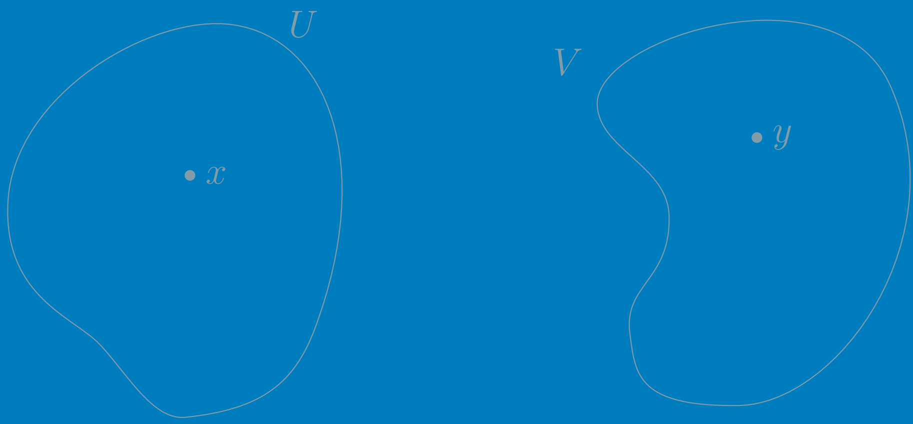
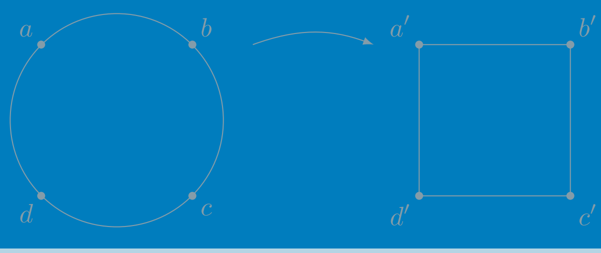




Topologia

Régis da Silva Santos

Topologia Geral

Régis da Silva Santos

UFMT 2009

Prefácio

Esta apostila foi criada a partir de notas de aula do curso optativo de Topologia Geral em 2009.

É permitida a reprodução total ou parcial desta apostila desde que indicada a autoria.

Esta apostila foi criada para uso pessoal, portanto, adaptada para tal fim, podendo posteriormente ser adaptada para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Referências: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Impressão: 2012.

Régis da Silva Santos
Universidade Federal de Mato Grosso, 2012.

Sumário

CAPÍTULO 1

Idéias Topológicas Elementares

1.1 Topologia do Espaço Euclidiano

Definição 1.1 Dado $n \in \mathbb{N}(n > 0)$, o *espaço euclidiano n-dimensional* é
$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$.

Para $n = 1$ temos a reta.
Para $n = 2$ temos o plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Para $n = 3$ temos o espaço tridimensional.

Em $n = 2, \mathbb{R}^2 = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$.
Em geral, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n); x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas do *vetor* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Igualdade:
Suponha $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

Operações em $\mathbb{R}^n$

- Soma: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

- Multiplicação por escalar: Dado $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, define-se $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

Obs: $(\mathbb{R}, +)$ é *grupo abeliano*. A soma é associativa, admite *neutro* $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ e existe o oposto de $\vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Abeliano a soma é comutativa.

Com estas operações, $\mathbb{R}^n$ é um *espaço vetorial* de dimensão n, com base canônica formada pelos vetores canônicos $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Produto interno

Definição 1.2 Sejam $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Definimos *produto interno* de x por y como sendo o número

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

O produto interno é uma função dada por

$$\begin{aligned} \langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Definição 1.3 A *norma euclidiana* de um vetor $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definida por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Caso $n = 1$, $\|x\| = |x|$, onde $|x|$ é o módulo de um número real.

A norma euclidiana é uma função dada por

$$\begin{aligned} \| \ \| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

Propriedades do produto interno

i) $\langle x, x \rangle = \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (comutatividade).

iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.4 Os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* quando $\langle x, y \rangle = 0$.

Lembrando que $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$.
A partir da Fig. 1.1, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
$\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = {}^{\pi}\!/_{2} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.

Figura 1.1: Vetores ortogonais.

Projeção

A partir da Fig. 1.2, temos que

$$
\begin{aligned}
&\langle x - \alpha y, y\rangle = 0\\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle - \alpha\,\langle y, y\rangle = 0\\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle = \alpha\,\|y\|^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}} \tag{1.1}$$

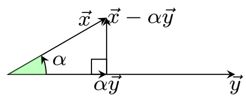


Figura 1.2: Projeção de x sobre y.

Lembrando, $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

teo01 **Teorema 1.5 (desigualdade de Cauchy-Schwarz)**
Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|\langle x, y\rangle\| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Demonstração:
Seja $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\|x - ty\|^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \langle x - ty, x - ty\rangle \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle t \geqslant 0 \text{ (eq. do } 2^\circ \text{ grau)} \\
&\Rightarrow 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0 (\Delta) \\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2 \\
&\Rightarrow \|\langle x, y\rangle\| \leqslant \|x\| \|y\|
\end{aligned}$$

∎

CAPÍTULO 2

Espaços Métricos

Definição 2.1 (Distância) A *distância* entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Propriedades

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$. (simetria)

iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.2 (bola aberta) A *bola aberta* de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$.

São os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância de x para a seja menor que r $(d(x, a) = \|x - a\|)$.
Em $\mathbb{R}, B_r(a) = (a - r, a + r)$.

Definição 2.3 (esfera) A *esfera* n-dimensional é definida como o conjunto $S_r[a] := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = r\}$.

Para $n = 1, S_r[a] = \{a - r, a + r\}$.
Para $n = 2, S_r[a]$ é uma circunferência; em particular S^1 é uma esfera em $\mathbb{R}^2$ com centro $\vec{0}$ e raio unitário.

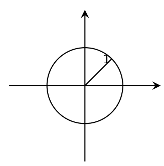


Figura 2.1: Circunferência.

Para $n = 3, S^2$ é a esfera em $\mathbb{R}^3$.
Note que S^n é a esfera n-dimensional e $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 2.4 (bola fechada) A *bola fechada* de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r[a] := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leqslant r\}$.

Vamos definir norma sobre um espaço vetorial real arbitrário V.

Exemplos:

- $V = \mathbb{R}^n$
- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$
- $M_{n\times n}(\mathbb{R})$
- $P_n(\mathbb{R}) = \{$polinômios de grau $\leqslant n$ com coeficientes reais$\}$
- $P = P(\mathbb{R}) = \{$polinômios com coeficientes reais$\}$
- $\mathscr{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}; f$ contínuas$\}$

Lembrando da Álgebra Linear, existe *isomorfismo* (transformação linear bijetora) entre $\mathbb{R}^{n+1} \cong P_n$ e $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$.

Operações em $\mathscr{C}[0, 1]$

Soma: $f(x) + g(x) := (f + g)(x), \forall x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \mathscr{C}[0,1] \times \mathscr{C}[0,1] &\to \mathscr{C}[0,1] \\ (f, g) &\mapsto f + g \end{aligned}$$

Multiplicação por escalar: $(\alpha f)(x) := \alpha f(x), \forall x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathscr{G} : \mathbb{R} \times \mathscr{C}[0,1] &\to \mathscr{C}[0,1] \\ (\alpha, f) &\mapsto \alpha f \end{aligned}$$

Obs: $D(0,1) = \{f \in \mathscr{C}[0,1]; f \text{ derivável em } [0,1]\}$.
$D(0,1)$ é subespaço vetorial de $\mathscr{C}[0,1]$.

Exemplo 2.1 Seja p um número primo fixado.

$$l_p = \left\{ (x_n) \text{ sequências reais} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

Operações

Soma: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$
Multiplicação por escalar: $\alpha(x_n) = (\alpha x_n), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Exemplo 2.2 Se $p = 2, x_n = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$\Rightarrow (x_n) \in l_2$, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Exemplo 2.3 $\mathbb{R}^{\infty} = \{(x_n) = (x_1, x_2, \ldots); x_i \in \mathbb{R}, \forall i\}$.

Exemplo 2.4 $\mathbb{R}(0,1) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R}; f \text{ é Riemann-integrável e } \displaystyle\int_0^1 |f(x)| dx < \infty \right\}$.

Obs: $\mathbb{R}(0,1) \not\subset \mathscr{C}[0,1]$, por exemplo, é possível calcular a área de funções descontínuas.

2.1 Espaços Vetoriais Normados

Definição 2.5 Seja V um espaço vetorial real. Uma *norma* em V é uma função $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz, $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes condições.

i) $\|x\| > 0$ (positividade)

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (não-degeneralidade)

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (homogeneidade)

iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

Exemplo 2.5 $V = \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, x = (x_1, \ldots, x_n)$ é norma em $\mathbb{R}^n$ (norma euclidiana).

Definição 2.6 Se V admite uma norma $\| \quad \| : V \to \mathbb{R}$, então $(V, \| \quad \|)$ é dito um *espaço vetorial normado.*

Exemplo 2.6 $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana é um espaço vetorial normado.

Outras normas em $\mathbb{R}^n$

Seja

$$\begin{array}{rcl} \| \quad \|_s : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \|\vec{x}\|_s = |x_1| + \ldots + |x_n| \end{array}$$

Com esta "nova" norma, a forma geométrica das bolas em $\mathbb{R}^n$ é outra.

As definições de bola aberta, fechada e esfera, são feitas do mesmo modo já visto, utilizando a mesma norma.

Por exemplo, a bola aberta de centro a e raio $r > 0$ é definida como $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_s < r\}$.

Exemplo 2.7 $n = 2, \| \quad \|_s, B_0[1]$.

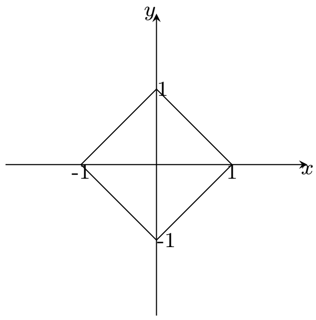


Figura 2.2: Losango.

Exemplo 2.8 Seja a norma do máximo

$$\begin{array}{rcl} \| \quad \|_n : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \|\vec{x}\|_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|\} \end{array}$$

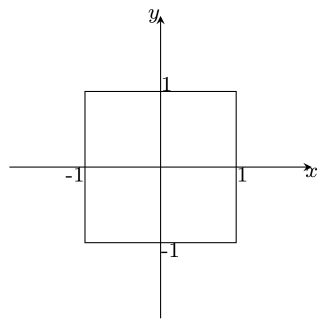


Figura 2.3: $B_0[1]$ na norma do máximo.

2.2 Exercícios Propostos

2.1 Prove que l_p é espaço vetorial.
Dica: Verifique que $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p+b^p), \forall a,b \in \mathbb{R}_+, p \geqslant 0$.

2.2 Prove que $\| \quad \|_s$ é uma norma.

Solução:
Resolveremos apenas a desigualdade triangular.
Sejam $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}+\vec{y}\|_s &= \|(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)\|_s \\
&= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \ldots + |x_n+y_n| \\
&\leqslant |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\
&= \|x\|_s + \|y\|_s \\
\|\vec{x}+\vec{y}\|_s &\leqslant \|x\|_s + \|y\|_s
\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Verifique que a função $\| \quad \|_n$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Uma norma no espaço vetorial $\mathscr{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}; f \text{ contínua}\}$.

Exemplo 2.9 Seja

$$\begin{aligned}
\| \quad \|_\infty : \mathscr{C}[0,1] &\to \mathbb{R} \\
f &\mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}
\end{aligned}$$

Esta norma está bem definida porque f é contínua sobre o compacto $[0,1]$.

Solução:
A aplicação $\| \quad \|_\infty$ é de fato uma norma em $\mathscr{C}[0,1]$. Provemos a desigualdade triangular.

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|(f+g)(x)|\} = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)+g(x)|\} \leqslant \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|+|g(x)|\}$$
$$\leqslant \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]} \{|g(x)|\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

Obs: $\underset{\text{deriváveis}}{D[0,1]} \subset \underset{\text{contínuas}}{\mathscr{C}[0,1]} \subset \underset{\text{limitadas}}{M_b[0,1]} \subset \underset{\text{todas funções}}{\mathscr{F}[0,1]}$

Definição 2.7 Seja M um conjunto não-vazio. Uma função $d : M\times M \to \mathbb{R}$ é uma *métrica* em M (ou função distância) quando satisfaz, $\forall x,y,z \in M$, as condições:

i) $d(x,y) \geqslant 0$;

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iv) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Exemplo 2.10 Sejam $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n)$

$$\begin{aligned} d\ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) \quad &\mapsto d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1+y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \end{aligned}$$

A métrica d é “induzida” pela norma.

Definição 2.8 Um *espaço métrico* é um conjunto não-vazio no qual esteja definida uma métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$.

Notação: (M,d).

Obs: V espaço vetorial normado $\Rightarrow$ V é espaço métrico com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d\ : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) \ &\mapsto \|x-y\| = d(x,y) \end{aligned}$$

☺**Exemplo 2.11** [1] Seja $M \neq \emptyset$. Então M admite a *métrica discreta* ou *métrica zero-um*

$$\begin{aligned} d\ : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x,y) \quad &\mapsto d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

Prove como exercício.

☺**Exemplo 2.12** A *métrica dos sinais* ou *word métrica* é
$M = \{8 - \text{uplas de números0 ou } 1\}$.
Exemplo, $x = \{0,1,1,0,1,0,0,1\} \in M$;
Exemplo, $y = \{1,0,0,1,0,0,0,0\} \in M$.
Define $d(x,y) =$ número de posições (ou entradas) com valores diferentes.
Exemplo, com x e y dados acima, $d(x,y) = 6$. $0 \leqslant d(x,y) \leqslant 8$.

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{8} |x_i - y_i|$$

como exercício, mostre que d é métrica.

☺**Exemplo 2.13** Seja $M = \mathscr{C}[0,1]$.

$$\begin{aligned} d\ : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (f,g) \quad &\mapsto \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

d é a área entre duas funções.
Mostre que d é métrica.
Dica: use $\displaystyle\int_0^1 |f(x)| dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0, f$ contínua.

[1] O símbolo ☺ significa que tem uma parte como exercício.

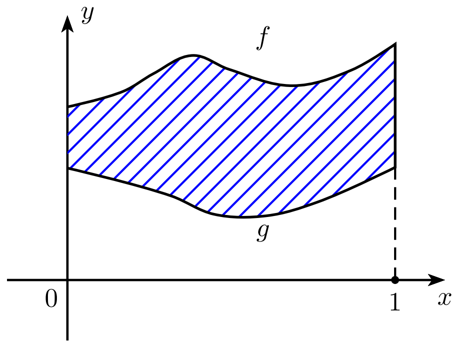


Figura 2.4: Área entre as duas funções.

☺**Exemplo 2.14** Seja $M = \mathscr{C}[0,1]$.

$$\begin{aligned} d\ :\ & M \times M \to \mathbb{R} \\ & (f,g) \quad \mapsto \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} \end{aligned}$$

Prove que d é métrica.

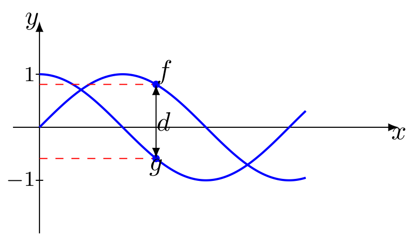


Figura 2.5: Maior diferença entre as imagens das funções.

Exemplo 2.15 Seja $M = R, d(x,y) = |x - y|$.

Exemplo 2.16 Seja $M = \mathbb{R}^n, d_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$; para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Exemplo 2.17 Seja $M = \mathbb{R}^n, d_m(x,y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{|x_i - y_i|\}$; para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

CAPÍTULO 3

Topologia dos Espaços Métricos

3.1 Abertos em (M, d)

Definição 3.1 Seja (M, d) um espaço métrico. Definimos a *bola aberta* de centro $a \in M$ e raio $\varepsilon > 0$ como $B_\varepsilon(a) = \{x \in M : d(x, a) < \varepsilon\}$.

Definição 3.2 Um conjunto $A \subset M$ é *aberto* se para cada $a \in A, \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$.

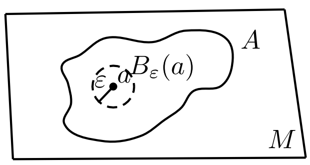


Figura 3.1:

teo02 **Teorema 3.3** *A bola aberta é um conjunto aberto.*

Demonstração:
Seja $B = B_\varepsilon(a)$. Devemos mostrar que dado $x \in B, \exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset B$.

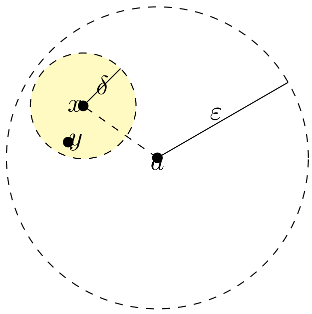


Figura 3.2: Bola aberta.

Seja $\delta = \dfrac{\varepsilon - d(x,a)}{2}$.

$$\begin{aligned}
d(y,a) &\leqslant \underbrace{d(y,x)}_{<\delta} + d(x,a)\\
&< \delta + d(x,a)\\
&= \frac{\varepsilon - d(x,a)}{2} + d(x,a)\\
&= \frac{\varepsilon - d(x,a) + 2d(x,a)}{2}\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d(x,a)}{2}\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\\
\Rightarrow d(y,a) &< \varepsilon\\
&\Rightarrow y \in B
\end{aligned}$$

■

prop01 **Proposição 3.4** *Seja (M, d) espaço métrico.*

i) Seja Λ um conjunto de índices com $\mathscr{A}_\lambda$ aberto, $\forall \lambda \in \Lambda$. Então, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ é aberto. ($\mathscr{A}_\lambda \subset M$).

ii) Se $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ são abertos de M, então $\mathscr{A}_1 \cap \ldots \cap \mathscr{A}_n$ é aberto.

A união arbitrária de abertos é aberto e a interseção finita de abertos é aberto.

Demonstração:

i) Sejam $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{A}$ e $a \in A$. Devemos mostrar que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$.

$a \in A \Rightarrow \exists \lambda_0 \in A$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$, que é aberto.
Logo, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A_{\lambda_0} \subset A; \Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset A$.
Portanto, A é aberto.

ii) Sejam $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ e $a \in A$.
Note que $a \in A_i, \forall i$.
Como $A_1, \ldots, A_n$ é aberto, existem $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tal que
$B_{\varepsilon_i}(a) \subset A_i, i = 1, \ldots, n$.
Tome $\varepsilon = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\varepsilon_i\}$.
$\Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset B_{\varepsilon_i}(a) \subset A_i, i = 1, \ldots, n$.
$\Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A$.
Portanto, A é aberto.

■

☺**Exemplo 3.1** Sejam $M = \mathbb{R}$ com métrica usual $(d(x, y) = |x - y|)$ e $a < b; a, b \in \mathbb{R}$.

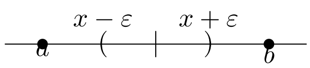


Figura 3.3:

$I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ é aberto de $\mathbb{R}$.

Dado $x \in I$, tome $\varepsilon = \min \left\{ \dfrac{|x-a|}{2}, \dfrac{|x-b|}{2} \right\}$,
então $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$. Mostre que esta última afirmação é verdadeira.

Exemplo 3.2 Sejam $M = \mathbb{R}$ (métrica usual) e $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n > 0$ natural.

Cada A_n é aberto, pelo exemplo anterior. Mas $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} A_n = \{0\}$.

De fato, se $x \in A_n, \forall n \geqslant 1$ e $x \neq 0$, pela propriedade arquimediana dos reais, existe $m > 0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < x; \Rightarrow x \notin (^{-1}/_m, ^1/_m) = A_m$.

Mas $\{0\}$ não é aberto em $(\mathbb{R}, |\ \ |)$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, $B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ sempre contém um número real não-nulo.

$\Rightarrow B_\varepsilon(0) \not\subset \{0\}, \forall \varepsilon > 0$.

Exemplo 3.3 Seja $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ (métrica usual). A é aberto?

Não! Utilize o argumento do exemplo anterior. Em particular, todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ não é aberto.

Exemplo 3.4 Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$. A é aberto.

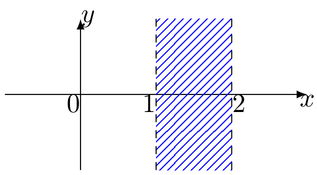


Figura 3.4:

Exemplo 3.5 Seja (M, d) métrica discreta.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x = y \\ 1 & \text{, se } x \neq y \end{cases}$$

Seja $x \in M$ e $\varepsilon > 0$.

$\varepsilon > 1 \Rightarrow B_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x,y) < \varepsilon\} = M$

$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow B_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x,y) < \varepsilon\} = \{x\}$

Então, dado $A \subset M$ e $x \in A$, tome $\varepsilon = ^1/_2$.

Então, $B_{^1/_2}(n) = \{x\} \subset A, \forall x \in A \Rightarrow A$ aberto. Isto vale $\forall A \subset M$.

Obs: Num espaço métrico qualquer $(M, d), \emptyset$ e M são abertos.

☺**Exemplo 3.6** Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos. $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ é aberto. Prove.

3.2 Interior de Conjuntos

Definição 3.5 Sejam (M,d) um espaço métrico e $A \subset M$. Um ponto $x \in A$ é dito um *ponto interior* de A se existe aberto $\mathcal{U} \in M$ tal que $x \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subset A$.

Notação: $\overset{\circ}{A}$ ou intA.

Chama-se ε-*caracterização de ponto interior*: $x \in \text{intA} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$.

lem01 **Lema 3.6** $\text{intA} = \bigcup\limits_{\mathcal{U} \subseteq A} \mathcal{U}$, *$\mathcal{U}$ aberto de M.*

Demonstração:
Seja $x \in \text{intA}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset A \\
&\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\mathcal{U} \subseteq A} \mathcal{U} \\
&\Rightarrow x \in \bigcup_{\mathcal{U} \subseteq A} \mathcal{U} \\
&\Rightarrow \text{intA} \subset \bigcup_{\mathcal{U} \subseteq A} \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Faça a volta como exercício. ∎

cor01 **Corolário 3.7** *Sejam A, B conjuntos.*

i) intA *é aberto;*

ii) intA *é o maior conjunto aberto de M contido em A, isto é, se B é aberto de M e $B \subset A$, então $B \subseteq$* intA.

Demonstração:

i) Pelo Lema anterior, intA é união de abertos e, portanto, é aberto.

ii) B aberto de M e $B \subseteq A$, então $B \subseteq \bigcup\limits_{\mathcal{U} \subseteq A} \mathcal{U} = \text{intA}$.

∎

lem02 **Lema 3.8** $\mathrm{intA} = A \Leftrightarrow A$ *é aberto.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) $\mathrm{intA} = A \Rightarrow A$ aberto pelo item (i) do Cor. anterior.
$\Leftarrow$) Claro que $\mathrm{intA} \subset A$, por definição. A aberto $\Rightarrow A \subset \bigcup_{\mathcal{U} \subseteq A} \mathcal{U} = \mathrm{intA}, \mathcal{U}$ aberto. ∎

Obs: Se $A, B \subset (M, d), \mathrm{intA \cup B} = \mathrm{intA \cup intB}$?
Não. Contra-exemplo, $A = [1, 3], B = [3, 4]$.

$$A \cup B = [1, 4] \Rightarrow \mathrm{int}(A \cup B) = (1, 4)$$
$$\mathrm{intA \cup intB} = (1, 3) \cup (3, 4) \neq (1, 4)$$

Exemplo 3.7 Sejam (M, d) e $x \in M, r > 0 \in \mathbb{R}$. $B_[x] = \{y \in M : d(x, y) \leqslant r\}$ e $B_(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$. $B_(x) = \mathrm{int}(B_r[x])$?

Solução:
Não. Contra-exemplo, (M, d) métrica discreta. $M = \{a, b\}, a \neq b, r = 1$.
$B_1(a) = \{a\}, B_1[a] = M$.
M é aberto $= \mathrm{int(B_1[a])}$
$\{a\} = B_1(a) \subsetneqq M$. □

3.3 Conjuntos Fechados

Definição 3.9 Seja (M, d) espaço métrico. Um subconjunto $F \subset (M, d)$ é *fechado* quando F^c (*complementar* de F) é aberto.

$$F^c = \{x \in M; x \notin F\}$$

prop02 **Proposição 3.10** *Seja (M, d) espaço métrico.*

i) Sejam $F_\lambda, \lambda \in \Lambda$, fechados de M. Então, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado.

ii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são fechados de M, então $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.
A interseção arbitrária de fechados é fechado e a união finita de fechados é fechado.

iii) $\emptyset$ e M são fechados.

Demonstração:

i) F_λ fechado, $\forall \lambda \in \Lambda$.

$\Rightarrow F_\lambda^c$ é aberto, $\forall \lambda \in \Lambda$.

$\Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$ é aberto.

Mas $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)^c$ (exercício)

$\Rightarrow \displaystyle\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)^c$ é aberto.

$\Rightarrow \displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado.

ii) F_i fechado, $\forall i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow F_i^c$ é aberto.

$\Rightarrow \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$ é aberto $= \displaystyle\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c$

$\Rightarrow F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.

iii) $\emptyset^c = M$ e M é aberto, então $\emptyset$ é fechado. E $M^c = \emptyset$, que é aberto, então M é fechado.

■

Exemplo 3.8 $S = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ é fechado?

Solução:
Não. Seja $S = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/4, \ldots\}$. S não é fechado.
$0 \in S^c$ e $B_\varepsilon(0) \cap S \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$.
$\Rightarrow \nexists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset S^c$.
Logo, S^c não é aberto. Portanto, S não é fechado. □

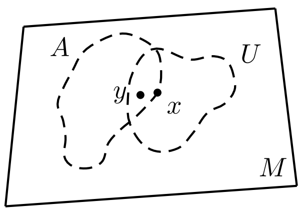
Exemplo 3.9 Seja (M, d) com métrica discreta.
$B \subset M \Rightarrow B$ é aberto.
Mas $B^c \subset M \Rightarrow B^c$ é aberto $\Rightarrow B$ é fechado.

3.4 Exercícios Propostos

1. Mostre que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ é fechado.
2. Mostre que em $(M, d), B_\varepsilon[x]$ é fechado.

