



# Geometría hiperbólica

## Modelos

### **Resumen**

Este trabajo presenta algunos modelos de la geometría hiperbólica y varias construcciones y teselaciones posibles sobre ellos. Finaliza repasando el software disponible para la manipulación interactiva del plano hiperbólico.

**M. Gómez, E.M. González,  
D. Melero, M. Román**

Universidad de Granada

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelos de la geometría hiperbólica</b>	<b>2</b>
2.1. Modelo del hiperboloide . . . . .	3
2.2. Disco de Poincaré . . . . .	3
2.2.1. Métrica en el disco de Poincaré . . . . .	3
2.2.2. Rectas . . . . .	4
2.2.3. Ángulos . . . . .	5
2.2.4. Relación con el modelo del hiperboloide . . . . .	5
2.3. Disco de Beltrami-Klein . . . . .	5
2.3.1. Métricas de Cayley-Kelvin . . . . .	5
2.3.2. Comparación con Poincaré . . . . .	6
<b>3. Construcciones en el espacio hiperbólico</b>	<b>6</b>
3.1. Cuadriláteros de Saccheri . . . . .	6
3.2. Círculos, horociclos e hiperciclos . . . . .	7
3.3. Polígonos . . . . .	7
3.4. Teselaciones . . . . .	8
3.4.1. Teselaciones regulares . . . . .	8
3.4.2. Teselaciones no regulares . . . . .	10
3.4.3. Teselaciones en el arte . . . . .	10
<b>4. Construcciones interactivas</b>	<b>11</b>
4.1. NonEuclid . . . . .	11
4.2. Geogebra . . . . .	11
4.3. Cinderella . . . . .	12
<b>5. Referencias</b>	<b>12</b>

## 1. Introducción

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado, por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Históricamente, se han realizado esfuerzos por deducir el quinto postulado de Euclides de los otros cuatro. *Giovanni Gerolamo Saccheri* intentó, en el siglo XVIII probarlo por reducción al absurdo y creó en el proceso un modelo incipiente de geometría hiperbólica que nunca llegó a formalizar en su creencia de que sería inconsistente. Por otro lado, *Johann Heinrich Lambert* estudió lo que constituirían los triángulos de la geometría hiperbólica probando que sus ángulos sumaban siempre menos que  $180^\circ$ . En particular demostró la fórmula de Lambert para el defecto de un triángulo  $T$  de ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  como

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = \text{área}(T)k$$

siendo  $k$  una constante de proporcionalidad que estaría relacionada con la curvatura del espacio hiperbólico. [1] Más adelante Carl Friedrich Gauss trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.

La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado. El axioma de Lobachevsky, unido a los cuatro postulados anteriores, define la geometría hiperbólica.

**Axioma** (Axioma de Lobachevsky). Dada una recta  $R$  y un punto  $P$  fuera de  $R$ , en el plano conteniendo a la línea  $R$  y al punto  $P$  existen al menos dos líneas distintas que pasan por  $P$  y no intersecan a  $R$ .

## 2. Modelos de la geometría hiperbólica

**Definición 1.** Un **modelo** para un sistema se define sustituyendo los términos indefinidos del sistema de axiomas por objetos específicos que los cumplen.

Por ejemplo, un modelo de la geometría euclídea es el que asigna a cada punto un par de reales  $(a, b)$  y a cada recta el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal  $as + bt + u = 0$  para algunos reales tales que al menos uno de ellos no sea 0. Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.

- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Aunque los dos primeros fueron publicados por *Eugenio Beltrami* en 1968, se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*. Ambos son modelos que estudiaremos en su caso bidimensional pero generalizables a más dimensiones.

## 2.1. Modelo del hiperboloide

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

1. vectores espaciales,  $x \in \mathbb{R}^3$  tales que  $L(x) > 0$ ;
2. vectores temporales,  $x \in \mathbb{R}^3$  tales que  $L(x) < 0$ ; y
3. vectores luminosos,  $x \in \mathbb{R}^3$  tales que  $L(x) = 0$ .

Con esta norma definimos

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x, y, z) = -1, (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) > 0\};$$

y como vemos, esta es la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas. Sabemos que es una superficie y por tanto localmente homeomorfo a un plano, por lo que lo llamaremos *plano hiperbólico*.

