

Geometría hiperbólica

Modelos y construcciones para la geometría hiperbólica

Eva M. González Margarita Gómez
David Melero Mario Román

Taller de geometría y topología

Índice

- ① Introducción e historia
- ② Modelos de la geometría hiperbólica
 - Modelo del hiperboloide
 - Disco de Poincaré
 - Disco de Beltrami-Klein
- ③ Construcciones en el espacio hiperbólico
 - Cuadriláteros de Saccheri
 - Círculos, horociclos e hiperciclos
 - Polígonos
 - Teselaciones
 - Teselaciones no regulares
 - Teselaciones en el arte
- ④ Construcciones interactivas
 - NonEuclid
- ⑤ Referencias

Geometría hiperbólica

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Axioma (Axioma de Lobachevsky)

Dada una recta R y un punto P fuera de R , en el plano conteniendo a la línea R y al punto P existen al menos dos líneas distintas que pasan por P y no intersecan a R .

Geometría hiperbólica

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Axioma (Axioma de Lobachevsky)

Dada una recta R y un punto P fuera de R , en el plano conteniendo a la línea R y al punto P existen al menos dos líneas distintas que pasan por P y no intersecan a R .

Historia

Históricamente, se han realizado esfuerzos por deducir el quinto postulado de Euclides de los otros cuatro.

- *Giovanni Gerolamo Saccheri* intentó, en el siglo XVIII probarlo por reducción al absurdo y creó en el proceso un modelo incipiente de geometría hiperbólica que nunca llegó a formalizar en su creencia de que sería inconsistente.
- *Johann Heinrich Lambert* estudió lo que constituirían los triángulos de la geometría hiperbólica probando que sus ángulos sumaban siempre menos que 180° . De hecho, probó que

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = \text{área}(T)k.$$

Para k una constante dependiente de la curvatura.

Historia

- *Carl Friedrich Gauss* trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.
- La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado.
- En 1968 *Eugenio Beltrami* publicaría dos modelos del espacio hiperbólico que se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*.

Historia

- *Carl Friedrich Gauss* trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.
- La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado.
- En 1968 *Eugenio Beltrami* publicaría dos modelos del espacio hiperbólico que se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*.

Historia

- *Carl Friedrich Gauss* trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.
- La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado.
- En 1968 *Eugenio Beltrami* publicaría dos modelos del espacio hiperbólico que se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*.

Modelo para un sistema

Un **modelo** para un sistema de postulados se define sustituyendo objetos específicos por los términos indefinidos del sistema que los cumplen.

Ejemplo: geometría euclídea

Un modelo de la geometría euclídea es el que asigna a cada punto un par de reales (a, b) y a cada recta el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal $as + bt + u = 0$ para algunos reales tales que al menos uno de ellos no sea 0.

Modelo para un sistema

Un **modelo** para un sistema de postulados se define sustituyendo objetos específicos por los términos indefinidos del sistema que los cumplen.

Ejemplo: geometría euclídea

Un modelo de la geometría euclídea es el que asigna a cada punto un par de reales (a, b) y a cada recta el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal $as + bt + u = 0$ para algunos reales tales que al menos uno de ellos no sea 0.

Modelos de la geometría hiperbólica

Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Modelos de la geometría hiperbólica

Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Modelos de la geometría hiperbólica

Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Forma de Lorentz

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

- 1 vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
- 2 vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
- 3 vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Forma de Lorentz

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

- 1 vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
- 2 vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
- 3 vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Forma de Lorentz

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

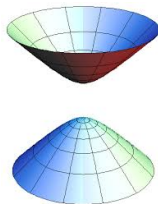
- 1 vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
- 2 vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
- 3 vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Hiperboloide

Con esta norma definimos

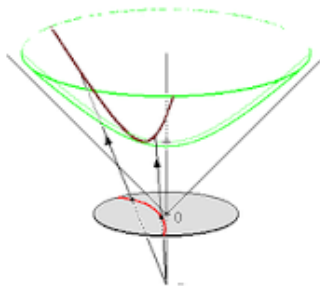
$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x, y, z) = -1, (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) > 0\};$$

y como vemos, esta es la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas. Sabemos que es una superficie y por tanto localmente homeomorfo a un plano, por lo que lo llamaremos *plano hiperbólico*.