3.5 Pontos de Acumulação

Definição 3.11 Sejam (M, d) espaço métrico e $A \subset M$ conjunto. Um ponto $x \in M$ é chamado de um *ponto de acumulação* de A quando todo aberto $\mathcal{U}$ de M que contém x, também contenha algum ponto de A diferente de x.



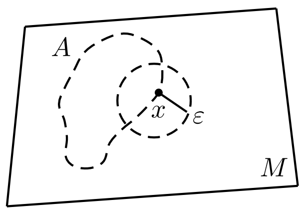


Figura 3.5: x é ponto de acumulação. Figura 3.6: x é ponto de acumulação.

Lema 3.12 (ε-caracterização de p.a.) *Seja $A \subset (M, d)$ espaço métrico. $x \in M$ é p.a. de A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, (B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Suponha $x \in M$, x é p.a. de A. Seja $\varepsilon > 0$. Temos que $B_\varepsilon(x)$ é aberto de M e $x \in B_\varepsilon(x)$.
Tomando $\mathcal{U} = B_\varepsilon(x)$, temos que $\mathcal{U} \cap A \supsetneqq \{x\}$.
$\therefore (B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
☺ $\Leftarrow$) Exercício. ■

Exemplo 3.10 Seja $A = \{x_0\}, x_0 \in \mathbb{R}$. A é p.a.?

Solução:
Não. Seja $x \in \mathbb{R}$. Então x não é p.a. de A.
Tome $\varepsilon = \dfrac{|x - x_0|}{2}$, então $B_\varepsilon(x) \cap \{x_0\} = \emptyset$.
$\Rightarrow x$ não é p.a. de A. □

Exemplo 3.11 Seja $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$. Qual é o conjunto {p.a. de A} dos pontos de acumulação de A?

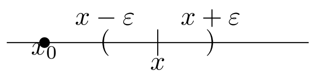


Figura 3.7:

Solução:
Afirmação: $\underbrace{\{\text{p.a. de } A\}}_{A'} = [0,1]$.

De fato, $A \subset A'$. Seja $y \in A$ e $\varepsilon > 0$. Devemos mostrar que $(B_\varepsilon(y) \setminus \{y\}) \cap A \neq \emptyset$. Isto é claro, pois entre $y - \varepsilon$ e $y + \varepsilon$ existe ao menos um número racional diferente de $y \notin \{0,1\}$ e que esteja em A.

$0 \in A'$. De fato, pois $B_\varepsilon(0) \cap (0,1] \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$.

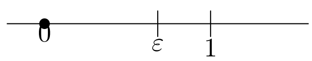


Figura 3.8:

Temos, então que $[0,1] \subset A'$.

Queremos verificar agora que $A' \subset [0,1]$ basta tomar $y \notin [0,1]$ e mostrar que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(B_\varepsilon(y) \setminus \{y\}) \cap A = \emptyset$. □

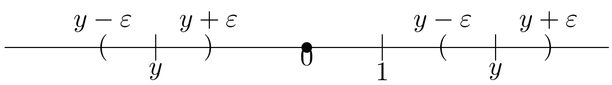


Figura 3.9:

Tome $\varepsilon = \dfrac{\min\{|y-0|, |y-1|\}}{2} \Rightarrow B_\varepsilon(y) \cap A = \emptyset$.

Conclusão: $A' = [0,1]$.

teo03 **Teorema 3.13** *Sejam (M,d) espaço métrico e $A \subset M, A \neq \emptyset$. A é fechado se, e somente se, A contém todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) A fechado $\Rightarrow M \setminus A$ é aberto.

Seja $y \in M \setminus A$. Como $M \setminus A$ é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset M \setminus A \Rightarrow B_\varepsilon(y) \cap A = \emptyset$.

$\Rightarrow y$ não é p.a. de A.

$\Leftarrow$) Suponha $A \supset \{\text{p.a. de } A\}$. Devemos mostrar que $M \setminus A$ é aberto.

Seja $y \in M \setminus A$. $\Rightarrow y \notin A$.

$\Rightarrow y$ não é p.a. de A.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $(B_\varepsilon(y) \setminus \{y\}) \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow B_\varepsilon(y) \subset M \setminus A \Rightarrow M \setminus A$ é aberto. $\Rightarrow A$ fechado. ■
Obs: Um conjunto não precisa ter p.a..

Exemplo 3.12 $A = \{x_0\} \subset \mathbb{R}$. $x_0 \in A$, mas não é p.a. de A. Isto não contradiz o teorema, pois $\emptyset \subset A$.

Exemplo 3.13 Seja $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. A é fechado e {p.a. de A} $= \emptyset$.

Exemplo 3.14 Sejam (M, d) espaço métrico discreto e $A \subset M$.
Então, $\{$p.a. de $A\} = \emptyset$.
De fato, se $y \in A$, tome $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.
Então, $B_{1/2}(y) = \{x \in M : d(x, y) < 1/2\} = \{y\}$
$B_{1/2}(y) = \emptyset \Rightarrow (B_{1/2}(y) \setminus \{y\}) \cap A = \emptyset$.
$\Rightarrow y$ não é p.a. de A.

Obs: Se A não tem pontos de acumulação, então A é fechado.

Exemplo 3.15 Sejam $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ e $B = \{0, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Note que A não é fechado, pois, 0 é p.a. de A e $0 \notin A$.
Dado $\varepsilon > 0$, pela propriedade arquimediana dos reais, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < \varepsilon$, então $(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset$.
Logo, A não é fechado. E B é fechado $\{$p.a. de $B\} = \{0\} \in B$.

Exemplo 3.16 $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{2\}$.
$\{$p.a. de $A\} = [0, 1] \Rightarrow A$ é fechado.

Exemplo 3.17 Seja (x_n) uma sequência limitada, $x_n \in \mathbb{R}$. $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ tem pontos de acumulação?

Solução:
Não (em geral).
$(x_n) = (-1)^n \Rightarrow A = \{-1, 1\}$ não tem p.a.
Por outro lado, se (x_n) é sequência limitada que possui infinitos termos distintos, então $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ contém ao menos um p.a., pois pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (x_n) admite uma subsequência convergente $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ e o limite desta sequência será um p.a. de A, mas não necessariamente pertence a A.
□

Exemplo 3.18 Sejam $(M, d), x_0 \in M, B_\varepsilon(x_0) = \{x \in M : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ e $B_\varepsilon[x_0] = \{x \in M : d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}$. $y \in B_\varepsilon[x_0]$ implica y é p.a. de $B_\varepsilon(x_0)$?

Solução:
Não. Pois vimos que em (M, d) discreto, nenhum conjunto tem p.a. □

3.6 Fecho de um conjunto

Definição 3.14 Seja (M, d) um espaço métrico. O *fecho* de $A \subset M$ é o menor fechado de M que contém A, isto é, é a interseção de todos os fechados de M que contém A.

Notação: $\overline{A}$ = fecho de A.

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A} F, F \text{ fechado de } M.$$

Obs:

- $\overline{A}$ é fechado;
- A fechado $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Exemplo 3.19 $\overline{(0,1)}^{\mathbb{R}} = [0,1]$

Exemplo 3.20 $A = \mathbb{Q}_{[0,1]} = \{x \in [0,1]; x \in \mathbb{Q}\} \Rightarrow \overline{A}^{\mathbb{R}} = [0,1]$

Solução:
$\mathbb{Q}_{[0,1]}$ não é aberto!
$x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{[0,1]}$ e $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}_{[0,1]}$ possui um irracional
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \not\subset \mathbb{Q}_{[0,1]}$. $\square$

Exemplo 3.21 $\overline{\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}}^{\mathbb{R}} = \{0, 1, 1/2, \ldots\}$

Exemplo 3.22 $\overline{[0,1] \cup \{2\}}^{\mathbb{R}} = [0,1] \cup \{2\}$

Exemplo 3.23 $A, B \subset \mathbb{R}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

Solução:
Não. Contra-exemplo.
Sejam $A = (0,1), B = (1,2)$.
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$. $\square$

prop03 **Proposição 3.15** *Seja* (M, d) *espaço métrico. Então,* $\overline{A} = \underbrace{A \cup \{p.a.\ de\ A\}}_{B}$.

Demonstração:

Seja F fechado, que contém A. Como F é fechado, temos que F contém seus pontos de acumulação.

Em particular, F contém os pontos de acumulação de A (pois $A \subset F$).

Logo, $A \subset B \subset F$. Basta agora mostrar que B é fechado. (Dado $y \in$ {p.a. de B}, mostrar que $y \in B$.)

Seja $y \in$ {p.a. de B}. Então $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in B$ tal que $z \neq y$ e $z \in B_\varepsilon(y)$.

Temos duas possibilidades:

1) $z \in A$. Neste caso, $B_\varepsilon(y)$ contém um ponto de A e diferente de y.

2) z é p.a. de A.

Então, $\delta = \min \left\{ \dfrac{\varepsilon - d(z,y)}{2}, \dfrac{d(z,y)}{2} \right\} \Rightarrow B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(y)$.

Como z é p.a. de A, temos que $B_\delta(z)$ contém algum ponto de A diferente de z (e diferente de y, devido a definição de δ).

Implica $B_\varepsilon(y)$ contém algum ponto de A diferente de y.

Logo, y é p.a. de A.

Portanto, $y \in B$.

Conclusão: pontos de acumulação de B estão em B, então B é fechado. ■

3.7 Fronteira de um Conjunto

Definição 3.16 Seja (M, d) espaço métrico e $A \subset M$. A *fronteira* de A é definida como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ $(A^c = M \backslash A)$.

Exemplo 3.24 Seja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\text{p.a. de } \mathbb{Q}\}}_{\text{irracionais}} = \mathbb{R}$

$\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Exemplo 3.25 $\partial \underset{\mathbb{R}^n}{B}(0,1) = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

prop04 **Proposição 3.17** *Seja $A \subset (M,d)$ espaço métrico. Então, $x \in \partial A$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$.*

Demonstração:
$\Rightarrow)$ $x \in \partial A \Rightarrow x \in \overline{A}$ e $x \in \overline{A^c}$.
Dois casos:

1) $x \in A$. Neste caso, $B_\varepsilon(x) \cap A \supset \{x\}, \forall \varepsilon > 0$.
   Como $x \in \overline{A^c}$, temos que x é p.a. de A^c.
   $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$. (Note que $x \notin A^c$)

2) $x \in A^c$☺. Exercício, análogo.

☺ $\Leftarrow$ Exercício, análogo. ∎

Exemplo 3.26 Sejam $A = [1,2]$ e $B = [0,3]$.
$\partial A = \{1,2\}$, pois $\overline{A} = [1,2]$.
$A^c = (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$
$\Rightarrow \overline{A^c} = (-\infty,1] \cup [2,+\infty)$
$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{A^c} = [1,2] \cap ((-\infty,1] \cup [2,+\infty)) = \{1,2\}$.
Ainda, $\partial B = \{0,3\}$.
Note que $A \supset B$, mas $\partial A \cap \partial B = \emptyset$.
$A \supset B \not\Rightarrow \partial A \supset \partial B$.

3.8 Exercícios Propostos

3.1 Seja (M,d) um espaço métrico. Defina conjunto aberto e conjunto fechado em M. Demonstre que $\emptyset$ e M são ao mesmo tempo abertos e fechados em M. Demonstre que a bola aberta é um conjunto aberto em M. Demonstre que a união arbitrária de abertos de M é um aberto de M e a interseção finita de abertos de M é um aberto de M. Faça a afirmação correspondente a fechados de M e demonstre-a.

3.2 Seja M um conjunto não vazio. Mostre que a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \neq y \\ 0 & \text{, se } x = y \end{cases}$$

é uma métrica em M. A aplicação d é denominada de *métrica discreta* e o conjunto não vazio M munido com a métrica discreta é denominado de *espaço métrico discreto*. Considere (M,d) o espaço métrico discreto. Dado $x \in M$, mostre que uma bola aberta qualquer com centro x é igual a $\{x\}$ ou a M. Utilize este fato para mostrar que todo subconjunto de M é ao mesmo tempo aberto e fechado e o que o interior de uma bola fechada em M não precisa ser a bola aberta de M.

3.3 Seja d uma métrica no conjunto não vazio M. Mostre que as novas funções $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente por

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad \text{e} \quad d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

para todos $x, y \in M$, também são métricas em M. Note que $0 \leqslant d_1(x,y) \leqslant 1$, para todos $x, y \in M$. Por este motivo d_1 é denominada *métrica limitada*.

Suponha que M é munido da norma $\| \quad \|$, isto é, $(M, \| \quad \|)$ é um espaço vetorial normado. Mostre que a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$, dada por
$d(x,y) = \|x-y\|$ é uma métrica em M. Isso que dizer a métrica d provém da norma $\| \quad \|$. Contudo, nem toda métrica provém de uma norma. De fato, vamos supor que (M,d) é um espaço métrico discreto e ao mesmo tempo M é espaço vetorial com a norma $\| \quad \|$, tal que $d(x;y) = \|x-y\|$. Observe que para $x \neq 0$, temos $d(0,x) = 1 = d(0, \lambda x)$, para todo $\lambda > 0$ real. Utilizando este fato conclua o absurdo: $1 = \lambda$, para todo λ real positivo. Portanto, a métrica discreta não provem de uma norma.

3.4 Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (munido da norma euclidiana usual). Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Demonstre que $A+B = \{a+b | a, b \in \mathbb{R}^n\}$ é também aberto de $\mathbb{R}^n$. Demonstre que: o intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$; o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 2\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$; o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ é um fechado de $\mathbb{R}^2$.

3.5 Demonstre que a norma euclidiana $\| \quad \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, de fato satisfaz os axiomas da definição de norma. Faça o mesmo para as normas da soma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ e do máximo
$\|x\|_\infty = \max_i\{|x_i|\}$. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$ e que $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\, \|x\|$. No espaço das funções contínuas
$M = \mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ é contínua}\}$, mostre que as aplicações
$n_1, n_2 : M \to \mathbb{R}, n_1(f) = \int_a^b |f(x)| dx$ e $n_2(f) = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$ são normas em M. Escreva as métricas correspondentes e interprete geometricamente o que significa a distância entre duas funções nestas normas.

CAPÍTULO 4

Espaços Topológicos

Definição 4.1 Seja X um conjunto. Uma *topologia* sobre X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:

i) $\emptyset$ e X estão em τ;

ii) Se $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ estão em τ, então $\mathcal{U}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_n$ está em τ;

iii) Se $\mathcal{U}_i \in \tau, \forall i \in I$, então $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \tau$.

Obs: Se τ é uma topologia em X, então o par (X, τ) é chamado de um *espaço topológico* .

Os conjuntos $\mathcal{U} \in \tau$ são chamados de *abertos*.

Exemplo 4.1 No caso de $X = (M, d)$ espaço métrico, a topologia é
$\tau = \{\text{abertos de } M \text{ na métrica } d\}$.

Obs: $\tau \subset \mathscr{P}(X) =$ conjunto das partes de X.

$$\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\} = \{\text{subconjuntos de } X\}$$

Exemplo 4.2 Seja $X = \{a, b, c\}$.

$$\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

Possíveis topologias de $X = \{a, b, c\}$:

1) $\tau_0 = \mathscr{P}(X)$

2) $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$

3) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

4) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

5) $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$

Note que $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ são topologias de X. τ_4 não é topologia de X, pois $\{a\} \cup \{B\} = \{a, b\} \notin \tau_4$.

Observações:

i) No exemplo, $(X, \tau_i), i = 0, 1, 2, 3$ são espaços topológicos distintos.

ii) As vezes a topologia τ não é citada. Por exemplo, quando houver perigo de confusão escreve-se "X é um espaço topológico".

iii) Um espaço métrico (M, d) é um espaço topológico e neste caso diz-se que a topologia é "gerada pela métrica".

4.1 A Topologia Discreta

Vimos o exemplo $X = \{a, b, c\}$, que é um espaço topológico para $\tau_0 = \mathscr{P}(X)$.

Em geral, se X é um conjunto qualquer, então $\tau_0 = \mathscr{P}(X)$ é sempre uma topologia de X e é chamada a *topologia discreta* de X, para o qual todo subconjunto de X é um aberto.

$$(X, \tau_0) := \text{espaço topológico discreto}$$

Obs: *Todo* conjunto X pode ser considerado como espaço topológico discreto.

4.2 A Topologia Caótica (ou trivial)

Se X é um conjunto, então $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ é sempre uma topologia de X.

O espaço topológico (X, τ_1) é dito espaço topológico trivial.

☺**Exemplo 4.3** Seja X um conjunto. Suponha que τ e τ' são topologias de X.

a) $\tau \cup \tau'$ é topologia de X?

b) $\tau \cap \tau'$ é topologia de X?

4.3 A Topologia Cofinita

Seja X um conjunto. $\tau_{\text{cof}} = \{\mathcal{U} \subset X : \mathcal{U}^c = X \backslash \mathcal{U}$ é finito ou é igual a $X\}$.

Então τ_{cof} é topologia sobre X, chamada *topologia cofinita* (ou topologia do complemento finito).

De fato,

i) $X^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = X \Rightarrow \emptyset, X \in \tau_{\text{cof}}$;

ii) Seja $\{A_i \in \tau_{\text{cof}}; i \in I\}$. Então $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_{\text{cof}}$.

De fato, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.

Como cada A_i^c é finito, esta interseção é finita ou é igual ao próprio X.

iii) Se $A_1, \ldots, A_n \in \tau_{\text{cof}}$, então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau_{\text{cof}}$, pois $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$ é finita ou igual a X (pois cada A_i^c é finito ou igual a X).

Obs: Se X é finito, então $\tau_{\text{cof}} = \tau_0$.

Exemplo 4.4 Seja $X = \mathbb{R}$ com topologia τ_{cof}.
$I = (-\infty, 1)$ não é aberto, pois $I^c = [1, \infty)$ não é finito.
$I = (a, b)$ não é aberto.

4.4 Topologia do Complemento Enumerável

☺**Exemplo 4.5** Seja X um conjunto e $\tau = \{\mathcal{U} \subset X : X \backslash \mathcal{U}$ é enumerável ou é igual a $X\}$. Mostre que (X, τ) é espaço topológico.

Definição 4.2 Sejam τ e τ' topologias no conjunto X. Dizemos que τ' é *mais fina* do que τ quando $\tau \supset \tau'$. (Todo aberto segundo τ' é necessariamente aberto segundo τ. τ' é menos fina que τ'.)

Obs: Duas topologias de X não precisam ser comparáveis (relação de inclusão). Exemplo, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}; \tau' = \{X, \emptyset, \{b\}\}; \tau \not\subset \tau', \tau' \not\subset \tau$.

4.5 Conjuntos Fechados

Definição 4.3 Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $F \subset X$ é chamado de *fechado* quando seu complementar $X \backslash F (F^c)$ é aberto (na topologia de X).

Exemplo 4.6 Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$.

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \Rightarrow (X, \tau)$ é espaço topológico. Então os fechados de (X, τ) são $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a\}$.

i) $\{b, c, d, e\}$ é aberto e fechado ao mesmo tempo.

ii) $\{a, b\}$ não é aberto e nem fechado.

Obs: Num espaço topológico um subconjunto não precisa ser aberto ou fechado mas pode ser aberto e fechado.

teo04 **Teorema 4.4** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então*

i) $\emptyset$ e X são fechados;

ii) Se F_j é fechado, $\forall j \in J =$ conjunto de índices, então $\bigcap_{j \in J} F_j$ é fechado;

iii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são fechados, então $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.

Demonstração:

☺ Exercício. (Veja o caso $X = (M, d)$). ■

Fecho de um conjunto

Definição 4.5 Seja (X, τ) um espaço topológico. O *fecho* de $A \subset X$, representado por $\bar{A}$, é definido como a interseção de todos os fechados que contém A, isto é, $\bar{A} = \bigcap F, F \supset A, F$ fechado.

Obs: $\bar{A}$ é fechado, é o "menor" fechado que contém A, isto é, F fechado e $F \supset A$, então $A \subset \bar{A} \subset F$.

E ainda, A fechado $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

Exemplo 4.7 Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$.

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

Os fechados são $X, \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d, e\}$.

$$\Rightarrow \{\bar{b}\} = \{b, e\}$$
$$\{\bar{z}a, c\} = X$$
$$\{\bar{z}b, c\} = \{b, c, d, e\}$$
$$\{\bar{a}\} = \{a\}$$

Interior

Definição 4.6 Seja (X,τ) espaço topológico e seja $p \in A$, onde $A \subset X$. Dizemos que p é *ponto interior* de A se $\exists \mathcal{U} \in \tau$ tal que $p \in \mathcal{U} \subset A$. ($\mathcal{U}$ é a vizinhança de p).

Obs: A classe de todas as vizinhanças de p é chamada de um sistema de vizinhanças de p.

Exemplo 4.8 Seja (M,d) espaço métrico. $p \in M, \mathcal{U} = B_\varepsilon(p)$. O *interior* de $A \subset X$ é o conjunto dos pontos interiores de A. Notação: intA ou $\overset{\circ}{A}$.

prop05 **Proposição 4.7** *Seja (X,τ) espaço topológico.*

i) intA $= \bigcup \mathcal{U}, \mathcal{U} \subset A, \mathcal{U} \in \tau$*;*

ii) intA *é o "maior" aberto contido em A, isto é, $\mathcal{U} \subset A$ e $\mathcal{U}$ aberto $\Rightarrow \mathcal{U} \subset \overset{\circ}{A} \subset A$.*

Demonstração:
Ver o caso (M,d) e generalizar. ■

Definição 4.8 (Fronteira) Sejam (X,τ) espaço topológico e $A \subset X$.
A *fronteira* de A é $\partial A := \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

☺**Exemplo 4.9** Sejam (X,τ) espaço topológico e $A \subset X$.

1. $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ todo aberto contendo x tem a mesma interseção não-vazia com A.
2. $x \in \partial A \Leftrightarrow$ todo aberto contendo x tem interseção não-vazia com A e A^c.

4.6 Bases

Se (M,d) é espaço métrico, um aberto $A \subset M$ é uma união de bolas abertas de M. Dado $a \in A, \exists \varepsilon_a > 0$ tal que $B_{\varepsilon_a}(a) \subset A$, então $A = \bigcup\limits_{a \in A} B_{\varepsilon_a}(a)$.

Em geral, é difícil descrever explicitamente os abertos de uma topologia. A idéia de base é encontrar uma coleção menor de subconjuntos de X e definir a topologia em termos desta coleção.

Definição 4.9 Seja X um conjunto. Uma *base* para uma topologia sobre X é uma coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X, chamadas de *abertos básicos* , tais que

i) $\forall x \in X, \exists B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$;

ii) Se $x \in B_1 \cap B_2, B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, então $\exists B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Exemplo 4.10 Seja $X = \mathbb{R}^2, \mathscr{B} = \{$"regiões circulares", isto é, interiores de círculos de $\mathbb{R}^2\}$.

Obs: Se $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia sobre X, então a topologia τ *gerada* por $\mathscr{B}$ é descrita: $\mathcal{U} \in \tau$ se para cada $x \in \mathcal{U}, \exists B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset \mathcal{U}$.

$$\tau = \{\mathcal{U} \subset X : \text{ para cada } x \in \mathcal{U}, \exists B \in \mathscr{B} \text{ tal que } x \in B \text{ e } B \subset \mathcal{U}\} \tag{4.1}$$

τ é topologia de X:

i) $\emptyset$ e X estão em τ;

ii) Seja $\mathcal{U}_i, i \in I, \mathcal{U}_i \in \tau, \forall i \in I$.

Então $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$ está em τ.

De fato, se $x \in \mathcal{U}$, então $x \in \mathcal{U}_{i_0}$ para algum $i_0 \in I$.

Como $\mathcal{U}_{i_0}$ é aberto, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}_{i_0} \subset \bigcup \mathcal{U}_i = \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \tau$.

iii) Sejam $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ abertos de τ. Então, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ está em τ. De fato, se $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, então $x \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow \exists B_1 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_1$ e $x \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow \exists B_2 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2$.

$\overset{def.base}{\Rightarrow} \exists B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$

$\Rightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ aberto (pela definição).

teo05 **Teorema 4.10** *Seja (X, τ) espaço topológico. Uma coleção $\mathscr{B}$ de abertos de τ é uma base para a topologia τ de X se, e somente se, dado*

$$\mathcal{U} \in \tau, \exists B_i \in \mathscr{B} (i \in I) \text{ tal que } \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \tag{4.2}$$

Demonstração:

$\Rightarrow$) Por hipótese $\mathscr{B}$ é base para τ. Seja $\mathcal{U} \in \tau$. Dado $u \in \mathcal{U}$, pela Eq. 4.1, $\exists B_u \in \mathscr{B}$ tal que $u \in B_u \subset \mathcal{U}$.

Portanto, $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{u \in \mathcal{U}} B_u$.

$\Leftarrow$) Por hipótese, vale a Eq. 4.2. Devemos verificar que $\mathscr{B}$ é base.

i) $x \in X, \mathcal{U} = X$ é aberto de τ. $\Rightarrow X = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B \Rightarrow x \in B$, algum $B \subset X$.

ii) $x \in B_1 \cap B_2, B_1$ e B_2 em $\mathscr{B}$. B_1 e B_2 são abertos $\Rightarrow B_1 \cap B_2$ aberto.
Tome $B_3 = B_1 \cap B_2$.

∎

Exemplo 4.11 Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a topologia usual.
$\mathscr{B} = \{$triângulos equiláteros abertos de $\mathbb{R}^2\}$.
Dado $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \mathcal{U}$ aberto e $p \in \mathcal{U}$ existe $B_\varepsilon(p) \subset \mathcal{U}$.
Pode-se "inscrever" um triângulo equilátero aberto Δ na $B_\varepsilon(p)$.
Logo, dado um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2, \exists \Delta \in \mathscr{B}$ tal que $p \in \Delta \subset \mathcal{U}$.

Exemplo 4.12 Seja $X = \mathbb{R}$ topologia usual $(d(x,y) = |x-y|)$.
$\mathscr{B} = \{(a,b) : a < b; a,b \in \mathbb{R}\}$ é base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.
De fato, dado $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}, \mathcal{U}$ aberto e $x \in \mathcal{U}$, temos que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\underbrace{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}_{I} \subset \mathcal{U}$ e $I \in \mathscr{B}$.
Equivalentemente, todo aberto de $\mathcal{U}$ é união de intervalos abertos.

4.7 Sub-bases

Definição 4.11 Seja (X, τ) espaço topológico. Uma coleção $\mathscr{L}$ de abertos de τ é uma *sub-base* para τ quando o conjunto $\mathscr{B} = \{$interseções finitas de conjuntos de $\mathscr{L}\}$ forma uma base para τ.

