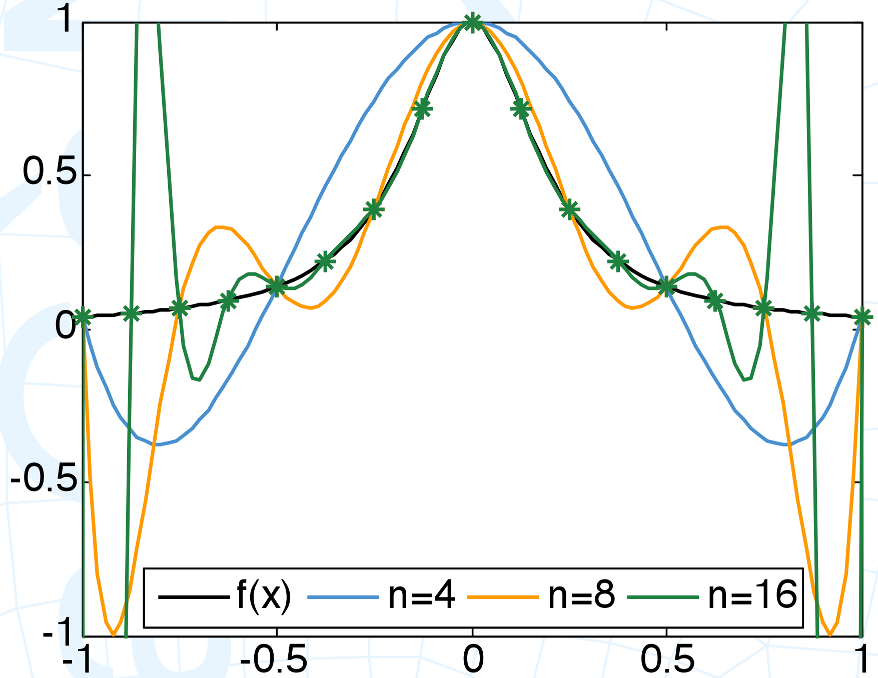
Interpolación seccional: SPLINES

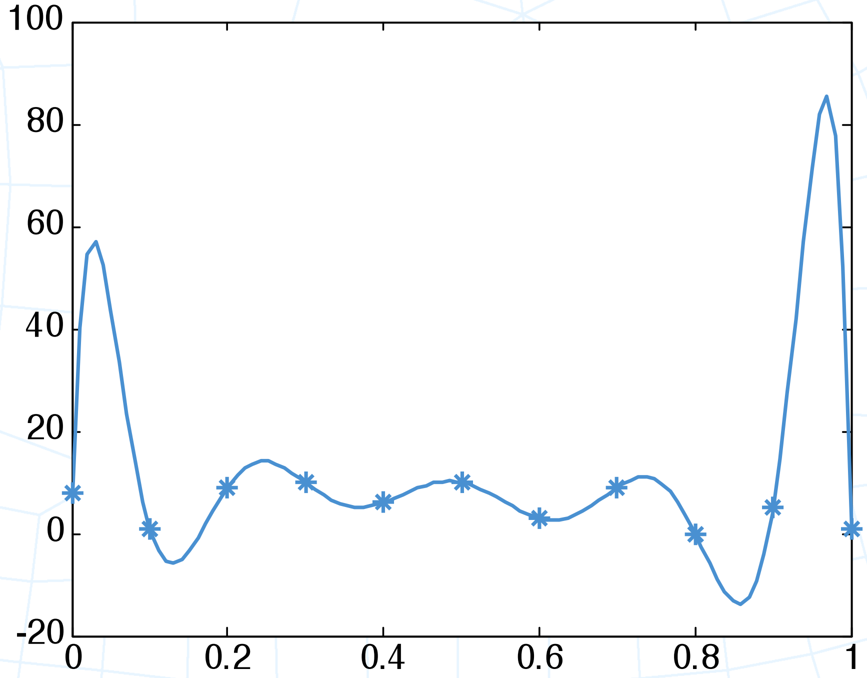
Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)
Departament de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya (Spain)
http://www-lacan.upc.es

Motivación: problemas en aproximación funcional

1. Interpolación polinómica pura ➡ oscilaciones para número elevado de datos

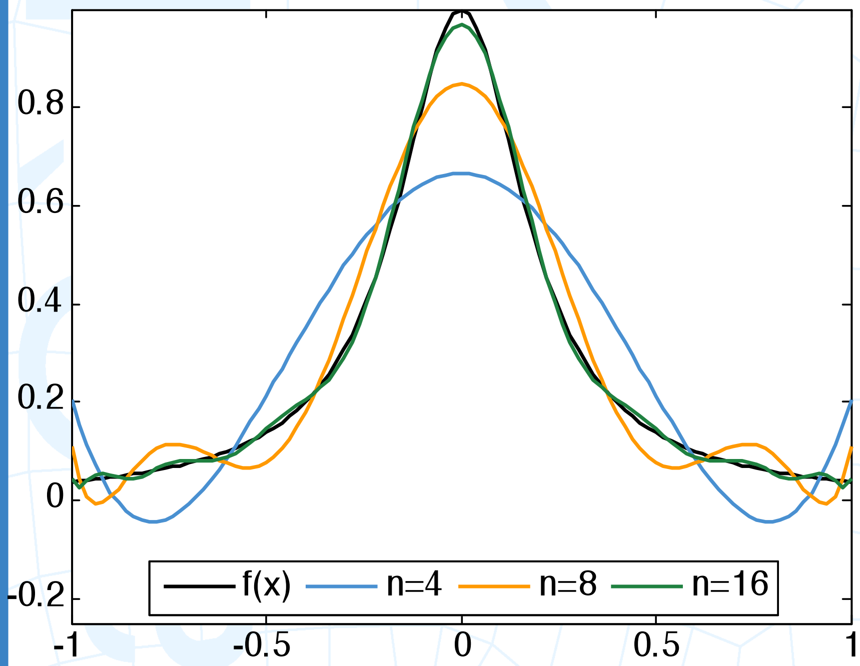


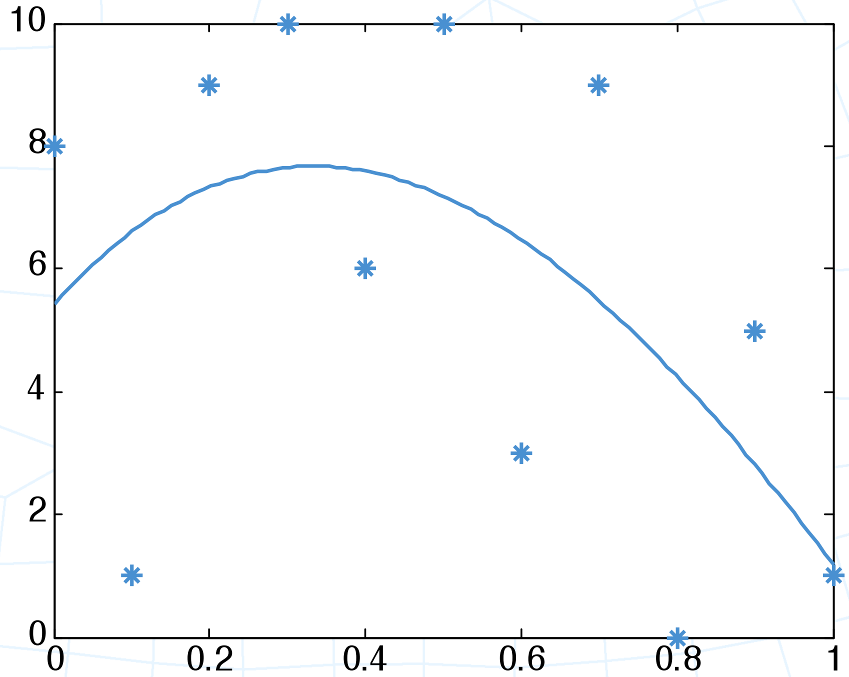
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$



Motivación: problemas en aproximación funcional

2. Mínimos cuadrados → La aproximación no pasa por los puntos

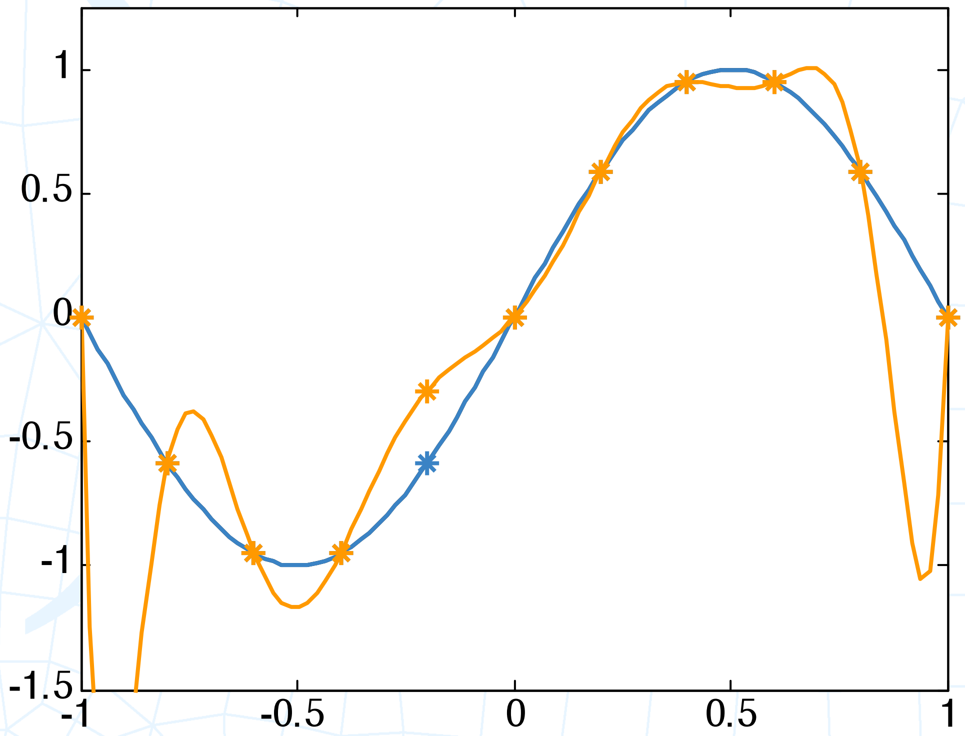




$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Motivación: problemas en aproximación funcional

