Variáveis Complexas

UFMT
2009

Notas de aula

Por favor considere a natureza antes de imprimir este material.
Economize papel. Respeite a natureza.

Variáveis Complexas

Régis da Silva Santos
UFMT 2009

Prefácio

Esta apostila foi criada a partir de notas de aula do curso regular de Variáveis Complexas em 2009.

É permitida a reprodução total ou parcial desta apostila desde que indicada a autoria.

Esta apostila foi criada para uso pessoal, portanto, adaptada para tal fim, podendo posteriormente ser adaptada para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Régis da Silva Santos
Universidade Federal de Mato Grosso, 2009.

Sumário

Capítulo 1

Números Complexos

1.1 Números Complexos

Equação do Segundo Grau

A equação do segundo grau é dada por

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

As raízes são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$
Se $\Delta > 0$, então a Eq. 1.1 tem duas raízes reais, $x_1 \neq x_2$.
Se $\Delta = 0$, então a Eq. 1.1 tem uma raiz real, $x_1 = x_2$.
Se $\Delta < 0$, então a Eq. 1.1 não tem raiz real.

Exemplo 1.1 Seja $x^2 - 6x + 13 = 0$.
Note que $\Delta = 36 - 4.13 = -16$, ou seja, $\Delta < 0$.
As raízes são

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2}$$
$$x_1 = 3 + 2\sqrt{-1}; x_2 = 3 - 2\sqrt{-1}$$

Definição 1.1 **Número complexo** é um número da forma $z = a + bi$

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

onde $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$.

Por definição $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária de z.
Note que $i^2 = -1$.

Operações com Números Complexos

Propriedades

- Igualdade de dois complexos
  Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$$

- Adição

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

- Multiplicação

$$(a + bi).(c + di) := (ac - bd) + (bc + ad)i$$

- Oposto aditivo

$$z = a + bi \Rightarrow -z = -a - bi$$

- Neutro aditivo

$$z + 0 = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

- Comutatividade: $a.i = i.a, \forall a \in \mathbb{R}$

Obs:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \quad \mathbb{C} \\ a &\mapsto a + 0i \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

O número $z = a + bi$ chama-se número imaginário.
$z = bi$ chama-se imaginário puro.
$z = a$ chama-se real.

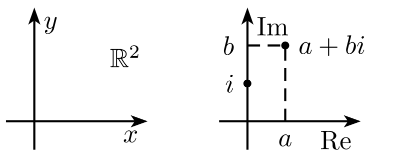
O Plano Complexo

Sejam $z = a + bi, z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, então um ponto no plano complexo é dado por $P = (a, b), P_1 = (a_1, b_1)$ e $P_2 = (a_2, b_2)$. E ainda,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$$
$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Temos que $i = 0 + 1.i, i = (0, 1)$.
Seja $a \in \mathbb{R}$, então $a = (a, 0), a = a + 0i$.
A Fig. 1.1(b) mostra a representação de um ponto $P(a, b)$ no plano complexo.



(a) Plano real. (b) Plano complexo.

Figura 1.1

Regra do paralelogramo (Fig. 1.2)

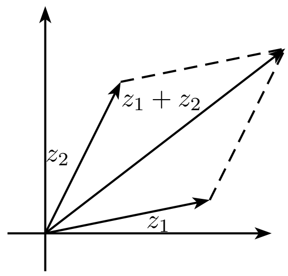


Figura 1.2: Soma de complexos.

Módulo e complexo conjugado

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$

- Módulo de z

  Também chamado de *valor absoluto* ou *norma* é dado por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

  é a distância do ponto z a origem. (Fig. 1.3)

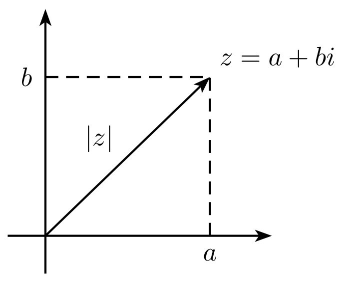


Figura 1.3: Norma de z.

- Conjugado

  O conjugado de $z = a + bi$ é $\overline{z} = a - bi$.

Temos que

$$z + \overline{z} = 2a \text{ e } z.\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Se $z \neq 0 + 0i$, então $a \neq 0$ ou $b \neq 0 \Rightarrow |z|^2 \neq 0$.

$$\Rightarrow (z.\overline{z}).\frac{1}{|z|^2} = 1 \Rightarrow z\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = 1$$

Definição 1.2

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Seja $z = a + bi$, então $z^{-1} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

- Divisão de complexos

Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$. Então

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} = z_1 \left(\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Exemplo 1.2 Sejam $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 3 + 4i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3+4i} = \frac{(1+i)(3-4i)}{6+16} = \frac{(3+4)+(-4+3)i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$$

1.2 Representação Polar

A partir da Fig. 1.4 temos que $a = |z| \cos\theta$ e $b = |z|\,\text{sen}\theta$, onde θ é o argumento de z.

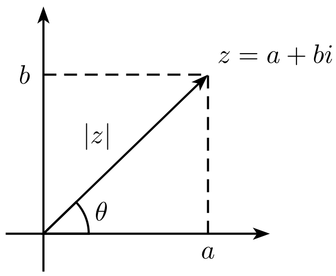


Figura 1.4: Representação polar.

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z| \cos\theta + i|z|\,\text{sen}\theta \\ &= |z| \left(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{z = r\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta\right); r = \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{1.2}$$

Esta é a representação polar de $z = a + bi$, ou representação trigonométrica.

Proposição 1.3 *Sejam* $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\ sen\theta_1)$ *e* $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\ sen\theta_2)$. *Então*

i) $z_1.z_2 = r_1.r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen(\theta_1 + \theta_2))$

ii) $z_2 \neq 0; \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2))$

Demonstração:
Lembremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

1. Então

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (r_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)) (r_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)) \\ &= r_1.r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + (\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)\, i) \\ &= r_1.r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

2. Temos que

$$\frac{1}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \tag{1.3}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2} \right) \stackrel{(1.3)}{=} \frac{r_1}{r_2} (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) (\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + (\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1)\, i) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

■

Corolário 1.4 *Sejam* $z_j = r_j (\cos\theta_j + i\ sen\theta_j), j = 1, 2, \ldots, n$. *Então*

i) $z_1, \ldots, z_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} z_j = r_1, \ldots, r_n (\cos(\theta_1, \ldots, \theta_n) + i\ sen(\theta_1, \ldots, \theta_n))$

Em particular, $z_1 = \ldots = z_n \Rightarrow r_1 = \ldots = r_n$ *e* $\theta_1 = \ldots = \theta_n$.

Tomemos, então, z, r *e* θ.

$$\boxed{z^n = r^n (\cos(n\theta) + i\ sen(n\theta))} \tag{1.4}$$

ii) E ainda

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\theta) + i\ sen(-n\theta))$$

Demonstração:

i) Basta aplica o item (a) da Prop. 1.3.

ii) Seja $z \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
z^{-n} &= (r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta))^{-n} \\
&= r^{-n}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^{-n} \\
&= \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^n}\right) \\
&\overset{(1.4)}{=} \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)}\right) \\
&= \frac{1}{r^n}(\cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)) \\
z^{-n} &= r^{-n}(\cos(-n\theta) + i\,\mathrm{sen}(-n\theta))
\end{aligned}
$$

■

1.3 Fórmula de De Moivre

$$
\boxed{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)} \tag{1.5}
$$

Proposição 1.5 *Seja $z \in \mathbb{C}$.*

i) $|z| \geqslant 0$

ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

iii) $|z| = |-z|$

iv) $|z| = |\overline{z}|$

v) $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$

vi) $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

Demonstração:
Seja $z = x + yi$.

1. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$, pois $x^2 + y^2 \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
3. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = |-z|$
4. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\overline{z}|$
5. $\mathrm{Re}(z) = x$, então $|\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|$
6. $\mathrm{Im}(z) = y$, então $|\mathrm{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

■

Proposição 1.6 *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*

i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

ii) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

Demonstração:

i) Temos que

$$\begin{aligned}
|z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)\left(\overline{z_1 z_2}\right) \\
&= (z_1 z_2)\left(\overline{z_1}.\overline{z_2}\right) \\
&= (z_1 \overline{z_1})\left(z_2 \overline{z_2}\right) \\
&= |z_1|^2 |z_2|^2 \\
|z_1 z_2|^2 &= (|z_1| \, |z_2|)^2 \\
\Rightarrow |z_1 z_2| &= |z_1| \, |z_2|
\end{aligned}$$

ii) Temos que

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) \\
&= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z_1} z_2\right) \\
\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\left|\overline{z_1} z_2\right| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| \\
\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 \\
\Rightarrow |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|
\end{aligned}$$

■

Corolário 1.7 *Sejam* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

i) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

ii) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$ *desigualdade triangular inversa.*

Demonstração:

i) Temos que

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \underset{(b)}{\overset{1.6}{\leqslant}} |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$

ii) Temos que

$$\begin{aligned}
&|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2| \\
&\Rightarrow |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| (*) \\
&|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1| \\
&\Rightarrow |z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2| \\
&\Rightarrow -|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| (**) \\
&\Rightarrow -|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \\
&\Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|
\end{aligned}$$

■

1.4 Exercícios Propostos

1.1 Mostre que

i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

ii) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

1.2 Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Mostre que

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z} z_1 . \overline{z_2}$

c) Se $z_2 \neq 0$, então $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

d) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

1.5 Raízes n-ésimas

Definição 1.8 Um número $z \in \mathbb{C}$ é uma *raiz n-ésima* de $a \in C, a \neq 0$, se $z^n = a$. $(\underbrace{z.z \ldots z}_{n \text{ vezes}} = a)$

Notação: $z = \sqrt[n]{a}$
Obs: z é raiz n-ésima de $a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z$ é raiz do polinômio $P(x) = x^n - a$.
$P(x) \in C[x] = \{$polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}\}$.

$$0 = p(z) = z^n - a \Rightarrow z^n = a$$

Teorema 1.9 *Seja $z, a \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Denotando por*

$$z = \rho(\cos\tau + i\ sen\tau) \ \ e \ a = r(\cos\theta + i\ sen\theta).$$

Então, z é raiz n-ésima de a se, e somente se,

$$\rho^n = r \ \ e \ \tau = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:
$\Rightarrow$) Suponha que $z^n = a, z = \rho(\cos\tau + i\,\mathrm{sen}\tau)$ e $a = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$.

$$z^n = [\rho(\cos\tau + i\,\mathrm{sen}\tau)]^n = \rho^n(\cos n\tau + i\,\mathrm{sen} n\tau) = a = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n \cos n\tau = r\cos\theta (*) \\ \rho^n \,\mathrm{sen} n\tau = r\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\rho^n)^2 \cos^2 n\tau = r^2\cos^2\theta \\ (\rho^n)^2 \,\mathrm{sen}^2 n\tau = r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \end{cases}$$
$$\Rightarrow (\rho^n)^2\left(\cos^2 n\tau + \mathrm{sen}^2 n\tau\right) = r^2\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right)$$
$$\Rightarrow (\rho^n)^2 = r^2 \Rightarrow \rho^n = r$$

Substituindo em $(*)$, temos

$$\begin{cases} \cos n\tau = \cos\theta \\ \mathrm{sen} n\tau = \mathrm{sen}\theta \end{cases}$$
$$\Rightarrow \exists k \in Z : n\tau = \theta + 2k\pi \Rightarrow \tau = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$\Leftarrow$) Suponha $z = \rho(\cos\tau + i\,\mathrm{sen}\tau)$ e $a = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$.

$$z^n = (\rho(\cos\tau + i\,\text{sen}\tau))^n = \underbrace{\rho^n}_{r}(\cos n\tau + i\,\text{sen}n\tau) = (**)$$

e

$$\begin{cases} \cos n\tau = \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \\ \text{sen}n\tau = \text{sen}(\theta + 2k\pi) = \text{sen}\theta \end{cases}$$

Então

$$(**) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = a \Rightarrow z^n = a$$

■

Podemos escrever

$$\boxed{z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)} \tag{1.6}$$

Obs: $z^n = a \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$
Se $k = 0, z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$
Se $k = 1, z_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)\right)$
$\vdots$
Se $k = n-1, z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi(n-1)}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi(n-1)}{n}\right)\right)$
Se $k = n, z_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) = z_0$
Se $k = n+1, z_{n+1} = z_1$
Então, as raizes n-ésimas de a são $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.
Com módulo $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|a|}$ e argumento $\tau_k = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemplo 1.3 Calcule as raízes de $x^3 - 2$ em $\mathbb{C}$.

Solução:
Devemos encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 2$. Note que $n = 3$.
Escrevendo 2 na forma polar, temos

$$\begin{aligned}
&2 = 2(\cos 0 + i\,\text{sen}0) \\
&\Rightarrow 2 = 2 + 0i, r\sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \\
&z_0 = \sqrt[3]{2}\,(\cos 0 + i\,\text{sen}0) = \sqrt[3]{2} \in R \\
&z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

□

Raizes da unidade

Lembrando que $z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$.

Definição 1.10 Se $z \in \mathbb{C}$ e $z^n = 1$, então dizemos que z é uma *raiz n-ésima da unidade.*

Se $a = 1$, temos $r = 1$ e $\theta = 0$. Então

$$\boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

z_k é raiz da unidade. Logo, se

$$\begin{aligned}
&k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i\,\mathrm{sen} 0 = 1\\
&k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = z_0.\omega\\
&k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) = z_0.\omega^2\\
&k = n-1 \Rightarrow z_{n-1} = \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\\
&k = n \Rightarrow z_n = \cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi) = 1\\
&k = n+1 \Rightarrow z_{n+1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = z_1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Então, as raízes da unidade são $\{1, z_1 = \omega, z_2 = \omega^2, \ldots, z_{n-1} = \omega^{n-1}\}$.
Veja a interpretação geométrica no livro do Geraldo Ávila.

