AL

Álgebra Linear

Régis da Silva Santos

Álgebra Linear

Régis da Silva Santos

UFMT 2008

Prefácio da Terceira Edição

Este livro foi criado a partir de notas de aula da graduação regular da UFMT em 2007. Em 2008 sofreu significativas alterações com a inclusão de novos conteúdos a partir do Curso de Verão 2008 do IME-USP e a realização do mesmo curso de graduação da UFMT pela segunda vez no mesmo ano. Com a intenção de melhorar cada vez mais a clareza e compreensão das definições e teoremas foram incluidos novos exemplos e uma resolução mais completa dos exercícios propostos, totalizando mais de 130 exercícios; mas nem todos estão resolvidos. A maioria dos exercícios são do livro do Callioli e do Elon Lages Lima. Os exercícios e avaliações que se encontravam na edição anterior, agora estão juntos com os demais exercícios e separados por capítulo.

Inicialmente este livro havia sido criado para uso pessoal, porém, foi reformulado numa nova estrutura para que todos pudessem desfrutar do conteúdo deste livro.

Apesar de não ser um livro comercial, o conteúdo é suficientemente completo para o curso de Álgebra Linear I. O conteúdo que cobre a ementa de Álgebra Linear II ainda não está completo, porém, aqui podemos encontrar um conteúdo mínimo necessário. Esta edição foi finalizada em Agosto de 2008.

Mesmo sendo uma edição revista e corrigida, ainda pode conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Impressão: Agosto de 2011.

Régis da Silva Santos
Universidade Federal de Mato Grosso, Agosto de 2011.

Sumário

Lista de Figuras

Parte I

Álgebra Linear I

Capítulo 1

Vetores no $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1 Um *vetor* v de ordem n é uma lista ordenada de n escalares denotada em forma de linha

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

ou em forma de coluna

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Obs: O termo escalar representa um número real. Dizemos que os escalares $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são as *coordenadas* ou *componentes* do vetor v.

Se todas as coordenadas de um vetor forem nulas, dizemos que o vetor é nulo.

$$0 = (0, 0, \ldots, 0)$$

O conjunto de todos os vetores de ordem n é representado por

$$\mathbb{R}^n = \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Definição 1.2 Dizemos que dois vetores são *iguais* se todas as coordenadas correspondentes são iguais.

Exemplo 1.1 Dados $u = (2, -3, 5)$ e $v = (2, x, 5)$, temos que $u = v$ quando $x = -3$ e $u \neq v$ quando $x \neq -3$.

1.1 Adição de Vetores

Definição 1.3 Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, a *soma* de u e v é o vetor dado por

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Exemplo 1.2 Dados os vetores $u = (2, 1, 0, 3)\,, v = (0, -1, 2, -1)$ e $w = (1, 5, 3)$, temos

$$u + v = (2 + 0, 1 + (-1)\,, 0 + 2, 3 + (-1)) = (2, 0, 2, 2)$$

$u + w$ e $v + w$ não estão definidas, pois contém número de componentes diferente.

Exemplo 1.3 O vetor zero de $\mathbb{R}^n$ satisfaz duas relações:

(i) Dado $v \in \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{0}$ o vetor nulo, temos que $v + \widetilde{0} = v$.
<u>De fato</u>:
Sejam $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $0 = (0, 0, \ldots, 0)$

$$v + 0 = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v$$

(ii) Dado $v \in \mathbb{R}^n$, $\exists - v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v + (-v) = 0$.
<u>De fato</u>:
Sejam $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $-v = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$

$$\begin{aligned} v + (-v) &= (v_1 + (-v_1)\,, v_2 + (-v_2)\,, \ldots, v_n + (-v_n)) \\ &= (v_1 - v_1, v_2 - v_2, \ldots, v_n - v_n) \\ &= (0, 0, \ldots, 0) \\ v + (-v) &= 0 \end{aligned}$$

- Propriedades:

1. Se u, v e w são vetores de ordem n, então $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, temos, $u + \mathbf{0} = u$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.
3. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, existe o vetor $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.

1.2 Multiplicação por Escalar

Definição 1.4 Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto de α por v é dado por

$$\alpha v = \alpha (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$$

Exemplo 1.4 Dados $v = (2, 3, -4, 1)$ e $\alpha = 2$, temos

$$\alpha v = 2 (2, 3, -4, 1) = (4, 6, -8, 2)$$

- Propriedades:

Se u, v são vetores de ordem n e α, α_1 e α_2 são escalares, então valem as seguintes propriedades:

(i) $(\alpha_1 + \alpha_2) u = \alpha_1 u + \alpha_2 u$

(ii) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$

(iii) $(\alpha_1 \alpha_2) u = \alpha_1 (\alpha_2 u)$

(iv) $1u = u; -1u = -u; 0u = 0$

Definição 1.5 Definimos *subtração* de vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ como $u - v = u + (-v)$.

Exemplo 1.5 Sejam $u = (1, -3, 1, 4)$ e $v = (2, 5, -1, 2)$, então:
$5u = (5, -15, 5, 20)$
$-3u = (-6, -15, 3, -6)$
$5u - 3v = (5, -15, 5, 20) + (-6, -15, 3, -6) = (-1, -30, 8, 14)$

Exemplo 1.6 Sejam $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ um ponto do $\mathbb{R}^n$ e $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ um vetor de ordem n. Chamamos de reta $r \in \mathbb{R}^n$ passando pelo ponto P na direção do vetor u ao conjunto de todos os pontos $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são da forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 t \\ x_2 = a_2 + u_2 t \\ \vdots \\ x_n = a_n + u_n t \end{cases} \quad \text{eq. paramétrica} \tag{1.1}$$

onde t é uma variável real.

Observe que se interpretarmos X como um vetor de ordem n, podemos escrever a equação 1.1 como

$$X = P + ut \text{ eq. vetorial} \tag{1.2}$$

e u é o vetor diretor da reta r.
em $\mathbb{R}^2$, temos:

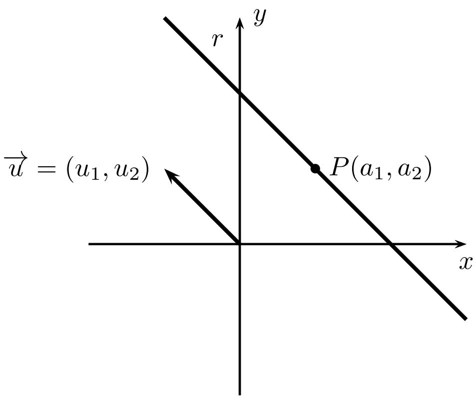


Figura 1.1: Vetor e reta em $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

2.1 Introdução

Vamos denominar um conjunto S como sendo uma coleção de objetos. Para dizer que um objeto u está em S, escrevemos $u \in S$.

Quando todo elemento do conjunto S' está em S, escrevemos $s' \subset S$. E dizemos que S' é um subconjunto de S.

Para $S' \neq S$, dizemos que S' é um subconjunto próprio de S.

Vamos indicar por:

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais.

$\mathbb{C}$ = conjunto dos números complexos. onde: $\mathbb{C} = \left\{a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\right\}$

naturalmente

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ - subconjunto próprio.

$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ onde $\forall u, v \in \mathbb{C}, \begin{cases} u = a + bi \\ v = c + di \end{cases}$

Adição $(+)$

$$\begin{aligned} + \quad : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & (u, v) \to u + v = (a + c) + (b + d)\, i \end{aligned}$$

Multiplicação $(\cdot)$

$$\begin{aligned} \cdot \quad : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & (u, v) \to u.v = (ac - bd) + (ad + cb)\, i \end{aligned}$$

2.2 Corpo e Subcorpo

Definição 2.1 (Corpo) Seja K um subconjunto não vazio dos conjuntos dos números complexos $\mathbb{C}$. Dizemos que K é um *corpo* se $x, y \in K$, então $x+y \in K$ e $xy \in K$ e as seguintes condições forem satisfeitas:

A 1 $(a+b)+c = a+(b+c), \forall a, b, c \in K$ - associativa

A 2 $\exists 0 \in K$ tal que $a+0 = a, \forall a \in K$ (0 é chamado elemento neutro da soma)

A 3 $\forall a \in K, \exists(-a) \in K$ tal que $a+(-a) = 0$ ($(-a)$ é o elemento simétrico ou oposto)

A 4 $a+b = b+a, \forall a, b \in K$ - comutativa

M 1 $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in K$ - associativa

M 2 $ab = ba, \forall a, b \in K$ - comutativa

M 3 $\exists 1 \in K$ tal que $1a = a, \forall a \in K$ - (1 é o elemento neutro da multiplicação)

M 4 $\forall a \neq 0 \in K, \exists a^{-1} \in K$ tal que $a.a^{-1} = 1$ - (a^{-1} é o inverso multiplicativo de K)

M 5 $a(b+c) = ab+ac, \forall a, b, c \in K$ - distributiva

Definição 2.2 (Subcorpo) Sejam K e L corpos tais que $K \subset L$, então dizemos que K é um *subcorpo* de L.

Exemplo 2.1 $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$.
Obs: os elementos de K são chamados de números ou escalares.

Exemplo 2.2 O conjunto dos números Racionais $\mathbb{Q}$ é definido por $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

Exemplo 2.3 O conjunto dos números Inteiros $\mathbb{Z}$ **não** é um corpo porque não existe x^{-1} em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 2.4 Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a+b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ é um corpo.

Solução:
Note que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, logo A_1, A_4, M_1, M_2, M_5 são satisfeitas.
Vamos mostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é fechado para a soma e para a multiplicação.
Sejam $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, temos

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$$

e

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=a_1a_2+a_1b_2\sqrt{2}+a_2b_1\sqrt{2}+2b_1b_2=$$
$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$$

Portanto, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ é fechado para a soma e para a multiplicação.
Façamos as demais propriedades.
A 2 Elemento neutro
$\exists 0+0\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tal que $(a+b\sqrt{2})+(-a+(-b)\sqrt{2})=0+0\sqrt{2}$
A 3 Elemento oposto
Se $x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q},\exists -x\in\mathbb{Q}$ tal que

$$x+(-x)=0$$
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(-a-b\sqrt{2}\right)=0+0\sqrt{2}$$

M 3 Elemento neutro da multiplicação
$\exists 1+0\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ tal que

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(1+0\sqrt{2}\right)=a+b\sqrt{2},\forall a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$$

M 4 Inverso multiplicativo
$\forall x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, com $x\neq 0$, $\exists x^{-1}$ tal que $x.x^{-1}=1$.
Então, sejam $x^{-1}=c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$$x.x^{-1}=1$$
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=1+0\sqrt{2}$$
$$ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd=1+0\sqrt{2}$$
$$(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}=1+0\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} ac+2bd=1 & (1)\\ ad+bc=0 & (2)\end{cases}$$

Como $x\neq 0$, então $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.
Suponhamos $a\neq 0$.
De $ad=-bc$, temos

$$d=-\frac{bc}{a}\quad(3)$$

substituindo em (1), temos

$$\begin{aligned}
&ac + 2b\left(-\frac{bc}{a}\right) = 1\\
&a^2c - 2b^2c = a\\
&c\left(a^2 - 2b^2\right) = a\\
&c = \frac{a}{a^2 - 2b^2}
\end{aligned}$$

substituindo em (3), temos

$$\begin{aligned}
&d = -\frac{b}{a}.\frac{a}{a^2 - 2b^2}\\
&d = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\\
&\therefore x^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.5 Num corpo K mostre que se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Solução:
Suponha que $a \neq 0$, então $\exists a^{-1} \in K : a.a^{-1} = 1$.
Assim, como $ab = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&a^{-1}ab = a^{-1}0\\
&\left(a^{-1}a\right)b = a^{-1}0\\
&1b = 0\\
&b = 0
\end{aligned}$$

□

2.3 Espaços Vetoriais

Definição de [*Lipschutz*].

Definição 2.3 Seja K um corpo e V um conjunto diferente do vazio ($V \neq \emptyset$), com as operações de *adição* e *multiplicação por escalar* que faz corresponder a cada $u, v \in V$ a soma $u + v \in V$ e a cada $\alpha \in K$ e $u \in V$ o produto $\alpha u \in V$. Dizemos que V é um **espaço vetorial** sobre K se as seguintes propriedades forem satisfeitas para quaisquer *vetores* $u, v, w \in V$ e *escalares* $\alpha, \beta \in K$.

- **Propriedades**

A 1 $(u + v) + w = u + (v + w)$ - associativa

A 2 $\exists 0 \in V$ tal que $u + 0 = u, \forall u \in V$ (0 é chamado vetor nulo e é o elemento neutro da soma)

A 3 $\exists(-u) \in V$ tal que $u + (-u) = 0$ (inverso aditivo e $(-u)$ é o elemento simétrico ou oposto)

A 4 $u + v = v + u$ - comutativa

M 1 $\alpha\,(u + v) = \alpha u + \alpha v$ - distributiva a direita

M 2 $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$ - distributiva a esquerda

M 3 $(\alpha\beta)\, u = \alpha\,(\beta u)$ - associativa

M 4 $1u = u, \forall u \in V$ - (1 é o elemento neutro da multiplicação)

- **Definição em símbolos matemáticos**

Definição de [*Boldrini*].

$$\begin{aligned} + \quad : \quad & V \times V \to V \\ & (u, v) \to u + v \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot \quad : \quad & K \times V \to V \\ & (\alpha, v) \to \alpha v \end{aligned}$$

Proposição 2.4 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K.*

i. *para qualquer $k \in K, k0 = 0$.*

ii. *para qualquer vetor $u \in V, 0u = 0$.*

iii. *se $ku = 0$, onde $k \in K$ e $u \in V$, então $k = 0$ ou $u = 0$.*

iv. *para $k \in K$ e $u \in V, (-k)u = k(-u) = -ku$.*

v. *o elemento neutro é único.*

vi. *o elemento oposto é único.*

vii. *Para todo $u, v, w \in V$, temos $u + v = v + w \Rightarrow u = w$ denominada lei do cancelamento.*

Demonstração:

(i) Pela propriedade (A_2) com $u = 0$, temos $0 + 0 = 0$. Portanto, pela (M_1), $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$.
Somando $-k0$, temos: $k0 + (-k0) = k0 + k0 + (-k0) \Rightarrow 0 = k0$.

(ii) Por uma propriedade de K, $0+0 = 0$. Pela (M_2), $0u = (0+0)u = 0u+0u$.
Somando $-0u$, temos: $0u + (-0u) = 0u + 0u + (-0u) \Rightarrow 0 = 0u$.

Uma outra maneira de demonstrar é

$$\begin{aligned} v + 0v &= 1v + 0v \\ &= (1 + 0)\, v \\ &= 1v \\ v + 0v &= v \\ \therefore 0v = 0 & \end{aligned}$$

(iii) Suponha $ku = 0$ e $k \neq 0$. Então, existe k^{-1} tal que $k^{-1}k = 1$. Portanto, $u = 1u = (k^{-1}k)u = k^{-1}(ku) = k^{-1}0 = 0$.

(iv) Usando $u + (-u) = 0$, obtemos: $0 = k0 = k\,(u + (-u)) = ku + k(-u)$. Somando $-ku$, temos: $-ku = k(-u)$. Usando $k + (-k) = 0$, obtemos: $0 = 0u = (k + (-k))\,u = ku + (-k)\,u$. Somando $-ku$, temos: $-ku = (-k)u$. Assim, $(-k)u = k(-u) = -ku$.

(v) $\exists 0 \in V$ o elemento neutro que satisfaz a propriedade A_2. Vamos supor que $\exists 0_1 \in V$ tal que 0_1 é o elemento neutro. Logo,

$$0 = 0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0_1$$
$$\therefore 0 = 0_1$$

(vi) Para cada $v \in V, \exists -v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$. Vamos supor que $\exists v_1 \in V$ tal que $v + v_1 = 0$. Então,

$$-v = -v + 0 = -v + (v + v_1) = (-v + v) + v_1 = 0 + v_1 = v_1$$
$$\therefore -v = v_1$$

(vii) Como $v \in V$, $\exists - v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

Por hipótese, $u + v = v + w$, então, $(u + v) + (-v) = (v + w) + (-v)$

mas $(u + v) + (-v) = u + (v + (-v)) = u + 0 = u$

e $(v + w) + (-v) = w + (v + (-v)) = w + 0 = w$

Logo, $u = (u + v) + (-v) = (w + v) + (-v) = w$.

■

Definição 2.5 Definimos *subtração* de vetores $u, v \in V$ como $u - v = u + (-v)$.

2.3.1 Exemplos de Espaços Vetoriais

Exemplo 2.6 Espaço $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Exemplo 2.7 Espaço $\mathbb{C}$
O corpo complexo $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre o corpo real $\mathbb{R}$, e o corpo real $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo racional $\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.8 Espaço K^n
Seja um corpo K e $k^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in K\}$
Para qualquer $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^n$ e $\alpha \in K$, temos as operações:

$$u + v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\alpha u = \alpha (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

Então K^n é um espaço vetorial sobre K.

Exemplo 2.9 Espaço das Matrizes
Seja V o conjunto das matrizes $V = M_{m\times n}$ com elementos de K. Então, v é um espaço vetorial sobre K com a soma de matrizes e multiplicação por escalar.

Exemplo 2.10 Espaço de Polinômios
Seja V o conjunto dos polinômios $P_n(\mathbb{R})$ de coeficientes reais e de grau $\leq N$, onde N é um inteiro e $N \geq 0$.
$V = P_n(\mathbb{R}) = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n / a_i \in \mathbb{R}\right\}$
Então, $V = P_n(\mathbb{R}) \cup \{\text{polinômio nulo}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações:

$$\begin{array}{l} \forall p(t), q(t) \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ p(t) + q(t) \in V \text{ e } \alpha p(t) \in V \end{array}$$

Exemplo 2.11 Espaço de Funções[1]
Seja K um corpo e X qualquer conjunto não-vazio. Consideremos o conjunto V de todas as funções de X em K. $f + g \in V$ definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$kf \in V$ definida por $(kf)(x) = kf(x)$.

Exemplo 2.12 Seja $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais, isto é, dados $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ e $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$ e $\alpha \odot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$. Temos que $\mathbb{R}^2$ com essas operações é um espaço vetorial.

Solução:
Sejam $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então:

A 1
$$\begin{aligned} &((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (e,f) = (a+c, b+d) \oplus (e,f) = \\ &= (a+c+e, b+d+f) = (a,b) \oplus (c+e, d+f) = \\ &= (a,b) \oplus ((c,d) \oplus (e,f)) \end{aligned}$$

A 2 $\exists 0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(a,b) \oplus (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$$

A 3 $\exists(-a,-b) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(a,b) \oplus (-a,-b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0,0)$$

A 4
$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) \oplus (a,b)$$

[1] Veja demonstração na seção 2.7.1, página 39.

M 1

$$\begin{aligned}
&\alpha \odot ((a,b) \oplus (c,d)) = \alpha \odot (a+c, b+d) = (\alpha \odot (a+c), \alpha \odot (b+d)) = \\
&= (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) \oplus (\alpha c, \alpha d) = \\
&= \alpha \odot (a,b) \oplus \alpha \odot (c,d)
\end{aligned}$$

M 2

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta) \odot (a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = \\
&= (\alpha a, \alpha b) \oplus (\beta a, \beta b) = \alpha \odot (a,b) \oplus \beta \odot (a,b)
\end{aligned}$$

M 3

$$(\alpha\beta) \odot (a,b) = (\alpha\beta a, \alpha\beta b) = \alpha \odot (\beta a, \beta b) = \alpha \odot (\beta \odot (a,b))$$

M 4 $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \odot (a,b) = (1a, 1b) = (a,b)$.

□

Exemplo 2.13 O *espaço solução* de um sistema de equações lineares homogêneas dado por

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases} \tag{2.1}$$

Uma solução de 2.1 é uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz as m equações simultaneamente.

A equação 2.1 é equivalente a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sejam $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ soluções da equação 2.1.

Lembremos que na multiplicação de matrizes vale $A(B+C) = AB + AC$, então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o espaço solução é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar. Portanto é um espaço vetorial.

2.4 Subespaços Vetoriais

Definição de [*Lipschutz*].

Definição 2.6 Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V sobre um corpo K. W é um **subespaço** de V se W é ele próprio um espaço vetorial sobre K em relação Ã adição de vetores e Ã multiplicação por escalar em V.

Teorema 2.7 *Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Então W é um subespaço de V se, e somente se:*

i. $0 \in W$.

ii. *W é fechado para a soma vetorial, isto é,* $\forall u, v \in W; u + v \in W$.

iii. *W é fechado para a multiplicação por escalar, isto é,* $\forall u \in W, \alpha \in K; \alpha u \in W$.

Demonstração:
Suponhamos que W satisfaz $(i), (ii)$ e (iii). W é não-vazio; e por (ii) e (iii), as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar são bem-definidas para W. Além disso, as 8 propriedades são válidas em W, pois os vetores em W pertencem a V. Logo, basta mostrar que (A_2) e (A_3) também valem em W. Por (i), W é não-vazio, digamos $u \in W$. Então, por (iii), $0u = 0 \in W$ e $v + 0 = v$ para todo $v \in W$. Logo, W verifica (A_2). Por último, se $v \in W$, então $(-1)v = -v \in W$ e $v + (-v) = 0$; logo, W é um subespaço de V e então $(i), (ii)$ e (iii) obviamente se verificam. ∎

Corolário 2.8 *W é subespaço de V se, e somente se:*

i. $0 \in W$.

ii. $au + bv \in W, \forall u, v \in W$ *e* $a, b \in K$.

Demonstração:
Suponhamos que W satisfaz (i) e (ii). Então por (i), W é não-vazio. Além disso, se $v, w \in W$, então, por (ii), $v + w = 1v + 1w \in W$; e se $v \in W$ e $\alpha \in K$, então, por (ii), $\alpha v = \alpha v + 0v \in W$. Assim, pelo Teorema 2.7, W é subespaço de V.

Reciprocamente, se W é subespaço de V, então obviamente (i) e (ii) valem em W. ∎

2.4.1 Exemplos de Subespaços Vetoriais

Exemplo 2.14 Seja V um espaço vetorial sobre K. Então o conjunto $\{0\}$ formado apenas pelo vetor nulo e o próprio espaço V, são subespaços. São chamados também de subespaços triviais.

Exemplo 2.15 Seja $V = K^n$ e $W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0)\,/a_i \in K\}$ é um subespaço de V.

Solução:

(i) $\mathbf{0} \in W; \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

(ii) Sejam $u, v \in W, u = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\,; x_i \in K$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0)\,;$ $y_i \in K$.
$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_{n-1} + y_{n-1}, 0) \in W$.

(iii) $\forall \alpha \in K$ e $u \in W, u = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$
$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_{n-1}, 0) \in W$.

□

Exemplo 2.16 Seja $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais.
$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y = 0\right\}$ é um subespaço vetorial de V.[2]

Solução:

(i) $(0, 0, 0) \in W$, pois $0 + 0 = 0$.

(ii) Sejam $w_1, w_2 \in W$,
$w_1 = (a_1, b_1, c_1); a_1 + b_1 = 0$
$w_2 = (a_2, b_2, c_2); a_2 + b_2 = 0$
$w_1 + w_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2);$
$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0 + 0 = 0.$
$\therefore w_1 + w_2 \in W$.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$,
$u = (a, b, c); a + b = 0$
$\alpha u = \alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c);$
$\alpha a + \alpha b = \alpha(a + b) = \alpha 0 = 0.$
$\therefore \alpha u \in W$.

□

[2]Veja a interpretação geométrica no exemplo 2.9, página 36.

Exemplo 2.17 Seja $(D, +, \cdot)$, onde

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

e as operações de soma e multiplicação por escalar são as operações induzidas de $M_2 = V$. D é um subespaço de V.

Solução:

Note que o elemento neutro $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D$.

Logo, $D \neq \emptyset$. Lembremos que dados

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in D \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

temos que

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A + B \in D$$

e

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha A \in D$$

Portanto, D é subespaço de V. □

Exemplo 2.18 Seja $V = M_{n \times n}$ o espaço das matrizes $n \times n$. Então o subconjunto W_1 das matrizes triangulares (superiores) e o subconjunto W_2 de matrizes simétricas são subespaços de V, pois são não-vazios e fechados com relação Ã adição matricial e Ã multiplicação por escalar.

Exemplo de matriz triangular

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, onde $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

Solução:

$\mathbf{0} \in W$, pois todos os elementos de $\mathbf{0}$ são 0 e, daí, são iguais. Suponhamos agora que $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ pertençam a W, isto é, $a_{ji} = a_{ij}$ e $b_{ji} = b_{ij}$. $\forall a, b \in K, aA + bB$ é a matriz cujo elemento de ordem ij é $aa_{ij} + bb_{ij}$. Mas $aa_{ji} + bb_{ji} = aa_{ij} + bb_{ij}$. Assim, $aA + bB$ também é simétrica, e W é subespaço de V. □

Exemplo 2.19 Seja $P_n(t)$ o subconjunto de $P(t)$ que consiste dos polinômios de grau $\leq N$, para n fixo. Então $P_n(t)$ é um subespaço de $P(t)$.

Exemplo:

P_n é um subespaço de P_{n+1}.

Teorema 2.9 *O conjunto solução W de um sistema homogêneo $AX = 0$ em n incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração:

[*Lipschutz*] e [*B. Kolman*] Suponhamos que o sistema é homogêneo, isto é, tem a forma $AX = 0$. Denotemos por W seu conjunto solução. Como $A0 = 0$, o vetor $\mathbf{0} \in W$. Além disso, se $u, v \in W$, isto é, se u e v são soluções de $AX = 0$, então

$$Au = 0 \text{ e } Av = 0$$

portanto, para quaisquer escalares a e b em $\mathbb{R}$, temos

$$A(au + bv) = aAu + bAv = a0 + b0 = 0 + 0 = 0$$

Assim $au + bv$ também é solução de $AX = 0$, ou seja, $au + bv \in \mathbb{R}$.

Além disso, se $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha 0 = 0$$

de modo que αv também é uma solução.

Logo, pelo Corolário 2.8, provamos que W é subespaço de $\mathbb{R}^n$. ■

Obs: O conjunto solução de um sistema não-homogêneo $AX = B$ **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. De fato, o vetor zero, $\mathbf{0}$, pode não pertencer a tal conjunto solução.

2.4.2 Espaço solução de uma E.D.O. linear homogênea

Definição 2.10 Uma equação do tipo

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \ldots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{2.2}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$, é chamada *Equação Diferencial Ordinária linear homogênea* $y^i(t)$ é a i-ésima derivada da função $y(t)$.

Uma solução para a equação 2.2 é uma função $y(t)$ que satisfaz a igualdade.

Exemplo 2.20 Seja $y'' - y' = 0$. $y(t) = e^t$ é solução.

Solução:

De fato, $y'(t) = e^t = y''(t)$. □

Exemplo 2.21 Seja $y'' + y = 0$. $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ é solução.

Solução:
De fato,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \cos(t) \\ y''(t) &= -\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.22 Seja $W = \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : y$ é solução da equação 2.2$\}$. $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. W é subespaço de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solução:

i) Seja 0 a função constante nula $\in W$.

ii) Sejam $y, z \in W$.

$$\begin{aligned} &(y+z)^n(t) + a_{n-1}(y+z)^{n-1}(t) + \ldots + a_1(y+z)'(t) + a_0(y+z)(t) = \\ &= y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \ldots + a_1y'(t) + a_0y(t) + \\ &+ z^n(t) + a_{n-1}z^{n-1}(t) + \ldots + a_1z'(t) + a_0z(t) = 0 \\ &\therefore (y+z) \in W \end{aligned}$$

iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in W$.

$$\begin{aligned} &(\alpha y)^n(t) + a_{n-1}(\alpha y)^{n-1}(t) + \ldots + a_1(\alpha y)'(t) + a_0(\alpha y)(t) = \\ &= \alpha\left(y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \ldots + a_1y'(t) + a_0y(t)\right) = \alpha 0 = 0 \\ &\therefore (\alpha y) \in W \end{aligned}$$

Portanto, W é subespaço de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

Teorema 2.11 *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V sobre K. A intersecção $U \cap W$ é um subespaço de V.*

$$U \cap W = \{v : v \in U \text{ e } v \in W\}$$

Demonstração:

(i) $\mathbf{0} \in U \cap W$, pois $\mathbf{0} \in U$ e $\mathbf{0} \in W$.

(ii) Sejam $x, y \in U \cap W, x, y \in U$ e $x, y \in W$, $x + y \in U$ e $x + y \in W$, então, $x + y \in U \cap W$.

(iii) Seja $\alpha \in K$ e $v \in U \cap W, \alpha v \in U$ e $\alpha v \in W$, então, $\alpha v \in U \cap W$.

■

2.5 Somas e Somas Diretas

Teorema 2.12 (Soma) *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V sobre um corpo K. Então o conjunto*

$$U + W = \{u + w / u \in U \text{ e } w \in W\}$$

é um subespaço de V.

Demonstração:

(i) $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in U + W$.

(ii) Sejam $x, y \in U + W$, então

$$\begin{array}{l} x = u_1 + w_1, \text{ onde } u_1 \in U \text{ e } w_1 \in W \\ y = u_2 + w_2, \text{ onde } u_2 \in U \text{ e } w_2 \in W \\ x + y = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \end{array}$$

Portanto, $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$, então $x + y \in U + W$.

(iii) Seja $\alpha \in K$ e $z \in U + W$, então $z = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$

$$\alpha z = \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$$

Portanto, $\alpha u \in U$ e $\alpha w \in W$, então, $\alpha z \in U + W$.

Portanto, $U + W$ é um subespaço de V.

■

Teorema 2.13 (Soma Direta) *O espaço vetorial V é a* ***soma direta*** *de seus subespaços U e W, e escrevemos*

$$V = U \oplus W$$

se, e somente se, todo $v \in V$ se escreve ***de modo único*** *na forma $v = u+w$, onde $u \in U$ e $w \in W$ e $U \cap W = \{0\}$.*

Demonstração:

Suponhamos $V = U \oplus W$. Então qualquer $v \in V$ pode ser escrito de modo único na forma $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$. Assim, em particular, $V = U + W$.

Suponhamos agora que $v \in U \cap W$. Então:

(1) $v = v + 0$ onde $v \in U, 0 \in W$; e

(2) $v = 0 + v$ onde $0 \in U, v \in W$

Como tal soma para v deve ser única, $v = 0$. Consequentemente, $U \cap W = \{0\}$.

Por outro lado, suponhamos $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$. Seja $v \in V$. Como $V = U + W$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. Devemos mostrar que tal soma é única. Suponhamos também que $v = u' + w'$, onde $u' \in U$ e $w' \in W$. Então, $u + w = u' + w'$ e assim $u - u' = w' - w$, mas $u - u' \in U$ e $w' - w \in W$; logo, por $U \cap W = \{0\}$, $u - u' = 0, w' - w = 0$ e assim $u = u', w = w'$. Assim, tal soma para $v \in V$ é única e $V = U \oplus W$. ■

Exemplo 2.23 Sejam $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$, é fácil ver que U e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e que $V = U \oplus W$.

Solução:
$\forall u \in \mathbb{R}^3, u = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, z) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = U + W$.
Dado $u \in U \cap W \Rightarrow u = (0, 0, 0) \Rightarrow U \cap W = \{0\}$.

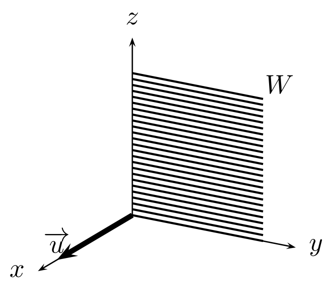


Figura 2.1: U é o eixo X e W é o plano YZ.

□

Exemplo 2.24 Sejam $V = \mathbb{R}^3$,
$W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \text{ e } z = 0\right\} = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e
$W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \text{ e } x = 0\right\} = \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
calcule $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

Solução:

i) $W_1 + W_2 = (x, x, 0) + (0, z, z) = (x, x + y, z)$

ii) Seja $(a, b, c) \in W_1 \cap W_2$, então $(a, a, 0) \in W_1$ e $(0, b, b) \in W_2$, ou seja,

$$\begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = b = c = 0$$
$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = (0, 0, 0)$$

Portanto, $W_1 \oplus W_2$.

$\square$

2.6 Combinação Linear e Espaço Gerado

Proposição 2.14 *Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Então, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ ou $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Demonstração:
Façamos por indução sobre n.

- Se $n = 1$, segue que $\alpha_1 v_1 \in V$ (pela definição de espaço vetorial).
- Vamos supor que o resultado seja verdadeiro para $n - 1$, ou seja, que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \in V$, com $n \geqslant 2$.
- Seja $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$.

  Temos que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right)}_{\in V} + \underbrace{\alpha_n v_n}_{\in V} \in V$$

$\blacksquare$

Definição 2.15 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de V. Qualquer elemento de V na forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ onde $\alpha_i \in K$ para $1 \leq i \leq n$ é chamado de *combinação linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Seja $v \in V$, então,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Exemplo 2.25 $V = \mathbb{R}^2, v = (1,2)$ é combinação linear de

$$v = 1(1,0) + 2(0,1)$$

onde $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$, por exemplo.

Exemplo 2.26 Considere $\mathbb{R}^3$ com a soma e a multiplicação usuais. Temos que $(1,1,1)$ é uma combinação linear de $(1,0,0)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(0,0,1)$.

De fato,

$$(1,1,1) = 1\,(1,0,0) + 2\left(0, \tfrac{1}{2}, 1\right) + (-1)\,(0,0,1)$$

Por outro lado, temos que $(1,1,1)$ não é combinação linear dos vetores $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

De fato, se fosse combinação linear, existiriam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} (1,1,1) &= \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) \\ (1,1,1) &= (\alpha, \beta, 0) \end{aligned}$$

Contradição.

Exemplo 2.27 Sejam V um espaço vetorial e $u, v \in V$. Temos que $u + v$ é combinação linear de $u - v$ e v, pois

$$u + v = 1\,(u - v) + 2v$$

Definição 2.16 (Espaço gerado) Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Vamos indicar por $[S]$ como sendo o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja, $[S]$ é chamado *espaço gerado*, denotado por

$$[S] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n / \alpha_i \in K\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \alpha_i \in K \right\}$$

Teorema 2.17 *Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V. Então $[S]$ é um subespaço de V contendo S ($S \subset [S]$). E se W é qualquer outro subespaço de V contendo S, então $[S] \subset W$ é o menor subespaço gerado por S.*

Demonstração:
Devemos mostrar que $[S]$ é um subespaço de V.

(1) Temos

(i) $\mathbf{0} \in [S]$, pois $\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$.

(ii) $\forall u, v \in [S]$

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in K$$
$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n; \beta_i \in K$$
$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)\, v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, v_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\, v_n \in [S]$$

(iii) $\forall \gamma \in K$ e $\forall u \in [S]$

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in K$$
$$\gamma u = (\gamma\alpha_1)\, v_1 + (\gamma\alpha_2)\, v_2 + \ldots + (\gamma\alpha_n)\, v_n \in [S]$$

$\therefore$ $[S]$ é um subespaço de V.

Mostremos, agora, que $[S] \subset W$.

(2) Suponha que W é um subespaço de V tal que $S \subset W$, então, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in W \Rightarrow \alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots, \alpha_n v_n \in W; \alpha_i \in K$, isto implica que, W contém todas as combinações lineares de elementos de $S \Rightarrow [S] \subset W$. $[S]$ é o menor subespaço gerado por S.

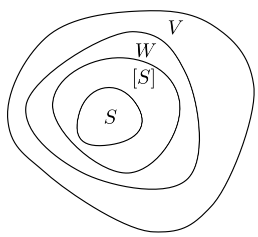


Figura 2.2: $[S] \subset W$.

∎

2.6.1 Subespaço Gerado

Definição 2.18 O subespaço $[S]$ é chamado de *subespaço gerado* por S. Escrevemos também $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ para indicar o subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$. Então, quando $V = [S]$ dizemos que V é gerado por S.

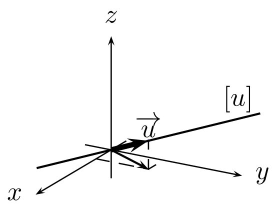


Figura 2.3: Reta que passa pela origem.

Exemplo 2.28 Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Para qualquer $u, v \in \mathbb{R}^3$, $[u] = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$ (Fig. 2.3).

Exemplo 2.29 Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Para qualquer $u, v \in \mathbb{R}^3$, $[u, v] = \{\alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ (Fig. 2.4).

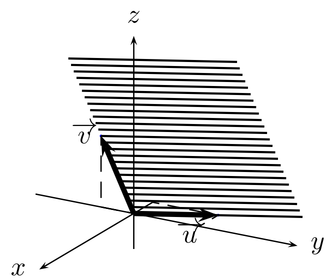


Figura 2.4: Plano que passa pela origem.

Obs: Para gerar o plano $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não podem ser múltiplos entre si.

Exemplo 2.30 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Temos que $S = [(0,1,2), (1,0,0)] = \{(\beta, \alpha, 2\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Se $u \in S$, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha(0,1,2) + \beta(1,0,0) = (\beta, \alpha, 2\alpha)$.

Exemplo 2.31 O subespaço $S = \{(x, y, z) : z = 0\}$ é gerado por $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$.

De fato, seja $(x, y, 0) \in S$. Observe que

$$(x, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

Portanto, $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ gera S.

Exemplo 2.32 Seja $S \subset M_2$ dado por

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

Temos que S é gerado por

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

De fato, seja $c, d \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = c + d \Rightarrow \boxed{c = a - b/2} \\ b = 2d \Rightarrow \boxed{d = b/2} \end{cases}$$

Observações: Problemas de subespaço gerado

(1) Se $S = \emptyset$. Definimos $[S] = \{0\}$.

(2) Se $S \subset V$ é infinito, definimos $[S]$ como sendo $u \in [S]$, se existem $v_1, v_2, \ldots, v_t \in S$ e existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t \in K$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_t v_t$.

2.6.2 Espaço finitamente gerado

Definição 2.19 Dizemos que o espaço vetorial V sobre um corpo K é *finitamente gerado* se existe um conjunto finito S de vetores que geram V, ou seja, $V = [S]$.

Exemplo 2.33 Dado $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 0)$. Quem é $[u, v]$? Quem são os $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $v = \alpha u + \beta v$?

Solução:

$$\begin{array}{l} (x, y, z) = \alpha\,(1, 0, 0) + \beta\,(1, 1, 0) \\ (x, y, z) = (\alpha, 0, 0) + (\beta, \beta, 0) \\ (x, y, z) = (\alpha + \beta, \beta, 0) \\ \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \end{array}$$

Solução única. $[u, v]$ é o plano gerado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ (Fig. 2.5).

□

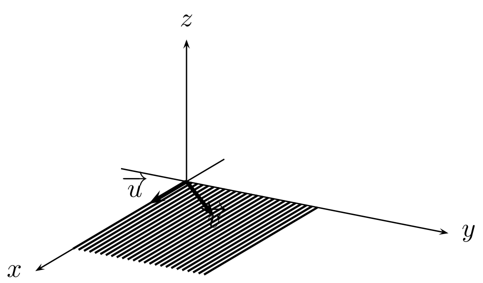


Figura 2.5: $[u, v]$ é o plano xy.

Exemplo 2.34 Dado $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$u = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

ou seja, u é combinação linear de e_1, e_2, e_3 que são os vetores ortonormais da *base canônica* em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.35 As matrizes $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução:
Qualquer $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + w\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_4}$$

Então, $[v_1, v_2, v_3, v_4] = M_{2\times 2}(R)$ é finitamente gerado.

□

Exemplo 2.36 Seja $P(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos polinômios. $P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Solução:
De fato, suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_s$ geram $P(\mathbb{R})$. Seja f_i o polinômio de maior grau dentre os polinôimios acima, existem $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 f_1 + \ldots + a_i f_i + \ldots + a_s f_s$$

cujo grau é no máximo o de f_i.
Portanto, $f_1, f_2, \ldots, f_s$ não gera $P(\mathbb{R})$.

□

Exemplo 2.37 Seja $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_s t^s : a_i \in \mathbb{R}, s \leqslant n\}$ o conjunto dos polinômios de grau $\leqslant n$. Os vetores $1, t, t^2, \ldots, t^n$ geram $P_n(\mathbb{R})$.

Solução:
Seja $P(t) \in P_n(\mathbb{R})$, então

$$P(t) = a_0.1 + a_1 t + \ldots + a_s t^s + \ldots + a_n t^n$$

□

2.7 Exercícios Resolvidos

Exercício 2.1 Seja $V = \{(a,b)\,|a,b \in \mathbb{R}\}$ com as operações: $\forall\,(a,b),(c,d) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d) \\ \alpha \odot (a,b) = (\alpha a, b) \end{cases}$$

V, com estas operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

Solução:
Pela definição de multiplicação, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ vale
$\alpha \odot (a,b) = (\alpha a, b)$. Se $\mathbb{R}^2$ fosse um espaço vetorial teríamos que

$$\begin{aligned} \alpha \odot (a,b) &= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \odot (a,b) = \\ &= \frac{\alpha}{2} \odot (a,b) \oplus \frac{\alpha}{2} \odot (a,b) = \\ &= \left(\frac{\alpha}{2} a, b\right) \oplus \left(\frac{\alpha}{2} a, b\right) = (\alpha a, 2b), \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Portanto, a operação $\odot$ não está bem definida.
Portanto, V não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

□

Exercício 2.2 Mostre que $V = \{u \in \mathbb{R} | u > 0\}$ com as operações: $\forall u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u \oplus v = uv \ \ \text{(multiplicação usual)} \\ \alpha \odot u = u^\alpha \ \ \text{(potenciação usual)} \end{cases}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.[3]

[3] [*Monteiro*] [*Zani*]

Solução:

Este conjunto V quando agregado Ã s operações usuais **não** é um espaço vetorial, visto que não possui *elemento neutro* para a adição. No entanto, com as definições acima, então V se torna um espaço vetorial. De fato, verifiquemos as 8 propriedades:

$\forall u, v, w \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

A 1 $u, v \in V$ temos, $u \oplus v = uv = vu = v \oplus u, \forall u, v \in V$.

A 2 $u \oplus (v \oplus w) = u \oplus (vw) = u(vw) = (uv)w = (u \oplus v) \oplus w$.

A 3 Se $u \in V$ então, como $1 \in V$, temos, $1 \oplus u = 1u = u$.

Observe que, neste caso, 1 é o elemento neutro da adição, o qual denotaremos por $\widehat{0}$.

A 4 Se $u \in V$, isto é, $u > 0$, então, $u^{-1} \in V$ (da definição de corpo) e

$u \oplus u^{-1} = uu^{-1} = 1 = \widehat{0}$. Veja que u^{-1} é o simétrico de u, neste caso.

M 1 $\alpha \odot (\beta \odot u) = \alpha \odot u^{\beta} = \left(u^{\beta}\right)^{\alpha} = u^{\alpha\beta} = (\alpha \odot \beta) \odot u$.

M 2 $\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{soma usual de escalares}} \odot u = u^{\alpha+\beta} = u^{\alpha}u^{\beta} = u^{\alpha} \oplus u^{\beta} = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$.

M 3 $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot (uv) = (uv)^{\alpha} = u^{\alpha}v^{\alpha} = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

M 4 $1 \odot u = u^1 = u$

□

Exercício 2.3 Mostre que $\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall u \in V$, $(\alpha - \beta)\, u = \alpha u - \beta u$.

Solução:

A partir da definição de subtração, temos:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

e da Proposição 2.4, $(-\beta)u = -\beta u$, então:

$$(\alpha - \beta)\, u = (\alpha + (-\beta))\, u = \alpha u + (-\beta)\, u = \alpha u + (-\beta u) = \alpha u - \beta u$$

□

Exercício 2.4 Mostre que $\forall \alpha \in K$ e $\forall u, v \in V$, $\alpha\,(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Solução:
Temos que: $u - v = u + (-v)$ e $\alpha(-v) = -\alpha v$, então:

$$\alpha\,(u - v) = \alpha\,(u + (-v)) = \alpha u + \alpha\,(-v) = \alpha u + (-\alpha v) = \alpha u - \alpha v$$

□

Exercício 2.5 Mostre que $\forall \beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j \in K$ e $v_1, v_2, \ldots, v_j \in V$

$$\beta\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_j)\, v_j$$

Solução:
O Princípio de Indução diz que:
$P(n)$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras.

(ii) Suponha que vale para $n = k \Rightarrow P(k)$ é verdadeira.

(iii) Devemos mostrar que vale para $n = k + 1 \Rightarrow P(k + 1)$ é verdadeira.

$$P\,(2) : \beta\,(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\beta\alpha_1)\, v_1 + (\beta\alpha_2)\, v_2$$

$$n = j \Rightarrow P\,(j) = \beta\,(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j) = (\beta\alpha_1)\, v_1 + \ldots + (\beta\alpha_j)\, v_j = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_j)\, v_j$$

$$n = j + 1 \Rightarrow P\,(j + 1) = \beta\,(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1})$$
$$= \underbrace{(\beta\alpha_1)\, v_1 + \ldots + (\beta\alpha_j)\, v_j}_{} +$$

$$+ (\beta\alpha_{j+1})\, v_{j+1} = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_{j+1})\, v_{j+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_j)\, v_j + (\beta\alpha_{j+1})\, v_{j+1} = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_{j+1})\, v_{j+1}$$

□

Exercício 2.6 Se $u, w \in V$, então, existe um único vetor $v \in V$ tal que $u + v = w$.

Solução:
Primeiro mostraremos a existência de tal vetor.
Note que se tomarmos o vetor $w + (-u)$, teremos

$$u + (w + (-u)) \overset{\text{com.}}{=} u + ((-u) + w) \overset{\text{assoc.}}{=} (u + (-u)) + w = 0 + w = w$$

Mostraremos que tal vetor é único. Suponhamos que $\exists v \in V$ tal que $u + v = w$. Logo, somando $(-u)$, temos

$$\begin{aligned} (-u) + (u + v) &= (-u) + w \\ \overbrace{\Rightarrow}^{\text{assoc.}} ((-u) + u) + v &= (-u) + w \\ 0 + v &= (-u) + w \\ v &= (-u) + w \end{aligned}$$

Logo, está provada a unicidade. □

Exemplo 2.38 Mostre que se V é um espaço vetorial sobre K e $W_1, W_2, \ldots, W_n$ são subespaços de V, então $W_1 \cap \ldots \cap W_n$ também é subespaço de V.

Solução:
O Princípio de Indução diz que:
$P(n)$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como visto no Teorema 2.11, a intersecção de dois subespaços é um subespaço.

Então, vamos supor que vale para $n = k$, ou seja, $W_1 \cap \ldots \cap W_k$ é subespaço de V.

Devemos mostrar que vale para $n = k + 1$, então

1. $0 \in W_i, i = 1, \ldots, k + 1$. Logo, $0 \in W_1 \cap \ldots \cap W_{k+1}$.
2. Sejam $u, v \in W_1 \cap \ldots \cap W_k \cap W_{k+1}$, então

   $u \in W_1 \cap \ldots \cap W_k$ e $v \in W_1 \cap \ldots \cap W_k$

   $\Rightarrow u + v \in W_1 \cap \ldots \cap W_k$

   Da mesma forma

   $u \in W_{k+1}$ e $v \in W_{k+1}$

   $\Rightarrow u + v \in W_{k+1}$

   $u + v \in (W_1 \cap \ldots \cap W_k) \cap W_{k+1}$

3. Sejam $\alpha \in K$ e $u \in W_1 \cap \ldots \cap W_k \cap W_{k+1}$, então
   $\alpha u \in W_1 \cap \ldots \cap W_k$ e $\alpha u \in W_{k+1}$
   $\alpha u \in (W_1 \cap \ldots \cap W_k) \cap W_{k+1}$

Portanto, $W_1 \cap \ldots \cap W_{n+1}$ é subespaço de V. □

Exemplo 2.39 Mostre que se V é um espaço vetorial sobre K e $W_1, W_2, \ldots, W_n$ são subespaços de V, então $W_1 + \ldots + W_n$ é subespaço de V.

Solução:
A soma vale para $n = 2$, conforme o Teorema 2.12. Vamos supor que vale para $n = k$, ou seja, $W_1 + \ldots + W_k$ é subespaço de V.
Devemos mostrar que vale para $n = k + 1$, então

i) $0 = \underbrace{(0 + 0 + \ldots + 0)}_{k \text{ parcelas}} + 0 \in W_1 + \ldots + W_{k+1}$

ii) Sejam $x_1, x_2 \in W_1 + \ldots + W_{k+1}$, então
$x_1 = \underbrace{(u_{11} + \ldots + u_{1k})}_{k \text{ parcelas}} + u_{1k+1}$, onde $u_{11} + \ldots + u_{1k} \in W_1 + \ldots + W_k$ e $u_{1k+1} \in W_1 + \ldots + W_k$.
$x_2 = \underbrace{(u_{21} + \ldots + u_{2k})}_{k \text{ parcelas}} + u_{2k+1}$, onde $u_{21} + \ldots + u_{2k} \in W_1 + \ldots + W_k$ e $u_{2k+1} \in W_1 + \ldots + W_k$.

$$x_1 + x_2 = (u_{11} + \ldots + u_{1k} + w_1) + (u_{21} + \ldots + u_{2k} + w_2)$$
$$= \underbrace{(u_{11} + \ldots + u_{1k} + u_{21} + \ldots + u_{2k})}_{\in W_1 + \ldots + W_k} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W_{k+1}}$$

Portanto, $x_1 + x_2 \in W_1 + \ldots + W_{k+1}$.

iii) Seja $\alpha \in K$ e $z \in W_1 + \ldots + W_{k+1}$, então
$z = u_1 + \ldots + u_k + u_{k+1}$, onde $u_1 + \ldots + u_k \in W_1 + \ldots + W_k$ e $u_{k+1} \in W_{k+1}$.

$$\alpha z = \alpha (u_1 + \ldots + u_k + u_{k+1}) =$$
$$= \underbrace{\alpha u_1 + \ldots + \alpha u_k}_{\in W_1 + \ldots + W_k} + \underbrace{\alpha u_{k+1}}_{\in W_{k+1}}$$
$$\therefore \alpha z \in W_1 + \ldots + W_{k+1}$$

Portanto, $W_1 + \ldots + W_{k+1}$ é um subespaço de V.

□

Exercício 2.7 Mostre que todo *subespaço vetorial* W de um espaço vetorial V é um espaço vetorial.

