



Teoría de Categorías

Introducción y aplicación a la programación

Mario Román



Copyright © 2015 Mario Román

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

DGIIM.GITHUB.IO

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2015

Índice general

I	Teoría de Categorías	
1	Categorías	7
1.1	Motivación	7
1.2	Definición formal	7
1.3	Ejemplos de categorías	8
2	Tipos de morfismos	9
2.1	Isomorfismos	9
2.1.1	Propiedades de isomorfismos	9
2.2	Epimorfismos y monomorfismos	9
2.3	Ejemplos en varias categorías	10
2.3.1	Categoría Set	10
2.3.2	Categoría (\mathbb{Z}, \leq)	10
2.3.3	Categoría (S, \leq)	10
3	Propiedades universales	11
3.1	Objetos terminales	11
3.2	Ejemplos	12
3.2.1	Objetos terminales en Set	12
3.2.2	Objetos terminales en Grp	12
3.2.3	Objetos terminales en (\mathbb{N}, \leq)	12
3.2.4	Proyección al cociente	12

3.3	Productos y coproductos	13
3.3.1	Producto	13
3.3.2	Categorías $\mathcal{C}_{A,B}$	14
3.3.3	Coproducto	14
3.3.4	Casos particulares	15
3.4	Kernels y cokernels	16
4	Functores	17
4.1	La categoría opuesta	17
4.2	Functores	18
4.2.1	Ejemplos	18
4.2.2	Functores de olvido	18
4.2.3	Functores libres	18
4.3	Transformaciones naturales	18
5	In-text Elements	21
5.1	Theorems	21
5.1.1	Several equations	21
5.1.2	Single Line	21
5.2	Definitions	21
5.3	Notations	22
5.4	Remarks	22
5.5	Corollaries	22
5.6	Propositions	22
5.6.1	Several equations	22
5.6.2	Single Line	22
5.7	Examples	22
5.7.1	Equation and Text	23
5.7.2	Paragraph of Text	23
5.8	Exercises	23
5.9	Problems	23
5.10	Vocabulary	23
	Bibliography	25
	Books	25
	Articles	25
	Index	27

Teoría de Categorías

1	Categorías	7
1.1	Motivación	
1.2	Definición formal	
1.3	Ejemplos de categorías	
2	Tipos de morfismos	9
2.1	Isomorfismos	
2.2	Epimorfismos y monomorfismos	
2.3	Ejemplos en varias categorías	
3	Propiedades universales	11
3.1	Objetos terminales	
3.2	Ejemplos	
3.3	Productos y coproductos	
3.4	Kernels y cokernels	
4	Funtores	17
4.1	La categoría opuesta	
4.2	Funtores	
4.3	Transformaciones naturales	
5	In-text Elements	21
5.1	Theorems	
5.2	Definitions	
5.3	Notations	
5.4	Remarks	
5.5	Corollaries	
5.6	Propositions	
5.7	Examples	
5.8	Exercises	
5.9	Problems	
5.10	Vocabulary	
	Bibliography	25
	Books	
	Articles	
	Index	27

1. Categorías

1.1 Motivación

Varias estructuras matemáticas (grupos, espacios vectoriales, espacios topológicos ...) cuentan con morfismos que preservan las estructura subyacentes entre ellas. Como ejemplos:

Conjunto	Morfismos
Grupos	Homomorfismos de grupos
Espacios topológicos	Funciones continuas
Espacios métricos	Funciones cortas
Conjuntos	Funciones
Espacios vectoriales sobre \mathbb{K}	Funciones lineales sobre \mathbb{K}

Si estudiamos axiomáticamente las propiedades abstractas de estas estructuras y sus morfismos, obtendremos teoremas particularizables a todos estos casos, útiles por sí mismos. Una categoría la formarán una clase de estos espacios con estructura y los morfismos entre estos espacios; y los teoremas que deduzcamos para todas las categorías podrán aplicarse a cada uno de los espacios.

1.2 Definición formal

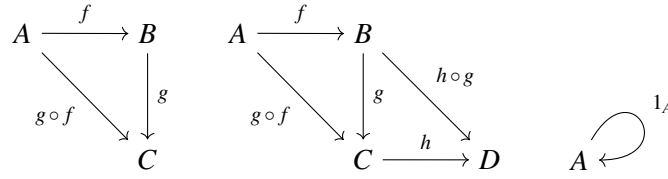
Definition 1.2.1 Una **categoría** \mathcal{C} está definida por:

- Una clase de objetos de la categoría, $Obj(\mathcal{C})$.
- Un conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, poblado o no, entre cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$.