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

usando soma de arcos para seno e cosseno, obtemos

$$z_k = \sqrt[n]{r}\underbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)}_{z_0}\underbrace{\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)}_{\omega^k}$$

Exemplo 1.4 Calcule as raizes do polinômio $P(x) = x^3 - 8$.

Solução:
$z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 8$. Seja $z_0 = 2$. Como as raízes da unidade são $1, \omega, \omega^2$, então

$$\begin{aligned}
\omega &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\omega^2 &= \overline{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Então, as raizes de $P(x)$ são $\boxed{2 = z_0}$, $2\omega = z_1 = \omega$ e $2\omega^2 = z_2 = z_0\omega^2$, ou seja,

$$\begin{aligned}
2\omega &= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 + i\sqrt{3}} \text{ e}\\
2\omega^2 &= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-1 - i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

□

Raizes primitivas

Definição 1.11 Uma *raiz n-ésima primitiva da unidade* é uma raiz n-ésima $z \neq 1$ tal que n é o menor positivo tal que $z^n = 1$.

Exemplo 1.5 Considere $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, ω é raiz primitiva para qualquer n.

1.6 A Exponencial

Definição 1.12 Dado $z \in \mathbb{C}, z = c + iy$, definimos

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen} y)} \tag{1.7}$$

de onde

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\,\mathrm{sen} y} \tag{1.8}$$

Teorema 1.13 (propriedades) *Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*

i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$

ii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

iii) $(e^z)^n = e^{nz}, \forall n \in \mathbb{Z}$

iv) $e^z \neq 0$

v) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

vi) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i,$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$

Demonstração:
Os itens de $i)$ a $iii)$ encontram-se resolvidos em Geraldo Ávila, pág. 23.

iv) Suponha, por absurdo, que para $z = x + iy$ tenhamos $e^z = 0$. Então $e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen} y) = 0$.
Logo, $e^x = 0$ ou $\cos y + i\,\mathrm{sen} y = 0$.
Mas $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo $\cos y + i\,\mathrm{sen} y = 0 + 0i$, ou seja, $0 = \cos y = \mathrm{sen} y$. Absurdo.

v) Note que

$$\begin{aligned}
|e^z| &= |e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen} y)| \\
&= |e^x \cos y + i\,(e^x\,\mathrm{sen} y)| \\
&= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x\,\mathrm{sen} y)^2} \\
&= \sqrt{(e^x)^2\,(\cos^2 y + \mathrm{sen}^2 y)} \\
&= e^x \\
|e^z| &= e^{\mathrm{Re}(z)}
\end{aligned}$$

vi) Note que

$$\begin{aligned}
&e^z = 1 \Leftrightarrow e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen} y) = 1 \\
&\Leftrightarrow e^x \cos y + i\,(e^x\,\mathrm{sen} y) = 1 + 0i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x\,\mathrm{sen} y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sen} y = 0 \Leftrightarrow y = 2k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } y = \alpha\pi, \alpha \text{ í mpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Temos $e^x \cos y = 1$. Não ocorre $y = \alpha\pi, \alpha$ ímpar.
Pois nesse caso, $\cos y = -1 \Rightarrow -e^x = 1$, absurdo.
Logo, $y = 2k\pi \Rightarrow \cos y = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.
Então, $z = \underbrace{x}_{0} + i \underbrace{y}_{2k\pi}, z = 2k\pi i.$

■

1.7 Conjuntos de Pontos no Plano

Definição 1.14 Seja $r \in \mathbb{Z}, r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. A **bola aberta** com centro z_0 e raio r é o conjunto

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

de todos os números complexos cuja distância a z_0 é menor do que r.

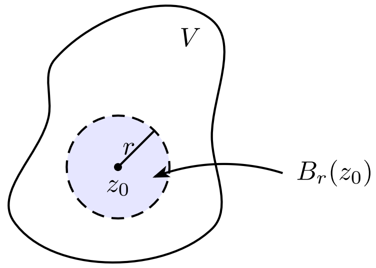


Figura 1.5: Bola aberta e vizinhança.

Definição 1.15 A **bola fechada** com centro z_0 e raio r é o conjunto

$$B_r[z_0] = \overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$$

que inclui a fronteira, isto é, o círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Definição 1.16 Uma **vizinhança** de $z_0 \in \mathbb{C}$ é um conjunto $V \subset \mathbb{C}$ que contém uma bola de centro z_0.

Exemplo 1.6 $B_r(z_0)$ é vizinhança de z_0 e $\overline{B_r(z_0)}$ tambem é vizinhança de z_0.

Definição 1.17 Dizemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é um **ponto interior** de $\Omega \in \mathbb{C}$ se Ω é vizinhança de z_0. Ou seja, existe uma bola aberta de centro z_0 contida em Ω.

$$\text{interior de } A : \operatorname{int} A = \{z \in \mathbb{C}; \exists r > 0 : D_r(z) \subset A\}$$

Definição 1.18 Dizemos que Ω é um conjunto **aberto**, se todos os seus pontos são interiores.

Proposição 1.19 *Uma bola aberta $B_r(z_0)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração:
Precisamos provar que dado $\omega \in B_r(z_0)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\omega) \subset B_r(z_0)$.
Seja $z \in B_\varepsilon(\omega)$. Provar que $z \in B_r(z_0)$, ou seja, $|z - z_0| < r$.

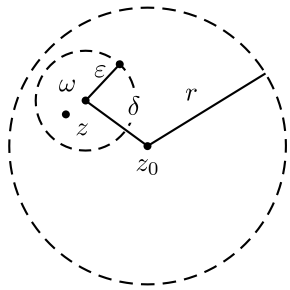


Figura 1.6

Seja $B_\varepsilon(\omega)$ (Fig. 1.6).
Seja $\delta = |\omega - z_0|$, então $\delta < r$.

Então, $|z - z_0| = |z - \omega + \omega - z_0| \leqslant |z - \omega| + |\omega - z_0|$.
Seja $\varepsilon < r - \delta$. Então,

$$\underbrace{|z-\omega|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|\omega - z_0|}_{=\delta} < \varepsilon + \delta < r - \delta + \delta = r$$
$$\Rightarrow |z - z_0| < r$$

Portanto, $z \in B_r(z_0)$. ■

Definição 1.20 Seja $F \subset \mathbb{C}$. Dizemos que F é **fechado** se, e somente se, o seu complemento $F \backslash \mathbb{C}$ for aberto. Ou seja, $F \backslash \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}; z \notin F\}$.

Exemplo 1.7 Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 3 \leqslant |z| < 5\}$.

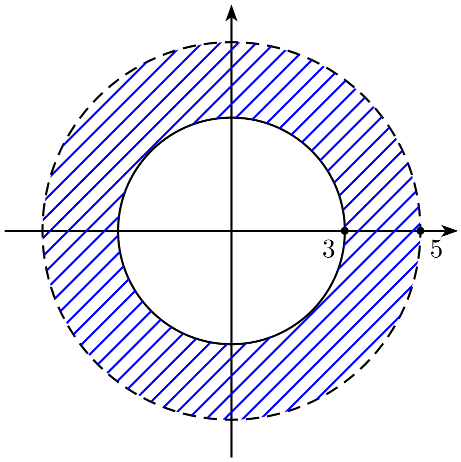


Figura 1.7: Ω não é aberto e nem fechado.

Definição 1.21 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$. A **fronteira** de Ω é o conjunto $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}$:toda bola com centro z intercepta Ω e $\Omega\backslash\mathbb{C}$, ou seja, $z \in \partial\Omega \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(z) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $B_r(z) \cap \Omega\backslash\mathbb{C} \neq \emptyset$.

Exemplo 1.8 Um ponto de Ω *pode ou não* pertencer a $\partial\Omega$. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 3 \leqslant |z| < 5\}$.
Note que $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3$ ou $|z| = 5\}$, então $\partial\Omega \not\subset \Omega$.

Notação:
$\overset{\circ}{\Omega}$ = interior de Ω;
Ω aberto $\Leftrightarrow \overset{\circ}{\Omega} = \Omega$;
$\widehat{\Omega}$ = exterior de Ω = { pontos interiores de $\Omega\backslash\mathbb{C}$};
$\mathbb{C} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega \cup \widehat{\Omega}$;
$\overline{\Omega}$ = fecho de $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$.

Conjuntos Conexos

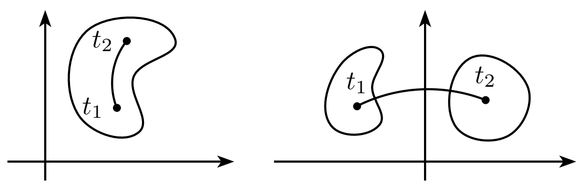
Definição 1.22 Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **conexo** se para quaisquer dois pontos z_1 e z_2 em Ω, existir uma aplicação $\varphi : [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(t_1) = z_1, \varphi(t_2) = z_2 \text{ e } \varphi(t) \in \Omega, \forall t \in (t_1, t_2),$$

e ainda, $\varphi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, com α e β contínuas em $[t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.

Definição 1.23 Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **limitado** se existe um número real $M > 0$ tal que $|z| \leqslant M, \forall z \in \Omega$. Ou seja, $\exists M > 0$ tal que $B_M[0] \supset \Omega$.

Definição 1.24 Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **compacto** se é limitado e fechado.



(a) Conjunto conexo. (b) Conjunto desconexo.

Figura 1.8: Conjuntos conexo e desconexo.

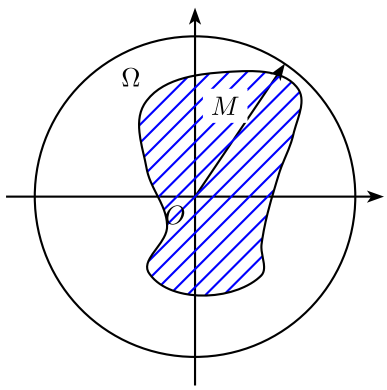


Figura 1.9: Ω é limitado.

Bola aberta em representação polar

$$\begin{aligned} &|\omega| = r \\ &\omega = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) \\ &\omega = re^{i\theta} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = z_0 + re^{i\theta}} \tag{1.9}$$

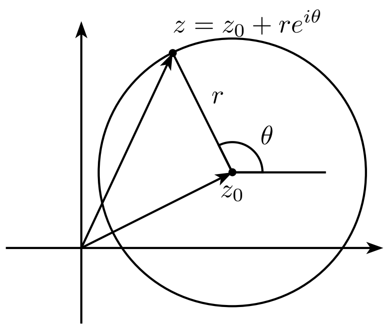


Figura 1.10: Fronteira da bola $B_r(z_0)$.

Parametrização da Reta

A parametrização do segmento de reta $\overline{\alpha\beta}$ é $\gamma(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t$.
Note que $\gamma(0) = \alpha$ e $\gamma(1) = \beta$.

Exemplo 1.9 Descreva $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(z^2\right) < 0\right\}$
Seja $z = x + iy, \mathrm{Re}(z) = x$.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \\
&\mathrm{Re}(z^2) < 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 < 0 \\
&\Leftrightarrow y^2 - x^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow (y-x)(y+x) > 0 \\
&\begin{cases} y - x > 0 \text{ e } y + x > 0 \text{ ou} \\ y - x < 0 \text{ e } y + x < 0 \end{cases} \\
&\begin{cases} y > x \text{ e } y > -x \text{ ou} \\ y < x \text{ e } y < -x \end{cases} \\
&\begin{cases} |y| > x \text{ ou} \\ |y| < x \end{cases}
\end{aligned}
$$

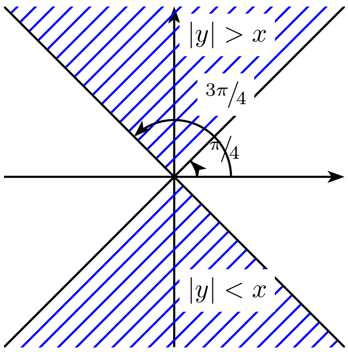


Figura 1.11

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ z = re^{i\theta} : {}^{\pi}/_4 < \theta < {}^{3\pi}/_4 \right\} \\
\Omega_2 &= \left\{ z = re^{i\theta} : {}^{-3\pi}/_4 < \theta < {}^{-\pi}/_4 \right\}
\end{aligned}
$$

1.8 Exercícios Propostos

1.3 Mostre que Ω é aberto $\Leftrightarrow \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Solução:
$\Rightarrow$) Suponha Ω aberto. Dado $z_0 \in \Omega, \exists r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset \Omega \Rightarrow B_r(z_0) \cap \Omega \backslash \mathbb{C} = \emptyset$.
Implica $z_0 \notin \partial\Omega \Rightarrow \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$.
$\Leftarrow$) Suponha $\Omega \cap \partial\Omega \Rightarrow \exists x \in \Omega$ e $x \in \partial\Omega$.
$\Rightarrow \forall r > 0, B_r(x) \cap \Omega \backslash \mathbb{C} \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall r > 0, B_r(x) \not\subset \Omega$.
Portanto, Ω não é aberto. (Contradiz com a definição de aberto). $\square$

1.4 Mostre que Ω é fechado $\Leftrightarrow \Omega = \overline{\Omega}$.

Capítulo 2

Funções Analíticas

2.1 Funções de uma Variável Complexa

Introdução

Iremos estudar funções do tipo $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

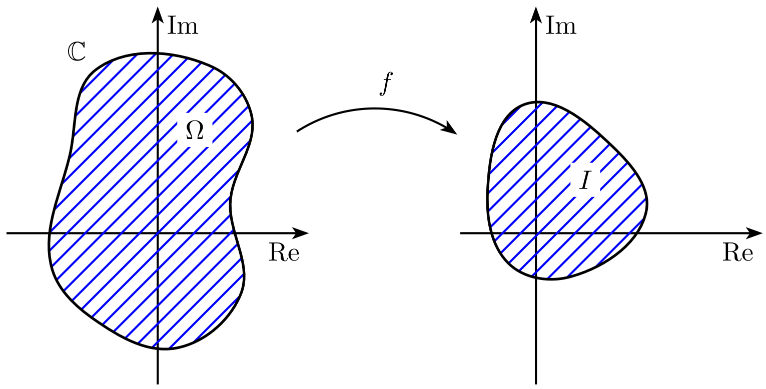


Figura 2.1

$\Omega = D(f) =$ domínio de f.
$I = \text{Im}(f) = \{f(z) : z \in \Omega\}$
Notação: $\omega = f(z)$ chamamos de *função complexa* ou *função de uma variável complexa*.

