhedsvektor:

Vi ønsker at finde et udtryk, hvor vi kan lave en vektor om til en enhedsvektor. Komponenterne til enhedsvektoren finder vi ved at tage forholdet mellem den ønskede enhedsvektor og vektoren, som vi ønsker at lave til enhedsvektor.

$$\frac{e_x}{a_x} = \frac{|\overrightarrow{e}|}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}$$

$$\implies e_x = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|} = \hat{a_x}$$

y-komponenten findes på samme måde,

$$\implies e_y = \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|} = \hat{a_y}$$

Vi kan nu opskrive komponenterne som et samlet udtryk

$$\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|} \\ \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$$

Dvs. at man kan omskrive en vektor til en enhedsvektor med formlen

$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \hat{a}$$

(Standard) basisvektorer:

Vi kan have specielle enhedsvektorer, som vi betegner som basisvektorerne.

$$\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med disse to enhedsvektorer kan vi udtrykke enhver vilkårlig vektor.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_x \cdot \hat{\imath} + a_y \cdot \hat{\jmath}$$

Eksempel 1 - tjek, om tilfældig vektor er en enhedsvektor

Vi skal tjekke om vektor a er en enhedsvektor. Denne vektor er givet ved

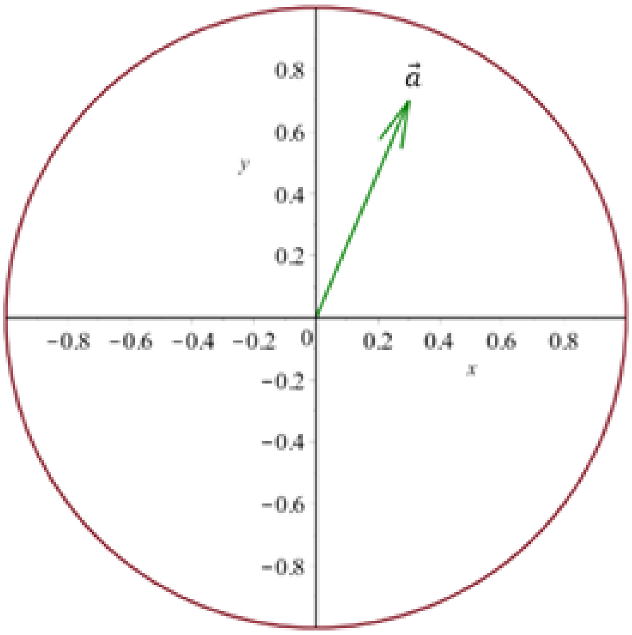
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Vi skal udregne, om længden af vektoren er 1.

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{0.3^2 + 0.7^2} = \sqrt{0.58} = 0.76$$

Vektoren er altså ikke en enhedsvektor, da den ikke har længden 1.

Dette kan vi også se i forhold til vores viden omkring enhedsvektorer og enhedscirklen:



Eksempel 2 - lav en tilfældig vektor om til en enhedsvektor

Vi har en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, som vi skal lave til en enhedsvektor.

Vi skal finde længden af vektoren, så vi kan beregne enhedsvektoren.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5.657$$

Nu kan vi bare indsætte i vores formel og få

$$\hat{a} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{5.657} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5.657} \\ \frac{4}{5.657} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

Hermed har vi lavet vores vektor om til en enhedsvektor.

Eksempel 3 - udtryk en tilfældig vektor med (standard) basisvektorer

Vi har en vektor givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker at udtrykke denne vektor ved hjælp af (standard) basisvektorer.

$$\vec{a} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \hat{\imath} + 7 \cdot \hat{\jmath}$$

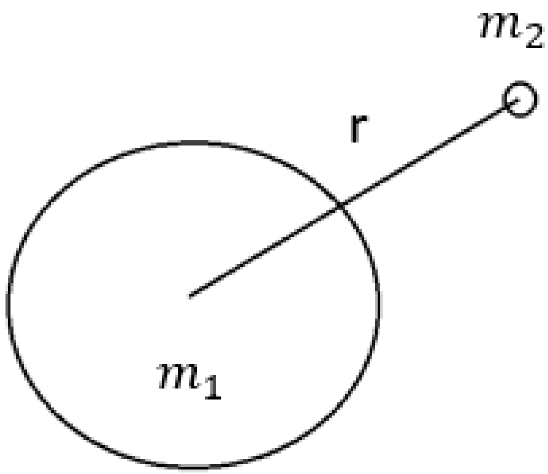
Industrieksempel - En satellits enhedsvektor og gravitationslov

En satellit er i kredsløb om jorden, og vi ved fra den universelle gravitationslov, at kraften mellem to objekter er givet ved

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

I denne formel er G den universelle gravitationskonstant. Vi er interesseret i at finde størrelsen af denne kraft F og dens retning.

Vi har en situation, hvor satelliten vejer 150 kg og afstanden mellem satelliten og jorden er 35800 km. Vi ved desuden at jordens masse er ca. $6 \cdot 10^{24}$ kg.



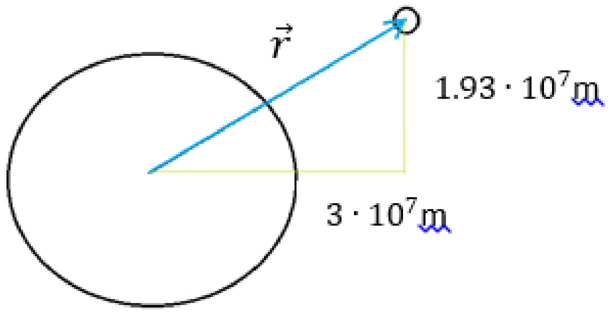
Vi kan starte med at finde størrelsen af kraften F, dvs. vi indsætter de oplyste værdier i den universelle gravitationslov:

$$F = G \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} kg \cdot 150 kg}{(3.58 \cdot 10^7 m)^2} = G(7 \cdot 10^{11} \frac{(kg)^2}{m^2})$$

Her kan vi indsætte værdien for konstanten G:

$$\Longrightarrow \; F = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{(kg)^2} \cdot (7 \cdot 10^{11} \frac{(kg)^2}{m^2}) = 47N$$

Vi kan opfatte denne afstand r som en retningsvektor, og vi kan beskrive situationen med en vektor. Hvis vi også får oplyst vektor r's komponenter, kan vi nu få:



Dvs. vi har nu en retningsvektor givet ved

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.93 \end{pmatrix} \cdot 10^7 m$$

Vi skal nu finde en måde at få beskrevet retningen af F, da vi lige har regnet størrelsen ud. Hvis vi benytter viden fra f.eks. projektion, hvor vi kan komme frem til formlen

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| \cdot \hat{a},$$

hvor vi kan se, at en vektor kan udtrykkes som størrelsen af vektoren ganget med en enhedsvektor for at angive retningen.

