INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

MARIO ROMÁN

Resumen. Se explican tipos de morfismos y propiedades universales. Se destacan especialmente productos y coproductos y se pasan a definir los functores y las transformaciones naturales. El objetivo no es aportar otra explicación formal de la teoría de categorías, sino dar una idea general de los conceptos básicos.

1. Categorías

1.1. Motivación. Varias estructuras matemáticas (grupos, espacios vectoriales, espacios topológicos ...) cuentan con morfismos que preservan las estructura subyacentes entre ellas. Como ejemplos:

Conjunto	Morfismos
Grupos	Homomorfismos de grupos
Espacios topológicos	Funciones continuas
Espacios métricos	Funciones cortas
Conjuntos	Funciones
Espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$	Funciones lineales sobre $\mathbb{K}$

Si estudiamos axiomáticamente las propiedades abstractas de estas estructuras y sus morfismos, obtendremos teoremas particularizables a todos estos casos, útiles por sí mismos. Una categoría la formarán una clase de estos espacios con estructura y los morfismos entre estos espacios; y los teoremas que deduzcamos para todas las categorías podrán aplicarse a cada uno de los espacios.

1.2. Definición formal.

Definición 1.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ está definida por:

- Una clase de objetos de la categoría, $Obj(\mathcal{C})$.
- Un conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, poblado o no, entre cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$.

Cumpliendo sus morfismos las siguientes propiedades:

- Para dos morfismos $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$, existe su morfismo composición $f \circ g$.
- La composición es asociativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Todos los objetos tienen un morfismo identidad, $1_A \in Hom(A, A)$, neutro para la composición: $\forall f \in Hom(A, B) : f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

Ejercicio 1.2. Demostrar que la identidad es el único elemento neutro para la composición.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop right, "1_A"]
\end{tikzcd}
$$

Diagramas conmutativos de las propiedades básicas.

1.3. Ejemplos. Como idea simplificadora, podemos pensar que los objetos son conjuntos, y los morfismos, funciones entre esos conjuntos; de hecho, el primer ejemplo es la definición de ese caso concreto. Este es un buen modelo intuitivo para trabajar con algunas categorías, pero presentaremos ejemplos que rechazan esta intuición.

1.3.1. Categoría `Set`*.* La categoría de los conjuntos con las funciones entre conjuntos como morfismos.

$$Obj(\texttt{Set}) = \textit{Clase de todos los conjuntos}$$
$$Hom(A,B) = B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Trivialmente es categoría: las funciones se componen en funciones, la composición es asociativa y la identidad funciona como se espera, siendo otra función.

1.3.2. Categoría `VectR`*.* La categoría de los espacios vectoriales reales con las funciones lineales entre espacios vectoriales reales.

$$Obj(\texttt{VectR}) = \textit{Clase de espacios vectoriales sobre } \mathbb{R}$$
$$Hom(A,B) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(A,B)$$

Ejercicio 1.3. Observar que `VectR` es una categoría.

1.3.3. Categoría $(S,\sim)$. Cualquier conjunto S que tenga definida una relación de equivalencia $\sim$ tiene definida una categoría asociada en la que los objetos son los elementos del conjunto y los morfismos sólo representan casos particulares de la relación de equivalencia. *En este ejemplo, los morfismos no son funciones y los objetos no son conjuntos, rechazando por primera vez la intuición del primer ejemplo.*

$$Obj((S,\sim)) = S$$

Hay un morfismo entre dos elementos si y sólo si están relacionados:

$$Hom(a,b) = \left\{ \begin{array}{ll} (a,b) & \text{si } a \sim b \\ \varnothing & \text{si } a \nsim b \end{array} \right.$$

Y la composición se define como:

$$(a,b) \circ (b,c) = (a,c)$$

Probar que es categoría se reduce a notar que la composición de morfismos es morfismo (por ser la relación transitiva), que la composición es asociativa y que existe el morfismo identidad (a,a), por ser la relación reflexiva.

1.3.4. Categoría $(S, \leq)$. Cualquier conjunto parcialmente ordenado tiene una categoría asociada. Los objetos son sus elementos y los morfismos son casos particulares de la relación de orden.

$$Obj((S, \leq)) = S$$

Hay un morfismo entre a y b si y sólo si $a \leq b$:

$$Hom(a, b) = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \leq b \\ \varnothing & \text{si no} \end{cases}$$

La composición se define como anteriormente: $(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$, y es trivial volver a probar que se trata de una categoría.