Cumpliendo sus morfismos las siguientes propiedades:

- Para dos morfismos $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$, existe su morfismo composición $f \circ g$.
- La composición es asociativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Todos los objetos tienen un morfismo identidad, $1_A \in Hom(A, A)$, neutro para la composición:
 $\forall f \in Hom(A, B) : f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

Exercise 1.1 Demostrar que la identidad es el único elemento neutro para la composición. ■



Diagramas conmutativos de las propiedades básicas.

1.3 Ejemplos de categorías

Como idea simplificadora, podemos pensar que los objetos son conjuntos, y los morfismos, funciones entre esos conjuntos; de hecho, el primer ejemplo es la definición de ese caso concreto. Este es un buen modelo intuitivo para trabajar con algunas categorías, pero presentaremos ejemplos que rechazan esta intuición.

Categoría **Set**

La categoría de los conjuntos con las funciones entre conjuntos como morfismos.

$$\text{Obj}(\text{Set}) = \text{Clase de todos los conjuntos}$$

$$\text{Hom}(A, B) = B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$$

Trivialmente es categoría: las funciones se componen en funciones, la composición es asociativa y la identidad funciona como se espera, siendo otra función.

Categoría **VectR**

La categoría de los espacios vectoriales reales con las funciones lineales entre espacios vectoriales reales.

$$\text{Obj}(\text{VectR}) = \text{Clase de espacios vectoriales sobre } \mathbb{R}$$

$$\text{Hom}(A, B) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(A, B)$$

Exercise 1.2 Observar que VectR es una categoría. ■

Categoría (S, \sim)

Cualquier conjunto S que tenga definida una relación de equivalencia \sim tiene definida una categoría asociada en la que los objetos son los elementos del conjunto y los morfismos sólo representan casos particulares de la relación de equivalencia. *En este ejemplo, los morfismos no son funciones y los objetos no son conjuntos, rechazando por primera vez la intuición del primer ejemplo.*

$$\text{Obj}((S, \sim)) = S$$

Hay un morfismo entre dos elementos si y sólo si están relacionados:

$$\text{Hom}(a, b) = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \sim b \\ \emptyset & \text{si } a \not\sim b \end{cases}$$

2. Tipos de morfismos

2.1 Isomorfismos

Definition 2.1.1 Un morfismo $f \in \text{Hom}(A, B)$ es **isomorfismo** si existe un morfismo inverso: $g \in \text{Hom}(B, A)$ cumpliendo:

$$(g \circ f) = 1_A \quad (f \circ g) = 1_B$$

Exercise 2.1 Probar que el inverso, si existe, es único. Lo notaremos como f^{-1} . Observar que si existe un inverso por la derecha y un inverso por la izquierda, deben ser iguales. ■

2.1.1 Propiedades de isomorfismos

- La identidad es isomorfismo: $(1)^{-1} = 1$
- El inverso de un isomorfismo es isomorfismo: $(f^{-1})^{-1} = f$.
- La composición de isomorfismos es isomorfismo: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Dos objetos A, B son **isomorfos** si existe un isomorfismo en $\text{Hom}(A, B)$, la isomorfía se nota como $A \cong B$ y es, por las propiedades anteriores, una relación de equivalencia.

Nótese que, precisamente, los isomorfismos de Set son las biyecciones entre conjuntos. Los isomorfismos de Top son los homeomorfismos y los isomorfismos de Met son las isometrías.

2.2 Epimorfismos y monomorfismos

Definition 2.2.1 Un morfismo $f \in \text{Hom}(A, B)$ es **monomorfismo** si para cualquier objeto C y para cada par de morfismos $g, h : C \rightarrow A$, el morfismo puede *cancelarse* a la izquierda:

$$f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h$$

Es decir, si el siguiente diagrama conmuta y f es monomorfismo, entonces $g = h$.