Dette kan vi benytte til at opskrive en formel for at angive retningen af kraften F:

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \cdot \hat{r}$$

Vi er nødt til at bruge en enhedsvektor i stedet for en almindelig retningsvektor, da vi ellers ville få både forkerte enheder og forkert størrelse på vores resultat. Vi kan vise dette ved at prøve at udregne retningen af kraften ved brug af retningsvektoren r, som er en FORKERT METODE!

$$\vec{F} \neq \left|\vec{F}\right| \cdot \vec{r}$$

$$\Longrightarrow \vec{F} \neq 47N \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1.93 \end{pmatrix} \cdot 10^7 m = \begin{pmatrix} 1.41 \\ 9.01 \end{pmatrix} \cdot 10^9 Nm$$

og hvis vi prøver at omregne størrelsen tilbage igen burde vi selvfølgelig få det samme (dvs. 47N), men i stedet får vi:

$$\left|\vec{F}\right| \neq \sqrt{(1.41 \cdot 10^9 Nm)^2 + (9.01 \cdot 10^9 Nm)^2} = 9.18 \cdot 10^9 Nm$$

Derfor SKAL vi vi benytte formlen med enhedsvektor! Vi skal derfor omregne retningsvektoren til en enhedsvektor:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Longrightarrow \hat{r} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1.93 \end{pmatrix} \cdot 10^7 m}{3.58 \cdot 10^7 m} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3.58} \\ \frac{1.93}{3.58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu endelig udregne retningen af kraften F

$$\vec{F} = 47N \cdot \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39.5 \\ 25.4 \end{pmatrix} N$$

11.4 Skalarprodukt (fra cosinus og enhedsvektorer)

Skalarprodukt fra cosinus

Vi ved, at skalarproduktet er givet ved

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

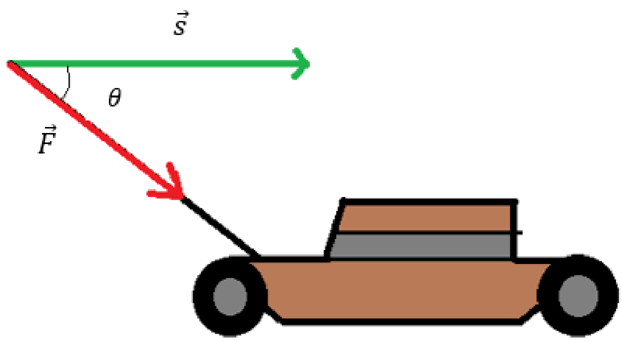
Vi kan imidlertid også udtrykke skalarproduktet på en anden måde:

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos(\theta)$$

Den nemmeste måde at se, hvorfor dette gælder kommer fra fysikken, hvor arbejde udtrykkes ved "kraft gange vej".

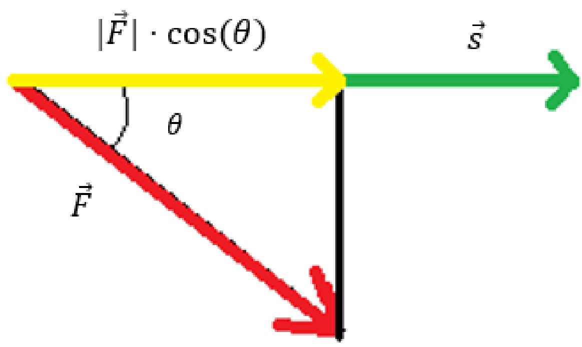
$$A = F \cdot \ s$$

Vi kan se på et tilfælde, hvor vi bruger en græsslåmaskine, som beskrevet i følgende billede:



Vi ønsker at udregne arbejdet, som vi påfører græsslåmaskinen, og den formel er kraft gange vej. Men her er der også en vinkel mellem kraftvektoren F og vejvektoren s. Dvs. at den kraft, som indgår i arbejdet, skal kun være den kraft, som er i vejens retning. Vi skal derfor finde et udtryk for kraftens størrelse i vejens retning ved hjælp af trekantsberegning:

$$\cos(\theta) = \frac{hos}{hyp} \implies hos = hyp \cdot \cos(\theta) = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \cos(\theta)$$

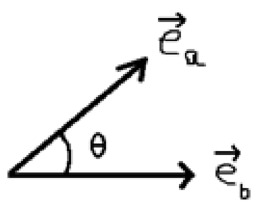


Udtrykket for størrelsen af arbejdet kan nu udtrykkes ud fra størrelsen af kraften i vejens retning og længden af vejvektoren s:

$$A = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot |\overrightarrow{s}| \cdot cos(\theta)$$

Skalarprodukt fra enhedsvektorer:

Vi kan nu forestille os en situation, hvor vi har to enhedsvektorer e_a og e_b med en vinkel theta imellem:



Udtrykket bliver forenklet, da enhedsvektorer altid har længden 1, så vi får et skalarprodukt givet ved

$$\cos(\theta) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{e_{ax}e_{bx} + e_{ay}e_{by}}{1 \cdot 1} = \overrightarrow{e_a} \bullet \overrightarrow{e_b}$$