Un posible diagrama conmutativo de la categoría $(\mathbb{N}, \leq)$ sería:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{(1,3)}"] \arrow[dr, "{(1,6)}"'] & 3 \arrow[r, "{(3,5)}"] \arrow[d, "{(3,6)}"] & 5 \arrow[d, "{(5,7)}"] \\
 & 6 \arrow[r, "{(6,7)}"] & 7
\end{tikzcd}$$

2. Tipos de morfismos

2.1. Isomorfismos.

Definición 2.1. Un morfismo $f \in Hom(A, B)$ es **isomorfismo** si existe un morfismo inverso $g \in Hom(B, A)$ cumpliendo:

$$(g \circ f) = 1_A \qquad (f \circ g) = 1_B$$

Ejercicio 2.2. Probar que el inverso, si existe, es único. Lo notaremos como f^{-1}. Observar que si existe un inverso por la derecha y un inverso por la izquierda, deben ser iguales.

2.1.1. Propiedades de isomorfismos.

- La identidad es isomorfismo: $(1)^{-1} = 1$
- El inverso de un isomorfismo es isomorfismo: $(f^{-1})^{-1} = f$.
- La composición de isomorfismos es isomorfismo: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Dos objetos A, B son **isomorfos** si existe un isomorfismo en $Hom(A, B)$, la isomorfía se nota como $A \cong B$ y es, por las propiedades anteriores, una relación de equivalencia.

Nótese que, precisamente, los isomorfismos de `Set` son las biyecciones entre conjuntos. Los isomorfismos de `Top` son los homeomorfismos y los isomorfismos de `Met` son las isometrías.

2.2. Epimorfismos y monomorfismos.

Definición 2.3. Un morfismo $f \in Hom(A, B)$ es **monomorfismo** si para cualquier objeto C y para cada par de morfismos $g, h : C \to A$, el morfismo puede *cancelarse* a la izquierda:

$$f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h$$

Es decir, si el siguiente diagrama conmuta y f es monomorfismo, entonces $g = h$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Definición 2.4. Análogamente, un morfismo $f \in Hom(A, B)$ es **epimorfismo** si para cualquier objeto C y para cada par de morfismos $g, h : B \to C$, el morfismo puede *cancelarse* a la derecha:

$$g \circ f = h \circ f \quad \Rightarrow \quad g = h$$

De nuevo, si el siguiente diagrama conmuta y f es epimorfismo, entonces $g = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

2.3. Ejemplos en varias categorías.

2.3.1. Categoría `Set`. En la categoría de los conjuntos, los isomorfismos son las funciones con inversa; lo que coincide con la definición de isomorfismos entre conjuntos. Dos conjuntos son isomorfos si tienen la misma cardinalidad. Los monomorfismos se corresponden con las funciones inyectivas y los epimorfismos con las funciones sobreyectivas.

2.3.2. Categoría $(\mathbb{Z}, \leq)$. En esta categoría, los únicos isomorfismos son las identidades. Nótese además que todos los morfismos son monomorfismos y epimorfismos, y, aun así, no son isomorfismos. Esto sirve de nuevo para no aceptar directamente la intuición guiada por la clase `Set`, donde morfismos que sean monomorfismos y epimorfismos deben ser isomorfismos.

3. Propiedades universales

Varias construcciones en las diversas estructuras que motivaron las categorías pueden parecer escogidas arbitrariamente. Sin embargo, la definición de las propiedades universales las dejará como las únicas cumpliendo una construcción formal no arbitraria. Además, nos permitirá descubrir relaciones más profundas entre las construcciones en las distintas categorías.