Modelo del hiperboloide

- Los **puntos** en \mathbb{H} serán los puntos de nuestro modelo de la geometría hiperbólica.
- Las **rectas** en el plano hiperbólico se definen como las intersecciones de \mathbb{H} con planos que pasan por el origen. Las llamaremos *rectas hiperbólicas*.



Disco de Poincaré

El modelo de Poincaré se define tomando

- **puntos** como puntos contenidos en un círculo unidad. Es decir, como pares de reales (a, b) cumpliendo $a^2 + b^2 < 1$.
- **líneas** como los puntos interiores al círculo unidad de otra circunferencia que lo corta perpendicularmente. Pueden definirse por ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

- los **ángulos** entre dos rectas hiperbólicas como el ángulo que proporcionan las tangentes a las rectas en el punto de corte.

Disco de Poincaré

El modelo de Poincaré se define tomando

- **puntos** como puntos contenidos en un círculo unidad. Es decir, como pares de reales (a, b) cumpliendo $a^2 + b^2 < 1$.
- **líneas** como los puntos interiores al círculo unidad de otra circunferencia que lo corta perpendicularmente. Pueden definirse por ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

- los **ángulos** entre dos rectas hiperbólicas como el ángulo que proporcionan las tangentes a las rectas en el punto de corte.

Disco de Poincaré

El modelo de Poincaré se define tomando

- **puntos** como puntos contenidos en un círculo unidad. Es decir, como pares de reales (a, b) cumpliendo $a^2 + b^2 < 1$.
- **líneas** como los puntos interiores al círculo unidad de otra circunferencia que lo corta perpendicularmente. Pueden definirse por ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

- los **ángulos** entre dos rectas hiperbólicas como el ángulo que proporcionan las tangentes a las rectas en el punto de corte.

Métrica en el disco de Poincaré

Si u, v son dos vectores del espacio euclídeo \mathbb{R}^n , ambos con norma inferior a 1, podemos definir un invariante isométrico de la siguiente manera:

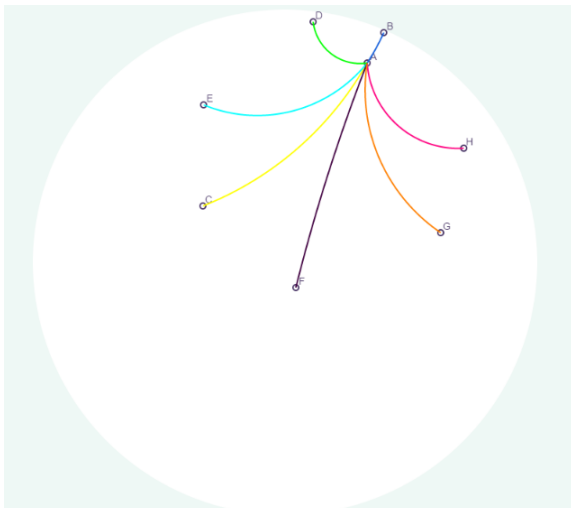
$$\delta(u, v) = 2 \frac{\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)},$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclídea usual. Definimos la función distancia como:

$$d(u, v) = \operatorname{arccosh}(1 + \delta(u, v)).$$

Métrica en el disco de Poincaré

Por ejemplo, en la siguiente imagen todos los puntos están a la misma distancia del punto A:



Recta por dos puntos

Dados dos puntos u y v en el disco que no estén en un diámetro, se puede resolver para el círculo de esta forma pasando por ambos puntos, y obtener

$$x^2 + y^2 + \frac{u_2(v_1^2 + v_2^2) - v_2(u_1^2 + u_2^2) + u_2 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} x + \frac{v_1(u_1^2 + u_2^2) - u_1(v_1^2 + v_2^2) + v_1 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} y + 1 = 0.$$

Relación con el modelo del hiperboloide

Los puntos del disco de Poincaré están en correspondencia con los puntos del modelo del hiperboloide. La correspondencia se obtiene proyectando desde el punto $(0, 0, -1)$.

