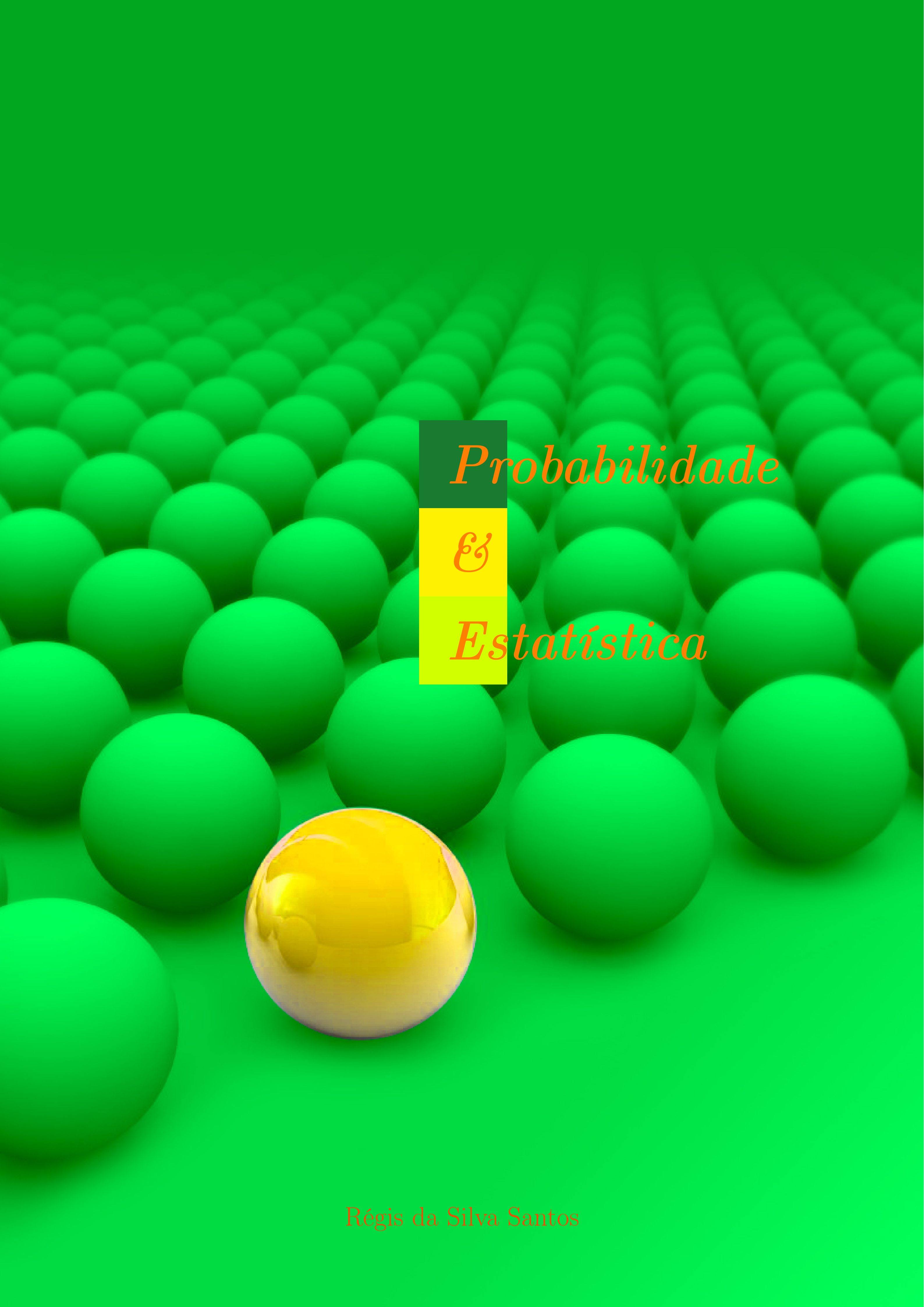


Probabilidade & Estatística

Régis da Silva Santos

Prefácio

Esta apostila foi criada a partir de notas de aula do curso regular de Probabilidade e Estatística em 2010.

É permitida a reprodução total ou parcial desta apostila desde que indicada a autoria.

Esta apostila foi criada para uso pessoal, portanto, adaptada para tal fim, podendo posteriormente ser adaptada para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Agradeço a profa. Dra. Vera Lúcia Sandanielo pelo apoio.

Régis da Silva Santos
Universidade Federal de Mato Grosso, 2010.

Sumário

Capítulo 1
Probabilidade

Estatística: conjunto de técnicas que servem para coletar, organizar, analisar dados oriundos de problemas da vida real.

Recursos da Estatística: trabalha com modelos probabilísticos para ajustar a realidade.

População: conjunto de elementos com características comuns.

Amostra: é um subconjunto da população mantendo as mesmas características.

Experiência aleatória ($\mathscr{E}$): é a experiência em que não se conhece o resultado. O fator *acaso* está presente.

Exemplo 1.1 Jogada de um dado.

Espaço amostral (S): é um conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Exemplo 1.2 $\mathscr{E}$ = jogada de um dado. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo 1.3 $\mathscr{E}$ = jogada de dois dados.
$S = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); ...; (2, 6); ...; (6, 6)\}$
S tem 36 elementos.

Exemplo 1.4 $\mathscr{E}$ = jogada de uma moeda.
$S = \{Ca; Co\}$ ou $\{C, K\}$. S tem 2 elementos.

Exemplo 1.5 $\mathscr{E}$ = jogada de duas moedas.
$S = \{(C, C); (C, K); (K, C); (C, C)\}$
S tem 4 elementos.

Árvore de possibilidades

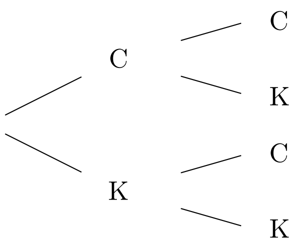


Figura 1.1

Exemplo 1.6 $\mathscr{E}$ = jogada de 3 moedas.

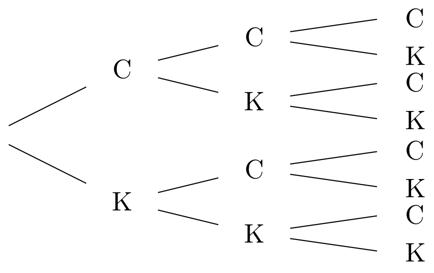


Figura 1.2

$S = \{(C,C,C);(C,C,K);(C,K,C);(C,K,K);(K,C,C);(K,C,K);(K,K,C);(K,K,K)\}$

Evento (A): é um subconjunto do espaço amostral S.

Propriedades:

i) $A \subset S$;

ii) $\emptyset$ é um evento impossível;

iii) $A = S$ é um evento certo.

Evento elementar: quando o evento é constituido por um único elemento.
Evento intersecção: é o evento constituido pela intersecção dos eventos A e B. $A \cap B = C; A \subset S; B \subset S$.

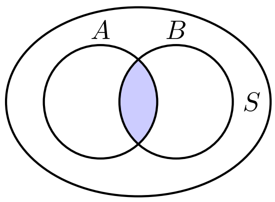


Figura 1.3: $A \cap B = C$.

Evento união: é o evento constituido pela união dos eventos A e B. $A \cup B = D$

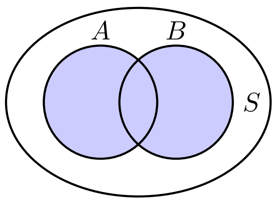


Figura 1.4: $A \cup B = D$.

São válidas: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i; \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i; \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i; \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Evento composto
Evento certo $= S$
Evento impossível $= \emptyset$
Eventos complementares: Seja A um evento de S. Evento complementar é todo evento formado pelos elementos de S que não pertencem a A.

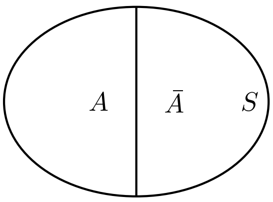


Figura 1.5

$$S = A \cup \bar{A}; \bar{A} = S - A; A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Exemplo 1.7 Lançamentos de duas moedas.
$S = \{(C, C); (C, K); (K, C); (K, K)\}$ $A = \{(C, C)\}$ $\bar{A} = \{(C, K); (K, C); (K, K)\}$

Eventos mutuamente exclusivos: são os que não ocorrem simultaneamente.

Exemplo 1.8 $\mathscr{E}$ = jogada de um dado.
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A = face menor do que $2 = \{1\}$.
B = face maior do que $2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

Eventos independentes: quando não exercem influência sobre os outros.

Exemplo 1.9 O aparecimento de uma face de uma moeda, na jogada de duas moedas não é influenciada pelo aparecimento da face da outra moeda.

Eventos condicionados: quando exercem influência uns sobre os outros.

Exemplo 1.10 Retirada de duas cartas vermelhas de um baralho comum, **sem reposição**.

1.1 Regularidade Estatística

Seja $\mathscr{E}$ uma sequência aleatória, S o espaço amostral, A um evento de S. $\mathscr{E}$ é repetida n vezes. Então definimos:

n_A = número de vezes que o evento A ocorre nas n realizações do experimento $\mathscr{E}$ (*frequência absoluta* da ocorrência de A).

$\dfrac{n_A}{n}$ = proporção de ocorrência do evento A (*frequência relativa* da ocorrência de A).

Definimos, então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = P(A)$$

como a probabilidade de ocorrência do evento A.

Axiomas

Seja a seguinte estrutura: $\mathscr{E}, S, A, A \subset C$ e $P(A)$.

i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

ii) $P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$;

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B); A \cap B = \emptyset, A \subset S, B \subset S$;

iv) $1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = \underbrace{P(S)}_{1} + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

Teorema 1.1 *Sejam A e B dois eventos de S tais que $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.*

Teorema 1.2 *Sejam A e B dois eventos de S tais que $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

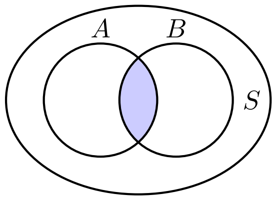


Figura 1.6

1.2 Probabilidades Finitas em Espaços Amostrais Finitos

Sejam $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $A = \{a_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$. A cada evento A associaremos um número p_i denominado de probabilidade de $\{a_i\}$ satisfazendo:

a) $p_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n$;

b) $\underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}_{\text{evento composto}} = 1$

Espaço amostral equiprovável: quando associamos a cada ponto a mesma probabilidade (espaço amostral uniforme).

Se S contém n pontos amostrais, então a probabilidade de cada ponto será $\dfrac{1}{n}$.

Se o evento $A \subset S$ contém r pontos, então

$$P(A) = \frac{r}{n} = r.\frac{1}{n}$$
$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}}$$
$$A = \{a_i\}; P(a_i) = p_i$$

Probabilidade condicionada

Seja a seguinte estrutura: $\mathscr{E} : S; A \subset S; B \subset S; A \cap B \neq \emptyset$.

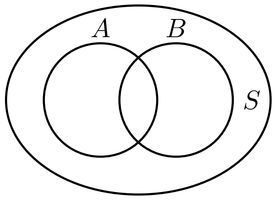


Figura 1.7

$\mathscr{E}$ é repetida n vezes. Definimos:
n_A : frequência absoluta de A;
n_B : frequência absoluta de B;
$\frac{n_A}{n}$: frequência relativa de A;
$\frac{n_B}{n}$: frequência relativa de B;
$n_{A\cap B}$: frequência absoluta de $A \cap B$;
$\frac{n_{A\cap B}}{n}$: frequência relativa de $A \cap B$.

Nas n_A vezes em que A ocorre, B ocorre $n_{A\cap B}$.
$\frac{n_{A\cap B}}{n_A}$: frequência relativa condicionada de A, na hipótese de que B tenha ocorrido.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n_{A\cap B}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n_{A\cap B}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Exemplo 1.11 Dois dados são lançados. Consideremos os eventos $A = \{(x,y) : x+y = 10\}$ e $B = \{(x,y) : x > y\}$. Determine $P(A), P(B), P(A|B)$ e $P(B|A)$.

Solução:

$S = \{(1,1); (1,2); (1,3); \ldots; (6,6)\}\,; n_S = 36$
$A = \{(4,6); (5,5); (6,4)\}\,; n_A = 3$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

$B = \{(2,1); (3,1); (3,2); (4,1); (4,2); (4,3); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5)\}$
$n_B = 15$
$A \cap B = \{(6,4)\}; n_{A\cap B} = 1$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{36}$$
$$P(A|B) = \frac{P\left(A\cap B\right)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{15}$$
$$P(B|A) = \frac{P\left(A\cap B\right)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

$\square$

Daí decorre que $P(A\cap B) = P(B|A).P(A)$ e $P(A\cap B) = P(A|B).P(B)$.

Exemplo 1.12 Tem-se um grupo de 100 recém-nascidos com as seguintes frequências absolutas:

sexo | cor dos olhos	castanho (B)	outra ($\bar{B}$)	total
masc. (A)	17	34	51
fem. ($\bar{A}$)	15	34	49
total	32	68	100

Determine $P(A), P(B), P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A|B), P(B|A), P(\bar{A}|B), P(B|\bar{A}), P(A|\bar{B}), P(\bar{A}|\bar{B})$.