Solução:
Suponhamos que W satisfaz o Teorema 2.7 de subespaço e W é não-vazio. Como as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar são bem definidas para W, todas as 8 propriedades são válidas em W, pois $W \in V$.
Logo, vamos mostrar que (A_2) e (A_3) também valem em W.
De $(i), W$ é não-vazio, então, de (iii) $0u = 0 \in W, \forall u \in W$ e
$v + 0 = v, \forall v \in W$.
Logo, $(A2)$ é válido em W.
E se $v \in W$, então $(-1)v = -v \in W$ e $v + (-v) = 0$.
Logo, $(A3)$ é válido em W.
Portanto, W é subespaço de V. □

Exemplo 2.40 Mostre que $(-1)v = -v, \forall v \in V$.

Solução:

$$\begin{aligned} v + (-1)\, v &= 1v + (-1)\, v \\ &= (1 + (-1))\, v \\ &= 0v \\ v + (-1)\, v &= 0 \end{aligned}$$

Como o simétrico é único, concluímos que $(-1)v = -v$. □

Exercício 2.8 Mostre que $-(-u) = u, \forall u \in V$. [4]

Solução:
[5] De (M_4), temos: $1u = u$, então $-(-u) = -1(-1u)$.
De (M_3), temos: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$, então

$$(-1\,(-1))\, u = +1u = u$$

Ou
De $(A3)$ $u + (-u) = 0 \Rightarrow \underbrace{u + (-u)}_{0} + (-u) = 0 + (-u)$

$$\Rightarrow (-u) = 0 + (-u)$$

[4][B. Kolman]
[5][B. Kolman]

Então, $-(-u) = -(0+(-u)) = -1(0+(-u)) = -1.0 + (-1)(-u) = ((-1)(-1))u = +1u = u$

$\square$

Exercício 2.9 Seja $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y=0\right\}$ um subespaço de V. Descreva geometricamente o subespaço W.

Solução:
Geometricamente, temos: [6]

$$\alpha : 1x + 1y + 0z = 0 \text{ (equação geral do plano)}$$

Vetor normal: $\overrightarrow{n} = (1,1,0)$
Portanto, o plano α é bissetriz do plano xy onde o eixo z pertence ao plano α.

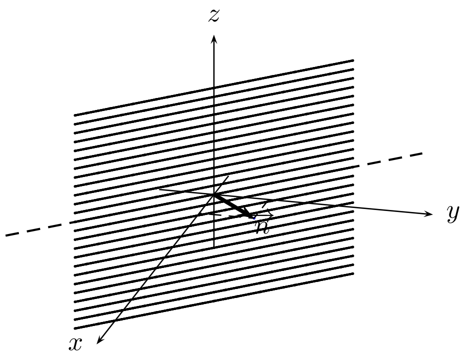


Figura 2.6: Plano de equação $x + y = 0$.

$\square$

Exercício 2.10 A união dos subespaços U e W de V é um subespaço de V?

$$U \cup W = \{v : v \in U \text{ ou } v \in W\}$$

Solução:
[*Monteiro*]
Consideremos $F = \{(1,-1)\}$ e $G = \{(k,-1)\}$, no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.
Se for $k = 1$, então $G = F$ e $F \cup G = F$.
Se $k \neq 1$, então $(1,-1) \notin G$ e$(k,-1) \notin F$, pelo que $F \cup G$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

[6]Veja resolução no exemplo 2.16, página 18.

[*Boldrini*]
Seja $V = \mathbb{R}^3$.
W_1 e W_2 são retas que passam pela origem. Então, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 \cup W_2$ é o "feixe"formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, se somarmos os dois vetores u e v, pertencentes a $W_1 \cup W_2$, vemos que $u + v$ está no plano que contém W_1 e W_2, mas $u + v \notin W_1 \cup W_2$. Veja a figura 2.7.

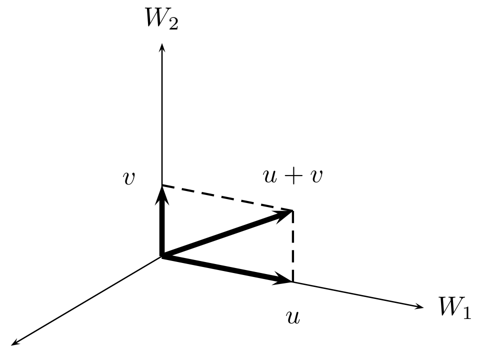


Figura 2.7: Representação de retas em W_1 e W_2.

□

Exercício 2.11 Sejam U, W subespaços de V. Mostre que:

(i) $U + W = W + U$

(ii) $U + \left\{\widetilde{0}\right\} = \left\{\widetilde{0}\right\} + U$

(iii) $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$

Solução:
exercício □

Exercício 2.12 Prove que:

(i) Se $S_1 \subset S_2 \subset V$, então $[S_1] \subset [S_2]$.

(ii) $[S] = [[S]]$

(iii) Se $S_1, S_2 \subset V$, então $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

Solução:

(i) $S_1 \subset [S_2]$. Precisamos mostrar que $[S_1] \subset [S_2]$.

Seja $v \in [S_1]$, então, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in S_1 \subset S_2$.

Portanto, $v \in [S_2]$.

Portanto, $S_1 \subset [S_2]$.

(ii) Se U é um subespaço vetorial, então, $U = [U]$.

$U \subset [U]$

Precisamos mostrar que $[U] \subset U$.

Seja $v \subset [u]$. Logo, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, u_i \in U$. Como U é subespaço segue que $v \in U$.

Portanto, $[U] \subset U$.

Portanto, $[U] = U\,(*)$.

$\underbrace{[S]}_{U} = \underbrace{[[S]]}_{[U]}$, então, por $(*)$, temos que $[U] = U \Rightarrow [[S]] = [S]$.

(iii) $\Leftarrow) v \in [S_1] + [S_2]$

$$v = v_1 + v_2, v_i \in [S_i]$$
$$v_1 \in [S_1], v_2 \in [S_2] \Rightarrow v \in [S_1] \cup [S_2]$$
$$[S_1 \cup S_2] = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in S_1 \cup S_2$$

Significa que na soma têm elementos de S_1 e S_2.

$\Rightarrow) v \in [S_1 \cup S_2]$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$$
$$v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_s v_s}_{\in [S_1]} + \underbrace{\alpha_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \alpha_k v_k}_{\in [S_2]}$$
$$\Rightarrow [S_1] + [S_2]$$
$$\Rightarrow [S_1 \cup S_2] = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in S_1 \cup S_2$$

□

Exemplo 2.41 Verifique se $[U + W] = [U \cup W]$.

Solução:
Para verificar a igualdade façamos a dupla inclusão.
$\subseteq$) $v \in [U+W] \Rightarrow v \in [U \cup W]$
(Lê-se: v pertence ao espaço gerado por U mais W.)
Seja $v \in [U+W]$, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \forall v_i \in U + W$$

ou seja, $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, mas

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + w_1 \\ v_2 &= u_2 + w_2 \\ &\vdots \\ v_n &= u_n + w_n \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} v &= a_1 (u_1 + w_1) + \ldots + a_n (u_n + w_n) \\ v &= a_1 u_1 + a_1 w_1 + \ldots + a_n u_n + a_n w_n \\ v &= \underbrace{a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n}_{\in U} + \underbrace{a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n}_{\in W} \end{aligned}$$

Portanto, $v \in [U \cup W]$.
$\supseteq$) $v \in [U \cup W] \Rightarrow v \in [U+W]$.
Seja $v \in [U \cup W]$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j, u_j \in U \cup W$$

u_j pode estar tanto em U quanto em W, portanto, $v \in [U+W]$.
Portanto, $[U+W] = [U \cup W]$. □

2.7.1 Demonstração de alguns exemplos de Espaço Vetorial

1. Espaço das Matrizes

   Se A e B são matrizes $m \times n$ e k um escalar, então $k(A+B) = kA + kB$.

   Demonstração:
   [*Lipschutz*] Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Então $a_{ij} + b_{ij}$ é o elemento de ordem ij de $A+B$, e assim $k(a_{ij} + b_{ij})$ é o elemento de ordem ij de $k(A+B)$. Por outro lado, ka_{ij} e kb_{ij} são os elementos ij de kA e kB,

respectivamente, e assim $ka_{ij} + kb_{ij}$ é o elemento de $kA + kB$. Mas k, a_{ij} e b_{ij} são escalares em um corpo; logo

$$k\left(a_{ij} + b_{ij}\right) = ka_{ij} + kb_{ij}, \forall i, j$$

Assim, $k(A+B) = kA+kB$, pois os elementos correspondentes são iguais. ■

2. Espaço de Polinômios

   Seja $p(t)$ e $q(t)$ polinômios tais que

   $$p\left(t\right) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

   e

   $$q\left(t\right) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0$$

   definimos $p(t) + q(t)$ por

   $$p\left(t\right)+q\left(t\right) = \left(a_n + b_n\right) t^n+\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right) t^{n-1}+\ldots+\left(a_1 + b_1\right) t+\left(a_0 + b_0\right)$$

   se c é um escalar, definimos $c.p(t)$ por

   $$c.p\left(t\right) = \left(ca_n\right) t^n + \left(ca_{n-1}\right) t^{n-1} + \ldots + \left(ca_1\right) t + \left(ca_0\right)$$

   Demonstração:
   [*B. Kolman*] Para verificar a propriedade $(A4)$, temos

   $$q\left(t\right)+p\left(t\right) = \left(b_n + a_n\right) t^n+\left(b_{n-1} + a_{n-1}\right) t^{n-1}+\ldots+\left(b_1 + a_1\right) t+\left(b_0 + a_0\right)$$

   e como $a_i + b_i = b_i + a_i$ para números reais, podemos concluir que

   $p(t) + q(t) = q(t) + p(t)$.

   Verificando agora a propriedade (M_2), temos:

$$
\begin{aligned}
(r+d).p(t) &= (r+d)\,a_n t^n + (r+d)\,a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + (r+d)\,a_1 t + \\
&\quad + (r+d)\,a_0 \\
&= ra_n t^n + da_n t^n + ra_{n-1}t^{n-1} + da_{n-1}t^{n-1} + \ldots + ra_1 t + \\
&\quad + da_1 t + ra_0 + da_0 \\
&= r\left(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0\right) + \\
&\quad + d\left(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0\right) \\
&= r.p(t) + d.p(t)
\end{aligned}
$$

■

3. Espaço de Funções

   Seja V o conjunto de todas as funções de um conjunto não-vazio X em um corpo K. Para quaisquer funções $f, g \in V$ e qualquer escalar $k \in K$, sejam $f+g$ e kf funções em V definidas como:

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (kf)(x) = kf(x), \forall x \in X$$

   Prove que V é um espaço vetorial sobre K.

   Demonstração:
   [*Lipschutz*] Como X é não-vazio, V também o é. Precisamos agora mostrar que valem todas as propriedades de espaço vetorial.

   A 1 Sejam $f, g, h \in V$. Para mostrar que $(f+g)+h = f+(g+h)$, é preciso mostrar que as funções $(f+g)+h$ e $f+(g+h)$ atribuem o mesmo valor a cada $x \in X$. Ora,

   $$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = [f(x)+g(x)] + h(x), \forall x \in X$$
   $$[f+(g+h)](x) = (f)(x) + (g+h)(x) = f(x) + [g(x)+h(x)], \forall x \in X$$

   Mas $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são escalares no corpo K onde a adição é associativa; logo

   $$[f(x)+g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x)+h(x)]$$

   consequentemente, $(f+g)+h = f+(g+h)$.

A 2 Seja $\widetilde{0}$ a função zero: $\widetilde{0}(x) = 0, \forall x \in X$. Então, para qualquer função $f \in V$,

$$\left(f + \widetilde{0}\right)(x) = f(x) + \widetilde{0}(x) = f(x) + 0 = f(x), \forall x \in X$$

Assim, $f + \widetilde{0} = f$, e $\widetilde{0}$ é o vetor zero em V.

A 3 Para qualquer função $f \in V$, seja $-f$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$. Então,

$$[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \widetilde{0}(x), \forall x \in X$$

Logo, $f + (-f) = \widetilde{0}$.

A 4 Sejam $f, g \in V$. Então,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x), \forall x \in X$$

Logo, $f + g = g + f$ (como $f(x)$ e $g(x)$ são escalares em K, a adição é comutativa).

M 1 Sejam $f, g \in V$ e $k \in K$. Então,

$$\begin{aligned}&[k(f + g)](x) = k[(f + g)(x)] = k[f(x) + g(x)] = \\ &= kf(x) + kg(x) = (kf)(x) + (kg)(x) = (kf + kg)(x), \forall x \in X\end{aligned}$$

Logo, $k(f + g) = kf + kg$.
(como $f(x)$ e $g(x)$ são escalares em K, a multiplicação é distributiva).

M 2 Sejam $f \in V$ e $a, b \in K$. Então,

$$\begin{aligned}&[(a + b)f](x) = (a + b)f(x) = af(x) + bf(x) = \\ &= (af)(x) + (bf)(x) = (af + bf)(x), \forall x \in X\end{aligned}$$

Portanto, $(a + b)f = af + bf$.

M 3 Sejam $f \in V$ e $a, b \in K$. Então,

$$[(ab)f](x) = (ab)f(x) = a[bf(x)] = a(bf)(x) = [a(bf)](x), \forall x \in X$$

Portanto, $(ab)f = a(bf)$.

M 4 Seja $f \in V$. Então, para $1 \in K$, $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$
Logo, $1f = f$.

Portanto, V é um espaço vetorial sobre K.

■

2.8 Exercícios Propostos

2.1 Seja S um conjunto, K um corpo e V o conjunto de todas as funções de S em K. Defina em V as seguintes operações para qualquer $f, g \in V$ e todo $\alpha \in K$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Mostre que V é um espaço vetorial sobre K.

2.2 Considere o espaço vetorial V como sendo o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que:

(a) o conjunto das funções contínuas W é um subespaço de V;

(b) o conjunto das funções diferenciáveis U é um subespaço de V.

2.3 Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u, v \in V$ vetores não-nulos. Prove que v é múltiplo de u se, e somente se, u é múltiplo de v. Que se pode dizer caso não suponhamos ambos os vetores u e v diferentes do vetor nulo?

2.4 Sabemos que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mantendo o produto por escalar usual e variando a soma de dois vetores $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ em $\mathbb{R}^2$. Quais os axiomas de espaço vetorial que são válidos? Quais os que não são válidos?

(a) $u + v = (x + b, a + y)$

(b) $u + v = (xa, yb)$

(c) $u + v = (3x + 3a, 5x + 5a)$

2.5 Defina a média entre dois vetores u e v de um espaço vetorial V sobre um corpo K por $u \boxtimes v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que:

$$(u \boxtimes v) \boxtimes w = u \boxtimes (v \boxtimes w) \Leftrightarrow u = w$$

2.6 Dados os vetores $u = (1, 2, 3)\,, v = (3, 2, 1)$ e $w = (-3, 2, 7)$ em $\mathbb{R}^3$. Determine números α, β tais que $w = \alpha u + \beta v$. Quantas soluções admite este problema?

2.7 Seja K um subcorpo do corpo L. Mostre que L é um espaço vetorial sobre K. Dê exemplos de espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$.

2.8 Seja $K = \left(a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\right)$. Mostre que K é um corpo.

2.9 Seja $K = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Mostre que K é um corpo.

2.10 Seja $c > 0$ um número racional e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma^2 = c$. Mostre que o conjunto $L = \{a + b\gamma | a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

2.11 Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços:

(a) $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\}$

(b) $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 4y = 0\right\}$

2.12 Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços:

(a) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\right\}$

(b) $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y \text{ e } 2y = z\right\}$

2.13 Sabemos que K^n é um espaço vetorial sobre K com as operações usuais. Prove que:

(a) dados $x, y \in K^n$ tal que $x + y = 0$, então $x = -y$ e $y = -x$;

(b) se $x \in k^n$, então $-(-x) = x$;

(c) dados $x, y \in k^n$, se $x + y = x$, então $y = 0$;

(d) $(-1)\,x = -x$, para qualquer que seja $x \in k^n$.

2.14 O conjunto $W = \{(1 + 2t)\,, t | t \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$?

2.15 O conjunto $W = \{(s - t, s, t)\,| s, t \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

2.16 Sabemos que $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. O conjunto $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ é um subespaço?

2.17 Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ um plano. Mostre que π é um subespaço se, e somente se, $0 \in \pi$.

Isto é verdadeiro para as retas $r \subset \mathbb{R}^3$ e $r \subset \mathbb{R}^2$?

2.18 Sabemos que o conjunto $\mathbb{R}^{[0,1]}$ de todas as funções de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O subconjunto $\mathrm{I}[0,1] \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ das funções integráveis é um subespaço vetorial?

2.19 Seja $P^n(\mathbb{C})$ o conjuto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n, na variável t e com coeficientes em $\mathbb{C}$. Mostre que $P^n(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais. Se $m < n$ é verdade que $P^m(\mathbb{C})$ é um subespaço de $P^n(\mathbb{C})$?

2.20 Seja $P(\mathbb{C})$ o conjunto de todos os polinômios na variável t e com coeficientes em $\mathbb{C}$. O conjunto $P^n(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais?

2.21 Seja $W \subset P(\mathbb{C})$ o conjunto de todos os polinômios que têm i como raiz. O conjunto W é um subespaço de $P(\mathbb{C})$?

2.22 Mostre que $W = \{(t, 3t, -2t) \,|t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto W é um subespaço de $\mathbb{C}^3$?

2.23 Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ não são subespaços do $\mathbb{R}^3$:

(a) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\right\}$

(b) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq y \leq z\right\}$

(c) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y \in \mathbb{Q}\right\}$

2.24 Sejam U, V e W é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{array}{l} U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = z\right\} \\ V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\right\} \\ W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\right\} \end{array}$$

Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3, U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em qual dos casos anteriores a soma é direta?

2.25 Determine um conjunto de geradores para cada um dos subespaços do $\mathbb{R}^3$:

(a) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\right\}$

(b) $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z + y = 0 \text{ e } x - 2y = 0\right\}$

(c) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0\right\}$

(d) $U \cap W$

(e) $V + W$

2.26 Sejam u, v vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Se não existe nenhum $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, mostre que $\mathbb{R}^2 = [u] \oplus [v]$.

2.27 Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (-1, 0, 1)$ e $v_2 = (3, 4, -2)$. Determinar um sistema de equações homogêneas para o qual seu espaço solução seja exatamente o subespaço gerado por estes vetores.

2.28 Seja $C[\mathbb{R}]$ o espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que $\left\{\text{sen}^2(t), \cos^2(t), \text{sen}(t)\cos(t)\right\}$ e $\{1, \text{sen}(2t), \cos(2t)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $C[\mathbb{R}]$.

2.29 Mostre que $B = \{v = (1 + i, 2i), w = (1, 1 + i)\} \subset \mathbb{C}^2$ é L.D., quando consideramos $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais. É verdade que $B \subset \mathbb{C}^2$ é L.D. quando $\mathbb{C}^2$ é visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais?

2.30 Encontre o subespaço W do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais, gerado pelos vetores $w_1 = (1, -2, 5, -3)$ e $w_2 = (2, 3, 1, -4)$. É verdade que $(17, -7, -5, 2) \in [w_1, w_2]$?

2.31 Seja V o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ com as operações $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para qualquer $f, g \in V$ e $\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ para qualquer $f \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.

(b) $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.

(c) $V = U \oplus W$

2.32 Mostre que $B = \left\{(1 - t)^3, (1 - t)^2, (1 - t), 1\right\}$ gera o espaço vetorial $P^3(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais.

2.33 Diga se é verdadeiro ou falso e justifique sua resposta:

(a) ( ) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais.

(b) ( ) a reta $r \subset \mathbb{R}^2$ de equação $3x - y = -1$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais.

(c) ( ) a reta $r \subset \mathbb{R}^2$ de equação $3x - y = 67$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais.

2.34 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$. Use os axiomas de espaço vetorial para mostrar que $n.v = v + v + \ldots + v$ (n parcelas).

2.35 Seja V um espaço vetorial. Use as relações $2(u + v) = 2u + 2v$ e $2w = w + w$ para mostrar que a comutatividade pode ser demonstrada a partir dos demais axiomas de espaço vetorial.

2.36 Em $\mathbb{R}^2$, mantenhamos a definição usual de produto λv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras distintas, a definição de soma $u + v$ dos vetores $u = (x, y)$ e $v = (x_1, y_1)$. Em cada caso, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados.

a) $u + v = (x + y_1, x_1 + y)$

b) $u + v = (xx_1, yy_1)$

c) $u + v = (3x + 3x_1, 5x + 5x_1)$

2.37 Defina a média entre dois vetores u e v de um espaço vetorial V por $M(u, v) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Mostre que $M(M(u, v), w) = M(u, M(v, w))$. Se, e somente se, $u = w$.

2.38 Sejam V um espaço vetorial real e u e v vetores de V. O segmento de reta de extremidades u e v é, por definição, o conjunto $[u, v] = \{(1 - t)\, u + tv, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Um conjunto X chama-se convexo quando $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$. Ou seja, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X. Mostre que:

a) Todo subespaço de V é um conjunto convexo.

b) A intersecção $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ de conjuntos convexos contidos em V é um conjunto convexo.

c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, o conjunto $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant c\right\}$ é um conjunto convexo. Conclua dai que o disco $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ é um conjunto convexo.

d) Se X é um conjunto convexo e se r, s, t são números reais não negativos, tais que $r + s + t = 1$, então se $u, v, w \in X \Rightarrow ru + sv + tw \in X$.

2.39 Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais.

a) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão aritmética.

b) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ que possuem k coordenadas iguais.

c) O conjunto de vetores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + 3x = y^2 + 3y$.

d) O conjunto de vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $x + 2y = z$.

2.40 Mostre que o subconjunto das matrizes simétricas e o subconjunto das matrizes anti-simétricas são subespaços de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre ainda que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é soma direta de tais subespaços.

2.41 No conjunto $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função é dita *par* se $f(x) = -f(x)$ para todo x e f é dita *ímpar* se $f(x) = -f(-x)$, para todo x. Mostre que o subconjunto das funções pares e o subconjunto das funções ímpares são subespaços de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mostre ainda que $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é soma direta de tais subespaços.

2.42 Seja V um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que a soma e a intersecção destes subespaços é um subespaço de V. Mostre ainda que $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

2.43 Verifique quais dos subconjuntos de vetores $v = (a_1, \ldots, a_n), n \geqslant 3$, abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.

a) Todos os v tais que $a_1 \leqslant 0$.

b) Todos os v tais que $a_1 + 3a_2 = a_3$.

c) Todos os v tais que $a_2 = a_1^2$.

d) Todos os v tais que $a_1 a_2 = 0$.

e) Todos os v tais que a_2 é irracional.

2.44 Seja V o espaço vetorial das funções f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de V?

a) Todas as f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.

b) Todas as f tais que $f(0) = f(1)$.

c) Todas as f tais que $f(3) = 1 + f(-5)$.

d) Todas as f tais que $f(-1) = 0$.

e) Todas as f que são contínuas.

2.45 Seja $V = M_{x \times x}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de V?

a) Todas as matrizes A que são invertíveis.

b) Todas as matrizes A que não são invertíveis.

c) Todas as matrizes A tais que $AB = BA$ com B uma matriz fixa de $M_{x \times x}(\mathbb{R})$.

d) Todas as matrizes A tais que $A^2 = A$.

2.46 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dado dois elementos x e y em V, a reta que une x e y é, por definição, o conjunto $r = \{(1-t)\,x + ty, t \in \mathbb{R}\}$. Uma variedade afim é um subconjunto W de V tal que se x e y estão em W a reta que une x e y está contida em W.

a) Mostre que todo subespaço vetorial de V é uma variedade afim.

b) Mostre que toda variedade afim é um conjunto convexo.

c) Mostre que se $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são números reais, o conjunto solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é uma variedade afim em $\mathbb{R}^n$.

2.47 Considere os seguintes subespaços:

a) Mostre que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$ são o próprio $\mathbb{R}$ e o subespaço nulo.

b) Mostre que um subespaço de $\mathbb{R}^2$ ou é o próprio $\mathbb{R}^2$ ou é o espaço nulo ou é uma reta passando pela origem de $\mathbb{R}^2$.

2.48 Considere os subespaços F_1, F_2 de $\mathbb{R}^3$ definidos da seguinte forma:
$F_1 = \{(x, x, x)\,, x \in \mathbb{R}\}$ e $F_2 = \{(x, y, 0)\,, x, y \in \mathbb{R}\}$.
Mostre que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de F_1 com F_2.

2.49 Exprima o vetor $(1, -3, 0)$ como combinação linear dos vetores
$u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0), w = (2, -3, 5)$.

2.50 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

a) ( ) O vetor $(1, -1, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.

b) ( ) Qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u = (-5, 3, 2)$ e $v = (3, -1, 3)$.

2.51 Uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é dita *limitada* quando existe uma constante não negativa k tal que $|f(x)| \leqslant k$. Mostre que o conjunto das funções limitadas é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o qual é gerado pelas funções limitadas positivas.

2.52 Seja $P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais e para todo $n \in \mathbb{N}$ seja Q_n o conjunto dos polinômios de graus arbitrários que são divisíveis por x^n. Mostre que Q_n é um subespaço de $P(\mathbb{R})$. Encontre um subespaço F de $P(\mathbb{R})$ tal que $P(\mathbb{R})$ seja a soma direta de Q_n com F.

2.53 Mostre que a união de três subespaços vetoriais só pode ser um subespaço quando um deles contêm os outros dois.

2.54 Sejam F_1 e F_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Se existir algum $a \in V$ tal que $a + F_1 \subset F_2$, mostre que $F_1 \subset F_2$.

Capítulo 3

Dependência Linear, Base e Dimensão

3.1 Dependência Linear

Definição 3.1 Consideremos V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é *linearmente independente* ***(L.I.)*** quando para $\alpha_i \in K$,

$$\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \end{array}$$

Caso contrário, S é *linearmente dependente* ***(L.D.)***.

Obs: Para que S seja L.D. basta que pelo menos um escalar seja diferente de zero, ou seja, $\alpha_i \neq 0$.

Um subconjunto $A \subset V$ é L.I. se quaisquer vetores de S forem L.I.

Obs: Quando $S = \emptyset$. Definimos S como sendo L.I.

Exemplo 3.1 $S = \{v_1 = (1,0), v_2 = (-3,0)\}$ é L.D.
$S = 1\,(1,0) + \frac{1}{3}\,(-3,0) = (0,0)$
$\alpha \neq 0$ (pelo menos um escalar).

Exemplo 3.2 $\{(1,1,0,0), (0,2,1,0), (0,0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I.

Solução:
Seja $x, y, z \in \mathbb{R}$ (escalares reais).

$$x\,(1,1,0,0) + y\,(0,2,1,0) + z\,(0,0,0,3) = (0,0,0,0)$$
$$(x,x,0,0) + (0,2y,y,0) + (0,0,0,3z) = (0,0,0,0)$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Portanto, é L.I.
<u>outro modo</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Já está na forma escalonada. □

Exemplo 3.3 O conjunto $L = \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (2,1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.D.

Solução:
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\,(1,1,0,0) + \beta\,(0,1,0,0) + \gamma\,(2,1,0,0) = (0,0,0,0)$$
$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma - \beta = 0$$

A solução não é única, portanto, é L.D. □

Exemplo 3.4 Considere M_2 com as operações usuais. Então,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

são L.I.

Solução:
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

Logo,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Portanto, é L.I. □

Exemplo 3.5 Considere F com as operações usuais. Temos que as funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são L.I.

Solução:
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \operatorname{sen}(x) + \beta \cos(x) = 0 \tag{3.1}$$

Para $x = 0 \Rightarrow \beta = 0$.
Para $x = \pi/2 \Rightarrow \alpha = 0$
Como a equação 3.1 deve valer independente do valor de x, temos que a única solução é $\alpha = \beta = 0$. □

Proposição 3.2 *Seja V um espaço vetorial sobre K e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então, S é L.D. se, e somente se, um dos vetores de S for escrito como combinação linear dos outros.*

Demonstração:
($\Rightarrow$) Por hipótese S é L.D., então existe algum $\alpha_k \in \mathbb{R}$ não nulo, $k \leqslant n$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Logo,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_k} v_2 + \ldots + v_k + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} v_{k+1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_k} v_n = 0$$

Assim,

$$v_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} v_{k+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} v_n$$

($\Leftarrow$) Por hipótese, $\exists v_k \in S$ tal que

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n$$

com $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + (-1)\, v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Como $\alpha_k = -1 \neq 0$, segue que, S é L.D. ■

3.1.1 Propriedades de dependência linear

P1. [1] Seja V um espaço vetorial sobre K. Se $S \subset V$ é finito e $\mathbf{0} \in S$, então S é L.D.

Demonstração:
Suponha $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0\}$.

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n + \alpha 0 = 0; \forall \alpha \neq 0$$

Em particular, $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$

Portanto, S é L.D. ■

P2. Se $S = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então S é L.I.

Demonstração:
Se $\alpha v = 0$, pela Proposição 2.4, temos que $v \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$. ■

Exemplo: $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. $\{1\}$ é L.I.

P3. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não-vazios de um espaço vetorial V com $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D., então S_2 também é L.D.

Demonstração:
Suponhamos que $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é L.D. e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$.

Existem escalares (onde pelo menos um é não-nulo) $\alpha_i \in K$, tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_r v_r = 0$.

Então, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_r v_r + 0v_{r+1} + \ldots + 0v_n = 0$. Portanto, S_2 é L.D. ■

P4. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não-vazios de um espaço vetorial V com $S_1 \subset S_2$ e S_2 é L.I., então S_1 também é L.I.

Demonstração:
Sejam $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$. Seja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r + 0v_{r+1} + \ldots + 0v_n = 0$$

Por hipótese, S_2 é L.I., e portanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. Portanto, S_1 é L.I. ■

P5. Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é L.I. e $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., então u é combinação linear dos elementos de S.

[1] Veja [*Callioli*] pág. 76.

Demonstração:
Por hipótese $S \cup \{u\}$ é L.D., ou seja, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha u = 0$ (pelo menos um escalar é não-nulo).

Afirmamos que $\alpha \neq 0$.

De fato, Se $\alpha = 0$ teríamos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

ou seja, por hipótese, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, ou ainda, teríamos $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Absurdo.

Portanto, $\alpha \neq 0$.

Então podemos escrever

$$u = \left(-\alpha^{-1}\alpha_1\right) v_1 + \left(-\alpha^{-1}\alpha_2\right) v_2 + \ldots + \left(-\alpha^{-1}\alpha_n\right) v_n \in [S]$$

$\blacksquare$

P6. Seja $A \subset V$ um subconjunto L.I. Seja $v \in V$ tal que $v \notin [A]$. Então, $A \cup \{v\}$ é L.I.

Demonstração:
Seja $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Mostremos que $A \cup \{v\}$ é L.I. Sejam $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Note que $\alpha = 0$, caso contrário, teríamos

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n \in [A]$$

contradizendo a hipótese. Portanto, $A \cup \{v\}$ é L.I. $\blacksquare$

P7. Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \subset V$ e $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então, $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Demonstração:
[2] Seja $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Como A é L.D., pela proposição 3.2, $\exists v_k \in A$ tal que $v_k = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i v_i$. Claramente temos que $[A - \{v_k\}] \subset [A]$.

Seja $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i \in [A]$. Temos que

[2] veja outra demonstração em [Callioli], pág. 78.

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_k v_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i v_i =$$

$$= \beta_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i v_i \in [A - \{v_k\}]$$

$$\therefore [A] = [A - \{v_k\}]$$

$\blacksquare$

Exemplo 3.6 Seja $V = \mathbb{R}^4$ e
$S = \{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 2), v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 2, -1, 4)\}$.

Solução:
Seja $V_4 = 2v_2 - v_3$

$$[\alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4 = 0]$$
$$\therefore [S] = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$\square$

3.2 Base

Definição 3.3 Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma *base* de V é um subconjunto B de V tal que $[B] = V$ e B é L.I.

3.2.1 Exemplos de Base

Exemplo 3.7 Considere $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Solução:
Vamos mostrar que B gera $\mathbb{R}^2$.

$$\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$\therefore [B] = \mathbb{R}^2$$

Para verificar se B é L.I. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (0, 0)$$
$$\Rightarrow \alpha = 0; \beta = 0$$

Portanto, B é L.I. Então, B é uma base de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Exemplo 3.8 Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (0,1)$. Temos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V.

Solução:
Vamos mostrar que $\{v_1, v_2\}$ gera $\mathbb{R}^2$.
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$
\begin{aligned}
& u = \alpha v_1 + \beta v_2 \\
& (x,y) = \alpha\,(1,1) + \beta\,(0,1) \\
& \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = x} \\ \boxed{\beta = y - x} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Para verificar se $\{v_1, v_2\}$ é L.I. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$
\begin{aligned}
& \alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \\
& \alpha\,(1,1) + \beta\,(0,1) = 0 \\
& \Rightarrow \alpha = \beta = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $\{v_1, v_2\}$ é L.I. Então, $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Exemplo 3.9 Considere $\mathbb{R}^4$ com as operações usuais. Temos que

$$B = \{(1,0,1,0)\,, (0,1,0,1)\,, (1,0,0,1)\,, (0,0,1,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução:

(i) Sejam $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a,b,c,d) = \alpha\,(1,0,1,0) + \beta\,(0,1,0,1) + \gamma\,(1,0,0,1) + \delta\,(0,0,1,1)$$

Logo,

$$
\begin{cases}
\alpha & & +\gamma & & = a \\
 & +\beta & & & = b \\
\alpha & & & +\delta & = c \\
 & +\beta & +\gamma & +\delta & = d
\end{cases}
$$

$$\alpha = \frac{a+c-d+b}{2}, \beta = b, \gamma = \frac{a-c+d-b}{2} \text{ e } \delta = \frac{c-a+d-b}{2} \tag{3.2}$$

(ii) Vamos mostrar que B é L.I. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\,(1,0,1,0) + \beta\,(0,1,0,1) + \gamma\,(1,0,0,1) + \delta\,(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha & & +\gamma & & = 0 \\ & +\beta & & & = 0 \\ \alpha & & & +\delta & = 0 \\ & +\beta & +\gamma & +\delta & = 0 \end{cases}$$

Substituindo 0 em 3.2, temos

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Portanto, B é L.I.

$\square$

Exemplo 3.10 Considere $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
$B = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ chamada *base canônica*.

Exemplo 3.11 Considere o espaço vetorial $P_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ de polinômios de grau $\leq n$.
$B = \left\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n\right\}$ é uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

Solução:

(i)

$$[B] = p_n(\mathbb{R})$$
$$\forall f \in p_n(\mathbb{R}); f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n; a_i \in \mathbb{R}$$

(ii) B é L.I.

$$\forall g \in p_n(\mathbb{R}); g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n = 0 + 0t + 0t^2 + \ldots + 0t^n$$
$$\Rightarrow b_0 = 0; b_1 = 0; \ldots; b_n = 0$$

$\square$

Exemplo 3.12 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ o conjunto das matrizes 2×2.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

(i)

$$[B] = M_2(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_4}$$

(ii) B é L.I.

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = y = z = w = 0$$

□

Exemplo 3.13 O exemplo anterior vale para toda matriz $n \times n$ $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ onde a base é

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Obs: Por definição $V = \{0\}$ temos que $B = \emptyset$ é L.D.

3.2.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 3.1 Mostre que o conjunto $\{1\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Solução:
Para ser base devemos mostrar que o conjunto gera e que é L.I.

(i) Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} & a + bi = (a + bi)\,.1 \\ & \therefore [1] = \mathbb{C} \end{aligned}$$

(ii) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que

$$\begin{aligned} & \alpha.1 = 0 \\ & \Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto é L.I.

Portanto, $\{1\}$ é base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$.

□

Exercício 3.2 Mostre que o conjunto $\{1, i\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Solução:
Para ser base devemos mostrar que o conjunto gera e que é L.I.

(i) Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$a + bi \in [1, i]$$

(ii) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & \alpha 1 + \beta i = 0 + 0i \\ & \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto é L.I.

Portanto, $\{1, i\}$ é base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

□

Exercício 3.3 Sejam U, W subespaços de V, com base B_1 e B_2, respectivamente. Prove que $B_1 \cup B_2$ gera $U + W$.

Solução:

Sejam $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ bases de U e W, respectivamente, e seja $v \in U + W$, temos que $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in U$ e $v_2 \in W$, então existem escalares em K tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s \\ v_2 &= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_k w_k \end{aligned}$$

então,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_k w_k$$

Portanto, $v \in [B_1 \cup B_2]$. Ou seja, $B_1 \cup B_2$ gera $U + W$.

$\square$

Exemplo 3.14 Temos que $P_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado, pois vimos que $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base de $P_n(\mathbb{R})$ e B é finito.

Mas, o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$: conjunto de todos os polinômios, não é finitamente gerado.

Teorema 3.4 *Todo sistema linear homogêneo com m equações e n incógnitas, com $m < n$, possui solução não trivial.*

Demonstração:

Façamos indução em m.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

i) Para $m = 1$, temos

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

Vamos supor que $a_{11} \neq 0$, então

$$x_1 = \left(\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \ldots + \left(\frac{-a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n$$

ii) Suponha que vale para algum $(m-1)$.

Devemos mostrar que vale para m.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{(m-1)1}x_1 + \ldots + a_{(m-1)n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Na última equação de 3.3 podemos supor $a_{mn} \neq 0$. Então,

$$x_n = \left(\frac{-a_{m1}}{a_{mn}}\right)x_1 + \ldots + \left(\frac{-a_{m(n-1)}}{a_{mn}}\right)x_{n-1}$$

Vamos chamar esta equação de T, $x_n = T$.
Substituindo x_n nas demais equações, obtemos

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1(n-1)}x_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ b_{(m-1)1}x_1 + \ldots + b_{(m-1)(n-1)}x_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

O sistema 3.4 possui $m-1$ equações e $n-1$ incógnitas. E $m-1 < n-1$. Pela hipótese de indução 3.4 tem solução não trivial.

Seja $\left(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0\right)$ solução não trivial de 3.4. Então $\left(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, T\right)$ é solução não trivial de 3.3. ∎

Teorema 3.5 [3] *Seja V espaço vetorial finitamente gerado, se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ gera V, então todo conjunto com mais de m vetores é L.D.*

Demonstração:
Seja $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subset V$, com $m > n$.
Como $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, temos

$$\begin{cases} w_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \\ w_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n \\ \vdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vdots \\ w_m = z_1v_1 + z_2v_2 + \ldots + z_nv_n \end{cases}$$

Vamos mostrar que existem escalares $x_1, x_2, \ldots, x_m$, nem todos nulos, tais que

[3] Veja [Elon] pág. 29.

$$
\begin{array}{l}
x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_mw_m = 0 \\
x_1\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n\right) + x_2\left(b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n\right) + \ldots + \\
+ x_m\left(z_1v_1 + z_2v_2 + \ldots + z_nv_n\right) = 0 \\
\left(x_1a_1 + x_2b_1 + \ldots + x_mz_1\right)v_1 + \left(x_1a_2 + x_2b_2 + \ldots + x_mz_2\right)v_2 + \ldots + \\
+ \left(x_1a_n + x_2b_n + \ldots + x_mz_n\right)v_n = 0 \\
\left\{\begin{array}{l}
a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + z_1x_m = 0 \\
a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + z_2x_m = 0 \\
\vdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vdots \\
a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + z_nx_m = 0
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Onde, $m =$ incógnitas e $n =$ equações.
Como $m > n$, o sistema tem pelo menos uma solução não trivial,
$S = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \neq 0$.
Portanto, B' é L.D. ∎

Teorema 3.6 [4] *Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então um conjunto de n vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram V se, e somente se, são L.I.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Suponha que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram V. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fossem L.D. um deles seria combinação linear dos demais. Suponhamos que seja v_1 tal vetor, então pela propriedade P 7 da subsecção 3.1.1, temos que

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [v_2, \ldots, v_n]$$

Logo, $v_2, \ldots, v_n$ são $(n-1)$ vetores que geram V e, portanto, qualquer conjunto com mais de $(n-1)$ vetores é L.D. Absurdo, pois $\dim V = n$ e com uma base seria L.D.

$\Leftarrow$) Suponha que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são L.I., mas que não geram V. Assim, existe $v \in V$ tal que V não é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dessa forma, pela propriedade P 6 da subseção 3.1.1, $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ são L.I.

Como $\dim V = n$, existe uma base de V com n vetores. Logo, qualquer conjunto com mais de n vetores é L.D. Absurdo, portanto, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram V. ∎

Teorema 3.7 [5] *Todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base.*

Demonstração:
Se $V = \{0\}$ por definição $B = \emptyset$.

[4] Veja [Elon] Cor. 3 pág. 30.
[5] Veja [Callioli] pág. 79 e [Elon] pág. 31.

Se $V \neq \{0\}$ por hipótese existe um subconjunto $S \subset V$ tal que $[S] = V$. Como $S \neq \emptyset$ então existem subconjuntos de S não vazios que são L.I.

Entre os conjuntos que são L.I. vamos escolher o que tem o maior número de elementos e chamá-lo de B.

Afirmação: B é uma base de V.

Basta mostrar que $[B] = V$.

Sabemos que B é L.I. e $\forall u \in S - B$, temos que pela propriedade P 5 da subseção 3.1.1, $B \cup \{u\}$ é L.D., ou seja, u é combinação linear de B. Pela propriedade P 7 da subseção 3.1.1, $[B] = [S] = V$.

Portanto, B é uma base de V. ■

Corolário 3.8 *Duas bases quaisquer de um espaço vetorial V finitamente gerado tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração:

Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ duas bases quaisquer de V.

B_1 é base e B_2 é L.I., pelo Teorema 3.5, então $n \geq m$.

B_2 é base e B_1 é L.I., então $m \geq n$.

Portanto, $n = m$. ■

3.3 Dimensão

Definição 3.9 Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Chamamos de *dimensão* de V o número de elementos de uma base de V. Neste caso, a dimensão é finita. Se V não é espaço vetorial finitamente gerado, dizemos que V tem dimensão infinita ($\dim V = \infty$).

Notação: $\dim V$ ou $\dim_K V$.

Exemplo 3.15 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$

$B = \{\alpha; \forall\alpha \neq 0\}$

Exemplo 3.16 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$

$B = \{(1,0), (0,1)\}$ é uma base de V.

$B = \{(\alpha,0), (0,\alpha)\}; \forall\alpha \neq 0$.

Exemplo 3.17 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

Exemplo 3.18 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$B = \{1, i\}\, (1.a + 1.i)$

Exemplo 3.19 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
$B = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\}$

Exemplo 3.20 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$
Pois, $\mathbb{C}^2 = [(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)]$
$(a+bi, c+di) = a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i)$, onde, a, b, c, d são escalares reais.

Exemplo 3.21 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$
Pois, $\mathbb{C}^2 = [(1,0), (0,1)]$
$(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1)$, onde, z_1, z_2 são escalares complexos.

Exemplo 3.22 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$
$(a+bi, c+di, f+gi) = a(1,0,0)+b(i,0,0)+c(0,1,0)+d(0,i,0)+f(0,0,1)+g(0,0,i)$
$\mathbb{C}^3 = [(1,0,0), (i,0,0), (0,1,0), (0,i,0), (0,0,1), (0,0,i)]$

Exemplo 3.23 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3$
$(z_1, z_2, z_3) = z_1(1,0,0) + z_2(0,1,0) + z_3(0,0,1)$
$\mathbb{C}^3 = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$

Exemplo 3.24 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$
$(a_1 + b_1 i, \ldots, a_n b_n i) = a_j e_j + b_j e_j i, j = 1, \ldots, n$
$\mathbb{C}^n = [e_j, e_j i]$

Exemplo 3.25 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$
$(z_1, \ldots, z_n) = z_j e_j, j = 1, \ldots, n$
$\mathbb{C}^n = [e_j]$

Nota: $\dim W \leq \dim V$, pois $W \subset V$.

Exemplo 3.26 $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m.n$

Exemplo 3.27 $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$

Exemplo 3.28 Seja $V = \mathbb{R}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. W um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Solução:
$\dim W = 0, 1, 2$ ou 3.
$\dim W = 0 \to w = \{0\}$
$\dim W = 1 \to w = \{\text{retas pela origem}\}$
$\dim W = 2 \to w = \{\text{planos pela origem}\}$
$\dim W = 3 \to w = \mathbb{R}^3$

□

Teorema 3.10 (do Completamento) [6] *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita M. Se $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ é L.I. e $r < n$, então existem $(m-r)$ vetores $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m \in V$, tais que $B = \{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m\}$ é uma base de V.*

Demonstração:

Como $\dim V = M$, temos que V possui uma base: digamos $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$.

Tome a união $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

Dos conjuntos de S que são L.I., vamos escolher aquele que tem o maior número possível de elementos e que contém $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ e vamos chamá-lo de B, ou seja, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}\,; s \leq m$.

Afirmamos que, B é uma base de V.

De fato, pela própria construção B é L.I.

É óbvio, que $v_1, v_2, \dots, v_s = [B]$, ou seja, é combinação linear de B.

Pela propriedade P 5 da subseção 3.1.1, $v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_m \in [B]$, ou seja, combinação linear de B.

Como C é uma base de V, todos os vetores de V se escrevem como combinação linear de B, então $[B] = V$.

Portanto, B é uma base de V. ■

Teorema 3.11 (do Completamento *(outra versão)*) *Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e $A \subset V$ um conjunto L.I. Então, existe $B \subset V$ base de V tal que $A \subset B$.*

Demonstração:

Se $[A] = V$, então, A é uma base de V.

Caso contrário, se $[A] \neq V$, então, $\exists v_1 \in V \setminus [A]$.

Pela propriedade P 6 da subseção 3.1.1, segue que $\underbrace{A \cup \{v_1\}}_{B_1}$ é L.I.

Se $[B_1] = V$, então, B_1 é base de V. Caso contrário, repita o processo até obter uma base de V. ■

Corolário 3.12 [7] *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Seja $B \subset V$ um conjunto L.I. tal que o número de elementos de B é n. Então B é uma base de V.*

Demonstração:

Se B não fosse uma base de V, então pelo Teorema 3.10 do Completamento existiria $B \subset C$ tal que C seria uma base de V. Porém, neste caso, teríamos que a base de V tem $n + 1$ elementos, contradizendo a hipótese. ■

[6] Veja [Callioli] pág. 81 e [Elon] pág. 31.

[7] Semelhante ao Teorema 3.4.

Proposição 3.13 [8] *Todo subespaço W de um espaço vetorial V finitamente gerado é também finitamente gerado.*

Demonstração:

V é finitamente gerado e $W \subset V$.

$W = \{0\}$, por definição $S = \emptyset; [S] = W$.

Caso contrário ($W \neq \{0\}$), podemos ter $w_1 \in W; w_1 \neq \{0\}$.

Se $W = \{\lambda_1 w_1; \lambda_1 \in K_1; \lambda_1 \neq 0\}$, logo W é finitamente gerado.

Senão, existe $w_2 \in W$ tal que $w_2 \notin [w_1]$ (ou seja, $w_2 \neq \lambda w_1$), isto é, $\{w_1, w_2\}$ é L.I.

Se $W = [\{w_1, w_2\}]$, logo W é finitamente gerado. Senão, existe $w_3 \in W$ tal que $w_3 \notin [w_1, w_2]$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.I.

Se $W = [\{w_1, w_2, w_3\}]$ logo W é finitamente gerado. Senão, existe $w_4 \in W$ tal que $w_4 \notin [w_1, w_2, w_3]$ e $[w_1, w_2, w_3, w_4]$ é L.I.

Continuando este processo, vemos que ele terá fim, visto que teríamos em V um conjunto L.I. infinito. ∎

Proposição 3.14 [9] *Seja V um espaço vetorial e $A \subset V$ finito tal que $[A] = V$. Então existe $B \subset A$ base de V.*

Demonstração:

Se A é L.I., então A é base de V. Caso contrário, se A é L.D., pela propriedade P 7 da subseção 3.1.1, $\exists v_1 \in A$ tal que $[A] = [\underbrace{A\setminus \{v_1\}}_{B_1}] = V$.

Se $B_1 = A\setminus \{v_1\}$ é L.I., então B_1 é uma base de V. Caso contrário, repita o processo até obter B_n uma base de V (este processo tem um fim pois A é finito). ∎

Proposição 3.15 [10] *Seja W um subespaço de um espaço vetorial V finitamente gerado. Se $\dim W = \dim V$ então $W = V$.*

Demonstração:

$W = V \Leftrightarrow W \subset V$ e $V \subset W$.

$\Rightarrow$) É óbvio que $W \subset V$, pois W é subespaço de V.

$\Leftarrow$) Pela Proposição 3.13, W é finitamente gerado, logo W tem uma base. Por hipótese, $\dim W = \dim V$, logo toda base de W é uma base de V, ou seja, todo elemento de $V \in W$, isto significa que $V \subset W$. Portanto, $W = V$. ∎

Consideremos V um espaço vetorial sobre K, e U e W subespaços de V.

Sabemos que $U + W$, $U \cap W$ são subespaços.

[8] Veja [*Callioli*] Prop. 3 pág. 81 e [*Elon*] pág. 31.
[9] Veja [*Elon*] pág. 31.
[10] Veja [*Callioli*] Prop. 4 pág. 81 e [*Elon*] pág. 31.

Problema

Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e $v_1 = (1,1,2,0), v_2 = (3,4,5,1), v_3 = (6,1,7,8)$ vetores de $\mathbb{R}^4$. $W = [v_1, v_2, v_3]$ espaço gerado por v_1, v_2, v_3.

a) Achar uma base para W.

b) Se v_1, v_2, v_3 forem L.I. como obter uma base que contenha v_1, v_2, v_3.

Para resolver este problema necessitamos das seguintes proposições.