Exemplo 2.1 $f(z) = \dfrac{3z - 5i}{(z - i)(z + 7)}$ não está específico o domínio de f.

Convencionamos então que o domínio de f é o conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que f esteja bem definida para todo $z \in \Omega$.

Neste caso, o domínio de f é $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i \text{ e } z \neq -7\}$.

Funções Associadas

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\omega = f(z)$. $z = x + iy$, então $\omega = f(x + iy)$, e ainda,

$$\omega = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

onde u, v podem ser vistas como funções de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$. E $u(x, y) = \text{Re}(f(z))$ é a parte real de f e $v(x, y) = \text{Im}(f(z))$ é a parte imaginária de f.

Exemplo 2.2 Seja $f(z) = z^2 + 3z - 5$.

Solução:
Seja $z = x + iy$. Então

$$\begin{aligned}
f(z) = f(x+iy) &= (x+iy)^2 + 3(x+iy) - 5 \\
&= x^2 - y^2 + 2ixy + 3x + 3iy - 5 \\
\Rightarrow f(x+iy) &= x^2 - y^2 + 3x - 5 + i(2xy + 3y) \\
&\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x - 5 \\ v(x,y) = 2xy + 3y \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.3 Seja $f(z) = \exp(z^2 + 4z)$.

Solução:
Seja $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
&f(z) = f(x+iy) = \exp(x^2 - y^2 + 4x + i(2xy + 4y)) \\
&z^2 + 4z = (x+iy)^2 + 4(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy + 4x + 4iy \\
&= e^{x^2-y^2+4x}.\,(\cos(2xy+4y) + i\,\text{sen}(2xy+4y)) \\
&= \underbrace{e^{x^2-y^2+4x}\cos(2xy+4y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(e^{x^2-y^2+4x}\,\text{sen}(2xy+4y)\right)}_{v(x,y)}
\end{aligned}$$

□

Obs: A imagem de uma função complexa pode ser toda de números reais.

Exemplo 2.4 Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tal que $f(z) = |z|$. Esta é a **função módulo**. Note que para $z = x + iy$, temos

$$f(z) = f(x+iy) = |x+iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

se $y = 0, f(z) = f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Definição 2.1 Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. A **função conjugada** é a função dada por

$$\overline{f}(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$$

Definição 2.2 Sejam f e g funções complexas e seja $D_1 = D(f)$ o domínio de f e $D_2 = D(g)$ o domínio de g.

Definimos

i) $(f \pm g)(z) = f(z) \pm g(z)$

ii) $(fg)(z) = f(z)g(z)$

Note que é o produto de números complexos.

iii) Se $g(z) \neq 0, \forall z \in D(g)$, então $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$.

O domínio de $f \pm g$ e fg é $D_1 \cap D_2$ e o domínio de $\dfrac{f}{g} = D_1 \cap \Omega$, onde $\Omega = \{z \in D_2 : f_2(z) \neq 0\}$

Definição 2.3 Seja $f : \Omega \subset\to \mathbb{C}$. Dizemos que f é uma *função limitada* em Ω se existe um número real $M > 0$ tal que $|f(z)| \leqslant M, \forall z \in \Omega$.

2.2 Limite e Continuidade

Definição 2.4 (ponto de acumulação) Dizemos que um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é o ponto de acumulação de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se qualquer vizinhança de z_0 contiver infinitos pontos de Ω.

Obs: $\Omega \cup \{\text{pontos de acumulação de } \Omega\} = \overline{\Omega}$ (fecho)

Definição 2.5 (limite) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ e z_0 um ponto de acumulação de Ω. Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tem limite L quando z tende a z_0 se dado $\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta_{z_0}(\varepsilon)$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, ou seja, $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$.
Ainda, $z \in \Omega \cap V'_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\varepsilon(L)$.

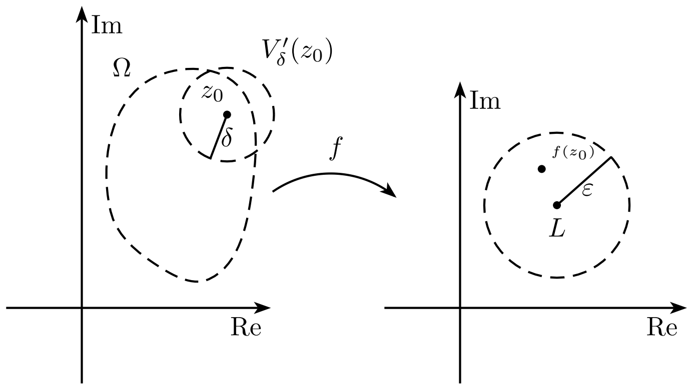


Figura 2.2

Notação: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$.

Exemplo 2.5 Seja $f(z) = \dfrac{z + 3i}{2}$ e $z_0 = 2 - i$. Então, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = i + 1$.

Solução:
Rascunho

$$|f(z) - L| = \left|\frac{z + 3i}{2} - (i + 1)\right| = \left|\frac{z - (2 - i)}{2}\right|$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos $\delta = 2\varepsilon$.
Assim, $0 < |z - (2 - i)| < \delta = 2\varepsilon$, temos

$$\left|\frac{z - (2 - i)}{2}\right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

□

Definição 2.6 (Continuidade) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é *contínua* em z_0 se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Exemplo 2.6 Seja $f(z) = \dfrac{z + 3i}{2}$ e $z_0 = 2 - i$.

Solução:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 1 + i$$
$$f(z_0) = f(2 - i) = \frac{(2 - i) + 3i}{2} = \frac{2i + 2}{2} = i + 1$$

Logo, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ou seja, f é contínua em z_0. □

Exemplo 2.7 Verifique se $g(z)$ é contínua, onde

$$g(z) = \begin{cases} 0 & , \text{se } z = 2 - i \\ \dfrac{z+3i}{2} & , \text{se } z \neq 2 - i \end{cases}$$

Solução:

$$\lim_{z \to 2-i} g(z) = 1 + i \neq 0 = g(2-i)$$

Logo, g não é contínua em $2 - i$. □

Exemplo 2.8 Mostre que $\lim\limits_{z \to 2i} (z^2 + 3z) = -4 + 6i$

Solução:
Rascunho

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |z^2 + 3z - (-4 + 6i)| \\ &= |z^2 + 3z + 4 - 6i| \\ &= |z^2 + 4 + 3(z - 2i)| \\ &= |(z - 2i)(z + 2i) + 3(z - 2i)| \\ &= |(z - 2i)(z + 2i + 3)| \\ &= |z - 2i||z + 2i + 3| \leqslant |z - 2i| \left(|z| + |2i| + 3\right) \\ &\Rightarrow |z - 2i| \left(|z| + 5\right) < |z - 2i|(3 + 5) \end{aligned}$$

Podemos assumir que $|z| < 3$.
Logo, $|z^2 + 3z - (-4 + 6i)| < 8|z - 2i|$.
Resolvendo o exercício temos.
Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \min\{\varepsilon/8, 1\}$. Então, $0 < |z - 2i| < \delta \leqslant \varepsilon/8$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 < 8|z - 2i| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 0 < |z^2 + 3z - (-4 + 6i)| < 8|z - 2i| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

Resta mostrar que $|z| < 3$, para o δ escolhido

$$\begin{aligned} &|z| = |z - 2i + 2i| \leqslant |z - 2i| + 2 < \delta + 2 \leqslant 1 + 2 \\ &\Rightarrow |z| < 3 \end{aligned}$$

□

Definição 2.7 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dizemos que L é o limite de $f(z)$ quando z tende a infinito, se dado $\varepsilon > 0$, existe um número real $M > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon, \forall z \in \Omega$ tal que $|z| > M$.

Notação: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = L$

Definição 2.8 Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dizemos que o limite de $f(z)$ é infinito quando z tende para z_0 se dado $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > K, \forall z \in \Omega \cap B_\delta(z_0)$.

Dizemos que o limite de $f(z)$ é infinito quando z tende a infinito se dado $K > 0, \exists M > 0$ tal que $|f(z)| > K, \forall z \in \Omega$ tal que $|z| > M$.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \text{ e } \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

Teorema 2.9 *Sejam $f = u + iv$ com domínio $D \subset \mathbb{C}$ e $L = a + bi$. Então $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ se, e somente se,*

$$\lim_{z\to z_0} u(z) = a \ e \ \lim_{z\to z_0} v(z) = b.$$

Isto significa que se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} u(x, y) + i \lim_{z\to z_0} v(x, y)$$

quando tais limites existirem.

Demonstração:
$\Rightarrow$) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L = a + bi$.
Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$.
Fazendo $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, obtemos

$$\begin{aligned} &|u(x, y) + iv(x, y) - a - bi| < \varepsilon \\ \Rightarrow &|\underbrace{u(x, y) - a}_{\mathrm{Re}(f(z)-L)} + i\underbrace{(v(x, y) - b)}_{\mathrm{Im}(f(z)-L)}| < \varepsilon \end{aligned}$$

Lembrando que $|\operatorname{Im}(z)| < |z|$ e $|\operatorname{Re}(z)| < |z|$, temos

$$\begin{cases} |u(x, y) - a| < |f(x) - L| < \varepsilon \\ |v(x, y) - b| < |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} u(x, y) = a \text{ e } \lim_{z\to z_0} v(x, y) = b.$$

$\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $z = x + iy$ e $L = a + bi$, temos

$$\begin{aligned} |f(z) - L| &= |u(x, y) + iv(x, y) - a - bi| \\ &= |u(x, y) - a + i(v(x, y) - b)| \\ &\leqslant |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{z\to z_0} f(z) = L = a + bi$. ■

Corolário 2.10 *A função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua no ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D(f)$ se, e somente se, $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em z_0.*

Demonstração:
$f(z)$ é contínua em $z_0 \in D(f) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.
Pelo Teo. 2.9 $\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ e $\lim_{z\to z_0} v(x, y) = v(x_0, y_0)$.
$\Leftrightarrow u(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0) e $v(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0). ■

Revisão sobre limites (reescrito)

Definição 2.11 Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. $\lim_{z\to\infty} f(z) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0, \exists M = M_\varepsilon > 0$ tal que $\forall z \in D$, com $|z| > M$, tivermos $|f(z) - L| < \varepsilon$.
2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow$ dado $K > 0, \exists \delta = \delta_K > 0$ tal que $\forall z \in D$ e $|z - z_0| < \delta$, tivermos $|f(z)| > K$.
3. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow$ dado $K > 0, \exists M = M_K > 0$ tal que $\forall z \in D$ e $|z| > M$, tivermos $|f(z)| > K$.

Resultados que serão usados.

a) Desigualdade triangular inversa: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$.

b) Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $|z_1| > |z_2|$, então

i) $|z_1| - |z_2| < |z_1 + z_2|$

ii) $\dfrac{1}{|z_1| - |z_2|} > \dfrac{1}{|z_1 + z_2|}$

Exemplo 2.9 Mostre que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \dfrac{3i}{2}$, onde $f(z) = \dfrac{3iz+5}{2z-i}$.

Solução:
Afirmação: Se $|z| > \dfrac{1}{2}$, então $|f(z) - \dfrac{3i}{2}| < \dfrac{7}{2(2|z|-1)}$. De fato,

$$\left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| = \left|\frac{3iz+5}{2z-i} - \frac{3i}{2}\right| = \left|\frac{6iz + 10 - 6iz - 3}{2|2z-i|}\right| = \frac{7}{2|2z-i|}$$

Como $|z| > 1/2$, temos $2|z| > 1$, ou seja, $|2z| > |i|$. Por $(b.ii)$, $\dfrac{7}{2|2z-i|} < \dfrac{7}{2(2|z|-1)}$.

Obs: $\dfrac{7}{2(2|z|-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{2(2|z|-1)}{7} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2|z| - 1 > \dfrac{7}{2\varepsilon} \Leftrightarrow |z| > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{2\varepsilon} + 1\right)$.

Então, pela definiçao (1), dado $\varepsilon > 0$ precisamos encontrar $M > 0$ tal que se $z \in D$ e $|z| > M$, então $|f(z) - L| < \varepsilon$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomemos

$$\max\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1\right), \frac{1}{2}\right)$$

e $z \in D$ tal que $|z| > M$.
Então $|z| > 1/2$. Pela afirmação, temos

$$\left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| < \frac{7}{2(2|z|-1)}.$$

Pela escolha de M, temos

$$|z| > \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1\right).$$

Mas pela observação, temos

$$\frac{7}{2(2|z|-1)} < \varepsilon.$$

Então,

$$\left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{3iz+5}{2z-i} = \dfrac{3i}{2}$. □

Exemplo 2.10 Mostre que $\lim\limits_{z\to 4i} f(z) = \infty$, onde $f(z) = \dfrac{5z}{2z-8i}$.

