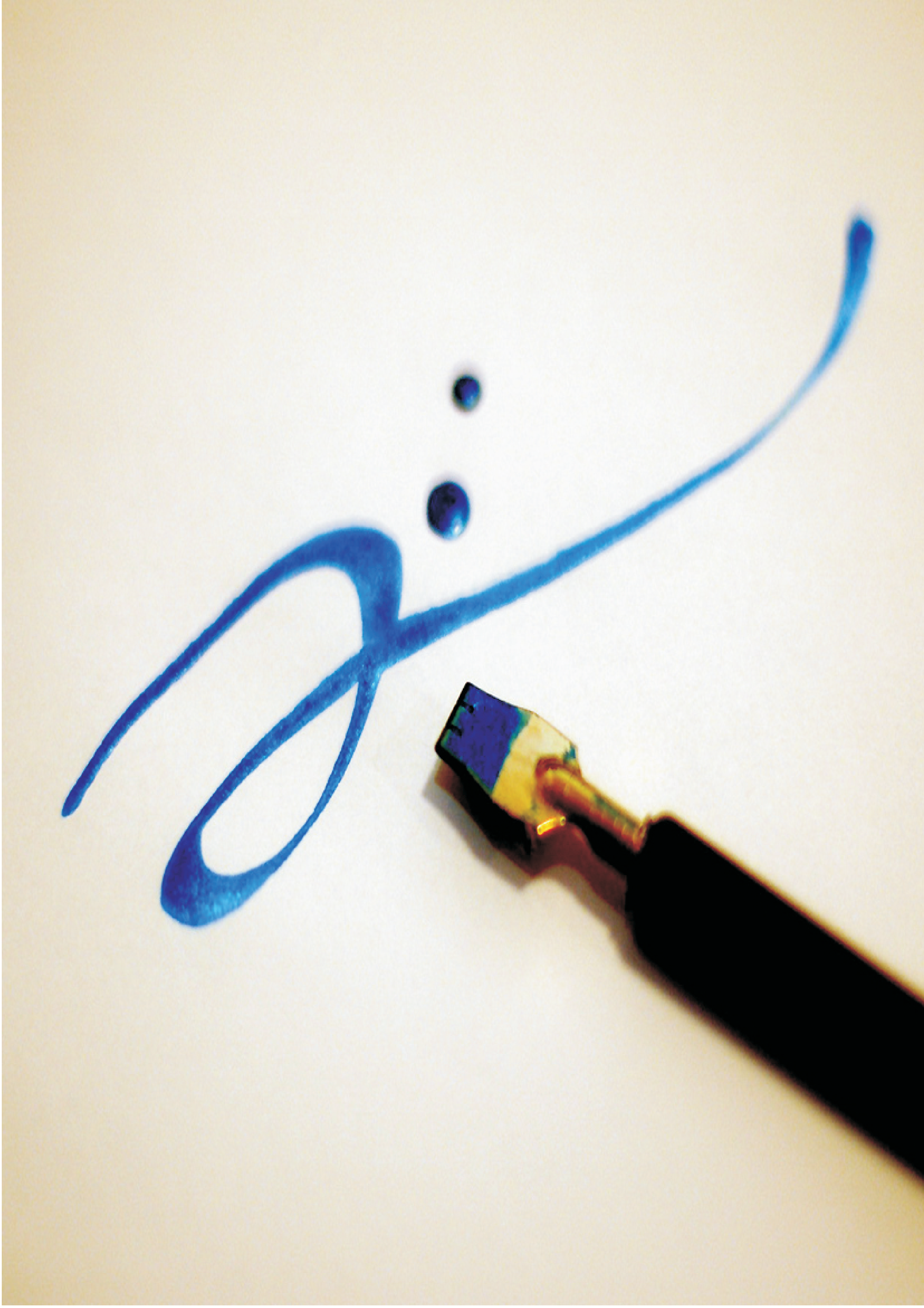


Análise Matemática

Régis da Silva Santos

UFMT 2009

Prefácio da Segunda Edição

Esta apostila foi criada a partir de notas de aula do curso regular de Análise Matemática em 2009.

É permitida a reprodução total ou parcial desta apostila desde que indicada a autoria.

Esta apostila foi criada para uso pessoal, portanto, adaptada para tal fim, podendo posteriormente ser adaptada para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Nota: Esta é a segunda edição onde foram feitas algumas correções e atualizações.

Referências: Geraldo Ávila[1] e Elon Lima[2].

Régis da Silva Santos
Universidade Federal de Mato Grosso, 2009.

Sumário

CAPÍTULO 1

Conjuntos Finitos e Enumeráveis

O conjunto dos números naturais é

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

O conjunto dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

e o conjunto dos números racionais é

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Fato 1.1 *Se $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

Demonstração:
Suponha que $x^2 = 2$ e que $x \in \mathbb{Q}$. Então $x = \dfrac{a}{b}$ e podemos supor a e b primos entre si.
Assim $\dfrac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$.
Isto implica que a^2 é par, então a é par.
Seja $a = 2t$. Assim

$$(2t)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4t^2 = 2b^2 \Rightarrow 2t^2 = b^2$$

implica que b^2 é par, então b é par.

Absurdo, pois supomos que $\dfrac{a}{b}$ é irredutivel. Logo $x \notin \mathbb{Q}$ $\blacksquare$

Definição 1.2 Dois conjuntos A e B têm a mesma **cardinalidade** , ou a mesma potência, se existe uma função $\varphi : A \to B$ *bijetora.*

1.1 Conjuntos Finitos e Infinitos

Denotando por F_n o conjunto $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$, um conjunto A possui n elementos se existir $\varphi : A \to F_n$ bijetora. Neste caso, ou quando $A = \varnothing$, dizemos que A é finito.

Se A não é finito, A é dito infinito.

1.2 Conjuntos Enumeráveis

Um conjunto A é dito *enumerável* se tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. Isto é, existe $\varphi : \mathbb{N} \to A$ bijetora.

Exemplo 1.1 $\mathbb{N}$ é enumerável.

De fato, definindo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) = n$.

Exemplo 1.2 $\mathbb{Z}$ é enumerável.

De fato, definindo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \text{, se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Além disso,

1. φ é injetora.

   De fato, se n_1 é par e n_2 é ímpar, então $\varphi(n_1) < 0$ e $\varphi(n_2) \geqslant 0$, logo $\varphi(n_1) \neq \varphi(n_2)$.

   Se n_1 e n_2 são pares e $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, então

   $$\frac{-n_1}{2} = \frac{-n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$$

   Se n_1 e n_2 são ímpares e $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, então

   $$\frac{n_1 - 1}{2} = \frac{n_2 - 1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$$

   Portanto, φ é injetora.

2. φ é sobrejetora.

   De fato, seja $y \in z$.

   Se $y < 0$, seja $n = -2y$ (n é par), então

$$\varphi(n) = \varphi(-2y) = \frac{-(-2y)}{2} = y.$$

   Se $y \geqslant 0$, seja $n = 2y + 1$ (n é ímpar), então

$$\varphi(n) = \varphi(2y + 1) = \frac{2y + 1 - 1}{2} = y$$

   Portanto, φ é bijetora.

Exemplo 1.3 Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k\}$. O conjunto A é enumerável.
Basta definir $\varphi : \mathbb{N} \to A$ por $\varphi(n) = 2n$.

1. φ é injetora. Se $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, então

$$2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

2. Seja $y \in A$, então y é par. Logo, $\dfrac{y}{2} \in \mathbb{N}$ e $\varphi\left(\dfrac{y}{2}\right) = 2.\dfrac{y}{2} = y$.

Proposição 1.3 *Qualquer subconjunto de* $\mathbb{N}$ *é finito ou enumerável.*

Demonstração:
Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ e suponha A infinito.
Sejam n_1 o menor elemento de A e n_2 o menor elemento de A, maior que n_1.
Vamos admitir que escolhemos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.
Agora escolhemos n_{k+1} como sendo o menor elemento de A, maior que n_k.
Afirmação: $\varphi : \mathbb{N} \to A$ definida por $\varphi(i) = n_i$ é uma bijeção.

1. φ é sobrejetora.

   Seja $y \in A$. y é um número natural fixo.

   Se y é o menor elemento de A, ok.

   Se não for, escolha $n_1, n_2, \ldots, n_k \in A$ tais que y seja o menor elemento de A, maior que n_k. Então, $\varphi(k + 1) = y = n_{k+1}$.

2. φ é injetora.

   Sejam $i, j \in \mathbb{N}$. Se $i \neq j$ vamos mostrar que $\varphi(i) \neq \varphi(j)$.

   Se $i \neq j$, podemos supor $i < j$.

Temos que $j \geqslant i+1$. Então, $\varphi(i) = n_i$ e $\varphi(i+1) = n_{i+1}$ e n_{i+1} é o menor elemento de A, maior que n_i.

Se $j = i+k$, então

$$\varphi(j) = \varphi(i+k) = n_{i+k}$$

e n_{i+k} é o menor elemento de A, maior que n_{i+k-1}.

Portanto, φ é bijetora.

■

Proposição 1.4 *Se $\varphi : A \to B$ é injetora e B é enumerável, então A é enumerável (ou finito).*

Demonstração:
Por hipótese B é enumerável, logo $\exists \psi : B \to \mathbb{N}$ bijetora.
Obs: *Toda função injetora é bijetora sobre sua imagem.*
Dessa forma $\varphi : A \to \varphi(A)$ é uma bijeção. $\varphi(A)$ é o conjunto imagem da função φ.
Podemos agora considerar a composição

$$A \xrightarrow{\varphi} \varphi(A) \xrightarrow{\psi} \psi(\varphi(A))$$

Então, $\psi \circ \varphi : A \to \psi(\varphi(A))$ é uma bijeção. $\psi(\varphi(A)) \subset \mathbb{N}$. Como todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é finito ou enumerável, segue que A é finito ou enumerável. ■

Corolário 1.5 *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é finito ou enumerável.*

Demonstração:
Seja B enumerável e $A \subset B$. Defina $i : A \to B$ por $i(x) = x$. Assim, i é injetora.
Pela Prop. 1.4, A é enumerável ou finito. ■

Exemplo 1.4 Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Solução:
Defina $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $\varphi(n,m) = 5^n.7^m$.
φ é injetora, pois se

$$\varphi(n_1, m_1) = \varphi(n_2, m_2) \Rightarrow 5^{n_1}.7^{m_1} = 5^{n_2}.7^{m_2} \Rightarrow n_1 = n_2 \text{ e } m_1 = m_2$$

(exemplo de decomposição em fatores primos)
Logo, pela Prop. 1.4, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. □

Corolário 1.6 *Se $\varphi : A \to B$ é sobrejetora e A é enumerável, então B é enumerável ou finito.*

Demonstração:
Como φ é sobrejetora. Dado $y \in B, \exists x \in A$ tal que $\varphi(x) = y$.
Para cada $y \in B$, escolha um único $x \in A$ tal que $\varphi(x) = y$. Seja $g : B \to A$ definida como acima, isto é, $g(y) = x$, onde $\varphi(x) = y$.
Assim, g é injetora. Pela Prop. 1.4, B é enumerável ou finito. ■

Corolário 1.7 *Se A e B são enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável.*

Demonstração:
Existem $\varphi_1 : \mathbb{N} \to A$ e $\varphi_2 : \mathbb{N} \to B$ bijetoras.
Agora, seja $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ tal que $\varphi(n, m) = (\varphi_1(n), \varphi_2(m))$.
Note que φ é sobrejetora. Pois, dado $(a, b) \in A \times B$, obtemos $a = \varphi_1(n)$ e $b = \varphi_2(m)$.
Logo, $\varphi(n, m) = (\varphi_1(n), \varphi_2(m)) = (a, b)$.
Portanto, pelo Cor. 1.6, $A \times B$ é enumerável. ■

Exemplo 1.5 Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Solução:
Defina $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ por $\varphi(n, m) = \dfrac{n}{m}$.
φ é sobrejetora. Pelo Cor. 1.6, temos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. □

Proposição 1.8 *Se A é finito e B enumerável, então $A \cup B$ é enumerável.*

Demonstração:
Suponha $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Defina $\varphi : \mathbb{N} \to A \cup B$ por

$$\varphi(i) = \begin{cases} a_i & , \text{ se } 1 \leqslant i \leqslant n \\ b_{i-n} & , \text{ se } i > n \end{cases}$$

Assim, φ é sobrejetora. Dado $x \in A \cup B, x \in A$ ou $x \in B$.
Se $x \in A$, então $x = a_i$, para algum $1 \leqslant i \leqslant n$. Portanto, $\varphi(i) = a_i = x$.
Se $x \in B$, então $x = b_j$. Tome $i = n + j$. Então,

$$\varphi(i) = \varphi(n + j) = b_{n+j-n} = b_j = x$$

φ é injetora. De fato, suponha $\varphi(i) = \varphi(j)$.
Se $i, j \leqslant n$, então $a_i = a_j \Rightarrow i = j$.
Se $i, j > n$, então $b_{i-n} = b_{j-n} \Rightarrow i = j$.
Se $i \leqslant n$ e $j > n$, então $\varphi(i) = a_i$ e $\varphi(j) = b_{j-n}$.
Portanto, φ é injetora. ■

Proposição 1.9 *Se A e B são enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.*

Demonstração:
Suponha $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Defina $\varphi : \mathbb{N} \to A \cup B$ por

$$\varphi(n) = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & \text{, se } n \text{ é par} \\ b_{\frac{n+1}{2}} & \text{, se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Mostre que φ é bijetora. (Exercício) ∎

Teorema 1.10 $\mathbb{R}$ *não é enumerável.*

Demonstração:
Vamos mostrar que o intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é enumerável (vamos usar a representaçao decimal dos elementos desse intervalo).
Suponha o contrário (que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ é enumerável) e seja

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

uma enumeração do intervalo $(0, 1)$.
Vamos exibir $x \in (0, 1)$ tal que $x \neq x_i, \forall i$.
Seja $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$, onde

$$\begin{cases} a_i = 7, \text{ se } a_{ii} \neq 7 \\ a_i = 3, \text{ se } a_{ii} = 7 \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} &x \neq x_1 \text{ em } a_{11}, \\ &x \neq x_2 \text{ em } a_{22}, \\ &\vdots \\ &x \neq x_i \text{ em } a_{ii} \end{aligned}$$

Portanto, $x \neq x_i, \forall i$. ∎

1.3 Exercícios Propostos

1.1 Mostre que $\mathbb{N}$ é infinito.

1.2 Mostre que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável.

1.3 Mostre que o conjunto dos números primos é enumerável.

1.4 Mostre que o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a cinco e coeficientes racionais forma um conjunto enumerável.

1.5 Mostre que o conjunto das matrizes $n \times m$ com entradas racionais forma um conjunto enumerável, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.6 Seja A um conjunto infinito não enumerável tal que $A = B \cup C$. Mostre que B ou C é infinito e não é enumerável.

1.7 Mostre que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

CAPÍTULO 2

Números Reais

2.1 Segmentos Incomensuráveis

Definição 2.1 Dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos **comensuráveis** se existe um segmento u tal que $\overline{AB} = m.u$ e $\overline{CD} = n.u, m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1 Na Fig. 2.1, temos $\overline{AB} = 5u$ e $\overline{CD} = 3u$, então $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

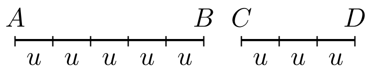


Figura 2.1: Segmentos comensuráveis.

Quando não existe tal u, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos *incomensuráveis* .
Afirmação: Existem segmentos incomensuráveis.

Exemplo 2.2 Considere o quadrado $ABDC$ da Fig. 2.2. $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis.

Solução:
Suponha $\overline{AB} = m.u$ e $\overline{BC} = n.u, m, n \in \mathbb{N}$.
A partir da Fig. 2.2, construimos a tangente $\overline{EF}$ ao arco $\widehat{ABE}$. Então,

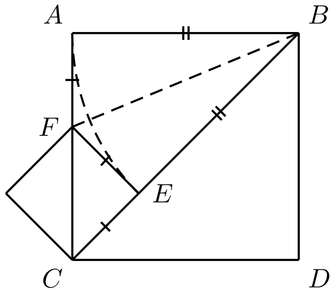


Figura 2.2: Quadrado $ABDC$.

$$\begin{aligned}
&\overline{AF} = \overline{EF} = \overline{EC} \text{ e } \overline{AB} = \overline{BE}\\
&\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC}\\
&\Rightarrow n.u = m.u + \overline{EC} \Rightarrow \overline{EC} = n'.u\\
&\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC}\\
&m.u = n'.u + \overline{FC} \Rightarrow \overline{FC} = n''.u
\end{aligned}$$

Absurdo. □

Eudoxo (Elementos de Euclides. Vol. V)

Dados quatro segmentos A, B, C e D dizemos que "A está para B" assim como "C está para D" se quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tivermos

$$\begin{aligned}
&mA < nB \Leftrightarrow mC < nD,\\
&mA = nB \Leftrightarrow mC = nD \text{ ou}\\
&mA > nB \Leftrightarrow mC > nD.
\end{aligned}$$

2.2 Cortes de Dedekind

Definição 2.2 Um corte é um par (E, D) de subconjuntos não vazios de números racionais satisfazendo

i) $E \cup D = \mathbb{Q}$;

ii) Se $x \in E$ e $y \in D$, então $x < y$.

Exemplo 2.3 Sejam $E = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 1\}$.

Note que $E \neq \emptyset, D \neq \emptyset$.

i) $E \cup D = \mathbb{Q}$;

ii) Se $x \in E$, temos $x < 1$ e se $y \in D$, temos $y \geqslant 1$, então $x < y$.

Exemplo 2.4 Sejam $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. (E, D) é um corte.

Solução:
Note que $E \neq \emptyset$, pois $0 \in E, D \neq \emptyset$, pois $10 \in D$.

i) $E \cup D \subset \mathbb{Q}$;

Seja $x \in \mathbb{Q}$. Se $x \leqslant 0$, então $x \in E$.

Se $x > 0$, calcule x^2 e decida.

Isto implica que $\mathbb{Q} \subset E \cup D$. Portanto, $E \cup D = \mathbb{Q}$.

ii) Se $x \in E$ e $y \in D$.

Se $x \leqslant 0$, então $x < y$, pois $y \geqslant 0$.

Se $x > 0$, então $x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$.

Portanto, (E, D) é um corte.

Obs: (i) E não possui elemento máximo e (ii) D não possui elemento mínimo.

i) Seja $x \in E$. Vamos mostrar que existe $y \in E$ tal que $x < y$.

Se $x \in E$, com $x > 0$ e $x^2 < 2$. Vamos resolver a inequação $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$.

$$x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{n}\left(2x + \frac{1}{n}\right) < 2 - x^2$$

Note que $\frac{1}{n}\left(2x + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}(2x+1)$.

Basta resolver $\frac{1}{n}(2x+1) < 2 - x^2$.

$$\frac{1}{n}(2x+1) < 2 - x^2 \Leftrightarrow n > \frac{2x+1}{2-x^2}$$

ii) $D = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$

Seja $x \in D$. Vamos resolver $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$.

Então, $x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$.

Note que $x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > x^2 - \frac{2x}{n}$.

Basta resolver

$$x^2 - \frac{2x}{n} > 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 > \frac{2x}{n} \Leftrightarrow x > \frac{2x}{x^2 - 2}$$

$\square$

2.3 Definição de Números Reais

Definição 2.3 Defina $\mathbb{R} = \{\alpha = (E, D), \alpha \text{ corte}\}$.

Sejam $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$ cortes.

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow E_1 = E_2$$

Adição em $\mathbb{R}$

Dados $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$, definimos a adição em $\mathbb{R}$ como

$$\alpha + \beta = (E, D)$$

onde $E = \{x + y, x \in E_1 \text{ e } y \in E_2\}$ e $D = \mathbb{Q} \backslash E$.

Afirmação: $\alpha + \beta$ é um corte.
De fato, $E \neq \emptyset$, pois $E_1 \neq \emptyset$ e $E_2 \neq \emptyset$.
Logo, $D \neq \emptyset$, pois se $x \in D_1$ e $y \in D_2$, então $x + y$ é maior que qualquer elemento de E.

i) $E \cup D = E \cup \mathbb{Q} \backslash E = \mathbb{Q}$;

ii) Seja $x \in E$ e $y \in D$. Vamos mostrar que $x < y$.

Se $x > y \Rightarrow x = y + r$, para algum $r > 0$.

Como $x \in E$, temos $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$.

Assim, $x_1 + x_2 = y + r \Rightarrow \underbrace{x_1 - r}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2} = y$.

Isto implica que $y \in E$. Absurdo.

2.4 Definição de Corpo

Definição 2.4 Um conjunto K é dito um **corpo** se é fechado para as operações de *soma* e *multiplicação* satisfazendo $\forall x, y, z \in K$

1. Associatividade
   $(x + y) + z = x + (y + z)$
   $(xy)z = x(yz)$
2. Comutatividade
   $x + y = y + x$
   $xy = yx$
3. Elemento neutro
   $\exists 0 \in K; x + 0 = x$
   $\exists 1 \in K; x.1 = x$
4. Elemento simétrico ou inverso
   $\forall x \in K, \exists -x \in K; x + (-x) = 0$
   $\forall x \in K, x \neq 0, \exists x^{-1} \in K; x.x^{-1} = 1$
5. Distributividade
   $x(y + z) = xy + xz$

Exemplo 2.5 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo.

Consequências da definição de corpo

a) $x.0 = 0, \forall x \in K$.
   De fato,

$$\begin{aligned}
&x.0 = x(0 + 0) \\
&\Rightarrow x.0 = x.0 + x.0 \\
&\Rightarrow x.0 + (-x.0) = x.0 + x.0 + (-x.0) \\
&\Rightarrow 0 = x.0
\end{aligned}$$

b) O simétrico aditivo de x é único, $\forall x \in K$.
   De fato, suponha que x' e x'' são simétricos aditivos de x, isto é,

$$x + x' = 0 \text{ e } x + x'' = 0$$

agora

$$x' = x' + 0 = x' + x + x'' = (x' + x) + x'' = x''$$

c) Em todo corpo, $(-1)(-1) = 1$.
De fato, como $-1 + 1 = 0$, por (a)

$$\begin{aligned}
&(-1+1)(-1) = 0 \\
&\Rightarrow (-1)(-1) + 1(-1) = 0 \\
&\Rightarrow (-1)(-1) + (-1) = 0, \text{ por } (b) \text{ o simétrico é único} \\
&\Rightarrow (-1)(-1) + (-1) + 1 = 0 + 1 \\
&\Rightarrow (-1)(-1) = 1
\end{aligned}$$

Corpo ordenado

Definição 2.5 Um corpo K é dito *ordenado* se existe $P \subset K$ satisfazendo

i) Dados $x, y \in P, x + y \in P$ e $xy \in P$;

ii) Dado $x \in K$; ou $x \in P$, ou $x = 0$, ou $-x \in P$.

Notação: $x \in P$ ou $x > 0$.

Proposição 2.6 *Em todo corpo ordenado,* $1 > 0$.

Demonstração:
$1 = 1.1 = (-1).(-1) \in P$. ∎

Exemplo 2.6 $\mathbb{C}$ é um corpo não ordenado.
Pois em todo corpo ordenado se $x \neq 0$, então $x^2 \in P, x^2 > 0$.
Veja que $x^2 = x.x = (-x).(-x) \in P$.
Note que em $\mathbb{C}, i \neq 0$ mas $i^2 = -1$.

Exemplo 2.7 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado.

Definição 2.7 Num corpo ordenado, $x < y$ se $y - x \in P$, ou seja, se $y - x > 0$.

Propriedades:
Num corpo ordenado K

i) se $x < y$ e $z \in K$, então $x + z < y + z$;

ii) se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$;

iii) se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$.

Demonstração:

i) $(y+z)-(x+z) = y+z-x-z = y-x > 0; \therefore x+z < y+z.$

ii) $yz - xz = (y-x)z > 0; \therefore xz < yz.$

iii) $xz - yz = (x-y)z$, como vimos anteriormente $x.x = (-x).(-x)$, então $(y-x)(-z) > 0; \therefore xz > yz.$

■

2.5 Conjuntos Limitados

Definição 2.8 Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito *limitado superiormente* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant c, \forall x \in A$.

Exemplo 2.8 O conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado superiormente. Exemplo, $2 > x, \forall x \in A$.

Definição 2.9 Num conjunto A limitado superiomente, qualquer c tal que $c \geqslant x, \forall x \in A$, é chamado de *cota superior* de A.

A noção de conjunto limitado inferiormente e cota inferior é análoga.

Exemplo 2.9 No conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. 0 é cota inferior de A.

Definição 2.10 Um conjunto é dito **limitado** se for limitado superior e inferiormente.

Exemplo 2.10 O conjunto $A = \{x \in R : x = (-1)^n\}$ é limitado.

Definição 2.11 (Supremo) Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente chamamos **supremo** de $A(\sup(A))$ a menor de suas cotas superiores.

Dito de outra forma, se A é limitado superiormente e $c = \sup(A)$, então

i) $c \geqslant x, \forall x \in A$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : c - \varepsilon < x$.

Definição 2.12 Um corpo ordenado é dito completo se todo conjunto limitado superiormente possui supremo.

Teorema 2.13 (Dedekind) $\mathbb{R}$ *é um corpo, ordenado e completo.*

Proposição 2.14 *O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ não é limitado superiormente.*

Demonstração:
Suponha que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente e seja $c = \sup(\mathbb{N})$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$, ou seja, $c < n + 1$.
Então, c não é cota superior.
Absurdo, pois por hipótese c é cota superior.
Portanto, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. ■

Definição 2.15 (Ínfimo) Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente chamamos **ínfimo** de $A(\inf(A))$ a maior das cotas inferiores.
Ou seja, se A é limitado inferiormente e $c = \inf(A)$, então

i) $c \leqslant x, \forall x \in A$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : c \leqslant x < c + \varepsilon$.

Proposição 2.16 *O ínfimo do conjunto* $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *é igual a zero.*

Demonstração:

i) 0 é cota inferior.

ii) Dado $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$. Pela Prop. 2.14 $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n\varepsilon > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
Mas $\dfrac{1}{n} \in A \Rightarrow \varepsilon$ não é cota inferior.
Portanto, $0 = \inf(A)$.

■

Proposição 2.17 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, positivos. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

Demonstração:
Dados $a, b \in \mathbb{R}$, positivos. Temos, que $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$ e é positivo.
Pela Prop. 2.14, $\exists n \in \mathbb{N} : n > \dfrac{b}{a}$.
Portanto, $na > b$. ■

Proposição 2.18 *Todo conjunto limitado inferiormente possui ínfimo.*

Demonstração:
Se A é limitado inferiormente, existe c cota inferior de A.
Seja $-A = \{-x; x \in A\}$.

$$c \leqslant x, \forall x \in A$$
$$-c \geqslant -x, \forall -x \in -A$$

Isto implica que $-c$ é cota superior de $-A$. Então, $-A$ é limitado superiormente.
Seja $d = \sup(-A)$. Isto é,

i) $d \geqslant -x, \forall -x \in -A$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists -x \in -A; d - \varepsilon < -x$.

Por $(i), -d \leqslant x, \forall x \in A$. Então, $-d$ é cota inferior de A.
Por $(ii), \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; -d + \varepsilon > x$.
Portanto, $-d = \inf(A)$.

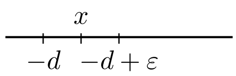


Figura 2.3

∎

2.6 Exercícios Propostos

2.1 Seja r um número racional qualquer. Mostre que o conjunto E dos números racionais menores que r não tem máximo e que o conjunto D dos números racionais maiores que r não tem mínimo.

2.2 Mostre que existem infinitos números racionais em qualquer intervalo (a, b) da reta real.

2.3 Mostre que existem infinitos números irracionais em qualquer intervalo (a, b) da reta real.

2.4 Prove que se p é um número primo qualquer, então $\sqrt{p}$ é irracional.

2.5 Se a e b são números irracionais, é verdade que $\dfrac{a+b}{2}$ é irracional?

2.6 Prove que se x e y são números irracionais tais que $x^2 - y^2$ é racional não-nulo, então $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais. Conclua que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são ambos irracionais.

2.7 Uma expansão de Cantor para um número inteiro positivo n é uma soma do tipo

$$n = a_m.m! + a_{m-1}.(m-1)! + \ldots + a_2.2! + a_1.1!,$$

sendo a_j inteiro e $0 \leqslant a_j \leqslant j$.

a) Encontre a expansão de Cantor para os inteiros $14, 56$ e 384.

b) Mostre que qualquer inteiro positivo tem uma expansão de Cantor.

Sugestão: Divida n, inicialmente, por 2, obtendo quociente q_1 e resto r_1. Divida em seguida q_1 por 3.

2.8 Mostre que qualquer número racional positivo pode ser escrito, de um único modo, na forma

$$a_1 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{2!} + \ldots + \frac{a_k}{k!},$$

onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant a_1, 0 \leqslant a_2 < 2, \ldots, 0 \leqslant a_k < k$.