Proposição 3.16 *Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vetores de V.*

i) $[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r] = [v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_r], \forall \alpha \neq 0$

ii) $[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r] = [v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r]$

iii) $[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r] = [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \alpha v_i, \ldots, v_r]$

Demonstração:

i) $\subseteq$) Seja $v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r]$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_r v_r \\
&\Rightarrow v = a_1 v_1 + \ldots + \left(a_i \alpha^{-1}\right) \alpha v_i + \ldots + a_r v_r \\
&\Rightarrow v \in [v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_r]
\end{aligned}$$

$\supseteq$) Seja $v \in [v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_r]$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = a_1 v_1 + \ldots + a_i \alpha v_i + \ldots + a_r v_r \\
&\Rightarrow v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r]
\end{aligned}$$

ii) $\subseteq$) Seja $v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r]$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_j v_j + \ldots + a_r v_r \\
&\Rightarrow v = a_1 v_1 + \ldots + a_j v_j + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_r v_r \\
&\Rightarrow v \in [v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r]
\end{aligned}$$

$\supseteq$) Análogo.

iii) $\subseteq$) Seja $v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r]$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = a_1v_1 + \ldots + a_iv_i + \ldots + a_jv_j + \ldots + a_rv_r \\
&\Rightarrow v = a_1v_1 + \ldots + a_iv_i + \ldots - a_j\alpha v_i + a_j\alpha v_i + \ldots + a_jv_j + \ldots + a_rv_r \\
&\Rightarrow v = a_1v_1 + \ldots + (a_i - a_j\alpha)\, v_i + \ldots + a_j\,(v_j + \alpha v_i) + \ldots + a_rv_r \\
&\Rightarrow v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \alpha v_i, \ldots, v_r]
\end{aligned}$$

$\supseteq$) Seja $v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \alpha v_i, \ldots, v_r]$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = a_1v_1 + \ldots + a_iv_i + \ldots + a_j\,(v_j + \alpha v_i) + \ldots + a_rv_r \\
&\Rightarrow v = a_1v_1 + \ldots + (a_i + a_j\alpha)\, v_i + \ldots + a_jv_j + \ldots + a_rv_r \\
&\Rightarrow v \in [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r]
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.17 *Em $\mathbb{R}^n$, os vetores*

$$\begin{aligned}
&v_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\
&v_2 = (0, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\
&\vdots \\
&v_k = (0, 0, \ldots, a_{kk}, \ldots, a_{kn})
\end{aligned}$$

com $k \leqslant n$, são sempre L.I. desde que $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \ldots, a_{kk} \neq 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_kv_k = (0, 0, \ldots, 0) \\
&b_1\,(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) + \\
&+b_2\,(0, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \\
&+b_3\,(0, 0, a_{33}, \ldots, a_{3n}) + \\
&+ \ldots + \\
&+b_k\,(0, 0, \ldots, a_{kk}, \ldots, a_{kn}) = (0, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

Temos que
$b_1a_{11} = 0$, como $a_{11} \neq 0$, então, $b_1 = 0$.
$b_2a_{22} = 0$, como $a_{22} \neq 0$, então, $b_2 = 0$.
$\vdots$
$b_ka_{kk} = 0$, como $a_{kk} \neq 0$, então, $b_k = 0$. ■

Exemplo 3.29 Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ a partir dos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,3)\\ v_2 &= (2,1,5)\\ v_3 &= (3,1,4)\\ v_4 &= (1,1,2) \end{aligned}$$

Solução:
Escrevendo na forma de matriz, temos:

$$\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} v_1\\ v_2-2v_1\\ v_3-3v_1\\ v_4-1v_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, $(1,2,3),(0,3,1),(0,0,10)$ são L.I.
Portanto, formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
Como a última linha da matriz é nula, então, podemos dizer que v_4 é combinação linear de v_1, v_2 e v_3.
De fato,

$$\begin{aligned} &5\,(v_4 - 1v_1) = v_3 - 3v_1\\ &5v_4 - 5v_1 = v_3 - 3v_1\\ &v_4 = \frac{2}{5}v_1 + 0v_2 + \frac{1}{5}v_3 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.18 [11] *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços de V, então:*

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Demonstração:
Sabemos que $U \cap W$ é subespaço de U e W.
Suponha que $\dim U = m$ e $\dim W = n$ e $\dim(U \cap W) = r$, então $U \cap W$ possui uma base $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$.

[11] Veja [*Callioli*] pág. 84.

Como B_1 é L.I. em U e em W, podemos completá-lo até formar uma base de U e uma de W, ou seja,
$B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_{m-r}\}$ é base de U e
$B_3 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$ é base de W.

Afirmamos que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_{m-r}, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$ é uma base de $U + W$.

De fato, $[B_2] = U$ e $[B_3] = W \Rightarrow U + W = [B_2] + [B_3] = [B_2 \cup B_3] = [B]$

$\Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_{m-r}u_{m-r} + c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots +$
$+c_{n-r}w_{n-r} = 0$
$\Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_{m-r}u_{m-r} = -c_1w_1 - c_2w_2 - \ldots$
$-c_{n-r}w_{n-r}$
$\Rightarrow \underbrace{v}_{\in U} = \underbrace{-c_1w_1 - c_2w_2 - \ldots - c_{n-r}w_{n-r}}_{\in W}$
$\Rightarrow v \in U \cap W$

Como B_1 é base de $U \cap W$, então existem escalares $d_1, d_2, \ldots, d_r$ tais que

$$v = d_1v_1 + d_2v_2 + \ldots + d_rv_r = 0$$
$$\Rightarrow d_1v_1 + d_2v_2 + \ldots + d_rv_r + c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_{n-r}w_{n-r} = 0$$

B_3 é base de W e é L.I.

$$\Rightarrow d_1 = d_2 = \ldots = d_r = c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-r} = 0$$

Assim,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_{m-r}v_{m-r} = 0$$

B_2 é base de V e é L.I.

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_r = b_1 = b_2 = \ldots = b_{m-r} = 0$$

Portanto, B é L.I.
Conclusão:

$$B = r + m - r + n - r$$
$$B = m + n - r$$
$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$
$$\dim(U + W) = m + n - r = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

■

Teorema 3.19 *Dada a base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V, então, cada vetor de V se escreve de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Demonstração:
Sejam $v \in V$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que
$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$.
Logo, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$
Assim, $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$
Como B é L.I., segue que $\alpha_i - \beta_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$.
Então, $\alpha_i = \beta_i, \forall i = 1, \ldots, n$.
Portanto, v se escreve de modo único como combinação linear dos elementos de B. ■

3.4 Coordenadas

Proposição 3.20 *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre K, e seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V.*

Então, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, tais que $\forall v \in V$ pode ser escrito de ***maneira única*** *como combinação linear dos vetores de B, ou seja,*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \tag{3.5}$$

Demonstração:
Para provar que os escalares são únicos vamos supor que existam
$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ tais que

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

Então,

$$\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n \\ (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0 \end{array}$$

Como B é L.I., seque que

$$\begin{array}{l} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = \beta_n \end{array}$$

■

Definição 3.21 Os escalares de 3.5, são chamados de *coordenadas do vetor v* ou *vetor de coordenadas* em relação Ã base B.

Denotamos as coordenadas de V como sendo a matriz coluna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \text{ou} \quad [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \text{ou por linha } [v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$$

(daí o nome vetor de coordenadas), para indicar as coordenadas de v em relação Ã base B.

Exemplo 3.30 $V = \mathbb{R}^2$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $B = \{(1,0), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, seja $v = (-2,5)$. As coordenadas de v em relação Ã base B se obtêm escrevendo o vetor v como combinação linear dos elementos de B.

$$\begin{aligned} &(-2,5) = -2\,(1,0) + 5\,(0,1) \\ &[(-2,5)]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 3.31 Considere $\mathbb{R}^3$ com as seguintes bases ordenadas.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \\ B_2 &= \{(1,1,0), (0,1,1), (0,2,0)\} \\ B_3 &= \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\} \end{aligned}$$

Seja $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Escreva v como combinação linear dos elementos de cada base dada acima.

Solução:
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, temos:

i) para B_1 temos

$$\begin{aligned} &(1,2,3) = \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) + \gamma\,(0,0,1) \\ &\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3 \\ &\therefore [v]_{B_1} = (1,2,3)_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{B_1} \end{aligned}$$

ii) para B_2 temos

$$
\begin{aligned}
&(1,2,3) = \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \gamma\,(0,2,0) \\
&\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -1 \\
&\therefore [v]_{B_2} = (1,3,-1)_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_2}
\end{aligned}
$$

iii) para B_3 temos

$$[v]_{B_3} = (2,1,3)_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{B_3}$$

□

Observação: Seja $K^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in K\}$
K^n é um espaço vetorial sobre K com as operações usuais

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\
&\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)
\end{aligned}
$$

Proposição 3.22 *Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V e $w_1, w_2, \ldots, w_k$ vetores de V. Então, $w_1, w_2, \ldots, w_k$ são L.I. se, e somente se, seus vetores de coordenadas são L.I. em K^n.*

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\
w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\
&\vdots \\
w_k &= a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \ldots + a_{kn}v_n
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})_B \\
u_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})_B \\
&\vdots \\
u_k &= (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})_B
\end{aligned}
$$

são os vetores de coordenadas respectivos.

$\Rightarrow$) Se $w_1, w_2, \ldots, w_k$ são L.I., vamos mostrar que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são L.I. Suponha que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são L.D., então um deles, digamos u_1, é combinação linear dos outros, isto é,

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_2u_2 + \ldots + b_ku_k \\
\Rightarrow (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) &= b_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \ldots + b_k(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}) \\
\Rightarrow (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) &= (b_2a_{21} + \ldots + b_ka_{k1}, \ldots, b_2a_{2n} + \ldots + b_ka_{kn}) \\
\Rightarrow \underbrace{a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n}_{w_1} &= (b_2a_{21} + \ldots + b_ka_{k1})v_1 + \ldots + (b_2a_{2n} + \ldots + b_ka_{kn})v_n \\
&= b_2a_{21}v_1 + b_2a_{22}v_2 + \ldots + b_2a_{2n}v_n + \ldots + \\
&+ b_ka_{k1}v_1 + b_ka_{k2}v_2 + \ldots + b_ka_{kn}v_n \\
&= b_2\underbrace{(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n)}_{w_2} + \ldots + \\
&+ b_k\underbrace{(a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \ldots + a_{kn}v_n)}_{w_k}
\end{aligned}$$

Então, $w_1 = b_2w_2 + \ldots + b_kw_k$

Portanto, $w_1, w_2, \ldots, w_k$ são L.D.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que se $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são L.I., então $w_1, w_2, \ldots, w_k$ são L.I.

Suponha que $w_1, w_2, \ldots, w_k$ são L.D. e digamos que

$$\begin{aligned}
w_1 &= c_2w_2 + \ldots + c_kw_k \\
\Rightarrow a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n &= c_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n) + \ldots + \\
&+ c_k(a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \ldots + a_{kn}v_n) \\
&= (c_2a_{21} + \ldots + c_ka_{k1})v_1 + \ldots + (c_2a_{2n} + \ldots + c_ka_{kn})v_n \\
\Rightarrow \underbrace{(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})}_{u_1} &= (c_2a_{21} + \ldots + c_ka_{k1}, \ldots, c_2a_{2n} + \ldots + c_ka_{kn}) \\
&= (c_2a_{21}, \ldots, c_2a_{2n}) + \ldots + (c_ka_{k1}, \ldots, c_ka_{kn}) \\
&= c_2\underbrace{(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})}_{u_2} + \ldots + c_k\underbrace{(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})}_{u_k}
\end{aligned}$$

Então, $u_1 = c_2u_2 + \ldots + c_ku_k$

Portanto, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são L.D. ∎

Proposição 3.23 *Se* $[w_1, w_2, \ldots, w_k] = [v_1, v_2, \ldots, v_s]$, *então* $[w_1, w_2, \ldots, w_k, v] = [v_1, v_2, \ldots, v_s, v]$.

Demonstração:
$\subseteq$) Seja $u \in [w_1, w_2, \ldots, w_k, v]$
$\Rightarrow u = a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_kw_k + av$
Como $a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_kw_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_s]$
$\Rightarrow a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_kw_k = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_sv_s$
$\Rightarrow u = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_sv_s + av \in [v_1, v_2, \ldots, v_s, v]$

$\supseteq$) Análogo.

■

Exemplo 3.32 Em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

a) $w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ são L.I. ou L.D.?

b) Como obter uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contendo w_1, w_2, w_3?

Solução:

a) Sejam

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_4} \right\}$$

com relação a esta base, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1v_1 + 2v_2 + 1v_3 + 3v_4$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 1v_4$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 4v_4$$

Então,

$$u_1 = (1, 2, 1, 3)_B$$
$$u_2 = (3, 1, 1, 1)_B$$
$$u_3 = (1, 1, 1, 4)_B$$

são os vetores de coordenadas.

Para verificar se é L.I. ou L.D. escrevemos a matriz e escalonamos. Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Como nenhuma linha é nula, temos que os vetores linha são L.I.

Portanto, w_1, w_2, w_3 são L.I.

b) Note que $\{(1,2,1,3), (0,5,2,8), (0,0,2,13), (0,0,0,1)\}$ são L.I. e formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

Logo, $\{(1,2,1,3), (3,1,1,1), (1,1,1,4), (0,0,0,1)\}$ são L.I. e formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

Assim, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ formam uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$\square$

Exemplo 3.33 Obtenha uma base de $P_3(\mathbb{R})$ que contenha os polinômios x^2+1 e $2x$.

Solução:
Sejam $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ com relação a esta base.

$$x^2 + 1 = 1.1 + 0x + 1x^2 + 0x^3$$
$$2x = 0.1 + 2x + 0x^2 + 0x^3$$

Então,

$$u_1 = (1,0,1,0)_B$$
$$u_2 = (0,2,0,0)_B$$

são os vetores de coordenadas.
Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\{1 + x^2, 2x, x^2, x^3\}$ formam uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

$\square$

3.5 Mudança de Base

Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre K e $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ duas bases de V. Para cada $v_i \in C, i = 1, 2, ..., n$, como $v_i \in V$ e B é uma base de V, existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}; i, j = 1, 2, ..., n$ tais que

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + ... + \alpha_{n1}u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i1}u_i \\ v_2 = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + ... + \alpha_{n2}u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i2}u_i \\ v_3 = \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + ... + \alpha_{n3}u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i3}u_i \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + ... + \alpha_{nn}u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{in}u_i \end{cases} \tag{3.6}$$

genericamente, temos:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}u_i; j = 1, 2, ..., n \tag{3.7}$$

Considere

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} [v_1]_B & [v_2]_B & \cdots & [v_n]_B \end{pmatrix}$$

Definição 3.24 A matriz A de ordem n é chamada de *matriz de mudança de base* B para a base C.

Podemos escrever

$$\begin{aligned} I : \quad & \overbrace{V}^{\text{base } C} \to \overbrace{V}^{\text{base } B} \\ & v \to v \\ & [I]_B^C = A = (\alpha_{ij})_{n\times m} \end{aligned}$$

Demonstração:

De fato, temos que $\forall v_i \in C$, como $I(v_i) \in V$ e B é uma base de V. Temos a combinação 3.7. Então

$$[I]_B^C = A$$

Seja $u \in V$. Como B e C são bases de V, existem $\beta_1, \beta_2 ..., \beta_n, \gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \underbrace{\beta_1 b_1 + ... + \beta_n b_n}_{[U]_B} = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_n v_n$$

Substituindo a equação 3.6, temos

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_n v_n = \\
&= \gamma_1 (\alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + ... + \alpha_{n1} b_n) + \\
&+ \gamma_2 (\alpha_{12} b_1 + \alpha_{22} b_2 + ... + \alpha_{n2} b_n) + \\
&\vdots \\
&+ \gamma_n (\alpha_{1n} b_1 + \alpha_{2n} b_2 + ... + \alpha_{nn} b_n) = \\
&= (\gamma_1 \alpha_{11} + \gamma_2 \alpha_{12} + ... + \gamma_n \alpha_{1n}) b_1 + \\
&+ (\gamma_1 \alpha_{21} + \gamma_2 \alpha_{22} + ... + \gamma_n \alpha_{2n}) b_2 + \\
&\vdots \\
&+ (\gamma_1 \alpha_{n1} + \gamma_2 \alpha_{n2} + ... + \gamma_n \alpha_{nn}) b_n
\end{aligned}$$

Logo,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{[u]_B} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \alpha_{11} + \gamma_2 \alpha_{12} + ... + \gamma_n \alpha_{1n} \\ \gamma_1 \alpha_{21} + \gamma_2 \alpha_{22} + ... + \gamma_n \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_1 \alpha_{n1} + \gamma_2 \alpha_{n2} + ... + \gamma_n \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}}_{[u]_C}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A.[u]_C = [u]_B \\ &\Rightarrow [I_d]_B^C . [u]_C = [u]_B \end{aligned} \tag{3.8}$$

■

Exemplo 3.34 Seja $V = \mathbb{R}^3$ e as base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \left\{ \underbrace{(1,2,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{v_2}, \underbrace{(1,3,1)}_{v_3} \right\}$. Qual a matriz de mudança da base B para a base C, ou seja, $[I]_B^C$?

Solução:

Escrevamos os vetores de C como combinação linear dos elementos de B, então

$$\begin{aligned}
&(1,2,1) = 1\,(1,0,0) + 2\,(0,1,0) + 1\,(0,0,1)\\
&(0,1,-1) = 0\,(1,0,0) + 1\,(0,1,0) + (-1)\,(0,0,1)\\
&(1,3,1) = 1\,(1,0,0) + 3\,(0,1,0) + 1\,(0,0,1)\\
&\Rightarrow [I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i) Usando a equação 3.8, dado por exemplo, $u = 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 \in \mathbb{R}^3$, temos pela equação 3.8, que

$$A.\,[u]_C = [u]_B$$

Logo

$$A.\,[u]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\\ 3\\ -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\\ -5\\ -5\end{bmatrix} = [u]_B$$

ii) Dado, por exemplo, $v = -2e_1 - 5e_2 - 5e_3$ (na base B).

Então,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} -2\\ -5\\ -5\end{bmatrix}_B$$

Queremos encontrar

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = [v]_C$$

temos pela equação 3.8, que

$$\begin{aligned}
&A\,[v]_C = [v]_B\\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\\ -5\\ -5\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \qquad +z = -2 & (I) \\ 2x + y + 3z = -5 & (II) \\ x - y + z = -5 & (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2 - x & (I) \\ 2x + y - 6 - 3x = -5 & (II) \\ x - y - 2 - x = -5 & (III) \end{cases}$$

$$\therefore x = 2, y = 3, z = -4$$

Podemos também resolver pelo escalonamento da matriz completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

□

Exemplo 3.35 Do exemplo anterior, qual a matriz de mudança da base C para a base B, ou seja, $[I]_C^B$?

Solução:

$$(1,0,0) = x\,(1,2,1) + y\,(0,1,-1) + z\,(1,3,1)$$
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$
$$(0,1,0) = a\,(1,2,1) + b\,(0,1,-1) + c\,(1,3,1)$$
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b + 3c = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$
$$(0,0,1) = d\,(1,2,1) + e\,(0,1,-1) + f\,(1,3,1)$$
$$\begin{cases} d + f = 0 \\ 2d + e + 3f = 0 \\ d - e + f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ e = -1 \\ f = 1 \end{cases}$$
$$\therefore [I]_C^B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

3.5.1 Exercícios Resolvidos

Exercício 3.4 Seja $P = (\alpha_{ij})$ a matriz de mudança da base B para a base C e $Q = (\beta_{jk})$ a matriz de mudança da base C para a base D.

Quem é a matriz de mudança da base B para D? [12]

Solução:

$$\underbrace{B \xrightarrow{P} C \xrightarrow{Q} D}_{x}$$

$$\begin{aligned}
&B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}\\
&C = \{v_1, v_2, ..., v_n\}\\
&D = \{w_1, w_2, ..., w_n\}\\
&v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i; j = 1, 2, ..., n = P\\
&w_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} v_j; k = 1, 2, ..., n = Q\\
&w_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right); k, j = 1, 2, ..., n\\
&w_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\overbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \underbrace{\beta_{jk}}_{**}}^{*} \right) u_i; k, j = 1, 2, ..., n\\
&\therefore x = PQ = [I]_B^D
\end{aligned}$$

Onde:
$*$ é o termo geral do somatório da matriz PQ e
$**$ é o produto das matrizes PQ.

□

Exercício 3.5 Sejam $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bases de V.

$$\forall u \in V, u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n$$

$$[u]_B = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Quais são as coordenadas de u em relação Ã base C?

[12] Veja [*Callioli*], pág. 94.

$$[u]_C = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}?$$

Solução:

Seja

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + ... + \alpha_{n1}u_n \\ v_2 = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + ... + \alpha_{n2}u_n \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + ... + \alpha_{nn}u_n \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = [I]_B^C = (\alpha_{ij})_{nxn}$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i ; j = 1, 2, ..., n$$

$$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right)$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \right) u_i$$

$$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + ... + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 + ... + \alpha_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \alpha_{n3}y_3 + ... + \alpha_{nn}y_n \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$X = PY$ ou $Y = P^{-1}X$

$[u]_C = [I]_C^B [u]_B$

$\square$

Exercício 3.6 Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(1,0),(1,2)\}$ bases de V.

$$u = (1,-1) = 1(1,0) + (-1)(0,1)$$
$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$[u]_C = ? \rightarrow [u]_C = \underbrace{[I]_C^B}_{P}[u]_B$$

Solução:

$$(1,0) = x(1,0) + y(1,2)$$
$$(0,1) = z(1,0) + w(1,2)$$
$$\begin{cases} x + y = 1 \rightarrow \boxed{x = 1} \\ 2y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} z + w = 0 \rightarrow \boxed{z = -\dfrac{1}{2}} \\ 2w = 1 \rightarrow \boxed{w = \dfrac{1}{2}} \end{cases}$$
$$[I]_C^B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{[u]_B} \Rightarrow [u]_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

Proposição 3.25 *Sejam U espaço vetorial, $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $C = \{c_1, ..., c_n\}$ bases ordenadas de U. Se A é a matriz de mudança de base de B para C, então A^{-1} (a matriz inversa de A) existe e é a matriz de mudança de base de C para B. Ou seja, toda matriz de mudança de base é inversível e,*

$$\left([I]_B^C\right)^{-1} = [I]_C^B$$

Demonstração:

Mostraremos que $A.X.r = r = I.r$, onde $r = [u]_B$ $(u \in U)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ e $X = [I]_C^B$ é a matriz de mudança de base de C para B.

Seja $r \in \mathbb{R}^n$. Temos

$$\begin{aligned} A.X.r &= A[I]_C^B[u]_B = A[I(u)]_C = \\ &= A[u]_C = [I]_B^C[u]_C = [I(u)]_B = \\ &= [u]_B = r = I_n.r \end{aligned}$$

Logo, $AX = I_n$. Portanto, $X = A^{-1}$. ■

Exemplo 3.36 Sejam $P = [I]_B^C$ e $Q = [I]_C^B$.
Quem é PQ e QP?

Solução:

$$\underbrace{B \xrightarrow{P} C \xrightarrow{Q} B}_{PQ} \Rightarrow PQ = I_n$$

$$\underbrace{C \xrightarrow{Q} B \xrightarrow{P} C}_{QP} \Rightarrow QP = I_n$$

A matriz inversa de P é Q, ou seja, $P^{-1} = Q$.
Sempre a matriz de mudança de base é inversível. □

Exemplo 3.37 Seja $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base de V e $P = (\alpha_{ij})_{nxn}$ uma matriz invertível. Os vetores $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i; j = 1, 2, ..., n$ formam uma base de V?

Solução:
Sim. Basta mostrar que $v_j; j = 1, 2, ..., n$ é L.I.
Se

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) u_i = 0 \xrightarrow{B \text{ é base}} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\alpha_{ij} x_j}^{\text{escalares}} = 0; i = 1, 2, ..., n$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + ... + \alpha_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$PX = 0; \exists P^{-1}, \text{logo } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.
Portanto, os $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i; j = 1, 2, ..., n$ formam uma base de V. □

Corolário 3.26 *Sejam U espaço vetorial de dimensão n, $T : U \to U$ uma transformação linear e, B e C bases de U tal que $\underbrace{|B| = |C| = n}_{n \text{ de elementos}}$. Se P é a matriz de mudança de base de B para C, então,*

$$[T]_C = P^{-1}[T]_B P$$

Demonstração:
Seja $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
&\underbrace{P^{-1}}_{[I]_C^B}[T]_B \underbrace{P}_{[I]_B^C}[u]_C = [I]_C^B [T]_B \underbrace{[I]_B^C [u]_C} = \\
&= [I]_C^B [T]_B [I(u)]_B = [I][T]_B [u]_B = \\
&= [I]_C^B [T(u)]_B = [I(T(u))]_C = \\
&= [T(u)]_C = [T]_C [u]_C \\
&\Rightarrow [T]_C = P^{-1}[T]_B P
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.38 Sejam $B = \{1, 1+t\}$ e $C = \{1, t\}$ bases de $P_1(\mathbb{R})$. Vamos verificar a igualdade do Corolário anterior para $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a+bt) = (a+b) - bt$.

Solução:
Determinemos a matriz P de mudança de base de B para C, ou seja, escrevemos os elementos de C como combinação linear dos elementos de B.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1.1 + 0(1+t) \\ t = -1.1 + 1(1+t) \end{array}\right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_C^B$$

Por outro lado, escrevemos os elementos de B como combinação linear dos elementos de C.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1.1 + 0t \\ 1+t = 1.1 + 1t \end{array}\right\} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_B^C$$

Aplicando os elementos de B, temos:

$$\left.\begin{array}{l} T(1) \underset{=}{*} 1 \underset{=}{**} 1.1 + 0(1+t) \\ T(1+t) = 2 - t = 3.1 - 1(1+t) \end{array}\right\} \Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

onde:
$*$ é a definição da transformação linear.

$**$ é a combinação linear em B.

E

$$\left.\begin{array}{l} T(1) = 1 = 1.1 + 0t \\ T(t) = 1 - t = 1.1 - 1t \end{array}\right\} \Rightarrow [T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [T]_C$$

$\square$

3.6 Exercícios Propostos

3.1 Mostre que o conjunto $\left\{1, (x-a), (x-a)^2, ..., (x-a)^{n-1}\right\} \subset P^{n-1}(\mathbb{R})$, onde $a \in \mathbb{R}$ é L.I.

3.2 Mostre que: se u, v são vetores L.I. de um espaço vetorial V sobre um corpo K, então $(u+v)$ e $(u-v)$ também são L.I.

3.3 No $\mathbb{R}^2$ o conjunto de vetores $\{(1,0), (0,1)\}$ é L.I. É verdade que o conjunto de vetores $\{(1,0), (0,1), (a,b)\}$ também é L.I.?

3.4 Mostre que no espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é L.D.

3.5 É verdade que $[\{(3,1), (5,2)\}] = \mathbb{R}^2$? Qual o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

É verdade que $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in [S]$?

3.6 Mostre que os números complexos $w = 2 + 3i$ e $z = 1 - 2i$ geram o corpo complexo $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3.7 Encontre um vetor em $\mathbb{R}^3$ que gere a intersecção dos subespaços U e W onde U é o plano xy e W é o subespaço gerado pelos vetores $(1, 2, 3)$ e $(1, -1, 1)$.

3.8 Determine m e n para que os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ seja L.I.:

(a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$

(b) $\{(6, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$

3.9 Seja $\{u, U, V\}$ um conjunto L.I. de vetores em um espaço vetorial V. Prove que o conjunto {u + v - 3w, u + 3v - w, v + w} é L.D.

3.10 Considere o espaço vetorial V como sendo o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com as operações usuais e na variável t. Mostre que o conjunto $\left\{e^t, e^{2t}\right\}$ é L.I.

3.11 Seja $\mathbb{C}^3$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}^3$ são L.I. ?

(a) $\{(i,1,0),(1+i,2,0),(3,1,0)\}$

(b) $\{(i,1,0),(2+i,3i,5\text{-}i),(2,4+4i,4\text{-}6i)\}$

3.12 Sejam V um espaço vetorial e $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$. Suponha que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ é um subconjunto L.I. Mostre que $[u_1, u_2, \ldots, u_r] \cap [v_1, v_2, \ldots, v_s] = \{0\}$.

3.13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha - 1), v_3 = (2, \alpha, -3)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) determine as coordenadas dos vetores $v = (-1, 1, 2)$ em relação a esta base.

3.14 Sejam $U, V, W, U \cap W$ e $V + W$ subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{array}{l} U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\right\} \\ V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\right\} \\ W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0\right\} \end{array}$$

Determine a dimensão de $U, V, W, U \cap W$ e $V + W$ e uma base de $U, V, W, U \cap W$ e $V + W$.

3.15 Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R}) = \left\{at^2 + bt + c | a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ gerado pelo conjunto de vetores

$$\left\{v_1 = t^2 - 2t + 1, v_2 = t + 2 \text{ e } v_3 = t^2 - 3t - 1\right\}$$

Determine uma base de S, a $\dim S$, uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e a $\dim P_2(\mathbb{R})$.

3.16 Mostre que se U e W são subespaços de um espaço vetorial V e $V = U \oplus W$, então

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

3.17 Mostre que se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são L.I., então $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_n - v_1$ também são. Vale a recíproca?

3.18 O conjunto $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis é um subespaço do espaço vetorial $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais. Mostre que o subconjunto $\left\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\right\} \subset \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ é L.I.

3.19 Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores
$\{(1, 0, 5), (1, 1, 1), (0, 3, 1), (-3, 0, -2)\}$de $\mathbb{R}^3$:

(a) mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

(b) determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto dado e escreva o vetor $(-2, 3, 4)$ como combinação linear dos vetores desta base.

3.20 Mostre que o conjunto $\{(1, -1, 1, 2), (-1, 1, -1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I. Complete este conjunto de modo a formar uma base de $\mathbb{R}^4$.

3.21 Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$, $(3, 8, -3, -5)$. Encontre uma base e a dimensão de W. Estenda a base de W a uma base de $\mathbb{R}^4$.

3.22 Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$\{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\} \text{ e } \{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1.3, 4, -3)\}$$

respectivamente. Encontre $\dim(U + W)$ e $\dim(U \cap W)$.

3.23 Encontre o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $[u] = W_1 \cap W_2$ onde $W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e $W_2 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)]$.

3.24 Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ duas bases ordenadas de $V = \mathbb{R}^2$.

Determine:

(a) $[I]_{\beta}^{\beta'}$ – matriz de mudança de base da base β para a base β'.

(b) $[I]_{\beta'}^{\beta}$ – matriz de mudança de base da base β' para a base β.

(c) $[(5,-8)]_{\beta}$ e $[(5,-8)]_{\beta'}$.

3.25 Encontre a dimensão de $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$ e de $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$.

3.26 Encontre a dimensão de $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$.

3.27 Considere o $\mathbb{R}^3$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Quais dos conjuntos de vetores são L.D.?

(a) $\{(1,-2,1),(2,1,-1),(7,-4,1)\}$

(b) $\{(1,-3,7),(2,0,-6),(3,-1,-1),(2,4,-5)\}$

(c) $\{(1,2,3),(1,-3,2),(2,-1,5)\}$

3.28 Determine a dimensão e uma base do subespaço

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | b = a + c \text{ e } d = c \right\}$$

do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3.29 Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os seguintes vetores:

$$v_1 = (1,1,1,0) \text{ e } v_2 = (1,1,2,1)$$

3.30 Considere $\mathbb{C}^3$ como sendo um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais. Considere o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{C}^3$ dado por

$$W = [(1,0,i),(1,1+i,1-i),(1,-1-i,-1+3i)]$$

(a) Determine uma base de W em ambos os casos.

(b) Determine a dimensão de W em ambos os casos.

3.31 Suponha que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $C = \{v_1, v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^3$.

3.32 Considere a questão 3.31 e faça o que se pede:

(a) Determine $[I]_B^C$ e $[I]_C^B$.

(b) Determine $[(a,b,c)]_B$, $[(x,y,z)]_C$ e $[(a+x,b+y,c+z)]_B$.

3.33 Mostre que dois vetores são L.D. se, e somente se, um deles é múltiplo do outro.

3.34 Os vetores $v_1 = (1,1,2,4), v_2 = (2,-1,-5,2), v_3 = (1,-1,-4,0)$ e $v_4 = (2,1,1,6)$ são L.D. em $\mathbb{R}^4$. Esses vetores formam uma base de $\mathbb{R}^4$? Se não, encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por estes vetores.

3.35 Para que valores de a o seguinte conjunto é uma base de $\mathbb{R}^3$?
$B = \{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$.

3.36 Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Mostre que V tem dimensão 4 e exiba uma base de V.

3.37 Mostre que as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3.38 Determine uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos abaixo.

a)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

3.39 Seja V um espaço vetorial complexo e u, v e w vetores de V que são L.I. Mostre que os vetores $u+v, v+w$ e $u+w$ também são L.I.

3.40 Mostre que os polinômios $1, x-1$ e x^2-3x+1 formam uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2-5x+6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

3.41 Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,1,1,0)$ e $(1,1,2,1)$.

Capítulo 4

Matrizes

4.1 Matrizes Sobre um Corpo

Definição 4.1 Seja K um corpo e m, n inteiros positivos. Uma *matriz* m por n sobre K é uma tabela A com $m.n$ elementos agrupados da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

com $a_{ij} \in K, \forall ij$. Onde $m.n$ é a ordem de A.

Notação: $A = a_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.
Vamos denominar
$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ i-ésima linha
$A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ j-ésima coluna
e
$M_{m\times n}(K) = \{A : A = a_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$

Definição 4.2 i) Se $a_{ij} = 0, \forall ij$, então A é chamada de *matriz nula*.

ii) Se $m = n$, então A é chamada de *matriz quadrada de ordem* n.

iii) Se $m = n$ e

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$\forall ij$, então A é chamada de *matriz identidade* de ordem n (notação: $A = I_n$).

Obs: Em $M_{m\times n}(K)$, duas matrizes são iguais, ou seja, $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}, \forall ij$.

4.2 Operações de Matrizes

1. **Adição de matrizes**

   Sejam $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Definimos $C = A+B$ como sendo $C = c_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$, em que

   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

   Propriedades da adição

   i) $A + B = B + A, \forall A, B \in M_{m\times n}(K)$

      Demonstração:
      Sejam $D = A + B$ e $E = B + A$. Temos

      $$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = e_{ij}$$
      $$\therefore D = E$$

      ■

   ii) $(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in M_{m\times n}(K)$

      Demonstração:
      Sejam $D = (A + B) + C$ e $E = A + (B + C)$. Temos

      $$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$$
      $$\therefore D = E$$

      ■

2. **Multiplicação por escalar**

   Sejam $A \in M_{m\times n}(K)$ e $\alpha \in K$. Definimos

   $$\alpha A = \alpha a_{ij} = a_{ij}\alpha = A\alpha, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$$

Propriedades da multiplicação por escalar

i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
Demonstração:
Sejam $D=\alpha(A+B)$ e $E=\alpha A+\alpha B$.

$$d_{ij}=\alpha\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}=e_{ij}$$

■

ii) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
Demonstração:
Análogo. ■

3. **Produto interno ou produto escalar em K^n**

Sejam $u=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in K^n$ e $v=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in K^n$ definimos o produto interno em K^n como sendo

$$u.v=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

Notação: podemos escrever produto interno como

$$u.v \text{ ou } \langle u,v\rangle$$

Propriedades do produto interno

i) $u(v+w)=u.v+u.w$
Demonstração:
Sejam $u=(x_1,x_2,\ldots,x_n), v=(y_1,y_2,\ldots,y_n), w=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$

$$\begin{aligned}
u.(v+w) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n).(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)\\
&= x_1\left(y_1+z_1\right)+x_2\left(y_2+z_2\right)+\ldots+x_n\left(y_n+z_n\right)\\
&= x_1y_1+x_1z_1+x_2y_2+x_2z_2+\ldots+x_ny_n+x_nz_n\\
&= (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)+(x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n)\\
&= u.v+u.w
\end{aligned}$$

■

ii) $u.v = v.u, \forall u, v \in K^n$
Demonstração:
Sejam $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = v.u$$

■

4. **Multiplicação de matrizes**

Sejam $A = a_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ e $B = b_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant l$, ou seja, $A \in M_{m\times n}(K)$ e $B \in M_{n\times l}(K)$. Definimos $C = A.B$ da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} A_1B^1 & \cdots & A_1B^l \\ \vdots & & \vdots \\ A_mB^1 & \cdots & A_mB^l \end{bmatrix}$$

$C \in M_{m\times l}(K)$, onde $c_{ij} = A_iB^j$

Proposição 4.3 *Se $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times l}(K)$ e $C \in M_{n\times l}(K)$, então $A(B + C) = AB + AC$.*

Demonstração:
Sejam $D = A(B + C)$ e $\underbrace{AB}_{F} + \underbrace{AC}_{G}$.

$$\begin{aligned} d_{ij} &= A_i \cdot (B + C)^j \\ &= A_i \cdot \left(B^j + C^j\right) \\ &= A_i \cdot B^j + A_i \cdot C^j \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_{ij} &= f_{ij} + g_{ij} \\ &= A_iB^j + A_iC^j \end{aligned}$$

$$\therefore D = E$$

■

Proposição 4.4 *Se* $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times l}(K), C \in M_{l\times p}(K)$, *então*

$$A(BC) = (AB)C$$

Demonstração:
Sejam $D = A\underbrace{(BC)}_{F}$ e $E = \underbrace{(AB)}_{G}C$.

$$\begin{cases} d_{ij} = A_i \cdot F^j = A_i \cdot \left(B_1C^j, \ldots, B_nC^j\right) \\ e_{ij} = G_i \cdot C^j = \left(A_iB^1, \ldots, A_iB^l\right) \cdot C^j \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{ij} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \left(B_1C^j, \ldots, B_nC^j\right) \\ e_{ij} = \left(A_iB^1, \ldots, A_iB^l\right) \cdot (c_{1j}, \ldots, c_{lj}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{ij} = a_{i1}B_1C^j + \ldots + a_{in}B_nC^j \\ e_{ij} = A_iB^1c_{1j} + \ldots + A_iB^lc_{lj} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{ij} = a_{i1}\left(b_{11}, \ldots, b_{1l}\right) \cdot (c_{1j}, \ldots, c_{lj}) + \ldots + a_{in}\left(b_{n1}, \ldots, b_{nl}\right) \cdot (c_{1j}, \ldots, c_{lj}) \\ e_{ij} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{11}, \ldots, b_{n1})\, c_{1j} + \ldots + (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1l}, \ldots, b_{nl})\, c_{lj} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{ij} = a_{i1}\left(b_{11}c_{1j} + \ldots + b_{1l}c_{lj}\right) + \ldots + a_{in}\left(b_{n1}c_{1j} + \ldots + b_{nl}c_{lj}\right) \\ e_{ij} = \left(a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}b_{n1}\right) c_{1j} + \ldots + \left(a_{i1}b_{1l} + \ldots + a_{in}b_{nl}\right) c_{lj} \end{cases}$$

Note que

$$a_{i1}b_{11}c_{1j} + \ldots + a_{i1}b_{1l}c_{lj} = a_{i1}\left(b_{11}c_{1j} + \ldots + b_{1l}c_{lj}\right)$$
e
$$a_{in}b_{n1}c_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nl}c_{lj} = a_{in}\left(b_{n1}c_{1j} + \ldots + b_{nl}c_{lj}\right)$$
$$\therefore e_{ij} = d_{ij}$$

■

Exemplo 4.1 Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e I_n a matriz identidade.
Mostre que $AI_n = I_nA = A, \forall A$.

Solução:
Sabemos que

$$I_n = a_{ij}, a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Vamos mostrar que $AI_n = A$.
Seja $D = AI_n$ e $E = A$. Então,

$$\begin{aligned} d_{ij} &= A_i.I_n^j \\ &= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \overbrace{(0, \ldots, 1, \ldots, 0)}^{\text{coluna}} \\ d_{ij} &= a_{ij} \end{aligned}$$

e

$$e_{ij} = a_{ij}$$

Portanto, $D = E$ ou $AI_n = A$. □

Definição 4.5 Seja $A \in M_{n\times n}(K)$, A é dita *inversível* se existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(K)$ tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

Exemplo 4.2 Em $M_{2\times 2}(K)$, se $ad - bc \neq 0$, então $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível.

Solução:
De fato, considere

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Proposição 4.6 *Seja $A \in M_{n\times n}(K)$ inversível. Sua inversa A^{-1} é única.*

Demonstração:
Suponha que G e H são inversas de A. Então,

$$AG = GA = I_n \text{ e } AH = HA = I_n$$

como

$$AG = AH \Rightarrow A^{-1}(AG) = A^{-1}(AH)$$

como a multiplicação de matrizes é associativa, temos

$$\begin{aligned}&(A^{-1}A)G = (A^{-1}A)H\\ &\Rightarrow I_nG = I_nH\\ &\Rightarrow G = H\end{aligned}$$

■

Proposição 4.7 *Sejam $A, B \in M_{n\times n}(K)$ inversíveis. Então*

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demonstração:

(i) Seja $X = (A^{-1})^{-1}$. Então,

$$XA^{-1} = I_n$$

Mas $AA^{-1} = I_n$, então

$$X = A$$

(ii) Temos

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B\\ &= B^{-1}B\\ &= I_n\\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= AA^{-1}\\ &= I_n\\ \therefore B^{-1}A^{-1} &= (AB)^{-1}\end{aligned}$$

■

4.3 Operações Elementares Sobre as Linhas de uma Matriz

Definição 4.8 Seja $A \in M_{m\times n}(K)$ as seguintes operações sobre as linhas de A são chamadas elementares.

i) Trocar a posição de duas linhas.

ii) Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo.

iii) Substituir a linha A_i por $A_i + \alpha A_j$.

Definição 4.9 Uma matriz $E \in M_{n\times n}(K)$ é chamada *elementar* se E foi obtida de I_n por meio de uma única operação elementar.

Exemplo 4.3 Seja

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz foi obtida multiplicando a 2^a linha da matriz I_3 por 2.
Seja

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz foi obtida somando a 3^a linha da matriz I_3 com uma vez a 2^a linha da I_3.

O exemplo a seguir nos auxiliará na compreensão do próximo Teorema.

Exemplo 4.4 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde E é uma matriz elementar.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} A_1 \overset{\text{trocando}}{\underset{\text{as linhas}}{\leftarrow}} A_2 \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

□

Proposição 4.10 *Seja $A \in M_{n\times n}(K)$ e E uma matriz elementar, $E \in M_{n\times n}(K)$. Se aplicarmos em A a mesma operação usada para obter E, então obtemos EA.*

Demonstração:
Caso 1:
Operação: $I_{n(i)} \to I_{n(i)} + \alpha I_{n(j)}$ (i-ésima linha $+\alpha$ j-ésima linha)

$$\begin{aligned} (EA)_i &= E_i A \\ &= \left(I_{n(i)} + \alpha I_{n(j)}\right) A \\ &= I_{n(i)}A + \alpha I_{n(j)}A \\ &= (I_nA)_i + \alpha (I_nA)_j \\ (EA)_i &= A_i + \alpha A_j \end{aligned}$$

Se $k \neq i$, então

$$\begin{aligned} (EA)_k &= E_k A \\ &= I_{n(k)}A \\ &= (I_nA)_k \\ (EA)_k &= A_k \end{aligned}$$

Caso 2:
E é tal que

$$E_i = \alpha I_{n(i)}$$
$$E_k = I_{n(k)}, k \neq i$$

Vamos mostrar que $(EA)_i = \alpha A_i$ e $(EA)_k = A_k, \forall k \neq i$.
De fato,

$$(EA)_i = E_i A = \alpha I_{n(i)} A = \alpha (I_n A)_i = \alpha A_i$$

Se $k \neq i$

$$(EA)_k = E_k A = I_{n(k)} A = (I_n A)_k = A_k$$

■

Proposição 4.11 *Toda matriz elementar é inversivel.*

Demonstração:
Seja E matriz elementar e O a operação que transforma I_n em E, isto é, $O(I_n) = E$.
Seja O^{-1} tal que $O^{-1}(E) = I_n$.
Note que O^{-1} é uma operação elementar. Então, seja $E_1 = O^{-1}(I_n)$. Pela Prop. 4.10, temos

$$\begin{aligned} &O^{-1}(E) = O^{-1}(I_n)E \\ &I_n = E_1.E \end{aligned}$$

Falta mostrar que $E.E + 1 = I_n$. Pela Prop. 4.10, temos que $O(E_1) = O(I_n).E_1$, então

$$I_n = E.E_1$$

Portanto, $E_1 = E^{-1}$. ■

Teorema 4.12 *Seja $A \in M_{n\times n}(K)$ e suponha que existam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrizes elementares tais que*

$$E_k.\cdots.E_1.A = I_n$$

Então A é inversível e

$$E_k.\cdots.E_1 = A^{-1}$$

Demonstração:
Seja $B = E_k.\cdots.E_1.B$. Temos que B é inversível, pois é um produto de matrizes elementares (que são inversíveis). Além disso, $B = A^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} &BA = I_n \\ &\Rightarrow BAB = B \\ &\Rightarrow \left(B^{-1}B\right) AB = B^{-1}B \\ &\Rightarrow AB = I_n \end{aligned}$$

Portanto, $B = A^{-1}$.
Como $E_k.\cdots.E_1.A = I_n$, então

$$\begin{aligned}
&(E_k.\cdots.E_1.A)^{-1} = I_n\\
&\Rightarrow A^{-1}.E_1^{-1}.\cdots.E_k^{-1} = I_n\\
&\Rightarrow A^{-1}.E_1^{-1}.\cdots.E_{k-1}^{-1} = I_n.E_k\\
&\vdots\\
&\Rightarrow A^{-1} = I_n.E_k.\cdots.E_1\\
&\Rightarrow A^{-1} = E_k.\cdots.E_1.I_n
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.5 Calcule a matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução:
Completamos a matriz A com a matriz identidade, temos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & 4/8 & -1/8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & 4/8 & -1/8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/8 & 0 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 4/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & 4/8 & -1/8 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Capítulo 5

Transformações Lineares

5.1 Transformações Lineares

Definição 5.1 Sejam V e W espaços vetoriais sobre K. Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \to W$ que satisfaz as propriedades:

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)\,; \forall u, v \in V$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)\,; \forall \alpha \in K$ e $u \in V$

Exemplo 5.1 A função nula de V em W definida por $0(v) = 0, \forall v \in V$ é a transformação linear nula de V em W.

Solução:
Sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in K$.

$$\begin{array}{l} 0(v_1+v_2) = 0 = 0+0 = 0(v_1) + 0(v_2) \\ 0(\alpha v_1) = 0 = \alpha 0 = \alpha 0(v_1) \end{array}$$

$\square$

Exemplo 5.2 A função identidade de V em V definida por $I_v(v) = v, \forall v \in V$ é a transformação linear de V em V.

Solução:

Sejam $u, v \in V$ e $\alpha \in K$.

$$\begin{array}{l} I_v(u+v) = u+v = I_v(u) + I_v(v) \\ I_v(\alpha u) = \alpha u = \alpha I_v(u) \end{array}$$

$\square$

Exemplo 5.3 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$(x, y, z) \to T(x, y, z) = (x, 2x - z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Solução:

Para verificar que T é uma transformação linear, considere

$$\begin{aligned}
&\forall u, v \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\
u &= (x, y, z) \text{ e } v = (a, b, c) \\
u + v &= (x + a, y + b, z + c) \\
\beta u &= (\beta x, \beta y, \beta z)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
T(u + v) &= (x + a, 2(x + a) - (z + c)) \\
&= (x + a, 2x + 2a - z - c) \\
&= (x, 2x - z) + (a, 2a - c) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\beta u) &= (\beta x, 2(\beta x) - \beta z) \\
&= (\beta x, \beta(2x - z)) \\
&= \beta(x, 2x - z) \\
&= \beta T(u)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.4 Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$. Verifique se T é linear.

Solução:
Pela definição, temos que $T(1+2) = T(3) = 9$, mas $T(1)+T(2) = 1+4 = 5$.
Logo, $T(1 + 2) \neq T(1) + T(2)$.
Portanto, T não é linear. □

Exemplo 5.5 Seja V o espaço vetorial de polinômios na variável t sobre o corpo $\mathbb{R}$. Então a derivada define uma transformação linear

$$\begin{array}{ll} D: & P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}) \\ & f(t) \to D(f(t)) = f'(t), \forall f(t) \in P_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Dados

$$\begin{array}{l} f(t), g(t) \in P_n(\mathbb{R}) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n, a_i \in \mathbb{R} \\ g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n, b_i \in \mathbb{R} \end{array}$$

Solução:

Temos então que a derivada de

$$D(f(t) + g(t)) = D\left(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_n + b_n)t^n\right).$$

é

$$\begin{array}{rcl} D(f(t) + g(t)) & = & (a_1+b_1)+2(a_2+b_2)t+\ldots+n(a_n+b_n)t^{n-1} \\ & = & \left(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots + n a_n t^{n-1}\right) + \\ + \left(b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots + n b_n t^{n-1}\right) & & \\ & = & f'(t) + g'(t) \\ & = & D(f(t)) + D(g(t)) \end{array}$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que a derivada de

$$D(\alpha f(t)) = D\left(\alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 + \ldots + \alpha a_n t^n\right).$$

é

$$\begin{array}{rcl} D(\alpha f(t)) & = & \alpha a_1 + 2\alpha a_2 t + 3\alpha a_3 t^2 + \ldots + n\alpha a_n t^{n-1} \\ & = & \alpha\left(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots + n a_n t^{n-1}\right) \\ & = & \alpha f'(t) \\ & = & \alpha D(f(t)) \end{array}$$

□

Exemplo 5.6 Seja $T : I(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$, em que $I(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções reais integráveis, tal que $T(f) = \int f$.

Solução:

i) Sejam $f, g \in I(\mathbb{R})$.

$$T\left(f+g\right) = \int \left(f+g\right) = \int f + \int g = T(f) + T(g)$$

ii) Sejam $f \in I(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(\alpha f) = \int \alpha f = \alpha \int f = \alpha T(f)$$

Portanto, T é linear. □

O próximo exemplo é muito importante, pois mostra que toda matriz $m \times n$ está associada a uma transformação linear de R^n e R^m. Em outras palavras, podemos dizer que uma matriz produz uma transformação linear. A implicação inversa também é verdadeira, isto é, uma transformação linear de R^n e R^m pode ser representada por uma matriz $m \times n$.

Exemplo 5.7 Sejam $V = K^n$ e $W = K^m$ espaços vetoriais sobre o corpo K. Tomemos $A \in V$ uma matriz $m \times n$, ou seja, $A = M_{m \times n}$ e definimos uma transformação linear

$$\begin{array}{ll} T_A : & V \to W \\ & v \to T_A\left(v\right) = Av \end{array}$$

onde v é tomado como um vetor coluna

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Solução:

Sejam $u, v \in V$ e $\alpha \in K$. Das propriedades de operações de matrizes, temos:

$$\begin{array}{l} T_A(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v) \\ T_A(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha A(u) = \alpha T_A(u) \end{array}$$

□

Exemplo 5.8 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = xy$. Verifique se T é uma transformação linear.

