Cristóbal Merino Sáez

1.a) $\sum_{n\geq 1} \frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}$.

Tomo $a_n = \frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}$. Ahora aplico el criterio del cociente o de D'Alembert:

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \frac{\frac{((3n+3)!)^2 \cdot (a^{n+1})^6}{((n+1)!)^6}}{\frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}} =$$

$$\frac{(3n+3)^2 \cdot (3n+2)^2 \cdot (3n+1)^2 \cdot \cancel{((3n)!)^2} \cdot \cancel{a^{6n}} \cdot a^6 \cdot \cancel{(n!)^6}}{\cancel{((3n)!)^2} \cdot \cancel{a^{6n}} \cdot (n+1)^6 \cdot \cancel{(n!)^6}} =$$

$$\frac{a^6 \cdot (729n^6 + 2916n^5 + 4698n^4 + 3888n^3 + 1737n^2 + 384n + 36)}{n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 6n + 1} \Rightarrow$$

$$\lim \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = 729a^6 = L.$$

Según del criterio del cociente, si $L > 1$ la serie no converge y cuando $L < 1$, sí que converge.

Cristóbal Merino Sáez

Así, $L < 1 \Rightarrow 729a^6 < 1 \Rightarrow a < \sqrt[6]{\frac{1}{729}} \Rightarrow$

$$|a| < \frac{1}{3}.$$

De esta manera si $|a| < \frac{1}{3}$, la serie converge, y si $|a| > \frac{1}{3}$, no. La convergencia cuando $|a| = \frac{1}{3}$, la calculo a través del criterio de Raabe:

$$S_n\left\{n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right\} = n\cdot\left(1-\frac{((3n+3)\cdot(3n+2)(3n+1))^2}{(n+1)^6\cdot 3^6}\right) =$$

$$n\cdot\left(1-\frac{((3n+3)\cdot(3n+2)(3n+1))^2}{(3n+3)^6}\right) = n\left(1-\frac{(3n+2)^2\cdot(3n+1)^2}{(3n+3)^4}\right) =$$

$$n\cdot\left(\frac{(3n+3)^4-(9n^2+9n+2)^2}{(3n+3)^4}\right) = \frac{n\cdot\left((9n^2+18n+9)^2-(9n^2+9n+2)^2\right)}{(3n+3)^4}$$

$$S_n\left\{n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right\} \to \frac{162+162-(81+81)}{81} = 2$$

Así, $\lim S_n = 2 = L \Rightarrow L > 1$, así que converge.

Cristóbal Merino Sáez

Recapitulando, tenemos que cuando $|a| \leq \frac{1}{3}$, la serie converge y cuando $|a| > \frac{1}{3}$ no converge.

b) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdots (2n+7)} \right)^a$

Tomo $a_n = \left(\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdots (2n+7)} \right)^a$. Ahora aplico el método alternativo de Raabe, ya que $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \left(\frac{2n+4}{2n+9} \right)^a \Rightarrow \lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = 1$.

$$S_n = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n = \left(\frac{2n+9}{2n+4} \right)^{an} = \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+4}{5}} \right)^{an} =$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+4}{5}} \right)^{\frac{2n+4}{5}} \right]^{\frac{5na}{2n+4}} \Rightarrow \lim \{ S_n \} \sim e^{\frac{5a}{2}}.$$

Tomando entonces el criterio alternativo de Raabe, si $\frac{5}{2}a > 1$ la serie es convergente, por lo que cuando $a < \frac{2}{5}$ la serie no converge, y cuando $a > \frac{2}{5}$, la serie sí converge.

Cristóbal Moreno Sáez

2.- a) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}$.

Tomamos $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}$ y la serie quedaría tal que $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} a_n$.

Primero estudiamos la convergencia absoluta de la serie, y la estudiaré estudiando primero la convergencia de $\sum_{n\geq 1} a_n$:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

Por el criterio básico de comparación con la serie armónica, concluimos que la serie no converge completamente, ya que ambas series deben ser o divergentes o ambas convergentes, y sabemos que la serie armónica es divergente.

Ahora para estudiar la convergencia aplico el criterio de Leibniz:

Primero probamos que la sucesión a_n es decreciente:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1+1}} \iff$$

$$\cancel{n\sqrt{n^2+n}} + \sqrt{n^2+n} + n > \cancel{n\sqrt{n^2+n}} + \sqrt{n+1} \iff$$

$$\sqrt{n^2+n} + n^2 > \sqrt{n+1}^2 \iff n^2 + \cancel{n} + n^2 + 2n\sqrt{n^2+n} > \cancel{n} + 1 \iff$$

$2n^2 + 2n\sqrt{n^2+n} > 1$. Esto se cumple para $\forall n : n \geq 1$, ya que $2n^2 > 1 \Rightarrow 2n^2 + 2n\sqrt{n^2+n} > 1$. Así está probado que es decreciente.

En el apartado anterior podemos ver que $\{a_n\} \to 0$, así que aplicando el criterio de Leibniz, sabemos que la serie es convergente.

$$\lim a_n = \lim \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n} = 0$$

b) $$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}\ \sqrt[n+2]{3}}$$

Tomamos $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}\ \sqrt[n+2]{3}}$ y la serie quedaría tal que $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$.

Estudio primero la convergencia total de la serie. Para ello estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}\ \sqrt[n+2]{3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Claramente podemos observar que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ es divergente, así $\sum_{n\geq 1} a_n$ lo será también, por lo que la serie principal no converge totalmente.

Ahora estudio la convergencia de la serie aplicando el criterio de Leibniz:

- Voy a comprobar que $\{a_n\}$ es decreciente, para ello:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{\sqrt{n+2}\ \sqrt[n+2]{3}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}\ \sqrt[n+3]{3}} \iff$$

$$\sqrt{n+3}\ \sqrt[n+3]{3} > \sqrt{n+2}\ \sqrt[n+2]{3} \iff \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} > \frac{\sqrt[n+2]{3}}{\sqrt[n+3]{3}} = \sqrt[(n+2)(n+3)]{3} \iff$$

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} > \sqrt[n+3]{9}$$

Ahora aplico la desigualdad básica con $a=2$, $b=1$ y $n=n+1$ y tenemos:

$$ab^n < \left(\frac{a+bn}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow 2 < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}$$

y como ya sabemos que $2 > \sqrt[n+3]{9}$ se queda así:

$$\sqrt[n+3]{9} < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} \Leftrightarrow (n+3)^{n+2} > \sqrt[n+3]{9}\,(n+2)^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$n+3 > \sqrt[(n+2)(n+3)]{9}\,(n+2) \Leftrightarrow \sqrt{n+3} > \sqrt[(n+2)(n+3)]{3}\,\sqrt{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{n+3}\,\sqrt[n+3]{3} > \sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3} \Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$$

Así sabemos que $\{a_n\}$ es decreciente, y como sabemos que converge a 0:

$$\lim \{a_n\} = \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}} \sim 0 \cdot 1 = 0$$

Podemos asegurar que la serie converge por el criterio de Leibniz.