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

Definition 2.2.2 Análogamente, un morfismo $f \in \text{Hom}(A, B)$ es **epimorfismo** si para cualquier objeto C y para cada par de morfismos $g, h : B \rightarrow C$, el morfismo puede *cancelarse* a la derecha:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

De nuevo, si el siguiente diagrama conmuta y f es epimorfismo, entonces $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

2.3 Ejemplos en varias categorías

2.3.1 Categoría Set

En la categoría de los conjuntos, los isomorfismos son las funciones con inversa; lo que coincide con la definición de isomorfismos entre conjuntos. Dos conjuntos son isomorfos si tienen la misma cardinalidad. Los monomorfismos se corresponden con las funciones inyectivas y los epimorfismos con las funciones sobreyectivas.

2.3.2 Categoría (\mathbb{Z}, \leq)

En esta categoría, los únicos isomorfismos son las identidades. Nótese además que todos los morfismos son monomorfismos y epimorfismos, y, aun así, no son isomorfismos. Esto sirve de nuevo para no aceptar directamente la intuición guiada por la clase Set, donde morfismos que sean monomorfismos y epimorfismos deben ser isomorfismos. Y la composición se define como:

$$(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$$

Probar que es categoría se reduce a notar que la composición de morfismos es morfismo (por ser la relación transitiva), que la composición es asociativa y que existe el morfismo identidad (a, a) , por ser la relación reflexiva.

2.3.3 Categoría (S, \leq)

Cualquier conjunto parcialmente ordenado tiene una categoría asociada. Los objetos son sus elementos y los morfismos son casos particulares de la relación de orden.

$$\text{Obj}((S, \leq)) = S$$

Hay un morfismo entre a y b si y sólo si $a \leq b$:

$$\text{Hom}(a, b) = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \leq b \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}$$

La composición se define como anteriormente: $(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$, y es trivial volver a probar que se trata de una categoría.

Un posible diagrama conmutativo de la categoría (\mathbb{N}, \leq) sería:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{(1,3)} & 3 & \xrightarrow{(3,5)} & 5 \\ & \searrow (1,6) & \downarrow (3,6) & & \downarrow (5,7) \\ & & 6 & \xrightarrow{(6,7)} & 7 \end{array}$$

3. Propiedades universales

Varias construcciones en las diversas estructuras que motivaron las categorías pueden parecer escogidas arbitrariamente. Sin embargo, la definición de las propiedades universales las dejará como las únicas cumpliendo una construcción formal no arbitraria. Además, nos permitirá descubrir relaciones más profundas entre las construcciones en las distintas categorías.

3.1 Objetos terminales

Definition 3.1.1 El objeto $I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se dice **inicial** cuando a cualquier otro objeto llega un único morfismo desde él. Es decir:

$$\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) : \quad \#(\text{Hom}(I, A)) = 1$$

Definition 3.1.2 Análogamente, el objeto $F \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se dice **final** cuando desde cualquier otro objeto llega un único morfismo hacia él. Es decir:

$$\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) : \quad \#(\text{Hom}(A, F)) = 1$$

Se llama **objeto terminal** a un objeto inicial o final y **objeto cero** a un objeto terminal y final. Una categoría no tiene por qué tener objetos terminales, y estos no tienen por qué ser únicos. Pero serán *esencialmente únicos*, es decir, si dos objetos son ambos iniciales o ambos finales en una categoría, serán isomorfos, como demostramos a continuación.

Theorem 3.1.1 Los objetos iniciales y los objetos finales de una categoría son esencialmente únicos:

- Si I_1, I_2 son iniciales, $I_1 \cong I_2$
- Si F_1, F_2 son finales, $F_1 \cong F_2$

Demostración. Para I_1, I_2 iniciales, debe cumplirse que existe un sólo $f \in \text{Hom}(I_1, I_2)$ y que existe un sólo $g \in \text{Hom}(I_2, I_1)$. Como en $\text{Hom}(I_1, I_1)$ y en $\text{Hom}(I_2, I_2)$ sólo existe un morfismo, que debe

ser la identidad, tenemos:

$$g \circ f = 1_{I_1} \quad f \circ g = 1_{I_2}$$

Por lo que son isomorfismos y $I_1 \cong I_2$. Análogamente se prueba para objetos finales. ■

3.2 Ejemplos

3.2.1 Objetos terminales en Set

En la categoría Set, es objeto inicial el conjunto vacío: para cualquier otro conjunto A , $\text{Hom}(\emptyset, A)$ consta sólo de la inclusión (la función vacía), que podemos notar por (\emptyset) .