3.1. Objetos terminales.

Definición 3.1. El objeto $I \in Obj(\mathcal{C})$ se dice **inicial** cuando a cualquier otro objeto llega un único morfismo desde él. Es decir:

$$\forall A \in Obj(\mathcal{C}) : \quad \#(Hom(I, A)) = 1$$

Definición 3.2. Análogamente, el objeto $F \in Obj(\mathcal{C})$ se dice **final** cuando desde cualquier otro objeto llega un único morfismo hacia él. Es decir:

$$\forall A \in Obj(\mathcal{C}) : \quad \#(Hom(A, F)) = 1$$

Se llama **objeto terminal** a un objeto inicial o final y **objeto cero** a un objeto terminal y final. Una categoría no tiene por qué tener objetos terminales, y estos no tienen por qué ser únicos. Pero serán *esencialmente únicos*, es decir, si dos objetos son ambos iniciales o ambos finales en una categoría, serán isomorfos, como demostramos a continuación.

Teorema 3.3. *Los objetos iniciales y los objetos finales de una categoría son esencialmente únicos:*

- *Si I_1, I_2 son iniciales, $I_1 \cong I_2$*
- *Si F_1, F_2 son finales, $F_1 \cong F_2$*

Demostración. Para I_1, I_2 iniciales, debe cumplirse que existe un sólo $f \in Hom(I_1, I_2)$ y que existe un sólo $g \in Hom(I_2, I_1)$. Como en $Hom(I_1, I_1)$ y en $Hom(I_2, I_2)$ sólo existe un morfismo, que debe ser la identidad, tenemos:

$$g \circ f = 1_{I_1} \quad f \circ g = 1_{I_2}$$

Por lo que son isomorfismos y $I_1 \cong I_2$. Análogamente se prueba para objetos finales. □

3.2. Ejemplos.

3.2.1. Objetos terminales en `Set`. En la categoría `Set`, es objeto inicial el conjunto vacío: para cualquier otro conjunto A, $Hom(\varnothing, A)$ consta sólo de la inclusión (la función vacía), que podemos notar por $(\varnothing)$.
Todos los conjuntos de un sólo elemento son finales. Sólo hay un morfismo $c_* \in Hom(A, \{*\})$, la función constantemente $*$. Obsérvese que entre ellos, todos los conjuntos de un elemento son isomorfos como afirma el teorema anterior.

3.2.2. Objetos terminales en `Grp`. Entre los grupos, un homomorfismo debe llevar siempre la identidad hacia la identidad del otro grupo, y además, no existe el grupo vacío. Esto hace que el objeto terminal y final de la categoría sea el grupo que tiene como único elemento la identidad, $\{e\}$. Hacia cualquier otro grupo existe un único homomorfismo (la imagen de la identidad debe ser la identidad), y desde cualquier otro grupo existe un único homomorfismo (la función constantemente e).

3.2.3. Objetos terminales en $(\mathbb{N}, \leq)$. En esta categoría, 0 es trivialmente objeto inicial y no hay objetos finales. Nótese además que en $(\mathbb{Z}, \leq)$ no habría ningún objeto terminal. En general, en una categoría $(S, \leq)$, los objetos terminales son el máximo y el mínimo, que no tienen por qué existir.

3.2.4. Proyección al cociente. Dado un conjunto A, con una relación de equivalencia $\sim$ definimos una categoría que tenga por objetos las funciones (!) que preserven la relación de equivalencia. Es decir, las funciones de la forma:

$$\begin{tikzcd} Z \\ A \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

Para Z conjunto y $f \in Hom(A, Z)$, cumpliendo $[a]_\sim = [b]_\sim \Rightarrow f(a) = f(b)$.

Los morfismos entre dos objetos $Hom((Z, f), (W, g))$ de esta categoría serán los diagramas conmutativos de la siguiente forma.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\phi"] & W \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Donde, para que se cumpla el diagrama, debería tenerse: $\phi \circ f = g$.

Y la composición entre morfismos es el exterior de la composición de los dos diagramas conmutativos, que vuelve a ser diagrama conmutativo:

$$\left(\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "h"'] & V \end{tikzcd}\right) \circ \left(\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\phi"] & W \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, bend left, "\psi\circ\phi"] & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & V \end{tikzcd}\right)$$

La construcción de esta categoría puede parecer sorprendente y artificial, pero pronto usaremos construcciones similares para obtener propiedades básicas. Por ahora, basta notar que en esta categoría, la proyección al cociente $(A/_\sim, \sim)$ es el objeto inicial:

$$\begin{tikzcd} A/_\sim \arrow[r, "\exists! \tilde{f}"] & Z \\ A \arrow[u, "\pi_\sim"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\tilde{f}([x]_\sim) = f(x)$. Comprobamos que está bien definida porque exigíamos a las funciones que cumplieran $[a]_\sim = [b]_\sim \Rightarrow f(a) = f(b)$.

