Representaciones

Aplicaciones de caracteres

Resumen

El cálculo de orientaciones en el espacio tridimensional es necesario para la generación de gráficos y animaciones por ordenador. Los ángulos de Euler representan el espacio de orientaciones pero no forman un homeomorfismo local, lo que causa errores gráficos (bloqueo del cardán), mientras que los cuaterniones de Hamilton sí proporcionan un recubrimiento de dos hojas del mismo. Con ellos presentaremos un ejemplo de movimiento de objetos en gráficos tridimensionales.

D. Charte, J.C. Entrena, L. Soto, M. Román

Universidad de Granada

Índice

1. El grupo de rotación

1.1. El grupo de rotación SO(3)

Definición 1. Llamamos $O(n)$ al grupo de las **matrices ortogonales** de dimensiones $n \times n$, aquellas que cumplen que $Q^T Q = QQ^T = I$, bajo la composición.

Nótese que las matrices ortogonales forman un subgrupo del grupo lineal $GL(n)$ de matrices invertibles; y que, por definición, sólo pueden tener determinante 1 y -1.
Definición 2. Llamamos $SO(n)$ al **subgrupo de rotaciones**, definido como el subgrupo de $O(n)$ formado por aquellas matrices que tienen determinante 1.

2. Ángulos de Euler

2.1. Definición

2.2. Descomposición

Cada rotación se descompone únicamente en tres ángulos de Euler. En este ejemplo, utilizamos las rotaciones sobre los ejes cartesianos en el espacio, de forma que la primera es la rotación de ángulo ψ sobre el eje z, la segunda rota ϕ grados sobre el eje y, y la tercera la que rota θ grados con respecto al eje x. Las tres rotaciones están consideradas en sentido antihorario.

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2.3. Bloqueo del cardán

2.4. Recubrimiento del grupo de rotaciones

3. Cuaternios

3.1. Conexión con SU(2)

[1]

3.2. Recubrimiento del grupo de rotaciones

4. Aplicación en gráficos

4.1. Spherical Linear Interpolation (SLERP)

El método **SLERP** (Spherical Lineal Interpolation) permite interpolar un punto entre dos orientaciones de manera continua. Dadas dos orientaciones q_1, q_2 representadas como cuaterniones, un punto p y un parámetro de interpolación t, buscamos un camino continuo que interpole p desde q_1, cuando $t = 0$, hasta q_2, cuando $t = 1$.

Para calcular la rotación interpolada, usamos la fórmula

$$q' = q_1(q_1^{-1}q_2)^t$$

4.2. Spherical and Quadrangle (SQUAD)

5. Referencias

Referencias

[1] Gelfand, I.M.; Minlos, R.A.; Shapiro, Z.Ya. (1963), Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications, New York: Pergamon Press.