Representaciones

Aplicaciones de caracteres

Resumen

El cálculo de orientaciones en el espacio tridimensional es necesario para la generación de gráficos y animaciones por ordenador. Los ángulos de Euler representan el espacio de orientaciones pero no forman un homeomorfismo local, lo que causa errores gráficos (bloqueo del cardán), mientras que los cuaterniones de Hamilton sí proporcionan un recubrimiento de dos hojas del mismo. Con ellos presentaremos un ejemplo de movimiento de objetos en gráficos tridimensionales.

D. Charte, J.C. Entrena, L. Soto, M. Román

Universidad de Granada

Índice

1. El grupo de rotación

1.1. El grupo de rotación SO(3)

Definición 1. Llamamos $O(n)$ al grupo de las **matrices ortogonales** de dimensiones $n \times n$, aquellas que cumplen que $Q^T Q = QQ^T = I$, bajo la composición.

Nótese que las matrices ortogonales forman un subgrupo del grupo lineal $GL(n)$ de matrices invertibles; y que, por definición, sólo pueden tener determinante 1 y -1.
Definición 2. Llamamos $SO(n)$ al **subgrupo de rotaciones**, definido como el subgrupo de $O(n)$ formado por aquellas matrices que tienen determinante 1.

Vamos a considerar $SO(3)$, las rotaciones sobre el origen de $\mathbb{R}^3$, pues son laz que nos interesan en este caso. Vamos a ver un resultado sobre la topología de este grupo.
Proposición 1. *$SO(3)$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^3$*

Demostración
Consideramos una esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio π, $\mathbb{B} = B(0, \pi)$. Asignamos a cada punto $x \in \mathbb{B}$ una rotación, con eje la recta que une el origen y x, y ángulo de rotación $\alpha = d(x, O)$ la distancia con signo al origen. De esta forma, cada punto representa una única rotación, salvo los puntos antípoda, a los que corresponden las rotaciones de ángulos π y $-\pi$, que son la misma. Esto nos lleva a identificar los puntos antípoda de $\partial\mathbb{B}$, lo que establece un homeomorfismo entre $SO(3)$ y $\mathbb{RP}^3$. $\square$
Nota. De hecho, por ser $\mathbb{B}$ una variedad diferenciable $\mathbb{C}^\infty$, el homeomorfismo es un difeomorfismo.

En cada rotación existe una recta invariante, cuyos puntos se mantienen fijos tras aplicarse la rotación. Llamaremos a esta recta el eje de rotación, y vamos a ver que siempre existe.
Proposición 2. *Cada rotación de $SO(3)$ deja fija una recta.*

Demostración
Sea $M \in SO(3)$ una rotación. Queremos ver que la matriz tiene al 1 como valor propio, que nos dará un subespacio de al menos dimensión 1 cuyos puntos se mantienen fijos por M.

Que el 1 sea valor propio equivale a que $det(M - I_3) = 0$. Desarrollamos la expresión sabiendo que $M^t = M^{-1}$

$$det(M - I_3) = det((M - I_3)^t))det(M^t - I_3) = det(M^{-1} - I_3) =$$
$$= det(M^{-1}(I_3 - M)) = det(M^{-1}) * det(I_3 - M) = det(I_3 - M) = -det(M - I_3)$$

de donde se deduce directamente que $det(M - I_3) = 0$ y que el 1 es un autovalor de M. $\square$

2. Ángulos de Euler

2.1. Definición

Los ángulos de Euler son tres ángulos utilizados para describir la orientación de un objeto respecto a un sistema coordenadas fijo en el espacio. Análogamente, podemos no considerar como fijo el sistema de coordenadas y ver los ángulos de Euler como una orientación de dicho sistema.

La forma tradicional de usar rotaciones en el espacio se basa en el uso de las llamadas rotaciones de Euler, que combinan hasta tres rotaciones sobre los ejes cartesianos, donde la única restricción es que no puede haber dos rotaciones sobre el mismo eje contiguas, pues derivarían en una.

Las tres rotaciones sobre los ejes cartesianos se pueden combinar de 12 formas distintas, consistentes en las 6 ordenaciones posibles usando los tres índices, además de aquellas seis en las que aparece el mismo eje al principio y al final, y uno de los dos restantes en la posición central.

2.2. Descomposición

Cada rotación se descompone en sus tres ángulos de Euler de forma única. Vemos las matrices de rotación respecto a los ejes cartesianos, de forma que la primera es la rotación de ángulo ψ sobre el eje z, la segunda rota ϕ grados sobre el eje y, y la tercera la que rota θ grados con respecto al eje x. Las tres rotaciones están consideradas en sentido antihorario.[1]

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Podemos ver el espacio de los ángulos de Euler como el 3-toro $\mathbb{T}^3$, sin más que identificar cada variable de giro en una dimensión del toro.