<u>Solução</u>:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{51}{100}, P(B) = \frac{32}{100}, P(\overline{A}) = \frac{49}{100}, P(\overline{B}) = \frac{68}{100} \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{17/100}{32/100} = \frac{17}{32} \\
P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{17/100}{51/100} = \frac{17}{51} \\
P(\overline{A}|B) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{32} \\
P(B|\overline{A}) &= \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{15}{49} \\
P(A|\overline{B}) &= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{34}{68} \\
P(\overline{A}|\overline{B}) &= \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{34}{68}
\end{aligned}
$$

□

Teorema do Produto

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A|B).P(B) \\
P(A \cap B) &= P(B|A).P(A)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.13 Sejam 12 peças num lote, 4 são defeituosas, 2 são retiradas sucessivamente, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem boas?

<u>Solução</u>:

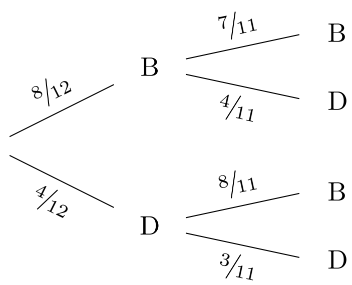


Figura 1.8

A = ambas são boas.

$$P(A) = P(B|B) = P(B).P(B) = \frac{8}{12}.\frac{7}{11} = \frac{56}{132}$$

Outra maneira de resolver:

$$P(B \cap B) = P(B|B).P(B) = \frac{7}{11}.\frac{8}{12}$$

□

1.3 Independência Estatística ou Eventos Independentes

Um evento A é independente do evento B se a probabilidade incondicional de A é igual a probabilidade condicionada de A dado que B ocorre

$$P(A) = P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A|B) = P(A).P(B)$$

Generalizando: Sejam n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Estes eventos serão independentes se forem independentes dois a dois:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cap P(A_2) \cap \ldots \cap P(A_n)$$

Exemplo 1.14 Sejam 10 peças num lote, 4 são defeituosas, 2 são retiradas sucessivamente, com reposição. Qual a probabilidade de ambas serem boas?

Solução:

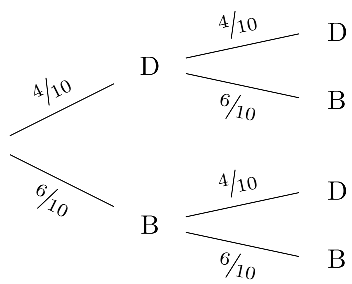


Figura 1.9

$A =$ ambas serem boas.

$$P(B \cap B) = P(B).P(B) = \frac{6}{10}.\frac{6}{10} = \frac{36}{100}$$

□

1.3.1 Partição do espaço amostral

Seja a seguinte estrutura: $\mathscr{E}, S, A_i \subset S, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.
Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituem uma partição do espaço amostral S quando:

i) $A_i \cap A_j = \emptyset; i \neq j = 1, 2, \ldots, n$;

ii) $P(A_i) = p_i > 0$;

iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

Teorema 1.3 *Seja $\mathscr{E}, S$ e os eventos $B \subset S$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição de S. Então*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)$$

Exemplo 1.15 Três máquinas A, B e C produzem 50%, 30% e 20%, respectivamente, do total de peças de uma fábrica. As percentagens de produção defeituosa desta máquina são 3%, 4% e 5%. Se uma peça é selecionada aleatoriamente, ache a probabilidade dela ser defeituosa.

Solução:

$$P(D) = P(D|A).P(A)+P(D|B).P(B)+P(D|C).P(C) = 0,03.0,5+0,04.0,3+0,05.0,2 = 0,037 = 37\%$$

□

O teorema anterior pode ser chamado de *teorema de probabilidade total.*

Teorema 1.4 (de Bayes) *Seja a seguinte estrutura:* $\mathscr{E}, S, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *é uma partição de* $S, B \subset S$. *Então:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)}_{P(B)}}$$

Exemplo 1.16 Escolheu-se uma urna da configuração abaixo, por acaso, e dela extraiu-se uma bola ao acaso, verificando-se que a bola é branca. Qual a probabilidade da bola ter vindo da urna 2?

cores \ urnas	u_1	u_2	u_3
preta	3	4	2
branca	1	3	3
vermelha	5	2	3

Solução:
Queremos $P(u_2|br)$

$$P(u_2|br) = \frac{P(br|u_2).P(u_2)}{P(br|u_1).p(u_1) + P(br|u_2).p(u_2) + P(br|u_3).p(u_3)} = \frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{216}{531}$$

Verificando se a bola é vermelha, qual a probabilidade dela ter vindo da urna 3 ou da urna 2?

$$P(u_3|v) = \frac{P(v|u_3).P(u_3)}{P(v|u_1).p(u_1) + P(v|u_2).p(u_2) + P(v|u_3).p(u_3)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{63}{332}$$

□

Exemplo 1.17 Três máquinas A, B e C são responsáveis, respectivamente, por 60%, 30% e 10% do total de válvulas produzidas por uma fábrica. As percentagens de defeitos na produção destas máquinas são, respectivamente, 2%, 3% e 4%. Verifica-se que uma válvula retirada ao acaso, é defeituosa. Determinar a probabilidade de que a válvula tenha vindo da máquina C.

Solução:

$$P(C|D) = \frac{P(D|C).P(C)}{P(D|A).P(A) + P(D|B).P(B) + P(D|C).P(C)} = \frac{0,04.0,1}{0,02.0,6 + 0,03.0,3 + 0,04.0,1} = 0,16 = 16\%$$

□

1.4 Variáveis Aleatórias e Distribuição de Probabilidade

1.4.1 Função de Probabilidade

Definição 1.5 Função de probabilidade é uma maneira de vincular a variável aleatória à probabilidade de ocorrência dos pontos de S.

Notação: $P(X = x_i) = p_i$ ou $P(X(s) = x_i) = p_i = p(x_i)$.

Propriedades:

a) $p_i \geqslant 0$;

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, variável multidimensional $p(x_i, y_i, \ldots)$

Exemplo 1.18 $\mathscr{E}$ = lançamento de dois dados. X anota a soma dos pontos das faces superiores.

$S = \{(1,1); (1,2); (1,3); \ldots ; (6,6)\}$.

$$X((1,1)) = 2$$
$$X((1,2)) = 3$$
$$\vdots$$
$$X((6,6)) = 12$$

$$P(X=2) = \frac{1}{36}; P(X=3) = \frac{2}{36};$$
$$P(X=4) = \frac{3}{36}; P(X=5) = \frac{4}{36};$$
$$P(X=6) = \frac{5}{36}; P(X=7) = \frac{6}{36};$$
$$P(X=8) = \frac{5}{36}; P(X=9) = \frac{4}{36};$$
$$P(X=10) = \frac{3}{36}; P(X=11) = \frac{2}{36};$$
$$P(X=12) = \frac{1}{36}$$

A função de probabilidade (f.p.) pode ser apresentada por meio de fórmula, tabela ou gráfico.

$X = x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

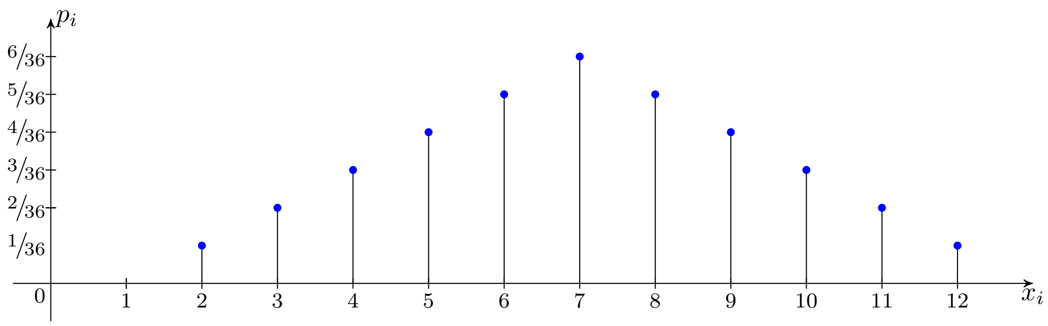


Figura 1.10

Exemplo 1.19 Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Seja X o número de bolas brancas quando se retiram duas bolas sem reposição. Ache a função de probabilidade.

Solução:
Temos que $S = \{(b,b); (b,p); (p,b); (p,p)\}$.

$$X(b,b) = 2$$
$$X(b,p) = 1$$
$$X(p,b) = 1$$
$$X(p,p) = 0$$

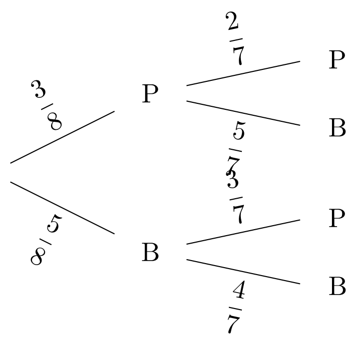


Figura 1.11

$$P(X=2) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$
$$P(X=1) = \frac{3}{8}.\frac{5}{7} + \frac{5}{8}.\frac{3}{7} = \frac{15}{28}$$
$$P(X=0) = \frac{3}{8}.\frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

□

1.4.2 Variáveis Aleatórias

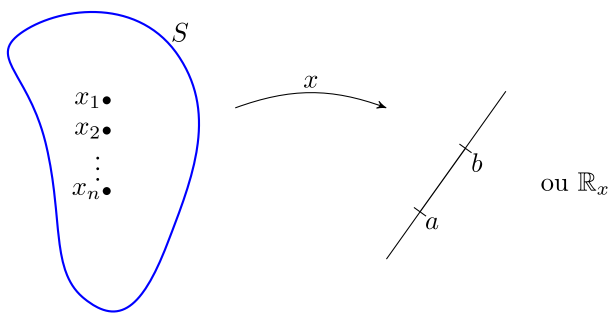


Figura 1.12

$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Função de probabilidade (f.p.). $p_i \geqslant 0, \sum p_i = 1$.

1.4.3 Função Distribuição de Probabilidade de uma variável aleatória X discreta ou função distribuição discreta ou função repartição

$$F(a) = P(X \leqslant a) = \sum_{x_i \leqslant a} p(x_i)$$

$F(a)$ dá a chance da v.a. X não superar o valor a.

Exemplo 1.20 Seja X uma v.a. que toma os valores $0, 1$ e 2 com probabilidades $1/3$, $1/6$ e $1/2$, respectivamente.

Temos a função de probabilidade abaixo:

x_i	0	1	2	p/ $i = 1, 2, 3$
p_i	$1/3$	$1/6$	$1/2$	

$$F = \begin{cases} 0 & , \text{se } x < 0 \\ 1/3 & , \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/2 & , \text{se } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & , \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

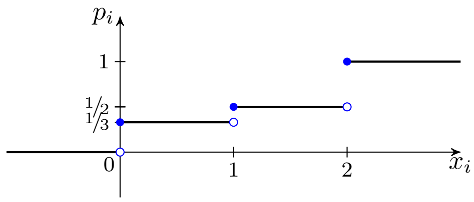


Figura 1.13

Propriedades:

i) se $a \leqslant b$, então $P(X \leqslant a) \leqslant P(X \leqslant b)$;

ii) $0 \leqslant F(a) \leqslant 1$;

iii) $F(+\infty) = 1$;

iv) $F(-\infty) = 0$;

v) $P(a < x \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

Exemplo 1.21 X v.a. que representa o número de pontos na face voltada para cima de um dado "perfeito". Determine a função de probabilidade e a função distribuição.

Solução:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$$p_1 = P(X = x_1) = P(X = 1) = 1/6$$
$$p_2 = P(X = x_2) = P(X = 2) = 1/6$$
$$p_3 = P(X = x_3) = P(X = 3) = 1/6$$
$$p_4 = P(X = x_4) = P(X = 4) = 1/6$$
$$p_5 = P(X = x_5) = P(X = 5) = 1/6$$
$$p_6 = P(X = x_6) = P(X = 6) = 1/6$$

$$F(x_i) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x_i < 1 \\ 1/6 & , \text{se } 1 \leqslant x_i < 2 \\ 2/6 & , \text{se } 2 \leqslant x_i < 3 \\ 3/6 & , \text{se } 3 \leqslant x_i < 4 \\ 4/6 & , \text{se } 4 \leqslant x_i < 5 \\ 5/6 & , \text{se } 5 \leqslant x_i < 6 \\ 1 & , \text{se } x_i \geqslant 6 \end{cases}$$

Obs: Vale lembrar que a função é discreta, ou seja, o domínio é $x_i \in \mathbb{Z}$. □

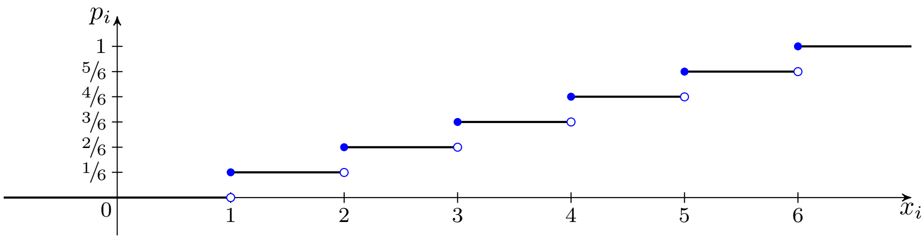


Figura 1.14

1.4.4 Esperança matemática ou valor esperado de uma v.a. X discreta

Se X é uma v.a. discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, sendo $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, a *esperança matemática* de X ou *média* é dada por (medida de centralidade)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Propriedades:

i) se $c =$ constante, então $E(c) = c$;

ii) se X é v.a. e $c =$ constante, então $E(cX) = cE(X)$;

iii) se X e Y são variáveis aleatórias, então $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;

iv) sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constantes. Então $E\left(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n\right) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \ldots + a_nE(X_n)$.