Solução:

Tomemos $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 3) \Rightarrow u + v = (0, 5)$

$$\begin{array}{l} T(u+v) = T(0,5) = 0.5 = 0 \\ T(u) + T(v) = 1.2 + (-1).3 = -1 \\ \therefore T(u+v) \neq T(u) + T(v) \end{array}$$

Portanto, T não é transformação linear. □

Exemplo 5.9 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, y)$. Verifique se T é uma transformação linear.

Solução:

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} T(u+v) &= (2(x_1 + x_2), y_1 + y_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2x_1, y_1) + (2x_2, y_2) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha u &= (\alpha x, \alpha y) \\ T(\alpha u) &= T(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 xy \text{ e} \\ \alpha T(u) &= \alpha T(x, y) = \alpha xy \end{aligned}$$

Ou seja, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ somente para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ mas para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ a multiplicação falha.

Portanto, T não é transformação linear.

□

- **Propriedades**

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo K e $T : V \to W$ uma transformação linear de V em W.

1. $T(0_v) = 0_w$,onde 0_v e 0_w são os vetores nulos em V e W, respectivamente.

   Demonstração:

   Soma: $\begin{array}{l} T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \\ = T(0) + 0_w = T(0) + T(0) = 0 \end{array}$

   Produto: $T(0) = T\left(\underbrace{0}_{\text{escalar}} \; u\right) = 0T(u) = 0$ ∎

2. $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in K$

   Demonstração:

$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha u) + T(\beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

∎

3. $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$

   Demonstração:

$$T(-v) = T(-1v) = -1T(v) = -T(v)$$

∎

4. $T(u - v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in V$

   Demonstração:

$$T(u - v) = T(u + (-v)) = T(u) + T(-v) + T(u) - T(v)$$

∎

Teorema 5.2 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e sejam $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vetores quaisquer de W. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i, i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demonstração:

(i) Existência:

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, temos que para qualquer $v \in V$, existem escalares únicos $x_i \in K$, tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$$

Definimos

$$\begin{aligned} T: \quad & V \to W \\ & v \to T(v) = x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(v_i) = w_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

Devemos verificar se T é uma função. Sim. (Verificar).

(ii) Linearidade:

$$\begin{aligned} \forall v, w \in V, & \\ v &= x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n \\ w &= y_1v_1 + y_2v_2 + \ldots + y_nv_n \\ v + w &= (x_1 + y_1) v_1 + (x_2 + y_2) v_2 + \ldots + (x_n + y_n) v_n \\ \\ T(v + w) &= (x_1 + y_1) w_1 + (x_2 + y_2) w_2 + \ldots + (x_n + y_n) w_n \\ T(v + w) &= (x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n) + (y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots + y_nw_n) \\ &= T(v) + T(w) \\ \\ T(\alpha v) &= T(\alpha x_1v_1 + \alpha x_2v_2 + \ldots + \alpha x_nv_n) \\ &= T((\alpha x_1) v_1 + (\alpha x_2) v_2 + \ldots + (\alpha x_n) v_n) \\ &= (\alpha x_1) w_1 + (\alpha x_2) w_2 + \ldots + (\alpha x_n) w_n \\ &= \alpha (x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n) \\ &= \alpha T(v) \end{aligned}$$

(iii) Unicidade:

Suponha que existe $S : V \to W$ tal que $S(v_i) = w_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Devemos mostrar que $S(v) = T(v), \forall v \in V$. Logo, $\forall v \in V$,

$$\begin{aligned} v &= x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n \\ S(v) &= S(x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n) \\ &= x_1S(v_1) + x_2S(v_2) + \ldots + x_nS(v_n) \\ &= x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n \\ S(v) &= T(v) \end{aligned}$$

■

Exemplo 5.10 Encontre $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ linear tal que $T(1,0) = (1,1,1,1,2)$ e $T(0,1) = (2,3,1,0,3)$

Solução:
Note que $\{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \\ &T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) \\ &T(x,y) = x(1,1,1,1,2) + y(2,3,1,0,3) \\ &T(x,y) = (x+2y, x+3y, x+y, x, 2x+3y) \end{aligned}$$

□

5.1.1 Exemplos de Transformações Lineares

Veremos agora alguns dos principais exemplos de transformações lineares no plano.

Exemplo 5.11 Este exemplo é importante, pois a multiplicação de uma matriz por um vetor é linear.

Seja $A \in M_{n\times m}(K)$ e $T : K^m \to K^n$ dada por

$$T(x) = Ax, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in K^m$$

Solução:
Afirmamos que T é linear. De fato,
Sejam $x, y \in K^m$ e $\alpha \in K$.

$$\begin{aligned} T\left(x+y\right) &= A\left(x+y\right) \\ &= Ax + Ay \\ &= T(x) + T(y) \\ T\left(\alpha x\right) &= A\left(\alpha x\right) \\ &= \alpha Ax \\ &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

Portanto, T é linear. □

Exemplo 5.12 **Rotação** de um ângulo qualquer em torno da origem em $\mathbb{R}^2$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$.

$$\begin{aligned} R_\theta : &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto R_\theta(v) \end{aligned}$$

onde $v = (x, y)$ e $R_\theta(v) = (x', y')$.
A partir da Fig. 5.1, temos que

$$\begin{cases} x = |v| \cos\alpha \\ y = |v| \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \tag{5.1}$$

e

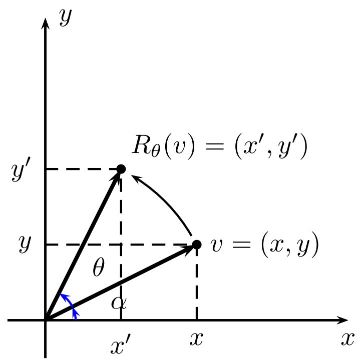


Figura 5.1: Rotação de vetores.

$$\begin{cases} x' = |v| \cos(\alpha + \theta) \\ y' = |v| \operatorname{sen}(\alpha + \theta) \end{cases} \tag{5.2}$$

Lembrando das relações trigonométricas para seno e cosseno da soma de dois ângulos as Eq. 5.2 transformam-se em

$$\begin{cases} x' = |v| (\cos\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta) \\ y' = |v| (\operatorname{sen}\alpha \cos\theta + \cos\alpha \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = |v| \cos\alpha \cos\theta - |v| \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta \\ y' = |v| \cos\alpha \operatorname{sen}\theta + |v| \operatorname{sen}\alpha \cos\theta \end{cases}$$

A partir das Eq. 5.1, obtemos

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \end{cases} \tag{5.3}$$

Escrevendo como o produto de uma matriz por um vetor, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Portanto, $R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$.
Pelo Exemplo 5.11, T é linear.

Exemplo 5.13 Projeção ortogonal de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ sobre uma reta $y = ax, a \in \mathbb{R}$.

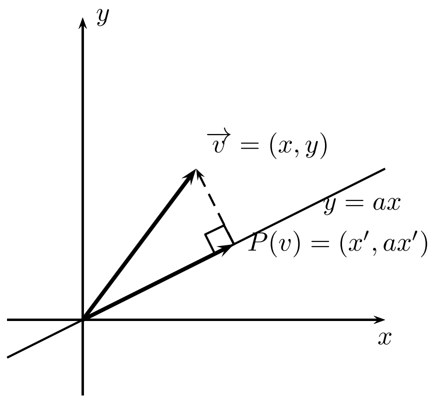


Figura 5.2: Projeção sobre a reta.

$$
\begin{aligned}
P :\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto P(x, y) = (x', y')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|v|^2 = |P(v)|^2 + |v - P(v)|^2 \\
&x^2 + y^2 = (x')^2 + a^2(x')^2 + (x - x')^2 + (y - ax')^2 \\
&\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = (x')^2 + a^2(x')^2 + \cancel{x^2} - 2xx' + (x')^2 + \cancel{y^2} - 2ayx' + a^2(x')^2 \\
&2xx' + 2ayx' = 2(x')^2 + 2a^2(x')^2 \\
&2x'(x + ay) = 2(x')^2\left(1 + a^2\right)
\end{aligned}
$$

Se $x' \neq 0$, temos que $\overrightarrow{v}$ não é ortogonal Ã reta, então

$$
\begin{aligned}
x + ay &= x'\left(1 + a^2\right) \\
x' &= \frac{1}{1 + a^2}x + \frac{a}{1 + a^2}y
\end{aligned}
$$

Como $y' = ax'$, temos

$$y' = \frac{a}{1+a^2}x + \frac{a^2}{1+a^2}y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Pelo Exemplo 5.11, T é linear.

Exemplo 5.14 Baseado no exercício anterior qual a projeção do vetor $\overrightarrow{v} = (3,5)$ sobre a bissetriz dos quadrados ímpares?

Solução:
Seja $P(v) = (x', y')$. Como a equação da reta bissetriz é $y = 1x$, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (x', y') = (4, 4)$$

Veja a Fig. 5.3.

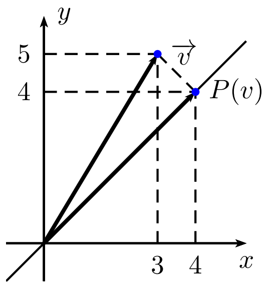


Figura 5.3: Projeção de v em $y = x$.

□

Exemplo 5.15 **Reflexão** de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ em torno de uma reta $y = ax, a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto R(v) = v' \end{aligned}$$

onde $v = (x, y)$ e $R(v) = (x', y')$.

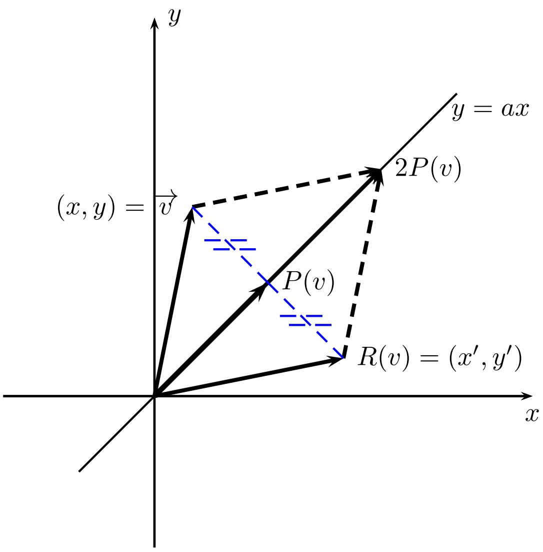


Figura 5.4: Reflexão em torno da reta.

A reta $y = ax$ é a bissetriz do ângulo entre v e $R(v)$ ou é a reta perpendicular Ã reta que passa por v e $R(v)$.

Da Fig. 5.4, temos:

$$2P(v) = R(v) + v$$

$$R(v) = 2P(v) - v$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & \dfrac{a^2-1}{1+a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Pelo Exemplo 5.11, T é linear.

Exemplo 5.16 Reflexão em torno do eixo x.
Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T\,(x,y) := (x,-y)$$

ou

$$\begin{array}{rl} T: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

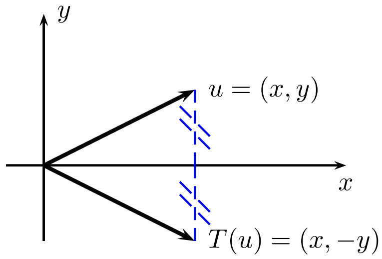


Figura 5.5: Reflexão em torno do eixo x.

Também podemos considerar a **reflexão em torno do eixo** y definida por

$$T\,(x,y) := (-x,y)$$

Exemplo 5.17 Reflexão na origem.
Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T\,(x,y) := (-x,-y)$$

ou

$$\begin{array}{rl} T: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

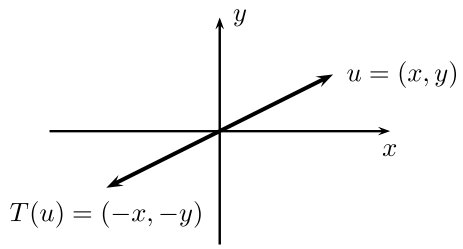


Figura 5.6: Reflexão na origem.

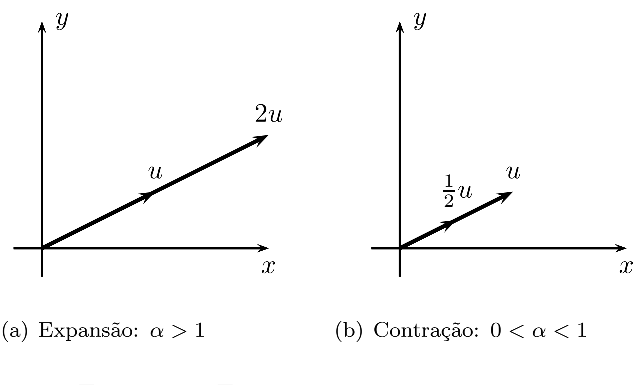
Exemplo 5.18 Expansão ou Contração
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\,(x, y) := \alpha\,(x, y)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Também podemos escrever a transformação na forma matricial.

$$\begin{array}{rl} T: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

Se $\alpha > 1$, T é uma *expansão* ou *dilatação.*
Se $0 < \alpha < 1$, T é uma *contração.*
A figura 5.7 mostra o vetor $T_1(u) = 2u$ e $T_2(u) = \frac{1}{2}u$. Uma dilatação estica um vetor, enquanto uma contração o encurta.



(a) Expansão: $\alpha > 1$ (b) Contração: $0 < \alpha < 1$

Figura 5.7: Expansão ou contração

Também podemos considerar essa transformação para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Exemplo 5.19 Cizalhamento horizontal

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) := (x + \alpha y, y)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Ou

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Um cizalhamento horizontal move o ponto (x, y) em uma direção paralela ao eixo x.

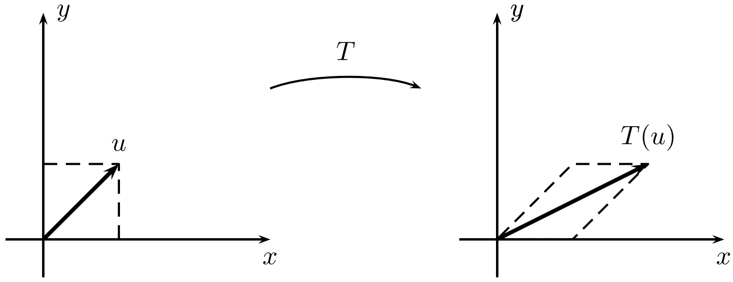


Figura 5.8: Cizalhamento horizontal.

Também podemos considerar o cizalhamento vertical.

Exemplo 5.20 Rotação de um ângulo θ em torno do eixo z em $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto T(x, y, z) = (x', y', z') \end{aligned}$$

A partir da Fig. 5.9, temos

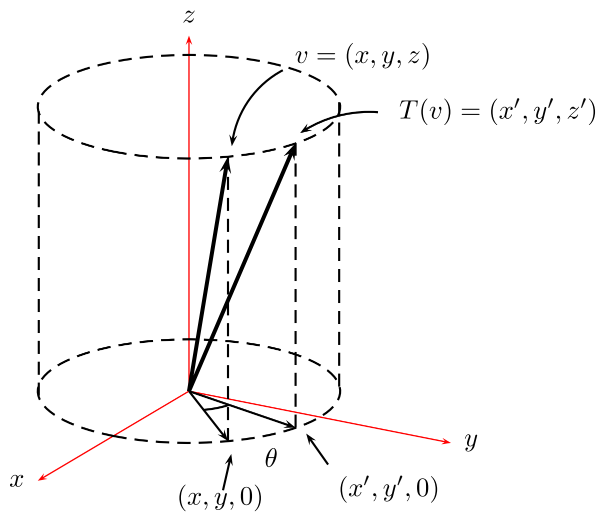


Figura 5.9: Rotação de vetores em $\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta \\
y' &= x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\,\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

Portanto, $T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta, x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta, z)$.
Pelo Exemplo 5.11, T é linear.

5.2 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição 5.3 (Núcleo) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O ***núcleo*** de T é o subconjunto de V dado por

$$\ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Definição 5.4 (Imagem) Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e $T : V \to W$ uma transformação linear. A ***imagem*** de T é o subconjunto de W dado por

$$Im\,(T) = \{w \in W; w = T\,(v) \text{ para algum } v \in V\}\,.$$

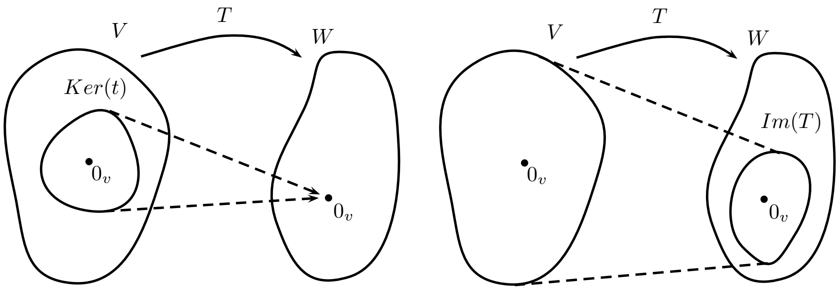


Figura 5.10: Núcleo e Imagem

Teorema 5.5 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então, $Ker\,(T)$ é um subespaço de V e $Im\,(T)$ é um subespaço de W.*

Demonstração:

(a) Como $T(0) = 0$, temos $0 \in Im(T)$. Suponhamos agora $w, w' \in Im(T)$ e $\alpha, \beta \in K$. Como w e w' pertencem Ã imagem de T, existem vetores $v, v' \in V$ tais que $T(v) = w$ e $T(v') = w'$.

Então $T(\alpha v + \beta v') = \alpha T(v) + \beta T(v') = \alpha w + \beta w' \in Im(T)$

Assim, a imagem de T é um subespaço de W.

(b) Como $T(0) = 0$, temos que $0 \in Ker(T)$. Suponhamos agora $v, w \in Ker(T)$ e $\alpha,\beta \in K$. Como v e w pertencem ao núcleo de T,

$T(v) = 0$ e $T(w) = 0$. Assim

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 \text{ e } \alpha v + \beta w \in Ker(T)$$

Assim, o núcleo de T é um subespaço de V.

■

Exemplo 5.21 Seja a transformação linear

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) \to T(x, y, z) = (x, 2y, 0) \end{aligned}$$

Verifique se T é mesmo uma transformação linear.

Solução:

(i) Sejam $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, temos que: $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, então:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= (x_1 + x_2, 2(y_1 + y_2), 0) \\ &= (x_1, 2y_1, 0) + (x_2, 2y_2, 0) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

E seja $\alpha \in \mathbb{R}; \alpha u = (ax_1, ay_1, az_1)$, então:

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= (\alpha x_1, 2\alpha y_1, 0) \\ &= \alpha (x_1, 2y_1, 0) \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

Portanto, T é transformação linear.

(ii) Núcleo de T.

$$\begin{gathered} Ker(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (0, 0, 0)\right\} \\ Ker(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\right\} \\ Ker(T) = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1); z \in \mathbb{R}\} \text{ ou} \\ Ker(T) = [(0, 0, 1)] \end{gathered}$$

(iii) Imagem de T.

$$\begin{aligned} &Im(T) = \left\{T(x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &Im(T) = \{(x, 2y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \\ &Im(T) = \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \text{ ou} \\ &Im(T) = [(1, 0, 0), (0, 2, 0)] \end{aligned}$$

Ainda, como

$$\begin{gathered} \begin{cases} T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ T(0, 1, 0) = (0, 2, 0) \\ T(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \end{cases} \\ Im(T) = [T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)] \end{gathered}$$

Como $B = \{(1,0,0),(0,2,0)\}$ é L.I. B é base e $\dim(Im(T)) = 2$.

Pelo mesmo motivo $\dim(Ker(T)) = 1$

□

Obs: Definimos $posto(T) = \dim Im(T)$ e a $nulidade(T) = \dim Ker(T)$.

Exemplo 5.22 Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. Temos que T é sobrejetora ou T é a transformação nula.

Teorema 5.6 *Sendo $T : U \to V$ uma transformação linear, então*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$$

Demonstração:
Faça como exercício por indução sobre n. ■

5.3 Operadores Invertíveis

Definição 5.7 Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e $T : V \to W$ uma transformação linear.

(i) Dizemos que T *é injetora*, se $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v, \forall u, v \in V$.

(ii) Dizemos que T *é sobrejetora*, se $\forall w \in W, \exists v \in V; w = T(v)$, ou seja, $Im(T) = w$.

(iii) Dizemos que T *é bijetora*, se T é injetora e sobrejetora.

(iv) Dizemos que T *é não-singular*, se $Ker(T) = \{0\}$. Caso contrário, dizemos que T é *singular*.

Proposição 5.8 *Sejam U e V espaços vetoriais. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear bijetora, então existe a inversa $T^{-1} : V \to U$ e T^{-1} é linear.*

Demonstração:
Seja $v \in V$. Como T é sobrejetora, então $\exists u \in U$ tal que $T(u) = v$. Defina $T^{-1} : V \to U$ dada por $T^{-1}(v) = u$.

Mostraremos que T^{-1} é linear.

Sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como T é sobrejetora, $\exists u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$. Temos,

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2$$

Logo,

$$T^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2)$$

Note que $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1) = \alpha v_1$. Assim,

$$T^{-1}(\alpha v_1) = \alpha u_1 = \alpha T^{-1}(v_1)$$

Portanto, T^{-1} é linear. $\blacksquare$

Teorema 5.9 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então, T é não-singular se, e somente se, T é injetora.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Suponha que T é não-singular ($Ker(T) = \{0\}$). Sejam $u, v \in V$ e se

$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0$, pela 4^a propriedade de transformação linear, temos:

$T(u - v) = 0 \Rightarrow u - v \in Ker(T) = \{0\} \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$, ou seja, T é injetora.

$\Leftarrow$) Suponha que T é injetora. Dado qualquer $u \in Ker(T)$, então $T(u) = 0 = T(0) \Rightarrow u = 0 \quad \Rightarrow Ker(T) = \{0\}$, ou seja, T é não-singular. $\blacksquare$

Proposição 5.10 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se,* $\ker T = \{0\}$. [1]

Demonstração:

($\Rightarrow$) Note que $\{0\} \subset \ker T$, logo resta mostrar que $\ker T \subset \{0\}$. Seja $u \in \ker T$. Logo, $T(u) = 0 = T(0)$.

Mas, T é injetora, então $u = 0$.

Portanto, $\ker T = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Sejam $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$.

Logo, $T(u_1) - T(u_2) = 0$.

Como T é linear, $T(u_1 - u_2) = 0$.

Portanto, $u_1 - u_2 \in \ker T = \{0\}$.

Logo, $u_1 - u_2 = 0$, o que implica que $u_1 = u_2$.

Portanto, T é injetora. $\blacksquare$

Proposição 5.11 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre K e $T : U \to V$ uma transformação linear e injetora. Se, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in U$ é L.I., então $T(B) = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\} \in V$ é L.I.*

[1] Esta proposição é semelhante ao Teorema 5.9.

Demonstração:
Seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ L.I. e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tais que

$$\begin{aligned} &\alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n) = 0 \\ &\Rightarrow T(\alpha_1 u_1) + \ldots + T(\alpha_n u_n) = 0 \\ &\Rightarrow T\left(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n\right) = 0 \end{aligned}$$

Então, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \in \ker T$, logo

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

como B é L.I., temos que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Portanto, $T(B) = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ é L.I.

■

Exemplo 5.23 Considere U e V espaços vetoriais e $T : U \to V$ transformação linear dada por $T(u) = 0$. Temos que $\ker T = U$.

Temos ainda que, T é injetora se, e somente se, $U = \{0\}$.

Por outro lado, T é sobrejetora se, e somente se, $V = \{0\}$.

Exemplo 5.24 Considere U um espaço vetorial e $T : U \to U$ transformação linear dada por $T(u) = u, \forall u \in U$. Temos que T é bijetora e que $T^{-1} = T$. $\left(T^{-1} \circ T = I_d\right)$.

Exemplo 5.25 Considere $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\left(a, b, c\right) := \left(a, b + c\right), \forall \left(a, b, c\right) \in \mathbb{R}^3$$

Verifique se T é injetora e sobrejetora.

Solução:
Usando a Proposição 5.10, temos

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : T\left(a, b, c\right) = (0, 0)\right\} = \\ &= \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \left(a, b + c\right) = (0, 0)\right\} = * \end{aligned}$$

Como $a = 0; c = -b$, temos

$$\begin{aligned} * &= \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \left(0, b, -b\right), b \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b\left(0, 1, -1\right), b \in \mathbb{R}\right\} = [(0, 1, -1)] \end{aligned}$$

Portanto, T não é injetora.

Mas, T é sobrejetora, pois
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}&T\left(a,b,c\right)=\left(x,y\right)\\&\left(a,b+c\right)=\left(x,y\right)\\&\Rightarrow a=x, b+c=y\end{aligned}$$

□

Teorema 5.12 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre K e $T:V\to W$ uma transformação linear. Então,*

$$\dim V=\dim KerT+\dim ImT$$

Demonstração:

Seja $\dim V=n$. Como $Ker\left(T\right)$ é um subespaço de V, pelo Teorema 3.10 do completamento, podemos completar uma base $B_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}\,;k\leqslant n$ de $Ker\left(T\right)$ até formar uma base $B_2=\{v_1,v_2,\ldots,v_k,v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_n\}$ de V.

Afirmamos que $B=\{T\left(v_{k+1}\right),T\left(v_{k+2}\right),\ldots,T\left(v_n\right)\}$ é uma base de $Im\left(T\right)$.

De fato:

Vamos mostrar que B gera $\mathrm{Im}\left(T\right)$

(i) Dado qualquer $w\in\mathrm{Im}\left(T\right),\exists v\in V, w=T\left(v\right)$.

Mas v é combinação linear dos elementos de B_2, ou seja, existem

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n\in K$ tais que

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k+\alpha_{k+1}v_{k+1}+\alpha_{k+2}v_{k+2}+\ldots+\alpha_nv_n,$$

então

$$\begin{aligned}&T(v)=T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k+\alpha_{k+1}v_{k+1}+\alpha_{k+2}v_{k+2}+\ldots+\alpha_nv_n)=w\\&T(v)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)+\ldots+\alpha_kT(v_k)+\alpha_{k+1}T(v_{k+1})+\alpha_{k+2}T(v_{k+2})+\\&+\ldots+\alpha_nT(v_n)=w\end{aligned}$$

Como B_1 está no núcleo $T\left(v_1\right)=T\left(v_2\right)=\ldots=T\left(v_k\right)=0$ e w é combinação linear de

$B=\{T\left(v_{k+1}\right),T\left(v_{k+2}\right),\ldots,T\left(v_n\right)\}$, ou seja,

$Im\left(T\right)=[T\left(v_{k+1}\right),T\left(v_{k+2}\right),\ldots,T\left(v_n\right)]$, ou seja, B gera $\mathrm{Im}\left(T\right)$.

(ii) Sejam $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n \in K$, vamos mostrar que B é L.I.

$$\begin{array}{l} \beta_{k+1}T(v_{k+1}) + \beta_{k+2}T(v_{k+2}) + \ldots + \beta_n T(v_n) = 0 \\ T(\beta_{k+1}v_{k+1} + \beta_{k+2}v_{k+2} + \ldots + \beta_n v_n) = 0 \\ \beta_{k+1}v_{k+1} + \beta_{k+2}v_{k+2} + \ldots + \beta_n v_n \in Ker(T) \end{array}$$

Além disso, como B_1 é base de $\ker(T)$, existem $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in K$, tais que

$$\underbrace{\beta_{k+1}v_{k+1} + \beta_{k+2}v_{k+2} + \ldots + \beta_n v_n = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_k v_k}_{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_k v_k + (-\beta_{k+1})v_{k+1} + (-\beta_{k+2})v_{k+2} + \ldots + (-\beta_n)v_n = 0}$$
$$\in [B_2]$$

Como B_2 é uma base de V, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = \beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \ldots = \beta_n = 0$

Portanto, $\Rightarrow B = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), \ldots, T(v_n)\}$ é L.I.

Logo, B é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

Então,

$$\begin{array}{c} \dim V = n = k + (n-k) \\ \dim V = \dim Ker(T) + \dim Im(T) \end{array}$$

■

Exemplo 5.26 Existe $T : \mathbb{R}^{31} \to \mathbb{R}^{30}$ injetora?

Solução:
Não. Pois se existisse teríamos

$$\dim \ker T = 0$$
$$31 = \dim \mathrm{Im}\, T$$

Absurdo. □

Exemplo 5.27 Existe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sobrejetora?

Solução:
Não. Pois se existisse teríamos $\dim \mathrm{Im}\, T = 3$, então

$$\dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\, T$$
$$\dim \ker T + 3 = 2$$

Absurdo. □

Exemplo 5.28 Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é sobrejetora?

Solução:
Não. Pois $T(x, y, z) = 0, \forall (x, y, z)$. □

Corolário 5.13 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K com $\dim V = \dim W$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Suponha que T é injetora. Pela Prop. 5.11, $Ker\,(T) = 0$. Pelo Teorema 5.12, $\dim V = \dim \overbrace{Ker\,(T)}^{=0} + \dim Im\,(T) = \dim Im\,(T) = \dim W$

$\Rightarrow Im\,(T) = w$, ou seja, T é sobrejetora.

$\Leftarrow$) Suponha que T é sobrejetora. Então, $Im\,(T) = w$ e $\dim Im\,(T) = \dim W = \dim V$. Pelo Teorema 5.12, $\dim V = \dim Ker\,(T) + \dim Im\,(T) = \dim Ker\,(T) + \dim V$

$\Rightarrow \dim Ker\,(T) = 0 \Rightarrow Ker\,(T) = \{0\}$, então T é não-singular, ou seja, T é injetora.

■

Exemplo 5.29 Considere M_2 e $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Vamos construir uma aplicação $T : M_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker T = A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $\operatorname{Im} T = B := \{(a, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Solução:
Primeiramente notemos que

$$A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

e que

$$B = [(1, 2, 1), (0, 0, 1)]$$

Uma base de M_2 é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Defina $T : M_2 \to \mathbb{R}^3$, por

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,2,1)$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,1)$$

Temos que T é linear. Verifique.

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker T$. Logo,

$$(0,0,0) = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T\left(a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \underbrace{a\,T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0} + bT\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{d\,T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{0} =$$
$$= b\,(1,2,1) + c\,(0,0,1) = (b, 2b, b+c)$$
$$\Rightarrow b = 0, c = 0$$

Logo, $\ker T = A$.

Seja $(x,y,z) \in \operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}^3$. Logo, $\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2$ tal que

$$\underbrace{T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = (x,y,z)$$

$$(b, 2b, b+c) = b\,(1,2,1) + c\,(0,0,1) \in [B]$$
$$\therefore \operatorname{Im} T = B$$

$\square$

Exemplo 5.30 Considere $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$. Temos que V e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$. Vamos determinar uma base de V, W, $V+W$ e $V \cap W$.

Solução:

i) Temos

$$\begin{aligned}
V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x+y\right\} = \\
&= \{(x,y,x+y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{x\,(1,0,1) + y\,(0,1,1) : x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1)\,,(0,1,1)]
\end{aligned}$$

Como $B_1 = \{(1,0,1)\,,(0,1,1)\}$ é L.I., segue que B_1 é uma base de V.

ii) Temos

$$\begin{aligned}
W &= \left\{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 : x,z \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \{x\,(1,1,0) + z\,(0,0,1) : x,z \in \mathbb{R}\} = \\
&= [(1,1,0)\,,(0,0,1)]
\end{aligned}$$

Como $B_2 = \{(1,1,0)\,,(0,0,1)\}$ é L.I., segue que B_2 é uma base de W.

iii) Temos que $B_1 \cup B_2$ gera $V+W$. Precisamos ver se $B_1 \cup B_2$ é L.I. Fazendo uma matriz com as bases dos itens anteriores e escalonando, temos, por linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isto implica que $\{(1,0,1)\,,(0,1,1)\,,(0,0,1)\}$ é L.I., portanto, é uma base de $V+W$.

iv) Temos, pelo Teorema 3.18, pág. 70, que

$$\begin{aligned}
&\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) \\
&\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) \\
&\dim(V \cap W) = 2 + 2 - 3 \\
&\dim(V \cap W) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow V \cap W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0 \text{ e } x = y\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{z}{2} \text{ e } x = \frac{z}{2}\right\} = \\
&= \left\{\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right] = [(1,1,2)]
\end{aligned}$$

Portanto, $\{(1,1,2)\}$ é uma base de $V \cap W$.

$\square$

5.4 Composição

Definição 5.14 Sejam U, V e W espaços vetoriais finitamente gerados sobre K com $T : U \to V$ e $S : V \to W$ transformações lineares.

Definimos a composição por:

$$\begin{array}{rl} S \circ T : & U \to W \\ & u \to (S \circ T)(u) = S(T(u)), \forall u \in U \end{array}$$

Afirmamos que $S \circ T$ é linear.

Demonstração:

$$\begin{array}{rcl} \forall u_1, u_2 \in U \text{ e } \alpha \in K & & \\ (S \circ T)(u_1 + u_2) & = & S(T(u_1 + u_2)) \\ & = & S(T(u_1) + T(u_2)) \\ & = & S(T(u_1)) + S(T(u_2)) \\ & = & (S \circ T)(u_1) + (S \circ T)(u_2) \\ (S \circ T)(\alpha u_1) & = & S(T(\alpha u_1)) \\ & = & S(\alpha T(u_1)) \\ & = & \alpha(S(T(u_1))) \\ & = & \alpha(S \circ T)(u_1) \end{array}$$

Quando $T \in L(v, v), T : v \to v$ é linear.
Definimos:

$$\begin{array}{ll} T^0 = I & \\ T^1 = T & \\ T^2 = T \circ T & \underbrace{V \xrightarrow{T} V \xrightarrow{T} V}_{T^2 = T \circ T : V \to V} \\ \vdots & \\ T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{\text{n vezes}} & \end{array}$$

■

Teorema 5.15 *Sejam* $T, T' \in L(U,V)$ *e* $S, S' \in L(U,W)$. *Então:*

(i) $S \circ (T+T') = (S \circ T) + (S \circ T')$ $\quad \underbrace{U \xrightarrow{T+T'} V \xrightarrow{S} W}_{S\circ(T+T')}$

(ii) $(S+S') \circ T = (S \circ T) + (S' \circ T)$ $\quad \underbrace{U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S+S'} W}_{(S+S')\circ T}$

(iii) $\alpha(S \circ T) = (\alpha S) \circ T = S \circ (\alpha T)$ $\quad \underbrace{U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W}_{S\circ T}$

Demonstração:

Exercício.

■

5.5 Transformações Lineares Inversas

Definição 5.16 (Inversa Ã direita) Uma inversa Ã direita de T é uma transformação $S : V \to U$ tal que

$$TS(v) = v, \forall v \in V$$

isto é, $TS = I_v$.

Exemplo 5.31 Sejam

$$\begin{array}{lcl} T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 & \text{e} & S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) := (x,y) & & S(x,y) := (x,y,ax+by) \end{array}$$

Solução:

$$\begin{aligned} TS(x,y) &= T(S(x,y)) \\ &= T(x,y,ax+by) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Portanto, $TS(x,y) = (x,y)$. E S é uma inversa Ã direita de T. □

Proposição 5.17 *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais de dimensão finita sobre* K *e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.* T *possui uma inversa Ã direita se, e somente se,* T *é sobrejetora.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Se $T : U \to V$ possui uma inversa Ã direita, então existe $S : V \to U$ tal que $TS(v) = v, \forall v \in V$.

Assim, dado $v \in V$, seja $u = S(v)$. Temos

$$\begin{aligned} T(u) &= T(S(v)) \\ &= TS(v) \\ &= v \end{aligned}$$

Portanto, T é sobrejetora.

$\Leftarrow$) Sendo T sobrejetora, seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ uma base de V. Existem $u_1, u_2, \ldots, u_m \in U$ tais que

$$\begin{aligned} &T(u_1) = v_1 \\ &T(u_2) = v_2 \\ &\vdots \\ &T(u_m) = v_m \end{aligned}$$

Precisamos definir $S : V \to U$ que satisfaça $TS(v) = v, \forall v \in V$.

Seja $S : V \to U$ a única transformação definida por

$$\begin{aligned} &S(v_1) = u_1 \\ &S(v_2) = u_2 \\ &\vdots \\ &S(v_m) = u_m \end{aligned}$$

Dado $v \in V$, temos

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \\ TS(v) &= TS(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m) \\ &= T(S(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m)) \\ &= T(a_1S(v_1) + a_2S(v_2) + \ldots + a_mS(v_m)) \\ &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_mT(u_m) \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \\ TS(v) &= v \end{aligned}$$

Portanto, T possui inversa Ã direita. ■

Definição 5.18 (Inversa Ã esquerda) Uma transformação $T : U \to V$ possui uma inversa Ã esquerda se existir $S : V \to U$ linear tal que $ST : U \to U$ satisfaça

$$ST(u) = u, \forall u \in U$$

Exemplo 5.32 Sejam

$$\begin{array}{lcl} T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 & \text{e} & S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) := (x,y,0) & & S(x,y,z) := (x+az, y+bz) \end{array}$$

Solução:

$$\begin{aligned} ST(x,y) &= S(T(x,y)) \\ &= S(x,y,0) \\ &= (x+a.0, y+b.0) \\ ST(x,y) &= (x,y) \end{aligned}$$

Portanto, $ST(u) = u, \forall u \in \mathbb{R}^2$.
Pergunta: T é injetora?

$$\begin{aligned} &T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2) \\ &\Rightarrow (x_1,y_1,0) = (x_2,y_2,0) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2 \end{aligned}$$

Portanto, T é injetora.

□

Proposição 5.19 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre K e $T : U \to V$ uma transformação linear. T possui uma inversa Ã esquerda se, e somente se, T é injetora.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Se T possui inversa Ã esquerda, seja $S : V \to U$ uma inversa. Sejam $u_1, u_2 \in U$.

$$\begin{aligned} &T(u_1) = T(u_2) \\ &\Rightarrow S(T(u_1)) = S(T(u_2)) \\ &\Rightarrow ST(u_1) = ST(u_2) \\ &\Rightarrow u_1 = u_2 \end{aligned}$$

Portanto, T é injetora.

$\Leftarrow$) Suponha $T : U \to V$ injetora e seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U. Como T é injetora, $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ são L.I.

Sejam $A = \{T(u_1), \ldots, T(u_n), w_1, \ldots, w_s\}$ base de V e $S : V \to U$ definida por

$$\begin{aligned}
&S(T(u_1)) = u_1\\
&\vdots\\
&S(T(u_n)) = u_n\\
&S(w_i) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, s
\end{aligned}$$

Note que $ST : U \to U$.

Seja $u \in U$, então pela base de U, temos

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

Então

$$\begin{aligned}
ST(u) &= S(T(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n))\\
&= S(a_1T(u_1) + \ldots + a_nT(u_n))\\
&= S(a_1T(u_1)) + \ldots + S(a_nT(u_n))\\
&= a_1S(T(u_1)) + \ldots + a_nS(T(u_n))\\
&= a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n\\
ST(u) &= u
\end{aligned}$$

Portanto, S é inversa Ã esquerda. ■

Definição 5.20 Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre K e $T : U \to V$ uma transformação linear. T é dita *invertível* se existe $S : V \to U$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
&TS(v) = v, \forall v \in V \text{ e}\\
&ST(u) = u, \forall u \in U
\end{aligned}$$

Obs:

i) Note que S e T são ambas injetora e sobrejetora.

ii) $TS : V \to V$ e $ST : U \to U$.

iii) notação: $S = T^{-1}$.

5.6 Isomorfismo

Definição 5.21 Sejam U e V espaços vetoriais sobre K e $T : U \to V$ uma transformação linear. Dizemos que T é um *isomorfismo* se T for ***invertível*** (*bijetora*). Neste caso, dizemos que U e V são *isomorfos* e escrevemos $U \cong V$.

Teorema 5.22 *Todo espaço vetorial V sobre K com $\dim V = n$ é isomorfo a K^n.*

Demonstração:
Como $\dim V = n$, temos que V possui uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Além disso, $\forall v \in V$, existem escalares únicos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

definimos

$$\begin{aligned} T : \quad & K^n \to V \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v \end{aligned}$$

(i) Linearidade:

$$\begin{array}{l} \forall x, y \in K^n \text{ e } \alpha \in K \\ \begin{cases} x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \\ T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = v \end{array}$$

Onde

$$\begin{aligned} v &= (x_1 + y_1) v_1 + (x_2 + y_2) v_2 + \ldots + (x_n + y_n) v_n \\ T(x + y) &= (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) + (y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n) \\ T(x + y) &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = v \\ &= (\alpha x_1) v_1 + (\alpha x_2) v_2 + \ldots + (\alpha x_n) v_n \\ &= \alpha (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

(ii) Núcleo:

Pelo Colorário 5.13, $Ker(T) = 0$.

Portanto, T é injetora e sobrejetora.

Portanto, T é bijetora, ou seja, T é isomorfo.

■

Teorema 5.23 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K de dimensão finita. Então*

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

Demonstração:
$\Rightarrow$) Suponha que $V \cong W$. Então existe $T : V \to W$ linear e bijetora.

$$\Rightarrow Ker(T) = \{0\} \text{ e } Im(T) = W.$$

Pelo Teorema 5.12 do Núcleo e da Imagem, $\dim V = \dim Ker(T) + \dim Im(T)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \dim V = \dim Im(T) = \dim W \ \text{ (pois é sobrejetora)} \\ &\Rightarrow \dim V = \dim W. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Suponha que $\dim V = \dim W$.
Sejam $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ uma base de W.
Pelo Teorema 5.2, pág. 110, existe uma única transformação linear tal que

$$\begin{aligned} T: \quad & V \to W \\ & v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \to T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \end{aligned}$$

Calculemos o $Ker(T) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i ; T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0 \right\}$

$$\begin{aligned}
& T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0 \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0 \\
& \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow Ker\,(T) = \{0\}
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 5.13, T é injetora.
Por hipótese $\dim V = \dim W$, então T é sobrejetora, ou seja, T é bijetora.
Portanto, $V \cong W$.

■

Teorema 5.24 *Se T é um isomorfismo de U em V, então, $T^{-1} : V \to U$ também é um isomorfismo.*

Demonstração:
Temos que T^{-1} é uma transformação linear. Precisamos mostrar que T^{-1} é bijetora.
Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T^{-1}(v_1) = T^{-1}(v_2)$.
Como T é sobrejetora, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$.
Pela definição de T^{-1}, temos que, $T^{-1}(v_1) = u_1$ e $T^{-1}(v_2) = u_2$.
Logo, $u_1 = u_2$. Como T é injetora, temos que $v_1 = v_2$.
Então, T^{-1} é injetora.
Logo, T^{-1} é bijetora, pois, $\dim U = \dim V$. ■

Exemplo 5.33 Temos que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4, P_3(\mathbb{R})$ são todos de dimensão 4. Mostre que são isomorfos entre si.

Solução:
Façamos um deles. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Seja $T^{-1} : P_3(\mathbb{R}) \to T : M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T^{-1}\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3\right) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Temos que

$$TT^{-1}\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3\right) = T\left(\begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}\right) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

□

Exemplo 5.34 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ definida por $T(x,y) = x + (x+y)t$. Temos que T é um isomorfismo.

Solução:
Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

1. Soma

$$\begin{aligned}
&T\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = T\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) = \\
&\overset{\text{def. de T}}{=} x_1+x_2+\left(x_1+x_2+y_1+y_2\right)t = \\
&= x_1+\left(x_1+y_1\right)t + x_2 + \left(x_2+y_2\right)t = \\
&= T\left(x_1,y_1\right)+T\left(x_2,y_2\right)
\end{aligned}$$

2. Multiplicação

$$\begin{aligned}
&T\left(\alpha\left(x_1,y_1\right)\right) = T\left(\alpha x_1, \alpha y_1\right) = \\
&= \alpha x_1 + \left(\alpha x_1+\alpha y_1\right)t = \alpha\left(x_1+\left(x_1+y_1\right)t\right) = \alpha T\left(x_1,y_1\right)
\end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

Seja $(x,y) \in \ker T$. Logo, $T(x,y) = 0 + 0t$.

Da definição de T, temos que

$$\begin{aligned}
&x+(x+y)\,t = 0+0t \\
&\Rightarrow x = 0, x+y = 0 \\
&\therefore (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

Logo, T é injetora e como $\dim \mathbb{R}^2 = \dim P_1(\mathbb{R})$, temos que T é sobrejetora.

Portanto, T é um isomorfismo.

□

Exemplo 5.35 Sejam U e V espaço vetorial e $T : U \to V$ uma transformação linear. Prove que, se $B \subset U$ é tal que $[B] = U$, então $[T(B)] = \operatorname{Im} T$.

Solução:
Seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de U.
Então, $T(B) = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$. Mostremos que $[T(B)] = \operatorname{Im} T$.
Seja $v \in \operatorname{Im} T$. Logo $\exists u \in U$ tal que $T(u) = v$. Como B é uma base de U, existem $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Por hipótese, T é linear, então,

$$v = T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) \in [T(B)]$$

e é combinação linear dos elementos de $T(B)$.
Portanto, $\operatorname{Im} T \subset [T(B)]$.
Seja $v \in [T(B)]$. Logo, existem $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$ tais que

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \ldots + \beta_n T(u_n) = \\ &\overset{\text{T é linear}}{=} T(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n) \in T(u) = \operatorname{Im} T \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{Im} T = [T(B)]$. □

Exemplo 5.36 Prove que o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solução:
Defina

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) \to (x, y, 0) \end{aligned}$$

Note que T é linear e que $\operatorname{Im} T = U$. Temos ainda que $\ker T = \{0\}$, isto é, T é injetora.
Portanto, T é um isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ e U. □

Definição 5.25 Se $T : U \to V$ é uma transformação linear e $U = V$, então T é chamado de *operador linear.*

Proposição 5.26 *Seja U espaço vetorial $L(U) = \{T : U \to U, T$ operador linear$\}$.*

i) Se $T_1, T_2, T_3 \in L(U)$, então $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)(T_3)$.

ii) Se T é invertível, então T^{-1} é invertível.

iii) Se T_1, T_2 são invertíveis, então T_1T_2 é invertível.

Demonstração:

i) Exercício

ii) Exercício

iii) T_1, T_2 são invertíveis, então seja

$$
\begin{aligned}
S &= T_2^{-1}T_1^{-1} \\
(T_1T_2)S &= T_1T_2(T_2^{-1}T_1^{-1}) \\
&= T_1(T_2T_2^{-1})T_1^{-1} \\
&= T_1 I_u T_1^{-1} \\
&= T_1T_1^{-1} \\
(T_1T_2)S &= I_u \\
S(T_1T_2) &= (T_2^{-1}T_1^{-1})(T_1T_2) \\
&= I_u
\end{aligned}
$$

Portanto, T_1T_2 é invertível. ■

Nota: O conjunto dos operadores lineares invertíveis de $L(U)$ formam uma estrutura algébrica chamada *grupo*.

5.7 Exercícios Propostos

5.1 Sejam $V = \mathbb{R}$ e $W = \mathbb{R}$ espaço vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \alpha x$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$ é uma transformação linear. Mostre que toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser desta forma. Se T fosse definida por $T(x) = \alpha x^2$, T seria linear?

5.2 Determine as seguintes transformações lineares no plano:

(a) Reflexão em torno do eixo x.

(b) Reflexão em torno da origem.

(c) Projeção na reta $y = ax$.

(d) Reflexão em torno da reta $y = ax$.

5.3 Determine as seguintes transformações lineares no plano:

(a) Reflexão sobre a reta de equações paramétricas $(t, -t, 2t)$ tal que $t \in \mathbb{R}$.

(b) Projeção ortogonal sobre a reta de equações paramétricas $(t, -t, 2t)$ tal que $t \in \mathbb{R}$.

5.4 Seja $P(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios na variável $t \in \mathbb{R}$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. Sabemos que $P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Mostre que $L : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(p) = (p(0), p'(1), p''(1))$ é linear. Determine $\ker(L)$ e $\operatorname{Im}(L)$.

5.5 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Determine a, b, c, d de modo que $\ker(T)$ seja a reta $y = 3x$.

5.6 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Determine a, b, c, d de modo que $\operatorname{Im}(T)$ seja a reta $y = 2x$.

5.7 Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem como núcleo e imagem o eixo x? Esta transformação é única?

5.8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

Encontre uma base e a dimensão da $\operatorname{Im}(T)$ e do $\ker(T)$.

5.9 Mostre que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(v) = v \times (1, 1, 1)$ é uma transformação linear. Encontre uma base e a dimensão da $\operatorname{Im}(T)$ e do $\ker(T)$.

5.10 Determine as seguintes transformações lineares:

(a) Projeção de um vetor u sobre uma reta $ax+by = 0$ de $\mathbb{R}^2$ e v não é paralelo a reta.

(b) Projeção de um vetor u sobre um plano $ax + by + cz = 0$ de $\mathbb{R}^3$ e v não é paralelo ao plano.

5.11 Dado $F, G \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definidos respectivamente por
$F(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$ e $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$. Determine:

(a) $F + G$ e $F \circ G + I$.

(b) $\ker(F \circ G)$ e $\operatorname{Im}(G \circ F)$.

(c) uma base e a dimensão de $\ker(F^2 \circ G)$.

(d) uma base e a dimensão de $\operatorname{Im}(F \circ G \circ F)$.

5.12 Seja $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definido por $T(1, 0) = (2, 5)$ e $T(0, 1) = (3, 4)$. Mostre que $G = I + F$ e $H = I + F + F^2$ são isomorfismos.

5.13 Sejam U e V subespaços do espaço vetorial W tais que $W = U \oplus V$. Sejam $P_1, P_2 \in L(W, W) = L(W)$ tais que $P_1(w) = u, P_2(w) = v$ e $w = u + v$ se escreve de maneira única como $u \in U$ e $v \in V$. Mostre que

(a) $P_1^2 = P_1$ e $P_2^2 = P_2$

(b) $P_1 + P_2 = I$

(c) $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = \mathbf{0}$

5.14 Um operador linear $T \in L(U, U) = L(U)$ tal que $T^2 = T$ é chamado de *idempotente*. Quando $T^r = \mathbf{0}$ para $r \in \mathbb{N}$, dizemos que T é *nilpotente* e o menor $r \in \mathbb{N}$ tal que $T^r = \mathbf{0}$ é chamado de *índice de nilpotência* de T.

