Algebra: Chapter 0

Apuntes de teoría

Mario Román

September 4, 2016

Contents

IV. Álgebra lineal

4. Presentaciones y resoluciones

4.1. Torsión

Definición 1. ***Torsión***. *Un elemento $m \in M$ módulo de R es de* ***torsión*** *si $\{m\}$ es linealmente dependiente. Es decir,*

$$\exists r \in R,\ r \neq 0\ :\ rm = 0$$

El conjunto de elementos de torsión se llama $Tor(M)$. Un módulo es ***libre de torsión*** *si $Tor(M) = 0$ y* ***de torsión*** *si $Tor(M) = M$.*

Un anillo conmutativo es libre de torsión sobre sí mismo si y sólo si es dominio de integridad. Cuando esto ocurre, $Tor(M)$ es siempre submódulo de M. Submódulos o sumas de módulos libres de tensión serán libres de torsión, y por todo esto, los módulos libres sobre dominios de integridad serán libres de torsión.

Definición 2. ***Cíclico***. *Un módulo es* ***cíclico*** *cuando es generado por un elemento. Es decir, cuando $M \cong R/I$ para algún ideal.*

La equivalencia se ve en este ejercicio. Cuando en un dominio de integridad todos sus módulos cíclicos son libres de torsión, es un cuerpo. Otra forma de pensar sobre un módulo cíclico es como aquel que admite un epimorfismo:

$$R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

4.2. Módulos finitamente presentados y resoluciones libres

Definición 3. ***Anulador.*** *El anulador de un módulo M es:*

$$Ann_R(M) = \{r \in R \mid \forall m \in M, rm = 0\}$$

Es un ideal de R. Cuando M es finitamente generado y R es dominio de integridad, M es de torsión si y sólo si $Ann(M) \neq 0$. Puede verse en este ejercicio.

Definición 4. ***Módulos finitamente generados y presentados***. *Sabemos que todos los módulos admiten un epimorfismo de la forma:*

$$R^{\oplus A} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Cuando lo admiten con A finito, se tiene M ***finitamente generado****. Un módulo se dice* ***finitamente presentado*** *si hay una secuencia exacta de la forma:*

$$R^n \xrightarrow{\phi} R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Si R es Noetheriano, todo módulo finitamente generado es finitamente presentado.

Definición 5. ***Resolución****. Una resolución de M mediante módulos libres finitamente generados es un complejo exacto:*

$$\cdots \to R^{m_3} \to R^{m_2} \to R^{m_1} \to R^{m_0} \to M \to 0$$

Aquí podemos entender que R^{m_0} contiene los generadores, R^{m_1} las relaciones entre los generadores, R^{m_2} las relaciones entre relaciones, y así sucesivamente.
Un dominio de integridad es **cuerpo si y sólo si todos sus módulos son finitamente generados**, esto es equivalente a tener:

$$0 \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

para cualquier módulo.
Un dominio de integridad es **PID si todas las resoluciones como finitamente generado extienden a finitamente presentado**, de la forma:

$$0 \longrightarrow R^{m_1} \longrightarrow R^{m_0} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

esto equivale a pedir que $\ker(\pi)$ sea libre.

4.3. Leyendo una presentación

Hemos visto que podemos estudiar un módulo finitamente presentado por un morfismo $\phi : R^n \longrightarrow R^m$, donde $M = coker(\phi)$. Esto quiere decir que podemos asignarle una matriz explícita.

Teorema 1. ***Producto de módulos en matrices****. Sean M, N módulos con matrices A, B. Tenemos $M \oplus N$ con matriz:*

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

Además nótese que las **matrices equivalentes** representan el mismo homeomorfismo, y por tanto el mismo módulo.

Teorema 2. ***Transformaciones de matrices de módulos***. *Una matriz representa el mismo módulo tras las transformaciones de:*

- *Permutar filas o columnas*
- *Añadir filas o columnas linealmente dependientes*
- *Multiplicar filas o columnas por una unidad*
- *Quitar una fila y columna en la que sólo queda una unidad*

Las primeras son consecuencia de la equivalencia. La última puede colocarse como una parte de identidad en una matriz de la forma:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} u & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

Que no afecta al cokernel.