Dvs. vi kan udtrykke skalarproduktet som

$$\overrightarrow{e_a} \bullet \overrightarrow{e_b} = \hat{a} \bullet \hat{b} = \cos(\theta)$$

Eksempel 1 - udregne vinkel mellem to vektorer:

Vi skal udregne vinklen mellem to vektorer givet ved

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ og \ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi indsætter de oplyste vektorer ind i vores formel og regner løs

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\theta) \implies \cos(\theta)\frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}}$$

$$\cos(\theta)\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 1^2\sqrt{3^2 + 4^2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\implies \theta = 25.5°$$

Eks. 2 - udregne vinkel mellem to enhedsvektorer::

Vi har fået givet to enhedsvektorer

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.97 \end{pmatrix}, \hat{b} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.66 \end{pmatrix}$$

Vi skal udregne vinklem mellem dem.

$$\cos(\theta) = 0.25 \cdot 0.75 + 0.97 \cdot 0.66 = 0.82 \implies \theta = 34.9°$$

Eks. 3 - finde en vektor, som danner en bestemt vinkel med en anden vektor:

Vi får givet en vektor a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

og vi skal finde en vinkel b, som danner en 25 graders vinkel med vektor a. Vi får desuden at vide, at vektor b har længden 20 og dens x-komponent skal være 9.

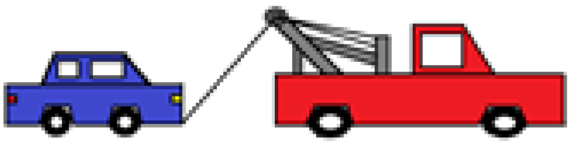
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\theta) \implies 7 \cdot 9 + 15 \cdot b_y = \sqrt{7^2 + 15^2} \cdot 20 \cdot \cos(25)$$

$$\implies b_y = 15.8$$

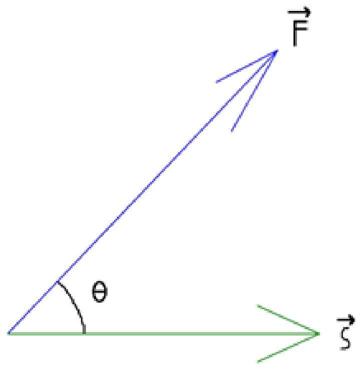
Nu har vi både x-komponenten og y-komponenten for vektor b

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15.8 \end{pmatrix}$$

Industrieksempel - Udregn en kranvogns arbejde



En kranvogn skal trække en bil, og vi kan beskrive situationen med følgende tegning, hvor kraftvektorerne er indtegnet:



Vi får oplyst at kraften F har størrelsen 1000 N, strækningen kranvognen trækker bilen er 1000 meter og vinklen mellem kraftvektoren og stedvektoren er 60 grader. Vi vil gerne udregne arbejdet af denne situation.

Formlen for arbejde er (som nævnt tidligere)

$$A = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot |\overrightarrow{s}| \cdot cos(\theta)$$

og her kan vi se, at det bare er skalarproduktet, dvs.

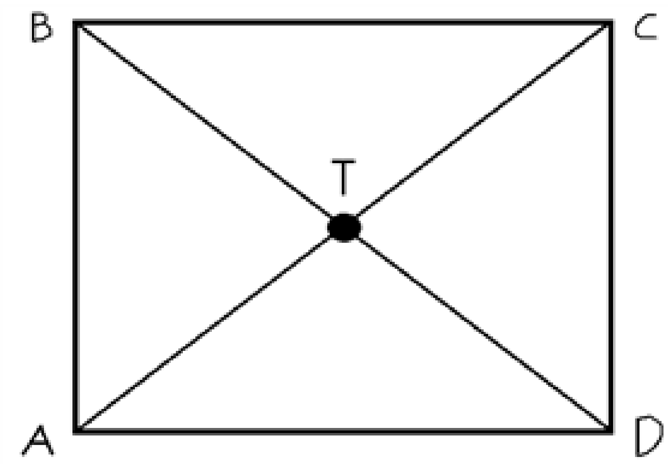
$$A = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$$

$$A = (1000N) \cdot (1000m) \cdot \cos(60) = 5 \cdot 10^5 N \cdot m = 5 \cdot 10^5 J = 500kJ$$

11.5 Trekantens tyngdepunkt

Tyngdepunkt for firkanter:

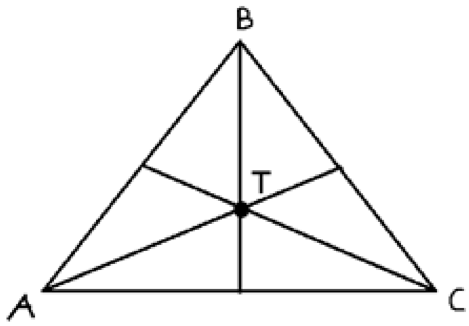
Vi kan først betragte tyngdepunktet for firkanter:



Her er tyngdepunktet, hvor diagonalerne skærer hinanden. Det punkt kalder vi for tyngdepunktet T. (En god regel er, at de dannede trekanter skal alle have samme areal)

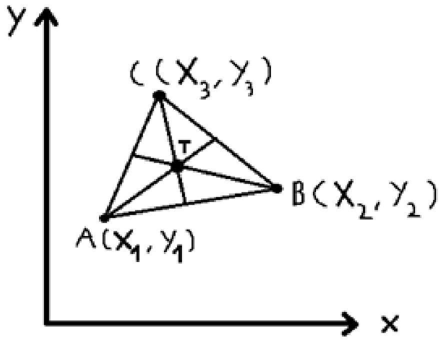
Tyngdepunkt for trekanter:

Tyngdepunktet er dér, hvor medianerne skærer hinanden. Her har alle de dannede trekanter også samme areal.



r

Vi kan kigge på trekanten i et koordinatsystem:

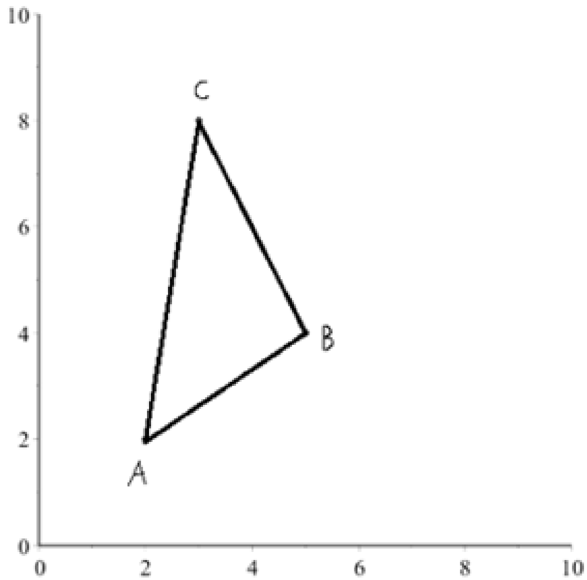


Her kan vi skrive tyngdepunktet med formlen:

$$T(x,y) = (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$$

Eksempel 1 - find tyngdepunkt ud fra givet figur:

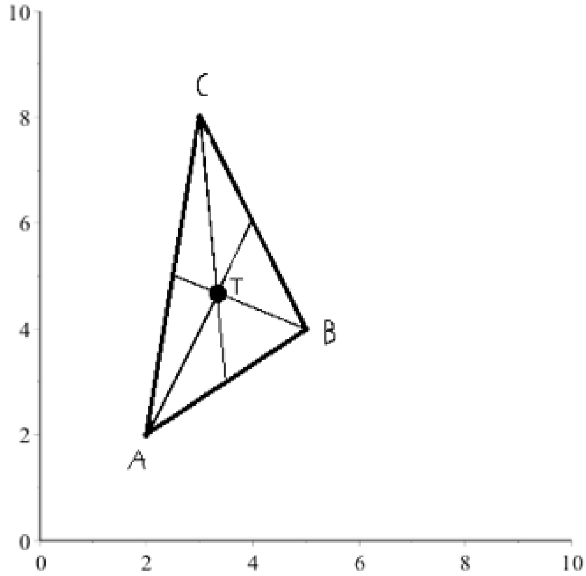
En trekant ABC er indtegnet i et koordinatsystem:



Vi skal finde trekantens tyngdepunkt og indtegne det i trekanten:

$$T(x,y) = (\frac{2+5+3}{3}, \frac{2+4+8}{3}) = (\frac{10}{3}, \frac{14}{3}) = (3.33, 4.66)$$

Tyngdepunkt kan nu indtegnes:



Eksempel 2 - udregne punkt i trekant ud fra to punkter og tyngdepunkt

Vi har fået givet 2 punkter og et tyngdepunkt for en trekant ABC:

$$A = (2, 3)\ ,\quad B = (7, 8)\quad og\quad T(x, y) = (5, 4)$$

Vi skal udregne det sidste punkt C som danner en trekant med punkt A og punkt B, hvor trekanten har det oplyste tyngdepunkt.

$$T(x, y) = (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$$

$$(5, 4) = (\frac{2 + 7 + x_3}{3}, \frac{3 + 8 + y_3}{3})$$

Vi kan nu udregne x-komponenten og y-komponenten hver for sig.

$$5 = \frac{9 + x_3}{3} \implies x_3 = 15 - 9 = 6$$

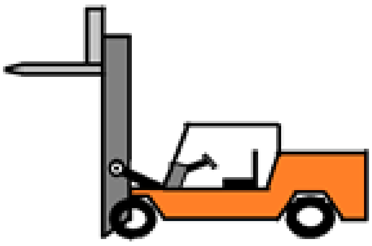
$$4 = \frac{11 + y_3}{3} \implies y_3 = 12 - 11 = 1$$

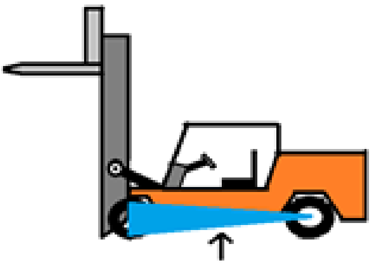
Dvs. vi nu har punktet C givet ved

$$C = (6, 1)$$

Industrieksempel - Gaffeltrucks tyngdepunkt vha. stabilitetstrekant

Vi har følgende gaffeltruck, og vi ønsker at finde dens tyngdepunkt:



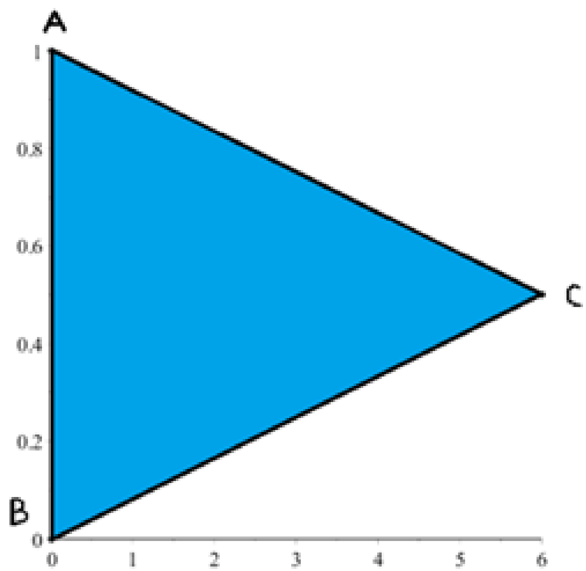


Dette kan vi gøre ved at kigge på gaffeltruckens stabilitetstrekant (blå trekant på tegningen).

Denne stabilitetstrekant er meget vigtig, for hvis gaffeltruckens tyngdepunkt ligger uden for stabilitetstrekanten, er gaffeltrucken ustabil og tipper.

