Aspectos Formais da Computação

Prof. Sergio D Zorzo
Departamento de Computação - UFSCar

2º semestre / 2017

Aula 12

Propriedades das Linguagens Livre de Contexto

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

Lema do bombeamento

- Para linguagens regulares
  - Prova que linguagens não são regulares
  - Base: para linguagens regulares, temos autômatos finitos
    - Autômatos finitos não conseguem contar
    - Esse é o limite das linguagens regulares, e basicamente é o que o lema busca provar
- Para linguagens livres de contexto
  - Prova que linguagens não são livres de contexto
  - Base: para linguagens livres de contexto, temos autômatos de pilha (veremos a seguir)
    - Autômatos de pilha conseguem contar somente uma "coisa", mas não duas, ao mesmo tempo
    - Esse é o limite das linguagens regulares, e basicamente é o que o lema busca provar

Lema do bombeamento

- Parecido com o lema do bombeamento para linguagens regulares
  - Em LR
    - Dividimos uma cadeia s em 3 partes, xyz
    - E "bombeamos" y (isto é, fazemos xy^iz para $i \geq 0$), e a cadeia resultante ainda deve estar na linguagem
  - Para LLC
    - Dividimos uma cadeia s em 5 partes, uvwxy
    - E "bombeamos" v e x (isto é, fazemos uv^iwx^iy para $i \geq 0$), e a cadeia resultante ainda deve estar na linguagem
- Ex: Se abcdefg faz parte da linguagem
  - Fazemos s=uvwxy, u=a,v=bc,w=de,x=f,y=g
  - Então "bombeando" v e x zero ou mais vezes, sempre obtemos cadeias que fazem parte da linguagem
  - Ou seja, adeg (i=0), abcbcdeffg (i=2) e abcbcbcdefffg (i=3) fazem parte da linguagem
    - Assim como todas as outras cadeias com v e x "bombeadas"

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

- Seja L uma linguagem livre de contexto.
  - Então, existe uma constante n tal que, se z é qualquer cadeia em L tal que |z| é pelo menos n, podemos escrever z = uvwxy, sujeito às seguintes condições:
    - $|vwx| \leq n$. Ou seja, a porção intermediária não é muito longa.
    - $vx \neq \varepsilon$. Tendo em vista que v e x são os fragmentos a serem “bombeados”, essa condição diz que pelo menos uma das cadeias que bombeamos não deve ser vazia.
    - Para todo $i \geq 0$, uv^iwx^iy está em L. Isto é, as duas cadeias v e x podem ser “bombeadas” qualquer número de vezes, incluindo 0, e a cadeia resultante ainda será um elemento de L.

Linguagens não livres de contexto

- Linguagens que precisam "contar duas coisas"
  - Ex: correspondência entre três grupos de símbolos de igualdade
    - $\{0^n1^n2^n \mid n \geq 1\}$ (ou $0^+1^+2^+$ com um número igual de cada símbolo)
    - Exs: 012, 001122, 000111222
  - Ex: comparar dois pares com números iguais de símbolos, quando os pares se intercalam
    - $\{0^i1^j2^i3^j \mid i \geq 1 \text{ e } j \geq 1\}$
    - Exs: 00012223, 00111112233333

Linguagens não livres de contexto

- Exemplo importante
  - Linguagens livres de contexto não podem comparar duas cadeias de comprimento arbitrário, se as cadeias forem escolhidas a partir de um alfabeto com mais de um símbolo.
  - Seja L = {ww | w está em {0,1}*}. Isto é, L consiste em cadeias repetitivas, como ε, 0101, 00100010, 110110.
  - Usando o lema do bombeamento, é possível provar que L não é livre de contexto

Aplicando o lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

- Se L é livre de contexto, então seja n a constante de seu lema do bombeamento
  - Considere a cadeia $z = 0^n1^n0^n1^n$
  - Essa cadeia é 0^n1^n repetida, e assim, z está em L
- Vamos desmembrar $z = uvwxy$, tal que $|vwx| \leq n$ e $vx \neq \varepsilon$
  - É possível mostrar que uwy não está em L
    - Não faremos essa prova aqui!
  - Ou seja, "bombeando" v e x zero vezes, obtemos uma cadeia que não está em L
    - Ferindo o lema
  - Isso é uma contradição, e portanto concluímos que L não é livre de contexto

Linguagens não livres de contexto

- Esse caso é particularmente interessante
- Considere a seguinte cadeia, em uma linguagem de programação típica:

Irá acusar erro aqui, pois a variável nmero não foi declarada

```
String numero = 0;
if (nmero > 0) {
  System.out.println("Nunca vai entrar
    aqui");
}
```

- Em algumas LP, variáveis precisam ser declaradas antes de serem utilizadas
  - É o mesmo caso da linguagem {ww | w em um alfabeto com mais de um símbolo}

Linguagens não livres de contexto

- Outros exemplos: declaração de pacotes, macros, chamada de funções, etc.
- Ou seja, gramáticas livres de contexto não conseguem impor todas as restrições “semânticas” de uma linguagem de programação típica
- Como é feito então?
  - Outros mecanismos, como uma “tabela de símbolos”
  - Mais sobre isso na disciplina de compiladores

Autômatos a Pilha e Gramáticas Livre de Contexto

Linguagens livres de contexto

- A partir de uma gramática livre de contexto é possivel obter um autômato a pilha que reconhece a mesma linguagem

- A partir de um autômato a pilha é possivel obter uma gramática livre de contexto que gera a mesma linguagem reconhecida pelo autômato a pilha.

Linguagens livres de contexto

- Se L é uma livre de contexto então

Existe um autômato a pilha que reconhece a linguagem L e esse autômato pode ter apenas um estado.

Propriedades das Linguagens Livre de Contexto

Linguagens livres de contexto

- É fechada sob as operações de:

- União
- Concatenação

- Não é fechada sob a operação de

- Intersecção

Linguagens livres de contexto

- É possivel identificar (por um algoritmo) que uma particular linguagem livre de contexto L é

- Vazia
- Finita
- Infinita

Fim