VIII. Vuelta al álgebra lineal

1. Preliminares

1.1. Funtores

Definición 6. ***Funtor***. *Un funtor covariante:*

$$\mathcal{F} : C \longrightarrow D$$

Asigna a cada $A \in C$ un $\mathcal{F}(A) \in D$ y mapea los morfismos entre cada par de objetos:

$$Hom_C(A, B) \to Hom_D(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

Respetando la identidad y la composición de morfismos.
Un ***funtor contravariante*** *es un funtor desde la categoría opuesta:*

$$\mathcal{F} : C^{op} \longrightarrow D$$

Los funtores preservan los diagramas conmutativos. Llamamos **prehaz** a un funtor contravariante $C \longrightarrow \texttt{Set}$.

Definición 7. ***Funtor aditivo***. *Llamamos a un funtor $\mathcal{F} : R - \texttt{Mod} \longrightarrow S - \texttt{Mod}$* ***aditivo*** *cuando la función $Hom_R(A, B) \to Hom_S(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ es homomorfismo de grupos.*

1.3. Equivalencia de categorías

Definición 8. ***Funtores plenamente fieles***. *Dada la función inducida:*

$$Hom_C(A,B) \to Hom_D(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$$

Un funtor es ***fiel*** *si es inyectiva,* ***pleno*** *si es sobreyectiva y* ***plenamente fiel*** *si es biyectiva.*

Definición 9. ***Equivalencia de categorías***. *Un funtor es una equivalencia de categorías si es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo, es decir, para cada $Y \in D$, existe un $X \in C$ tal que $F(X) \cong Y$.*

1.4. Límites y colímites

Definición 10. ***Límite***. *Para un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{I} \longrightarrow C$, su límite es un objeto $L \in C$ con morfismos $\lambda_I : L \longrightarrow \mathcal{F}(I)$ tales que*

- *Conmuta el siguiente diagrama para cualquier $\alpha : I \longrightarrow J$:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\lambda_I"'] \arrow[dr, "\lambda_J"] & \\ \mathcal{F}(I) \arrow[rr, "\mathcal{F}(\alpha)"] & & \mathcal{F}(J) \end{tikzcd}$$

- *L es final en este diagrama.*

Será esencialmente único y puede notarse por $\varprojlim \mathcal{F}$.

Teorema 3. ***Límites sobre cadenas en R-Mod***. *En R-Mod siempre existe un límite llamado $\varprojlim \mathcal{A}_i$ sobre una cadena de la forma:*

$$\begin{tikzcd} & & & A \arrow[dlll, "\phi_5"'] \arrow[dll, "\phi_4"'] \arrow[d, "\phi_3"] \arrow[dr, "\phi_2"] \arrow[drr, "\phi_1"] & & \\ \dots \arrow[r, "\phi_{45}"'] & A_4 \arrow[rr, "\phi_{34}"'] & & A_3 \arrow[r, "\phi_{23}"'] & A_2 \arrow[r, "\phi_{12}"'] & A_1 \end{tikzcd}$$

Este límite es el submódulo de las *secuencias coherentes* en $\prod_i A_i$, es decir, de aquellas tales que $a_i = \phi_{i,i+1}(a_{i+1})$; teniendo como morfismos ϕ_i las proyecciones canónicas

Definición 11. ***Colímite***. *La noción dual de límite es el* ***colímite****, es decir, para un funtor $\mathcal{F} : I \longrightarrow C$, su colímite es un objeto $L \in C$ con morfismos $\gamma_i : \mathcal{F}(I) \longrightarrow L$ tales que*

- *Conmuta el siguiente diagrama para cualquier $\alpha : I \longrightarrow J$:*

$$\begin{tikzcd} & L & \\ \mathcal{F}(I) \arrow[ur, "\gamma_I"] \arrow[rr, "\mathcal{F}(\alpha)"] & & \mathcal{F}(J) \arrow[ul, "\gamma_J"'] \end{tikzcd}$$

- *L es inicial en este diagrama.*

1.5. Comparando funtores

Definición 12. ***Transformación natural.*** *Una transformación natural entre dos funtores $\mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{G}$ consiste en morfismos $\upsilon_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ tales que conmuta el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\alpha)} & \mathcal{F}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \upsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \upsilon_Y} \\ \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\alpha)} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

para cualquier morfismo α.
Llamamos ***isomorfismo natural*** *a una transformación natural donde cada υ es un isomorfismo.*

Definición 13. ***Funtor adjunto.*** *Llamamos F y G adjuntos si tenemos:*

$$Hom_C(X, GY) \cong Hom_D(FX, Y)$$

Isomorfismos naturales.

