Primera parte: Introducción a categorías

Mario Román

May 12, 2017

Contents

1 Categorías

1.1 Definición de categoría

Definición 1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ está formada por [1] [2]

- $\mathcal{C}_0$, un conjunto grande[1] cuyos elementos se llaman **objetos**, y
- $\mathcal{C}_1$, un conjunto grande cuyos elementos se llaman **morfismos**.

A cada morfismo $f \in \mathcal{C}_1$ se le asocian dos objetos, un **dominio**, $\mathrm{dom}(f) \in \mathcal{C}_0$, y un **codominio** $\mathrm{cod}(f) \in \mathcal{C}_0$; y solemos notarlo como

$$f\colon \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(f).$$

Además, dados morfismos $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ existe su **morfismo composición** $g \circ f\colon A \to C$; la composición de morfismos se exige asociativa y con elementos neutros $\mathrm{id}_A\colon A \to A$. Es decir,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \text{ y } \quad f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

Nota. Lo realmente importante en una categoría son los morfismos y cómo se componen. Nótese que no trataremos el interior de los objetos; estos sólo aparecen como dominio y codominio de los morfismos. Podemos pensar en una categoría como la estructura algebraica que capta la noción de composición.

Definición 2. Notamos al conjunto de morfismos con dominio A y codominio B como $\mathrm{Hom}(A, B)$.[2]

En ocasiones será útil señalar explícitamente la categoría sobre la que se consideran los morfismos. En esos casos se notará con un subíndice, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Al conjunto $\mathrm{Hom}(A, A)$ lo llamamos conjunto de **endomorfismos** del objeto A y lo notamos por $\mathrm{End}(A)$.

1.2 Ejemplos

1.2.1 Ejemplos básicos

Vamos a crear una categoría como ejemplo. En nuestra categoría, los objetos serán a, b, c y los morfismos serán $\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_c, f, g, h$, con los dominios y codominios siguientes

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd}$$

donde la única composición posible, además de las de las identidades, la definimos como $f \circ g = h$. A esta forma de expresar morfismos la llamamos **diagrama conmutativo**: escribimos una flecha entre dos objetos para representar un morfismo entre ellos, las composiciones de morfismos entre cualesquiera dos caminos entre dos objetos son iguales y las identidades se omiten.

Definición 3. La **categoría vacía** se define como aquella con un conjunto de objetos y de morfismos vacío.

Definición 4. Una categoría de un solo objeto es un **monoide**.

[1]: En la definición hemos usado explícitamente *conjuntos grandes*, más comúnmente llamados *clases*, en lugar de conjuntos. En el futuro querremos trabajar con categorías que contengan como objetos a todos los conjuntos posibles; pero este tipo de construcciones causan problemas en la teoría axiómatica de conjuntos tales como la paradoja de Russell, así que usaremos esta definición más general para evitarlas.

[2]: Nótese que la clase de morfismos entre dos objetos no tiene por qué ser un conjunto en lugar de una clase. Las categorías con las que trabajaremos, donde efectivamente es un conjunto, se llaman **categorías localmente pequeñas**.

Para comprobar cómo coincide con nuestra definición usual de monoide, debemos considerar los morfismos $f\colon A \to A$ como elementos del monoide y la composición como la operación del monoide. El elemento neutro será la identidad del objeto.

1.2.2 Categorías discretas

Definición 5. Llamamos **categoría discreta** a aquella que sólo tiene identidades como morfismos; no existen morfismos entre dos objetos distintos.

Nótese que cada categoría discreta viene determinada por una clase de objetos y cada clase (o conjunto) de objetos define una única categoría discreta.

