Lógica de Predicados

Relembrando...

Restrição de Domínio

Quantificadores com Restrição

- Restrições reescritas de outra forma
  - $\forall x<0\ (x^2 > 0)$
  - $\forall x\ (x<0 \rightarrow x^2 > 0)$
  - $\forall y \neq 0 (y^3 \neq 0)$
  - $\forall y (y \neq 0 \rightarrow y^3 \neq 0)$
  - $\exists z>0\ (z^2 = z)$
  - $\exists z(z>0\ \hat{}\ z^2 = z)$

Quantificador Universal equivale a Universal de Proposição Condicional

Quantificador Existencial equivale a Existencial de um Conjunção

Exercício 7 – Pg 47

Transcreva estas proposições para o português, em que C(x) é “x é um comediante”, F(x) é “x é divertido” e o domínio são todas as pessoas.

a) $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$

b) $\forall x(C(x) \wedge F(x))$

c) $\exists x (C(x) \rightarrow F(x))$

d) $\exists x (C(x) \wedge F(x))$

Conteúdo

- Prioridade dos Quantificadores (Rosen 38)
- Ligando Variáveis (Rosen 38)
- Quantificadores Agrupados
- Negando expressões com quantificadores Agrupados

Prioridade dos Quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional.

$$\forall x\, P(x) \vee Q(x) \equiv (\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$$

$$\forall x\, P(x) \vee Q(x) \neq \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$$

Prioridade dos Quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional.

$$\forall x\, P(x) \lor Q(x) \equiv (\forall x\, P(x)) \lor Q(x)$$

$$\forall x\, P(x) \lor Q(x) \neq \forall x\, (P(x) \lor Q(x))$$

Isso nos mostra o conceito de variável ligada

Prioridade dos Quantificadores

- Os quantificadores ∀ e ∃ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional.

$$\forall x\, P(x) \vee Q(x) \equiv (\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$$

$$\forall x\, P(x) \vee Q(x) \neq \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$$

E o conceito de escopo de uma variável

Variável Ligada

$\forall \underline{x}\ (\underline{x}+y = 1)$

x é ligada

- Quando um quantificador é usado na variável x, dizemos que essa ocorrência da variável é ligada.

Variável Livre

$\forall \underline{x}\, (\underline{x}+y = 1)$

x é ligada

- Uma ocorrência de uma variável que não é ligada por um quantificador ou não representa um conjunto de valores particulares é chamada de variável livre (y).

Variável Livre

$\forall\ \underline{x}\ (\underline{x}+y = 1)$

x é ligada

Não é uma proposição, pois y é variável livre

- Todas as variáveis que ocorrem em um função proposicional devem ser ligadas ou devem representar um conjunto de valores particulares para ser uma proposição.

Escopo

$\forall x\ (\boxed{P(x) \wedge Q(x)})\ \vee\ \forall x\ \boxed{R(x)}$

Escopo não se sobrepõe.

Escopo

Escopo

- É a parte da expressão lógica à qual um quantificador é aplicado.

Escopo

$$\forall x\ (\boxed{P(x) \wedge Q(x)}) \vee \forall y\ \boxed{R(y)}$$

Escopo

Escopo

Escopo não se sobrepõe.
Pode ser y ao invés de x.

- É a parte da expressão lógica à qual um quantificador é aplicado.
- Uma variável é livre se não está sob o escopo de algum quantificador.

Dúvidas!!!

- Dúvidas sobre Variável Livre, Variável Ligada e Escopo????

Predicados com duas variáveis

- Dados os conjuntos

  A={ -2,0,1,2}

  B={-1,0,3}

  Determinar o conjunto verdade de

  P(x,y)="x+y < 1" $x \in A$ e $y \in B$

Predicados com duas variáveis

- Dados os conjuntos

  A={ -2,0,1,2}

  B={-1,0,3}

  Determinar o conjunto verdade de

  P(x,y)="x+y < 1" $x \in A$ e $y \in B$

  CV = { (-2,-1), (-2,0), (0,-1), (0,0), (1,-1)}

Refrescar a Mente!!!

Todo estudante da classe visitou Canadá ou México!!!