Todos los conjuntos de un sólo elemento son finales. Sólo hay un morfismo $c_* \in \text{Hom}(A, \{*\})$, la función constantemente $*$. Obsérvese que entre ellos, todos los conjuntos de un elemento son isomorfos como afirma el teorema anterior.

3.2.2 Objetos terminales en Grp

Entre los grupos, un homomorfismo debe llevar siempre la identidad hacia la identidad del otro grupo, y además, no existe el grupo vacío. Esto hace que el objeto terminal y final de la categoría sea el grupo que tiene como único elemento la identidad, $\{e\}$. Hacia cualquier otro grupo existe un único homomorfismo (la imagen de la identidad debe ser la identidad), y desde cualquier otro grupo existe un único homomorfismo (la función constantemente e).

3.2.3 Objetos terminales en (\mathbb{N}, \leq)

En esta categoría, 0 es trivialmente objeto inicial y no hay objetos finales. Nótese además que en (\mathbb{Z}, \leq) no habría ningún objeto terminal. En general, en una categoría (S, \leq) , los objetos terminales son el máximo y el mínimo, que no tienen por qué existir.

3.2.4 Proyección al cociente

Dado un conjunto A , con una relación de equivalencia \sim definimos una categoría que tenga por objetos las funciones (!) que preserven la relación de equivalencia. Es decir, las funciones de la forma:

$$\begin{array}{c} Z \\ f \uparrow \\ A \end{array}$$

Para Z conjunto y $f \in \text{Hom}(A, Z)$, cumpliendo $[a]_{\sim} = [b]_{\sim} \Rightarrow f(a) = f(b)$.

Los morfismos entre dos objetos $\text{Hom}((Z, f), (W, g))$ de esta categoría serán los diagramas conmutativos de la siguiente forma.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\phi} & W \\ f \uparrow & \nearrow g & \\ A & & \end{array}$$

Donde, para que se cumpla el diagrama, debería tenerse: $\phi \circ f = g$.

Y la composición entre morfismos es el exterior de la composición de los dos diagramas conmutativos, que vuelve a ser diagrama conmutativo:

$$\left(\begin{array}{ccc} & W & \\ g \nearrow & & \downarrow \psi \\ A & \xrightarrow{h} & V \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\phi} & W \\ f \uparrow & & \nearrow g \\ A & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} Z & & \\ f \uparrow & \searrow \psi \circ \phi & \\ A & \xrightarrow{h} & V \end{array} \right)$$

La construcción de esta categoría puede parecer sorprendente y artificial, pero pronto usaremos construcciones similares para obtener propiedades básicas. Por ahora, basta notar que en esta categoría, la proyección al cociente $(A/\sim, \sim)$ es el objeto inicial:

$$\begin{array}{ccc} A/\sim & \xrightarrow{\exists! \tilde{f}} & Z \\ \pi_\sim \uparrow & & \nearrow f \\ A & & \end{array}$$

Demostración. Definimos $\tilde{f}([x]_\sim) = f(x)$. Comprobamos que está bien definida porque exigíamos a las funciones que cumplieran $[a]_\sim = [b]_\sim \Rightarrow f(a) = f(b)$.

El diagrama es conmutativo trivialmente: $\tilde{f} \circ \pi = f$ ■

3.3 Productos y coproductos

3.3.1 Producto

El producto de dos objetos en una categoría se definirá como otro objeto tal que una pareja de morfismos que vaya desde un tercer objeto hacia los dos objetos pueda descomponerse de manera única a través de su objeto producto. En términos de diagramas conmutativos, para $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, su objeto producto, $A \times B$ cumple que, para cualquier $Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ que se descomponga así, existe un único morfismo ϕ que lo lleva al producto:

A ese morfismo ϕ que es único lo llamaremos $f \times g$.

■ **Example 3.1** En la categoría Set , el producto de dos conjuntos es el producto usual: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Si tenemos otro conjunto Z con dos funciones f, g hacia A y hacia B , existe una única función hacia $A \times B$ que hace el diagrama conmutativo, la función:

$$(f \times g)(z) = (f(z), g(z)) \quad \forall z \in Z$$

Aquí, las funciones π_A, π_B , son las proyecciones usuales desde el producto. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

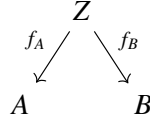
$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ f \swarrow & \downarrow f \times g & \searrow g \\ & A \times B & \\ \pi_A \swarrow & & \searrow \pi_B \\ A & & B \end{array}$$

Exercise 3.1 Demostrar que $f \times g$ es efectivamente la única función que hace que el diagrama conmute. ■

Esta primera definición puede ser reescrita de forma que además se demuestre automáticamente la unicidad esencial del objeto producto en el caso de existir. Recurrirnos para ello a definir una categoría parecida a la que usamos para definir la proyección al cociente.

