# Evaluación 3
Cristóbal Merino Sáez

## 1.-

a) Primero voy a comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$, sería creciente, y voy a probarlo por el método de inducción.

Primero pruebo que el 1 está contenido en A:

$x_2 = f(x_1) = f(a) > a = x_1$, por lo que sí que está.

Ahora suponiendo que $n \in A$, voy a demostrar que $n+1 \in A$: $x_{n+2} = f(x_{n+1}) > f(x_n) = x_{n+1}$ usando que la sucesión es estrictamente creciente. Así, $A = \mathbb{N}$ y es inductivo.

Voy a mostrar ahora que la sucesión está acotada:

$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, $x_n = f(x_{n-1})$ y se cumple que $a < f(x_{n-1}) \leq b$, de donde $a < x_n \leq b$. Pero como $x_1 = a$, ahora sería $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así hemos mostrado que la sucesión es estrictamente creciente y está acotada, por lo que sabemos

Cristóbal Merino Sáez

que la sucesión converge a un número $\beta \in ]a, b]$

b) Sea $C = \{f(x) : x \in [a, b], x < \beta\}$, voy a probar que $\beta = \sup(C)$ y $\beta \leq f(\beta)$. Sé que $f$ es estrictamente creciente, y como he demostrado antes, $\{x_n\}$ converge al número $\beta$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un natural $m$ tal que $\beta - \varepsilon < x_m < \beta \Rightarrow$ $\beta - \varepsilon < f(x_{m-1}) < \beta$, de donde sabemos que $\beta \in Mayor(C)$. Suponiendo que existe un $\alpha < \beta : \alpha \in Mayor(C)$. Entonces existe el natural $m$ tal que $\alpha < f(x_m) < \beta$, siendo así $\alpha$ menor que un elemento de $C$ y esto es una contradicción, por lo que sabemos que $\beta = \sup(C)$.

Ahora voy a intentar mostrar que $\beta \leq f(\beta)$.

Sea $x[a, b]$, sabemos que $a \leq x < \beta ; x \neq \beta$. Siendo $f$ estrictamente creciente, sabemos que $f(x) < f(\beta)$, así $f(\beta) \in Mayor(C)$. Como $\beta$ es el supremo de $C$, se muestra que $\underline{\beta \leq f(\beta)}$.

Cristóbal Merino Sáez

c) Como he mostrado en el apartado b), $\beta \leq f(\beta)$. Voy a usar la reducción al absurdo, para que $\beta < f(\beta)$. La imagen de $f$ es un intervalo, por lo que con la desigualdad anterior podemos decir que $\beta < f(\alpha) < f(\beta)$. Sabemos entonces que $\alpha \in [a, \beta[$ por lo que $f(\alpha) \in C$, ya que $f$ es estrictamente creciente y con la desigualdad se consigue que $\alpha < \beta$. Ahora sabiendo que $\beta$ es el supremo de $C$, conseguimos que $f(\alpha) < \beta$. De esta manera y recapitulando, tenemos que $f(\alpha) < \beta < f(\alpha) < f(\beta)$, siendo una contradicción, por lo que hemos llegado al absurdo. Así, $\beta = f(\beta)$

2.- Se toma $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+a}{x+4}$. Tomamos ahora $x$ e $y$, tales que $0 < y < x$. Sabemos entonces que

$$f(x) - f(y) = \frac{4x+a}{x+4} - \frac{4y+a}{y+4} = \frac{4xy + ay + 16x + 4a - 4xy - 16y - ax - 4a}{(x+4)(y+4)} =$$

$$\frac{a\cdot(y-x) + 16(x-y)}{(x+4)(y+4)}$$. Como sabemos que $a \in ]4, 16[$ y que $x$ e $y$ son positivos $\Longrightarrow$

Cristóbal Merino Saéz

$\dfrac{a(y-x)+16(x-y)}{(x+4)(y+4)} > 0$. También he usado que $y < x$. Así $f(y) < f(x)$, por lo que la función es creciente.

Voy a comprobar ahora que la sucesión $\{x_n\}$ sea estrictamente creciente. Tomando $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N}$, voy a probar que es inductivo por el método de inducción.