Exemplo 1.22 Um jogo é disputado com um único dado honesto, em que um jogador ganha R$ 20, 00 se aparece o 2, R$ 40, 00 se aparece o 4, perde R$ 30, 00 se aparece 6 e não ganha nem perde se aparece qualquer das outras faces. Calcule a esperança de seu ganho.

Solução:

	1	2	3	4	5	6
x_i	0	20	0	40	0	-30
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 0.\frac{1}{6} + 20.\frac{1}{6} + 0.\frac{1}{6} + 40.\frac{1}{6} - 30.\frac{1}{6} = \boxed{5}$$

X é o ganho do jogador. □

Exemplo 1.23 A tabela fornece a probabilidade de que um sistema de computação fique fora de operação um dado número de períodos por dia, durante a fase inicial de instalação do sistema. Calcule o número esperado de vezes que o computador fica fora de operação por dia.

x_i	4	5	6	7	8	9
p_i	0, 01	0, 08	0, 29	0, 42	0, 14	0, 06

x_i números de períodos

Solução:

$$E\left(X\right) = \sum_{i=4}^{9} x_i p_i = 4.0,01 + 5.0,08 + 6.0,29 + 7.0,42 + 8.0,14 + 9.0,06 = \boxed{6,78}$$

□

1.4.5 Variância

Definição 1.6 *Variância* é um número não-negativo definido como

$$\sigma_x^2 = \text{var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Propriedades da variância

i) se $c =$ constante, então $\text{var}(c) = 0$;

ii) se X é v.a. e $c = cte.$, então $\text{var}(cX) = c^2\,\text{var}(X)$;

iii) se X e Y são independentes, então $\text{var}(X \pm Y) = \text{var}(X) \pm \text{var}(Y)$;

iv) se X é v.a. e a, b são constantes, então $\text{var}(aX + b) = a^2\,\text{var}(X)$.

Exemplo 1.24 Considere a tabela a seguir

x_i	4	5	6	7	8	9
p_i	0,01	0,08	0,29	0,42	0,14	0,06

Solução:

$$E(X^2) = 4^2.0,01 + 5^2.0,08 + 6^2.0,29 + 7^2.0,42 + 8^2.0,14 + 9^2.0,06 = 47$$
$$E(X) = 6,78$$
$$\text{var}(X) = 47 - (6,78)^2 = 1,0316 \cong 1,032$$

□

1.4.6 Desvio Padrão

$$DP(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sigma_x$$

1.4.7 Covariância

Definição 1.7 *Covariância* entre duas v.a. X e Y é dada por $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Obs: quando X e Y são independentes temos que $\text{cov}(X,Y) = 0$.

1.4.8 Coeficiente de correlação linear de Pearson

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}; -1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$$

1.4.9 Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X contínua

Seja X uma v.a. contínua, a *função densidade de probabilidade* (f.d.p.) de X é definida como sendo uma função $f(x)$ tal que

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$$

Propriedades de $f(x)$

i) $f(x) \geqslant 0$;

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Exemplo 1.25 Seja X uma v.a. contínua com f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & , \text{se } x \geqslant 0 (a > 0) \\ 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f(x) \geqslant 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Solução:

i) se $x < 0 \Rightarrow f(x) = 0$, por definição.
Se $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = ae^{-ax}$ $(a > 0$ e $x \geqslant 0) \Rightarrow ae^{-ax} \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{\infty} ae^{-ax}dx$
Seja $y = -ax$, então $dy = -adx$.
$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} ae^{-ax}dx = \int_{0}^{\infty} ae^{y}.\frac{1}{-a}dy = -e^{y}|_{0}^{\infty} = 0 - (-1) = \boxed{1}$

□

Exemplo 1.26 Seja X uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{se } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Verifique que $f(x)$ é de fato uma f.d.p.

Solução:
$f(x) \geqslant 0, \forall x$, por definição.

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2xdx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 2xdx} + \int_{0}^{1} 2xdx + \cancel{\int_{1}^{\infty} 2xdx} = x^2|_0^1 = \boxed{1}$$

□

Exemplo 1.27 Seja X uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} k & , \text{se } a \leqslant x < b \\ 0 & , \text{se caso contrário} \end{cases}$$

Determine o valor de k e faça seu gráfico.

Solução:
Devemos ter $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} kdx + \int_{b}^{\infty} 0dx = 1$$

$$\Rightarrow kx|_a^b = 1 \Rightarrow k(b-a) = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{b-a}}$$

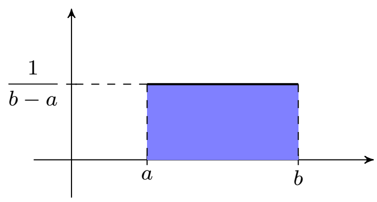


Figura 1.15

□

1.4.10 Função de distribuição de uma v.a. X contínua ou função de repartição

$$F(X) = P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Propriedades

i) $P(X \leqslant a)$ é crescente;

ii) $P(X \leqslant a) = P(-\infty < x \leqslant a)$;

iii) $P(X = a) = 0$ e $P(X \leqslant a) = P(X < a)$;

iv) $\lim\limits_{a \to -\infty} P(X \leqslant a) = 0$ e $\lim\limits_{a \to \infty} P(X \leqslant a) = 1$.

Obs: Pode-se calcular $P(a \leqslant X \leqslant b), P(a < X \leqslant b), P(a \leqslant X < b)$ e $P(a < X < b)$.

Exemplo 1.28 Seja $\mathscr{E}$ um experimento com v.a. $X = \{x; x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ e f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & , \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Ache a $F(x)$ e calcule $P(X \leqslant 1,3), P(0,5 \leqslant X < 1,5)$ e $P(0 \leqslant X < 2)$.

Solução:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x x dx = \frac{x^2}{2} & , \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ \displaystyle\int_1^x (2 - x)dx = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} & , \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & , \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$P(X \leqslant 1,3) = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}\right)\right|_1^{1,3} = \boxed{3,355}$$

□

Resumo

- X v.a.
  - discreta
    - f.p. $= p_i$
    - f.d. $F(x_i) = \sum p_i(x_i)$
    - $E(X) = \sum x_i p_i$
    - $\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
  - continua
    - f.d.p: $f(x) > 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
    - f.d. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
    - $P(a < X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Figura 1.16

1.4.11 Esperança matemática de uma variável aleatória X contínua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Exemplo 1.29 Seja uma f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & , \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 1/8 & , \text{se } 2 \leqslant x < 6 \\ 0 & , \text{se } c.c. \end{cases}$$

Solução:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} 0x dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4} x dx + \int_{2}^{6} \frac{1}{8} x dx + \int_{6}^{\infty} 0x dx = \frac{5}{2}$$

□

Obs: $F(x) = P(X \leqslant x)$

$$\begin{aligned} 1 &= P(X > x) + P(X \leqslant x) \\ P(X > x) &= 1 - P(X \leqslant x) \\ P(X > x) &= 1 - F(x) \end{aligned}$$

1.4.12 Variância de uma v.a. X contínua

$$\text{var}(X) = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{, onde } E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Exemplo 1.30 Calcule a variância do exemplo anterior.

Solução:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} x^2.0 dx + \int_{0}^{2} x^2.\frac{1}{4} dx + \int_{2}^{6} x^2.\frac{1}{8} dx + \int_{6}^{\infty} x^2.0 dx = 9,33$$
$$V(X) = 9,33 - (2,5)^2 = 3,08$$

□

Exemplo 1.31 Uma função distribuição de uma v.a. X contínua é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & , \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & , \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Calcule:

a) a f.d.p. de X;

b) $P(-3 < X \leqslant 1/2)$;

c) $P(1/2 \leqslant X \leqslant 1 | x > 0)$.

Solução:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 0 & , \text{se } c.c \end{cases}$$

b) $P(-3 < X \leqslant 1/2) = F(1/2) - F(-3) = 3/4 - 0 = 34$

c) $P(1/2 \leqslant X \leqslant 1 | x > 0) = \dfrac{P(1/2 \leqslant X \leqslant 1 \text{ e } x > 0)}{P(X > 0)} = \dfrac{P(1/2 \leqslant X \leqslant 1)}{1 - P(X \leqslant 0)} = \dfrac{F(1) - F(1/2)}{1 - F(0)} = \dfrac{1 - 3/4}{1 - 1/2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

□

Exemplo 1.32 Seja X uma v.a. discreta com função distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } X < 10 \\ 0,2 & \text{, se } 10 \leqslant X < 12 \\ 0,5 & \text{, se } 12 \leqslant X < 13 \\ 0,9 & \text{, se } 13 \leqslant X < 25 \\ 1 & \text{, se } X \geqslant 25 \end{cases}$$

Calcule:

a) a f.p. de X;

b) $P(X \leqslant 12)$;

c) $P(X < 12)$;

d) $P(12 \leqslant X \leqslant 20)$;

e) $P(X > 18)$.

Solução:

a) A f.p. é

x_i	10	12	13	25
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

$$0,5 \quad 0,9 \quad 1$$

b) $P(X \leqslant 12) = F(12) = 0,5$;

c) $P(X < 12)$ = F(10) = 0,2;

d) $P(12 \leqslant X \leqslant 20) = F(13) - F(12) = 0,9 - 0,5 = 0,4$;

e) $P(X > 18) = 1 - P(X \leqslant 18) = 1 - F(13) = 1 - 0,9 = 0,1$.

□

1.5 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Seja $\mathscr{E}$ um experimento aleatório e S o espaço amostral associado a este experimento. A cada elemento de S, faz-se corresponder dois números reais no plano (x, y).

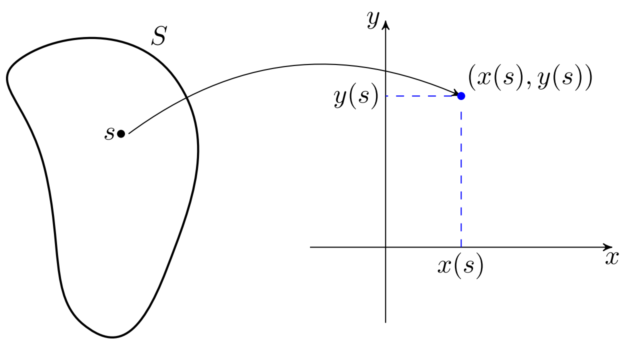


Figura 1.17

(X, Y) é denominada *variável aleatória bidimensional* ou *vetor aleatório*. A v.a. (X, Y) é discreta se X e Y forem discretas e é contínua se X e Y forem contínuas.

1.5.1 Distribuição conjunta da v.a. (X, Y)

A cada possível (x_i, y_i) da v.a. (X, Y) associamos $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ chamada de função de probabilidade conjunta e satisfaz as condições:

i) $p_{ij} > 0$;

ii) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

A função de probabilidade conjunta poderia ser descrita por uma função, por tabelas ou gráficos.

Exemplo 1.33 Jogar um dado duas vezes ou dois dados simultaneamente.

<u>Solução</u>:
X : pontos do primeiro dado
Y : pontos do segundo dado
$S = \{(1,1); (1,2); (1,3); \ldots; (6,6)\} \rightarrow 36$ pontos

	$Y \backslash X$	x_1: 1	x_2: 2	x_3: 3	x_4: 4	x_5: 5	x_6: 6	
y_1	1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
y_2	2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
y_3	3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
y_4	4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
y_5	5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
y_6	6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
		$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

distribuição marginal de Y

distribuição marginal de X

Figura 1.18: Função de probabilidade conjunta

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{36} = P(X = x_1, Y = y_1) = P(X = 1, Y = 1) \\
p_{12} &= \frac{1}{36} = P(X = x_1, Y = y_2) = P(X = 1, Y = 2) \\
&\vdots \\
p_{66} &= \frac{1}{36} = P(X = x_6, Y = y_6) = P(X = 6, Y = 6)
\end{aligned}
$$

genericamente, temos, $p_{ij} = \dfrac{1}{36}; i, j = 1, \ldots, 6$. □

A *função distribuição conjunta* ou função distribuição de uma v.a. bidimensional **discreta** é dada por

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j \leqslant y} p_{ij}$$

Definição 1.8 Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional **contínua**. A função densidade de probabilidade conjunta é dada por $f(x, y)$ tal que satisfaz

i) $f(x, y) \geqslant 0$;

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

A função distribuição da v.a. bidimensional **contínua** é dada por

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dydx$$

1.5.2 Distribuições marginais

1. Se (X,Y) for *discreta*, então

   distribuição marginal de $X : P(X = x_i) = P(X = x_i, -\infty < y < \infty) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j)$

   distribuição marginal de $Y : P(Y = y_j) = P(-\infty < x < \infty, Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j)$.

2. Se (X,Y) for *contínua*, então

   marginal de $X : g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

   marginal de $Y : h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

1.5.3 Variáveis aleatórias independentes

As componentes X e Y de uma v.a. bidimensional *discreta* são independentes se $p(x_i, y_j) = p(x_i).p(y_j), \forall i, j$.
As componentes X e Y de uma v.a. *contínua* são independentes se $f(x,y) = g(x).h(y), \forall (x,y)$.

Exemplo 1.34 Suponha que temos uma urna contendo três bolas numeradas $1, 2$ e 3. Retiramos duas delas, **sem** reposição. Seja X o número da primeira bola e Y o número da segunda bola.