- Dado un punto (x, y, z) en el hiperboloide (cumpliendo por tanto $z^2 - x^2 - y^2 = 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1+z}(x, y).$$

- Dado un punto $(0, a, b)$ en el disco (cumpliendo por tanto $a^2 + b^2 < 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1-a^2-b^2}(1+a^2+b^2, 2a, 2b).$$

Relación con el modelo del hiperboloide

Los puntos del disco de Poincaré están en correspondencia con los puntos del modelo del hiperboloide. La correspondencia se obtiene proyectando desde el punto $(0, 0, -1)$.

- Dado un punto (x, y, z) en el hiperboloide (cumpliendo por tanto $z^2 - x^2 - y^2 = 1$), su proyección será

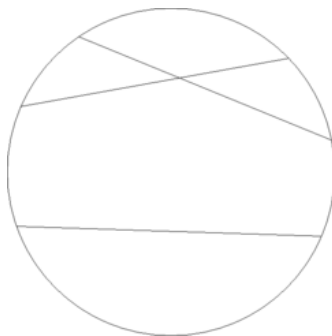
$$\frac{1}{1+z}(x, y).$$

- Dado un punto $(0, a, b)$ en el disco (cumpliendo por tanto $a^2 + b^2 < 1$), su proyección será

$$\frac{1}{1-a^2-b^2}(1+a^2+b^2, 2a, 2b).$$

Disco de Beltrami-Klein

El **modelo de Beltrami-Klein** interpreta como puntos los puntos del interior de un disco unidad y como líneas las cuerdas del círculo abiertas, en el sentido de que no se consideran en ella los puntos de la frontera del círculo.



Métricas de Cayley-Kelvin

Definición

Fijada una cuádrica Q definimos la **distancia de Cayley-Kelvin** entre dos puntos como el logaritmo de una razón doble

$$\text{dist}(p, q) = C \log \frac{|qa||bp|}{|pa||bq|},$$

donde a y b son los puntos en los que la recta que pasa por p y q corta a Q . La C es una constante arbitraria.

La métrica que usamos en nuestro caso en el disco de Klein es un caso particular de una métrica de Cayley-Kelvin cuando la cuádrlica es el círculo:

$$\text{dist}(p, q) = \frac{1}{2} \log \frac{|qa||bp|}{|pa||bq|},$$

donde a, b son los puntos en los que la recta entre p y q corta al borde del disco unidad.

Teorema

Si desde el origen hasta un punto hay una distancia euclídea de r en la bola, la distancia hiperbólica entre ambos es

$$\text{dist}(o, p) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \text{artanh}(r),$$

donde artanh es el arcotangente hiperbólico.

Distancias en el disco de Klein

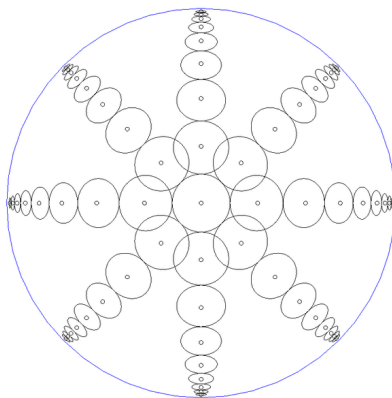


Figura: Círculos en el disco de Klein. *Wikimedia Commons*

Comparación con Poincaré

El modelo del disco de Klein preserva las líneas rectas como segmentos de recta dentro del disco, pero no es conforme; el disco de Poincaré, por otro lado, sí preserva los ángulos y es conforme, pero, como ya se ha mencionado, las rectas se convierten en segmentos de circunferencias ortogonales al disco.

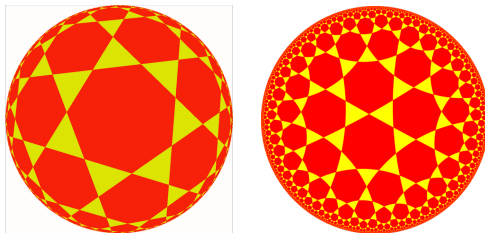


Figura: Comparación Klein-Poincaré. *Wikimedia Commons*

Cuadriláteros de Saccheri

Definición

Un **cuadrilátero de Saccheri** es un cuadrilátero $ABCD$ con dos ángulos rectos adyacentes en A y B y con dos lados iguales $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Teorema

En un cuadrilátero de Saccheri, los dos ángulos no rectos son iguales.