3. Modificaciones locales afectan globalmente



Solución

Cambiar el tipo de aproximación

Cualidades deseables de la aproximación (dibujo, resolución EDPs…):

1. Control sobre la suavidad del aproximante
2. Posibilidad de interpolar
3. Desarrollo en función de una base
4. Interpolante local

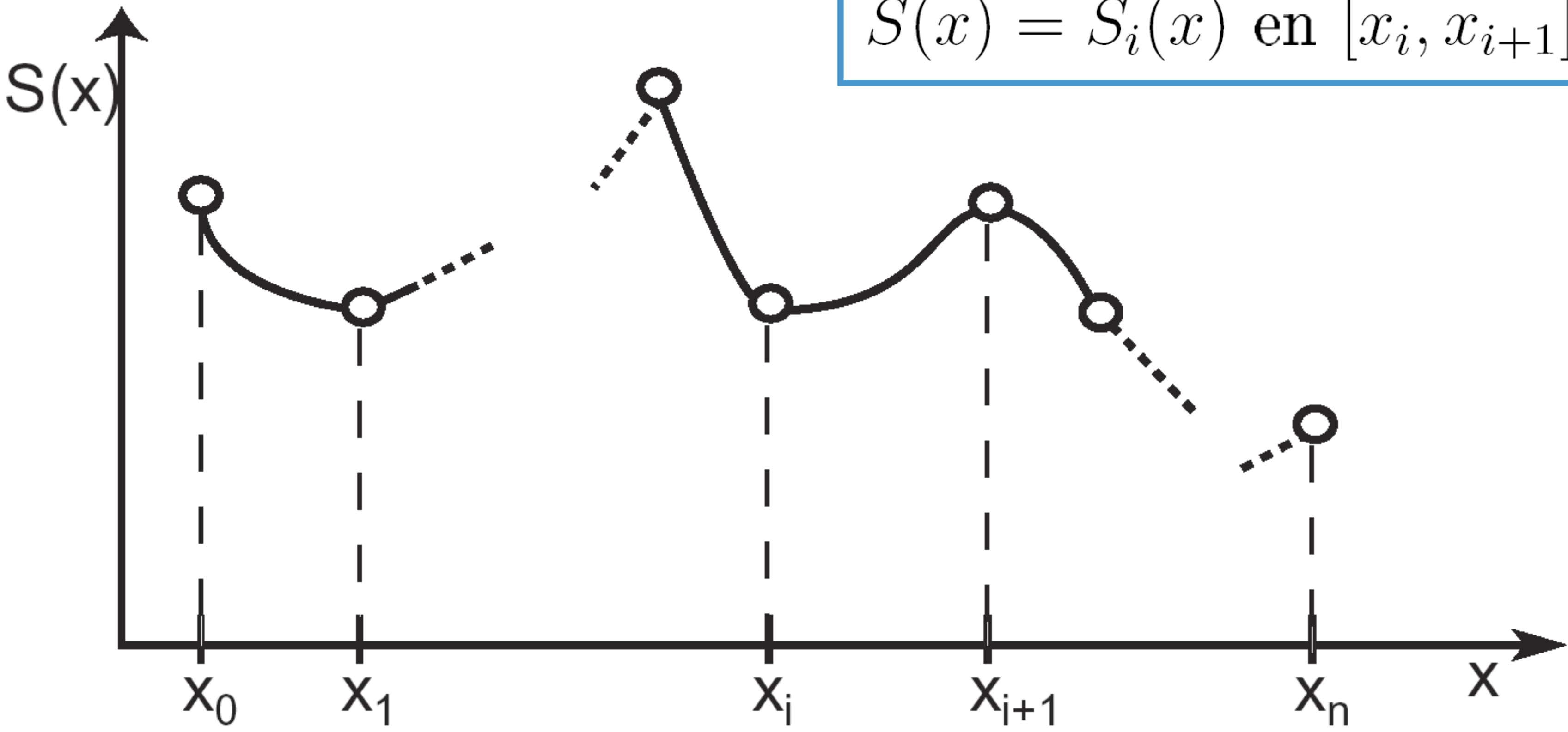
⇓

Aproximación polinómica a trozos (spline)

Definición

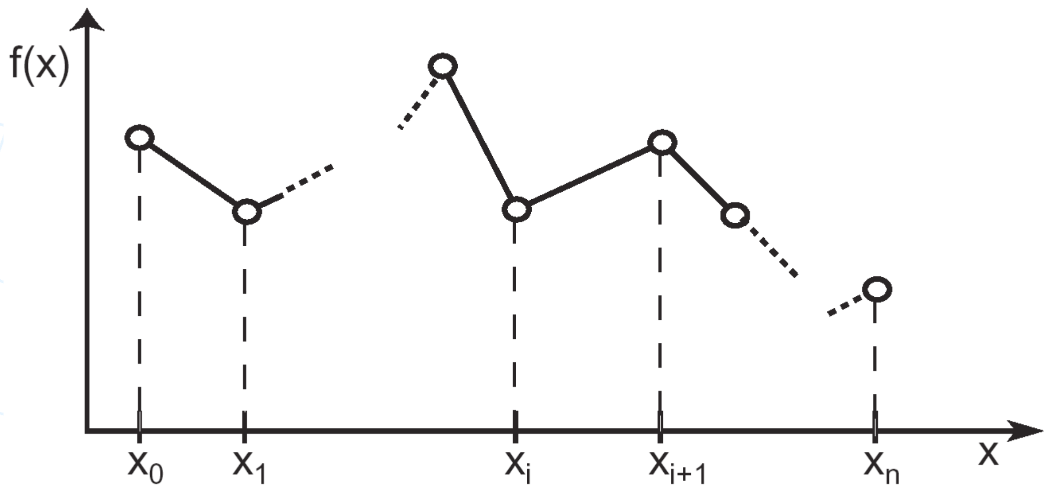
- **SPLINE:** función definida a trozos,
  generalmente polinómica en cada tramo

$$S(x) = S_i(x) \text{ en } [x_i, x_{i+1}]$$

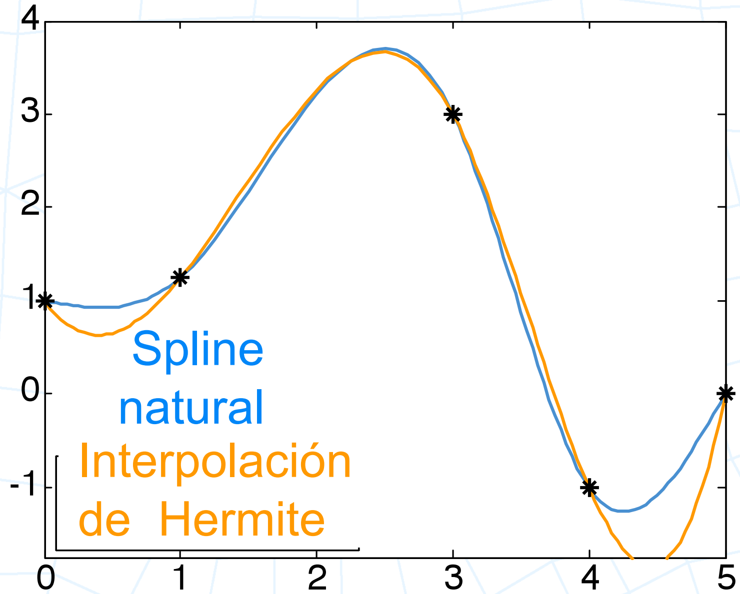


Algunos tipos de Spline

- Spline lineal C^0
- Spline parabólico C^1
- Spline cúbico C1
- Spline cúbico C2