El diagrama es conmutativo trivialmente: $\tilde{f} \circ \pi = f$ $\square$

4. Productos y coproductos

4.1. Producto. El producto de dos objetos en una categoría se definirá como otro objeto tal que una pareja de morfismos que vaya desde un tercer objeto hacia los dos objetos pueda descomponerse de manera única a través de su objeto producto. En términos de diagramas conmutativos, para $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, su objeto producto, $A \times B$ cumple que, para cualquier $Z \in Obj(\mathcal{C})$ que se descomponga así, existe un único morfismo ϕ que lo lleva al producto:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

A ese morfismo ϕ que es único lo llamaremos $f \times g$.

Ejemplo 4.1. En la categoría `Set`, el producto de dos conjuntos es el producto usual: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Si tenemos otro conjunto Z con dos funciones f, g hacia A y hacia B, existe una única función hacia $A \times B$ que hace el diagrama conmutativo, la función:

$$(f \times g)(z) = (f(z), g(z)) \quad \forall z \in Z$$

Aquí, las funciones π_A, π_B, son las proyecciones usuales desde el producto. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dashed, "f\times g"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Ejercicio 4.2. Demostrar que $f \times g$ es efectivamente la única función que hace que el diagrama conmute.

Esta primera definición puede ser reescrita de forma que además se demuestre automáticamente la unicidad esencial del objeto producto en el caso de existir. Recurrimos para ello a definir una categoría parecida a la que usamos para definir la proyección al cociente.

4.2. Categorías $\mathcal{C}_{A,B}$. Dados objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ para una categoría $\mathcal{C}$. Definimos la categoría $\mathcal{C}_{A,B}$ como la categoría teniendo por objetos los diagramas de la forma:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Donde Z es otro objeto con dos morfismos f_A, f_B hacia A y B.

Y teniendo por morfismos las funciones ϕ en diagramas conmutativos de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, bend right, "g_A"'] \arrow[ddr, bend left, "g_B"] & \\ & Z \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Que se componen como podría esperarse:

$$\left(\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddl, bend right, "g_A"'] \arrow[ddr, bend left, "g_B"] & \\ & W \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "h_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \right) \circ \left(\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, bend right, "f_A"'] \arrow[ddr, bend left, "f_B"] & \\ & V \arrow[dl, "g_A"'] \arrow[dr, "g_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dashed, "\psi\circ\phi"] \arrow[ddl, bend right, "f_A"'] \arrow[ddr, bend left, "f_B"] & \\ & W \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "h_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \right)$$

Pues bien, se define el producto como el objeto final de esta categoría.

Ejercicio 4.3. Comprobar que coincide con la definición anterior y observar que esto prueba su unicidad esencial.

4.3. Coproducto. Análogamente, el coproducto se define como el objeto final de la categoría $\mathcal{C}^{A,B}$, que se forma intuitivamente invirtiendo la dirección de las flechas de la categoría $\mathcal{C}_{A,B}$. Es decir, tendrá objetos de la forma:

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ A \arrow[ur, "f_A"] & & B \arrow[ul, "f_B"'] \end{tikzcd}$$

Y los morfismos y su composición se definirán análogamente. El coproducto de A y B, será $A \amalg B$ con dos morfismos i_A, i_B cumpliendo el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ & A \amalg B \arrow[u, dashed, "(f,g)"] & \\ A \arrow[ur, "i_A"'] \arrow[uur, bend left, "f"] & & B \arrow[ul, "i_B"] \arrow[uul, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.4. En la categoría `Set`, el coproducto es la unión disjunta de dos conjuntos: $A \amalg B \cong \{(a,1) \mid a \in A\} \cup \{(b,2) \mid b \in B\}$. Si tenemos otro conjunto Z con dos funciones f, g desde A y desde B, existe una única función desde $A \amalg B$ que hace el diagrama conmutativo, la función:

$$(f,g)((x,n)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } n = 1 \\ g(x) & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