Exemplo 4.13 Seja $X = \mathbb{R}$ com a topologia usual.
$\mathscr{L} = \{(-\infty, x), (y, +\infty); x, y \in \mathbb{R}\}$. Então, $\mathscr{L}$ é uma sub-base para a topologia usual de $\mathbb{R}$. De fato, todo intervalo aberto $(a,b) \subset \mathbb{R}(a < b)$ é da forma $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$.
Então, todo aberto básico de $\mathscr{B} = \{(a,b) : a < b; a,b \in \mathbb{R}\}$ é interseção finita de conjuntos, e $\mathscr{B}$ gera a topologia usual de $\mathbb{R}$.

teo06 **Teorema 4.12** *Seja $X = \emptyset$. Uma coleção qualquer $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X) = \{$partes de $X\}$ é sub-base para uma topologia τ em X.*

Demonstração:
Seja $\mathscr{B} = \{$interseções finitas de conjuntos de $\mathscr{A}\}$. $X \in \mathscr{B}$.
Se $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, então

$$B_1 = A_1 \cap \ldots \cap A_n, A_i \in \mathscr{A}, i = 1, \ldots, n$$
$$B_2 = A'_1 \cap \ldots \cap A'_m, A'_j \in \mathscr{A}, j = 1, \ldots, m$$

$\Rightarrow B_1 \cap B_2 = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A'_1 \cap \ldots \cap A'_m \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$.
Logo, $\mathscr{B}$ é base para uma topologia τ de X.

∎

Exemplo 4.14 Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Dado $\mathscr{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$,

$\mathscr{B} = \{$interseções finitas de conjuntos de $\mathscr{A}\} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ $\mathscr{B}$ gera topologia para o qual $\mathscr{A}$ é sub-base.

4.8 Subespaço Topológico

teo07 **Teorema 4.13** *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. A coleção $\tau_A = \{A \cap \mathcal{U}; \mathcal{U} \in \tau\}$ é uma topologia para A. O par (A, τ_A) é chamado de subespaço topológico de (X, τ), (τ_A é a topologia relativa ou induzida por τ).*

Demonstração:

i) A e $\emptyset$ estão em τ_A

pois $A = A \cap X$, X é aberto de X. $\emptyset = A \cap \emptyset$, $\emptyset$ é aberto de X.

ii) Sejam $A \cap \mathcal{U}_1, \ldots, A \cap \mathcal{U}_n$ em τ_A. Então

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A \cap \mathcal{U}_i) = A \cap \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \right)}_{\in \tau}; \mathcal{U}_i \in \tau, i = 1, \ldots, n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \in \tau$$

iii) Sejam $A \cap \mathcal{U}_i, i \in I$ (conjunto de índices) e $\mathcal{U}_i \in \tau, \forall i$.

Então, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A \cap \mathcal{U}_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right)}_{\in \tau} \cap A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} (A \cap \mathcal{U}_i) \in \tau_A$.

■

lem04 **Lema 4.14** *Se $\mathscr{B}$ é base da topologia τ de X, então, para $A \subset X$, $\mathscr{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathscr{B}\}$ é uma base para a topologia τ_A de A.*

Demonstração:

i) Seja $x \in A \subset X \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\displaystyle\Rightarrow A = \bigcup_{b \in \mathscr{B}} (B \cap A)$.

ii) Seja $x \in (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2$.

$\mathscr{B}$ é base de $\tau \Rightarrow \exists B_2$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \Rightarrow x \in A \cap B_3$ e $A \cap B_3 \subset (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2)$.

■

Exemplo 4.15 Seja (M, d) espaço métrico e $N \subset M$. Então (N, d') é "subespaço métrico" $d' = d|_{n \times n}$ $(d : M \times M \to \mathbb{R})$.

4.8.1 Topologia Produto (Tychonoff)

Definição 4.15 Sejam X, Y conjuntos $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

teo08 **Teorema 4.16** *Se (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos, então $\mathscr{B} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$ é uma base para uma topologia em $X \times Y$ (chamada topologia produto ou de Tychonoff).*

Demonstração:

i) $X \in \tau_1, Y \in \tau_2 \Rightarrow X \times Y \in \mathscr{B}$.

ii) Sejam $A_1 \times A_2$ e $A_1' \times A_2'$ em $\mathscr{B}$. Então
$(A_1 \times A_2) \cap (A_1' \times A_2') = \underbrace{(A_1 \times A_1')}_{\in \tau_1} \times \underbrace{(A_2 \times A_2')}_{\in \tau_2} \in \mathscr{B}$.

Portanto, $\mathscr{B}$ gera uma topologia em $X \times Y$. ■

Observações:

i) $\mathscr{B}$ pode não ser fechado para união.

ii) Pode-se definir a topologia de Tychonoff num produto cartesiano arbitrário $\prod_{i \in I} X_i$ de espaços topológicos (a definir).

teo09 **Teorema 4.17** *Sejam $\mathscr{B}$ base para topologia de X e $\mathscr{C}$ base para topologia de Y. Então $\mathscr{D} = \{B \times C : B \in \mathscr{B}$ e $c \in \mathscr{C}\}$ é base para a topologia produto de $X \times Y$.*

Demonstração:
Lembre-se que $\tau = \{\mathcal{U} \subset X \times Y : \forall a \in \mathcal{U}, \exists d \in \mathscr{D}$ tal que $a \in D \subset \mathcal{U}\}$.
Seja $(x, y) \in W \subset X \times Y, W$ é aberto.
$\Rightarrow \exists \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ aberto de X, $\mathcal{V}$ aberto de Y tal que $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset W$.
Como $\mathscr{B}$ é base para a topologia de X e $\mathscr{C}$ é base para a topologia de Y, existem $B \in \mathscr{B}$ e $C \in \mathscr{C}$ tais que $(x, y) \in B \times C \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset W$.
Portanto, $\mathscr{D}$ é base para a topologia de $X \times Y$. ■

4.9 Exercícios Propostos

4.1 Defina topologia sobre um conjunto. Defina espaço topológico. Considere o conjunto $X = \{a, b, c\}$. Classifique todas as topologias possíveis sobre X, isto é, liste todos os subconjuntos do conjunto das partes de X e verifique quais deles são topologia.

4.2 Dado um conjunto X, mostre que $\tau = \{U \subset X | X \backslash U \text{ é enumerável}\}$ é uma topologia sobre X (chamada topologia do complemento enumerável). Verifique se X é enumerável, então a topologia do complemento enumerável sobre X é a topologia discreta sobre X.

4.3 Seja $\tau^r = \{\mathbb{R}, \emptyset, (q, \infty); q \in \mathbb{Q}\}$. Aqui, fixado $q \in \mathbb{Q}$, o conjunto (q, ∞) é o intervalo aberto infinito $\{x \in \mathbb{R} | x > q\}$. Mostre que τ^r não forma uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

4.4 Seja $f : X \to Y$ uma função de um conjunto X num espaço topológico (Y, τ). Mostre que $T = \{f^{-1}(U) | U \in \tau\}$ é uma topologia sobre X.

4.5 Seja τ a classe de subconjuntos de $\mathbb{N}$ formada de $\emptyset$ e de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ da forma $E_n = \{n, n+1, n+2\}$ com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que τ é uma topologia em $\mathbb{N}$. Indique os abertos que contêm o inteiro positivo 6. Determine os fechados segundo esta topologia. Determine o fecho dos conjuntos $\{7, 24, 47, 85\}$ e $\{3, 6, 9, 12\}$. Determine os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que são densos em $\mathbb{N}$ (neste caso, um subconjunto é denso se o seu fecho é $\mathbb{N}$).

4.6 Mostre que se A é um subconjunto de um espaço topológico X, então o fecho de A é a união do interior com a fronteira. Mostre também que o interior de A é $A \backslash \partial A$ e que $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X \backslash A)$.

4.7 Seja X um espaço topológico. Lembramos que uma *vizinhança* de um ponto $p \in X$ é um subconjunto $V_p \subset X$ para o qual existe um aberto $\mathcal{U}$ de X tal que $p \in \mathcal{U} \subset V_p$. O *sistema de vizinhanças* de p é a coleção $\mathcal{V}_x$ de todos os subconjuntos de X que são vizinhança de p. Por exemplo, no conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$, considere a topologia $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$. Encontre $\mathcal{V}_e$ e $\mathcal{V}_c$. Voltando ao caso geral, demonstre que

(1) Se $V \subset \mathcal{V}_x$, então $x \in V$.

(2) Se $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, então $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

(3) Se $V \in \mathcal{V}_x$, então existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \in \mathcal{V}_y$, para todo $y \in U$.

(4) Se $V \in \mathcal{V}_x$ e $V \subset U$, então $U \in \mathcal{V}_x$.

Finalmente, mostre que

* Um subconjunto G de X é aberto se, e somente se, G contém uma vizinhança de cada um de seus pontos. A condição * acima pode ser utilizada como definição de aberto: Seja X um conjunto e uma coleção não vazia $\mathcal{V}_x$ de subconjuntos de X para a qual cada $x \in X$ satisfaz os itens (1) a (4) acima. Defina aberto em X como na *. Resulta em X uma topologia para a qual todo o sistema de vizinhanças de cada $x \in X$ é exatamente $\mathcal{V}_x$.

4.8 Defina base e sub-base de um espaço topológico. Mostre que a partir de qualquer subconjunto $\mathcal{A}$ das partes de um conjunto X pode-se obter uma topologia de X para a qual a sub-base é $\mathcal{A}$. No conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ considere $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$. Determine a topologia gerada por $\mathcal{A}$ (descreva a base e os abertos). Mostre que a coleção de todos os intervalos abertos (a, b), com $a < b$ números reais é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostre ainda que a coleção de todos os intervalos do tipo $(-\infty, b)$ e (a, ∞) é uma sub-base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

4.9 No exercício (4.5) acima, mostre que a coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contém algum E_n é uma base para uma topologia de $\mathbb{N}$.

4.10 Determine a menor sub-base para a topologia cofinita τ em qualquer conjunto não vazio X.

A TOPOLOGIA DE ZARISKI

Veremos agora uma topologia muito útil para a Álgebra, em particular no estudo de anéis comutativos, a topologia de Zariski. Iniciamos recordando alguns conceitos algébricos fundamentais.

Seja R um anel comutativo com unidade. Denotamos por 0 o elemento neutro da soma e por 1 o elemento neutro do produto de R. Um *ideal* de R é um subconjunto $I \subset R$, fechado para a soma e que contém todos os produtos do tipo ar, com $a \in I$ e $r \in R$. Um *ideal primo* de R é um ideal P de R para o qual a pertinência $ab \in P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$, para todos $a, b \in R$. O ideal gerado por $a \in R$ é o conjunto $(a) = aI = \{ax | x \in I\}$. Por exemplo, se p é um número primo, então $p\mathbb{Z} = \{pr | r \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}$ e é gerado por p. Observe que o ideal gerado por 0 é $I = \{0\}$ e o ideal gerado por 1 é o próprio R. Mostre que qualquer ideal de R que contém 1, ou um elemento inversível qualquer de R, é o próprio R. Ideais do tipo aI, isto é, gerados por um elemento, são denominados ideais principais de R.

Dados dois ideais I e J de R, verifique que o produto IJ definido por $\{\sum ab | a \in I, b \in J\}$ (somas finitas de produtos de elementos de I e de J) é também um ideal de R. Dada uma família $\{I_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ de ideais de R, defina $\sum_\alpha I_\alpha$ como o conjunto de todas as somas finitas de elementos $x_\alpha \in I_\alpha$ e mostre que $\sum_\alpha I_\alpha$ é um ideal de R. Todas estas definições e resultados serão utilizados abaixo.

A topologia de Zariski será introduzida no *espectro primo* do anel R, que é definido como

$$\operatorname{Spec}(R) = \{P \subset R | P \text{ é ideal primo de } R\},$$

isto é, o conjunto de todos os ideais primos de R. Determine o espectro primo dos anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}[X]$. Dado um ideal I de R, defina

$$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec}(R) | P \supseteq I\}.$$

Conclua que $V(\{0\}) = \operatorname{Spec}(R)$ e $V(\{1\}) = \emptyset$. Dado um inteiro positivo m, determine $V(mI)$ em $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Mostre que

(a) $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$, para quaisquer ideais I, J de R.

(b) $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Gamma} V(I_\alpha) = V\left(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\right)$ (lembre que soma e produto de ideais continua sendo ideal).

Assim, os fechados para a topologia de Zariski sobre $\operatorname{Spec}(R)$ são definidos pelos conjuntos $V(I)$, onde I é um ideal de R. Os abertos desta topologia são os conjuntos do tipo $D(I) = \operatorname{Spec}(R) \backslash V(I)$, isto é, o complementar de $V(I)$ em $\operatorname{Spec}(R)$. Demonstre que a coleção $\mathcal{B} = \{D(I) | I \text{ é um ideal principal de } R\}$ é uma base para a topologia de Zariski sobre $\operatorname{Spec}(R)$.

CAPÍTULO 5

Funções Contínuas em Espaços Topológicos

Definição 5.1 Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função. Dizemos que f é *contínua* se para todo aberto V de Y, $f^{-1}(V)$ for aberto de X.

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

$f^{-1}(V)$ é a *imagem inversa* de V por f.
Em termos das topologias: $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$.

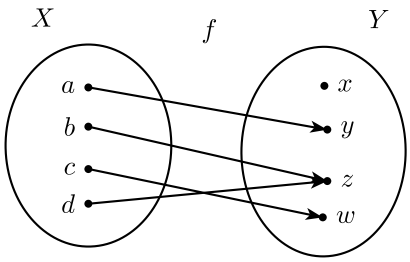
$$f \text{ contínua } \Leftrightarrow \forall v \in \tau_2, f^{-1}(V) \in \tau_1. \tag{5.1}$$

Obs: Sendo $\mathscr{B}'$ base de τ' e $\mathscr{B}$ base de τ, para que $f : X \to Y$ seja contínua basta que a Eq. (5.1) seja válida para os abertos básicos, ou seja, $\forall B' \in \tau', f^{-1}(B') \in \tau$.

De fato, $V \in \tau' \Rightarrow V = \bigcup_{i \in I} B'_i \Rightarrow f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B'_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B'_i)$ que é aberto, desde que $f^{-1}(B'_i)$ seja aberto.

Exemplo 5.1 Sejam (X, τ_0) espaço topológico discreto e (Y, τ) espaço topológico qualquer $f : (X, \tau_0) \to (Y, \tau)$ é contínua, pois $f^{-1}(V) \in \tau_0, \forall V \in \tau$. (Todo subconjunto de (X, τ_0) é aberto).

Exemplo 5.2 Sejam $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{x, y, z, w\}$.
$\Rightarrow f$ é contínua.



$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$
$\tau' = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,w\}\}$
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$
$f^{-1}(Y) = X \in \tau$
$f^{-1}(\{x\}) = \emptyset \in \tau$
$f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \in \tau$
$f^{-1}(\{x,y\}) = \{a\} \in \tau$
$f^{-1}(\{y,z,w\}) = X \in \tau$

Figura 5.1:

teo10 **Teorema 5.2** *Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos. $f : X \to Y$ contínuas (topologias geradas pelas métricas) se, e somente se, $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon(x)$ tal que $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon (*)$.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) f é contínua. Seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$.
f é contínua $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é aberto de X e contém x.
$\Rightarrow \exists B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.
Assim, se $y \in B_\delta(x)$, tem-se $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$.
Logo, $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Suponha $(*)$. Seja V aberto de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Mas $f(x) \in V$ aberto $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(x)) \subset V$.
$(*) \Rightarrow \exists B_\delta(x)$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V)$ aberto de X. ∎

teo11 **Teorema 5.3** *Sejam (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos, e $f : X \to Y$ função. São equivalentes.*

i) f é contínua;

ii) $\forall A \subset X, f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

iii) $\forall$ fechado $B \subset Y, f^{-1}(B)$ é fechado em X.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha f contínua e seja $A \subset X$. Dado $x \in \bar{A}$, isto é, $f(x) \in f(\bar{A})$. Devemos mostrar que $f(x) \in \overline{z}f(A)$.
Tome V aberto de Y tal que $f(x) \in V$. Como f é contínua, $f^{-1}(V)$ é aberto de X e $x \in f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(V)$ contém ao menos um ponto $y \in A$, isto é, $y \in f^{-1}(V) \cap A$.
$\Rightarrow V \cap f(A) \neq \emptyset$, pois $f(y) \in V \cap f(A) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam B fechado em Y e $A = f^{-1}(B)$. Devemos mostrar que A é fechado. Basta provar que $\bar{A} \subset A$.

Seja $x \in \bar{A}$. Então $f(x) \in f(\bar{A}) \overset{\text{hip}}{\subset} \overline{f(A)} = \bar{B} = B$, pois B é fechado.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B) = A$.

Observação:

$$
\begin{aligned}
&A = f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \\
&f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B \\
&f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) = A
\end{aligned}
$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Seja $V \subset Y$, V aberto e seja $B = Y \backslash V = V^c$ (complementar de V em Y).

Então B é fechado em Y. Logo, da hipótese, $f^{-1}(B)$ é fechado em X.

Note que $f^{-1}(V) = f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \backslash B) = \underbrace{f^{-1}(Y)}_{X} \backslash f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ aberto. Portanto, f é contínua. ■

teo12 **Teorema 5.4** *Sejam X, Y, Z espaços topológicos.*

i) Se $f : X \to Y$ é função constante, então f é contínua.

ii) Se $A \subset X$ é subespaço topológico de X, então a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ tal que $a \mapsto i(a) = a$. i é contínua.

iii) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ contínuas, então $g \circ f$ é contínua.

iv) Se $f : X \to Y$ contínua e $A \subset X$ subespaço topológico, então $h = f|_A : A \to Y$ tal que $h(a) = f(a), \forall a \in A$ (restrição).

Demonstração:

i) Seja $p \in Y$ tal que $f(x) = p, \forall x \in X$. Seja $V \subset Y$, V aberto.

Se $p \in V \Rightarrow f^{-1}(V) = X$.

Se $p \notin V \Rightarrow f^{-1}(V) = \emptyset$.

Em qualquer caso, $f^{-1}(V)$ é aberto de X, para todo aberto V de Y. Portanto, f é contínua.

ii) Seja $\mathcal{U} \subset X, \mathcal{U}$ aberto. Devemos mostrar que $i^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto de X. Note que $i^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap A$ é aberto de A, pela definição da topologia de A.

Portanto, i é contínua.

iii) Seja $\underbrace{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z}_{g\circ f}$, f, g contínua. Seja $W \subset Z$, W aberto. Devemos mostrar que $(g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto de X.

Como g é contínua, $g^{-1}(W)$ é aberto de Y. Como f é contínua e $g^{-1}(W)$ é aberto de Y, temos $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto de X.

Como $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W) \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto de X.

Portanto, $g \circ f$ é contínua.

iv) Seja $V \subset Y$, V aberto. Devemos mostrar que $h^{-1}(V)$ é aberto de A. Mas $h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A \Rightarrow h^{-1}(V)$ aberto de A (pela definição da topologia de A).

Uma outra forma de demonstrar é fazendo $h = f \circ i, A \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$ e i e f são contínuas $\Rightarrow h$ é contínua.

■

teo13 **Teorema 5.5** *Seja X um espaço topológico tal que $X = A \cup B$. Tome Y espaço topológico e $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ contínuas tais que $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$ (A e B subespaços topológicos de X).*

Então, a função $h : X \to Y$ é contínua.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

Demonstração:
Seja $F \subset Y$, F fechado. Então

$$h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$$

é fechado, pois $f^{-1}(F), g^{-1}(F)$ são fechados. ■

Definição 5.6 Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função. Dizemos que f é contínua em $p \in X$ quando dado $V \subset Y$, V aberto, tal que $f(p) \in V$, existe $\mathcal{U} \subset X, \mathcal{U}$ aberto, tal que $p \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subset f^{-1}(V)$.

teo14 **Teorema 5.7** *Sejam X, Y espaços topológicos. Então $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, f é contínua em $p, \forall p \in X$.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Fixe $p \in X$ e tome $V \subset Y$, V aberto, tal que $f(p) \in V$.
f é contínua, então $f^{-1}(V)$ é aberto de X e $p \in \mathcal{U} = f^{-1}(V)$.

$\Leftarrow$) Seja $V \subset Y$, V aberto. Mostrar que $f^{-1}(V)$ é aberto. Tome $x \in f^{-1}(V)$. Então $f(x) \in V$, que é aberto.

Por hipótese, $\exists \mathcal{U} \subset X$ aberto tal que $x \in \mathcal{U} \subset f^{-1}(V)$.

Portanto, $f^{-1}(V)$ é aberto. ∎

5.1 Sequências em Espaços Topológicos

Definição 5.8 Seja X um espaço topológico. Uma *sequência* em X é uma função

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto s(n) := x_n \end{aligned}$$

Notação: $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Definição 5.9 Dizemos que a sequência (x_n) em X *converge* para $x \in X$ quando $\forall \mathcal{U} \subset X$, X aberto, tal que $x \in \mathcal{U}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}, \forall n \geqslant n_0$.

Exemplo 5.3 $X = \mathbb{R}$, (x_n) de $\mathbb{R}$, (x_n) converge para $x \in \mathbb{R}$ quando, dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

$$(x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon), \forall n \geqslant n_0)$$

Notação: $(x_n) \to x$

Exemplo 5.4 Seja $x = \emptyset$ com topologia $\tau = \{\emptyset, X\}$. Seja (x_n) uma sequência em X, então X é o único aberto de X que contém todos os pontos de X.

Logo, se $x \in X$, pela definição de convergência de sequência, temos $(x_n) \to x$.

Exemplo 5.5 Seja X com a topologia discreta, isto é, $\tau = \mathscr{P}(X)$.

Tome (x_n) uma sequência em X e fixe $x \in X$.

Como τ é discreto, qualquer $A \subset X$ é aberto.

Em particular, $\{x\}$ é aberto e é claro que $x \in \{x\}$. Assim, se a sequência (x_n) converge para x, então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \{x\}, \forall n > n_0$.

$\Rightarrow x_n = x, \forall n > n_0 \Rightarrow (x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x, x, x, \ldots)$

Exemplo 5.6 Seja (X, τ),$\mathcal{U} \in \tau$ se, e somente se, $\mathcal{U}$ em X é enumerável ou $\mathcal{U} = \emptyset$.

Seja $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ sequência em (X, τ) e suponha $(x_n) \to x \in X$.

Seja $A = \{x_j : x_j \neq x\} \Rightarrow A$ é enumerável $\Rightarrow A^c$ é aberto e $x \in A^c$.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A^c, \forall n > n_0$.

Assim, $x_n = x, \forall n > n_0$. $\Rightarrow (x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x, x, x, \ldots)$.

5.2 Continuidade Sequencial em um Ponto

Definição 5.10 Sejam X, Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é *sequencialmente contínua* em $x \in X$ quando $\forall (x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$, valer $f(x_n) \to f(x)$.

teo15 **Teorema 5.11** *Seja $f : X \to Y$ contínua em $x \in X$. Então, f é sequencialmente contínua em x.*

Demonstração:
Seja (x_n) sequência em X tal que $x_n \to x$.
Devemos provar que $f(x_n) \to f(x)$.
Seja $V \subset Y$, V aberto tal que $f(x) \in V$. Como f é contínua em x, temos que $\exists \mathcal{U} \subset X$, $\mathcal{U}$ aberto, tal que $x \in \mathcal{U} \subset f^{-1}(V)$.
Como $x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}, \forall n \geqslant n_0$.
Então, $f(x_n) \in f(\mathcal{U}) \subset V, \forall n \geqslant n_0$.
Portanto, $f(x_n) \to f(x)$. ∎

teo16 **Teorema 5.12** *Se (X, d) é espaço métrico e Y é espaço topológico, então $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, f é sequência contínua em x.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Teorema anterior.

$\Leftarrow$) ver [?]. ∎
Em particular, o teorema vale para funções reais na topologia usual.
A recíproca do teorema (5.11) não vale, em geral, para espaços topológicos.

Exemplo 5.7 $X = \mathbb{R}$ com topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R} / A^c \text{ enumerável}\}$ (ou $A = \emptyset$). Com esta topologia, vimos que uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ converge para x se, e somente se, $(x_n) = (x_1, \ldots, x_{n_0}, x, x, x, \ldots)$.

Logo, se $(\mathbb{R}, \tau^*), \tau^*$ é uma topologia qualquer em $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau^*)$ e $(x_n) \to x$ em $(\mathbb{R}, \tau)$, tem-se

$$(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n_0}), f(x), f(x), \ldots)$$

que converge em $(\mathbb{R}, \tau^*), \forall f$.

Por outro lado, $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \text{top. usual})$ e $f(a) = a, \forall a$ não é contínua, pois $f^{-1}((a_0, b_0)) = (a_0, b_0)$ não é aberto em τ.

5.3 Topologia inicial

Questão: Seja $X \neq \emptyset$ e (Y, τ') um espaço topológico. Existe topologia τ em X tal que $f : (x, \tau) \to (Y, \tau')$ é contínua.

1) τ é topologia discreta.

2) Topologia inicial: Seja $\mathscr{C} = \{f^{-1}(V) : V \text{ aberto em } Y\}$.

$\mathscr{C}$ é sub-base para uma topologia em X tal que f é contínua.

5.4 Funções Abertas e Funções Fechadas

Definição 5.13 Sejam (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é *aberta* quando $f(\mathcal{U}) \in \tau', \forall \mathcal{U} \in \tau$ (f aplica abertos de X em abertos de Y). Analogamente, f é *fechada* se aplica fechados de X em fechados de Y.

Obs: $f : X \to Y$ aberto não implica que f é contínua.

Exemplo 5.8

$$\begin{aligned} \text{id } &: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2) \\ x &\qquad \mapsto x \end{aligned}$$

Se $\tau_1 \subset \tau_2$, então id é aberta, pois todo aberto de τ_1 é aberto de τ_2.
Se $\exists V \in \tau_2$, e $V \notin \tau_1$, então id não é contínua, pois $\text{id}^{-1}(V) = V \notin \tau_1$.

Exemplo 5.9 $X = \{a, b\}$, topologia discreta.

$$\begin{aligned} f &: X \to \mathbb{R} \text{ top. usual} \\ a &\mapsto 0 \\ b &\mapsto 1 \end{aligned}$$

f é contínua, pois toda função sobre um espaço topológico discreto é contínua.
Fechados de X: $\{a\} \to \{0\}, \{b\} \to \{1\}, \{X\} \to \{0, 1\}$.
$\Rightarrow f$ fechada e não aberta, pois $f(\{a\})$ é fechado.