Exercício

- Todo estudante da classe visitou Canadá ou México.
- Domínio={estudantes da classe}
- C(x) = “x visitou o Canadá”
- M(x) = “x visitou o México”

?????

Exercício

- Todo estudante da classe visitou Canadá ou México.
- Domínio={estudantes da classe}
- C(x) = “x visitou o Canadá”
- M(x) = “x visitou o México”

$$\forall x(C(x) \vee M(x))$$

Exercício

Podemos construir esta formula com apenas um predicado???

- Tod… a ou
  I…
- Domínio={estudantes da classe}
- C(x) = “x visitou o Canadá”
- M(x) = “x visitou o México”

$$\forall x(C(x) \lor M(x))$$

Predicados com duas variáveis

Todo estudante da classe visitou Canadá ou México.

Domínio: {estudantes desta classe}

V(x,y) = “x visitou o país y”

$\forall$x (V(x,México) v V(x,Canadá))

Quantificadores Agrupados

- Dois quantificadores são agrupados se um está no escopo do outro.

$$\forall x\ \exists y\ (x+y = 0)$$

Quantificadores Agrupados

- Dois quantificadores são agrupados se um está no escopo do outro.

$$\forall x\ \underbrace{\exists y\ (x+y=0)}$$

Tudo que está no escopo pode ser considerado uma função proposicional

$\forall x\ Q(x)$ onde

$$Q(x) = \text{“}\exists y P(x,y)\text{”}$$

$$P(x,y) = \text{“}(x+y=0)\text{”}$$

Quantificadores Agrupados

- Dois quantificadores são agrupados se um está no escopo do outro.

$$\forall x \; \exists y \; (x+y = 0)$$

É difícil de se entender!!!!

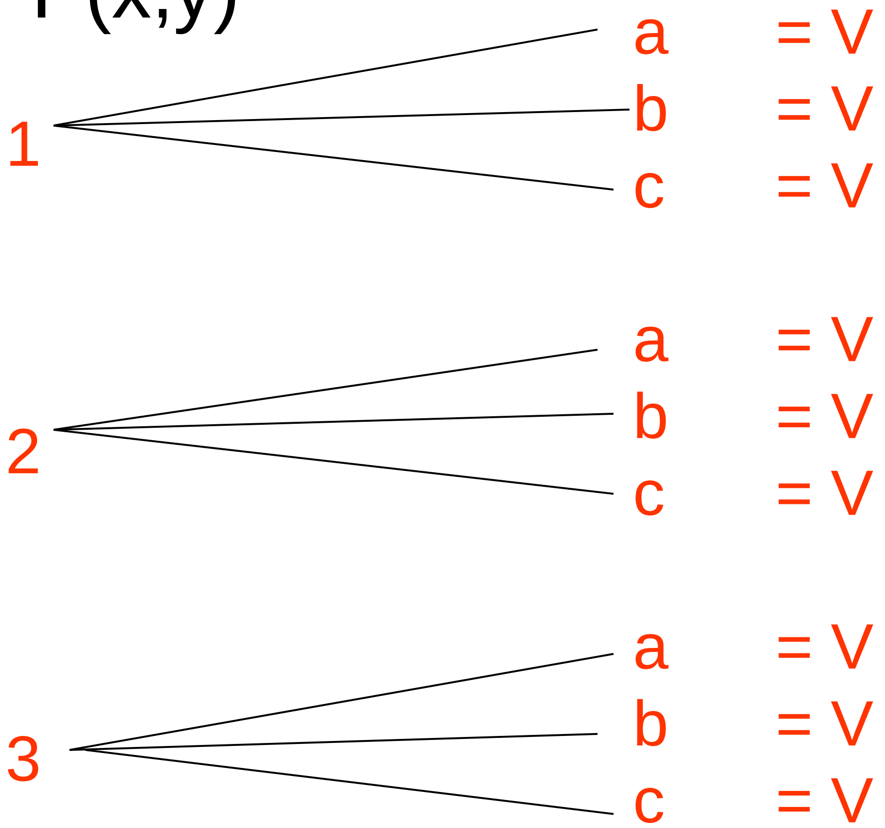
∀x Q(

Q(x) = “∃yP(x,y)”