- Los **puntos** en  $\mathbb{H}$  serán los puntos de nuestro modelo de la geometría hiperbólica.
- Las **rectas** en el plano hiperbólico se definen como las intersecciones de  $\mathbb{H}$  con planos que pasan por el origen. Las llamaremos *rectas hiperbólicas*.

## 2.2. Disco de Poincaré

### 2.2.1. Métrica en el disco de Poincaré

Si  $u, v$  son dos vectores del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , ambos con norma inferior a 1, podemos definir un invariante isométrico de la siguiente manera:

$$\delta(u, v) = 2 \frac{\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)},$$

donde  $\|\cdot\|$  representa la norma euclídea usual. Definimos la función distancia como:

$$d(u, v) = \operatorname{arccosh}(1 + \delta(u, v)).$$

Esta función de distancia está definida para cualesquiera dos vectores de norma inferior a uno, y el conjunto de tales vectores forman un espacio métrico que es un modelo de espacio hiperbólico de curvatura constante  $-1$ , como sabemos el disco de Poincaré.

La función  $\operatorname{arccosh}$  es creciente, luego cuanto mayor sea  $\delta(u, v)$ , mayor será la distancia que separa  $u$  y  $v$ . Ahora bien, si acercamos uno de los dos vectores  $u$  o  $v$  hacia la frontera del disco, su norma se acercará a uno, la función  $\delta$  crecerá, y como consecuencia la función distancia también. Es decir, si tenemos dos vectores, uno suficientemente lejos de la frontera y vamos acercando el otro a la frontera, la distancia entre ambos crecerá.

Por ejemplo, en la figura 1 todos los puntos están a la misma distancia del punto  $A$ .

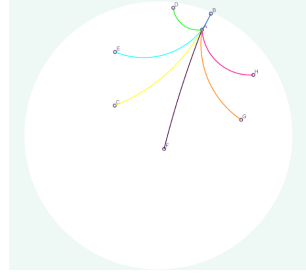


Figura 1: Distancias en el plano hiperbólico

Veamos también como sería una circunferencia con centro  $A$  un punto cercano a la frontera y un radio arbitrario

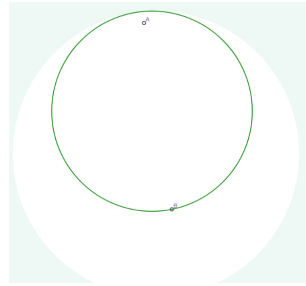


Figura 2: Circunferencia en el plano hiperbólico

### 2.2.2. Rectas

Dados ahora dos puntos vamos a ver como es la recta que pase por los dos puntos dados. En el modelo del disco de Poincaré, las rectas del plano se definen por arcos de circunferencias con ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0,$$

que es la forma general de una circunferencia que corta ortogonalmente al disco unidad.

Dados dos puntos  $u$  y  $v$  en el disco que no estén en un diámetro, se puede resolver para el círculo de esta forma pasando por ambos puntos, y obtener

$$x^2 + y^2 + \frac{u_2(v_1^2 + v_2^2) - v_2(u_1^2 + u_2^2) + u_2 - v_2}{u_1v_2 - u_2v_1}x + \frac{v_1(u_1^2 + u_2^2) - u_1(v_1^2 + v_2^2) + v_1 - u_1}{u_1v_2 - u_2v_1}y + 1 = 0.$$

### 2.2.3. Ángulos

Los ángulos son euclidianos. Si tenemos dos líneas hiperbólicas, cada una de ellas es un arco de circunferencia, luego la medida del ángulo que se forma entre las dos líneas hiperbólicas es el ángulo que forman las tangentes de las circunferencias en el punto en que éstas se intersecan.

### 2.2.4. Relación con el modelo del hiperboloide

Este modelo se relaciona con el modelo del hiperboloide proyectivamente. Dado un punto  $(t, x_1, x_2)$  sobre la hoja superior de un hiperboloide del modelo del hiperboloide, se define un punto del modelo del disco de Poincaré, que se puede proyectar sobre el plano  $t=0$ , el resultado es el correspondiente punto del disco de Poincaré. Para las coordenadas cartesianas  $(t, x_1, x_2)$  del hiperboloide e  $(y_1, y_2)$  del plano, tenemos las fórmulas de conversión

$$y_i = \frac{x_i}{1+t}, \quad (t, x_i) = \frac{(1 + \sum y_i^2, 2y_i)}{1 - \sum y_i^2}.$$

## 2.3. Disco de Beltrami-Klein

**Definición 2.** El **modelo de Beltrami-Klein** interpreta como puntos los puntos del interior de un disco unidad y como líneas las cuerdas del círculo abiertas, en el sentido de que no se consideran en ella los puntos de la frontera del círculo.