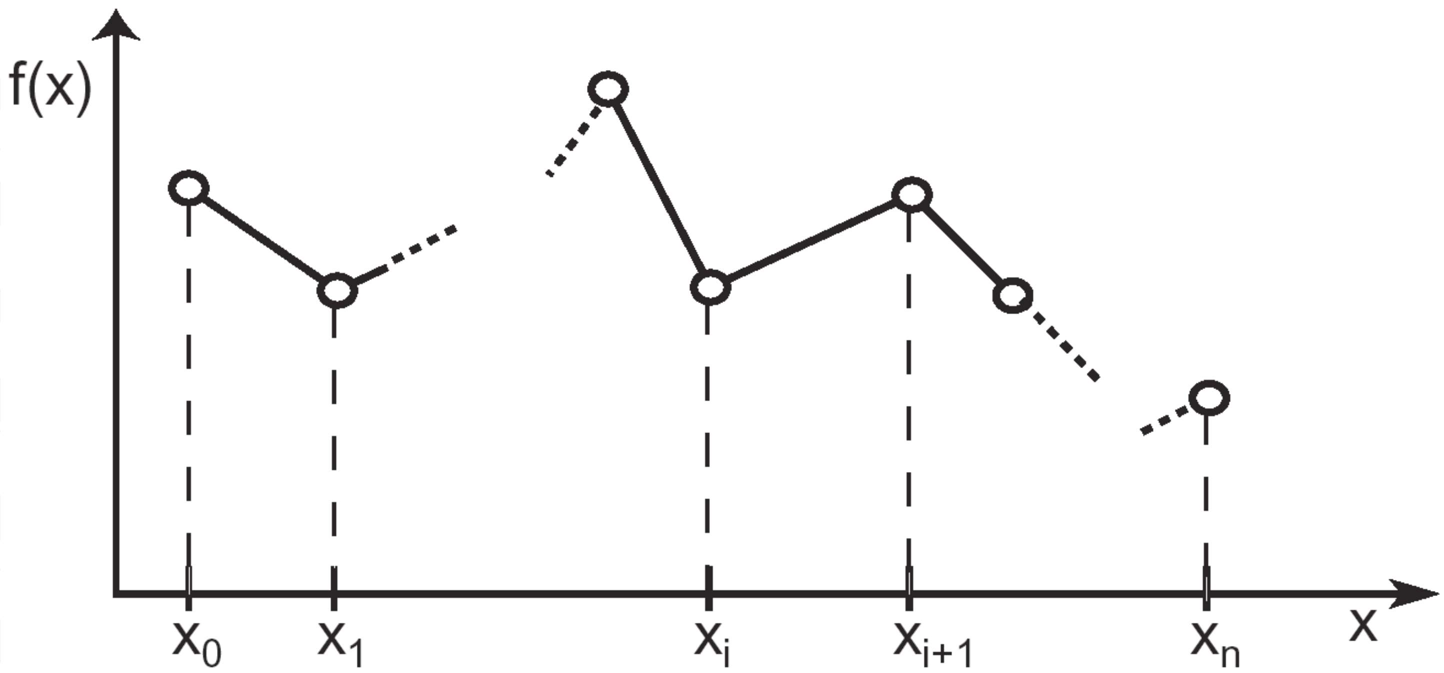


El tipo de Spline viene dado por el grado de polinomio en cada intervalo y la regularidad en los puntos/nodos interiores



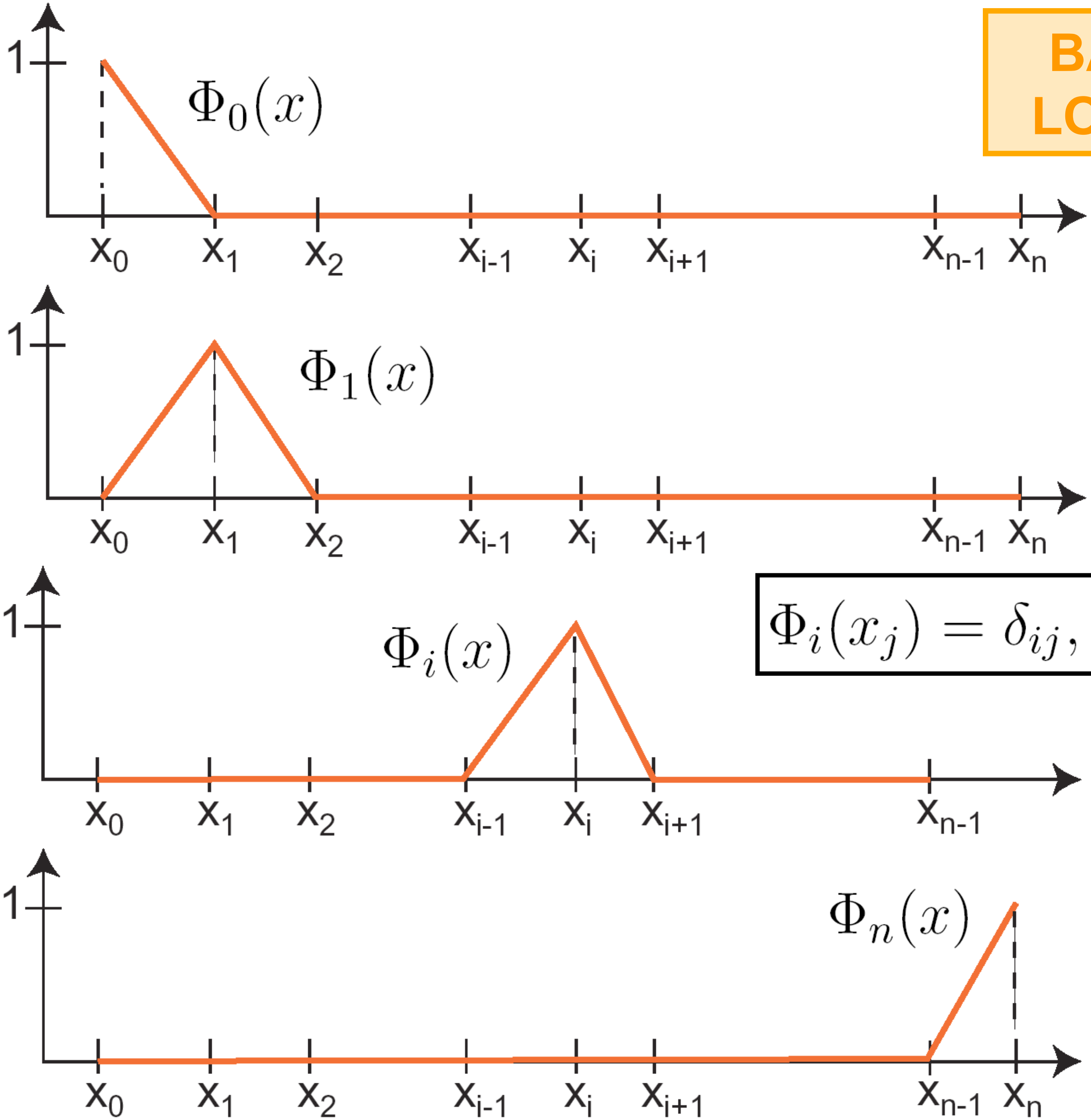
1. SPLINE LINEAL C0

- Función polinómica lineal a trozos
- Continua (en los puntos base x_i)



¿La aproximación se puede expresar en función de una base?

BASE LOCAL



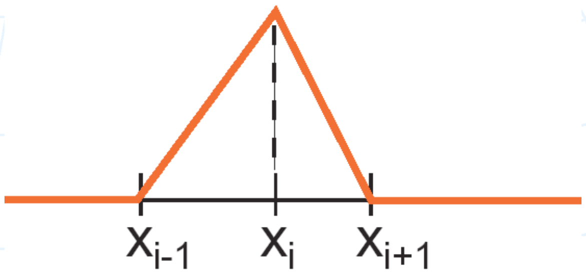
$$\boxed{\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 0\ldots n}$$

Base del espacio de splines lineales C^0

- Depende de los puntos base $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
- De todas las bases posibles escogemos la que permite variar con facilidad los valores f_i

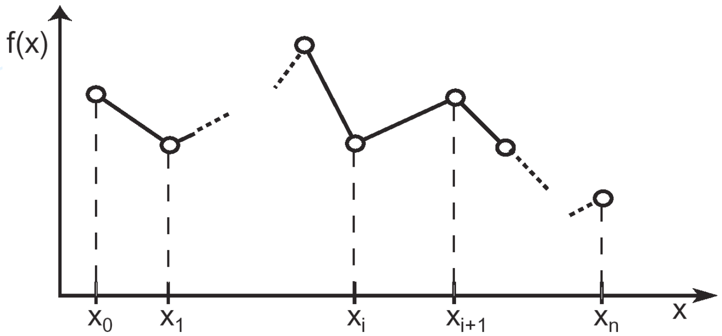
- Con la base que cumple

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 0 \ldots n$$



el interpolante (spline) se escribe

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x), \quad x \in [x_0, x_n]$$



- Observación: el espacio de Splines lineales C^0 es un espacio vectorial de dimensión n+1 (número de puntos base)

2. SPLINE C1 PARABOLICO

- En cada intervalo: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$
  - Número de coeficientes $\boxed{3n}$
  - Número de condiciones:
    continuidad del spline y de la primera derivada en los n-1 puntos interiores

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= S_{i-1}(x_i) \\ S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \qquad \boxed{2(n-1)}$$