Lo que nos da realmente un isormorfismo natural de $Hom_C(F-, -)$ con $Hom_D(-, G-)$, entendidos como funtores. Llamamos aquí adjunto izquierdo a F y adjunto derecho a G. Tenemos más sobre funtores adjuntos en la lista de reproducción de The Catsters.

Teorema 4. ***Continuidad de adjuntos.*** *Los funtores adjuntos derechos son continuos, los adjuntos izquierdos son cocontinuos. Es decir, para $I : \mathcal{I} \longrightarrow D$, $J : \mathcal{J} \longrightarrow C$*

$$G(\varprojlim I) = \varprojlim(G \circ I)$$
$$F(\varinjlim J) = \varinjlim(F \circ J)$$

Siempre que existan los límites. La demostración de esto se puede hacer aplicando los funtores en los diagramas conmutativos y usando las propiedades universales de los límites.

Definición 14. ***Funtor exacto***. *Un funtor exacto respeta la exactitud de las secuencias. Es decir, siendo la siguiente secuencia exacta:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

La siguiente secuencia será exacta:

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\phi} FB \xrightarrow{F\psi} FC \longrightarrow 0$$

En particular, lo llamamos *exacto a la izquierda* si preserva la exactitud de:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$$

Y *exacto a la derecha* si preserva la exactitud de:

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

2. Producto tensor y el funtor Tor

2.1. Aplicaciones bilineales

Definición 15. ***Aplicación bilineal***. *Una aplicación $\phi : M \times N \longrightarrow P$ es bilineal si son lineales $\phi(\_, n)$ y $\phi(m, \_)$ para cualesquiera m, n.*

Definición 16. ***Producto tensor***. *$M \otimes_R N$ es el producto tensor de M y N como módulos de R si cualquier aplicación bilineal factoriza de forma única a través de él:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\otimes"] & P \\ M \otimes N \arrow[ur, "\exists! \overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Usando universalidad podemos ver que $R \otimes N \cong N$ y que $M \otimes N \cong N \otimes M$. La construcción explícita del producto tensor se hace sobre el módulo libre sobre $M \times N$ provocando un cociente sobre los submódulos generados por:

$$(m, r_1 n_1 + r_2 n_2) - r_1(m, n_1) - r_2(m, n_2)$$

$$(r_1 m_1 + r_2 m_2, n) - r_1(m_1, n) - r_2(m_2, n)$$

Lo que nos permite actuar con ellos de forma bilineal. La demostración se basa en usar la propiedad universal de la proyección sobre ese cociente.

2.2. Adjunción con Hom

Dado un módulo N de R, tenemos un funtor covariante $\otimes_R N$, que será **adjunto izquierdo** a $Hom_{R-mod}(N,-)$. Podemos observar simplemente que una aplicación bilineal, al currificarse, determina una función que va de M a $Hom(N,P)$, y que es lineal. Sabiendo esto, es trivial que:

$$Hom_R(M, Hom_R(N,P)) \cong Hom_R(M \otimes N, P)$$

La naturalidad y el hecho de que es un isomorfismo se comprueban fácilmente. El hecho de que exista una adjunción nos dice además que $\otimes_R N$, o $N \otimes_R$ por la isomorfía anterior, son cocontinuos.

Proposición 1. *Para cualesquiera R-módulos, se tiene:*

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes N \cong (M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$$

$$N \otimes (M_1 \oplus M_2) \cong (N \otimes M_1) \oplus (N \otimes M_2)$$

$$(\oplus_\alpha M_\alpha) \otimes N \cong \oplus_\alpha (M_\alpha \otimes N)$$

Por cocontinuidad.

Extra

Adjuntos. The Catsters.

Serie de vídeos sobre funtores adjuntos.

Adjuntions 1

Tenemos varias nociones de igualdad entre categorías.

Definición 17. ***Isomorfismo de categorías***. *Ocurre con dos functores:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Tales que $1_C = GF$ y $FG = 1_D$.