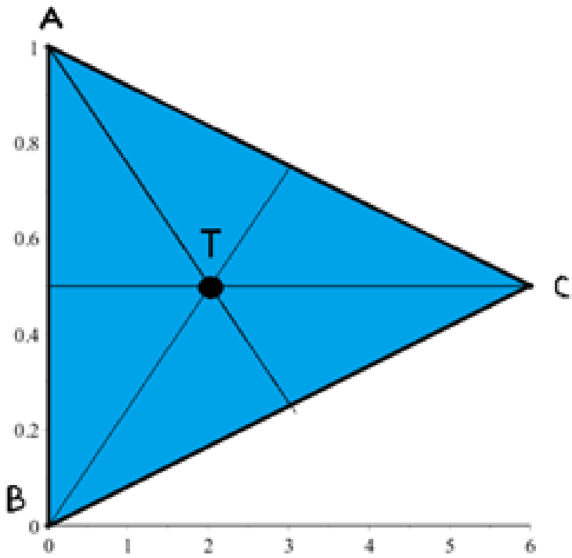
Vi kan antage (for dette eksempel), at vi kan beregne gaffeltruckens tyngdepunkt ved brug af vores formel til at finde tyngdepunkter i trekanter.

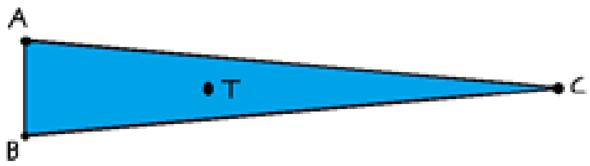
Vi får oplyst, at vi kan betragte de 3 punkter A,B og C i trekanten i et koordinatsystem givet ved:



$$T(x,y) = \left(\frac{0+0+6}{3}, \frac{1+0+0.5}{3}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{1.5}{3}\right) = (2, 0.5)$$

Vi kan se, at tyngdepunktet T ligger inden for stabilitetstrekanten, og dermed er gaffeltruck stabil.





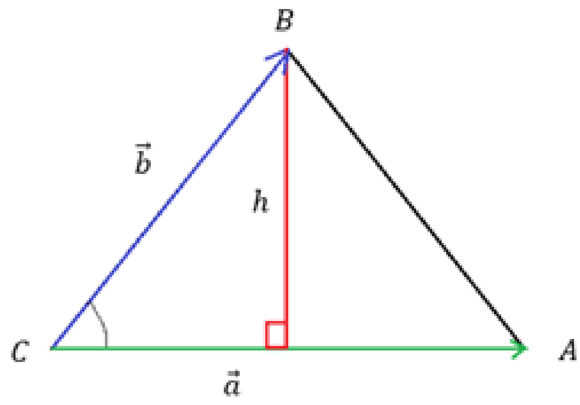
11.6 Trekantens areal (ud fra vinkel mellem vektorer)

Areal af trekant (”appelsin-formlen”):

Vi skal prøve at finde et udtryk, hvor vi relaterer vores viden om vektorregning til de arealformler, vi allerede kender. Vi vil derfor gerne kunne udlede en formel, som vi kan sammenholde den med den mest almindelige arealformel for trekanter:

$$T = \frac{1}{2}hg$$

Vi kan kigge på en situation, hvor vi kan prøve at finde et udtryk for grundlinjen g og højden h:



Ud fra vores viden om retvinklede trekanter, kan vi opskrive

$$\sin(C) = \frac{mod}{hyp} = \frac{h}{\left|\overrightarrow{b}\right|}$$

$$\implies h = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot sin(C)$$

Grundlinjen g er lig længden af vektor a, som vist på tegningen. Derfor kan vi nu indsætte vores udtryk for højden h og grundlinjen g i arealformlen og få et nyt udtryk:

$$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin(C)$$

Denne formel kan relateres til "appelsinformlen", som er givet ved

$$T = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(C)$$

Areal af trekant (krydsprodukt):

Vi kan omskrive vores formel yderligere, da vi ved, at krydsproduktet er givet ved

$$|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot sin(C) = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$$

Så vi kan også skrive vores arealformel som

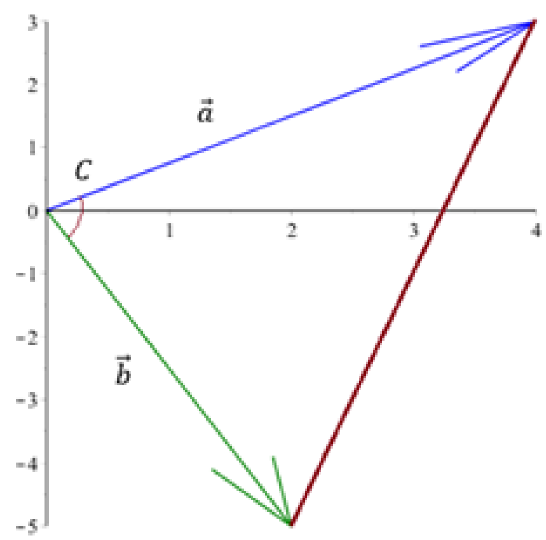
$$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot sin(C) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$$

Eksempel 1 - find areal af en trekant ud fra to givne vektorer:

Vi har fået oplyst vektorerne a og b:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \;\; og \;\; \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

De to vektorer danner en trekant med en tredje vektor C:



Vi ønsker at udregne arealet af denne trekant:

Vinklen C skal først findes, og det kan vi gøre ved hjælp af skalarproduktet.

$$\cos(C) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot (-5)}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{2^2+(-5)^2}} = -0.26$$

$$\implies C = 105°$$

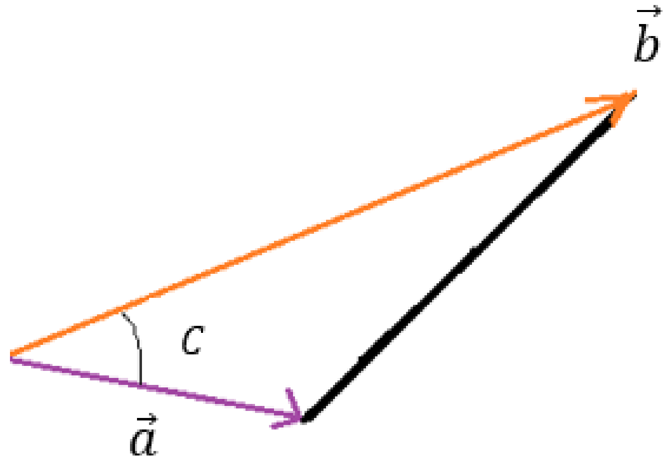
Nu kan vi indsætte i arealformlen

$$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{2^2+(-5)^2} \cdot \sin(105) = 13$$