  - Diferencia: $\boxed{3n - 2(n-1) = n+2}$

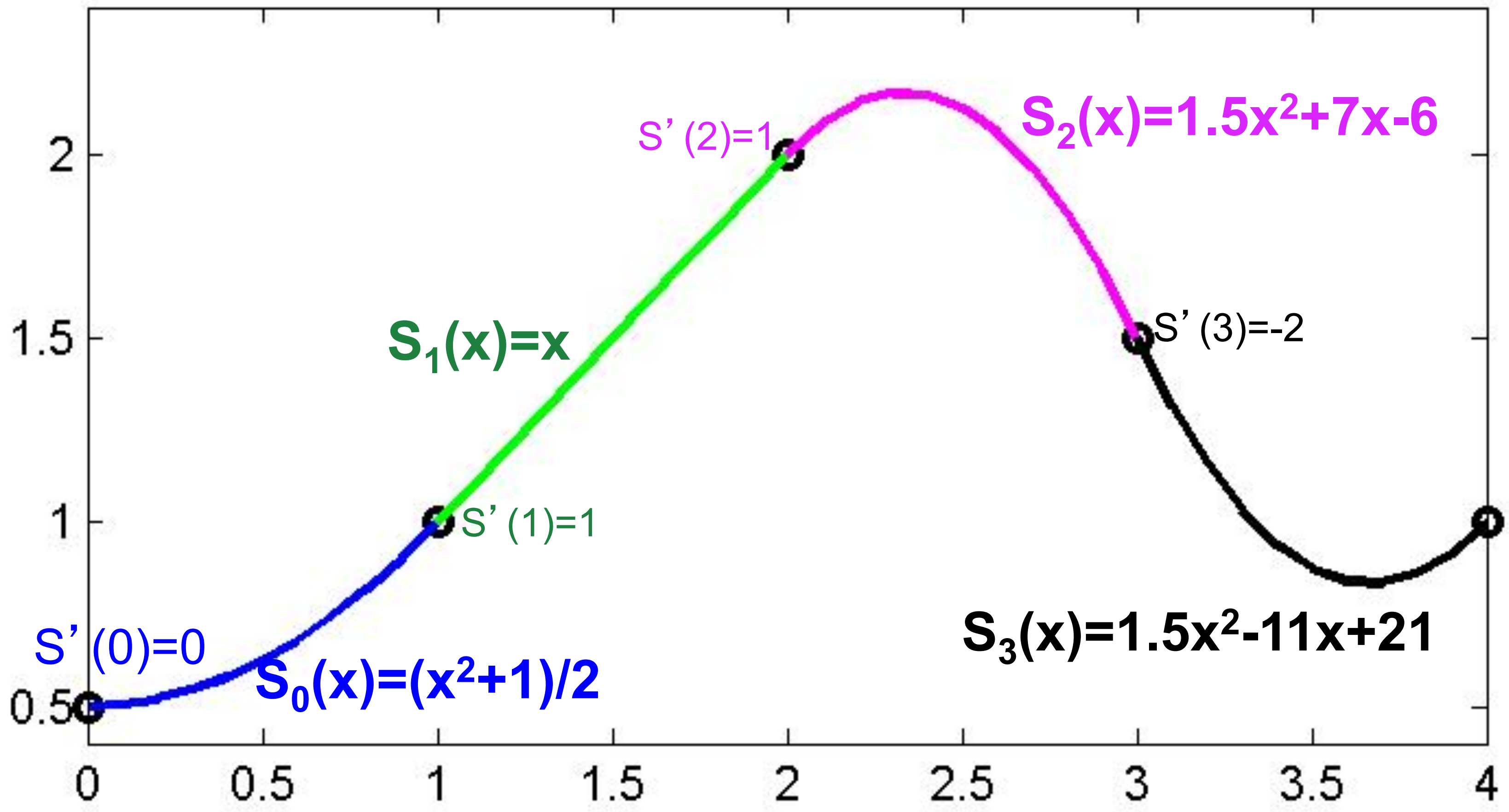
↓

parámetros libres,
dimensión del espacio

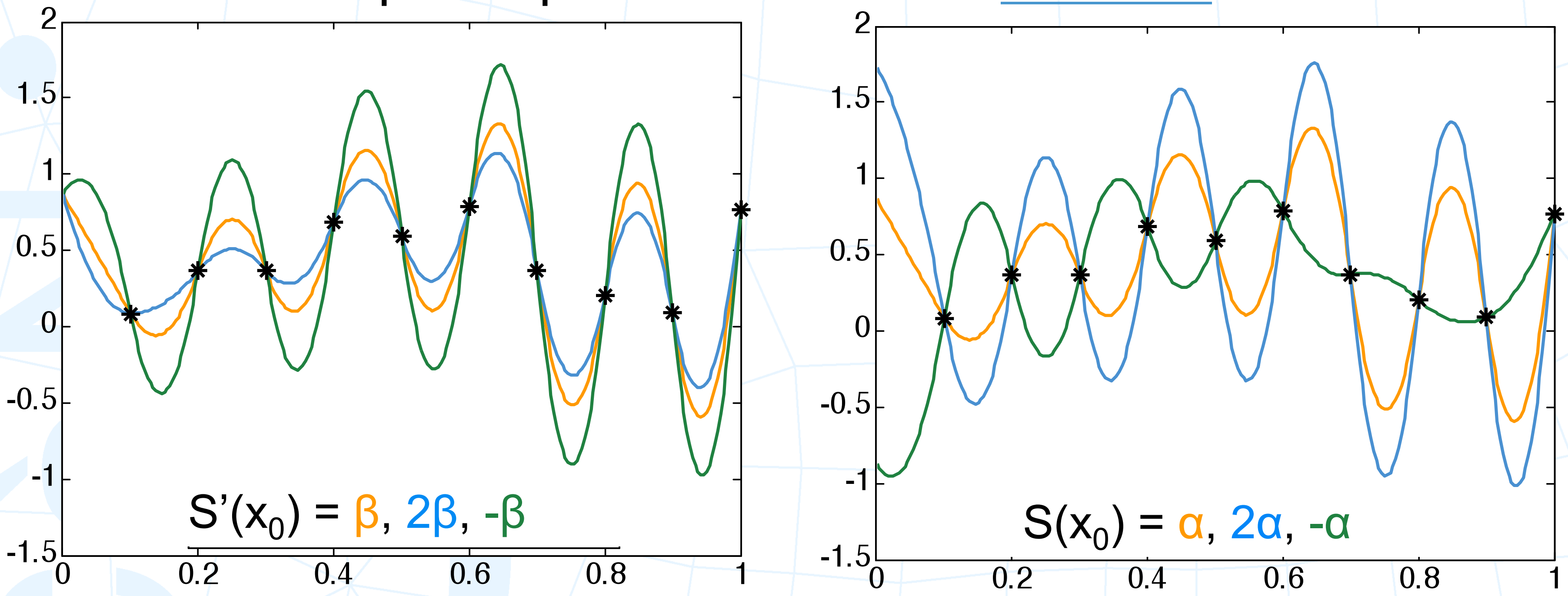
Podemos imponer el valor de la función en n+1 puntos base y una condición adicional

Ejemplo Spline C1 parabólico (recurrente)

- Fijando el valor de la derivada en el punto inicial, S’ (0)=0, y los n+1 valores de la función



- La base de splines parabolicos C1 es **no local**



- Elección de s'_{0}:
  - Dejar s'_0 libre y modificar interactivamente
  - Interpolar polinomio con N+1 puntos en el entorno de x_0: s'_0 = pendiente del polinomio en x_0,
  - Tomar $s'_1 = (f_2 – f_0)/(x_2 – x_0)$ (diferencia centrada) e interpolar un subintervalo en sentido contrario

poco utilizado

3. SPLINE C1 CÚBICO

- Se conoce como **interpolación de Hermite**
- En cada intervalo: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
  - Número de coeficientes: $\boxed{4n}$
  - Número de condiciones:
    continuidad del spline y de la primera derivada en los n-1 puntos interiores

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= S_{i-1}(x_i) \\ S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \qquad \boxed{2(n-1)}$$

  - Diferencia: $\boxed{4n - 2(n-1) = 2(n+1)}$

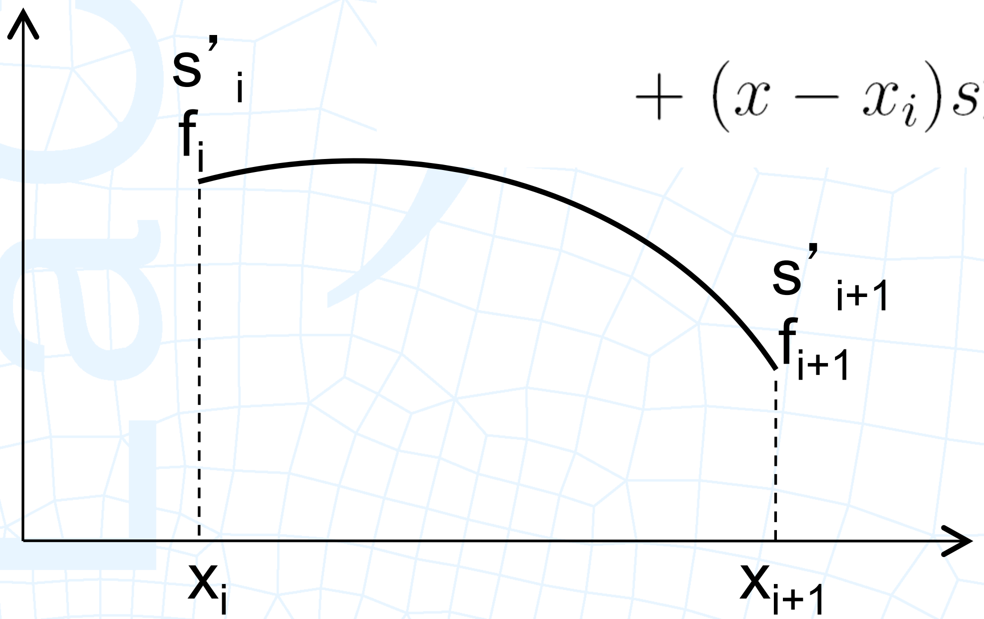
parámetros libres, dimensión del espacio

Podemos imponer el valor de la función y su derivada en los n+1 puntos base.