2.9 Em $\mathbb{R}$ defina o valor absoluto de x por

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x||y|$

c) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

2.10 Mostre que para quaisquer números reais x e y vale a desigualdade

$$xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$

2.11 Para quaisquer números reais positivos x e y mostre que

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2}$$

2.12 Para quaisquer números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mostre que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

2.13 Para quaisquer números reais x, y, z mostre que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$$

2.14 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais quaisquer. Mostre que

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

2.15 Duas torres de alturas h_1 e h_2, respectivamente, localizadas numa região plana, são amarradas por uma corda APB que vai do topo A da primeira torre para um ponto P no chão entre as duas torres, e então até o topo B da segunda torre. Qual a posição do ponto P que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?

2.16 Mostre que num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual a metade da hipotenusa. Prove ainda, que a igualdade só ocorre quando o triângulo é isósceles.

2.17 Prove que, entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.

2.18 Mostre que $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

2.19 Mostre que se $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$, então

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$$

2.20 Mostre a desigualdade de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

para todo x positivo e n inteiro positivo.

2.21 Se a, b, c, d são números reais positivos, mostre que

$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geqslant 16$$

2.22 Mostre que se $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$, então

$$(ab + bc + ca) \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

2.23 Mostre que se $x \geqslant 0$, então $3x^3 - 6x^2 + 4 \geqslant 0$.

2.24 Mostre que se $x \geqslant 0$, então $2x + \dfrac{3}{8} \geqslant 4\sqrt{x}$.

2.25 A soma de três números reais positivos é 6. Mostre que a soma de seus quadrados não é menor que 12.

2.26 Os centros de três círculos que não se interceptam estão sobre uma reta. Prove que se um quarto círculo toca de forma tangente os três círculos, então o raio deste é maior que pelo menos um dos raios dos três círculos dados.

2.27 Mostre que em todo triângulo a soma dos coprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semi-perímetro deste.

2.28 Sejam A e B subconjuntos não vazios e limitados de números reais. Mostre que se $A \subset B$, então $\inf(A) \geqslant \inf(B)$ e $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

2.29 Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios, limitados inferiormente e r um número real tal que $r \leqslant a + b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. Mostre que $r \leqslant \inf(A) + \inf(B)$. Enuncie o análogo para supremos.

2.30 Dados dois subconjuntos A e B de $\mathbb{R}$ limitados, definimos o conjunto

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Mostre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ e $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

CAPÍTULO 3

Sequências de Números Reais

Definição 3.1 Uma *sequência* de números reais é uma função

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &n \mapsto \varphi(n) = a_n \end{aligned}$$

Notação: $(a_n)_{\{n \in \mathbb{N}\}}$ ou (a_n) ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Exemplo 3.1 Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(n) = \dfrac{1}{n}$.

3.1 Sequências Convergentes

Definição 3.2 Um sequência (a_n) *converge* para um número real L, se dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \varepsilon$.

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \to L$.

Exemplo 3.2 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Solução:
Dado $\varepsilon > 0, \dfrac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$. Pela Prop. 2.14, $\exists N \in \mathbb{N} : N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Então

$$n\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Se $n > N$, então $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N}$. (Verifique).
Assim, como $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ e pela afirmação anterior segue que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
Portanto, $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.
Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

□

Proposição 3.3 *O limite L de uma sequência, quando existe, é único.*

Demonstração:
Suponha que o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$, e suponha $L_1 \neq L_2$.
Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $(L_1 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) = \emptyset$ (Fig. 04).

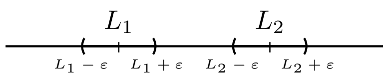


Figura 3.1

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, para esse $\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon$. Absurdo.
Portanto, $L_1 = L_2$. ■

Definição 3.4 Uma sequência (a_n) é dita **limitada** se existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $A \leqslant a_n \leqslant B, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.5 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração:
Se (a_n) é convergente para L, então dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

Note que só podem ficar de fora do intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Então, seja A o menor entre $a_1, a_2, \ldots, a_n, L-\varepsilon$ e seja B o maior entre $a_1, a_2, \ldots, a_n, L+\varepsilon$.

Com isso $A \leqslant a_n \leqslant B, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Obs: Nem toda sequência limitada é convergente. Ex., $a_n = (-1)^n, n \in N$.

Proposição 3.6 *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *e* $A < L < B$*, então* $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > N$*, então* $A < a_n < B$*.*

Demonstração:
Dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

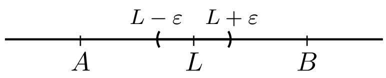


Figura 3.2

Basta tomar ε tal que $A < L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon < B$. Conforme a Fig. 3.2. ∎

Proposição 3.7 *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$*, com* $L \neq 0$*, então* $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > N$*, então* $|a_n| > \dfrac{|L|}{2}$*.*

Demonstração:

1. Se $L > 0$, seja $A = \dfrac{L}{2}$ e $B = 2L$.

   Como $\dfrac{L}{2} < L < 2L$, pela Prop. 3.6, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $\dfrac{L}{2} < a_n$, ou seja, $|a_n| > \dfrac{|L|}{2}$.

2. Se $L < 0$, então $\dfrac{L}{2} > L$ e $2L < L$, ou seja, $2L < L < \dfrac{L}{2}$.

   Seja $A = 2L$ e $B = \dfrac{L}{2}$, pela Prop. 3.6, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $2L < a_n < \dfrac{L}{2}$. Isto implica que

$$-\frac{L}{2} < -a_n < -2L$$
$$\therefore \frac{|L|}{2} < |a_n|$$

∎

Teorema 3.8 *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *e* (b_n) *é limitada, então* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$*.*

Demonstração:
Vide Elon, 115. ∎

Teorema 3.9 *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências convergentes, respectivamente, para* a *e* b*, ou seja,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Então,

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n.b_n) = ab$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (k.a_n) = k.a, \forall k \in \mathbb{R}$
4. *Se* $b \neq 0$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

Demonstração:

(i) Dado $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_1$, então $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Da mesma forma, para este $\varepsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2$, então $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

Se $N = \max\{N_1, N_2\}$ e se $n > N$, então

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) Dado $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_1$, então $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Da mesma forma, para este $\varepsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2$, então $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\
&= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \\
&\leqslant |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \\
&\leqslant |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|
\end{aligned}$$

Note que $|b - n|$ é limitada, ou seja, $\exists M > 0; |b_n| < M$, então

$$|a_n b_n - ab| < M.\frac{\varepsilon}{2M} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|}$$

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

(iii) Dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$.

$$|ka_n - ka| = |k||a_n - a| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

(iv) Pela Prop. 3.7, se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ e $L \neq 0$, então $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$. Logo,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b.b_n}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|}$$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$; se $n > N_1$; $|b_n - b| < \varepsilon\dfrac{|b|^2}{2}$;

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$; se $n > N_2$; $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$;

Então,

$$\frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{\varepsilon\frac{|b|^2}{2}}{\frac{|b|}{2}|b|}$$

Assim, se $N = \max\{N_1, N_2\}$ e se $n > N$, então

$$\frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \varepsilon$$

■

3.2 Sequências Monótonas

Definição 3.10 Uma sequência (a_n) é dita $(\forall n \in \mathbb{N})$

i) crescente, se $a_n < a_{n+1}$;

ii) não-decrescente, se $a_n \leqslant a_{n+1}$;

iii) decrescente, se $a_n \geqslant a_{n+1}$;

iv) não-crescente, se $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Exemplo 3.3 Verifique se $a_n = \dfrac{1}{n}$ é um dos itens descritos anteriormente.

Solução:
Temos que

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

Portanto, $a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$; logo a_n é decrescente. $\square$

Definição 3.11 Uma sequência (a_n) é dita **monótona** se é um dos quatro itens anteriores.

Exemplo 3.4 Verifique se $a_n = n^2$ é monótona.

Solução:
Temos que

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 > 0$$

Portanto, $a_n < a_{n+1}$; logo a_n é crescente. $\square$

Teorema 3.12 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração:
1° caso: a_n crescente.
$a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Como a_n é limitada, em particular, é limitada superiormente; logo existe S o supremo de a_n. Assim, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in N$ tal que

$$\begin{aligned} & S - \varepsilon < a_n \leqslant S < S + \varepsilon \text{ e } \forall n > N, a_n > a_N \\ & \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $|a_n - S| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$. $\blacksquare$

Exemplo 3.5 Verifique se $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ é monótona.

Solução:

i) Note que

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n > 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i \\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i \\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^i}\frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^i}\frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))}{i!} \\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\ldots\frac{(n-(i-1))}{n} \\
a_n &= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{(i-1)}{n}\right) \\
a_{n+1} &= 1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{(i-1)}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Então, $a_n < a_{n+1}$. Portanto, a_n é monótona.

ii) Temos que $1 < a_n$ e

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{(i-1)}{n}\right) \\
&< 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!} = 1+\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \\
&< 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) \\
&< 3
\end{aligned}
$$

Então, $1 < a_n < 3$.

Portanto, a_n é limitada; e por ser monótona ela é convergente.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2,718$$

$\square$

Exemplo 3.6 Seja $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ e $x_1 = x_2 = 1$. Então $(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$. (x_n) é a *sequência de Fibonacci.*

Teorema 3.13 (dos intervalos encaixados) *Se $I_n = [a_n, b_n]$ é uma coleção de intervalos fechados satisfazendo,$\forall n \in \mathbb{N}, I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, então existe pelo menos um número real $c \in I_n, \forall n$.*

Demonstração:

Como $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, então $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ e $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$.

Assim, a sequência $a_1, a_2, \ldots$ é não-decrescente e a sequência $b_1, b_2, \ldots$ é não-crescente.

Logo, são monótonas.

Além disso, $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_1$ e $a_1 \leqslant b_n \leqslant b_1$. Logo, são limitadas e portanto são, ambas, convergentes.

Então, fazendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, temos

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant A \leqslant B \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$

Se $A \neq B, [A, B] \subset I_n, \forall n$;

Se $A = B, c = A = B \in I_n, \forall n$. $\blacksquare$

Exemplo 3.7 Os intervalos $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ são encaixados e limitados, mas não são fechados.

Solução:

De fato,

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}; n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Portanto, sua intersecção é vazia. $\square$

Subsequências

Definição 3.14 Seja (a_n) uma sequência e (n_j) uma sequência crescente de números naturais, isto é, $n_1 < n_2 < \ldots$. Uma sequência do tipo $b_j = a_{n_j}$ é chamada *subsequência* de (a_n).

Exemplo 3.8 Seja $a_n = (-1)^n$ e $b_j = a_{2_j}$. b_j é uma subsequência de (a_n). E $b_k = a_{2k-1}$ é uma outra subsequência de (a_n).

Definição 3.15 Um número real c é dito *valor de aderência* de uma sequência (a_n) se c é o limite de alguma subsequência de (a_n).

Teorema 3.16 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração:

Se (a_n) é limitada, existem A e B tais que $A \leqslant a_n \leqslant B, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja c o comprimento do intervalo $[A, B]$. Dividindo $[A, B]$ ao meio obtemos dois intervalos de comprimento $\frac{c}{2}$. Seja I_1 um desses intervalos que contém infinitos termos de (a_n).

Dividindo I_1 ao meio obtemos dois intervalos de comprimento $\frac{c}{2^2}$. Seja I_2 um desses intervalos que contém infinitos termos de (a_n). Repetindo esse processo obtemos uma coleção de intervalos I_n, cada um de comprimento $\frac{c}{2^n}$ todos encaixados.

Logo, pelo Teo. 3.13, existe $L \in I_n, \forall n$.

Para cada intervalo I_j, escolha $a_{n_j} \in (a_n)$.

Afirmação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_j} = L$.

Note que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \frac{c}{2^n} < \varepsilon$. Então, se $n > N$, então $\frac{c}{2^n} < \frac{c}{2^N} < \varepsilon$.

$I_n \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Se $n > N, I_n \subset I_N$. Assim, se $j > N, a_{n_j} \in I_j \subset I_N \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Portanto, se $j > N, L - \varepsilon < a_{n_j} < L + \varepsilon$. ■

Limites infinitos

Definição 3.17 Uma sequência (a_n) tende para infinito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se dado $k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $a_n > k$.

Exemplo 3.9 Seja a sequência $a_n = n^2$. O limite desta sequência é $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Solução:
De fato, dado $k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $N > k$.
Agora, $N^2 > N$, então $N^2 > k$.
Se $n > N \Rightarrow n^2 > N^2$ pois $n^2 - N^2 = (n-N)(n+N) > 0$, logo $n^2 > k$. $\square$

Exemplo 3.10 Seja a sequência $a_n = \sqrt{n}$. O limite desta sequência é $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Solução:
Dado $k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $N > k^2$. Então, $\sqrt{N} > k$. Pois se $a < b$, então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Assim, se $n > N$, então $\sqrt{n} > \sqrt{N} > k$. $\square$

3.3 Sequências de Cauchy

Definição 3.18 (a_n) é dita sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > n_0, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 3.19 (Critério de convergência de Cauchy) *Uma sequência (a_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração:
$(\Rightarrow)$ Se $a_n \to L$, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Assim, $|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leqslant |a_n - L| + |L - a_m| = |a_n - L| + |a_m - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Portanto, (a_n) é de Cauchy.
$(\Leftarrow)$ Se (a_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
Afirmação: (a_n) é limitada.
De fato, tomando $m = N+1, m > N. \forall n > N, |a_n - a_{N+1}| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a_{N+1} < \varepsilon$
$\Rightarrow a_{N+1} - \varepsilon < a_n < a_{N+1} + \varepsilon$.
Portanto, (a_n) é limitada.
Pelo Teorema 3.16 de Bolzano-Weierstrass, existe a_{n_j}, subsequência de (a_n), convergente, digamos $a_{n_j} \to L$.
Vamos provar que (a_n) converge pra L.
Como $a_{n_j} \to L$, dado $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_1$, então $|a_{n_j} - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} (i)$.
Por (a_n) ser de Cauchy, mantendo esse $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}; \forall n, m > N_2$ então $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2} (ii)$
Se $N = \max\{N_1, N_2\}$, então vale (i) e (ii), logo, se n e $n_j > N$

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - L| \leqslant |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, (a_n) é convergente. ■

3.4 Exercícios Propostos

3.1 Usando a definição, mostre que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+7} = 2$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = 3$

3.2 Mostre que uma sequência só pode convergir para um único limite.

3.3 Mostre que se uma sequência (a_n) tem limite L, então $(|a_n|)$ tem limite $|L|$. Dê exemplo de uma sequência (a_n) tal que (a_n) não converge mas $(|a_n|)$ converge.

3.4 Seja (a_n) e (b_n) sequências tais que $|a_n - a| < C|b_n|$, onde a é um número real e C uma constante positiva. Usando a definição de limite mostre que se (b_n) converge para zero, então (a_n) converge para a.

3.5 Mostre que se (a_n) é uma sequência que converge para zero e (b_n) é uma sequência limitada, então $(a_n b_n)$ converge para zero.

3.6 Mostre que a sequência $a_n = \sqrt{n+h} - \sqrt{n}$ converge para zero.

3.7 Se $0 < a < 1$, mostre que a sequência $a_n = a^n$ é convergente e que converge para zero.

3.8 Se a_n converge para L e $L > 0$, mostre que $a_n > 0$ a partir de um certo N.

3.9 Seja (a_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência convergindo para L. Mostre que (a_n) também converge para L.

3.10 Construa uma subsequência que possua uma subsequência convergindo para 12 e outra convergindo para -30.

3.11 Construa uma subsequência que tenha subsequências convergindo, cada uma, para cada um dos números inteiros positivos.

3.12 Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n > 0, \forall n$ e $\dfrac{a_n + 1}{a_n} \leqslant c$, com $0 < c < 1$. Mostre que (a_n) converge para zero.

3.13 Se $a > 1$ e k é um inteiro positivo, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

3.14 Se $a > 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

3.15 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

3.16 Se $a > 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

3.17 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3.18 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1$.

3.19 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = 1$.

3.20 Mostre que $a_n = 5n^3 - 4n^2 + 7$ tende para infinito.

3.21 Defina a sequência (a_n) pondo $a_{n+1} = (a_n)^3 + 6$, para $n \geqslant 1$.

a) Se $a_1 = \dfrac{1}{2}$, mostre que (a_n) converge.

b) Analise a convergência para o caso em que $a_1 = \dfrac{3}{2}$.

3.22 Considere a sequência dada por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, para $n > 1$. Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência, mostre que a mesma converge e calcule seu limite.

3.23 Dado um número positivo N e fixado um número qualquer $a_0 = a$, não nulo, seja $\left[\dfrac{a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}}}{2}\right]$, para $n > 1$. Mostre que (a_n) é decrescente a partir do segundo termo e limitada, portanto convergente. Calcule o limite de a_n.

CAPÍTULO 4

Séries de Números Reais

4.1 Séries

Digamos que $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

(i) $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots \Rightarrow S = 0.$

(ii) $S = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \Rightarrow S = 1 - S \Rightarrow 2S = 1 \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}.$

Não vale, pois, usa-se a propriedade associativa para um número finito de parcelas.

Definição 4.1 Seja (a_n) uma sequência e $a_1 + a_2 + \dots$ a soma de todos os termos de (a_n).

Façamos

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
&S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n
\end{aligned}$$

Chamamos de S_n a sequência das somas reduzidas de (a_n). Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe, chamamos de $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ a soma dos elementos de (a_n).

Exemplo 4.1 $0,3333\ldots = \dfrac{1}{3}$ e $0,9999\ldots = 1$.

$$0,3333\ldots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$
$$S_1 = \frac{3}{10}$$
$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$$
$$S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
&S_n = \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n} \\
&\frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^{n+1}} \\
&S_n - \frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} \\
&\Rightarrow S_n \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 3\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \\
&\Rightarrow \frac{9}{10} S_n = 3\left(\frac{10^n - 1}{10^{n+1}}\right) \\
&\Rightarrow S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right) \\
&\Rightarrow S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{10^n} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2 Calcule a reduzida da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1 + \frac{1}{2}\\
&S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\\
&\vdots\\
&S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Neste caso, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

□

Definição 4.2 (convergência) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita *convergente* se existe um número real S tal que $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Caso contrário (não existe tal S) a série é dita *divergente*.

Exemplo 4.3 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\\
&S_1 = -1\\
&S_2 = 0\\
&S_3 = -1\\
&S_4 = 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como a sequência é divergente, a série é divergente.

Exemplo 4.4 A *série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} a^n, |a| < 1$ é uma série convergente. De fato,

$$\begin{aligned}
&S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n \\
&a.S_n = a + a^2 + \ldots + a^n + a^{n+1} \\
&S_n - a.S_n = 1 - a^{n+1} \\
&S_n(1-a) = 1 - a^{n+1} \\
&\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}} \\
&S_n = \frac{1}{1-a} - \frac{\overbrace{a^{n+1}}^{0}}{1-a} \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}
\end{aligned}$$

Proposição 4.3 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, ou seja, o termo geral* a_n *tende a zero.*

Demonstração:
Seja $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. Então, $S_n - S_{n-1}$ converge para zero.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \to 0 \\
&\Rightarrow a_n \to 0
\end{aligned}$$

■

Obs: A recíproca desta proposição é falsa. Exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

4.2 Série de Termos não Negativos

Proposição 4.4 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, com* $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$*. Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente de termos não negativos então de qualquer modo que somarmos os seus termos obtemos a mesma soma. (Qualquer reorganização dos termos produz a mesma soma). Em outra palavras,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e só se,* (s_n) *é limitada.*

Demonstração:

Existe $S = \lim_{n \to \infty} S_n \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Seja $S'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n$ uma soma qualquer de n elementos obtidos de uma reordenação dos a_n.

Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S'_n \leqslant S_m$ para cada n.

Note que S'_n é uma sequência monótona (não-decrescente). Além disso, para cada n, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S'_n \leqslant S_m \leqslant S$.

$\Rightarrow S'_n$ é limitada.

Portanto, S'_n é convergente, isto é, existe $S' = \lim_{n \to \infty} S_n$ e $S' \leqslant S$.

Analogamente, $S \leqslant S'$.

Portanto, $S = S'$. ■

Teorema 4.5 (Critério da Comparação) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que* $a_n \leqslant b_n, \forall n$.

i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *também diverge.*

Demonstração:

i) Sejam $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\exists T = \lim_{n \to \infty} T_n$.

Além disso, $S_n \leqslant T_n \leqslant T, \forall n$.

Como S_n é monótona ela é limitada por T, segue que S_n é convergente.

Portanto, $\exists S = \lim_{n \to \infty} S_n$.

ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergisse, por (i), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergiria. Absurdo, logo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

■

Exemplo 4.5 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a seguinte série. $a_1 = 1$ e para $n > 1, a_n = \dfrac{1}{2^j}$ onde j é tal que $2^{j-1} < n \leqslant 2^j$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1/2 \\ a_3 &= 1/4 \\ a_4 &= 1/4 \\ a_5 &= 1/8 \\ a_6 &= 1/8 \\ a_7 &= 1/8 \\ a_8 &= 1/8 \\ a_9 &= 1/16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_4 &= 2 \\ S_8 &= 2 + \frac{1}{2} \\ S_{16} &= 3 \\ S_{32} &= 3 + \frac{1}{2} \\ S_{64} &= 4 \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 4.6 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a *série harmônica*. Mostre que a série harmônica é divergente.

Solução:
Comparando com o exemplo anterior temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \\ a_3 &< b_3 \\ a_4 &= b_4 \\ &\vdots \\ a_n &\leqslant b_n? \end{aligned}$$

Sim, pois se $n = 2, a_n = b_n = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2^j}$.
Se $n \neq 2^j, 2^{j-1} < n < 2^j$
$\Rightarrow b_n = \dfrac{1}{n}$ e $a_n = \dfrac{1}{2^j}$.
Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.

□

Exemplo 4.7 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Mostre que a série (conhecida como série telescópica) é convergente.

Solução:
Temos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 - \frac{1}{2} & S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & S_2 &= 1 - \frac{1}{3} \\
a_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & S_3 &= 1 - \frac{1}{4} \\
&\vdots & &\vdots \\
a_{n-1} &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} & S_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \\
a_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} & &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Exemplo 4.8 Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Verifique se ela é convergente ou divergente.

Solução:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)n}, \forall n \geqslant 2$$

Pelo exemplo anterior, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. □

Teorema 4.6 (Teste da Razão) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos tal que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

i) Se $L < 1$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

ii) Se $L > 1$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

iii) Se $L = 1$*, inconclusivo.*

Demonstração:

i) Sendo $L < 1$, seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $L < c < 1$.
Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant c, \forall n > N$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
& a_{N+1} \leqslant a_N.c \text{ e } \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leqslant c \\
& \Rightarrow a_{N+2} \leqslant a_{N+1}.c \leqslant c^2.a_N \\
& \Rightarrow a_{N+2} \leqslant c^2.a_N \\
& \text{e } a_{N+3} \leqslant c.a_{N+2} \\
& \Rightarrow a_{N+3} \leqslant c^3.a_N
\end{aligned}$$

indutivamente concluimos que

$$a_{N+j} \leqslant c^i.a_N, \forall j \geqslant 1.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots \\
&= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j}
\end{aligned}$$

Como $a_{n+j} \leqslant c^j.a_n$, $\sum_{j=1}^{\infty} i^j a_n = a_n \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} c^j}_{\text{série geométrica}}$.

Como a série geométrica converge, pelo Critério da Comparação, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j}$ converge.

ii) Seja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$. Existe c tal que $1 < c < L$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant c, \forall n > N$.

Assim,

$$a_{N+1} \geqslant c.a_n$$
$$a_{N+2} \geqslant c^2.a_n$$

indutivamente

$$a_{N+j} \geqslant c^j.a_N$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} c^j.a_N$ diverge, pelo Critério da Comparação, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{N+j}$ também diverge.

iii) Temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{(n+1)^2}n^2 \\
&= \frac{n^2}{n^2+2n+1} \\
&= \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} &= 1
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.9 Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n, 0 < a < 1$. Verifique se a série converge ou diverge.

Solução:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^b a^{n+1}}{n^b.a^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b .a$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

Pelo teste da Razão, $\sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$ converge. □

4.3 Convergência Absoluta e Condicional

Definição 4.7 A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é uma série convergente.

Definição 4.8 Quando uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é
condicionalmente convergente.

Teorema 4.9 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração:
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.
Para cada $n \in N$, sejam

$$T_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

E sejam P_n igual a soma dos a_r, com $r \leqslant n$ e $a_r \geqslant 0$ e q_n igual a soma dos valores absolutos dos a_r, com $r \leqslant n$ e $a_r < 0$.

Note que $T_n = P_n + q_n$ e $S_n = P_n - q_n$.

P_n é uma sequência não decrescente, logo é monótona. O mesmo vale para q_n.

$P_n \leqslant T_n \leqslant T$, onde $T = \lim_{n\to\infty} T_n$

$q_n \leqslant T_n \leqslant T$.

Logo, P_n e q_n são limitadas.
Assim, $P_n \to P$ e $q_n \to q$. Assim, $S_n \to P - q$, pois $S_n = P_n - q_n$.
Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. ■

Exemplo 4.10 Verifique a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}3n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}}$.

Solução:
Seja $a_n = \dfrac{\text{sen}3n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}}$.

$$\Rightarrow n^2 a_n = \frac{n^2\,\text{sen}3n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}}$$
$$\Rightarrow n^2|a_n| = \frac{n^2|\,\text{sen}3n^2|}{|n^2 - \sqrt{n+9}|}$$
$$\Rightarrow n^2|a_n| = \frac{n^2|\,\text{sen}3n^2|}{n^2 - \sqrt{n+9}},\ \text{se } n \geqslant 3 \text{ (verifique)}$$
$$\Rightarrow n^2|a_n| \leqslant \frac{n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}}$$

Note que $\dfrac{n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}} \to 1$.

A partir de um certo $n, n^2|a_n| < 2 \Rightarrow |a_n| < \dfrac{2}{n^2}$.

Já sabemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ converge. Pelo Critério da Comparação $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Pelo Teo. 4.9, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Teorema 4.10 (Leibniz) *Se (a_n) é uma sequência tal que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ (não-crescente) com*

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *é uma série convergente.*

Demonstração:
Note que

$$\begin{aligned}
&S_2 = a_1 - a_2 \\
&S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\
&\vdots \\
&\boxed{S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})} \\
&S_1 = a_1 \\
&S_3 = a_1 - (a_2 - a_3) \\
&\vdots \\
&\boxed{S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1})}
\end{aligned}$$

Temos que S_{2n} é não-decrescente e S_{2n+1} é não crescente. Note que

$$\begin{aligned}
&S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\
&\Rightarrow S_{2n} \leqslant a_1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow S_{2n}$ é convergente. Digamos $S_{2n} \to S$.

$$\underbrace{S_{2n+1}}_{S} = \underbrace{S_{2n}}_{S} + \underbrace{a_{2n+1}}_{0}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, par, tal que $n > N_1$ (n par)

$$\Rightarrow |S_{2n} - S| < \varepsilon$$

e $\exists N_2$ ímpar tal que se $n > N_2$, (n ímpar)

$$|S_{2n+1} - S| < \varepsilon.$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se $n > N \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon$.
Implica que $S_n \to S$.
Portanto, a série converge. ■

Exemplo 4.11 Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Portanto, a série converge.

Exemplo 4.12 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$$
$$a_n \to 0$$

Portanto, a série converge.

Teorema 4.11 (Riemann) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série condicionalmente convergente, então podemos reagrupar os termos de (a_n) de modo a obtermos uma série convergindo para qualquer número real especificado.*

Demonstração:
Temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $a_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.
Seja S_0 o número real especificado.

i) Considere os primeiros termos positivos da série, cuja soma supera S;

ii) Adicione a esse resultado os primeiros números negativos até obter um resultado menor que S;

iii) Volte a adicionar termos positivos até superar S;

iv) Adicione termos negativos até obter resultado menor que S.

Seguindo este processo obtemos a série desejada.
Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N, |a_n| < \varepsilon$.
Seja $a'_1 + a'_2 + \ldots$ a nova série. Escolha $j > N$ tal que $S'_{j-1} \leqslant S$.
Mas $S'_j > S$, isto é,
$S'_{j-1} = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{j-1} \leqslant S$ mas
$S'_j = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{j-1} + a'_j > S \Rightarrow |S'_j - S| < \varepsilon$.
Afirmação:
$\forall j > J, |S'_J - S| < \varepsilon$, pois cada termo adicionado a partir de a'_J é tal que $|a'_J| < \varepsilon$.
Logo, as reduzidas S_{J+R} oscilam em torno de S a uma distância menor que $\varepsilon, \forall k$. ∎

Teorema 4.12 (Teste da Raíz (Cauchy)) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é tal que, a partir de um certo* N, $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant c < 1$, *então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demonstração:
A partir de N, $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant c \Rightarrow |a_n| \leqslant c^n$.

Pelo Critério da Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Exemplo 4.13 Verifique a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$.

Solução:
Seja $a_n = \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \frac{\log n}{n} \\ &= \frac{1}{n}. \log n \\ &= \log n^{\frac{1}{n}} \\ &= \log \sqrt[n]{n} \to 0 \end{aligned}$$

Logo, a partir de um certo N, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ e portanto, pelo Teste da Raiz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. □

Teste da Integral

Seja f uma função positiva, decrescente e contínua, para todo $x \geqslant 1$. Então,

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Assim, se $a_n = f(n)$, temos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se $\int_1^N f(x)dx$ diverge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $\int_1^N f(x)dx$ converge.