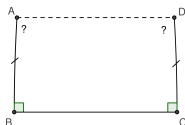


Figura: Cuadrilátero de Saccheri. *Wikimedia Commons*

Cuadriláteros de Saccheri

Definición

Un **cuadrilátero de Saccheri** es un cuadrilátero $ABCD$ con dos ángulos rectos adyacentes en A y B y con dos lados iguales $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Teorema

En un cuadrilátero de Saccheri, los dos ángulos no rectos son iguales.

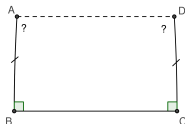


Figura: Cuadrilátero de Saccheri. *Wikimedia Commons*

Haces de rectas

Sabemos ya que dos rectas distintas en el espacio hiperbólico deben ser secantes, paralelas o ultraparalelas. Deberán por tanto pertenecer a uno de los siguientes conjuntos

- un **haz** de todas las rectas que pasan por un punto.
- un **haz de paralelas** con todas las rectas paralelas a un rayo dado.
- un **haz de ultraparalelas** con todas las líneas perpendiculares a una línea dada.

Círculos, horociclos e hiperciclos

Definición (Círculo)

Dado un punto C y un radio $r \geq 0$, llamamos **círculo** al conjunto de puntos a distancia r de él, es decir,

$$\mathcal{C} = \{X \mid \text{dist}(X, C) = r\}.$$

Definición (Horociclo)

Dado un haz de rectas paralelas a un rayo, definimos un **horociclo** como la órbita de un punto C bajo las reflexiones determinadas por las rectas del haz. [4]

Definición (Hiper ciclo)

Llamamos **hiperciclo** al lugar geométrico dado por los puntos a una distancia fija de una recta.

Horociclo

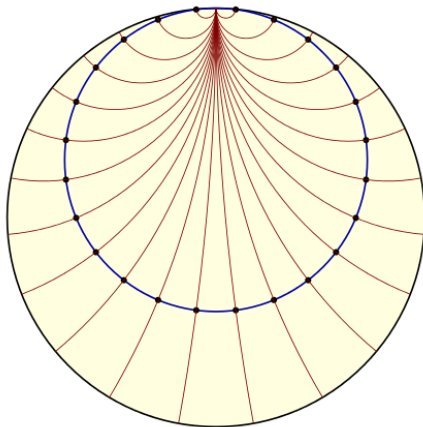


Figura: Horociclo

Hiperciclo

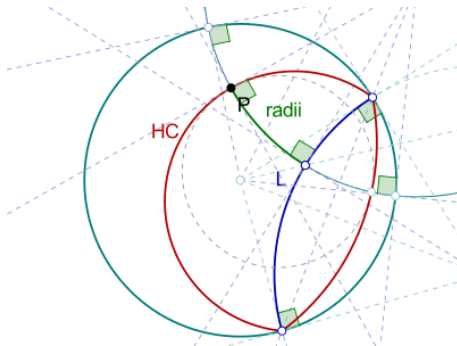


Figura: Hiperciclo

Polígonos constructibles

Teorema

Los ángulos constructibles en el plano euclídeo son exactamente los ángulos constructibles en el plano hiperbólico. [5]

Así, los polígonos regulares constructibles en el plano euclídeo serán constructibles en el plano hiperbólico. Simplemente es necesario formar el ángulo sobre una circunferencia y calcular los puntos de corte.