SPLINE C1 CÚBICO

- En cada subintervalo, dados los 2 valores de la función y los 2 valores de la derivada hay una único polinomio de grado 3 que cumple las 4 condiciones

$$
\begin{aligned}
S_i(x) \quad &= \left[h_i\left(s_i' + s_{i+1}'\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^3 \\
&+ \left[3t_i - h_i\left(2s_i' + s_{i+1}'\right)\right]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2 \\
&+ (x - x_i)s_i' + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]
\end{aligned}
$$



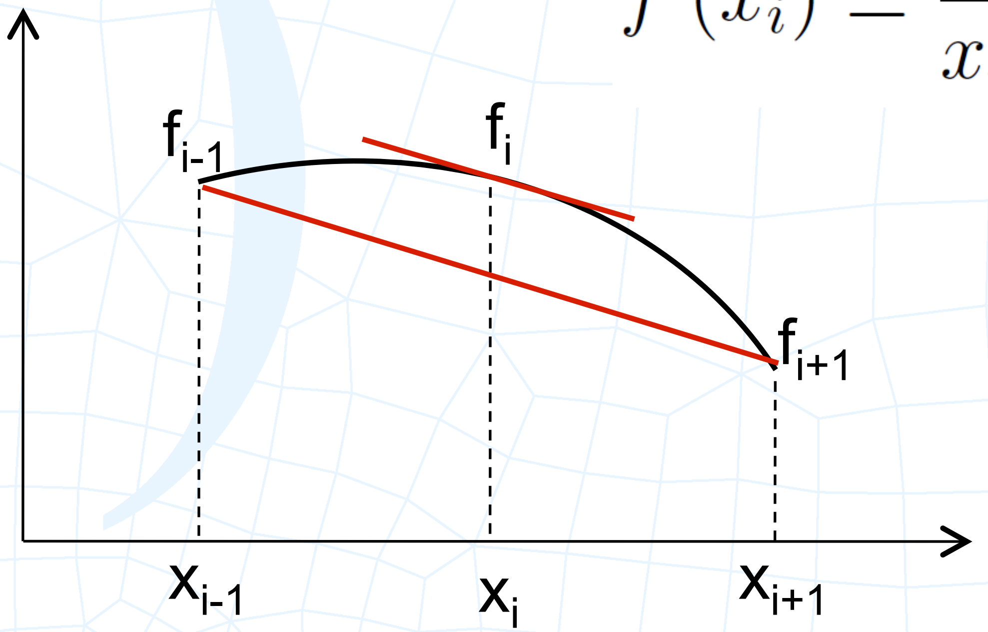
$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$t_i = f_{i+1} - f_i$$

Aproximación de las derivadas

- Si las derivadas s'_i no son conocidas, se pueden aproximar a partir de los valores de la función

$$f'(x_i) \simeq \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Base del espacio de splines C2 cúbicos

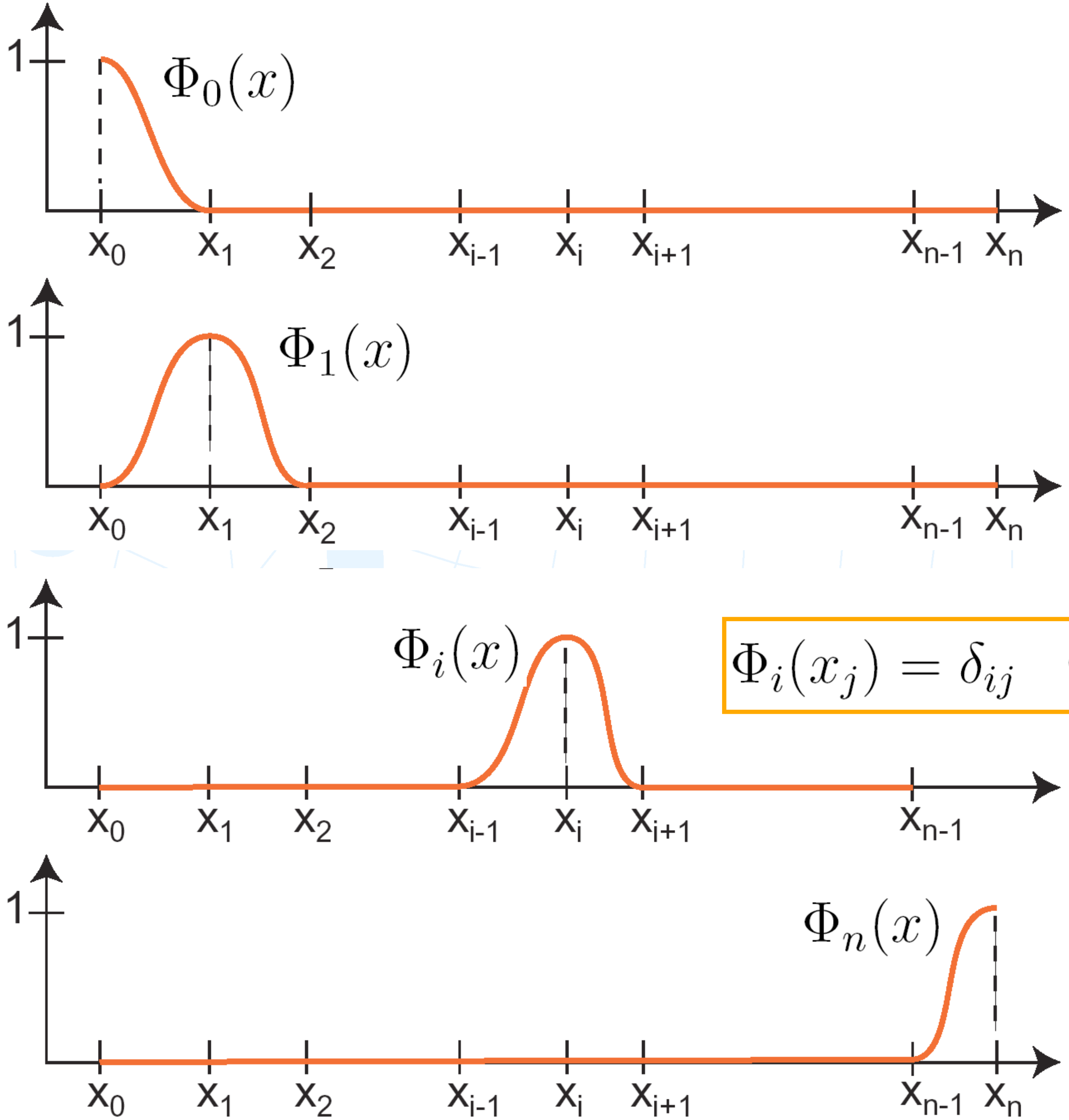
- El interpolante (spline cúbico) se escribe como

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} s_i' \widehat{\Phi}_i(x)$$

si $\Phi_i(x)$ y $\widehat{\Phi}_i(x)$ son las funciones de la base de splines (definidas en todo $[x_0,x_n]$) que verifican

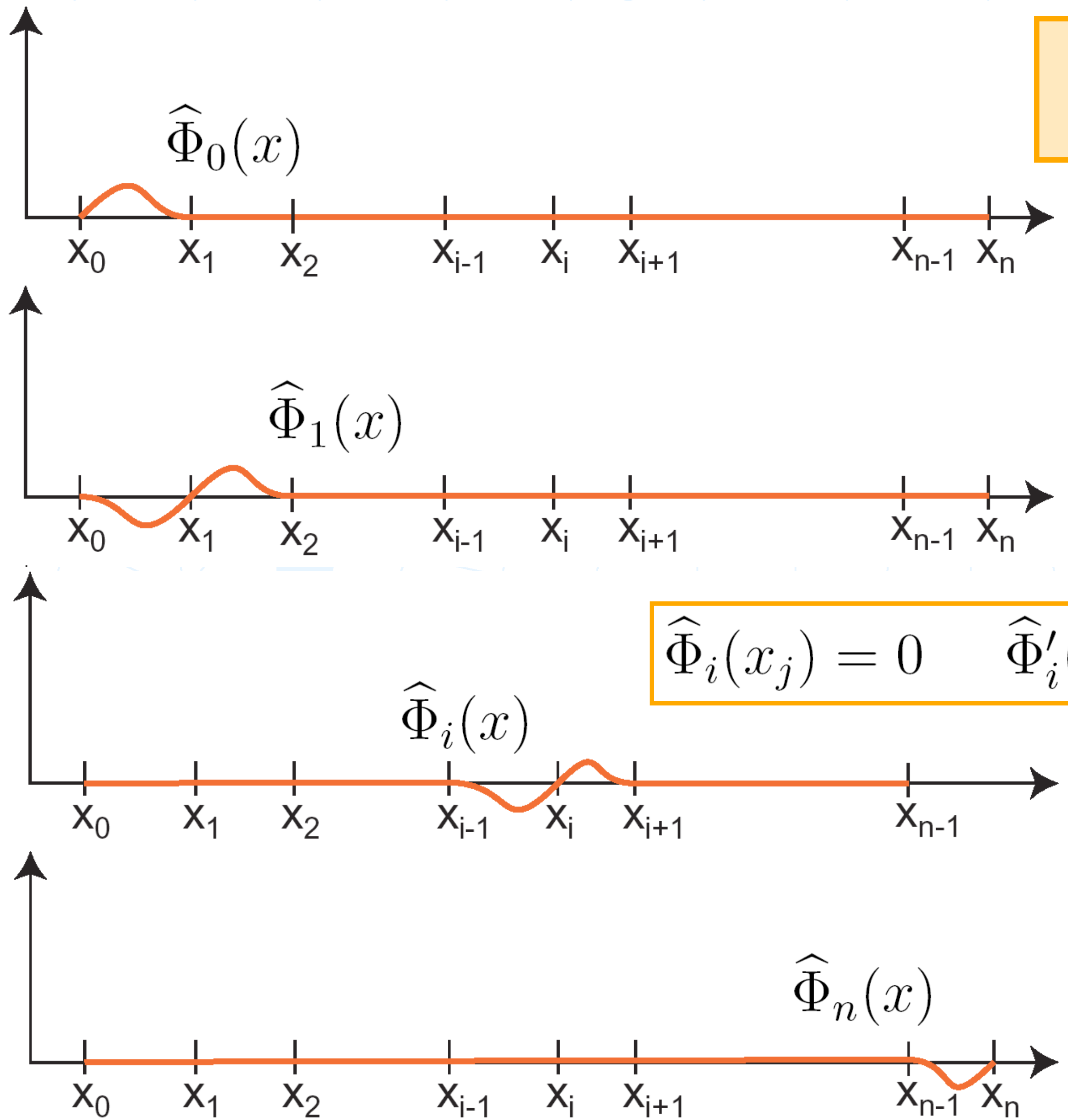
$$\begin{array}{ll} \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} & \Phi_i{}'(x_j) = 0 \\ \widehat{\Phi}_i(x_j) = 0 & \widehat{\Phi}_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{array} \qquad (i, j = 0 \ldots n)$$

