Cristóbal Merino Sáez

1:- i) Suponiendo que A es finito, se asegura que existe un m, $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$ para todo $n \in A$. Como m entonces no pertenece a A, tenemos la certeza de que A_m no está mayorado y por tanto no tiene máximo, y además que la sucesión $x_n < \beta_m$, para cada $n \geq m$. Así, para todo natural mayor o igual a m, existe otro natural l, tal que sea mayor que n y $x_n < x_l < \beta_m$.

Ahora, considerando una función $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como: $\varphi(1) = m$; $\varphi(n+1) = \min\{p \in \mathbb{N} : \varphi(n) < p, x_{\varphi(n)} < x_p\}$.

De esta manera, la sucesión parcial $x_{\varphi(n)}$ es estrictamente creciente.

ii) Sea $B = \{p \in \mathbb{N} : x_n \leq x_p, \text{ para cada } p \leq n\}$, hay que comprobar que B es infinito. Para ello lo voy a hacer por reducción al absurdo, tomando B como un conjunto finito. Si fuera finito existiría un supremo m, de manera que todo $n \geq m$ no pertenece a B. Entonces existiría otro natural l tal que $x_m < x_k$. Ahora considerando otra función $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $\varphi(1) = m$; $\varphi(n+1) = \min\{p \in \mathbb{N} : \varphi(n) < p, x_{\varphi(n)} < x_p\}$, de donde se deduce que estrictamente creciente.

2.-

Cristóbal Merino Sáez

Como la sucesión original está acotada, deducimos que esta sucesión parcial es convergente. Tomaremos x como su valor de adherencia. Entonces para cada natural $n \geq m$, existe un natural l tal que $x > x_l > x_n$, de manera que $n \notin A$. De esta manera A estaría mayorado, pero eso es una contradicción, ya que habíamos supuesto que era infinito.

Como sabemos, B es infinito, y podemos asegurar que existe una biyección, $\sigma: \mathbb{N} \to B$ que es estrictamente creciente. De este modo, la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente, ya que si tomamos dos valores de B, son a y b, tales que $a < b$, tenemos que $x_b < x_a$.

2.- i) Para comprobar la igualdad, probaré primero la igualdad por la izquierda y luego por la derecha.

$\Rightarrow$ Sea $A_n = \{a_p : p \geq n\}$ y sea $\alpha_n = \inf(A_n)$. Así sabemos que $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$. Utilizando la definición de límite para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural m tal que para cada $n \geq m$ se cumple $\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$. Así, con $n \geq m$, $x_n \in A_n$, y usando que α_n es el ínfimo del conjunto conseguimos que $\alpha - \varepsilon < a_n \leq x_n$. Así, tomando $C = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$, tenemos que $C \subseteq \{1, 2, 3, 4, \ldots, m-1\}$, por lo que es finito.

Suponiendo que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es finito existiría el $\max(B)$, además sabemos que:

Cristóbal Merino Sáez

si el $\max(B) < n$ implica que n no pertenece a B y además que $x_n > \alpha + \varepsilon$. Así $\alpha + \varepsilon$ es minorante de A_n, por lo que $\alpha + \varepsilon \leq \alpha_n$. Trabajando ahora con el $\max\{m, c+1\}$, podemos decir que $\alpha + \varepsilon \leq \alpha_{\max\{m, c+1\}} < \alpha + \varepsilon$, siendo esto una contradicción, por lo que así sabemos que B es infinito.

$\Leftarrow$ Tenemos que $A_n \cap \{x_n : x_n < \alpha + \varepsilon\} \neq \emptyset$, ya que supongo que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito. Esto implica que $\alpha + \varepsilon$ no es minorante de A_n, y por tanto, $\alpha_n < \alpha + \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $\lim\{a_n\} \leq \alpha + \varepsilon$.
Como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito, existe un m tal que para cada natural $n \geq m$, se consigue que $x_n \geq \alpha - \varepsilon$. Así, $\forall n \geq m$, $\alpha - \varepsilon$ es minorante de A_n, lo que es igual que decir que $\alpha - \varepsilon \leq \alpha_n$, por lo que tenemos que $\alpha - \varepsilon \leq \lim\{\alpha_n\}$.
Juntando las dos desigualdades tenemos que $\alpha - \varepsilon \leq \lim\{a_n\} \leq \alpha + \varepsilon$.
Con esas dos desigualdades conseguimos que $\lim\{\alpha_n\} = \alpha$.

ii) La demostración es casi igual a la del ejercicio i). Así al igual que antes, voy a comprobar la igualdad tanto por la izquierda como por la derecha.