Solução:

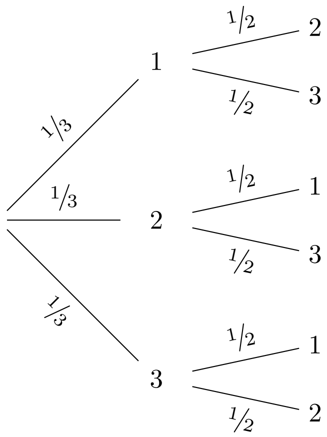


Figura 1.19

$P(X=1, Y=1) = P(X=1).P(Y=1|X=1) = P(X=1 \cap Y=1)$

distribuição conjunta

$Y \backslash X$	1	2	3	q_j
1	0	$1/6$	$1/6$	$1/3$
2	$1/6$	0	$1/6$	$1/3$
3	$1/6$	$1/6$	0	$1/3$
$p(x_i) = p_i$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

$P(X=3, Y=2)$

$P(X=1)$

Figura 1.20

S pares	prob.	X	Y
$(1,2)$	$1/6$	1	2
$(1,3)$	$1/6$	1	3
$(2,1)$	$1/6$	2	1
$(2,3)$	$1/6$	2	3
$(3,1)$	$1/6$	3	1
$(3,2)$	$1/6$	3	2

x_i	1	2	3
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

y_i	1	2	3
q_j	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Determine as distribuições de $X+Y$ e XY.

$X+Y$	prob.
3	$1/6$
4	$1/6$
3	$1/6$
5	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$

$1/3$ $1/3$ $1/3$

$X+Y$	prob.
3	$1/3$
4	$1/3$
5	$1/3$

XY	prob.
2	$1/3$
3	$1/3$
6	$1/3$

Calcule $E(X), E(Y), E(X+Y)$ e $E(XY)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i p_i = 2$$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{3} (x_i + y_i) p_i = 3.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 5.\frac{1}{3} = 4$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{3} (x_i y_i) p_i = 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} + 6.\frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

□

Exemplo 1.35 Suponha que temos uma urna contendo três bolas numeradas $1, 2$ e 3. Retiramos duas delas, **com** reposição. Seja X o número da primeira bola e Y o número da segunda bola. Determine as distribuições de $X+Y$ e XY. E calcule $E(X), E(Y), E(X+Y)$ e $E(XY)$.

Solução:

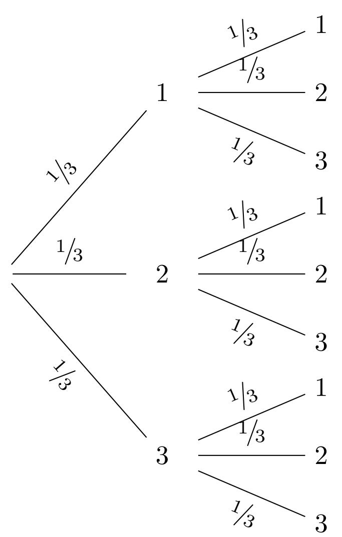


Figura 1.21

$Y \backslash X$	1	2	3	q_j
1	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/3$
2	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/3$
3	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/3$
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

x_i	1	2	3
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

y_i	1	2	3
q_j	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$X+Y$	prob.
2	$1/9$
3	$2/9$
4	$3/9$
5	$2/9$
6	$1/9$

XY	prob.
1	$1/9$
2	$2/9$
3	$2/9$
4	$1/9$
6	$2/9$
9	$1/9$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{3} (x_i y_i) p_i = 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} + 6.\frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$
$$E(X) = 2, E(Y) = 2$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 2 = 4$$
$$E(XY) = E(X).E(Y) = 2.2 = 4$$

Portanto, os eventos são independentes. □

Nota:

$$E(XY) = E(X).E(Y) \text{ independentes}$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \text{ sempre vale}$$

Exemplo 1.36 Considere o lançamento de três moedas e sejam X o número de "caras" que aparecem e Y o número de "sequências" (conjunto de uma ou mais letras iguais). Determine:

a) a distribuição conjunta;

b) as distribuições marginais;

c) o gráfico das distribuições marginais.

Solução:
Temos que $S = \{(c,c,c,);(c,c,k);(c,k,c,);(c,k,k);(k,c,c,);(k,c,k);(k,k,c,);(k,k,k)\}$.

	X	Y
(c,c,c)	3	1
(c,c,k)	2	2
(c,k,c)	2	3
(k,c,c)	2	2
(c,k,k)	1	2
(k,c,k)	1	3
(k,k,c)	1	2
(k,k,k)	0	1

a) distribuição conjunta

$Y\backslash X$	0	1	2	3	q_j
1	$1/8$	0	0	$1/8$	$2/8$
2	0	$2/8$	$2/8$	0	$4/8$
3	0	$1/8$	$1/8$	0	$2/8$
p_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

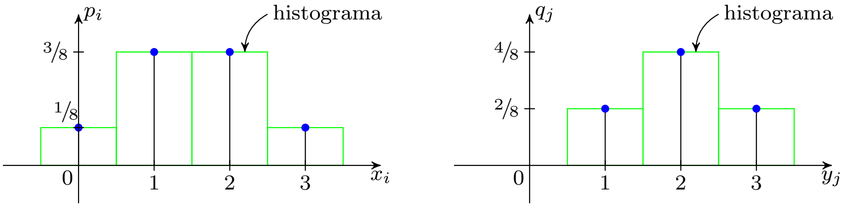
$$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8}$$
$$P(X=1, Y=1) = 0$$
$$P(X=2, Y=1) = 0$$
$$P(X=3, Y=1) = \frac{1}{8}$$

b) distribuições marginais

x_i	0	1	2	3
p_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

y_j	1	2	3
q_j	$2/8$	$4/8$	$2/8$

c) gráficos



(a) Distribuição marginal X. (b) Distribuição marginal Y.

Figura 1.22: Distribuições marginais (gráfico de barras).

□

1.5.4 Covariância de uma v.a. bidimensional (X, Y)

Fornece uma medida de relação linear entre as v.a. X e Y.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Exemplo 1.37 A partir dos dados do exemplo (1.34), calcule a $\text{cov}(X, Y)$.

Solução:
Do exemplo (1.34) temos que

$$E(X) = 2 = E(Y)$$
$$E(XY) = \frac{11}{3}$$
$$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{11}{3} - 4 = -0,33$$

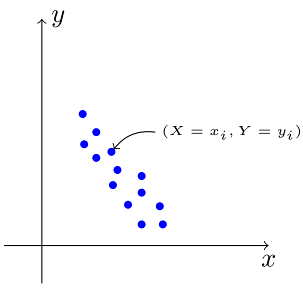


Figura 1.23

□

Se $\text{cov}(X, Y) = 0$, então X e Y são não correlacionados.
Se X e Y forem independentes, então $\text{cov}(X, Y) = 0$.
Se $\text{cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X$ e Y são independentes.
Temos a seguinte medida

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{DP(X).DP(Y)} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

onde $\rho(X, Y)$ é o coeficiente linear de X e Y.

Temos que $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$.

$\rho(X,Y)$	
0	não correlacionado
$0 < \rho(X,Y) \leqslant 0,5$	fraca correlação
$0,5 < \rho(X,Y) \leqslant 0,75$	moderada
$0,75 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$	forte

1.5.5 Distribuições condicionadas

Caso discreto

1. distribuição de X condicionada a $Y = y_j (X|Y)$.

$$p_{i|j} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}; q_j > 0, i = 1, 2, \ldots$$

2. distribuição de Y condicionada a $X = x_i (Y|X)$.

$$q_{j|i} = P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}; p_i > 0, j = 1, 2, \ldots$$

Exemplo 1.38 Uma v.a. bidimensional é apresentada na tabela abaixo.

$Y \backslash X$	0	1	q_j
1	$^1/_3$	$^1/_{12}$	$^5/_{12}$
2	$^1/_6$	$^5/_{12}$	$^7/_{12}$
p_i	$^1/_2$	$^1/_2$	1

Solução:
As distribuições conjuntas são: $p_{11} = \dfrac{1}{3}; p_{12} = \dfrac{1}{6}; p_{21} = \dfrac{1}{12}; p_{22} = \dfrac{5}{12}$.
As distribuições marginais são: $p_1 = \dfrac{1}{2}; p_2 = \dfrac{1}{2}; q_1 = \dfrac{5}{12}; q_2 = \dfrac{7}{12}$.

$$P(X|Y=1) = \begin{cases} P(X=0|Y=1) = \dfrac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{p_{11}}{q_1} = \dfrac{1/3}{5/12} = \dfrac{4}{5} \\ P(X=1|Y=1) = \dfrac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{p_{21}}{q_1} = \dfrac{1/12}{5/12} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$P(X|Y=2) = \begin{cases} P(X=0|Y=2) = \dfrac{P(X=0,Y=2)}{P(Y=2)} = \dfrac{1/6}{7/12} = \dfrac{2}{7} \\ P(X=1|Y=2) = \dfrac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \dfrac{5/12}{7/12} = \dfrac{5}{7} \end{cases}$$

$$P(Y|X=0) = \begin{cases} P(Y=1|X=0) = \dfrac{P(Y=1,X=0)}{P(X=0)} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3} \\ P(Y=2|X=0) = \dfrac{P(Y=2,X=0)}{P(X=0)} = \dfrac{1/6}{1/2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$P(Y|X=1) = \begin{cases} P(Y=1|X=1) = \dfrac{P(Y=1,X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{1/12}{1/2} = \dfrac{1}{6} \\ P(Y=2|X=1) = \dfrac{P(Y=2,X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{5/12}{1/2} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

□

1.6 Modelos de Distribuição Discretos

1.6.1 Modelo de Bernoulli

$X = 0$ (fracasso) $\rightarrow P(X = 0) = q = 1 - p$
$X = 1$ (sucesso) $\rightarrow P(X = 1) = p$
Notação: Ber(p)

$X = x_i$	0	1
p_i	$(1-p)$	p

Tabela 1.1: Função de probabilidade.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ 1-p & \text{, se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{, se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$E(X) = 0(1-p) + 1 - p = p$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$
$$DP(X) = \sqrt{pq}$$

Exemplo 1.39 Lançamos um dado e verificamos a ocorrência de face 3 ou não. Supondo o dado perfeito temos a função de probabilidade

x_i	0	1
p_i	$5/6$	$1/6$

Calcule a função distribuição, esperança, variância e desvio padrão.

Solução:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ 5/6 & \text{, se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{, se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$E(X) = 1/6$$
$$V(X) = \frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$
$$DP(X) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

□

1.6.2 Modelo Binomial

Seja X uma v.a. discreta. X tem distribuição binomial se apresenta o seguinte modelo

$$b(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ (f.p.)}$$

A função distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{, se } 0 \leqslant x < n \\ 1 & \text{, se } x \geqslant n \end{cases}$$

Notação: $X \sim B(n, p)$ ou $b(k; n, p)$.
$E(X) = np, \quad V(X) = npq, \quad DP(X) = \sqrt{npq}.$

Exemplo 1.40 Uma moeda é lançada 8 vezes. Encontre a probabilidade de

a) observar 5 caras;

b) pelo menos uma cara;

c) no máximo 2 caras.

Solução:
$X =$ observar cara. $n = 8, p = \dfrac{1}{2}, q = \dfrac{1}{2}$.

a) $k = 5$

$$P(X=5) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-5} = \frac{8!}{5!(8-5)!}\frac{1}{32}\frac{1}{8} = \frac{56}{256} = 0,21$$

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{255}{256} = 0,99$

c) $P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{256} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{65}{256} = 0,25$

□

1.6.3 Poisson

O modelo ou a distribuição de Poisson se caracteriza quando o número de repetições do experimento é grande e a probabilidade de sucesso p é muito pequena.

$$n \to \infty \text{ e } p \to 0$$

A *função de probabilidade* é dada por

$$P(X=k) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}; k = 0, 1, 2, \ldots$$

paramêtro: $\alpha = np$.
A *função distribuição* é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{0}^{[x]} \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!} & \text{, se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \alpha = np$$
$$V(X) = \alpha = np$$
$$DP(X) = \sqrt{\alpha} = \sqrt{np}$$

Exemplo 1.41 Num posto de pedágio os veículos chegam em média de $30/min$. Qual a probabilidade de, em determinado momento, chegarem 40 veículos?

Solução:
$E(X) = \alpha = 30/\min$
$X =$ número de veículos que passam no pedágio por minuto

$$P(X=40) = \frac{30^{40}e^{-30}}{40!} = 0,0139 = 1,4\%$$

□

Exemplo 1.42 Sabendo-se que chegam a um aeroporto, em média, 3 aviões por hora, qual a probabilidade de em 45 minutos:

a) não chegar nenhum avião;

b) chegarem 4 aviões;

c) chegarem no mínimo 2 aviões.

Solução:
$\alpha = 3/h$; Seja $\alpha_1 = 2,25/45\,\text{min}$ (regra de três).
X = número de aviões que chegam a um aeroporto.

a) $P(X=0) = \dfrac{(2,25)^0 e^{-2,25}}{0!} = 0,105 = 10,5\%$

b) $P(X=4) = \dfrac{(2,25)^4 e^{-2,25}}{4!} = 0,113 = 11,3\%$

c) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - 0,105 - \dfrac{(2,25)e^{-2,25}}{1!} = 0,658 = 65,8\%$

□

Exemplo 1.43 Um posto telefônico recebe, em média, 10 chamadas por minuto. Pede-se:

a) não ocorrer chamada em 1 minuto? Em 2 minutos?

b) ocorrer menos que 3 chamadas em 2 minutos?

c) ocorrer mais que 4 chamadas em 0, 3 minuto?

