Geometría hiperbólica

Disco de Poincaré

Resumen

En la geometría hiperbólica, el quinto postulado de Euclides es sustituido por el axioma de Lobachevsky.

M. Gómez, E.M. González, D. Melero, M. Román

Universidad de Granada

Índice

1. Introducción

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado, por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Axioma (Axioma de Lobachevsky)**.** Dada una recta R y un punto P fuera de R, en el plano conteniendo a la línea R y al punto P existen al menos dos líneas distintas que pasan por P y no intersecan a R.

Desde la antigua Grecia se realizaron esfuerzos por deducir el quinto postulado de Euclides referente a las paralelas de los otros cuatro. Uno de los intentos más amplios y ambiciosos fue el de Giovanni Gerolamo Saccheri en el siglo XVIII quien, contradictoriamente creó lo que podríamos considerar modelo incipiente de geometría hiperbólica. Sin embargo, Saccheri creyó que no era consistente y no llegó a formalizar todos los aspectos de su trabajo. También Johann Heinrich Lambert encontró algunas fórmulas interesantes referentes a lo que hoy llamaríamos triángulos de la geometría hiperbólica, probando que la suma de los ángulos es siempre menor que 180º, la fórmula de Lambert establecía que para uno de estos triángulos se cumplía:

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = DA_{\alpha,\beta,\gamma},$$

donde α, β, γ son los ángulos del triángulo, $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ es el área del triángulo y C es una constante de proporcionalidad positiva relacionada con la curvatura del espacio hiperbólico donde se haye inmerso el triángulo.

Más adelante Carl Friedrich Gauss trabajó en un modelo similar pero no publicó sus resultados. En los años 1820 dos jóvenes matemáticos que trabajaban de modo independiente, János Bolyai y Nikolai Ivanovich Lobachevsky, publicaron sus modelos por los cuales establecían la posibilidad de un tipo de geometría alternativa, totalmente consistente, que es el que conocemos como geometría hiperbólica.

Existen varios modelos de geometría hiperbólica: la representación de Klein, el modelo del disco de Poincaré y el modelo de Lorentz o del hiperboloide.

Curiosamente los dos primeros modelos fueron propuestos y publicados originalmente por Eugenio Beltrami en 1968, sin embargo, alcanzaron notoriedad por el uso que tanto Felix Klein como Henri Poincaré hicieron de ellos, estos dos modelos son modelos de la geometría hiperbólica de dos dimensiones, y son generalizables a más dimensiones.

La representación de Klein, también conocido como el modelo proyectivo del disco ó modelo de Beltrami-Klein, usa el interior de un círculo como plano hiperbólico, y las cuerdas como líneas del círculo.

El modelo de Poincaré usa también el interior de un círculo plano, y en él las líneas rectas de la geometría hiperbólica vienen representadas por arcos de circuferencia que cortan el borde del crículo plano en ángulo recto.

2. Modelo del hiperboloide

Este modelo de geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz:

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - x^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tenemos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores:

1. Vectores espaciales:$x \in \mathbb{R}^3$ tal que $L(x) > 0$
2. Vectores temporales:$x \in \mathbb{R}^3$ tal que $L(x) < 0$
3. Vectores luminosos:$x \in \mathbb{R}^3$ tal que $L(x) = 0$

Definimos

$$\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | L(x) = -1, x(0, 0, 1) > 0\},$$

como vemos esta es la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas. Como sabemos es una superficie y por tanto localmente homeomorfo a un plano. Lo llamamos plano hiperbólico.

2.1. Rectas

Las rectas en el plano hiperbólico se definen como las intersecciones de $\mathbb{H}$ con planos que pasan por el origen. Las llamamos rectas hiperbólicas.

3. Disco de Poincaré

3.1. Métrica en el disco de Poincaré

3.1.1. Distancia

Si u, v son dos vectores del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$,ambos con norma inferior a 1, podemos definir un invariante isométrico de la siguiente manera:

$$\delta(u, v) = 2\frac{\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)},$$

donde $\|.\|$ representa la norma euclídea usual. Definimos la función distancia como:

$$d(u, v) = arccosh(1 + \delta(u, v)).$$

Esta función de distancia está definida para cualesquiera dos vectores de norma inferior a uno, y el conjunto de tales vectores forman un espacio métrico que es un modelo de espacio hipérbólico de curvatura constante -1, como sabemos el disco de Poincaré.

Como bien sabemos la funcion arccosh es creciente, luego cuanto mayor sea $\delta(u, v)$ mayor será la distancia que separa u y v. Ahora bien, si acercamos uno de los dos vectores u o v hacia la frontera del disco, su norma se acercará a uno y por tanto la función δ crecerá y como consecuencia la función distancia también. Es decir, si tenemos dos vectores,uno suficientemente lejos de la frontera y vamos acercando el otro a la frontera, la distancia entre los dos crecerá.

Por ejemplo, en la siguiente imagen todos los puntos están a la misma distancia del punto A:

Veamos también como sería una circunferencia con centro A un punto cercano a la frontera y de radio, por ejemplo, 4:

3.1.2. Rectas

Dados ahora dos puntos vamos a ver como es la recta que pase por los dos puntos dados. En el modelo del disco de Poincaré, las rectas del plano se definen por arcos de circunferencias con ecuaciones de la forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0,$$

que es la forma general de una circunferencia que corta ortogonalmente al disco unidad.
Dados dos puntos u y v en el disco que no estén en un diámetro, se puede resolver para el círculo de esta forma pasando por ambos puntos, y obtener

$$x^2 + y^2 + \frac{u_2(v_1^2 + v_2^2) - v_2(u_1^2 + u_2^2) + u_2 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} x + \frac{v_1(u_1^2 + u_2^2) - u_1(v_1^2 + v_2^2) + v_1 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} y + 1 = 0.$$

3.1.3. Ángulos

Los ángulos son euclidianos. Si tenemos dos líneas hiperbólicas, cada una de ellas es un arco de circunferencia, luego la medida del ángulo que se forma entre las dos líneas hiperbólicas es el ángulo que forman las tangentes de las circunferencias en el punto en que éstas se intersecan.

3.1.4. Relación con el modelo del hiperboloide

Este modelo se relaciona con el modelo del hiperboloide proyectivamente. Dado un punto (t, x_1, x_2) sobre la hoja superior de un hiperboloide del modelo del hiperboloide, se define un punto del modelo del disco de Poincaré, que se puede proyectar sobre el plano t=0,el resultado es el correspondiente punto del disco de Poincaré. Para las coordenadas cartesianas (t, x_1, x_2) del hiperboloide e (y_1, y_2) del plano, las fórmulas de conversión son :

$$y_i = \frac{x_i}{1 + t}$$

$$(t, x_i) = \frac{(1 + \sum y_i^2, 2y_i)}{1 - \sum y_i^2}$$

4. Referencias

Referencias

[1] Gelfand, I.M.; Minlos, R.A.; Shapiro, Z.Ya. (1963), Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications, New York: Pergamon Press.