BASE LOCAL



$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \Phi_i{}'(x_j) = 0$$

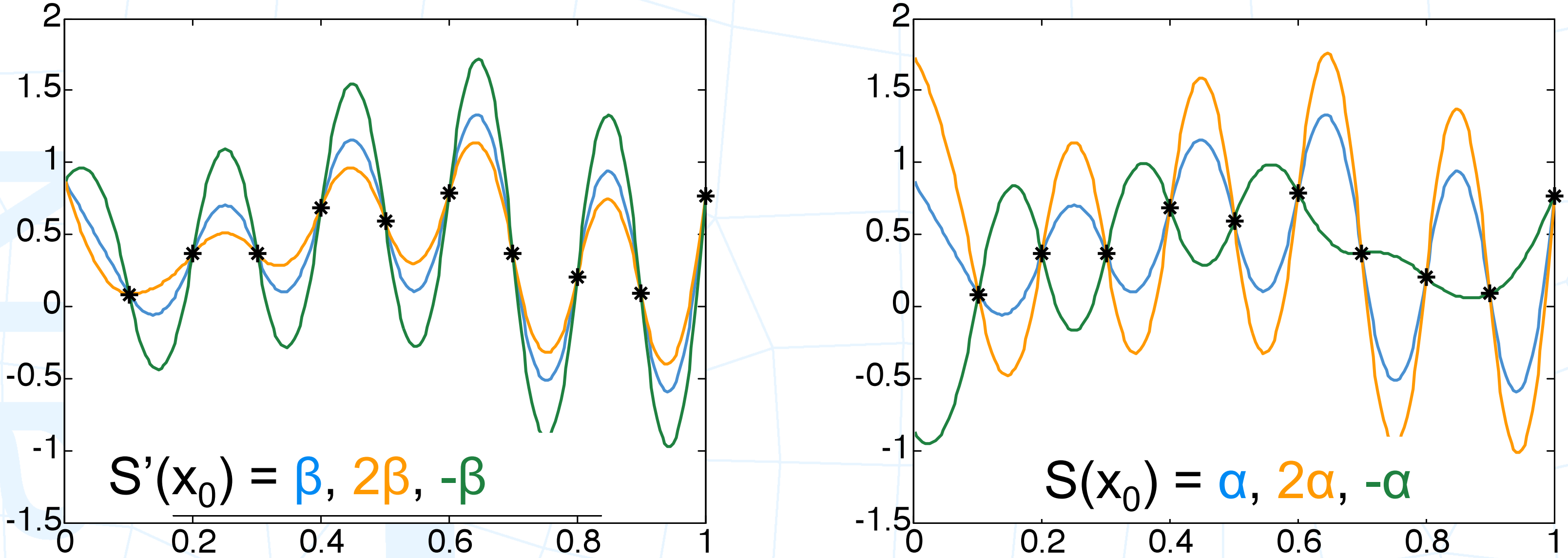
BASE LOCAL



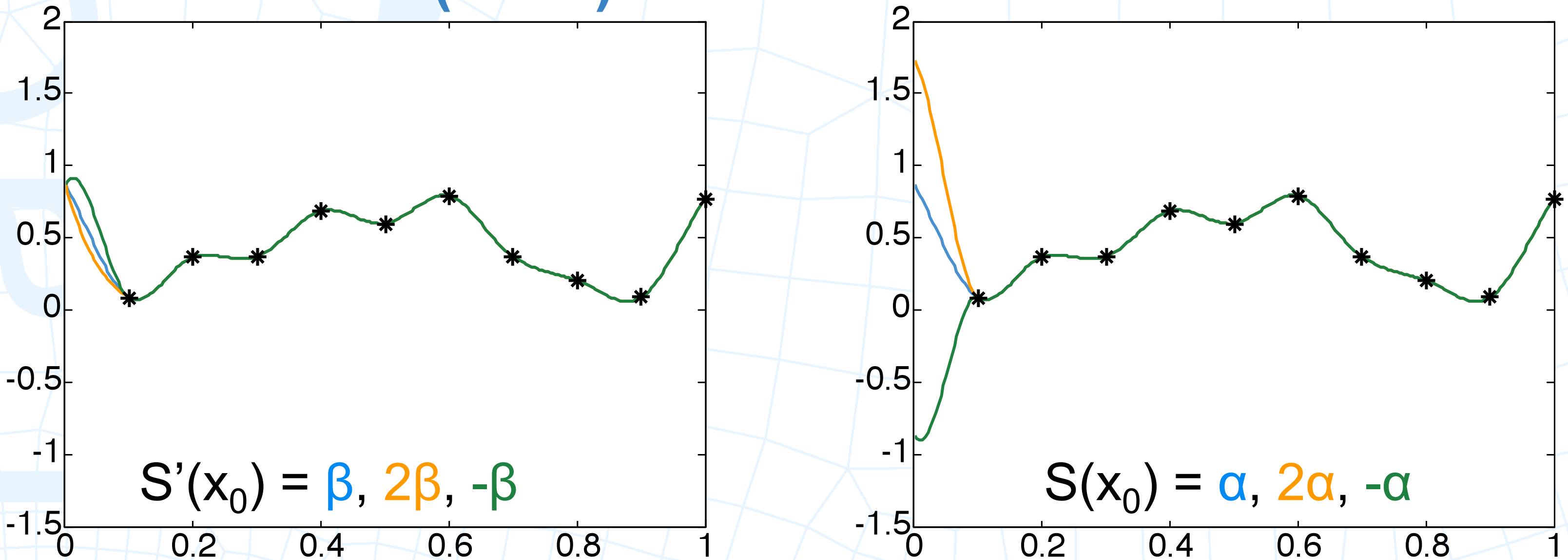
$$\widehat{\Phi}_i(x_j) = 0 \qquad \widehat{\Phi}'_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Ejemplo

- Spline C1 parabólico **(no local)**



- Spline C1 cúbico **(local)**



4. SPLINE C2 CÚBICO

- En cada intervalo: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
  - Número de coeficientes: **4n**
  - Número de condiciones:
    continuidad del spline y de la primera y segunda derivada en los n-1 puntos interiores

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= S_{i-1}(x_i) \\ S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i) \\ S_i''(x_i) &= S_{i-1}''(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

3(n-1)

Podemos imponer el valor de la función en los n+1 puntos base y <u>dos condiciones adicionales</u>

- Diferencia: **4n – 3(n-1) = (n+1) + 2**
  parámetros libres,
  dimensión del espacio

Condiciones adicionales

- Curvaturas prescritas en los extremos: s''_0 y s''_n dadas
  Formulación en curvaturas
  Caso particular: $s''_0=s''_n=0$ (spline natural)

- Pendientes prescritas en los extremos: s'_0 y s'_n dadas
  Formulación en pendientes (derivadas)

- Imposición de una pendiente y una curvatura.

- Spline periódico:
  Si se verifica $f_0=f_n$ puede ser interesante exigir

  $$s'_0=s'_n \text{ y } s''_0=s''_n$$

- Interpolación cuadrática en los dos subintervalos extremos:

  $$s''_0=s''_1 \text{ y } s''_{n-1}=s''_n$$

- Interpolación con la misma cúbica en los dos primeros subintervalos y en los dos últimos subintervalos

Formulación en derivadas

- Spline cúbico (de momento con continuidad C^1)

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3 \\ &+ \left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 \\ &+ (x-x_i)s'_i + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

- Sólo podemos imponer el valor de $S(x_i)=f_i$ y dos condiciones adicionales

- Las pendientes s'_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de $S''(x)$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (i = 1 \ldots n-1)$$

y las dos condiciones adicionales.

detalles

Formulación en curvaturas

- Se expresa el spline en función de f_i y de las segundas derivadas en los puntos base s_i''

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_i(x_i) &= f_i \\ S_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \end{aligned}} \qquad \Downarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} S_i''(x_i) &= s_i'' \\ S_i''(x_{i+1}) &= s_{i+1}'' \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s_{i+1}'' - s_i''\right)(x-x_i)^3 + \frac{1}{2}s_i''(x-x_i)^2 \\ &+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s_{i+1}'' + 2s_i''\right)\right](x-x_i) + f_i \end{aligned}$$

- Las curvaturas s_i'' no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de $S'(x)$

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i)$$

y las dos condiciones adicionales.

detalles

SPLINE NATURAL

- El Spline natural es el spline C2 cúbico con $s''_0=s''_n=0$

Teorema

De todas las funciones C^2 que pasan por $\{x_i,f_i\}_{i=0,\dots,n}$, la más suave es el spline natural.

La suavidad de una función se mide con el funcional

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} \left[f''(x)\right]^2 \, dx$$

Es decir, el spline natural minimiza el funcional I en C^2.