Solução:
$E(X) = 10/\min$; X = número de chamadas recebidas por minuto.

a) i) $P(X=0) = \dfrac{10^0 e^{-10}}{0!} = 0,000045$

ii) $\alpha = 20/\min, E(X) = 20/2\,\text{min}, k = 0.$

$$P(X=0) = \frac{20^0 e^{-20}}{0!} = 2.10^{-9}$$

b) $P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 2.10^{-9} + 4,12.10^{-8} + 4,12.10^{-7} = 4,56.10^{-7}$

c) $\begin{array}{ccc} 10 & \to & 1\,\text{min} \\ x & \to & 0,3 \end{array}$

$x = 3; \alpha = 3$

$$P(X>4) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)] =$$
$$= 1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!} - \frac{3^1 e^{-3}}{1!} - \frac{3^2 e^{-3}}{2!} - \frac{3^3 e^{-3}}{3!} - \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = 1 - 0,816 = 0,184$$

□

1.6.4 Multinomial

Consideremos um experimento qualquer e k eventos $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ que formam uma partição do espaço amostral do experimento.

Sejam $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, k$. Consideremos ainda n tentativas independentes do mesmo experimento onde $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ os números de ocorrência de $A_1, A_2, \ldots, A_k$, respectivamente.

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = n \text{ ou } X_i = n_i$$

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$$

$$E(X_i) = n_i p_i, i = 1, 2, \ldots, k; \qquad V(X_i) = n_i p_i q_i, i = 1, 2, \ldots, k$$

Exemplo 1.44 Uma urna tem 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 azuis. Retiram-se 8 bolas com reposição. Qual a probabilidade de ser 4 bolas brancas, 2 pretas e 2 azuis?

Solução:

$p_1 = P(B) = \frac{6}{15}$ $X_1 =$ saída de 4 bolas brancas

$p_2 = P(P) = \frac{4}{15}$ $X_2 =$ saída de 2 bolas pretas

$p_3 = P(A) = \frac{1}{3}$ $X_3 =$ saída de 2 bolas azuis

Temos que $n_1 = 4; n_2 = 2; n_3 = 2$.

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 8$$

$$P(X_1 = 4, X_2 = 4, X_3 = 2) = \frac{8!}{4!2!2!}.\left(\frac{6}{15}\right)^4\left(\frac{4}{15}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,08498 \text{ ou } 8,498\%$$

□

Exemplo 1.45 Lança-se um dado 30 vezes. Qual a probabilidade de que cada face ocorra exatamente 5 vezes?

Solução:

$p_1 = P(1) = \frac{1}{6}$ $X_1 = 1$ ocorrer 5 vezes

$\vdots$

$p_6 = P(6) = \frac{1}{6}$ $X_6 = 6$ ocorrer 5 vezes

$$P(X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 = 5, X_4 = 5, X_5 = 5, X_6 = 5) = \frac{30!}{(5!)^6}.\left(\frac{1}{6}\right)^{30} = 0,0004018 \text{ ou } 0,04\%$$

□

Exemplo 1.46 Se um dado honesto for lançado 12 vezes a probabilidade de obter-se exatamente 2 vezes o número $1, 2, 3, 4, 5$ e 6 é.

Solução:

$p_1 = P(1) = \frac{1}{6}$ $X_1 = 1$ ocorrer 2 vezes

$\vdots$

$p_6 = P(6) = \frac{1}{6}$ $X_6 = 6$ ocorrer 2 vezes

$n = 12 \qquad \rightarrow P(X_1 = 2, \ldots, X_6 = 2) = \frac{12!}{(2!)^6}.\left(\frac{1}{6}\right)^{12} = 0,003438 \text{ ou } 0,34\%$

□

1.6.5 Geométrica

Consideremos tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento aleatório.
Sucesso: probabilidade (p)
fracasso: $1-p=q$
Seja X o número de tentativas necessárias até o aparecimento do primeiro sucesso.

$$\begin{aligned}
&X=1 \Rightarrow P(X=1)=p\\
&X=2 \Rightarrow P(X=2); f \text{ e } s = P(F \text{ e } S) = P(F \cap S) = q.p\\
&X=3 \Rightarrow P(X=3); f \text{ e } f \text{ e } s = P(F \text{ e } F \text{ e } S) = P(F \cap F \cap S) = q^2.p\\
&\vdots\\
&X=k \Rightarrow P(X=k) = \underbrace{ff\ldots f}_{k-1 \text{ vezes}}\, s = P(F \cap F \cap \ldots \cap F \cap S) = q^{k-1}.p
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X=k)=q^{k-1}.p}$$

Propriedades:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$
- Esperança: $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k.P(X=k)=\frac{1}{p}$
- Variância: $V(X)=\dfrac{q}{p^2}$

Exemplo 1.47 A probabilidade de se encontrar aberto sinal de trânsito numa esquina é $0,20$. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 5 vezes para encontrar o sinal aberto pela primeira vez?

Solução:

$$P(X=k)=q^{k-1}.p$$

$X=$ número de vezes de passar no local.
$X=5; p=0,20; 1-p=0,80$

$$P(X=5)=(0,80)^4.0,20=0,08192 \text{ ou } 8,192\%$$

□

Exemplo 1.48 Qual a probabilidade de que um dado deva ser lançado 15 vezes para que na 15ª vez ocorra a face 6 pela primeira vez?

Solução:
$X=$ ocorrência da face 6 na primeira vez
$X=15$

$$P(X=15)=\left(\frac{5}{6}\right)^{14}.\frac{1}{6}=0,01298 \text{ ou } 1,3\%$$

$$q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

□

Teorema 1.9 *Suponha que X tenha uma distribuição geométrica, então para dois quaisquer inteiros positivos s e t, $P(X \geqslant s+t|X>s)=P(X>t)$.*

1.7 Exercícios Propostos

Distribuição Binomial (Discreta)

1 Acredita-se que 20% dos moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica tem alergia aos poluentes lançados no ar. Admitindo que este percentual de alérgicos é real (correto), calcule a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia entre os 13 selecionados.

2 Três de cada quatro alunos de uma universidade fizeram cursinho antes de prestar vestibular. Se 16 alunos são selecionados ao acaso, qual a probabilidade de:

a) pelo menos 12 tenham feito cursinho?

b) no máximo 13 tenham feito cursinho?

c) exatamente 12 tenham feito cursinho?

d) em um grupo de 80 alunos selecionados ao acaso, qual é o número esperado de alunos que fizeram cursinho? E a variância?

3 Em uma faculdade, 60% dos calouros vieram de escolas particulares e o restante de escolas públicas, 70% dos alunos das escolas particulares são aprovados para o segundo semestre e 20% dos alunos das escolas públicas também.

a) Calcule a probabilidade de que um calouro, aleatoriamente selecionado dessa faculdade, seja aprovado para o segundo semestre;

b) Qual a probabilidade de que encontremos no mínimo 13 calouros que sejam aprovados para o segundo semestre?

c) Qual a probabilidade de que o número de calouros aprovados para o segundo semestre seja no mínimo 10 e no máximo 20 calouros?

d) Qual o número esperado de calouros reprovados para o segundo semestre? Qual o desvio padrão do número de calouros reprovados para o segundo semestre?

4 Um dado não viciado é lançado 7 vezes. Chamemos de sucesso a ocorrência de um 3 ou um 6.

a) Qual a probabilidade de ocorrer 5 ou 6 exatamente 3 vezes?

b) A probabilidade de um 5 ou 6 ocorrer pelo menos uma vez?

5 Em 1.000 famílias com 8 filhos cada uma, quantas se esperaria que tivessem:

a) exatamente 2 meninos?

b) nenhum menino?

c) três meninos?

d) Calcule a média e a variância da distribuição.

6 Num hospital 5 pacientes devem submeter-se a um tipo de cirurgia, da qual 80% sobrevivem. Qual a probabilidade de que:

a) todos sobrevivam?

b) pelo menos 2 sobrevivam?

c) no máximo 3 não conseguiram sobreviver.

7 Uma distribuição binomial tem média 12 e variância 8. Qual é o valor de n?

8 Lançando uma moeda 5 vezes, qual a probabilidade de se obter "cara" 4 vezes?

9 Um teste é constituido de 10 questões com 4 alternativas cada, das quais apenas uma é correta. Um aluno responde aleatoriamente ao teste. Qual a probabilidade de acertar 6 questões?

10 Retirando-se, com reposição, 3 cartas de um baralho, qual a probabilidade de se obter 2 cartas vermelhas?

11 Numa família de 4 filhos, qual a probabilidade de serem 3 meninos?

12 Lançando 900 vezes uma moeda, qual a média e o desvio padrão do número de "caras"?

13 Lançando 60 vezes um dado, qual a média e o desvio padrão do número de ocorrências do ponto 6?

14 Qual a probabilidade de se obter ao menos uma vez o ponto 3 em n jogadas de um dado?

15 A probabilidade de um atirador acertar o alvo é $1/3$. Se ele atirar 6 vezes, qual a probabilidade de:

a) acertar exatamente 2 tiros?

b) não acertar nenhum tiro?

16 Se 5% das lâmpadas de certa marca são defeituosas, achar a probabilidade de que, numa amostra de 100 lâmpadas escolhidas ao acaso tenhamos:

a) nenhuma defeituosa;

b) 3 defeituosas;

c) mais que uma boa.

17 Existem 15% de probabilidade de que certo tipo de componente não se comporte de forma adequada sob condições de elevadas temperaturas. Se um dispositivo tem quatro de tais componentes, determine as probabilidades de:

a) todos os componentes se comportam de forma adequada e, por conseguinte, o dispositivo funciona;

b) o dispositivo não funciona porque falha um dos quatro componentes;

c) o dispositivo não funciona porque falha um ou mais componentes.

18 Determine a probabilidade de, em cinco jogadas de uma moeda, aparecer:

a) quatro caras;

b) três coroas e duas caras;

c) ao menos duas caras;

d) no máximo duas coroas.

19 Se há uma probabilidade de $0,20$ de que uma pessoa viajando em certa rota aérea solicite um jantar vegetariano, qual a probabilidade de que três entre 10 passageiros daquela rota optem por um jantar vegetariano?

20 Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

a) nenhum defeituoso;

b) exatamente um defeituoso;

c) exatamente dois defeituosos;

d) não mais do que dois defeituosos.

Distribuição de Poisson

1 Se a probabilidade de um indivíduo acusar reação negativa à injeção de determinado soro é $0,005$, determine a probabilidade de que, em 1.000 indivíduos:

a) exatamente 3 apresentam reação negativa;

b) não mais que 2 indivíduos apresentem reação negativa.

2 De acordo com a Divisão de Estatística Vital do Departamento de Saúde dos Estados Unidos, a média anual de afogamentos acidentais nos Estados Unidos é de $3,0$ por 100.000 indivíduos, determine a probabilidade de que, em uma cidade com 2.000 habitantes, se verifiquem:

a) 0;

b) 2;

c) 6;

d) 8;

e) entre 4 e 8;

f) menos de 3 afogamentos acidentais em um ano.

3 Em média há 2 chamadas por hora num certo telefone. Calcular a probabilidade de se receber no máximo 3 chamadas em 2 horas e a probabilidade de nenhuma chamada em 90 minutos.

4 Uma fábrica de pneus verificou que ao testar seus pneus nas pistas, havia em média um estuto de pneu a cada $5.000\,Km$.

a) Qual a probabilidade que num teste de $3.000\,Km$ haja no máximo um pneu estourado?

b) Qual a probabilidade de que um carro ande $8.000\,Km$ sem estourar nenhum pneu?

5 Certo posto de bombeiros recebe em média 3 chamadas por dia. Calcular a probabilidade de:

a) receber 4 chamadas num dia;

b) receber 3 ou mais chamadas num dia.

6 Em uma empresa de decoração na pintura de paredes aparecem defeitos em média na proporção de 1 defeito por metro quadrado. Qual a probabilidade de aparecerem 3 defeitos numa parede de $2 \times 2\,m$?

7 Suponha que haja em média 2 suícidios por ano numa população de 50.000. Em uma cidade de 100.000 habitantes, encontre a probabilidade de que um dado ano tenha havido:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) 2 ou mais suicídios.

8 Suponha 400 erros de impressão distribuidos aleatoriamente em um livro de 500 páginas. Encontre a probabilidade de que uma dada página contenha

a) nenhum erro;

b) exatamente 2 erros.

9 Uma loja atende em média 2 clientes por hora. Calcular a probabilidade de em uma hora

a) atender exatamente 2 clientes;

b) atender 3 clientes.

Gabarito

1) (a) $0,1409$ (b) $0,12465$
2) (a) $0,94176$ (b) $0,00170$ (c) $6,1.10^{-11}$ (d) $3,9.10^{-15}$ (e) $5,1.10^{-7}$ (f) $0,99997$
3) $0,43347; 0,04979$
4) (a) $0,87810$ (b) $0,20190$
5) (a) $0,168$ (b) $0,5767$
6) $0,1952$
7) (a) $0,01832$ (b) $0,07326$ (c) $0,14653$ (d) $0,90842$
8) (a) $0,449$ (b) $0,1437$
9) (a) $0,2070$ (b) $0,180$

1.8 Modelos de Distribuição Contínua

1.8.1 Uniforme

Uma v. a. contínua X tem distribuição *uniforme* de probabilidade no intervalo $[a, b]$ se sua f.d.p. é dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{, se } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{, se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

O gráfico da f.d.p. de X é

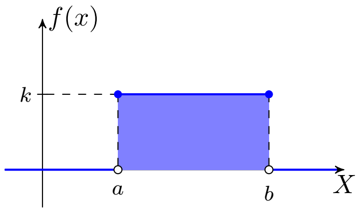


Figura 1.24: Gráfico da f.d.p. de X.

