

MAT-0148 — Introdução ao Trabalho Científico

Relatório Final

Título: Fredholm Operators between Hilbert C^* -Modules
Aluno: Gustavo Pauzner Mezzovilla Gonçalves
Orientador: Severino Toscano do Rego Melo – IME-USP
Início: 2º Semestre de 2022

1. RESUMO

Durante o ano letivo de 2022, o aluno realizou um estudo detalhado de todas as componentes principais do artigo “*A Fredholm Operator Approach to Morita equivalence*”, de Ruy Exel [2] contemplando tópicos de K -teoria de Álgebras de Banach, C^* -Módulos de Hilbert, Operadores de Fredholm generalizados e suas aplicações.

2. EXECUÇÃO, ANDAMENTO E OBJETIVOS ATINGIDOS

A metodologia utilizada foi a usual na pesquisa em Matemática, com exposição dos resultados obtidos pelo aluno e discussão dos mesmos. Os temas abordados no plano inicial estão apresentados a seguir, com o respectivo parecer.

- (i) *Estudar módulos de Hilbert sobre C^* -álgebras.*
▷ Realizado.
- (ii) *Estudo de operadores entre Módulos de Hilbert; Generalização dos conceitos de posto e compacidade desses operadores; Estudar módulos quase isomorficamente estáveis e classificação dos mesmos.*
▷ Realizado. O aluno pode reunir diversos exemplos e apresentar de uma forma detalhada a demonstração do Teorema 2.7 do artigo de referência [2], além de simplificar um argumento. Os conteúdos necessários nessa fase se acumularam de modo que o aluno necessitou estudar o Teorema de Estabilização de Kasparov [3] e mais propriedades do mapa do índice $\partial : K_1(A/I) \rightarrow K_0(I)$. Além disso, algumas interações com o autor foram necessárias para uma exposição mais detalhada.
- (iii) *Estudar operadores de Fredholm entre C^* -módulos de Hilbert sobre A ; Definição do índice de Fredholm $\text{ind} : \mathcal{L}_A(E, F) \rightarrow K_0(A)$; Interpretação e comparação dos resultados clássicos nessa abordagem.*
▷ Realizado. Muitos resultados técnicos necessitaram um estudo mais detalhado, de modo que fontes auxiliares foram necessárias, além de interações com o autor. Vale mencionar que durante a realização do projeto, o objetivo final sofreu alteração, passando a ser explicitar as relações dos operadores de Fredholm.
- (iv) *Estudo de representações de bimódulos de Hilbert e suas relações com K -teoria; Compreender o resultado final de [2] a respeito do isomorfismo entre os K -grupos de C^* -álgebras Morita-Rieffel equivalentes; Observar as diferenças teóricas entre este e o resultado obtido por Brown, Green e Rieffel por meio da abordagem dos operadores de Fredholm.*
▷ Frente a mudança de objetivo, o teorema de Brown, Green e Rieffel que era o objetivo inicial não foi estudado em detalhes da mesma forma que os tópicos anteriores. Estes representaram parte substancial do desenvolvimento do projeto, e, não necessitou-se compreender afincamente o estudo de representações devido. Apesar da comparação entre as técnicas não ser realizada, visto que, o estudo da demonstração original requisitaria outros campos de estudo, a vantagem do método fora ressaltada quando explicitada a ausência da hipótese de C^* -álgebra σ -unitais durante os temas anteriores.
- (v) *Caso seja possível, o aluno irá investigar as relações entre o índice de Fredholm e o índice Atiyah para famílias contínuas de operadores de Fredholm.*
▷ Tópico extra não realizado.

3. COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

A banca examinadora da monografia é composta por:

1. Severino Toscano do Rego Melo – IME-USP
2. Ricardo Bianconi – IME-USP
3. Gilles Gonçalves de Castro – UFSC

REFERÊNCIAS

- [1] Lawrence Brown, Philip Green, and Marc Rieffel. Stable isomorphism and strong morita equivalence of C^* -algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 71(2):349–363, 1977. <https://projecteuclid.org/journals/pacific-journal-of-mathematics/volume-71/issue-2/Stable-isomorphism-and-strong-Morita-equivalence-of-C-algebras/pjm/1102811432.full?tab=ArticleLinkCited>.
- [2] Ruy Exel. A fredholm operator approach to morita equivalence. *K-Theory*, 7(3). <http://mtm.ufsc.br/~exel/papers/morita.pdf>.
- [3] G. G. KASPAROV. Hilbert C^* -modules : Theorems of stinespring and voiculescu. *Journal of Operator Theory*, 4(1):133–150, 1980.
- [4] Iain Raeburn and Dana P Williams. *Morita equivalence and continuous-trace C^* -algebras*. Number 60. American Mathematical Soc., 1998.
- [5] Marc Rieffel. C^* -algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics*, 93(2):415–429, 1981. <https://msp.org/pjm/1981/93-2/pjm-v93-n2-p12-s.pdf>.
- [6] Marc A Rieffel. Induced representations of C^* -algebras. *Advances in Mathematics*, 13(2):176–257, 1974. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870874900681>.