Hexágono regular

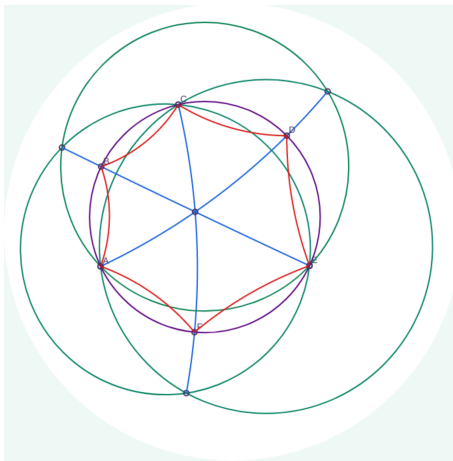


Figura: Construcción del hexágono regular

Teselaciones regulares

Definición

El **símbolo de Schläfli** es una notación usada para definir teselaciones y polítopos regulares. En nuestro caso la usaremos para representar una teselación poligonal como $\{p, q\}$, donde p es el polígono que da la teselación y q el número de polígonos que se unen en un vértice.

En el plano hiperbólico no podremos realizar las teselaciones del plano euclídeo en las que la suma de ángulos en cada vértice era exactamente 2π , como $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ o $\{6, 3\}$. Pero en su lugar, podremos realizar teselaciones donde unimos polígonos cuyos ángulos en el plano sumarían más de 2π .

Teselaciones regulares

Teorema

Se puede determinar si una teselación $\{p, q\}$ es posible en el plano euclídeo, el hiperbólico o el elíptico, sabiendo que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1/p + 1/q = 1/2 & \text{ssi es posible en el plano euclídeo} \\ 1/p + 1/q > 1/2 & \text{ssi es posible en el hiperbólico} \\ 1/p + 1/q < 1/2 & \text{ssi es posible en el elíptico} \end{array} \right\}$$

Teselaciones regulares

Presentamos ejemplos de las teselaciones regulares $\{3, 7\}$, $\{4, 5\}$ y $\{7, 3\}$

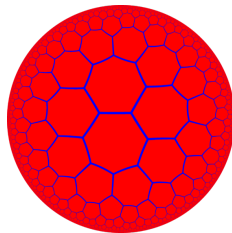
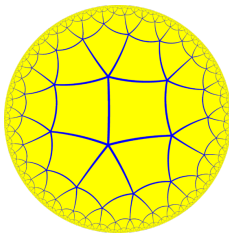
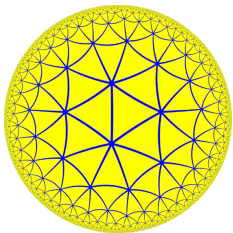
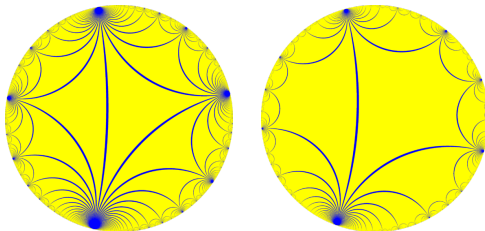


Figura: Teselaciones regulares

Teselaciones con vértices ideales

Pero además de estas teselaciones, como todas las teselaciones de la forma $\{a, b\}$ son válidas para números suficientemente grandes, podemos hacer tender por separado ambas a infinito. Si hacemos tender $b \rightarrow \infty$, obtendremos teselaciones con vértices ideales en las que se unen un número infinito de polígonos. Por ejemplo en la aquí se pueden ver ejemplos de teselaciones $\{3, \infty\}$ y $\{5, \infty\}$.

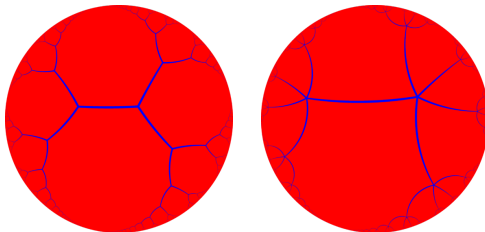


Apeirógonos

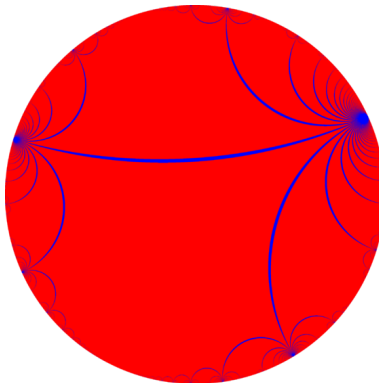
Definición

Un **apeirógono** es un polígono degenerado con un número de lados infinito numerable. Surge como límite natural de los polígonos al incrementar el número de lados.