Veremos que el disco de Beltrami-Klein, al contrario que el disco de Poincaré, no es **conforme**, es decir, los ángulos en el modelo no se corresponden con los ángulos hiperbólicos.

### 2.3.1. Métricas de Cayley-Kelvin

**Definición 3.** Fijada una cuádrlica  $Q$  definimos la **distancia de Cayley-Kelvin** entre dos puntos como el logaritmo de una razón doble

$$\text{dist}(p, q) = C \log \frac{|qa||bp|}{|pa||bq|},$$

donde  $a$  y  $b$  son los puntos en los que la recta que pasa por  $p$  y  $q$  corta a  $Q$ . La  $C$  es una constante arbitraria.

La métrica que usamos en nuestro caso en el disco de Beltrami-Klein es un caso particular de una métrica de Cayley-Kelvin cuando la cuádrlica es el círculo. La distancia se define entonces como

$$\text{dist}(p, q) = \frac{1}{2} \log \frac{|qa||bp|}{|pa||bq|},$$

donde  $a, b$  son los puntos en los que la recta entre  $p$  y  $q$  corta al borde del disco unidad.

En la figura 3 podemos observar cómo las circunferencias en el disco de Klein se dibujan como elipses una vez se acercan al borde. Esto es debido a la no-conformidad del modelo.

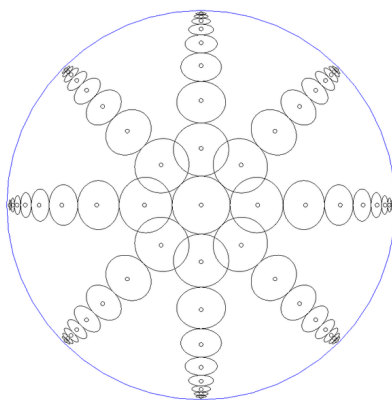


Figura 3: Círculos en el disco de Klein. *Wikimedia Commons*

**Teorema 1.** Si desde el origen hasta un punto hay una distancia euclídea de  $r$  en la bola, la distancia hiperbólica entre ambos es

$$\text{dist}(o, p) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right) = \text{artanh}(r),$$

donde  $\text{artanh}$  es el arcotangente hiperbólico.

### 2.3.2. Comparación con Poincaré

El modelo del disco de Klein preserva las líneas rectas como segmentos de recta dentro del disco, pero no es conforme; el disco de Poincaré, por otro lado, sí preserva los ángulos y es conforme, pero, como ya se ha mencionado, las rectas se convierten en segmentos de circunferencias ortogonales al disco. En la figura 4 puede observarse la comparación entre ambos.

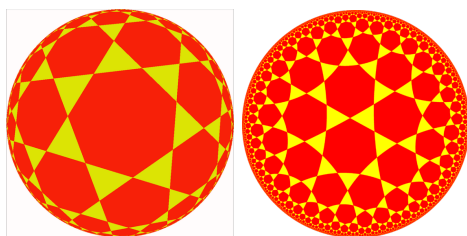


Figura 4: Comparación Klein-Poincaré. *Wikimedia Commons*

## 3. Construcciones en el espacio hiperbólico

### 3.1. Cuadriláteros de Saccheri

**Definición 4.** Un **cuadrilátero de Saccheri** es un cuadrilátero  $ABCD$  con dos ángulos rectos adyacentes en  $A$  y  $B$  y con dos lados iguales  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .

Nótese que en el plano hiperbólico no podemos demostrar de la misma forma que lo hacíamos en el plano euclídeo que los ángulos en  $C$  y  $D$  sean rectos. De hecho, si lo fueran, podríamos deducir el quinto postulado. A pesar de esto, sí podemos demostrar que son iguales.

**Teorema 2.** *En un cuadrilátero de Saccheri, los dos ángulos no rectos son iguales.*

Y además, podemos demostrar que la base del cuadrilátero es ultraparalela con su lado opuesto.