Solução:
Note que $|f(z)| = \dfrac{5|z|}{2|z-4i|}$.
Se $|z| > r$, algum $r : 0 < r < 4$, então

$$\frac{5|z|}{2|z-4i|} > \frac{5r}{2|z-4i|}.$$

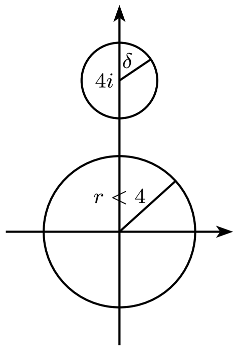


Figura 2.3

Observe que $\dfrac{5r}{2|z-4i|} > K \Leftrightarrow |z-4i| < \dfrac{5r}{2K}$.
Assim, dado $K > 0$, obter $\delta > 0$ tal que se $z \in D(f)$ e $|z-4i| < \delta$, tivermos $|f(z)| > K$.
Então, dado $K > 0$, tome

$$\delta = \min\left\{\frac{5r}{2K}, 4-r\right\}$$

e $z \in D(f)$ tal que $|z-4i| < \delta$.
Daí, $|z| = |z-4i+4i| \overset{(b.i)}{>} 4 - |z-4i| > 4-\delta > 4+r-4 = r$.
Pelo rascunho, $\dfrac{5r}{2|z-4i|} > K$.
Logo, $|f(z)| > K$. □

Exemplo 2.11 Mostre que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, onde $f(z) = \dfrac{z^2-i}{3z+5}$.

<u>Solução</u>:
Afirmação: Se $|z| > 5$, então $|f(z)| > \dfrac{1}{8}|z|$.
Dado $K > 0$, obter $M > 0$ tal que se $z \in D$ e $|z| > M$, então $|f(z)| > K$.
Assim, dado $K > 0$, tome $M = \max\{8K, 5\}$ e $z \in D$ tal que $|z| > M$. Logo, $|z| > 5$, pela afirmação $|f(z)| > \dfrac{1}{8}|z|$.
Também $|z| > 8K$, logo $|f(z)| > \dfrac{1}{8}|z| > \dfrac{1}{8}(8K) = K$.
Portanto, $|f(z)| > K$, sempre que $z \in D$ e $|z| > M = \max\{8K, 5\}$.

Resta demonstrar a afirmação.
Note que $|3z+5| \leqslant 3|z|+5 \Rightarrow \dfrac{1}{|3z+5|} \geqslant \dfrac{1}{3|z|+5}$, então

$$|f(z)| = \frac{|z^2-i|}{|3z+5|} \geqslant \frac{|z^2-i|}{3|z|+5} > \frac{|z^2-i|}{4|z|}$$

Sendo $|z| > 5$, temos $3|z|+5 < 3|z|+|z| = 4|z|$.

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{3|z|+5} > \frac{1}{4|z|}$$

usando a desigualdade triangular inversa

$$(**)|z^2-i| \geqslant ||z|^2-|i|| = |z|^2-1$$
$$\Rightarrow \frac{|z^2-i|}{4|z|} \geqslant \frac{|z|^2-1}{4|z|}$$

Note que $-1 > -\dfrac{|z|^2}{2} \Leftrightarrow -2 > -|z|^2 \Leftrightarrow 2 < |z|^2$.

$$\Rightarrow \frac{|z|^2-1}{4|z|} > \frac{|z|^2-\frac{|z|^2}{2}}{4|z|} = \frac{\frac{2|z|^2-|z|^2}{2}}{4|z|} = \frac{|z|^2}{8|z|} = \frac{1}{8}|z|$$

□

Exemplo 2.12 Mostre que $\lim\limits_{z\to 2-i} \frac{z+3i}{2} = 1+i$.

Solução:
Sejam $f(x) = \frac{z+3i}{2}$ e $z = x+iy$.

$$f(z) = \frac{x+iy+3i}{2} = \underbrace{\frac{x}{2}}_{U(x,y)} + \underbrace{\left(\frac{y+3}{2}\right)}_{V(x,y)} i$$

Note que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x}{2} = 1$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{y+3}{2}$.

□

Teorema 2.12 *Suponha* $a = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *e* $b = \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$, *com* a *e* b *finitos. Então.*

i) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = a+b$

ii) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z). \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = a.b$

iii) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} = \frac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração:

i) Sejam $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ e $g(x+iy) = \widetilde{u}(x,y)+i\widetilde{v}(x,y)$.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a = a_1 + ia_2 \text{ e } \lim_{z\to z_0} g(z) = b = b_1 + ib_2$$

Pelo 2.9, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = a_2$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \widetilde{u}(x,y) = b_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \widetilde{v}(x,y) = b_2$.
Lembrando do Cálculo, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{[u(x,y)+\widetilde{u}(x,y)]}_{\mathrm{Re}\,[f(z)+g(z)]} = a_1+b_1 \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{[v(x,y)+\widetilde{v}(x,y)]}_{\mathrm{Im}\,[f(z)+g(z)]} = a_2+b_2$$

Daí, $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = a_1+b_1+i(a_2+b_2) = a_1+ia_2+b_1+ib_2 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$.

■

Obs: Esta demonstração pode ser feita diretamente como no caso de funções do tipo $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Os outros itens ficam como exercício.

2.3 Funções Analíticas

Definição 2.13 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω aberto e conexo. Dado $z \in \Omega$, dizemos que f é *derivável* em z se existir o limite

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

se tal limite existir, denotamos

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

$f'(z)$ é a derivada de f no ponto z. Se $w - z = \Delta z$, quando w tende a z, Δz tende a zero, então

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Obs:

i) A derivada define uma nova função denominada "função derivada" $z \mapsto f'(z)$ com domínio igual a $\{z \in \Omega : \exists f'(z)\}$.

ii) O limite $\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ não depende do modo como w tende a z, isto é, da direção com que w tende a z.

Exemplo 2.13 Seja

$$f(z) = \begin{cases} \frac{[\mathrm{Re}(z)]^2}{\overline{z}} & , \text{se } z \neq 0 \\ 0 & , \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Se $z = x + iy, f(z) = \frac{x^2}{x - iy}$, qual o $\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$?
Se $z = 0$, então

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{f(w)}{w} = \frac{\frac{[\mathrm{Re}(w)]^2}{\overline{w}}}{w} = \frac{[\mathrm{Re}(w)]^2}{|w|^2}$$

Então, se $z = 0$

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to 0} \frac{[\mathrm{Re}(w)]^2}{|w|^2} = \lim_{x+iy \to 0+i0} \frac{x^2}{x\ 2 + y^2}, \text{ para } w = x + iy.$$

Temos, então, uma função real de duas variáveis, calculando o limite na direção de $(t, 0)$, temos

$$\lim_{x+iy \to 0+i0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e na direção de $(0, t)$, temos

$$\lim_{x+iy \to 0+i0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

como obtemos limites diferentes, então $f'(0)$ não existe.

Definição 2.14 Se f é derivável em todo $a \in D(f) = \Omega$, Ω aberto e conexo, então dizemos que f é *analítica* em Ω. Se f for analítica em $\Omega = \mathbb{C}$, então f é chamada função *inteira*.

Exemplo 2.14 Seja $f(z) = c, \forall z \in \mathbb{C}$ (constante.)
$\Rightarrow f$ inteira e $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{0}{\Delta z} = 0$$

Exemplo 2.15 Seja $f(z) = z^2, \forall z \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow f$ inteira e $f'(z) = 2z, \forall z \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

Teorema 2.15 *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é derivável em z_0, então f é contínua em z_0.*

Demonstração:
Queremos mostrar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0), \text{ ou seja, } \lim_{z\to z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$$

Temos que

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z - z_0)\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)\right] = \left(\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\right)\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) = 0.f'(z) = 0$$

Portanto, $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. ∎

Teorema 2.16 *Se f e g são funções deriváveis em $z \in \mathbb{C}$, então $f+g, fg, \frac{1}{g}$ (se $g(z) \neq 0$) são deriváveis em z e*

i) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

ii) $(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{[g(z)]^2}$

Teorema 2.17 (Regra da Cadeia) *Se g é derivável em $z \in \mathbb{C}$ e f derivável em $g(z)$, então $\frac{d}{dz}\left(f(g(z))\right) = f'\left(g(z)\right) g'(z)$.*

2.4 Condições de Cauchy-Riemann

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{C}$ e f derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, com $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Dizemos que f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, no ponto $x_0 + iy_0$, se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.1}$$

sendo estas derivadas parciais calculadas em (x_0, y_0).
Notação: $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$

Exemplo 2.16 Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(x + iy) = \underbrace{x^2 - xy - y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2}\right)}_{v(x,y)}$

As derivadas parciais são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2y; \frac{\partial v}{\partial x} = x + 2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Logo, f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em todo ponto de $\mathbb{C}$.
Lembrando o Cálculo, temos que se $g : U \to \mathbb{R}$, U aberto de $\mathbb{R}^2$. Então,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x + h, y) - g(x, y)}{h}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x, y + h) - g(x, y)}{h}$$

Teorema 2.18 *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, derivável em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, com $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Então,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Obs: A validade das condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0) é necessária para a diferenciabilidade de f em z_0.

Demonstração:

Da hipótese, existe $f'(z_0)$ e $f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$, com $h = h_1 + ih_2$.

Daí, existe o limite $h = k + 0i$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{u(x_0+k,y_0)+iv(x_0+k,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{k} =$$

pois $f(z_0+k) = f(x_0+iy_0+k) = f(x_0+k+iy_0) = u(x_0+k,y_0)+iv(x_0+k,y_0)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{u(x_0+k,y_0)-u(x_0,y_0)}{k} + i \lim_{k\to 0} \frac{v(x_0+k,y_0)-v(x_0,y_0)}{k} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Também existe, e é igual a $f'(z_0)$, o limite $(*)\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(z_0+ti)-f(z_0)}{ti}$, com $h = 0 + ti$.

$$f(z_0+ti) = f(x_0+iy_0+it) = u(x_0,y_0+t)+iv(x_0,y_0+t)$$

substituindo, temos que $(*)$ é igual a

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)+iv(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{ti} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{i\,(v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0))}{ti} + \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{ti} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t} - i \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Conclusão: $f'(z_0) = u_x + iv_x$ e $f'(z_0) = v_y - iu_y$, então $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$. ∎

Exemplo 2.17 Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica em Ω (aberto), $f(x+iy) = x^2 - xy - y^2 + iv(x,y)$.
Para quais funções $v = v(x,y)$, f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann?

Solução:
Temos que $u(x,y) = x^2 - xy - y^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x - y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy - \frac{y^2}{2} + k(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -x-2y = -(2y + k'(x))$$

$$\Rightarrow k'(x) = x$$

$$\Rightarrow \int k'(x)dx = \int xdx$$

$$\Rightarrow k(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + c$$

□

Obs: As condições de Cauchy-Riemann não são suficientes para a diferenciabilidade.

Exemplo 2.18 Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sqrt{|xy|}$, onde $z = x + yi$.

Note que $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ e $v(x,y) = 0$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

E, no ponto $z_0 = 0 + 0i$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)}{h} = 0$$

Analogamente

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$$

Logo, $u_x(0,0) = 0 = v_y(0,0) = 0$ e $u_y(0,0) = 0 = -0 = -v_x(0,0)$.
Portanto, satisfaz as condições de Cauchy-Riemann.

Além disso, $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$. Mas f não é derivável em $z_0 = 0 + 0i$: $h = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Mas $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{\sqrt{|r\cos\theta . r\,\mathrm{sen}\theta|}}{re^{i\theta}} = \dfrac{r\sqrt{\cos\theta .\,\mathrm{sen}\theta}}{re^{i\theta}}$
O limite depende de θ. Não existe tal limite...
Por outro lado

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$h = x + ix \to \lim_{x\to 0} \frac{f(x+ix)}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x.x|}}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-ix)}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Por L_2, o limite será $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$. $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} \Rightarrow \nexists f'(0)$.

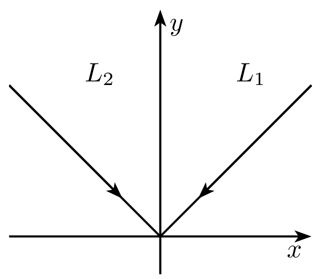


Figura 2.4

Obs: Da demonstração do último teorema obtemos $(*) f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ e $(**) f'(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0)$ donde concluímos as condições de Cauchy-Riemann.

A expressão $(*)$ é definida como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ e podemos definir $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0)$.
Assim, sendo f derivável em z, obtemos

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)}$$

2.4.1 Revisão de Cálculo

Teorema 2.19 (do Valor Médio) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Corolário 2.20 *Se f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), e $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, então f é constante em $[a,b]$.*

Teorema 2.21 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ tal que u_x, u_y, v_x, v_y existam para todo ponto de Ω. Se u_x, u_y, v_x, v_y são contínuas em $z_0 \in \Omega$ e valem as condições de Cauchy-Riemann em z_0, então f é derivável em z_0.*

Demonstração:
Seja $c = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = a + bi$. Logo, $a = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ e $b = \dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0)$.
Vamos mostrar que $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right) = 0$.
Como Ω é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega, z_0 = x_0 + iy_0$.

