Geometría hiperbólica

Y otros modelos para la geometría hiperbólica

Eva Mª González Margarita Gómez
David Melero Mario Román

Taller de geometría y topología

Índice

Geometría hiperbólica

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Axioma (Axioma de Lobachevsky)

Dada una recta R y un punto P fuera de R, en el plano conteniendo a la línea R y al punto P existen al menos dos líneas distintas que pasan por P y no intersecan a R.

Geometría hiperbólica

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Axioma (Axioma de Lobachevsky)

Dada una recta R y un punto P fuera de R, en el plano conteniendo a la línea R y al punto P existen al menos dos líneas distintas que pasan por P y no intersecan a R.

Historia

Históricamente, se han realizado esfuerzos por deducir el quinto postulado de Euclides de los otros cuatro.

- *Giovanni Gerolamo Saccheri* intentó, en el siglo XVIII probarlo por reducción al absurdo y creó en el proceso un modelo incipiente de geometría hiperbólica que nunca llegó a formalizar en su creencia de que sería inconsistente.
- *Johann Heinrich Lambert* estudió lo que constituirían los triángulos de la geometría hiperbólica probando que sus ángulos sumaban siempre menos que 180º. De hecho, probó que

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = \text{área}(T)k.$$

Para k una constante dependiente de la curvatura.

Historia

- *Carl Friedrich Gauss* trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.
- La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado.
- En 1968 *Eugenio Beltrami* publicaría dos modelos del espacio hiperbólico que se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*.

Historia

- *Carl Friedrich Gauss* trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.
- La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado.
- En 1968 *Eugenio Beltrami* publicaría dos modelos del espacio hiperbólico que se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*.

Historia

- *Carl Friedrich Gauss* trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.
- La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado.
- En 1968 *Eugenio Beltrami* publicaría dos modelos del espacio hiperbólico que se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*.

Modelo para un sistema

Un **modelo** para un sistema de postulados se define sustituyendo objetos específicos por los términos indefinidos del sistema que los cumplen.

Ejemplo: geometría euclídea

Un modelo de la geometría euclídea es el que asigna a cada punto un par de reales (a, b) y a cada recta el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal $as + bt + u = 0$ para algunos reales tales que al menos uno de ellos no sea 0.

Modelo para un sistema

Un **modelo** para un sistema de postulados se define sustituyendo objetos específicos por los términos indefinidos del sistema que los cumplen.

Ejemplo: geometría euclídea

Un modelo de la geometría euclídea es el que asigna a cada punto un par de reales (a, b) y a cada recta el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal $as + bt + u = 0$ para algunos reales tales que al menos uno de ellos no sea 0.

Modelos de la geometría hiperbólica

Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdaas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Modelos de la geometría hiperbólica

Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdaas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Modelos de la geometría hiperbólica

Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdaas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Forma de Lorentz

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

1. vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
2. vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
3. vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Forma de Lorentz

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

1. vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
2. vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
3. vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Forma de Lorentz

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

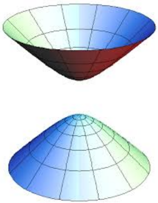
1. vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
2. vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
3. vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Hiperboloide

Con esta norma definimos

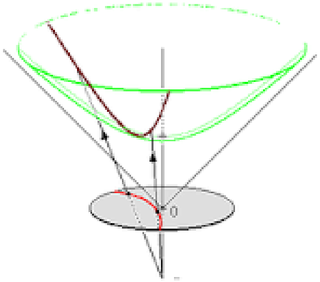
$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x, y, z) = -1,\ (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) > 0\};$$

y como vemos, esta es la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas. Sabemos que es una superficie y por tanto localmente homeomorfo a un plano, por lo que lo llamaremos *plano hiperbólico*.



Modelo del hiperboloide

- Los **puntos** en $\mathbb{H}$ serán los puntos de nuestro modelo de la geometría hiperbólica.
- Las **rectas** en el plano hiperbólico se definen como las intersecciones de $\mathbb{H}$ con planos que pasan por el origen. Las llamaremos *rectas hiperbólicas*.



Disco de Poincaré

El modelo de Poincaré se define tomando

- **puntos** como puntos contenidos en un círculo unidad. Es decir, como pares de reales (a, b) cumpliendo $a^2 + b^2 < 1$.
- **líneas** como los puntos interiores al círculo unidad de otra circunferencia que lo corta perpendicularmente. Pueden definirse por ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

- los **ángulos** entre dos rectas hiperbólicas como el ángulo que proporcionan las tangentes a las rectas en el punto de corte.