1.2.3 Relaciones de orden

Lema 1. *Cada conjunto parcialmente ordenado define una categoría con sus elementos como objetos y un único morfismo $\rho_{ab}\colon a \to b$ sólo cuando $a \leq b$.*

Demostración. Definimos la composición de la única forma posible, $\rho_{bc} \circ \rho_{ab}$ será ρ_{ac}, el único morfismo $a \to c$, que además sabemos que existe porque si existen ρ_{ab} y ρ_{bc}, querrá decir que $a \leq b$ y que $b \leq c$; y por transitividad, $a \leq c$. La asociatividad se tiene trivialmente porque entre dos objetos habrá, a lo sumo, un solo morfismo.
La identidad $\mathrm{id}_a = \rho_{aa}$ existe por reflexividad y podemos comprobar trivialmente que es neutra respecto a la composición, ya que entre cualesquiera dos objetos existe a lo sumo un morfismo. $\square$

Un ejemplo de relación de orden con sus morfismos podría ser la de los divisores de 12 con la divisibilidad. En el siguiente diagrama dibujamos algunos de sus morfismos omitiendo las identidades

$$\begin{tikzcd}
& 12 & \\
6 \arrow[ur] & & 4 \arrow[ul] \\
3 \arrow[u] \arrow[uur] & & 2 \arrow[u] \arrow[ull] \arrow[uul] \\
& 1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uul] \arrow[uur] \arrow[uuu] &
\end{tikzcd} .$$

Nota. Cada ordinal define una relación de orden (un buen orden), que a su vez define una categoría. Por ejemplo, la categoría asociada a 1 será una categoría de un sólo objeto con la identidad, que también puede verse como el monoide trivial. La categoría asociada a 2 será de la forma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "f"] \arrow["\mathrm{id}", loop above] & 2 \arrow["\mathrm{id}", loop above]
\end{tikzcd} ,$$

y la categoría asociada a ω tendrá la forma

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] \arrow[rrr, bend right] & 2 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 3 \arrow[loop above] \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
\quad .
$$

1.2.4 Conjuntos

Lema 2. *Las aplicaciones entre conjuntos, con la composición usual, determinan una categoría a la que llamaremos* `Set`*.*

Demostración. Sabemos que la composición usual de aplicaciones entre conjuntos es asociativa y que la identidad es un elemento neutro con la composición. ☐

1.2.5 Grupos abelianos, espacios vectoriales, módulos

Lema 3. *Los homomorfismos de R-módulos izquierdos (respectivamente derechos) con la composición usual, determinan una categoría a la que llamaremos $R-\mathtt{Mod}$ (respectivamente $\mathtt{Mod}-R$).*

Demostración. Nótese que de nuevo la composición usual es asociativa y la identidad es elemento neutro de la composición. Sólo nos falta comprobar que, efectivamente, la composición de homomorfismos de módulos sigue siendo un homomorfismo de módulos. ☐

Corolario 1. *Los homomorfismos de grupos abelianos forman una categoría que llamaremos* `Ab`*. Las funciones lineales entre k-espacios vectoriales forman una categoría a la que llamaremos $k-\mathtt{Vect}$.*

Demostración. Nótese que los grupos abelianos son los $\mathbb{Z}$-módulos y que los espacios vectoriales son los módulos sobre un cuerpo. ☐

1.2.6 Espacios topológicos

Lema 4. *Las funciones continuas entre espacios topológicos, con la composición usual, determinan una categoría a la que llamaremos* `Top`*.*

Demostración. Sabemos que la composición usual de funciones continuas es asociativa y que la identidad es un elemento neutro con la composición. Falta comprobar que la composición de continuas es continua. ☐

2 Morfismos

2.1 Isomorfismos

Definición 6. Un morfismo $f\colon A \to B$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo inverso $f^{-1}\colon B \to A$ cumpliendo que

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f.$$

Proposición 1. *La inversa de un morfismo, si existe, es única.*

Demostración. Supongamos un morfismo $f\colon A \to B$ con dos inversas g_1, g_2, se tiene entonces

$$g_1 = g_1 \circ 1_B = g_1(fg_2) = 1_A g_2 = g_2.$$

[2] $\square$

Definición 7. Dos objetos A, B son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos. La isomorfía se nota como $A \cong B$.

Proposición 2. *Son isomorfismos*

- *la identidad, con* $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$.
- *el inverso de un isomorfismo, con* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- *la composición de isomorfismos, con* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

La isomorfía es por tanto una relación de equivalencia entre objetos.

Definición 8. Llamamos además **automorfismos** a los *endomorfismos* que sean *isomorfismos*.