Demostración

- Sea h∈C^{2} cualquiera y S(x) el spline natural. La diferencia del funcional I es

$$\int_{x_0}^{x_n} \left[h''(x)\right]^2 \, dx - \int_{x_0}^{x_n} \left[s''(x)\right]^2 \, dx = \int_{x_0}^{x_n} \left(h''^2 - s''^2\right) \, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(h'' - s''\right)^2 \, dx + 2 \underbrace{\int_{x_0}^{x_n} s'' \left(h'' - s''\right) \, dx}$$

donde

$$\int_{x_0}^{x_n} s'' \left(h'' - s''\right) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'' \left(h'' - s''\right) \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} s'' \left(h' - s'\right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''' \left(h' - s'\right) \, dx$$

$$= s'' \left(h' - s'\right) \Big|_{x_0}^{x_n} - \sum_{i=0}^{n-1} s_i''' \underbrace{\left(h - s\right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}}_{0}$$

Por lo tanto,

$$\int_{x_0}^{x_n} \left[h''(x)\right]^2 \, dx - \int_{x_0}^{x_n} \left[s''(x)\right]^2 \, dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(h'' - s''\right)^2 \, dx + 2s'' \left(h' - s'\right) \Big|_{x_0}^{x_n}$$

siendo S(x) el spline natural ($s''_0 = s''_n = 0$)

$$\int_{x_0}^{x_n} \left[h''(x)\right]^2 \, dx \geq \int_{x_0}^{x_n} \left[s''(x)\right]^2 \, dx$$

Observación

De la ecuación

$$\int_{x_0}^{x_n} \left[h''(x)\right]^2 \, dx - \int_{x_0}^{x_n} \left[s''(x)\right]^2 \, dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(h'' - s''\right)^2 \, dx + 2s'' \left(h' - s'\right)\Big|_{x_0}^{x_n}$$

también se deduce que el spline cúbico C2 es la función C^2 más suave para pendientes fijadas en los extremos ($h'_0 = s'_0$, $h'_n = s'_n$)

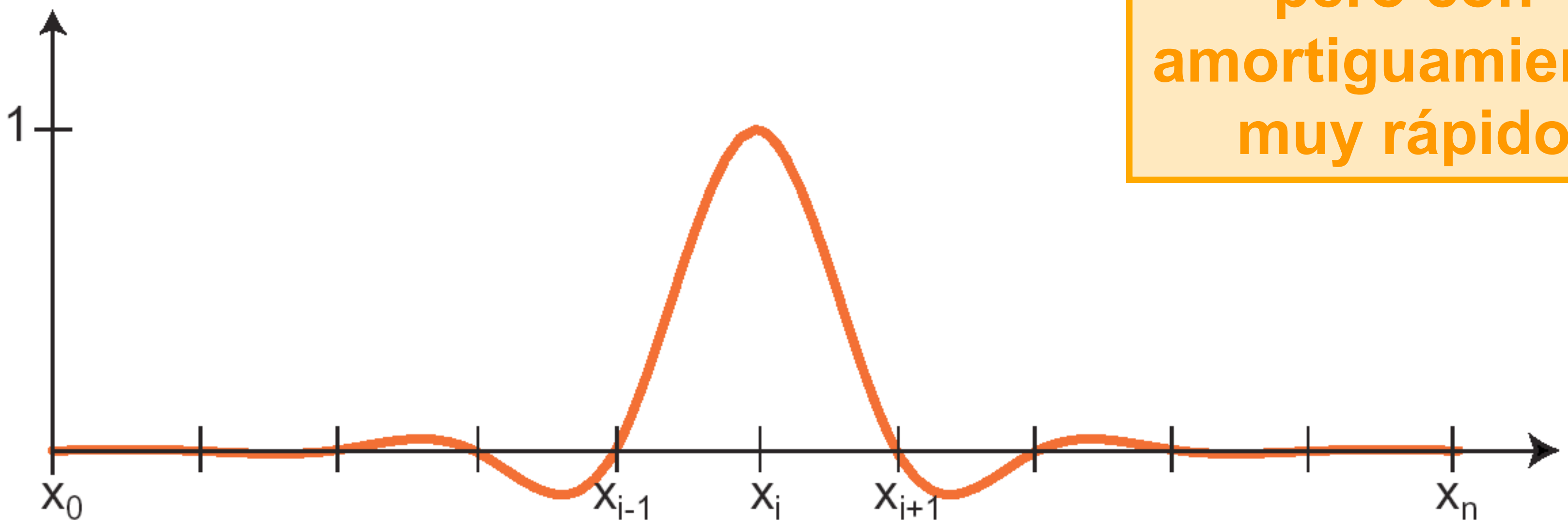
Base de splines naturales

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x)$$

donde

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

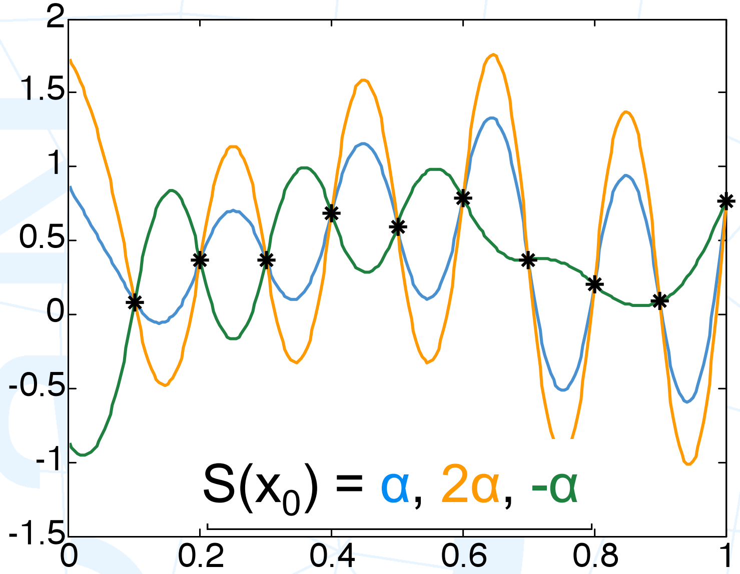
$$\Phi_i''(x_0) = \Phi_i''(x_n) = 0$$



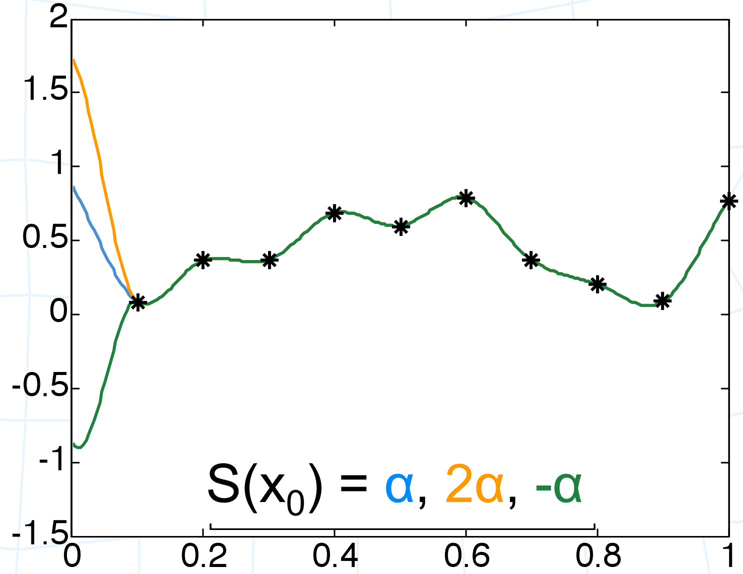
Base no local, pero con amortiguamiento muy rápido