(a) Dê exemplo de dois operadores idempotentes.

(b) Mostre que o operador derivação $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ é nilpotente. Calcule a matriz deste operador em relação Ã base canônica.

5.15 Seja $T \in L(V)$ um operador idempotente. Mostre que $V = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

5.16 Mostre que $T \in L(V)$ é idempotente se, e somente se, $(I - T)$ é idempotente.

5.17 Dado o operador $T \in L\left(\mathbb{R}^4\right)$ dado por $T(x, y, z, t) = (0, x, y + 2x, z + 2y + 3x)$. Mostre que:

(a) $T^4 = \mathbf{0}$

(b) $I = T$ é um isomorfismo do $\mathbb{R}^4$.

(c) $I + T + T^2 + T^3 = (I - T)^{-1}$

5.18 Seja $W = U \oplus V$ e suponha que $F(U) \subset U$ e $F(V) \subset V$ e que $F \in L(W)$ com $\dim(U) = m$, $\dim(V) = n$. Mostre que existe uma base de W em que a matriz de F é da forma

$$\begin{bmatrix} A_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & B_{n\times n} \end{bmatrix}$$

onde $0_{m\times n}$ e $0_{n\times m}$ são as matrizes nulas.

5.19 Seja $F \in (P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ definida por $F(p(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$. Determine a matriz de F em relação Ã s bases:

(a) $B = \left\{1, t, t^2\right\}$ e $C = \{1\}$

(b) $B = \left\{1, t+t, -1+t^2\right\}$ e $C = \left\{1, t, t^2\right\}$

5.20 Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-2)$ e $v_3 = (-1,-1,0)$:

(a) Seja f um funcional linear sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$ e $f(v_3) = 3$. Determine $f(x,y,z)$.

(b) Encontre um funcional linear sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ mas $f(v_3) \neq 0$.

5.21 Seja $B = \{v_1 = (1,0,-1), v_2 = (1,1,1), v_3 = (2,2,0)\}$ uma base de $\mathbb{C}^3$. Determine a base dual B^*.

5.22 Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ e seja $p(x) = c_0 + c_1 x = c_2 x^2$. Definimos os funcionais lineares

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx, f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de $(V = P_2(\mathbb{R}))^*$ exibindo a base de $V = P_2(\mathbb{R})$ da qual ela é dual.

5.23 Determine as seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\ker(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 0\right\}$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}(T) = [(1,1,2,1), (2,1,1,0)]$.

5.24 Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e $T : V \to W$ uma transformação linear bijetora. Mostre que a transformação inversa $T^{-1} : W \to V$ é linear.

5.25 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$ é bijetora. Determine a transformação inversa T^{-1}.

5.26 Sabemos que $\mathbb{R}^\infty = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) | a_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais:

(a) Mostre que $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definida por $F(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é linear e injetora. É sobrejetora?

(b) Mostre que $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definida por $F(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é linear e sobrejetora. É injetora?

(c) Encontre uma transformação linear injetora de $P(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^\infty$.

5.27 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$. Prove que:

(a) Para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$, tem-se $F(v) \neq 0$.

(b) Toda reta $r \subset \mathbb{R}^2$ é transformada por F em uma reta.

(c) F transforma retas paralelas em retas paralelas.

5.28 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K com $\dim V = n$ e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$. Mostre que n é par. Dê um exemplo de tal transformação.

5.29 Quais das transformações são lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (xy, yz)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5.30 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a, b, c) = (a - b + c, 2a + b - c, -a - 2b + 2c)$$

(a) Determine a $\dim(\ker(T))$.

(b) Determine a $\dim(\operatorname{Im}(T))$.

5.31 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

(a) T é uma transformação linear?

(b) T é injetora? T é sobrejetora?

5.32 Determine uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(T) = [(1, 1, 0)]$. Esta transformação linear pode ser injetora? Pode ser sobrejetora?

5.33 Considere a transformação $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n+1}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = \int_1^x f(t)\, dt$:

(a) Mostre que T é linear.

(b) Determine $\ker(T)$.

(c) Determine $\operatorname{Im}(T)$.

(d) T é injetora? T é sobrejetora?

Capítulo 6

Matriz de uma Transformação Linear

6.1 Operações com Transformações Lineares

Definição 6.1 Sejam U e V espaços vetoriais sobre K. Vamos indicar por $L(U,V) = \{T : U \to V, T \text{ é linear}\}$ o conjunto de todas as transformações lineares de U em V.

Sejam $T_1, T_2 \in L(U,V)$. Definimos

(i) Soma

$$\begin{aligned}
&\forall T_1, T_2 \in L(U,V) \\
&T_1 + T_2 : U \to V \\
&u \to (T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u), \forall u \in U
\end{aligned}$$

Sejam $T \in L(U,V)$ e $\alpha \in K$. Definimos

(ii) Produto

$$\begin{aligned}
&(\alpha T) : U \to V \\
&u \to (\alpha T)(u) = \alpha T(u), \forall u \in U
\end{aligned}$$

Para que $T_1 + T_2 \in L(U,V)$ e $(\alpha T) \in L(U,V)$ devemos mostrar que são lineares.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
&\forall u_1, u_2 \in U \text{ e } k \in K \\
(T_1 + T_2)(u_1 + u_2) &= T_1(u_1 + u_2) + T_2(u_1 + u_2) \\
&= T_1(u_1) + T_1(u_2) + T_2(u_1) + T_2(u_2) \\
&= T_1(u_1) + T_2(u_1) + T_1(u_2) + T_2(u_2) \\
&= (T_1 + T_2)(u_1) + (T_1 + T_2)(u_2) \\
(T_1 + T_2)(ku_1) &= T_1(ku_1) + T_2(ku_1) \\
&= kT_1(u_1) + kT_2(u_1) \\
&= k(T_1 + T_2)(u_1)
\end{aligned}
$$

Portanto, $T_1 + T_2 \in L(U, V)$.
Devemos mostrar que $(\alpha T) \in L(U, V)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&\forall u_1, u_2 \in U \text{ e } \alpha, \beta \in K \\
(\alpha T)(u_1 + u_2) &= \alpha T(u_1 + u_2) \\
&= \alpha [T(u_1) + T(u_2)] \\
&= \alpha T(u_1) + T(u_2) \\
&= (\alpha T)(u_1) + (\alpha T)(u_2) \\
(\alpha T)(\beta u) &= \alpha T(\beta u) \\
&= \alpha[\beta T(u)] \\
&= (\alpha\beta)T(u) \\
&= (\beta\alpha)T(u) \\
&= \beta[\alpha T(u)] \\
&= \beta(\alpha T)(u)
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\alpha T) \in L(U, V)$. ■

Teorema 6.2 *$L(U, V)$ com as operações de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.*

Demonstração:

Terminar como exercício.

A 1 Associativa

$$\begin{aligned}
&\forall T_1, T_2, T_3 \in L(U, V) \\
&(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)
\end{aligned}$$

A 2 Comutativa

$$\begin{aligned}
&\forall T_1, T_2 \in L(U, V) \\
&T_1 + T_2 = T_2 + T_1
\end{aligned}$$

A 3 Elemento Neutro da Adição

$$\begin{aligned}
&\exists 0 \in L(U, V) \\
&T + 0 = T, \forall T \in L(U, V)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
0 : \quad & U \to V \\
& u \to 0(u) = 0, \forall u \in U
\end{aligned}$$

A 4 Elemento Inverso

$$\begin{aligned}
&\forall T \in L(U, V), \exists (-T) \in L(U, V) \\
&T + (-T) = 0
\end{aligned}$$

M 1 Associativa

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha, \beta \in K \text{ e } \forall T \in L(U, V) \\
&(\alpha\beta) T = \alpha (\beta T)
\end{aligned}$$

M 2 Distributiva a esquerda

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha, \beta \in K \text{ e } \forall T \in L(U, V) \\
&(\alpha + \beta) T = \alpha T + \beta T
\end{aligned}$$

M 3 Distributiva a direita

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha \in K \text{ e } \forall T_1, T_2 \in L(U, V) \\
&\alpha (T_1 + T_2) = \alpha T_1 + \alpha T_2
\end{aligned}$$

M 4 Elemento Neutro da Multiplicação

$$\begin{array}{l} \forall T \in L(U,V), \exists 1 \in L(U,V) \\ 1.T = T \end{array}$$

■

6.2 Matriz de uma Transformação Linear

Definição 6.3 Sejam V e W espaços vetoriais sobre K com $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e $T : V \to W$ uma transformação linear.

Logo, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ uma base de W.

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{cases} \tag{6.1}$$

$a_{ij} \in K$

$$(*)\, T\left(v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i\right), j = 1, 2, \ldots, n$$

A transposta da matriz dos coeficientes da equação 6.1 é chamada de matriz da transformação T em relação Ã s bases B e C. E escrevemos

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Exemplo 6.1 Seja a transformação

$$\begin{array}{l} T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \to T(x,y) = (x, x+y) \\ B = \{(1,0), (0,1)\} \\ C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\} \end{array}$$

Encontre $[T]_C^B$.

Solução:

$$T(1,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,1,1)$$
$$T(0,1) = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,1,1)$$
$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que quando $B = C$.
$[T]_B^B = [T]_B$ Matriz de T com relação Ã base B.

□

Exemplo 6.2 Seja $T : M_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b, c, d-c)$$

Sejam B a base canônica de M_2 e $C := \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Solução:
Da definição de T temos que

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)$$

Escrevendo o vetor encontrado como combinação linear dos vetores de C, temos, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(1,0,0) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,1,1) =$$
$$= 1(1,1,0) - 1(0,1,0) + 0(0,1,1)$$
$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

Usando a definição de T para os demais elementos, temos

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)$$

Escrevendo o vetor encontrado como combinação linear dos vetores de C, temos

$$(1,0,0) = 1(1,1,0) - 1(0,1,0) + 0(0,1,1)$$
$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

E

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,-1) = 0\,(1,1,0) + 2\,(0,1,0) - 1\,(0,1,1)$$
$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_C$$

E

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,1) = 0\,(1,1,0) - 1\,(0,1,0) + 1\,(0,1,1)$$
$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

Logo,

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz da transformação de T nas bases B e C.
Seja $u \in M_2$. Logo, por exemplo,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pela definição de T, temos

$$T\,(u) = T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1+2, 3, 4-3) = (3,3,1)$$

Escrevendo $(3,3,1)$ como combinação linear de C, temos

$$(3,3,1) = 3\,(1,1,0) - 1\,(0,1,0) + 1\,(0,1,1)$$
$$\Rightarrow [T\,(u)]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

Por outro lado, usando a proposição 6.4, que será definida mais adiante, temos

$$[T]_C^B\,[u]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{[u]_B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

□

Exemplo 6.3 Seja V espaço vetorial sobre K.

$$\begin{aligned} I: \quad & V \to V \\ & v \to I(v) = v, \forall v \in V \end{aligned}$$

$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.
$C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base de V.
Calcule $[I]_C^B$.

Solução:

$$\begin{aligned} & I(v_1) = v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{n1}w_n \\ & I(v_2) = v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{n2}w_n \\ & \vdots \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & I(v_n) = v_n = a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \ldots + a_{nm}w_n \end{aligned}$$

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matriz mudança da base C para a base B.

□

Exemplo 6.4 Sejam U e V espaços vetoriais sobre K. $\dim U = n$ e $\dim V = m$.

Fixando as bases B de U e C de V, temos que

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & L(U,V) \to M_{m\times n}(K) \\ & T \to [T]_C^B \end{aligned}$$

Prove que φ é linear e bijetor, se somente se, $L(U,V) \cong M_{m\times n}(K)$ (isomorfo).
Como $L(U,V)$ é isomorfo a $M_{m\times n}(K) \Rightarrow \dim L(U,V) = \dim(M_{m\times n}(K)) = m \times n$.

Solução:

Exercício

□

Exemplo 6.5 Note que, dados $S, T \in L(U, V)$
$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$é uma base de U ($\dim U = n$).
$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$é uma base de V ($\dim V = m$).

$$[S]_C^B = (a_{ij})_{m \times n} \text{ e } [T]_C^B = (b_{ij})_{m \times n}.$$

Calcule $[S+T]_C^B$.

Solução:

$$\begin{aligned} (S+T)(u_j) &= S(u_j) + T(u_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) v_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [S+T]_C^B = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = [S]_C^B + [T]_C^B$$

Analogamente
$[\alpha T]_C^B = \alpha [T]_C^B$ concluir que φ é linear.

□

Proposição 6.4 *Sejam U e V espaços vetoriais, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ bases de U e V, respectivamente, e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, vale a seguinte equação:*

$$\forall u \in U, [T]_C^B [u]_B = [T(u)]_C$$

Em outras palavras, a matriz de T nas bases B e C multiplicada pelo vetor formado pelas coordenadas de u na base B é igual ao vetor das coordenadas de $T(u)$ na base C.

Demonstração:
Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existem $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{mi} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(b_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} c_j$$

Seja $u \in U$. Como B é base de U, segue que existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$$

Assim,

$$[T]_C^B [u]_B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\beta_i \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}\beta_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}\beta_i \end{bmatrix}$$

Por outro lado, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\beta_i c_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\beta_i c_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}\beta_i c_m =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_i c_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_i \alpha_{ji} c_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} c_j \right)}_{T(b_i)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i T(b_i) =$$

$$\overset{\text{T é linear}}{=} T \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i \right)}_{u} = T(u)$$

■

6.3 Matriz de uma Transformação Composta

Definição 6.5 Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre K que admitem bases
$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U ($\dim U = n$).
$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ base de V ($\dim V = m$).
$D = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ base de W ($\dim W = p$).

$$T \in L(U,V) \text{ e } S \in L(U,V) \Rightarrow S \circ T \in L(U,W)$$
$$[T]_C^B = (a_{ij})_{m\times n} \text{ e } [S]_D^C = (b_{ki})_{p\times m} \Rightarrow [S \circ T]_D^B$$

Por Definição:

$$(S\circ T)(u_j) = S(T(u_j)) = S\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}S(v_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)w_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m}\underbrace{b_{ki}a_{ij}}_{c_{kj}}\right)w_k$$

$$\therefore (S\circ T)(u_j) = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}w_k$$
$$[S\circ T]_D^B = (c_{kj})_{p\times n} = (b_{ki})_{p\times n}\cdot (a_{ij})_{m\times n} = [S]_D^C\cdot [T]_C^B$$
$$[S\circ T]_D^B = [S]_D^C\cdot [T]_C^B$$

Obs: Sejam U e V espaços vetoriais sobre K com $\dim U = m$ e $\dim V = m$.
$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U.
$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V.
$T : U \to V$ um isomorfismo.
$T^{-1} : V \to U$ linear.
Então:

$$[T]_C^B\left[T^{-1}\right]_B^C = \left[T\circ T^{-1}\right]_C^C = \left[T\circ T^{-1}\right]_C = [I]_C$$
$$\left[T^{-1}\right]_B^C[T]_C^B = \left[T^{-1}\circ T\right]_B^B = [I]_B$$

Significa que $[T]_C^B$ é *inversível* e sua inversa é $\left[T^{-1}\right]_B^C$.

Proposição 6.6 *Sejam U, V e W espaços vetoriais finitamente gerados, $T : U \to V$ e $S : V \to W$ transformações lineares e A, B e C bases ordenadas de U, V e W, respectivamente. Então, temos que*

$$[S\circ T]_C^A = [S]_C^B\,[T]_B^A$$

$$\underbrace{U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W}_{S\circ T}$$

Demonstração:
Sejam $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ as bases de U, V e W, respectivamente. Seja $u \in U$, logo, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$$

(pois A é base de U).

Para cada $a_i \in A, i = 1, \ldots, n$, temos que $T(a_i) \in V$, logo, existem $\beta_{1i}, \ldots, \beta_{mi} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} b_j$$

como cada $S(b_j) \in W, j = 1, \ldots, m$ existem $\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{kj} \in \mathbb{R}$ tais que

$$S(b_j) = \sum_{l=1}^{k} \gamma_{lj} c_l$$

E ainda, como $S(T(a_i)) \in W$ existem $\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ki} \in \mathbb{R}$ tais que

$$S(T(a_i)) = \sum_{l=1}^{k} \delta_{li} c_l$$

Primeiramente, temos

Obs: $*$ usando a Proposição 6.4.

$$[S(T(u))]_C = [(S \circ T)(u)]_C \overset{*}{=} [S \circ T]_C^A [u]_A =$$
$$= \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \cdots & \delta_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{1i}\alpha_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{2i}\alpha_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{ki}\alpha_i \end{bmatrix} (I)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&[S(T(u))]_C \overset{*}{=} [S]_C^B [T(u)]_B \overset{*}{=} [S]_C^B [T]_B^A [u]_A = \\
&= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \cdots & \gamma_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\beta_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\beta_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{kj}\beta_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{kj}\beta_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\beta_{j1}\alpha_1 + \ldots + \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\beta_{jn}\alpha_n \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{kj}\beta_{j1}\alpha_1 + \ldots + \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{kj}\beta_{jn}\alpha_n \end{bmatrix} (II)
\end{aligned}$$

Como para todo vetor $v \in W$, $[v]_C$ se escreve de modo único, então segue que $(I) = (II)$.

Portanto,

$$[S \circ T]_C^A = [S]_C^B [T]_B^A$$

■

Exemplo 6.6 Consideremos o isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dado por

$$(x, y) \to T(x, y) = x + (x + y)t$$

Considerando as bases canônicas $B = \{(1,0), (0,1)\}$ e $C = \{1, t\}$ desses espaços. Determinemos $[T]_B^C$

Solução:

$T(1,0) = 1 + 1.t = 1.1 + 1.t$
$T(0,1) = 0 + t = 1.0 + 1.t$
$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Calculemos a inversa dessa matriz:
$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [T]_B^C = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$
$T^{-1}(1) = 1(1,0) + (-1)(0,1) = (1,-1)$
$T^{-1}(t) = 0(1,0) + 1(0,1) = (0,1)$

$T^{-1}(a + bt) = T^{-1}(a.1 + bt) = aT^{-1}(1) + bT^{-1}(t) =$
$= a(1,-1) + b(0,1) = (a, b-a)$

□

Exemplo 6.7 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_C^B = A$ onde $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Solução:

i) Seja $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$u = x(1,0) + y(0,1)$$

implicando

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B$$

Considere

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & u \to T(u) \end{aligned}$$

onde

Obs: $*$ usando a Proposição 6.4.

$$\begin{aligned} & [T(u)]_C \overset{*}{=} [T]_C^B [u]_B = A [u]_B = \\ & = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ -x + 4y \\ 3x \end{bmatrix}_C \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & T(u) = T(x, y) = \\ & = (2x + y)(1, 0, 0) + (-x + 4y)(0, 1, 0) + 3x(0, 0, 1) = \\ & = (2x + y, -x + 4y, 3x) \end{aligned}$$

ii) Podemos fazer a volta, ou seja, encontrar a matriz A a partir da transformação linear encontrada.

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) \to (2x + y, -x + 4y, 3x) \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= \underbrace{(2, -1, 3)}_{\in V} = 2(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \\ T(0, 1) &= \underbrace{(1, 4, 0)}_{\in V} = 1(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Então,

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = A$$

□

Obs: Dada uma matriz $A_{m\times n}$ podemos vê-la como uma transformação linear $T : U \to V$, onde U é espaço vetorial de dimensão n e V é espaço vetorial de dimensão m.

6.4 O Espaço Vetorial Dual

Consideremos U um espaço vetorial sobre K. Onde U é espaço vetorial sobre K e K também é espaço vetorial sobre K.

Seja $L(U, K)$ o conjunto das transformações lineares de U em K e chamamos de ***funcional linear.***

$L(U, K)$ é um espaço vetorial sobre K com as operações:

$\forall S, T \in L(U, K)$ e $\alpha \in K$.

(i) Soma

$$\begin{aligned} S+T: \quad & U \to K \\ & u \to (S+T)(u) = S(u) + T(u);\forall u \in U \end{aligned}$$

(ii) Multiplicação

$$\begin{aligned} \alpha T: \quad & U \to K \\ & u \to (\alpha T)(u) = \alpha T(u);\forall u \in U \end{aligned}$$

Definição 6.7 O espaço vetorial $L(U, K)$ é chamado de *espaço vetorial dual* de U, representado por U^*. Cada elemento de U^* é chamado de *forma linear* ou *funcional linear* sobre U.

Exemplo 6.8 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $(x, y, z) \to F(x, y, z) = 2x$ é um elemento do espaço $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ pois se trata de uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$.

Solução:

Sejam $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$, temos

$$F(u+v) = F(a+x, b+y, c+z) = 2(a+x) = 2a+2x = F(u) + F(v)$$
$$F(\alpha u) = F(\alpha a, \alpha b, \alpha c) = 2(\alpha a) = \alpha(2a) = \alpha F(u)$$

É portanto uma forma linear sobre $\mathbb{R}^3$. □

6.4.1 Representação de um Espaço Vetorial Dual

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base canônica de K^n. $[e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)]$
Dado $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n, v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

$$T(v) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$$
$$T(v) = x_1 \underbrace{T(e_1)}_{k_1} + x_2 \underbrace{T(e_2)}_{k_2} + \ldots + x_n \underbrace{T(e_n)}_{k_n}$$
$$\begin{cases} T(e_1) = k_1 \\ T(e_2) = k_2 \\ \vdots \\ T(e_n) = k_n \end{cases} \in K$$
$$T(v) = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$$

Dada uma n-upla $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ de elementos de K, a aplicação

$$\begin{aligned} T: \quad & K^n \to K \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n \end{aligned}$$

é uma funcional linear sobre K. **Verifique como exercício.**

Então, $T \in (K^n)^*$ se, e somente se, existe uma n-upla $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ onde $k_i \in K$ de forma que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n, \forall x_i \in K^n$.

Teorema 6.8 *Seja V um espaço vetorial sobre K com* $\dim V = n$. *Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então $\forall v \in V$, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, tais que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$.*

A função

$$\begin{aligned} F_i: \quad & V \to K \\ & v \to F_i(v) = x_i \end{aligned}$$

é um funcional linear sobre V $(F_i \in V^*)$.

Demonstração:

Dado $u, v \in V$. Onde $u = y_1v_1 + y_2v_2 + \ldots + y_nv_n$ e $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$.

$$\begin{aligned} F_i(u+v) &= F_i((y_1+x_1)v_1 + (y_2+x_2)v_2 + \ldots + (y_n+x_n)v_n) \\ &= y_i + x_i = F_i(u) + F_i(v) \\ F_i(\alpha u) &= F_i(\alpha y_1 v_1 + \alpha y_2 v_2 + \ldots + \alpha y_n v_n) \\ &= \alpha y_i = \alpha F_i(u) \end{aligned}$$

■

Teorema 6.9 *Seja V um espaço vetorial sobre K. Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então as aplicações $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de V em K definidas por $F_i(v) = x_i$ para cada $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n \in V$ pertencem a V^* e formam uma base de V^*. Além disso, se $\dim V = n$, então $\dim V^* = n$.*

Demonstração:

Seja $F \in V^*$ e suponha que $F(v_1) = k_1, F(v_2) = k_2, \ldots, F(v_n) = k_n$ elementos de K. Então,

$$\begin{aligned} F(v) &= F(x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n) \\ &= x_1F(v_1) + x_2F(v_2) + \ldots + x_nF(v_n) \\ F(v) &= k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n \ \ (1) \\ F(v) &= k_1F_1(v) + k_2F_2(v) + \ldots + k_nF_n(v) \\ F(v) &= (k_1F_1 + k_2F_2 + \ldots + k_nF_n)(v), \forall v \in V \end{aligned}$$

Concluímos então, que $[F_1, F_2, \ldots, F_n] = V^*$
Vamos mostrar agora que o conjunto é L.I.
Se $\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \ldots + \alpha_nF_n = 0$ (onde 0 é o funcional linear nulo)
$(\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \ldots + \alpha_nF_n)(v) = 0(v) = 0, \forall v \in V$,(onde 0 é um escalar)

$$\begin{cases} v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\ v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \ldots + 0v_n \\ \vdots \ldots\ldots \\ v_n = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 1v_n \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
*\left(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n\right)(v_1) = 0 \\
\alpha_1 F_1(v_1) + \alpha_2 F_2(v_1) + \ldots + \alpha_n F_n(v_1) = \alpha_1 .1 = \alpha_1 = 0 \\
\\
*\left(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n\right)(v_2) = 0 \\
\alpha_1 F_1(v_2) + \alpha_2 F_2(v_2) + \ldots + \alpha_n F_n(v_2) = \alpha_2 .1 = \alpha_2 = 0 \\
\vdots \\
*\left(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n\right)(v_n) = 0 \\
\alpha_1 F_1(v_n) + \alpha_2 F_2(v_n) + \ldots + \alpha_n F_n(v_n) = \alpha_n .1 = \alpha_n = 0
\end{array}$$

Portanto $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ é uma base de V^*.

■

Exemplo 6.9 Determine a base dual B^* de $B = \{(1,0), (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Seja $B = \{v_1 = (1,0), v_2 = (1,1)\}$. E $\left(\mathbb{R}^2\right)^* = L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x,y) = ax + by \\ F_2(x,y) = cx + dy \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} F_1(v_1) = F_1(1,0) = a.1 + b.0 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ F_1(v_2) = F_1(1,1) = a.1 + b.1 = 0 \Rightarrow b = -1 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} F_2(v_1) = F_2(1,0) = c.1 + d.0 = 0 \Rightarrow c = 0 \\ F_2(v_2) = F_2(1,1) = c.1 + d.1 = 1 \Rightarrow d = 1 \end{array}\right.$$

Então

$$\begin{array}{l}
F_1(x,y) = x - y \\
F_2(x,y) = y \\
B^* = \{F_1(x,y) = x - y, F_2(x,y) = y\}
\end{array}$$

Base de V^*. □

6.4.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 6.1 Mostre que toda função $T : V \to W$ onde V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$ e

$$T(v + w) = T(v) + T(w), \forall U, V \in V$$

é sempre linear.

Solução:
Sejam $v = \frac{a}{b}, w = \frac{c}{d} \in V$

$$v + w = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$$

$$T(v + w) = \frac{ab + bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = T(v) + T(w)$$

□

Exercício 6.2 Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 1) = (-1, 1)$.

Solução:
Note que $\{(1, 0)(0, 1)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então, temos que

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$\Rightarrow x = x \text{ e } y = y$$

Desse modo, a transformação T deve satisfazer

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT(1, 0) + yT(0, 1) \\ T(x, y) &= x(1, 3) + y(-1, 1) \\ T(x, y) &= (x - y, 3x + y) \end{aligned}$$

□

Capítulo 7

Resolução dos Exercícios Propostos

7.1 Cap. 02

2.01 Seja S um conjunto, K um corpo e V o conjunto de todas as funções de S em K. Defina em V as seguintes operações para qualquer $f, g \in V$ e todo $\alpha \in K$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Mostre que V é um espaço vetorial sobre K.

Solução:

Para demonstrar que V é um espaço vetorial sobre K, teremos de verificar os oito axiomas de espaço vetorial.

Sejam, portanto, $u, U, V \in V$ e $\alpha, \beta \in K$.

V i) $u + v = v + u$ (comutatividade)

De fato, basta verificar que $f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \Rightarrow (f+g)(x) = (g+f)(x)$.

V ii) $(u+v) + w = u + (v+w)$ (associatividade)

Também temos, para operação entre funções:

$$[(f+g)+h](x) = [f(x)+g(x)] + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = \\ = f(x) + [g(x) + h(x)] = [f + (g+h)](x)$$

V iii) $\exists \mathbf{0} \in V, u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$

De fato, considere a função $f_0(x) = 0, \forall x \in S$. Então, se tivermos uma função $f(x)$,

notamos que:

$$f_0(x) + f(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$$

V iv) Seja $u \in V \Rightarrow \exists(-u) \in V, u + (-u) = \mathbf{0}$.

A função inversa aditiva de uma função $f(x)$ dada é a função $g(x) = -f(x)$, pois sabemos que:

$$f(x) + [-f(x)] = -f(x) + f(x) = f_0(x)$$

V v) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$

Note que $[(\alpha + \beta) f](x) = [\alpha f + \beta f](x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$.

V vi) $\alpha (u + v) = \alpha u + \beta v$

Escrevamos $[\alpha (f + g)](x) = [\alpha f + \alpha g](x) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$

V vii) $(\alpha\beta) u = \alpha (\beta u)$

Tomemos $[(\alpha\beta) f](x) = \alpha\beta f(x) = \alpha [(\beta f)](x)$

V viii) $1u = u$

Basta observar que $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$

Tendo verificado os oito axiomas, podemos afirmar que V é um espaço vetorial.

□

2.02 Considere o espaço vetorial V como sendo o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que:

(a) o conjunto das funções contínuas W é um subespaço de V;

(b) o conjunto das funções diferenciáveis U é um subespaço de V.

Solução:

Lembremos que, para um conjunto W ser um subespaço de determinado espaço V sobre um corpo K é necessário:

S i) $0 \in W$

S ii) $\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

S iii) $\forall \alpha \in K$ e $\forall u \in V \Rightarrow \alpha u \in W$

(a) Agora, lembremos que, para uma função $f(x)$ ser contínua, é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas:

C i) Que $f(x)$ esteja definida no intervalo (-1,1);

C ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Verifiquemos os itens para que o conjunto W seja um subespaço.

S i) Note que o vetor nulo é a função $f(x) = 0$. Esta função é contínua, pois satisfaz as condições de continuidade que mencionamos.

S ii) Consideremos duas funções contínuas $g(x)$ e $h(x)$. Então, $(g+h)(x) = g(x) + h(x)$.

Como sabemos que a soma de duas funções contínuas também é contínua, este item está verificado.

S iii) Consideremos uma função contínua $g(x)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $(\alpha g)(x) = \alpha g(x)$. E, como sabemos que o fato de multiplicarmos uma função contínua por uma constante não afeta sua continuidade, este item está verificado.

Portanto, o conjunto W é um subespaço de V.

(b) Lembremos que, para uma função de uma variável, como é o caso, seja diferenciável, basta que $\frac{df(x_0)}{dx}$ exista para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos os itens para que o conjunto U seja um subespaço.

S i) Novamente, o vetor nulo $f(x) = 0$ pertence ao conjunto considerado. Esta função é derivável em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$.

S ii) Considere as funções diferenciáveis $g(x)$ e $h(x)$. Então, $(g+h)(x) = g(x) + h(x)$ pertence ao conjunto considerado. Basta notar que:

$$\frac{d\left[(g+h)(x)\right]}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

S iii) Considere a função diferenciável $g(x)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $(\alpha g)(x) = \alpha g(x)$ pertence ao conjunto considerado, já que:

$$\frac{d\left[\alpha g(x)\right]}{dx} = \alpha \frac{dg(x)}{dx}$$

Portanto, o conjunto U é um subespaço de V.

□

2.03 Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u, v \in V$ vetores não-nulos. Prove que v é múltiplo de u se, e somente se, u é múltiplo de v. Que se pode dizer caso não suponhamos ambos os vetores u e v diferentes do vetor nulo?

Solução:

Tomemos u como múltiplo de v e provemos que isto implica que v seja múltiplo de u. Neste caso, podemos escrever, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$u = \alpha v$$

Além disto, como $\mathbb{R}$ é um corpo, então existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1$. Multipliquemos, então, ambos os lados da igualdade anterior por α^{-1}.

$$\alpha^{-1}u = \alpha^{-1}\alpha v \Rightarrow \alpha^{-1}u = 1v \Rightarrow \alpha^{-1}u = v$$

E, portanto, v é múltiplo de u. Para demonstrar que se v é múltiplo de u, então u é múltiplo de v, basta proceder como anteriormente. Portanto, a proposição está demonstrada.

□

2.04 Sabemos que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mantendo o produto por escalar usual e variando a soma de dois vetores $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ em $\mathbb{R}^2$. Quais os axiomas de espaço vetorial que são válidos? Quais os que não são válidos?

(a) $u + v = (x + b, a + y)$

(b) $u + v = (xa, yb)$

(c) $u + v = (3x + 3a, 5x + 5a)$

Solução:

Verifiquemos os axiomas de espaços vetoriais que não estão relacionados com a soma de vetores, isto é, M_3 e M_4. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

V 1) $(\alpha\beta)\, u = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = \alpha\,(\beta x, \beta y) = \alpha\,(\beta u)$

V 2) $1u = (1x, 1y) = (x, y) = u$

Para todas as operações adição que forem definidas, os axiomas M_3 e M_4 são válidos.

Verifiquemos os demais para cada item.

(a) $u + v = (x + b, y + b)$

V i) Esta operação não é comutativa, basta notar que $u+v = (x+b, y+a)$ e que $v+u = (a+y, b+x)$.

V ii) Esta operação não é associativa. Tomemos os elementos $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2)$ e $u_3 = (x_3, y_3)$ e façamos as operações de adição destes três elementos:

$$\begin{aligned}
&(u_1+u_2)+u_3 = (x_1+y_2, y_1+x_2)+(x_3, y_3) = \\
&= (x_1+y_2+y_3, y_1+x_2+x_3) \\
&u_1+(u_2+u_3) = (x_1, y_1)+(x_2+y_3, y_2+x_3) = \\
&= (x_1+y_2+x_3, y_1+x_2+y_3)
\end{aligned}$$

Temos, então, que $(u_1+u_2)+u_3 \neq u_1+(u_2+u_3)$.

V iii) Não existe vetor nulo. Note que:

$$u+0 = u \Rightarrow 0 = (0,0)$$

Mas, por outro lado:

$$0+u = (0,0)+(x,y) = (y,x)$$

Como $u+0 \neq 0+u \Rightarrow \nexists 0 \in \mathbb{R}^2$.

V iv) Como não podemos definir o vetor nulo, não há como definir o vetor inverso aditivo.

Portanto, este não existe.

V v) $(\alpha+\beta)u \neq \alpha u+\beta u$

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)u = ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y) \\
&\alpha u+\beta u = (\alpha x, \alpha y)+(\beta x, \beta y) = (\alpha x+\beta y, \alpha y+\beta x)
\end{aligned}$$

V vi) $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$

$$\begin{aligned}
&\alpha(u+v) = \alpha(x+b, y+a) = (\alpha(x+b), \alpha(y+a)) \\
&\alpha u+\alpha v = (\alpha x, \alpha y)+(\alpha a, \alpha b) = (\alpha(x+b), \alpha(y+a))
\end{aligned}$$

Portanto, com esta definição de adição, valem apenas os axiomas M_2, M_3 e M_4.

(b) $u+v = (xa, yb)$

V i) A adição definida é comutativa. Note que:

$$\begin{aligned}
u+v &= (xa, yb) \\
v+u &= (ax, by)
\end{aligned}$$

E podemos afirmar que $u+v = v+u$.

V ii) A adição definida é associativa. Tomemos os vetores u_1, u_2 e u_3 como no item "a".

$$\begin{aligned}(u_1 + u_2) + u_3 &= (x_1x_2, y_1y_2) + (x_3, y_3) = (x_1x_2x_3, y_1y_2y_3)\\ u_1 + (u_2 + u_3) &= (x_1, y_1) + (x_2x_3, y_2y_3) = (x_1x_2x_3, y_1y_2y_3)\end{aligned}$$

V iii) Existe o elemento nulo. Suponhamos que $0 = (1, 1)$:

$$u + 0 = (x1, y1) = (x, y) = (1x, 1y) = 0 + u$$

E, de fato, $0 = (1, 1)$.

V iv) Não podemos definir o inverso aditivo do vetor $u = (x, y)$. Seja $s = \left(x^{-1}, y^{-1}\right)$ o nosso candidato a inverso aditivo de u. Então:

$$\begin{aligned}u + s &= \left(xx^{-1}, yy^{-1}\right) = (1, 1) = 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^*\\ s + u &= \left(x^{-1}x, y^{-1}y\right) = (1, 1) = 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^*\end{aligned}$$

Caso uma das componentes do elemento seja nula, ao realizar a operação de adição definida, aquela componente se anulará, e $(0, y) \neq 0 = (1, 1)$ e $(x, 0) \neq 0 = (1, 1)$.

V v) $(\alpha + \beta)\, u \neq \alpha u + \beta u$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)\, u &= ((\alpha + \beta)\, x, (\alpha + \beta)\, y)\\ \alpha u + \beta u &= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \left(\alpha\beta x^2, \alpha\beta y^2\right)\end{aligned}$$

V vi) $\alpha\, (u + v) \neq \alpha u + \alpha v$

$$\begin{aligned}\alpha\, (u + v) &= \alpha\, (xa, yb) = (\alpha xa, \alpha yb)\\ \alpha u + \alpha v &= (\alpha x, \alpha y) + (\alpha a, \alpha b) = \left(\alpha^2 xa, \alpha^2 yb\right)\end{aligned}$$

Portanto, com a definição dada para a adição, valem os axiomas A_1, A_2, A_3, M_3 e M_4, apenas.

(c) u + v = (3x + 3a, 5y + 5a)

V i) A adição definida não é comutativa. Note que:

$$\begin{aligned}u + v &= (3x + 3a, 5y + 5a)\\ v + u &= (3a + 3x, 5b + 5x)\end{aligned}$$

E temos que $u + v \neq v + u$.

V ii) A adição definida não é associativa. Tomemos novamente os vetores u_1, u_2 e u_3, como nos itens "a" e "b".

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2)+u_3=(3x_1+3x_2,5y_1+5x_2)+(x_3,y_3)=\\&=(9x_1+9x_2+3x_3,25y_1+25x_2+5x_3)\\&u_1+(u_2+u_3)=(x_1,y_1)+(3x_2+3x_3,5y_2+5x_3)=\\&=(3x_1+9x_2+9x_3,5y_1+15x_2+15x_3)\end{aligned}$$

E verificamos que $(u_1+u_2)+u_3 \neq u_1+(u_2+u_3)$.

V iii) $\nexists 0 \in \mathbb{R}^2$
Suponha $\widehat{0}=(c,k)$ um vetor nulo. Então:

$$\begin{aligned}&\widehat{0}+u=u \Rightarrow (c,k)+(x,y)=(x,y) \Rightarrow (3x+3c,5k+5x)=(x,y)\\&\Rightarrow \widehat{0}=\left(-\frac{2x}{3},\frac{y}{5}-x\right)\end{aligned}$$

Por outro lado, com o resultado obtido, escrevemos:

$$u+\widehat{0}=(x,y)+\left(-\frac{2x}{3},\frac{y}{5}-x\right)=\left(x,5y-\frac{10x}{3}\right)=(x,y)$$

A igualdade anterior mostra que o vetor $\widehat{0}$ escolhido não faz o papel de vetor nulo para qualquer vetor u que se escolha. A igualdade $\widehat{0}+u=u+\widehat{0}$ somente ocorre quando se verifica que $4y-\frac{10x}{3}=0$. Portanto, não existe o vetor nulo.

V iv) Não existe o vetor nulo, portanto, não há como definir o inverso aditivo.

V v) $(\alpha+\beta)\,u \neq \alpha u+\beta u$

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)\,u=((\alpha+\beta)\,x,(\alpha+\beta)\,y)\\&\alpha u+\beta u=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x,\beta y)=(3\alpha x+3\beta x,5\alpha y+5\beta x)\end{aligned}$$

V vi) $\alpha\,(u+v)=\alpha u+\alpha v$

$$\begin{aligned}&\alpha\,(u+v)=\alpha\,(3x+3a,5y+5a)=(3\alpha x+3\alpha a,5\alpha y+5\alpha a)\\&\alpha u+\alpha v=(\alpha x,\alpha y)+(\alpha a,\alpha b)=(3\alpha x+3\alpha a,5\alpha y+5\alpha a)\end{aligned}$$

Portanto, valem apenas os axiomas M_2, M_3 e M_4 para a definição dada para a adição.

$\square$

2.05 Defina a média entre dois vetores u e v de um espaço vetorial V sobre um corpo K por $u \boxtimes v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que:

$$(u \boxtimes v) \boxtimes w = u \boxtimes (v \boxtimes w) \Leftrightarrow u = w$$

Solução:

$\Rightarrow$) Utilizando a definição da operação $\boxtimes$, temos:

$$\begin{array}{l} (u \boxtimes v) \boxtimes w = u \boxtimes (v \boxtimes w) \\ \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) \boxtimes w = u \boxtimes \left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) \\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right)\right] + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}u + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right)\right] \end{array}$$

Agora, utilizemos a propriedade distributiva em ambos os lados da igualdade.

$$\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}w$$

Adicionemos a ambos os lados da igualdade o inverso aditivo de $\frac{1}{4}v$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v + \left(-\frac{1}{4}v\right) + \frac{1}{2}w & = & \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}v + \left(-\frac{1}{4}v\right) + \frac{1}{4}w \\ \frac{1}{4}u + \frac{1}{2}w & = & \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}w \end{array}$$

Agora, adicionemos a ambos os lados da igualdade o inverso aditivo de $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w$.

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}u + \frac{1}{2}w + \left[-\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w\right)\right] & = & \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}w + \left[-\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w\right)\right] \\ \frac{1}{2}u & = & \frac{1}{2}w \end{array}$$

Multipliquemos ambos os lados da igualdade por 2 e chegamos ao resultado esperado.

$\Leftarrow$) Tendo resolvido a implicação anterior, para resolver esta, basta repetir os passos adotados em ordem contrária.

Então, temos que a proposição está demonstrada.

$\square$

2.06 Dados os vetores $u = (1,2,3)\,, v = (3,2,1)$ e $w = (-3,2,7)$ em $\mathbb{R}^3$. Determine números α, β tais que $w = \alpha u + \beta v$. Quantas soluções admite este problema?

Solução:

O problema pode ser posto de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Passemos a resolver este sistema linear pelo método do escalonamento. Como primeiro passo, iremos subtrair três vezes a primeira linha da terceira. Ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Subtraimos duas vezes a primeira linha da segunda. Obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Para completar o escalonamento, subtraimos duas vezes a segunda linha da terceira, obtendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da segunda linha, obtemos $\beta = -2$. Substituindo na primeira, obtendo $\alpha = 3$. Esta solução é única, uma vez que um sistema linear onde o número de equações excede o número de variáveis ou não tem solução ou sua solução é única.

$\square$

2.07 Seja K um subcorpo do corpo L. Mostre que L é um espaço vetorial sobre K. Dê exemplos de espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$.

Solução:

Sejam $u, U, V \in L$ e $\alpha, \beta \in K$. Note que, por hipótese, $\alpha, \beta \in L$, já que $K \subset L$ por ser um subcorpo. Devemos verificar os oito axiomas dos espaços vetoriais.

V i) A adição é comutativa já que, como L é um corpo, podemos escrever que $u + v \in L$, $v + u \in L$ e $u + v = v + u$.

V ii) A adição é comutativa também devido ao fato de L ser um corpo. Podemos escrever $(u + v) + w = u + (v + w) \in L$.

V iii) Em um corpo, sempre existe o elemento 0. Além disto, $0+u = u+0 = u$.

V iv) Como L é um corpo, $\exists - u \in L$, tal que $u + (-u) = -u + u = 0$.

V v) Como $\alpha, \beta, u \in L$, então vale a propriedade distributiva $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$ e os valores resultantes pertencerão ao corpo L.

V vi) A verificação deste item é feita de forma análoga ao item anterior.

V vii) Novamente, como L é um corpo, a multiplicação entre seus elementos é associativa, portanto $(\alpha\beta)\, u = \alpha\,(\beta u)$.

V viii) Em um corpo, sempre existe o elemento 1. Além disto, $1u = u1 = u$.

Portanto, L é um espaço vetorial sobre K. Em outras palavras, um corpo sempre é um espaço vetorial sobre qualquer de seus subcorpos.

De acordo com o exposto, para exemplificar espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{Q}$, basta notar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Então, os corpos dos reais e dos complexos são espaços vetoriais sobre o corpo dos racionais.

□

2.08 Seja $K = \left(a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\right)$. Mostre que K é um corpo.
Solução:

Para verificar que determinado conjunto é um corpo, devemos verificar quatro itens:

K i) se $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$ e $xy \in K$.
Então tomemos os elementos $a_1+b_1\sqrt{2}, a_2+b_2\sqrt{2} \in K$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$. Façamos sua soma:

$$a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} = a_1 + a_2 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2} = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{2}$$

E o resultado obtido pertence ao conjunto definido. Façamos o produto:

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{2} + a_2b_1\sqrt{2} + 2b_1b_2 =$$
$$= a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

E o resultado também pertence a K.

K ii) se $x \in K \Rightarrow (-x) \in K$.

Consideremos $-x = -a - b\sqrt{2}$ e façamos $x + (-x)$:

$$a + b\sqrt{2} + \left(-a - b\sqrt{2}\right) = a + b\sqrt{2} - a - b\sqrt{2} = 0$$

E, então, existe o inverso aditivo.

K iii) se $x \in K$ e $x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in K; xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Consideremos $x^{-1} = p + q\sqrt{2}$ e calculemos quem são p e q.

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(p + q\sqrt{2}\right) = ap + aq\sqrt{2} + bp\sqrt{2} + 2bq = 1$$

$$\begin{cases} ap + 2bq = 1 \\ bp + aq = 0 \end{cases}$$

Basta resolvermos o sistema linear. Utilizando escalonamento, chegamos a:

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & a - \frac{2b^2}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

E concluímos que $p = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ e que $q = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$. Note que a solução é válida $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.

Basta notar que, para este corpo o denominador de p e q se anula apenas se $a = 0$ e $b = 0$, mas, neste caso, não se define inverso multiplicativo.

K iv) $0, 1 \in K$.

Estes elementos pertencem ao conjunto K. Basta notar que podemos escrevê-los da seguinte forma:

$$0 = 0 + 0\sqrt{2}$$
$$1 = 1 + 0\sqrt{2}$$

$\square$

2.09 Seja $K = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Mostre que K é um corpo.
Solução:

Novamente, teremos de verificar as condições para que um conjunto seja um corpo. Lembremos que $i = \sqrt{-1}$.

K i) Consideremos os elementos $x_1 = a_1 + b_1 i$ e $x_2 = a_2 + b_2 i$. Verifiquemos se a adição e a multiplicação são fechadas.

$$x_1 + x_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i$$

E a adição é, de fato, fechada. Verifiquemos a multiplicação.

$$x_1 x_2 = (a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$$

E a multiplicação também é fechada.

K ii) Consideremos o elemento $-a-bi \in K$. Este é o inverso aditivo de $a+bi$, pois:

$$a + bi + (-a - bi) = a - a + bi - bi = 0$$

K iii) Consideremos o elemento $x = a + bi$. Se $x^{-1} = p + qi$, determinemos os elementos p e q.

$$xx^{-1} = x^{-1}x = ap - bq + (aq + bp)\, i = 1$$

Podemos, novamente, montar um sistema linear de equações sobre as variáveis p e q.

Escrevamos este sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando, temos:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a + \frac{b^2}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

Chegamos Ã conclusão que $p = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $q = \frac{-b}{a^2+b^2}$. O denominador se anulará, para os números racionais, somente se $a = 0$ e $b = 0$, mas, neste caso, não se define inverso multiplicativo. Para todos os outros casos, já está definido conforme acima.

K iv) Os elementos 0 e 1 pertencem a K. Basta escrevê-los como:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0i \\ 1 &= 1 + 0i \end{aligned}$$

□

2.10 Seja $c > 0$ um número racional e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma^2 = c$. Mostre que o conjunto $L = \{a + b\gamma | a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

Solução:

Verifiquemos os quatro itens da definição de corpo:

K i) Consideremos os elementos $x_1 = a_1 + b_1\gamma$ e $x_2 = a_2 + b_2\gamma$ pertencentes ao conjunto K.

Verifiquemos se a adição e a multiplicação são fechadas.

$$x_1 + x_2 = a_1 + b_1\gamma + a_2 + b_2\gamma = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\gamma$$

E a adição é, portanto, fechada. Verifiquemos a multiplicação.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = (a_1 + b_1\gamma)(a_2 + b_2\gamma) = a_1a_2 + a_1b_2\gamma + a_2b_1\gamma + b_1b_2\gamma^2 = \\ = a_1a_2 + b_1b_2c + (a_1b_2 + a_2b_1)\gamma \end{aligned}$$

E a multiplicação é fechada.

K ii) Procuremos o inverso aditivo. Seja $-x = -a - b\gamma$ este elemento. Então:

$$x + (-x) = ab\gamma + (-a - b\gamma) = 0 = -a - b\gamma + a + b\gamma = -x + x$$

Portanto, existe inverso aditivo, $\forall x \in K$.

K iii) Seja $x^{-1} = p + q\gamma$ o inverso multiplicativo de $x = a + b\gamma$. Determinemos p e q.

$$xx^{-1} = (a + b\gamma)(p + q\gamma) = ap + aq\gamma + bp\gamma + bq\gamma^2 = ap + bqc + (aq + bp)\gamma = 1$$

Disto, escrevemos um sistema linear de equações na forma matricial sobre as variáveis p e q.

$$\begin{bmatrix} a & bc \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando, temos:

$$\begin{bmatrix} a & bc \\ 0 & a - \frac{b^2c}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

Com isto, concluímos que $p = \frac{a}{a^2 - b^2c}$ e $q = \frac{-b}{a^2 - b^2c}$. Note novamente que, para os racionais, os denominadores de p e q não se anulam, exceto se $a = 0$ e $b = 0$, mas, neste caso, não se define inverso multiplicativo.

K iv) Os elementos 0 e 1 pertencem a K. Basta escrevê-los como:

$$0 = 0 + 0\gamma$$
$$1 = 1 + 0\gamma$$

$\square$

2.11 Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços:

(a) $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\}$

(b) $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 4y = 0\right\}$

Solução:

(a) Verifiquemos os itens necessários para que um conjunto seja classificado como subespaço:

S i) $0 = (0,0) \in W$

S ii) Sejam $u = (a,a) \in W$ e $v = (b,b) \in W$. Então, $u+v = (a+b, a+b) \in W$.

S iii) Sejam $u = (a,a) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha u = (\alpha a, \alpha a) \in W$.

Portanto, o conjunto $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(b) Novamente, verifiquemos os itens necessários para classificação de subespaço:

S i) $0 = (0,0) \in W$

S ii) Sejam $u = (-4a, a) \in W$ e $v = (-4b, b) \in W$. Então, $u + v = (-4(a+b), (a+b)) \in W$.

S iii) Sejam $u = (-4a, a) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha u = (-4\alpha a, \alpha a) \in W$.

Portanto, o conjunto $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 4y = 0\right\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

□

2.12 Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços:

(a) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\right\}$

(b) $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y \text{ e } 2y = z\right\}$

Solução:

Verifiquemos, em cada item, as condições para que um conjunto seja um subespaço.