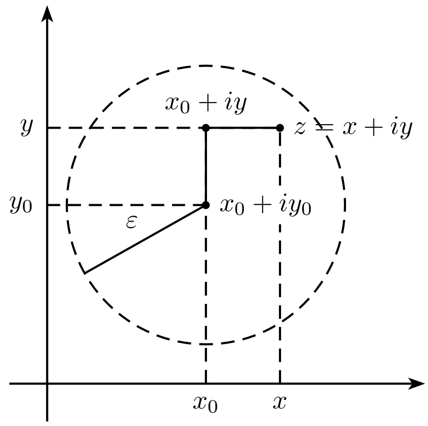


Figura 2.5

Seja $z = x + iy \in B_\varepsilon(z_0)$.
I_1 = segmento que une $x_0 + iy$ a $x + iy = z$.
I_2 = segmento que une $x_0 + iy$ a $x_0 + iy_0 = z_0$.
Sobre I_1, u e v são funções contínuas na variável x, ou seja, $I_1 \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto u(x,y)$ e $x \mapsto v(x,y)$ cujas derivadas são, respectivamente, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.
Pelo TVM, existem α_z e β_z tal que

$$u(x,y) - u(x_0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha_z)(x - x_0) \text{ e} \tag{2.2}$$

$$v(x,y) - v(x_0,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(\beta_z)(x - x_0) \tag{2.3}$$

Sobre I_2, u e v são contínuas na variável y com derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$. E

$$u(x_0,y) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(\gamma_z)(y - y_0) \tag{2.4}$$

$$v(x_0,y) - v(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(\delta_z)(y - y_0) \tag{2.5}$$

Note que

$$u(z) - u(z_0) \overset{2.2}{=} (u(x,y) - u(x_0,y)) + (u(x_0,y) - u(x_0,y_0)) \overset{2.4}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha_z)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(\gamma_z)(y - y_0)$$

$$v(z)-v(z_0)\overset{2.3}{=}(v(x,y)-v(x_0,y))+(v(x_0,y)-v(x_0,y_0))\overset{2.5}{=}\frac{\partial v}{\partial x}(\beta_z)(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(\delta_z)(y-y_0)$$

$$\begin{aligned}
&f(z)-f(z_0)=u(z)-u(z_0)+i\,(v(z)-v(z_0))\\
&f(z)-f(z_0)-\underbrace{(a+bi)}_{c}(z-z_0)=u(z)-u(z_0)+i\,(v(z)-v(z_0))-(a+bi)(z-z_0)\\
&=u_x(\alpha_z)(x-x_0)+u_y(\gamma_z)(y-y_0)+i\,(v_x(\beta_z)(x-x_0)+v_y(\delta_z)(y-y_0))-(u_x(z_0)+v_x(z_0)i)\,(x+iy-x_0-iy_0)\\
&=(x-x_0)\,(u_x(\alpha_z)-u_x(z_0)+i\,(v_x(\beta_z)-v_x(z_0)))+(y-y_0)\,(u_y(\gamma_z)-u_y(z_0)+i\,(v_y(\delta_z)-v_y(z_0)))
\end{aligned}$$

Divida tudo por $z-z_0$ e coloque tudo no módulo. ■

Exemplos de funções inteiras

Exemplo 2.19 Seja $\omega:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\omega(z)=e^z, z=x+iy$.

$$e^z:=e^x.e^{iy}=e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)=\underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{(e^x\,\text{sen}y)}_{v(x,y)}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&u_x=e^x\cos y\\
&u_y=-e^x\,\text{sen}y\\
&v_x=e^x\,\text{sen}y\\
&v_y=e^x\cos y\\
&\Rightarrow u_x=v_y \text{ e } u_y=-v_x
\end{aligned}$$

Ainda, todas estas derivadas parciais são contínuas (pois são produto de funções contínuas). Utilizando o Teorema anterior, como as derivadas parciais são contínuas e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em todo ponto de $\mathbb{C}$, concluímos que $\omega(z)=e^z$ é derivável em todo ponto de $\mathbb{C}$. Já vimos (a partir da definição de derivada num ponto) que $\omega'(z)=e^z=\omega(z),\forall z\in\mathbb{C}$.

Vimos ainda que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\omega)=\omega'(z)=\frac{\partial\omega}{\partial x}(z) &= u_x(z)+iv_x(z)\\
&= e^x\cos y+ie^x\,\text{sen}y\\
&= e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)\\
&= e^x.e^{iy}\\
&= e^z
\end{aligned}$$

Obs: Em $\mathbb{R}$ a função exponencial é injetora, logo $e^x=e^y\Rightarrow x=y$.
Mas em $\mathbb{C}$, pode ocorrer $e^z=e^w$, com $z\neq w$. Por exemplo, $e^0=1$ e $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+\underbrace{i\,\text{sen}2\pi}_{0}=1$.

Proposição 2.22 *$e^z=e^w\Leftrightarrow z=w+i2k\pi$, para algum $k\in\mathbb{Z}$.*

Demonstração:
Sejam $z=x+iy$ e $w=a+ib$.

$$\begin{aligned}
&e^z=e^w\\
&\Leftrightarrow e^{x+iy}=e^{a+ib}\\
&\Leftrightarrow e^x.e^{iy}=e^a.e^{ib}\\
&\Leftrightarrow e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)=e^a(\cos b+i\,\text{sen}b)\\
&\Leftrightarrow\begin{cases} e^x\cos y=e^a\cos b\\ e^x\,\text{sen}y=e^a\,\text{sen}b\end{cases}
\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$ $e^x = e^a \overset{\mathbb{R}}{\Rightarrow} \boxed{x = a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos y = \cos b \\ \text{sen} y = \text{sen} b \end{cases}$$

$$y = b + 2k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= x + iy \\ &= a + i(b + 2k\pi) \\ &= a + ib + i2k\pi \\ &= w + i2k\pi \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ $z = w + i2k\pi$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x + iy = a + ib + i2k\pi \\ &\Rightarrow e^{x+iy} = e^{a+i(b+2k\pi)} \\ &\Rightarrow e^z = e^a(\cos(b + 2k\pi) + i\,\text{sen}(b + 2k\pi)) \\ &\Rightarrow e^z = e^a(\cos b + i\,\text{sen} b) \\ &\Rightarrow e^z = e^w \end{aligned}$$

■

Lema 2.23 $e^{z+w} = e^z.e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Demonstração:
Sejam $z = x + iy$ e $w = a + ib$.

$$\begin{aligned} e^z.e^w &= e^{(x+iy)}.e^{(a+ib)} \\ &= e^x(\cos y + i\,\text{sen} y).e^a(\cos b + i\,\text{sen} b) \\ &= e^{x+a}\,(\cos y \cos b - \text{sen} y\,\text{sen} b + i(\text{sen} y \cos b + \text{sen} b \cos y)) \\ &= e^{x+a}\,(\cos(y + b) + i\,\text{sen}(y + b)) \\ e^z e^w &= e^{z+w} \end{aligned}$$

■

Obs: Seja $\omega(z) = e^z$. $x + iy \mapsto \omega = u + iv$.
$\omega = e^z = e^x.e^{iy}$, coord. polares, $\omega = \rho e^{i\theta}, \rho = e^x$ e $\theta = y$.
x varia de 0 a $+\infty \Rightarrow e^x$ varia de 1 a $+\infty$.
x varia de 0 a $-\infty \Rightarrow e^x$ varia de 1 a 0, exceto 0.

2.5 Funções Trigonométricas

Lembre: $\forall y \in \mathbb{R}, e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen} y, e^{-iy} = \cos y - i\,\text{sen} y, \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ e $\text{sen} y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$.
Define-se: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $\text{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ funções trigonométricas complexas.

$$\text{tg} z = \frac{\text{sen} z}{\cos z}, \cos z \neq 0$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \cos z \neq 0$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\text{sen} z}, \text{ sen} z \neq 0$$

$$\csc z = \frac{1}{\text{sen} z}, \text{ sen} z \neq 0$$

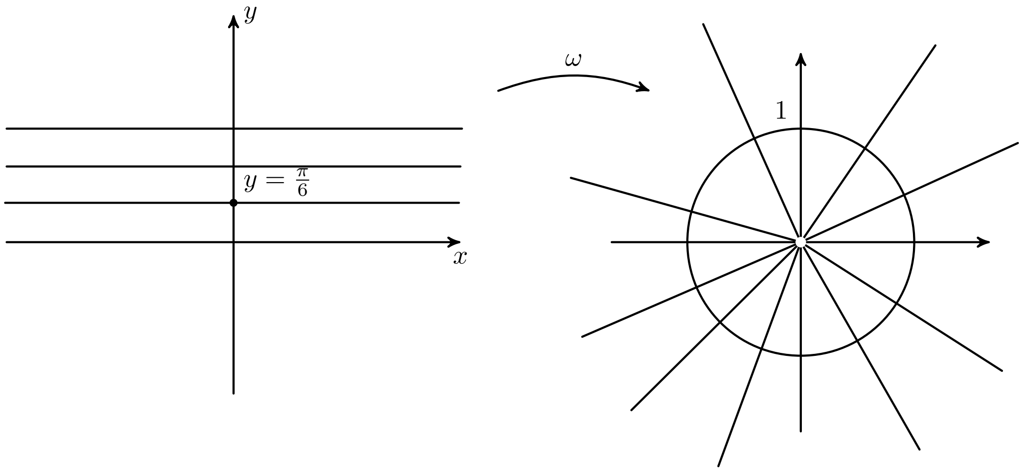


Figura 2.6

Proposição 2.24 $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:
Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\cos z = \cos(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)}{2} \\
&= \cos x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right) \\
&= \cos x\cosh y - i\operatorname{sen} x\sinh y \\
&\Rightarrow \cos z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\cosh y = 0 \\ \operatorname{sen} x\sinh y = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x\sinh y = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ ou } \sinh y = 0 \\ \cos x\underbrace{\cosh y}_{>0} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi}, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $\sinh y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$. $\Rightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ ■

2.6 Logaritmos

Definição 2.25 Dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é um *logaritmo* de $z \in \mathbb{C}$ quando $e^{w} = z$.

Sabemos que $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$.
Considere $\theta = Arg(z), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
Seja $\arg(Z) = \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Temos que $z = re^{i\gamma}, \forall\gamma \in \arg(z)$.
De fato, $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, como $r = \theta + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned}
z &= r\left(\cos(\theta + 2k\pi) + i\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)\right) \\
z &= r(\cos\gamma + i\operatorname{sen}\gamma) \\
z &= re^{i\gamma}
\end{aligned}$$

Lema 2.26 *$w \in \mathbb{C}$ é logaritmo de $z \in \mathbb{C}$ se, e somente se,* $w = \{\ln|z| + i\theta : \theta \in \arg(z)\}$.

Demonstração:
($\Rightarrow$) Seja $w = a + ib$, com w um logaritmo de z.

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ z = e^{w} = e^{a}.e^{ib} \end{cases}$$
$$\Rightarrow re^{i\theta} = e^{a}.e^{ib}$$
$$\Rightarrow e^{a} = r = |z| \text{e } \boxed{b = \theta}$$
$$\Rightarrow \ln e^{a} = \ln|z|$$
$$\Rightarrow \boxed{a = \ln|z|}$$
$$\Rightarrow w = \ln|z| + \theta i$$

($\Leftarrow$) Se $w = \ln|z| + i\theta$, para algum $\theta \in \arg(z)$, então

$$\begin{aligned} e^{w} &= e^{\ln|z| + i\theta} \\ e^{w} &= e^{\ln|z|}.e^{i\theta} \\ e^{w} &= |z|.e^{i\theta} \\ e^{w} &= z \end{aligned}$$

■

Definição 2.27 Definimos $\log z = \{\ln|z| + i\theta : \theta \in \arg(z)\}$, onde $\arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
Assim, $\log z = \{\ln|z| + i\,(Arg(z) + 2k\pi)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.
Tomando $k = 0$, obtem-se a definição da função logarítmica em Z:

$$\boxed{Logz := \ln|z| + iArg(z)} \tag{2.6}$$

$$\log z = \{Logz + i2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 2.20

$$\begin{aligned} &-1 = 1(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi) = e^{i\pi} \\ &\Rightarrow Log(-1) = i\pi \end{aligned}$$

Exemplo 2.21

$$\begin{aligned} &i = 1(\cos{}^{\pi}/_{2} + i\,\text{sen}{}^{\pi}/_{2}) = e^{i\pi/2} \\ &\Rightarrow Log(i) = \underbrace{\ln|z|}_{0} + i\frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 2.22

$$\begin{aligned} &1 + i = \sqrt{2}\,(\cos{}^{\pi}/_{4} + i\,\text{sen}{}^{\pi}/_{4}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ &\Rightarrow Log(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Proposição 2.28 *Sejam* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Então*

i) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

ii) $\log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2, z_2 \neq 0$

iii) $\log\left(z_1^{m}\right) = m\log z_1, \forall m \in \mathbb{Z}$

onde $\log z_1 + \log z_2 = \{a + b; a \in \log z_1; b \in \log z_2\}$ *e* $m\log z_1 = \{m\alpha; \alpha \in \log z_1\}$.

