

# ANÁLISE DE FOURIER

Notas de Aula: **MAT0464**  
Professor Dr. Paulo D. Cordaro

Gustavo P. Mezzovilla

# Capítulo 1

## A série de *Fourier*

...

### 1.1 O núcleo de *Dirichlet*

**Definição 1.1.1.** Seja  $X$  espaço topológico,  $\varphi : X \longrightarrow ]-\infty, \infty]$ . Dizemos que  $\varphi$  é semi-continua inferiormente (S.C.I.) em  $X$  quando  $\{x : \varphi(x) > \alpha\}$  é aberto em  $X$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .


Note que  $\varphi^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{x \in X \mid \varphi(x) > n\}$  é  $G_\delta$ .

**Exercício 1.1.2.** Se  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  é uma família de funções S.C.I., mostre que  $\sup_{i \in I} \varphi_i$  é S.C.I.

*Solução.* Seja  $U(f) = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$  para um  $\alpha$  qualquer e um dado funcional  $f$ . Note que

$$U\left(\underbrace{\sup_{i \in I} \varphi_i}_{\psi}\right) = \bigcup_{i \in I} U(\varphi_i)$$

De fato, seja  $x$  tal que  $\psi(x) > \alpha$ . Por ser o supremo, existe  $i \in I$  tal que  $\psi(x) \geq \varphi_i(x) > \alpha$ . Logo  $x \in U(\varphi_i)$ , mostrando que  $U(\psi)$  está contido na união acima. A outra inclusão é evidente.

Como cada  $\varphi_i$  é S.C.I., o conjunto acima é uma união de abertos, i.e.,  $U(\psi)$  é aberto. Como o argumento acima funciona para todo  $\alpha$ , segue o resultado. 

Escolha uma sequência  $\{\theta_j\}_j \subset \mathbb{T}$ . Pelo teorema de Baire (1899)<sup>1</sup>, existe  $H \subset C(\mathbb{T})$  tal que  $\sup_{N \in \mathbb{N}} |S_N(f, \theta_j)| = \infty$  para qualquer  $f \in H$ . Fixando uma  $f$ , note que aplicação  $|S_N(f, \cdot)|$  é contínua no intervalo  $[-\pi, \pi[$ . Logo, a função


$$\begin{aligned} \lambda_f : [-\pi, \pi[ &\longrightarrow ]-\infty, \infty] \\ \theta &\longmapsto \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_N(f, \theta)| \end{aligned}$$


é semi-contínua inferiormente (S.C.I) em  $\mathbb{T}$ . Além disso, o conjunto dos ângulos tais que  $\lambda_f(\theta) = \infty$  é  $G_\delta$ . Escolhendo  $\{\theta_j\}_j$  denso em  $\mathbb{T}$ , concluímos o seguinte Teorema:

**Teorema 1.1.3.** Existe  $H \subset C(\mathbb{T})$   $G_\delta$ -denso tal que, se  $f \in H$  o conjunto

$$\left\{ \theta \in \mathbb{T} \mid \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_N(f, \theta)| = \infty \right\}$$

é  $G_\delta$ -denso e tem medida zero.

**Observação 1.1.4.** Em um espaço métrico completo sem pontos isolados, todo conjunto  $G_\delta$ -denso é não enumerável. De fato, se um conjunto enumerável  $G = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  for denso e puder ser escrito como a intersecção de abertos  $U_n$  não triviais, cada  $U_n$  também seria denso. Note que todo  $V_n := U_n \setminus \{g_n\}$  é um aberto-denso visto que o espaço não possui pontos isolados. Entretanto,  $\bigcap_n V_n = \emptyset$  contrariando o Teorema de Baire. 

**Invocação 1.1.5** (Carleson (1966)). Se  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , então as somas parciais  $S_N(f, \cdot)$  convergem para  $f$  para quase todo ponto em  $\mathbb{T}$ . 

<sup>1</sup>A intersecção de abertos densos em um espaço métrico completo é densa.