(a) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\right\}$

S i) $0 = (0,0,0) \in W$, pois para $(0,0,0) \Rightarrow x + y + z = 0 = 0 + 0 + 0 = 0$.

S ii) Tomemos os elementos $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em W. Façamos sua soma:

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Notemos que

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 = 0 + 0 = 0$$

e, portanto, $u_1 + u_2 \in W$.

S iii) Tomemos o elemento $u = (x, y, z) \in W$ e um certo $\alpha \in \mathbb{R}$. Façamos seu produto:

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

Notemos que

$$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha (x + y + z) = \alpha 0 = 0$$

e , portanto, $\alpha u \in W$.

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y \text{ e } 2y = z\right\}$

Note que, como $x = y$, podemos tratar este conjunto como o conjunto das duplas da forma (x, x), tais que $x \in \mathbb{R}$. Basta, portanto, verificar o item "a" do exercício anterior.

□

2.13 Sabemos que K^n é um espaço vetorial sobre K com as operações usuais. Prove que:

(a) dados $x, y \in K^n$ tal que $x + y = 0$, então $x = -y$ e $y = -x$;

(b) se $x \in k^n$, então $-(-x) = x$;

(c) dados $x, y \in k^n$, se $x + y = x$, então $y = 0$;

(d) $(-1)\,x = -x$, para qualquer que seja $x \in k^n$.

Solução:

(a) De fato, se K^n é um espaço vetorial, então existe $-x \in K^n$, tal que $x + (-x) = -x + x = 0, \forall x \in K^n$ (inverso aditivo). Tomemos a expressão $x + y = 0$ e somemos aos dois lados o inverso aditivo de x.

$$x + y = 0 \Rightarrow -x + x + y = -x + 0 \Rightarrow 0 + y = -x \Rightarrow y = -x$$

Para mostrar que $x = -y$, basta repetir o procedimento somando o inverso aditivo de y a $x + y = 0$.

(b) O item afirma que o inverso aditivo de $-x$ é x. De fato, basta observar que $(-x) + x = x + (-x) = 0, \forall x \in K^n$.

(c) Para este item, somemos o inverso aditivo de x aos dois lados da igualdade. Então:

$$x + y = x \Rightarrow -x + x + y = -x + x \Rightarrow 0 + y = 0 \Rightarrow y = 0$$

(d) Note que:

$$x = x \Rightarrow (1 + 1 - 1)\, x = x \Rightarrow x + x + (-1)\, x = x$$

Somemos o inverso aditivo a ambos os lados da igualdade duas vezes:

$$\begin{aligned}
& x + x + (-1)\, x = x \Rightarrow -x + x + x + (-1)\, x = -x + x \Rightarrow 0 + x + (-1)\, x = 0 \\
& \Rightarrow x + (-1)\, x = 0 \Rightarrow -x + x + (-1)\, x = 0 - x \Rightarrow 0 + (-1)\, x = -x \\
& \therefore (-1)\, x = -x
\end{aligned}$$

□

2.14 O conjunto $W = \{(1 + 2t)\,, t | t \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$?
Solução:

Não é subespaço. Basta observar que o vetor nulo $0 = (0, 0) \notin W$, pois para $t = 0 \Rightarrow (1 + 2t, t) = (1, 0)$ e para $1 + 2t = 0 \Rightarrow (1 + 2t, t) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

□

2.15 O conjunto $W = \{(s - t, s, t)\, | s, t \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?
Solução:

Observemos as condições para que um conjunto seja um subespaço.

S i) $0 = (0, 0, 0) \in W$, pois se $s = t = 0 \Rightarrow (s - t, s, t) = (0, 0, 0)$.

S ii) Tomemos dois elementos $v_1 = (s_1 - t_1, s_1, t_1)$ e $v_2 = (s_2 - t_2, s_2, t_2)$ em W. Façamos sua soma:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (s_1 - t_1 + s_2 - t_2, s_1 + s_2, t_1 + t_2) = \\ &= (s_1 + s_2 - (t_1 + t_2), s_1 + s_2, t_1 + t_2) \end{aligned}$$

e o item está de acordo.

S iii) Tomemos $v = (s - t, s, t) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Façamos seu produto:

$$\alpha v = (\alpha (s - t), \alpha s, \alpha t) = (\alpha s - \alpha t, \alpha s, \alpha t)$$

e o item está de acordo.

Como todos os itens se mostraram verdadeiros, o conjunto W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

□

2.23 Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ não são subespaços do $\mathbb{R}^3$:

(a) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\right\}$

(b) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq y \leq z\right\}$

(c) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y \in \mathbb{Q}\right\}$

Solução:

(a) Seja $\widetilde{0} \in W$, temos que $(1, 0, 0) \notin W$. Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}, u \in W$ e $x \leqslant y \leqslant z$.

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

Suponha $a < 0$, ocorre que $\alpha x \geqslant \alpha y \geqslant \alpha z$.

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(c) Temos que um vetor de W é da forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$. Seja $\alpha = \frac{1}{3}, a = 1, b = 2$. Então,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}y = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}y$$

Mas $\frac{1}{6}$ é irracional, portanto W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\square$

2.24 Sejam U, V e W é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = z\} \\ V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\} \\ W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3, U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em qual dos casos anteriores a soma é direta?

Solução:

(i) $U \cap V$. Sejam $u = (x, y, x) \in U, v = (0, 0, z) \in V$. Façamos

$$\begin{aligned} &u = v \\ &(x,y,x) = (0,0,z) \\ &x = y = z = 0 \\ &(0,0,0) \in U \cap V \end{aligned}$$

Portanto, $U + V$ é soma direta.

(ii) $U \cap W$. Sejam $u = (x, y, x) \in U, w = (-y - z, y, z) \in W$. Façamos

$$\begin{aligned} &u = v \\ &(x,y,x) = (-y-z,y,z) \end{aligned}$$

Portanto, $U + W$ não é soma direta.

(iii) $V \cap W$. Sejam $v = (0, 0, z) \in U, w = (-y - z, y, z) \in W$. Façamos

$$\begin{aligned} &v = w \\ &(0,0,z) = (-y-z,y,z) \\ &\begin{cases} 0 = -y - z \Rightarrow z = 0 \\ 0 = y \\ z = z \Rightarrow (0,0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $V + W$ é soma direta.

$\square$

2.25 Determine um conjunto de geradores para cada um dos subespaços do $\mathbb{R}^3$:

(a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\}$

(b) $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z + y = 0 \text{ e } x - 2y = 0\right\}$

(c) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0\right\}$

(d) $U \cap W$

(e) $V + W$

Solução:

(a) Do enunciado temos que $x = 2y$. Então, seja $u = (2y, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então um conjunto de geradores para U é

$$\begin{aligned} u &= y\,(2, 1, 0) + z\,(0, 0, 1) \\ U &= [(2, 1, 0)\,, (0, 0, 1)] \end{aligned}$$

(b) Do enunciado temos que $z = -y$ e $x = 2y$. Então, seja $v = (2y, y, -y) \in \mathbb{R}^3$. Então um conjunto de geradores para V é

$$\begin{aligned} v &= y\,(2, 1, -1) \\ V &= [(2, 1, -1)] \end{aligned}$$

(c) Do enunciado temos que $x = 3z - 2y$. Então, seja $w = (3z - 2y, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então um conjunto de geradores para W é

$$\begin{aligned} w &= y\,(-2, 1, 0) + z\,(3, 0, 1) \\ W &= [(-2, 1, 0)\,, (3, 0, 1)] \end{aligned}$$

(d) Sejam $u = (2y, y, z) \in U, w = (3z - 2y, y, z) \in W$. Para encontrar os geradores de $U \cap W$ façamos

$$\begin{aligned} u &= w \\ 2y &= 3z - 2y \\ z &= \frac{4y}{3} \end{aligned}$$

Seja $a \in U \cap W$, então

$$\begin{aligned} a &= \left(x, y, \frac{4y}{3}\right) \\ a &= x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, {}^4\!/_3) \end{aligned}$$

Por ser um gerador podemos multiplicar os vetores por escalares de maneira a obtermos vetores de números inteiros, então, multiplicando o segundo vetor por 3, obtemos o seguinte conjunto gerador para $U \cap W$.

$$a = [(1, 0, 0), (0, 3, 4)]$$

(e) Sejam $v = (2y, y, -2y) \in V, w = (3z - 2y, y, z) \in W$. Para encontrar os geradores de $V + W$ façamos

$$\begin{aligned}
&v + w = (2y + 3z - 2y, y + y, z - 2y) \\
&= (3z, 2y, z - 2y) \\
&= y(0, 2, -2) + z(3, 0, 1) \\
&\Rightarrow V + W = [(0, 2, -2), (3, 0, 1)]
\end{aligned}$$

□

2.26 Sejam u, v vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Se não existe nenhum $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, mostre que $\mathbb{R}^2 = [u] \oplus [v]$.

Solução:

Mostremos que $[u] \oplus [v]$.

Seja $x \in [u] \cap [v]$.

$x = \alpha u = \beta v$

Se $\alpha \neq 0$, $u = \frac{\beta}{\alpha} v$. Absurdo, pois u não é múltiplo de v.

Se $\alpha = 0$, $x = 0$.

Portanto, $[u] \cap [v] = \{0\}$.

Precisamos mostrar que $\mathbb{R}^2 \subseteq [u] \oplus [v]$.

Seja $w = (x, y), u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Precisamos mostrar que $w = \alpha u + \beta v$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&(x, y) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = x \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = y \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_1 = x y_1 \\ \alpha y_1 x_1 + \beta y_2 x_1 = y x_1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \beta(x_2 y_1 - y_2 x_1) = x y_1 - y x_1 \\
&\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{x y_1 - y x_1}{x_2 y_1 - y_2 x_1}} \\
&\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{y_1^2 (x y_2 - y x_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}} \\
&\therefore \mathbb{R}^2 \subset [u] \oplus [v]
\end{aligned}$$

Portanto, $[u] \oplus [v]$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. Como $[u] \oplus [v] \subset \mathbb{R}^2$, segue que, $[u] \oplus [v] = \mathbb{R}^2$.

$\square$

2.27 Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (-1, 0, 1)$ e $v_2 = (3, 4, -2)$. Determinar um sistema de equações homogêneas para o qual seu espaço solução seja exatamente o subespaço gerado por estes vetores.

Solução:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(-1, 0, 1) + \beta(3, 4, -2) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} -\alpha & +3\beta & = x & (1) \\ & 4\beta & = y & (2) \\ \alpha & -2\beta & = z & (3) \end{cases}$$

De (1) e (3), temos $\beta = x + z$, substituindo em (2), temos

$$\frac{y}{4} = x + z$$
$$\Rightarrow y = 4x + 4z$$

Substituindo em (3), temos

$$\alpha = 2(x + z) + z$$
$$\alpha = 2x + 3z$$

Portanto, um sistema de equações homogêneas é dado por

$$\begin{cases} 4x + 4z - y = 0 \\ 8x + 8z - 2y = 0 \end{cases}$$

$\square$

2.28 Seja $C[\mathbb{R}]$ o espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que $\left\{\text{sen}^2(t), \cos^2(t), \text{sen}(t)\cos(t)\right\}$ e $\{1, \text{sen}(2t), \cos(2t)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $C[\mathbb{R}]$.

Solução:

Sejam $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ escalares reais tais que

$$\begin{cases} a_1 \,\text{sen}^2 t & +b_1 \cos^2 t & +c_1 \,\text{sen} t \cos t & (1) \\ a_2 & +b_2 \,\text{sen} 2t & +c_2 \cos 2t & (2) \end{cases}$$

Devemos mostrar que cada vetor de um conjunto é combinação linear do outro.

Das relações trigonométricas, temos que

$$\text{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \text{ e } \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

então

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 t &= \frac{1}{2}.1 + 0.\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}.\cos 2t \\
\cos^2 t &= \frac{1}{2}.1 + 0.\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}.\cos 2t \\
\operatorname{sen} t \cos t &= 0.1 + \frac{1}{2}.\operatorname{sen} 2t + 0.\cos 2t
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \operatorname{sen}^2 t + 1 \cos^2 t + 0 \operatorname{sen} t \cos t \\
\operatorname{sen} 2t &= 0 \operatorname{sen}^2 t + 0 \cos^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t \\
\cos 2t &= -1 \operatorname{sen}^2 t + 1 \cos^2 t + 0 \operatorname{sen} t \cos t
\end{aligned}$$

Portanto ambos geram o mesmo subespaço.

□

2.29 Mostre que $B = \{v = (1+i, 2i), w = (1, 1+i)\} \subset \mathbb{C}^2$ é L.D., quando consideramos $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais. É verdade que $B \subset \mathbb{C}^2$ é L.D. quando $\mathbb{C}^2$ é visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais?

Solução:

Para que seja L.D., é necessário que um vetor seja escrito como combinação linear dos demais, então:

Seja $U, V \in \mathbb{C}^2$. Precisamos mostrar se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned}
& v = \lambda w \\
& (1+i, 2i) = \lambda (1, 1+i) \\
& \begin{cases} 1 + i = \lambda \\ 2i = \lambda (1+i) \end{cases} \\
& \Rightarrow \lambda = 1 + i
\end{aligned}$$

Portanto, $B \subset \mathbb{C}^2$ é L.D.

Para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ os escalares devem ser reais, então.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
& x (1+i, 2i) + y (1, 1+i) = (0, 0) \\
& \Rightarrow \begin{cases} (1+i) x + y = 0 \\ 2xi + (1+i) y = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} (x+y) + xi = 0 \\ y + (2x+y) i = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow x = 0 = y
\end{aligned}$$

Portanto, B é L.I. $\square$

2.30 Encontre o subespaço W do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais, gerado pelos vetores $w_1 = (1, -2, 5, -3)$ e $w_2 = (2, 3, 1, -4)$. É verdade que $(17, -7, -5, 2) \in [w_1, w_2]$?

Solução:

Seja $(x, y, z, w) \in W$, então (x, y, z, w) deve ser escrito como combinação linear dos vetores w_1 e w_2, então, seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha\,(1, -2, 5, -3) + \beta\,(2, 3, 1, -4) = (x, y, z, w)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -2\alpha + 3\beta = y \\ 5\alpha + \beta = z \\ -3\alpha - 4\beta = w \end{cases}$$

$$\therefore (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, 5\alpha + \beta, -3\alpha - 4\beta) \in W$$

Logo, $W = \{(\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, 5\alpha + \beta, -3\alpha - 4\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Para que $(17, -7, -5, 2) \in [w_1, w_2]$, devemos ter:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 17 & (1) \\ -2\alpha + 3\beta = -7 & (2) \\ 5\alpha + \beta = -5 & (3) \\ -3\alpha - 4\beta = 2 & \end{cases}$$

Resolvendo,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 17 \\ -2\alpha + 3\beta = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 34 \\ -2\alpha + 3\beta = -7 \end{cases}$$

$$7\beta = 27 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{27}{7}}$$

$$\alpha = 17 - 2.\frac{27}{7} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{65}{7}}$$

Mas, em (3):

$$5.\frac{65}{7} + \frac{27}{7} = \frac{352}{7} \neq -5$$

$$\therefore (17, -7, -5, 2) \notin [w_1, w_2]$$

$\square$

2.31 Seja V o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ com as operações $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ para qualquer $f,g\in V$ e $\alpha f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ para qualquer $f\in V$ e todo $\alpha\in\mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $U=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f(x)=f(-x),\forall x\in\mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.

(b) $W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.

(c) $V=U\oplus W$

Solução:

(a) (i) Dada 0 a função nula, temos que $0(x)=0=0(-x)$. Logo $0\in U$.

(ii) Para verificar que U é subespaço precisamos ver se dados $f,g\in U$, temos $f+g\in U$.
Dados, $f,g\in U$, temos que, $f(x)=f(-x)$ e $g(x)=g(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Logo,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$

Portanto, $f+g\in U$.

(iii) Sejam $f\in U$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Temos

$$(\alpha f)(x)=(\alpha f)(-x)=\alpha f(-x)=\alpha f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Logo, $\alpha f\in U$.
Portanto, U é subespaço de V.

(b) (i) Considerando 0 a função nula, temos que, $0(-x)=0=-0(x)$. Logo, $0\in W$.

(ii) Sejam $f,g\in W$. Assim, $f(-x)=-f(x)$ e $g(-x)=-g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Logo,

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$$

Portanto, $f+g\in W$.

(iii) Sejam $f\in W$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Temos

$$(\alpha f)(-x)=\alpha f(-x)=\alpha(-f(x))=-\alpha f(x)=-(\alpha f)(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

Logo, $\alpha f\in W$.
Portanto, W é subespaço de V.

(c) Mostremos primeiro que $U \cap W = \{0\}$.
Seja $f \in U \cap W$. Como $f \in U$, temos que $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$
e como $f \in W$ segue que $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Logo, $f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Assim, $2f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Como $f(x) \in \mathbb{R}$, segue que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Portanto, $f = 0$.
Portanto, $U \cap W = \{0\}$.

Claramente temos que $U + W \subset V$. Precisamos ver que $\forall f \in V$ temos que, $f \in U + W$.
Seja $f \in V$. Note que $\forall x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Sejam $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
Temos que

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

e

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$$

Portanto, $g \in U$ e $h \in V$.
Como $f = g + h \in U + W$ segue que $V \subset U + W$.
E, como $U \cap W = \{0\}$ segue que $V = U \oplus W$.

□

2.32 Mostre que $B = \left\{(1-t)^3, (1-t)^2, (1-t), 1\right\}$ gera o espaço vetorial $P^3(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais.
Solução:
Seja $at^3 + bt^2 + ct + d \in P^3(\mathbb{R})$. Precisamos verificar se existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$\alpha(1-t)^3+\beta(1-t)^2+\gamma(1-t)+\delta.1=at^3+bt^2+ct+d$
$\Rightarrow \alpha-3\alpha t+3\alpha t^2-\alpha t^3+\beta-2\beta t+\beta t^2+\gamma-\gamma t+\delta=at^3+bt^2+ct+d$
$\Rightarrow -\alpha t^3+(3\alpha+\beta)t^2+(-3\alpha-2\beta-\gamma)t+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=at^3+bt^2+ct+d$

$$\begin{cases} -\alpha=a\Rightarrow\alpha=-a \\ 3\alpha+\beta=b\Rightarrow\beta=b+3a \\ -3\alpha-2\beta-\gamma=c\Rightarrow\gamma=-3a-2b-c \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=d\Rightarrow\delta=a+b+c+d \end{cases}$$

Assim, existem $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tais que $P_3(\mathbb{R})\subset[B]$.
Portanto, B gera $P^3(\mathbb{R})$.

□

2.33 Diga se é verdadeiro ou falso e justifique sua resposta:

(a) ( ) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais.

(b) ( ) a reta $r\subset\mathbb{R}^2$ de equação $3x-y=-1$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais.

(c) ( ) a reta $r\subset\mathbb{R}^2$ de equação $3x-y=67$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais.

Solução:

(a) Não, pois se $\mathbb{R}^2$ fosse subespaço sobre $\mathbb{C}$ teríamos que $\forall\alpha=a+bi\in\mathbb{C}$ e $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\alpha(x,y)=(a+bi)(x,y)=((a+bi)x,(a+bi)y)\notin\mathbb{R}^2$$

(b) Temos que

$$r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=3x+1\right\}=\{(x,3x+1):x\in\mathbb{R}\}$$

É fácil verificar que $(0,0)\notin r$.

Temos ainda que se $r\subset\mathbb{R}^2$ fosse um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, em particular, teríamos que $\forall a+bi\in\mathbb{C},(a+bi).(x,y)\in r$ para $(x,y)\in r$, e teríamos $((a+bi)x,(a+bi)y)\in\mathbb{R}^2$. Absurdo, pois $a+bi\notin\mathbb{R}$ se $b\neq0$.

(c) Se $y = 3x + 67$, o ponto $(0, 0) \notin r$, portanto, $r \subset \mathbb{R}^2$ não é subespaço de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

$\square$

2.34 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$. Use os axiomas de espaço vetorial para mostrar que $n.v = v + v + \ldots + v$ (n parcelas).

Solução:

O Princípio de Indução nos diz que:

$P(n)$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De fato, para $n = 2$, temos

$$2v = (1 + 1)v = 1v + 1v = v + v, \forall v \in V$$

Vamos supor que vale para $n = k$, ou seja,

$$kv = v + v + \ldots + v(k \text{ parcelas})$$

Devemos mostrar que vale para $n = k + 1$.

$$(k + 1)v = kv + 1v = \underbrace{v + v + \ldots + v}_{(k \text{ parcelas})} + v$$

$\square$

2.35 Seja V um espaço vetorial. Use as relações $2(u + v) = 2u + 2v$ e $2w = w + w$ para mostrar que a comutatividade pode ser demonstrada a partir dos demais axiomas de espaço vetorial.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned}
&2(u + v) = 2u + 2v \\
&u + v + u + v = u + u + v + v \\
&u + v + u + \cancel{v + (-v)} = u + u + v + \cancel{v + (-v)} \\
&\cancel{(-u) + u} + v + u = \cancel{(-u) + u} + u + v \\
&v + u = u + v
\end{aligned}$$

$\square$

2.36 Em $\mathbb{R}^2$, mantenhamos a definição usual de produto λv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras distintas, a definição de soma $u + v$ dos vetores $u = (x, y)$ e $v = (x_1, y_1)$. Em cada caso, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados.

a) $u + v = (x + y_1, x_1 + y)$

b) $u + v = (xx_1, yy_1)$

c) $u + v = (3x + 3x_1, 5x + 5x_1)$

Solução:
Veja resolução no Exerc. 7.1, pág. 172. □

2.37 Defina a média entre dois vetores u e v de um espaço vetorial V por $M(u,v) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Mostre que $M(M(u,v), w) = M(u, M(v,w))$. Se, e somente se, $u = w$.

Solução:
$\Rightarrow$) Se $M(M(u,v), w) = M(u, M(v,w))$, então

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, w\right) &= M\left(u, \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) + \frac{1}{2}w &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) \\
\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}w \\
u + v + 2w &= 2u + v + w \\
u + 2w &= 2u + w \\
2w - w &= 2u - u \\
w &= u
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Se $u = w$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}v \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) + \frac{1}{2}w &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) + \overbrace{\frac{1}{2}u}^{\left(\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}w\right)} \\
M\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, w\right) &= M\left(u, \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) \\
M(M(u,v), w) &= M(u, M(v,w))
\end{aligned}$$

□

2.38 Sejam V um espaço vetorial real e u e v vetores de V. O segmento de reta de extremidades u e v é, por definição, o conjunto $[u,v] = \{(1-t)u + tv, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Um conjunto X chama-se convexo quando $u, v \in X \Rightarrow [u,v] \subset X$. Ou seja, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X. Mostre que:

a) Todo subespaço de V é um conjunto convexo.

b) A intersecção $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ de conjuntos convexos contidos em V é um conjunto convexo.

c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant c\}$ é um conjunto convexo. Conclua dai que o disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ é um conjunto convexo.

d) Se X é um conjunto convexo e se r, s, t são números reais não negativos, tais que $r + s + t = 1$, então se $u, v, w \in X \Rightarrow ru + sv + tw \in X$.

Solução:

(a) Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $u, v \in W$.

$u + v \in W$ e $tv, (1 - t)u \in W$, então $(1 - t)u + tv \in W$.

Portanto, W é um conjunto convexo.

(b) Sejam $u, v \in X_1 \cap X_2$, então

$(1 - t)u + tv \in X_1$ e $(1 - t)u + tv \in X_2$ (convexos)

então, $X_1 \cap X_2$ é convexo.

Por indução, suponha que vale para m, ou seja, $u, v \in X_1 \cap \ldots \cap X_m$, devemos mostrar que vale para $m+1$. Sejam $u, v \in (X_1 \cap \ldots \cap X_m) \cap X_{m+1}$.

$(1 - t)u + tv \in X_1 \cap \ldots \cap X_m$ e $(1 - t)u + tv \in X_{m+1}$ que são convexos.

Então, $X_1 \cap \ldots \cap X_m \cap X_{m+1}$ é convexo.

(c) Sejam $u, v \in X$, então

$$(1 - t)u + tv \in X, \forall t, 0 \leqslant t < 1$$

Sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in X$.

Sabemos que $x_1^2 + y_1^2 \leqslant c$ e $x_2^2 + y_2^2 \leqslant c$.

Devemos verificar se $(1-t)(x_1, y_1)+t(x_2, y_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) \in X$.

Façamos

$$\begin{aligned}
&(x_1 + t(x_2 - x_1))^2 + (y_1 + t(y_2 - y_1))^2 = \\
&= x_1^2 + 2x_1t(x_2 - x_1) + t^2(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + 2y_1t(y_2 - y_1) + t^2(y_2 - y_1)^2 = \\
&= x_1^2 + 2tx_1x_2 - 2tx_1^2 + t^2x_2 - 2t^2x_1x_2 + t^2x_1^2 + \\
&+y_1^2 + 2ty_1y_2 - 2ty_1^2 + t^2y_2 - 2t^2y_1y_2 + t^2y_1^2 = \\
&= x_1^2 + y_1^2 - 2t(x_1^2 + y_1^2) + t^2(x_2^2 + y_2^2) + t^2(x_1^2 + y_1^2) + \\
&+2t(x_1x_2 + y_1y_2) - 2t^2(x_1x_2 + y_1y_2)
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}&(x_1 + t(x_2 - x_1))^2 + (y_1 + t(y_2 - y_1))^2 \leqslant \\ &\leqslant c - 2tc + t^2c + t^2c + (2t - 2t^2)(x_1x_2 + y_1y_2)\end{aligned} \tag{7.1}$$

Sabemos que $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 0$
então, $x_1^2 + x_2^2 \geqslant -2x_1x_2$ e analogamente, $y_1^2 + y_2^2 \geqslant -2y_1y_2$, então

$$2c \geqslant x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \geqslant -2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

Assim, voltando a Eq. 7.1, temos

$$\begin{aligned}&(x_1 + t(x_2 - x_1))^2 + (y_1 + t(y_2 - y_1))^2 \leqslant \\ &\leqslant 2t^2c - 2tc + c + (-t + t^2)(-2x_1x_2 - 2y_1y_2) \\ &\leqslant 2t^2c - 2tc + c + (t^2 - t)2c \\ &\leqslant c(4t^2 - 4t + 1) \\ &\leqslant c(2t - 1)^2, 0 \leqslant t < 1 \\ &\leqslant c\end{aligned}$$

(d) *Falta resolução.*

□

2.39 Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais.

a) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão aritmética.

b) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ que possuem k coordenadas iguais.

c) O conjunto de vetores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + 3x = y^2 + 3y$.

d) O conjunto de vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $x + 2y = z$.

Solução:

(a) Seja W o tal conjunto e $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in W$, temos
$x_2 - x_1 = x_n - x_{n-1} = k$ e $y_2 - y_1 = y_n - y_{n-1} = j$
então,

$$x_n - x_{n-1} + y_n - y_{n-1} = (x_n + y_n) - (x_{n-1} + y_{n-1}) = k + j \in W$$

e

$$\alpha(x_n - x_{n-1}) = \alpha k \in W$$

Portanto, W é subespaço.

(b) Seja W o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ que possuem k coordenadas iguais.
Temos que $k \leqslant n$. Então, se $(x, y, x), (x, x, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, x) + (x, x, z) = (x + x, y + x, x + z) \notin W.$$

Ou seja, em $\mathbb{R}^3$ podemos tomar vetores com pelo menos duas coordenadas iguais, e verificamos que a soma não é válida.
Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

(c) Seja $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3x = y^2 + 3y\}$, temos

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2 + 3x - 3y = 0 \\ &(x + y)(x - y) + 3(x - y) = 0 \\ &(x - y)(x + y + 3) = 0 \end{aligned}$$

Tomemos dois vetores que satisfazem a equação: $(-3, 0)$ e $(-6, 3)$, mas $(-3, 0) + (-6, 3) = (18, 3)$ não satisfaz.
Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(d) Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = z\}$, temos

i) $0 \in W$.
ii) $x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = z_1 + z_2 \in W$
iii) $\alpha x_1 + 2\alpha y_1 = \alpha(x_1 + 2y_1) = \alpha z_1 \in W$

Portanto, W é um subespaço vetorial.

$\square$

2.40 Mostre que o subconjunto das matrizes simétricas e o subconjunto das matrizes anti-simétricas são subespaços de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre ainda que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é soma direta de tais subespaços.
Solução:
Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ diz-se simétrica quando $A = A^t$, ou seja, quando $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$.

(i) Mostremos que o subconjunto das matrizes simétricas é um subespaço W_s de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

i) A matriz nula é simétrica, então pertence a W_s.

ii) Sejam $A = a_{ij}, B = b_{ij} \in W_s$. Então, $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$.
$A + B$ é a matriz cujo elementos são $a_{ij} + b_{ij}$.
Mas $a_{ij}+b_{ij} = a_{ji}+b_{ji}$. Então, $A+B$ também é simétrica. Portanto, $A + B \in W_s$.

iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = a_{ij} \in W_s$. Então
αA é simétrica, pois $\alpha a_{ij} = \alpha a_{ji}$.
Logo, $\alpha A \in W_s$.

Portanto, W_s é o subespaço das matrizes simétricas de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(ii) Mostremos que o subconjunto das matrizes anti-simétricas é um subespaço W_a de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

i) A matriz nula é anti-simétrica, então pertence a W_a.

ii) Sejam $A = a_{ij}, B = b_{ij} \in W_a$. Então, $a_{ij} = -a_{ji}$ e $b_{ij} = -b_{ji}$.
$A + B$ é a matriz cujo elementos são $a_{ij} + b_{ij}$.
Mas $a_{ij} + b_{ij} = -(a_{ji} + b_{ji}) = -a_{ji} - b_{ji}$. Então, $A + B$ também é anti-simétrica. Portanto, $A + B \in W_a$.

iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = a_{ij} \in W_a$. Então
αA é anti-simétrica, pois $\alpha a_{ij} = -\alpha a_{ji}$.
Logo, $\alpha A \in W_a$.

Portanto, W_a é o subespaço das matrizes anti-simétricas de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(iii) Verifiquemos que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é soma direta.

Seja $M = M^T \in W_s$, então $m_{ij} = m_{ji}$ e $M = -M^T \in W_a$, então $m_{ij} = -m_{ji}$.

$$m_{ij} = \frac{1}{2}(m_{ij} + m_{ji}) + \frac{1}{2}(m_{ij} - m_{ji})$$
$$m_{ij} = \frac{1}{2}m_{ij} + \frac{1}{2}m_{ji} + \frac{1}{2}m_{ij} - \frac{1}{2}m_{ji}$$

Então, $M \in W_s + W_a$.

Seja $M \in W_s \cap W_a$, como $M \in W_s$, temos que $M = M^T \Rightarrow m_{ij} = -m_{ji}$, então $M^T = -M^T \Rightarrow m_{ji} = -m_{ji}$.

$$\underbrace{m_{ij}}_{\in W_s} + m_{ij} = \underbrace{m_{ij}}_{\in W_s} - m_{ji}$$
$$m_{ij} + m_{ij} = m_{ji} - m_{ji}$$
$$2m_{ij} = \widehat{0}$$
$$m_{ij} = \widehat{0}$$

$$\therefore W_s \cap W_a = \{\widehat{0}\}$$

Portanto, $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = W_s \oplus W_a$.

□

2.41 No conjunto $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ uma função é dita *par* se $f(x) = -f(x)$ para todo x e f é dita *ímpar* se $f(x) = -f(-x)$, para todo x. Mostre que o subconjunto das funções pares e o subconjunto das funções ímpares são subespaços de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mostre ainda que $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é soma direta de tais subespaços.

Solução:

Veja resolução no Exerc. 7.1, pág. 192. □

2.42 Seja V um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que a soma e a intersecção destes subespaços é um subespaço de V. Mostre ainda que $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

Solução:

(i) Soma de W_1 e W_2.

i) $0 + 0 = 0 \in W_1 + W_2$.

ii) Sejam $x, y \in W_1 + W_2$, então
$x = u_1 + v_1$, onde $u_1 \in W_1$ e $v_1 \in W_2$
$y = u_2 + v_2$, onde $u_2 \in W_1$ e $v_2 \in W_2$

$$x + y = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$$

Portanto, $u_1 + u_2 \in W_1$ e $w_1 + w_2 \in W_2$, então $x + y \in W_1 + W_2$.

iii) Seja $\alpha \in K$ e $z \in W_1 + W_2$, então
$z = u + v$, onde $u \in W_1$ e $v \in W_2$

$$\alpha z = \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

Portanto, $\alpha u \in W_1$ e $\alpha v \in W_2$, então $\alpha z \in W_1 + W_2$.

Portanto, $W_1 + W_2$ é um subespaço de V.

(ii) Interseção de W_1 e W_2.

i) $0 \in W_1 \cap W_2$, pois $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$.

ii) Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.
$u, v \in W_1$, então $u + v \in W_1$ e
$u, v \in W_2$, então $u + v \in W_2$.
Portanto, $u + v \in W_1 \cap W_2$.

iii) Sejam $\alpha \in K$ e $u \in W_1 \cap W_2$.
$\alpha u \in W_1$ e $\alpha u \in W_2$.
Portanto, $\alpha u \in W_1 \cap W_2$.

Portanto, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

(iii) Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

$\Leftarrow$) Suponha que $W_1 \subset W_2$, então $W_1 \cup W_2 = W_2$,

ou $W_2 \subset W_1$, então $W_1 \cup W_2 = W_1$.

Então, $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V.

$\Rightarrow$) Suponha que

$W_1 \not\subset W_2$, então $u \in W_1$ e $u \notin W_2$ e

$W_2 \not\subset W_1$, então $v \in W_2$ e $v \notin W_1$.

Portanto, $u + v \notin W_1$. Porque se $u + v \in W_1$ teríamos $v \in W_1$.

Absurdo, pois $v \notin W_1$.

Portanto, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1 \Rightarrow W_1 \cup W_2$ é subespaço de V.

$\square$

2.43 Verifique quais dos subconjuntos de vetores $v = (a_1, \ldots, a_n), n \geqslant 3$, abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.

a) Todos os v tais que $a_1 \leqslant 0$.

b) Todos os v tais que $a_1 + 3a_2 = a_3$.

c) Todos os v tais que $a_2 = a_1^2$.

d) Todos os v tais que $a_1 a_2 = 0$.

e) Todos os v tais que a_2 é irracional.

Solução:

a) Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Se $\alpha = -1$ e $v = (-1, \ldots, 0)$, então

$$\alpha v = -1(-1, \ldots, 0) = (1, \ldots, 0) \notin W$$

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

b) Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Onde $u = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e $v = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$. Então,

i) $(0, 0, 0, \ldots, 0) \in W$.

ii) Temos que

$$\begin{aligned} u &= (a_1, a_2, a_1 + 3a_2, \ldots, a_n) \\ v &= (b_1, b_2, b_1 + 3b_2, \ldots, b_n) \\ u + v &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, (a_1 + b_1) + 3(a_2 + b_2), \ldots, a_n + b_n) \end{aligned}$$

Portanto, $u + v \in W$.

iii)

$$\alpha u = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_1 + 3\alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

Portanto, $\alpha u \in W$.

Portanto, W é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

c) Sejam W subespaço de $\mathbb{R}^n, u, v \in \mathbb{R}^n$. Onde $u = (a_1, a_1^2, \ldots, a_n)$ e $v = (b_1, b_1^2, \ldots, b_n)$.

Note que, por definição, $u + v = \big(a_1 + b_1, (a_1 + b_1)^2, \ldots, a_n + b_n\big)$.

Mas a soma de $u + v = \big(a_1 + b_1, a_1^2 + b_1^2, \ldots, a_n + b_n\big)$.

Como $(a_1 + b_1)^2 \neq a_1^2 + b_1^2$, temos que W não é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

d) Sejam W subespaço de $\mathbb{R}^n, u, v \in W$ tal que

$$\begin{aligned} u &= (1, 0, \ldots, 0) \Rightarrow 1.0 = 0 \\ v &= (0, 1, \ldots, 0) \Rightarrow 0.1 = 0 \\ u + v &= (1, 1, \ldots, 0) \Rightarrow 1.1 = 1 \notin W \end{aligned}$$

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

e) Sejam

$$
\begin{aligned}
u &= (0, \sqrt{2}, \ldots) \\
v &= (5, -\sqrt{2}, \ldots) \\
u + v &= (5, 0, \ldots)
\end{aligned}
$$

Mas 0 é irracional
Ou ainda, $\sqrt{2}(0, \sqrt{2}, \ldots) = (0, 2, \ldots)$
Portanto, não é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

□

2.44 Seja V o espaço vetorial das funções f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de V?

a) Todas as f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.

b) Todas as f tais que $f(0) = f(1)$.

c) Todas as f tais que $f(3) = 1 + f(-5)$.

d) Todas as f tais que $f(-1) = 0$.

e) Todas as f que são contínuas.

Solução:

a) Suponha $f(x^2) = x^2$, então
$f(x^2) + f(x^2) = 2x^2$, mas $(f(x) + f(x))^2 = 4x^2$.
Portanto, não é subespaço de V.

b) Seja W um subespaço de V.

i) Sejam $f_1, f_2 \in W$.
$f_1(0) = f_1(1)$ e $f_2(0) = f_2(1)$
Seja $h = f_1 + f_2$, então

$$
\begin{aligned}
&h(0) = f_1(0) + f_2(0) \\
&h(1) = f_1(1) + f_2(1) \\
&f_1(0) + f_2(0) = f_1(1) + f_2(1) \\
&\therefore h(0) = h(1)
\end{aligned}
$$

Portanto, $f_1 + f_2 \in W$.

ii) Sejam $f \in W$ e k escalar em $\mathbb{R}$.

$$(kf)(0) = kf(0) = kf(1) = (kf)(1)$$

Portanto, $kf \in W$.

Portanto, W é subespaço de V.

c) Sejam $f_1, f_2 \in W$.

$$f_1(3) = 1 + f_1(-5)$$
$$f_2(3) = 1 + f_2(-5)$$

Seja $h = f_1 + f_2$. $h(3) = 1 + h(-5)$.

Mas, $h(3) = f_1(3) + f_2(3) = 1 + f_1(-5) + 1 + f_2(-5) = 2 + f_1(-5) + f_2(-5)$ que não satisfaz a definição.

Portanto, não é subespaço de V.

d) Seja W um subespaço de V.

i) Sejam $f_1, f_2 \in W$.
$f_1(-1) = 0$ e $f_2(-1) = 0$
Seja $h = f_1 + f_2$, então

$$h(-1) = f_1(-1) + f_2(-1) = 0 + 0 = 0$$

Portanto, $f_1 + f_2 \in W$.

ii) Sejam $f \in W$ e k escalar em $\mathbb{R}$.

$$(kf)(-1) = kf(-1) = k.0 = 0$$

Portanto, $kf \in W$.

Portanto, W é subespaço de V.

e) Uma função f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

evidentemente, $f(x_0)$ deve estar definido e o limite no ponto deve existir.

(a) $f(x) = 0 \in W$.

(b) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas.
Então, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ é contínua.
De fato,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f+g)(x_0) \end{aligned}$$

Portanto, $(f+g) \in W$.

(c) Sejam $f(x)$ contínua e k escalar real.
$(kf)(x) = kf(x)$ é contínua.
Portanto, $(kf) \in W$.

□

2.45 Seja $V = M_{x \times x}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de V?

a) Todas as matrizes A que são invertíveis.

b) Todas as matrizes A que não são invertíveis.

c) Todas as matrizes A tais que $AB = BA$ com B uma matriz fixa de $M_{x \times x}(\mathbb{R})$.

d) Todas as matrizes A tais que $A^2 = A$.

Solução:

a) Uma matriz A chama-se invertível quando é quadrada e existe uma matriz A^{-1}, chamada a inversa de A, tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade.

Sejam A e B matrizes invertíveis tais que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não é invertível, pois não satisfaz a definição.

Portanto, não é um subespaço vetorial.

b) Sejam A e B matrizes não invertíveis tais que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Uma matriz A é invertível se $\det A \neq 0$.

$A + B$ é invertível. Portanto, não é subespaço vetorial.

c) Seja T um subespaço de V.

i) $0 \in T$.

ii) Sejam $A, C \in T$. Mostrar que $A+C \in T$, ou seja, $(A+C)B = B(A+C)$.
Se $A \in T$, então $AB = BA$.
Se $C \in T$, então $CB = BC$.
Então,

$$AB + CB = BA + BC$$
$$(A + C)B = B(A + C)$$

iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in T$. Mostrar que $\lambda.AB = B.\lambda A$.
Como $\lambda A \in T$, então $\lambda AB = B\lambda A, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

d) A única matriz A tal que $A^2 = A$ é a matriz identidade. Mas

$$A + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que não satisfaz a definição.

Portanto, não é subespaço.

□

2.46 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dado dois elementos x e y em V, a reta que une x e y é, por definição, o conjunto $r = \{(1-t)x + ty, t \in \mathbb{R}\}$. Uma variedade afim é um subconjunto W de V tal que se x e y estão em W a reta que une x e y está contida em W.

a) Mostre que todo subespaço vetorial de V é uma variedade afim.

b) Mostre que toda variedade afim é um conjunto convexo.

c) Mostre que se $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são números reais, o conjunto solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é uma variedade afim em $\mathbb{R}^n$.

Solução:

a) Seja W um subespaço de V.

Se x e $y \in W$, então

$(1-t)x \in W$ e $ty \in W, \forall t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $(1-t)x + ty \in W, \forall t \in \mathbb{R}$.

b) *Falta resolução.*

c) Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ soluções da equação acima.

Logo, $a_1x_1 + a_2y_1 = b$ e $a_1x_2 + a_2y_2 = b$.

Devemos verificar se $(1-t)u + tv$ é solução.

$$\begin{aligned}(1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) &= (x_1, y_1) - t(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \\ &= (x_1 - tx_1 + tx_2, y_1 - ty_1 + ty_2)\end{aligned}$$

Esta última igualdade é solução?

$$\begin{aligned}&a_1(x_1 - tx_1 + tx_2) + a_2(y_1 - ty_1 + ty_2) = \\ &= a_1x_1 + a_2y_1 + t(a_1x_1 + a_2y_1) - t(a_1x_2 + a_2y_2) = \\ &= b + tb - tb = b\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto das soluções da equação dada é uma variedade afim.

□

2.47 Considere os seguintes subespaços:

a) Mostre que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$ são o próprio $\mathbb{R}$ e o subespaço nulo.

b) Mostre que um subespaço de $\mathbb{R}^2$ ou é o próprio $\mathbb{R}^2$ ou é o espaço nulo ou é uma reta passando pela origem de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

a) Seja W um subespaço de $\mathbb{R}$.
Suponha $W \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \in W$ tal que $v \neq 0$. $\Rightarrow \lambda v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Seja $u \in \mathbb{R}.\lambda v = u$ tem solução?
Como $v \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \lambda v v^{-1} &= u v^{-1} \\ \lambda &= \frac{u}{v} \end{aligned}$$

Portanto, $W = \mathbb{R}$.

b) Um subespaço de $\mathbb{R}^2$ é todo vetor da forma $tv \in W, \forall t \in \mathbb{R}$.

i) Se todo $u \in W$ é múltiplo de V, então $W = \{tv, t \in \mathbb{R}\}$.
ii) Se $\exists u \in W$, onde u não é múltiplo de V, então u e v geram $\mathbb{R}^2$.
De fato, sejam $w = (x, y), u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in W$.
Então, $w = \alpha u + \beta v$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(x, y) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = x \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_1 = x y_1 \\ \alpha y_1 x_1 + \beta y_2 x_1 = y x_1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \beta(x_2 y_1 - y_2 x_1) = x y_1 - y x_1$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{x y_1 - y x_1}{x_2 y_1 - y_2 x_1}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{y_1^2 (x y_2 - y x_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}}$$

□

2.48 Considere os subespaços F_1, F_2 de $\mathbb{R}^3$ definidos da seguinte forma:
$F_1 = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$ e $F_2 = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$.
Mostre que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de F_1 com F_2.

Solução:

i) Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sejam $(a, a, a) \in F_1$ e $(b, c, 0) \in F_2$, então

$$
\begin{aligned}
&(x, y, z) = (a, a, a) + (b, c, 0)\\
&\Rightarrow \begin{cases} x = a + b \\ y = a + c \\ z = 0 \end{cases}\\
&\Rightarrow b = x - z\\
&\Rightarrow c = y - z\\
&\therefore (x, y, z) = (z, z, z) + (x - z, y - z, 0)
\end{aligned}
$$

ii) Seja $u = (a, b, c) \in F_1 \cap F_2$, então
$(a, a, a) \in F_1$ e $(a, b, 0) \in F_2$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} a = a \\ a = b \\ a = 0 \end{cases}\\
&\Rightarrow a = b = 0\\
&\Rightarrow F_1 \cap F_2 = (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

□

2.49 Exprima o vetor $(1, -3, 0)$ como combinação linear dos vetores $u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0), w = (2, -3, 5)$.
Solução:
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$
\begin{aligned}
&a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(2, -3, 5) = (1, -3, 0)\\
&\begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ \phantom{a +{}} b - 3c = -3 \\ \phantom{a + b - {}} 5c = 0 \end{cases}\\
&\Rightarrow c = 0; b = -3; a = 4\\
&\therefore (1, -3, 0) = 4(1, 0, 0) - 3(1, 1, 0) + 0(2, -3, 5)
\end{aligned}
$$

□

2.50 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

a) ( ) O vetor $(1, -1, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.

b) ( ) Qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u = (-5, 3, 2)$ e $v = (3, -1, 3)$.

Solução:

a) (F) Por definição de subespaço gerado existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
&a(1,2,3) + b(3,2,1) = (1,-1,2) \\
&\Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 2b = -1 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 4b = 3 \\ 8b = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow b = \frac{3}{4} \text{ e } b = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Absurdo. Portanto, a alternativa é **falsa**.

b) (F) O conjunto dado só possui *dois* vetores e para gerar $\mathbb{R}^3$ são necessário *três* vetores. Portanto, a alternativa é **falsa**.

□

2.51 Uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é dita *limitada* quando existe uma constante não negativa k tal que $|f(x)| \leqslant k$. Mostre que o conjunto das funções limitadas é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o qual é gerado pelas funções limitadas positivas.

Solução:

i) $0(x)$ é limitada.

ii) Sejam W um subespaço de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f_1(x), f_2(x) \in W$.
$|f_1(x)| \leqslant k_1$ e $|f_2(x)| \leqslant k_2$, então, pela desigualdade triangular, temos que

$$|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant k_1 + k_2$$

Portanto, $f_1(x) + f_2(x)$ é limitada.

iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f(x) \in W$.

$$|\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leqslant |\lambda|\,k$$

Portanto, $\lambda f(x)$ é limitada.

Portanto, W é subespaço de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\square$

2.52 Seja $P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais e para todo $n \in \mathbb{N}$ seja Q_n o conjunto dos polinômios de graus arbitrários que são divisíveis por x^n. Mostre que Q_n é um subespaço de $P(\mathbb{R})$. Encontre um subespaço F de $P(\mathbb{R})$ tal que $P(\mathbb{R})$ seja a soma direta de Q_n com F.

Solução:

Temos que $Q_n = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) :\ \text{grau } P(x) \geqslant n\}$ ou
$Q_n = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) = q(x).x^n\}$, onde $q(x) \in P(\mathbb{R})$.

i) $0 \in Q_n$, pois $0(x) = 0(x).x^n$.

ii) Sejam $P_1(x), P_2(x) \in Q_n$, então $p_1(x) = q_1(x).x^n$ e $p_2(x) = q_2(x).x^n$ onde $q_1(x), q_2(x) \in P(\mathbb{R})$. Isto implica que $p_1(x) + p_2(x) \in Q_n$, pois

$$p_1(x) + p_2(x) = q_1(x).x^n + q_2(x).x^n = (q_1(x) + q_2(x)).x^n$$

iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in Q_n$

$p(x) = q(x).x^n$, onde $q(x) \in P(\mathbb{R})$.

$\alpha p(x) \in Q_n$, pois $\alpha p(x) = \alpha q(x).x^n$

Portanto, Q_n é um subespaço de $P(\mathbb{R})$.
Façamos agora, a soma direta.
Seja $\overline{Q_n} = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) = 0$ ou grau $p(x) < n\}$,
ou seja, $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}, a_i \in \mathbb{R}$.

i) Seja $u(x) \in Q_n \cap \overline{Q_n}$, isto é, $u(x) \in Q_n$ e $u(x) \in \overline{Q_n}$, então

$u(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots$, pois $u(x) \in Q_n$ e

$u(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$, pois $u(x) \in \overline{Q_n}$, temos que

$$a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$$

Pela igualdade de polinômios, temos que

$a_0 = a_1 = \ldots = 0$ e $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

então, $u(x) = 0$.

Portanto, $Q_n \cap \overline{Q_n} = \{0\}$.

ii) Mostremos que $P(\mathbb{R}) = Q_n + \overline{Q_n}$.

Seja $p(x) \in P(\mathbb{R})$, isto é,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

com $k \geqslant n$.

$$p(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}}_{q_1(x)} + \underbrace{a_nx^n + \ldots + a_kx^k + \ldots}_{q_2(x)}$$

Então, $q_1(x) \in \overline{Q_n}$ e $q_2(x) \in \overline{Q_n}$, isto é,

$$p(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

Portanto, $P(\mathbb{R}) = \overline{Q_n} + Q_n$.

$\square$

7.2 Cap. 03

3.01 Mostre que o conjunto $\left\{1, (x-a), (x-a)^2, ..., (x-a)^{n-1}\right\} \subset P^{n-1}(\mathbb{R})$, onde $a \in \mathbb{R}$ é L.I.

Solução:

Falta resolução. $\square$

3.02 Mostre que: se u, v são vetores L.I. de um espaço vetorial V sobre um corpo K, então $(u+v)$ e $(u-v)$ também são L.I.

Solução:

Falta resolução. $\square$

3.03 No $\mathbb{R}^2$ o conjunto de vetores $\{(1,0), (0,1)\}$ é L.I. É verdade que o conjunto de vetores $\{(1,0), (0,1), (a,b)\}$ também é L.I.?

Solução:

Não, pois (a,b) pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores.

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Portanto, este conjunto é L.D.

Além disso, pelo Teorema 3.5, $\{(1,0),(0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$, então qualquer conjunto com mais de dois vetores é L.D.

