Operadores de Fredholm entre C^*-módulos de Hilbert

Gustavo Pauzner Mezzovilla

Pré-requisitos

```
import C*-algebras.complex
from functional-analysis import hilbert-spaces,
                                 fredholm-operators
from ring-theory import left_modules,
                        right_modules, bimodules
# so por seguranca
from K-theory.banach-algebras import K_0, K_1
```

Motivação: *Teorema de Exel*

Teorema (Exel (1992))

Os K-grupos de duas C^*-álgebras Morita-Rieffel equivalentes (não necessariamente separáveis) coincidem.

Demonstração. Existe um (A, B)-bimodulo X de *imprimitividade* tal que

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\cdot \otimes I_X} & F(B) \\ \big\downarrow \text{ind} & & \big\downarrow \text{ind} \\ K_0(A) & \longrightarrow & K_0(B) \end{array}$$

é comutativo. $\square$

Hummmm...

Itinerário

- Conhecer módulos de Hilbert sobre C^*-álgebras.
- Conhecer os Operadores de Fredholm entre C^*-módulos.
- Ter uma noção do *índice* e do isomorfismo $F(A) \longrightarrow K_0(A)$.
- Dar um suspiro na motivação do teorema de Exel.

Definição

Um C^*-módulo de Hilbert E é um A-módulo a direita (A uma C^*-álgebra complexa), abençoado com um produto interno[1]*:*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow A \tag{1}$$

onde a norma $\|x\| := \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|}$ é completa.

Observação

- `!Error304 at ''from hilbert-`C^*`-modules import riezs-lemma'' :`
  `--> No ''riezs-lemma'' found`
- Nem todo operador linear tem adjunto.

[1] Linear na 1ª e Involuto-linear; Hermitianidade da Involução e positivo definido.

Digressão: Operadores de Fredholm

Os operadores de Fredholm são aqueles $T \in \mathscr{B}(E, F)$ com núcleo e co-núcleo finito dimensionais, com índice dado

$$\operatorname{ind}(T) := \dim \ker T - \dim \ker T^* \in \mathbb{Z}$$

Invocação (Teorema de Atikinson)

Os operadores de Fredholm são precisamente os invertíveis módulo compacto, i.e.,

$$T : H_1 \longrightarrow H_2 \text{ é Fredholm} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists\, S : H_2 \longrightarrow H_1, t.q. \\ Id_{H_2} - ST \text{ e } Id_{H_1} - TS \\ \text{são compactos} \end{array}$$

Entre A-módulos E e F de Hilbert, operadores da forma $\theta_{x,y} \coloneqq \sum_n y_n \langle x_n, \cdot \rangle$ são os de *rank-finito*.

Definição (Operadores Compactos)

$\mathscr{K}(E,F) \coloneqq \overline{\operatorname{Span}_{x,y} \theta_{x,y}}$ *é um ideal bilateral dos adjuntáveis* $\mathscr{L}(E,F)$.

Definição

Os operadores de Fredholm entre E e F são os invertíveis módulo compacto.

Índice

Os módulos de *rank-finito* M são os isomorfos a pA^n, com p matriz idempotente $n \times n$.

$$\operatorname{rank}(M) := [p]_0 \in K_0(A)$$

Proposição (Definição do Índice)

$T : E \longrightarrow F$ é Fredholm $\Leftrightarrow$ são módulos de rank-finito $\ker T$ e $\ker T^*$. O índice de T é dado por

$$\operatorname{ind}(T) := \operatorname{rank}(\ker T) - \operatorname{rank}(\ker T^*)$$

Teorema

É um isomorfismo de grupos

$$\mathrm{ind} : \underbrace{\frac{\text{“}\bigcup_{E,F} \mathscr{F}(E,F)''}{\mathrm{ind}(T_1) = \mathrm{ind}(T_2)}}_{F(A)} \longrightarrow K_0(A)$$