

Fundamentos 1

Lógica de Predicados



Predicados



- Estudamos até agora a lógica proposicional



Predicados

- Estudamos até agora a lógica proposicional
- A lógica proposicional têm possibilidade limitada de expressão.



Predicados

- Estudamos até agora a lógica proposicional
 - A lógica proposicional têm possibilidade limitada de expressão.
 - Exemplo:
 - “Todo computador conectado à rede da universidade está funcionando adequadamente”
- Devemos usar a lógica de predicados para expressar adequadamente



Lógica de Predicados

- Expressa adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural.
- Exemplo:
- “Existe um computador na rede da universidade que está sob o ataque de um hacker.”



Predicados

- A frase “ $x > 0$ ” descreve uma propriedade da variável x .



Predicados

- A frase “ $x > 0$ ” descreve uma propriedade da variável x .
- Propriedade: x é positivo.



Predicados

- A frase “ $x > 0$ ” descreve uma propriedade da variável x .
- Propriedade: x é positivo.
- Uma propriedade também é denominada um **predicado**.



Predicados

- A frase “ $x > 0$ ” descreve uma propriedade da variável x .
- Propriedade: x é positivo.
- Note que essa declaração não é Verdadeira nem Falsa quando o valor da variável não é especificado.



Predicados

- A frase “ $x > 0$ ” descreve uma propriedade da variável x .
- Propriedade: x é positivo.
- A notação $P(x)$ é usada para representar alguma propriedade, ou predicado, não explicitada que a variável x possa ter.



Predicados

- $\underline{X} > \underline{3}$
 \downarrow \downarrow
 Variável / sujeito da declaração Predicado P
- Também chamada de função proposicional P em x.



Predicados

- Uma vez que um valor é dado para a variável x , a declaração $P(x)$ torna se uma proposição e tem um valor verdade.
- Exemplo:
 $P(x) = "x > 3"$
 $P(4)$ é Verdadeiro
 $P(2)$ é Falso



Predicados

- Podemos ter predicados com mais de uma variável.

$$Q(x,y) = "x = y + 3"$$

$Q(1,2)$ é Falso

$Q(3,0)$ é Verdadeiro



Predicados

- Predicados ocorrem em programas

if $x > 0$ then $x := x + 1$



Exercícios Rosen – pg 46

- 1) Considere $P(x)$ como o predicado " $x \leq 4$ ".
Quais são os valores verdade das proposições abaixo?
- a) $P(0)$
 - b) $P(4)$
 - c) $P(6)$



Exercícios Rosen – pg 46

- 1) Considere $P(x)$ como o predicado “ $x \leq 4$ ”.
- Quais são os valores verdade das proposições abaixo?
- a) $P(0)$ é Verdade
 - b) $P(4)$
 - c) $P(6)$



Exercícios Rosen – pg 46

- 1) Considere $P(x)$ como o predicado " $x \leq 4$ ".
Quais são os valores verdade das proposições abaixo?
- a) $P(0)$ é Verdade
 - b) $P(4)$ é Verdade
 - c) $P(6)$



Exercícios Rosen – pg 46

- 1) Considere $P(x)$ como o predicado " $x \leq 4$ ".
Quais são os valores verdade das proposições abaixo?
- a) $P(0)$ é Verdade
 - b) $P(4)$ é Verdade
 - c) $P(6)$ é Falso



Exercícios Rosen – pg 46

2) Considere $P(x)$ como o predicado “a palavra x contém a letra a ”. Quais são os valores verdade das proposições abaixo?

- a) $P(\text{orange})$
- b) $P(\text{lemon})$
- c) $P(\text{true})$
- d) $P(\text{false})$



Exercícios Rosen – pg 46

2) Considere $P(x)$ como o predicado “a palavra x contém a letra a ”. Quais são os valores verdade das proposições abaixo?

- a) $P(\text{orange})$ é Verdade
- b) $P(\text{lemon})$
- c) $P(\text{true})$
- d) $P(\text{false})$



Exercícios Rosen – pg 46

2) Considere $P(x)$ como o predicado “a palavra x contém a letra a ”. Quais são os valores verdade das proposições abaixo?

- a) $P(\text{orange})$ é Verdade
- b) $P(\text{lemon})$ é Falso
- c) $P(\text{true})$
- d) $P(\text{false})$



Exercícios Rosen – pg 46

2) Considere $P(x)$ como o predicado “a palavra x contém a letra a ”. Quais são os valores verdade das proposições abaixo?

- a) $P(\text{orange})$ é Verdade
- b) $P(\text{lemon})$ é Falso
- c) $P(\text{true})$ é Falso
- d) $P(\text{false})$



Exercícios Rosen – pg 46

2) Considere $P(x)$ como o predicado “a palavra x contém a letra a ”. Quais são os valores verdade das proposições abaixo?