**Teorema 3.** *La línea que une los puntos medios de la base del cuadrilátero de Saccheri y su opuesto corta a ambas perpendicularmente. De aquí se sigue que ambas son ultraparalelas.*

### 3.2. Círculos, horociclos e hiperciclos

Sabemos ya que dos rectas distintas en el espacio hiperbólico deben ser secantes, paralelas o ultraparalelas. Deberán por tanto pertenecer a uno de los siguientes conjuntos

- un **haz** de todas las rectas que pasan por un punto.
- un **haz de paralelas** con todas las rectas paralelas a un rayo dado.
- un **haz de ultraparalelas** con todas las líneas perpendiculares a una línea dada.

Usaremos las reflexiones sobre estas rotaciones para caracterizar los círculos y definir con ellas los horociclos por analogía con la caracterización y los hiperciclos por analogía con la definición.

**Definición 5** (Círculo). Dado un punto  $C$  y un radio  $r \geq 0$ , llamamos **círculo** al conjunto de puntos a distancia  $r$  de él, es decir,

$$\mathcal{C} = \{X \mid \text{dist}(X, C) = r\}.$$

**Teorema 4.** *Un círculo con centro  $O$  puede construirse como la órbita de un punto sobre las reflexiones que determina el haz de rectas que pasa por  $O$ .*

**Definición 6** (Horociclo). Dado un haz de rectas paralelas a un rayo, definimos un **horociclo** como la órbita de un punto  $C$  bajo las reflexiones determinadas por las rectas del haz. [4]

Podemos interpretar un horociclo como un círculo teniendo como centro un punto impropio en el infinito.

**Definición 7** (Hiper ciclo). Llamamos **hiperciclo** al lugar geométrico dado por los puntos a una distancia fija de una recta.

Podemos caracterizarlo a su vez como la órbita de un punto bajo las reflexiones sobre las rectas de un haz de ultraparalelas.[4]

### 3.3. Polígonos

**Teorema 5.** *Los ángulos constructibles en el plano euclídeo son exactamente los ángulos constructibles en el plano hiperbólico. [5]*

Así, los polígonos regulares constructibles en el plano euclídeo serán constructibles en el plano hiperbólico. Simplemente es necesario formar el ángulo sobre una circunferencia y calcular los puntos de corte.



En particular, podemos construir un hexágono regular en el plano hiperbólico, que tiene todos sus lados y ángulos iguales, como puede apreciarse en la figura 5. Nótese que el área dependerá de sus ángulos, por lo que podremos construir en particular hexágonos con todos sus ángulos rectos

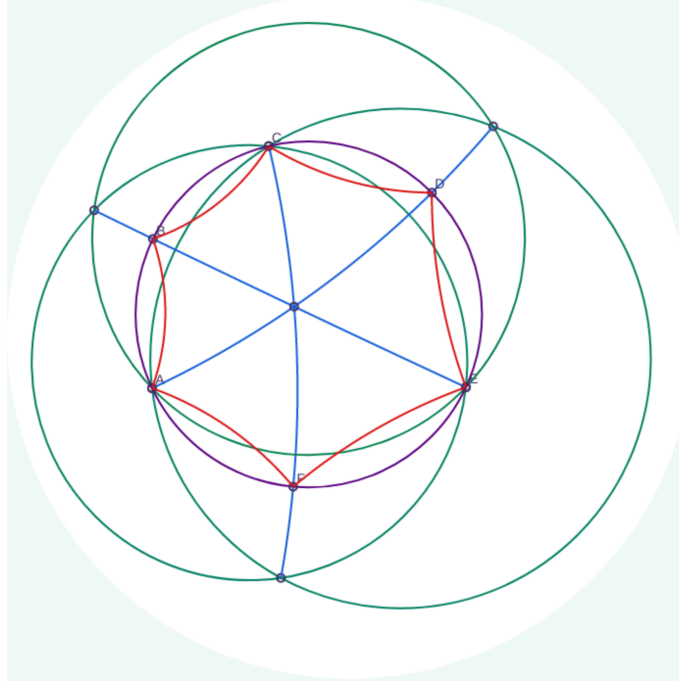


Figura 5: Construcción del hexágono regular

### 3.4. Teselaciones

#### 3.4.1. Teselaciones regulares

**Definición 8.** Una **teselación** es un recubrimiento de una superficie con polígonos iguales, sin dejar huecos ni cortarse. El polígono central de la teselación recibe el nombre de **región fundamental**, ya que de este se obtiene, por medio de inversiones respecto a sus lados, toda la teselación.