2.2 Monomorfismos y epimorfismos

Definición 9. Un morfismo $f\colon A \to B$ es un **monomorfismo** si puede cancelarse a la izquierda en la composición. Es decir, para cualquier par de morfismos g, h se cumple

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Definición 10. Un morfismo $f\colon A \to B$ es un **epimorfismo** si puede cancelarse a la derecha en la composición. Es decir, para cualquier par de morfismos g, h se cumple

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Nota. Un morfismo puede ser monomorfismo y epimorfismo sin tener una inversa y ser isomorfismo; en este caso lo llamamos **bimorfismo**.

2.3 Ejemplos

2.3.1 Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas en conjuntos

En la categoría de conjuntos,

- una aplicación es inyectiva si y sólo si es monomorfismo.
- una aplicación es sobreyectiva si y sólo si es epimorfismo.
- una aplicación es biyectiva si y sólo si es isomorfismo.

Demostración. Si $f\colon A \to B$ es inyectiva, es trivialmente monomorfismo. Si no es inyectiva, existen x, y tales que $f(x) \neq f(y)$. Podemos tomar las funciones $g, h\colon \{*\} \to A$ definidas como $g(*) = x$ y como $h(*) = y$ y comprobar que f no es monomorfismo.
Si $f\colon A \to B$ es sobreyectiva, es trivialmente epimorfismo. Si no es sobreyectiva, podemos tomar dos $g, h\colon B \to B \cup \{*, *'\}$ y que para un $x \notin \mathrm{im}(f)$, se definan como $g|_{B-\{x\}} = h|_{B-\{x\}} = \mathrm{id}$ pero con $g(x) = *$ y $h(x) = *'$. $\square$

2.3.2 Grupos

Definición 11. Una categoría de un sólo objeto en la que todos los morfismos son isomorfismos es un **grupo**.

Como en el caso de los monoides, podemos tomar los automorfismos del objeto como los elementos del grupo.

2.3.3 Un bimorfismo no isomorfismo

Consideremos la inclusión $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ en `Top`. Trivialmente es un monomorfismo por ser inyectiva. Además, es epimorfismo, ya que si tenemos $g, h\colon \mathbb{R} \to A$ cumpliendo $g \circ i = h \circ i$, tendríamos $g|_{\mathbb{Q}} = h|_{\mathbb{Q}}$; y por continuidad, tendríamos $g = h$.
Sin embargo no es un isomorfismo, no existen homeomorfismos entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, que serían los isomorfismos de `Top`. Lo único que usamos es que la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ fuerza a que sólo exista una posible extensión continua de las funciones definidas en $\mathbb{Q}$ a funciones definidas en $\mathbb{R}$.

3 Construcciones universales

3.1 Objetos terminales

Definición 12. Un objeto I se dice **inicial** si desde cualquier otro objeto llega exactamente un morfismo. Es decir, para todo A, existe un único $i\colon I \to A$.

Definición 13. Un objeto T se dice **final** si desde cualquier otro objeto sale exactamente un morfismo. Es decir, para todo A, existe un único $t\colon A \to T$.

Definición 14. Llamamos **objeto cero** a un objeto que es a la vez inicial y final.

Nótese que una categoría no tiene por qué tener objetos terminales, ni tienen por qué ser únicos; pero sí serán únicos salvo isomorfismos.

Proposición 3. *Los objetos iniciales y finales de una categoría son* esencialmente únicos*, es decir,*

- *dos objetos iniciales serán isomorfos.*
- *dos objetos finales serán isomorfos.*

Demostración. Si existieran dos objetos iniciales a, b, tendríamos un único morfismo dado por $f\colon a \to b$ y un único morfismo dado por $g\colon b \to a$. Pero además, sólo existe un endomorfismo de a y de b, que es en ambos casos la identidad; así que $g \circ f\colon a \to a$ y $f \circ g\colon b \to b$ son la identidad. $\square$

3.2 Productos y coproductos

Definición 15. Un objeto C es el **producto** de dos objetos A, B cuando existen morfismos

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

tales que para cualquier objeto D con un par de morfismos $f_1\colon D \to A$ y $f_2\colon D \to B$, existe un único $h\colon D \to C$ tal que $f_1 = \pi_A \circ h$ y $f_2 = \pi_B \circ h$, como muestra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[ddl, bend right, "f_2"'] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
& C \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd} .$$

Nota. El producto no tiene por qué existir.

