

P1 Frequenzgang und Fourier-Reihe

Praktikum Signale und Systeme 1



Finn Lanz Malte Müller

10. April 2019

Name	Funktion
Malte Müller	Protokollführer
Finn Lanz	Teilnehmer

SS1P/2 - E-B3 - VLM

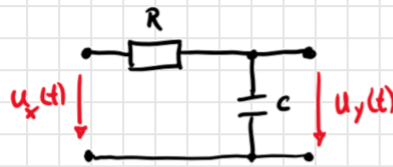
Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	3
2	Aufgaben im Labor	6
2.1	Theoretische Lösung aus V1 (A1)	6
2.2	Erweiterung der ersten Aufgabe (A2)	7
2.3	Approximation der Lade- und Entladekurve (A3)	9

1 Vorbereitung

V1: Ausgangssignal $u_y(t)$ entspricht Lade- und Entladekurve eines Kondensators:

$$u_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ U \cdot (1 - e^{-\frac{T_1}{T_1}}) \cdot e^{-\frac{(t-T_1)}{T_1}} & \text{für } t > T_1 \end{cases}$$



$$u_x(t) = U \cdot \text{rect}\left(\frac{t - T_1/2}{T_1}\right)$$

$$\Rightarrow u_x(T_1) = U \cdot \text{rect}\left(\frac{T_1 - T_1/2}{T_1}\right) = U \cdot \text{rect}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{U}{2}$$

V2: $u_{x,T}(t) = \sum_p u_x(t - pT)$, $T_1 < T$

$$\Leftrightarrow u_{x,T}(t) = \sum_p U \cdot \text{rect}\left(\frac{(t - pT) - T_1/2}{T_1}\right)$$

$$\Rightarrow X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_x(t) \cdot e^{-j2\pi k F t} dt$$

→ Vereinfachung, da Rechtecksignal:



$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} U \cdot e^{-j2\pi k F t} dt$$

$$= \frac{U}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi k F t}}{-j2\pi k F} \right]_0^{T_1} = \frac{U}{T} \cdot \frac{e^{-j2\pi k F T_1} - 1}{-j2\pi k F} \quad \left(\begin{array}{l} \text{für} \\ k \neq 0 \end{array} \right)$$

← geht schöner...

Durch Verschiebung der Grenzen:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow X_k &= \frac{U}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi k F t}}{-j2\pi k F} \right]_{t_0 - \frac{T_1}{2}}^{t_0 + \frac{T_1}{2}}, \text{ mit } t_0 = \frac{T_1}{2} \\
 &= \frac{U}{T} \cdot \frac{e^{-j2\pi k F (t_0 + \frac{T_1}{2})} - e^{-j2\pi k F (t_0 - \frac{T_1}{2})}}{-j2\pi k F} \cdot \frac{T_1}{T_1} \\
 &= U \cdot \frac{T_1}{T} \cdot e^{j2\pi k F t_0} \cdot \text{si}(\pi k F T_1)
 \end{aligned}$$

$$k=0: X_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} U \cdot e^0 dt = \frac{U}{T} \cdot T_1$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{F.R.: } u_{x,T}(t) &= \sum_k X_k \cdot e^{-j2\pi k F t} \\
 &= \sum_k U \cdot \frac{T_1}{T} \cdot e^{j2\pi k F (\frac{T_1}{2})} \cdot \text{si}(\pi k F T_1)
 \end{aligned}$$

V3: $Y_k = H(k \cdot F) \cdot X_k$

$$\begin{aligned}
 H(k \cdot F) &= \frac{u_Y(t)}{u_X(t)} = \frac{j\omega C}{R + j\omega C} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \\
 &= \frac{1}{1 + j2\pi k F RC}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_Y(t) = \sum_k H(k \cdot F) \cdot X_k \cdot e^{-j2\pi k F t}$$

$$= \sum_k \frac{1}{1 + j2\pi k F R C} \cdot u \cdot \frac{T_1}{T} \cdot e^{j2\pi k F (\frac{T_1}{2})} \cdot \sin(\pi k F T_1) \cdot e^{-j2\pi k F t}$$

V4: Ein geladener Kondensator entlädt sich nach 5τ nahezu vollständig. Somit wird der Kondensator in einer Periode T geladen und vollständig entladen.



2 Aufgaben im Labor

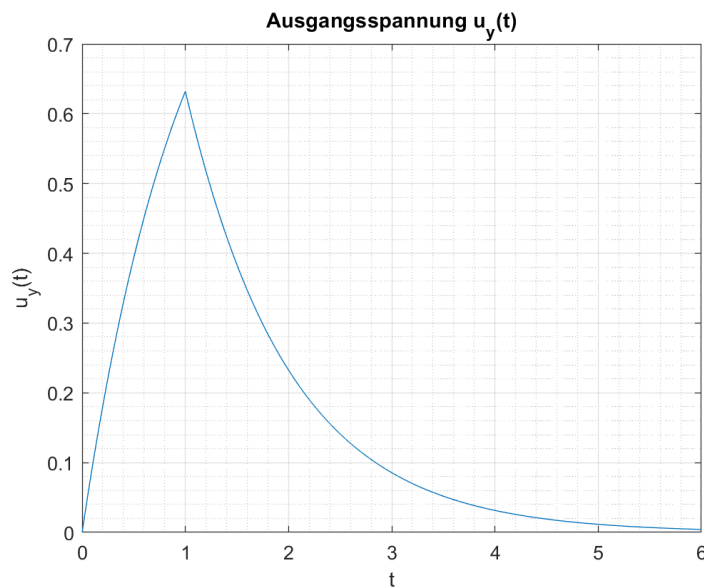
2.1 Theoretische Lösung aus V1 (A1)

Aufgabenstellung:

Schreiben Sie ein Programm, das die theoretische Lösung aus V1 für $t = T$ zeigt, d.h. die Ausgangsspannung $u_y(t)$. Stellen Sie das Bild für $0 \leq t \leq T + 5\tau$ dar. Verwenden Sie dazu den `plot` - Befehl. Beschriften Sie den Plot mit Hilfe von `title` und `xlabel`.

```
1 %% Aufgabe 1
2
3 % Berechnung der Lade- und Entladekurve
4
5 t1 = 0:dt:tau;           % Ladezeit
6 uy1 = U * (1-exp(-t1/tau)); % Ladefunktion
7
8 t2 = tau:dt:(tau+5*tau); % Entladezeit
9 uy2 = U * (1-exp(-tau/tau)) * exp(-(t2-tau)/tau); % Entladefkt
10
11 uy = [uy1, uy2];        % Zusammensetzen der Lade- und Entladewerte
12 t = [t1, t2];
13
14 plot(t, uy); grid on; grid minor; %axis tight;
15
16 % Beschriftung des Graphen:
17
18 title('Ausgangsspannung u_y(t)');
19 xlabel('t');
20 ylabel('u_y(t)');
```

Ausgegeben wird folgende Grafik:



Zu sehen ist der Lade- und Entladevorgang der RC-Schaltung. Der Entladevorgang ist nach ungefähr $5/\tau$ abgeschlossen.

2.2 Erweiterung der ersten Aufgabe (A2)

Aufgabenstellung:

Nun soll $t = m \cdot T/5$ mit $m = 1, \dots, 10$ gelten. Erweitern Sie das Skript um eine Schleife über m , die mit **pause** zum Ansehen angehalten wird. Beschriften Sie den Plot mit Hilfe von **title**, **xlabel** und **num2str**. Speichern Sie die Bilder für $m = 1, 3$, und 10 ab.

```

1 %% Aufgabe 2
2 U = 1;
3 T1 = 1; % Umschaltzeitpunkt
4 tau = 1;
5 dt = tau/100;
6
7 for m = 1:10
8     tau = m*T1/5;
9
10    t1 = (0:dt:T1);
11    uy1 = U * (1-exp(-t1/tau));
12
13    t2 = (T1:dt:((T1+5*tau)));
14    uy2 = U * (1-exp(-T1/tau)) * exp(-(t2-T1)/tau);

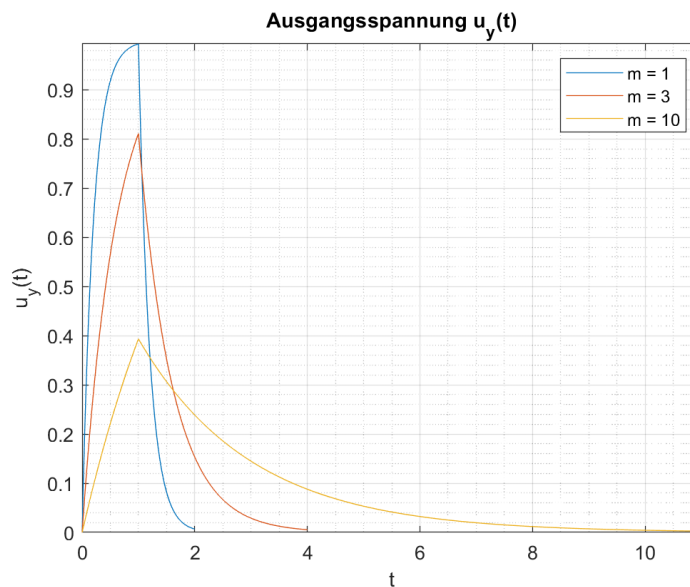
```

```

15     uy = [uy1 uy2];
16
17     t = [t1 t2];
18
19     if (m == 1 || m == 3 || m == 10)
20         plot(t, uy);
21         legend(strcat('m = ', num2str(m)));
22         hold on;
23     end
24
25     pause(0.5);
26 end
27
28 % Beschriftung des Plots
29 title('Ausgangsspannung u_y(t)');
30 legend('m = 1', 'm = 3', 'm = 10');
31 xlabel('t');
32 ylabel('u_y(t)');
33
34 grid on; grid minor; axis tight; % Optimierung Graph

```

Ausgegeben wird folgende Grafik:



Je größer m ist, desto langsamer steigt die Spannung am Kondensator. Somit kann m als Dämpfungsfaktor angesehen werden. Physikalisch ist m der Multiplikator des Widerstandes in der RC-Schaltung.

2.3 Approximation der Lade- und Entladekurve (A3)

Aufgabenstellung:

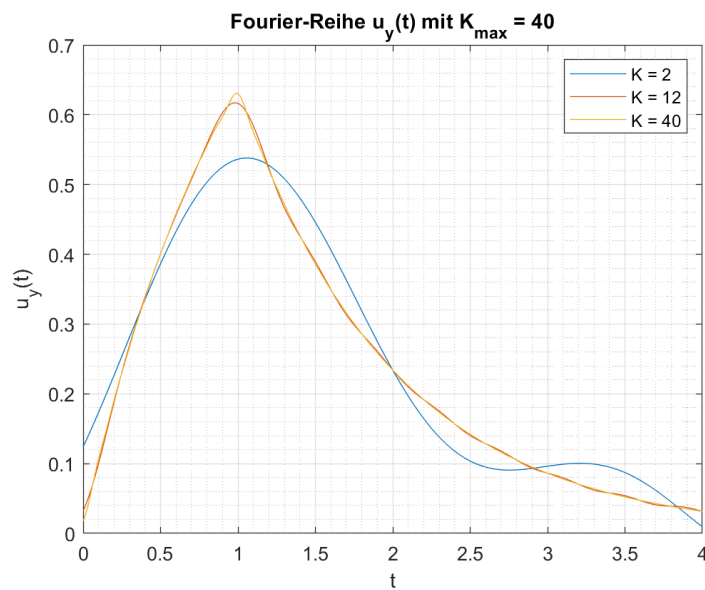
Es gilt wieder $t = T$. Approximieren Sie $u_y(t)$, indem Sie die Fourierreihe mit den Koeffizienten Y_k mit $-K \leq k \leq K$ berechnen. Schreiben Sie eine Schleife über K und sehen Sie sich die Bilder für $K = 1, \dots, 40$ an. Speichern Sie sinnvoll 3 Bilder ab. Beschriften Sie die Bilder analog zu A2.

```

1 %% Aufgabe 3
2
3 T = 5; % Periodendauer
4 tau = 1;
5 t1 = linspace(0, tau, 1000);
6 t2 = linspace(tau, 4*tau, 4000);
7 F = 1/T;
8 t = [t1, t2];
9 dt = tau/100;
10
11 % Berechnung der Fourier-Reihe
12 for K = 1:40
13     uyt = 0;
14
15     for k = -K:K
16         Hkf = 1 / (1 + 1i*2*pi*k*F*tau);
17         Xk = exp(-1i*2*pi*k*F*(tau/2)) * (tau/T) * sinc(k*F*
            tau); %% sinc ohne PI!
18         Yk = Hkf * Xk;
19         uyt = uyt + Yk * exp(1i*2*pi*k*F*t);
20     end
21     if (K == 2 || K == 12 || K == 40)
22         plot(t, uyt);
23         legend(strcat('K = ', num2str(K))); % Ausgabe des k-
            ten Durchlauf
24         hold on;
25     end
26     %pause(0.2);
27 end
28 % Beschriftung des Plots
29
30 title('Fourier-Reihe u_y(t) mit K_{max} = 40 ');
31 xlabel('t');
32 ylabel('u_y(t)');
33 legend('K = 2', 'K = 12', 'K = 40');
34 grid on; grid minor;
35
36 hold off;

```

Ausgegeben wird folgende Grafik:



Wie erwartet nähert sich die approximierte Funktion mit steigenden K der theoretischen Funktion an. Bei $K = 40$ ist kaum noch ein Unterschied zu erkennen.