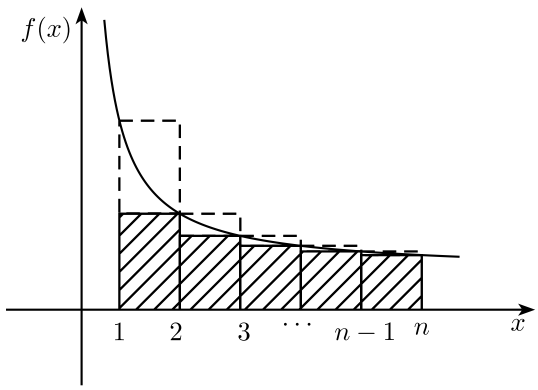


Figura 4.1: Integração

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$$
$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

Exemplo 4.14 Usando o Teste da Integral verifique que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Solução:

$$\int_1^N \frac{1}{x}dx = \log x|_1^N = \log N - \log 1 = \log n$$

Portanto, a série diverge. □

Proposição 4.13 (Critério de convergência de Cauchy) *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tal que*
$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Por definição, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, S_n converge, onde S_n é a sequência das reduzidas.

Pelo Critério de Cauchy para sequências, S_n converge se, e somente se, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > N$, então $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

$n + 1 > N$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}, n + p > N$.

$\Rightarrow |S_{n+p} - S_n| = |a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} - (a_1 + \ldots + a_n)| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. ∎

4.4 Exercícios Propostos

4.1 Chama-se série harmônica, em geral, toda série do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + nr},$$

com $r \neq 0$. Mostre que toda série desse tipo é divergente.

Propriedades de somatório.

1. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

Exemplo 4.15

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \left(\cancel{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n+1} - 1$$

4.2 Obtenha a reduzida da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, e mostre que seu limite é 1.

4.3 Sendo $a \neq -1$, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, converge para $\displaystyle\frac{1}{a+1}$.

4.4 Use o critério de Cauchy para mostrar que o termo geral de uma série convergente tende a zero.

4.5 Mostre que o termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge para zero, mas que a série é divergente.

4.6 Use o critério de Cauchy para mostrar que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

4.7 Calcule a reduzida da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$, e mostre que seu limite é 1.

4.8 Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)}$, converge para $\displaystyle\frac{1}{2}$.

Exemplo 4.16 Verifique se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^b a^n), 0 < a < 1, b$ fixo, converge.

4.9 Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!}$, converge para 2.

4.10 Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes de termos positivos, com $a_n < b_n, \forall n$. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4.11 Mostre que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ também é convergente.

4.12 Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos positivos e (b_n) uma sequência limitada de elementos positivos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

4.13 Sendo $a_n \geqslant 0$ e $b_n \geqslant 0$, mostre que se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$ são convergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

4.14 Mostre que se $a_n \geqslant 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ também converge.

4.15 Verifique qual das séries abaixo converge.

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

Extras

Exemplo 4.17 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, $a_n > 0$. Mostre que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, x \in [-1, 1]$ converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.18 Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} \log n}$ converge.

4.16 Interprete as igualdades abaixo à luz da definição de convergência de séries de números reais.

a) $0,333... = \frac{1}{3}$

b) $0,999... = 1$

4.17 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ em que

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & \text{, se } n \text{ é ímpar} \\ 2^{-n} & \text{, se } n \text{ é par} \end{cases}$$

é convergente.

4.18 Mostre que as séries abaixo convergem.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

4.19 Verifique, em cada caso abaixo, se a série dada é convergente; e, em caso afirmativo, se absoluta ou condicionalmente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k - \operatorname{sen} k}{k\sqrt{k}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2+1}$

4.20 A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \dots$$

tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende a zero. Mostre que essa série é divergente e explique por que isto não contradiz o teorema de Leibniz.

4.21 Mostre que é convergente a série obtida alternando-se os sinais dos termos da série harmônica, de modo que fiquem p termos positivos, $p \in \mathbb{N}$ fixado seguidos de p termos negativos, alternadamente.

4.22 Se uma série é condicionalmente convergente, mostre que existe uma alteração da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $+\infty$.

4.23 Efetue uma reordenação dos termos da série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

de modo que sua soma se torne igual a zero.

4.24 Sejam $0 < a < b < 1$. Mostre que a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \ldots$ é convergente.

4.25 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e se (b_n) é uma sequência que converge para zero, pondo $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, mostre que (c_n) converge para zero.

CAPÍTULO 5

Funções de uma Variável Real

Definição 5.1 Sejam $D, Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios. Uma **função** $f : D \to Y$ é uma lei que associa elementos do conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos do conjunto Y, chamado o contradomínio da função.

Notação:

$$\begin{aligned} f\ :&\, D \to Y \\ x\ \mapsto&\, f(x) \end{aligned}$$

Definição 5.2 Seja $f : D \to Y$. O conjunto de todos os valores da função,

$$\mathrm{Im}(f) = \{y = f(x) : x \in D\},$$

é chamado a *imagem de D pela f*, e indicado por $f(D)$.

Definição 5.3 Seja $f : D \to Y$. O conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\},$$

é chamado *gráfico de f*.

5.1 Tipos de Funções

função crescente

Definição 5.4 A função $f : D \to Y$ é dita *crescente* se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 5.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. f é crescente.

Solução:
De fato, se $x_1 < x_2$ vamos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 \\ &= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)}_{(*)} \end{aligned}$$

Note que

$$2(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 + x_2^2 + x_1^2 > 0$$

Simplificando, se $2a > 0$, então $a > 0$. Logo $(*) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$.
Portanto, $f(x_1) < f(x_2)$. □

Exemplo 5.2 Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^5$ é crescente. De um modo geral, $f(x) = x^n$, com n ímpar é crescente.

função decrescente

Definição 5.5 A função $f : D \to Y$ é dita *decrescente* se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 5.3 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b, a < 0$. Mostre que f é decrescente.

Solução:
Se $x_1 < x_2$, então

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - ax_2 - b \\ &= \underbrace{(a)}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$.
Portanto, $f(x_1) > f(x_2)$. □

função não decrescente

Definição 5.6 A função $f : D \to Y$ é dita *não decrescente* se $\forall x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

função não crescente

Definição 5.7 A função $f : D \to Y$ é dita *não crescente* se $\forall x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Obs: Todas essas funções são chamadas de *monótonas.*

função injetiva

Definição 5.8 Seja $f : D \to Y$. a função f é dita *injetiva* sempre que se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Exemplo 5.4 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. f é injetiva, pois é crescente.

função sobrejetiva

Definição 5.9 Seja $f : D \to Y$. A função f é dita *sobrejetiva* se $f(D) = Y$. Equivalentemente, dado $y \in Y, \exists x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 5.5 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b, a \neq 0$. Mostre que f é sobrejetiva.

Solução:
Dado $y \in \mathbb{R}$, a equação $f(x) = y$ sempre tem solução.

$$\begin{aligned} & ax + b = y \\ & \Leftrightarrow ax = y - b \\ & \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.6 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Mostre que f não é injetiva e nem sobrejetiva.

Solução:
f não é injetiva, pois

$$f(-1) = f(1) \Rightarrow -1 \neq 1$$

f não é sobrejetiva, pois $f(x) = -2$ não possui solução real. □

função bijetiva

Definição 5.10 Seja $f : D \to Y$. Uma função f é dita *bijetiva* se f é injetiva e sobrejetiva.

Nesse caso existe, bem definida a função $f^{-1} : Y \to D$ tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

f^{-1} é chamada de *função inversa* de f.

Exemplo 5.7 Seja $f : A \to B$ tal que $f(x) = x^2$, onde $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$.

Solução:
f é injetiva. De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\
&\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\
&\Rightarrow (x_1 - x_2)\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\neq 0} = 0 \\
&\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}$$

f é sobrejetiva. De fato,
Dado $y \in B, f(x) = y$ tem solução

$$x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

□

função par

Definição 5.11 Se D é simétrico em relação à origem, isto é, $\forall x \in D, -x \in D. f : D \to Y$ é dita *par* se $f(x) = f(-x), \forall x \in D$.

função ímpar

Definição 5.12 Se D é simétrico em relação à origem. $f : D \to Y$ é dita *ímpar* se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

Exemplo 5.8 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^5 + x$. f é ímpar.

Solução:
De fato,

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$$

□

Proposição 5.13 *Se D é simétrico em relação à origem, então toda função $f : D \to Y$ se escreve, de modo único, na forma $f = f_P + f_I$, onde f_P é par e f_I é ímpar.*

Demonstração:
Defina $f_P(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $f_I(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

$$f_P(x) + f_I(x) = f(x)$$

Agora mostremos que f_P é par e f_I é ímpar.

$$f_P(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f(x)$$
$$\Rightarrow f_P(x) = f_P(-x)$$

Portanto, f_P é par.

$$\begin{aligned} f_I(-x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} \\ &= \frac{-f(x) + f(-x)}{2} \\ &= -\frac{[f(x) - f(-x)]}{2} \\ f_I(-x) &= -f_I(x) \end{aligned}$$

Portanto, f_I é ímpar.

Mostremos a unicidade:
Suponha $f = f_P + f_I = g_P + g_I$ com f_P e g_P pares e f_I e g_P ímpares.

$$f_P - g_P = g_I - f_I$$
$$(f_P - g_P)(x) = f_P(x) - g_P(x)$$
$$(f_P - g_P)(-x) = f_P(-x) - g_P(-x) = f_P(x) - g_P(x)$$

$\Rightarrow f_P - g_P$ é par.

$$\begin{aligned}
(g_I - f_I)(x) &= g_I(x) - f_I(x) \\
(g_I - f_I)(-x) &= g_I(-x) - f_I(-x) \\
&= -g_I(x) + f_I(x) \\
&= -(g_I(x) - f_I(x)) \Rightarrow (g_I - f_I)(-x) = -(g_I - f_I)(x)
\end{aligned}$$

Portanto, $g_I - f_I$ é ímpar.
$\Rightarrow f_P - g_P = 0 \Rightarrow f_P = g_P$ da mesma forma
$g_I - f_I = 0 \Rightarrow g_I = f_I$ ■

Função composta

Sejam $f : D \to Y$ e $g : Y \to X$ tal que $g \circ f : D \to X$ é definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$g \circ f$ é chamada de *função composta* de g e f.

Exemplo 5.9 Seja $f : D \to Y$ bijetora e $f^{-1} : Y \to D$, então
$f \circ f : D \to D$, $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ e $f \circ f^{-1} : Y \to Y$, $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$.

Exemplo 5.10 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a inversa.

Solução:

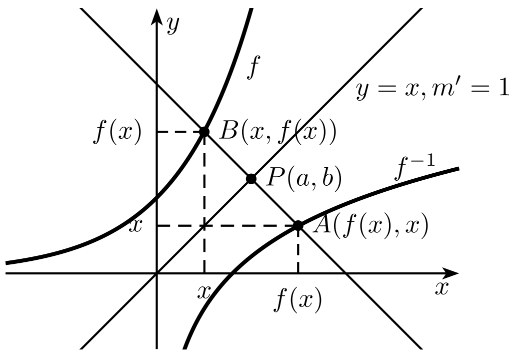


Figura 5.1

Porque existe a simetria entre f e f^{-1} em relação a reta $y = x$?
Note pela Fig. que f produz $(x, f(x))$ e f^{-1} produz $(f(x), x)$.

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{f(x) - x}{x - f(x)} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{PA} &= \sqrt{(f(x) - a)^2 + (x - a)^2} \\
d_{PB} &= \sqrt{(x - a)^2 + (f(x) - a)^2} \\
&\Rightarrow d_{PA} = d_{PB}
\end{aligned}
$$

Portanto, f_1 e f^{-1} são simétricos. $\square$

5.2 Imagens Inversas de Conjuntos

Definição 5.14 Sejam $f : D \to Y$ e $A \subset Y$. Definimos $f^{-1}(A) = \{x \in D; f(x) \in A\}$ como a *imagem inversa* de A.

Exemplo 5.11 $f : D \to Y$; $f^{-1}(y) = \{x \in D; f(x) \in Y\} = D$

Exemplo 5.12 $f : D \to Y, A \subset Y$ e $A \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$; $f^{-1}(A) = \{x \in D; f(x) \in A\} = \emptyset$

Em particular:
se $y \in Y$; $f^{-1}(y) = \{x \in D; f(x) = y\}$
se $y = 0$; $f^{-1}(0) = \{x \in D; f(x) = 0\}$ é chamado de *conjunto dos zeros* de f.

5.3 Exercícios Propostos

5.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, com n um inteiro positivo ímpar. Mostre que f é crescente.

5.2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com a e b números reais e $a \neq 0$. Mostre que f é crescente se, e somente se, $a > 0$ e que f é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

5.3 Seja $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mostre que f é bijetiva.

5.4 Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. f é injetiva? É sobrejetiva? Determine o conjunto imagem de f.

5.5 Se $f : D \to Y$ é crescente e bijetiva, mostre que $f^{-1} : Y \to D$ também é crescente.

5.6 Defina uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(n)$ é um conjunto com infinitos elementos.

5.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant 0$. Mostre que $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$ positivo.

5.8 Se f é uma função com domínio D e se A e B são subconjuntos de D, mostre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ e } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Dê um contra-exemplo para mostrar que $f(A \cap B)$ pode ser diferente de $f(A) \cap f(B)$.

5.9 Mostre, de um modo geral, que se f é uma função com domínio D e se $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de D, valem as seguintes relações:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i) \text{ e } f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

5.10 Se $f : D \to Y$ é uma função qualquer e B um subconjunto de Y, mostre que $f^{-1}(Y - B) = D - f^{-1}(B)$.

5.11 Se $f : D \to Y$ é uma função qualquer e se A e B são subconjuntos de Y, mostre que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

5.12 Mostre que se $f : D \to Y$ é uma função injetiva e se $A \subset D$, então $f^{-1}(f(A)) = A$. Dê um contra-exemplo para mostrar que isso não é necessariamente verdade se f não for injetiva.

5.13 Mostre que se $f : D \to Y$ é uma função sobrejetiva e se $A \subset Y$, então $f(f^{-1}(A)) = A$. Dê um contra-exemplo para mostrar que isso não é necessariamente verdade se f não for sobrejetiva.

5.14 Uma função $f : D \to Y$ é dita limitada quando o conjunto $f(D)$ é limitado. Neste caso definimos $\sup(f) = \sup(f(D))$ e $\inf(f) = \inf(f(D))$. Mostre que se f e g são limitadas, então:

$$\sup(f+g) \leqslant \sup(f) + \sup(g) \text{ e } \inf(f+g) \geqslant \inf(f) + \inf(g).$$

5.4 Topologia na Reta

Intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x < b\}$
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leqslant b\}$
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

Ponto interior de um conjunto

Definição 5.15 Sejam $Y \subset \mathbb{R}$ e $p \in Y, p$ é dito *ponto interior* de Y se existe $(a, b) \subset Y$ com $p \in (a, b)$.

Conjunto aberto

Definição 5.16 Seja $Y \subset \mathbb{R}$. Y é dito *aberto* se todos os seus pontos são interiores.

Exemplo 5.13 $Y = (m, n)$ é um conjunto aberto.

Solução:
De fato, seja $p \in Y$. Então

$$\begin{aligned}
& m < p < n \\
& \Rightarrow m < \frac{m+p}{2} < p < \frac{p+n}{2} < n \\
& \text{e } p \in \left(\frac{m+p}{2}, \frac{p+n}{2}\right)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.14 O conjunto dos números reais é aberto?

Solução:
Dado $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& p - 1 < p < p + 1 \\
& \text{e } p \in (p - 1, p + 1)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.15 $Y = \emptyset$ é aberto?

Solução:
Sim. □

Vizinhança

Definição 5.17 Seja $x \in \mathbb{R}$. Uma *vizinhança* de x é qualquer conjunto que contém x como ponto interior.

Exemplo 5.16 Dado $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ é uma vizinhança de x.

Notação: $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}; x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\}$
Obs: $V'_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}; x - \varepsilon < y < x + \varepsilon, \text{ com } y \neq x\}$
é chamada vizinhança perfurada de x.

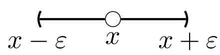


Figura 5.2: Vizinhança perfurada.

ou $V'_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}; 0 < |y - x| < \varepsilon\}$

Ponto de acumulação

Definição 5.18 p é dito um *ponto de acumulação* de $Y \subset \mathbb{R}$ se toda vizinhança perfurada de p contém elementos de Y.

Exemplo 5.17 Se $Y = (q, p], q$ é um ponto de acumulação de Y.

Solução:
Seja $V'_\varepsilon(q)$ uma vizinhança de centro em q e raio ε, isto é,
$V'_\varepsilon(q) = (q - \varepsilon, q + \varepsilon) - \{q\}$

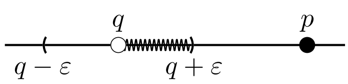


Figura 5.3: q é ponto de acumulação.

□

Exemplo 5.18 Se $Y = (a, b), b \notin Y$ mas b é ponto de acumulação de Y.

Solução:
Seja $V'_\varepsilon(b)$ uma vizinhança de $V'_\varepsilon(b) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) - \{b\}$.

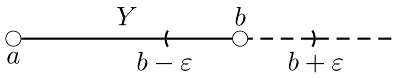


Figura 5.4: b é ponto de acumulação.

$b-\varepsilon < b$. Se $b-\varepsilon > a \Rightarrow b-\varepsilon \in Y$. Tome $b-\varepsilon < x < b$.
Se $b-\varepsilon < a$, nesse caso, todo $x \in Y$ é tal que $x \in V'_\varepsilon(b)$. □

Exemplo 5.19 Seja $Y = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}, Y \subset \mathbb{R}$. 1 é ponto de acumulação?

Solução:
Não.

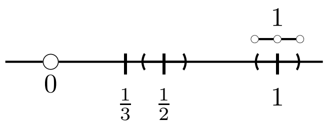


Figura 5.5: 1 não é ponto de acumulação.

Dado $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

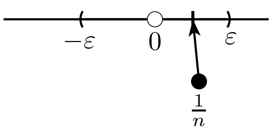


Figura 5.6: 0 é ponto de acumulação.

$\frac{1}{n} \in Y$ e $\frac{1}{n} \in V'_\varepsilon(0)$. □

Ponto isolado

Definição 5.19 p é dito *ponto isolado* de $Y \subset \mathbb{R}$ se existe $V'_\varepsilon(p)$ tal que $V'_\varepsilon(p) \cap Y = \emptyset$.

Exemplo 5.20 Todo ponto de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ é um ponto isolado de $\mathbb{Z}$.

Solução:
De fato, dado $n \in \mathbb{Z}$, tome $V'_{1/2}(n)$. $\square$

5.5 Limite de Funções

Definição 5.20 Seja $f : D \to Y$ e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in V'_\delta(a)$, então $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, ou seja, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo 5.21 Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x+1$. Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Solução:
Temos que $D = (0, 1)$ e $0 \notin D$. Além disso, 0 é ponto de acumulação de D.
Dado $\varepsilon > 0$, queremos $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - 0| < \delta$, então $|f(x) - 1| < \varepsilon$.
Temos que

$$|f(x) - 1| = |x + 1 - 1| = |x| < \varepsilon$$

sempre que $0 < |x| < \delta$.
Basta tomar $\delta = \varepsilon$. $\square$

Proposição 5.21 *Seja $f : D \to Y$ e a um ponto de acumulação de D.*
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ *se, e somente se, para toda sequência $x_n \to a$, tivermos $f(x_n) \to L$.*

Demonstração:
$\Rightarrow$) Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Seja x_n uma sequência tal que $x_n \to a$. $\forall \delta > 0, \varepsilon N \in \mathbb{N}$; se $n > N$, então $0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$.
Portanto, $f(x_n) \to L$.

$\Leftarrow$) Se para toda sequência $x_n \to a$, tivermos $f(x_n) \to L$ vamos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
Suponha que para alguma sequência $x_n \to a$, mas $f(x_n)$ não converge para L.
Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ mas $|f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon$.

Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{1}{n}$, seja $x_n \in V'_{1/n}(a) \cap D$ mas $f(x_n) \notin V_\varepsilon(L)$.

Agora, para cada n, escolha $x_n \in D \cap V'_{1/n}(a)$.

Então, $x_n \to a$. ■

Exemplo 5.22 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Solução:

Seja $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, então $x_n \to 0$.

$$f(x_n) = \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen} 2n\pi, f(x_n) \to 0$$

Seja $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, x_n \to 0$

$$f(x_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), f(x_n) \to L$$

□

5.6 Exercícios Propostos

Exemplo 5.23 Seja $Y = (0, 1)$. Mostre que p é ponto interior de Y.

5.15 a) Mostre que $\mathbb{R}$ e ϕ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

b) Mostre que uma união qualquer de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto.

c) Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é dito fechado se seu complementar é aberto. Mostre que uma união finita de subconjuntos fechados é um subconjunto fechado.

d) Mostre que o intervalo $[1, 2]$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

e) Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}$ contendo apenas um elemento é fechado.

f) Sejam A e B subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que $A \cap B$ é um conjunto aberto.

g) Mostre que uma intersecção infinita de subconjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto.

5.16 a) Seja $\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Mostre que 0 é o único ponto de acumulação de $\mathbb{A}$ e que $\mathbb{A}$ não é um conjunto fechado.

b) Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x + 1$, existe $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x)$?

c) Se f é a função do item anterior, existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

5.17 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \text{ é irracional} \\ x & \text{, se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, porém, não existe $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$.

5.18 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x = 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \end{cases}$$

Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Dica: Para resolver os exercícios de limites devemos encontrar uma constante real c, tal que, para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$,

$$|f(x) - L| < c|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{c} = \delta$$

Então, tome $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{c} \right\}$.

5.19 Usando a definição, mostre que

a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{5}{x - 1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x + 1} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \forall a \in D$

Exemplo 5.24 Mostre que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$.

Exemplo 5.25 Mostre que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{5}$.

5.20 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \text{ é irracional} \\ 1 & \text{, se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ para algum $a \in \mathbb{R}$?

5.21 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \text{ é irracional} \\ 1 - x & \text{, se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

Mostre que existe $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para algum $a \neq \dfrac{1}{2}$?

5.22 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. É possível definir $f(0)$ de modo que exista $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

5.23 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x = 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \end{cases}$$

Mostre que, para todo $c \in [-1, 1]$, existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ e $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

5.24 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$, em que $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Mostre que, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe. Determine o conjunto imagem de f.

5.7 Continuidade de Funções

Definição 5.22 Seja $f : D \to Y$ e $a \in D$. Dizemos que f é *contínua* em a se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Além disso, f é contínua em D se f for contínua em todos os pontos de D.

Exemplo 5.26 Se a é um ponto de isolado de D, então f é contínua em a.

Solução:
De fato, $\exists \delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap D = \{a\}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome δ dado acima. Logo, se $|x - a| < \delta$ é porque $x = a$, então $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. □

Exemplo 5.27 Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$. f é contínua. (Fig. 5.7)

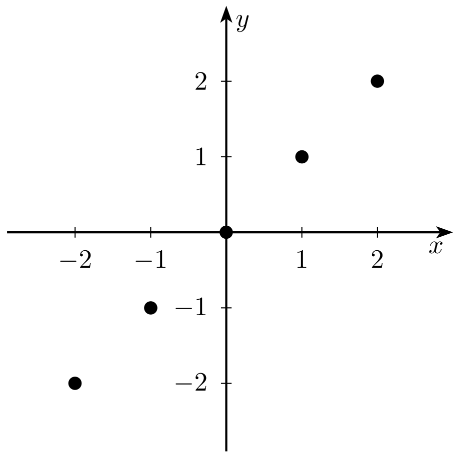


Figura 5.7: f é contínua em todo seu domínio.

Obs: Se a é um ponto de acumulação de D, f é *contínua* em a se

i) $f(a)$ existir;

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 5.28 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b, a \neq 0$. f é contínua em todos os pontos do domínio.

Solução:
Suponha f contínua em $c \in \mathbb{R}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se $x \in \mathbb{R}$ e $|x - c| < \delta$, então $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.
Rascunho:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |ax + b - ac - b| \\ &= |a(x - c)| \\ &= |a||x - c| \end{aligned}$$

Então, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$.

$$\begin{aligned} &|x - c| < \delta \\ &\Rightarrow |a||x - c| < |a|\delta \\ &\Rightarrow |f(x) - f(c)| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.23 (do Valor Intermediário) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) \neq f(b)$, então $f(x)$ assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Consequência
Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então $f(x) = 0$, para algum x.

Exemplo 5.29 Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, mostre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

Solução:
Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - x$. $g(x)$ é contínua, então

$$\begin{aligned} &g(0) = f(0) \geqslant 0 \\ &g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0 \\ &\Rightarrow g(1) \leqslant 0 \leqslant g(0) \end{aligned}$$

Pelo Teo. 5.23 (T.V.I.), $\exists c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$, então $f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$. □

Exemplo 5.30 Seja f contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a) < f(b)$. Suponha que f é injetora. Mostre que f é crescente.

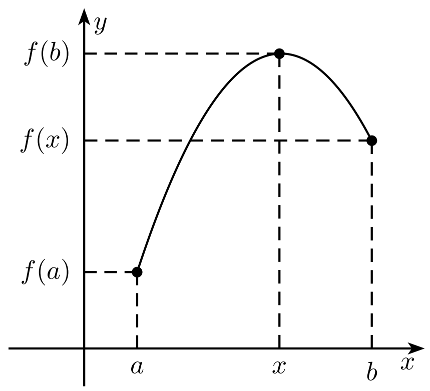


Figura 5.8

Solução:
Primeiro vamos mostrar que se $a < x < b$, então $f(a) < f(x) < f(b)$.
$\Rightarrow f(x) \neq f(a)$ e $f(x) \neq f(b)$.
Suponha $f(x) > f(b)$, então $f(a) < f(b) < f(x)$ (Fig. 5.8).
Logo, $\exists c \in [a, x]$ tal que $f(c) = f(b)$.
Absurdo, pois f é injetora.
De modo análogo, $f(x) < f(a)$ não pode acontecer.

Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$, com $x_1 < x_2$. $f(a) < f(x_2) < f(b)$.
Se $f(x_1) > f(x_2)$, então $f(x_2) < f(x_1) < f(b)$
$\Rightarrow \exists c \in [x_2, b]$ tal que $f(c) = f(x)$. Absurdo, pois f é injetora.
Portanto, $f(x_1) < f(x_2)$.
Logo, f é crescente. □

Proposição 5.24 *Seja $f : D \to Y$ contínua em a, então $|f| : D \to Y$ também é contínua em a.*

Demonstração:
Lembrando que

i) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

ii) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

Como f é contínua em a, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Assim, dado $\varepsilon > 0, ||f(x)| - |f(a)|| \leqslant |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ com o mesmo δ. ■

Proposição 5.25 *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $A < L < B$*, então* $\exists \delta > 0$ *tal que se* $x \in D$ *e* $|x - a| < \delta$*, então* $A < f(x) < B$*.*

Demonstração:
Considere $\varepsilon = \min\{L - A, B - L\}$. Neste caso, $\exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
Se $\varepsilon = L - A \Rightarrow L - \varepsilon = A$ e $L + \varepsilon < B$, pois $\varepsilon < B - L$. Então, $A < f(x) < B$.
Se $L - A = B - L$, então $\varepsilon = L - A$ e $\varepsilon = B - L$, então $A = L - \varepsilon$ e $B = L + \varepsilon$.
■

Corolário 5.26 *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $L \neq 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > \dfrac{L}{2}$ *se* $L > 0$*, e* $f(x) < \dfrac{L}{2}$ *se* $L < 0$*.*

Demonstração:
Temos que

i) $L > 0, \dfrac{L}{2} < L < 2L$.

Basta tomar $A = \dfrac{L}{2}$ e $B = 2L$ na Prop. 5.25.

ii) $L < 0, 2L < L < \dfrac{L}{2}$.

Basta tomar $A = 2L$ e $B = \dfrac{L}{2}$ na Prop. 5.25.

■

Consequência:
Se $\lim_{x \to a} f(x) = L, L \neq 0$, então $|f(x)| > \dfrac{|L|}{2}$.

Proposição 5.27 *Se* $f : D \to Y$ *e* $g : D \to Y$ *são contínuas em* a*, então*

1. $f + g$ *é contínua em* a*;*
2. $f.g$ *é contínua em* a*;*
3. *Se* $g(a) \neq 0$*, então* $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em* a*.*

Demonstração:
Exercício. ■

Exemplo 5.31 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. f é contínua.

Exemplo 5.32 Seja $f : \mathbb{R} - \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x}$. f é contínua em todo seu domínio.

5.8 Limites Infinitos e Limites no Infinito

Definição 5.28 Seja $f : D \to Y$ com $D, Y \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D.

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

se dado $k > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > k$.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

se dado $k < 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) < k$.

iii) Se D é ilimitado superiormente $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

se dado $\varepsilon > 0, \exists k > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > k$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

se dado $R > 0, \exists k > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > k$, então $f(x) > R$.

Obs: Neste caso, D e Y são ilimitados superiormente.

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

se dado $R < 0, \exists k > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > k$, então $f(x) < R$.

