Geometría hiperbólica

Disco de Poincaré

Resumen

En la geometría hiperbólica, el quinto postulado de Euclides es sustituido por el axioma de Lobachevsky.

M. Gómez, E.M. González, D. Melero, M. Román

Universidad de Granada

Índice

1. Introducción

La **geometría hiperbólica** es el modelo axiomático que se obtiene al aceptar los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea y sustituir el quinto postulado, por el postulado de Lobachevsky. A pesar de este cambio, algunos aspectos y teoremas de la geometría euclídea que sean independientes del quinto postulado seguirán siendo válidos.

Históricamente, se han realizado esfuerzos por deducir el quinto postulado de Euclides de los otros cuatro. *Giovanni Gerolamo Saccheri* intentó, en el siglo XVIII probarlo por reducción al absurdo y creó en el proceso un modelo incipiente de geometría hiperbólica que nunca llegó a formalizar en su creencia de que sería inconsistente. Por otro lado, *Johann Heinrich Lambert* estudió lo que constituirían los triángulos de la geometría hiperbólica probando que sus ángulos sumaban siempre menos que 180º. En particular demostró la fórmula de Lambert para el defecto de un triángulo T de ángulos α, β, γ como

$$\pi - \alpha - \beta - g = \text{área}(T)k$$

siendo k una constante de proporcionalidad que estaría relacionada con la curvatura del espacio hiperbólico. Más adelante Carl Friedrich Gauss trabajaría en un modelo similar sin publicar resultados.

La geometría hiperbólica que conocemos hoy surge en los años 1820 gracias al trabajo independiente de *János Bolyai* y *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, que publicaron modelos que posibilitaban una geometría completamente consistente y sin el quinto postulado. El axioma de Lobachevsky, unido a los cuatro postulados anteriores, define la geometría hiperbólica.

Axioma (Axioma de Lobachevsky)**.** Dada una recta R y un punto P fuera de R, en el plano conteniendo a la línea R y al punto P existen al menos dos líneas distintas que pasan por P y no intersecan a R.

2. Modelos de la geometría hiperbólica

Definición 1. Un **modelo** para un sistema se define sustituyendo los términos indefinidos del sistema de axiomas por objetos específicos que los cumplen.

Por ejemplo, un modelo de la geometría euclídea es el que asigna a cada punto un par de reales (a, b) y a cada recta el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal $as + bt + u = 0$ para algunos reales tales que al menos uno de ellos no sea 0. Existen varios modelos de geometría hiperbólica:

- la **representación de Klein**, también conocida como el *modelo proyectivo del disco* o *modelo de Beltrami-Klein*, toma como puntos a los puntos interiores de un círculo en el plano euclídeo y como rectas a las cuerdaas del círculo.
- el **modelo del disco de Poincaré**, usa también el interior de un círculo plano unidad como espacio de puntos, pero toma como rectas los arcos de circunferencia que cortan el borde del círculo plano de forma ortogonal.
- el **modelo del hiperboloide** o *de Lorentz* usa como espacio de puntos una hoja de un hiperboloide de dos hojas y como rectas los cortes de este con los hiperplanos del espacio de Minkowski en el que se embebe el hiperboloide.

Aunque los dos primeros fueron publicados por *Eugenio Beltrami* en 1968, se hicieron conocidos por el uso que les darían *Felix Klein* y *Henri Poincaré*. Ambos son modelos que estudiaremos en su caso bidimensional pero generalizables a más dimensiones.

2.1. Modelo del hiperboloide

El **modelo del hiperboloide** de la geometría hiperbólica se basa en la forma cuadrática de Lorentz,

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Si pensamos en esta forma cuadrática como una norma, tendremos vectores distintos de cero con norma cero e incluso norma negativa. Esto nos da una clasificación de los vectores en

1. vectores espaciales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) > 0$;
2. vectores temporales, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) < 0$; y
3. vectores luminosos, $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $L(x) = 0$.

Con esta norma definimos

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x, y, z) = -1,\ (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) > 0\};$$

y como vemos, esta es la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas. Sabemos que es una superficie y por tanto localmente homeomorfo a un plano, por lo que lo llamaremos *plano hiperbólico*.

- Los puntos en $\mathbb{H}$ serán los puntos de nuestro modelo de la geometría hiperbólica.
- Las rectas en el plano hiperbólico se definen como las intersecciones de $\mathbb{H}$ con planos que pasan por el origen. Las llamaremos *rectas hiperbólicas*.

2.2. Disco de Poincaré

2.2.1. Métrica en el disco de Poincaré

Si u, v son dos vectores del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$,ambos con norma inferior a 1, podemos definir un invariante isométrico de la siguiente manera:

$$\delta(u, v) = 2\frac{\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)},$$

donde $\|.\|$ representa la norma euclídea usual. Definimos la función distancia como:

$$d(u, v) = arccosh(1 + \delta(u, v)).$$

Esta función de distancia está definida para cualesquiera dos vectores de norma inferior a uno, y el conjunto de tales vectores forman un espacio métrico que es un modelo de espacio hiperbólico de curvatura constante -1, como sabemos el disco de Poincaré.

La función arccosh es creciente, luego cuanto mayor sea $\delta(u, v)$, mayor será la distancia que separa u y v. Ahora bien, si acercamos uno de los dos vectores u o v hacia la frontera del disco, su norma se acercará a uno, la función δ crecerá, y como consecuencia la función distancia también. Es decir, si tenemos dos vectores, uno suficientemente lejos de la frontera y vamos acercando el otro a la frontera, la distancia entre ambos crecerá.

Por ejemplo, en la siguiente imagen todos los puntos están a la misma distancia del punto A:

Veamos también como sería una circunferencia con centro A un punto cercano a la frontera y de radio, por ejemplo, 4:

2.2.2. Rectas

Dados ahora dos puntos vamos a ver como es la recta que pase por los dos puntos dados. En el modelo del disco de Poincaré, las rectas del plano se definen por arcos de circunferencias con ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0,$$

que es la forma general de una circunferencia que corta ortogonalmente al disco unidad.
Dados dos puntos u y v en el disco que no estén en un diámetro, se puede resolver para el círculo de esta forma pasando por ambos puntos, y obtener

$$x^2 + y^2 + \frac{u_2(v_1^2 + v_2^2) - v_2(u_1^2 + u_2^2) + u_2 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} x + \frac{v_1(u_1^2 + u_2^2) - u_1(v_1^2 + v_2^2) + v_1 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} y + 1 = 0.$$

2.2.3. Ángulos

Los ángulos son euclidianos. Si tenemos dos líneas hiperbólicas, cada una de ellas es un arco de circunferencia, luego la medida del ángulo que se forma entre las dos líneas hiperbólicas es el ángulo que forman las tangentes de las circunferencias en el punto en que éstas se intersecan.

2.2.4. Relación con el modelo del hiperboloide

Este modelo se relaciona con el modelo del hiperboloide proyectivamente. Dado un punto (t, x_1, x_2) sobre la hoja superior de un hiperboloide del modelo del hiperboloide, se define un punto del modelo del disco de Poincaré, que se puede proyectar sobre el plano t=0,el resultado es el correspondiente punto del disco de Poincaré. Para las coordenadas cartesianas (t, x_1, x_2) del hiperboloide e (y_1, y_2) del plano, las fórmulas de conversión son :

$$y_i = \frac{x_i}{1+t} \qquad (t, x_i) = \frac{(1 + \sum y_i^2, 2y_i)}{1 - \sum y_i^2}$$

3. Construcciones en el espacio hiperbólico

3.1. Círculos y horociclos

Sabemos ya que dos rectas distintas en el espacio hiperbólico deben ser secantes, paralelas o ultraparalelas. Deberán por tanto pertenecer a uno de los siguientes conjuntos

- un **haz** de todas las rectas que pasan por un punto.
- un **haz de paralelas** con todas las rectas paralelas a un rayo dado.
- un **haz de ultraparalelas** con todas las líneas perpendiculares a una línea dada.

Usaremos las reflexiones sobre estas rotaciones para caracterizar los círculos y definir con ellas los horociclos por analogía con la caracterización y los hiperciclos por analogía con la definición.

Definición 2 (Círculo)**.** Dado un punto C y un radio $r \geq 0$, llamamos **círculo** al conjunto de puntos a distancia r de él, es decir,

$$\mathcal{C} = \{X \mid \operatorname{dist}(X, C) = r\}.$$

Teorema 1. *Un círculo con centro O puede construirse como la órbita de un punto sobre las reflexiones que determina el haz de rectas que pasa por O.*

Definición 3 (Horociclo)**.** Dado un haz de rectas paralelas a un rayo, definimos un **horociclo** como la órbita de un punto C bajo las reflexiones determinadas por las rectas del haz. [4]

Podemos interpretar un horociclo como un círculo teniendo como centro un punto impropio en el infinito.

Definición 4 (Hiperciclo)**.** Llamamos **hiperciclo** al lugar geométrico dado por los puntos a una distancia fija de una recta.

Podemos caracterizarlo a su vez como la órbita de un punto bajo las reflexiones sobre las rectas de un haz de ultraparalelas.[4]

4. Referencias

Referencias

[1] Judith N. Cederberg (1989-2001), A Course in Modern Geometries, New York: Springer Science and Business Media.

[2] David A. Singer (1998), Geometry: Plane and Fancy, New York: Springer Science and Business Media.

[3] Patrick J. Ryan Euclidean and non euclidean geometry. An analytic approach.

[4] Wiley; Coxeter, Introduction to Geometry