## 1.2 Decaimento dos Coeficientes

**Teorema 1.2.1.** Seja  $k \geq 1$  e  $f \in C^k(\mathbb{T})$ . Então existe uma constante  $c = c(f, k) > 0$  que estima o  $n$ -ésimo coeficiente da expansão de Fourier:

$$|C_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{c}{|n^k|}$$

para qualquer inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Note que a  $k$ -ésima derivada de  $e^{-in\theta}$  é igual a  $(-in)^k e^{-in\theta}$ . Substituindo na expressão do  $n$ -ésimo termo, podemos integrar por partes para obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} C_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{1}{(-in)^k} \frac{d^k}{d\theta^k} [e^{-in\theta}] d\theta \\ (1.1) \quad &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(-in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \end{aligned}$$

Tomando o valor absoluto em (1.1), o valor  $c := (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}|$  satisfaz a propriedade desejada.  $\square$

**Lema 1.2.2** (Riemann-Lebesgue). Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , então  $C_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Note que para qualquer  $g \in L^1(\mathbb{T})$ , temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} |C_n(f)| &= |C_n(f - g + g)| \\ &= |C_n(f - g) + C_n(g)| \\ &\leq |C_n(f - g)| + |C_n(g)| \\ &\leq \|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} + |C_n(g)| \end{aligned}$$

Como  $C^1(\mathbb{T})$  é denso em  $L^1(\mathbb{T})$ , existe  $g \in C^1(\mathbb{T})$  tal que  $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \varepsilon/2$ . E pelo Teorema 1.2.1, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|C_n(g)| < \varepsilon/2$  para  $|n| \geq n_0$ . Ou seja,  $|C_n(f)| < \varepsilon$  para  $|n| \geq n_0$ .  $\square$

**Corolário 1.2.3.** Considerando a forma integral dos coeficientes de Fourier, é possível definir  $C_\alpha(f)$  para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consequentemente, os resultados 1.2.1 e 1.2.2 continuam válidos sobre essa extensão.

**Teorema 1.2.4.** Sejam  $f \in C(\mathbb{T})$  e  $t_0 \in \mathbb{T}$ . Suponha que existem  $c > 0$  e  $\delta > 0$  tais que:

$$|f(t) - f(t_0)| \leq c|t - t_0| \quad (\forall t : |t - t_0| < \delta)$$

Então  $S_N(f, t_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t_0)$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $S_N(f, t_0) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - \theta) D_N(\theta) d\theta$  e portanto:

$$\begin{aligned}
 S_N(f, t_0) - f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - \theta) D_N(\theta) d\theta \\
 &\quad - f(t_0) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) d\theta}_{=1} \\
 (1.2) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t_0 - \theta) - f(t_0)] D_N(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t_0 - \theta) - f(t_0)}{\sin \theta/2} \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Vamos verificar no lema 1.2.5 abaixo que a aplicação dada por

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad h : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 \theta &\longmapsto \frac{f(t_0 - \theta) - f(t_0)}{\sin \theta/2}
 \end{aligned}$$

pertence a  $L^1(\mathbb{T})$ . Isso possibilitará aplicar o lema de Riemman-Lebesgue 1.2.2. Assim, reescrevendo a expressão em (1.2) em função de  $h$  e da ex-

pressão exponencial do  $\sin(\cdot)$ , temos:

$$\begin{aligned}
 S_N(f, t_0) - f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta}}{2i} \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) e^{i(N+\frac{1}{2})\theta} d\theta \\
 &\quad - \frac{1}{2i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta} d\theta
 \end{aligned}$$

Pelo lema de Riemman-Lebesgue 1.2.2, os dois termos acima convergem para 0 e portanto, temos que  $S_N(f, t_0) - f(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .  $\square$

**Lema 1.2.5.** A aplicação  $h$  definida em (1.3) pertence a  $L^1$ .

*Demonstração.* Note que

$$h(\theta) = \frac{f(t_0 - \theta) - f(t_0)}{\theta} \cdot \underbrace{\frac{\theta}{\sin \theta/2}}_{\in L^\infty(\mathbb{T})}$$

Por hipótese, se  $\theta \in \mathbb{T}$  satisfaz  $|\theta| < \delta$ , então  $|f(t_0 - \theta) - f(t_0)| \leq c|\theta|$ . Por outro lado, se  $|\theta| \geq \delta$ , considere  $M > 0$  tal que  $|f(\theta)| \leq M$  (que existe pois  $f$  é uma contínua definida num compacto). Assim  $|f(t_0 - \theta) - f(t_0)| \leq 2M|\theta|/\delta$ . Ou seja:

$$\frac{|f(t_0 - \theta) - f(t_0)|}{|\theta|} \leq \begin{cases} c, & \text{se } |\theta| < \delta \\ 2M/\delta, & \text{se } |\theta| \geq \delta \end{cases}$$

Considerando os dois casos, nota-se que  $h$  é o produto de uma função limitada por uma que pertence a  $L^\infty(\mathbb{T})$ . Portanto,  $h \in L^1(\mathbb{T})$ .  $\square$

...

