INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

MARIO ROMÁN

Resumen. Se explican tipos de morfismos y propiedades universales. Se hace especial incapié en productos y coproductos y se pasan a explicar los functores y las transformaciones naturales. Terminamos enunciando el Lema de Yoneda.

1. Categorías

1.1. Motivación. Varias estructuras matemáticas (grupos, espacios vectoriales, espacios topológicos ...) cuentan con morfismos que preservan las estructura subyacentes entre ellas. Como ejemplos:

Conjunto	Morfismos
Grupos	Homomorfismos de grupos
Espacios topológicos	Funciones continuas
Espacios métricos	Funciones cortas
Conjuntos	Funciones
Espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$	Funciones lineales sobre $\mathbb{K}$

Si estudiamos axiomáticamente las propiedades abstractas de estas estructuras y sus morfismos, obtendremos teoremas particularizables a todos estos casos útiles por sí mismos. Una categoría la formarán una clase de estos espacios con estructura y los morfismos entre estos espacios; y los teoremas que deduzcamos para todas las categorías podrán aplicarse a cada uno de los espacios.

1.2. Definición formal.

Definición 1.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ está definida por:

- Una clase de objetos de la categoría, $Obj(\mathcal{C})$.
- Un conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, poblado o no, entre cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$.

Cumpliendo sus morfismos las siguientes propiedades:

- Para dos morfismos $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$, existe su morfismo composición $f \circ g$.
- La composición es asociativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Todos los objetos tienen un morfismo identidad, $1_A \in Hom(A, A)$, neutro para la composición: $\forall f \in Hom(A, B) : f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

Ejercicio 1.2. Demostrar que la identidad es el único elemento neutro para la composición.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "1_A"] \end{tikzcd}$$

Diagramas conmutativos de las propiedades básicas.

1.3. Ejemplos. Como idea simplificadora, podemos que los objetos son conjuntos, y los morfismos, funciones entre esos conjuntos; de hecho, el primer ejemplo es la definición de ese caso concreto. Este es un buen modelo intuitivo para trabajar con algunas categorías, pero presentaremos ejemplos que rechazan esta intuición.

1.3.1. Categoría `Set`. La categoría de los conjuntos con las funciones entre conjuntos como morfismos.

$$Obj(\texttt{Set}) = \{Todos\ los\ conjuntos\}$$
$$Hom(A,B) = B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Trivialmente es categoría: las funciones se componen en funciones, la composición es asociativa y la identidad funciona como se espera, siendo otra función.

1.3.2. Categoría `VectR`. La categoría de los espacios vectoriales reales con las funciones lineales entre espacios vectoriales reales.

$$Obj(\texttt{VectR}) = \{Todos\ los\ espacios\ vectoriales\ sobre\ \mathbb{R}\}$$
$$Hom(A,B) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(A,B)$$

Ejercicio 1.3. Observar que `VectR` es una categoría.

1.3.3. Categoría $(S,\sim)$. Cualquier conjunto S que tenga definida una relación de equivalencia $\sim$ tiene definida una categoría asociada en la que los objetos son los elementos del conjunto y los morfismos sólo representan casos particulares de la relación de equivalencia. *En este ejemplo, los morfismos no son funciones y los objetos no son conjuntos, rechazando por primera vez la intuición del primer ejemplo.*

$$Obj((S,\sim)) = S$$

Hay un morfismo entre dos elementos si y sólo si están relacionados:

$$Hom(a,b) = \begin{cases} (a,b) & \text{si } a \sim b \\ \emptyset & \text{si } a \nsim b \end{cases}$$

Y la composición se define como:

$$(a,b) \circ (b,c) = (a,c)$$

Probar que es categoría se reduce a notar que la composición de morfismos es morfismo (por ser la relación transitiva), que la composición es asociativa y que existe el morfismo identidad (a,a), por ser la relación reflexiva.

1.3.4. Categoría $(S, \leq)$. Cualquier conjunto parcialmente ordenado tiene una categoría asociada. Los objetos son sus elementos y los morfismos son casos particulares de la relación de orden.

$$Obj((S, \leq)) = S$$

Hay un morfismo entre a y b si y sólo si $a \leq b$:

$$Hom(a, b) = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \leq b \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}$$

La composición se define como anteriormente: $(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$, y es trivial volver a probar que se trata de una categoría.

Un posible diagrama conmutativo de la categoría $(\mathbb{N}, \leq)$ sería:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{(1,3)}"] \arrow[dr, "{(1,6)}"'] & 3 \arrow[r, "{(3,5)}"] \arrow[d, "{(3,6)}"] & 5 \arrow[d, "{(5,7)}"] \\
& 6 \arrow[r, "{(6,7)}"] & 7
\end{tikzcd}$$

2. Tipos de morfismos

2.1. Isomorfismos.

Definición 2.1. Un morfismo $f \in Hom(A, B)$ es **isomorfismo** cuando existe un morfismo inverso $g \in Hom(B, A)$ cumpliendo:

$$(g \circ f) = 1_A \qquad (f \circ g) = 1_B$$

Ejercicio 2.2. Probar que el inverso, si existe, es único. Lo notaremos como f^{-1}. Observar que si existe un inverso por la derecha y un inverso por la izquierda deben ser iguales.

2.1.1. Propiedades de isomorfismos.

- La identidad es isomorfismo: $(1)^{-1} = 1$
- El inverso de un isomorfismo es isomorfismo: $(f^{-1})^{-1} = f$.
- La composición de isomorfismos es isomorfismo: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Nótese que, precisamente, los isomorfismos de `Set` son las biyecciones entre conjuntos. Los isomorfismos de `Top` son los homeomorfismos y los isomorfismos de `Met` son las isometrías.

2.2. Epimorfismos y monomorfismos.

3. Propiedades universales

Varias construcciones en las diversas estructuras que motivaron las categorías pueden parecer escogidas arbitrariamente. Sin embargo, la definición de las propiedades universales las dejará como las únicas cumpliendo una construcción formal no arbitraria. Además, nos permitirá descubrir relaciones más profundas entre las construcciones en las distintas categorías.

3.1. Objetos terminales.

Definición 3.1. El objeto $I \in Obj(\mathcal{C})$ se dice **inicial** cuando a cualquier otro objeto llega un único morfismo desde él. Es decir:

$$\forall A \in Obj(\mathcal{C}) : \quad \#(Hom(I, A)) = 1$$

Definición 3.2. Análogamente, el objeto $F \in Obj(\mathcal{C})$ se dice **final** cuando desde cualquier otro objeto llega un único morfismo hacia él. Es decir:

$$\forall A \in Obj(\mathcal{C}) : \quad \#(Hom(A, F)) = 1$$

Se llama **objeto terminal** a un objeto inicial o final y **objeto cero** a un objeto terminal y final. Una categoría no tiene por qué tener objetos terminales, y estos no tienen por qué ser únicos. Pero serán esencialmente únicos, es decir, si dos objetos son ambos iniciales o ambos finales en una categoría, serán isomorfos.

Teorema 3.3. *Los objetos iniciales y los objetos finales son esencialmente únicos:*

- *Si* I_1, I_2 *son iniciales,* $I_1 \cong I_2$
- *Si* F_1, F_2 *son finales,* $F_1 \cong F_2$

3.2. Ejemplos.

3.2.1. Universales conjuntistas.

3.2.2. Proyección al cociente.

3.3. Propiedades universales de map, filter, fold.

4. Productos y coproductos

4.1. Categorías $C_{A,B}$.

4.2. Producto y coproducto.

4.3. Casos particulares.

5. Functores

Una aplicación entre categorías, preservando su estructura, es un functor.

Definición 5.1. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorías. Un **functor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ está formado por:

- Una función entre objetos $F : Obj(\mathcal{A}) \to Obj(\mathcal{B})$
- Una función entre morfismos $F : Hom_{\mathcal{A}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$

Cumpliendo:

- Respeta la composición: $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$
- Respeta la identidad: $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Es decir, el functor lleva objetos de una categoría a objetos de otra y los morfismos entre objetos de una categoría a morfismos de entre las imágenes de los objetos en la otra categoría.

5.1. Functores de olvido. Un ejemplo de functores son los informalmente llamados functores de olvido, que *olvidan* propiedades de una categoría al llevarla a otra mediante una inclusión.

Ejemplo 5.2. El functor $U : \texttt{Grp} \to \texttt{Set}$ que olvida la estructura de grupo. $U(G)$ es el conjunto de elementos del grupo G y $U(\phi)$ es la aplicación ϕ entre conjuntos, sin verla como un homomorfismo.

5.2. Functores libres. Los functores libres

6. Transformaciones naturales

Definición 6.1. Una transformación natural α entre dos functores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ viene determinada por:

- Para cada $X \in \mathcal{C}$, un morfismo: $\alpha_X : F(X) \to G(X)$

Cumpliendo que:

- Para cualquier morfismo $f \in Hom(X, Y)$ se tenga: $\alpha_Y \circ Ff = Gf \circ \alpha_X$

Lo que queda representado en el siguiente diagrama conmutativo de naturalidad:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\alpha_Y"] & GY
\end{tikzcd}$$

7. Representables y el lema de Yoneda