5.5 Homeomorfismo

Definição 5.14 Sejam (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é *homeomorfismo* quando f é bijetora e f, f^{-1} são contínuas.

Notação: $X \overset{f}{\cong} Y$ (X é homeomorfo a Y).
Obs: $f : X \to Y$ bijeção contínua não implica que f é homeomorfismo. (f^{-1} pode não ser contínua).

Exemplo 5.10 Sejam S^1 [1] e $[0, 2\pi)$ com topologia usual (induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$). Seja

$$\begin{aligned} f\ :\ & [0, 2\pi) \to S^1 \\ t\ & \mapsto (\cos t,\ \mathrm{sen} t) \end{aligned}$$

f é contínua, bijeção.
$\Rightarrow \exists f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$, mas f^{-1} não é contínua.

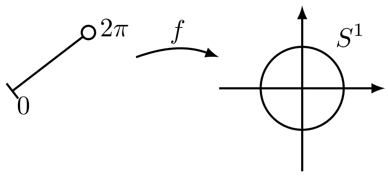


Figura 5.2:

Obs: A "relação de homeomorfismo" é de equivalência na família dos espaços topológicos.

i) $(X, \tau) \overset{\mathrm{id}}{\cong} (X, \tau)$ (reflexividade)

ii) $(X, \tau) \overset{f}{\cong} (Y, \tau') \Rightarrow (Y, \tau') \overset{f^{-1}}{\cong} (X, \tau)$ (simetria)

iii) $(X, \tau) \overset{f}{\cong} (Y, \tau') \overset{g}{\cong} (Z, \tau'') \Rightarrow (X, \tau) \overset{g \circ f}{\cong} (Z, \tau'')$

Obs: Composição de bijeção é bijeção. Composição de contínua é contínua.

[1] S^1, veja pág. 5

Exemplo 5.11 $\mathbb{R} \cong (a,b)$. Seja

$$\begin{aligned} f\ &: (a,b) \to (-1,1) \\ t\ &\mapsto f(t) = \frac{2t-(b+a)}{b-a} \end{aligned}$$

f é bijeção contínua. E $f^{-1}(y) = \dfrac{(b-a)y+(a+b)}{2}$ que também é contínua.
$\Rightarrow (a,b) \cong (-1,1)$.

Exemplo 5.12 Seja

$$\begin{aligned} g\ &: \mathbb{R} \to (-1,1) \\ t\ &\mapsto \frac{t}{1+|t|} \end{aligned}$$

g é bijeção contínua e $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.
$\Rightarrow \mathbb{R} \cong (-1,1)$. Por simetria, $\Rightarrow (-1,1) \overset{g^{-1}}{\cong} \mathbb{R}$.
Mas $(a,b) \overset{f}{\cong} (-1,1) \overset{g^{-1}}{\cong} \mathbb{R} \Rightarrow (a,b) \overset{g\circ f}{\cong} \mathbb{R}$.

Exemplo 5.13 (Projeção Estereográfica) Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com topologia usual.

$$\begin{aligned} \phi\ &: S^2\backslash\{p\} \to \mathbb{R}^2 \\ x\ &\mapsto \phi(x) \end{aligned}$$

$\phi(x) =$ interseção da reta r_x com o plano. ϕ é homeomorfismo (Fig. 5.3).

lem05 **Lema 5.15** *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função bijetiva, são equivalentes:*

i) f aberta;

ii) f fechada.

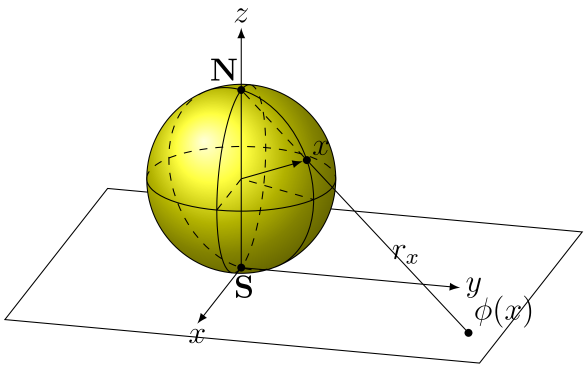


Figura 5.3: Projeção estereográfica.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $F \subset X$, F fechado.
$\Rightarrow X \backslash F$ é aberto.
f aberto $\Rightarrow f(X \backslash F)$ aberto. Mas $f(X \backslash F) = f(x) \backslash f(F)$ aberto.
Como f é bijeção, então $f(x) = y$, ou seja, $Y \backslash f(F)$ é aberto $\Rightarrow f(F)$ é fechado.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $\mathcal{U} \subset X$, $\mathcal{U}$ aberto.
$\Rightarrow X \backslash \mathcal{U}$ é fechado.
f fechado $\Rightarrow f(X \backslash \mathcal{U})$ é fechado.
Mas $f(X \backslash \mathcal{U}) = f(x) \backslash f(\mathcal{U}) = Y \backslash f(\mathcal{U})$
$\Rightarrow Y \backslash f(\mathcal{U})$ é fechado, $\Rightarrow f(\mathcal{U})$ é aberto. ■

teo17 **Teorema 5.16** *Seja $f : X \to Y$ bijetiva (X, Y espaços topológicos). São equivalentes:*

i) f é homeomorfismo;

ii) f é contínua e aberta;

iii) f é contínua e fechada.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ f homeomorfismo $\Rightarrow f$ contínua.
Sejam $\mathcal{U} \subset X$, $\mathcal{U}$ aberto e $g = f^{-1}$, que é contínua, pois f é homeomorfismo.
$\Rightarrow g^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto. E $g^{-1}(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U})$. De fato,
$x \in g^{-1}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow g(x) = f^{-1}(x) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x \in f(\mathcal{U})$
$\Rightarrow f(\mathcal{U})$ é aberta. $\Rightarrow f$ é aberta.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Basta mostrar que f^{-1} é contínua. Seja $\mathcal{U}$ aberto de X. Temos que $f(\mathcal{U})$ é aberto, pois f é aberta, por hipótese, mas $f(\mathcal{U}) = g^{-1}(\mathcal{U}) \Rightarrow g$ é contínua $(g = f^{-1})$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ segue diretamente do lema. ■

cor02 **Corolário 5.17** *Seja $f : X \to Y$ homeomorfismo.*

i) $A \cong f(A), \forall A \subset X$;

ii) $X \backslash A \cong Y \backslash f(A), \forall A \subset X$.

Demonstração:
☺ Exercício. ■

5.6 Axiomas de Separação

Definição 5.18 Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que X é um *espaço de Fréchet* (espaço T_1) quando $\forall x, y \in X; x \neq y, \exists \mathcal{U} \in \tau$ tal que $x \in \mathcal{U}$ e $y \notin \mathcal{U}$.

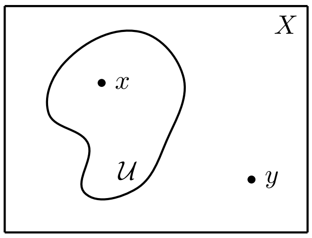


Figura 5.4: Exemplo de espaço de Fréchet.

teo18 **Teorema 5.19** (X, τ) *é* $T_1 \Leftrightarrow \{x\}$ *fechado,* $\forall x \in X$.

Demonstração:
$\Rightarrow$) Sejam X espaço T_1 e $x \in X$.
Seja $y \in X \backslash \{x\}$. Então, $\exists$ aberto $\mathcal{U}_y \subset X$ tal que $y \in \mathcal{U}_y$ e $x \notin \mathcal{U}_y$.

$$\Rightarrow X \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in \{x\}^c} \mathcal{U}_y \Rightarrow X \backslash \{x\} \text{ é aberto.} \Rightarrow \{x\} \text{ é fechado.}$$

$\Leftarrow$) Sejam $x, y \in X, x \neq y$. Por hipótese, $\{x\}$ e $\{y\}$ são fechados.
$\Rightarrow X \backslash \{x\}$ e $X \backslash \{y\}$ são abertos.
Assim, $x \in \underbrace{X \backslash \{y\}}_{\mathcal{U}}$ e $y \notin \mathcal{U} \Rightarrow X$ é T_1. ■

Exemplo 5.14 $X = \mathbb{R}$, topologia usual.

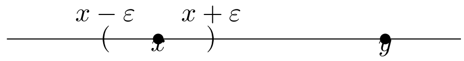


Figura 5.5:

Sejam $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$. Podemos assumir $x < y$. Tome $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2}$.
$\Rightarrow x \in \mathcal{U} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ e $y \notin \mathcal{U}$.
$\Rightarrow \mathbb{R}$ (usual) é T_1.

Exemplo 5.15 Seja (X, d) espaço métrico. Então, (X, d) é T_1.
De fato, $x, y \in X, x \neq y$. Tome $\mathcal{U} = B_r(x), r = \dfrac{d(x,y)}{2}$.
$\Rightarrow x \in \mathcal{U}$ aberto e $y \notin \mathcal{U}$.
Suponha $y \in \mathcal{U}$, então $0 < d(x,y) < r = \dfrac{d(x,y)}{2}$.
$\Rightarrow 2\underbrace{d(x,y)}_{>0} < \underbrace{d(x,y)}_{>0}$. Absurdo.

Exemplo 5.16 Seja $X = \{a, b\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. $a \neq b$ implica que o único aberto de X que contém b é X.
Mas X também contém a. Portanto, X não é T_1.
Usando o Teo. (5.19), X não é T_1, pois $\{a\}$ não é fechado, pois $\{a\}^c = \{b\}$ não é aberto.

Exemplo 5.17 Seja (X, τ) (topologia discreta) é T_1, pois $\{x\}$ é fechado, $\forall x \in X$.

Obs: (X, τ) é $T_1 \Leftrightarrow \tau_{\text{cof}} \subset \tau$. De fato,
$\Rightarrow$) $A \in \tau_{\text{cof}}, A \neq \emptyset \Rightarrow A^c = \{a_1, \ldots, a_n\} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$.
Por hipótese, X é $T_1 \Rightarrow \{a_i\}$ fechado
$\Rightarrow A^c$ fechado de $\tau \Rightarrow A$ aberto de τ.
$\Rightarrow \tau_{\text{cof}} \subset \tau$.

☺ $\Leftarrow$) Exercício.

5.7 Espaços de Hausdorff

Definição 5.20 (X, τ) é *espaço de Hausdorff*, ou espaço T_2, quando $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tal que $x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

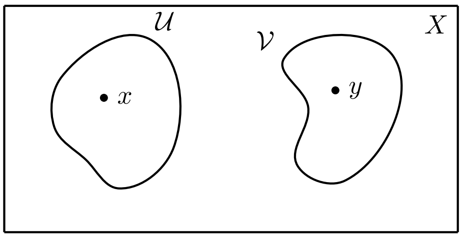


Figura 5.6: Exemplo de espaço de Hausdorff.

Obs: $T_2 \Rightarrow T_1$.

$T_1 \not\Rightarrow T_2$. De fato, (X, τ_{cof}) é T_1 pela observação anterior; mas não é Hausdorff, pois: por exemplo, $X = (\mathbb{R}, \tau_{\text{cof}})$.

Afirmação: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset, \forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_{\text{cof}}, \mathcal{U} \neq \emptyset, \mathcal{V} \neq \emptyset$.

$\mathcal{U}$ aberto $\Rightarrow F_1 = \mathbb{R} \backslash \mathcal{U}$ é finito e

$\mathcal{V}$ aberto $\Rightarrow F_2 = \mathbb{R} \backslash \mathcal{V}$ é finito

$\Rightarrow \mathcal{U} = \mathbb{R} \backslash F_1$ e $V = \mathbb{R} \backslash F_2$.

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = (\mathbb{R} \backslash F_1) \cap (\mathbb{R} \backslash F_2) = \mathbb{R} \backslash (F_1 \cup F_2)$ não vazio.

Exemplo 5.18 $\mathbb{R}$ com topologia usual é Hausdorff.

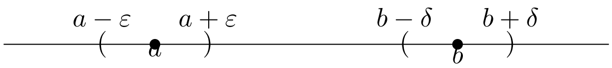


Figura 5.7:

$a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Supor $a < b$. Tome $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ e $\delta = \dfrac{b-a}{3}$.

$\Rightarrow a \in \mathcal{U} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), b \in \mathcal{V} = (b - \delta, b + \delta), \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abertos.

Exemplo 5.19 (X, d) espaço métrico é Hausdorff.

Sejam $a, b \in X, a \neq b$. Tome $\mathcal{U} = B_{\varepsilon/3}(a)$ e $\mathcal{V} = B_{\varepsilon/3}(b)$, onde $\varepsilon = d(a, b) > 0$.

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Se $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, então

$$\underbrace{d(a,b)}_{=\varepsilon} \leqslant \underbrace{d(a,z)}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(z,b)}_{<\frac{\varepsilon}{3}} = \frac{2}{3}\varepsilon$$

$\Rightarrow \varepsilon < \dfrac{2}{3}\varepsilon$. Absurdo.

Exemplo 5.20 (X, τ) topologia discreta. Então, (X, τ) é Hausdorff.

$x, y \in X, x \neq y . \mathcal{U} = \{x\}$ aberto e $\mathcal{V} = \mathcal{U}^c$.

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset, x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ abertos.

teo19 **Teorema 5.21**

i) Se X é Hausdorff e $A \subset X$ subespaço topológico, então A é Hausdorff;

ii) Se $f : X \to Y$ é contínua e injetiva, então Y Hausdorff implica X Hausdorff;

iii) Se X, Y são Hausdorff, então $X \times Y$ é Hausdorff;

iv) Se X é Hausdorff e $f : X \to Y$ bijeção fechada, então Y é Hausdorff.

Demonstração:

i) Sejam $a, b \in A, a \neq b$. Em particular, $a \in X, b \in X$ e X é T_2.
Então, $\exists \mathcal{U}, \mathcal{V}$ abertos de X tal que $a \in \mathcal{U}, b \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
Então, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap A$ e $\mathcal{U}_2 = \mathcal{V} \cap A$. Temos que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ são abertos de A e $a \in \mathcal{U}_1, b \in \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = (\mathcal{U} \cap A) \cap (\mathcal{V} \cap A) = (\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \cap A = \emptyset$.

ii) Sejam $a, b \in X, a \neq b$. f injetiva $\Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
Como Y é $T_2, \exists \mathcal{U}, \mathcal{V}$ abertos de Y tais que $f(a) \in \mathcal{U}, f(b) \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
Como f é contínua, $f^{-1}(\mathcal{U})$ e $f^{-1}(\mathcal{V})$ são abertos de X.
Ainda, $a \in f^{-1}(\mathcal{U}), b \in f^{-1}(\mathcal{V}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \emptyset$
$\Rightarrow X$ é T_2.

iii) ☺ Exercício.

iv) ☺ Exercício.

■

teo20 **Teorema 5.22** *Se X é Hausdorff, então toda sequência convergente em X tem único limite.*

Demonstração:
Suponha $(X_n) \subset X, x_n \to a, x_n \to b; a, b \in X, a \neq b$.
Como X é $T_2, \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$, abertos, tais que $a \in \mathcal{U}, b \in \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
Como $x_n \to a, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}, \forall n \geqslant n_0$.
Como $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, temos que $x_n \notin \mathcal{V}, \forall n \geqslant n_0$.
Como $b \in \mathcal{V}, x_n \notin \mathcal{V}, \forall n \geqslant n_0$, logo x_n não converge pra b. Absurdo.

■

Exemplo 5.21 Se $f : X \to Y$ é homeomorfismo, então X é T_2 se, e somente se, Y é T_2.

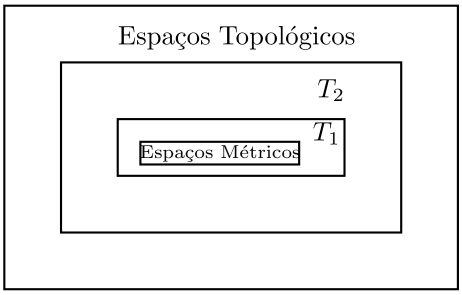


Figura 5.8:

5.8 Exercícios Propostos

Continuidade, Continuidade num Ponto, Funções Abertas, Funções Fechadas, Homeomorfismos

5.1 Defina função contínua entre dois espaçoos topológicos. Enuncie e demonstre um teorema que reduz a verificação da continuidade aos abertos básicos.

5.2 Mostre que se (X, τ) é o espaço topológico discreto então qualquer função $f : X \to Y$ (onde Y é outro espaço topológico qualquer) é função contínua. E se X for espaço topológico qualquer e Y for indiscreto ($\emptyset$ e Y forem os únicos abertos) que funções entre estes dois espaços são contínuas?

5.3 Mostre que se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços métricos, então uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

5.4 Seja X um espaço topológico e seja $\{A_i\}$ uma coleção de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, onde I é um conjunto de índices. Suponha que a restrição de f a cada conjunto A_i é contínua. Mostre que se a coleção $\{A_i\}$ é finita e cada A_i é fechado, então f é contínua. Encontre um exemplo onde a coleção $\{A_i\}$ é enumerável e cada A_i é fechado, mas que f não seja contínua.

5.5 Defina continuidade num ponto. Dados X e Y espaços topológicos, mostre que $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada ponto de X.

5.6 Considere o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ munido da topologia $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$. Considere a função $f : X \to X$, tal que

$f(1) = f(3) = 2, f(2) = 4$ e $f(4) = 3$. Mostre que f não é contínua em 3 mas é contínua em 4.

5.7 Defina função sequencialmente contínua num ponto. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua num ponto $p \in X$, então f é sequencialmente contínua em p. Construa um contra-exemplo para a recíproca.

5.8 Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua e fechada, mas não aberta. Mostre que a função $f : (0, \infty) \to [-1, 1]$ é contínua, mas nem aberta nem fechada (topologia usual).

5.9 Neste exercícios sempre supomos topologia usual. Mostre que o intervalo (a, b) é homeomorfo ao intervalo $(-1, 1)$ (faça todos os detalhes). Mostre que S^1 é homeomorfo ao quadrado

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

5.10 Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $G(X)=\{f:X\to X | f \text{é homeomorfismo}\}$. Mostre que $G(X)$ é um grupo com a operação de composição de funções. É G grupo abeliano?

5.11 Seja E um espaço vetorial normado. Mostre que as translações $T_a : E \to E$ definidas por $T_a(v) = v + a, a \in E$ fixado, são homeomorfismos. Mostre que as homotetias $h_\lambda : E \to E$ definidas por $h_\lambda(v) = \lambda v, (\lambda \in \mathbb{R}*)$ são homeomorfismos.

Axiomas de Separação

5.12 Defina espaço T_1 (de Frechét). Mostre que um espaço topológico é T_1 se, e somente se, todo subconjunto unitário $\{p\}$ de X é fechado. Mostre que se X é T_1, então todo subespaço de X é também T_1.

5.13 Defina espaço T_2 (espaços de Hausdorff).

5.14 Mostre que todo espaço métrico é de Hausdorff.

5.15 Mostre que se X é Hausdorff, então toda sequência convergente em X tem único limite.

5.16 Sejam X um espaço topológico e Y um espaço topológico Hausdorff. Demonstre que se $f, g : X \to Y$ são funções contínuas então o conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ é fechado.

5.17 Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia usual é Hausdorff, mas $\mathbb{R}$ com a topologia cofinita não é Hausdorff.

5.18 Mostre que T_2 implica T_1 mas a recíproca é falsa.

5.19 Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo de espaços topológicos e X Hausdorff. Mostre que Y é Hausdorff.

CAPÍTULO 6

Compacidade

Definição 6.1 Seja (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. Uma *cobertura aberta* (respectivamente, *fechada*) de A é uma coleção $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de abertos (respectivamente, fechados) $\mathcal{U}_i \subset X$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{U}_i$.

Exemplo 6.1 Seja $X = \mathbb{R}^2$, topologia usual.

$$\mathcal{U}_{(m,n)} = B_1((m,n)); m,n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbb{R}^2 \subset \bigcup \mathcal{U}_{(m,n)}; (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{(m,n)}; m,n \in \mathbb{Z}$ é cobertura aberta para $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 6.2 $\mathbb{R} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{R}} (-n,n)$, exemplo: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \in (-2,2)$.

Da Análise Real, $A \subset \mathbb{R}$, diz-se que A é compacto quando A é limitado e fechado.

A é limitado quando $\exists \varepsilon > 0$ tal que $A \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.

teo21 **Teorema 6.2 (de Borel-Lebesgue)** *Se $\{I_j\}_{j\in J}$ é uma família de intervalos abertos tais que $[a,b] \subset \bigcup\limits_{j\in J} I_j$, então existe um número finito de intervalos $I_{j_1}, \ldots, I_{j_n}$ tal que $[a,b] \subset I_{j_1} \cup \ldots \cup I_{j_n}$.*

Demonstração:
Seja $X = \{x \in [a,b] : [a,x] \subset I_{j_1} \cup \ldots \cup I_{j_k},$ para alguns $I_{j_1}, \ldots, I_{j_k}$ em $\{I_j\}\}$.
A demonstração consiste em verificar que $X = [a,b]$.
Afirmação: X é um intervalo.
De fato, $a \in X$ e dado $x \in X$, então $a < x' < x \Rightarrow x' \in X$.
X é intervalo $\Rightarrow X = [a,c)$ ou $[a,c], c = \sup X$.
Resta verificar que $c \in X$ e $c = b$.
Afirmação: $c \in X$.
De fato, seja $x \in I_{j_0}$ tal que $a \leqslant x < c \Rightarrow [a,x] \subset I_{j_1} \cup \ldots \cup I_{j_k}$ e
$[a,c] \subset I_{j_1} \cup \ldots \cup I_{j_k} \cup I_{j_0} \Rightarrow c \in X$.
$c = b$. De fato, como $c = \sup X$, suponha $c < b$.
Então, $\varepsilon > 0, c + \varepsilon < b$ e $[c, c+\varepsilon] \subset I_{j_0}$.
$\Rightarrow [a, c+\varepsilon] \subset I_{j_1} \cup \ldots \cup I_{j_k} \cup I_{j_0}$
$\Rightarrow c + \varepsilon \in X$. Contradição.
Portanto, $c = b$ e $X = [a,b]$. ■

Definição 6.3 Uma *subcobertura* (aberta) de $\{\mathcal{U}_i\}$ é uma subcoleção $\{\mathcal{V}_i\} \subset \{\mathcal{U}_i\}$.

Definição 6.4 O espaço topológico (X, τ) é *compacto* quando dada uma cobertura aberta $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de X, existe uma subcobertura finita $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ de $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$, isto é, existem $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ tal que $X \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$.

teo22 **Teorema 6.5** *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $A \subset X$ e A é compacto, então $f(A)$ é compacto.*

Demonstração:
$A \subset X, A$ é compacto. Devemos mostrar que $f(A)$ é compacto.
Tome $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subset Y, \mathcal{U}_i$ aberto, tal que $f(A) \subset \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$$

f contínua $\Rightarrow f^{-1}((\mathcal{U}_i))$ aberto, pois $\mathcal{U}_i$ aberto de Y. $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ é aberto.
Então $\{f^{-1}(\mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ é cobertura aberta do compacto A.
$\Rightarrow A \subset f^{-1}(\mathcal{U}_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(\mathcal{U}_n)$
$\Rightarrow f(A) \subset f\left(f^{-1}(\mathcal{U}_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(\mathcal{U}_n)\right) \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$
$\Rightarrow \{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\}$ é subcobertura finita para $f(A)$.
$\Rightarrow f(A)$ é compacto. ■
Obs: $A \subset X$ é *compacto* quando toda cobertura aberta $\{\mathcal{U}_i\}$ de A admite subcobertura finita ($\mathcal{U}_i$ são abertos de X).

Exemplo 6.3 $[a,b] \subset \mathbb{R}, [a,b]$ é compacto.

Exemplo 6.4 Sejam (X,τ) espaço topológico e $A \subset X, A$ finito. Então, A é compacto. De fato, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Seja $\{\mathcal{U}_i\} \subset \tau$ tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Temos que $\exists \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \{\mathcal{U}_i\}$ tal que $a_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}_n \Rightarrow A \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$.

Exemplo 6.5 Seja (X,τ) espaço topológico, τ topologia discreta. Se $A \subset X$ e A infinito, pode A ser compacto?

Solução:

Não. $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, $\{a\}$ é aberto, $\forall a$.

$\Rightarrow \{\{a\}, a \in A\}$ é cobertura aberta de A, que não admite subcobertura, caso contrário, $A \subset \{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_n\} \Rightarrow A$ finito. Absurdo. $\square$

Exemplo 6.6 Sejam X compacto e $A \subset X$. A é compacto?

Solução:

Não. Exemplo, $(a,b) \subset [a,b], \mathbb{R}$. (a,b) não é compacto e $[a,b]$ é compacto. $\square$

teo23 **Teorema 6.6** *Seja (X,τ) um espaço topológico compacto. Se $A \subset C$ e A é fechado, então A é compacto.*

Demonstração:

Seja $\{\mathcal{U}_i\}$ cobertura aberta de A. $\Rightarrow A \subset \bigcup \mathcal{U}_i$.

A fechado $\Rightarrow A^c$ é aberto. $\Rightarrow X = A \cup A^c \subset \bigcup \mathcal{U}_i \cup A^c$.

$\Rightarrow \bigcup \mathcal{U}_i \cup A^c$ é cobertura aberta do compacto X.

$\Rightarrow X \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n \subset A^c$.

Mas $A \subset X \Rightarrow A \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$. Portanto, A é compacto. $\blacksquare$

Exemplo 6.7 $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\} \Rightarrow (X,\tau)$ é espaço topológico.

$A = \{a\} \Rightarrow A$ é compacto (finito).

Mas A não é fechado, pois $A^c = \{a,b\}$ não aberto.

teo24 **Teorema 6.7** *Se (X,τ) é espaço topológico de Hausdorff, e $A \subset X$, A compacto, então A é fechado.*

Demonstração:

Seja $A \subset X$, X Hausdorff e A compacto. Provar que A é fechado.

Se $A = \emptyset$ ou $A = X$, então A é fechado.