Obs: Neste caso, D ilimitado superiormente e Y ilimitado interiormente.

vi) Se D é ilimitado inferiormente $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

se dado $\varepsilon > 0, \exists k < 0$ tal que se $x \in D$ e $x < k$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

vii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

se dado $R > 0, \exists k < 0$ tal que se $x \in D$ e $x < k$, então $f(x) > R$.

viii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

se dado $R < 0, \exists k < 0$ tal que se $x \in D$ e $x < k$, então $f(x) < R$.

Proposição 5.29 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$*, com* $f(x) > 0, \forall x$*, então* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Demonstração:
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, dado $k > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) < \dfrac{1}{k} \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} > k$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. ∎

Proposição 5.30 *Se* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$*, então* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Demonstração:
Dado $\varepsilon > 0, \exists k > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > k$, então $f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} < \varepsilon$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. ∎

Proposição 5.31 *Seja* $f : D \to Y$*, com* D *ilimitado superiormente,* f *limitada e monótona. Então,* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$.

Demonstração:
Suponha f não decrescente, isto é, $x_1 > x_2, f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
f é limitada, então f é limitada superiormente, então seja $B = \sup(f(x)), x \in D$, logo, dado $\varepsilon > 0, \exists k \in D$ tal que $B - \varepsilon < f(x) \leqslant B$.
Agora, se $x > k, f(x) \geqslant f(k)$, então $B - \varepsilon < f(x) \leqslant B$.
Portanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = B = \sup(f(x))$. ∎

Proposição 5.32 *Se* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ *e* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = B$*, então*

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} (kf(x)) = kA$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)g(x)) = AB$

iv) Se $B \neq 0$*, então* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Demonstração:

i) Dado $\varepsilon > 0, \exists k_1 > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > k_1$, então $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $\exists k_2 > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > k_2$, então $|g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se $k = \max\{k_1, k_2\}$

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - A - B| &= |f(x) - A + g(x) - B| \\ &\leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

∎

Teorema 5.33 (do Confronto) *Sejam f, g, h funções com o mesmo domínio e tais que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.*

Demonstração:
Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (I)
De modo análogo, $\exists \delta_2 > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|h(x) - L| < \varepsilon$. (II)
Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ valem (I) e (II) simultaneamente.
De $|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
De $|h(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.
Sabemos que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, logo se $x \in D$ e $x \in V_\delta(a)$, então

$$\begin{aligned} & L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon \\ & \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \\ & \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. ∎

Proposição 5.34 *Sejam $f : Y_1 \to Y_2$ e $g : Y_2 \to Y_3$. Dado $a \in Y_1$, se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f : Y_1 \to Y_3$ é contínua em a.*

Demonstração:
Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que se $z \in Y_2$ e $|z - f(a)| < \delta_1$,
então $|g(z) - g(f(a))| < \varepsilon$.
Agora, para este $\delta_1, \exists \delta_2 > 0$ tal que se $x \in Y_1$ e $|x - a| < \delta_2$,
então $|f(x) - f(a)| < \delta_1$.
Assim, se $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.
Portanto, $g \circ f$ é contínua em a. ∎

Exemplo 5.33 Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. f é contínua.

Solução:
Dado $a \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \\ &= \left|\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| \\ &= \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$.
Assim, se $|x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \dfrac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$.

Falta mostrar que f é contínua em 0. Dado $\varepsilon > 0$, vamos mostrar que $\exists\delta > 0$ tal que se $|x - 0| < \delta$, então $\left|\sqrt{x}\right| < \varepsilon$ ou $x < \delta$, então $\sqrt{x} < \varepsilon$. Tome $\delta = \varepsilon^2$.
Pois, se $x < \varepsilon^2$, então $\sqrt{x} < \varepsilon$. $\square$

Exemplo 5.34 Seja $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. A composição de f é dada por

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g(x) = x^2 + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h &: [0, \infty) \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto h(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f = h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Teorema 5.35 (TVI) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) \neq f(b)$, então $f(x)$ assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Em outras palavras, dado d tal que $f(a) < d < f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração:
Vamos supor $f(a) < f(b)$ e que $d = 0$. O caso geral se reduz a este considerando a função $g(x) = f(x) - d$. Temos assim $f(a) < 0 < f(b)$.

Vamos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Seja r o ponto médio de $[a, b]$.

Se $f(r) = 0$ é imediato. Caso contrário, obtemos dois intervalos $[a, r]$ e $[r, b]$. Se $f(r) > 0$ escolha o primeiro intervalo e se $f(r) < 0$ escolha o segundo.

Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ o escolhido, $I_1 \subset I$. Repita o processo no intervalo I_1 e obtenha $I_2, I_2 \subset I_1 \subset I$.

Continuando assim o processo pára se encontrarmos um dos pontos médios r, tal que $f(r) = 0$ ou obtemos uma sequência de intervalos

$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ tais que $\dfrac{l}{2^n}$ é o comprimento de $I = [a, b]$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{l}{2^n} = 0$, a intersecção dos intervalos acima se reduz a um único ponto c.

Vamos mostrar que $f(c) = 0$.

$$\begin{aligned}
&f(a_n) < 0, \forall n\\
&f(b_n) > 0, \forall n\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0\\
&\lim_{n\to\infty} a_n = c \text{ e } \lim_{n\to\infty} b_n = c
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c) \text{ e}\\
&\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c)
\end{aligned}$$

assim, $0 \leqslant f(c) \leqslant 0$. Portanto, $f(c) = 0$. ■

Aplicação: Todo polinômio de grau ímpar possui uma raíz real.

Exemplo 5.35 Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com n ímpar e $a_n > 0$. f possui raíz real.

Solução:

$$f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

temos $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ então, $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < 0$ e $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $f(b) > 0$, pelo T.V.I., como $f(a) < 0 < f(b), \exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. □

5.9 Funções Contínuas em Intervalos Fechados

Trataremos de funções do tipo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Proposição 5.36 *Toda função contínua definida num intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$, é limitada.*

Demonstração:

Vamos mostrar que $A \leqslant f(x) \leqslant B$.

Suponha o contrário, ou seja, que f não é limitada. Divida o intervalo $[a,b]$ ao meio obtendo $[a,r]$ e $[r,b]$. Em algum desses intervalos f é ilimitada.

Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ esse intervalo. Divida I_1 ao meio e seja $I_2 = [a_2, b_2]$ com a mesma propriedade.

Continuando com esse processo obtemos uma sequência de intervalos encaixados $I \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ onde $I_n = [a_n, b_n]$ e o comprimento de I_n é $\dfrac{l}{2^n}$, onde l é o comprimento de $I = [a,b]$.

Pelo Teorema dos intervalos encaixados, a intersecção desses intervalos se reduz a um ponto c.

Tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in V_\delta(c)$, então $|f(x) - f(c)| < 1$.

Logo, se $x \in V_\delta(c)$, então

$$\begin{aligned} & -1 < f(x) - f(c) < 1 \\ & \Rightarrow f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1 \end{aligned}$$

Logo, $f(x)$ é limitada para todo $x \in V_\delta(c)$. Absurdo.

Portanto, f é limitada. ■

5.10 Valor Máximo e Valor Mínimo

Definição 5.37 Seja $f : Y \to \mathbb{R}. M \in \mathbb{R}$ é dito *valor máximo* de f se $\exists x_0 \in Y$ tal que $f(x_0) = M$ e

$f(x) \leqslant M, \forall x \in Y$.

$m \in \mathbb{R}$ é dito *valor mínimo* de f se $\exists x_1 \in Y$ tal que $f(x_1) = m$ e $f(x) \geqslant m, \forall x \in Y$.

Proposição 5.38 *Toda função contínua definida num intervalo fechado e limitado $I = [a,b]$, assume valor máximo e valor mínimo.*

Demonstração:

Note que, pela Prop. 5.36, f é limitada. Seja $M = \sup f(x)$, com $x \in [a,b]$. Vamos mostrar que M é o valor máximo de f. Temos que $f(x) \leqslant M, \forall x$. Suponha que $f(x) < M, \forall x$, então $M - f(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} > 0$.

Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Pela Prop. 5.36, $g(x)$ é limitada.

Seja $M' = \sup g(x)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} \leqslant M' \\
&\Rightarrow 1 \leqslant MM' - f(x)M' \\
&\Rightarrow f(x)M' \leqslant MM' - 1 \\
&\Rightarrow f(x) \leqslant M - \frac{1}{M'}, \forall x \in [a, b]
\end{aligned}$$

Absurdo, pois M é a menor das cotas superiores ($M = \sup f(x)$). Logo, $f(x) = M$ para algum x.

Agora, mostremos que f assume valor mínimo.
Seja $m = \inf f(x), x \in [a, b]$. Então, $f(x) \geqslant m, \forall x \in [a, b]$.
Suponha $f(x) > m, \forall x \in [a, b]$, então $m - f(x) < 0$.
Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{m - f(x)}$. Pela Prop. 5.36, g é limitada.
Seja $M' = \inf g(x)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{m - f(x)} \geqslant m' \\
&\Rightarrow 1 \leqslant mm' - m'f(x) \\
&\Rightarrow m'f(x) \leqslant mm' - 1 \\
&\Rightarrow f(x) \geqslant m - \frac{1}{m'}
\end{aligned}$$

Absurdo, pois $m - \dfrac{1}{m'} > m$ e $m = \inf(x)$. Logo, $f(x) = m$ para algum x. ■

5.11 Exercícios Propostos

Os exercícios a seguir referem-se à página 166 do livro "Análise Matemática para Licenciatura" de Geraldo Ávila.

5.25 Prove que a equação $x^4 + 10x^3 - 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais. Use uma calculadora científica para determinar uma dessas raízes com a aproximação de duas casas decimais.

5.26 Prove que um polinômio de grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais, contando as multiplicidades.

5.27 Prove que se n é par, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ assume um valor mínimo m. Em consequência, prove que $p(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas se $a > m$ e nenhuma se $a < m$.

5.28 Prove que se um polinômio de grau n tiver r raízes, contando as multiplicidades, então $n - r$ é par.

5.29 Prove que todo número $a > 0$ possui raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

5.30 Prove que todo número $a > 0$ possui uma raiz n-ésima positiva; e se n for par, possuirá também uma raiz n-ésima negativa.

5.31 Seja f uma função contínua num intervalo, onde ela é sempre diferente de zero. Prove que f é sempre positiva ou sempre negativa.

5.32 Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que existe um número c entre a e b, tal que $f(c) = g(c)$. Faça um gráfico para entender bem o que se passa.

5.33 Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com valores nesse mesmo intervalo. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Interprete este resultado geometricamente.

5.34 Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. Interprete este resultado geometricamente.

5.35 Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com $f(0) = f(1)$. Prove que existe um número $c \in [0, 1/2]$ tal que $f(c) = f(c + 1/2)$.

5.36 Complete a demonstração do Teorema 6.30, provando que g é contínua em b, na hipótese de que b seja uma das extremidades do intervalo J. Faça também a demonstração completa do teorema no caso em que f (e, consequentemente, também g) é uma função decrescente.

5.37 Sejam f e g funções crescentes num intervalo I, onde $f(x) \leqslant g(x)$. Prove que $f^{-1}(y) \geqslant g^{-1}(y)$ para todo $y \in f(I) \cap g(I)$.

5.38 Prove que a imagem de um intervalo aberto por uma função contínua injetiva é um intervalo aberto. Dê exemplos em que o intervalo-domínio é limitado, mas sua imagem é ilimitada.

5.39 Dê exemplo de uma função cujo domínio não seja nem fechado nem limitado, mas tenha valores máximo e mínimo.

5.40 Prove que $f(x) = x$ se x for racional, e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional, é contínua em $x = 1/2$ e somente neste ponto.

5.41 Considere a função f assim definida: $f(x) = -x$ se x for racional e $f(x) = 1/x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e mostre que ela é uma bijeção descontínua em todos os pontos.

Exemplo 5.36 Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exemplo 5.37 Seja $f(x)$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{, se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que f é contínua apenas em $x = 0$ e $|f(x)|$ é contínua em todo ponto.

Exemplo 5.38 Seja $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Ache os pontos de máximo e mínimo de f se existir.

5.42 [1] Prove, pela definição de limite, que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua para todo $x \neq 0$.

5.43 [2] Prove que se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(x) \geqslant 0$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em $x = a$.

[1] Análise Matemática para Licenciatura - pág. 148.
[2] Análise Matemática para Licenciatura - pág. 149.

CAPÍTULO 6

Derivada

Definição 6.1 Seja $f : X \to \mathbb{R}, x_0 \in X$ com x_0 ponto de acumulação de X. Se existe e é finito o limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dizemos que f é *derivável* em x_0 e denotamos tal limite por

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

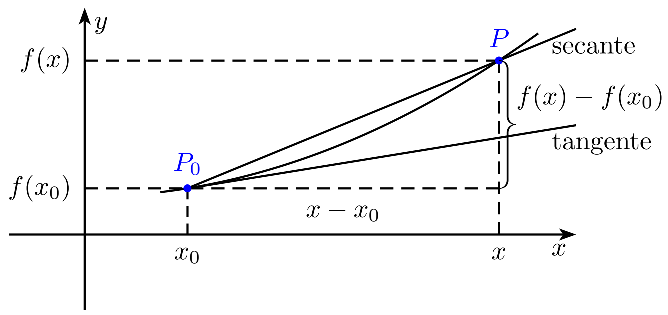


Figura 6.1: A reta tangente é o limite da reta secante em P_0.

Definição 6.2 Quando $f'(x_0)$ existe, a reta de equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

é chamada *reta tangente* ao gráfico da curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Exemplo 6.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ e seja $x_0 = 0$. f é derivável em $x = 0$?

Solução:
Temos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 0^3}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$
$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

E equação da reta tangente é

$$y - 0 = 0(x - 0)$$
$$\Rightarrow y = 0$$

□

Exemplo 6.2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$. Existe $f'(0)$?

Solução:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Se $x > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$
Se $x < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$
Como os limites a esquerda e a direita são diferentes, o limite não existe. Portanto, $f'(0)$ não existe. □

Teorema 6.3 *Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Demonstração:
f é derivável, então existe

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Seja $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$
$$\Rightarrow g(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)(x - x_0) + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

aplicando o limite para $x \to x_0$, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Portanto, f é contínua em x_0. ■

6.1 Operações com Derivadas

Teorema 6.4 *Se f e g são deriváveis em x_0, o mesmo ocorre com $f + g, fg$ e $\dfrac{f}{g}$ se $g(x_0) \neq 0$.*

i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Demonstração:

i) Temos que

$$\begin{aligned}
(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
(f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0)
\end{aligned}$$

ii) Temos que

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x_0) + g(x)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{[f(x) - g(x_0)]}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} . \lim_{x\to x_0} g(x) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) . \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

iii) Primeiro verifiquemos o caso

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{-\left(g(x) - g(x_0)\right)}{x - x_0} . \frac{1}{g(x).g(x_0)} \\
&= \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}
\end{aligned}$$

O caso geral

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f.\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= f'(x_0).\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0).\frac{(-g'(x_0))}{[g(x_0)]^2} \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}
\end{aligned}$$

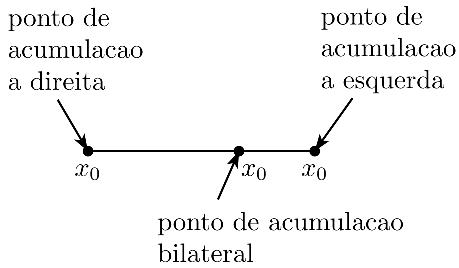


Figura 6.2

■

Exemplo 6.3 Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}. f'(0)$ existe?

Solução:

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^{1/2}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Portanto, $f'(0)$ não existe. □

Exemplo 6.4 Seja $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2. f'(1)$ existe?

Solução:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

Portanto, $f'(1)$ existe. □

Exemplo 6.5 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c, c \in \mathbb{R}. f'(x_0)$ existe?

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

□

6.2 Máximos e Mínimos

Definição 6.5 Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. x_0 é dito um ponto de *mínimo local* se existe $V_\delta(x_0)$ tal que $f(x) \geqslant f(x_0), \forall x \in V_\delta(x_0)$. E x_0 é dito um ponto de *máximo local* se existe $V_\delta(x_0)$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in V_\delta(x_0)$.

Proposição 6.6 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se f é derivável em x_0 e x_0 é ponto de mínimo ou de máximo, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração:
Caso em que x_0 é ponto de mínimo.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \text{ e } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

■

Obs: A recíproca é falsa. Exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 3x^2$$
$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

Mas 0 não é ponto de máximo nem de mínimo.

Teorema 6.7 (Michel Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

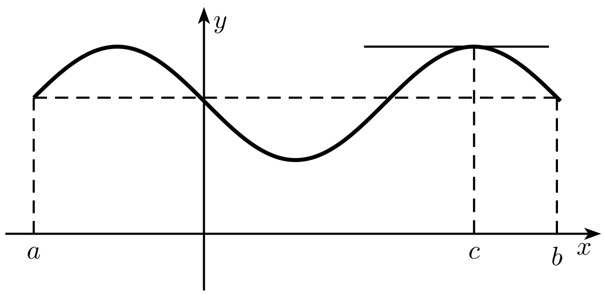


Figura 6.3

Demonstração:
Se f é constante. OK, pois $f'(c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}$.
Se f não é constante, $f(x) \neq f(a)$ para algum $x \in (a, b)$.

Como f é contínua e $[a, b]$ é limitado e fechado, f assume valor máximo e valor mínimo. Pela Prop. 6.6, existe $c \in (a, b)$ tal que c é ponto de máximo ou ponto de mínimo e, portanto, $f'(c) = 0$. ■

Teorema 6.8 (Teorema do Valor Médio) [1] *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então, $\exists c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

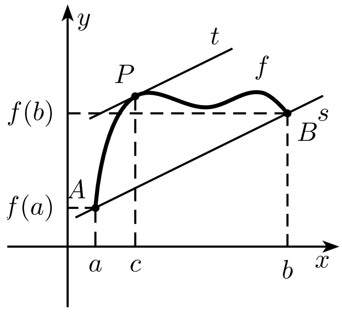


Figura 6.4: A inclinação da reta t é a mesma da reta s.

Demonstração:
Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$$

Note que $g(a) = 0$ e $g(b) = 0$. $\Rightarrow g(a) = g(b)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \\
\Rightarrow g'(c) &= f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \\
\Rightarrow f'(c) &- \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) = 0 \\
\Rightarrow f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}
\end{aligned}$$

■

[1] Lagrange

6.3 Exercícios Propostos

6.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |2x + 1| - | - x - 7|$$

a) Mostre, usando a definição, que f é contínua em todos os pontos do domínio.

b) f assume valor máximo? E mínimo?

c) f é injetora? Sobrejetora? Qual é o conjunto imagem de f?

6.2 Em cada afirmativa abaixo, prove, se for verdadeira, ou dê um contra-exemplo, em caso falso.

a) Se f é contínua em a, então f é derivável em a.

b) Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

c) Se f assume um valor máximo ou mínimo em $x = a$, então f é derivável em a.

6.3 Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Mostre que a região compreendida pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$ pela reta perpendicular à tangente nesse mesmo ponto e pelo eixo das abscissas é um triângulo isósceles.

6.4 O conjunto de zeros de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$$

a) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $Z(f) = [0, 1]$?

b) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $Z(f) = \emptyset$?

c) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $Z(f) = \mathbb{R}$?

6.5 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos do domínio e com f' contínua. Se

$$xf'(x) = x^2 + f(x)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que

a) $f(0) = 0$

b) $f'(0) = 0$

6.6 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.

a) Se $f + g$ é contínua, então f e g são contínuas.

b) Se fg é contínua, então f e g são contínuas.

c) Se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e f é contínua em $x = 0$, então f é contínua em todo x.

6.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que se $|f(x)| \leqslant x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então existe $f'(0)$.

6.8 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que f é derivável em $x = 0$.

6.9 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L < \infty$,

a) Mostre que $f(0) = 0$.

b) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e que $f'(0) = L$.

6.10 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x)$ é crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Mostre que a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por
$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente.

6.11 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que
$f'(x) = nx^{n-1}, n \neq 0$.

6.12 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0, \forall x$. Mostre que f é uma função constante.

6.13 Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo se existirem.

6.14 Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Encontre os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo se existirem. Verifique que embora 1 seja ponto de máximo, $f'(1)$ é diferente de zero. Por que isso não contraria a teoria estudada?

Parte I

Solução dos Exercícios Propostos

CAPÍTULO 7

Lista 01 - Números Reais

7.1 Mostre que o conjunto dos números primos é enumerável.

Solução:
Suponha P o conjunto dos números primos finitos, P finito
$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots, P_r\}$.
Considerando n um inteiro tal que $n = p_1.p_2.p_3 \ldots p_r + 1$, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, n não é primo.
Assim, $n = q_1.q_2 \ldots q_k$ (composto de primos), onde os q_i são elementos de P e $k > 1$. Segue que $q_1|n$ e $q_1 \in P$.
Portanto, $q_1 = p_j$ para algum $j, j = 1, 2, \ldots, r$.
Consequentemente, $q_1|p_1.p_2 \ldots p_r$. Assim $q_1|n$.
Mas $n - p_1.p_2 \ldots p_r = 1$ e $q_1|n - p_1.p_2 \ldots p_r = 1$, ou seja, $q_1|1$. O que contraria a definição de números primos, pois nenhum primo divide 1.
Portanto, o conjunto dos números primos é infinito. $\square$

7.2 Mostre que o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a cinco e coeficientes racionais forma um conjunto enumerável.

7.3 Mostre que o conjunto das matrizes $n \times m$ com entradas racionais forma um conjunto enumerável, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7.4 Seja A um conjunto infinito não enumerável tal que $A = B \cup C$. Mostre que B ou C é infinito e não é enumerável.

7.5 Mostre que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

7.6 Seja r um número racional qualquer. Mostre que o conjunto E dos números racionais menores que r não tem máximo e que o conjunto D dos números racionais maiores que r não tem mínimo.

7.7 Mostre que existem infinitos números racionais em qualquer intervalo (a, b) da reta real.

Solução:
Devemos mostrar que existe $c \in (a, b)$.

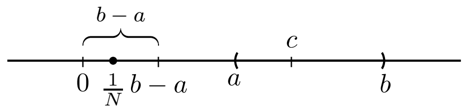


Figura 7.1

Seja $a < b$, então $b - a > 0$. Logo $\dfrac{1}{b-a} > 0$
$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}; N > \dfrac{1}{b-a} \Rightarrow \dfrac{1}{N} < b - a$.
Note que $\dfrac{1}{N} \in \mathbb{Q}$. □

7.8 Mostre que existem infinitos números irracionais em qualquer intervalo (a, b) da reta real.

Solução:
Seja $a < b$, então $b - a > 0$. Logo $\dfrac{\sqrt{3}}{b-a} > 0$
$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}; N > \dfrac{\sqrt{3}}{b-a} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{N} < b - a$.
$\dfrac{\sqrt{3}}{N}$ é irracional. □

7.9 Prove que se p é um número primo qualquer, então $\sqrt{p}$ é irracional.

7.10 Se a e b são números irracionais, é verdade que $\dfrac{a+b}{2}$ é irracional?

7.11 Prove que se x e y são números irracionais tais que $x^2 - y^2$ é racional não-nulo, então $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais. Conclua que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são ambos irracionais.

7.12 Uma expansão de Cantor para um número inteiro positivo n é uma soma do tipo

$$n = a_m.m! + a_{m-1}.(m-1)! + \ldots + a_2.2! + a_1.1!,$$

sendo a_j inteiro e $0 \leqslant a_j \leqslant j$.

a) Encontre a expansão de Cantor para os inteiros $14, 56$ e 384.

b) Mostre que qualquer inteiro positivo tem uma expansão de Cantor.

Sugestão: Divida n, inicialmente, por 2, obtendo quociente q_1 e resto r_1. Divida em seguida q_1 por 3.

Solução:
Seja $n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 1$, então $n = 2.0 + 1 = \underbrace{1.1!}_{a_1} + \underbrace{0.2!}_{a_2}$.
Se $n = 2$, então $n = 2.1 + 0 = \underbrace{1.2!}_{a_2} + \underbrace{0.1!}_{a_1}$.
Se $n \geqslant 2$, vamos dividir n por 2.

$$n = 2\underbrace{q_1}_{<3} + r_1; 0 \leqslant r_1 \leqslant 1 \text{ e } q_1 < n$$

Agora, vamos dividir q_1 por 3.

$$q_1 = 3q_2 + r_2; 0 \leqslant r_2 \leqslant 2 \text{ e } q_2 < q_1 < n$$

$$\begin{aligned} n &= 2q_1 + r_1 \\ n &= 2\,(3q_2 + r_2) + r_1 \\ n &= 2.3.q_2 + 2r_2 + r_1 (*) \end{aligned}$$

Se $q_1 < 3$, nós pararíamos em $n = 2q_1 + r_1$.
Chamando $a_2 = q_1$ e $a_1 = r_1$. Então, $n = a_2 2! + a_1 1!$, onde $0 \leqslant a_i \leqslant i$.
Se $q_1 \geqslant 3$, então dividimos q_1 por 3.
Se $q_2 < 4$, então paramos aí.

$$\begin{aligned} & n = 3.2.q_2 + 2r_2 + r_1 \\ & a_3 = q_2 \Rightarrow 0 \leqslant a_3 \leqslant 3 \\ & a_2 = r_2 \Rightarrow 0 \leqslant a_2 \leqslant 2 \\ & a_1 = r_1 \Rightarrow 0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \\ & n = a_3 3! + a_2 2! + a_1 1!, 0 \leqslant a_i \leqslant i \end{aligned}$$

Se $q_2 \geqslant 4$, então vamos dividir q_2 por 4.

$$q_2 = 4q_3 + r_3; 0 \leqslant r_3 \leqslant 3; q_3 \leqslant q_2 < q_1 < n$$

Observe que os quocientes estão diminuindo e como eles formam um subconjunto de inteiros positivos, pelo princípio da Boa Ordem, existe o menor quociente q_{m-1}.

Então, tomando

$$\begin{aligned} a_m &= q_{m-1}, 0 \leqslant a_m \leqslant m \\ a_{m-1} &= r_{m-1}, 0 \leqslant a_{m-1} \leqslant m-1 \\ a_{m-2} &= r_{m-2}, 0 \leqslant a_{m-2} \leqslant m-2 \end{aligned}$$

Então,

$$n = a_m.m! + a_{m-1}.(m-1)! + \ldots + a_2.2! + a_1.1!, \text{ onde } 0 \leqslant 0 \leqslant a_i \leqslant i, 1 \leqslant i \leqslant m$$

□

7.13 Mostre que qualquer número racional positivo pode ser escrito, de um único modo, na forma

$$a_1 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{2!} + \ldots + \frac{a_k}{k!},$$

onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant a_1, 0 \leqslant a_2 < 2, \ldots, 0 \leqslant a_k < k$.

7.14 Mostre que $\mathbb{N}$ é infinito.

Solução:

Suponha que $\mathbb{N}$ é finito, então existe $\varphi : \mathbb{N} \to F_n$ bijetora, onde $F_n = 1, \ldots, n$.

Assim, para cada valor de $\mathbb{N}$ teríamos um correspondente em F_n. Mas por definição se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$, mas não existe um correspondente em F_n.

Portanto, $\mathbb{N}$ é infinito. □

CAPÍTULO 8

Lista 02 - Números Reais

8.1 Em $\mathbb{R}$ defina o valor absoluto de x por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x||y|$

c) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

Solução:
Faremos apenas o item c).
Afirmação: Se $a \in \mathbb{R}, a > 0$, então $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.
Demonstração:
$\Rightarrow$) Usando a definição de módulo, temos que se $|x| \leqslant a$, obtemos dois casos: $x \geqslant 0$ ou $x < 0$.
Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x \leqslant a$.
Se $x < 0$, então $|x| = -x \leqslant a = x \geqslant -a$.
Portanto, $-a \leqslant x \leqslant a$.
$\Leftarrow$) Se $-a \leqslant x \leqslant a$, temos que
Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x \leqslant a \Rightarrow |x| \leqslant a$.
Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Como $x \geqslant -a \Rightarrow -x \leqslant a \Rightarrow |x| \leqslant a$. $\blacksquare$

Voltando ao exercício, temos

$$
\begin{aligned}
&-|x| \leqslant x \leqslant |x| \\
&-|y| \leqslant y \leqslant |y| \\
&-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \\
&\Rightarrow |x + y| \leqslant |x| + |y|
\end{aligned}
$$

□

8.2 Mostre que para quaisquer números reais x e y vale a desigualdade

$$xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Solução:
Sabemos que $(x - y)^2 \geqslant 0$. Então

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy \\
&\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geqslant xy
\end{aligned}
$$

□

8.3 Para quaisquer números reais positivos x e y mostre que

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2}$$

Solução:
Pelo Ex. 8.2, $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. Então,

$$
\begin{aligned}
&2xy \leqslant x^2 + y^2 \\
&\Rightarrow 4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2 \\
&\Rightarrow 4xy \leqslant (x + y)^2 \\
&\Rightarrow 2\sqrt{xy} \leqslant x + y \\
&\Rightarrow \sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2}
\end{aligned}
$$

□

8.4 Para quaisquer números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mostre que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Solução:

Pelo Ex. 8.3, essa desigualdade vale para $n = 2$.