Haciendo tender $a \rightarrow \infty$ obtendremos teselaciones con apeirógonos. Ejemplos de estas teselaciones son las teselaciones $\{\infty, 3\}$ o $\{\infty, 5\}$. Nótese que en ellas cada apeirógono está circunscrito en un horociclo.



Teselación infinita con apeirógonos



Teselaciones no regulares

Además de las teselaciones regulares, que son aquellas en las que todos los polígonos son idénticos, existen

- **Teselaciones truncadas**, que se obtienen desde las regulares aplicando truncamiento, de forma similar a como se hacía en *sólidos arquimedianos*.
- **Teselaciones cuasirregulares**, en las que se alternan dos polígonos regulares distintos en cada vértice.
- **Teselaciones semirregulares**, que constan de más de un tipo de polígono regular en cada vértice.

Teselaciones no regulares

Además de las teselaciones regulares, que son aquellas en las que todos los polígonos son idénticos, existen

- **Teselaciones truncadas**, que se obtienen desde las regulares aplicando truncamiento, de forma similar a como se hacía en *sólidos arquimedianos*.
- **Teselaciones cuasirregulares**, en las que se alternan dos polígonos regulares distintos en cada vértice.
- **Teselaciones semirregulares**, que constan de más de un tipo de polígono regular en cada vértice.

Teselaciones no regulares

Además de las teselaciones regulares, que son aquellas en las que todos los polígonos son idénticos, existen

- **Teselaciones truncadas**, que se obtienen desde las regulares aplicando truncamiento, de forma similar a como se hacía en *sólidos arquimedianos*.
- **Teselaciones cuasirregulares**, en las que se alternan dos polígonos regulares distintos en cada vértice.
- **Teselaciones semirregulares**, que constan de más de un tipo de polígono regular en cada vértice.

Teselación truncada

En esta figura puede observarse una teselación de heptágonos truncada por triángulos, $t\{7,3\}$, y su dual.

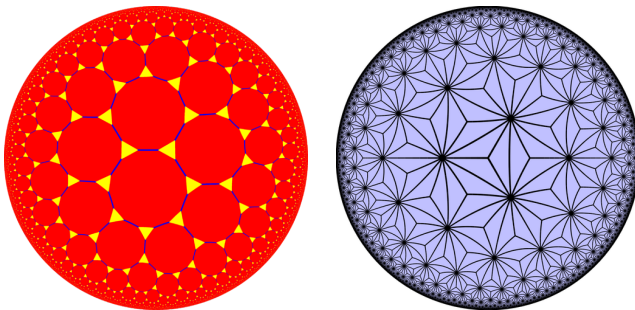


Figura: Teselación truncada con dual

M. C. Escher

En la obra de Maurits Cornelis Escher pueden apreciarse teselaciones del disco de Poincaré. Por ejemplo, en esta figura puede apreciarse la teselación con triángulos y cuadrados que da lugar a la obra *Circle Limit III*.