2.3. Bloqueo del cardán

El principal problema del uso de los ángulos de Euler es el llamado *bloqueo del cardán*. Este fenómeno consiste en la pérdida de un grado de libertad a la hora de rotar, debida a la alineación de dos de los ejes de rotación. Esto ocurre cuando se dan ciertas combinaciones en los ángulos de rotación, provocando dicho alineamiento.

Formalmente, el bloqueo del cardán ocurre debido a que el espacio de ángulos de Euler, representados con $\mathbb{T}^3$, no puede ser recubridor del espacio de rotaciones, que se identifica con $\mathbb{RP}^3$. Esto puede verse fácilmente tomando los grupos fundamentales de ambos espacios. Mientras que el grupo fundamental del 3-toro es $\pi(\mathbb{T}^3, x) \simeq \mathbb{Z}^3$, el grupo fundamental del 3-espacio proyectivo es $\pi(\mathbb{RP}^3, x) \simeq \mathbb{Z}_2$. Como el grupo fundamental de un recubridor debe ser subgrupo del grupo fundamental del espacio reducido, deducimos que no puede haber un recubrimiento. De hecho, como Z_2 no tiene subgrupos propios, los posibles espacios recubridores deben tener grupo fundamental Z_2 o ser simplemente conexos.

3. Cuaternios

3.1. Versores

Sabemos que los cuaternios pueden escribirse como $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V$, donde V es el espacio vectorial real tridimensional de base i, j, k, siendo equivalente a la definición

[1] Para cambiar el sentido no hay más que cambiarle el signo a los senos

$$V = \left\{ v \in \mathbb{H} \mid v^2 < 0 \right\}$$

Los cuaternios unitarios, en particular, pueden escribirse como $\cos\theta + u\sin\theta$, donde u es un vector unitario de $\mathbb{R}^3$. A un cuaternio así escrito se le llama **versor**.

Demostración. Si tenemos $q = a + bv$ con v unitario, sabemos que $v^2 = -v(-v) = -vv^* = 1$. Entonces, si q es unitario,

$$1 = qq^* = (a + bv)(a - bv) = a^2 + b^2.$$

Con lo que existirá algún θ para el que $a = \cos\theta$ y $b = \sin\theta$. □

3.2. Conexión con SU(2)

[1]
Definición 3. Llamamos SU(n), al espacio de las matrices complejas unitarias de determinante 1. Es decir,

$$SU(n) = \{M \in U_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\}.$$

En particular nos interesamos por $SU(2)$ porque podemos verlo como un embebimiento de la esfera tridimensional en $\mathbb{R}^4$.
Teorema 1. *Cada matriz en $SU(2)$ puede escribirse como*

$$\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Demostración. Si tomamos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ formando una matriz unitaria de determinante 1 como

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

tenemos las relaciones siguientes, obtenidas del hecho de que debe ser ortogonal

- $|\alpha| + |\beta| = 1$
- $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$
- $\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0$

y que se resuelven con $\alpha = \overline{\delta}$ y $\beta = -\overline{\gamma}$; mientras que la primera condición nos da la condición $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. □

3.3. Cuaternios como esfera de dimensión 4

3.4. Recubrimiento del grupo de rotaciones

4. Aplicación en gráficos

4.1. Exponenciación de cuaternios

Definición 4. Se define la función **exponencial en cuaternios**, $\exp\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, desde la serie de potencias de la función exponencial usual, es decir,

$$\exp(q) = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \cdots + \frac{q^n}{n!} + \ldots.$$

Si escribimos los cuaternios como versores, $q = \cos\theta + v\sin\theta$, tendremos que como $v^2 = -1$, se cumple la fórmula de Euler para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ como $\exp(\theta v) = \cos\theta + v\sin\theta = q$, y por tanto podemos calcular la exponente de un cuaternio como

$$q^t = \exp(t\theta v) = \cos(t\theta) + v\sin(t\theta).$$

4.2. Spherical Linear Interpolation (SLERP)

El método **SLERP** (Spherical Lineal Interpolation) permite interpolar un punto entre dos orientaciones de manera continua. Dadas dos orientaciones q_1, q_2 representadas como cuaterniones, un punto p y un parámetro de interpolación t, buscamos un camino continuo que interpole p desde q_1, cuando $t = 0$, hasta q_2, cuando $t = 1$.

Para calcular la rotación interpolada, usamos la fórmula

$$q' = q_1(q_1^{-1}q_2)^t$$

4.3. Spherical and Quadrangle (SQUAD)

5. Referencias

Referencias

[1] Gelfand, I.M.; Minlos, R.A.; Shapiro, Z.Ya. (1963), Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications, New York: Pergamon Press.