Demonstração:

i) Seja $w \in \log z_1 + \log z_2$, então $w = w_1 + w_2, w_1 \in \log z_1$ e $w_2 \in \log z_2$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^w = e^{w_1+w_2} = e^{w_1}.e^{w_2} = z_1 z_2 \\ &\Rightarrow w \in \log(z_1 z_2). \end{aligned}$$

Seja $w \in \log(z_1 z_2)$, então $w = Log|z_1 z_2| + i\theta$, para algum $\theta \in \arg(z_1 z_2)$.
$\theta \in \arg(z_1 z_2) \Rightarrow \theta = \theta_1 + \theta_2$, com $\theta_1 \in \arg(z_1)$ e $\theta_2 \in \arg(z_2)$. Então,

$$\begin{aligned} &w = \ln|z_1 z_2| + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &w = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\theta_1 + i\theta_2 \\ &w = \underbrace{\ln|z_1| + i\theta_1}_{\in \log(z_1)} + \underbrace{\ln|z_2| + i\theta_2}_{\in \log(z_2)} \\ &\Rightarrow w \in \log z_1 + \log z_2 \end{aligned}$$

ii) Exercício.

iii) Exercício.

■

2.7 Exercícios Resolvidos

2.1 (32.3) Prove que qualquer união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Solução:
Seja $\{U_i\}_{i\in I}, U_i \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Seja $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} U_i$.
Dado $x \in \mathcal{U}$, $\exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$, que é aberto. Então, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0}$.
Mas $U_{i_0} \subset \mathcal{U} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}$ aberto. □

2.2 (32.4) Dê um contra-exemplo para mostrar que uma união de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado.

Solução:

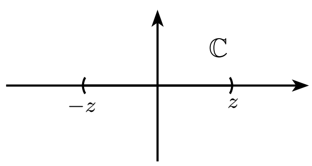


Figura 2.7

$$I_z = \{w \in \mathbb{C} \text{ tal que } -z \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant z \text{ e } \operatorname{Im} w = 0\}$$

$A = \bigcup I_z$ é aberto. □

2.3 (32.5) Prove que a intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Solução:
Seja $u \in \mathcal{U}$. $u \in U_i, i = 1, \ldots, n$.
U_i é aberto $\Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0$ tal que $B_{\varepsilon_i}(u) \subset U_i$, para $i = 1, \ldots, n$.
Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$. Então, $B_\varepsilon(u) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \mathcal{U}$
$\Rightarrow \mathcal{U}$ é aberto. □

2.4 (32.21) $|z-2| = |z-3i|$

Solução:
Seja $z = x + iy \in A$

$$\begin{aligned}
&|x+iy-2| = |x+iy-3i| \\
&|(x-2)+iy| = |x+i(y-3)| \\
&\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2} \\
&(x-2)^2+y^2 = x^2+(y-3)^2 \\
&x^2-4x+4+y^2 = x^2+y^2-6y+9 \\
&6y = 4x+5 \\
&y = \frac{2}{3}x+\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

□

2.5 (43.1) Prove que $\lim\limits_{z\to -3i} \underbrace{\left(z^2-5z\right)}_{f(z)} = \underbrace{-9+15i}_{L}$.

Solução:
Def: Dado $\varepsilon > 0$, encontrar $\delta > 0$ tal que se $0 < |z+3i| < \delta$, então $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Rascunho:

$$\begin{aligned}
|f(z)-L| &= |z^2-5z+9-15i| \\
&= |z^2+9-5\,(z+3i)\,| \\
&= |(z+3i)(z-3i)-5(z+3i)| \\
&= |(z+3i)(z-3i-5)| \\
&= |z+3i||z-3i-5| \\
&\leqslant |z+3i|\left(|z|+\underbrace{|-3i|}_{3}+\underbrace{|-5|}_{8}\right) \\
&= |z+3i|(|z|+8)^3
\end{aligned}$$

Resolução:
Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$.
Se $0 < |z+3i| < \delta, |z| = |z+3i-3i| \leqslant |z+3i| + 3 < 1+3 = 4$. Logo,

$$\begin{aligned}
|f(z)-L| &\leqslant |z+3i|(|z|+8) \\
&< |z+3i|.12 \\
&< \delta.12 \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{12}.12 \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

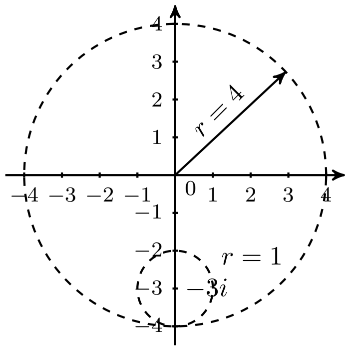


Figura 2.8

□

2.6 (extra) Prove que $\lim\limits_{z \to i}(z^2 + 7z) = -1 + 7i$.

Solução:

$$\begin{aligned} |z^2 + 7z + 1 - 7i| &= |(z+i)(z-i) + 7(z-i)| \\ &= |z-i||z+i+7| \\ &\leqslant |z-i|(|z|+8) \\ |z| = |z-i+i| &\leqslant |z-i| + 1 \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{10}\right\}$.
Se $0 < |z-i| < \delta$, então $|z| < 2$ e $|f(z) - L| \leqslant |z-i|(|z|+8) < 10|z-i| \leqslant 10\delta < \varepsilon$. □

2.7 (43.3) Estabeleça a partir da definição o limite de $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{4z+i}{z+1} = \dfrac{5i}{1+i}$.

Solução:

$$\lim_{z \to i} \underbrace{\frac{4z+i}{z+1}}_{f(z)} = \underbrace{\frac{5i}{1+i}}_{L}$$

$$|f(z) - L| = \frac{|z-i|\,|4-i|}{|z+1|\,|1+i|} = \frac{|z-i|\,\sqrt{17}}{|z+1|\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\,|z-i|\,\frac{1}{|z+1|}$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \min\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{17}}\right\}, 0 < |z-i| < \delta$.

$$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\,|z-i|\,\frac{1}{|z+1|} < \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\delta\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{17}\delta < \varepsilon$$

□

2.8 (43.7) Prove que $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z+1}{z^2-7} = 0$.

Solução:

$$|f(z) - L| = \frac{|z+1|}{|z^2-7|}$$

$$|z+1| = \left|z\left(1 + \tfrac{1}{z}\right)\right| = |z|\left|1 + \tfrac{1}{z}\right| \leqslant |z|\left(1 + \tfrac{1}{|z|}\right)$$

$$|z^2 - 7| \geqslant ||z|^2 - 7| \text{desig. triang. inversa}$$

Se $|z|^2 > 7$, então $||z|^2 - 7| = |z|^2 - 7 = |z|\left(|z| - \dfrac{7}{|z|}\right)$

$$\Rightarrow \frac{|z+1|}{|z^2-7|} \leqslant \frac{|z|\left(1+\frac{1}{|z|}\right)}{|z|\left(|z|-\frac{7}{|z|}\right)} = \frac{1+\frac{1}{|z|}}{|z|-\frac{7}{|z|}}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ tome $k = \max\{\sqrt{7},\quad\}$.
Então, se $|z| > k$ tal que $\dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{k} \Rightarrow \dfrac{-7}{|z|} > \dfrac{-7}{k}$.
Dai, $|f(z) - L| \leqslant \dfrac{1+\frac{1}{|z|}}{|z|-\frac{7}{|z|}} < \dfrac{1+\frac{1}{k}}{|z|-\frac{7}{k}}$. □

2.9 (43.10) Prove que $\lim\limits_{z\to z_0} az + b = az_0 + b, a \neq 0$.

Solução:
Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$.
Se $0 < |z - z_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
&|f(z) - f(z_0)| = |az + b - az_0 - b| \\
&= |a(z - z_0)| \\
&= |a||z - z_0| < |a|\delta = |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

2.10 (43.15) $w = \dfrac{1}{z}$, é contínua $\forall z \neq 0$.

Solução:
Devemos provar que $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z_0}, z_0 \neq 0$.

$$|f(z) - f(z_0)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z_0 - z|}{|z - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z||z_0|}$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \min\left\{\dfrac{|z_0|}{2}, \dfrac{|z_0|^2}{2}\varepsilon\right\}$.
Se $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |z - z_0| < \dfrac{|z_0|}{2} < |z_0|$

$$\begin{aligned}
&|z| = |z - z_0 + z_0| \geqslant \left|\underbrace{|z - z_0| - |z_0|}_{<0}\right| \\
&= |z_0| - |z - z_0| > |z_0| - \frac{|z_0|}{2} = \frac{|z_0|}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $|f(z) - f(z_0)| = \dfrac{|z - z_0|}{|z_0|}\left(\dfrac{1}{|z|}\right) < \dfrac{|z - z_0|}{|z_0|}.\dfrac{2}{|z_0|} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{|z_0|^2}|z - z_0| \\
&< \frac{2}{|z_0|^2}\delta \\
&< \frac{2}{|z_0|^2}\frac{|z_0|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Integração Complexa

Definição 3.1 Um **arco** ou **curva** em $\mathbb{C}$ é a *imagem da função*

$$\begin{aligned} z\ &: [a,b] \to \mathbb{C} \\ t\ &\mapsto x(t) + iy(t) = z(t) \end{aligned}$$

onde $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções *contínuas*.

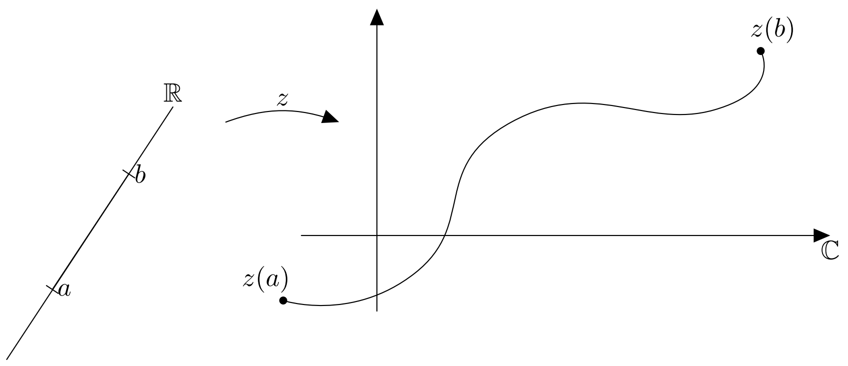


Figura 3.1: arco $C = \{z(t) = x(t) + iy(t); a \leqslant t \leqslant b\}$

Exemplo 3.1 Considere a figura 3.2.

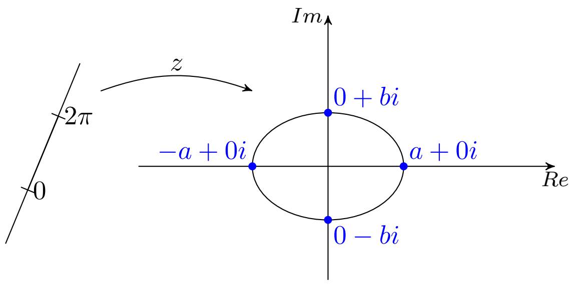


Figura 3.2: $z(t) = a\cos t + ib\,\mathrm{sen} t$

Note que

$$
\begin{aligned}
&z(0) = a\cos 0 + ib\,\text{sen}0 = a\\
&z\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = ib\\
&z(\pi) = -a\\
&z\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = -ib
\end{aligned}
$$

Em particular, se $a = b$, o arco C passa a ser a circunferência de raio a.
Obs: z é a *parametrização* do arco C.

Orientação positiva

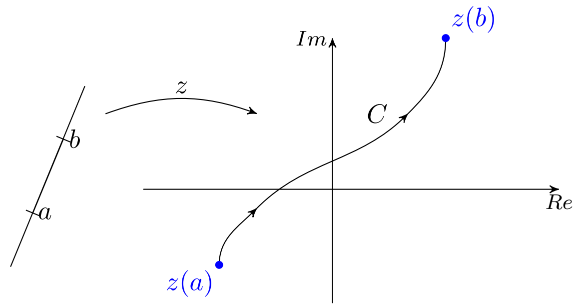


Figura 3.3: Orientação positiva

$z = z(t)$ "orienta" os pontos de C de acordo com os valores crescente.

Orientação negativa

O mesmo C com orientação oposta (negativa) é o arco

$$-C = \left\{ \underbrace{z(-t)}_{z_1(t)} = x(-t) + iy(-t); -b \leqslant t \leqslant -a \right\}$$

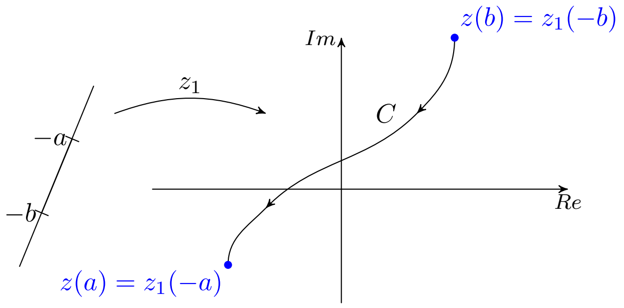


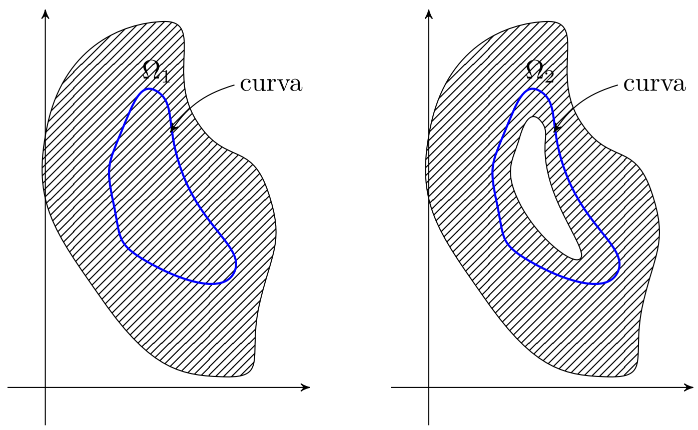
Figura 3.4: Orientação negativa

Definição 3.2 C é um *arco simples* ou *arco de Jordan* se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow z(t_1) \neq z(t_2), \forall t_1, t_2 \in [a, b]$. Quer dizer que o arco não tem auto-intersecção.

Definição 3.3 O arco $C = \{z(t) = x(t) + iy(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ é um *arco fechado* se $z(a) = z(b)$.

E uma *curva fechada simples* (curva de Jordan) é um arco fechado cujos pontos, exceto as extremidades, são pontos simples (não múltiplos).

Teorema 3.4 (de Jordan) *Uma curva fechada simples C (curva de Jordan) divide o plano complexo em duas regiões*[1]*, tendo C como fronteira comum, uma das quais, chamada de "interior de C" é limitada e simplesmente conexa*[2]*.*



(a) Simplesmente conexa. (b) Não simplesmente conexa.

Figura 3.5

Definição 3.5 O arco $C = \{z(t) = x(t) + iy(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ é *regular* ou *suave* se a derivada

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

existe ($\Leftrightarrow$ existem $x'(t)$ e $y'(t), \forall t \in (a,b)$) e é contínua em todo $t \in [a,b]$, e ainda, $z'(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]$.

Definição 3.6 Um *contorno* ou *caminho* é um arco contínuo "formado" por um número finito de arcos regulares.

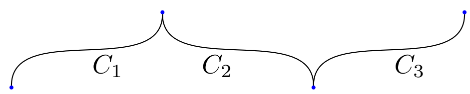


Figura 3.6: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Definição 3.7 (Integral) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função complexa de uma variável real e $f = u + iv$, isto é, $f(t) = u(t) + iv(t), \forall t \in [a,b]$. Dizemos que f é *integrável* em $[a,b]$ se as funções reais u e v são integráveis em $[a,b]$ e definimos a integral de f em $[a,b]$ por

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \tag{3.1}$$

Obs:

$$\mathrm{Re}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\,dt$$
$$\mathrm{Im}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\,dt$$

Teorema 3.8 *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ funções integráveis $\mu \in \mathbb{C}$ e $c \in (a,b)$. Então:*

[1] região = aberto conexo de $\mathbb{C}$

[2] Uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexa quando qualquer curva fechada simples contida em Ω pode ser "continuamente deformada" até reduzir-se a um ponto, sem sair de Ω.

a) $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

b) μf é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b \mu f(t)dt = \mu \int_a^b f(t)dt$

c) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

d) $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$

Demonstração:
Sejam $f(t)=u(t)+iv(t)$ e $g(t)=\tilde{u}(t)+i\tilde{v}t$.

a) $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt =$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left[(u(t)+iv(t)) + (\tilde{u}(t)+i\tilde{v}(t))\right]dt\\
&= \int_a^b \left[(u(t)+\tilde{u}(t)) + i\,(v(t)+\tilde{v}(t))\right]dt\\
&\overset{\text{def}}{=} \int_a^b (u(t)+\tilde{u}(t))\,dt + i\int_a^b (v(t)+\tilde{v}(t))\,dt\\
&= \int_a^b u(t)dt + \int_a^b \tilde{u}(t)dt + i\int_a^b v(t)dt + i\int_a^b \tilde{v}(t)dt\\
&= \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt + \int_a^b \tilde{u}(t)dt + i\int_a^b \tilde{v}(t)dt\\
&\overset{\text{def}}{=} \int_a^b ftdt + \int_a^b gtdt
\end{aligned}$$

Os demais ficam como exercício. Cabe observar que f e g são integráveis em $[a,b] \Rightarrow u, v, \tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são integráveis em $[a,b] \Rightarrow u+\tilde{u}$ e $v+\tilde{v}$ são integráveis em $[a,b]$. ∎

Teorema 3.9 *i) Se $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ é integrável, então a função $F:[a,b]\to\mathbb{C}$, dado por $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a,b]$ e se f é contínua em $c\in[a,b]$, então F é diferenciável em c e $F'(c)=f(c)$.*

Sendo f contínua em $[a,b]$, então F é diferenciável em (a,b) e $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

ii) Se $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ é derivável e f' é integrável em $[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a).$

3.1 Integral Curvilínea ou de Contorno

Definição 3.10 Seja C um arco suave, parametrizado pela curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, isto é, $C=\{\gamma(t)=x(t)+iy(t); a\leqslant t\leqslant b\}$.

Seja $f=u+iv$ função complexa tal que $C\subseteq D(f)=$ domínio de f e f contínua sobre C. A *integral* (*curvilínea* ou *de contorno*) de f sobre C é definida como

$$\int_C f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt$$

onde $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. **Obs**: Como $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ é contínua em $[a,b]$, a integral do lado direito existe.

Exemplo 3.2 Seja $f(z) = |z|^3$ e considere C o segmento de reta que liga o ponto $0 = 0 + 0i$ ao ponto i.

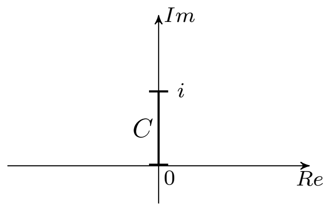


Figura 3.7

Exemplo 3.3 Calcule $\displaystyle\int_C f(z)dz$.

Solução:
Obs: A função $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fixados

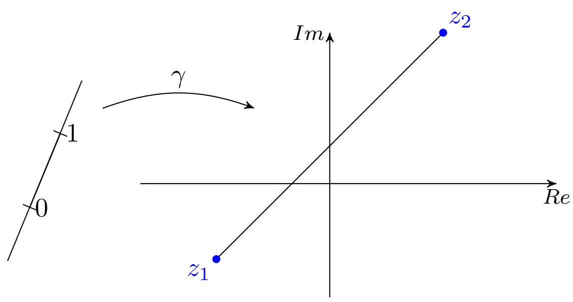


Figura 3.8

$\gamma(0) = z_1$ e $\gamma(1) = z_2$. Então, γ parametriza C pelo segmento de reta $\overline{z_1z_2}$.

Voltando ao exemplo, escolhemos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = it$. Então, $\gamma'(t) = i, \forall t. \Rightarrow C = \{it; t \in [0,1]\}$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^1 f(it)idt = i\int_0^1 f(it)dt \\
&= i\int_0^1 |it|^3 dt = i\int_0^1 t^3 dt \\
&= i\left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right) = \boxed{\frac{i}{4}}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4 Calcule $\displaystyle\int_C \bar{z}dz$, onde C é a circunferência de centro ω e raio r, orientada positivamente.

Solução:
Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ onde $t \mapsto \omega + re^{it} = x_0 + iy_0 + r(\cos t + i\,\text{sen}t) = r\cos t + x_0 + i(r\,\text{sen}t + y_0)$.
Temos $\gamma(t) = \omega + re^{it}$ parametrização para C. Temos que γ é suave, $\gamma'(t) = ire^{it}$.

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
\int_C \bar{z}dz &= \int_0^{2\pi} \bar{\gamma}(t)\left(ire^{it}\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\bar{\omega} + re^{-it}\right)\left(ire^{it}\right)dt \\
&= ir\left(\int_0^{2\pi} \bar{\omega}e^{it}dt + \int_0^{2\pi} rdt\right) \\
&= ir\left(\bar{\omega}\int_0^{2\pi} e^{it}dt + \int_0^{2\pi} rdt\right)
\end{aligned}
$$

Seja $u = it; du = idt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{i} = -idu$ e $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = 2\pi \Rightarrow u = 2\pi i$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad &= ir\left(-i\bar{\omega}\int_0^{2\pi i} e^{u}du + r2\pi\right) \\
&= ir\left(-i\bar{\omega}\underbrace{\left(e^{2\pi i} - e^{0}\right)}_{0} + r2\pi\right) \\
&= ir^2 2\pi
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo 3.5 Considere a Fig. 3.9.

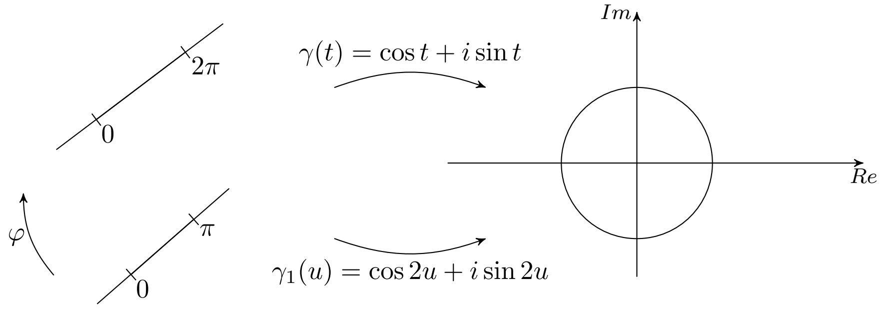


Figura 3.9

Solução:

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \overset{?}{=} \int_0^{\pi} f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)du$$

Seja

$$\begin{aligned} \varphi\ &: [0,\pi] \to [0,2\pi] \\ u\ &\mapsto 2u \end{aligned}$$

$t = 2u = \varphi(u)$
$t = 2u \Rightarrow dt = 2du$

$$\begin{aligned} &\gamma_1(u) = \gamma_1\left(\frac{t}{2}\right) = \cos t + i\,\mathrm{sen} t = \gamma(t) = \gamma(2u) = \gamma(\varphi(u)) \\ &\Rightarrow \gamma_1 = \gamma \circ \varphi \\ &\Rightarrow \gamma_1'(u) = \gamma'(\varphi(u)).\varphi'(u) = 2\gamma'(\underbrace{\varphi(u)}_{t}) = 2\gamma'(t) \\ &\Rightarrow \gamma_1'(u) = 2\gamma'(t) \\ &\Rightarrow \int_0^{\pi} f(\underbrace{\gamma_1(u)}_{\gamma(t)})\underbrace{\gamma_1'(u)}_{2\gamma'(t)}\underbrace{du}_{\frac{dt}{2}} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_C f(z)dz \end{aligned}$$

□

Definição 3.11 O caminho $C = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$ é *suave por partes* se existe uma partição de $[a,b]$, dada por $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ tal que $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, onde $C_i = \{\gamma(t); t \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e cada C_i é suave. Definimos

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt = \int_{C_1} f(z)dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)dz$$

Exemplo 3.6 Seja C o triângulo

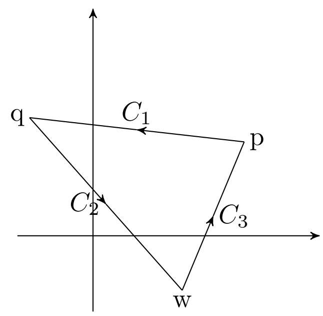


Figura 3.10

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Seja $f(z) = \text{Re}(z)$. Então, $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz$.

Solução:
Sejam

$$\begin{aligned}
&C_1 = \{\gamma_1(t) = (1-t)p + tq; t \in [0,1]\}\\
&C_2 = \{\gamma_2(t) = (1-t)q + tw; t \in [0,1]\}\\
&C_3 = \{\gamma_3(t) = (1-t)w + tp; t \in [0,1]\}\\
&\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 \text{Re}\left(\gamma_1(t)\right)\gamma_1'(t)dt(*)\\
&\gamma_1'(t) = q - p \neq 0
\end{aligned}$$

Sejam $p = p_0 + ip_1; q = q_0 + iq_0$.

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (1-t)(p_0 + ip_1) + t(q_0 + iq_1)\\
&\gamma_1(t) = \underbrace{p_0 - tp_0 + tq_0}_{\text{Re}(\gamma_1(t))} + i\left(p_1 - tp_1 + q_1\right)\\
&\Rightarrow (*) = \int_0^1 \left[p_0 + t(q_0 - p_0)\right](q-p)dt
\end{aligned}$$

□

Revisão: Seja $C = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t); t \in [a,b]\}$ um caminho suave por partes tal que $C \subset D(f)$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f contínua. Vimos que

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Questão: Sendo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ como expressar $\displaystyle\int_C f(z)dz$ em termos de u e v?
Note que $f(\gamma(t)) = f(x(t) + iy(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$.

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \left[u\left(x(t), y(t)\right) + iv\left(x(t), y(t)\right)\right]\left(x'(t) + iy'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b \left[\underbrace{u\left(x(t), y(t)\right)}_{u} x'(t) - \underbrace{v\left(x(t), y(t)\right)}_{v} y'(t)\right] dt + i\int_a^b \left[\underbrace{u\left(x(t), y(t)\right)}_{u} y'(t) - \underbrace{v\left(x(t), y(t)\right)}_{v} x'(t)\right] dt$$

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_a^b udx - vdy + i\int_a^b udy + vdx}$$

Exemplo 3.7 Calcule $\displaystyle\int_C z^2 dz, C = \{t + ie^t; t \in [0,1]\}$ usando a fórmula anterior.