**Definición 9.** El **símbolo de Schläfli** es una notación usada para definir teselaciones y polítopos regulares. En nuestro caso la usaremos para representar una teselación poligonal como  $\{p, q\}$ , donde  $p$  es el polígono que da la teselación y  $q$  el número de polígonos que se unen en un vértice.

En el plano hiperbólico no podremos realizar las teselaciones del plano euclídeo en las que la suma de ángulos en cada vértice era exactamente  $2\pi$ , como  $\{3, 3\}$ ,  $\{4, 4\}$  o  $\{6, 3\}$ . Pero en su lugar, podremos realizar teselaciones donde unimos polígonos cuyos ángulos en el plano sumarían más de  $2\pi$ .

**Teorema 6.** *Se puede determinar si una teselación  $\{p, q\}$  es posible en el plano euclídeo, el hiperbólico o el elíptico, sabiendo que si*

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1/p + 1/q = 1/2 & \text{ssi es posible en el plano euclídeo} \\ 1/p + 1/q < 1/2 & \text{ssi es posible en el hiperbólico} \\ 1/p + 1/q > 1/2 & \text{ssi es posible en el elíptico} \end{array} \right\}$$

Presentamos ejemplos de las teselaciones regulares  $\{3, 7\}$ ,  $\{4, 5\}$  y  $\{7, 3\}$  en la figura 6.

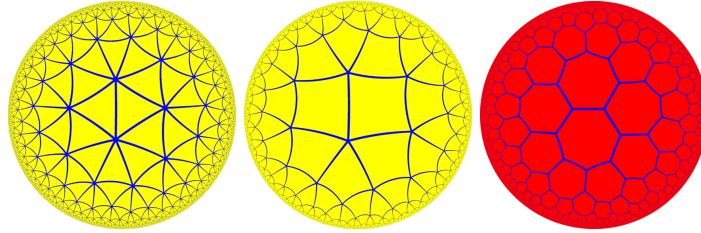


Figura 6: Teselaciones regulares

Pero además de estas teselaciones, como todas las teselaciones de la forma  $\{a, b\}$  son válidas para números suficientemente grandes, podemos hacer tender por separado ambas a infinito. Si hacemos tender  $b \rightarrow \infty$ , obtendremos teselaciones con vértices ideales en las que se unen un número infinito de polígonos. Por ejemplo en la figura 7 se pueden ver ejemplos de teselaciones  $\{3, \infty\}$  y  $\{5, \infty\}$ .

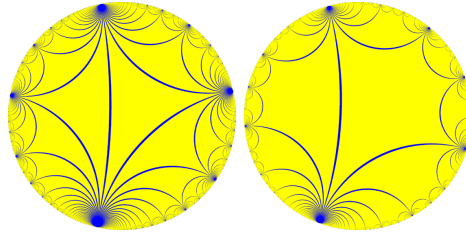


Figura 7: Teselaciones regulares con vértices ideales

**Definición 10.** Un **apeirógono** es un polígono degenerado con un número de lados infinito numerable. Surge como límite natural de los polígonos al incrementar el número de lados.

Haciendo tender  $a \rightarrow \infty$  obtendremos teselaciones con apeirógonos. Ejemplos de estas teselaciones son las teselaciones  $\{\infty, 3\}$  o  $\{\infty, 5\}$  que podemos ver en 8. Nótese que en ellas cada apeirógono está circunscrito en un horociclo.

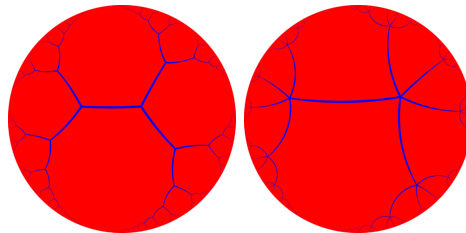


Figura 8: Teselaciones regulares con apeirógonos

Para finalizar, podemos hacer referencia a la teselación que usa un número infinito de apeirógonos en cada vértice en 9.

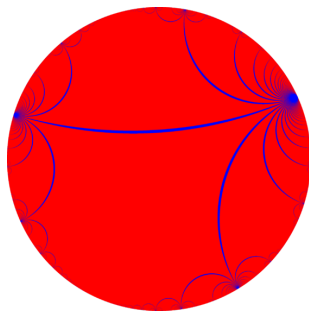


Figura 9: Teselación infinita con apeirógonos

### 3.4.2. Teselaciones no regulares

Además de las teselaciones regulares, que son aquellas en las que todos los polígonos son idénticos, existen

- **Teselaciones truncadas**, que se obtienen desde las regulares aplicando truncamiento, de forma similar a como se hacía en *sólidos arquimedianos*.
- **Teselaciones cuasirregulares**, en las que se alternan dos polígonos regulares distintos en cada vértice.
- **Teselaciones semirregulares**, que constan de más de un tipo de polígono regular en cada vértice.