O valor de k é

$$\int_a^b k dx = 1 \Rightarrow kx|_a^b = 1 \Rightarrow k(b-a) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

Logo a f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{, se } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{, se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

A função de distribuição de X é

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} s \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

Logo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{, se } a < x < b \\ 0 & \text{, se } x \geqslant b \end{cases}$$

E o gráfico é

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

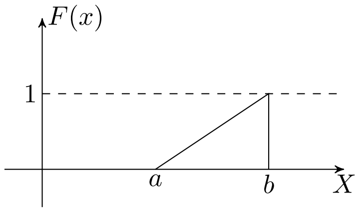


Figura 1.25: Gráfico da função distribuição uniforme de X.

Exemplo 1.49 Um ponto é escolhido no intervalo $[0, 2]$. Qual a probabilidade de que esteja entre 1 e $1,5$?

Solução:

$$k = \frac{1}{b-a} = 0,5$$

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & , \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & , \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 1,5) = \int_1^{1,5} \frac{1}{2} dx = 0,25$$
$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = 0,33$$

□

1.8.2 Normal ou de Gauss

Seja X uma v.a. contínua. A variável X segue um *modelo normal* se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

se $-\infty < x < \infty$.[1]

Paramêtro: $\mu = E(x)$ e $\sigma = \sqrt{V(x)}$.

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Distribuição normal padrão

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, onde Z é uma v.a.

A função densidade de probabilidade é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty$$

A função distribuição é dada por

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < z < \infty$$

$$E(z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}.0 = 0$$
$$V(z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

[1] Notação: $\exp(x) = e^x$.

1.8.3 Gráfico da distribuição ou modelo normal

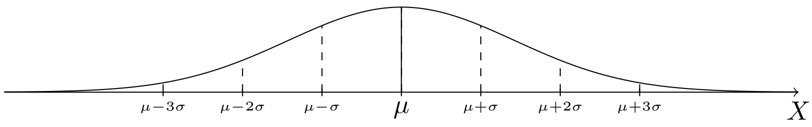


Figura 1.26: Curva de Gauss para a v.a. X

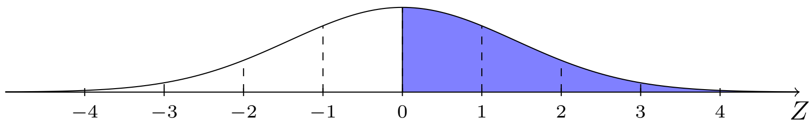


Figura 1.27: Curva de Gauss para a v.a. Z

A tabela (5) no final do livro nos dá a área entre $z = 0$ e um valor de z_1 qualquer.

$$\text{área } = P(0 < z < z_1)$$

Exemplo 1.50 Se $z_1 = 0,51$, $P(0 < z < 0,51) = 0,1950$.

Exemplo 1.51 Se $z_2 = 1$, $P(0 < z < 1) = 0,3413$.

Exemplo 1.52

$$\begin{aligned}
&P(-2,55 < z < 1,2) = \\
&= P(-2,55 < z < 0) + P(0 < z < 1,2) = \\
&= P(0 < z < 2,55) + P(0 < z < 1,2) = \\
&= 0,4946 + 0,3849 = 0,8795
\end{aligned}$$

Exemplo 1.53

$$P(z > 1,93) = 0,5 - P(0 < z < 1,93) = 0,5 - 0,4732 = 0,0268$$

Exemplo 1.54 As alturas dos alunos de uma escola são v.as. com distribuição normal com média $\mu = 1,60\,m$ e desvio padrão $\sigma = 0,30\,m$. Encontre a probabilidade de um aluno medir:

a) entre $1,50\,m$ e $1,8\,m$;

b) mais de $1,75\,m$;

c) menos de $1,48\,m$.

Solução:
$x =$ altura dos alunos

a) $x_1 = 1,50$ e $x_2 = 1,80$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1,50 - 1,60}{0,30} = -0,333$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1,80 - 1,60}{0,30} = 0,666$$

$$\begin{aligned}
&P(1,5 < x < 1,8) = P(-0,33 < z < 0,66) = P(0 < z < 0,33) + P(0 < z < 0,66) = \\
&= 0,1293 + 0,2454 = 0,3747 = 37,47\%
\end{aligned}$$

b) $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{1,75-1,60}{0,30} = 0,5$

$$P(x > 1,75) = P(x > 0,5) = 0,5 - P(0 < z < 0,5) = 0,5 - 0,1915 = 0,3085 = 30,85\%$$

c) $z = \dfrac{1,48-1,60}{0,30} = 0,4$

$$P(x < 1,48) = p(z < -0,4) = 0,5 - P(0 < z < 0,4) = 0,5 - 0,1554 = 0,3446 = 34,46\%$$

□

Exemplo 1.55 As vendas de um determinado produto têm apresentado distribuição normal com média de 600 unidades/mês e desvio padrão de 40 unidades/mês. Se a empresa fabricar 700 unidades naquele mesmo mês, qual é a probabilidade dela não poder atender a todos os pedidos por estar com a produção completa?

Solução:
X = número de unidades produzidas por mês.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{700-600}{40} = 2,5$$

$$P(x > 700) = P(z > 2,5) = 0,5 - P(0 < z < 2,5) = 0,5 - 0,4938 = 0,0062 = 0,62\%$$

□

1.8.4 Exponencial

Uma v.a. X tem distribuição exponencial com $\lambda > 0$ se a sua f.d.p. é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da f.d.p. de X é

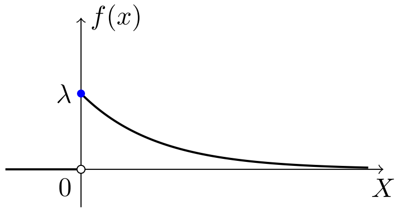


Figura 1.28: Gráfico da f.d.p. de X.

Note que $\displaystyle\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty = 1$
A função de distribuição de X é

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = \left(-e^{-\lambda s}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Logo

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \text{se } x > 0 \\ 0 & , \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

A esperança é $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ e a variância é $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
E o gráfico é

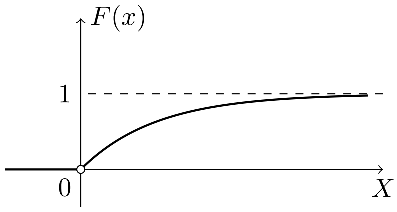


Figura 1.29: Gráfico da função distribuição exponencial de X.

Exemplo 1.56 Uma v.a. contínua X tem f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}e^{-x} & , \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Calcular o valor de k.

b) Determinar $F(x)$.

Solução:

a) Temos que

$$\int_0^\infty \frac{k}{2}e^{-x}dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{2}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow k = 2$$

ou

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$$

b) Temos que

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \text{se } x > 0 \\ 0 & , \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

□

Exemplo 1.57 O tempo de vida (em horas) de um transistor pode ser considerado uma v.a. com distribuição exponencial com $\lambda = 1/500$. Segue-se que a vida média do transistor é $E(T) = 500$ horas e a probabilidade de que ele dure mais do que a média é

$$P(T > 500) = \int_{500}^\infty f(t)dt = \frac{1}{500}\int_{500}^\infty e^{-t/500}dt = \frac{1}{500}\left[-500e^{-t/500}\right]_{500}^\infty = e^{-1} = 0,3678$$

1.9 Exercícios Propostos

1 O salário semanal dos operários da indústria de contrução civil é distribuido normalmente em torno de uma média de \$80, com desvio padrão de \$5.

a) encontre a probabilidade de um operário ter um salário semanal situado entre \$80 e \$83;

b) entre \$75 e \$80;

c) entre \$74 e \$82;

d) acima de \$85;

e) abaixo de \$73;

f) diferindo mais que \$8 da média.

2 De uma amostra de 500 operários da indústria de contrução do problema anterior, quantos esperaríamos que ganhassem salários acima de \$85?

3 A duração de um componente eletrônico pode ser considerada normalmente distribuida com média de 850 dias e desvio padrão de 45 dias. Calcular a probabilidade de um componente durar:

a) entre 700 e 1.000 dias;

b) mais que 800 dias;

c) menos que 750 dias;

d) exatamente 1.000 dias.

4 Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuidos com média de $65,3\,Kg$ e desvio padrão $5,5\,Kg$. Encontre o número de alunos que pesam:

a) entre 60 e $70\,Kg$;

b) mais que $63,2\,Kg$.

5 Suponha que a duração de vida de dois equipamentos, E_1 e E_2, tenha, respectivamente, distribuições $N(45;9)$ e $N(40;36)$. Se o equipamento tiver que ser usado por um período de 45 horas, qual deles deve ser preferido?

6 X é uma variável aleatória contínua tal que $X = N(12;25)$. Qual a probabilidade de uma observação ao acaso

a) ser menor do que -3?

b) cair entre -1 e 15?

7 A vida média útil de lavadoras de pratos automáticas é de $1,5$ ano, com desvio padrão de $0,3$ ano. Se são vendidas 12.000 unidades, quantas esperamos que necessitarão de conserto antes de expirar o período de garantia de um ano?

8 Entre os 4.000 empregados de uma grande empresa, o QI (quociente de inteligência) é normalmente distribuido com média de 104 e desvio padrão de 15. Sabendo-se que uma tarefa específica requer um QI mínimo de 98 e que aborrece aqueles com QI acima de 110, quantos empregados estarão adaptados para executar essa tarefa, com base apenas no QI?

9 Uma pessoa tem 20 minutos para chegar ao escritório. Para tal, pode optar entre dois caminhos; A ou B. Sabendo-se que o tempo para percorrer o caminho A é $N(18;25)$ e que o tempo para percorrer B é $N(20;4)$, qual a melhor escolha do trajeto?

10 Um processo industrial produz canos com diâmetro de $2,00$ polegadas e desvio padrão de $0,01$ polegada. Os canos com diâmetro que varia mais de $0,03$ polegada a contar da média são considerados defeituosos. Em uma produção de 10.000 canos, quantos esperíamos defeituosos?

11 Suponha que em determinado período do dia, o tempo médio do atendimento em um caixa de banco seja de 5 minutos. Admitindo que o tempo para atendimento tenha uma distribuição exponencial, determine a probabilidade de um cliente:

a) esperar mais do que 5 minutos;

b) esperar menos do que 5 minutos;

c) esperar entre 3 e 8 minutos.

12 O tempo de atendimento numa oficina é aproximadamente exponencial com média de 4 minutos. Qual a probabilidade de:

a) espera superior a 4 minutos?

b) espera inferior a 5 minutos?

c) espera de exatamente 4 minutos?

13 A duração de vida de um certo componente eletrônico é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média de 2.000 horas. Ache a probabilidade de um componente durar:

a) no máximo 2.400 horas;

b) no mínimo 1.600 horas;

c) entre 1.800 e 2.200 horas.

14 Na região de uma falha geológica, o tempo entre choques posteriores a um terremoto é uma variável aleatória que tem distribuição exponencial com média de 36 horas. Determine as probabilidades de o tempo entre choques sucessivos:

a) ser inferior a 18 horas;

b) exceder 72 horas;

c) ficar entre 36 e 108 horas.

Capítulo 2

Estatística Descritiva

2.1 Análise Exploratória de Dados

- variáveis
  - discretas
  - contínuas

- variáveis
  - qualitativas
    - nominal
    - ordinal
  - quantitativas
    - discretas
    - contínuas

2.1.1 Distribuição de frequências

grau de instrução	frequência n_i	proporção $f_i = \frac{n_i}{n}$	proporção %
1º grau	12	$0,3333$	$33,33$
2º grau	18	$0,5000$	$50,00$
superior	6	$0,1667$	$16,67$
total	$n = 36$	1	100

Dados da Tabela 6.

Tabela 2.1: Distribuição de frequência de variável qualitativa.

nº de filhos	frequência n_i	f_i	$f_i\%$
0	4	$0,1110$	$11,10$
1	5	$0,1389$	$13,89$
2	7	$0,1944$	$19,44$
3	3	$0,0833$	$8,33$
5	1	$0,0278$	$2,78$
não respondeu	16	$0,4444$	$44,44$
total	36	1	100

Dados da Tabela 6.

Tabela 2.2: Distribuição de frequência da variável número de filhos.

classes de salários	n_i	f_i	$f_i\%$
$4 \vdash 8$	10	0,2778	27,78
$8 \vdash 12$	12	0,3333	33,33
$12 \vdash 16$	8	0,2222	22,22
$16 \vdash 20$	5	0,1389	13,89
$20 \vdash 24$	1	0,0278	2,78
total	36	1	100

Dados da Tabela 6.

Tabela 2.3: Distribuição de frequência da variável salário.

2.2 Representação gráfica das variáveis quantitativas: discretas e contínuas

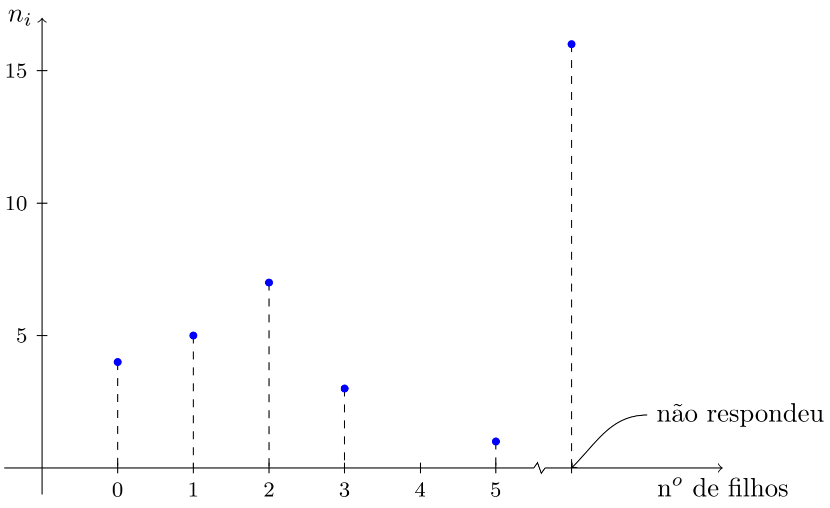


Figura 2.1: Gráfico de variável discreta.

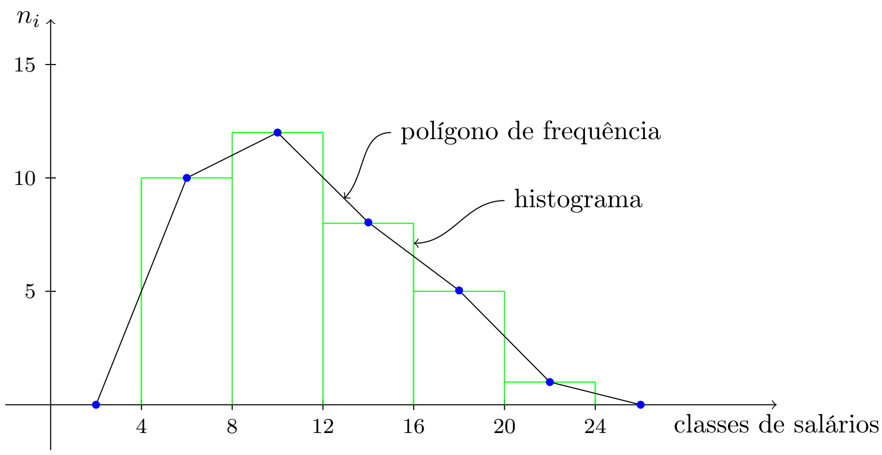


Figura 2.2: Gráfico de variável contínua.

2.3 Medidas associadas a variáveis quantitativas

- Medidas de posição: média, mediana e moda.
- Separatrizes: mediana, quartis, decis e centis (contínuas).
- Medidas de variabilidade: desvio médio, variância e desvio padrão.

2.3.1 Medidas de posição

São valores representativos de uma série de dados. As medidas mais usadas são: média aritmética, mediana e moda (variáveis discretas).

Média

Média(Me) é a soma dos valores da série de dados dividido pelo número desses valores.

$$\text{Me} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \text{ ou } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemplo 2.1 Dados os números $3, 4, 7, 8$ e 8.

$$\text{Me} = \frac{3+4+7+8+8}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Moda

Moda(Mo) é o elemento de maior frequência.

Exemplo 2.2 Dados os números $1, 1, 1, 1, 1$ e 8.

$$\text{Mo} = 1$$

Exemplo 2.3 Dados os números $1, 1, 1, 2, 2, 2, 8, 8$ e 9.

$$\text{Mo} = 1 \text{ e } 2 \text{ bimodal}$$

Pode haver mais de uma moda, ou seja, a distribuição pode ser bimodal, trimodal ou polimodal.

Mediana

Mediana(Md) é a realização que ocupa a posição central de um grupo de dados quando este está ordenado de forma crescente ou decrescente.

Exemplo 2.4 Dados os números $3, 4, 7, 8$ e 8. Número ímpar de observações.

$$\text{Md} = 7$$

Exemplo 2.5 Dados os números $9, 3, 4, 7, 8$ e 8.
Reagrupando os números, temos: $3, 4, 7, 8, 8, 9$. Os dois números do meio são 7 e 8, então

$$\text{Md} = \frac{7+8}{2} = 7,5$$

Desvio Médio

Desvio Médio(DM) é a distância média de cada dado em relação à sua média aritmética.

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Variância

Variância(var ou V) mede a concentração média dos dados em relação à sua média.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$DP = \sqrt{V}$$

Exemplo 2.6 A partir da tabela 6 temos que $\bar{x} = 1,65$. Então para os valores $0, 1, 2, 3$ e 5 obtemos o desvio médio:

$$0 - 1,65 = -1,65; 1 - 1,65 = -0,65; 2 - 1,65 = 0,35; 3 - 1,65 = 1,35; 5 - 1,65 = 3,35$$

Logo,

$$DM = \frac{|-1,65| + |-0,65| + |0,35| + |1,35| + |3,35|}{5} = 1,47$$

$$V = \frac{(-1,65)^2 + (-0,65)^2 + (0,35)^2 + (1,35)^2 + (3,35)^2}{5} = 3,26$$

$$DP = 1,81$$

Média aritmética

Definimos *média aritmética* do seguinte modo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i Pm_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \text{ onde}$$

f_i : frequência simples
P_m : ponto médio da classe
n : número de classes

Exemplo 2.7 Usaremos a tabela a seguir para os próximos exemplos.

estatura (cm)	frequência f_i	Pm_i	f_iPm_i	fac
$150 \vdash 156$	5	153	765	5
$156 \vdash 162$	4	159	636	9
$162 \vdash 168$	19	165	3135	28
$\boxed{168 \vdash 174}$	18	171	3078	46
$174 \vdash 180$	14	177	2478	60
$180 \vdash 186$	12	183	2196	72
$186 \vdash 192$	4	189	756	76

Tabela 2.4: Tabela de estatura dos alunos.

A partir da tabela temos que $\sum_{i=1}^{7} f_i Pm_i = 13044$ e $\bar{x} = \frac{13044}{76} \cong 171,63\,cm$

Mediana

Definimos *mediana* do seguinte modo:

$$Me = li + \left[\frac{E_m - facant}{f_i \text{ da classe}}\right] h, \text{ onde}$$

$$E_m = \frac{\sum f_i}{2} \text{ ou } \frac{N}{2}$$

li : limite inferior da classe mediana
E_m : posição ocupada pelo elemento mediano
$facant$: frequência acumulada até a classe mediana
f_i : frequência absoluta da classe mediana
h : amplitude do intervalo da classe mediana
Da tabela, $E_m = \frac{76}{2} = 38$.
$li = 168; facant = 28; h = 6; f_i = 18$.

$$\Rightarrow Me = 168 + \left[\frac{38 - 28}{18}\right].6 \cong 170,14\,cm$$

Método gráfico

a) $y = fac; x =$ classes

b) A partir da fórmula $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2}$ determinamos a posição do elemento mediano ou E_m.

c) Traçamos uma paralela ao eixo x em E_m, que intercepte a linha (poligonal) que ligue os extremos da classe, em seguida traçamos uma perpendicular no ponto de intersecção.

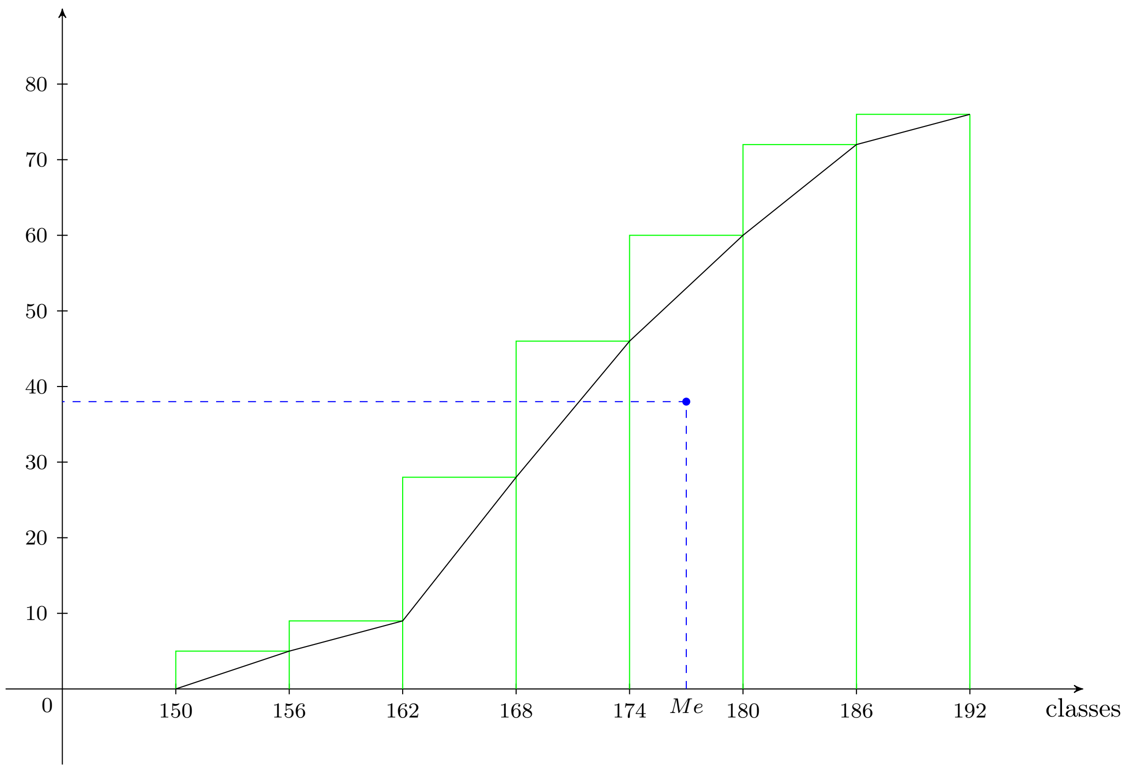


Figura 2.3: Gráfico da tabela 2.4.

Moda

A moda é determinada por

$$Mo = li + \left[\frac{f_{\max} - f_{ant\max}}{2f_{\max} - (f_{ant} + f_{\text{post}})}\right] h, \text{ onde}$$

li : limite inferior da classe de maior frequência
$f_{\max}$: frequência de maior ocorrência
$f_{ant\max}$: frequência anterior a de maior ocorrência
f_{post} : frequência posterior a de maior ocorrência
h : amplitude da classe modal (maior ocorrência)

Exemplo 2.8 Da tabela 2.4, temos: $li = 162; f_{\max} = 19; f_{ant\max} = 4; f_{\text{post}} = 18; h = 6$.

$$Mo = 162 + \left[\frac{19 - 4}{2.19 - (4 + 18)}\right] 6 = 167,625$$

2.3.2 Separatrizes

Quartis

Divide a distribuição em quatro partes iguais.

$$Q_i = li + \left[\frac{E_{q_i} - facant}{f_i \text{ da classe}}\right] h, i = 1, 2, 3$$

$$E_{q_i} = \frac{i.n}{4} \qquad n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

Decis

Divide a distribuição em dez partes iguais, é dada por

$$D_i = li + \left[\frac{E_{d_i} - facant}{f_i \text{ da classe}}\right] h, i = 1, 2, ..., 9$$

$$E_{d_i} = \frac{i.n}{10}$$

Centis

Divide a distribuição em cem partes iguais, é dada por

$$C_i = li + \left[\frac{E_{c_i} - facant}{f_i \text{ da classe}}\right] h, i = 1, 2, ..., 99$$

$$E_{c_i} = \frac{i.n}{100}$$

Exemplo 2.9 Do exemplo 2.7, calcule Q_2, D_8, D_{25}.

$$E_{q_2} = \frac{2n}{4} = \frac{2.76}{4} = 38$$

$$li = 168; facant = 28; f_i = 18; h = 6$$

$$Q_2 = 168 + \left[\frac{38 - 28}{18}\right].6 = 171,333$$

$$E_{d_8} = \frac{8n}{10} = \frac{8.76}{10} = 60,8$$

$$li = 180; facant = 60; f_i = 12; h = 6$$

$$D_8 = 180 + \left[\frac{60,8 - 60}{12}\right].6 = 180,4$$

$$E_{c_{25}} = \frac{25.76}{100} = 19$$
$$li = 162; facant = 9; f_i = 19; h = 6$$
$$C_{25} = 162 + \left[\frac{19-9}{19}\right].6 = 165,16$$

2.4 Medidas de dispersão quantitativas de v.a. contínuas

Amplitude total

É a diferença entre o maior e o menor dos valores da série.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

Exemplo 2.10 $192 - 150 = 42$

Desvio médio

Medida da dispersão dos dados em relação a média.

$$\boxed{DM = \frac{\sum |d_i| f_i}{n}}$$

$d_i = x_i - \bar{x}$
onde $\bar{x}$ é a média aritmética das amostras.

Variância

Média aritmética de cada desvio.