Eksempel 2 - finde en vinkel ud fra arealformlen:

Arealet af trekanten er 20, længden af vektor a er 7 og vektor b er givet ved

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Vi skal finde vinklen C imellem de to vektorer:

$$T = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(C) \implies \sin(C) = \frac{2T}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

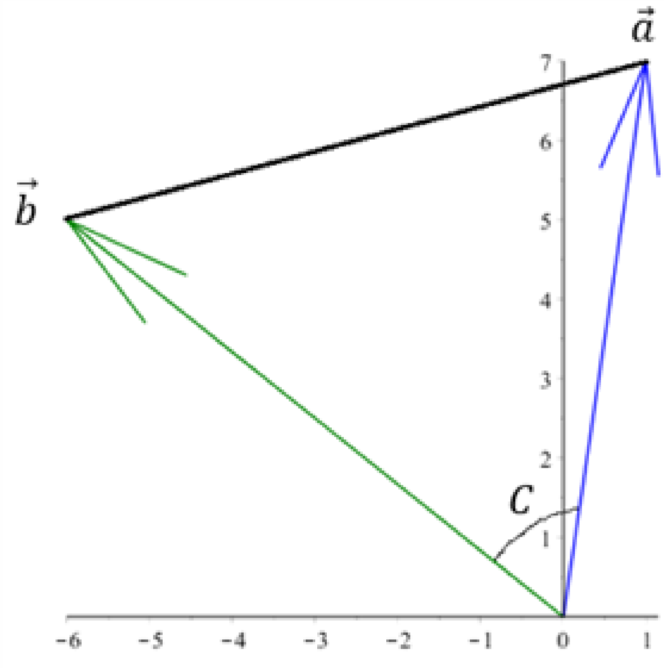
$$\sin(C) = \frac{2 \cdot 20}{7 \cdot \sqrt{15^2 + 9^2}} = 0.326$$

$$\implies C = 19^\circ$$

Eksempel 3 - beregn areal ud fra størrelsen (den numeriske værdi) af krydsproduktet:

Vi skal finde arealet ud fra krydsproduktet. Vektorerne er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \; og \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$



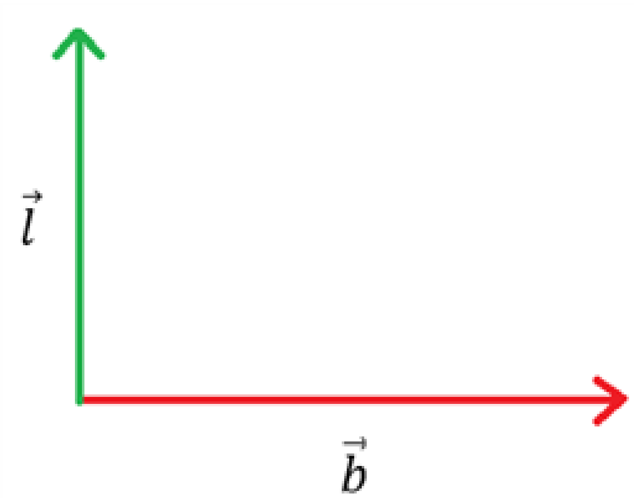
Da vi skal bruge krydsproduktet i denne opgave, anvender vi formlen:

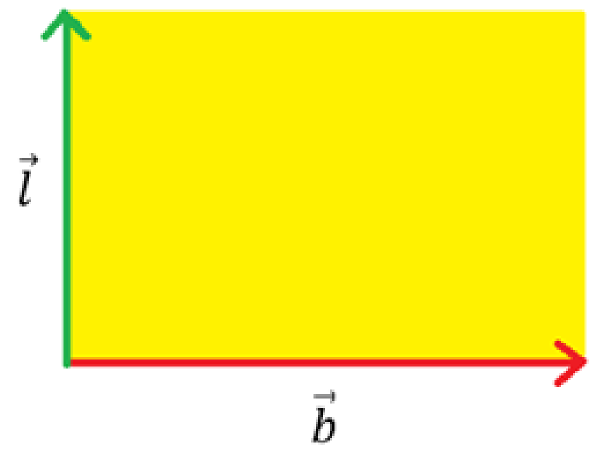
$$T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \frac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$T = \frac{1}{2}(1 \cdot 5 - 7 \cdot (-6)) = 23.5$$

Industrieksempel - Find areal af en trekant dannet ud fra laseropmåling:

Laseropmåling bliver normalt brugt til at bestemme længde og bredde af et firkantet rum. Denne situation er nem at udregne, da det kun kræver at man ganger den fundne længde og bredde sammen (som vi kan betragte som vektorer), som vist i følgende situation:

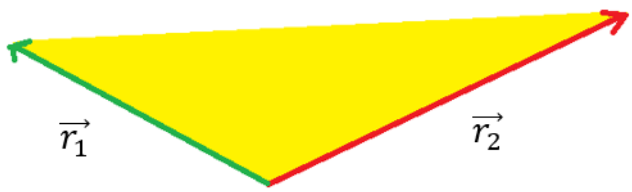




Det gule område er arealet, som man kan udregne ved at gange størrelsen af de 2 vektorer sammen.

$$A = \left|\vec{l}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$$

Men vi kan også sagtens forestille os en situation, hvor vi ønsker at finde arealet af en trekant i stedet for en firkant. Vi bruger laseropmåleren igen og kalder de to retninger, som vi måler på for r_1 og r_2:



Vi ønsker at finde det gule område, som er vores areal. Vi kan forestille os, at vi har designet laseropmåleren til at kunne udregne de to retningsvektorer, så får vi opgivet de to retningsvektorer r_1 og r_2:

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} m \;\; og \;\; \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} m$$

Arealet af trekanten udregnes ved krydsproduktsformlen

$$T = \frac{1}{2}|\vec{r_1} \times \vec{r_2}| = \frac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}|(-5m) \cdot (12m) - (10m) \cdot (6m)| = \frac{1}{2}\left|-120\, m^2\right| = 60\, m^2$$

11.7 Projektion (fra enhedsvektor)

Projektion generelt:

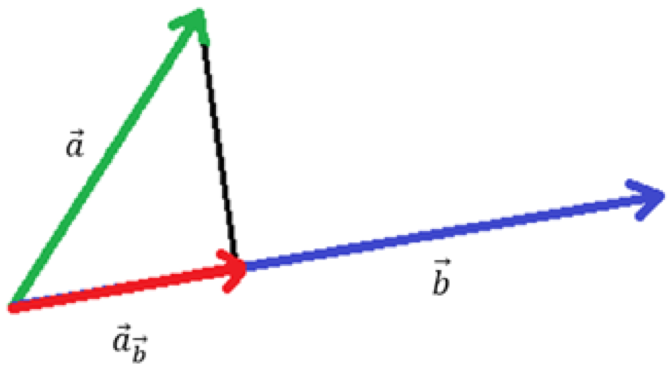
Vi ved, at en vektor kan projiceres ind på en linje eller på en anden vektor. Længden af en vektor a projiceret ind på en anden vektor b er

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$$

og selve vektoren er givet ved

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \bullet \vec{b}$$

Her er der vist en projektion af vektor a på vektor b:



Og selvfølgelig gælder det også omvendt, at hvis det var vektor b projiceret på vektor a i stedet for:

$$\left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{|\vec{a}|} \quad og \quad \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \bullet \vec{a}$$

Projektion fra enhedsvektor:

Vi ved, at man kan lave en vilkårlig vektor om til en enhedsvektor med formlen

$$\vec{e} = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \quad eller \;\; \hat{b} = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Vi omskriver vores projektionsformel, så vi får et udtryk, hvor enhedsvektoren for vektor b indgår:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \left|a_{\vec{b}}\right| \cdot \hat{b}$$

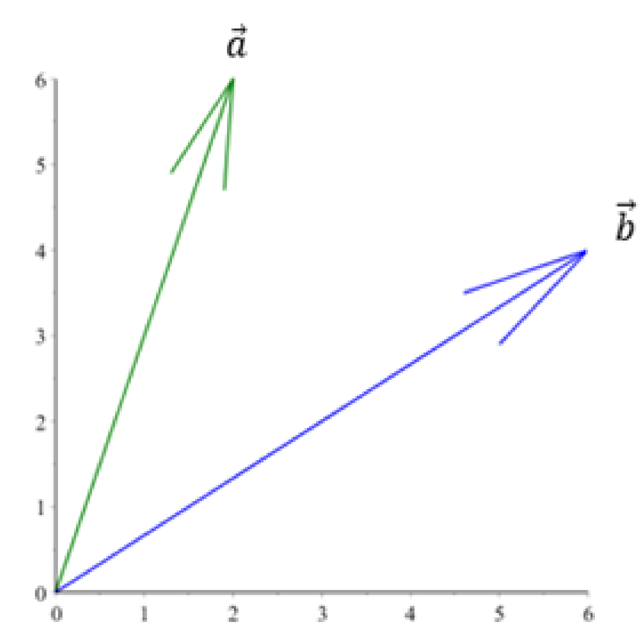
og ligeledes

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \left|b_{\vec{a}}\right| \cdot \hat{a}$$

Dette giver også en god mening, hvis man ser, at enhedsvektoren er retningsangivende for projektionen.

Eksempel 1 - projektion uden og med brug af enhedsvektorer:

Vi har to vektorer a og b:



Vektor a skal projiceres på vektor b. Vi kan løse dette problem med og uden brug af enhedsvektorer:

Uden enhedsvektorer:

Her skal følgende formler bruges:

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \quad og \quad \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

Først udregnes længden af projektionen

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{|a_x b_x + a_y b_y|}{\sqrt{(b_x)^2 + (b_y)^2}}$$

$$\Longrightarrow \; |\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|2 \cdot 6 + 6 \cdot 4|}{\sqrt{(6)^2 + (4)^2}} = 5$$

Herfefter udregnes selve vektoren

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{(b_x)^2 + (b_y)^2} \cdot \vec{b}$$

$$\Longrightarrow \; \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{(2) \cdot (6) + (6) \cdot (4)}{(6)^2 + (4)^2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.69 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.14 \\ 2.76 \end{pmatrix}$$

Med enhedsvektorer:

Her skal følgende formler bruges:

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \quad , \quad |\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \quad og \quad \vec{a}_{\vec{b}} = |\vec{a}_{\vec{b}}| \cdot \hat{b}$$

Længden af projektionen udregnes på samme måde som i ”uden enhedsvektorer”. Dvs. vi får igen

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = 5$$

Nu skal vektoren b laves om til en enhedsvektor:

$$\hat{b} = \frac{\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{(6)^2+(4)^2}} = \frac{\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}}{7.21} = \begin{pmatrix}\frac{6}{7.21}\\ \frac{4}{7.21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.83\\0.55\end{pmatrix}$$