- a) $P(\text{orange})$ é Verdade
- b) $P(\text{lemon})$ é Falso
- c) $P(\text{true})$ é Falso
- d) $P(\text{false})$ é Verdade



Conjuntos

- É uma estrutura na qual todas as outras estruturas são construídas.
- São usadas para agrupar objetos.
- Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos. (usar letras maiúsculas).
- Objetos de um conjunto são chamados de elementos, ou membros, do conjunto.



Conjuntos

- Diz-se que os elementos pertencem ao conjunto.
- Notação de pertinência:
 - $a \in A$
 - $a \notin A$



Conjuntos Importantes

- $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 - Conjunto dos números naturais
- $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 - Conjunto dos números inteiros
- $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - Conjunto dos números inteiros positivos
- R
 - Conjunto dos números reais



Conjunto Verdade

- Um predicado é verdadeiro para um conjunto de elementos, este conjunto é chamado de conjunto verdade.
- Exemplo:
 - $P(x) = "x + 1 > 8"$
 - Domínio: conjunto dos números naturais
 - Conjunto Verdade: $\{ x \mid x > 8 \}$
 $\{8, 9, 10,\}$



Exercícios

- Determinar o conjunto verdade em \mathbb{N} dos predicados.
 - $P(x) = "2x = 6"$
 - $P(x) = "x - 1 < 4"$
 - $P(x) = "5x + 6 = 0"$



Exercícios

- Determinar o conjunto verdade em \mathbb{N} dos predicados.
 - $P(x) = "2x = 6"$ $CV=\{3\}$
 - $P(x) = "x - 1 < 4"$
 - $P(x) = "5x + 6 = 0"$
 -





Exercícios

- Determinar o conjunto verdade em \mathbb{N} dos predicados.
 - $P(x) = "2x = 6"$ $CV=\{3\}$
 - $P(x) = "x - 1 < 4"$ $CV=\{0,1,2,3,4\}$
 - $P(x) = "5x + 6 = 0"$





Exercícios

- Determinar o conjunto verdade em \mathbb{N} dos predicados.
 - $P(x) = "2x = 6"$ $CV=\{3\}$
 - $P(x) = "x - 1 < 4"$ $CV=\{0,1,2,3,4\}$
 - $P(x) = "5x + 6 = 0"$ $CV=\{ \}$

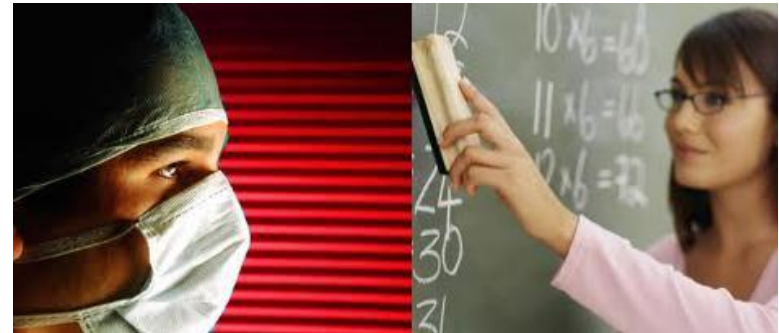


Operações Lógicas Sobre Predicados



- As operações lógicas que usamos para proposições estendem se a predicados.

- $M(x)$ = “x é médico”
- $P(x)$ = “x é professor”



- $M(x) \wedge P(x)$ x é médico e professor

Operações Lógicas sobre Predicados



- Conjunção

$$P(x) = "x > 2"$$

$$Q(x) = "x < 8"$$

$$P(x) \wedge Q(x) = "2 < x < 8"$$

$$CV = ??? \text{ em } N$$



Operações Lógicas sobre Predicados



- Conjunção

$$P(x) = "x > 2"$$

$$Q(x) = "x < 8"$$

$$P(x) \wedge Q(x) = "2 < x < 8"$$

$$CV = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$



Operações Lógicas sobre Predicados



- Disjunção

$$P(x) = "x < 2"$$

$$Q(x) = "x > 8"$$

$$P(x) \vee Q(x) = "x < 2 \text{ ou } x > 8"$$

CV em \mathbb{N} ??? 0? 1? 2? 5?