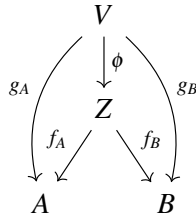
3.3.2 Categorías $\mathcal{C}_{A,B}$

Dados objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ para una categoría \mathcal{C} . Definimos la categoría $\mathcal{C}_{A,B}$ como la categoría teniendo por objetos los diagramas de la forma:



Donde Z es otro objeto con dos morfismos f_A, f_B hacia A y B .

Y teniendo por morfismos las funciones ϕ en diagramas conmutativos de la siguiente forma:



Que se componen como podría esperarse:

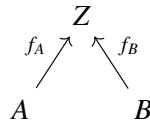
$$\left(\begin{array}{ccc} & V & \\ g_A \swarrow & \downarrow \psi & \searrow g_B \\ & W & \\ h_A \swarrow & & \searrow h_B \\ A & & B \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{ccc} & Z & \\ f_A \swarrow & \downarrow \phi & \searrow f_B \\ & V & \\ g_A \swarrow & & \searrow g_B \\ A & & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} & Z & \\ f_A \swarrow & \downarrow \psi \circ \phi & \searrow f_B \\ & W & \\ h_A \swarrow & & \searrow h_B \\ A & & B \end{array} \right)$$

Pues bien, se define el producto como el objeto final de esta categoría.

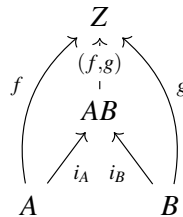
Exercise 3.2 Comprobar que coincide con la definición anterior y observar que esto prueba su unicidad esencial. ■

3.3.3 Coproducto

Análogamente, el coproducto se define como el objeto final de la categoría $\mathcal{C}^{A,B}$, que se forma intuitivamente invirtiendo la dirección de las flechas de la categoría $\mathcal{C}_{A,B}$. Es decir, tendrá objetos de la forma:



Y los morfismos y su composición se definirán análogamente. El coproducto de A y B , será AB con dos morfismos i_A, i_B cumpliendo el diagrama conmutativo siguiente:



■ **Example 3.2** En la categoría Set , el coproducto es la unión disjunta de dos conjuntos: $AB \cong \{(a, 1) \mid a \in A\} \cup \{(b, 2) \mid b \in B\}$. Si tenemos otro conjunto Z con dos funciones f, g desde A y desde B , existe una única función desde AB que hace el diagrama conmutativo, la función:

$$(f, g)((x, n)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } n = 1 \\ g(x) & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

■

3.3.4 Casos particulares

Categoría Grp

En la categoría de los grupos, el producto será el producto usual conjuntista con el producto de elementos definido componente a componente.

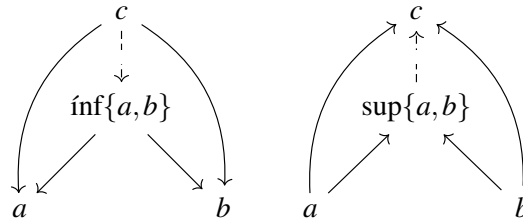
$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 &= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ (a, b) * (a', b') &= (a * a', b * b') \end{aligned}$$

Y el coproducto será el producto libre de grupos, $G * H$, formado por las palabras reducidas de elementos de ambos grupos. El producto de palabras es su yuxtaposición reducida.

$$\begin{aligned} G_1 * G_2 &= \{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k \mid a_i \in A, b_i \in B\} \\ (a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k) * (a'_1 b'_1 a'_2 b'_2 \dots a'_k b'_k) &= (a_1 b_1 \dots a_k b_k a'_1 b'_1 \dots a'_k b'_k) \end{aligned}$$

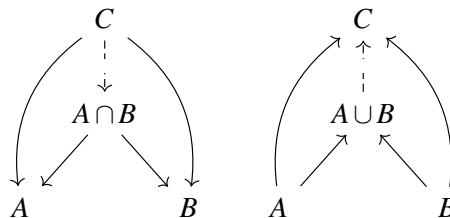
Categoría (S, \leq)

En la categoría dada por una relación de orden puede demostrarse que serán el producto y el coproducto el ínfimo y el supremo, respectivamente.