4.4. Casos particulares.

4.4.1. Categoría **`Grp`**. En la categoría de los grupos, el producto será el producto usual conjuntista con el producto de elementos definido componente a componente.

$$G_1 \times G_2 = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$
$$(a,b) * (a',b') = (a * a', b * b')$$

Y el coproducto será el producto libre de grupos, $G * H$, formado por las palabras reducidas de elementos de ambos grupos. El producto de palabras es su yuxtaposición reducida.

$$G_1 * G_2 = \{a_1b_1a_2b_2 \dots a_kb_k \mid a_i \in A,\ b_i \in B\}$$
$$(a_1b_1a_2b_2 \dots a_kb_k) * (a'_1b'_1a'_2b'_2 \dots a'_kb'_k) = (a_1b_1 \dots a_kb_ka'_1b'_1 \dots a'_kb'_k)$$

4.4.2. Categoría $(S, \leq)$. En la categoría dada por una relación de orden puede demostarse que serán el producto y el coproducto el ínfimo y el supremo, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[d, dashed] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& \text{ínf}\{a,b\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& c & \\
& \sup\{a,b\} \arrow[u, dashed] & \\
a \arrow[ur] \arrow[uur, bend left] & & b \arrow[ul] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

4.4.3. Categoría $(\mathcal{P}(\Omega), \subseteq)$. Esta categoría es similar a la anterior, es un caso particular para subconjuntos con la inclusión como relación de orden parcial. Un morfismo de A hacia B indica que $B \subseteq A$. La intersección y la unión serán aquí el producto y coproducto:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dashed] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& A \cap B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C & \\
& A \cup B \arrow[u, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[uur, bend left] & & B \arrow[ul] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

4.4.4. Categoría **`Prop`**. Sea una categoría que tiene por objetos a las proposiciones lógicas. Existe un morfismo desde una proposición a otra si la primera implica la otra, $A \Rightarrow B$. En esta categoría, el producto y el coproducto son la conjunción y la disyunción lógicas:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, dashed] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& A \wedge B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Z & \\
& A \vee B \arrow[u, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[uur, bend left] & & B \arrow[ul] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

Aquí el producto y coproducto de morfismos (implicaciones) sería de la forma:

$$(Z \Rightarrow A) \times (Z \Rightarrow B) = (Z \Rightarrow A \wedge B)$$
$$((A \Rightarrow Z), (B \Rightarrow Z)) = (A \vee B) \Rightarrow Z$$

Nótese que en esta categoría, el objeto inicial es `False` y el objeto inicial es `True`.

4.4.5. Categoría `Hask`. Sea ahora la categoría de tipos de Haskell.[1] Los objetos son los posibles tipos en Haskell y un morfismo entre dos objetos es una función que tome uno de los tipos y devuelva el otro. Tenemos los diagramas siguientes de producto y coproducto:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathtt{c} \arrow[d, dashed, "\mathtt{f><g}"] \arrow[ddl, bend right, "\mathtt{f}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathtt{g}"] & \\
 & (\mathtt{a}, \mathtt{b}) \arrow[dl, "\mathtt{fst}"] \arrow[dr, "\mathtt{snd}"'] & \\
\mathtt{a} & & \mathtt{b}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c & \\
 & \mathtt{Either\ a\ b} \arrow[u, dashed, "\mathtt{either\ f\ g}"] & \\
a \arrow[uur, bend left, "\mathtt{f}"] \arrow[ur] & \arrow[u, phantom, "\mathtt{Left\ Right}"] & b \arrow[uul, bend right, "\mathtt{g}"'] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Hay ciertas similitudes entre las categorías de tipos y proposiciones que se quedarán fuera de lo que se expone aquí.

[1]Aunque, hablando estrictamente, no sea ni siquiera una categoría, es interesante trabajar un poco en ella: `http://www.haskell.org/haskellwiki/Hask`

5. La categoría opuesta

Hasta ahora, pudiera parecer que estamos repitiendo trabajo. Todo lo hemos definido dos veces, una vez sobre cada dirección. Composición a izquierda y derecha, monomorfismos y epimorfismos, objetos iniciales y finales, productos y coproductos.