Operações Lógicas sobre Predicados

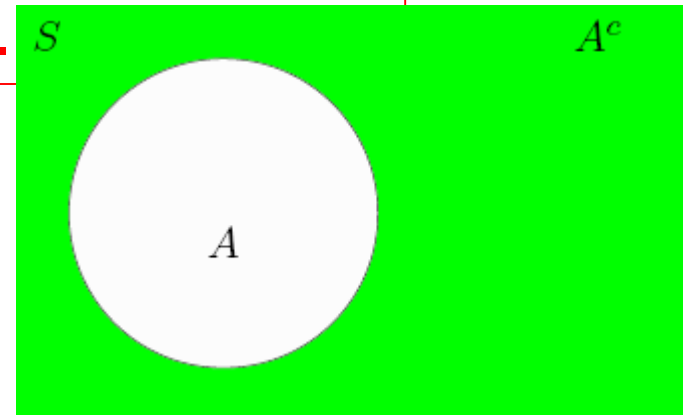


- Negação

$P(x)$ = “x é par”

$\sim P(x)$ = ???

O conjunto verdade de um é o complemento do conjunto verdade do outro.



Operações Lógicas sobre Predicados

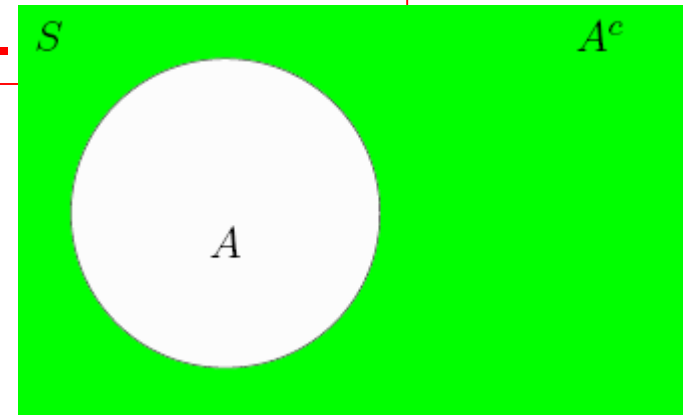


- Negação

$P(x)$ = “x é par”

$\sim P(x)$ = “x é ímpar”

O conjunto verdade de um é o complemento do conjunto verdade do outro.



Operações Lógicas sobre Predicados



- Negação

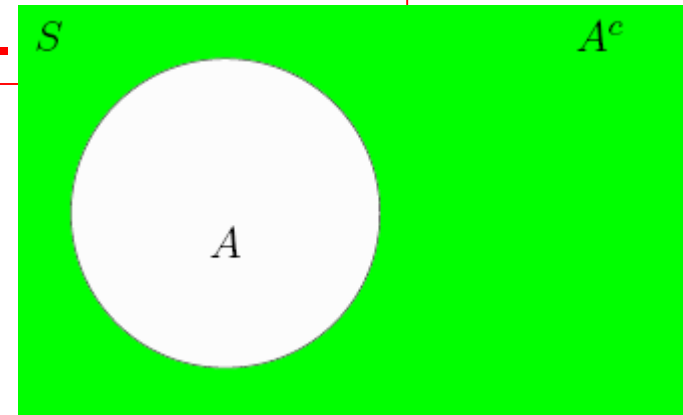
$P(x) = \text{"x é par"}$

$\sim P(x) = \text{"x é ímpar"}$

$Q(x) = \text{"x < y"}$

$\sim Q(x) = ???$

O conjunto verdade de um é o complemento do conjunto verdade do outro.



Operações Lógicas sobre Predicados



- Negação

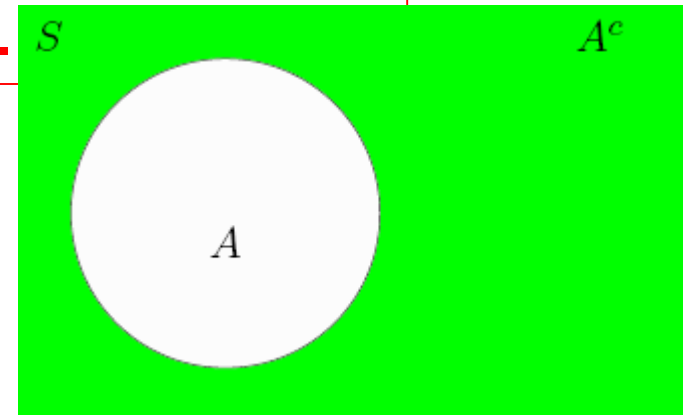
$P(x) = \text{"x é par"}$

$\sim P(x) = \text{"x é ímpar"}$

$Q(x) = \text{"x < y"}$

$\sim Q(x) = \text{"x} \geq y\text{"}$

O conjunto verdade de um é o complemento do conjunto verdade do outro.



Operações Lógicas sobre Predicados



- Condicional
- Temos:

$$P(x) = "x^2 - 5x + 6 = 0"$$

$$Q(x) = "x^2 - 9 = 0"$$

$P(x) \rightarrow Q(x)$ Lê se: Se " $x^2 - 5x + 6 = 0$ "
então " $x^2 - 9 = 0$ "

Condicional



Seja: $P(x) = "x|12"$ “12 é divisível por x”

Quais são os valores verdade de $P(x)$?