$\square$

3.04 Mostre que no espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

é L.D.

Solução:
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta + 3\gamma & 2\alpha - 3\beta - 4\gamma \\ -3\alpha + 3\beta + 3\gamma & \alpha + 0\beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\beta - 4\gamma = 0 \\ -3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 0\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo em forma de matriz e escalonando, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{(2)(-3)} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{(3)(-2)} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 0\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Como o sistema possui duas equações e três incógnitas, então admite infinitas soluções.

Portanto, o conjunto é L.D.

De fato, $\beta = -2\gamma$ e

$$\alpha = 2\beta + 3\gamma = 2(-2)\gamma + 3\gamma$$
$$\Rightarrow \alpha = -\gamma$$

Temos que $\gamma = 1, \beta = -2$ e $\alpha = -1$ também é uma solução do sistema. □

3.05 É verdade que $[\{(3,1), (5,2)\}] = \mathbb{R}^2$? Qual o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

É verdade que $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in [S]$?

Solução:

(a) Verifiquemos se o conjunto gera $\mathbb{R}^2$.

$$(x,y) = \alpha\,(3,1) + \beta\,(5,2)$$
$$(x,y) = (3\alpha + 5\beta, \alpha + 2\beta)$$
$$\begin{cases} x = 3\alpha + 5\beta \\ y = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2x - 5y \\ \beta = -x + 3y \end{cases}$$

Portanto o conjunto gera $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculemos o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S.

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\alpha + 3\beta & 2\alpha - \beta \\ 2\alpha + \beta & 3\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = a \\ 2\alpha - \beta = b \\ 2\alpha + \beta = c \\ 3\alpha + \beta = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta = a \\ 5\beta = 2a + b \\ 5\beta = 2a + c \\ 10\beta = 3a + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+b}{5} = \dfrac{2a+c}{5} \Rightarrow \boxed{b = c} \\ \dfrac{2a+c}{5} = \dfrac{3a+d}{10} \Rightarrow 4a + c = 3a + d \Rightarrow \boxed{a = d - c} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d-c & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin [S]$, pois o elemento a_{12} deve ser igual ao elemento a_{21}.

$\square$

3.06 Mostre que os números complexos $w = 2 + 3i$ e $z = 1 - 2i$ geram o corpo complexo $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução:
Sejam $a, b \in \mathbb{R}, c + di \in \mathbb{C}$.

$$a\,(2+3i) + b\,(1-2i) = c + di$$
$$2a + 3ai + b - 2bi = c + di$$
$$2a + b + (3a - 2b)\,i = c + di$$
$$\begin{cases} 2a + b = c \\ 3a - 2b = d \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = \frac{2c+d}{7}, b = \frac{3c-2d}{7}$$

□

3.07 Encontre um vetor em $\mathbb{R}^3$ que gere a intersecção dos subespaços U e W onde U é o plano xy e W é o subespaço gerado pelos vetores $(1,2,3)$ e $(1,-1,1)$.
Solução:
Temos que os vetores da base canônica $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ geram o plano xy. Então, sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (x,y,z) \\ \gamma(1,2,3) + \delta(1,-1,1) = (x,y,z) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ 0 = z \\ \gamma + \delta = x \\ 2\gamma - \delta = y \\ 3\gamma + \delta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma + \delta \\ \beta = 2\gamma - \delta \\ 0 = 3\gamma + \delta \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma - 3\gamma = -2\gamma \\ \beta = 2\gamma + 3\gamma = 5\gamma \\ \delta = -3\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\gamma \\ y = 5\gamma \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto, para $\gamma = 1$, um vetor que gera a intersecção é $(-2, 5)$. □

3.08 Determine m e n para que os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ seja L.I.:

(a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$

(b) $\{(6, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$

Solução:

(a) Façamos uma combinação linear dos vetores do conjunto e igualamos ao vetor nulo, então sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a\,(3, 5m, 1) + b\,(2, 0, 4) + c\,(1, m, 3) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 5ma + 0 + mc = 0 \\ a + 4b + 3c = 0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5m & 0 & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} \Rightarrow m = 0$$

Subtiuindo m no sistema, temos:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ a + 4b + 3c = 0 \end{cases}$$

Como $m = 0$ temos infinitas soluções, portanto, o conjunto é L.D.

Então, para que o conjunto seja L.I. devemos ter $m \neq 0$.

(b) Façamos uma combinação linear dos vetores do conjunto e igualamos ao vetor nulo, então sejam $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a\,(6, 2, n) + b\,(3, m + n, m - 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 6a + 3b = 0\,(-n/2) \\ 2a + b\,(m + n) = 0\,(-3) \\ na + b\,(m - 1) = 0\,(3) \end{cases} \quad \begin{cases} 6a + 3b = 0 \\ 0 - 3b\,(m + n) + 3b = 0\,(I) \\ 0 + 3b\,(m - 1) - \frac{3bn}{2} = 0\,(II) \end{cases}$$
$$(I) - 3b\,[(m + n) - 1] = 0 \Rightarrow m + n - 1 = 0$$
$$(II)\,3b\left[(m - 1) - \tfrac{n}{2}\right] = 0 \Rightarrow m - 1 - \tfrac{n}{2} = 0$$
$$\Rightarrow m = 1 - n$$

Subtiuindo em (II), temos:

$$1 - n - 1 = \tfrac{n}{2}$$
$$n = 0 \therefore m = 1$$

Neste caso temos infinitas soluções, portanto, o conjunto é L.D.

Então, para que o conjunto seja L.I. devemos ter $n \neq 0$ e $m \neq 1$.

$\square$

3.09 Seja $\{u, U, V\}$ um conjunto L.I. de vetores em um espaço vetorial V. Prove que o conjunto {u + v - 3w, u + 3v - w, v + w} é L.D.

Solução:
Suponhamos que

$$\begin{aligned}
&x\,(u+v-3w)+y\,(u+3v-w)+z\,(v+w)=(0,0,0)\\
&xu+xv-3xw+yu+3yv-yw+zv+zw=(0,0,0)\\
&(x+y)\,u+(x+3y+z)\,v+(-3x-y+z)\,w=(0,0,0)
\end{aligned}$$

Daí temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y+z=0 \\ -3x-y+z=0 \end{cases}$$

Formemos então uma matriz e a reduzimos a forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como temos infinitas soluções o sistema é L.D.

□

Nota:
Segundo o livro de Álgebra Linear do Elon Lages Lima [Elon], temos a seguinte definição que se aplica no exercício *3.10* e *3.18*.

Definição 7.1 Se uma função em $\mathbb{C}^{\infty} = \mathbb{R}$ é combinação linear de outras, então suas derivadas são combinações lineares, com os mesmos coeficientes das derivadas dessas outras.

3.10 Considere o espaço vetorial V como sendo o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com as operações usuais e na variável t. Mostre que o conjunto $\{e^t, e^{2t}\}$ é L.I.
Solução:

Façamos uma combinação linear dos vetores do conjunto e igualamos ao vetor nulo, então sejam $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ae^t + be^{2t} = 0$$

Sua derivada é: $ae^t + 2be^{2t} = 0$
Então, devemos ter: $b = 2b \Rightarrow b = 0$
Portanto,

$$\begin{aligned}
&ae^t + be^{2t} = 0\\
&ae^t = 0, \ \ (e^t \neq 0 \text{ por definição})\\
&a = 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\left\{e^t, e^{2t}\right\}$ é L.I.

$\square$

3.11 Seja $\mathbb{C}^3$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}^3$ são L.I. ?

(a) $\{(i,1,0),(1+i,2,0),(3,1,0)\}$

(b) $\{(i,1,0),(2+i,3i,5\text{-}i),(2,4+4i,4\text{-}6i)\}$

Solução:

(a) Fazendo a combinação linear dos vetores do conjunto temos. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a\,(i,1,0) + b\,(1+i,2,0) + c\,(3,1,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} ia + (1+i)\,b + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Como o sistema tem infinitas soluções, o subconjunto é L.D.

(b) Fazendo a combinação linear dos vetores do conjunto temos. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a\,(i,1,0) + b\,(2+i,3i,5-i) + c\,(2,4+4i,4-6i) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} ai + b\,(2+i) + 2c = 0 \\ a + b3i + c\,(4+4i) = 0 \\ 0 + b\,(5-i) + c\,(4-6i) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} i & 2+i & 2 \\ 0 & 5-i & 4-6i \\ 1 & 3i & 4+4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 2+i & 2 \\ 0 & 5-i & 4-6i \\ 0 & 3 & 4-4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 2+i & 2 \\ 0 & 5-i & 4-6i \\ 0 & 0 & \frac{-4+6i}{3} \end{pmatrix}$$

Para achar o fator multiplicativo na última linha faça:

$$3x + 5 - i = 0$$
$$x = \tfrac{-5+i}{3}$$

O último valor do escalonado foi encontrado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&(4-4i)\left(\frac{-5+i}{3}\right)+4-6i= \\
&=\frac{-20+4i+20i+4}{3}+4-6i \\
&=\frac{-16+24i+12-18i}{3} \\
&=\frac{-4+6i}{3}
\end{aligned}
$$

Como temos uma única solução, o subconjunto é L.I.

□

3.12 Sejam V um espaço vetorial e $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$. Suponha que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ é um subconjunto L.I. Mostre que $[u_1, u_2, \ldots, u_r] \cap [v_1, v_2, \ldots, v_s] = \{0\}$.

Solução:

Seja

$$
\begin{aligned}
v &= [u_1, u_2, \ldots, u_r] \\
v &= a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ru_r (I)
\end{aligned}
$$

Por outro lado se existe a intersecção entre $[u_1, u_2, \ldots, u_r]$ e $[v_1, v_2, \ldots, v_s]$ podemos escrever v como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, então.

$$
\begin{aligned}
v &= [v_1, v_2, \ldots, v_s] \\
v &= b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_sv_s (II)
\end{aligned}
$$

Pela intersecção, temos: $(I) = (II)$

$$
\begin{aligned}
a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ru_r &= b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_sv_s \\
a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ru_r - b_1v_1 - b_2v_2 - \ldots - b_sv_s &= 0
\end{aligned}
$$

Como o conjunto do enunciado, por hipótese, é L.I.

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_r = b_1 = b_2 = \ldots = b_s = 0$$

□

3.13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha - 1), v_3 = (2, \alpha, -3)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) determine as coordenadas dos vetores $v = (-1, 1, 2)$ em relação a esta base.

Solução:

(a) Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 6 & \alpha & \alpha \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante e igualando a zero, temos:

$$\begin{array}{l} -3\alpha^2 - \alpha - 12 + 2\alpha + \alpha^2 + 18 = 0 \\ -2\alpha^2 + \alpha + 6 = 0 \\ \boxed{\alpha = 2} \text{ ou } \boxed{\alpha = -3/2} \end{array}$$

neste caso, o conjunto será L.D.

Portanto, para que o conjunto seja L.I. devemos ter $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3/2$.

Então, tomando $\alpha = 1$, temos:

$$v_1 = (1, 6, -1)\,;v_2 = (1, 1, -1)\,;v_3 = (2, 1, -3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por escalonamento ou por determinante podemos verificar que o conjunto é L.I.

Agora devemos mostrar que o conjunto gera $\mathbb{R}^3$.

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 6 & \alpha & \alpha \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para gerar devemos ter o determinante da matriz igual a zero, então:

$$\begin{cases} a_1\alpha + a_2 + 2a_3 = x \\ 6a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 = y \\ -a_1 - a_2 - 3a_3 = z \end{cases}$$

Este sistema terá uma única solução quando $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3/2$.

(b) Escrevendo v como combinação linear dos vetores da base temos. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l}
av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
a\,(1,6,-1) + b\,(1,1,-1) + c\,(2,1,-3) = (-1,1,2) \\
\begin{cases} a + b + 2c = -1 \\ 6a + b + c = 1 \\ -a - b - 3c = 2 \end{cases} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \boxed{c = -1} \\
\Rightarrow (II) - 5b - 11c = 7 \Rightarrow \boxed{b = 4/5} \\
\Rightarrow (I) a + b + 2c = -1 \Rightarrow \boxed{a = 1/5}
\end{array}
$$

Portanto as coordenadas do vetor são $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \\ -1 \end{pmatrix}$

□

3.14 Sejam $U, V, W, U \cap W$ e $V + W$ subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$
\begin{array}{l}
U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\right\} \\
V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\right\} \\
W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0\right\}
\end{array}
$$

Determine a dimensão de $U, V, W, U \cap W$ e $V + W$ e uma base de $U, V, W, U \cap W$ e $V + W$.

Solução:

i) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\right\}$

Então $u = (2y, y, z)\,; y, z \in \mathbb{R}; u \in U$, u pode ser escrito como combinação linear da seguinte forma:

$$u = y\,(2,1,0) + z\,(0,0,1)$$

Então, o conjunto $\{(2,1,0)\,, (0,0,1)\}$ gera U, além disso, é L.I., pois:

$$\alpha\,(2,1,0)+\beta\,(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

Portanto, $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$ é base de U e $\dim U = 2$.

ii) $V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+z=0 \text{ e } x-2y=0\right\}$
Então $v=(2y,y,-2y)\,;y\in\mathbb{R};v\in V$
v pode ser escrito como combinação linear da seguinte forma:

$$v = y\,(2,1,-2)$$

Então, o conjunto $\{(2,1,-2)\}$ gera V e um único vetor é sempre L.I.
Portanto, $\{(2,1,-2)\}$ é base de V e $\dim V = 1$.

iii) $W = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y-3z=0\right\}$
Então $w=(-2y+3z,y,z)\,;y,z\in\mathbb{R};w\in W$
w pode ser escrito como combinação linear da seguinte forma:

$$w=(-2y,y,0)+(3z,0,z)=y\,(-2,1,0)+z\,(3,0,1)$$

Então, o conjunto $\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$ gera W, além disso, é L.I., pois:

$$\alpha\,(-2,1,0)+\beta\,(3,0,1)=(0,0,0)$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

Portanto, $\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$ é base de W e $\dim W = 2$.

iv) $U\cap W$: Seja $u=(-2y+3z,y,z)\,;y,z\in\mathbb{R};u\in W$.
Se $-2y+3z=2y\Rightarrow u\in U$, então temos:

$$y=\frac{3z}{4}$$

Portanto, $u=\left(\frac{3z}{2},\frac{3z}{4},z\right)\in(U\cap W)\,;\forall z\in\mathbb{R}$.
Daí u é combinação linear de, $u=z\left({}^{3}\!/_{2},{}^{3}\!/_{4},1\right)$.

Então, $\left\{\left(3/2, 3/4, 1\right)\right\}$ gera $U \cap W$ e é L.I.

Portanto, $\left\{\left(3/2, 3/4, 1\right)\right\}$ é base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

v) $V + W$: Seja

$$\begin{array}{l} V = \{\alpha (2, 1, -2) ; \alpha \in \mathbb{R}\} \\ W = \{\beta (-2, 1, 0) + \gamma (3, 0, 1) ; \beta, \lambda \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Então $V + W = \{(2\alpha - 2\beta + 3\gamma, \alpha + \beta, -2\alpha - \gamma) ; \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Seja $(x, y, z) \in (V + W)$, então:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como o sistema tem solução única qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ pertence ao espaço dado.

Portanto, $V + W = \mathbb{R}^3$, assim

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$é base de $V + W$ e $\dim(V + W) = 3$.

$\square$

3.15 Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R}) = \left\{at^2 + bt + c | a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ gerado pelo conjunto de vetores

$$\left\{v_1 = t^2 - 2t + 1, v_2 = t + 2 \text{ e } v_3 = t^2 - 3t - 1\right\}$$

Determine uma base de S, a $\dim S$, uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e a $\dim P_2(\mathbb{R})$.

Solução:

Do enunciado temos que S é combinação linear de v_1, v_2, v_3, então:

$$S = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Note que $v_1 = v_2 + v_3$, então o conjunto é L.D., mas $\{v_1, v_2\}$ é L.I., pois:

$$\beta v_1 + \gamma v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = \gamma = 0$$

Portanto, $\{v_1, v_2\}$ é base de S e $\dim S = 2$.

Sejam os vetores $u = t^2, v = t, w = 1$. Note que $P_2(\mathbb{R}) = [u, U, V]$ e estes vetores são L.I, pois:

$$\begin{aligned}&\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0t^2 + 0t + 0\\&\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$

Portanto, $\{u, U, V\}$ é base $P_2(\mathbb{R})$ e $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$.

□

3.16 Mostre que se U e W são subespaços de um espaço vetorial V e $V = U \oplus W$, então

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

Solução:

<u>1^a versão</u>

Usando o Teorema 3.18 e a definição de Soma Direta, temos:

$$\dim(U \cap W) = 0$$

$$\begin{aligned}&\dim V = \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W - 0\\&\Rightarrow \dim V = \dim U + \dim W\end{aligned}$$

<u>2^a versão</u>

Seja $v \in V$. Como $V = U \oplus W$, então $\exists! u \in U, w \in W$ tais que $v = u + w$.

Suponhamos que $\dim U = n$ e $\dim W = m$. Então:

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n\\ w &= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_m w_m\end{aligned}$$

Onde $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ são bases de U e W respectivamente. Então:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_m w_m$$

Como $V = U \oplus W \Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow u_i \neq k w_j, \forall i, j$ e $k \in K$. Então temos que mostrar que u_i, w_j são L.I. $\Rightarrow a_1 u_i + a_2 w_j = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$.

Então, uma base de V é constituída pela união de uma base de U e uma base de W, ou seja:

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$é base de V.

Portanto, $\dim V = n + m = \dim U + \dim W$.

□

3.17 Mostre que se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são L.I., então $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_n - v_1$ também são. Vale a recíproca?

Solução:

$\Rightarrow$)Tomemos uma combinação linear dos vetores dados e igualamos ao vetor nulo:

$$\begin{array}{l}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0\end{array}$$

Temos então que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.I., portanto, façamos

$$\begin{array}{l}\beta_1 v_1 + \beta_2 (v_2 - v_1) + \ldots + \beta_n (v_n - v_1) = 0 \\ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 - \beta_2 v_1 + \ldots + \beta_n v_n - \beta_n v_1 = 0 \\ (\beta_1 - (\beta_2 + \ldots + \beta_n)) v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n = 0 \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta_1 - (\beta_2 + \ldots + \beta_n) = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_n = 0\end{array}\right. \qquad \Rightarrow \beta_1 = 0\end{array}$$

Portanto, o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_n - v_1\}$ também é L.I.
$\Leftarrow$)Façamos a combinação linear:

$$\begin{array}{l}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_2 - v_1) + \ldots + \alpha_n (v_n - v_1) = 0 \\ \left(\underbrace{\alpha_1 - (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}_{\beta_1}\right) v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0 \\ \beta_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0 \\ \beta_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0\end{array}$$

Portanto, o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.I.

$\square$

3.18 O conjunto $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis é um subespaço do espaço vetorial $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais. Mostre que o subconjunto $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\} \subset \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ é L.I.

Solução:

Façamos uma combinação linear dos vetores do conjunto e igualamos ao vetor nulo, então sejam $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$,

$$a + be^x + ce^{2x} + de^{3x} + fe^{4x} = 0\,(I)$$

Sua derivada é: $0 + be^x + 2ce^{2x} + 3de^{3x} + 4fe^{4x} = 0$
Pela definição 7.1, temos:

$$a = 0, c = 2c \Rightarrow c = 0, d = 3d \Rightarrow d = 0, f = 4f \Rightarrow f = 0$$

Em (I), temos:

$$\begin{aligned}
&0 + be^x = 0\\
&be^x = 0\\
&b = 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\left\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\right\}$ é L.I.

$\square$

3.19 Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores $\{(1,0,5), (1,1,1), (0,3,1), (-3,0,-2)\}$de $\mathbb{R}^3$:

(a) mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

(b) determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto dado e escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores desta base.

Solução:

(a) Basta mostrar que o conjunto é base de $\mathbb{R}^3$, ou seja, o conjunto é L.I. e gera $\mathbb{R}^3$. Então, seja $v = (x,y,z), v \in \mathbb{R}^3$, a combinação linear é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução, pois

$$(a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$a_1 = x$$
$$a_1 + a_2 = y$$
$$3a_2 + 13a_3 = z$$

Então, $V = \mathbb{R}^3$.

(b) Tomemos o conjunto $\{(1,0,5), (1,1,1), (0,3,1)\}$. Façamos uma combinação linear e igualemos ao vetor nulo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Como o sistema tem solução única o conjunto tomado é L.I. e gera $\mathbb{R}^3$. Portanto, é base de $\mathbb{R}^3$.

Agora, seja $B = \{(1,0,5), (1,1,1), (0,3,1)\}$ e escrevemos o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores de B (podemos montar uma *matriz completa* e escalonar):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

Por fim resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + 0c = -2 \\ 0a + b + 3c = 3 \\ 0a + 0b + 13c = 26 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = 1; b = -3; c = 2$$

Portanto, $[(-2,3,4)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\square$

3.20 Mostre que o conjunto $\{(1,-1,1,2), (-1,1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I. Complete este conjunto de modo a formar uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução:

Façamos uma combinação linear e igualemos ao vetor nulo:

Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(1,-1,1,2) + \beta(-1,1,-1,0) = (0,0,0,0)$$
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \end{cases}$$

(basta considerar a 1^a e a 3^a equação) portanto o conjunto é L.I.

Para completar o conjunto basta completar a matriz da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto uma base de $\mathbb{R}^4$ é: $\{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (-1,1,-1,0), (1,-1,1,2)\}$.

$\square$

3.21 Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,-2,5,-3), (2,3,1,-4)$, $(3,8,-3,-5)$. Encontre uma base e a dimensão de W. Estenda a base de W a uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução:

Façamos uma combinação linear e igualemos ao vetor nulo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix}^{(-2)(-3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix}^{(14)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 112 & -144 & 32 \end{pmatrix}^{(-16)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, uma base de W é $\{(1,-2,5,-3), (0,7,-9,2)\}$ e $\dim W = 2$.

Para completar o conjunto basta completar a matriz da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto uma base de $\mathbb{R}^4$ é: $\{(1,-2,5,-3), (0,7,-9,2), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$.

□

3.22 Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$\{(1,1,0,-1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1)\} \text{ e } \{(1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1.3,4,-3)\}$$

respectivamente. Encontre $\dim(U+W)$ e $\dim(U \cap W)$.

Solução:

Do Teorema sobre a dimensão da soma de dois subespaços (Teorema 3.18), temos: $\dim(U \cap V) + \dim(U+V) = \dim U + \dim V$.

Para U, façamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,1,0,-1), (0,1,3,1)\}$ é base de U.

Para W, façamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C = \{(1,2,2,-2), (0,-1,-2,1)\}$ é base de W.

Por outro lado, decorre da própria definição de soma de subespaços que $U + W = [B \cup C]$. A partir disto podemos achar uma base de $U + W$ do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo $\dim(U + W) = 3$.

Da definição, temos:

$$\begin{aligned} &\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) \\ &\dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 \\ &\dim(U \cap V) = 1 \end{aligned}$$

□

3.23 Encontre o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $[u] = W_1 \cap W_2$ onde $W_1 = [(1,0,0), (0,1,0)]$ e $W_2 = [(1,2,3), (1,-1,1)]$.

Solução:

Temos que $A = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ é base de W_1. Logo $\dim W_1 = 2$.

Para W_2, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,2,3), (0,-3,-2)\}$é base de W_2. Logo $\dim W_2 = 2$.

Temos, $W_1 + W_2 = [A \cup B]$. Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

Da definição, temos:

$$\begin{aligned} &\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) \\ &\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 \\ &\dim(W_1 \cap W_2) = 1 \end{aligned}$$

Para encontrar o vetor u façamos:

$$\det\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$$
$$\det\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{2x + 3y - z - 2z + 3x - y = 0$$
$$\begin{cases} z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$
$$5x + 2y = 0$$

Então, para $x = 2$, temos: $u = (2, -5, 0)$.

□

3.24 Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(2, -1), (3, 4)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ duas bases ordenadas de $V = \mathbb{R}^2$.

Determine:

(a) $[I]_{\beta}^{\beta'}$ $-$ matriz de mudança de base da base β para a base β'.

(b) $[I]_{\beta'}^{\beta}$ $-$ matriz de mudança de base da base β' para a base β.

(c) $[(5, -8)]_{\beta}$ e $[(5, -8)]_{\beta'}$.

Solução:

(a) 1^o modo

$$(1, 0) = a\,(2, -1) + c\,(3, 4)$$
$$\begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ -a + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = {}^{4}\!/_{11};\, c = {}^{1}\!/_{11}$$
$$(0, 1) = d\,(2, -1) + e\,(3, 4)$$
$$\begin{cases} 2d + 3e = 0 \\ -d + 4e = 1 \end{cases} \Rightarrow d = {}^{-3}\!/_{11};\, e = {}^{2}\!/_{11}$$
$$\therefore [I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} a & d \\ c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

2^o modo

$$[I]_{\beta}^{\beta'} \Rightarrow [v]_{\beta'} = [I]_{\beta}^{\beta'} . [v]_{\beta}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{array}{l}(2,-1)=a\,(1,0)+c\,(0,1)\\ a=2;c=-1\\ (3,4)=d\,(1,0)+e\,(0,1)\\ d=3;e=4\\ [I]_{\beta'}^{\beta}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{l}[(5,-8)]_{\beta'}\Rightarrow(5,-8)=a\,(1,0)+b\,(0,1)\\ (5,-8)=(a,b)\\ \boxed{a=5}\boxed{b=-8}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}[(5,-8)]_{\beta}\Rightarrow(5,-8)=c\,(2,-1)+d\,(3,4)\\ \begin{cases}2c+3d=5\\-c+4d=-8\end{cases}\\ \begin{cases}2c+3d=5\\0+11d=-11\end{cases}\\ \boxed{c=4}\boxed{d=-1}\end{array}$$

□

3.25 Encontre a dimensão de $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2$ e de $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2$.
Solução:

(i) $(a+bi,c+di)=a\,(1,0)+b\,(i,0)+c\,(0,1)+d\,(0,i)\,;a,b,c,d\in\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^2=[(1,0)\,,(i,0)\,,(0,1)\,,(0,i)]\Rightarrow\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2=4$

(ii) $(z_1,z_2)=z_1\,(1,0)+z_2\,(0,1)\,;z_1,z_2\in\mathbb{C}$
$\mathbb{C}^2=[(1,0)\,,(0,1)]\Rightarrow\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2=2$

□

3.26 Encontre a dimensão de $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^3$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^3$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ e $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$.
Solução:

(i) $(a_1+b_1i,a_2+b_2i,a_3+b_3i)=a_1\,(1,0,0)+b_1\,(i,0,0)+a_2\,(0,1,0)+b_2\,(0,i,0)+$ $a_3\,(0,0,1)+b_3\,(0,0,i)\,,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^3=[(1,0,0)\,,(i,0,0)\,,(0,1,0)\,,(0,i,0)\,,(0,0,1)\,,(0,0,i)]$
$\Rightarrow\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^3=6$

(ii) $(z_1,z_2,z_3)=z_1\,(1,0,0)+z_2\,(0,1,0)+z_3\,(0,0,1)\,,z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$
$\mathbb{C}^3=[(1,0,0)\,,(0,1,0)\,,(0,0,1)]$
$\Rightarrow\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^3=3$

(iii) $(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_n + b_n i) = a_1 (1, 0, \ldots, 0) + b_1 (i, 0, \ldots, 0) +$
$+a_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) + b_2 (0, i, 0, \ldots, 0) +$
$+ \ldots + a_n (0, \ldots, 1) + b_n (0, \ldots, i), a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$
$\mathbb{C}^n = [e_j, e_j i], j = 1, \ldots, n$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

(iv) $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1 (1, 0, \ldots, 0) + z_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + z_n (0, \ldots, 1), z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$
$\mathbb{C}^n = [e_j], j = 1, \ldots, n \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$

□

3.27 Considere o $\mathbb{R}^3$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Quais dos conjuntos de vetores são L.D.?

(a) $\{(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)\}$

(b) $\{(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, -5)\}$

(c) $\{(1, 2, 3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)\}$

Solução:

(a) Façamos uma combinação linear dos vetores do conjunto e igualamos ao vetor nulo, então sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle (3)} \\ {\scriptstyle (-5)} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quando a forma escalonada retorna uma linha de zeros, o conjunto é L.D.

De fato:

$$\alpha (1, -2, 1) + \beta (2, 1, -1) = (7, -4, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 7 & (1) \\ -2\alpha + \beta = -4 & (2) \\ \alpha - \beta = 1 & (3) \end{cases}$$

Somando (1) com (3) e depois com (2), temos:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 8 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases}$$
$$\beta = 2; \alpha = 3$$

(b) Montando uma matriz e escalonando, como no item anterior, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -20 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, o conjunto é L.D.

<u>De fato</u>:

$$\alpha\,(1,-3,7) + \beta\,(2,0,-6) + \gamma\,(3,-1,-1) = (2,4,-5)$$
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 2 \\ -3\alpha + 0\beta - 1\gamma = 4 \\ 7\alpha - 6\beta - 1\gamma = -5 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Fazendo uma matriz aumentada, temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & -20 & -22 & -19 \end{array}\right) \begin{array}{c} {\scriptstyle(10)} \\ {\scriptstyle(3)} \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & 43 \end{array}\right)$$
$$\therefore \begin{cases} \gamma = \frac{43}{13} \\ 6\beta + 8\gamma = 10 \Rightarrow \beta = \dfrac{10 - 8.\frac{43}{13}}{6} \Rightarrow \beta = \frac{-17}{7} \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 2 \Rightarrow \alpha = 2 - 2\left(\frac{-17}{7}\right) - 3.\frac{43}{13} \Rightarrow \alpha = \frac{-33}{14} \end{cases}$$

(c)

$$\alpha(1,2,3)+\beta(1,-3,2)=(2,-1,5)$$
$$\alpha=\beta=1$$

Portanto, o conjunto é L.D.

□

3.28 Determine a dimensão e uma base do subespaço

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | b=a+c \text{ e } d=c\right\}$$

do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solução:

Seja $A=\begin{bmatrix} a & a+c \\ c & c \end{bmatrix}$, então,

$$\begin{bmatrix} a & a+c \\ c & c \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base e $\dim A=2$. □

3.29 Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os seguintes vetores:

$$v_1=(1,1,1,0) \text{ e } v_2=(1,1,2,1)$$

Solução:

Uma base de $\mathbb{R}^4$ deve ter dimensão igual a 4, então, escrevendo os vetores em forma de coluna e completando a matriz em forma de escada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma base de $\mathbb{R}^4$ é
$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,2,1)\}$. □

3.31 Suponha que $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $C=\{v_1,v_2,v_1+v_2+v_3\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Se B é base de $\mathbb{R}^3$, então, se $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, existem escalares $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z)=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$$

fazendo na base C, temos,

$$(x,y,z) = (\alpha - \gamma)\, v_1 + (\beta - \gamma)\, v_2 + \gamma\,(v_1 + v_2 + v_3)$$

Portanto, C gera $\mathbb{R}^3$.
Pelo Teorema 3.6 C é L.I. E pelo Corolário 3.12 C é base de $\mathbb{R}^3$. □

3.32 Considere a questão *3.31* e faça o que se pede:

(a) Determine $[I]_B^C$ e $[I]_C^B$.

(b) Determine $[(a,b,c)]_B$, $[(x,y,z)]_C$ e $[(a+x, b+y, c+z)]_B$.

Solução:

(a)
- $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$
- $v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$
- $v_1 + v_2 + v_3 = 1v_1 + 1v_2 + 1v_3$

$$\Rightarrow [I]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0\,(v_1 + v_2 + v_3)$
- $v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0\,(v_1 + v_2 + v_3)$
- $v_3 = -1v_1 - 1v_2 + 1\,(v_1 + v_2 + v_3)$

$$\Rightarrow [I]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)
(i) Seja $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (a,b,c) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow [(a,b,c)]_B = (\alpha, \beta, \gamma)$

(ii) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z) = \delta v_1 + \lambda v_2 + \theta\,(v_1 + v_2 + v_3) = (\delta + \theta)\, v_1 + (\lambda + \theta)\, v_2 + \theta v_3 \Rightarrow [(x,y,z)]_C = (\delta + \theta, \lambda + \theta, \theta)$

(iii) Seja $(a+x, b+y, c+z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (a+x, b+y, c+z) = (a,b,c) + (x,y,z)$

Incompleto. Aceito sugestões.

□

3.33 Mostre que dois vetores são L.D. se, e somente se, um deles é múltiplo do outro.

Solução:

$\Rightarrow$) Sejam u e v vetores L.D., então existem α e β escalares tais que $\alpha u + \beta v = 0$.

Suponha $\alpha \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
&\alpha u + \beta v - \beta v = 0 - \beta v\\
&\alpha u = -\beta v\\
&\alpha^{-1}\alpha u = -\alpha^{-1}\beta v\\
&u = -\frac{\beta v}{\alpha}
\end{aligned}$$

Portanto, u é múltiplo de v.

$\Leftarrow$) Sejam u e v vetores múltiplos um do outro, ou seja, $u = \alpha v$, para algum escalar α. Então

$$\begin{aligned}
&1u - \alpha v = \alpha v - \alpha v\\
&1u - \alpha v = 0
\end{aligned}$$

Portanto, u e v são L.D. $\square$

3.34 Os vetores $v_1 = (1,1,2,4), v_2 = (2,-1,-5,2), v_3 = (1,-1,-4,0)$ e $v_4 = (2,1,1,6)$ são L.D. em $\mathbb{R}^4$. Esses vetores formam uma base de $\mathbb{R}^4$? Se não, encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por estes vetores.

Solução:

Escrevendo na forma de matriz e escalonando, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{(-2)(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -9 & -6\\ 0 & -2 & -6 & -4\\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \\ \\ -2L_2+3L_3\\ L_2-2L_4 \end{array} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -9 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato, os vetores são L.D. Então, pela Prop. 3.17, uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por estes vetores é

$\{(1,1,2,4),(2,-1,-5,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. $\square$

3.35 Para que valores de a o seguinte conjunto é uma base de $\mathbb{R}^3$?

$B = \{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$.

Solução:

Para que B seja uma base de $\mathbb{R}^3$ é necessário que o conjunto seja L.I., então

$\alpha(a,1,0)+\beta(1,a,1)+\gamma(0,1,a)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} a\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + a\beta + \gamma = 0 \\ \beta + a\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha + \beta = 0 \\ (1-a^2)\beta - a\gamma = 0 \\ \beta + a\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha + \beta = 0 \\ (1-a^2)\beta - a\gamma = 0 \\ \big(-a(1-a^2)-a\big)\gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação, como $\gamma = 0$, temos que

$$\begin{aligned} &-a(1-a^2)-a \neq 0 \\ &-a+a^3-a \neq 0 \\ &a(a^2-2) \neq 0 \\ &a \neq 0 \text{ ou } a \neq \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{a \in \mathbb{R} : a \neq 0 \text{ e } a \neq \pm\sqrt{2}\right\}$$

□

3.36 Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Mostre que V tem dimensão 4 e exiba uma base de V.

Solução:

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_4} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Então, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ geram V e são L.I.
Portanto, formam uma base de V e a $\dim B = 4$.

□

3.37 Mostre que as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solução:

Como a $\dim\{m_1, m_2, m_3, m_4\} = 4$ basta mostrar que o conjunto $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ é L.I. Então, sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+2\beta & \alpha+\beta+\gamma\\ \gamma & 2\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+0+0=0\\ \alpha+\beta+\gamma+0=0\\ 0+0+\gamma+0=0\\ 0+0+0+2\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+0+0=0\\ 0-\beta+\gamma+0=0\\ 0+0+\gamma+0=0\\ 0+0+0+2\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

Então, o conjunto é L.I.

Portanto, $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ geram $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. □

3.38 Determine uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos abaixo.

a)

$$\begin{cases}x + y + z = 0\\ 2x - y - 2z = 0\\ x + 4y + 5z = 0\end{cases}$$

b)

$$\begin{cases}x - y - z - t = 0\\ 3x - y + 2z - 4t = 0\\ 2y + 5z + t = 0\\ x + y + z + t = 0\end{cases}$$

Solução:

a) Escrevendo os coeficientes na forma de matriz e escalonando, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -3y - 4z = 0$

$\boxed{y = -\frac{4}{3}z}$

$\Rightarrow x = -z - y$

$x = -z + \frac{4}{3}z$

$\boxed{x = \frac{1}{3}z}$

Então, $\left(\frac{1}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) = z\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)$.

Portanto, uma base é $B = \{(1, -4, 3)\}$ e $\dim B = 1$.

b) Escrevendo os coeficientes na forma de matriz e escalonando, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $x = y = z = t = 0$, uma base é

$B = \{(1, -1, -1, -1), (0, 2, 5, -1), (0, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 2)\}$ e $\dim B = 4$.

$\square$

3.39 Seja V um espaço vetorial complexo e u, v e w vetores de V que são L.I. Mostre que os vetores $u + v, v + w$ e $u + w$ também são L.I.

Solução:

V é complexo, então, sejam $u = a_1 + b_1 i \in V, v = a_2 + b_2 i \in V$ e $w = a_3 + b_3 i \in V$.

Suponhamos que

$$\begin{aligned}
&\alpha(u+v)+\beta(v+w)+\gamma(u+w)=0\\
&\alpha u+\alpha v+\beta v+\beta w+\gamma u+\gamma w=0\\
&(\alpha+\gamma)u+(\alpha+\beta)v+(\beta+\gamma)w=0
\end{aligned}$$

Daí temos o seguinte sistema

$$\begin{cases}\alpha+0\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta+0=0\\ 0+\beta+\gamma=0\end{cases}$$

Escalonando, temos

$$\begin{cases}\alpha+0\beta+\gamma=0\\ 0+\beta-\gamma=0\\ 0+\beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+0\beta+\gamma=0\\ 0+\beta-\gamma=0\\ 0+0+2\gamma=0\end{cases}$$

Então, $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Portanto, o conjunto $\{u+v, v+w, u+w\}$ são L.I.

□

3.40 Mostre que os polinômios $1, x-1$ e x^2-3x+1 formam uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2-5x+6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

Solução:
Seja $B=\{1, x-1, x^2-3x+1\}$.

1. Mostremos que os polinômios dados formam uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

   Sejam α, β, γ escalares reais.

$$\begin{aligned}
&\alpha.1+\beta(x-1)+\gamma(x^2-3x+1)=a_0+a_1x+a_2x^2\\
&\alpha+\beta x-\beta+\gamma x^2-3\gamma x+\gamma=a_0+a_1x+a_2x^2\\
&(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-3\gamma)x+\gamma x^2=a_0+a_1x+a_2x^2\\
&\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=a_0\\ 0+\beta-3\gamma=a_1\\ 0+0+\gamma=a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=a_0+a_1+2a_2\\ \beta=a_1+3a_2\\ \gamma=a_2\end{cases}
\end{aligned}$$

   Portanto, B gera $P_2(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
&\alpha.1 + \beta(x-1) + \gamma(x^2 - 3x + 1) = 0 \\
&(\alpha - \beta + \gamma) + (\beta - 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 0 + \beta - 3\gamma = 0 \\ 0 + 0 + \gamma = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}
$$

Então, B é L.I.

Portanto, B é uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

2. Escrevendo $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear de B, temos

$$\alpha.1 + \beta(x-1) + \gamma(x^2 - 3x + 1) = 6 - 5x + 2x^2$$

Comparando com a primeira parte, temos

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 6 \\ 0 + \beta - 3\gamma = -5 \\ 0 + 0 + \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 - 5 + 2.2 = 5 \\ \beta = -5 + 3.2 = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Então

$$6 - 5x + 2x^2 = 5.1 + 1(x-1) + 2(x^2 - 3x + 1)$$

□

3.41 Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,1,1,0)$ e $(1,1,2,1)$.
Solução:
Os vetores dados são L.I., então uma base de $\mathbb{R}^4$ é:

$$\{(1,1,1,0), (1,1,2,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

□

7.3 Cap. 05

5.01 Sejam $V = \mathbb{R}$ e $W = \mathbb{R}$ espaço vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \alpha x$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$ é uma transformação linear. Mostre que toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser desta forma. Se T fosse definida por $T(x) = \alpha x^2$, T seria linear?

Solução:

Primeiro mostremos que T é uma transformação linear.

i) Sejam $u, v \in V$.

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \alpha(u+v) \\ &= \alpha u + \alpha v \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

ii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $u \in V$.

$$\begin{aligned} T(ku) &= \alpha k u \\ &= k \alpha u \\ &= kT(u) \end{aligned}$$

Para mostrar que toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser desta forma façamos:

Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear tal que $1 \in \mathbb{R}$. Seja $a = T(1)$.

$$\begin{aligned} T(x) = T(x.1) &= xT(1) \\ &= x.a \\ &= a.x \\ \therefore T(x) = ax & \end{aligned}$$

Obs: x pode ser linear porque x e 1 são de mesma natureza, ou seja, $x, 1 \in \mathbb{R}$.

Se T fosse definida por $T(x) = \alpha x^2$, T não seria linear, pois, sejam $u, v \in V$.

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \alpha(u+v)^2 \\ &= \alpha\left(u^2+2uv+v^2\right) \\ &= \alpha u^2+\alpha 2uv+\alpha v^2 \end{aligned}$$

Mas

$$T(u)+T(v)=\alpha u^2+\alpha v^2$$
$$\therefore T(u+v)\neq T(u)+T(v)$$

Portanto, T não é linear.

□

5.02 Determine as seguintes transformações lineares no plano:

(a) Reflexão em torno do eixo x.

(b) Reflexão em torno da origem.

(c) Projeção na reta $y = ax$.

(d) Reflexão em torno da reta $y = ax$.

Solução:

(a) Reflexão em torno do eixo x.
Defina

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & T(x,y)=(x,-y) \end{aligned}$$

Mostremos que T é linear.
Sejam $u=(x_1,-y_1)$ e $v=(x_2,-y_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(u+v) &= (x_1+x_2,-y_1+(-y_2)) \\ &= (x_1,-y_1)+(x_2,-y_2) \\ &= T(u)+T(v) \end{aligned}$$

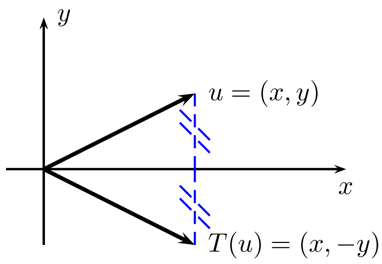


Figura 7.1: Reflexão em torno do eixo x.

Sejam $u = (x, -y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= (\alpha x, -\alpha y) \\ &= \alpha (x, -y) \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

(b) Reflexão em torno da origem.
Defina

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & T(x, y) = (-x, -y) \end{aligned}$$

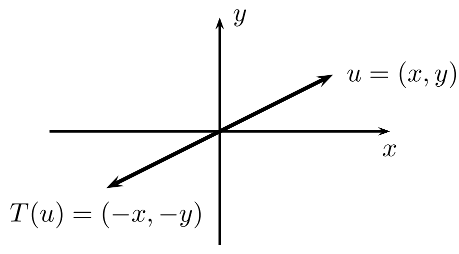


Figura 7.2: Reflexão na origem.

Mostremos que T é linear.
Sejam $u = (-x_1, -y_1)$ e $v = (-x_2, -y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= (-x_1 + (-x_2), -y_1 + (-y_2)) \\
&= (-x_1, -y_1) + (-x_2, -y_2) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

Sejam $u = (-x, -y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= (-\alpha x, -\alpha y) \\
&= \alpha(-x, -y) \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}$$

(c) Projeção na reta $y = ax$.

A reta $y = ax$ está representada na figura a seguir.

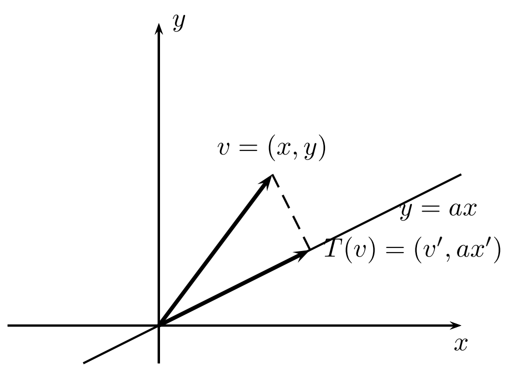


Figura 7.3: Projeção sobre a reta.

A partir da figura, usando o Teorema de Pitágoras, temos

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = x'^2 + a^2x'^2 + (x - x')^2 + (y - ax')^2 \\
&\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = x'^2\left(1 + a^2\right) + \cancel{x^2} - 2xx' + x'^2 + \cancel{y^2} - 2ayx' + a^2x'^2 \\
&(2x + 2ay)\,x' = 2\left(1 + a^2\right)x'^2 \\
&\Rightarrow \boxed{x' = \frac{x + ay}{1 + a^2}} \text{ e } \boxed{y' = \frac{a\,(x + ay)}{1 + a^2}} \\
&\therefore T\,(x, y) = \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}, \frac{a\,(x + ay)}{1 + a^2}\right)
\end{aligned}
$$

(d) Reflexão em torno da reta $y = ax$.

A partir da figura a seguir temos

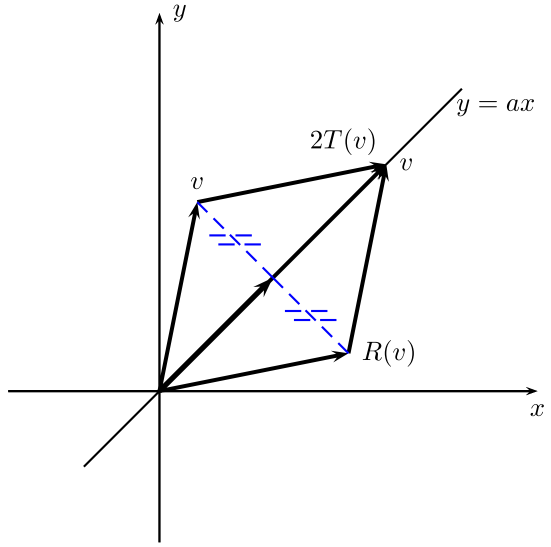


Figura 7.4: Reflexão em torno da reta $y = ax$.

$$
\begin{aligned}
&2T\,(v) = R\,(v) + v \\
&\therefore R\,(v) = 2T\,(v) - v
\end{aligned}
$$

□

5.03 Determine as seguintes transformações lineares no plano:

(a) Reflexão sobre a reta de equações paramétricas $(t, -t, 2t)$ tal que $t \in \mathbb{R}$.

(b) Projeção ortogonal sobre a reta de equações paramétricas $(t, -t, 2t)$ tal que $t \in \mathbb{R}$.

Solução:
Falta resolução. □

5.04 Seja $P(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios na variável $t \in \mathbb{R}$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. Sabemos que $P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Mostre que $L : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(p) = (p(0), p'(1), p''(1))$ é linear. Determine $\ker(L)$ e $\operatorname{Im}(L)$.

Solução:

i) Mostremos que L é linear.

Sejam $p(t)$ e $q(t)$ polinômios tais que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots + b_m t^m$

definimos $p(t) + q(t)$ por

$$(p+q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_n + b_n)t^n + \ldots + b_m t^m$$

i. Soma

$$\begin{aligned}
L(p(t) + q(t)) &= \left((p+q)(0), (p+q)'(1), (p+q)''(1)\right) \\
&= (a_0 + b_0, p'(1) + q'(1), p''(1) + q''(1)) \\
&= (a_0, p'(1), p''(1)) + (b_0, q'(1), q''(1)) \\
L(p(t) + q(t)) &= L(p(t)) + L(q(t))
\end{aligned}$$

ii. Multiplicação. Sejam $k \in \mathbb{R}$, definimos $kp(t)$ por

$$kp(t) = ka_0 + ka_1 t + ka_2 t^2 + \ldots + ka_n t^n$$

e temos que

$$\begin{aligned}
&kp(0) = ka_0 \\
&kp'(t) = ka_1 + k2a_2 t + k3a_3 t^2 + \ldots + kna_n t^{n-1} \\
&kp'(1) = ka_1 + k2a_2 + k3a_3 + \ldots + kna_n \\
&kp''(t) = k2a_2 + k6a_3 t + \ldots + kn(n-1)a_n t^{n-2} \\
&kp''(1) = k2a_2 + k6a_3 + \ldots + kn(n-1)a_n
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&L\left(kp\left(t\right)\right) = \left(kp\left(0\right), kp'\left(1\right), kp''\left(1\right)\right) \\
&= \left(ka_0, ka_1 + k2a_2 + k3a_3 + \ldots + kna_n, k2a_2 + k6a_3 + \ldots + kn\left(n-1\right)a_n\right) \\
&= k\left(a_0, a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n, 2a_2 + 6a_3 + \ldots + n\left(n-1\right)a_n\right) \\
&= k\left(p\left(0\right), p'\left(1\right), p''\left(1\right)\right) \\
&= kL\left(p\left(t\right)\right)
\end{aligned}$$

Portanto, L é linear.

ii) Para determinar o núcleo de L, temos que

$$\begin{aligned}
&\ker L = (0,0,0) \\
&\left(p\left(0\right), p'\left(1\right), p''\left(1\right)\right) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

Para um polinômio de grau 3, temos

$$\begin{aligned}
&p\left(t\right) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\
&p'\left(t\right) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\
&p''\left(t\right) = 6a_3t + 2a_2 \\
&\left(a_0, 3a_3 + 2a_2 + a_1, 6a_3t + 2a_2\right) = (0,0,0) \\
&\begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ 6a_3t + 2a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 3a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\
&\therefore \ker L = \left\{a_3t^3 - 3a_3t^2 + 3a_3t\right\}
\end{aligned}$$

Para um polinômio qualquer, temos

$$\begin{aligned}
&p\left(t\right) = a_nt^n + \ldots + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\
&p'\left(t\right) = na_nt^{n-1} + \ldots + 2a_2t + a_1 \\
&p'\left(1\right) = na_n + \ldots + 2a_2 + a_1 \\
&p''\left(t\right) = n\left(n-1\right)a_nt^{n-2} + \ldots + 2a_2 \\
&p''\left(1\right) = n\left(n-1\right)a_n + \ldots + 2a_2
\end{aligned}$$

Como $p'\left(1\right) = 0$ e $p''\left(1\right) = 0$, temos

$$\begin{cases} na_n + \ldots + 2a_2 + a_1 = 0 \\ n\left(n-1\right)a_n + \ldots + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos

$$2a_2 = -n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} + \ldots + (-6a_3)$$
$$\vdots$$

De $(p(0), p'(1), p''(1)) = (0,0,0)$, temos

$$\begin{aligned}&(a_0, na_n + \ldots - n(n-1)a_n + \ldots - 6a_3, n(n-1)a_n + \ldots + \\ &+ (-n(n-1)a_n + \ldots - 6a_3)) = (0,0,0) \\ &\therefore \ker L = a_n t^n + \ldots + a_3 t^3 + a_2 t + 0\end{aligned}$$

iii) Da definição de Imagem, temos

$$\operatorname{Im} L = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : T(u) = v, \text{ para algum } u \in P(\mathbb{R}) \right\}$$

Então, sejam $L(p) = (p(0), p'(1), p''(1))$ e $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}&L(p) = v \\ &(p(0), p'(1), p''(1)) = (a,b,c)\end{aligned}$$

E seja, $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, temos

$$\begin{aligned}&p(0) = a_0 \\ &p'(1) = 2a_2 + a_1 \\ &p''(1) = 2a_2\end{aligned}$$

então, $(a_0, 2a_2 + a_1, 2a_2) = (a,b,c)$, implica que

$$\begin{cases} a_0 = a \\ 2a_2 + a_1 = b \\ 2a_2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a \\ a_1 = b - c \\ a_2 = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \operatorname{Im} L = \left\{ \frac{c}{2}t^2 + (b-c)t + a : \forall a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

□

5.05 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$. Determine a,b,c,d de modo que $\ker(T)$ seja a reta $y = 3x$.

