Cristóbal Merino Sáez

Problema 1:

Tomamos $A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} \right\}$

Antes de empezar hay que destacar que $A \subseteq \mathbb{N}$.
Ahora vamos a probar que $1 \in A$ tal que:

$$\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1+3} = \frac{2}{5} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{1}{2}$$

Se cumple la desigualdad por lo que $1 \in A$. A continuación, suponemos que $n \in A$, y tenemos que probar que $n+1 \in A$:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2(n+1))}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}$$

Además sabemos que el cociente $\frac{2n+2}{2n+5}$ es mayor que 0 y menor que 1 ya que $n \in \mathbb{N}$. Así, podemos multiplicar por ese cociente a los dos lados de la desigualdad inicial:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}} \cdot \frac{(2n+2)}{2n+5}$$

Así suponiendo que ese producto como menor que el cociente de arriba $\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}\right)$,

Cristóbal Merino Sáez

entonces llegaríamos a comprobar lo que queremos:

$$\frac{\sqrt{6}\,(2n+2)}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}\cdot 1}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}.$$ Meter

trabajando con $n\in\mathbb{N}$ podemos pasar los denominadores al otro lado y la desigualdad se mantiene:

$$(2n+2)\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)} < (2n+5)\cdot\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$(2n+2)^2\cdot\cancel{(n+2)}\cancel{(n+3)}(n+4) < (2n+5)^2\cdot(n+1)\cancel{(n+2)}\cancel{(n+3)}$$

$$4n^3+\cancel{16n^2}+8n^2+32n+4n+16 < 4n^3+\cancel{4n^2}+\cancel{20n^2}+20n+25n+25 \Rightarrow$$

$$36n+16 < 45n+25 \Rightarrow -9 < 9n \Rightarrow \underline{-1 < n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Como hemos comprobado la desigualdad, probamos además la inicial: $\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Problema 2:

Para empezar sabemos que A tiene supremo, ya que está acotado y lo llamaremos $\alpha = \sup(A)$. Demostrando que α es un casi-mayorante de B, probamos que B no es vacío. Sabemos que no hay valores de A mayores que el $\sup(A)$, por lo que $\{x\in A, x>\alpha\}=\emptyset$.

Tomamos que $\alpha\in B$, y $\text{mayo}(A)\subseteq B$ que si $\beta\in\text{mayo}(A)$,

$\Rightarrow \{x\in A : \beta < x\} = \emptyset$, que es finito.

Escaneado con CamScanner

Cristóbal Merino Sáez

Sea $m \in Mino(A)$, $\{x \in A : m < x\}$ es la totalidad o su totalidad menos su ínfimo, en cualquier caso el conjunto es infinito, por lo que no existe ningún minorante de A que pertenezca a B. Así, los minorantes de A lo son también de B, y así B está minorado y tomamos el $\inf(B)$ como γ. Así sabemos que $\gamma \leq b, \forall b \in B$ y así sabemos que

$\gamma \leq \alpha$.

Ahora hay que demostrar que si $\gamma < \alpha$, entonces A tiene máximo. Lo haré por una reducción al absurdo, para que A no tenga máximo. Así podemos obtener valores de A tan cercanos a α como queramos. Suponiendo un valor mayor a 0 $\mu > 0$, tal que $\gamma < \alpha - \mu < \alpha$, así $\alpha - \mu$ toma valores desde γ hasta $+\infty$, por lo que pertenece a B, pero $\{x \in A : \alpha - \mu < x\}$ es finito. Pero sabemos que entre $\alpha - \mu$ y α hay infinitos números, pues hemos llegado a una contradicción, por lo que, que A no tenga máximo es falso, lo que implica que A sí que tiene máximo.

Cristóbal Merino Sáez

Problema 3.-

i) Sabemos que f es creciente, por lo que

$$\inf\{f(t): \alpha < t \leq b\} \geq f(\alpha)$$

$$\sup\{f(s): a \leq s < \alpha\} \leq f(\alpha) \Rightarrow -\sup\{f(s): a \leq s < \alpha\} \geq -f(\alpha)$$

Si sumamos las dos desigualdades:

$$\underline{\omega(f,\alpha) \geq f(\alpha) - f(\alpha) = 0}$$

Tomamos $\varepsilon \geq 0$ tal que $\alpha \leq \alpha + \varepsilon < v \leq b$. Utilizando que f es creciente:

$$\inf\{f(t): a < t \leq b\} \leq f(\alpha+\varepsilon) \leq f(v)$$

Así si $\varepsilon' \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq u > \alpha - \varepsilon' \geq \alpha$ Usando que f es creciente:

$$\sup\{f(s): a \leq s < \alpha\} \geq f(\alpha - \varepsilon') \geq f(u) \Rightarrow$$

$$-\sup\{f(s): a \leq s < \alpha\} \leq -f(u).$$

Sumando las igualdades:

$$\underline{f(v) - f(u) \geq \omega(f,\alpha)}$$

ii) Consideramos la punta:

$$a = x_0 < \alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2 < \dots < x_{p-1} < \alpha_p < x_p = b$$

con el resultado anterior tenemos:

$$\omega(f,\alpha_i) \leq f(x_i) - f(x_{i-1}),\ \forall i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq p$$

Entonces:

$$\underline{\sum_{i=1}^{p} \omega(f,\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{p} f(x_i) - \sum_{i=0}^{p-1} f(x_i) = f(x_p) - f(x_0) = f(b) - f(a)}$$

Cristóbal Merino Sáez

iii) Usando una reducción al absurdo, buscamos que S_n es infinito para $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y si usamos m elementos del conjunto S_n con $w(f,\alpha_1), w(f,\alpha_2) \dots w(f,\alpha_m)$, tenemos $\sum_{i=1}^{m} w(f,\alpha_i) \geq m \cdot \frac{1}{n}$. Pero como hemos demostrado en el ejercicio ii), sabemos que:

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{m} w(f,\alpha_i), \text{ por lo que}$$
$$f(b) - f(a) \geq \frac{m}{n}.$$

Sabiendo que S_n es infinito y podemos elegir un m tal que $\frac{m}{n} > f(b) - f(a)$, es una contradicción, así la hipótesis es falsa. Así, S_n es finito para $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv) $T_n = \left\{ \alpha \in \,]a,b[\, : w(f,\alpha) > \frac{1}{n} \right\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\# T_n \leq \# S_n$, por lo que T_n es finito para cada $n \in \mathbb{N}$ y $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, ya que podemos aproximar 0 con $\frac{1}{n}$, haciendo n cada vez mayor. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que T_n es un conjunto numerable no vacío y finito. Así el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ es numerable, o lo que es lo mismo, $\underline{S \text{ es numerable}}$.