Disco de Poincaré

El modelo de Poincaré se define tomando

- **puntos** como puntos contenidos en un círculo unidad. Es decir, como pares de reales (a, b) cumpliendo $a^2 + b^2 < 1$.
- **líneas** como los puntos interiores al círculo unidad de otra circunferencia que lo corta perpendicularmente. Pueden definirse por ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

- los **ángulos** entre dos rectas hiperbólicas como el ángulo que proporcionan las tangentes a las rectas en el punto de corte.

Disco de Poincaré

El modelo de Poincaré se define tomando

- **puntos** como puntos contenidos en un círculo unidad. Es decir, como pares de reales (a, b) cumpliendo $a^2 + b^2 < 1$.
- **líneas** como los puntos interiores al círculo unidad de otra circunferencia que lo corta perpendicularmente. Pueden definirse por ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

- los **ángulos** entre dos rectas hiperbólicas como el ángulo que proporcionan las tangentes a las rectas en el punto de corte.

Métrica en el disco de Poincaré

Si u, v son dos vectores del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$,ambos con norma inferior a 1, podemos definir un invariante isométrico de la siguiente manera:

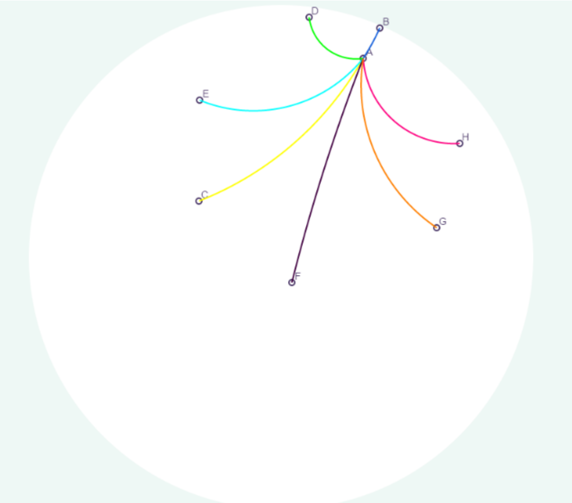
$$\delta(u, v) = 2\frac{\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)},$$

donde $\|.\|$ representa la norma euclídea usual. Definimos la función distancia como:

$$d(u, v) = arccosh(1 + \delta(u, v)).$$

Métrica en el disco de Poincaré

Por ejemplo, en la siguiente imagen todos los puntos están a la misma distancia del punto A:



Recta por dos puntos

Dados dos puntos u y v en el disco que no estén en un diámetro, se puede resolver para el círculo de esta forma pasando por ambos puntos, y obtener

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &+ \frac{u_2(v_1^2 + v_2^2) - v_2(u_1^2 + u_2^2) + u_2 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} x \\
&+ \frac{v_1(u_1^2 + u_2^2) - u_1(v_1^2 + v_2^2) + v_1 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} y + 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Relación con el modelo del hiperboloide

Los puntos del disco de Poincaré están en correspondencia con los puntos del modelo del hiperboloide. La correspondencia se obtiene proyectando desde el punto $(0, 0, -1)$.

- Dado un punto (x, y, z) en el hiperboloide (cumpliendo por tanto $z^2 - x^2 - y^2 = 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1+z}(x, y).$$

- Dado un punto $(0, a, b)$ en el disco (cumpliendo por tanto $a^2 + b^2 < 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1-a^2-b^2}\left(1+a^2+b^2, 2a, 2b\right).$$

Relación con el modelo del hiperboloide

Los puntos del disco de Poincaré están en correspondencia con los puntos del modelo del hiperboloide. La correspondencia se obtiene proyectando desde el punto $(0, 0, -1)$.

- Dado un punto (x, y, z) en el hiperboloide (cumpliendo por tanto $z^2 - x^2 - y^2 = 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1+z}(x, y).$$

- Dado un punto $(0, a, b)$ en el disco (cumpliendo por tanto $a^2 + b^2 < 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1-a^2-b^2}\left(1+a^2+b^2, 2a, 2b\right).$$

Disco de Beltrami-Klein

El **modelo de Beltrami-Klein** interpreta como puntos los puntos del interior de un disco unidad y como líneas las cuerdas del círculo abiertas, en el sentido de que no se consideran en ella los puntos de la frontera del círculo.