Solução:
Seja $f(z) = z^2$.

$$
\begin{aligned}
&f(x+iy) = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}\\
&u\left(x(t), y(t)\right) = u\left(t, e^t\right) = t^2 - e^{2t}\\
&v\left(x(t), y(t)\right) = v\left(t, e^t\right) = 2te^t\\
&x(t) = t \Rightarrow dx = \underbrace{x'(t)}_{1} dt = dt\\
&y(t) = e^t \Rightarrow dy = e^t dt
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&\int_C z^2 dz = \int_0^1 udx - vdy + i\int_0^1 udy + vdx\\
&= \int_0^1 \left(t^2 - e^{2t}\right) dt - 2te^te^tdt + i\int_0^1 \left(t^2 - e^{2t}\right) e^tdt + 2te^tdt\\
&= \int_0^1 \left(t^2 - e^{2t} - 2te^{2t}\right) dt + i\int_0^1 \left(t^2e^t - e^{3t} + 2te^t\right) dt\\
&\vdots\\
&= \alpha + i\beta
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da definição, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_C z^2 dz = \int_0^1 \left(\gamma(t)\right)^2 \gamma'(t)dt\\
&= \int_0^1 \left(t + ie^t\right)^2 \left(1 + ie^t\right) dt\\
&= \int_0^1 \left(t^2 + i2te^t - e^{2t}\right)\left(1 + ie^t\right) dt\\
&= \int_0^1 \left(t^2 - e^{2t} - 2te^{2t}\right) dt + i\int_0^1 \left(t^2e^t - e^{3t} + 2te^t\right) dt
\end{aligned}
$$

□

Propriedades da Integral

1) $\displaystyle\int_C \left[f_1(z) + f_2(z)\right] dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_C \alpha f(z)dz = \alpha\int_C f(z)dz$

3) $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

Demonstração:
(3) Sejam $C = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t); t \in [a,b]\}$ e $-C = \{\underbrace{\gamma(-t)}_{\gamma_1(t)} = x(-t) + iy(-t); -b \leqslant t \leqslant -a\}$.

$\gamma_1'(t) = -x'(-t) - iy'(-t) = -\gamma'(-t)$

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(\gamma_1(t)) \underbrace{\gamma_1'(t)}_{-\gamma'(-t)} dt = -\int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\gamma'(-t)dt$$

$$u = -t \Rightarrow -du = dt$$
$$t = -b \Rightarrow u = b$$
$$t = -a \Rightarrow u = a$$
$$= -\left(\int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)(-du)\right) = \int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)du =$$
$$= -\int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du = -\int_C f(z)dz$$

■

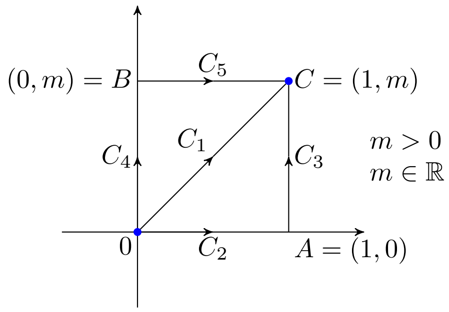


Figura 3.11

Exemplo 3.8 Seja $f(z) = \bar{z}$. $\displaystyle\int_{C_1} f, \int_{C_2 \cup C_3} f, \int_{C_4 \cup C_5} f$.

$$C_1 = \{t + imt; t \in [0,1]\}$$
$$C_2 = \{t; t \in [0,1]\}$$
$$C_3 = \{1 + imt; t \in [0,1]\}$$
$$C_4 = \{imt; t \in [0,1]\}$$
$$C_5 = \{t + im; t \in [0,1]\}$$

$$\int_{C_1} f = \int_0^1 (t + imt)(1 + im)dt \ldots$$
$$\int_{C_2 \cup C_3} f = \int_{C_2} f + \int_{C_3} f = \ldots$$
$$\int_{C_4 \cup C_5} f = \int_{C_4} f + \int_{C_5} f = \ldots$$

Teorema 3.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω aberto e f contínua em Ω com primitiva*[3] *F. Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega$ caminho suave por partes. Então,*

$$\boxed{\int_C f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}; C = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$$

3.2 Integrais de Linha e Teorema de Green

Antes de estudar o *Teorema de Green* é recomendável que se faça uma revisão de *integrais de linha.*

[3] $F'(z) = f(z), \forall z \in \Omega$.

Definição 3.13 Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (função ou campo vetorial) a *integral de linha* de $f(x,y)$ sobre a curva $\gamma(t)$ (suave), $a \leqslant t \leqslant b$ é

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt$$

sendo $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = u\vec{i} + v\vec{j}$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)\left(x'(t), y'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))\right)\left(x'(t), y'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left[u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t)\right] dt \\
&= \int_a^b u dx + v dy
\end{aligned}$$

Teorema 3.14 (de Green) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω simplesmente conexo e C a fronteira de Ω, orientada positivamente (sentido anti-horário). Se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções com derivadas parciais contínuas em Ω e em C. Então,*

$$\int_C u dx + v dy = \iint_\Omega (v_x - u_y) dy dx$$

ou se $u = P$ e $v = Q$, então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dy dx$$

Demonstração:
Somente Ω é região do tipo 1 e 2.
Seja $C = \partial\Omega$[4], $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

	$(x(t), y(t))$	intervalo	dx	dy
C_1	$(a, -t)$	$[-\gamma_2(a), -\gamma_1(a)]$	0	$-dt$
C_2	$(t, \gamma_1(t))$	$[a, b]$	dt	$\gamma_1'(t)dt$
C_3	(b, t)	$[\gamma_1(b), \gamma_2(b)]$	0	dt
C_4	$(-t, \gamma_2(-t))$	$[-b, -a]$	$-dt$	$-\gamma_2'(-t)dt$

$$\begin{aligned}
\int_C u dx &= \int_{C_1} u \underbrace{dx}_{0} + \int_{C_2} u dx + \int_{C_3} u \underbrace{dx}_{0} + \int_{C_4} u dx \\
&= \int_a^b u(t, \gamma_1(t)) dt + \int_{-b}^{-a} u(-t, \gamma_2(-t))(-dt) \\
&= \int_a^b u(t, \gamma_1(t)) dt \overset{(t \to -t)}{-} \int_a^b u(t, \gamma_2(t)) dt \\
&= \int_a^b \left(u(t, \gamma_1(t)) - u(t, \gamma_2(t))\right) dt \\
&= \int_a^b \left(\int_{\gamma_2(t)}^{\gamma_1(t)} u_y(x,y) dy\right) dx \\
&= -\iint_\Omega u_y dy dx \\
&\vdots
\end{aligned}$$

■

[4]fronteira de Omega.

Corolário 3.15 *Se C é uma curva plana que limita a região $D \subset \mathbb{R}^2$, então a área D é* $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C xdy - ydx$.

Exemplo 3.9 Calcule a área da região limitada pela elipse $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução:
Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}t)$.
$dx = -a\,\text{sen}tdt; dy = -b\cos tdt$.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)dt - b\,\text{sen}t(-a\,\text{sen}t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)dt \\
A &= \pi ab
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.16 (de Cauchy) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω aberto e simplesmente conexo. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica em Ω. Então* $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$.

Demonstração:
Vamos supor f' contínua.

$$f' = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y \end{cases}$$

$\Rightarrow u_x, v_x, u_y, v_y$ são contínuas.

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = \\
&= -\iint_\Omega \underbrace{\overbrace{(v_x + u_y)}^{u_y = -v_x}}_{0} dxdy + i\iint_\Omega \underbrace{\overbrace{(u_x - v_y)}^{u_x = v_y}}_{0} dxdy = 0
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.17 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω aberto e simplesmente conexo. Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua com primitiva $F(F' = f)$ e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ caminho suave em Ω.*

$$\int_C f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)); C = \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$$

Em particular, se γ é fechado, então $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&\text{regra da cadeia} \Rightarrow \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt \\
&\text{TF Cálculo} \Rightarrow F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.18 $\int_C z^n dz = 0, C = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$ *suave.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} &F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ &\Rightarrow F'(z) = \frac{(n+1)z^n}{n+1} = z^n \\ &\Rightarrow F \text{ é primitiva para } f. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.19 *Sejam Ω aberto simplesmente conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua. São equivalentes:*

i) *f admite primitiva em Ω;*

ii) $\int_C f(z)dz = 0$, *C caminho fechado suave (por partes);*

iii) *Integrais de f sobre caminhos com mesmo ponto inicial e final são iguais.*

Demonstração:
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam $C_1 = \{\gamma_1(t); t \in [a,b]\}$ e $C_2 = \{\gamma_2(t); t \in [a,b]\}$ e $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

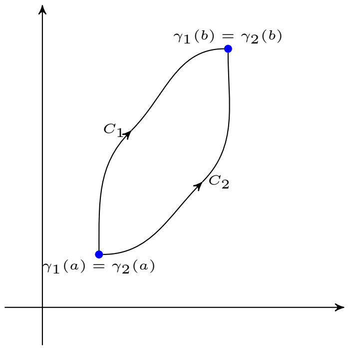


Figura 3.12

Tomemos $C = C_1 - C_2$ fechado (suave por partes).
De (2) $\Rightarrow \displaystyle\int_C f = 0 \Rightarrow \int_{C_1 - C_2} f = 0 \Rightarrow 0 = \int_{C_1 - C_2} f = \int_{C_1} f - \int_{C_2} f$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b) = A$. $C = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$.

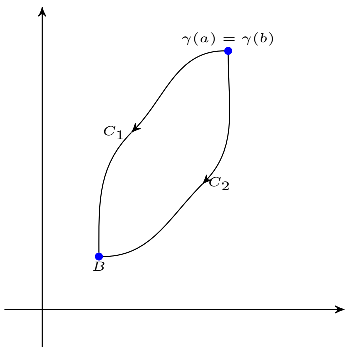


Figura 3.13

$$\int_{C_1} f = \int_{C_2} f \Rightarrow \int_{C_1} f - \int_{C_2} f = 0$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Obter $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f, z \in \Omega, F(z) = \displaystyle\int_{\alpha_z} f(\omega) d\omega$.
α_z liga $a \in \Omega$ com z.
Dado $z_0 \in \Omega$ aberto, $\exists \delta > 0$ tal que $B_{z_0}(\delta) \subset \Omega$. Como $B_{z_0}(\delta)$ é convexo.

$$\begin{aligned} \beta_z \ &: [0,1] \to \Omega \\ t \ &\mapsto (1-t)z_0 + tz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\alpha_{z_0}+\beta_z-\alpha_z} f = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\beta_{z_0}} f = \int\limits_{\alpha_z - \alpha_{z_0}} f = \int_{\alpha_z} f - \int_{\alpha_{z_0}} f = F(z) - F(z_0)$$

$$= \int_{\beta_z} f(\omega)d\omega - \int_{\beta_z} f(z_0)d\omega + \int_{\beta_z} f(z_0)d\omega$$

$$= \int_{\beta_z} (f(\omega) - f(z_0))\, d\omega + \underbrace{f(z_0)\int_{\beta_z} 1 d\omega}_{f(z_0)(z-z_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{F(z) - F(z_0) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int (f(\omega) - f(z_0))\, d\omega$$

f contínua, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, sempre que $|z - z_0| < \delta$.

$$\Rightarrow \left| \frac{F(z) - F(z_0) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{1}{|z - z_0|} |z - z_0| \varepsilon = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{\beta_z} |f(\omega) - f(z_0)|\, d\omega$$

$$\Rightarrow F'(z_0) = f(z_0)$$

■

Teorema 3.20 *Sejam $C_0, C_1, \ldots, C_n$ contornos fechados simples tal que $C_0, C_1, \ldots, C_n$ estejam na região de $\mathbb{C}$ delimitada por C_0,*

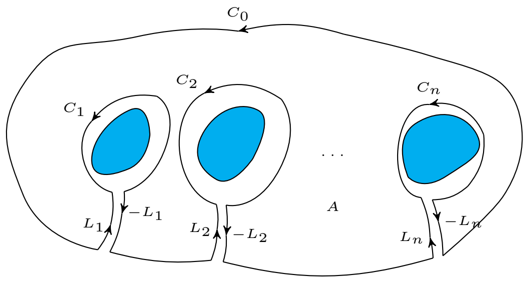


Figura 3.14

supondo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica em A, então

$$\int_{C_0} f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f + \ldots + \int_{C_n} f$$

Demonstração:

Pelo Teo. de Cauchy, se a integral do caminho $C = C_0 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1) \cup \ldots \cup L_n \cup (-C_n) \cup (-L_n)$ é zero. Logo, $0 = \int_{C_0} f - \int_{C_1} f - \ldots - \int_{C_n} f$. ■

Teorema 3.21 (Fórmula Integral de Cauchy) *Seja Ω uma bola aberta em $\mathbb{C}$ e seja γ um caminho, fechado, simples e suave por partes em Ω. Então, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, analítica*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \forall z \in \Omega \backslash \zeta, \zeta \text{ é a imagem de } \gamma.$$

Demonstração:

Seja $z \in \Omega \backslash \zeta$ e definimos $g : \Omega \to \mathbb{C}$

$$g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} & \text{, se } \omega \neq z \\ f'(\omega) & \text{, se } \omega = z \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \to z} g(\omega) = \lim_{\omega \to z} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} = f'(z) = g(z)$$

então, g é contínua em z, logo, g é contínua em Ω.

Pelo Teo. de Cauchy, $\displaystyle\int_\gamma g = 0$.

$$0 = \int_\gamma g = \int_\gamma \left(\frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} \right) d\omega$$

$$= \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\omega - z} d\omega$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

■

Teorema 3.22 *Seja Ω região*[5] *em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica em Ω. E f possui derivadas de todas as ordens em Ω. Se ζ é contorno fechado simples e com interior simplesmente conexo, então*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\zeta \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega, \forall z \in \Omega \backslash \zeta$$

Teorema 3.23 (de Morera) *Seja f contínua em Ω tal que $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$, para todo contorno fechado C contido em Ω. Então, f é analítica em Ω.*

Demonstração:

Dado $z_0 \in \Omega, F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(w)dw$ (notação para o caso em que a integral independe do caminho.)

Como na demonstração das equivalências do Teo. de Cauchy, F é derivável e $F'(z) = f(z)$. ■

Teorema 3.24 (Lioville) *Uma função inteira e limitada é necessariamente constante.*

[5] aberto e conexo.

Referências Bibliográficas

[01] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis Complexas e Aplicações.* Rio de Janeiro: LTC, 2000.