En la figura 10 puede observarse una teselación de heptágonos truncada por triángulos,  $t\{7,3\}$ , y su dual.

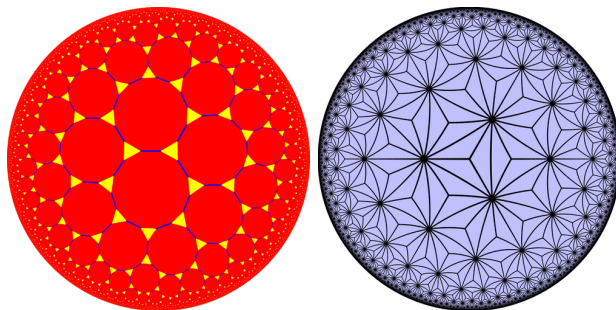


Figura 10: Teselación truncada con dual

### 3.4.3. Teselaciones en el arte

En la obra de Maurits Cornelis Escher pueden apreciarse teselaciones del disco de Poincaré. Por ejemplo, en la figura 11 puede apreciarse la teselación con triángulos y cuadrados que da lugar a la obra *Circle Limit III*.

En la obra *Ángeles y demonios*, en la figura 12 podemos apreciar una teselación hecha con cuadrados todos iguales que se unen en vértices uniendo 6 cuadrados. Es del tipo  $\{4,6\}$ .

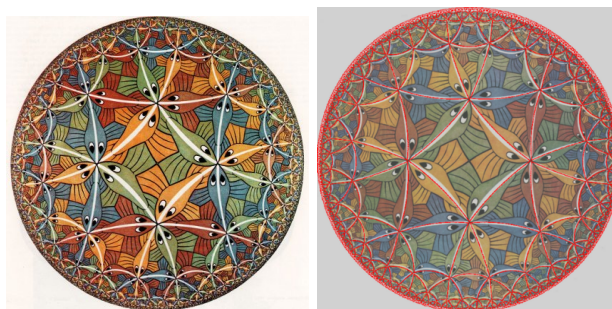


Figura 11: Circle Limit III

Figura 12: Ángeles y demonios y teselación  $\{4,6\}$ 

## 4. Construcciones interactivas

Enumeramos a continuación varias implementaciones de construcciones interactivas con regla y compás hiperbólicos en un disco de Poincaré.

### 4.1. NonEuclid

**NonEuclid** es una aplicación ligera permitiendo construcciones con regla y compás en un disco de Poincaré e interactividad con las construcciones, además de soporte simple para animaciones. La versión original fue escrita en Java en 1994 por Joel Castellanos, pero en 2016 se implementó una versión en Javascript que puede ejecutarse desde el navegador usando HTML5. El código de ambas es abierto (si bien no consta de licencias de software libre), y puede obtenerse en la página web de [NonEuclid](#).

Para este trabajo hemos alojado una instancia de NonEuclid en la página que indica [este enlace](#) y hemos aportado construcciones nuevas a las originalmente seleccionables por la aplicación.

### 4.2. Geogebra

**Geogebra** no soporta directamente las construcciones en geometría hiperbólica, pero la comunidad aporta hojas de trabajo particulares en las que están presentes herramientas de construcción para varios modelos del plano hiperbólico en licencia Creative Commons. Un ejemplo es [esta construcción](#) de Francis W. Lipinski, sobre la que hemos realizado construcciones menores.

### 4.3. Cinderella

**Cinderella** es software propietario escrito en Java que soporta geometrías euclídea, esférica e hiperbólica.

## 5. Referencias

### Referencias

- [1] Judith N. Celberg (1989-2001), A Course in Modern Geometries, New York: Springer Science and Business Media.
- [2] David A. Singer (1998), Geometry: Plane and Fancy, New York: Springer Science and Business Media.
- [3] Patrick J. Ryan Euclidean and non euclidean geometry. An analytic approach.
- [4] Wiley; Coxeter, Introduction to Geometry.
- [5] William Jagy (1995), Squaring Circles in the Hyperbolic Plane, The Mathematical Intelligencer.