El producto, si existe, es único.

3.3 Ejemplos

3.3.1 Motivación del producto

En la categoría de los conjuntos, podemos tomar los conjuntos siguientes $A = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, 13\}$. preguntarnos si existe su producto. Un producto de ambos conjuntos tendrá que tener un morfismo hacia cada uno de ellos, así que estudiaremos varios candidatos y comprobaremos que sólo uno de ellos cumple la condición del producto, poniendo de relieve en el proceso la necesidad de esta condición.

- Un primer candidato a producto será el propio conjunto de símbolos A con la identidad hacia el propio A y una asignación constante de cualquier símbolo al número 1, la función $k(*) = 1$.

  $$\begin{tikzcd}
  & A \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "k"] & \\
  A & & B
  \end{tikzcd} .$$

  Sin embargo, podemos demostrar que este no es un producto válido. En concreto, como la función k no es sobreyectiva, podemos simplemente crear un par de morfismos desde el conjunto de un sólo elemento, $\{x\}$, que lleguen a elementos fuera de su imagen

  $$\begin{tikzcd}
  & \{*\} \arrow[d, dashed, "?"] \arrow[ddl, bend right, "x \mapsto \diamondsuit"'] \arrow[ddr, bend left, "x \mapsto 3"] & \\
  & A \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "k"] & \\
  A & & B
  \end{tikzcd} ,$$

  y no podremos colocar ningún morfismo que haga cumplir la propiedad del producto. De aquí extraemos que el producto debe ser "suficientemente grande" como para que todos los morfismos puedan escribirse pasando por él, *cumplir la propiedad de existencia.*
- Un segundo candidato a producto será D, un conjunto formado por dos números de B y un símbolo de A, es decir

  $$D = \{n * m \mid * \in A, n, m \in B\}$$

- Nuestro tercer candidato a producto será C, el conjunto de los pares de elementos de A y B, es decir

$$C = \{n* \mid * \in A, n \in B\},$$

que tendrá elementos como 3♠, con las proyecciones usuales p_*, p_n, que simplemente devuelven el número o el símbolo sin tener en cuenta el otro.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}.$$

3.3.2 Categoría de los conjuntos

En la categoría de los conjuntos, el conjunto vacío $\varnothing$ es el objeto inicial, mientras que cualquier conjunto de un elemento $\{*\}$ es el objeto final. Nótese que el objeto final no es único, pero sí *esencialmente único*.
El producto de dos conjuntos será su producto cartesiano $A \times B$ y el coproducto de dos conjuntos será su unión disjunta $A \sqcup B$.

3.3.3 Categoría de las proposiciones

Dado un dominio de discurso, una proposición lógica P implica otra proposición lógica Q si en cualquier modelo en el que se verifique P se verifica también Q. Esto se nota como $P \implies Q$. La implicación es una relación transitiva y reflexiva entre proposiciones; y por tanto, define una categoría que tiene como objetos las proposiciones y un único morfismo entre cada dos proposiciones sólo cuando una implica la otra.
El objeto inicial de esta categoría es una proposición que implica todas las demás, la proposición falso F, que es simplemente falsa en cualquier modelo. La proposición falsa implica todas las demás por reducción al absurdo. El objeto final debe ser una proposición que es implicada por todas, la proposición T que es verdadera en cualquier modelo.
El objeto producto de P y Q es $P \wedge Q$, mientras que el objeto coproducto de P y Q es $P \vee Q$.

4 Recursos

Vídeos y artículos de introducción a la teoría de categorías.

- Bartosz Milewski - *Category theory for programmers (Youtube)*.
- Bartosz Milewski - *Posts on category theory*.
- The Catsters - *Videos on category theory*.

Libros sobre álgebra y teoría de categorías básica.

- **Aluffi, Paolo - *Algebra, Chapter 0***. El inicio y la estructura de estos apuntes están basados en este libro. Presenta una introducción general al álgebra, pero usando como base la teoría de categorías.

References

[1] Steven Awodey and Andrej Brauer. Introduction to categorical logic. 2017.

[2] Paolo Aluffi. *Algebra Chapter 0 - Preliminaries: Set theory and categories*, pages 1–39. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009.