INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

MARIO ROMÁN

RESUMEN. Presentamos una breve introducción a la teoría de categorías, motivando y definiendo el concepto. Se indican los primeros ejemplos de categorías.

1. CATEGORÍAS

1.1. Motivación. Varias estructuras matemáticas (grupos, espacios vectoriales, espacios topológicos ...) cuentan con morfismos que preservan las estructura subyacentes entre ellas. Como ejemplos:

Conjunto	Morfismos
Grupos	Homomorfismos de grupos
Espacios topológicos	Funciones continuas
Espacios métricos	Funciones cortas
Conjuntos	Funciones
Espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$	Funciones lineales sobre $\mathbb{K}$

Si estudiamos axiomáticamente las propiedades abstractas de estas estructuras y sus morfismos, obtendremos teoremas particularizables a todos estos casos útiles por sí mismos. Una categoría la formarán una clase de estos espacios con estructura y los morfismos entre estos espacios; y los teoremas que deduzcamos para todas las categorías podrán aplicarse a cada uno de los espacios.

1.2. Definición formal.

Definición 1.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ está definida por:

- Una clase de objetos de la categoría, $Obj(\mathcal{C})$.
- Un conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, poblado o no, entre cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$.

Cumpliendo sus morfismos las siguientes propiedades:

- Para dos morfismos $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$, existe su morfismo composición $f \circ g$.
- La composición es asociativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Todos los objetos tienen un morfismo identidad, $1_A \in Hom(A, A)$, neutro para la composición: $\forall f \in Hom(A, B) : f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

Ejercicio 1.2. Demostrar que la identidad es el único elemento neutro para la composición.

1.3. Ejemplos. Como idea simplificadora, podemos que los objetos son conjuntos, y los morfismos, funciones entre esos conjuntos; de hecho, el primer ejemplo es la definición de ese caso concreto. Este es un buen modelo intuitivo para trabajar con algunas categorías, pero presentaremos ejemplos que rechazan esta intuición.

1.3.1. Categoría `Set`. La categoría de los conjuntos con las funciones entre conjuntos como morfismos.

$$Obj(\texttt{Set}) = \{Todos\ los\ conjuntos\}$$
$$Hom(A,B) = B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Trivialmente es categoría: las funciones se componen en funciones, la composición es asociativa y la identidad funciona como se espera, siendo otra función.

1.3.2. Categoría `VectR`. La categoría de los espacios vectoriales reales con las funciones lineales entre espacios vectoriales reales.

$$Obj(\texttt{VectR}) = \{Todos\ los\ espacios\ vectoriales\ sobre\ \mathbb{R}\}$$
$$Hom(A,B) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(A,B)$$

Ejercicio 1.3. Observar que `VectR` es una categoría.

1.3.3. Categoría $(S,\sim)$. Cualquier conjunto S que tenga definida una relación de equivalencia $\sim$ tiene definida una categoría asociada en la que los objetos son los elementos del conjunto y los morfismos sólo representan casos particulares de la relación de equivalencia. *En este ejemplo, los morfismos no son funciones y los objetos no son conjuntos, rechazando por primera vez la intuición del primer ejemplo.*

$$Obj((S,\sim)) = S$$

Hay un morfismo entre dos elementos si y sólo si están relacionados:

$$Hom(a,b) = \begin{cases} (a,b) & \text{si } a \sim b \\ \emptyset & \text{si } a \nsim b \end{cases}$$

Y la composición se define como:

$$(a,b) \circ (b,c) = (a,c)$$

Probar que es categoría se reduce a notar que la composición de morfismos es morfismo (por ser la relación transitiva), que la composición es asociativa y que existe el morfismo identidad (a,a), por ser la relación reflexiva.