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 .f_i}{n-1}} \text{ ou } \boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 f_i - \frac{(\sum x_i f_i)^2}{n}\right]}$$

Desvio Padrão

$$\boxed{DP = \sqrt{S}}$$

2.5 Exercícios Propostos

1 Dadas as distribuições abaixo, calcule a média, a mediana e a moda.

a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8
f_i	4	9	2	10	12	5	3

b)

x_i	$3/5$	$4/9$	$7/12$	$9/8$	$10/11$
f_i	3	8	10	5	2

2 Dadas as distribuições abaixo, calcule a média, mediana, moda, 1° e 3° quartil, 5° e 7° decil e 60° e 80° centil.

a) Considere a tabela a seguir:

estatura (cm)	n° de pessoas (f_i)
$140 \vdash 145$	9
$145 \vdash 150$	15
$150 \vdash 155$	40
$155 \vdash 160$	22
$160 \vdash 165$	10
$165 \vdash 170$	4
Total	

b) Considere a tabela a seguir:

classe	f_i
$0 \vdash 2$	1
$2 \vdash 4$	4
$4 \vdash 6$	6
$6 \vdash 8$	8
$8 \vdash 10$	6
$10 \vdash 12$	4
Total	

c) Considere a tabela a seguir:

diametro (pol)	f_i
$1,20 \vdash 1,40$	8
$1,40 \vdash 1,60$	12
$1,60 \vdash 1,80$	23
$1,80 \vdash 2,00$	15
$2,00 \vdash 2,20$	50
$2,20 \vdash 2,40$	28
$2,40 \vdash 2,60$	10
$2,60 \vdash 2,80$	4
Total	

3 Os dados abaixo representam as vendas semanais, em classes de salários mínimos, de vendedores de gêneros alimentícios. Calcule a média, mediana e faça o histograma.

vendas semanais	n° de vendedores
$30 \vdash 35$	2
$35 \vdash 40$	10
$40 \vdash 45$	18
$45 \vdash 50$	50
$50 \vdash 55$	70
$55 \vdash 60$	30
$60 \vdash 65$	18
$65 \vdash 70$	2
Total	

4 Em uma granja foi observada a distribuição dos frangos com relação ao peso, que era o seguinte:

peso (gramas)	f_i
$960 \vdash 980$	60
$980 \vdash 1000$	160
$1000 \vdash 1020$	280
$1020 \vdash 1040$	260
$1040 \vdash 1060$	160
$1060 \vdash 1080$	80
Total	

a) Qual é a média da distribuição?

b) Construa o histograma.

c) Queremos dividir os frangos em quatro categorias, com relação ao peso, de modo que: os 20% mais leves sejam da categoria D; os 30% seguintes da categoria C; os 30% seguintes sejam da categoria B e os 20% restantes sejam da categoria A (isto é, os 20% mais pesados). Quais os limites de peso entre as categorias A, B, C e D?

5 Os dados abaixo referem-se aos salários pagos a 63 funcionários da Empresa "Peta S.A." ($\$ 100,00$).

1080	608	764	855	768	815	975
550	975	612	955	780	712	985
872	662	850	787	1050	1150	575
687	830	825	838	787	825	756
750	781	578	945	768	855	550
705,5	612	638	872	662	608	575
825	615,5	756	1050	550	712	870
980	1150	1088	975	823	510	582
1045	723	962	883	761	715	723

Pede-se:

a) determine a amplitude da amostra;

b) o número de classes;

c) a amplitude das classes;

d) montar uma tabela de distribuição de frequência para a amostra contendo a frequência absoluta, frequência relativa, frequência acumulada e frequência percentual;

e) pontos médios das classes;

f) histograma;

g) polígono de frequência;

h) salário médio;

i) salário modal;

j) salário mediano;

k) determinar a medida que deixa $1/4$ dos salários;

l) determinar a medida que deixa 75% dos salários;

m) determinar a medida que deixa 30% dos salários;

n) determinar a medida que deixa 77% dos salários;

6 Determinar a média e a mediana dos conjuntos de números:

a) $5, 4, 8, 3, 7, 2, 9$

b) $18,3; 20,6; 19,3; 22,4; 20,2; 18,8; 19,7; 20,0$

7 Determinar a mediana, a média e a moda dos conjuntos de números:

a) $7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7$

b) $8, 11, 4, 3, 2, 5, 10, 6, 4, 1, 10, 8, 12, 6, 5, 7$

8 Na companhia A, a média de salários é de 10.000 unidades e o 3° quartil é 5.000. Se você se apresentasse como candidato a essa firma e se seu salário fosse escolhido ao acaso entre todos os possíves salários, o que seria mais provável: ganhar mais ou menos que 5.000 unidades?

9 O número de desquites na cidade, de acordo com a duração do casamento, está representado na tabela abaixo:

anos de casamento	nº de desquites
$0 \vdash 6$	2800
$6 \vdash 12$	1400
$12 \vdash 18$	600
$18 \vdash 24$	150
$24 \vdash 32$	50

a) Qual a duração média dos casamentos? E a mediana?

b) Construa o histograma da distribuição;

c) Encontre o 1° e o 9° decil;

d) Encontre o 3° quartil e o 99° percentil.

10 Em certa empresa trabalham 4 analistas de mercado, 2 supervisores, 1 chefe de seção e 1 gerente, que ganham respectivamente: $R\$\,1.300,00$; $R\$\,1.600,00$; $R\$\,1.750,00$ e $R\$\,2.500,00$. Qual o valor do salário médio desses funcionários?

2.6 A Estatística na escola

Evolução de matrículas (por série e global)

Objetivo: verificar se o número de matriculados vem decrescendo ou crescendo.

Exemplo 2.11

Ano	Matrículas	Vagas	Matrículas em relação às vagas (%)
1970	110	120	91,7
1971	115	120	95,8
1972	100	120	83,3
1973	90	120	75,0
1974	80	120	66,7

Recuperações (por turma ou disciplina, por série e global)

Objetivo: sugerir providências na melhoria do ensino quando da ocorrência de recuperações. Podem ocorrer as seguintes situações:

1. grande quantidade de alunos terem ficado em recuperação;
2. nenhum ou poucos alunos terem ficado em recuperação.

Um indicador que pode ser utilizado é o chamado coeficiente de recuperações

$$C.\,\mathrm{Rec} = \frac{\mathrm{Rec}}{M}.100\%$$

onde Rec é o número de alunos que ficaram em recuperação e M é o número total de alunos (na turma ou disciplina, na série, na escola, conforme o caso considerado).

Exemplo 2.12

Disciplina	Matriculados	Em recuperação	C. Rec
Português	1200	300	25,0%
Matemática	1200	400	33,3%
Ciências Naturais	1000	100	10,0%
Ciências Sociais	800	50	6,3%
Ingles	500	80	16,0%
Música	1200	20	1,7%

Será que houve anormalidade?

Evasão de alunos (por série e global)

Objetivo: revelar a existência de uma série de problemas que uma vez solucionados melhorariam bastante o ensino na escola.

Um indicador é o chamado coeficiente de evasão

$$C.E. = \frac{E}{M}.100\%$$

onde E é o número de alunos que saíram da escola e M é o número de alunos matriculados.

Exemplo 2.13 Suponhamos que dos 1200 alunos da escola A, matriculados no início do ano, havia no final do ano apenas 930.

$$C.E. = \frac{(1200 - 930)}{1200}.100\% = 22,5\%$$

Se nesta escola, na 5ª série, houve 200 matrículas iniciais e no fim do ano só se contaram 150 alunos, então

$$C.E. = \frac{(200 - 150)}{200}.100\% = 25\%$$

Produtividade anual (por turma, por série ou global)

Objetivo: indicar se o rendimento dos alunos é satisfatório ou não.

$$C.P.A. = \frac{A}{N}.100\%$$

onde A é o número de alunos aprovados e N é o número de alunos no final do ano.

Análise dos resultados numa prova

aplicação de uma prova → fácil demais
aplicação de uma prova → difícil demais

Exemplo 2.14

Notas	f_i	$fr(\%)$
$0 \vdash 2,0$	10	$16,7\%$
$2,1 \vdash 4,0$	20	$33,3\%$
$4,1 \vdash 6,0$	15	$25,0\%$
$6,1 \vdash 8,0$	11	$18,3\%$
$8,1 \vdash 10,0$	4	$6,7\%$
Total	60	100%

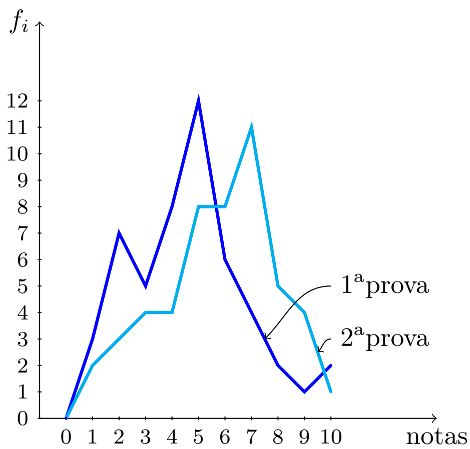
Conclusões: $16,7\% + 33,3\% = 50\%$ dos alunos conseguiram notas inferiores ou iguais a 4. Por outro lado $18,3\% + 6,7\% = 25\%$ conseguiram notas superiores a 6. Isso significa ou que a prova foi difícil demais ou a turma não estudou o bastante. Seria interessante determinar a média e a dispersão das notas.

Comparação dos resultados de várias provas

Objetivo: comparar os resultados de várias provas para verificar como os alunos estão progredindo.

Exemplo 2.15 Pesquisa sobre os resultados nas duas provas de Matemática já aplicadas.

	frequências absolutas	
Notas	1ª prova	2ª prova
0	0	0
1	3	2
2	7	3
3	5	4
4	8	4
5	12	8
6	6	8
7	4	11
8	2	5
9	1	4
10	2	1
Total	50	50



Reprovações numa disciplina

Objetivo: tomar providências para evitar percentual elevado de alunos reprovados.

$$C.\,\text{Rep} = \frac{\text{Rep}}{N}.100\%$$

onde Rep é o número de alunos reprovados na disciplina e N é o número de alunos no final do ano.

Aproveitamento de alunos transferidos

Um indicador da qualidade do ensino da Escola é o estudo do aproveitamento dos alunos transferidos de outras em relação aos veteranos.

$$(C.P.A.)_T = \frac{A}{N}.100\%$$

onde A é o número de alunos aprovados transferidos e N é o número total de alunos transferidos.

Exemplo 2.16 Suponhamos que certa escola tem um efetivo de 1200 alunos no final do ano e que deste total 100 vieram transferidos de outras escolas. Sabe-se que dos transferidos, 95 foram aprovados enquanto dos veteranos, houve 860 aprovados.

$$(C.P.A.)_T = \frac{95}{100}.100\% = 95\%$$

$$(C.P.A.)_T = \frac{860}{1100}.100\% = 78\%$$

Os coeficientes de produtividade calculados acima indicam uma diferença razoável em favor dos transferidos.

Tábua de Probabilidade

Z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3319	0,3212	0,3238	0,3264	0,3290	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319

Z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4383	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987									
4,0	0,4999									

Fonte: LEVIN, Jack. *Estatística Aplicada a Ciências Humanas.* 2 ed., São Paulo: Harbra, 1987. p. 357 (adaptação).

Tabela 5: Tábua de probabilidade.

Tabela Hipotética de Dados

nº	Estado civil	Grau de instrução	nº de filhos	Salário (X sal. min.)	Idade anos	Idade meses	Região de procedência
1	solteiro	1º grau	-	$4,00$	26	03	interior
2	casado	1º grau	1	$4,56$	32	10	capital
3	casado	1º grau	2	$5,25$	36	05	capital
4	solteiro	2º grau	-	$5,73$	20	10	outro
5	solteiro	1º grau	-	$6,26$	40	07	outro
6	casado	1º grau	0	$6,66$	28	00	interior
7	solteiro	1º grau	-	$6,86$	41	00	interior
8	solteiro	1º grau	-	$7,39$	43	04	capital
9	casado	2º grau	1	$7,59$	34	10	capital
10	solteiro	2º grau	-	$7,44$	23	06	outro
11	casado	2º grau	2	$8,12$	33	06	interior
12	solteiro	1º grau	-	$8,46$	27	11	capital
13	solteiro	2º grau	-	$8,74$	37	05	outro
14	casado	1º grau	3	$8,95$	44	02	outro
15	casado	2º grau	0	$9,13$	30	05	interior
16	solteiro	2º grau	-	$9,35$	38	08	outro
17	casado	2º grau	1	$9,77$	31	07	capital
18	casado	1º grau	2	$9,80$	39	07	outro
19	solteiro	superior	-	$10,53$	25	08	interior
20	solteiro	2º grau	-	$10,76$	37	04	interior
21	casado	2º grau	1	$11,06$	30	09	outro
22	solteiro	2º grau	-	$11,59$	34	02	capital
23	solteiro	1º grau	-	$12,00$	41	00	outro
24	casado	superior	0	$12,79$	26	01	outro
25	casado	2º grau	2	$13,23$	32	05	interior
26	casado	2º grau	2	$13,60$	35	00	outro
27	solteiro	1º grau	-	$13,85$	46	07	outro
28	casado	2º grau	0	$14,69$	29	08	interior
29	casado	2º grau	5	$14,71$	40	06	interior
30	casado	2º grau	2	$15,99$	35	10	capital
31	solteiro	superior	-	$16,22$	31	05	outro
32	casado	2º grau	1	$16,61$	36	04	interior
33	casado	superior	3	$17,26$	43	07	capital
34	solteiro	superior	-	$18,75$	33	07	capital
35	casado	2º grau	2	$19,40$	48	11	capital
36	casado	superior	3	$23,30$	42	02	interior

Fonte: Dados hipotéticos.

Tabela 6: Tabela de funcionários da Companhia Milsa.

Referências Bibliográficas

[1] BUSSAB, Wilson O. e MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica.* 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

[2] HOEL, P. G., PORT, S. C. e STONE, C.J. *Introdução à Teoria da Probabilidade.* Rio de Janeiro: Interciência, 1971.

[3] MAGALHÃES, Marcos N. e LIMA, Antonio C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística.* São Paulo: EdUsp, 2008.

[4] MORETTIN, Luiz G. *Estatística Básica: Probabilida e Inferência.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.