Cristóbal Merino Sáez

1- a) Tomamos α como el ínfimo de Z y β como su supremo, ya que Z está acotado. Tenemos entonces la desigualdad: $c \leq \alpha \leq \beta \leq d$.

Voy a probar entonces que $f(\beta) = f(\alpha) = 0$.

- Sabemos que α es el ínfimo de Z, por lo que existe una sucesión $\{x_n\}$ que converge a α, con $x_n \in Z$ $\forall n \in \mathbb{N}$, o lo que es igual, $\lim\{x_n\} = \alpha$. De la continuidad de f conseguimos que $\lim\{f(x_n)\} = f(\alpha)$, y que $f(x_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ porque son elementos de Z. Entonces se deduce que $f(\alpha) = 0$ y entonces $\alpha \in Z$.
- Sabemos que β es el supremo de Z, por lo que existe una sucesión $\{y_n\}$ que converge a β, con $y_n \in Z$ $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $\lim\{y_n\} = \beta$. De la continuidad de f conseguimos que $\lim\{f(y_n)\} = f(\beta)$, y que $f(y_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, porque son elementos de Z. Así deducimos que $f(\beta) = 0$, y entonces $\beta \in Z$.

b) Definimos la función $f_1 : [a,c] \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = f(x)\ \forall x \in [a,c]$. A través del teorema de Bolzano, como $f_1(c) > 0$ y $f_1(a) < 0$, existe un $r \in [a,c]$ tal que $f_1(r) = 0$. Considerando el conjunto $Z_1 = \{x \in [a,c] : f_1(x) = 0\} \neq \emptyset$, definimos entonces $u = \max(Z_1)$, ya que sabemos que existe por el apartado anterior.

Ahora definimos $f_2 : [c,b] \to \mathbb{R}$ definida ~~[illegible]~~ por $f_2(x) = f(x)\ \forall x \in [c,b]$. A través del teorema de Bolzano, como $f_2(c) > 0$ y $f_2(b) < 0$ existe un $s \in [c,b]$ tal que $f_2(s) = 0$. Considerando el conjunto $Z_2 = \{x \in [c,b] : f_2(x) = 0\} \neq \emptyset$, definimos entonces $v = \min(Z_2)$, como hemos visto en el apartado anterior.

En conclusión, $a < u < c < v < b$, y $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0\ \forall x \in]u,v[$.

2.- Sea $\alpha = \sup(A)$, sabemos entonces que $\forall a \in A$, $a \leq \alpha$. Además sabemos que la función es creciente, por lo que $f(a) \leq f(\alpha)$. Así, $f(\alpha)$ es un mayorante de $f(A)$. Si $\alpha \in A$, $f(\alpha) \in f(A)$, y como es un mayorante de $f(A)$, $f(\alpha)$ sería igual

Cristóbal Merino Sáez

sup$(f(A))$. A partir de ahora ~~xxx~~ suponemos que $\alpha \notin A$.

- Tomamos un $\varepsilon > 0$, como f es continua existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in A$ verifica que $|x - \alpha| < \delta$, entonces $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$. Sabiendo que α es el supremo de A, tenemos que $C =]\alpha - \delta, \alpha[\cap A$ no es vacío. Tomando ahora $s \in C$, tenemos que $|f(s) - f(\alpha)| < \varepsilon$, así, $f(\alpha) - \varepsilon < f(s)$. Sabemos que $f(s) \in f(A)$, por lo que $f(\alpha) - \varepsilon$ no es mayorante de $f(A)$, por lo que concluimos en que $f(\alpha) = \sup(f(A))$.

- Sabiendo que $\alpha = \sup(A)$, existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim\{x_n\} = \alpha$. Como f es continua, deducimos que $\lim\{f(x)\} = f(\alpha)$. Tomando ρ como un real tal que $\rho < f(\alpha)$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f(x_n) > \rho$. Así, deducimos que $f(\alpha)$ es el mínimo mayorante de $f(A)$, osea, $f(\alpha) = \sup(f(A))$.

Cristóbal Merino Sáez

3.- La función g, se observa que es creciente en $[a,b]$. Voy a probar que es continua de la siguiente manera, demostrando que su imagen es un intervalo, o sea, que $g([a,b])$ es un intervalo. Voy a probar pues, que $g([a,b]) = [f(a), M]$, donde $M = \max f([a,b])$.

Obviamente el $\inf(g([a,b])) = f(a)$ y que su supremo es M. Sea ahora $u \in]f(a), M[$, tomamos que ~~$t_u = \sup\{x \in [a,b]$~~ $t_u = \sup\{x \in [a,b] : f(s) \leq u \; \forall s \in [a,x]\}$. Así, $f(t_u) = u$ y también que $g(t_u) = u$, ya que si tomamos que $a \leq v < u$, implicaría que $f(v) \leq f(u)$. Así obtenemos que $u \in g([a,b])$, y entonces que $g([a,b]) = [f(a), M]$. Como queríamos demostrar, $g(x)$ es continua.