Ejemplo

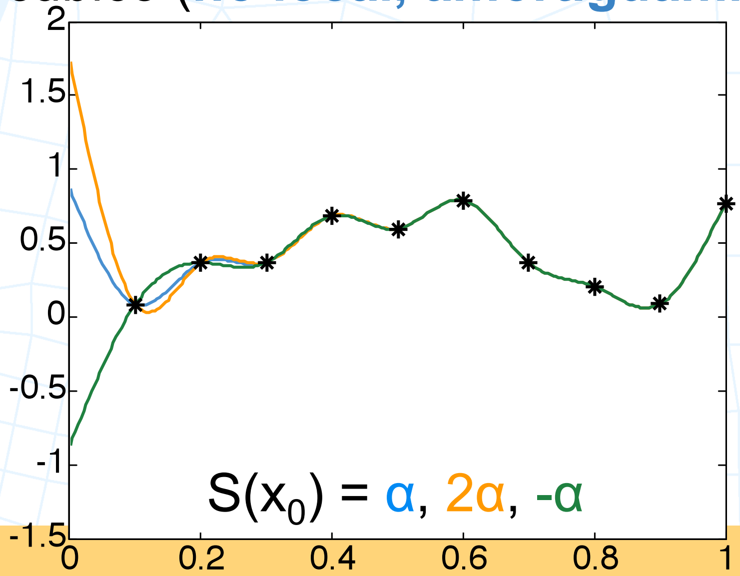
Spline C1 parabólico **(no local)**



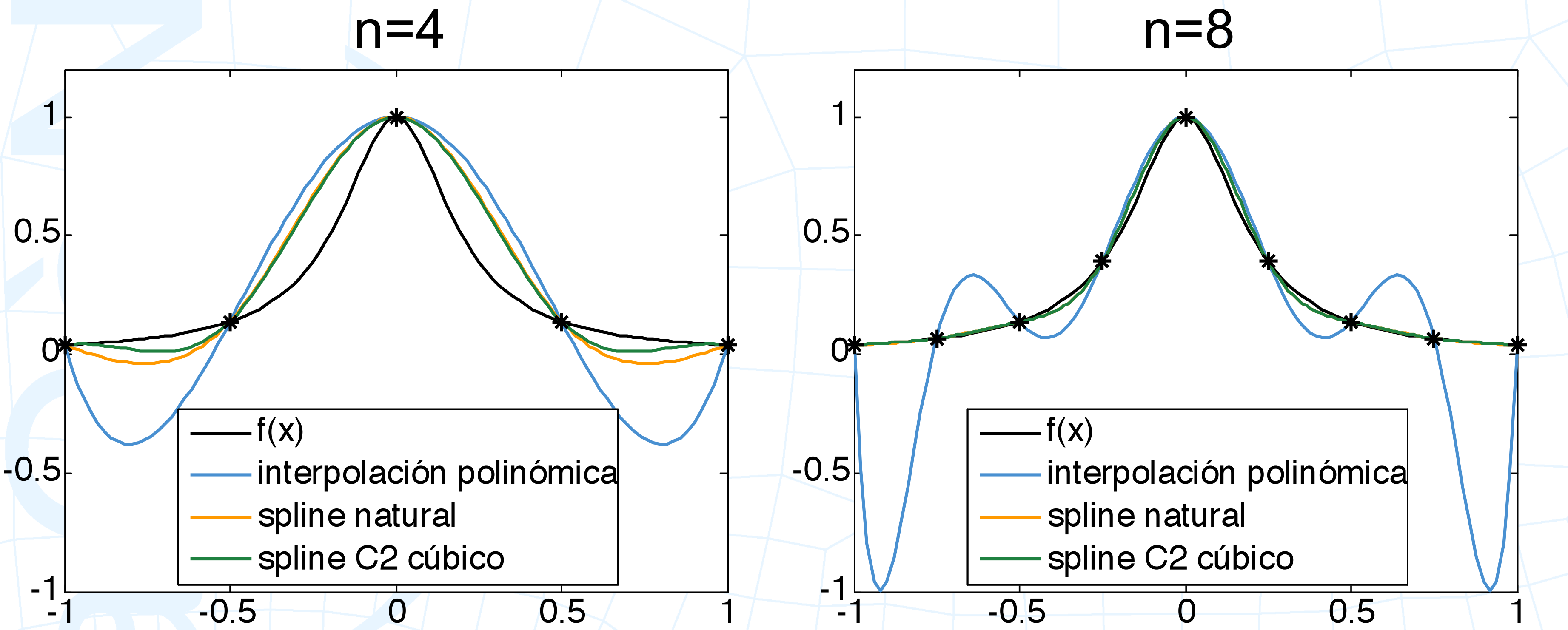
Spline C1 cúbico **(local)**



Spline C2 cúbico (**no local, amortiguamiento rápido**)



Ejemplo: paradoja de Runge



THE END

Formulación en derivadas

- Spline cúbico (de momento con continuidad C^1)

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3 \\ &+ \left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 \\ &+ (x-x_i)s'_i + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

- Sólo podemos imponer el valor de $S(x_i)=f_i$ y dos condiciones adicionales

- Las pendientes s'_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de $S''(x)$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (i = 1 \ldots n-1)$$

y las dos condiciones adicionales

$$
\begin{aligned}
S_i(x) \;&= \left[h_i\left(s_i' + s_{i+1}'\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^3 \\
&+ \left[3t_i - h_i\left(2s_i' + s_{i+1}'\right)\right]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2 \\
&+ (x - x_i)s_i' + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]
\end{aligned}
$$

- Segundas derivadas del spline:

$$
\begin{aligned}
S_i''(x) \;&= 6\left[h_i\left(s_i' + s_{i+1}'\right) - 2t_i\right]\frac{x - x_i}{h_i^3} \\
&+2\left[3t_i - h_i\left(2s_i' + s_{i+1}'\right)\right]\frac{1}{h_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{i-1}''(x) \;&= 6\left[h_{i-1}\left(s_{i-1}' + s_i'\right) - 2t_{i-1}\right]\frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}^3} \\
&+2\left[3t_{i-1} - h_{i-1}\left(2s_{i-1}' + s_i'\right)\right]\frac{1}{h_{i-1}^2}
\end{aligned}
$$

- Imponiendo continuidad de la segunda derivada:

$$S_i''(x_i) = 2\left[3t_i - h_i\left(2s_i' + s_{i+1}'\right)\right]\frac{1}{h_i^2}$$

$$\|$$

$$S_{i-1}''(x_i) = 6\left[h_{i-1}\left(s_{i-1}' + s_i'\right) - 2t_{i-1}\right]\frac{1}{h_{i-1}^2} + 2\left[3t_{i-1} - h_{i-1}\left(2s_{i-1}' + s_i'\right)\right]\frac{1}{h_{i-1}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}s_{i-1}' + 2s_i' + \frac{h_{i-1}}{h_i+h_{i-1}}s_{i+1}' \\ &= \frac{3}{h_i+h_{i-1}}\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}t_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_i}t_i\right)\end{aligned} \quad (i = 1 \ldots n-1)}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA · LABORATORI DE CÀLCUL NUMÈRIC · LaCàN

- Sistema de ecuaciones

sistema (n-1)x(n+1)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} & \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_0 \\ s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n-2} \\ s'_{n-1} \\ s'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}$$

$$e_i = \frac{3}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} t_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_i} t_i \right)$$

Hay que añadir las dos condiciones adicionales

- Pendientes prescritas en los extremos: s'$_0$ y s'$_n$ dadas

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n-2} \\ s'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - \lambda_1 s'_0 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} - \mu_{n-1} s'_n \end{pmatrix}$$

(matriz n-1 × n-1, tridiagonal, no simétrica y estrictamente diagonalmente dominante)

Formulación en curvaturas

Se expresa el spline en función de f_i y de las segundas derivadas en los puntos base s_i''

- Cúbica en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

- Segunda derivada: $S_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$

- Imponemos valores $S(x_i)=f_i$ y $S''(x_i)=s_i''$:

$$\left.\begin{array}{l} S_i(x_i) = f_i \\ S_i(x_{i+1}) = f_{i+1} \\ S_i''(x_i) = s_i'' \\ S_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_i = f_i \\ a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = f_{i+1} \\ 2b_i = s_i'' \\ 6a_i h_i + 2b_i = s_{i+1}'' \end{array}\right.$$

- Spline cúbico C2 (formulación en curvaturas)

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s''_{i+1} - s''_i\right)(x-x_i)^3 + \frac{1}{2}s''_i(x-x_i)^2 \\ &+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1} + 2s''_i\right)\right](x-x_i) + f_i \end{aligned}$$

- Sólo podemos imponer el valor de f_i y dos condiciones adicionales
- Las curvaturas s''_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de S'(x)

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$$

y las dos condiciones adicionales

$$
\begin{aligned}
S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s''_{i+1} - s''_i\right)(x-x_i)^3 + \frac{1}{2}s''_i(x-x_i)^2 \\
&+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1} + 2s''_i\right)\right](x-x_i) + f_i
\end{aligned}
$$

- Primeras derivada del spline:

$$
\begin{aligned}
S'_i(x) &= \frac{1}{2h_i}\left(s''_{i+1} - s''_i\right)(x-x_i)^2 + s''_i(x-x_i) \\
&+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1} + 2s''_i\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S'_{i-1}(x) &= \frac{1}{2h_{i-1}}\left(s''_i - s''_{i-1}\right)(x-x_{i-1})^2 + s''_{i-1}(x-x_{i-1}) \\
&+ \left[\frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{1}{6}h_{i-1}\left(s''_i + 2s''_{i-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

- Imponiendo continuidad de la primera derivada:

$$S_i'(x_i) = \frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6} h_i \left(s_{i+1}'' + 2 s_i'' \right)$$

$$\|$$

$$\begin{aligned} S_{i-1}'(x_i) &= \frac{1}{2}\left(s_i'' - s_{i-1}'' \right) h_{i-1} + s_{i-1}'' h_{i-1} \\ &+ \left[\frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{1}{6} h_{i-1} \left(s_i'' + 2 s_{i-1}'' \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} s_{i-1}'' + 2 s_i'' + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} s_{i+1}'' \\ = \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{t_i}{h_i} - \frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \end{aligned} \quad (i = 1 \ldots n-1)}$$

- Sistema de ecuaciones

sistema (n-1)x(n+1)

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \\ s''_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{t_i}{h_i} - \frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

Hay que añadir las dos condiciones adicionales

- Curvaturas prescritas en los extremos: s''$_0$ y s''$_n$ dadas

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 s''_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} s''_n \end{pmatrix}$$

matriz n-1 × n-1, tridiagonal, no simétrica y estrictamente diagonalmente dominante

Condiciones adicionales: s'$_0$ y s''$_n$

- **Formulación en curvaturas** (análogamente se puede hacer para la formulación en derivadas)

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s''_{i+1} - s''_i\right)(x - x_i)^3 + \frac{1}{2}s''_i(x - x_i)^2 \\ &+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1} + 2s''_i\right)\right](x - x_i) + f_i \end{aligned}$$

con

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \\ s''_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

sistema (n-1)x(n+1)

$$S_0(x) = \frac{1}{6h_0}\left(s_1'' - s_0''\right)(x-x_0)^3 + \frac{1}{2}s_0''(x-x_0)^2 + \left[\frac{t_0}{h_0} - \frac{1}{6}h_0\left(s_1'' + 2s_0''\right)\right](x-x_0) + f_0$$

- Imponemos la derivada s’$_0$

$$s_0' = S_0'(x_0) = \frac{t_0}{h_0} - s_0''\frac{h_0}{3} - s_1''\frac{h_0}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$2s_0'' + s_1'' = 6\frac{t_0}{h_0^2} - 6\frac{s_0'}{h_0}$$

- El sistema resultante es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0'' \\ s_1'' \\ s_2'' \\ \vdots \\ s_{n-2}'' \\ s_{n-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t_0/h_0^2 - 6s_0'/h_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1}s_n'' \end{pmatrix}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
LABORATORI DE CÀLCUL NUMÈRIC