Solução:

Falta resolução. □

5.06 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$. Determine a, b, c, d de modo que $\operatorname{Im}(T)$ seja a reta $y = 2x$.

Solução:

Falta resolução. □

5.07 Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem como núcleo e imagem o eixo x? Esta transformação é única?

Solução:

Seja

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (0,0) \\ T(0,1) &= (1,0) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x,0) + T(0,y) \\ &= xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= (0,0) + y(1,0) \\ T(x,y) &= (y,0) \end{aligned}$$

O núcleo de T é dado por

$$\begin{aligned} & T(x,y) = (0,0) \\ & (y,0) = (0,0) \\ & \Rightarrow y = 0 \\ & \therefore \ker T = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0) : x \in \mathbb{R}\} \\ & \ker T = [(1,0)] \end{aligned}$$

A imagem de T é dada por

$$\begin{aligned} & T(x,y) = (a,b) \\ & (y,0) = (a,b) \\ & \Rightarrow y = a, b = 0 \\ & \therefore \operatorname{Im} T = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,0) : a \in \mathbb{R}\} \\ & \operatorname{Im} T = [(1,0)] \end{aligned}$$

□

5.29 Quais das transformações são lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (xy, yz)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solução:

(a) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{array}{l} u = (x, y, z) \text{ e } v = (a, b, c) \\ u + v = (x + a, y + b, z + c) \\ \alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned} T(u + v) &= ((x + a)(y + b), (y + b)(z + c)) \\ &= (xy + xb + ay + ab, yz + yc + bz + bc) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{array}{l} T(u) = (xy, yz) \\ T(v) = (ab, bc) \text{ e} \\ T(u) + T(v) = (xy + ab, yz + bc) \neq T(u + v) \end{array}$$

Portanto, T não é linear.

(b) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{array}{l} u = (x, y, z) \text{ e } v = (a, b, c) \\ u + v = (x + a, y + b, z + c) \\ \alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned} T(u+v) &= (x+a-(y+b), x+a+y+b, z+c) \\ &= (x-y+a-b, x+y+a+b, z+c) \\ &= (x-y, x+y, z)+(a-b, a+b, c) \\ &= T(u)+T(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= (\alpha x-\alpha y, \alpha x+\alpha y, \alpha z) \\ &= \alpha(x-y, x+y, z) \\ &= \alpha T(y) \end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

□

5.30 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a,b,c) = (a-b+c, 2a+b-c, -a-2b+2c)$$

(a) Determine a $\dim(\ker(T))$.

(b) Determine a $\dim(\operatorname{Im}(T))$.

Solução:

(a) A definição de núcleo é

$$\ker T = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : T(u) = 0\right\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = (0,0,0)\right\}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&(a-b+c, 2a+b-c, -a-2b+2c) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ -a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=b \\ c=b \end{cases} \\
&\Rightarrow \ker T = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a=0, b=b, c=b\right\} \\
&\Rightarrow \ker T = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (0,b,b) = b\,(0,1,1)\right\} \\
&\Rightarrow \ker T = \{(0,1,1)\} \\
&\therefore \dim \ker T = 1
\end{aligned}
$$

(b) A definição de imagem é

$$\operatorname{Im} T = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : T\,(u) = v, \text{ para algum } u \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&T\,(a,b,c) = (a-b+c, 2a+b-c, -a-2b+2c) \\
&= a\,(1,2,-1) + b\,(-1,1,-2) + c\,(1,-1,2)
\end{aligned}
$$

Escalonando estes vetores temos,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im} T = \{(1,2,-1), (0,1,-1)\} \\
&\therefore \dim \operatorname{Im} T = 2
\end{aligned}
$$

Note que, pelo Teorema 5.12 do Núcleo e da Imagem,

$$
\begin{aligned}
&\dim T = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \\
&\dim T = 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

Portanto, $\{(0,1,1), (1,2,-1), (0,1,-1)\}$ é L.I. e gera $\mathbb{R}^3$, ou seja, é uma base para $\mathbb{R}^3$.

□

5.31 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

(a) T é uma transformação linear?

(b) T é injetora? T é sobrejetora?

Solução:

(a) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$
\begin{aligned}
&u = (x, y, z) \text{ e } v = (a, b, c)\\
&u + v = (x + a, y + b, z + c)\\
&\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
T(u + v) &= (x + a, 2y + 2b, 0)\\
&= (x, 2y, 0) + (a, 2b, 0)\\
&= T(u) + T(v)\\
T(\alpha u) &= (\alpha x, \alpha 2y, 0)\\
&= \alpha(x, 2y, 0)\\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}
$$

Portanto, T é linear.

(b) (i) Se $\ker T = \{0\}$, então, T é injetora. Se $\ker T \neq \{0\}$, então, T não é injetora. Então, seja $v = (x, y, z) \in \ker T$, temos

$$
\begin{aligned}
&T(x, y, z) = (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\\
&\Rightarrow x = 0, y = 0\\
&\therefore v = (x, y, z) = (0, 0, z) \neq (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Portanto, T não é injetora.

(ii) Se $\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists u \in \mathbb{R}^3$ tal que $v = T(u)$, então, seja $v = (a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}$.

Suponha que $c \neq 0$ e que $\exists u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = v$, então

$$
\begin{aligned}
&T(u) = v \\
&(x, 2y, 0) = (a, b, c) \\
&\Rightarrow x = a, y = {}^{b}\!/_{2}, c = 0
\end{aligned}
$$

Absurdo, pois, por hipótete $c \neq 0$. Portanto, T não é sobrejetora.

$\square$

Parte II

Álgebra Linear II

Capítulo 8

Semelhança e Diagonalização

8.1 Matrizes Semelhantes

Definição 8.1 Dadas duas matrizes A e B de ordem n, dizemos que A é *semelhante* a B se, e somente se, existe uma matriz inversível P, também de ordem n, tal que

$$A = P^{-1}BP$$

Observações:

i) Dadas duas bases B e C de um espaço vetorial U de dimensão n e, $t : U \to U$ uma transformação linear, então $[T]_C$ e $[T]_B$ são semelhantes.

ii) A semelhança de matrizes aparece também no problema de diagonalização de uma matriz.

Definição 8.2 (Diagonalização) Uma matriz quadrada é *diagonalizável* se é semelhante a uma matriz diagonal.

Exemplo 8.1 Para determinar a inversa de uma matriz procedemos da seguinte forma:

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Completamos com a matriz identidade e escalonamos.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\therefore A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 8.2 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Veremos se A é diagonalizável.

Solução:
Se considerarmos a matriz inversível

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

então,

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e temos que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que é uma matriz diagonal.
Portanto, A é diagonalizável. $\square$

8.2 Diagonalização

Definição 8.3 Sejam U um espaço vetorial e $T : U \to U$ uma transformação linear. Dizemos que $\lambda \in K$ é um *auto valor* se existe $u \in U, u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$. Neste caso, dizemos que u é um *auto vetor* de T associado a λ.

Exemplo 8.3 Considere $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) := (4y, 4x)$.

Note que 4 é um auto valor de T e $(1, 1)$ é um auto vetor de T associado a 4, pois

$$T(1,1) = (4,4) = 4(1,1)$$

generalizando, temos,

$$T(a,a) = (4a,4a) = 4(a,a), \forall a \in \mathbb{R}$$

Obs: Dado um vetor $u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$, temos que λ é univocamente determinado por T e u, pois, suponha que

$$T(u) = \lambda u = \lambda' u$$

então,

$$\begin{aligned}
&\lambda u - \lambda' u = 0 \\
&\Rightarrow (\lambda - \lambda') u = 0 \\
&\Rightarrow \lambda - \lambda' = 0 \\
&\Rightarrow \lambda = \lambda'
\end{aligned}$$

Proposição 8.4 *Sejam U um espaço vetorial e $T : U \to U$ uma transformação linear e λ um auto valor de T. Dado $u \in U, u \neq 0$, temos que u é um auto vetor associado a λ se, e somente se, $u \in \ker(\lambda I_d - T)$.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Suponha que u é um auto vetor associado a λ, ou seja, $T(u) = \lambda u$. Temos,

$$(\lambda I_d - T)(u) = \lambda I_d(u) - \underbrace{T(u)}_{\lambda u} = \lambda u - \lambda u = 0$$

Logo, $u \in \ker(\lambda I_d - T)$.

$\Leftarrow$) Seja $u \in \ker(\lambda I_d - T)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&(\lambda I_d - T)(u) = 0\\
&\Rightarrow \lambda \underbrace{I_d(u)}_{u} - T(u) = 0\\
&\Rightarrow T(u) = \lambda u
\end{aligned}
$$

ou seja, u é um auto vetor associado a λ. ■

Corolário 8.5 *Sejam U um espaço vetorial e $T : U \to U$ uma transformação linear. Então, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um auto valor de T se, e somente se,* $\ker(\lambda I_d - T) \neq \{0\}$.

Corolário 8.6 *Sejam U um espaço vetorial e $T : U \to U$ uma transformação linear e λ um auto valor de T. Então, $\{0\} \cup \{u \in U : u$ é auto vetor associado a $\lambda\}$ é um subespaço de U.*

Proposição 8.7 *Sejam U um espaço vetorial finitamente gerado e $T : U \to U$ uma transformação linear. Sejam B uma base de U e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que λ é um auto valor de T se, e somente se, λ é raíz de* $\det [XI_d - T]_B$.

Demonstração:

Temos que λ é auto valor de T se, e somente se, $\exists u \in U, u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$. Mas,

$$
\begin{aligned}
&T(u) = \lambda u \Leftrightarrow T(u) - \lambda u = 0 \Leftrightarrow T(u) - \lambda I_d(u) = 0\\
&\Leftrightarrow (T - \lambda I_d)(u) = 0\\
&\Leftrightarrow [T - \lambda I_d]_B [u]_B = 0\\
&\Leftrightarrow ([T]_B - \lambda [I_d]_B)[u]_B = 0\\
&\Leftrightarrow ([T]_B - \lambda I_n)[u] = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{[u]_B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Este sistema homogêneo possui uma solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ não trivial se, e somente se, $\det A = 0$. ■

Proposição 8.8 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão n, $T : U \to U$ uma transformação linear e, B e C bases de U. Então,* $\det [XI_d - T]_B = \det [XI_d - T]_C$.

Demonstração:
Seja $P = [I_d]_C^B$ uma matriz de mudança de base de B para C. Lembremos que $P^{-1} = [I_d]_B^C$, que $\det P^{-1} \det P = \det \left(P^{-1}.P\right) = 1$ e que $[T]_C = P^{-1} [T]_B P$.
Temos,

$$\begin{aligned}
\det [X.I_d - T]_C &= \det (X. [I_d]_C - [T]_C) \\
&= \det \left(X.I_n - P^{-1}. [T]_B .P\right) \\
&= \det \left(X.P^{-1}.I_n.P - P^{-1}. [T]_B .P\right) \\
&= \det \left(P^{-1}. (X.I_n.P - [T]_B .P)\right) \\
&= \det \left(P^{-1}. (X.I_n - [T]_B .P)\right) \\
&= \det P^{-1}. \det (X.I_n - [T]_B) . \det P \\
&= \det (X.I_n - [T]_B) \\
\det [X.I_d - T]_C &= \det [X.I_d - T]_B
\end{aligned}$$

■

Definição 8.9 Sejam U um espaço vetorial finitamente gerado, $T : U \to U$ uma transformação linear e B base de V. Dizemos que $p(x) := \det [X.I_d - T]_B$ é o *polinômio característico* de T.

Teorema 8.10 *Sejam U um espaço vetorial finitamente gerado, $T : U \to U$ uma transformação linear e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ auto valores distintos de T. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja B_i o conjunto L.I. formado por auto vetores associados a λ_i. Então, $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ é L.I.*

Demonstração:
Sejam

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{u_{11}, \ldots, u_{1r_1}\} \\
B_2 &= \{u_{21}, \ldots, u_{2r_2}\} \\
&\vdots \\
B_n &= \{u_{n1}, \ldots, u_{nr_n}\}
\end{aligned}$$

Então, $B = \{u_{11}, \ldots, u_{1r_1}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nr_n}\}$.

Seja

$$\alpha_{11}u_{11} + \ldots + \alpha_{1r_1}u_{1r_1} + \ldots + \underbrace{\alpha_{n1}u_{n1} + \ldots + \alpha_{nr_n}u_{nr_n}}_{-V} = 0$$

Então,

$$\underbrace{\alpha_{11}u_{11} + \ldots + \alpha_{1r_1}u_{1r_1}}_{\in[B_1]} = v \in [B_2 \cup \ldots \cup B_n]$$

Logo, $v \in [B_1] \cap [B_2 \cup \ldots \cup B_n] = \{0\}$.
Portanto, $v = 0$, como B_1 é L.I., temos que, $\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{1r_1} = 0$.
Repetindo o processo para os outros B_i, temos que

$$\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{1r_1} = \alpha_{21} = \ldots = \alpha_{2r_2} = \ldots = \alpha_{n1} = \ldots = \alpha_{nr_n} = 0$$

Portanto, $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ é L.I. ∎

Definição 8.11 Sejam U um espaço vetorial finitamente gerado e $T : U \to U$ uma transformação linear. Dizemos que T é *diagonalizável* se existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ auto valores distintos de T e $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset U$ tais que cada B_i é um conjunto L.I. de auto vetores associados a λ_i e $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ é uma base para U.

Exemplo 8.4 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

onde B é uma base para $\mathbb{R}^3$. Vamos calcular o polinômio característico de T.

Solução:

$$p(x) = \det [X.I_d - T]_B = \det \left(X.\underbrace{[I_d]_B}_{I_3} - [T]_B \right) =$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -3 & 4 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)^2 (x-2) =$$

$$= \left(x^2 - 2x + 1\right)(x-2) =$$

$$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Os auto valores, que são as raízes de $p(x)$, são 1 e 2. Vamos determinar os auto vetores associados a 1 e 2.

Seja $u \in \mathbb{R}^3$, então, $[u]_B = (a, b, c)$. Temos:

i) Para que u seja um auto vetor associado a 1.

$$[T]_B [u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = a \Rightarrow b = 0 \\ b = b \\ 3a - 4b + 2c = c \Rightarrow c = -3a \end{cases}$$

Logo, $[u]_B = (a, 0, -3a)_B = a\,(1, 0, -3)_B$

Assim, $\{(1, 0, -3)\}$ é L.I.

ii) Para que u seja um auto vetor associado a 2.

$$[T]_B [u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2a \\ b = 2b \\ 3a - 4b + 2c = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \end{cases}$$

Logo, $[u]_B = (0, 0, c)_B = c\,(0, 0, 1)_B$

Assim, $\{(0, 0, 1)\}$ é L.I.

Note que $\{(1, 0, -3), (0, 0, 1)\}$ não é uma base para $\mathbb{R}^3$. Logo, T não é diagonalizável. □

Exemplo 8.5 Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(a, b, c) = (a + b - c, 2b, b - a + c)$. Vamos verificar se T possui auto vetores e se é diagonalizável.

Solução:
Seja B a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos:

$$\begin{aligned}
&T(1,0,0) = (1,0,-1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) - 1(0,0,1)\\
&T(0,1,0) = (1,2,1) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1)\\
&T(0,0,1) = (-1,0,1) = -1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)\\
&\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
p(x) = \det [XI_d - T]_B &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = \\
&= (x-1)^2 (x-2) - (x-2) = \\
&= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 - x + 2 \\
&= x^3 - 4x^2 + 4x \\
&= x\left(x^2 - 4x + 4\right) \\
&= x(x-2)^2
\end{aligned}$$

Logo, as raízes de $P(x)$ são 0 e 2, que são os auto valores associados a T. Seja $u \in \mathbb{R}^3$, então, $[u]_B = (a, b, c)_B$. Vamos determinar os auto vetores associados a 0 e 2.

i) Para que u seja um auto vetor associado a 0.

$$[T]_B [u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2b = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases}$$

Logo, $[u]_B = (a, 0, a)_B = a(1, 0, 1)_B$
Assim, $\{(1, 0, 1)\}$ é L.I.

ii) Seja $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $[u]_B = (x, y, z)_B$. Temos que u é um auto vetor associado a $\lambda = 2$ se,

$$[T]_B\,[u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{z = y - x$$

Logo, $[u]_B = (x, y, y - x)_B$. Mas,

$$(x, y, y - x) = x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, 1)$$

Assim, $\{(1, 0, -1)\,, (0, 1, 1)\}$ é um conjunto L.I. de autovetores associados a $\lambda = 2$.

Temos que o conjunto $C = \left\{\underbrace{(1, 0, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, 0, -1)}_{v_2}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_2}\right\}$, formado pelos auto vetores obtidos acima, é uma base para $\mathbb{R}^3$. Logo, T é diagonalizável e,

$$\begin{aligned} T\,(1, 0, 1) &= (0, 0, 0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ T\,(1, 0, -1) &= (2, 0, -2) = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3 \\ T\,(0, 1, 1) &= (0, 2, 2) = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

□

Definição 8.12 Sejam U um espaço vetorial finitamente gerado e $T : U \to U$ uma transformação linear diagonalizável. Chamamos de *forma diagonal* de T a matriz $[T]_B$, onde $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ é uma base de U formada pelos auto vetores de T.

Observe que $[T]_B$ é uma matriz diagonal, isto é, se a_{ij} é uma entrada de $[T]_B$, onde i representa a linha e j a coluna, temos que,

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_i & \text{se } i = j \end{cases}$$

onde λ_i é o auto valor associado a T.

8.3 Funcionais Lineares

Definição 8.13 Seja V um espaço vetorial. Considere $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Dizemos que $f : V \to \mathbb{R}$ é um *funcional linear* se f é uma transformação linear.

Definição 8.14 Seja V um espaço vetorial. Chamamos de *espaço dual* de V o conjunto de todos os funcionais lineares de V.

Notação: V^*: espaço dual de V.

Obs: Note que $V^* = L(V, \mathbb{R})$.

Proposição 8.15 *Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V^*$ tais que*

$$a_i(v_j) = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases} \tag{8.1}$$

Então, $B* := \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V^*.

Chamamos $B*$ de base dual de B.

Demonstração:

Seja $f \in V^* = L(V, \mathbb{R})$, ou seja, $f : V \to \mathbb{R}$ é um funcional linear.

Dado $u \in V$, como B é uma base de V, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Logo,

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \tag{8.2}$$

Como cada $f(v_i) \in \mathbb{R}$, seja $\beta_i = f(v_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Então,

$$e_i(u) = e_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{e_i(v_j)}_{\text{eq.}8.1} = \alpha_i \ (i \text{ fixo})$$

Logo, pela Equação 8.2, temos que

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i(u)\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i(u)$$
$$\therefore f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

Implica que B^* gera V^*.

Seja $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que B^* é L.I. Seja $u \in V$. Logo,

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)(u) = \alpha_1 e_1(u) + \alpha_2 e_2(u) + \ldots + \alpha_n e_n(u) = 0(u) = 0$$

Note que para cada $v_j \in B$, temos que

$$0 = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)(v_j) = \alpha_1 \underbrace{e_1(v_j)}_{\text{eq.}8.1} + \alpha_2 e_2(v_j) + \ldots + \alpha_n e_n(v_j) = \alpha_j \underbrace{e_j(v_j)}_{1} = \alpha_j$$

Logo, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Portanto, B^* é L.I. Logo, B^* é uma base de V^*. ■

Corolário 8.16 *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então V é isomorfo a V^*.*

Proposição 8.17 *Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Considere $B^* = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base dual de B. Então, dado $v \in V$ temos que*

$$[v]_B = (e_1(v), e_2(v), \ldots, e_n(v))_B$$

Demonstração:

Seja $v \in V$. Como $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então, $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Logo, $[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$.

E, $j = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$e_j(v) = e_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{e_j(v_i)}_{1 \text{ se } i=j} = \alpha_j$$
$$\Rightarrow (e_1(v), e_2(v), \ldots, e_n(v))_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$$
$$\therefore [v]_B = (e_1(v), e_2(v), \ldots, e_n(v))_B$$

■

Capítulo 9

Determinantes

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se $T : V \to V$ é um operador linear e, B e C são bases de V, sabemos que existe uma matriz invesível P tal que $[T]_C = P^{-1}\,[T]_B\,P$. Logo,

$$\det\left([T]_C\right) = \det\left(P^{-1}.\,[T]_B\,.P\right) = \det P^{-1}.\det\left([T]_B\right).\underbrace{\det P}_{\in\mathbb{R}} =$$

$$= \det P^{-1}.\det P.\det\left([T]_B\right) = \overbrace{\det\underbrace{\left(P^{-1}.P\right)}_{I_n}}^{1}.\det\left([T]_B\right) = \det\left([T]_B\right)$$

Definição 9.1 O *determinante* de um operador linear $T : V \to V$ é o determinante da matriz de T em relação a uma base qualquer de V.

Notação: $\det(T) = \det([T])$

9.1 Propriedades de determinantes

P1. Se F e G são operadores lineares de V, então

$$\det\left(F \circ G\right) = \det F.\det G$$

P2. $\det(I_d) = 1$, onde I_d é o operador linear identidade, pois $\det(I_d) = \det(I_n)$.

P3. $F : V \to V$ é inversível se, e somente se, $\det(F) \neq 0$.

Exemplo 9.1 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $F(1,0) = (2,1)$ e $F(0,1) = (3,3)$. Calcular o determinante de F.

Solução:
Tome $B = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$.
Temos que

$$[F]_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_B$$

Portanto, $\det F = 6 - 3 = 3$. □

9.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 9.1 Seja $H_\lambda : V \to V$ a homotetia $H_\lambda(v) = \lambda v, \forall v \in V$. Calcular o $\det(H_\lambda)$.

Solução:
Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V. Então,

$$H_\lambda(v_i) = \lambda v_i, i = 1,2,\ldots,n$$
$$[H_\lambda]_B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$
$$\det([H_\lambda]_B) = \lambda^n$$

□

Exercício 9.2 Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x,y,z) = (x - y + z, 2x - z, x + y + z)$. Calcular $\det F$ e $\det F^2$.

Solução:
Temos que

$$(x - y + z, 2x - z, x + y + z) = x(1,2,1) + y(-1,0,1) + z(1,-1,1)$$

então,

$$[F]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \det F = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$$
$$\Rightarrow \det F^2 = \det F.\det F = 36$$

□

Capítulo 10

Produto Interno e Ortogonalidade

10.1 Produto Interno

Definição 10.1 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Um *produto interno* sobre V é uma função que a cada par de vetores (v_1, v_2) associa um número real denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : & V \times V \to \mathbb{R} \\ & (v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

e satisfaz, $\forall u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

iv) $\langle u, u \rangle > 0$, quando $u \neq 0$.

Definição 10.2 Um espaço vetorial real com produto interno ou *espaço euclidiano* é um espaço vetorial real munido de um produto interno.

Exemplo 10.1 Produto Interno usual do $\mathbb{R}^n$.
Considere $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais. Dados $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, defina

$$\langle u, v\rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Temos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ assim definida é um produto interno de $\mathbb{R}^n$.

Solução:

Sejam $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $w = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

i) Temos

$$\begin{aligned}
&\langle u + v, w\rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle = \\
&= \langle (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle = \\
&= (x_1 + y_1) z_1 + \ldots + (x_n + y_n) z_n = \\
&= x_1z_1 + y_1z_1 + \ldots + x_nz_n + y_nz_n = \\
&= \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle + \langle (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle = \\
&= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

ii) Temos

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha u, v\rangle = \langle (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = \\
&= \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + \ldots + \alpha x_ny_n = \\
&= \alpha (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) = \\
&= \alpha \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

iii) Temos

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = \langle v, u\rangle$$

iv) Seja $u \neq 0$. Então,

$$\langle u, u\rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno de $\mathbb{R}^n$. □

Exemplo 10.2 Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e, $u = (x_1, x_2)$ e $u = (y_1, y_2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Considere

$$\langle u, v\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_2$$

Temos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ assim definido é um produto interno de $\mathbb{R}^2$.

Solução:
ExercÃcio □

Exemplo 10.3 Seja $V = P_n(\mathbb{R})$. A aplicação dada por

$$(f(x), g(x)) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$$

é um produto interno sobre V, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios de $P_n(\mathbb{R})$.

Solução:
Exercício □

10.1.1 Propriedades de produto interno

Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

P1. $\langle 0, u\rangle = 0$

P2. $\langle u, \alpha v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$

P3. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

P4. $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

P5. Dado $m \geqslant 1$, $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, v \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \langle u_i, v\rangle$

P6. $\left\langle u, \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i v_i \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \langle u, v_i\rangle$

P7. $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i, v_j\rangle$

Demonstração:

P1) Temos

$$\left\langle \vec{0}, u \right\rangle = \left\langle \overbrace{0}^{*} . \vec{0}, u \right\rangle \overset{(ii)}{=} \underbrace{\overbrace{0}^{*}}_{\in\mathbb{R}} . \underbrace{\langle 0, u\rangle}_{\in\mathbb{R}} = 0$$

onde, $*$ é o escalar nulo.

P2) Temos

$$\langle u, \alpha v\rangle \overset{(iii)}{=} \langle \alpha v, u\rangle \overset{(ii)}{=} \alpha \langle v, u\rangle \overset{(iii)}{=} \alpha \langle u, v\rangle$$

P3) Temos

$$\langle u, v + w\rangle \overset{(iii)}{=} \langle v + w, u\rangle \overset{(i)}{=} \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle \overset{(iii)}{=} \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$$

P4) $\Leftarrow$) Suponha $u = 0$. Logo, por P_1, $\langle u, u\rangle = 0$.

$\Rightarrow$) Suponha $\langle u, u\rangle = 0$. Pelo item (iv) da definição de produto interno segue que $u = 0$.

P5) FALTA P5

P6) FALTA P6

P7) FALTA P7

■

Proposição 10.3 *Sejam U e V espaços vetoriais, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ um produto interno de V e $T : U \to V$ uma transformação linear injetora. Então*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot\rangle_T : & U \times U \to \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \langle u, v\rangle_T := \left\langle \underbrace{T(u)}_{\in V}, \underbrace{T(v)}_{\in V} \right\rangle \end{aligned}$$

é um produto interno de U.

Demonstração:
Sejam $u, v, w \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

(i) Temos

$$\langle u+v, w\rangle_T \overset{\text{def.}}{=} \langle T(u+v), T(w)\rangle \overset{\text{T. linear}}{=} \langle T(u)+T(v), T(w)\rangle =$$
$$\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle T(u), T(w)\rangle + \langle T(v), T(w)\rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle u, w\rangle_T + \langle v, w\rangle_T$$

(ii) Temos

$$\langle \alpha u, v\rangle_T \overset{\text{def.}}{=} \langle T(\alpha u), T(v)\rangle = \langle \alpha T(u), T(v)\rangle =$$
$$= \alpha \langle T(u), T(v)\rangle = \alpha \langle u, v\rangle_T$$

(iii) Temos

$$\langle u, v\rangle_T = \langle T(u), T(v)\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle = \langle v, u\rangle_T$$

(iv) Seja $u \neq 0$. Temos,

$$\langle u, u\rangle_T \overset{\text{def.}}{=} \langle T(u), T(u)\rangle$$

como a transformação linear é injetora, $T(u) \neq 0$, então,

$$\langle T(u), T(u)\rangle > 0$$

Portanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ é um produto interno de U.

∎

Proposição 10.4 *Sejam V espaço vetorial e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno de V. Dados $u, v \in V$ temos que*

$$\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle$$

Demonstração:
Se $v = 0$, não há nada a provar. Então, suponha $v \neq 0$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}\langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle &= \langle \alpha u, \alpha u - \beta v\rangle - \langle \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = \\ &= \alpha \langle u, \alpha u - \beta v\rangle - \beta \langle v, \alpha u - \beta v\rangle = \\ &= \alpha^2 \langle u, u\rangle - \alpha\beta \langle u, v\rangle - \beta\alpha \langle v, u\rangle + \beta^2 \langle v, v\rangle \qquad (10.1)\end{aligned}$$

Considere $\alpha = \langle v, v\rangle$ e $\beta = \langle u, v\rangle$. Então,

$$0 \leqslant \langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle \overset{10.1}{=} \langle v, v\rangle^2 \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle \langle u, v\rangle^2 - \cancel{\langle u, v\rangle^2 \langle v, v\rangle} + \cancel{\langle u, v\rangle^2 \langle v, v\rangle} =$$
$$= \underbrace{\langle v, v\rangle}_{>0,\text{ pois } v\neq 0} \left(\langle v, v\rangle \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle^2\right)$$

Logo, $\langle v, v\rangle \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle^2 \geqslant 0$.
Portanto, $\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle$. ■

Definição 10.5 Seja V um espaço vetorial. Dizemos que a função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é uma *norma* sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valem:

i) $\|v\| \geqslant 0$.

ii) Se $\|v\| = 0$, então $v = 0$.

iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

iv) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Exemplo 10.4 Considere em $\mathbb{R}^2$ a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|(x, y)\| = |x| + |y| \end{aligned}$$

A função $\|\cdot\|$ define uma norma de $\mathbb{R}^2$.

Solução:
Sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Temos

(i) $\|u\| = \|(x_1, y_1)\| \overset{\text{def.}}{=} |x_1| + |y_1| \geqslant 0$

(ii) Suponha $\|u\| = 0$. Logo

$$|x_1| + |y_1| = 0$$

de onde segue que $x_1 = y_1 = 0$ e, portanto, $u = (0, 0)$.

(iii) Temos

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\| &= \|\alpha (x_1, y_1)\| = \|(\alpha x_1, \alpha y_1)\| = \\
&= |\alpha x_1| + |\alpha y_1| = |\alpha| \, |x_1| + |\alpha| \, |y_1| = \\
&= |\alpha| \left(|x_1| + |y_1|\right) = |\alpha| \, \|u\|
\end{aligned}$$

(iv) Temos

$$\begin{aligned}
&\|u + v\| = \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\| = \\
&\overset{\text{def}}{=} |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leqslant |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \\
&= |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \|u\| + \|v\|
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|$ assim definida é uma norma de $\mathbb{R}^2$. □

Teorema 10.6 *Sejam V um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno de V. Então, $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

onde $v \in V$, é uma norma sobre V. Dizemos que $\|\cdot\|$ é a norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração:
Sejam $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

(i) $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geqslant 0}} \geqslant 0$

(ii) Suponha $\|v\| = 0$. Então, $\sqrt{\langle v, v \rangle} = 0$, de onde segue que $\langle v, v \rangle = 0$. Pela propriedade 4 da subseção 10.1.1 segue que $v = 0$.

(iii) Temos

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\alpha| \, \|v\|$$

(iv) Temos

$$\begin{aligned}
&\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \\
&= \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \underset{\text{prop. 10.4}}{\leqslant} \langle u, u \rangle + 2\sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle} + \langle v, v \rangle \\
&= \|u\|^2 + 2 \|u\| \, \|v\| + \|v\|^2 = \\
&= \left(\|u\| + \|v\|\right)^2
\end{aligned}$$

Logo, $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

■

Exemplo 10.5 Se considerarmos em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual, teremos que a norma induzida por tal produto interno será

$$\|(x,y)\| \overset{\text{teo. } 10.6}{=} \sqrt{\langle (x,y),(x,y)\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Proposição 10.7 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se V é um espaço euclidiano, então:*

$$|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|\,, \forall u,v \in V$$

Demonstração:
Pela Proposição 10.4, temos que,

$$\langle u,v\rangle^2 \leqslant \langle u,u\rangle \langle v,v\rangle$$

logo,

$$|\langle u,v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \|u\|\,\|v\|$$

■

10.2 Ortogonalidade

Definição 10.8 Sejam V um espaço vetorial e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno de V. Dizemos que $u,v \in V$ são *ortogonais* se $\langle u,v\rangle = 0$.
Notação: $u \perp v$.

Exemplo 10.6 $V = \mathbb{R}^2$ com $\langle\cdot,\cdot\rangle$ usual, então
$(1,0) \perp (0,1)$, pois $\langle (1,0),(0,1)\rangle = 0$.

10.2.1 Propriedades de ortogonalidade

P1. $0 \perp v, \forall v \in V$.

P2. $u \perp v \Rightarrow v \perp u, \forall u,v \in V$.

P3. $u \perp v, \forall v \in V \Rightarrow u = 0$.

P4. $u_1 \perp v$ e $u_2 \perp v \Rightarrow u_1 + u_2 \perp v, \forall u_1,u_2 \in V$.

P5. $u \perp v \Rightarrow \lambda u \perp v, \forall u,v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

P1) $\langle 0, u\rangle \overset{\text{P 1}}{=} 0 \Rightarrow 0 \perp v, \forall v \in V$.

P2) Se $u \perp v$, então, $0 = \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. Portanto, $v \perp u$.

P3) Temos, por hipótese, que $\langle u, v\rangle = 0, \forall v \in V$.
Em particular, se $v = u$, então, $\langle u, u\rangle = 0$.
Logo, por P 4 segue que $u = 0$.

P4) Temos

$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = 0 + 0 = 0$$

Logo, $u_1 + u_2 \perp v$.

P5) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle = \lambda 0 = 0$
Logo, $\lambda u \perp v$.

■

Teorema 10.9 *Sejam V um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno de V. Seja $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de valores dois a dois ortogonais não-nulos, isto é, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Então, A é L.I.*

Demonstração:
Seja $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, com $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$. Temos,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = 0, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n$$

Logo,

$$0 \overset{\text{P 5}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{\neq 0 \text{ se } i=j} = \alpha_j \langle v_j, v_j\rangle \text{ para cada } j = 1, \ldots, n$$

Portanto, como $\langle v_j, v_j\rangle \neq 0$, segue que $\alpha_j = 0, \forall j = 1, \ldots, n$. Logo, A é L.I.

■

Definição 10.10 Dizemos que uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma *base ortogonal* se $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, isto é, se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Observações:

(i) Pelo Teorema 10.9, se $\dim V = n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores não-nulos dois a dois ortogonais, então $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V.

(ii) Bases ortogonais são importantes porque existe um método simples de encontrar as coordenadas de um vetor com relação a essa base.

Com efeito, sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de V. Seja $v \in V$. Logo,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$$

Temos,

$$\begin{aligned} &\langle v, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \\ &= \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \ldots + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = \alpha_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Como, $\langle v, v_j \rangle = \alpha_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0}$, segue que, as coordenadas do vetor são

$$\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} \Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

Portanto,

$$\boxed{v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j} \tag{10.2}$$

Exemplo 10.7 Sejam $V = \mathbb{R}^2$ com produto interno usual e $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$ base ortogonal de V. Calcule $[(2,3)]_B = (\alpha_1, \alpha_2)_B$.

Solução:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{\langle (2,3), (1,1) \rangle}{\langle (1,1), (1,1) \rangle} = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2} \\ &\alpha_2 = \frac{\langle (2,3), (1,-1) \rangle}{\langle (1,-1), (1,-1) \rangle} = \frac{2-3}{1+1} = -\frac{1}{2} \\ &\therefore [(2,3)]_B = (5/2, -1/2)_B \end{aligned}$$

□

Teorema 10.11 (Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt) *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto L.I. Então, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ onde*

$$\begin{aligned}
&u_1 = v_1 \\
&u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \ldots - \frac{\langle v_{k+1}, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k, k = 1, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

é tal que u_i e u_j são ortogonais se $i \neq j, u_l \neq 0, l = 1, \ldots, n$ e $[B] = [A]$.

Demonstração:
Façamos por indução sobre n.
Se $n = 1$, segue o resultado.
Suponha que o resultado seja válido para $n-1$, ou seja, $[v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}] = [u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}]$ e $u_i \perp u_j, \forall i \neq j$.
Como A é L.I., temos que,

$$v_n \notin [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}] = [u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}]$$

Logo,

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

é não-nulo.
Precisamos verificar se $\langle u_n, u_j \rangle = 0$, com $j = 1, \ldots, n-1$.
Temos, para cada $j = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}
\langle u_n, u_j \rangle &= \left\langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle = \\
&= \langle v_n, u_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle = \\
&= \langle v_n, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j \rangle = \\
&\quad (\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ sempre que } i \neq j) \\
&= \langle v_n, u_j \rangle - \frac{\langle v_n, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle \\
\langle u_n, u_j \rangle &= \langle v_n, u_j \rangle - \langle v_n, u_j \rangle = 0
\end{aligned}$$

Logo, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto de vetores dois a dois ortogonais não-nulos.

Pelo Teorema 10.9, B é L.I.

Como a $\dim[B] = n = \dim[A]$ e $[B] \subset [A]$, segue que $[B] = [A]$. ■

Definição 10.12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geqslant 1$. Dizemos que uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V é *ortonormal* se for ortogonal e cada vetor for unitário, ou seja,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Teorema 10.13 (Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geqslant 1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno. Então V possui uma base ortonormal.*

Demonstração:

Seja $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Logo, pelo Teorema 10.11, existe $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base ortogonal de V. Considere $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, onde $c_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Sejam i e j índices distintos. Temos,

$$\langle c_i, c_j \rangle = \left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|u_i\| \, \|u_j\|} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{0} = 0$$

Portanto, C é uma base ortogonal.

Temos, para $i = 1, \ldots, n$

$$\langle c_i, c_i \rangle = \left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_i}{\|u_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_i \rangle = 1$$

Portanto, C é uma base ortonormal de V. ■

Teorema 10.14 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geqslant 1$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

(i) Se $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ é uma base ortonormal de V e $u, v \in V$, então

$$\langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

onde $\mathbb{R}^n$ é usual, $[u]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$ e $[v]_B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_B$.

(ii) Se $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ é uma base de V e se definimos em V o produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_v := \langle [u]_B, [v]_B\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

onde $\mathbb{R}^n$ é usual, então B é uma base ortonormal com relação a este produto interno.

Demonstração:

i) Sejam $u, v \in V$. Como B é uma base de V segue que $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ e $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j b_j$, com $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}; i, j = 1, \ldots, n$.

Temos,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\neq 0,\ \text{se}\ i=j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \quad \underbrace{\overbrace{\langle b_i, b_i\rangle}^{B\ \text{é ortonormal}}}_{1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \\
&= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
\langle u, v\rangle &= \langle [u]_B, [v]_B\rangle
\end{aligned}$$

ii) Seja $B = b_1, b_2, \ldots, b_n$ uma base qualquer de V. Defina $\forall u, v \in V$, o produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_v := \langle [u]_B, [v]_B\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

onde $[u]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$ e $[v]_B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_B$.
Sejam $b_i, b_j \in B$. Temos

$$
\begin{aligned}
\langle b_i, b_j \rangle_v &\stackrel{\text{def}}{=} \langle [b_i]_B, [b_j]_B \rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left\langle \underbrace{(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)_B}_{\text{1 na posição } \mathbf{i}}, \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)_B}_{\text{1 na posição } \mathbf{j}} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

Logo, B é uma base ortonormal de V com relação a este produto interno.

■

Exemplo 10.8 Seja $V = \mathbb{R}^2$. Defina um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $B = \{(1, 0), (1, 2)\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Solução:
Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Precisamos encontrar $[u]_B$ e $[v]_B$.

- $u = (x_1, y_1) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 2) = (\alpha + \beta, 2\beta)$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ 2\beta = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x_1 - \dfrac{y_1}{2} \\ \beta = \dfrac{y_1}{2} \end{cases}
$$

$$
\therefore [u]_B = \left(x_1 - \frac{y_1}{2}, \frac{y_1}{2} \right)_B
$$

- $v = (x_2, y_2)$

$$
[v]_B = \left(x_2 - \frac{y_2}{2}, \frac{y_2}{2} \right)_B
$$

Defina, pelo Teorema 10.14 $\langle u, v \rangle_v := \langle [u]_B, [v]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$
Então,

$$
\begin{aligned}
\langle [u]_B, [v]_B \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \left\langle \left(x_1 - \frac{y_1}{2}, \frac{y_1}{2} \right), \left(x_2 - \frac{y_2}{2}, \frac{y_2}{2} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left(x_1 - \frac{y_1}{2} \right) \left(x_2 - \frac{y_2}{2} \right) + \frac{y_1}{2} \frac{y2}{2}
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 10.9 Seja $V = P_1(\mathbb{R})$. Determine um produto interno sobre V tal que $B = \{3, 2x\}$ seja uma base ortonormal.

Solução:

$$\langle a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t\rangle = \frac{a_1 a_2}{9} + \frac{b_1 b_2}{4}$$

□

Obs: O Teorema 10.14 nos diz que se trabalharmos com base ortonormal, o produto interno no espaço vetorial coincide com o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ das coordenadas.

Proposição 10.15 *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $v \in V$. Então $f : V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in V$ é um funcional linear.*

Demonstração:
Sejam $u, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

$$f(u + w) \overset{\text{def}}{=} \langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle \overset{\text{def}}{=} f(u) + f(w)$$

e

$$f(\alpha u) = \langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle = \alpha f(u)$$

Portanto, f é um funcional linear. ■

Proposição 10.16 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geqslant 1$ e $f \in V^*$. Então, existe $v \in V$ tal que $\forall u \in V, f(u) = \langle u, v\rangle$*

Demonstração:
Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ uma base ortonormal de V. Tome $v = \sum\limits_{i=1}^{n} f(b_i)b_i$, onde $f(b_i) \in \mathbb{R}$.

Precisamos mostrar que $\forall u \in V, f(u) = \langle u, v\rangle$.

Basta provar que $f(b_i) = \langle b_j, v\rangle, \forall b_j \in B$.

Temos

$$\begin{aligned}
\langle b_j, v\rangle &= \left\langle b_j, \sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(b_i)\ \underbrace{\langle b_j, b_i\rangle}_{\neq 0,\text{ se } i=j} \\
&= f(b_j)\underbrace{\langle b_j, b_j\rangle}_{1} = f(b_j)
\end{aligned}$$

Portanto, $\forall u \in V$ segue que $f(u) = \langle u, v\rangle$ (pela linearidade de f). ■

Exemplo 10.10 Seja $B = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,1,2)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considerando o produto interno usual, encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de B.

Solução:
Usando os Teoremas 10.11 e 10.13 de (Gram-Schmidt), temos:
Sejam $u_1 = v_1 = (1,0,0)$,

$$\begin{aligned}
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
&= (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1), (1,0,0)\rangle}{\langle (1,0,0), (1,0,0)\rangle}(1,0,0) \\
&= (0,1,1) - 0\,(1,0,0) \\
u_2 &= (0,1,1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&= (0,1,2) - \frac{\overbrace{\langle (0,1,2), (1,0,0)\rangle}^{0}}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) - \frac{\overbrace{\langle (0,1,2), (0,1,1)\rangle}^{3}}{\underbrace{\|(0,1,1)\|^2}_{2}}(0,1,1) \\
&= (0,1,2) - \frac{3}{2}(0,1,1) \\
u_3 &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Temos que $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Considere

$$C = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right\}$$

Temos que C é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
Temos

$$\begin{aligned}
\frac{u_1}{\|u_1\|} &= \frac{(1,0,0)}{\sqrt{\langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle}} = (1,0,0) \\
\frac{u_2}{\|u_2\|} &= \frac{(0,1,1)}{\sqrt{\langle (0,1,1), (0,1,1) \rangle}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\frac{u_3}{\|u_3\|} &= \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\rangle}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, $C = \left\{ (1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. □

Exemplo 10.11 Seja $V = P_2$ com produto interno

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Calcule $\|1 + x\|$ onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\|1 + x\| &= \sqrt{\langle 1 + x, 1 + x \rangle} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (1 + x)(1 + x)\, dx} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (x^2 + 2x + 1)\, dx} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right)\Big|_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 1} \\
\|1 + x\| &= \sqrt{\frac{7}{3}}
\end{aligned}$$

□

10.3 Complemento Ortogonal

Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $S \subset V$ (S não é necessariamente um subespaço de V).

Considere o subconjunto

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in S\} = \{v \in V : v \perp \forall u \in V\}$$

v é ortogonal a todo $u \in V$.

10.3.1 Propriedades de complemento ortogonal

P1. $S^{\perp}$ é um subespaço de V.

P2. Se S é um subespaço de V, $\dim V = n$, então, $V = S \oplus S^{\perp}$. E $S^{\perp}$ é chamado complemento ortogonal de S.

Demonstração:

P1) *Exercício*

P2) Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base ortonormal de S. Pelo Teorema do Completamento, podemos completar B de modo a formar uma base de V. Seja $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ uma base de v.

Pelo Teorema 10.13 de (Gram-Schmidt), obtemos uma base ortonormal de $V : B_v = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.

Note que $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é uma base $S^{\perp}$.

De fato:

i) $B' = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é L.I., pois os vetores de B' são ortogonais entre si, pelo Teo. 10.9.

ii) Seja $v \in S^{\perp}$. Como $v \in V$ e B_v é uma base de V segue que $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$.
E, $\forall v_j \in B$ com $j = 1, \ldots, k$, temos que

$$0 = \langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \text{ e}$$

$$i = 1, \ldots, n, \alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1}} = \langle v, v_i \rangle$$

Mas para $i = 1, \ldots, k$ temos que $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle = 0$.
Logo, $v = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n \in [v_{k+1}, \ldots, v_n]$.
Portanto, $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é uma base de $S^{\perp}$.
Falta mostrar que $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.
Seja $v \in S \cap S^{\perp}$. Como $v \in S^{\perp}$, então, $\langle v, u \rangle = 0, \forall u \in S$. Em particular, para $u = v$, temos que $\langle v, v \rangle = 0$. Logo, $v = 0$ (4, seção 10.2.1).
Então, $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.
Portanto, $V = S \oplus S^{\perp}$.

■

Proposição 10.17 *Seja S um subespaço de V e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base de S. Então, $S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, v_i \rangle = 0, \forall v_i \in B\}$.*

Demonstração:

$$v \in S^{\perp}, \forall s \in S \Rightarrow \langle v, s \rangle = 0$$

Logo, $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$
Logo,

$$\left\langle v, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \right\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v, v_i \rangle$$

$\langle v, v_i \rangle = 0, \forall v_i \in B$, pois $v_i \in S$ e $v \in S^{\perp}$. ■

Exemplo 10.12 Seja $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e $S = [(1,0,0),(0,1,0)]$. Determine $S^{\perp}$.

Solução:
Pela Prop. 10.17, temos:

$$\begin{aligned}
S^{\perp} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (1,0,0) \rangle = 0 \text{ e } \langle (x,y,z), (0,1,0) \rangle = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0\right\} \\
&= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \\
S^{\perp} &= [(0,0,1)]
\end{aligned}$$

$\square$

Observação: Já vimos que se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V, então, $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, onde

$$\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1}} = \langle v, v_i \rangle$$

para $i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \ldots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

Temos que, $\langle v, v_i \rangle v_i$ é a *projeção* de v na direção do vetor v_i.
Notação: $\text{proj}_{v^i} v = \langle v, v_i \rangle v_i$
A projeção de V na direção de $W = [v_1, v_2]$ é dada por

$$\text{proj}_W V = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2$$

Se W um subespaço de V tal que $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base ortonormal de W, então

$$\text{proj}_W V = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \ldots + \langle v, v_k \rangle v_k$$

note que $(v - \text{proj}_W V) \perp W$.

Exemplo 10.13 Seja $V = \mathbb{R}^3$ com base canônica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ (base ortonormal). Assim, $\forall v \in V$, então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3$$

Logo,

$$\text{proj}_{e_i} v = \langle v, e_i \rangle e_i, i = 1, 2, 3$$

e

$$\text{proj}_{xy} v = \text{proj}_{[e_1, e_2]} v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2$$

onde xy é o plano xy.

10.4 Exercícios Propostos

10.1 Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $W \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado por $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.

a) Determine $W^{\perp}$.

b) Obtenha uma base ortonormal para W.

c) Determine $\text{proj}_W V$ e $\text{proj}_{[(1,1,0)]} V$ para $v = (1,0,3)$.

d) Determine $\text{proj}_{W^{\perp}} V$.

Referências Bibliográficas

[*Elon*] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. 7Âª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[*Lang*] LANG, Serge. *Álgebra Linear*.

[*Ulhoa*] COELHO, Flávio Ulhoa e LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp, 2005.

[*Lipschutz*] LIPSCHUTZ, Seymour. *Álgebra Linear*. 3Âª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994 - (Coleção Schaum).

[*Boldrini*] BOLDRINI, COSTA. *Álgebra Linear*. 3Âª ed. Habra.

[*Callioli*] CALLIOLI, Carlos A. e DOMINGUES, Higino. *Álgebra Linear e Aplicações*. 3Âª ed. São Paulo: Atual, 1982.

[*B. Kolman*] KOLMAN, Bernard. *Álgebra Linear com Aplicações*. 6Âª ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1998.

[*Zani*] ZANI, Sérgio Luiz. *Álgebra Linear*. apostila em pdf.

[*Monteiro*] MONTEIRO, Antonio. *Álgebra Linear*. Portugal.

[*Gonçalves*] GONÇALVES, Adilson R. M. L. Souza. *Introdução a Álgebra Linear*. Ed. Edgard Blücher, 1977.

[*Hoffman*] HOFFMAN, K. e KUNZE, R.; *Linear Algebra*. Prentice-Hall,1967.

Índice Remissivo