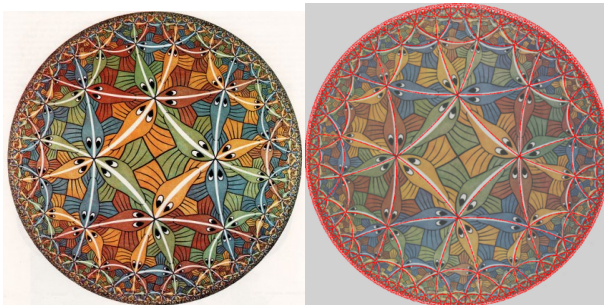


Figura: Circle Limit III

M. C. Escher

En la obra *Ángeles y demonios*, en esta figura podemos apreciar una teselación

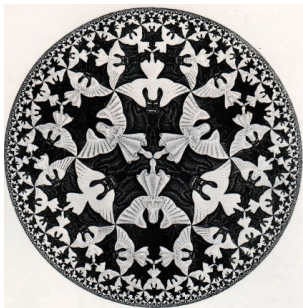
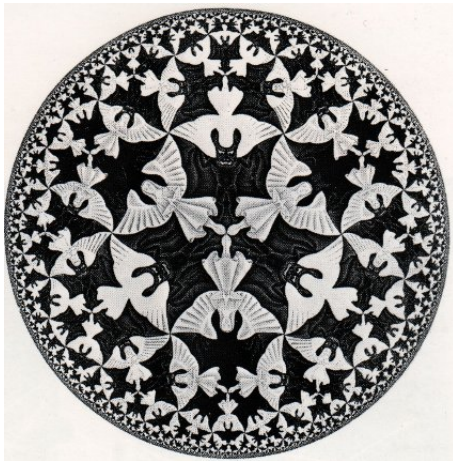


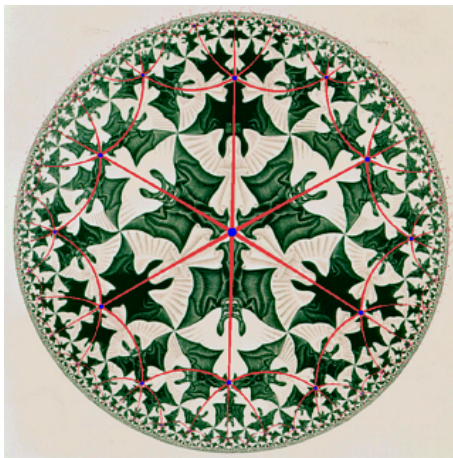
Figura: Ángeles y demonios, M.C.Escher

Qué tipo de teselación forma



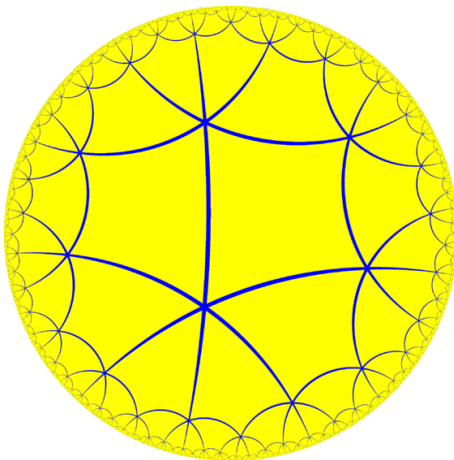
Qué tipo de teselación forma

Está hecha con cuadrados todos iguales que se unen en vértices uniendo 6 cuadrados. Es del tipo $\{4, 6\}$.



Qué tipo de teselación forma

Está hecha con cuadrados todos iguales que se unen en vértices uniendo 6 cuadrados. Es del tipo $\{4, 6\}$.



NonEuclid

NonEuclid es una aplicación ligera permitiendo construcciones con regla y compás en un disco de Poincaré e interactividad con las construcciones, además de soporte simple para animaciones. La versión original fue escrita en Java en 1994 por Joel Castellanos, pero en 2016 se implementó una versión en Javascript que puede ejecutarse desde el navegador usando HTML5. El código de ambas es abierto (si bien no consta de licencias de software libre), y puede obtenerse en la página web de [NonEuclid](#).

Para este trabajo hemos alojado una instancia de NonEuclid en la página que indica [este enlace](#) y hemos aportado construcciones nuevas a las originalmente seleccionables por la aplicación.

Geogebra

Geogebra no soporta directamente las construcciones en geometría hiperbólica, pero la comunidad aporta hojas de trabajo particulares en las que están presentes herramientas de construcción para varios modelos del plano hiperbólico en licencia Creative Commons. Un ejemplo es [esta construcción](#) de Francis W. Lipinski, sobre la que hemos realizado construcciones menores.

Bibliografía



Judith N. Celdeberg (1989-2001), A Course in Modern Geometries, New York: Springer Science and Business Media.



David A. Singer (1998), Geometry: Plane and Fancy, New York: Springer Science and Business Media.



Patrick J. Ryan Euclidean and non euclidean geometry. An analytic approach.



Wiley; Coxeter, Introduction to Geometry.



William Jagy (1995), Squaring Circles in the Hyperbolic Plane, The Mathematical Intelligencer.