Primera parte: Introducción a categorías

Mario Román

May 9, 2017

1 Categorías

1.1 Definición de categoría

Definición 1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ está formada por [1] [2]

- $\mathcal{C}_0$, un conjunto grande de **objetos**, y
- $\mathcal{C}_1$, un conjunto grande de **morfismos**.

Cada morfismo $f \in \mathcal{C}_1$ tiene un **dominio**, $\mathrm{dom}(f) \in \mathcal{C}_0$, y un **codominio** $\mathrm{cod}(f) \in \mathcal{C}_0$; y solemos notarlo como

$$f\colon \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(f).$$

Además, dados morfismos $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ existe su **morfismo composición** $g \circ f\colon A \to C$; que es asociativo y tiene elementos neutros $1_A\colon A \to A$. Es decir,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \text{ y } \quad f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

Nota. En la definición hemos usado explícitamente *conjuntos grandes*, más comúnmente llamados *clases*, en lugar de conjuntos. En el futuro querremos trabajar con categorías que contengan como objetos a todos los conjuntos posibles; pero este tipo de construcciones causan problemas en la teoría axiómatica de conjuntos tales como la paradoja de Russell, así que usaremos esta definición más general para evitarlas.

Nota. Lo realmente importante en una categoría son los morfismos y cómo se componen. Nótese que no trataremos el interior de los objetos, estos sólo aparecen como dominio y codominio de los morfismos. Podemos pensar en una categoría como la estructura algebraica que capta la noción de composición.

Definición 2. Notamos al conjunto de morfismos con dominio A y codominio B como $\mathrm{Hom}(A, B)$.

En ocasiones será útil señalar explícitamente la categoría sobre la que se consideran los morfismos. En esos casos se notará con un subíndice, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Al conjunto $\mathrm{Hom}(A, A)$ lo llamamos conjunto de **endomorfismos** del objeto A y lo notamos por $\mathrm{End}(A)$.

1.2 Ejemplos

1.2.1 Monoides

Definición 3. Una categoría de un solo objeto es un **monoide**.

Para comprobar cómo coincide con nuestra definición usual de monoide, debemos considerar los morfismos $f\colon A \to A$ como elementos del monoide y la composición como la operación del monoide. El elemento neutro será la identidad del objeto.

1.2.2 Relaciones de orden

Lema 1. *Cada conjunto parcialmente ordenado define una categoría con sus elementos como objetos y un único morfismo $\rho_{ab}\colon a \to b$ sólo cuando $a \leq b$.*

Demostración. Definimos la composición de la única forma posible, $\rho_{bc} \circ \rho_{ab}$ será ρ_{ac}, el único morfismo $a \to c$, que además sabemos que existe porque si existen ρ_{ab} y ρ_{bc}, querrá decir que $a \leq b$ y que $b \leq c$; y por transitividad, $a \leq c$. La asociatividad se tiene trivialmente porque entre dos objetos habrá, a lo sumo, un solo morfismo.
La identidad $\mathrm{id}_a = \rho_{aa}$ existe por reflexividad y podemos comprobar trivialmente que es neutra respecto a la composición, ya que entre cualesquiera dos objetos existe a lo sumo un morfismo. $\square$

Nota. Cada ordinal define una relación de orden (un buen orden), que a su vez define una categoría. Por ejemplo, la categoría asociada a 1 será una categoría de un sólo objeto con la identidad, que también puede verse como el monoide trivial. La categoría asociada a 2 será de la forma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd},$$

y la categoría asociada a ω tendrá la forma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] \arrow[rrr, bend right] & 2 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 3 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \dots \end{tikzcd}.$$

1.2.3 Conjuntos

Lema 2. *Las aplicaciones entre conjuntos, con la composición usual, determinan una categoría a la que llamaremos* `Set`.

Demostración. Sabemos que la composición usual de aplicaciones entre conjuntos es asociativa y que la identidad es un elemento neutro con la composición. $\square$

1.2.4 Grupos abelianos, espacios vectoriales, módulos

Lema 3. *Los homomorfismos de R-módulos izquierdos (recíprocamente con los derechos) con la composición usual, determinan una categoría a la que llamaremos $R-$*`Mod`.

Demostración. Nótese que de nuevo la composición usual es asociativa y la identidad es elemento neutro de la composición. Sólo nos falta comprobar que, efectivamente, la composición de homomorfismos de módulos sigue siendo un homomorfismo de módulos. $\square$

Corolario 1. *Los homomorfismos de grupos abelianos forman una categoría que llamaremos* `Ab`. *Las funciones lineales entre k-espacios vectoriales forman una categoría a la que llamaremos $k-$*`Vect`.