Definición 18. ***Equivalencia de categorías***. *Ocurre con dos functores:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Tales que $1_C \cong GF$ y $FG \cong 1_D$. Entendiendo la isomorfía en la categoría de funtores, es decir, una isomorfía natural.

Definición 19. ***Adjunción***. *Ocurre con dos functores:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Tales que tenemos transformaciones naturales $1_C \overset{\eta}{\Longrightarrow} GF$ y $FG \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} 1_D$ que cumplen las dos identidades triangulares siguientes:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "id"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "id"'] & GFG \arrow[d, "\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

En este caso escribimos $F \dashv G$, y F es funtor adjunto de G.

Adjuntions 2

Damos una definición equivalente de funtores adjuntos.

Definición 20. ***Adjunción***. *Una adjunción es un isomorfismo natural:*

$$Hom_D(FX, Y) \cong Hom_C(X, GY)$$

Natural sobre X fijado cualquier Y y natural sobre Y fijado cualquier X. Entendiendo que usamos los funtores contravariantes $Hom(F-, Y)$, $Hom(-, GY)$ por un lado y los funtores covariantes $Hom(FX, -)$ y $Hom(X, G-)$; que nos dan los siguientes cuadrados de naturalidad:

$$\begin{tikzcd}
Hom_D(FX',Y) \arrow[r, "\alpha_{X'}"] \arrow[d, "Hom_D(Ff,Y)"'] & Hom_C(X',GY) \arrow[d, "Hom_C(f,GY)"] \\
Hom_D(FX,Y) \arrow[r, "\alpha_X"] & Hom_C(X,GY)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_D(FX,Y) \arrow[r, "\beta_Y"] \arrow[d, "Hom_D(FX,g)"'] & Hom_C(X,GY) \arrow[d, "Hom_C(X,Gf)"] \\
Hom_D(FX,Y') \arrow[r, "\beta_{Y'}"] & Hom_C(X,GY')
\end{tikzcd}$$

Esta definición es equivalente intuitivamente a la anterior porque podemos crear η y ϵ desde las identidades usando las siguientes transformaciones naturales:

$$Hom_D(FX,FX) \cong Hom_C(X,GFX)$$

$$Hom_D(FGY,Y) \cong Hom_C(GY,GY)$$

Adjuntions 3

Podemos presentar ejemplos de adjunciones. Los **funtores libres y de olvido** suelen ser adjuntos. Entre Set y $Monoid$ tenemos:

$$\begin{tikzcd}
Set \arrow[r, bend left, "Free"] & Monoid \arrow[l, bend left, "Forget"]
\end{tikzcd}$$

Con la adjunción $Free \dashv Forget$.

Teorema 5. ***Mónada de una adjunción***. *Cada adjunción da lugar a una mónada.*

Tenemos un funtor $T = GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. Podemos definir la unidad de la mónada como la unidad de la adjunción $\eta : 1_C \Longrightarrow T$ y la multiplicación podemos definirla usando $id * \epsilon * id : GFGF \Longrightarrow GF$.
Ahora debemos comprobar que cumple los axiomas de mónada. El primero se obtiene directamente desde los triángulos de la adjunción:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "id"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} GF \arrow[r, "GF\eta"] \arrow[dr, "id"'] & GFGF \arrow[d, "G\epsilon F"] \\ & GF \end{tikzcd}$$

Donde el segundo es resultado de aplicar el funtor G a uno de los triángulos conmutativos de la adjunción. Comprobamos el segundo axioma:

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "id"] \\ T & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} GFGF \arrow[d, "G\epsilon F"] & GF \arrow[l, "\eta GF"'] \arrow[dl, "id"] \\ GF & \end{tikzcd}$$

Donde tenemos el resultado de aplicar F por la derecha al otro triángulo conmutativo.
Y finalmente el axioma de conmutatividad de la mónada se comprueba como:

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} GFGFGF \arrow[r, "G\epsilon FGF"] \arrow[d, "GFG\epsilon F"] & GFGF \arrow[d, "G\epsilon F"] \\ GFGF \arrow[r, "G\epsilon F"] & GF \end{tikzcd}$$

Donde el segundo diagrama se obtiene desde la naturalidad de ϵ aplicando funtores.