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ "12 é divisível por x"

Quais são os valores verdades de $P(x)$?

$$12/\textcolor{red}{1} = 12$$

$$12/\textcolor{red}{2} = 6$$

$$12/\textcolor{red}{3} = 4$$

$$12/\textcolor{red}{4} = 3$$

$$12/\textcolor{red}{6} = 2$$

$$12/\textcolor{red}{12} = 1$$



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$Q(x) = "x|45"$ "45 é divisível por x"

Quais são os valores verdades de $Q(x)$?



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$Q(x) = "x|45"$ "45 é divisível por x"

Quais são os valores verdade de $Q(x)$?

$$45/1 = 45$$

$$45/3 = 15$$

$$45/5 = 9$$

$$45/9 = 5$$

$$45/15 = 3$$

$$45/45 = 1$$



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

Qual valor verdade de $P(1) \rightarrow Q(1)$?



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1,2,3,4,6,12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1,3,5,9,15,45\}$

Qual valor verdade de $P(1) \rightarrow Q(1)$?

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = V \\ Q(1) = V \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(1) \rightarrow Q(1) = V \rightarrow V \\ P(1) \rightarrow Q(1) = V \end{array}$$



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

Qual valor verdade de $P(5) \rightarrow Q(5)$?



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1,2,3,4,6,12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1,3,5,9,15,45\}$

Qual valor verdade de $P(5) \rightarrow Q(5)$?

$$\left. \begin{array}{l} P(5) = F \\ Q(5) = V \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(5) \rightarrow Q(5) = F \rightarrow V \\ P(5) \rightarrow Q(5) = V \end{array}$$



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

Qual valor verdade de $P(7) \rightarrow Q(7)$?



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1,2,3,4,6,12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1,3,5,9,15,45\}$

Qual valor verdade de $P(7) \rightarrow Q(7)$?

$$\left. \begin{array}{l} P(7) = F \\ Q(7) = F \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(7) \rightarrow Q(7) = F \rightarrow F \\ P(7) \rightarrow Q(7) = V \end{array}$$



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

Qual valor verdade de $P(2) \rightarrow Q(2)$?



Condicional

Seja: $P(x) = "x|12"$ $CV = \{1,2,3,4,6,12\}$

$Q(x) = "x|45"$ $CV = \{1,3,5,9,15,45\}$

Qual valor verdade de $P(2) \rightarrow Q(2)$?

$$\left. \begin{array}{l} P(2) = V \\ Q(2) = F \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(2) \rightarrow Q(2) = V \rightarrow F \\ P(2) \rightarrow Q(2) = F \end{array}$$



Propriedade da Condicional

- Sabemos que:

$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em \mathbb{N} ?



Propriedade da Condicional

- Sabemos que:

$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em \mathbb{N} ?

Dica: $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$

Condicional



$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1,3,5,9,15,45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em N ?

$\sim P(x)$ Conjunto Verdade é o complemento do
Conjunto Verdade de $P(x)$





Condicional

$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em N ?

$\sim P(x)$ Conjunto Verdade é o complemento do
Conjunto Verdade de $P(x)$

$$\sim P(x) \quad CV = N - \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Condicional



$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em N ?

$$\sim P(x) \quad CV = N - \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q(x) \quad CV = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$$

O que podemos concluir?





Condicional

$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1,3,5,9,15,45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em N ?

$$\sim P(x) \quad CV = N - \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$Q(x) \quad CV = \{1,3,5,9,15,45\}$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$$

$$CV = N - \{1,2,3,4,6,12\} \cup \{1,3,5,9,15,45\}$$

Resumindo ...



Condicional

$$P(x) = "x|12" \quad CV = \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$Q(x) = "x|45" \quad CV = \{1,3,5,9,15,45\}$$

Qual o conjunto verdade de $P(x) \rightarrow Q(x)$ em N ?

$$\sim P(x) \quad CV = N - \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$Q(x) \quad CV = \{1,3,5,9,15,45\}$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$$

$$CV = N - \{1,2,3,4,6,12\} \cup \{1,3,5,9,15,45\}$$

$$CV = N - \{2,4, 6,12\}$$

Perguntas ????





Exercícios

- Página 47
 - Exercício 11 a,b,c,d
 - Exercício 12 a,b,c

Ponto de Participação

- 1 questão de Valor Verdade
- 2 questões de Conjunto Verdade
- 2 questões sobre Conjunto
 - Números reais representa com ponto
 - Conjunto representa com {...}
 - Não colocar espaço e responder com números em ordem crescente.