Demostración. Nótese que los grupos abelianos son los $\mathbb{Z}$-módulos y que los espacios vectoriales son los módulos sobre un cuerpo. $\square$

1.2.5 Espacios topológicos

Lema 4. *Las funciones continuas entre espacios topológicos, con la composición usual, determinan una categoría a la que llamaremos* `Top`*.*

Demostración. Sabemos que la composición usual de funciones continuas es asociativa y que la identidad es un elemento neutro con la composición. Falta comprobar que la composición de continuas es continua. □

2 Morfismos

2.1 Isomorfismos

Definición 4. Un morfismo $f\colon A \to B$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo inverso $f^{-1}\colon B \to A$ cumpliendo que

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f.$$

Definición 5. Dos objetos A, B son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos. La isomorfía se nota como $A \cong B$.

Proposición 1. *Son isomorfismos*

- *la identidad, con* $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$.
- *el inverso de un isomorfismo, con* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- *la composición de isomorfismos, con* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

La isomorfía es por tanto una relación de equivalencia entre objetos.

Definición 6. Llamamos además **automorfismos** a los *endomorfismos* que sean *isomorfismos.*

2.2 Monomorfismos y epimorfismos

Definición 7. Un morfismo $f\colon A \to B$ es un **monomorfismo** si puede cancelarse a la izquierda en la composición. Es decir, para cualquier par de morfismos g, h se cumple

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Definición 8. Un morfismo $f\colon A \to B$ es un **epimorfismo** si puede cancelarse a la derecha en la composición. Es decir, para cualquier par de morfismos g, h se cumple

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Nota. Un morfismo puede ser monomorfismo y epimorfismo sin tener una inversa y ser isomorfismo; en este caso lo llamamos **bimorfismo**.

2.3 Ejemplos

2.3.1 Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas en conjuntos

En la categoría de conjuntos,

- una aplicación es inyectiva si y sólo si es monomorfismo.
- una aplicación es sobreyectiva si y sólo si es epimorfismo.

- una aplicación es biyectiva si y sólo si es isomorfismo.

Demostración. Si $f\colon A \to B$ es inyectiva, es trivialmente monomorfismo. Si no es inyectiva, existen x, y tales que $f(x) \neq f(y)$. Podemos tomar las funciones $g, h\colon \{*\} \to A$ definidas como $g(*) = x$ y como $h(*) = y$ y comprobar que f no es monomorfismo.
Si $f\colon A \to B$ es sobreyectiva, es trivialmente epimorfismo. Si no es sobreyectiva, podemos tomar dos $g, h\colon B \to B \cup \{*, *'\}$ y que para un $x \notin \operatorname{im}(f)$, se definan como $g|_{B-\{x\}} = h|_{B-\{x\}} = \mathrm{id}$ pero con $g(x) = *$ y $h(x) = *'$. □

2.3.2 Grupos

Definición 9. Una categoría de un sólo objeto en la que todos los morfismos son isomorfismos es un **grupo**.

Como en el caso de los monoides, podemos tomar los automorfismos del objeto como los elementos del grupo.

2.3.3 Un bimorfismo no isomorfismo

Consideremos la inclusión $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ en `Top`. Trivialmente es un monomorfismo por ser inyectiva. Además, es epimorfismo, ya que si tenemos $g, h\colon \mathbb{R} \to A$ cumpliendo $g \circ i = h \circ i$, tendríamos $g|_{\mathbb{Q}} = h|_{\mathbb{Q}}$; y por continuidad, tendríamos $g = h$.
Sin embargo no es un isomorfismo, no existen homeomorfismos entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, que serían los isomorfismos de `Top`. Lo único que usamos es que la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ fuerza a que sólo exista una posible extensión continua de las funciones definidas en $\mathbb{Q}$ a funciones definidas en $\mathbb{R}$.

3 Propiedades universales

3.1 Objetos terminales

Definición 10. Un objeto I se dice **inicial** si desde cualquier otro objeto llega exactamente un morfismo. Es decir, para todo A, existe un único $i\colon I \to A$.

Definición 11. Un objeto T se dice **final** si desde cualquier otro objeto sale exactamente un morfismo. Es decir, para todo A, existe un único $t\colon A \to T$.

Definición 12. Llamamos **objeto cero** a un objeto que es a la vez inicial y final.

Nótese que una categoría no tiene por qué tener objetos terminales, ni tienen por qué ser únicos; pero sí serán únicos salvo isomorfismos.

Proposición 2. *Los objetos iniciales y finales de una categoría son* esencialmente únicos*, es decir,*

- *dos objetos iniciales serán isomorfos.*
- *dos objetos finales serán isomorfos.*

3.2 Productos y coproductos

Definición 13.

3.3 Núcleos y conúcleos

4 Referencias

References

[1] Steven Awodey and Andrej Brauer. Introduction to categorical logic. 2017.

[2] Paolo Aluffi. *Algebra Chapter 0 - Preliminaries: Set theory and categories*, pages 1–39. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009.