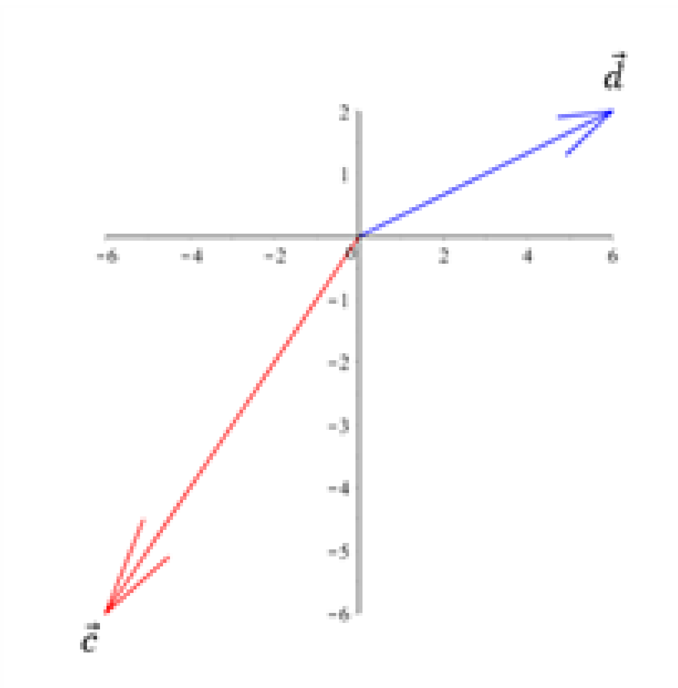
Det indsætter vi nu i vores sidste formel

$$\vec{a}_{\vec{b}} = 5 \cdot \begin{pmatrix}0.83\\0.55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4.14\\2.76\end{pmatrix}$$

Eksempel 2 - projektion med enhedsvektorer

Vi skal projicere vektor d på vektor c. Dette skal løses med enhedsvektormetoden. Vi får oplyst, at vektorne er givet ved:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix} \quad og \quad \vec{d} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$



Vi skal først lave vektor c om til en enhedsvektor, så vi kan bruge formlen

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \left|\vec{b_{\vec{a}}}\right| \cdot \hat{a}$$

Dette gøres ved

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \implies \hat{c} = \frac{\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}} = \begin{pmatrix}\frac{-6}{8.48}\\ \frac{-6}{8.48}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.707\\-0.707\end{pmatrix}$$

Nu skal længden af projektionen udregnes.

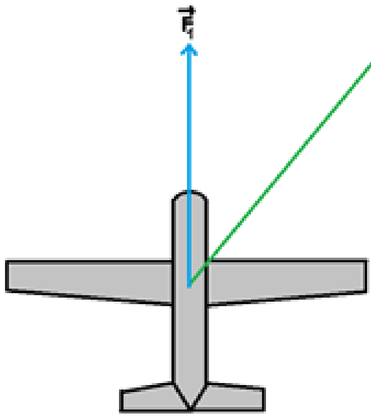
$$\left|\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{d} \bullet \overrightarrow{c}\right|}{|\overrightarrow{c}|} \rightarrow \left|\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}\right| = \frac{|6 \cdot (-6) + 2 \cdot (-6)|}{\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}} = \frac{48}{8.48} = 5.66$$

Nu kan vi indsætte det i vores første formel og få vektor d's projektion på vektor c:

$$\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}} = \left|\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}\right| \cdot \hat{c} \rightarrow \overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}} = 5.66 \cdot \begin{pmatrix} -0.707 \\ -0.707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Industrieksempel - Kraftvektor projiceres i ny retning:

Et fly har en autopilot, som ønsker at forudsige et retningsskifte for flyvet. Vi kalder den nuværende retning for F_1 (betegner kraftvektoren i den retning) og den nye retning for r-vektor.



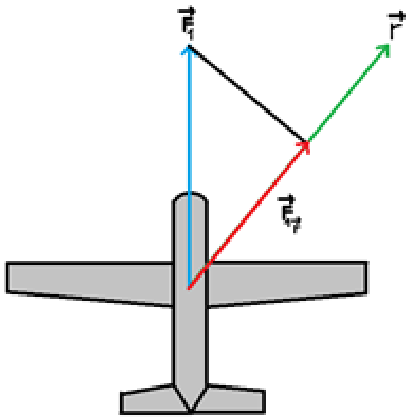
Autopilot-programmet kender den nuværende retning (og størrelse), som er givet ved

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2000 \end{pmatrix} N \quad og\ dvs.\ \ |\overrightarrow{F_1}| = 2000N$$

Den nye retning, r, kender programmet også, og den er givet ved

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} m$$

Vi kan nu prøve at udregne projektionen af F_1 på r, som autoprogrammet skal udregne for at det kan forudsige flyets nye kraftvektor.



Vi kan dog se, at vores enheder bliver forkerte, hvis vi ganger en kraftvektor (målt i N) med retningsvektor (målt i meter), og desuden vil vores tal generelt blive helt forkerte. Derfor skal vi først lave retningsvektoren om til en enhedsvektor, så den kun angiver den specifikke retning for den projicerede vektor (se mere i enhedsvektor-sektionen):

$$\hat{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|} \implies \hat{r} = \frac{\begin{pmatrix}150\\200\end{pmatrix} m}{\sqrt{(150m)^2 + (200m)^2}} = \frac{\begin{pmatrix}150\\200\end{pmatrix} m}{250m} = \begin{pmatrix}\frac{150}{250}\\\frac{200}{250}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.60\\0.80\end{pmatrix}$$

Nu kan vi først finde størrelsen af vores projektion med formlen

$$\left|\overrightarrow{F_1}_{\hat{r}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{F_1} \bullet \hat{r}\right|}{|\hat{r}|} = \left|\overrightarrow{F_1} \bullet \hat{r}\right|$$

$$\rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}_{\hat{r}}\right| = 0 \cdot 0.60 + 2000N \cdot 0.80 = 1600N$$

Da vi har størrelsen af projektionen kan retningsændringen til sidst udregnes med formlen

$$\overrightarrow{F_1}_{\overrightarrow{r}} = \left|\overrightarrow{F_1}_{\overrightarrow{r}}\right| \cdot \hat{r}$$

$$\implies \overrightarrow{F_1}_{\overrightarrow{r}} = 1600N \cdot \begin{pmatrix}0.60\\0.80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}960\\1280\end{pmatrix} N$$