$\Rightarrow$ Sea $A_n = \{a_p : p \geq n\}$ y sea $\beta_n = \sup(A_n)$. Así sabemos que $\beta = \lim\{a_n\}$. Utilizando la definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural m, tal que para cada $n \geq m$ se cumple que $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$. Así, con $n \geq m$; $x_n \in A_n$, y usando que a_n es el supremo del conjunto, conseguimos que $x_n \leq \beta_n < \beta + \varepsilon$, así tomando $C = \{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\}$, tenemos que $C \subseteq \{1, 2, 3, 4 \ldots, m-1\}$. y así es finito. Suponiendo que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : \beta - \varepsilon < x_n\}$ es finito existirá el $\max(B)$, además sabemos que: si el $\max(B) < n$ implica que $n \notin B$ por lo que $x_n \leq \beta - \varepsilon$, y así sabemos que $\beta - \varepsilon$ es mayorante de A_n, y así $\beta_n \leq \beta - \varepsilon$. Tomando ahora el $\max\{m_1, \ldots\}$, conseguimos que $\beta - \varepsilon < \beta_{\max\{m, n\}} \leq \beta - \varepsilon$, siendo una contradicción, por lo que B es infinito.

$\Leftarrow$ Tenemos que $A_n \cap \{x_n : x_n > \beta - \varepsilon\} \neq \emptyset$, ya que suponemos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta - \varepsilon\}$ es infinito. Esto implicaría que $\beta - \varepsilon$ no es mayorante de A_n, así $\beta - \varepsilon$ no es mayorante de A_n y conseguimos $\beta_n > \beta - \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Luego $\beta - \varepsilon \leq \lim\{\beta_n\}$.

Como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\}$ es finito, existe un m tal que para cada natural $n \geq m$ se consigue $x_n \leq \beta + \varepsilon$. Así, $\forall n \geq m$, $\beta + \varepsilon$ es un mayorante de A_n, lo que es igual a decir que $\beta_n \leq \beta + \varepsilon$, por lo que tenemos que $\lim\{\beta_n\} \leq \beta + \varepsilon$.

Juntando las dos desigualdades conseguimos que $\beta - \varepsilon \leq \lim\{\beta_n\} \leq \beta + \varepsilon$. Y con esas desigualdades conseguimos que $\lim\{\beta_n\} = \beta$.

3.- a) $x_n = \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$

Utilizando el criterio de equivalencia logarítmica,

$\{x_n\} \to e^L \Leftrightarrow \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n \longrightarrow e^L \Leftrightarrow \left\{n \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right\} \to L$.

Así: $n \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1} = n \log\left(1 + \frac{-n}{n^2+n+1}\right) \sim n \frac{-n}{n^2+n+1} =$

$\frac{-n^2}{n^2+n+1} \to -1 \Rightarrow L = -1$. Por lo que $\{x_n\} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$

Escaneado con CamScanner

5

Cristóbal Merino Sáez

b) $y_n = \dfrac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n}}{\log(\log(n+1))}$

Sea $a_n = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n}$ y $b_n = \log(\log(n+1))$. b_n es una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente. Por lo que perfectamente se puede utilizar el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n}}{\log(\log(n+1))} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cancel{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots} + \frac{1}{n\log n}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\log(n-1)}}\right)}{\log(\log(n+1)) - \log(\log(n))}.$$

Las partes tachadas son equivalentes y en el numerador solo queda $\frac{1}{n\log n}$. En el denominador tenemos que:

$$\log(\log(n+1)) - \log(\log(n)) = \log\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right) = \log\left(1 - 1 + \frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right) =$$

$$\log\left(1 + \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n}\right) = \log\left(1 + \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log n}\right) = \log\left(1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right) \sim$$

$$\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} \sim \frac{1}{n\log n}.$$ Así, tenemos que el numerador y el denominador es el mismo: $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\log n}}{\frac{1}{n\log n}} = \underline{1}$

De esta manera conseguimos que $\{y_n\} \to 1$