Vamos provar que se vale para k termos, então vale para $2k$ termos.

$$\frac{x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{2k} = \frac{\frac{x_1+\ldots+x_k}{k} + \frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{k}}{2} \geqslant \frac{\sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} + \sqrt[k]{x_{k+1} \ldots x_{2k}}}{2}$$

Pelo Ex. 8.3, temos que

$$\frac{\sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} + \sqrt[k]{x_{k+1} \ldots x_{2k}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[k]{x_1 \ldots x_n}\sqrt[k]{x_{k+1} \ldots x_{2k}}} \geqslant \sqrt[2k]{x_1 \ldots x_k . x_{k+1} \ldots x_{2k}}$$

Agora, vamos mostrar que se vale para 2^m também vale para todo $n < 2^m$.

De fato, seja $L = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, com $n < 2^m$.

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n + \overbrace{L + \ldots + L}^{2^m - n}}{2^m} \geqslant \sqrt[2^m]{x_1 \ldots x_n . L^{(2^m - n)}} = \sqrt[2^m]{L^n . L^{(2^m - n)}} = L$$

$$\Rightarrow x_1 + \ldots + x_n + (2^m - n)L \geqslant 2^m.L$$

$$\Rightarrow x_1 + \ldots + x_n \geqslant 2^m.L - 2^m.L + n.L$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Aqui termina o exercício. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m > n$?

Sim. Basta provar que não existe supremo no conjunto dado por $A = \{2^m, m \in \mathbb{N}\}$.

Suponha $c = \sup(A)$, então $c - 2 < 2^a$. Logo,

$$\frac{c}{2} < c - 2 < 2^a$$

$$\Rightarrow c < 2^{a+1}$$

□

8.5 Para quaisquer números reais x, y, z mostre que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$$

Solução:
Sabemos que $(x - y)^2 \geqslant 0$, então

$$\begin{aligned}
&((x - y) - z)^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow (x - y)^2 - 2z(x - y) + z^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow (x - y)^2 + z^2 \geqslant 2xz + 2yz \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2xz + 2yz + 2xy \geqslant xy + xz + yz \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz
\end{aligned}$$

$\square$

8.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais quaisquer. Mostre que

$$|x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

Solução:
Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $(x_1 - \lambda y_1)^2 + \ldots + (x_n - \lambda y_n)^2 \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x_1^2 - 2\lambda x_1y_1 + \lambda^2 y_1^2 + \ldots + x_n^2 - 2\lambda x_ny_n + \lambda^2 y_n^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow (x_1^2 + \ldots + x_n^2) - 2\lambda(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) + \lambda^2(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Fazendo, $a = y_1^2 + \ldots + y_n^2; b = -2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n); c = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, obtemos $a\lambda^2 + b\lambda + c \geqslant 0$.

Logo, $b^2 - 4ac \leqslant 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&4(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \\
&\Rightarrow \sqrt{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n} \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2} \\
&\Rightarrow |x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}
\end{aligned}$$

$\square$

8.7 Duas torres de alturas h_1 e h_2, respectivamente, localizadas numa região plana, são amarradas por uma corda APB que vai do topo A da primeira torre para um ponto P no chão entre as duas torres, e então até o topo B da segunda torre. Qual a posição do ponto P que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?

8.8 Mostre que num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual a metade da hipotenusa. Prove ainda, que a igualdade só ocorre quando o triângulo é isósceles.

8.9 Prove que, entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.

Solução:

Como o triângulo é retângulo e isósceles, para termos a maior soma dos catetos devemos mostrar que $s = a + b$ é máximo se $\theta = 45°$.

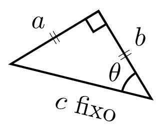


Figura 8.1: Triângulo retângulo isósceles.

A partir da Fig. 8.1 temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta &= \frac{b}{c} \Rightarrow b = c\cos\theta \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} s &= a + b = c\operatorname{sen}\theta + c\cos\theta \\ s &= c(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

Calculando a derivada de s, temos $s' = c(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$.
Fazendo $s' = 0$, obtemos os pontos críticos de s, então

$$\begin{aligned} &c(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0 \\ &\Rightarrow \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 0 \\ &\Rightarrow \cos\theta = \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Neste caso, devemos ter $\theta = 45°$ (triângulo isósceles).
Para verificar se s é máximo calculamos a segunda derivada

$$\begin{aligned} &s'' = c(-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \\ &\Rightarrow s''(45) = c\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}c < 0 \end{aligned}$$

Portanto, s é máximo e $\theta = 45°$, e o triângulo retângulo é isósceles. $\square$

8.10 Mostre que $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solução:
Pelo Ex. 8.5, temos que

$$
\begin{aligned}
&(a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \\
&\geqslant (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 \\
&\geqslant a^2bc + b^2ac + c^2ab \\
&\geqslant abc(a + b + c)
\end{aligned}
$$

□

8.11 Mostre que se $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$, então

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$$

Solução:
Algumas das propriedades dos números reais são:
Sejam a, b, c, d positivos.

i) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

ii) Se $a > b$ e $c > d$, então $ac > bd$.

Com estas propriedades e o Ex. 8.3, temos

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \tag{8.1}$$

analogamente, temos

$$a + c \geqslant 2\sqrt{ac} \text{ e } b + c \geqslant 2\sqrt{bc} \tag{8.2}$$

Multiplicando as Eq. (8.1) por Eq. (8.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
&(a + b)(a + c) \geqslant 2\sqrt{ab}2\sqrt{ac} \\
&\Rightarrow (a + b)(a + c) \geqslant 4\sqrt{a^2bc}
\end{aligned}
$$

continuando a multiplicação, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 4\sqrt{a^2bc}2\sqrt{bc} \\
&\Rightarrow (a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2} \\
&\Rightarrow (a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc
\end{aligned}
$$

□

8.12 Mostre a desigualdade de Bernoulli

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

para todo x positivo e n inteiro positivo.

Solução:
Por indução, temos que para $n=1, (1+x) \geqslant 1+1.x$.
Suponha que vale para $n=k$, então $(1+x)^k \geqslant 1+kx$, para algum $k \in \mathbb{N}$.
Devemos mostrar que vale para $n=k+1$, logo

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \underbrace{(1+x)}_{>0} \geqslant (1+kx)(1+x) \\
&\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geqslant 1+x+kx+kx^2 \\
&\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x+\underbrace{kx^2}_{>0} \geqslant 1+(k+1)x \\
&\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x \\
&\therefore (1+x)^n \geqslant 1+nx, \forall x>0 \text{ e } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

□

8.13 Se a, b, c, d são números reais positivos, mostre que

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16$$

8.14 Mostre que se $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$, então

$$(ab+bc+ca) \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$$

Solução:
A partir do Ex. 8.3, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc} \Rightarrow \frac{ab+ac}{2} \geqslant a\sqrt{bc} \\
\frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac} \Rightarrow \frac{ba+bc}{2} \geqslant b\sqrt{ac} \\
\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{ca+cb}{2} \geqslant c\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Somando, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{ab+ac}{2}+\frac{ba+bc}{2}+\frac{ca+cb}{2} \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}\\
&\Rightarrow \frac{2ab+2ac+2bc}{2} \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}\\
&\Rightarrow (ab+ac+bc) \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

□

8.15 Mostre que se $x \geqslant 0$, então $3x^3 - 6x^2 + 4 \geqslant 0$.

8.16 Mostre que se $x \geqslant 0$, então $2x + \dfrac{3}{8} \geqslant 4\sqrt{x}$.

8.17 A soma de três números reais positivos é 6. Mostre que a soma de seus quadrados não é menor que 12.

8.18 Os centros de três círculos que não se interceptam estão sobre uma reta. Prove que se um quarto círculo toca de forma tangente os três círculos, então o raio deste é maior que pelo menos um dos raios dos três círculos dados.

8.19 Mostre que em todo triângulo a soma dos coprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semi-perímetro deste.

8.20 Sejam A e B subconjuntos não vazios e limitados de números reais. Mostre que se $A \subset B$, então $\inf(A) \geqslant \inf(B)$ e $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

Solução:
A e B são limitados, então existem $\inf(A), \inf(B), \sup(A)$ e $\sup(B)$.
Se $A \subset B \Rightarrow$ se $x \in A \Rightarrow x \in B$.

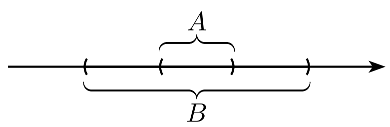


Figura 8.2

Seja $a = \inf(A) \Rightarrow a \leqslant x, \forall x \in A$. a é a maior das cotas inferiores de A.
Seja $b = \inf(B) \Rightarrow b \leqslant y, \forall y \in B$. b é a maior das cotas inferiores de B.
$b \leqslant y, \forall y \in B$, mas $A \subset B$.
Então, $b \leqslant x, \forall x \in A$, implica que b é cota inferior de A;
Mas $a = \inf(A) \Rightarrow b \leqslant a$

$$\Rightarrow \inf(B) \leqslant \inf(A)$$

Seja $a' = \sup(A) \Rightarrow a' \geqslant x, \forall x \in A$. a' é a menor das cotas superiores de A.
Seja $b' = \sup(B) \Rightarrow b' \geqslant y, \forall y \in B$. b' é a menor das cotas superiores de B.
$b' \geqslant y, \forall y \in B$, mas $A \subset B$.
Então, $b' \geqslant x, \forall x \in A$, implica que b' é cota superior de A;
Mas $a' = \sup(A) \Rightarrow a' \leqslant b'$

$$\Rightarrow \sup(A) \leqslant \sup(B)$$

□

8.21 Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios, limitados inferiormente e r um número real tal que $r \leqslant a + b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. Mostre que $r \leqslant \inf(A) + \inf(B)$. Enuncie o análogo para supremos.

8.22 Dados dois subconjuntos A e B de $\mathbb{R}$ limitados, definimos o conjunto

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Mostre que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ e $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Solução:
Mostremos que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
$A + B$ é limitado superiormente, pois se c é cota superior de A e c' é cota superior de B, então $c + c'$ é cota superior de $A + B$.
De fato,

$$\begin{aligned} &c \geqslant a, \forall a \in A \\ &c' \geqslant b, \forall b \in B \\ &c + c' \geqslant a + b, \forall a + b \in A + B \end{aligned}$$

Portanto, $A + B$ possui supremo.
$\sup(A)$ é cota superior de A e $\sup(B)$ é cota superior de B,
$\Rightarrow \sup(A) + \sup(B)$ é cota superior de $A + B$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe
$x' \in A$ tal que $\sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2} < x' \in A$
$y' \in B$ tal que $\sup(B) - \dfrac{\varepsilon}{2} < y' \in B$
$\Rightarrow \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x' + y' \in A + B$.
$\therefore \sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$
Falta mostrar que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$. □

CAPÍTULO 9

Lista 03 - Sequências

9.1 Usando a definição, mostre que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+7} = 2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = 3$

9.2 Mostre que uma sequência só pode convergir para um único limite.

9.3 Mostre que se uma sequência (a_n) tem limite L, então $(|a_n|)$ tem limite $|L|$. Dê exemplo de uma sequência (a_n) tal que (a_n) não converge mas $(|a_n|)$ converge.

9.4 Seja (a_n) e (b_n) sequências tais que $|a_n - a| < C|b_n|$, onde a é um número real e C uma constante positiva. Usando a definição de limite mostre que se (b_n) converge para zero, então (a_n) converge para a.

Solução:
Dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$.
Assim, se $n > N$, então $|a_n - a| < c.\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. □

9.5 Mostre que se (a_n) é uma sequência que converge para zero e (b_n) é uma sequência limitada, então $(a_n b_n)$ converge para zero.

Solução:
Existe $c > 0$ tal que $|b_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$, logo

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{c}.c = \varepsilon$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

$\square$

9.6 Mostre que a sequência $a_n = \sqrt{n+h} - \sqrt{n}$ converge para zero.

Solução:
Façamos

$$a_n = \left(\sqrt{n+h} - \sqrt{n}\right) \frac{\left(\sqrt{n+h} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+h} + \sqrt{n}\right)} = h \frac{1}{\sqrt{n+h} + \sqrt{n}}$$

Note que h é limitada (Ex. 18.5) e a fração converge para zero. Logo, o produto (a_n) converge para zero. $\square$

9.7 Se $0 < a < 1$, mostre que a sequência $a_n = a^n$ é convergente e que converge para zero.

Solução:
Se $a < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} = 1 + x \Rightarrow \dfrac{1}{a^n} = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (Bernoulli, Ex. 8.12).

Logo, $\dfrac{1}{a^n} \geqslant 1 + nx \Rightarrow \dfrac{1}{1+nx} \geqslant a^n \Rightarrow a^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx} < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

$\dfrac{1}{1+nx} < \dfrac{1}{nx}$. Dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \dfrac{1}{\varepsilon x} \Rightarrow \varepsilon > \dfrac{1}{Nx}$. Se $n > N$; $\dfrac{1}{nx} < \dfrac{1}{Nx} < \varepsilon$. $\square$

9.8 Se a_n converge para L e $L > 0$, mostre que $a_n > 0$ a partir de um certo N.

9.9 Seja (a_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência convergindo para L. Mostre que (a_n) também converge para L.

Solução:

(a_n) é monótona crescente, então $n < m \Rightarrow a_n < a_m$. Existe $b_j = a_{n_j}$ (subsequência) convergente.

Dado $\varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$ tal que se $j > J, |b_j - L| < \varepsilon$, isto é,

$$L - \varepsilon < b_j < L + \varepsilon, \forall j > J, \text{ ou seja, } L - \varepsilon < a_{n_j} < L + \varepsilon, \forall j > J.$$

$$\forall j > J, b_j = a_{n_j} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Dado $j > J, j + 1 > j \Rightarrow a_{n_j} < a_{n_{j+1}}$.

Como (a_n) é monótona, se $n_j < m < n_{j+1}$, então $a_{n_j} < a_m < a_{n_{j+1}} \Rightarrow a_m \in L - \varepsilon, L + \varepsilon$.

Além disso, dado $m > J$, escolha $n_j > m$.

$$a_m < a_{n_j} \Rightarrow a_m \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Portanto, (a_n) converge para L. □

9.10 Construa uma subsequência que possua uma subsequência convergindo para 12 e outra convergindo para -30.

9.11 Construa uma subsequência que tenha subsequências convergindo, cada uma, para cada um dos números inteiros positivos.

9.12 Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n > 0, \forall n$ e $\dfrac{a_n + 1}{a_n} \leqslant c$, com $0 < c < 1$. Mostre que (a_n) converge para zero.

Solução:

$$\begin{aligned} &\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant c \Rightarrow a_{n+1} \leqslant c.a_n \\ &\Rightarrow c.a_{n+1} \leqslant c^2 a_n \\ &\Rightarrow a_{n+2} \leqslant c.a_{n+1} \leqslant c^2 a_n \end{aligned}$$

Logo, $a_{n+2} \leqslant c^2 a_n$.

$$a_{n+3} \leqslant c.a_{n+2} \leqslant c^3 a_n \Rightarrow a_{n+3} \leqslant c^3 a_n$$

De um modo geral, $a_{n+p} \leqslant c^p a_n$.

Fixe $n \in \mathbb{N}$. Pelo Ex. 18.7 tende a zero, então dado $\varepsilon > 0, \exists p$ tal que $c^p a_n < \varepsilon$.

Agora, se $n > N + p \Rightarrow n = N + p + r$.

$$a_n = a_{N+p+r} \leqslant c^{p+r} a_n < \varepsilon$$

Portanto, a_n tende a zero. □

9.13 Se $a > 1$ e k é um inteiro positivo, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

9.14 Se $a > 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

9.15 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

9.16 Se $a > 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Solução:
Se $a = 1$, ok.
Se $a > 1$, $\sqrt[n]{a} > 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + x_n \\
&\Rightarrow a = (1 + x_n)^n \geqslant 1 + nx_n \text{ (Bernoulli, Ex. 8.12)} \\
&\Rightarrow a \geqslant 1 + nx_n \\
&\Rightarrow \frac{a-1}{n} \geqslant x_n
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $x_n < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

9.17 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

9.18 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1$.

9.19 Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = 1$.

9.20 Mostre que $a_n = 5n^3 - 4n^2 + 7$ tende para infinito.

9.21 Defina a sequência (a_n) pondo $a_{n+1} = (a_n)^3 + 6$, para $n \geqslant 1$.

a) Se $a_1 = \dfrac{1}{2}$, mostre que (a_n) converge.

b) Analise a convergência para o caso em que $a_1 = \dfrac{3}{2}$.

9.22 Considere a sequência dada por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, para $n > 1$. Escreva os cinco primeiros termos dessa sequência, mostre que a mesma converge e calcule seu limite.

9.23 Dado um número positivo N e fixado um número qualquer $a_0 = a$, não nulo, seja $\left[\dfrac{a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}}}{2}\right]$, para $n > 1$. Mostre que (a_n) é decrescente a partir do segundo termo e limitada, portanto convergente. Calcule o limite de a_n.

CAPÍTULO 10

Lista 04 - Séries

10.1 Chama-se série harmônica, em geral, toda série do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nr},$$

com $r \neq 0$. Mostre que toda série desse tipo é divergente.

Solução:

Caso particular: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+3n} > \frac{1}{3+3n} = \frac{1}{3(n+1)} &= \frac{1}{3}\frac{1}{(n+1)} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{N=2}^{\infty}\frac{1}{N}}_{\text{diverge}} \end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3n}$ diverge.

Afirmação: $\displaystyle\sum_{N=2}^{\infty}\frac{1}{N}$ diverge.
De fato, $\forall k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $S_N > k$.
Vamos mostrar que $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{N=2}^{\infty}\frac{1}{N}$ também diverge.
$\forall k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $S_N > 3k \Rightarrow \dfrac{1}{3}S_n > k$.
Finalmente, resolvendo o exercício, temos

i) Se $a = r$, então

$$\frac{1}{a+nr} = \frac{1}{a+na} = \frac{1}{a(n+1)}$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+nr}$ diverge.

ii) Se $a > r$, então

$$\frac{1}{a+nr} > \frac{1}{a+na} = \frac{1}{a(n+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a(n+1)} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \text{ diverge.}$$

iii) Se $a < r$, então

$$\frac{1}{a+nr} > \frac{1}{r+nr} = \frac{1}{r(n+1)} = \frac{1}{r}\frac{1}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \text{ diverge.}$$

□

Definição 10.1 (a_n) é dita sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0, \exists N > 0 \in \mathbb{N}$ tal que
$\forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Proposição 10.2 *Se* $\sum a_n$ *é convergente então* (a_n) *converge para* 0.

Propriedades de somatório.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$

Exemplo 10.1

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)=\left(\cancel{\frac{1}{2}}-1\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n+1}-1$$

10.2 Obtenha a reduzida da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, e mostre que seu limite é 1.

Solução:
Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$
$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Analisemos

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$
$$a_n=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$
$$a_n=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$$
$$a_n=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = S_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \right) \overset{ex.}{=} 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge para 1 e sua reduzida é $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

□

10.3 Sendo $a \neq -1$, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, converge para $\dfrac{1}{a+1}$.

Solução:

Seja $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} &= \frac{A}{a+k} + \frac{B}{a+k+1} \\ &= \frac{A(a+k+1)+B(a+k)}{(a+k)(a+k+1)} \\ &= \frac{aA+kA+A+aB+kB}{(a+k)(a+k+1)} \\ &= \frac{(A+B)k+(A+aB+kB)}{(a+k)(a+k+1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+aA+aB=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+a(A+B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{1}{(a+k)}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(a+k)+1}}_{a_{k+1}} \right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{a+1} - \cancel{\frac{1}{a+2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{a+2}} - \cancel{\frac{1}{a+3}} \right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{a+n}} - \frac{1}{a+n+1} \right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1} \right) = \frac{1}{a+1}$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$ converge para $\dfrac{1}{a+1}$. □

10.4 Use o critério de Cauchy para mostrar que o termo geral de uma série convergente tende a zero.

Solução:

Queremos mostrar que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = a, a \in \mathbb{R}$.

Isto implica que (S_n) é uma sequência convergente, então (S_n) é uma sequência de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $m > n > N$, então $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Tomando $m = n+1 \Rightarrow |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} &S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} \\ &S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\Rightarrow |S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| \\ &\Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |a_{n+1} - 0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$, ou seja, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

10.5 Mostre que o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge para zero, mas que a série é divergente.

Solução:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \ldots + \log\frac{n}{n-1} + \log\frac{n+1}{n} \\
S_n &= \log\left(2.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}\ldots\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\frac{n+1}{\cancel{n}}\right) \\
S_n &= \log(n+1)
\end{aligned}
$$

Afirmação: $S_n = \log(n+1)$.

i) Para $n = 2, S_2 = \log 3$. OK

ii) Suponha válido para n, isto é, $S_n = \log(n+1)$.

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\
&= \log(n+1) + \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \log(n+1) + \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&= \log(n+2)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$. Portanto, a série diverge.

□

10.6 Use o critério de Cauchy para mostrar que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

Solução:

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge se, e somente se, existe $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ onde $S_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

Então, dado $\varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $\forall m, n > N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$.

Suponha $m > n > N$, então

$$S_m = \underbrace{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}_{S_n} + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m|$$
$$\Rightarrow S_m - S_n = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m|$$
$$\Rightarrow |S_m - S_n| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, então $T_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é uma sequência.

Lembrando: *Se dado* $\varepsilon > 0, \exists N > 0$ *tal que* $m, n > N \Rightarrow |T_m - T_n| < \varepsilon$, *então* (T_n) *é convergente.*

$$T_m = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{T_n} + a_{n+1} + \ldots + a_m$$
$$\Rightarrow T_m - T_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m$$
$$\Rightarrow |T_m - T_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m|$$

Usando a desigualdade triangular, temos

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |T_m - T_n| < \varepsilon$$

Portanto, T_m é uma sequência de Cauchy, logo (T_n) é convergente, então existe $\lim_{n\to\infty} T_n$.

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

$\square$

10.7 Calcule a reduzida da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$, e mostre que seu limite é 1.

Solução:

Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$. Temos que

$$a_n = \frac{n-1}{n!} \text{ e } a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$$

Usando o Teste da Razão, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{(n+1)!}\right)\left(\frac{n!}{n-1}\right) = \frac{n}{(n+1)(n-1)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} = 0 < 1$$

Portanto, pelo Teste da Razão, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ converge.

Note que

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \frac{k}{k(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k!}}_{a_{k+1}}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{0!} - \cancel{\frac{1}{1!}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{1!}} - \cancel{\frac{1}{2!}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} \right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)!}} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{n!}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n!} \right) = 1$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ converge para 1. □

10.8 Mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)}$, converge para $\frac{1}{2}$.

Solução:

Se fosse para mostrar somente que converge, poderíamos fazer por absolutamente convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{5}{6} - \frac{7}{12} + \frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{9}{20} + \frac{11}{30} + \ldots$$

Mostre que converge (Exercício)...

Resolvendo o exercício, iniciemos usando frações parciais, então

$$\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$
$$\Rightarrow \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{(-1)^n}{n+2} + \frac{(-1)^n}{n+3}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} + \frac{(-1)^n}{n+3} \right)$$

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + \overbrace{a_{n-1}}^{\text{n-ésimo}}$$
$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{-\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{-\frac{1}{5}} \cancel{-\frac{1}{6}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n+2}\right)$$

Afirmação: $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+2}$.

i) Para $n = 1 \Rightarrow S_1 = a_0 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{1-1}}{1+2}$. OK

ii) Suponha que vale para k,

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{k-1}}{k+2}$$

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{k-1}}{k+2}$$
$$S_{k+1} = \underbrace{a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1}}_{k \text{ termos}} + a_k$$
$$S_{k+1} = S_k + a_k$$
$$S_{k+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{k-1}}{k+2}\right) + \left(\frac{(-1)^k}{k+2} + \frac{(-1)^k}{k+3}\right)$$

Se k é par, então $(k-1)$ é impar. Implica que $(-1)^k = 1$ e $(-1)^{k-1} = -1$;
Se k é impar, então $(k-1)$ é par. Implica que $(-1)^k = -1$ e $(-1)^{k-1} = 1$.

Então, $\forall k \Rightarrow S_{k+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{\overbrace{k}^{(k+1)-1}}}{\underbrace{k+3}_{(k+1)+2}}$, então vale para $k+1$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para $\frac{1}{2}$. □

Exemplo 10.2 Verifique se $\sum_{n=1}^{\infty}(n^b a^n), 0 < a < 1, b$ fixo, converge.

Solução:
Seja $a_n = n^b a^n, 0 < a < 1$. Pelo Teste da Razão, temos

$$a_{n+1} = (n+1)^b a^{n+1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^b a^{n+1}}{n^b a^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b a$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^b a = a < 1$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}(n^b a^n)$ converge, $\forall 0 < a < 1$. □

10.9 Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}$, converge para 2.

Solução:
Temos que

$$\frac{n^2-n-1}{n!}=\frac{n(n-1)-1}{n!}=\frac{n(n-1)}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{n!}$$
$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{n!}\right)$$
$$S_n=a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}$$
$$S_n=\overbrace{\left(\frac{1}{0!}-\cancel{\frac{1}{2!}}\right)}^{a_2}+\overbrace{\left(\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)}^{a_3}+\overbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2!}}-\frac{1}{4!}\right)}^{a_4}+\overbrace{\left(\cancel{\frac{1}{3!}}-\frac{1}{5!}\right)}^{a_5}+\ldots+$$
$$+\overbrace{\left(\cancel{\frac{1}{(n-3)!}}-\cancel{\frac{1}{(n-1)!}}\right)}^{a_{n-1}}+\overbrace{\left(\cancel{\frac{1}{(n-2)!}}-\frac{1}{n!}\right)}^{a_n}+\overbrace{\left(\cancel{\frac{1}{(n-1)!}}-\frac{1}{(n+1)!}\right)}^{a_{n+1}}$$
$$S_n=1+1-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=2-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

Afirmação: $S_n=2-\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}, n\geqslant 2$. De fato,

i) $S_2=\left(1-\dfrac{1}{2!}\right)+\left(1-\dfrac{1}{3!}\right)=2-\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}$ OK

ii) Suponha válido para $n=k$,

$$S_k=2-\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$
$$S_{k+1}=\underbrace{a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{k+1}}_{S_k}+a_{k+2}$$
$$S_{k+1}=\left(2-\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)+\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)$$
$$\Rightarrow S_{k+1}=2-\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

Logo, também vale para $k+1$. Então, a afirmação é verdadeira $\forall n\geqslant 2$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 2$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para 2.

□

10.10 Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes de termos positivos, com $a_n < b_n, \forall n$. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Solução:
Note que

$$\begin{matrix} a_1 < b_1 \\ a_2 < b_2 \end{matrix} \Rightarrow a_1 + a_2 < b_1 + b_2 \Rightarrow S_2 < T_2$$

$$\begin{matrix} S_2 < T_2 \\ a_3 < b_3 \end{matrix} \Rightarrow S_2 + a_3 < T_2 + b_3 \Rightarrow S_3 < T_3$$

Indutivamente, $S_n < T_n$, onde S_n é a reduzida de a_n e T_n é a reduzida de b_n.
De fato, $S_1 < T_1$. Se $S_k < T_k$ e $a_{k+1} < b_{k+1}$

$$\Rightarrow S_k + a_{k+1} < T_k + b_{k+1} \Rightarrow S_{k+1} < T_{k+1}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{n\to\infty} T_n = b \in \mathbb{R}$$

Lembrando: Se $X_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \geqslant 0$.
Temos que S_n e T_n são sequências. E $S_n < T_n, \forall n$, então $\underbrace{T_n - S_n}_{X_n} > 0, \forall n$.

Logo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (T_n - S_n) \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n - \lim_{n\to\infty} S_n \geqslant 0 \\
&\Rightarrow b - a \geqslant 0 \\
&\Rightarrow a \leqslant b \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} T_n
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

10.11 Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ também é convergente.

Solução:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 < 1$.