## 1.3 O Teorema de Fejer

**Definição 1.3.1.** O núcleo de Fejer é dado por  $F_N(\theta) = \sum_{n=0}^N D_n(\theta)$ .

**Lema 1.3.2.**  $F_N(\theta) = \sin^2[(N+1)\theta/2]/[\sin^2 \theta/2 \cdot (N+1)]$

**Teorema 1.3.3 (Fejer).** Se  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$  é contínua em um ponto  $t_0 \in \mathbb{T}$ , então  $\sigma_N(f, t_0) \rightarrow f(t_0)$ . Caso  $f$  seja contínua em todo ponto, então  $\sigma_N(f, \cdot) \rightarrow f$  uniformemente em  $\mathbb{T}$ .

Para demonstrar este Teorema, vamos estudar algumas propriedades do núcleo de Fejer na 1.3.4

**Proposição 1.3.4.** A respeito do núcleo de Fejer 1.3.1, valem as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi[, F_N(\theta) \geq 0;$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta) d\theta = 1.$$

(iii) Para um dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $T_\varepsilon := [-\pi, \pi[ \setminus \{\theta \in \mathbb{T} \mid |\theta| < \varepsilon\}$ . Assim,

$$\int_{T_\varepsilon} F_N(\theta) d\theta \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$ .

## 1.4 $L^2(\mathbb{T})$ como espaço de Hilbert

Vamos utilizar o seguinte resultado sobre ortonormalidade em espaços de Hilbert.

**Invocação 1.4.1.** Seja  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  um conjunto de vetores ortonormais em um espaço de Hilbert  $H$ , e suponha que  $\text{Span}\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forme um

subespaço denso. Assim, todo  $x \in H$  pode ser escrito como

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e_n$$

onde  $x_n := \langle x, e_n \rangle$  é o  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $x$ . Além disso, temos que  $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}$ . Em particular, temos a seguinte versão do teorema de Pitágoras para espaços de Hilbert:

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2.$$



Consideramos o seguinte produto interno em  $L^2(\mathbb{T})$ , tornando-o em um espaço de Hilbert:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

Considerando  $e_n := (\theta \mapsto e^{in\theta}) \in L^2(\mathbb{T})$ , nota-se que  $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$ , de modo que  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forma um sistema ortonormal em  $L^2(\mathbb{T})$ . Portanto, podemos utilizar a estrutura de Hilbert 1.4.1 e concluir a *fórmula de Parseval* para funções  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) \overline{C_n(g)}$$

Combinações lineares desses vetores resultam em polinômios na variável  $e^{i\theta}$  ( $\mathbb{C}[e^{i\theta}] = \mathbb{C}[\cos \theta, \sin \theta]$ ), e por tanto,  $\text{Span}_{n \in \mathbb{Z}} \{e_n\}$  é conhecido como o conjunto dos *polinômios trigonométricos*.

**Proposição 1.4.2.** O espaço dos polinômios trigonométricos  $\mathbb{C}[e^{i\theta}]$  é denso em  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Demonstração.* Escolha  $f \in L^2(\mathbb{T})$  e  $\varepsilon > 0$ . Como as funções contínuas são densas em  $L^2(\mathbb{T})$ , tome  $u \in C(\mathbb{T})$  tal que  $\|f - u\| < \varepsilon/2$ .



Pelo Teorema da aproximação de Weierstraß, existe um polinômio trigonométrico  $p \in \mathbb{C}[e^{i\theta}]$  tal que  $(\sup_{t \in \mathbb{T}} |u(t) - p(t)|)^{1/2} < \varepsilon/2$ . Em particular,

$$\|u - p\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|u(\theta) - p(\theta)|}_{\leq \sup_{t \in \mathbb{T}} |u(t) - p(t)|} d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

O resultado segue da desigualdade triangular.  $\square$

Como consequência do resultado acima 1.4.2, obtemos  $S_N(f, \cdot) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$  para as funções  $f \in L^2(\mathbb{T})$ .