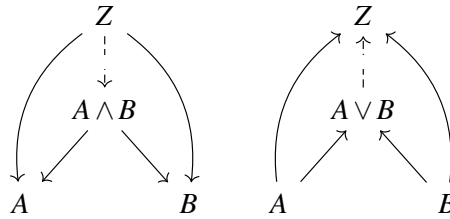
Categoría $(\mathcal{P}(\Omega), \subseteq)$

Esta categoría es similar a la anterior, es un caso particular para subconjuntos con la inclusión como relación de orden parcial. Un morfismo de A hacia B indica que $B \subseteq A$. La intersección y la unión serán aquí el producto y coproducto:



Categoría Prop

Sea una categoría que tiene por objetos a las proposiciones lógicas. Existe un morfismo desde una proposición a otra si la primera implica la otra, $A \Rightarrow B$. En esta categoría, el producto y el coproducto son la conjunción y la disyunción lógicas:



Aquí el producto y coproducto de morfismos (implicaciones) sería de la forma:

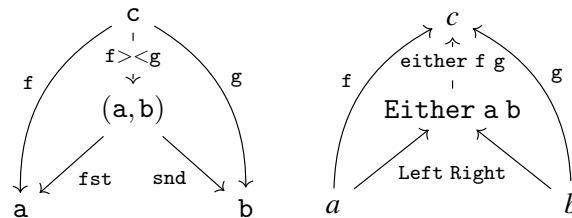
$$(Z \Rightarrow A) \times (Z \Rightarrow B) = (Z \Rightarrow A \wedge B)$$

$$((A \Rightarrow Z), (B \Rightarrow Z)) = (A \vee B \Rightarrow Z)$$

Nótese que en esta categoría, el objeto inicial es False y el objeto final es True.

Categoría `Hask`

Sea ahora la categoría de tipos de Haskell.¹ Los objetos son los posibles tipos en Haskell y un morfismo entre dos objetos es una función que tome uno de los tipos y devuelva el otro. Tenemos los diagramas siguientes de producto y coproducto:



Hay ciertas similitudes entre las categorías de tipos y proposiciones que se quedarán fuera de lo que se expone aquí.

3.4 Kernels y cokernels

Los kernels y cokernels se definirán como sigue:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ k \uparrow & \nearrow 0 & \\ K & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow 0 & \downarrow q \\ & & Q \end{array}$$

¹Aunque, hablando estrictamente, no sea ni siquiera una categoría, es interesante trabajar un poco en ella: <http://www.haskell.org/haskellwiki/Hask>

4. Functores

4.1 La categoría opuesta

Hasta ahora, pudiera parecer que estamos repitiendo trabajo. Todo lo hemos definido dos veces, una vez sobre cada dirección. Composición a izquierda y derecha, monomorfismos y epimorfismos, objetos iniciales y finales, productos y coproductos.

Vamos a definir ahora la categoría \mathcal{C}^{op} como la categoría opuesta de \mathcal{C} . Intuitivamente, es la categoría que se obtiene invirtiendo el sentido de todos los morfismos. Formalmente, esta categoría está formada por:

- $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$
- $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$, para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{C}^{op})$

La composición de morfismos es aquí trivial si tenemos en cuenta que hemos dado la vuelta a los morfismos:

$$\forall f^{op} \in Hom(B, A), g^{op} \in Hom(C, B) : f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$$

Como podemos observar en estos dos diagramas:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} C \\ & \searrow & \nearrow \\ & g \circ f & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f^{op}} & B \xleftarrow{g^{op}} C \\ & \searrow & \nearrow \\ & f^{op} \circ g^{op} & \end{array}$$

Exercise 4.1 Comprobar que la categoría opuesta forma una categoría. ■

Exercise 4.2 Definir el objeto final y el coproducto en términos del inicial y el producto respectivamente, usando la categoría opuesta. ■

Exercise 4.3 Probar que un monomorfismo en una categoría es epimorfismo en la opuesta y que los isomorfismos se mantienen también en la categoría opuesta. ■

4.2 Funtores

Una aplicación entre categorías, preservando su estructura, es un functor.