Existe $N \in N$ tal que $n > N$

$$\Rightarrow a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Portanto, pelo Critério da Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge. □

10.12 Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos positivos e (b_n) uma sequência limitada de elementos positivos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

Solução:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então existe $\lim_{n\to\infty} S_n$, logo (S_n) é uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $m > n > N$ implica $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Seja $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ e $T_m = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} + \ldots + a_mb_m$

$$\Rightarrow |T_m - T_n| = |a_{n+1}b_{n+1} + \ldots + a_mb_m|$$

Assim,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m$$
$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

Mas (b_n) é limitado, logo $|b_n| < M, \forall n$.

$$\begin{array}{rcl}
b_{n+1} < M & \Rightarrow & a_{n+1}b_{n+1} < a_{n+1}M \\
\vdots & & \\
b_m < M & \Rightarrow & a_m b_n < a_m M \\
|a_{n+1}b_{n+1} + \ldots + a_m b_m| & < & |a_{n+1}M + \ldots + a_m M| \\
& < & M|a_{n+1} + \ldots + a_m| \\
& < & M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon
\end{array}$$

Então, $|T_m - T_n| < \varepsilon$.
Logo, (T_n) é de Cauchy, assim, (T_n) é convergente.
Então, existe $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$, portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. □

10.13 Sendo $a_n \geqslant 0$ e $b_n \geqslant 0$, mostre que se as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$ são convergentes, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

Solução:
Note que $(a_n - b_n)^2 \geqslant 0$.

$$\Rightarrow a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2 \geqslant 0$$
$$\Rightarrow a_n^2 + b_n^2 \geqslant 2a_n b_n$$
$$\Rightarrow \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2} \geqslant a_n b_n$$
$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right)}_{\text{converge}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a^2 n}_{\text{converge}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b^2 n}_{\text{converge}}$$

Pelo Critério da Comparação, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. □

10.14 Mostre que se $a_n \geqslant 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ também converge.

Solução:

Temos que $\frac{a_n}{n} = a_n \frac{1}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ também é convergente, pelo Ex. 10.13, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n}$ é convergente. □

10.15 Verifique qual das séries abaixo converge.

$$a)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n} \quad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} \quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \quad d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

Solução:

a) Note que

$$\log n > 1, \forall n > 10$$
$$\Rightarrow \log n . \frac{1}{n} > 1 . \frac{1}{n}, \forall n > 10$$

Pelo critério da comparação $\sum_{N=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ diverge.

b) Afirmação: $\log n < n, \forall n \Rightarrow 10^n > n, \forall n$. De fato,

i) Para $n = 2, 10^2 > 2$.

ii) Suponha válido para n, isto é, $10^n > n$.
Para $n+1, 10^{n+1} = 10^n.10 > 10n > n+1$.
Então, $\log n < n \Rightarrow \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ ($\frac{1}{n}$ é harmônica).

Pelo critério da comparação, $\sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ é divergente.

c) Temos que

$$\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}; 3/2 > 1$$

Logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge, pelo Critério da Comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ converge.

d) Vamos tentar mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Vamos tentar verificar que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \overset{?}{\Rightarrow} n > \sqrt[3]{n^2+1}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&n^3 > n^2+1, \text{ para } n > 1 \\
&\Rightarrow n > \sqrt[3]{n^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}
\end{aligned}$$

Pelo Critério da Comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ diverge.

$\square$

Revisão

Série Geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n; \text{ base fixa}$$

- Se $|c| < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ converge;
- Se $|c| > 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ diverge;

Família das Harmônicas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}; \text{ expoente fixo}$$

- Se $r \leqslant 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ diverge;
- Se $r > 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge;

Extras

Exemplo 10.3 Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, $a_n > 0$. Mostre que

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, x \in [-1, 1]$ converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução:

a) Afirmação: $(b_n) = (x^n)$ é limitada. De fato,

$$|x^n| = |x|^n$$
$$x \in [-1, 1] \Rightarrow |x| \leqslant 1 \Rightarrow |x|^n \leqslant 1$$

$\Rightarrow (x^n)$ é limitada. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge.

b) Temos que

i) Pelo Ex. 10.12, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $(b_n) = (\cos(nx))$ é limitada, pois, $\cos(nx) \in [-1,1], \forall x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge.

ii) Resolvendo pelo método de absolutamente convergente, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos(nx)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\cos(nx)| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n|\cos(nx)|$$

$$|\cos(nx)| \leqslant 1$$

$$\Rightarrow a_n|\cos(nx)| \leqslant a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n|\cos(nx)| \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{converge}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos(nx)|}_{\text{absolutamente convergente}}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge.

□

Exemplo 10.4 Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} \log n}$ converge.

Solução:

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge e $\left(\frac{1}{\log n}\right)$ é uma sequência limitada.

Portanto, pelo Ex. 10.12, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$, o que conclui a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} \log n}$.

Uma outra maneira de resolver seria por comparação. Verifique. □

CAPÍTULO 11

Lista 05 - Séries

11.1 Interprete as igualdades abaixo à luz da definição de convergência de séries de números reais.

a) $0,333... = \dfrac{1}{3}$

b) $0,999... = 1$

Solução:

a) Temos que

$$\begin{aligned} 0,333... &= 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} \\ &= 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n &\Rightarrow S_n = \frac{1}{10} + \cancel{\frac{1}{10^2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{10^n}} \\
&= \frac{1}{10}S_n = \cancel{\frac{1}{10^2}} + \cancel{\frac{1}{10^3}} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} \\
S_n - \frac{1}{10}S_n &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} \\
\frac{9}{10}S_n &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_n &= \frac{10}{9}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \\
\Rightarrow S_n &= \frac{1}{9} - \frac{1}{9.10^n} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9.10^n}\right) = \frac{1}{9} \\
&\Rightarrow 3\lim_{n\to\infty} S_n = 3.\frac{1}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b) Análogo.

□

11.2 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ em que

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & \text{, se } n \text{ é ímpar} \\ 2^{-n} & \text{, se } n \text{ é par} \end{cases}$$

é convergente.

Solução:

Seja $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = a_n, n$ é par.

Seja $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{3}\right)^n = a_n, n$ é ímpar.

$\Rightarrow a_n \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, pelo Teste da Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge. □

11.3 Mostre que as séries abaixo convergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

Solução:

a) Use Teste da Razão ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

b) Note que $a_n = ne^{-n^2} = \dfrac{n}{e^{n^2}}$, pelo Teste da Razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{(n+1)^2}}\frac{e^{n^2}}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}} = \underbrace{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{1}\overbrace{\frac{1}{e^{2n}}\frac{1}{e}}^{0}}_{0}$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{2n}}\frac{1}{e} = 0$, o produto é igual a zero, portanto, a série converge.

c) Pelo Teste da Raíz

$$\begin{aligned}
a_n &= ne^{-n} = \frac{n}{e^n} \\
\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e} \\
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

Portanto, a série converge.

□

11.4 Verifique, em cada caso abaixo, se a série dada é convergente; e, em caso afirmativo, se absoluta ou condicionalmente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k - \operatorname{sen} k}{k\sqrt{k}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2+1}$

Solução:

a) Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos 3n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos 3n|}{n^2+1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é harmônica e convergente, portanto, a série dada também é convergente.

b) Note que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Afirmação: $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{n}{n^2+1}$, de fato

$$\frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2n} = \frac{2n^2-n^2-1}{2n(n^2+1)} = \frac{n^2-1}{2n(n^2+1)} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{b_n}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Afirmação: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e a_n decrescente.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$
$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} > 0$$

De fato,

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n^2+1} - \frac{n+1}{n^2+2n+2} = \frac{n^3+2n^2+2n-n^3-n-n^2-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} =$$
$$\frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_n$ é decrescente.

Por Leibniz, a série é convergente.

c) Por Leibniz

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{n\sqrt{\frac{n}{n^2}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)\sqrt{n} - (n+1)\sqrt{n+1}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{\sqrt{(n+2)^2 n} - \sqrt{(n+1)^3}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{n^3+4n^2+4n}-\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+n^2+n}-\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{\sqrt{a+n^2+n}-\sqrt{a+1}}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

Como $n^2+n>1, \forall n$; segue que $a_n > a_{n+1}, \forall n$.

d) Usaremos convergência absoluta e desigualdade triangular.

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\cos k - \operatorname{sen} k}{k\sqrt{k}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\cos k - \operatorname{sen} k|}{k\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overbrace{|\cos k|}^{\leqslant 1}+\overbrace{|\operatorname{sen} k|}^{\leqslant 1}}{k\sqrt{k}}
$$

$$
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\cos k - \operatorname{sen} k|}{k\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^{3/2}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}
$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ é absolutamente convergente.

e)

□

11.5 A série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}+\dots$$

tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende a zero. Mostre que essa série é divergente e explique por que isto não contradiz o teorema de Leibniz.

Solução:
Temos $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge.
A série é alternada mas não contradiz Leibniz porque a série na é da forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. □

11.6 Mostre que é convergente a série obtida alternando-se os sinais dos termos da série harmônica, de modo que fiquem p termos positivos, $p \in \mathbb{N}$ fixado seguidos de p termos negativos, alternadamente.

Solução:

□

11.7 Se uma série é condicionalmente convergente, mostre que existe uma alteração da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $+\infty$.

Solução:

i) Escolha $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ positivos tais que $a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n > 1$;

ii) Escolha a'_{n+1} primeiro termo negativo, obtemos $a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + a'_{n+1}$;

iii) Escolha, na ordem, $a'_{n+2}, \ldots, a'_{n+k}$ tais que $a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + a'_{n+1} + a'_{n+2} + \ldots + a'_{n+k} > 2$.

Dado $k > 0, \exists S_n$ tal que $S_n > k$. □

11.8 Efetue uma reordenação dos termos da série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

de modo que sua soma se torne igual a zero.

Solução:
Reordenando, temos

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\frac{1}{24}+\frac{1}{7}-\ldots$$

tende a 0. □

11.9 Sejam $0 < a < b < 1$. Mostre que a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \ldots$ é convergente.

Solução:

Temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^n + b^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n + \sum_{n=1}^{\infty} b^n$.

$0 < a < b < 1$ é uma série geométrica. Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^n + b^n)$ converge. □

11.10 Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e se (b_n) é uma sequência que converge para zero, pondo $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$, mostre que (c_n) converge para zero.

Solução:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow (b_n)$ é limitada $\Rightarrow |b_n| \leqslant M$.

$$\begin{array}{rcl} |c_n| & = & |a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0| \\ & \leqslant & |a_0||b_n| + |a_1||b_{n-1}| + \ldots + |a_n||b_0| \\ & \leqslant & |a_0|M + |a_1|M + \ldots + |a_n|M \\ & \leqslant & (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|)M \end{array}$$

Pelo critério de convergência de Cauchy, mas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$
$$\Rightarrow (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|) < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$$

Portanto, a série converge. □

CAPÍTULO 12

Lista 06 - Funções

12.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, com n um inteiro positivo ímpar. Mostre que f é crescente.

Solução:

- Se $x < y, x, y$ positivos. Mostrar que $f(x) < f(y)$.

$$f(y) - f(x) = y^n - x^n = \underbrace{(y - x)}_{>0}\underbrace{(y^{n-1}x^0 + y^{n-2}x + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1})}_{>0}$$

- Se $x < y, x, y$ negativos.

$$\begin{aligned} &\overbrace{-y < -x}^{>0} \\ &\Rightarrow f(-y) < f(-x), f \text{ é impar} \\ &\Rightarrow -f(y) < -f(x) \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

- Se $x < y, x < 0$ e $y > 0$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

f é ímpar?

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n (x)^n = -1x^n = -f(x)$$

$\square$

12.2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com a e b números reais e $a \neq 0$. Mostre que f é crescente se, e somente se, $a > 0$ e que f é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

Solução:
$\Leftarrow$ Se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então

$$\begin{aligned}
&f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b \\
&f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{a}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \\
&\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \\
&\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}$$

Portanto, f é crescente.
$\Rightarrow$ Se f é crescente, então para $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\begin{aligned}
&ax_1 + b < ax_2 + b \\
&\Rightarrow ax_1 < ax_2 \\
&\Rightarrow ax_1 - ax_2 < 0 \\
&\Rightarrow a\underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} < 0 \\
&\Rightarrow a > 0
\end{aligned}$$

Mostremos, agora, que f é decrescente se, e somente se, $a < 0$.
$\Leftarrow$ Se $a < 0$ e $x_1 < x_2$, então

$$\begin{aligned}
&f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b \\
&f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{a}_{<0}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{>0} \\
&\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \\
&\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)
\end{aligned}$$

f é decrescente. $\square$

12.3 Seja $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Mostre que f é bijetiva.

Solução:

i) f é injetiva, basta fazer $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ii) f é sobrejetiva
Seja $y = f(x)$, para algum x.

$$
\begin{aligned}
& y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow y^2x^2 + y^2 = x^2 \\
& \Rightarrow y^2 = x^2(1-y^2) \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \\
& \Rightarrow \boxed{x = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}} \\
& 1 - y^2 > 0 \Rightarrow |y| < 1 \Rightarrow -1 < y < 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\forall y \in (-1, 1)$; existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$.

□

12.4 Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. f é injetiva? É sobrejetiva? Determine o conjunto imagem de f.

Solução:
A série é convergente, pois $0 < x < 1$.

$$
\begin{aligned}
& S_n = x + x^2 + \ldots + x^n \\
& xS_n = x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1} \\
& (1-x)S_n = x - x^{n+1} \\
& \Rightarrow S_n = \frac{x}{1-x} - \frac{\overbrace{x^{n+1}}^{0}}{1-x} \\
& \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}
\end{aligned}
$$

□

12.5 Se $f : D \to Y$ é crescente e bijetiva, mostre que $f^{-1} : Y \to D$ também é crescente.

Solução:
f é crescente, então se $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Devemos mostrar que sejam $y_1, y_2 \in Y, y_1 < y_2$ temos que mostrar que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Sejam $y_1, y_2 \in Y$, como f é sobrejetiva existem $x_1, x_2 \in D$ tal que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.
Se $y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$, pois f é crescente. Mas $y_1 = f(x_1) \Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1$ e $y_2 = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(y_2) = x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Logo, f^{-1} é crescente. □

12.6 Defina uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}, f^{-1}(n)$ é um conjunto com infinitos elementos.

Solução:
Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(n)$ tem infinitos elementos.
Seja $n = p_1^{r_1}.p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$, onde n é uma decomposição em fatores primos. Então, definimos $\varphi(n) = k$ e $f(1) = 1$. □

12.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant 0$. Mostre que $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$ positivo.

Solução:

$$\begin{aligned} &f(0 + 0) = f(0) + f(0) \\ &f(0) = f(0) + f(0) \\ &\Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(-x + x) = f(-x) + f(x) \\ &0 = f(-x) + f(x) \\ &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

f é ímpar.
Se $f(0) = 0 \Rightarrow f(1 + 1) = f(1) + f(1); f(2) = 0 + 0$ ou

se $f(1) = a, a \neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = 2f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = a\frac{1}{2} \ldots$

□

12.8 Se f é uma função com domínio D e se A e B são subconjuntos de D, mostre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ e } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Dê um contra-exemplo para mostrar que $f(A \cap B)$ pode ser diferente de $f(A) \cap f(B)$.

Solução:
Devemos mostrar que

i) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

ii) $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

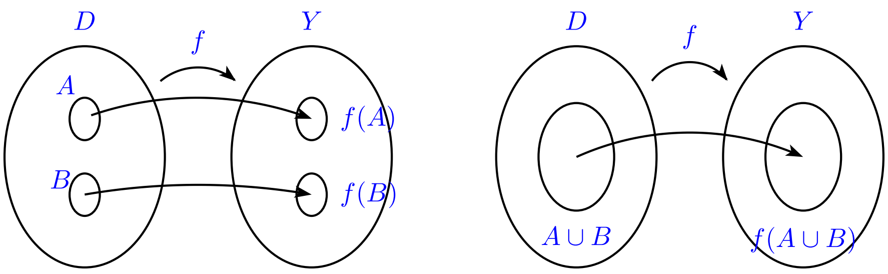


Figura 12.1

i) Seja $y \in f(A \cup B) \Rightarrow y = f(x)$, para $x \in A \cup B \Rightarrow y = f(x)$, para $x \in A$ ou $y = f(x)$, para $x \in B \Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.
   Portanto, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

ii) Seja $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B) \Rightarrow y = f(x)$, para $x \in A$ ou $y = f(x)$, para $x \in B$
   $\Rightarrow y = f(x)$, com $x \in A \cup B \Rightarrow y \in f(A \cup B)$
   Portanto, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   Portanto, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Agora, devemos mostrar que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
Seja $y \in f(A \cap B) \Rightarrow y = f(x)$, para $x \in A \cap B$
$\Rightarrow y = f(x)$, para $x \in A$ e $x \in B$.
$\Rightarrow y \in f(A)$ e $y \in f(B)$
$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.
Portanto, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Contra-exemplo:
Seja $y = x^2$,

$$\begin{aligned}
&A = (-\infty, 0]; f(A) = R_+ \\
&B = [0, +\infty); f(B) = R_+ \\
&A \cap B = \{0\}; f(A \cap B) = f(0) = 0 \\
&f(A) \cap f(B) = R_+ \\
&\Rightarrow f(A \cap B) \subsetneqq f(A) \cap f(B)
\end{aligned}$$

□

12.9 Mostre, de um modo geral, que se f é uma função com domínio D e se $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de D, valem as seguintes relações:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i) \text{ e } f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Solução:

Afirmação: $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$

i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ii) Suponha $f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f(A_i)$.

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k} \cup A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right) = \underbrace{f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)} \cup f\left(A_{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f(A_i) \cup f\left(A_{k+1}\right) = \bigcup_{i=1}^{k+1} f(A_i)$$

Então, $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i), \forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$.

$\square$

12.10 Se $f : D \to Y$ é uma função qualquer e B um subconjunto de Y, mostre que $f^{-1}(Y - B) = D - f^{-1}(B)$.

Solução:
Note que $Y - B = \{y \in Y; y \notin B\}$.
$\subseteq$) Seja $x \in f^{-1}(Y - B)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x) \in Y - B \Rightarrow f(x) \notin B \\
&\Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow x \in D - f^{-1}(B). \\
&\Rightarrow f^{-1}(Y - B) \subseteq D - f^{-1}(B)
\end{aligned}$$

$\supseteq$) Seja $x \in D - f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \\
&\Rightarrow f(x) \notin B \Rightarrow f(x) \in Y - B \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(Y - B) \\
&\Rightarrow f^{-1}(Y - B) \supseteq D - f^{-1}(B)
\end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(Y - B) = D - f^{-1}(B)$. $\square$

12.11 Se $f : D \to Y$ é uma função qualquer e se A e B são subconjuntos de Y, mostre que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Solução:
$\subseteq$) Seja $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x) \in A \cup B \\
&\Rightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)
\end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
$\supseteq$) Seja $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

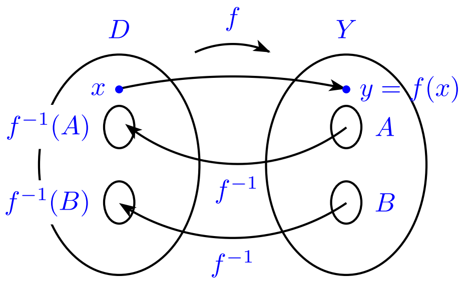


Figura 12.2

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\
&\Rightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\
&\Rightarrow f(x) \in A \cup B \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(A \cup B)
\end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(A \cup B) \supseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
Portanto, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. $\square$

12.12 Mostre que se $f : D \to Y$ é uma função injetiva e se $A \subset D$, então $f^{-1}(f(A)) = A$. Dê um contra-exemplo para mostrar que isso não é necessariamente verdade se f não for injetiva.

Solução:
$\subseteq$) Seja $x \in f^{-1}(f(A))$.
$\Rightarrow y = f(x) \in f(A)$, então, existe $x' \in A$ tal que $f(x') = y$.
Mas f é injetiva, então

$$\begin{aligned}
&y = f(x) = f(x') \\
&\Rightarrow x = x' \\
&\Rightarrow x \in A \\
&\therefore f^{-1}(f(A)) \subseteq A.
\end{aligned}$$

$\supseteq$) Se $x \in A$, então $y = f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

Contra-exemplo:
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.
Seja $A = [1, 2]$; $f(A) = [1, 4]$, mas $f^{-1}(f(A)) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. $\square$

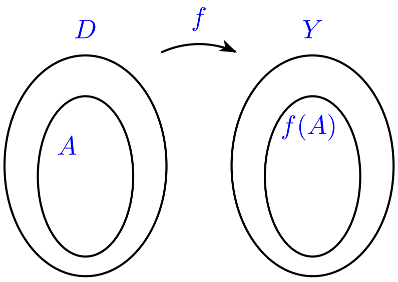


Figura 12.3: Exercício 12.12.

12.13 Mostre que se $f : D \to Y$ é uma função sobrejetiva e se $A \subset Y$, então $f(f^{-1}(A)) = A$. Dê um contra-exemplo para mostrar que isso não é necessariamente verdade se f não for sobrejetiva.

Solução:
$\subseteq$) Seja $y \in f(f^{-1}(A))$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(A); y = f(x) \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \\
&\Rightarrow y \in A \\
&\therefore f(f^{-1}(A)) \subseteq A.
\end{aligned}$$

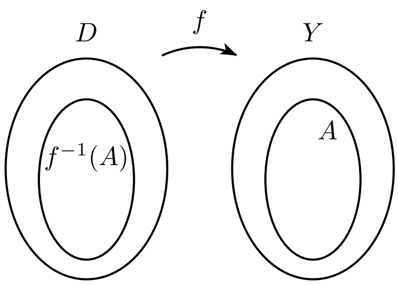


Figura 12.4

$\supseteq$) Como f é sobrejetiva, seja $y = f(x) \in A$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in f^{-1}(A)\\
&\Rightarrow y \in f(f^{-1}(A))\\
&\therefore f(f^{-1}(A)) \supseteq A\\
&\therefore f(f^{-1}(A)) = A
\end{aligned}$$

Contra-exemplo:
Se f não for sobrejetiva, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.
Tomemos $A = [-1, 1]$, logo $f^{-1}(A) = [-1, 1]$.
Seja $x \in [-1, 1] \Rightarrow f(x) = [0, 1] \Rightarrow f(f^{-1}(A)) = [0, 1] \neq A$. $\square$

12.14 Uma função $f : D \to Y$ é dita limitada quando o conjunto $f(D)$ é limitado. Neste caso definimos $\sup(f) = \sup(f(D))$ e $\inf(f) = \inf(f(D))$. Mostre que se f e g são limitadas, então:

$$\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g) \text{ e } \inf(f + g) \geqslant \inf(f) + \inf(g).$$

Solução:
Seja $A \subset B$. Note pela Fig. 12.5 que

$$\begin{aligned}
&\sup(A) \leqslant \sup(B); \inf(A) \geqslant \inf(B)\\
&A + B = \{x + y; x \in A \text{ e } y \in B\}\\
&\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)\\
&\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)
\end{aligned}$$

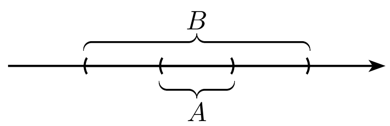


Figura 12.5

Então, sejam

$$\begin{aligned}
f :\ & D \to Y\\
& x \mapsto f(x)
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
g :\ & D \to Y\\
& x \mapsto g(x)
\end{aligned}$$

funções limitadas. Temos que

$$
\begin{aligned}
f+g \ : D &\to Y \\
x &\mapsto (f+g)(x)
\end{aligned}
$$

onde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

f é limitada, $\exists \sup(f) = \sup(f(D))$ e $\exists \inf(f) = \inf(f(D))$,
g é limitada, $\exists \sup(g) = \sup(g(D))$ e $\exists \inf(g) = \inf(g(D))$.

$$
\begin{aligned}
&f(D) = \{y = f(x); x \in D\} \\
&g(D) = \{y = g(x); x \in D\} \\
&(f+g)(D) = \{y = (f+g)(x); x \in D\} \\
&f(D) + g(D) = \{y_1 + y_2 : y_1 \in f(D) \text{ e } y_2 \in g(D)\}
\end{aligned}
$$

Afirmação: $(f+g)(D) \subset f(D) + g(D)$.
Se $y \in (f+g)(D) \Rightarrow y = (f+g)(x), x \in D$
$\Rightarrow y \in f(D) + g(D)$.
Então, assumindo

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(f+g)(D)}_{A} \quad &\subset \quad \underbrace{f(D)+g(D)}_{B} \\
\sup\left[(f+g)(D)\right] \quad &\leqslant \quad \sup\left[f(D)+g(D)\right] \\
&\leqslant \quad \sup f(D) + \sup g(D) \\
\Rightarrow \sup(f+g) \quad &\leqslant \quad \sup f + \sup g
\end{aligned}
$$

$\square$

CAPÍTULO 13

Lista 07 - Limites

Exemplo 13.1 Seja $Y = (0,1)$. Mostre que p é ponto interior de Y.

Solução:
Seja $p \in Y$ e considere $\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$. (Fig. 13.1)

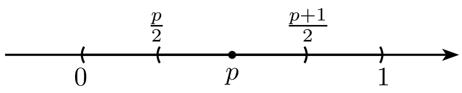


Figura 13.1

Como $\frac{p}{2} < p < \frac{p+1}{2}$, então $p \in \left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$.
Mas $0 < \frac{p}{2} < \frac{p+1}{2} < 1$, então $\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}\right) \subset Y$.
Portanto, p é ponto interior de Y. $\square$

13.1 a) Mostre que $\mathbb{R}$ e ϕ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

b) Mostre que uma união qualquer de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto.

c) Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é dito fechado se seu complementar é aberto. Mostre que uma união finita de subconjuntos fechados é um subconjunto fechado.

d) Mostre que o intervalo $[1, 2]$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

e) Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}$ contendo apenas um elemento é fechado.

f) Sejam A e B subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que $A \cap B$ é um conjunto aberto.

g) Mostre que uma intersecção infinita de subconjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto.

Solução:

a) $\mathbb{R}$ é aberto.

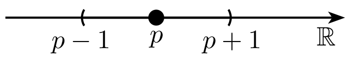


Figura 13.2

Seja $p \in \mathbb{R}$ e considere $(p-1, p+1) \subset \mathbb{R}$, $p-1 < p < p+1 \Rightarrow p \in (p-1, p+1)$.

Logo, p é ponto interior. Portanto, $\mathbb{R}$ é aberto.

b) $A_k \subset \mathbb{R}$ aberto, $\forall k$.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ é aberto}$$

Seja $p \in A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow p \in A_k$, para algum k.

Como A_k é aberto, p é ponto interior de A_k.

Então, $\exists (a, b) \subset A_k$ e $p \in (a, b)$.

Logo, $\exists (a, b) \subset A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ e $p \in (a, b)$.

p é ponto interior de A. Portanto, A é aberto.

c) Seja $A_i \subset \mathbb{R}$ fechado, $\forall i$.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

i) Vamos mostrar que $A_1 \cup A_2$ é fechado.
Devemos mostrar que $\mathbb{R} - (A_1 \cup A_2)$ é aberto.
Lembrando que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$\mathbb{R} - (A_1 \cup A_2) = (\mathbb{R} - A_1) \cap (\mathbb{R} - A_2)$$

Mas A_1 é fechado, então $(\mathbb{R} - A_1)$ é aberto. E A_2 é fechado, então $(\mathbb{R} - A_2)$ é aberto.
Pelo item (f), $(\mathbb{R} - A_1) \cap (\mathbb{R} - A_2)$ é aberto, então $\mathbb{R} - (A_1 \cup A_2)$ é aberto, logo, $A_1 \cup A_2$ é fechado.

ii) Suponha que $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ é fechado se A_i é fechado, $\forall i$.
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ fechados.

$$B = \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k}_{A} \cup A_{k+1} = A \cup A_{k+1}$$

$\Rightarrow B$ é fechado.
Portanto, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é fechado, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) A partir da Fig. 13.3, temos que $\mathbb{R} - [1, 2] = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

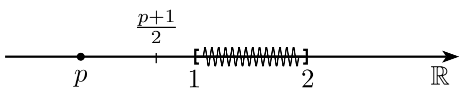


Figura 13.3

Devemos mostrar que $(i)(-\infty, 1)$ é aberto e $(ii)(2, +\infty)$ é aberto.

(i) Seja $p \in (-\infty, 1)$ e considere $I = \left(p - \dfrac{1-p}{2}, p + \dfrac{1-p}{2}\right)$.
Note que $\dfrac{p+1}{2} = p + \dfrac{1-p}{2}$.

$I \subset (-\infty, 1)$, pois $\dfrac{p+1}{2} < 1$ e $p \in I$.
Então, p é ponto interior de $(-\infty, 1)$.

(ii) Análogo.

e)

f) Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A \cap B$ é aberto. (Fig. 13.4)

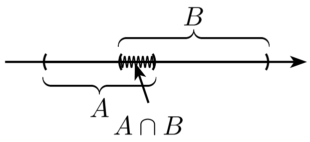


Figura 13.4

Seja $p \in A \cap B; p \in A$ e $p \in B$.
p é ponto interior de A, então $\exists (p-\varepsilon_1, p+\varepsilon_1) \subset A$ e $p \in (p-\varepsilon_1, p+\varepsilon_1)$.
E p é ponto interior de B, então $\exists (p-\varepsilon_2, p+\varepsilon_2) \subset B$ e $p \in (p-\varepsilon_2, p+\varepsilon_2)$.
Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset A \cap B$ e $p \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$.
Logo, p é ponto interior de $A \cap B$.
Portanto, $A \cap B$ é aberto.

g)

$\square$

13.2 a) Seja $\mathbb{A} = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Mostre que 0 é o único ponto de acumulação de $\mathbb{A}$ e que $\mathbb{A}$ não é um conjunto fechado.

b) Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x + 1$, existe $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x)$?

c) Se f é a função do item anterior, existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Solução:

a) **Obs**: 1 não é ponto de acumulação de A, tome $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

$$V'_\varepsilon(1) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) - \{1\} \Rightarrow V'_\varepsilon(1) \cap A = \emptyset$$

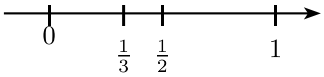


Figura 13.5

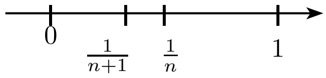


Figura 13.6

$\frac{1}{n}$ não é ponto de acumulação. Tome

$$\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow V'_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right)$$
$$\Rightarrow V'_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \cap A = \emptyset$$

Finalmente, 0 é ponto de acumulação. Queremos mostrar que $\forall \varepsilon > 0, V'_\varepsilon(0) \cap A \neq \emptyset$.

