Memoria del Plan de Trabajo

Tema de estudio: Pares de Koszul

Introducción y antecedentes: Un anillo graduado es un anillo Koszul si $A = \oplus_{\mathbb{N}} A^n$, A^0 es un anillo semisimple y tiene una resolución $P_\bullet$ formada por A–módulos izquierda proyectivos graduados, en donde cada P_n está generado por elementos de grado n. Estos anillos son la generalización natural de las álgebras de Koszul y son útiles en campos tan diversos como la teoría de representación, la geometría algebraica, la topología algebraica, los grupos cuánticos o la combinatoria.
En el trabajo de Jara-LópezPeña-Stefan este concepto es generalizado al nuevo de par de Koszul. Un par de Koszul está construido sobre un anillo semisimple R; un R–anillo graduado $A = \oplus_{\mathbb{N}} A^n$ es conexo si $A^0 = R$, y un par casi-Koszul es un par formado por un R–anillo graduado conexo y un R–coanillo graduado conexo C, junto con un isomorfismo de R–bimódulos $\theta_{A,C} : C_1 \longrightarrow A_1$ que verifica una relación de compatibilidad.

$$C_2 \xrightarrow{\Delta_{1,1}} C_1 \otimes C_1 \xrightarrow{\theta_{C,A} \otimes \theta_{C,A}} A^1 \otimes A^1 \xrightarrow{\mu^{1,1}} A^2$$

con las estructuras de álgebra y coálgebra. En ese mismo trabajo los autores asocian a un par casi–Koszul seis complejos, tres de cadenas y tres de cocadenas, probando que si uno de ellos es exacto, lo son todos los demás. en este caso se tiene un par de Koszul. Lo importante es que se prueba que si un R–anillo graduado conexo es Koszul si, y sólo si, existe un R–coanillo graduado conexo C tal que (A, c) es un par de Koszul.

Objetivos: El objeto de este trabajo es continuar este estudio añadiendo nuevas caracterizaciones en términos de otras álgebras definidas mediante homología y cohomología. Parte de este trabajo ha sido iniciado en el trabajo de Manea-Stefan, pero nuevas caracterizaciones ayudarán en las aplicaciones de la teoría.
Un álgebra graduada A es cuadrática si la aplicación natural es $T(A) \longrightarrow A$, donde $T(A)$ es el álgebra tensor, es sobreyectiva y su núcleo J_A, como ideal bilátero, está generado por $J_A \cap (A^1 \otimes A^1)$, esto es, las relaciones de definición pertenecen a $A^1 \otimes A^1$. La importancia de las álgebra cuadráticas es clara en teoría de representación y es computacionalmente evidente. Una de las propiedades importantes de los R–anillos de Koszul es que son álgebras cuadráticas. La misma teoría para coanillos es conveniente desarrollarla para así obtener propiedades estructurales de estos coanillos, y para cerrar el círculo manteniendo una dualidad estricta entre anillos y coanillos de Koszul.
Es de interés señalar que las herramientas a desarrollar, que son base de los resultados que se esperan estudiar, son los coanillos y anillos de $\mathrm{Tor}^A_\bullet(A, A)$ y $\mathrm{Ext}^\bullet_C(R, R)$, tratando de mostrar así la dualidad existente a lo largo de toda esta construcción.
Un segundo aspecto que se considera de interés son las posibles aplicaciones de la computación, vía bases de Groebner, para el cálculo de resoluciones proyectivas, y el estudio efectivo de las dualidad según se ha desarrollado en Jara-Jódar.

Metodología: Se recopilará la bibliografía básica sobre el tema, y se desarrollarán seminarios semanales sobre los contenidos de la misma con objeto de avanzar lo suficientemente rápido sobre los rudimentos de la teoría como para que se puedan alcanzar los objetivos propuestos.

Hipótesis: Una vez fijados los objetivos, trabajaremos con la homología y la cohomología, con álgebras y coálgebras para mejor comprender la teoría. Nos centraremos después en el estudio de ejemplos y sus propiedades para poder realizar nuevos desarrollos y poder confirmar o refutar posibles conjeturas.

Referencias:

(1) A. Beilinson, V. Ginzburg and W. Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 473–527.

(2) T. Brzezinski and R. Wisbauer, Corings and Comodules, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

(3) P. Jara and J. Jódar, An example of Bernstein duality, Adv. Math. 152 (2000), 1–27.

(4) P. Jara and J. Jódar, Finite dimensional duality on the generalized Lie algebra $sl(2)_q$, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002), 3683-3696.

(5) P. Jara and D. Stefan, Cyclic homology of Hopf Galois extensions and Hopf algebras, Proc. London Math. Soc. 93 (2006), 138-174.

(6) P. Jara, J. López-Peña and D. Stefan, Koszul Pairs. Applications, http://arxiv.org/pdf/1011.4243.pdf. A publicar en J. Noncommutative Geometry.

(7) J. P. May, Bialgebras and Hopf algebras, lecture notes. http://www.math.uchicago.edu/ may/TQFT/HopfAll.pdf

(8) A. Milinsky and H.J. Schneider, Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups, Contemp. Math. 267 (2000), 215-236.

(9) A. Polishchuk and L. Positselski, Quadratic algebras, University lecture series, vol. 37, Amer.Math. Soc., 2005.

(10) S. Priddy, Koszul resolutions, T. Am. Math. Soc. 152 (1970), 39–60.

(11) C. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.