Primero pruebo que $1 \in A$: $x_1 = \dfrac{8+4}{6} < \dfrac{4x_1+a}{x_1+4} = \dfrac{8+a}{6} = x_2$, y así sabemos que $1 \in A$.

Ahora vamos a comprobar que $n+1 \in A$, o sea que $x_n < x_{n+1}$. Sabiendo que $f$ es creciente, tenemos que $f(x_n) < f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$, así está comprobado y sabemos que $A = \mathbb{N}$.

Ahora voy a comprobar que la sucesión está mayorada: Sabiendo que $x_n + 4 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, así $x_{n+1} = \dfrac{4x_n+a}{x_n+4} < \dfrac{4x_n+16}{x_n+4} = 4 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y así la sucesión está mayorada.

Cristóbal Merino Sáez

Como sabemos que $\{x_n\}$ está mayorada y es creciente converge. Su límite se calcula tal que así: $l = \frac{4l+a}{l+4} \Rightarrow l^2+4l = 4l+a \Rightarrow l^2 = a$.

Así sabemos que el límite de la solución es $\sqrt{a}$ y por tanto $\{x_n\}$ converge a $\sqrt{a}$.

b) $$0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$$

Para probar la desigualdad de la izquierda, sabemos que $\{x_n\}$ converge a $\sqrt{a}$, por lo que $x_n < \sqrt{a} \Rightarrow$ $0 < \sqrt{a} - x_n$.

Para probar la segunda desigualdad haremos lo siguiente: $\sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$, dividimos entre $\sqrt{a} - x_n$ (tengo la seguridad que es mayor a 0) y $\frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{\sqrt{a} - x_n} < \frac{1}{3}$.

Sabemos que $4 < a \Rightarrow 2 < \sqrt{a} \Rightarrow -2 > -\sqrt{a}$ y que $x_n > 2$.
Entonces podemos hacer lo siguiente:

Cristóbal Merino Sáez

Sustituyendo:

$$\frac{\sqrt{a}-x_{n+1}}{\sqrt{a}-x_n} = \frac{\sqrt{a}-\frac{4x_n+a}{x_n+4}}{\sqrt{a}-x_n} = \frac{\frac{\sqrt{a}x_n+4\sqrt{a}-4x_n-a}{x_n+4}}{\sqrt{a}-x_n} =$$

$$\frac{\sqrt{a}x_n+4\sqrt{a}-4x_n-a}{(x_n+4)(\sqrt{a}-x_n)} \overset{\text{saco factor común}}{=} \frac{\sqrt{a}\cdot(-\sqrt{a}+4)+x_n(\sqrt{a}-4)}{(x_n+4)(\sqrt{a}-x_n)} =$$

$$\frac{-\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)+x_n(\sqrt{a}-4)}{(x_n+4)(\sqrt{a}-x_n)} = \frac{(\sqrt{a}-4)(x_n-\sqrt{a})}{(x_n+4)(\sqrt{a}-x_n)} =$$

$$\frac{(4-\sqrt{a})(\cancel{\sqrt{a}-x_n})}{(x_n+4)(\cancel{\sqrt{a}-x_n})} = \frac{4-\sqrt{a}}{x_n+4} < \frac{4-2}{2+4} = \frac{1}{3}$$

Así está demostrado que $\sqrt{a}-x_{n+1} < \frac{1}{3}\sqrt{a}-x_n$.

Ahora reescribimos la desigualdad para $n=1,2,3,\dots n$ con $x_i<\sqrt{a} \Rightarrow 0<\sqrt{a}-x_i$. Si multiplicamos todas, conseguimos que:

$$0<\prod_{i=2}^{n+1}(\sqrt{a}-x_i) < \left(\frac{1}{3}\right)^n \prod_{i=1}^{n}(\sqrt{a}-x_i) \text{ de donde}$$

se puede sacar que $0<\sqrt{a}-x_i < \frac{1}{3^n}(\sqrt{a}-x_i) = \frac{1}{3^n}(\sqrt{a}-2)$ tal como nos pedía deducir.