Seja $V'_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, pelo princípio Arquimediano, dado $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{x}$.

Dado $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

Então, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Implica $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\frac{1}{n} \neq 0$.

Portanto, $V'_\varepsilon(0) \cap A \neq \emptyset$, pois $\frac{1}{n} \in V'_\varepsilon(0) \cap A$.

b) Não. Pois $\frac{1}{3}$ não é ponto de acumulação.

c) $|f(x) - L| = |x + 1 - 1| = |x|$

Tome $\delta = \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x + 1 - 1| = |x| < \delta = \varepsilon$.

□

Proposição 13.1 *Seja $f : D \to Y$ e a um ponto de acumulação de D.*
$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ *para toda sequência* (x_n), $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

13.3 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \text{ é irracional} \\ x & \text{, se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, porém, não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$.

Solução:
Note que $f(\sqrt{2}) = 0; f(2) = 2; f(0) = 0, 0 \in \mathbb{Q}$. E $g(3) = 0; g(0) = 1$.
Seja

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, se } x \in \mathbb{Q}^* \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
Se $x \in \mathbb{R}$ e $0 < |x - 0| < \delta$, então
$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ ou
$x \in \mathbb{Q}$ e $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| = |x - 0| = 0 < \delta = \varepsilon$.
$\Rightarrow$ se $x \in \mathbb{R}$ e $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$
Se $x \in \mathbb{R}$ e $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |g(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Agora, devemos mostrar que $\nexists \lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$. Usemos a Prop. 13.1.

Seja (x_n) uma sequência de números irracionais, onde $x_n \to 0, x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então

$$g(f(x_n)) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = 1$$

Seja (y_n) uma sequência de números racionais, onde $y_n \to 0, y_n \in \mathbb{Q}^*$, então

$$g(f(y_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(y_n)) = 0$$

Obtemos limites diferentes para $n \to \infty$, portanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$. $\square$

13.4 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x = 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \end{cases}$$

Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Solução:

□

Dica: Para resolver os exercícios de limites devemos encontrar uma constante real c, tal que, para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$,

$$|f(x) - L| < c|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{c} = \delta$$

Então, tome $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{c}\right\}$.

13.5 Usando a definição, mostre que

a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{5}{x - 1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x + 1} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \forall a \in D$

Solução:

a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{5}{x - 1} = 1$

Rascunho:

$$|f(x) - L| = \left|\frac{5}{x - 1} - 1\right| = \left|\frac{5 - x + 1}{x - 1}\right| = \left|\frac{6 - x}{x - 1}\right| = \frac{|6 - x|}{|x - 1|} = \frac{|x - 6|}{|x - 1|} = \frac{1}{|x - 1|}\,|x - 6|$$

Considere o número 6 e o intervalo 1 na Fig. 13.7

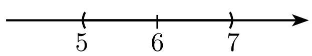


Figura 13.7

Se $\delta = 1, 5 < x < 7$.

Se $5 < x$, então

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 5-1<x-1\\
&\Rightarrow 4<x-1\\
&\Rightarrow \frac{1}{x-1}<\frac{1}{4}\\
&\Rightarrow \frac{1}{|x-1|}<\frac{1}{4}\\
&\Rightarrow |f(x)-L|=\frac{1}{|x-1|}|x-6|<\frac{1}{4}|x-6|<\varepsilon\\
&\Rightarrow |x-6|<4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Então, tome $\delta=\min\{1,4\varepsilon\}$.

Dado, $\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que $0<|x-6|<\delta$, temos

$$|f(x)-1|<\frac{1}{4}|x-6|<\frac{1}{4}\delta<\frac{1}{4}4\varepsilon=\varepsilon$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

Rascunho:

$$|f(x)-L|=\left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x-x-1}{2(x+1)}\right|=\left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right|=\frac{|x-1|}{2\,|x+1|}=\frac{1}{2}\frac{1}{|x+1|}\,|x-1|$$

Considere o número 1 e o intervalo 1 na Fig. 13.8

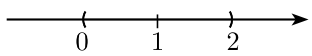


Figura 13.8

Tome $\delta=1$, então

$$|x-1|<\delta\Rightarrow|x-1|<1\Rightarrow 0<x<2.$$

Se $x>0$, então

$$\Rightarrow x+1>1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}<1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|x+1|}<1$$
$$\Rightarrow |f(x)-L| = \frac{1}{2}\frac{1}{|x+1|}|x-1| < \frac{1}{2}.1.|x-1| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-1| < 2\varepsilon.$$

Então, tome $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$.

Dado, $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta$, temos

$$|f(x)-L| < \frac{1}{2}|x-1| < \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}2\varepsilon = \varepsilon$$

c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \forall a \in D$

Note que $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|$, pois, $(\sqrt{x}-\sqrt{a})\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

$$\Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}|x-a|$$

Note que $\sqrt{a} > 0$ e $\sqrt{x} > 0, \forall x \in D$.

$$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{a} > \sqrt{a}+0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ constante}$$
$$\Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}|x-a| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-a| < \sqrt{a}\varepsilon$$

Tome $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$. Então, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \varepsilon$.

De fato,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \frac{1}{\sqrt{a}}\delta < \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a}\varepsilon = \varepsilon.$$

Devemos mostrar ainda que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.

$$|\sqrt{x}-0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon^2 \Rightarrow |x-0| < \varepsilon^2$$

Tome $\delta = \varepsilon^2$, então dado $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-0| < \varepsilon$. De fato,

$$0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x}-0| < \varepsilon$$

$\square$

Exemplo 13.2 Mostre que $\lim\limits_{x\to 3} x^2+1 = 10$.

Solução:
Rascunho:

$$|f(x)-L| = |x^2+1-10| = |x^2-9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3|$$

Considere o número 3 e o intervalo 1 na Fig. 13.9

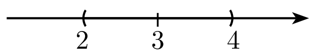


Figura 13.9

Tome $\delta = 1$, temos

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4.$$

Se $x < 4$, então

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x+3 < 7\\
&\Rightarrow |x+3| < 7\\
&\Rightarrow |f(x)-L| = |x+3||x-3| < 7|x-3| < \varepsilon\\
&\Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}.
\end{aligned}$$

Então, tome $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$.
Dado, $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x-3| < \delta$, temos

$$|f(x)-10| < 7|x-3| < 7\delta < 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

$\square$

Exemplo 13.3 Mostre que $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{5}$.

Solução:
Rascunho:

$$|f(x) - L| = \left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{5-x-1}{2(x+1)}\right| = \frac{|4-x|}{5\,|x+1|} = \frac{1}{5}\frac{1}{|x+1|}\,|x-4|$$

Considere o número 4 e o intervalo 1 na Fig. 13.10

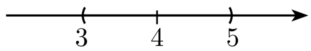


Figura 13.10

Tome $\delta = 1$, temos

$$|x-4| < \delta \Rightarrow |x-4| < 1 \Rightarrow -1 < x-4 < 1 \Rightarrow 3 < x < 5.$$

Se $x > 3$, então

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x+1 > 4\\
&\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{4}\\
&\Rightarrow \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{4}\\
&\Rightarrow |f(x)-L| = \frac{1}{5}\frac{1}{|x+1|}|x-4| < \frac{1}{5}\frac{1}{4}|x-4| < \varepsilon\\
&\Rightarrow |x-4| < 20\varepsilon.
\end{aligned}$$

Então, tome $\delta = \min\{1, 20\varepsilon\}$.
Dado, $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x-4| < \delta$, temos

$$\left|f(x) - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{20}|x-4| < \frac{1}{20}\delta < \frac{1}{20}20\varepsilon = \varepsilon$$

□

13.6 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1 & , \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ para algum $a \in \mathbb{R}$?

Solução:
Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a, x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

$$f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$$

Seja (y_n) uma sequência tal que $y_n \to a, y_n \in \mathbb{Q}$.

$$f(y_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1$$

Como obtemos limites diferentes quando $x \to a$, então o limite não existe. $\square$

13.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1 - x & , \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

Mostre que existe $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para algum $a \neq \dfrac{1}{2}$?

Solução:
Afirmação: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Dado, $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in \mathbb{R}$ e $0 < \left| x - \dfrac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Se $x \in \mathbb{Q}$,

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| (1 - x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - x \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Tome $\delta = \varepsilon$, então se $x \in \mathbb{Q}$ e $0 < \left| x - \dfrac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Tome $\delta = \varepsilon$, então se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $0 < \left| x - \dfrac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Portanto, se $x \in \mathbb{R}$ e $0 < \left| x - \dfrac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Agora, mostremos que não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $a \neq \dfrac{1}{2}$.
Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a, x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então

$$f(x_n) = x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Seja (y_n) uma sequência tal que $y_n \to a, y_n \in \mathbb{Q}$, então

$$f(y_n) = 1 - y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1 - a$$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe, então $a = L$ e $1 - a = L$.
$\Rightarrow a = 1 - a \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$
Portanto, para $a \neq \dfrac{1}{2}$ temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe. $\square$

13.8 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. É possível definir $f(0)$ de modo que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Solução:
Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a, x_n \geqslant 0$, então

$$f(x_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$$

Seja (y_n) uma sequência tal que $y_n \to a, y_n < 0$, então

$$f(y_n) = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$$

Portanto, o limite não existe, pois se existisse seria único.
Além disso, não é possível definir $f(0)$, pois $x \to 0$ significa que ou $x > 0$ ou $x < 0$ mas se $x > 0 \Rightarrow f(x) \to 1$ e se $x < 0 \Rightarrow f(x) \to -1$. Portanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. $\square$

13.9 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

Mostre que, para todo $c \in [-1, 1]$, existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Solução:
Para $g(x) = \operatorname{sen} x, c \in [-1, 1], \exists\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}\theta = c$.

$$\begin{aligned} & x_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi} \to 0 \\ & f(x_n) = \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi) = \operatorname{sen}\theta = c \\ & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \end{aligned}$$

□

13.10 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$, em que $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Mostre que, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe. Determine o conjunto imagem de f.

Solução:
Para construirmos o gráfico, notemos que:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & -3 \leqslant x < -2 \Rightarrow y = [x] = -3 \\ & -2 \leqslant x < -1 \Rightarrow y = [x] = -2 \\ & -1 \leqslant x < 0 \Rightarrow y = [x] = -1 \\ & 0 \leqslant x < 1 \Rightarrow y = [x] = 0 \\ & 1 \leqslant x < 2 \Rightarrow y = [x] = 1 \\ & 2 \leqslant x < 3 \Rightarrow y = [x] = 2 \\ & 3 \leqslant x < 4 \Rightarrow y = [x] = 3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

A imagem de f é $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{Z}$.
A partir da Fig. 13.12, $x \in (a, a+1) \Rightarrow f(x) = a$ e $x \in (a-1, a) \Rightarrow$.
Se (x_n) é uma sequência tal que $x_n \to a$ e $x_n \in (a, a+1)$, então $f(x_n) = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

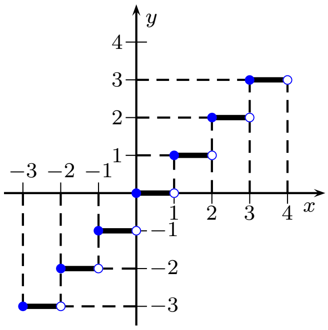


Figura 13.11: Máximo inteiro.

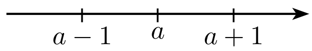


Figura 13.12

Se (y_n) é uma sequência tal que $y_n \to a$ e $y_n \in (a-1, a)$, então $f(y_n) = a-1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a-1$.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe, então $a = L$ e $a - 1 = c$

$\Rightarrow a = a - 1 \Rightarrow 0 = -1$. Absurdo.

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x), a \in \mathbb{Z}$ não existe. □

CAPÍTULO 14

Lista 08 - Continuidade

Os exercícios a seguir referem-se à página 166 do livro "Análise Matemática para Licenciatura" de Geraldo Ávila.

14.1 Faça a demonstração do Teorema 6.24 no caso $f(a) > f(b)$.

14.2 Prove que a equação $x^4 + 10x^3 - 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais. Use uma calculadora científica para determinar uma dessas raízes com a aproximação de duas casas decimais.

14.3 Prove que um polinômio de grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais, contando as multiplicidades.

Solução:
Suponha que todo polinômio $P(x)$ com grau ímpar possua $2k$ raízes.

$$P(x) = (x - r_1) \ldots (x - r_{2k}) q_1(x); \mathrm{gr}(q_1) \text{ é ímpar}$$

$$P(x) = (x - r_1) \ldots (x - r_{2k}) \underbrace{(x - s_1) \ldots (x - s_{2p}) q_2(x)}_{q_1(x)}; \mathrm{gr}(q_2) \text{ é ímpar}$$

Seguindo esse raciocínio, obtemos

$$P(x) = \underbrace{(x - r_1)\dots(x - r_{2k})(x - s_1)\dots(x - s_{2p})\dots}_{\text{par raízes}} q_t(x); \mathrm{gr}(q_t) = 1$$

Mas q_t possui uma raiz, então pelo T.V.I., $P(x)$ possui uma quantidade ímpar de raizes. Absurdo. $\square$

Teorema 14.1 *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua assume valores máximo e mínimo nesse intervalo.*

14.4 Prove que se n é par, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ assume um valor mínimo m. Em consequência, prove que $p(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas se $a > m$ e nenhuma se $a < m$.

Solução:

Note que $f(x) = x^n \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \dots + \dfrac{a_0}{x^n}\right)$. Logo, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Escolha $y_0 > 0$ tal que $y_0 \in \mathrm{Im}(f)$, isto é, $x_0 \in \mathbb{R}; f(x_0) = y_0 > 0$.

Para este $y_0 > 0, \exists b > 0$ tal que se $x > b$, então $f(x) > y_0$, pois $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Além disso, para $y_0 > 0, \exists a < 0$ tal que se $x < a$, então $f(x) > y_0$.

Então, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assume valor mínimo, pelo Teo. 14.1, seja m esse mínimo; m é mínimo global, pois $m \leqslant y_0$ e se $x \notin [a, b], f(x) > y_0 \Rightarrow f(x) > m$.

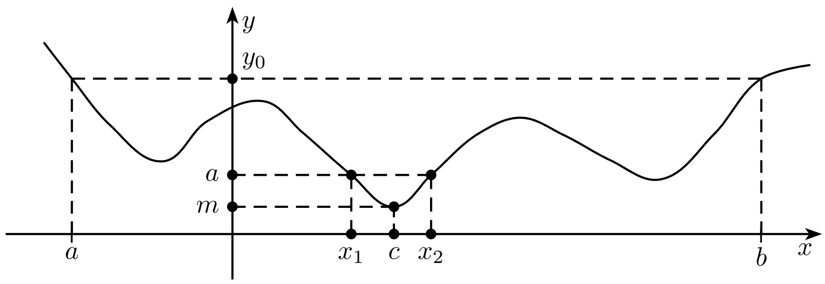


Figura 14.1

Agora, como m é o mínimo de f, isto é, $f(x) \geqslant m, \forall x \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que se $a > m$, $f(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas.

Suponha que $m = f(c), c \in \mathbb{R}$. Escolha $r_1 > c$ tal que $f(r_1) > a$ e $r_2 < c$ tal que $f(r_2) > a$.

Note que $f(c) < a < f(r_1)$, então pelo T.V.I., $\exists x_1 \in (c, r_1)$ tal que $f(x_1) = a$. E $f(c) < a < f(r_2)$, então pelo T.V.I., $\exists x_2 \in (r_2, c)$ tal que $f(x_2) = a$.

Portanto, $f(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas se $a > m$.

Se $a < m, f(x) = a$ não admite solução, pois m é o valor mínimo da função.

$\square$

14.5 Prove que se um polinômio de grau n tiver r raízes, contando as multiplicidades, então $n - r$ é par.

Solução:
Seja $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio com r raízes reais e $\text{gr}(P) = n$.

$$P(x) = \underbrace{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_r)}_{r \text{ fatores}} q(x); \text{gr}(q) = n - r$$

q possui raiz real?
Se s é raiz de q, então

$$q(x) = (x - s)q_1(x)$$

Absurdo. Pois $P(x)$ teria $r + 1$ raizes reais. Então, q não possui raiz real, ou seja, q possui $n - r$ raizes complexas, portanto, $n - r$ é par, pois se $z \in \mathbb{C}$ é raiz de $q, \overline{z}$ também é. $\square$

14.6 Prove que todo número $a > 0$ possui raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

Solução:
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Note que $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 0, 0$ é o mínimo de f.

Dado $a > 0$, escolha $r_1 > 0$ tal que $f(r_1) > a$ e $r_2 < 0$ tal que $f(r_2) > a$, pelo T.V.I., existe $x_1 \in (0, r_1)$ tal que $f(x_1) = a$ e $x_2 \in (r_2, 0)$ tal que $f(x_2) = a$.

Portanto, x_1 e x_2 são raizes quadradas de a. $\square$

14.7 Prove que todo número $a > 0$ possui uma raiz n-ésima positiva; e se n for par, possuirá também uma raiz n-ésima negativa.

Solução:
b é dito raiz n-ésima de a se

$$b^n = a; (a = \sqrt[n]{b})$$

Note que $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$.
Dado $a > 0$, escolha $x_1 > 0$ tal que $x_1^n > a$. Isso existe, pois $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$.
Temos, para a função $f(x) = x^n$, que $f(0) = 0$ e $f(x_1) = x_1^n$.
Logo, $f(0) < a < f(x_1)$, pelo TVI, existe $b \in (0, x_1)$ tal que $f(b) = a \Rightarrow b^n = a$.
Portanto, b é raiz n-ésima de a.
Além disso, se n for par,

$$b^n = (-b)^n = a$$

ou seja, possui uma raiz n-ésima negativa. $\square$

14.8 Seja f uma função contínua num intervalo, onde ela é sempre diferente de zero. Prove que f é sempre positiva ou sempre negativa.

Solução:

Se f for positiva e negativa, ou seja, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Então, pelo T.V.I., existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Absurdo, pois $f(x) \neq 0, \forall x$.

Portanto, f é positiva ou negativa. $\square$

14.9 Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que existe um número c entre a e b, tal que $f(c) = g(c)$. Faça um gráfico para entender bem o que se passa.

Solução:

Seja $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} &h(a) = f(a) - g(a) \\ &h(b) = f(b) - g(b) \\ &\Rightarrow h(a) < 0 < h(b) \end{aligned}$$

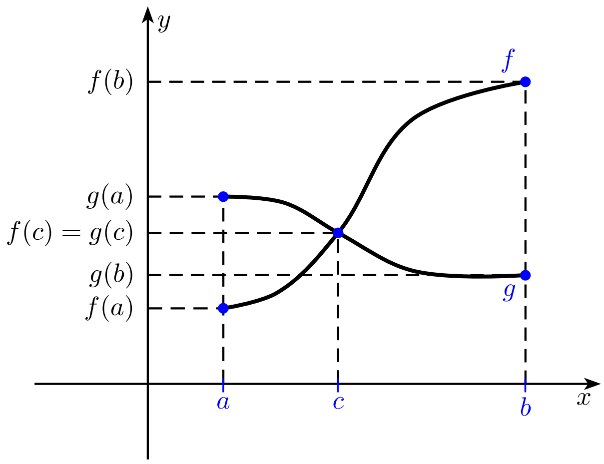


Figura 14.2

Pelo T.V.I., existe $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$.

$$h(c) = 0$$
$$\Rightarrow f(c) - g(c) = 0$$
$$\Rightarrow f(c) = g(c)$$

□

14.10 Seja f uma função contínua no intervalo $[0,1]$, com valores nesse mesmo intervalo. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. Interprete este resultado geometricamente.

Solução:
Seja $g(x) = x, x \in [0,1]$. Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, tome $c = 0$ ou $c = 1$.

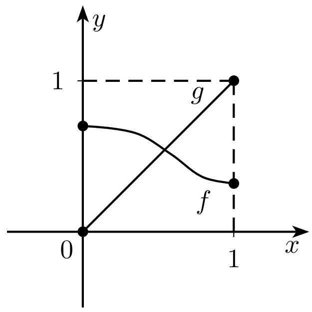


Figura 14.3

Caso contrário, ($f(0) \neq 0$ ou $f(1) \neq 1$). Assim, da hipótese, $0 < f(0) < 1$ e $0 < f(1) < 1$.

Considere $h(x) = f(x) - g(x), h$ é contínua em $[0,1]$.

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0 \text{ e}$$
$$h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - 1 < 0$$

Pelo T.V.I., existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = 0$.

$$\Rightarrow h(c) = f(c) - g(c) = 0$$
$$\Rightarrow f(c) - c = 0$$
$$\Rightarrow f(c) = c$$

□

14.11 Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. Interprete este resultado geometricamente.

Solução:
Seja $g(x) = 1 - x, x \in [0,1]$. Se $f(0) = 1$ ou $f(1) = 0$, tome $c = 0$ ou $c = 1$.

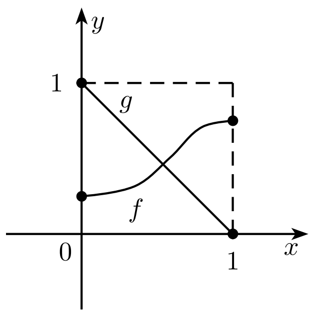


Figura 14.4

Caso contrário, $0 < f(0) < 1$ e $0 < f(1) < 1$.
Considere $h(x) = f(x) - g(x), h$ é contínua em $[0,1]$.

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - 1 + 0 < 0 \text{ e}$$
$$h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - 1 + 1 > 0$$

Pelo T.V.I., existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = 0$.

$$\Rightarrow h(c) = f(c) - g(c) = 0$$
$$\Rightarrow f(c) - 1 + c = 0$$
$$\Rightarrow f(c) = 1 - c$$

$\square$

14.12 Seja f uma função contínua no intervalo $[0,1]$, com $f(0) = f(1)$. Prove que existe um número $c \in [0,1/2]$ tal que $f(c) = f(c+1/2)$.

Solução:
Sejam $g(x) = f(x+1/2)$ e $h(x) = g(x) - f(x), h$ é contínua em $[0,1/2]$.

$$h(0) = g(0) - f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \text{ e}$$
$$h\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow h(0) = -h\left(\frac{1}{2}\right)$$

Pelo T.V.I., existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = 0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g(c) - f(c) = 0 \\ &\Rightarrow f(c) = g(c) \\ &\Rightarrow f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

□

14.13 Complete a demonstração do Teorema 6.30, provando que g é contínua em b, na hipótese de que b seja uma das extremidades do intervalo J. Faça também a demonstração completa do teorema no caso em que f (e, consequentemente, também g) é uma função decrescente.

14.14 Sejam f e g funções crescentes num intervalo I, onde $f(x) \leqslant g(x)$. Prove que $f^{-1}(y) \geqslant g^{-1}(y)$ para todo $y \in f(I) \cap g(I)$.

Solução:
Suponha $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$.
Aplicando f, temos $f(f^{-1}(y)) < f(g^{-1}(y))$, pois f é crescente.

$\Rightarrow y < f(g^{-1}(y)) \leqslant g(g^{-1}(y))$, pois $f(x) \leqslant g(x)$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y < g(g^{-1}(y)) \\ &\Rightarrow y < y \end{aligned}$$

Absurdo. Portanto, $f^{-1}(y) \geqslant g^{-1}(y)$.

□

14.15 Prove que a imagem de um intervalo aberto por uma função contínua injetiva é um intervalo aberto. Dê exemplos em que o intervalo-domínio é limitado, mas sua imagem é ilimitada.

Solução:
Devemos mostrar que se $x \in (a, b)$, então $f(x) \in (c, d)$.

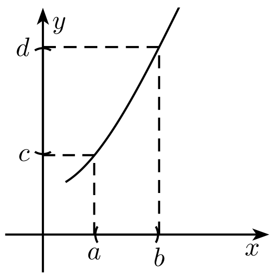


Figura 14.5

Se $x \in [a, b], f$ é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \neq f(b)$, pois f é injetiva. Pelo T.V.I., $f(x) \in [f(a), f(b)]$.

Suponha f crescente, então $a \leqslant x \leqslant b$, T.V.I. $\Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

Se $x \in (a, b)$, então $a < x < b$. Como f é injetiva, se $a < x < b$, então $f(x) \neq f(a)$ e $f(x) \neq f(b) \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)$.

Portanto, f leva um intervalo aberto em outro aberto.

Exemplo, seja $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

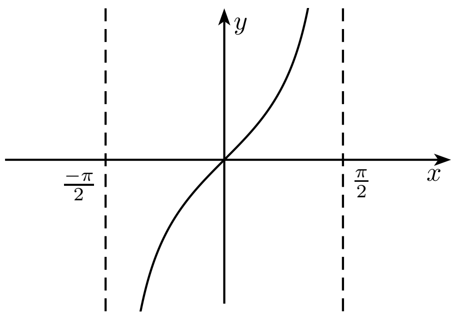


Figura 14.6: Função tangente.

$\square$

14.16 Dê exemplo de uma função cujo domínio não seja nem fechado nem limitado, mas tenha valores máximo e mínimo.

Solução:
As funções seno e cosseno. $\square$

14.17 Prove que $f(x) = x$ se x for racional, e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional, é contínua em $x = 1/2$ e somente neste ponto.

Solução:
Afirmação: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Dado, $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que se $x \in \mathbb{R}$ e $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Se $x \in \mathbb{Q}$,

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|(1 - x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - x\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Tome $\delta = \varepsilon$, então se $x \in \mathbb{Q}$ e $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Tome $\delta = \varepsilon$, então se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Portanto, se $x \in \mathbb{R}$ e $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Além disso, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{1}{2} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, portanto f é contínua em $x = \dfrac{1}{2}$.

Agora, mostremos que não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a, x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então

$$f(x_n) = x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Seja (y_n) uma sequência tal que $y_n \to a, y_n \in \mathbb{Q}$, então

$$f(y_n) = 1 - y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1 - a$$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe, então $a = L$ e $1 - a = L$.

$\Rightarrow a = 1 - a \Rightarrow = \dfrac{1}{2}$

Portanto, para $a \neq \dfrac{1}{2}$ temos que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe. $\square$

14.18 Considere a função f assim definida: $f(x) = -x$ se x for racional e $f(x) = 1/x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e mostre que ela é uma bijeção descontínua em todos os pontos.

Solução:

- f é injetiva.

  1. Dado $x, y \in \mathbb{Q}$, suponha

  $$f(x) = f(y)$$
  $$-x = -y$$
  $$\boxed{x = y}$$

  2. Dado $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, suponha

  $$f(x) = f(y)$$
  $$\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$
  $$\boxed{x = y}$$

  3. Dado $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, suponha

  $$x \neq y$$
  $$f(x) = -x \in \mathbb{Q} \text{ e}$$
  $$f(y) = \frac{1}{y} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
  $$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- f é sobrejetiva.
  Dado $y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

  1) Seja $y \in \mathbb{Q}$. $f(x) = y$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
     - Se $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = -x \Rightarrow x = -y$, então $-y \in \mathbb{Q}$.
     - Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = y \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$. Absurdo, pois $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\dfrac{1}{y} \in \mathbb{Q}$.

2) Seja $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

- Se $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = f(x) = -x \Rightarrow x = -y$. Absurdo, pois $x \in \mathbb{Q}$ e $-y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
- Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow y = f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}, \forall y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Portanto, $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \subset \mathrm{Im}(f)$.

Conclusão: f é sobrejetiva.

- f é contínua.

Verifiquemos se existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Suponha que exista $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Seja $x_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) = -x_n$.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (-x_n) = -\lim_{n \to \infty} x_n = -a$$

Seja $y_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $y_n \to a \Rightarrow f(y_n) = \dfrac{1}{y_n}$.

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} 1}{\lim_{n \to \infty} y_n} = \frac{1}{a}$$

Então, $-a = \dfrac{1}{a} \Rightarrow a^2 = -1$. Absurdo, pois $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \geqslant 0$.

Logo, $\nexists \lim_{x \to a} f(x), \forall a \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 14.1 Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

Exemplo 14.2 Seja $f(x)$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & , \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que f é contínua apenas em $x = 0$ e $|f(x)|$ é contínua em todo ponto.

Solução:

i) $f(0) = 0$

ii) Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. E se $x \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x) x 0$.

iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Portanto, f é contínua em 0.

Afirmação: $f(x)$ não é contínua para $x \neq 0$.
Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a$ e $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow f(x_n) = -a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -a$$

Seja (y_n) uma sequência tal que $y_n \to a$ e $y_n \in \mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow f(y_n) = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = a$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n)$$
$$\Rightarrow -a = a$$
$$\Rightarrow a = 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe para $a \neq 0$.

Além disso,

$$|f(x)| = \begin{cases} |x| & , \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ |-x| = |x| & , \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f(x)| = |x|, \text{ se } x \in \mathbb{R}$$

i) $f(0) = |0| = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)|$

- se $a > 0$, então $\lim\limits_{x \to a^+} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a^+} x = a$
- se $a < 0$, então $\lim\limits_{x \to a^-} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a^-} -x = -a$
- se $a = 0$, então $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

□

Exemplo 14.3 Seja $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Ache os pontos de máximo e mínimo de f se existir.