Supor $A \neq X$ e $A \neq \emptyset$. Seja $x \in A^c$. Para todo $a \in A$, existe $\mathcal{V}_a$ aberto tal que $a \in \mathcal{V}_a$ e $\mathcal{U}_a$ aberto tal que $a \in \mathcal{U}_a$ e $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{U}_a = \emptyset$. (*)

Mas $\{\mathcal{V}_a; a \in A\}$ é cobertura aberta de A e A é compacto $\Rightarrow \exists \mathcal{V}_{a1}, \ldots, \mathcal{V}_{an}$ tal que $x \in \mathcal{U}_{a_i}$ e $\mathcal{U}_{a_i} \cap \mathcal{V}_{a_i} = \emptyset$.

Tome $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{a1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{an} \Rightarrow \mathcal{U}$ aberto e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_{a_i} = \emptyset, \forall i$.

$\Rightarrow \mathcal{U} \subset A^c$ e $x \in \mathcal{U}$. Portanto, A^c é aberto. ∎

Exemplo 6.8 No exemplo anterior X não é Hausdorff.

$b \in X \Rightarrow$ abertos que contém $b = \{X, \{b, c\}\}$

$c \in X \Rightarrow$ abertos que contém $c = \{X, \{b, c\}\}$

$\Rightarrow \nexists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tal que $b \in \mathcal{U}, c \in \mathcal{V} : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

prop06 **Proposição 6.8** *Se X é compacto, Y é Hausdorff e $f : X \to Y$ é contínua, então f é fechada.*

Demonstração:

$F \subset X, F$ fechado. Como X é compacto, e F é fechado, então F é compacto.

f contínua $\Rightarrow f(F)$ compacto. Logo, $f(F)$ é compacto contido em Y, que é Hausdorff, então $f(F)$ é fechado (teorema (6.7)). ∎

6.1 Compactificação

Definição 6.9 Sejam X, Y espaços topológicos. Um *mergulho* $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$ é uma função tal que $X \cong f(X)$ (X é homeomorfo a um subespaço topológico de Y).

Se Y é compacto, diz-se que Y é uma *compactificação* de X.

Exemplo 6.9 Seja Π o plano xy.

$$\begin{aligned} f &: \Pi \to S \\ p &\mapsto p' \end{aligned}$$

Definição 6.10 Seja (X, τ) espaço topológico. A *compactificação de Alexandrov* de (X, τ) é o par (X_∞, τ_∞) definido como:

i) $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, $\infty =$ "ponto no infinito" distinto de todo $x \in X$.

ii) $\tau_\infty = \tau \cup \{X_\infty \backslash F : F$ fechado e compacto de $X\}$.

teo25 **Teorema 6.11** (X_∞, τ_∞) *é espaço topológico e é compactificação de* (X, τ).

Obs: $X \overset{\cong}{\hookrightarrow} X \subset X_\infty$.

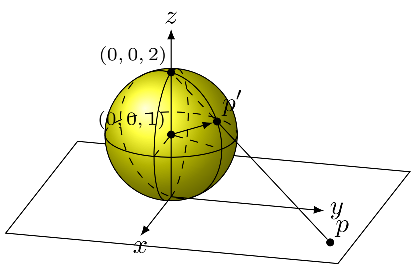


Figura 6.1: Projeção estereográfica: $x = \Pi \cong f(x) = S \backslash (0, 0, 2)$.

6.2 Topologia Produto e Compacidade

Definição 6.12 Sejam (X, τ_1) e (X, τ_2) espaços topológicos. $X \times Y$ tem *topologia produto* $\{u \times v : u \in \tau_1, v \in \tau_2\}$.

Projeções: As projeções canônicas p_1 e p_2 são definidas por

$$\begin{array}{rl} p_1 & : X \times Y \to Y \\ (x, y) & \mapsto x \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{rl} p_2 & : X \times Y \to Y \\ (x, y) & \mapsto y \end{array}$$

prop07 **Proposição 6.13** *p_1 e p_2 são contínuas em $X \times Y$. (Topologia produto torna as projeções contínuas).*

Demonstração:
Seja $\mathcal{U} \in X, \mathcal{U}$ aberto.
$\Rightarrow p_1^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \times Y$ é aberto de $X \times Y$. $\Rightarrow p_1$ é contínua.
☺ Como exercício, mostre que p_2 é contínua. ■

Exemplo 6.10 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ tem topologia produto, induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.11 $S^1 \times S^1, S^1$ topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

prop08 **Proposição 6.14** *Sejam $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)(Z, \tau_3)$ espaços topológicos.*

$$\begin{array}{l} f_1 : X \to Y \\ f_2 : Y \to Z \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{rl} f & : X \to Y \times Z \\ x & \mapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$

Então, f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas.

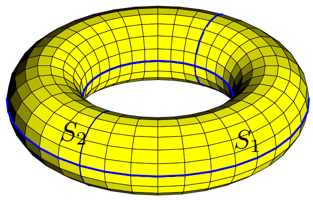


Figura 6.2: Toro

Demonstração:

($\Rightarrow$) $p_1 : Y \times Z \to Y$ e $p_2 : Y \times Z \to Z$ são projeções e note que $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$.

Logo, f contínua $\Rightarrow f_1$ e f_2 contínuas.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ aberto básico de $Y \times Z$. Note que
$f^{-1}(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = f_1^{-1}(\mathcal{U}) \times f_2^{-1}(\mathcal{V})$ é aberto. Portanto, f é contínua. ∎

6.3 Compacidade em Espaços Métricos

prop09 **Proposição 6.15** *Seja (M, d) espaço métrico. $A \subset M$, A compacto $\Rightarrow A$ é limitado e fechado.*

Demonstração:

- A é limitado.

  $\forall x_0 \in M, \overbrace{B_1(x_0) \cup B_2(x_0) \cup B_3(x_0) \cup \ldots}^{\mathscr{C}} \Rightarrow \mathscr{C}$ é cobertura aberta de A.

  A compacto $\Rightarrow \mathscr{C}$ admite subcobertura finita, ou seja,
  $A \subset B_{i_1}(x_0) \cup B_{i_2}(x_0) \cup \ldots \cup B_{i_m}(x_0) = B_{i_m}(x_0), 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_m$.

- A é limitado.

  A é fechado: $\bar{A} \subset A$.

  Seja $x \in \bar{A}$ e suponha $x \neq A$. Dado $y \in A, \exists \varepsilon > 0$ tal que $d(x, y) = 2\varepsilon$

  $\Rightarrow A$ tem cobertura aberta $\{B_\varepsilon(y) : y \in A\}$.

  A compacto $\Rightarrow A \subset B_{\varepsilon_1}(y) \cup \ldots \cup [\varepsilon_n]y$

  $\Rightarrow B_{\varepsilon_i}(x) \cap B_{\varepsilon_i}(y) = \emptyset, \forall i = 1, \ldots, n$.

  O que contradiz o fato de $x \in \bar{A}$.

■

Obs: A recíproca não vale em geral.
Seja (M, d) espaço métrico discreto. Suponha $A \subset M$ e A infinito.
A é fechado (sempre) mas, A é ilimitado, pois $A \subset \underbrace{B_2(x)}_{M}, \forall x \in M$.

Se $r < 1 \Rightarrow A \not\subset B_r(x), \forall x \in M$, pois, se $x, y \in A$, com $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1$.

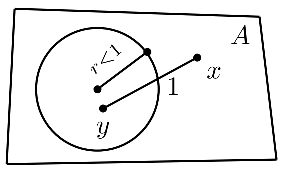


Figura 6.3:

Se $r > 1 \Rightarrow B_r(x) = \{x\}$ ou é M.

teo26 **Teorema 6.16 (Heine-Borel)** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Então A é fechado e limitado se, e somente se, A é compacto.*

Demonstração:
$(\Rightarrow)$ Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ fechado e limitado. A limitado
$\Rightarrow \exists k > 0$ tal que $\|x\| \leqslant k, \forall x \in A \Rightarrow A \subset [-k, k]^n = [-k, k] \times \ldots \times [-k, k]$.
Pelo Teo. (6.2) de Borel-Lebesgue, $[-k, k]$ é compacto. O Teo. de Tychonoff diz que $[-k, k]^n$ é compacto.
Como A é fechado e $A \subset [-k, k]^n$ compacto, então A é compacto.

$(\Leftarrow)$ A compacto e $\mathbb{R}^n$ Hausdorff $\Rightarrow A$ fechado. ■

teo27 **Teorema 6.17 (Tychonoff)** *O produto cartesiano (arbitrário) de espaços topológicos compacto é compacto.*

Demonstração:
Vamos mostrar somente que X, Y são compactos se, e somente se, $X \times Y$ é compacto.
$(\Leftarrow)$ Seja $X \times Y$ compacto. Sabemos que a projeção

$$\begin{aligned} p_1 \ &: X \times Y \to X \\ (x, y) \ &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua $\Rightarrow X = \operatorname{Im} p_1$ é compacto.
Considerando o mesmo argumento para

$$\begin{aligned} p_2 \ : X \times Y &\to Y \\ (x, y) \ &\mapsto y \end{aligned}$$

temos Y compacto.

($\Rightarrow$) Seja $\mathscr{A} = \{W_j; j \in J\}$ cobertura aberta de $X \times Y$. $W_j = \bigcup_k W_{j,k} \cup V_{j,k}$. $U_{j,k}$ abertos de X e $V_{j,k}$ abertos de Y.

Para $x \in X, \{x\} \times Y \cong Y$ que é compacto $\Rightarrow$ existem $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ tal que $\{x\} \times Y \subset (U_1 \times V_1) \cup \ldots \cup (U_n \times V_n), n = n(x)$.

Seja $\mathcal{U}_x = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i \Rightarrow \{\mathcal{U}_x; x \in X\}$ é cobertura de X, que é compacto $\Rightarrow X \subset \mathcal{U}_{x_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{x_m} \Rightarrow \{\mathcal{U}_{x_i} \times V_{k_i} : i = 1, \ldots, m \text{ e } k_i = 1, \ldots, n(x)\}$ é cobertura finita para $X \times Y$. ∎

6.4 Exercícios Propostos

6.1 Defina cobertura, cobertura aberta e cobertura fechada de um espaço topológico. Defina espaço topológico compacto.

6.2 Mostre que se A é um subconjunto finito do espaço topológico X, então A é compacto.

6.3 Demonstre que um subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.

6.4 Sejam $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos compactos de um espaço topológico X. Mostre que a união $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ é compacto.

6.5 Mostre que se A é um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff X, então A é fechado.

6.6 Sejam A e B subconjuntos compactos disjuntos de um espaço de Hausdorff X. Demonstre que existem dois abertos disjuntos G e H tais que $A \subset F$ e $B \subset H$.

CAPÍTULO 7

Conexidade

7.1 Espaços Conexos

Definição 7.1 Seja (X,τ) espaço topológico. Dizemos que X é *conexo* quando não existem abertos $A, B \in \tau$ tal que

i) $X = A \cup B$;

ii) $A \cap B = \emptyset$;

iii) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$.

Obs: A definição de conexo para $D \subset X$ refere-se a topologia induzida por X.

Exemplo 7.1 $\{x\}$ e $\emptyset$ são sempre conexos.

Exemplo 7.2 $\mathbb{R}$ topologia usual e $\mathbb{Q}$ é conexo em $\mathbb{R}$?

Solução:
Não. Pois $\mathbb{Q} = \underbrace{\left[\mathbb{Q} \cap \left(-\infty, \sqrt{2}\right)\right]}_{A} \cup \underbrace{\left[\left(\sqrt{2}, \infty\right) \cap \mathbb{Q}\right]}_{B}$.
$\mathbb{Q} = A \cup B; A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset; A \cap B = \emptyset$.
A, B são abertos de $\mathbb{Q}$, pois, são interseções de abertos de $\mathbb{R}$ interseção com $\mathbb{Q}$.
Logo, $\left(-\infty\sqrt{2}\right)$ e $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$ são abertos de $\mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 7.3 Seja (X, τ), τ topologia discreta.
Se $X = \{x\}$, por (i), X é conexo.
Se $x, y \in X, x \neq y$, então $X = \underbrace{\{x\}}_{A} \cup \underbrace{\{x\}^c}_{B}$.
$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset; A \cap B = \emptyset$; A, B abertos.
$\Rightarrow X$ não é conexo (A, B separam X).

Exemplo 7.4 Seja (X, τ_{cof}). $\tau_{\text{cof}} = \{A \subset X : A^c = \text{ finito ou } A = \emptyset\}$.

Solução:
Supor X infinito. Se $A, B \in \tau_{\text{cof}}, A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, então $A \cap B \neq \emptyset$.
Seja $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ que é finito, pois, A^c e B^c são finitos.
Suponha $(A \cap B)^c = \emptyset \Rightarrow A \cap B = X$ que é finito. Contradição.
Portanto, $A \cap B \neq \emptyset$. Logo, (X, τ_{cof}) é conexo. $\square$

Exemplo 7.5 Seja $I \subset \mathbb{R}$ (usual), $I =$ intervalo. Então I é conexo.

Solução:
Suponha $I = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. A, B abertos na topologia usual de $\mathbb{R}$. Tome $a \in A$ e $b \in B$ e assim $a < b$.

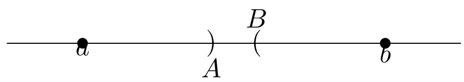


Figura 7.1:

Seja $S = \inf\{x \in B : a < x\}$. Dado $\varepsilon > 0, (S, S + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.
E ainda, $(S-\varepsilon, S) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow (S-\varepsilon, S+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $(S-\varepsilon, S+\varepsilon) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow S \notin A$ e $s \notin B \Rightarrow s \notin A \cup B$ mas $s \in I$, pois $a < s < b$. Contradição. $\square$

teo28 **Teorema 7.2** *Todo subconjunto conexo $S \subset \mathbb{R}$ é um intervalo ($S \neq \emptyset$ e $S \neq \{x\}$).*

Demonstração:
Se S não é intervalo, então $\exists x, y \in S, z \notin S$ tal que $x < z < y \Rightarrow \underbrace{(-\infty, z) \cap S}_{A}$ e $\underbrace{(z, \infty) \cap S}_{B}$. A e B separam S. $\blacksquare$

teo29 **Teorema 7.3** *São equivalentes:*

i) X é conexo;

ii) Os únicos subconjuntos de X que são ao mesmo tempo abertos e fechados são $\emptyset$ e X.

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que $A \subset X, \emptyset \neq A, A \neq X$ e A seja aberto e fechado ao mesmo tempo. Então, $X = A \cup A^c \Rightarrow X$ desconexo. (**Obs**: $A \neq X \Rightarrow A^c \neq \emptyset$).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha X desconexo, então $\exists A, B$ abertos, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$.
Então, $B^c = A$ aberto $\Rightarrow B$ fechado. Logo, B é aberto e fechado. Contradição.
■

teo30 **Teorema 7.4** *Sejam (X, τ) espaço topológico e $\{A_i; i \in I\}$ coleção de subconjuntos conexos de X. Se $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é conexo.*

Demonstração:
Suponha que $C = \bigcup A_i$ e C desconexo $\Rightarrow \exists A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ e $C = A \cup B$. Seja $p \in \bigcap A_i$. Então $p \in A$ ou $p \in B$. Supor $p \in A$. Como $p \in A_i, \forall i$ e A_i é conexo, tem-se $A_i \subset A, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup A_i \subset A$, contradizendo $B \neq \emptyset$. ■

Exemplo 7.6 Seja $S_r^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - r)^2 + y^2 = r^2\}$ (esfera de raio r e centro $(r, 0)$).
Note que $p = (0, 0) \in \bigcap S_r^1$. Cada S_r^1 é conexa $\Rightarrow \bigcup S_r^1$ é conexa.

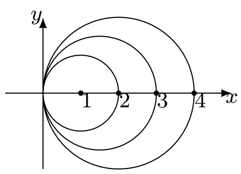


Figura 7.2: Circunferências.

teo31 **Teorema 7.5** *Sejam X e Y espaços topológicos conexos. Então $X \times Y$ é conexo.*

Obs: O teorema vale para um número arbitrário de conexos.
Demonstração:
Dado $(x, y) \in X \times Y$ são conexos os conjuntos $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$ (pois $\{x\} \times Y \cong Y$ e $X \times \{y\} \cong X$) e $(x, y) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\})$.

Sendo $T_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ temos $X \times Y = \bigcup\limits_{x \in X} T_x$. Pelo teorema anterior T_x é conexo e $\bigcap\limits_{x \in X} T_x \neq \emptyset$. ■

Exemplo 7.7 $T^2 = S^1 \times S^1$, conexo pois, S^1 é conexo.

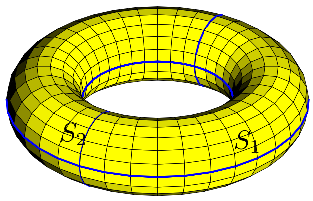


Figura 7.3:

teo32 **Teorema 7.6** *Seja X conexo e $f : X \to Y$ contínua (X, Y espaços topológicos), então $f(X)$ é conexo.*

Demonstração:
Sejam $f : X \to Y, Y = f(x)$, f contínua, X conexo.
Suponha $Y = A \cup B$, A, B abertos de Y, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$.
f contínua $\Rightarrow X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
$f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ abertos (f contínua), $f^{-1}(A) \neq \emptyset, f^{-1}(B) \neq \emptyset$ e $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset \Rightarrow X$ desconexo. Contradição.
Portanto, Y é conexo. ■

Exemplo 7.8 $S^1 = f([0, 2\pi])$

$$\begin{aligned} f \ &: [0, 2\pi] \to S^1 \\ t \ &\quad \mapsto f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

S^1 é conexo.

cor03 **Corolário 7.7** $X \overset{\varphi}{\cong} Y$, *$X$ conexo $\Leftrightarrow$ Y conexo.*

7.2 Conexidade por Caminhos

Definição 7.8 Um espaço topológico é *conexo por caminhos* se dados $a, b \in X$, existe caminho contínuo $\alpha : I \to X, I = (0,1), \alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$.

Exemplo 7.9 Seja V espaço vetorial normado e $a, b \in V$.
Tome $\alpha : [0,1] \to V, \alpha(t) = (1-t)a + tb \Rightarrow \alpha$ contínua, $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$
$\Rightarrow V$ conexo por caminhos. α é o segmento de reta ligando a a b.

prop10 **Proposição 7.9** *Seja X conexo por caminhos e $f : X \to Y$ contínua e sobrejetiva, então Y é conexo por caminhos.*

Demonstração:
Sejam Y_1, Y_2 em Y, f sobrejetiva $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.
X conexo $\Rightarrow \alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x_1$ e $\alpha(1) = x_2$, defina
$\beta = f \circ \alpha : [0,1] \to Y$ e $\beta(0) = y_1, \beta(1) = y_2 \Rightarrow Y$ conexo por caminhos. ∎

CAPÍTULO 8

Extensão de Corpos

Definição 8.1 Um conjunto A, não vazio, munido de duas operações

$$\begin{aligned} + \ : A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot \ : A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a.b \end{aligned}$$

é chamado um *anel* quando

i) $(A,+)$ for grupo abeliano;

ii) $(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in A$;

iii) $a(b+c) = ab+ac$ e $(a+b)c = ac+bc, \forall a,b,c \in A$.

Então, $(A,+,\cdot)$ é anel.

Se $\exists 1 \in A$ tal que $1.a = a.1 = a, \forall a \in A$, então A é dito *anel com unidade.*

Se $ab = ba, \forall a,b \in A$, então $(A,+,\cdot)$ é *anel comutativo.*

Um *domínio* é um anel comutativo com unidade e $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0, \forall a,b \in A$.

Exemplo 8.1 $M_n(\mathbb{R})$ é anel com unidade, mas não comutativo.

Exemplo 8.2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é domínio.

Exemplo 8.3 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tem divisor de zero.

Exemplo 8.4 $n\mathbb{Z}, n \geqslant 1$ é anel sem unidade, mas é comutativo.

Definição 8.2 Um *corpo* F é um anel comutativo tal que $\forall a \neq 0, \exists a^{-1} \in F$ tal que $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$. (Todo elemento não nulo admite inverso multiplicativo).

Exemplo 8.5 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são corpos.

Exemplo 8.6 $\mathbb{R}(x) = \left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)}; f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ e } g(x) \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R}[x] = \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^i; a_i \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$

Obs: F corpo $\Leftrightarrow F(x)$ corpo.

Exemplo 8.7 Seja F corpo. $F\left((x)\right) = \left\{ \displaystyle\sum_{n}^{\infty} a_i x^i; a_i \in F \text{ e } n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ e $g(x) = a_{-n} x^{-n} + \ldots + a_0 + a_1 x + \ldots$ são exemplos de *séries formais*, isto é, polinômios que tem um número finito de elementos negativos.

$F((x))$ é o corpo das séries formais de Laurent .

Exemplo 8.8 Anel $F[x_1, \ldots, x_n]$
$= \{$polinômios nas n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em $F\}$.

Caso particular:
$\mathbb{Q}[x, y] : p(x, y) = 3x + \frac{2}{3}xy + 5x^5y^7 + \frac{1}{7}y$.

Exemplo 8.9 Corpo de frações de $\mathbb{Q}[x, y]$.

$$\mathbb{Q}(x, y) = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)}; f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]; g(x, y) \neq 0 \right\}$$

Exemplo 8.10 Sejam p primo e $(F_p, \mp, \bar{\cdot})$. $F_p = \mathbb{Z}/p_{\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} \mp : F_p \times F_p &\to F_p \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \overline{a + b} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : F_p \times F_p &\to F_p \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \overline{a.b} \end{aligned}$$

Portanto, $(F_p, \mp, \bar{\cdot})$ é corpo.

Exemplo 8.11 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Definição 8.3 Dizemos que K/F é uma *extensão de corpos* (o corpo K é uma extensão do corpo F) quando $F \subset K$.

Exemplo 8.12 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}; \mathbb{C}/\mathbb{R}; \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Obs: Se $F \subset K$ é extensão de corpos, então K é um F-espaço vetorial. (K é um espaço vetorial sobre F).

Multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} : F \times K &\to K \\ (\alpha, a) &\mapsto \alpha a \end{aligned}$$

Exemplo 8.13 $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{R}$ espaço vetorial.

Dado $a + bi \in \mathbb{C}, a + bi = a.1 + b.i \Rightarrow \{1, i\}$ é $\mathbb{R}$-base para $\mathbb{C}$. ($\{1, i\}$ é base para o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$).

No exemplo, $\mathbb{C}$ tem dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$. Notação: $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

Em geral, a dimensão de K sobre F (como F-espaço vetorial) é denotado por $[K : F]$ e é chamada o *grau da extensão* de corpos K/F.

Exemplo 8.14 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ é extensão de grau 2. ($[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$).

Caso $[K : F] = n < \infty$, então dizemos que K/F é *extensão* (de corpos) *finita* (infinita, caso contrário).

Exemplo 8.15 $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$, $[\mathbb{C} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Exemplo 8.16 Seja $a \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{Q}(a) = \left\{ \dfrac{\sum \alpha_i a^i}{\sum \beta_j a^j}; \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Q}, \sum \beta_j a^j \neq 0 \right\}$

Exemplo 8.17 Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. A extensão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ pode ou não ser finita.

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, pois, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a.1 + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Então, $\{1, \sqrt{2}\}$ é $\mathbb{Q}$-base para $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$\{1, \sqrt{2}\}$ é L.I., pois $\alpha.1 + \beta\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 8.18 $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] = \infty$.

Definição 8.4 Seja $F \subset K$ extensão de corpos e $a \in K$.
$F[a] := \bigcap R$, R subanel de K tal que $F \subset R$ e $a \in R$.
$F(a) := \bigcap L$, L subcorpo de K tal que $F \subset L$ e $a \in L$.

$$\begin{array}{ccc} K & \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ | & | & | \\ F(a) & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \mathbb{Q}(i) \\ | & | & | \\ F & \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{array}$$

Figura 8.1: Extensão de corpos.

Exemplo 8.19 $F(a)$ é subcorpo de K e $F[a]$ é subanel de K.

Solução:
Afirmação: $F[a]$ é subanel de K.

i) Sejam $x, y \in F[a] \Rightarrow x, y \in \bigcap R$, R subanel de K tal que $F \subset R$ e $a \in R$.
$\Rightarrow x, y \in R_i \Rightarrow x - y \in R_i \Rightarrow x - y \in F[a]$.

ii) Seja $x, y \in F[a] \Rightarrow x.y \in F[a]$ (analogamente).

$F(a)$ é subcorpo de K.

i) $F(a)$ é subanel de K;

ii) $a \in F(a), \exists a^{-1} \in F(a)$.

$\square$

Exemplo 8.20 $F[a]$ é o menor subanel de K que contém $a \in F$.
($F[a]$ está contido em todo subanel de K que contém a e F).
Análogo para $F(a)$.

lem06 **Lema 8.5**

1. *$F[a] = \{f(a)/f(x) \in F[x]\}$;*

2. *$F(a) = \left\{\dfrac{f(a)}{g(a)}; f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0\right\}$.*

Demonstração:
Mostraremos apenas o item 1, o outro fica como exercício. Seja

$$\begin{aligned} \varphi \ &: F[x] \to K \\ f(x) &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

$\varphi(f(x)+g(x)) = \varphi((f+g)(x)) = (f+g)(a) = f(a)+g(a) = \varphi(f(x))+\varphi(g(x))$
$\varphi(f(x).g(x)) = \varphi((f.g)(x)) = (f.g)(a) = f(a).g(a) = \varphi(f(x)).\varphi(g(x))$
Portanto, φ é homomorfirmo de anéis.

Note que $\text{Im}(\varphi) = \{f(a)/f(x) \in F[x]\}$. Mostrar que $\text{Im}(\varphi) = F[a]$.
Como φ é homomorfismo de anéis, temos $\text{Im}(\varphi)$ é subanel de K e $\text{Im}(\varphi)$ contém a e contém F. Como $F[a]$ é o menor subanel de K com esta propriedade, temos $\text{Im}(\varphi) \supseteq F[a]$.
Agora, seja $f(a) \in \text{Im}(\varphi)$.
$f(a) = \varphi(f(x)), f(x) = \sum \alpha_i x^i$
$\Rightarrow f(a) = \underbrace{\sum \alpha_i x^i}_{\in \mathbb{R}} \in F[a], \forall R$ subanel de K que contém a e F. ■

Exemplo 8.21 Seja $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2}); f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi \ &: \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto f(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

(i) φ é homomorfismo;

(ii) $\text{Im}(\varphi) = \{f(\sqrt{2}); f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$. Mostrar que $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Lembrete: F corpo $\Rightarrow F[x]$ domínio de ideais principais $\Rightarrow F[x]$ euclidiano.
Dados $f(x), g(x) \in F[x], \exists q(x), r(x) \in F[x]$ tal que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$.