P(x,y) = “(x+y = 0)”

Pensando em quantificações como um laço

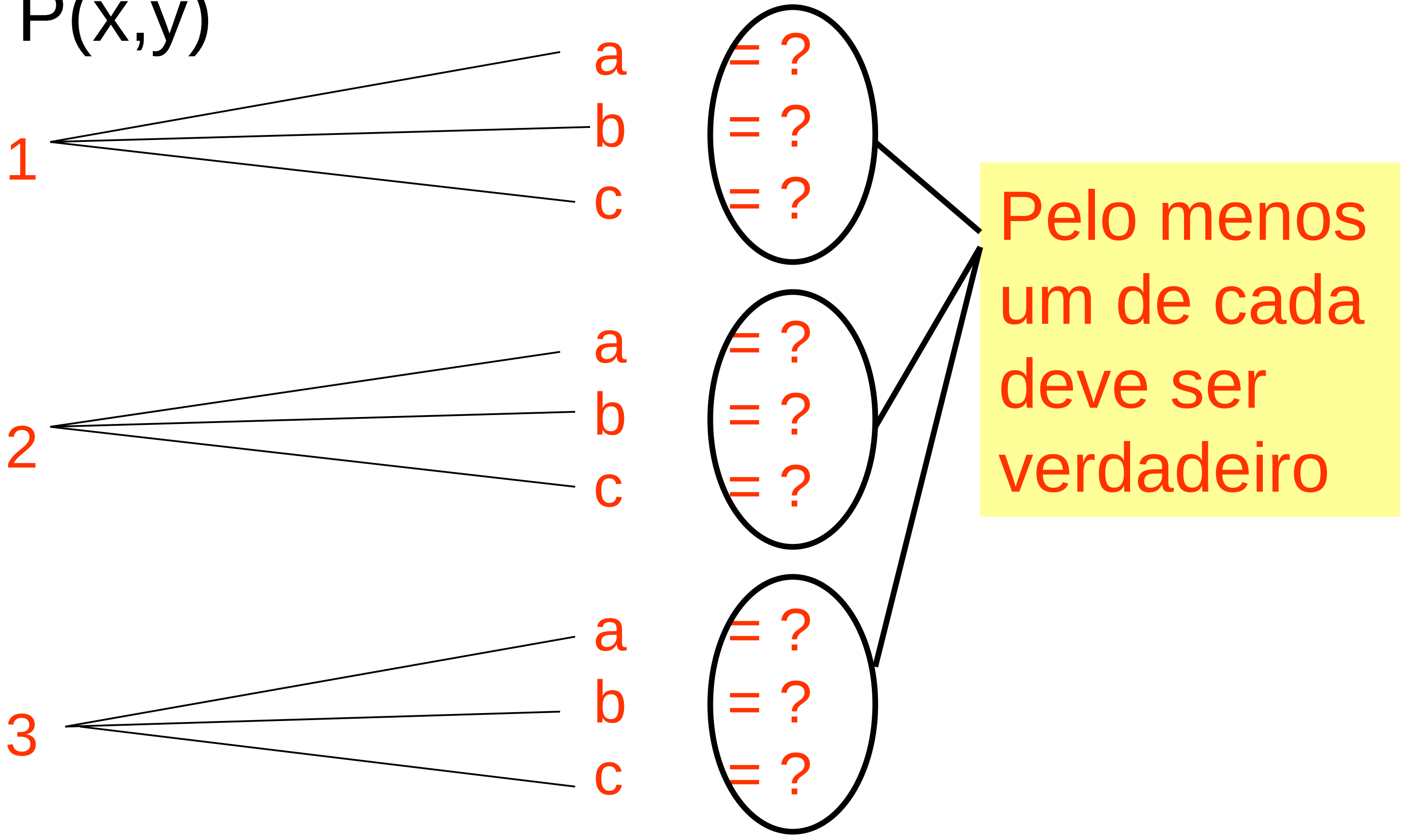
- $x \in \{1,2,3\}$ e y {a,b,c}
- $\forall x \, \forall y \, P(x,y)$