Solução:
Os pontos críticos de f são

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ & \Rightarrow 2ax + b = 0 \\ & \Rightarrow 2ax = -b \\ & \Rightarrow x_1 = \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

- Se $a > 0$ e $x > x_1, f$ é crescente em $[x_1, +\infty) \Rightarrow f(x) > f(x_1)$;
  e se $x < x_1$, e f é decrescente em $(-\infty, x_1], \Rightarrow f(x) > f(x_1)$.
  $\Rightarrow f(x) \geqslant f(x_1), \forall x \in D(f)$.
  Portanto, x_1 é ponto de mínimo.
- Se $a < 0$ e $x < x_1, f$ é crescente em $(-\infty, x_1] \Rightarrow f(x) < f(x_1)$;
  e se $x > x_1$, e f é decrescente em $[x_1, +\infty), \Rightarrow f(x) < f(x_1)$.
  $\Rightarrow f(x) \leqslant f(x_1), \forall x \in D(f)$.
  Portanto, x_1 é ponto de máximo.

□

14.19 [1] Prove, pela definição de limite, que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua para todo $x \neq 0$.

Solução:
Sendo $a \neq o$,

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{ax}\right| \\
&= \frac{|a-x|}{|ax|} = \frac{|x-a|}{|ax|} \\
&= \frac{1}{|a||x|}|x-a|
\end{aligned}
$$

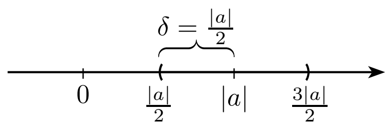


Figura 14.7

Tome $\delta = \dfrac{|a|}{2} \Rightarrow \dfrac{|a|}{2} < |x| < \dfrac{3|a|}{2}$.
Fazendo $|x| > \dfrac{|a|}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x|} < \dfrac{2}{|a|}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a||x|}|x-a| < \frac{1}{|a|}\frac{2}{|a|}|x-a| < \varepsilon$$

Tome $\delta = \min\left\{\dfrac{|a|}{2}, \dfrac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\}$.
Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $|x-a| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \dfrac{2}{|a|^2}\dfrac{|a|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$

□

[1]Análise Matemática para Licenciatura - pág. 148.

14.20 [2] Prove que se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(x) \geqslant 0$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em $x = a$.

Solução:
Note que $f(x) = g^2(x)$. Sabemos que f é contínua em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} g^2(x) = g^2(a).$$

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |g^2(x) - g^2(a)| < k\varepsilon$.
Note que $|g^2(x) - g^2(a)| = |g(x) + g(a)||g(x) - g(a)|$.
Afirmação: $g(x)$ é limitada numa vizinhança de a.
f é limitada numa vizinhança de a, pois existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é limitada numa vizinhança de a.
Logo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| < M \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x) + g(a)| < K$. Então,

$$|g^2(x) - g^2(a)| = |g(x) + g(a)||g(x) - g(a)| < k|g(x) - g(a)| < k\varepsilon$$
$$\Rightarrow |g(x) - g(a)| < k\frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$
$\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.
Portanto, g é contínua em $x = a$.

$\square$

[2] Análise Matemática para Licenciatura - pág. 149.

CAPÍTULO 15

Lista 09 - Continuidade e Derivação

15.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |2x + 1| - |-x - 7|$$

a) Mostre, usando a definição, que f é contínua em todos os pontos do domínio.

b) f assume valor máximo? E mínimo?

c) f é injetora? Sobrejetora? Qual é o conjunto imagem de f?

Solução:
Note que

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & , \text{se } 2x+1 \geqslant 0 \\ -2x-1 & , \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases}$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & , \text{se } x \geqslant -\dfrac{1}{2} \\ -2x-1 & , \text{se } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$|-x-7| = \begin{cases} -x-7 & , \text{se } -x-7 \geqslant 0 \\ x+7 & , \text{se } -x-7 < 0 \end{cases}$$

$$|-x-7| = \begin{cases} -x-7 & , \text{se } x \leqslant -7 \\ x+7 & , \text{se } x > -7 \end{cases}$$

	-7	$-\frac{1}{2}$
$-2x-1$	$-2x-1$	$2x+1$
$-x-7$	$x+7$	$x+7$
$-x+6$	$-3x-8$	$x-6$

Figura 15.1

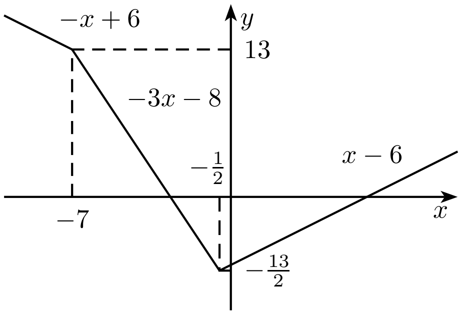


Figura 15.2: Gráfico de f

a) Se $a < -7$, então $\lim_{x \to a}(-x+6) = -a+6 = f(a)$, o mesmo vale para os outros intervalos, que são $\left(-7, -\dfrac{1}{2}\right)$ e $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

b) A partir da Fig. 15.2, podemos observar que f assume valor mínimo em $x = -\dfrac{1}{2}$. E não assume valor máximo.

c) $\text{Im}(f) = \left[-\dfrac{13}{2}, +\infty\right)$

□

15.2 Em cada afirmativa abaixo, prove, se for verdadeira, ou dê um contra-exemplo, em caso falso.

a) Se f é contínua em a, então f é derivável em a.

b) Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

c) Se f assume um valor máximo ou mínimo em $x = a$, então f é derivável em a.

Solução:

a) Falso. Seja $f(x) = |x|$.

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

Portanto, f é contínua.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Se $x > 0$, então $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

Se $x > 0$, então $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$

Como os limites laterais são diferentes, então o limite não existe em $x = 0$, ou seja, não existe a derivada em $x = 0$.

b) Teorema 6.3.

c) Falso. Tome $f(x) = |x|$.

f assume valor mínimo em $x = 0$, mas não é derivável neste ponto.

□

15.3 Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Mostre que a região compreendida pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$ pela reta perpendicular à tangente nesse mesmo ponto e pelo eixo das abscissas é um triângulo isósceles.

Solução:
A derivada de f no ponto $(1, f(1))$ é

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x} \\ f'(1) &= -1 \end{aligned}$$

A equação da reta tangente no ponto $(1, f(1))$ é

$$\begin{aligned} &y - f(1) = f'(1)(x - 1) \\ &y - 1 = -1(x - 1) \\ &\boxed{y = -x + 2} \end{aligned}$$

Se $f'(1) = -1$, então $\text{tg}\theta = -1 \Rightarrow \theta = 135°$.
Logo, $\alpha = 45°$. Como $\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 45°$.
Portanto, o triângulo é isósceles.
Além disso, n é a reta perpendicular a reta t, então $m_t.m_n = -1$
$\Rightarrow -1.m_n = -1 \Rightarrow m_n = 1$.
Como a inclinação da reta n é 1 e esta reta passa no ponto $(1, 1)$, então a equação da reta n é $y = x$. □

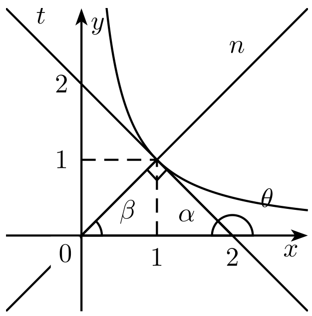


Figura 15.3

15.4 O conjunto de zeros de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$$

a) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $Z(f) = [0, 1]$?

b) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $Z(f) = \emptyset$?

c) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $Z(f) = \mathbb{R}$?

Solução:

a) Sim. Tome

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{, se } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{, se } 0 < x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{, se } x > 1 \end{cases}$$

De modo geral

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, se } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{, se } 0 < x \leqslant 1 \\ h(x) & \text{, se } x > 1 \end{cases}$$

b) Sim. Tome $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, com $b^2 - 4ac < 0$.

c) Sim. Tome $f(x) = 0$.

□

15.5 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos do domínio e com f' contínua. Se

$$xf'(x) = x^2 + f(x)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que

a) $f(0) = 0$

b) $f'(0) = 0$

Solução:

a) Como $f'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$, pois f é derivável em todos os pontos do domínio, segue que $f'(0)$ é um número real. Logo,

$$\begin{aligned} & 0.f'(0) = 0^2 + f(0)^2 \\ & \Rightarrow f(0)^2 = 0 \\ & \Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

b) Sabemos que, para $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} & f'(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{f(x)^2}{x} \\ & \Rightarrow f'(x) = x + \frac{f(x)^2}{x} \end{aligned}$$

Note que, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, pois f é contínua. Então,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{f(x)^2}{x} \right) \geqslant 0 \text{ e} \\ & \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{f(x)^2}{x} \right) \leqslant 0 \\ & \Rightarrow 0 \leqslant f'(0) \leqslant 0 \\ & \Rightarrow \boxed{f'(0) = 0} \end{aligned}$$

$\square$

15.6 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.

a) Se $f+g$ é contínua, então f e g são contínuas.

b) Se fg é contínua, então f e g são contínuas.

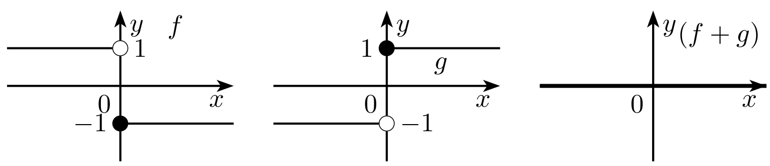
c) Se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e f é contínua em $x = 0$, então f é contínua em todo x.

Solução:

a) Falso. Contra-exemplo.

Sejam

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x < 0 \\ -1 & \text{, se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{, se } x < 0 \\ 1 & \text{, se } x \geqslant 0 \end{cases}$$



(a) f (b) g (c) $f+g$

Figura 15.4: Soma de funções.

A soma $(f+g)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Falso. Contra-exemplo.

Tome as mesmas f e g do item anterior.

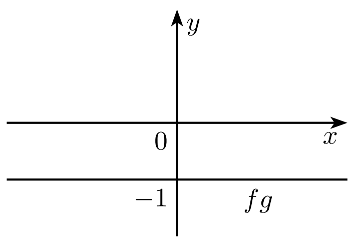


Figura 15.5: $(fg)(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Verdadeiro. Note que

$$\begin{aligned}
&f(0+0) = f(0) + f(0)\\
&f(0) = f(0) + f(0)\\
&f(0) = 0
\end{aligned}$$

e, como f é contínua em $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&x + (-x) = 0 \Rightarrow f(x + (-x)) = f(0)\\
&\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0\\
&\Rightarrow f(-x) = -f(x)
\end{aligned}$$

Logo, f é ímpar. Temos ainda, que

$$f(x-y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$$

sabendo que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$$

Então

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} f(x-a)$$

Seja $u = x - a$, então $u \to 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{u\to 0} f(u) = f(0) = 0\\
&\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0\\
&\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

15.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que se $|f(x)| \leqslant x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então existe $f'(0)$.

Solução:
Rascunho

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leqslant x^2 \\ &\Rightarrow -x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant f(0) \leqslant 0 \\ &\Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

como $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$, se $x > 0$, então $-x \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant x$;
se $x < 0$, então $x \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant -x$.
Terminar aplicando limites e usar o Teorema do Confronto... □

15.8 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x^2 & , \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que f é derivável em $x = 0$.

Solução:
Afirmação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ pois}$$

- se $x \in \mathbb{Q}$, então $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

- se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$

Afirmação: $f'(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
Seja $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

- se $x \in \mathbb{Q}$, então

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 0\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{x^2}{x}\right| = |x| = |x - 0| < \varepsilon$$

Tomando $\delta = \varepsilon$, temos que dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in \mathbb{Q}$ e $|x - 0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

- se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 0\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{0}{x}\right| = 0 < \varepsilon$$

Tomando $\delta = \varepsilon$, temos que dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $|x - 0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

□

15.9 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = L < \infty$,

a) Mostre que $f(0) = 0$.

b) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e que $f'(0) = L$.

Solução:

a) f é contínua $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \\
&\Rightarrow \lim_{x \to 0} x.\frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} f(x) \\
&\Rightarrow 0 = \lim_{x \to 0} f(x) \Rightarrow f(0) = 0
\end{aligned}$$

pois $x \to 0$ e $\frac{f(x)}{x}$ é limitada.

b) Temos que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = L = f'(0)$.
Portanto, f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = L$.

□

15.10 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x)$ é crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Mostre que a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por
$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente.

Solução:
Devemos mostrar que $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.
Sejam $0 < x_1 < x_2$. Pelo TVM, $\exists c_1 \in (0, x_1)$ tal que

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = f'(c_1)$$
$$\Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} = f'(c_1)$$

também $\exists c_2 \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_2)$$

como $c_1 < c_2$ e $f'(x)$ é crescente, então $f'(c_1) < f'(c_2)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1} > 0 \\
&\Rightarrow \frac{x_1(f(x_2) - f(x_1)) - (x_2 - x_1)f(x_1)}{(x_2 - x_1)x_1} > 0 \\
&\Rightarrow x_1 f(x_2) - x_1 f(x_1) - x_2 f(x_1) + x_1 f(x_1) > 0 \\
&\Rightarrow x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) > 0 \\
&\Rightarrow x_1 f(x_2) > x_2 f(x_1) \\
&\Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1} \\
&\Rightarrow g(x_2) > g(x_1)
\end{aligned}$$

$\square$

15.11 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que $f'(x) = nx^{n-1}, n \neq 0$.

Solução:

$\square$

15.12 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0, \forall x$. Mostre que f é uma função constante.

Solução:
Sejam $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Pelo TVM, $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \\
&\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \\
&\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \\
&\Rightarrow f(x_2) = f(x_1)
\end{aligned}$$

Agora, fixe $x_1 \in \mathbb{R}$. Seja $x \in \mathbb{R}, x$ qualquer. Pelo TVM, $\exists c_2 \in (x_1, x)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0 \\
&\Rightarrow f(x) - f(x_1) = 0 \\
&\Rightarrow f(x) = f(x_1)
\end{aligned}$$

$\square$

15.13 Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo se existirem.

Solução:
Não existe $f'(0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty
\end{aligned}$$

Portanto, 0 é ponto crítico.

Agora, seja $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 > 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \\
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

Logo, a derivada existe e é diferente de zero, portanto, o ponto x_0 não é crítico.

Ainda, $f(0)=0$, se $x>0, \sqrt{x}>\sqrt{0}=0$, pois f é crescente, então, 0 é ponto de mínimo. □

15.14 Seja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$. Encontre os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo se existirem. Verifique que embora 1 seja ponto de máximo, $f'(1)$ é diferente de zero. Por que isso não contraria a teoria estudada?

Solução:
Temos que $f'(x)=2x$. Os pontos críticos de f são dados por

$$\begin{aligned}
&f'(x)=0 \\
&\Rightarrow 2x=0 \\
&\Rightarrow x=0\in[-1,1]
\end{aligned}$$

$x=0$ é ponto crítico de f.
Zero não é ponto de máximo, pois $f(1)=1>f(0)$.
Falta verificar se zero é ponto de mínimo.

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^2\geqslant 0, \forall x\in D(f) \\
&\Rightarrow f(x)\geqslant f(0).
\end{aligned}$$

Além disso, $f(-1)=f(1)=1$, então 1 e -1 são pontos de máximo.

Apesar de 1 ser ponto de máximo, mesmo que $f'(1)\neq 0$ isso não contraria o teorema porque na hipótese do teorema o ponto deve ser de acumulação bilateral; o que não acontece neste caso. □

CAPÍTULO 16

Conjuntos e Funções

Os exercíÂcios referem-se ao livro de Elon, pág. 28.

16.1 Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:
1$X \supset A$ e $X \supset B$,
2 Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$.
Prove que $X = A \cup B$.

Solução:
hipótese: 1$X \supset A$ e $X \supset B$, e 2 Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$.
tese: $X = A \cup B$.
FIGURA
Devemos fazer a dupla inclusão.
$\supset$) Devemos mostrar que $A \cup B \subset X$.
Se $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$.
$\Rightarrow x \in X \Rightarrow A \cup B \subset X$.

$\subset$) Mostremos que $A \cup B \supset X$, equivalentemente, $X \subset A \cup B$.
Note que $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, pela propriedade 2, $\Rightarrow X \subset A \cup B$. □

16.2 Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $A \cap B$.

Solução:
Para mostrar que $X = A \cap B$ devemos fazer:

hipótese: $1X \subset A$ e $X \subset B$, e 2 Se $Y \subset A$ e $Y \subset B$ então $Y \subset X$.
tese: $X = A \cap B$.
FIGURA
$\subset$) Devemos mostrar que $X \subset A \cap B$.
Se $x \in X \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$.
$\Rightarrow x \in A \cap B$.

$\supset$) Devemos mostrar que $A \cap B \subset X$.
Pela 2 propriedade, $A \cap B \subset A$, ou seja, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, pela (2), $A \cap B \subset X$. □

Dica: Para o exercíÂcio 16.3 é sempre verdade que
$A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \emptyset$ e $\emptyset \subset A$ é sempre verdade.
E, $A = E \Leftrightarrow A \subset E$ (é sempre verdade) e $E \subset A$.

16.3 Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset B^c$. Prove também que $A \cup B = E$ se, e somente se, $A^c \subset B$.

Solução:

i) Prove que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.
FIGURA
$\Leftarrow$) Devemos mostrar que $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
Seja $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ e } x \in B\}$.
Se $A \subset B^c \Rightarrow$ se $x \in A$, então $x \in B^c$.
$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow \nexists x \in E$ tal que $x \in A$ e $x \in B$.
$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

$\Rightarrow$) Façamos por contraposição. (hip: $A \not\subset B^c$ tese: $A \cap B \neq \emptyset$)
Se $A \not\subset B^c \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B^c$
$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B$
$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.
Por contraposição, se $A \cap B = \emptyset$, então $A \subset B^c$.

ii) Prove que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$.
FIGURA
Dica: $A = E \Leftrightarrow A \subset E$ (sempre verdade) e $E \subset A$.
E $x \in E \Rightarrow x \in A$ ou $x \in A^c \Rightarrow x \in A \cup A^c \Rightarrow E = A \cup A^c$.

$\Leftarrow$) Mostremos que $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$. (Neste caso, basta mostrar que $E \subset A \cup B$, pois a outra inclusão é imediata.)

Se $A^c \subset B \Rightarrow$ se $x \in A^C$, então $x \in B$.

Se $x \in E, x \in A$ ou $x \in A^c$.

$\Rightarrow$ se $x \in A$ ou $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow E = A \cup B$.

$\Rightarrow$) Façamos por contraposição. (hip: $A^c \not\subset B$ tese: $A \cup B \neq E$)

Se $A^c \not\subset B$, então $x \in A^c$ e $x \notin B$.

Lembre-se que $[A^c \cap B^c = (A \cup B)^c]$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in E$ e $x \notin A \cup B \Rightarrow E \not\subset A \cup B$.

$\Rightarrow E \neq A \cup B$.

Por contraposição, se $A \cup B = E$, então $A^c \subset B$.

$\square$

16.4 Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.

Solução:
$\Rightarrow$) Se $x \in A$, então $x \in B$.
Logo, $x \notin B^c \Rightarrow \nexists x \in E$ tal que $x \in A$ e $x \in B$.
Portanto, $A \cap B^c = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Por contraposição, devemos mostrar que $A \not\subset B \Rightarrow A \cap B^c \neq \emptyset$.
Se $A \not\subset B \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$.
$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B^c \Rightarrow x \in A \cap B^c$.
$\therefore A \cap B^c \neq \emptyset$.
Por contraposição, se $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \subset B$.

$\square$

16.5 Dê exemplos de conjuntos A, B, C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

Solução:
Sejam $A = [0, 1], B = [1, 3]$ e $C = [2, 3]$.
FIGURA
Temos que $A \cup B = [0, 3] \Rightarrow I = (A \cup B) \cap C = [2, 3]$.
Por outro lado, $B \cap C = [2, 3] \Rightarrow II = A \cup (B \cap C) = [0, 1] \cup [2, 3]$.
Portanto, $I \neq II$.

$\square$

16.6 Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, prove que $X = A^c$.

Solução:
$\subset$) Seja $x \in X$. Então $x \in E = A \cup X$.
$\Rightarrow x \in A$ ou $x \in X$. Como $A \cap X = \emptyset$, então $x \notin A$.
Logo, $x \in A^c$.
$\supset$) Seja $x \in A^c$. Então $x \notin A$.
Mas $x \in E = A \cup X \Rightarrow x \in A$ ou $x \in X$.
Portanto, $x \in X$. □

16.7 Se $A \subset B$, então, $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C. Por outro lado, se existir C de modo que a igualdade acima seja satisfeita, então $A \subset B$.

Solução:

□

16.8 Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$.

Solução:
$\Rightarrow$) $A = B \Rightarrow A^c = B^c \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$ e $A^c \cap B = \emptyset$.
$\Rightarrow (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$.
FIGURA
Lembrete: $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B \Rightarrow A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.

$\Leftarrow$) Pela propriedade $U.7$, temos que

$$\begin{aligned}
&(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow ((A \cap B^c) \cup A^c) \cap ((A \cap B^c) \cup B) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow [(A^c \cup A) \cap (A^c \cup B^c)] \cap [(B \cup A) \cap (B \cup B^c)] = \emptyset \\
&\Leftrightarrow [E \cap (A \cap B^c)] \cap [(A \cup B) \cap E] = \emptyset \\
&\Leftrightarrow (A \cap B)^c \cap (A \cup B) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \emptyset
\end{aligned}$$

Pelo Ex. 16.3, $[A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c]$. Então,
$\Leftrightarrow A \subset (A \cup B) \subset (A \cap B) \subset B \Rightarrow A \subset B$ e
$B \subset (A \cup B) \subset (A \cap B) \subset A \Rightarrow B \subset A$.
Logo, $A = B$.

□

16.9 Prove que $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Solução:

□

16.10 Seja $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A\Delta B = A\Delta C$ implica $B = C$. Examine a validez de um resultado análogo com $\cap, \cup$ ou $\times$ em vez de Δ.

Solução:

□

16.11 Prove as seguintes afirmações:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$.

Solução:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

O produto cartesiano também é um conjunto, e para igualdade de conjuntos devemos fazer dupla inclusão.

$\subset$) Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Então, $x \in A \cup B$ e $y \in C$.
$\Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$ e $y \in C$
$\Rightarrow x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in B$ e $y \in C$
$\Rightarrow (x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$
$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

$\supset$) Seja $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Então, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$.
$\Rightarrow x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in B$ e $y \in C$
$\Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$ e $y \in C$
$\Rightarrow x \in A \cup B$ e $y \in C$
$\Rightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times C$.
Portanto, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

$\subset$) Seja $x \in (A \cap B) \times C$. Então $x \in A \times B$ e $y \in C$.

$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in C$ e $x \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times C$ e $(x, y) \in B \times C$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

$\Rightarrow (A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$.

$\supset$) Devemos mostrar que $(A \times C) \cap (B \times C) \subset (A \cap B) \times C$.

Seja $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$. Então $(x, y) \in A \times C$ e $(x, y) \in B \times C$.

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in C$ e $x \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \times C$.

Portanto, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

$\subset$) Seja $(x, y) \in (A - B) \times C$. Então $x \in A - B$ e $y \in C$.

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in C$ e $x \notin B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A \times C$ e $x \notin B \times C$

$\Rightarrow x \in (A \times C) - (B \times C)$

$\Rightarrow (A - B) \times C \subset (A \times C) - (B \times C)$.

$\supset$) Devemos mostrar que $(A \times C) - (B \times C) \subset (A - B) \times C$.

Seja $(x, y) \in (A \times C) - (B \times C)$. Então, $(x, y) \in A \times C$ e $(x, y) \notin B \times C$.

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in C$ e $x \notin B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $y \in C$

$\Rightarrow x \in A - B$ e $y \in C$

$\Rightarrow (x, y) \in (A - B) \times C$

$\Rightarrow (A \times C) - (B \times C) \subset (A - B) \times C$.

Portanto, $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$.

$\square$

CAPÍTULO 17

Conjuntos Enumeráveis

Os exercíÂcios referem-se ao livro de Elon, pág. 54.

17.1 $a_n = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ e $b_n = (1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

Solução:

a) subsequência

$(a_j) = (1, 1, 1, \ldots) \to 1$

$(a_k) = (-1, -1, -1, \ldots) \to -1$

$(a_l) = (x_1, x_3, -1, -1, \ldots) \to -1$

$(a_r) =$ (quantidade finita de 1, quantidade infinita de -1) $\to 1$

b)

c)

$\square$

17.2 Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$.

Solução:

numerador: $\overbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}^{a_n}$ qualquer denominador: $b_n = n$ é crescente e $\lim\limits_{n \to \infty} n = +\infty$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{(n+1) - n} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = a$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$$

□

CAPÍTULO 18

Topologia, Limite e Continuidade

18.1 Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto se, e somente se, para qualquer sequência (x_n) convergindo para $a \in A$, tem-se que $x_n \in A$ para n suficientemente grande.

18.2 Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $x \in \mathbb{R}$ fixado. Prove que $x + B = \{x + y; y \in B\}$ é um conjunto aberto. Se $x \neq 0$, então o conjunto $x.B = \{xy; y \in B\}$ também é um conjunto aberto.

18.3 Sejam A, B conjuntos abertos. Prove que $A + B = \{x + y; x \in A \text{ e } y \in B\}$ e $A.B = \{xy; x \in A \text{ e } y \in B\}$ são conjuntos abertos.

18.4 Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que

a) $\text{int}(X \cup Y) \supset \text{intX} \cup \text{intY}$

b) $\text{int}(X \cap Y) = \text{intX} \cap \text{intY}$

Dê exemplos em que $\text{int}(X \cup Y) \not\subset \text{intX} \cup \text{intY}$.

18.5 Prove que se A é aberto, então $A - \{a\}$ é aberto para todo $a \in A$.

18.6 Se $X \subset F$ e F é fechado, então $\overline{X} \subset F$.

18.7 Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que

a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

b) $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$

Dê um exemplo em que $\overline{X \cap Y} \not\supset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

18.8 Prove que um conjunto A é aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.

18.9 Sejam $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ não vazios. Dê exemplos mostrando que $\bigcap F_n$ pode ser vazio se os F_n são apenas fechados ou apenas limitados.

18.10 Prove que se F é fechado e A é aberto, então $F - A$ é fechado.

18.11 Prove que

a) Se A é compacto e B fechado, então $A + B$ é fechado.

b) Se A e B são compactos, então $A + B$ e $A.B$ são compactos.

c) Se A é fechado e B é compacto, então $A.B$ pode não ser fechado. (Basta dar um contra-exemplo.)

18.12 Mostre que a função $f(x) = |x|$ é contíÂnua para qualquer $x = a \in \mathbb{R}$.

18.13 Mostre que a função de Dirichlet $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & , \text{se } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{se } t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontíÂnua em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$.

18.14 Em cada caso, encontre $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, para todo x satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}, a = 1$ e $L = 1$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, a = 2$ e $L = \dfrac{2}{3}$.

18.15 Seja $p(x)$ um poliníÂ´mio de grau n na variável $x \in \mathbb{R}$. Prove que $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Desse modo, todo poliníÂ´mio é uma função contíÂnua em $\mathbb{R}$.[1]

[1] soma de limites.

18.16 Prove que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é contíÂnua para todo $x \geqslant 0$.

18.17 Prove que $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

18.18 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, prove que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)| = |L|$.

18.19 Seja f uma função contíÂnua em toda reta que se anula nos racionais. Prove que $f \equiv 0$.

18.20 * Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções contíÂnuas tais que $f(0) = 1$, $f(1) = 0, g(0) = 0$ e $g(1) = 1$. Prove que existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = g(c)$.[2]

18.21 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva, isto é, $f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contíÂnua se, e somente se, f é contíÂnua em $x = 0$.

18.22 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva contíÂnua. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$.

18.23 Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com a seguinte propriedade: $g(x + y) = g(x).g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Se $g(c) = 0$ para algum c, mostre que $g \equiv 0$. Mostre que g é contíÂnua se, e somente se, g é contíÂnua em $x = 0$.

18.24 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contíÂnua. Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ no qual f assume seu valor míÂnimo.

18.25 Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contíÂnua em um único ponto.

18.26 * Mostre que a equação $x = \cos x$ tem uma solução no intervalo $[0, \pi/2]$.

18.27 Mostre que o poliníÂ´mio $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tem pelo menos duas raíÂzes reais.

18.28 Mostre que toda função $f : X \to \mathbb{R}$ lipschitiziana é uniformemente contíÂnua.

18.29 Mostre que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contíÂnua.

18.30 * Prove que todo poliníÂ´mio de grau íÂmpar possui pelo menos uma raiz real.

[2]* use T.V.I.

Referências Bibliográficas

[1] G. de Souza Ávila. *Análise matemática para licenciatura.* Edgard Blücher, 2006.

[2] E. LIMA. Curso de análise vol. 1 (12 edição). *Projeto Euclides.[Rio de Janeiro]: IMPA/CNPq*, page 431, 2006.

Índice Remissivo

S

T

V