Dado $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, existem $q(x), r(x)$ tal que $f(x) = (x^2 - 2)q(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < 2$
$\Rightarrow r(x) = a + bx$, para algum $a, b \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow f(\sqrt{2}) = ((\sqrt{2})^2 - 2)q(\sqrt{2}) + r(\sqrt{2}) = r(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$
$\Rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Exemplo 8.22 No Lema (8.5) $F[a] = F(a)$ (quando a for algébrico). Em particular $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exemplo 8.23 $\mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[i]$.

Obs: $\mathbb{Q}[\pi] \simeq \mathbb{Q}[x] \neq \mathbb{Q}(x)$.

Definição 8.6 Seja K/F extensão de corpos.

1. $\alpha \in K$ é *algébrico* sobre F se $\exists f(x) \in F[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

   Caso contrário, diz-se que α é *transcedente*. .

2. Se $\alpha \in K$ é algébrico sobre F para todo $\alpha \in K$, então dizemos que K/F é extensão algébrica.

Exemplo 8.24 Seja $\sqrt{p} \in \mathbb{C}$, p primo. Então $\sqrt{p}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois $f(\sqrt{p}) = 0$ para $f(x) = x^2 - p$.

Exemplo 8.25 e e π são transcedentes sobre Q.

Definição 8.7 Se $a \in K$ é algébrico sobre F o polinômio mônico de menor grau $p_a(x) \in F[x]$ tal que $p_a(a) = 0$ é chamado de *polinômio minimal* de a sobre F. $p_a(x) = \min\{a, F\}$.

Exemplo 8.26 $\xi = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{2\pi}{n}$ em $\mathbb{C}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Pois $f(x) = x^n - 1$, então $f\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right) = e^{2\pi i} - 1 = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen} 2\pi - 1 = 0$.
$\therefore p_\xi(x) = x^n - 1$.

Exemplo 8.27 Sejam $F \subset K$ e $a \in K$ algébrico sobre F, então $F(a)/F$ é extensão algébrica.

teo33 **Teorema 8.8** *Seja K/F extensão de corpos e $\alpha \in K$ algébrico sobre F.*

(i) $p_a(x) = \min\{\alpha, F\}$ é irredutível;

(ii) Se $g(x) \in F[x]$ e $g(\alpha) = 0$, então $p_\alpha(x)$ divide $g(x)$;

(iii) Seja $n = \partial p_\alpha(x)$. Então $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ é base de $F(\alpha)$ sobre F.

Demonstração:

(i) ☺ Exercício.

(ii) $g(x) = p_\alpha(x).q(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial p_\alpha(x)$. Como $g(\alpha) = 0$, então $r(\alpha) = 0 \Rightarrow r(x) = 0$, pois, $p_\alpha(x)$ é o polinômio de menor grau que anula α.

Portanto, $g(x) = p_\alpha(x).q(x)$, isto é, $p_\alpha(x)$ divide $g(x)$.

(iii) ☺ Exercício.

■

Exemplo 8.28 Seja $\sqrt{p} \in \mathbb{R}$, p primo. $p(x) = x^2 - p$. $\mathbb{Q}(\sqrt{p})/\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ tem base $\{1, \sqrt{p}\}$ sobre $\mathbb{Q}$. $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}] = 2$.

$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p}) : \mathbb{Q}] = 3$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ (tome $p(x) = x^3 - p$ e $p(\sqrt[3]{p}) = 0$) tem base $\{1, \sqrt[3]{p}, (\sqrt[3]{p})^2\}$.

Obs: $F \subset K$ extensão de corpos e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

1. $(\ldots((F[\alpha_1])[\alpha_2])\ldots[\alpha_n]) := F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\}$.

2. $((F(\alpha_1))(\alpha_2))\ldots(\alpha_n) := F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\{\frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} ; f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n) \in F(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\right\}$

Obs: Da Álgebra Linear: Sejam $F \subset K \subset L$ extensão de corpos, então $[L : F] = [L : K].[K : F]$.

Exemplo 8.29 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, dash, "\infty"] \\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \arrow[d, dash, "2"] \\ \mathbb{Q} \arrow[uu, dash, bend left, "\infty"] \end{tikzcd}$$

Figura 8.2:

Obs: $\underbrace{[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]}_{\infty} > \overbrace{[\mathbb{Q}(\alpha_p) : \mathbb{Q}]}^{p}$, onde $\partial p_{\alpha_p} = p$.

Exemplo 8.30 Seja $\alpha_p = \sqrt[p]{2}$. Tome $p(x) = x^p - 2$ e $p(\alpha_p) = 0$.

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}\right] = \overbrace{\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right]}^{2}\overbrace{\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right]}^{2}$$

$$p_i(x) = x^2 + 1 \in \left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right)[x] \Rightarrow p_i(x) = \min\left(i, \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right)$$

Obs: $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = [\mathbb{R} : \mathbb{Q}(e)][\mathbb{Q}(e) : \mathbb{Q}]$.

teo34 **Teorema 8.9**

(i) Se K/F é finita, então K/F é algébrica;

(ii) Se K/F é algébrica, K/F não precisa ser finita;

(iii) K/F é algébrica e finitamente gerada se, e somente se, K/F é finita.

K/F é finitamente gerada sobre F, se existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tal que $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Demonstração:

(i) Seja $n = [K : F]$ e seja $\alpha \in K$. Então $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ é L.D. sobre F, pois, $n+1$ vetores $\Rightarrow \exists a_0, \ldots, a_n \in F$ (nem todos nulos) tal que $a_0 + \ldots + a_n x^n = 0 \Rightarrow \alpha$ é raiz de $p(x) = \sum a_i x^i$.

Portanto, K/F é algébrica.

(ii) $F = \mathbb{Q}, K = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha$ algébrico sobre $\mathbb{Q}\} \Rightarrow K/\mathbb{Q}$ algébrico.

$[K : \mathbb{Q}] > [\underbrace{\mathbb{Q}(\alpha_p) : \mathbb{Q}}_{p}], \forall p$ primo

$\Rightarrow [K : \mathbb{Q}]$ é infinita, isto é, $[K : \mathbb{Q}] = \infty$.

Obs: Os números primos são infinitos.

(iii) $\alpha_i, p_i(x) = \sum a_{ij} x^j, p_i(\alpha_j) = 0$.

Tome $\{\alpha_i^j\}_{i,j}$ é base de K sobre F.

∎

Definição 8.10 Sejam K/F extensão de corpos e L_1, L_2 corpos tais que $F \subset L_1 \subset K$ e $F \subset L_2 \subset K$. O *composto* de L_1, L_2 é o menor subcorpo de K que contém $L_1 \cup L_2$. Notação: L_1L_2.

teo35 **Teorema 8.11 (Kronecker)** *Seja F um corpo e $f(x) \in F[x]$. Se f não é constante, então existe uma extensão K/F e $\alpha \in K$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Demonstração:

Sabemos que $f(x) = p_1(x). \dots .p_r(x)$, $p_i(x)$ irredutível, $p_i(x) \in F[x]$.

Tome $p(x)$ na decomposição de f como produto de polinômios irredutíveis. Basta mostrar que $\exists K/F$ e $\alpha \in K$ tal que $p(\alpha) = 0$.

Como $p(x)$ é irredutível, o ideal $I = (p(x))$ (ideal de $F[x]$ gerado por $p(x)$) é um ideal maximal, então $F[x]/I$ é corpo.

Fixe $a, b \in \tilde{F_k}$. Forme $L = F(a, b) \Rightarrow L$ é corpo e $L \subset \tilde{F_k} \Rightarrow a + b \in L \subset \tilde{F_k}$ e $b^{-1} \in L \subset \tilde{F_k}$. ∎

cor04 **Corolário 8.12** $\tilde{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}} = \{a \in \mathbb{C}/a$ *algébrico* $s/\mathbb{Q}\}$ *é corpo.*

Definição 8.13 Um corpo F é algebricamente fechado quando todo polinômio não constante em $F[x]$ tem uma raiz em F.

teo36 **Teorema 8.14 (Fundamental da Álgebra)** *Todo polinômio não constante em $\mathbb{C}[x]$ tem uma raiz em $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ é algebricamente fechado).*

teo37 **Teorema 8.15** *Um corpo F é algebricamente fechado se, e somente se, qualquer polinômio não constante em $F[x]$ fatora-se como produto de polinômios em $F[x]$ de grau 1 (fatores lineares).*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $f(x)$ polinômio não constante em $F[x]$. F é algebricamente fechado $\Rightarrow \exists \alpha \in F$ tal que $f(\alpha) = 0 \Rightarrow x - \alpha / f(x); f(x) = (x - \alpha)g(x)$, para algum $g(x) \in K[x]$. Se $g(x)$ constante, ok.

Se $g(x)$ não constante, então $\exists \beta \in F$ tal que $g(\beta) = 0 \Rightarrow x - \beta / g(x) \Rightarrow f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)h(x)$, para algum $h(x) \in K[x]$. Se $h(x)$ não constante, segue-se o processo, até decompor f como produto de fatores lineares. Note que grau $p(x)$ finito.

($\Leftarrow$) Imediata. ∎

cor05 **Corolário 8.16** *Um corpo F algebricamente fechado não possui extensões algébricas própria.*

Demonstração:
Se K/F é extensão algébrica de F e $\alpha \in K \Rightarrow \min(\alpha, F)$ é irredutível mônico $\Rightarrow \min(\alpha, F) = x - \alpha$, pois, F algebricamente fechado (teorema anterior) $\Rightarrow \alpha \in F \Rightarrow K \subset F \Rightarrow K = F$.[1] ■

teo38 **Teorema 8.17** *Todo corpo admite um fecho algébrico, isto é, dado um corpo F, existe uma extensão algébrica $\tilde{F}/F$ tal que $\tilde{F}$ é algebricamente fechado. Ainda, o fecho algébrico é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração:
Usa o Lema de Zorn. Ver livro *Teoria Ingênua dos Conjuntos* de Halmos. ■

teo39 **Teorema 8.18 (TFA)** *$\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.*

Demonstração:
Seja $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ e suponha que f não tem raiz em $\mathbb{C} \Rightarrow$ a função $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ é inteira (analítica em todo o plano).

$\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty \Rightarrow \lim\limits_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0 \Rightarrow g(z)$ limitada no plano $\overset{\text{T. Liouville}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{f}$ constante $\Rightarrow f$ constante. ■

8.1 Automorfismo de Corpos

Fixamos F corpo e $\tilde{F} =$ fecho algébrico de F.

Definição 8.19 Seja K/F extensão algébrica. Dizemos que os elementos $\alpha, \beta \in K$ são F-conjugados quando $\min(\alpha, F) = \min(\beta, F)$.

Exemplo 8.31 $\mathbb{C}/\mathbb{R}, \alpha = i$ e $\beta = -i, p(x) = x^2 + 1$.
$\min(i, \mathbb{C}) = \min(-i, \mathbb{C}) = p(x) = x^2 + 1$.

teo40 **Teorema 8.20** *Sejam F corpo e α, β algébrico sobre F. Sejam $n = \partial \min(\alpha, F)$ e $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ dada por*

$$\psi_{\alpha,\beta}(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) = c_0 + c_1\beta + \ldots + c_{n-1}\beta^{n-1}$$

Então, $\psi_{\alpha,\beta}$ é isomorfismo se, e somente se, α e β são conjugados.

[1] Pelo teorema, $p(x)$ irredutível sobre $F \Rightarrow p(x)$ linear.

Demonstração:
($\Rightarrow$) Seja $\min(\alpha, F) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n (a_n = 1)$.
$\Rightarrow a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0$
$\Rightarrow 0 = \psi_{\alpha,\beta}(0) = \psi(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n) = a_0 + a_1\beta + \ldots + a_n\beta^n$
$\Rightarrow \beta$ é raiz do $\min(\alpha, F) \Rightarrow \min(\beta, F)/\min(\alpha, F)$.
O mesmo argumento só que com $\psi^{-1}_{\alpha,\beta}$, teremos $\min(\alpha, F)/\min(\beta, F) \Rightarrow \min(\beta, F) = \min(\alpha, F)$.

($\Leftarrow$) $\min(\alpha, F) = \min(\beta, F) = p(x)$. Defina

$$\begin{aligned} : {}^{F[x]}/_{I = (p(x))} &\to F(\alpha) \\ f(x) + I &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

■

Exemplo 8.32 $\min(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})) = x^2 - 2$. As raizes são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a - b\sqrt{2} = a + b(-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

é isomorfismo, pois $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são conjugados.

cor06 **Corolário 8.21** *Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Se $f(a + bi) = 0$ para $a + bi \in \mathbb{C}$, então $f(a - bi) = 0, a, b \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:
$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ e $\min(i, \mathbb{R}) = \min(-i, \mathbb{R}) = x^2 + 1 \Rightarrow i$ e $-i$ são conjugados $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \psi_{i,-i} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ a + bi &\mapsto a - bi \end{aligned}$$

é isomorfismo. Assim, se $f(a + bi) = a_0 + a_1(a + bi) + \ldots + a_n(a + b_i)^n = 0$
$\Rightarrow 0 = \psi_{i,-i}(a_0 + a_1(a+bi) + \ldots + a_n(a+b_1)^n) = a_0 + a_1(a-b_i) + \ldots + a_n(a-b_i)^n \Rightarrow$ $a - bi$ é raiz de f. ■

8.2 Automorfismos e Corpos Fixos

Definição 8.22 F corpo e $\sigma : F \to F$ isomorfismo. σ é chamado automorfismo de F.

$\mathrm{Aut}(K) := \{\varphi : K \to K / \varphi$ automorfismo$\}$

Sabemos que $\mathrm{Aut}(K)$ é grupo com operação de composição com neutro $= id_k$.

Definição 8.23 Seja K/F extensão de corpos e $\sigma : K \to K$ automorfismo de K.

i) σ fixo $a \in K$ se $\sigma(a) = a$;

ii) σ fixa F se $\sigma(a) = a, \forall a \in F$.

no caso (ii), σ é dito um F-automorfismo de K.

teo41 **Teorema 8.24** *Seja K/F extensão de corpos. O conjunto $G(K/F) := \{G \in \mathrm{Aut}(K)/G|_F = id_F\} = \{G \in \mathrm{Aut}(K); G(a) = a, \forall a \in F\}$ um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(K)$.

Demonstração:
$id_K \in G(K/F)$.
$\sigma, \tau \in G(K/F) \Rightarrow \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = a, \forall a \in F$
$\Rightarrow \sigma \circ \tau \in G(K/F)$.
$\sigma \in G(K/F) \Rightarrow \sigma(a) = a, \forall a \in F \Rightarrow a = G^{-1}(a), \forall a \in F$
$\Rightarrow G^{-1} \in G(K/F)$. ■

teo42 **Teorema 8.25** *Seja $S = \{\sigma_i; i \in I\} \subset \mathrm{Aut}(K)$. Então $\mathcal{F}(S) = \{a \in K; \sigma_i(a) = a, \forall i \in I\}$ é subcorpo de K (chamado o corpo fixo de S).*

Demonstração:
$0 \in \mathcal{F}(s)$, pois $\sigma_i(0) = 0, \forall i \in I$. Também $1 \in \mathcal{F}(s)$, pois, $\sigma_i(1) = 1, \forall i \in I$.
Sejam $a, b \in J(s) \Rightarrow \sigma_i(a \pm b) = \sigma_i(a) \pm \sigma_i(b) = a \pm b \Rightarrow a \pm b \in \mathcal{F}(s)$.
$a, b \in \mathcal{F}(s) \Rightarrow \sigma_i(a.b) = \sigma_i(a).\sigma_i(b) = a.b \Rightarrow a.b \in \mathcal{F}(s)$.
Se $a \neq 0 \in \mathcal{F}(s) \Rightarrow \sigma_i(a^{-1}) = [\sigma_i(a)]^{-1} = a^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{F}(s)$. ■

Exemplo 8.33 $\sigma = \psi_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$S = \{\sigma\}, \mathcal{F}(\sigma) = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}); \sigma(x) = x\}$
$a + b\sqrt{2} \in \mathcal{F}(\sigma) \Leftrightarrow \sigma(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2} = a - b\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 0$
$\Leftrightarrow a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathcal{F}(\sigma) = \mathbb{Q}$.

Obs: $G(K/F) \leqslant \mathrm{Aut}(K)$.
$F \subseteq J(G(K/F)) = \{a \in K; \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G(K/F)\}$.

Exemplo 8.34 $F = \mathbb{Q}$. Sabemos que $[K : F] = 4$.
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}); \mathbb{Q}(\sqrt{3})]}_{2} . \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}); \mathbb{Q}]}_{2}$
base de K como $F - E$ e $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$.
$G(K/F); K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}); F = \mathbb{Q}$. Possui 4 automorfismos:
$id : K \to K \Rightarrow id \in G(K/F)$.

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : K &\to K \\ 1 &\mapsto 1 \\ \sqrt{2} &\mapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} &\mapsto \sqrt{3} \\ \sqrt{6} &\mapsto -\sqrt{6} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma_2 = \psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}} : K &\to K \\ 1 &\mapsto 1 \\ \sqrt{2} &\mapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{3} &\mapsto -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} &\mapsto -\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} \circ \psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}} : K &\to K \\ 1 &\mapsto 1 \\ \sqrt{2} &\mapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} &\mapsto -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} &\mapsto \sqrt{6} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = G(K/F)$
Tábua

	id	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	id	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	id	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	id

teo43 **Teorema 8.26** *Seja K/F extensão finita de corpos e $\sigma : F \to F'$ isomorfismo de corpos. O número de extensões de σ para um isomorfismo*

Demonstração:
K/F finita $\Rightarrow K/F$ finitamente gerada $\Rightarrow K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.
Seja $p_i(x) = \min(\alpha_i, F) = a_{i_0} + \ldots + a_{i_n} x^{n_i}$.
Assim, se τ é uma extensão de σ a K, ... incompleto. ∎

Obs: K/F algébrica. Dado $\alpha \in K, \alpha$ é algébrico sobre F
$\Rightarrow \exists p(x) = \min(\alpha, F) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$.

Seja $\beta \in \tilde{F}$ tal que $q(\beta) = 0$, onde $q(x) = \sigma(c_0) + \sigma(c_1)x + \ldots + \sigma(c_n)x^n$, σ isomorfismo e $p(x)$ irredutível, $q(x)$ irredutível em $F[x] \Rightarrow F[\alpha] \overset{\varphi}{\cong} F'[\beta]$ e $\varphi|_F = \sigma$.

Notação: K/F finita. Índice de $K/F = \{\tau_i : K \to \tau(K) \subset \tilde{F}\}$.

Obs: Se $p \notin K$, então $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$.

Exemplo 8.35 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ é o corpo de decomposição da família $\{x^2-2, x^2-3\} \subset \mathbb{Q}[x]$.

Definição 8.27 Sejam $F \subset \tilde{F}$ e $\{f_i(x); i \in I$ conjunto de índices família de polinômios$\}$ e $F[x]$. Um corpo $K \subset \tilde{F}$ é o corpo de decomposição de $\{f_i(x); i \in I\}$ sobre F quando K é o menor subcorpo de $\tilde{F}$ que contenha todas as raizes de todos os $f_i(x), i \in I$. Um corpo $K \subset \tilde{F}$ é um corpo de decomposição sobre F quando for o corpo de decomposição de alguma família de polinômios de $F[x]$.

Exemplo 8.36 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ é corpo de decomposição de $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$?

<u>Solução</u>:

Não, pois $\sqrt[3]{2} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{2}$ é uma raiz de $x^3 - 2$ e não pertence a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Assim, o corpo de decomposição será $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi)$ raizes $\sqrt[3]{2}, \xi\sqrt[3]{2}, \xi^2\sqrt[3]{2}$.

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\xi$$
$$z_n = \sqrt[n]{|r|}\left(\cos\frac{\varsigma}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\varsigma}{n}\right)$$

□

teo44 **Teorema 8.28** *Seja K/F algébrica $F \subset K \subset \tilde{F}$. K é um corpo de decomposição sobre F se, e somente se, todo F-automorfismo $\sigma : \tilde{F} \to \tilde{F}$ induz F-automorfismo $\sigma|_K : K \to K$ (F-automorfismo, se os elementos de F são fixos pelo isomorfismo).*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha K é um corpo de decomposição sobre F da família $\{f_i(x); i \in I\}$ e $\sigma : \tilde{F} \to \tilde{F}$ automorfismo tal que $\sigma|_F = id_F$. (F-automorfismo de $\tilde{F}$).

Seja $C = \{\alpha_j; j \in I\} = \{$todas raizes de $f_i, \forall i \in I\}$.

Seja $S = \bigcup F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$. Então S é corpo e $S \subset \tilde{F}$, com $\alpha_j \in S$, temos $S = K$ é corpo de decomposição de $\{F_i(x); i \in I\}$.

Temos $\sigma(\alpha_j)$ é raiz de $\min(\alpha_j, F) \Rightarrow \min(\alpha_j, F); f_i(x)$, tal que $f_i(\alpha_j) = 0 \Rightarrow \sigma(\alpha_j) \in K$, K é corpo de decomposição de $\{f_i(x); i \in I\} \Rightarrow \sigma(k) \subset K$, pois σ é completamente determinado por $\sigma(\alpha_j), j \in J$.

($\Leftarrow$) Imediata. ■

Definição 8.29 Seja K/F extensão de corpos. Dizemos que o polinômio $f(x)$ em $F[x]$ fatora-se em K se ele fatora-se em um produto de fatores lineares $K[x]$.

Exemplo 8.37 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ é tal que o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ fatora-se em K, pois $p(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$.

Obs: Se $K \subset \tilde{F}$ é corpo de decomposição, então todo polinômio em $F[x]$ que tem alguma raiz em K fatora-se em K.

De fato, pelo Teo. 8.28, todo F-automorfismo $\sigma : \tilde{F} \to \tilde{F}$ induz um F-automorfismo $\sigma|_K : K \to K$. Da demonstração do teorema (recíproca), K é corpo de fatoração de $\{g_k(x)/g_k(x)$ irredutível sobre $F[x]$ e tem uma raiz em $K\}$ $\Rightarrow$ todo polinômio de $F[x]$ que tem raiz em K fatora-se em $K[x]$.

cor07 **Corolário 8.30** *Seja $F \subset K \subset \tilde{F}$ e K um corpo de fatoração sobre F. Se $\sigma : K \to \sigma(K) \subset \tilde{F}$ é isomorfismo; que fixa F, então $\sigma(K) = K$, isto é, $\sigma \in G(K/F)$. K/F é normal.*

CAPÍTULO 9

O Teorema Fundamental da Teoria de Galois Infinita

Revisão: K/F extensão de corpos.
$G(K/F) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K) : \sigma(a) = a, \forall a \in F\}$.

teo45 **Teorema 9.1 (Extensão de isomorfismo)** *São equivalentes:*

i) $\sigma(k) = k, \forall \sigma : K \to \sigma(K)$ *que estende* τ.

ii) K *é um corpo de decomposição de um conjunto de polinômios* $\{f_i(x)\}_{i \in I} \subset F[x]$.

Definição 9.2 Sejam K/F algébrica e $car(F) = 0$. Se K/F satisfaz uma das condições acima (e portanto as duas) dizemos que K/F é *normal* ou "*galoisiana*".

Revisão: Observação:

- $S \subset G(K/F)$, vimos que $F \subset \mathcal{F}(s) \subset K$.
  $\mathcal{F}s = \{x \in K : \sigma(x) = x, \forall \sigma \in S\}$, corpo fixo de S.
- K/F galoisiana, $|G(K/F)| = [K : F]$.

teo46 **Teorema 9.3 (Fundamental da Teoria de Galois Finita)** *Seja* K/F *extensão de corpos finita. Suponha que* K/F *é galoisiana. Existe uma correspondência bijetiva (correspondência de Galois) entre os conjuntos:*

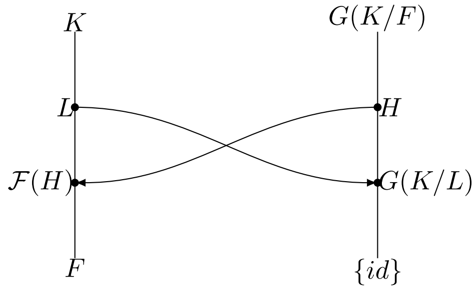


Figura 9.1:

$\{L \text{ corpos} : F \subseteq L \subseteq K\} \overset{\varphi}{\leftrightarrows} \{H : H \leqslant G = G(K/F)\}$ *e que inverte a inclusão.*

$G(K/L) \leqslant (K/F)$
$\sigma : K \to K$ Aut
$\sigma(a) = a, \forall a \in L \supset F$
$\Rightarrow \sigma(a) = a, \forall a \in F$
$\Rightarrow \sigma \in G(K/F)$

$L \overset{\varphi}{\to} G(K/L)$
$\mathcal{F}(H) \overset{\varphi^{-1}}{\leftarrow} H$

Finalmente, $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow L/F$ *galoisiana* $L = \mathcal{F}(H)$*, neste caso* $(G : H) = [L : F]$*.*

Nosso objetivo é estudar a *Topologia de Krull* que permite demonstrar uma versão do Teorema Fundamental da Teoria de Galois para extensões de corpos galoisianas não finita.

Definição 9.4 Seja K/F extensão galoisiana (não necessariamente finita).
Sejam
$\mathscr{A} = \{L : F \subseteq L \subseteq K$ tal que $[L : F] < \infty$ e L/F galoisiana$\}$ e
$\mathscr{B} = \{N \subseteq G = G(K/F) : N = G(K/L),$ algum $L \in \mathscr{A}\}$
Dado $\sigma \in G(K/F)$ e $N \in \mathscr{B}$. Então $\sigma N = \{\sigma \circ \tau : \tau \in N\}$.
Note que $\sigma N \subset G(K/F)$ e $\sigma N \in \{\omega N : \omega \in G(K/F)\}$.

Definição 9.5 Dizemos que $X \subseteq G(K/F)$ é um "*aberto*" quando $X = \emptyset$ ou $X = \bigcup \sigma_j N_j$, para certos $\sigma_j \in G$ e $N_j \in \mathscr{B}$.

teo47 **Teorema 9.6** $\emptyset \cup \{X; X$ *acima*$\}$ *formam uma topologia em* $G(K/F)$*, chamada topologia de Krull.*

Demonstração:
$\emptyset$ é aberto por definição.