Vamos a definir ahora la categoría $\mathcal{C}^{op}$ como la categoría opuesta de $\mathcal{C}$. Intuitivamente, es la categoría que se obtiene invirtiendo el sentido de todos los morfismos. Formalmente, esta categoría está formada por:

- $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$
- $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$, para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{C}^{op})$

La composición de morfismos es aquí trivial si tenemos en cuenta que hemos dado la vuelta a los morfismos:

$$\forall f^{op} \in Hom(B,A), g^{op} \in Hom(C,B) : \quad f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$$

Como podemos observar en estos dos diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f^{op}"'] & C \arrow[l, "g^{op}"'] \arrow[ll, bend left, "f^{op}\circ g^{op}"] \end{tikzcd}$$

Ejercicio 5.1. Comprobar que la categoría opuesta forma una categoría.

Ejercicio 5.2. Definir el objeto final y el coproducto en términos del inicial y el producto respectivamente, usando la categoría opuesta.

Ejercicio 5.3. Probar que un monomorfismo en una categoría es epimorfismo en la opuesta y que los isomorfismos se mantienen también en la categoría opuesta.

6. Functores

Una aplicación entre categorías, preservando su estructura, es un functor.

Definición 6.1. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorías. Un **functor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ está formado por:

- Una función entre objetos $F : Obj(\mathcal{A}) \to Obj(\mathcal{B})$
- Una función entre morfismos $F : Hom_{\mathcal{A}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$

Cumpliendo:

- Respeta la composición: $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$
- Respeta la identidad: $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Es decir, el functor lleva objetos de una categoría a objetos de otra y los morfismos entre objetos de una categoría a morfismos de entre las imágenes de los objetos en la otra categoría.

6.1. Ejemplos.

6.1.1. Cardinalidad. La cardinalidad, que relaciona el orden parcial de los conjuntos finitos con el orden total entre los naturales, puede verse como un functor:

$$\# : (\texttt{FiniteSet}, \subseteq) \to (\mathbb{N}, \leq)$$
$$\#(A) = (\textit{cardinalidad de } A)$$
$$\#(A \subseteq B) = \#(A) \leq \#(B)$$

6.1.2. Endofunctores. Un endofunctor es aquel que va de una categoría hacia sí misma. Un ejemplo puede ser una función lineal con determinante positivo en $\mathbb{Z}$:

$$(\lambda) : (\mathbb{Z}, \leq) \to (\mathbb{Z}, \leq)$$
$$(\lambda)(n) = \lambda n$$
$$(\lambda)(p \leq q) = (\lambda p \leq \lambda q)$$

6.2. Functores de olvido. Un ejemplo de functores son los informalmente llamados functores de olvido, que *olvidan* propiedades de una categoría al llevarla a otra mediante una inclusión.

Ejemplo 6.2. El functor $U : \texttt{Grp} \to \texttt{Set}$ que olvida la estructura de grupo. $U(G)$ es el conjunto de elementos del grupo G y $U(\phi)$ es la aplicación ϕ entre conjuntos, sin verla como un homomorfismo.

6.3. Functores libres. Los functores libres hacen un papel inverso a los functores de olvido. Informalmente, llevan una categoría hacia otra con más información dotándola del mínimo contexto posible.

Ejemplo 6.3. El functor $F : \texttt{Set} \to \texttt{Grp}$ lleva cada conjunto X al grupo libre generado por los elementos de X, es decir, al grupo de palabras reducidas formadas con elementos de X. Las funciones entre conjuntos se convierten trivialmente en homomorfismos entre sus grupos libres generados.

7. Transformaciones naturales

Definición 7.1. Una transformación natural α entre dos functores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ viene determinada por:

- Para cada $X \in \mathcal{C}$, un morfismo: $\alpha_X : F(X) \to G(X)$

Cumpliendo que:

- Para cualquier morfismo $f \in Hom(X,Y)$ se tenga: $\alpha_Y \circ Ff = Gf \circ \alpha_X$

Lo que queda representado en el siguiente diagrama conmutativo de naturalidad:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\alpha_Y"] & GY
\end{tikzcd}$$

Referencias

[1] Paolo Aluffi, *Algebra, Chapter 0.* American Mathematical Society, 2009.
[2] Jeremy Kun, *Math ∩ Programming.* `http://jeremykun.com/main-content/`