Definition 4.2.1 Sean \mathcal{A}, \mathcal{B} categorías. Un **functor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ está formado por:

- Una función entre objetos $F : \text{Obj}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{B})$
- Una función entre morfismos $F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$

Cumpliendo:

- Respeto la composición: $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$
- Respeto la identidad: $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Es decir, el functor lleva objetos de una categoría a objetos de otra y los morfismos entre objetos de una categoría a morfismos de entre las imágenes de los objetos en la otra categoría.

4.2.1 Ejemplos

Cardinalidad

La cardinalidad, que relaciona el orden parcial de los conjuntos finitos con el orden total entre los naturales, puede verse como un functor:

$$\# : (\text{FiniteSet}, \subseteq) \rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$$

$$\#(A) = (\text{cardinalidad de } A)$$

$$\#(A \subseteq B) = \#(A) \leq \#(B)$$

Endofuntores

Un endofunctor es aquel que va de una categoría hacia sí misma. Un ejemplo puede ser una función lineal con determinante positivo en \mathbb{Z} :

$$(\lambda) : (\mathbb{Z}, \leq) \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$$

$$(\lambda)(n) = \lambda n$$

$$(\lambda)(p \leq q) = (\lambda p \leq \lambda q)$$

4.2.2 Funtores de olvido

Un ejemplo de funtores son los informalmente llamados funtores de olvido, que *olvidan* propiedades de una categoría al llevarla a otra mediante una inclusión.

■ **Example 4.1** El functor $U : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ que olvida la estructura de grupo. $U(G)$ es el conjunto de elementos del grupo G y $U(\phi)$ es la aplicación ϕ entre conjuntos, sin verla como un homomorfismo.

■

4.2.3 Funtores libres

Los funtores libres hacen un papel inverso a los funtores de olvido. Informalmente, llevan una categoría hacia otra con más información dotándola del mínimo contexto posible.

■ **Example 4.2** El functor $F : \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$ lleva cada conjunto X al grupo libre generado por los elementos de X , es decir, al grupo de palabras reducidas formadas con elementos de X . Las funciones entre conjuntos se convierten trivialmente en homomorfismos entre sus grupos libres generados. ■

4.3 Transformaciones naturales

Definition 4.3.1 Una transformación natural α entre dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ viene determinada por:

- Para cada $X \in \mathcal{C}$, un morfismo: $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$

Cumpliendo que:

- Para cualquier morfismo $f \in \text{Hom}(X, Y)$ se tenga: $\alpha_Y \circ Ff = Gf \circ \alpha_X$

Lo que queda representado en el siguiente diagrama conmutativo de naturalidad:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\alpha_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\alpha_Y} & GY \end{array}$$

5. In-text Elements

5.1 Theorems

This is an example of theorems.

5.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Theorem 5.1.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (5.1)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (5.2)$$

5.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Theorem 5.1.2 A set $\mathcal{D}(G)$ is dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

5.2 Definitions

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

Definition 5.2.1 — Definition name. Given a vector space E , a norm on E is an application,

denoted $\|\cdot\|$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad (5.4)$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (5.5)$$

5.3 Notations

Notation 5.1. Given an open subset G of \mathbb{R}^n , the set of functions φ are:

1. Bounded support G ;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by $\mathcal{D}(G)$.

5.4 Remarks

This is an example of a remark.

R The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

Corollary 5.5.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.6 Propositions

This is an example of propositions.

5.6.1 Several equations

Proposition 5.6.1 — Proposition name. It has the properties:

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (5.6)$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (5.7)$$

5.6.2 Single Line

Proposition 5.6.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

5.7 Examples

This is an example of examples.

5.7.1 Equation and Text

■ **Example 5.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (5.8)$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

5.7.2 Paragraph of Text

■ **Example 5.2 — Example name.** Lorem ipsum. ■

5.8 Exercises

This is an example of an exercise.

Exercise 5.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

5.9 Problems

Problem 5.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

5.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

Vocabulary 5.1 — Word. Definition of word.



Bibliography

Books

Articles

Índice alfabético

C

Corollaries 22

D

Definitions 21

E

Examples 22

Equation and Text..... 23

Paragraph of Text 23

Exercises 23

M

Motivación 7

N

Notations 22

P

Problems 23

Propositions 22

Several Equations 22

Single Line 22

R

Remarks 22

T

Theorems 21

Several Equations 21

Single Line 21

V

Vocabulary 23