$G(K/F)$ é aberto, pois $G(K/F) = idG(K/F)$. Seja $X_\lambda = \bigcup_j \sigma_{j_\lambda} N_{j_\lambda}$.

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in I} X_\lambda = \bigcup_\lambda \left(\bigcup_j \sigma_{j_\lambda} N_{j_\lambda} \right) = \bigcup_{j,\lambda} \sigma_{j_\lambda} N_{j_\lambda}$ é aberto.

O problema é mostrar que $\sigma_1 N_1 \cap \sigma_2 N_2$ é aberto. Para isto precisaremos de 4 lemas: ■

lem07 **Lema 9.7** *Seja K/F galoisiana e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Então existe $L \in \mathscr{A}$ tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$.*

Demonstração:

$L :=$ corpo de decomposição de $\{f_j(x) : f_j(x) = \min(\alpha_j, F)\}$

$\Rightarrow L \in \mathscr{A}$. Pois L/F galoisiana (L é corpo de decomposição) e $L = F$ ($\alpha : \alpha$-raízes de $F_i, \forall i = 1, \ldots, n$).

$\Rightarrow L/F$ finita. $\Rightarrow L \in \mathscr{A}$. ■

lem08 **Lema 9.8** *Seja $N \in \mathscr{B}$ e $N = G(K/L)$, algum $L \in \mathscr{A}$. Então $L = \mathcal{F}(n)$ e $N \trianglelefteq G(K/F)$. Ainda $G/N = G(K/F)/G(K/L) \cong G(L/F)$.*

Demonstração:

K/F é galoisiana $\Rightarrow L = \mathcal{F}(N), \mathcal{F}(G(K/L)) = L$. Seja

$$\begin{aligned} f \ : G(K/F) &\to G(L/F) \\ \sigma \quad &\mapsto \sigma|_L \end{aligned}$$

L/F normal e $\sigma|_F = id \Rightarrow f$ está bem definida. Pelo Teo. 9.1, dado $\tau : L \to L$ automorfismo tal que $\tau|_F = id \Rightarrow \tau$ se estende a $\sigma : K \to K$ tal que $\sigma|_L = \tau \Rightarrow f(\sigma) = \tau \Rightarrow f$ sobrejetiva.

$G(K/F) \xrightarrow{f} G(L/F)$, f sobrejetiva $\Rightarrow G(K/F)/\ker f \cong G(L/F)$.

$\vdash \ker f = G(K/L)$.

$\sigma \in \ker f \Leftrightarrow \underbrace{f(\sigma)}_{\sigma/L} = id_L$ e $\sigma \in G(K/F) \Leftrightarrow \sigma \in G(K/L)$. ■

lem09 **Lema 9.9** *Vale*

(a) $\bigcap_{N \in \mathscr{B}} N = \{id\}$

(b) $\bigcap_{N \in \mathscr{B}} \sigma N = \{\sigma\}$

Demonstração:

(a) $\sigma \in \bigcap\limits_{N \in \mathscr{B}} N$ e $a \in K$, então pelo Lema 9.7, $\exists L \in \mathscr{A}$ tal que $a \in L$ e L/F finita.

Tome $N_0 = G(K/L) \in \mathscr{B}$ e como $\sigma \in \bigcap N$, temos $\sigma \in N_0 \Rightarrow \sigma(a) = a$.

Isto vale $\forall a \in K \Rightarrow \sigma = id_k$.

(b) $\tau \in \sigma N, \forall N \in \mathscr{B}$

$\Rightarrow \sigma^{-1} \circ \tau \in N, \forall N \in \mathscr{B} \Rightarrow \sigma^{-1} \circ \tau \in \bigcap N = \{id\} \Rightarrow \sigma = \tau.$

■

lem10 **Lema 9.10** *Se $N_1, N_2 \in \mathscr{B}$, então $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{B}$.*

Demonstração:
$N_1 = G(K/L_1), [L_1 : F] < \infty; N_2 = G(K/L_2), [L_2 : F] < \infty$ e $L_1/F, L_2/F$ galoisiana (L_1L_2 é o menor subcorpo de K que contém L_1 e L_2, L_1L_2 é normal e finita.) $\Rightarrow L_1L_2 \in \mathscr{B}$.
Vamos mostrar que $N_1 \cap N_2 = G(K/L_1L_2)$.
Seja $\sigma \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow \sigma|_{L_1} = id_{L_1}$ e $\sigma|_{L_2} = id_{L_2}$.
Como $L_1L_2 = \left\{\sum x_i y_i; x_i \in L_1, y_i \in L_2\right\}$
$\Rightarrow \sigma\left(\sum x_i y_i\right) = \sum \sigma(x_i)\sigma(y_i) = \sum x_i y_i$
$\Rightarrow \sigma|_{L_1L_2} = id_{L_1L_2} \Rightarrow \sigma \in G(K/L_1L_2)$.
Se $\sigma \in G(K/L_1L_2) \Rightarrow \sigma|_{L_1L_2} = id_{L_1L_2}$
$\Rightarrow \sigma|_{L_1} = id_{L_1}$ e $\sigma|_{L_2} = id_{L_2}$
$\Rightarrow \sigma \in G(K/L_1) \cap G(K/L_2) = N_1 \cap N_2$. ■
continuação do último Teorema 9.6:
Dados $\sigma_1, \sigma_2 \in G(K/F)$ e $N_1, N_2 \in \mathscr{B}$, tem-se $\sigma_1 N_1 \cap \sigma_2 N_2$ é aberto.
$N_1 = G(K/L_1), L_1/F$ galoisiana $[L_1 : F] < \infty$
$N_2 = G(K/L_2), L_2/F$ galoisiana $[L_2 : F] < \infty$
Seja $\tau \in \sigma_1 N_1 \cap \sigma_2 N_2$. Então $\sigma_1 N_1 \cap \sigma_2 N_2 = \tau N_1 \cap \tau N_2 = \tau(N_1 \cap N_2)$ e pelo Lema 9.10, $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{B} \Rightarrow \sigma_1 N_1 \cap \sigma_2 N_2 \subseteq \tau(N_1 \cap N_2)$ e a outra inclusão é direta.
$\Rightarrow \sigma_1 N_1 \cap \sigma_2 N_2 = \tau(N_1 \cap N_2)$ é aberto. ■
Obs: Cada conjunto da topologia de Krull é uma união do tipo $\bigcup \sigma_j N_j$
$\Rightarrow \{\sigma N : \sigma \in G, N \in \mathscr{B}\}$ é base para topologia de Krull.
Obs: $N \in \mathscr{B} \Rightarrow N = G(K/L), [L : F] < \infty, L/F$ galoisiana
$\Rightarrow (G : N) = |G/N| = |G(L/F)| < \infty$.
Fixado $\sigma \in G, G \backslash \sigma N$ será união finita de classes de N.
$\Rightarrow G \backslash \sigma N$ é aberto $\Rightarrow \sigma N$ é fechado.
Obs: σN é *clopen* (closed + open) "fechaberto" (fechado + aberto).

teo48 **Teorema 9.11** *Seja K/F galoisiana munido com a topologia de Krull, $G(K/F)$ é um espaço topológico*

i) Hausdorff;

ii) totalmente desconexo[1];

iii) compacto.

Um espaço topológico que satisfaz $(i), (ii), (iii)$ é chamado de booleano (Boole).

Demonstração:

(i) G é Hausdorff.

Seja $\sigma, \tau \in G = G(K/F)$ tal que $\sigma \neq \tau$. Lema 9.9 $\Rightarrow \bigcap_{N \in \mathscr{B}} \sigma N = \{\sigma\}$.

$\Rightarrow \exists N \in \mathscr{B}$ tal que $\tau \notin \sigma N \Rightarrow \sigma \in \sigma N$ e $\tau \in G \backslash \sigma N$ são abertos disjuntos que separam τ e $\sigma \Rightarrow G$ é Hausdorff.

(ii) G é totalmente desconexo.

Seja $X \subseteq G$ e $\sigma, \tau \in X$ tal que $\sigma \neq \tau$. Lema 9.9 $\Rightarrow \bigcap_{N \in \mathscr{B}} \sigma N = \{\sigma\}$.

$\Rightarrow \exists N \in \mathscr{B}$ tal que $\tau \notin \sigma N \Rightarrow \sigma N$ aberto e $\tau \notin \sigma N$

$\Rightarrow X = (\sigma N \cap X) \cup ((G \backslash \sigma N) \cap X)$ é união disjunta de abertos não-vazios de X.

(iii) G é compacto. ("idéia")

Pelo Lema 9.8 $\forall N \in \mathscr{B}$ tem-se $|G/N| < \infty$ (número finito de classes). Considere cada G/N com a topologia discreta e seja $P = \prod_{N \in \mathscr{B}} G/N \Rightarrow P$ é espaço topológico com a topologia produto.

G/N Hausdorff $\Rightarrow P$ Hausdorff.

G/N compacto $\Rightarrow P$ compacto (Teo. Tychonoff). Seja

$$\begin{aligned} f \ &: G \to P \\ \sigma &\mapsto \prod_{N \in \mathscr{B}} \sigma N \end{aligned}$$

[1] Os únicos conjuntos conexos são os pontos.

$\Rightarrow f$ é homomorfismo de grupos. E é injetiva, pois $\sigma \in \ker f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma N = N, \forall N \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \sigma \in \bigcap_{N \in \mathscr{B}} N = \{id\}.$$

Falta mostrar que f é fechado em P. Mas não faremos, pois necessita da teoria de limites inversos e limites discretos. E P é Hausdorff e compacto $\Rightarrow \operatorname{Im} f$ é compacto e $G \cong \operatorname{Im} f \Rightarrow G$ compacto (continuidade de f não faremos).

■

teo49 **Teorema 9.12** *Seja $H \leqslant G(K/F)$ e $H' = G(K/\mathcal{F}(H))$. Então $H' = \overline{H}$ (fecho de H na topologia de Krull).*

Demonstração:
$H \subseteq H'$, pois $\sigma \in H$, tem-se $\sigma(a) = a, \forall a \in \mathcal{F}(H) \Rightarrow \sigma \in H'$.
Resta mostrar que H' é fechado e $H' \subset \overline{H}$.

- H' é fechado. De fato, seja $\sigma \in G \backslash H'$. Então, $\exists \alpha \in \mathcal{F}(H)$ tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$. Tome $L \in \mathscr{A}$ tal que $\alpha \in L$ (Lema 9.7) e seja $N = G(K/L) \in \mathscr{B}$.

  Temos que $\forall \tau \in N, \tau(\alpha) = \alpha \Rightarrow \sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\alpha) \neq \alpha$.

  $\Rightarrow \sigma \circ \tau \notin H', \forall \tau \in N \Rightarrow \sigma N \cap H' = \emptyset, \sigma N$ é aberto e contém σ.

  $\Rightarrow G \backslash H' \Rightarrow H'$ fechado.

- $H' \subset \overline{H}$. De fato, seja $L = \mathcal{F}(H)$ e seja $\sigma \in H', N \in \mathscr{B}$. Provar que $\sigma N \cap H \neq \emptyset, \forall \sigma \in H, \forall N$. Seja $E = \mathcal{F}(N) \in \mathscr{A}$ e $H_0 = \{\rho|_E : \rho \in H\} \Rightarrow H_0 \leqslant G(E/F)$

  $\Rightarrow \mathcal{F}(H_0) = \mathcal{F}(H) \cap E = L \cap E \overset{\text{T.F. Galois finito}}{\Longrightarrow} H_0 = G(E, E \cap L)$.

  Agora $\sigma \in H' \Rightarrow \sigma|_L = id \Rightarrow \sigma|_E = id$

  $\Rightarrow \exists \rho \in H$ tal que $\rho|_E = \sigma|_E \Rightarrow \sigma^{-1} \circ \rho \in N = G(K/E)$

  $\Rightarrow \rho \in \sigma N \cap H \Rightarrow \sigma N \cap H \neq \emptyset$.

■

teo50 **Teorema 9.13 (Fundamental da Teoria de Galois Infinita)** *Seja K/F galoisiana e $G = G(K/F)$ munido com a topologia de Krull. A correspondência $\{H \leqslant G(K/F), H$ fechado na topologia de $G\} \mapsto \{L$ corpo $: F \subseteq L \subseteq K\}$*

$$L \overset{\varphi}{\mapsto} G(K/L)$$

$$\mathcal{F}(H) \overset{\psi}{\leftarrow} H$$

é uma bijeção que inverte a inclusão. E ainda:

1. $L \leftrightarrow H$, *então* $(G:H) < \infty \Leftrightarrow [L:F] < \infty \Leftrightarrow H$ *aberto;*

2. $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow L/F$ *galoisiana,* $G(L/F) \cong G/H$.

Demonstração:

(i) Mostremos que ψ está bem definida.
Vimos que dado $H \subset G = G(K/F)$ o corpo fixo $\mathcal{F}(H)=\{x\in K:\sigma(x)=x,\forall\sigma\in H\}$ é de fato um corpo contido em K e que contém F.

(ii) Mostremos que φ está bem definida.
K/F galoisiana $\Rightarrow L/F$ galoisiana. Mas $\varphi(L) = G(K/L)$ que é subgrupo de $G(K/F)$, pois σ fixa $L \Rightarrow \sigma$ fixa F, e $G(K/L)$ é fechado de G (Teo. 9.12).

(iii) Bijeção: $\varphi(\psi(H)) = H, \psi(\varphi(L)) = L$.
$\varphi(\psi(H)) = \varphi(\mathcal{F}(H)) = G(K/\mathcal{F}(H)) = H$, ($H$ fechado + teorema).
$\psi(\varphi(L)) = \psi(G(K/L)) = \mathcal{F}(G(K/L)) = L$, ($K/L$ galoisiana).

(iv) $F \subset L_1 \subset L_2 \subset K$. Mostrar que $G(K/L_1) \supset G(K/L_2)$, $(\varphi(L_1) \supset \varphi(L_2))$.
Seja $\sigma \in G(K/L_2)$. $\Rightarrow \sigma(x) = x, \forall x \in L_2 \supset L_1$.
$\Rightarrow \sigma(x) = x, \forall x \in L_1 \Rightarrow \sigma \in G(K/L_1) \Rightarrow G(K/L_2) \subset G(K/L_1)$.

(v) Mostrar que $H_1 \subset H_2 \Rightarrow \psi(H_1) \supset \psi(H_2)$, ou seja, $\mathcal{F}(H_1) \supset \mathcal{F}(H_2)$.
Seja $x \in \mathcal{F}(H_2)$. $\Rightarrow \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H_2 \supset H_1$.
$\Rightarrow \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H_1 \Rightarrow \mathcal{F}(H_1) \supset \mathcal{F}(H_2)$.

Resta provar que se $L \leftrightarrow H$, então $(G:H) < \infty \Leftrightarrow [L:F] < \infty \Leftrightarrow H$ aberto.

(i) Mostrar que $(G:H) < \infty \Leftrightarrow [L:F] < \infty$.

(ii) Mostrar que $(G:H) < \infty H$ aberto.
$(G:H) < \infty \Rightarrow G\backslash H$ é união finita de classes de H em $G, G\backslash H = \sigma_1 H \cup \ldots \cup \sigma_n H$ é fechado $\Rightarrow H$ aberto.

(iii) Mostrar que H aberto $\Rightarrow [L:F] < \infty$. H aberto $\Rightarrow \exists N \in \mathscr{B}$ tal que $id \in N$.
Seja $E = \mathcal{F}(N)$, temos $N \subset H \Rightarrow L \subseteq E, [E:F] < \infty \Rightarrow [L:F] < \infty$.
Não faremos: $(G:H) = [L:F]$.

■

Exemplo 9.1 Sejam K/F galoisiana e $[K:F] < \infty$. Então a topologia de Krull em $G(K/F)$ é discreta, pois todo subgrupo de $G(K/F)$ é fechado (e aberto, pois é união finita de classes).

Logo, o T.F.T.G. finita é um caso particular do teorema anterior.

Exemplo 9.2 $\mathbb{Q}(2)$ é fecho quadrático de $\mathbb{Q}$. $[\mathbb{Q}(2):\mathbb{Q}] = \infty$.

CAPÍTULO 10

Solução de Alguns Exercícios

1 (3.1) Seja (M, d) um espaço métrico. Defina conjunto aberto e conjunto fechado em M. Demonstre que $\emptyset$ e M são ao mesmo tempo abertos e fechados em M. Demonstre que a bola aberta é um conjunto aberto em M. Demonstre que a união arbitrária de abertos de M é um aberto de M e a interseção finita de abertos de M é um aberto de M. Faça a afirmação correspondente a fechados de M e demonstre-a.

Solução:

i) Um conjunto $A \subset M$ é *aberto* se para cada $a \in A, \exists \varepsilon > 0$
tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$. Um conjunto $F \subset M$ é *fechado* se seu complementar F^c é aberto.

ii) $\emptyset$ é aberto. De fato, como o conjunto vazio $\emptyset$ não possui elemento algum, não pode existir no conjunto vazio elemento que não esteja no seu interior. Logo $\emptyset$ é aberto.

   M é aberto, pois todos seus pontos são interiores.

   Agora, $\emptyset^c = M$ e M é aberto, então $\emptyset$ é fechado.

   E $M^c = \emptyset$, que é aberto, então M é fechado.

iii) A bola aberta é um conjunto aberto em M. De fato, seja $B = B_\varepsilon(a)$. Devemos mostrar que dado $x \in B, \exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset B$.

   Seja $\delta = \dfrac{\varepsilon - d(x,a)}{2}$.

$$\begin{array}{rcl} d(y,a) & \leqslant & \underbrace{d(y,x)}_{<\delta} + d(x,a) \\ & < & \delta + d(x,a) \\ & = & \dfrac{\varepsilon - d(x,a)}{2} + d(x,a) \\ & = & \dfrac{\varepsilon - d(x,a) + 2d(x,a)}{2} \\ & = & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{d(x,a)}{2} \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Rightarrow d(y,a) & < & \varepsilon \\ & \Rightarrow & y \in B \end{array}$$

iv) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ é aberto e $\mathscr{A}_1 \cap \ldots \cap \mathscr{A}_n$ é aberto.

- Sejam $A = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}$ e $a \in A$. Devemos mostrar que $\exists\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$.
  $a \in A \Rightarrow \exists\lambda_0 \in A$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$, que é aberto.
  Logo, $\exists\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A_{\lambda_0} \subset A; \Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset A$.
  Portanto, A é aberto.
- Sejam $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ e $a \in A$.
  Note que $a \in A_i, \forall i$.
  Como $A_1, \ldots, A_n$ é aberto, existem $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tal que $B_{\varepsilon_i}(a) \subset A_i, i = 1, \ldots, n$.
  Tome $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\varepsilon_i\}$.
  $\Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset B_{\varepsilon_i}(a) \subset A_i, i = 1, \ldots, n$.
  $\Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A$.
  Portanto, A é aberto.

v) Seja (M,d) espaço métrico.

- Sejam $F_\lambda, \lambda \in \Lambda$, fechados de M. Então, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é fechado.

- Se $F_1, \ldots, F_n$ são fechados de M, então $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.
  A intersecção arbitrária de fechados é fechado e a união finita de fechados é fechado.

De fato,

- F_λ fechado, $\forall \lambda \in \Lambda$.
  $\Rightarrow F_\lambda^c$ é aberto, $\forall \lambda \in \Lambda$.
  $\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$ é aberto.
  Mas $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c \Rightarrow \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c$ é aberto.
  $\Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado.
- F_i fechado, $\forall i = 1, \ldots, n$.
  $\Rightarrow F_i^c$ é aberto.
  $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i^c$ é aberto $= \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \right)^c$
  $\Rightarrow F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.

$\square$

2 (3.2) Seja M um conjunto não vazio. Mostre que a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \neq y \\ 0 & , \text{se } x = y \end{cases}$$

é uma métrica em M. A aplicação d é denominada de *métrica discreta* e o conjunto não vazio M munido com a métrica discreta é denominado de *espaço métrico discreto*. Considere (M, d) o espaço métrico discreto. Dado $x \in M$, mostre que uma bola aberta qualquer com centro x é igual a $\{x\}$ ou a M. Utilize este fato para mostrar que todo subconjunto de M é ao mesmo tempo aberto e fechado e o que o interior de uma bola fechada em M não precisa ser a bola aberta de M.

Solução:

i) Sejam $x, y, z \in M$.

   (i) Por definição, se $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1 > 0$.

(ii) Por definição, se $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.

(iii)
- se $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1 = d(y, x)$;
- se $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 = d(y, x)$.

(iv)
- se $x \neq y \Rightarrow d(x, y) + d(y, z) = 1 + 1 = 2 > 1 = d(x, z)$;
- se $x = y \Rightarrow d(x, y) + d(y, z) = 0 + 0 = 0 = d(x, z)$.

Portanto, $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z), \forall x, y, z \in M$.

ii) Seja $x \in M$ e $\varepsilon > 0$.

$\varepsilon > 1 \Rightarrow B_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\} = M$

$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow B_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\} = \{x\}$

Então, dado $A \subset M$ e $x \in A$, tome $\varepsilon = 1/2$.

Então, $B_{1/2}(n) = \{x\} \subset A, \forall x \in A \Rightarrow A$ aberto.

□

3 (3.3) Seja d uma métrica no conjunto não vazio M. Mostre que as novas funções $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente por

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{e} \quad d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

para todos $x, y \in M$, também são métricas em M. Note que $0 \leqslant d_1(x, y) \leqslant 1$, para todos $x, y \in M$. Por este motivo d_1 é denominada *métrica limitada.*

Suponha que M é munido da norma $\| \quad \|$, isto é, $(M, \| \quad \|)$ é um espaço vetorial normado. Mostre que a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$, dada por
$d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em M. Isso que dizer a métrica d provém da norma $\| \quad \|$. Contudo, nem toda métrica provém de uma norma. De fato, vamos supor que (M, d) é um espaço métrico discreto e ao mesmo tempo M é espaço vetorial com a norma $\| \quad \|$, tal que $d(x; y) = \|x - y\|$. Observe que para $x \neq 0$, temos $d(0, x) = 1 = d(0, \lambda x)$, para todo $\lambda > 0$ real. Utilizando este fato conclua o absurdo: $1 = \lambda$, para todo λ real positivo. Portanto, a métrica discreta não provem de uma norma.

Solução:

- d_1 é métrica em M. De fato,

(i) d é métrica $\Rightarrow d(x, y) \geqslant 0$. Logo, $\dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geqslant 0$.

(ii) d é métrica $\Rightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Supondo $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(iii) Seja $d(x,y) = d(y,x)$, pois, d é métrica.

Então, $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_1(y,x)$

$\Rightarrow d_1(x,y) = d_1(y,x)$

(iv) Seja $x,y,z \in M$. Então,

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leqslant \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = d_1(x,z) \text{ e}$$

$$\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leqslant \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = d_1(z,y)$$

Como d é métrica, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$. Logo,

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leqslant \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} =$$
$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leqslant d_1(x,z) + d_1(z,y)$$
$$\Rightarrow d_1(x,y) \leqslant d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

Portanto, d_1 é métrica.

- d_2 é métrica em M. De fato, seja $x,y,z \in M$.

(i) Como d é uma métrica, $d(a,b) \geqslant 0$. Logo, $d_2(a,b)$, que é 1 ou $d(a,b)$, é também $\geqslant 0$.

(ii) Se $a = b$, então $d_2(a,b) = \min\{1, d(a,b)\} = \min\{1,0\} = 0$.

(iii) Por definição, $d_2(x,y) = d(x,y)$ ou $d_2(x,y) = 1$.

Suponhamos $d_2(x,y) = d(x,y)$, então $d(x,y) < 1$. Como d é uma métrica, $d(x,y) = d(y,x) < 1$.

Portanto, $d_2(y,x) = d(y,x) = d(x,y) = d_2(x,y)$.

Por outro lado, suponhamos $d_2(x,y) = 1$; então, $d(x,y) \geqslant 1$. Logo, $d(y,x) = d(x,y) \geqslant 1$. Portanto, $d_2(x,y) = 1 = d_2(y,x)$.

(iv) Observe que $d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leqslant 1$. Logo, se $d_2(x,z) = 1$ ou $d_2(z,y) = 1$, então a desigualdade triangular fica ok. Mas, se $d_2(x,z) < 1$ e $d_2(z,y) < 1$, então $d_2(x,z) = d(x,z)$ e $d_2(z,y) = d(z,y)$. Portanto,

$$d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) =$$
$$= d_2(x,z) + d_2(z,y) \Rightarrow d_2(x,y) \leqslant d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

Assim, a desigualdade triangular vale em todos os casos.

Portanto, d_2 é métrica.

- Mostremos que a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em M.

  (i) $d(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$, pois, $\|x\| \geqslant 0$.

  (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

  (iii) Note que $\|kx\| = |k|\,\|x\|$, pois $(M, \|\quad\|)$ é um espaço vetorial normado. Então,

  $$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\,\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

  (iv) Note que $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, pois $(M, \|\quad\|)$ é um espaço vetorial normado. Então, se $a, b, c \in (M, \|\quad\|)$, substituindo $x = a - b$ e $y = b - c$, temos

  $$\|a - c\| = \|(a - b) + (b - c)\| = \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|a - b\| + \|b - c\|$$

  ou seja,

  $$d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$$

  Portanto, d é métrica.

  Vamos concluir o absurdo: $1 = \lambda$, para todo λ real positivo.
  Para $x \neq 0$, temos $d(0, x) = 1 = d(0, \lambda x)$, para todo $\lambda > 0$ real.
  Como $d(x, y) = \|x - y\|$
  $\Rightarrow d(0, x) = \|0 - x\| = \|-x\| = |-1|\,\|x\| = \|x\| = 1$ e
  $d(0, \lambda x) = \|0 - \lambda x\| = \|-\lambda x\| = |-\lambda|\,\|x\| = |-1||\lambda|\,\|x\| = \lambda\,\|x\| = \lambda.1 = \lambda$.
  Portanto, $d(0, x) = 1 = d(0, \lambda x) = \lambda \Rightarrow \lambda = 1$, para todo λ real positivo.
  Logo, a métrica discreta não provém de uma norma.

$\square$

4 (3.4) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (munido da norma euclidiana usual). Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Demonstre que $A + B = \{a + b | a, b \in \mathbb{R}^n\}$ é também aberto de $\mathbb{R}^n$. Demonstre que: o intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$; o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 2\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$; o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ é um fechado de $\mathbb{R}^2$.