**Corolário 1.4.3.** Se  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , então existe uma sequência de índices  $N_j \rightarrow \infty$  tal que  $S_{N_j}(f, \theta) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(\theta)$  para quase todo  $\theta \in \mathbb{T}$ .

**Corolário 1.4.4.** Se  $f \in L^2(\mathbb{T})$  e  $P_R$  é o núcleo de Poisson, então  $P_R(f, \cdot) \xrightarrow{R \rightarrow 1} f$  em  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Demonstração.* Como  $\{e^{in\theta}\}_n$  forma um sistema ortonormal, vale o Teorema de Pitágoras:

$$\|P_R(f, \theta) - f(\theta)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (R^{|n|} - 1)^2 |C_n(f)|^2 \underbrace{|e^{in\theta}|^2}_1 \xrightarrow{R \rightarrow 1} 0.$$

$\square$

**Corolário 1.4.5.** Se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , então  $S_N(f, \cdot) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$  uniformemente em  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é diferenciável em todo ponto, a convergência das somas parciais se dá de maneira pontual. De modo a garantir a uniformidade, vejamos que a série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{in\theta}$  converge uniformemente para  $f(\theta)$  em  $\mathbb{T}$ .

Apliquemos o M-teste de Weierstraß (Rudin, 1976, Theorem 7.10), obtendo estimativas do termo genérico  $C_n(f)$ , assim como na demonstração do

Teorema 1.2.1. Integrando por partes e usando a desigualdade das médias na seguinte forma,  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  para quaisquer  $a, b \geq 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 C_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{1}{-in} \frac{d}{d\theta} [e^{-in\theta}] d\theta \\
 &= \frac{1}{-in} \left[ \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}}_0 - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta}_{C_n(f')} \right] \\
 &= \frac{1}{in} C_n(f') \\
 &\stackrel{\text{MA-MG}}{\leq} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|n|^2} + |C_n(f')|^2 \right) =: M_n.
 \end{aligned}$$

Como  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , temos que  $f'$  é contínua e, portanto,  $C_n(f') \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$  pelo Lema de Riemann-Lebesgue ???. Assim, a série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  converge, e o M-teste garante a convergência uniforme da série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{in\theta}$ .  $\square$

**Corolário 1.4.6.** Se  $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ , então  $S_N(f, \cdot)^{(j)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f^{(j)}$  uniformemente em  $L^2(\mathbb{T})$  para qualquer ordem  $j \geq 0$  de derivada.

*Demonstração.* A ideia é a mesma da demonstração do corolário anterior. A  $j$ -ésima derivada da série é dada por  $\sum_n C_n(f) (in)^j e^{in\theta}$ . Como  $f$  é em particular de classe  $C^{j+2}$ , existe<sup>2</sup> uma constante  $\alpha = \alpha(j, f)$  tal que  $|C_n(f)| \leq \alpha/|n|^2$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . O resultado segue do M-teste de Weierstraß.  $\square$

---

<sup>2</sup>Basta integrar por partes introduzindo a derivada de ordem  $j+2$ .

## Capítulo 2

# Aplicações na Análise Complexa

Antes de prosseguir, definimos a terminologia que será utilizada ao longo deste capítulo. Para evitar confusões com as funções analíticas reais, chamaremos de *função holomorfa* toda função  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$  que é diferenciável em todo ponto de um conjunto aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . É denotado por  $\mathcal{O}(\Omega)$  o conjunto de todas as funções holomorfas em  $\Omega$ . Além disso, definimos um *anel complexo*  $A(z_0, a, b) := \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z - z_0| < b\}$ .

Com as definições acima, podemos enunciar a questão fundamental da qual iremos investigar:

**Questão.** Seja  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Quando é possível determinar  $\varepsilon > 0$   $h \in \mathcal{O}A(0, 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  tal que  $h|_{\mathbb{T}} = f$ ?

# Índice Remissivo

Baire, [3](#)

M-teste de Weierstraß, [9](#)

# Referências Bibliográficas

Baire, R. (1899). Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922)*, 3:1–123.

Carleson, L. (1966). On convergence and growth of partial sums of fourier series. *Uppsala, Sweden, and Stanford California, U.S.A.* [http://archive.ymsc.tsinghua.edu.cn/pacm\\_download/117/6015-11511\\_2006\\_Article\\_BF02392815.pdf](http://archive.ymsc.tsinghua.edu.cn/pacm_download/117/6015-11511_2006_Article_BF02392815.pdf).

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill.