P1 Frequenzgang und Fourier-Reihe

Praktikum Signale und Systeme 1

Finn Lanz **Malte Müller**

10. April 2019

Name	**Funktion**
Malte Müller	Protokollführer
Finn Lanz	Teilnehmer

SS1P/2 - E-B3 - VLM

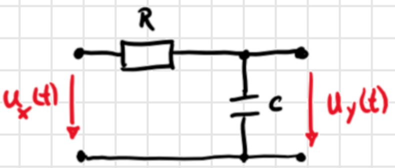
Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung **3**

2 Aufgaben im Labor **6**
2.1 Theoretische Lösung aus V1 (A1) 6
2.2 Erweiterung der ersten Aufgabe (A2) 7
2.3 Approximation der Lade- und Entladekurve (A3) 9

1 Vorbereitung

V1: Ausgangssignal $u_y(t)$ entspricht Lade- und Entladekurve eines Kondensators:



$$u_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ U\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{für } 0\le t\le T_1 \\ U\cdot\left(1-e^{-T_1/\tau}\right)\cdot e^{-\frac{(t-T_1)}{\tau}} & \text{für } t>T_1 \end{cases}$$

$$u_x(t) = U\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-T_1/2}{T_1}\right)$$

$$\Rightarrow u_x(T_1) = U\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{T_1 - T_1/2}{T_1}\right) = U\cdot \overbrace{\mathrm{rect}\left(\tfrac{1}{2}\right)}^{=1/2} = \frac{U}{2}$$

V2: $u_{x,T}(t) = \sum_p u_x(t-pT) \quad , T_1 < T$

$$\Leftrightarrow u_{x,T}(t) = \sum_p U\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{(t-pT)-T_1/2}{T_1}\right)$$

$$\Rightarrow X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_x(t)\cdot e^{-j2\pi kFt}\,dt$$

→ Vereinfachung, da Rechteckesignal:

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^{T_1} U\cdot e^{-j2\pi kFt}\,dt$$

$$= \frac{U}{T}\cdot\left[\frac{e^{-j2\pi kFt}}{-j2\pi kF}\right]_0^{T_1} = \frac{U}{T}\cdot\frac{e^{-j2\pi kFT_1}-1}{-j2\pi kF} \quad (\text{für } k\neq 0)$$

geht schöner...

Durch Verschiebung der Grenzen:

$$\Rightarrow X_k = \frac{u}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi kFt}}{-j2\pi kF} \right]_{t_0 - \frac{T_1}{2}}^{t_0 + \frac{T_1}{2}} \quad \text{, mit } t_0 = \frac{T_1}{2}$$

$$= \frac{u}{T} \cdot \frac{e^{-j2\pi kF(t_0 + \frac{T_1}{2})} - e^{-j2\pi kF(t_0 - \frac{T_1}{2})}}{-j2\pi kF} \cdot \frac{T_1}{T_1}$$

$$= U \cdot \frac{T_1}{T} \cdot e^{j2\pi kFt_0} \cdot si(\pi kFT_1)$$

$$k=0: \quad X_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} u \cdot e^0 \, dt = \frac{u}{T} \cdot T_1$$

$$\Rightarrow \text{F.R.}: \quad u_{x,T}(t) = \sum_k X_k \cdot e^{-j2\pi kFt}$$

$$= \sum_k u \cdot \frac{T_1}{T} \cdot e^{j2\pi kF(\frac{T_1}{2})} \cdot si(\pi kFT_1)$$

V3: $Y_k = H(k \cdot F) \cdot X_k$

$$H(k \cdot F) = \frac{u_y(t)}{u_x(t)} = \frac{\frac{1}{jk\omega C}}{R + \frac{1}{jk\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{1}{1 + jk\omega RC}$$

$$= \frac{1}{1 + j2\pi kFRC}$$

$$\Rightarrow u_y(t) = \sum_k H(k \cdot F) \cdot X_k \cdot e^{-j2\pi kFt}$$

$$= \sum_{k} \frac{1}{1+j2\pi kFRC} \cdot u \cdot \frac{T_1}{T} \cdot e^{j2\pi kF\left(\frac{T_1}{2}\right)} \cdot si(\pi kFT_1) \cdot e^{-j2\pi kFt}$$

V4: Ein geladener Kondensator entlädt sich nach 5τ nahezu vollständig. Somit wird der Kondensator in einer Periode T geladen und vollständig entladen.

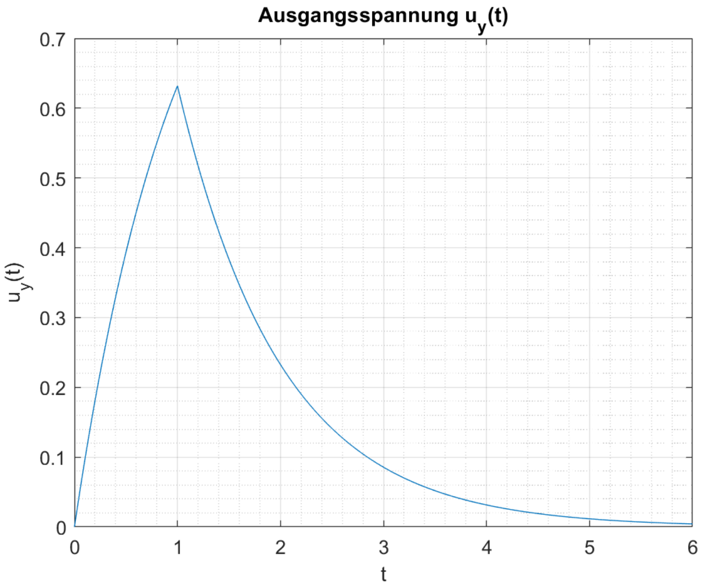
2 Aufgaben im Labor

2.1 Theoretische Lösung aus V1 (A1)

Aufgabenstellung:
Schreiben Sie ein Programm, das die theoretische Lösung aus V1 für t = T zeigt, d.h. die Ausgangsspannung $u_y(t)$. Stellen Sie das Bild für 0 <= t <= T + 5τ dar. Verwenden Sie dazu den **plot** - Befehl. Beschriften Sie den Plot mit Hilfe von **title** und **xlabel**.

```
%% Aufgabe 1

% Berechnung der Lade- und Entladekurve

t1 = 0:dt:tau;                % Ladezeit
uy1 = U * (1-exp(-t1/tau)); % Ladefunktion

t2 = tau:dt:(tau+5*tau);      % Entladezeit
uy2 = U * (1-exp(-tau/tau)) * exp(-(t2-tau)/tau); % Entladefkt

uy = [uy1, uy2];     % Zusammensetzen der Lade- und Entladewerte
t = [t1, t2];

plot(t, uy); grid on; grid minor; %axis tight;

% Beschriftung des Graphen:

title('Ausgangsspannung u_y(t)');
xlabel('t');
ylabel('u_y(t)');
```

Ausgegeben wird folgende Grafik:



Zu sehen ist der Lade- und Endladevorgang der RC-Schaltung. Der Entladevorgang ist nach ungefähr 5τ abgeschlossen.

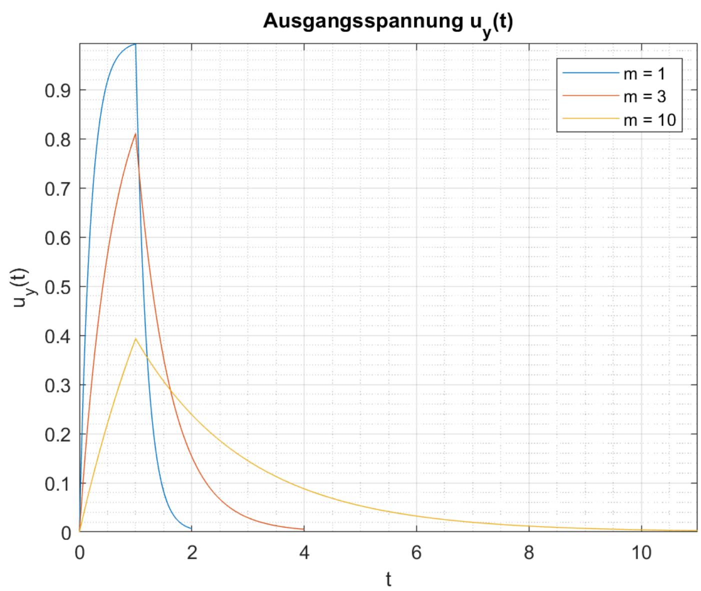
2.2 Erweiterung der ersten Aufgabe (A2)

Aufgabenstellung:
Nun soll t = m*T/5 mit m = 1,...,10 gelten. Erweitern Sie das Skript um eine Schleife über m, die mit **pause** zum Ansehen angehalten wird. Beschriften Sie den Plot mit Hilfe von **title**, **xlabel** und **num2str**. Speichern Sie die Bilder für m = 1,3, und 10 ab.

```
%% Aufgabe 2
U = 1;
T1 = 1; % Umschaltzeitpunkt
tau = 1;
dt = tau/100;

for m = 1:10
        tau = m*T1/5;

        t1 = (0:dt:T1);
        uy1 = U * (1-exp(-t1/tau));

        t2 = (T1:dt:((T1+5*tau)));
        uy2 = U * (1-exp(-T1/tau)) * exp(-(t2-T1)/tau);
```

```
        uy = [uy1 uy2];

        t = [t1 t2];

        if (m == 1 || m == 3 || m == 10)
                plot(t, uy);
                legend(strcat('m = ', num2str(m)));
                hold on;
        end

        pause(0.5);
end

% Beschriftung des Plots
title('Ausgangsspannung u_y(t)');
legend('m = 1', 'm = 3', 'm = 10');
xlabel('t');
ylabel('u_y(t)');

grid on; grid minor; axis tight; % Optimierung Graph
```

Ausgegeben wird folgende Grafik:



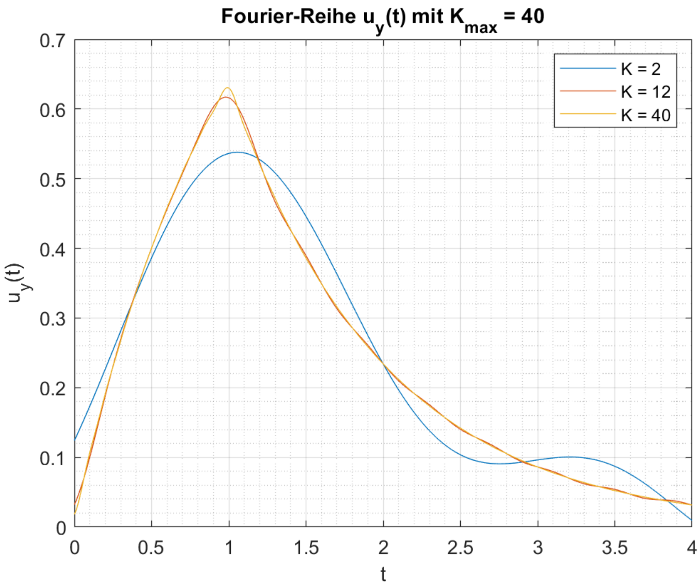
Je größer m ist, desto langsamer steigt die Spannung am Kondensator. Somit kann m als Dämpfungsfaktor angesehen werden. Physikalisch ist m der Multiplikator des Widerstandes in der RC-Schaltung.

2.3 Approximation der Lade- und Entladekurve (A3)

Aufgabenstellung:
Es gilt wieder t = T . Approximieren Sie $u_y(t)$, indem Sie die Fourierreihe mit den Koeffizienten Y_k mit −K <= k <= K berechnen. Schreiben Sie eine Schleife über K und sehen Sie sich die Bilder für K = 1,. . ., 40 an. Speichern Sie sinnvoll 3 Bilder ab. Beschriften Sie die Bilder analog zu A2.

```
%% Aufgabe 3

T = 5;  % Periodendauer
tau = 1;
t1 = linspace(0, tau, 1000);
t2 = linspace(tau, 4*tau, 4000);
F = 1/T;
t = [t1, t2];
dt = tau/100;

% Berechnung der Fourier-Reihe
for K = 1:40
        uyt = 0;

        for k = -K:K
                Hkf = 1 / (1 + 1i*2*pi*k*F*tau);
                Xk = exp(-1i*2*pi*k*F*(tau/2)) * (tau/T) * sinc(k*F*tau); %% sinc ohne PI!
                Yk = Hkf * Xk;
                uyt = uyt + Yk * exp(1i*2*pi*k*F*t);
        end
        if (K == 2 || K == 12 || K == 40)
                plot(t, uyt);
                legend(strcat('K = ', num2str(K))); % Ausgabe des k-ten Durchlauf
                hold on;
        end
        %pause(0.2);
end
% Beschriftung des Plots

title('Fourier-Reihe u_y(t) mit K_{max} = 40' );
xlabel('t');
ylabel('u_y(t)');
legend('K = 2', 'K = 12', 'K = 40');
grid on; grid minor;

hold off;
```

Ausgegeben wird folgende Grafik:



Wie erwartet nähert sich die approximierte Funktion mit steigenden K der theoretischen Funktion an. Bei K = 40 ist kaum noch ein Unterschied zu erkennen.