Solução:
Para mostrar que $A + B = \{a + b : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, devemos

1) Dado $a \in A$, provar que $\mathcal{U}_a = a + B = \{a + b; b \in B\}$ é aberto.

2) Notar que $A+B = \bigcup_a (a + B)$ e usar o fato de que a união arbitrária de abertos é aberto.

Seja $x \in \mathcal{U}_a \Rightarrow x = a + b, b \in B$.
B aberto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(b) \subset B$.
Afirmação: $B_\varepsilon(x) \subset \mathcal{U}_a = a + B$.
De fato, $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow y = a + (y - a)$

$$\Rightarrow \|(y-a) - b\| = \|y - (a+b)\| = \|y - x\| < \varepsilon \Rightarrow y - a \in B \Rightarrow y \in a + B$$

Para mostrar que o intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Façamos:
Dado $x \in (a, b)$, devemos obter $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$.
Tomando $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{|x-a|}{2}, \dfrac{|x-b|}{2}\right\}$, concluimos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$.

Para mostrar que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ é um fechado de $\mathbb{R}^2$. Façamos F^c aberto:

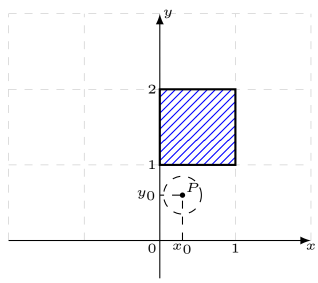


Figura 10.1:

Tome $P = (x_0, y_0) \in F^c, x \in A_1$. Escolha $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{|x_0|}{2}, \dfrac{|x_0 - 1|}{2}, \dfrac{|y_0|}{2}, \dfrac{|y_0 - 1|}{2}\right\}$.
Note que $B_\varepsilon(P) \subset F^c$.
Analogamente, sendo $(x_0, y_0) \in A_2, A_3$ ou A_4, obtém-se $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(P) \subset F^c \Rightarrow F^c$ aberto. $\square$

5 (4.1) Defina topologia sobre um conjunto. Defina espaço topológico. Considere o conjunto $X = \{a, b, c\}$. Classifique todas as topologias possíveis sobre X, isto é, liste todos os subconjuntos do conjunto das partes de X e verifique quais deles são topologia.

Solução:

Cada topologia τ em X é da forma $\tau = \{X, \emptyset, A, B\}$, onde A e B correspondem ao caso I ou II do problema precedente.

Precedente: Seja τ a topologia num conjunto X, consistindo em quatro conjuntos, isto é, $\tau = \{X, \emptyset, A, B\}$ onde A e B são subconjuntos próprios, distintos, não-vazios de X. Que condições devem A e B satisfazer?

Com $A \cap B$ deve também pertencer a τ, há duas possibilidades:

(i) $A \cap B = \emptyset$. Então $A \cup B$ não pode ser A ou B; logo, $A \cup B = X$. Assim, a classe $\{A, B\}$ é partição de X.

(ii) $A \cap B = A$ ou $A \cap B = B$.

Em qualquer caso, um dos conjuntos é subconjunto do outro e os membros de τ são totalmente ordenados pela inclusão: $\emptyset \subset A \subset B \subset X$ ou $\emptyset \subset B \subset A \subset X$.

(i) $\{A, B\}$ é uma partição de X.

As topologias nesse caso são as seguintes:

$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}, \tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$ e $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$.

(ii) Os membros de τ são totalmente ordenados por inclusão. As topologias nesse caso são as seguintes:

$\tau_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \tau_5 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \tau_6 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$

$\tau_7 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}, \tau_8 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}, \tau_9 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$

As topologias com 3 membros são:

$\tau_{10} = \{X, \emptyset, \{a\}\}, \tau_{11} = \{X, \emptyset, \{b\}\}, \tau_{12} = \{X, \emptyset, \{c\}\}$

□

6 (4.3) Seja $\tau^r = \{\mathbb{R}, \emptyset, (q, \infty); q \in \mathbb{Q}\}$. Aqui, fixado $q \in \mathbb{Q}$, o conjunto (q, ∞) é o intervalo aberto infinito $\{x \in \mathbb{R} | x > q\}$. Mostre que τ^r não forma uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

Solução:

Seja $A = \cup\{(q, \infty); q \in \mathbb{Q}, q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty)$ que é a união de membros de τ^r, mas $A \notin \tau^r$, pois $\sqrt{2}$ é irracional. Logo, τ^r não satisfaz a condição que a união de um número qualquer de conjuntos de τ^r pertence a τ^r, não sendo, portanto, uma topologia de $\mathbb{R}$.

$$A_q = (q, \infty) \Rightarrow A = \cup\{A_q; q \in \mathbb{Q}, q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty)$$

□

7 (4.4) Seja $f : X \to Y$ uma função de um conjunto X num espaço topológico (Y, τ). Mostre que $T = \{f^{-1}(U) | U \in \tau\}$ é uma topologia sobre X.

Solução:

Como τ é uma topologia, $Y, \emptyset \in \tau$, mas $X = f^{-1}(Y)$ e $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ de modo que $X, \emptyset \in T$ e T satisfaz [01].

[02] Seja $\{B_i\}$ uma classe de conjuntos em T. Por definição, existe $\mathcal{U}_i \in \tau$, para o qual $B_i = f^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Mas $\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}((\mathcal{U}_i)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\right)$.

Como τ é uma topologia, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \tau$, de modo que $\bigcup_{i \in I} B_i \in T$, e satisfaz [02].

[03] Sejam $B_1, B_2 \in T$. Então, $\exists \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau$ tal que $B_1 = f^{-1}(\mathcal{U}_1)$ e $B_2 = f^{-1}(\mathcal{U}_2)$.

Mas $B_1 \cap B_2 = f^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2) = f^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ e $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \tau$, pois, τ é topologia.

Assim, $B_1 \cap B_2 \in T$ e [03] é também satisfeita.

Portanto, T é topologia sobre X. $\square$

8 (4.5) Seja τ a classe de subconjuntos de $\mathbb{N}$ formada de $\emptyset$ e de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ da forma $E_n = \{n, n+1, n+2\}$ com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que τ é uma topologia em $\mathbb{N}$. Indique os abertos que contêm o inteiro positivo 6. Determine os fechados segundo esta topologia. Determine o fecho dos conjuntos $\{7, 24, 47, 85\}$ e $\{3, 6, 9, 12\}$. Determine os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que são densos em $\mathbb{N}$ (neste caso, um subconjunto é denso se o seu fecho é $\mathbb{N}$).

Solução:

1. τ é topologia em $\mathbb{N}$.

   (1) Como $\emptyset$ e $E_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ pertencem a τ, τ satisfaz [1];

   (2) Seja, agora, τ uma subclasse de $\tau \backslash \{\mathbb{N}, \emptyset\}$, isto é, $\tau = \{E_n; n \in I\}$, onde I é um conjunto de inteiros positivos. Note que I contém um menor inteiro positivo n_0 e $\cup\{E_n; n \in I\} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} = E_{n_0}$ que pertence a τ. Logo, τ satisfaz [2];

   (3) τ é totalmente ordenado pela inclusão, isto é, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset \ldots$, implica que a interseção finita de conjuntos quaisquer de τ pertence a T.

   Portanto, τ é topologia de $\mathbb{N}$.

2. Como os abertos não-vazios são da forma $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ com $n \in \mathbb{N}$, os abertos que contém 6 são os seguintes:

$$\begin{array}{ll} E_1 = \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} & E_4 = \{4,5,6,\ldots\} \\ E_2 = \{2,3,4,\ldots\} & E_5 = \{5,6,7,\ldots\} \\ E_3 = \{3,4,5,\ldots\} & E_6 = \{6,7,8,\ldots\} \end{array}$$

3. Fechados: Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto. Então, os subconjuntos fechados de W são:

$$\mathbb{N}, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,3,\ldots,n\}, \ldots$$

4. Fecho: O fecho de um conjunto é o menor conjunto fechado. Então:

$$\overline{\{7,24,47,85\}} = \{1,2,3,\ldots,84,85\}$$
$$\overline{\{3,6,9,12\}} = \{1,2,3,\ldots,11,12\}$$
$$\overline{\{3,6,9,12,\ldots\}} = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$$

5. Densos: Se um subconjunto B de $\mathbb{N}$ é infinito, ou não cotado, então $\overline{B} = \mathbb{N}$, isto é, B é denso em $\mathbb{N}$. Se B é finito, então seu fecho não é $\mathbb{N}$, isto é, B não é denso em $\mathbb{N}$.

   Ex: $\{3,6,9,12,\ldots\}$ é denso em $\mathbb{N}$, pois, $\overline{\{3,6,9,12\}} = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$.

$\square$

9 (4.6) Mostre que se A é um subconjunto de um espaço topológico X, então o fecho de A é a união do interior com a fronteira. Mostre também que o interior de A é $A \backslash \partial A$ e que $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X \backslash A)$.

Solução:

- $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A)$.

  $X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup \text{ext}(A), (\text{int}(A) \cup \partial(A))^c = \text{ext}(A)$, basta mostrar que $(\overline{A})^c = \text{ext}(A)$.

  Seja $a \in \text{ext}(A)$, então, existe um aberto G tal que $a \in G \subset A^c \Rightarrow G \cap A = \emptyset$.

  Então, a não é ponto limite de A, isto é, $a \notin A'$ (pontos de acumulação de A) e $a \notin A$. Logo, $a \notin A' \cup A = \overline{A} \Rightarrow a \in (\overline{A})^c \Rightarrow \text{ext}(A) \subset (\overline{A})^c$.

  Agora, seja $a \in (\overline{A})^c = (A \cup A')^c$. Assim, $a \notin A'$, e, portanto, existe um aberto G tal que $a \in G$, e $(G \backslash \{a\}) \cap A = \emptyset$. Mas, também, $a \notin A$, de modo que $G \cap A = \emptyset$ e $a \in G \subset A^c$. Assim, $a \in \text{ext}(A) \Rightarrow (\overline{A})^c \subset \text{ext}(A)$.

$$\therefore (\overline{A})^c = \text{ext}(A) \Leftrightarrow \overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A)$$

O exterior de A, ext(A), é o interior do complementar de A, isto é, int(A^c). Fronteira de A, $\partial(A)$, é o conjunto dos pontos que não pertencem ao interior nem ao exterior de A.

Note que $X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup \text{ext}(A)$ e $\text{ext}(A) = (\text{int}(A) \cup \partial(A))^c$

$\Rightarrow X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup (\text{int}(A) \cup \partial(A))^c = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup (\overline{A})^c$.

Devemos mostrar que $(\overline{A})^c = \text{int}(X \backslash A)$.

De fato, seja $a \in (\overline{A})^c$. Então, $a \notin \overline{A} \Rightarrow a \notin A \Rightarrow a \in \text{int}(X \backslash A) \Rightarrow (\overline{A})^c \subset \text{int}(X \backslash a)$.

Agora, se $a \in \text{int}(X \backslash A) \Rightarrow \exists G$, aberto, $G \subset X \backslash A$ tal que $a \in G \subset X \backslash A \Rightarrow a \in X \backslash A \Rightarrow a \in (\overline{A})^c$.

$$\therefore X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup \text{int}(X \backslash A)$$

- $\text{int}(A) = A \backslash \partial A$.

  $\subset$) Seja $a \in \text{int}(A)$, então existe um aberto G tal que $a \in G \subset A \Rightarrow a \in A \Rightarrow a \in A \backslash \partial A$.

  $\supset$) Seja $a \in A \backslash \partial A \Rightarrow a \in A$ e $a \notin \partial A$, então existe um aberto G tal que $a \in G \subset A \Rightarrow a \in \text{int}(A)$.

$$\therefore \text{int}(A) = A \backslash \partial A$$

$\square$

Continuidade, Continuidade num Ponto, Funções Abertas, Funções Fechadas, Homeomorfismos

10 (5.2) Mostre que se (X, τ) é o espaço topológico discreto então qualquer função $f : X \to Y$ (onde Y é outro espaço topológico qualquer) é função contínua. E se X for espaço topológico qualquer e Y for indiscreto ($\emptyset$ e Y forem os únicos abertos) que funções entre estes dois espaços são contínuas?

Solução:

Considere o espaço topológico (Y, τ) e um espaço discreto (X, σ). Então toda função $f : X \to Y$ é contínua em relação a τ e σ, pois, se H é um aberto de Y, sua inversa $f^{-1}(H)$ é aberto de X, já que todo subconjunto de um espaço discreto é aberto.

Seja $f : X \to Y$ uma função. Se (Y, τ') é um espaço indiscreto, vamos provar que $f : (X, \tau) \to (T, \tau')$ é contínua para qualquer τ.

Devemos mostrar que a imagem inversa de todo aberto de Y é um aberto de X. Como (Y, τ') é um espaço indiscreto, Y e $\emptyset$ são os únicos abertos de Y. Mas $f^{-1}[Y] = X, f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ e X e $\emptyset$ pertencem a qualquer topologia τ em X. Logo, f é contínua para qualquer τ. $\square$

11 (5.3) Mostre que se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços métricos, então uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Solução:
$\Rightarrow$) Seja f contínua. $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. f contínua $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é aberto de X e contém $x \Rightarrow \exists B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Assim, se $y \in B_\delta(x)$, tem-se $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. Logo, $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Suponha que a implicação contrária é válida. Seja V aberto de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Mas $f(x) \in V$ aberto $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(x)) \subset V \Rightarrow \exists B_\delta(x)$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V)$ aberto de X. Logo, f é contínua. □

12 (5.5) Defina continuidade num ponto. Dados X e Y espaços topológicos, mostre que $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada ponto de X.

Solução:
Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função. Dizemos que f é contínua em $p \in X$ quando dado $V \subset Y, V$ aberto tal que $f(p) \in V$, existe $\mathcal{U} \subset X, \mathcal{U}$ aberto tal que $p \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subset f^{-1}(V)$.

Agora, mostremos que $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada ponto de X. Suponha f contínua e seja $H \subset Y$ um aberto contendo $f(p)$. Então, $p \in f^{-1}(H)$, e $f^{-1}(H)$ é aberto. Logo, f é contínua em p.

Suponha, agora, f contínua em cada ponto de $p \in X$ e seja $H \subset Y$ aberto. Para todo $p \in f^{-1}(H)$ existe um aberto $G_p \subset X$ tal que $p \in G_p \subset f^{-1}(H)$. Logo, $f^{-1}(H) = \bigcup\{G_p; p \in f^{-1}(H)\}$, união de abertos. Consequentemente, $f^{-1}(H)$ é aberto e, assim, f é contínua. □

13 (5.6) Considere o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ munido da topologia $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$. Considere a função $f : X \to X$, tal que $f(1) = f(3) = 2, f(2) = 4$ e $f(4) = 3$. Mostre que f não é contínua em 3 mas é contínua em 4.

Solução:

i) Mostrar que f não é contínua em 3. Note que $\{1, 2\}$ é um aberto contendo $f(3) = 2$ e que $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 3\}$. Logo, f não é contínua em 3, pois não existe nenhum aberto contendo 3 que esteja contido em {1,3}.

ii) Mostrar que f é contínua em 4. Os únicos abertos contendo $f(4) = 3$ são $\{2, 3, 4\}$ e X. Observe que $f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = X$ e $f(X) = X$. Logo, f é contínua em 4, pois a inversa de cada aberto contendo $f(4)$ é um aberto contendo 4.

□

14 (5.7) Defina função sequencialmente contínua num ponto. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua num ponto $p \in X$, então f é sequencialmente contínua em p. Construa um contra-exemplo para a recíproca.

Solução:
Contra-exemplo para a recíproca do teorema: Seja $X = \mathbb{R}$ com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R}; A^c$ enumerável ou $A = \emptyset\}$. Nesta topologia uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ converge para x se, e somente se, $(x_n) = (x_1, \ldots, x_{n_0}, x, \ldots, x, \ldots)$. Logo, se $(\mathbb{R}, \tau*)$, $\tau* =$ topologia qualquer em $\mathbb{R}$, $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau*)$ e $x_n \to x$ em $(\mathbb{R}, \tau)$, tem-se $(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_0), f(x), \ldots, f(x), \ldots)$ que converge em $(\mathbb{R}, \tau*), \forall f$. Por outro lado, $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \text{top. usual})$ e $f(a) = a, \forall a$ não é contínua, pois $f^{-1}((a_0, b_0)) = (a_0, b_0)$ não é aberto em τ. □

15 (5.8) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua e fechada, mas não aberta. Mostre que a função $f : (0, \infty) \to [-1, 1]$ é contínua, mas nem aberta nem fechada (topologia usual).

Solução:
Seja f uma função constante $f(x) = \sqrt{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(A) = \{\sqrt{2}\}$ para qualquer $A \subset \mathbb{R}$. Logo, f é uma função fechada e é uma função não aberta. Além disso, f é contínua. □

16 (5.9) Neste exercícios sempre supomos topologia usual. Mostre que o intervalo (a, b) é homeomorfo ao intervalo $(-1, 1)$ (faça todos os detalhes). Mostre que S^1 é o homemorfo ao quadrado

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

Solução:
Uma função f é dita *bicontínua* ou *topológica* se f é aberta e contínua. Assim, $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se, e somente se, f é bicontínua e bijetiva.

Seja $X = (-1, 1)$. A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ é bijetiva e contínua. Além disso, a inversa f^{-1} é também contínua. Logo, a reta real $\mathbb{R}$ e o intervalo aberto $(-1, 1)$ são homeomorfos.

Mostrar que $(a, b) \cong (-1, 1)$. Seja $f : (a, b) \to (-1, 1)$ dada por $f(x) = \frac{2x - (b + a)}{b - a}$. Verificar que f é bijetiva, contínua e sua inversa é $f^{-1}(x) = \frac{(b - a)x + (a + b)}{2}$ é contínua.

Mostrar que $S^1 \cong A$. Definamos $f : S^1 \to A$ levando o arco ab de S^1 no segmento $\overline{uv}$ de A, o arco bc de S^1 no segmento $\overline{vw}$ de A, o arco cd de S^1 no segmento $\overline{wz}$ de A e o arco da de S^1 no segmento $\overline{zu}$ de A, isto é, $f(x, y) = \left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right)$ e $f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$, onde $m = \max\{|x|, |y|\}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; obviamente f e f^{-1} são bijetoras e contínuas. Logo f é um homeomorfismo.

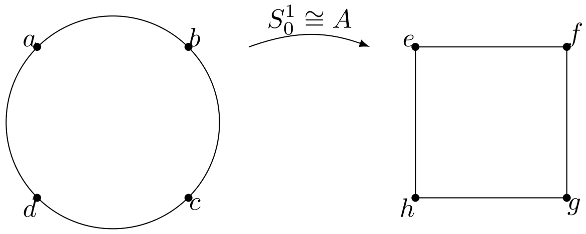


Figura 10.2:

□

17 (5.10) Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $G(X)=\{f{:}X\to X \mid f \text{ é homeomorfismo}\}$. Mostre que $G(X)$ é um grupo com a operação de composição de funções. É G grupo abeliano?

Solução:
Sejam $f, g, h \in G(X)$.

i) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;

ii) O elemento neutro é id_x. De fato, seja $f \in G(X)$, então $f \circ id_x = f(id_x) = f, \forall f \in G(X)$;

iii) Dado $f \in G(X), \exists f^{-1} \in G(X)$ tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_x$. Portanto, $(G(X), \circ)$ é um grupo;

iv) G não é abeliano.

□

Axiomas de Separação

18 (5.14) Mostre que todo espaço métrico é de Hausdorff.

Solução:

Sejam $a, b \in X, a \neq b$. Tomemos $U = B_{\varepsilon/3}(a)$ e $V = B_{\varepsilon/3}(b)$, onde $\varepsilon = d(a,b) > 0$, pois $a \neq b$.

Afirmação: $U \cap V = \emptyset$.

Suponha $U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in U \cap V$, então $d(a,b) \leqslant d(a,z) + d(z,b) \Rightarrow \varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \dfrac{2\varepsilon}{3}$. Absurdo.

Portanto, $U \cap V = \emptyset$. □

19 (5.15) Mostre que se X é Hausdorff, então toda sequência convergente em X tem único limite.

Solução:

Suponha $(X_n) \subset X, x_n \to a, x_n \to b; a, b \in X, a \neq b$.

Como X é $T_2, \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$, abertos, tais que $a \in \mathcal{U}, b \in \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Como $x_n \to a, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}, \forall n \geqslant n_0$.

Como $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, temos que $x_n \notin \mathcal{V}, \forall n \geqslant n_0$.

Como $b \in \mathcal{V}, x_n \notin \mathcal{V}, \forall n \geqslant n_0$, logo x_n não converge pra b. Absurdo. □

20 (5.17) Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia usual é Hausdorff, mas $\mathbb{R}$ com a topologia cofinita não é Hausdorff.

Solução:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}; a \neq b$. Suponha $a < b$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ e $\delta = \dfrac{b-a}{3} \Rightarrow a \in U = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $b \in V = (b-\delta, b+\delta)$ e $U \cap V = \emptyset$ e U, V abertos de $\mathbb{R}$.

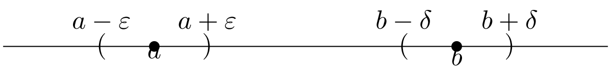


Figura 10.3:

Agora, mostremos que $\mathbb{R}$ com a topologia cofinita não é Hausdorff. Sejam, U, V conjuntos abertos não-vazios da τ_{cof}. U e V são infinitos, pois são complementares de conjuntos finitos. Se $U \cap V = \emptyset$, então U, infinito, estaria contido no complemento finito de V. Logo, U e V não são disjuntos. Consequentemente, nenhum par de pontos distintos de $\mathbb{R}$ pertencem a conjuntos abertos disjuntos da τ_{cof}. Assim, $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cof}})$ não é T_2. □

21 (5.18) Mostre que T_2 implica T_1 mas a recíproca é falsa.

Solução:

A implicação é trivial. Mas para a recíproca note que (X, τ_{cof}) é T_1, mas como vimos no exercício anterior (X, τ_{cof}) não é T_2.

Obs: (X, τ) é T_1 se, e somente se, τ contém a topologia cofinita em X. $\square$

Compacidade

22 (6.2) Mostre que se A é um subconjunto finito do espaço topológico X, então A é compacto.

Solução:

De fato, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Seja $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subset \tau$ tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Temos que $\exists \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ tal que $a_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}_n \Rightarrow A \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$. Portanto, A é compacto. $\square$

23 (6.3) Demonstre que um subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.

Solução:

Seja $\{\mathcal{U}_i\}$ cobertura aberta de A. $\Rightarrow A \subset \bigcup \mathcal{U}_i$.

A fechado $\Rightarrow A^c$ é aberto. $\Rightarrow X = A \cup A^c \subset \bigcup \mathcal{U}_i \cup A^c$.

$\Rightarrow \bigcup \mathcal{U}_i \cup A^c$ é cobertura aberta do compacto X.

$\Rightarrow X \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n \subset A^c$.

Mas $A \subset X \Rightarrow A \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$. Portanto, A é compacto. $\square$

24 (6.4) Sejam $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos compactos de um espaço topológico X. Mostre que a união $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ é compacto.

Solução:

Seja $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X. $A_1, \ldots, A_n \subset X$ compactos. Então, toda cobertura aberta $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de $A_1, \ldots, A_n$ admite subcobertura finita. Logo, $A_1 \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$ e $A_2 \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_m$. Tome $\max\{m, n\}$ e teremos $A_1 \cup A_2 \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_p$, p máximo de m e n. Portanto, $A_1 \cup A_2$ é compacto.

Fazendo indução sobre n teremos que $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ é compacto. $\square$

25 (6.5) Mostre que se A é um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff X, então A é fechado.

Solução:
Vamos provar que A^c é aberto. Seja $p \in A^c$, isto é, $p \notin A$. Então, existe[1] um aberto G_p tal que $p \in G_p \subset A^c$. Logo, $A^c = \bigcup\{G_p; p \in A^c\}$. Assim, A^c é aberto, pois é união de abertos, ou seja, A é fechado. $\square$

26 (6.6) Sejam A e B subconjuntos compactos disjuntos de um espaço de Hausdorff X. Demonstre que existem dois abertos disjuntos G e H tais que $A \subset F$ e $B \subset H$.

Solução:
Seja $a \in A$. Então, $a \notin B$, pois A e B são disjuntos. Por hipótese, B é compacto; logo, existem[2] conjuntos abertos $G_a, \{G_a; a \in A\}$ é cobertura aberta de A. Como A é compacto, podemos escolher um número finito de abertos, $G_{a_1}, \ldots, G_{a_m}$, tais qu $A \subset G_{a_1} \cup \ldots \cup G_{a_m}$. Além disso, $B \subset H_{a_1} \cap \ldots \cap H_{a_m}$, pois B é subconjunto de cada um individualmente.

Seja, agora, $G = G_{a_1} \cup \ldots \cup G_{a_m}$ e $H = H_{a_1} \cap \ldots \cap H_{a_m}$. Observe, conforme acima, que $A \subset G$ e $B \subset H$. Além disso, G e H são abertos, pois são a união e interseção finita, respectivamente, de abertos. Basta mostrar que G e H são disjuntos. Observemos que, para cada i, $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset \Rightarrow G_{a_i} \cap H = \emptyset$. Logo, pela lei distributiva, $G \cap H = (G_{a_1} \cup \ldots \cup G_{a_m}) \cap H = (G_{a_1} \cap H) \cup \ldots \cup (G_{a_m} \cap H) = \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset = \emptyset$. $\square$

[1] A subconjunto compacto de um espaço T_2. Se $p \notin A$, então existe um aberto G tal que $p \in G \subset A^c$.

[2] A subconjunto compacto de um espaço T_1. E suponhamos $p \in X \backslash A$. Então, existem abertos G e H tais que $p \in G, A \subset H, G \cap H = \emptyset$.

Referências Bibliográficas

[1] G. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139. Springer, 1993.

[2] H. Domingues and G. Iezzi. *Álgebra moderna.* Atual, 2003.

[3] N. Kühlkamp. *Introdução à topologia geral.* 2002.

[4] E. Lima. *Elementos de topologia geral.* Ao Livro Técnico, 1970.

[5] E. Lima. Espaços métricos, impa. *Rio de Janeiro*, 1977.

[6] S. Lipschutz. *Topologia geral.* McGraw-Hill, 1965.

[7] J. Munkres Font. *Topology: a first course.* 1975.

Índice Remissivo