Adjuntions 4

Vamos a probar la igualdad entre las dos definiciones de adjunción. Supongamos primero que tenemos el isomorfismo natural entre los dos conjuntos de morfismos, es decir, tenemos:

$$\overline{(-)} : Hom_D(FX, Y) \cong Hom_C(X, GY)$$

Si tomamos ahora los dos cuadrados naturales que teníamos por este isomorfismo y tomamos en ellos los casos particulares $Y = FX$ primero, y $X = GY$ después:

$$\begin{tikzcd} Hom_D(FX, FX) \arrow[r, "\overline{(-)}"] \arrow[d, "\_\circ Ff"'] & Hom_C(X, GFX) \arrow[d, "\_\circ f"] \\ Hom_D(FX', FX) \arrow[r, "\overline{(-)}"] & Hom_C(X', GFX) \end{tikzcd}$$

Si tomamos la identidad 1_{FX} y llamamos $\eta_X = \overline{1_{FX}}$, tenemos que $\eta \circ f = \overline{Ff}$. Ahora, si damos la vuelta al isomorfismo $\overline{(-)}$ en este diagrama a la vez que hacemos $X = GY$:

$$\begin{tikzcd} Hom_D(FGY, Y) \arrow[d, "\_\circ Ff"'] & Hom_C(GY, GY) \arrow[l, "\overline{(-)}"'] \arrow[d, "\_\circ f"] \\ Hom_D(FGY', Y) & Hom_C(GY', GY) \arrow[l, "\overline{(-)}"'] \end{tikzcd}$$

Volviendo a tomar la identidad 1_{GY} y llamando $\epsilon_Y = \overline{1_{GY}}$, tenemos $\epsilon \circ Ff = \overline{f}$.
Ahora tomamos el segundo cuadrado natural, y repetimos el mismo proceso.

$$\begin{tikzcd} Hom_D(FX, FX) \arrow[r, "\overline{(-)}"] \arrow[d, "g\circ\_"'] & Hom_C(X, GFX) \arrow[d, "Gg\circ\_"] \\ Hom_D(FX, FX') \arrow[r, "\overline{(-)}"] & Hom_C(X, GFX') \end{tikzcd}$$

Obteniendo desde la identidad en FX la ecuación $\overline{g} = Gg \circ \eta$. Y volviendo a dar la vuelta a los isomorfimos llegamos a:

$$\begin{tikzcd} Hom_D(FGY, Y) \arrow[d, "g\circ\_"'] & Hom_C(GY, GY) \arrow[l, "\overline{(-)}"'] \arrow[d, "Gg\circ\_"] \\ Hom_D(FGY, Y') & Hom_C(GY, GY') \arrow[l, "\overline{(-)}"'] \end{tikzcd}$$

Obteniendo finalmente $\overline{Gg} = g \circ \epsilon$. De este proceso hemos obtenido finalmente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \eta \circ f &= \overline{Ff} \\ \epsilon \circ Ff &= \overline{f} \\ Gg \circ \eta &= \overline{g} \\ g \circ \epsilon &= \overline{Gg} \end{aligned}$$

Con ellas podemos probar la naturalidad de η y la naturalidad de ϵ:

$$\begin{tikzcd} GFX \arrow[r, "GFf"] & GFY \\ X \arrow[u, "\eta_X"'] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\eta_Y"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} FGX \arrow[r, "FGg"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & FGY \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ya que $\eta \circ f = \overline{Ff} = GFf \circ \eta$ y $f \circ \epsilon = \overline{Gf} = \epsilon \circ FGf$. Y además podemos probar los dos triángulos de naturalidad.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta_X"] \arrow[dr, "id"] & FGF \arrow[d, "\epsilon_{FX}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_{GX}"] \arrow[dr, "id"] & GFG \arrow[d, "G\epsilon_X"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Teniendo finalmente que:

$$\begin{aligned} \epsilon \circ F\eta &= \overline{\eta} = 1 \\ G\epsilon \circ \eta &= \overline{\epsilon} = 1 \end{aligned}$$

El otro sentido de la demostración se tiene llegando primero a las cuatro ecuaciones, y usándolas para definir el isomorfismo $\overline{(-)}$. Falta entonces demostrar su naturalidad.