Todas as combinações devem ser verdadeiras

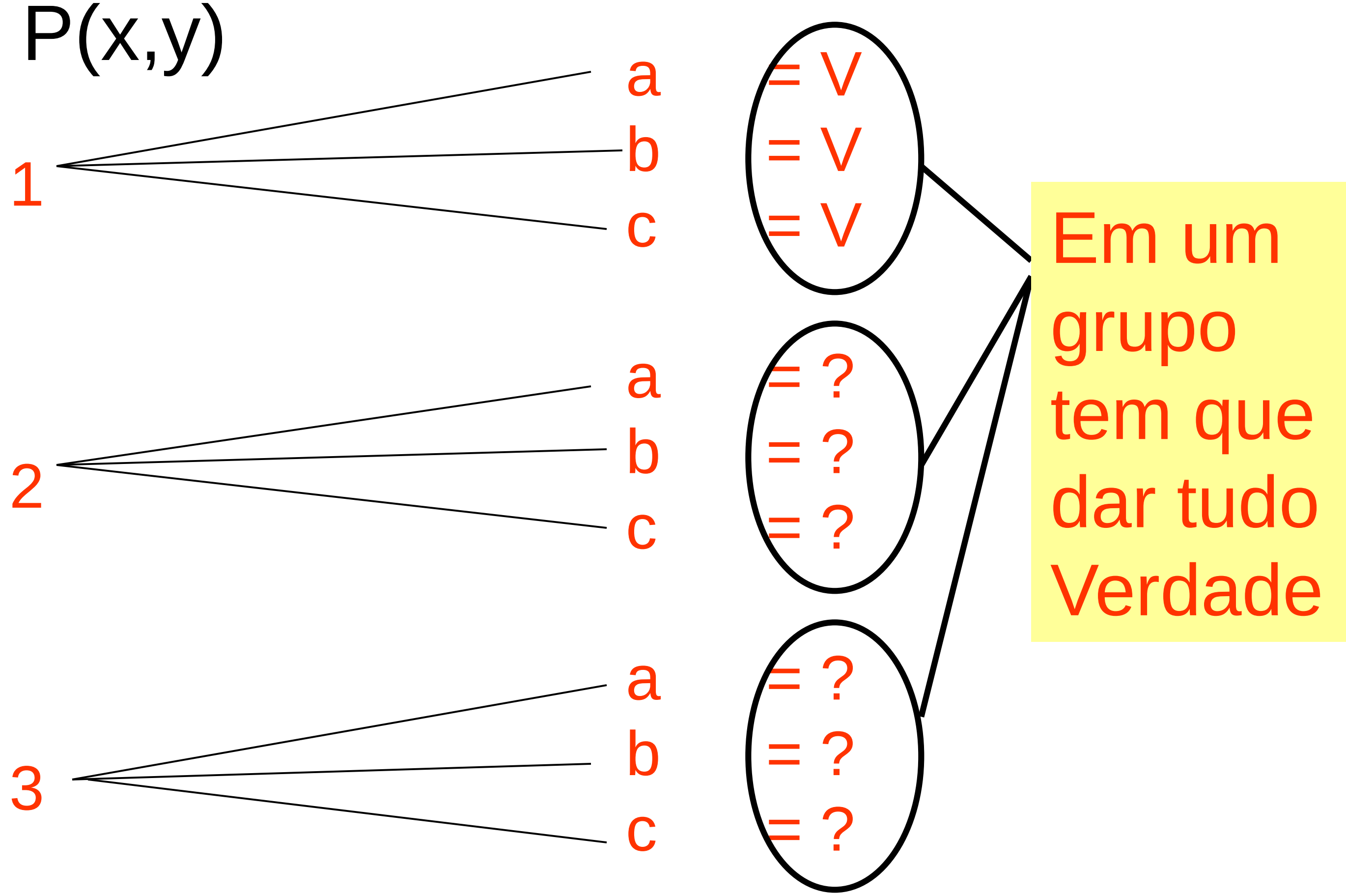
Pensando em quantificações como um laço

- $x \in \{1,2,3\}$ e y $\{a,b,c\}$
- $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$



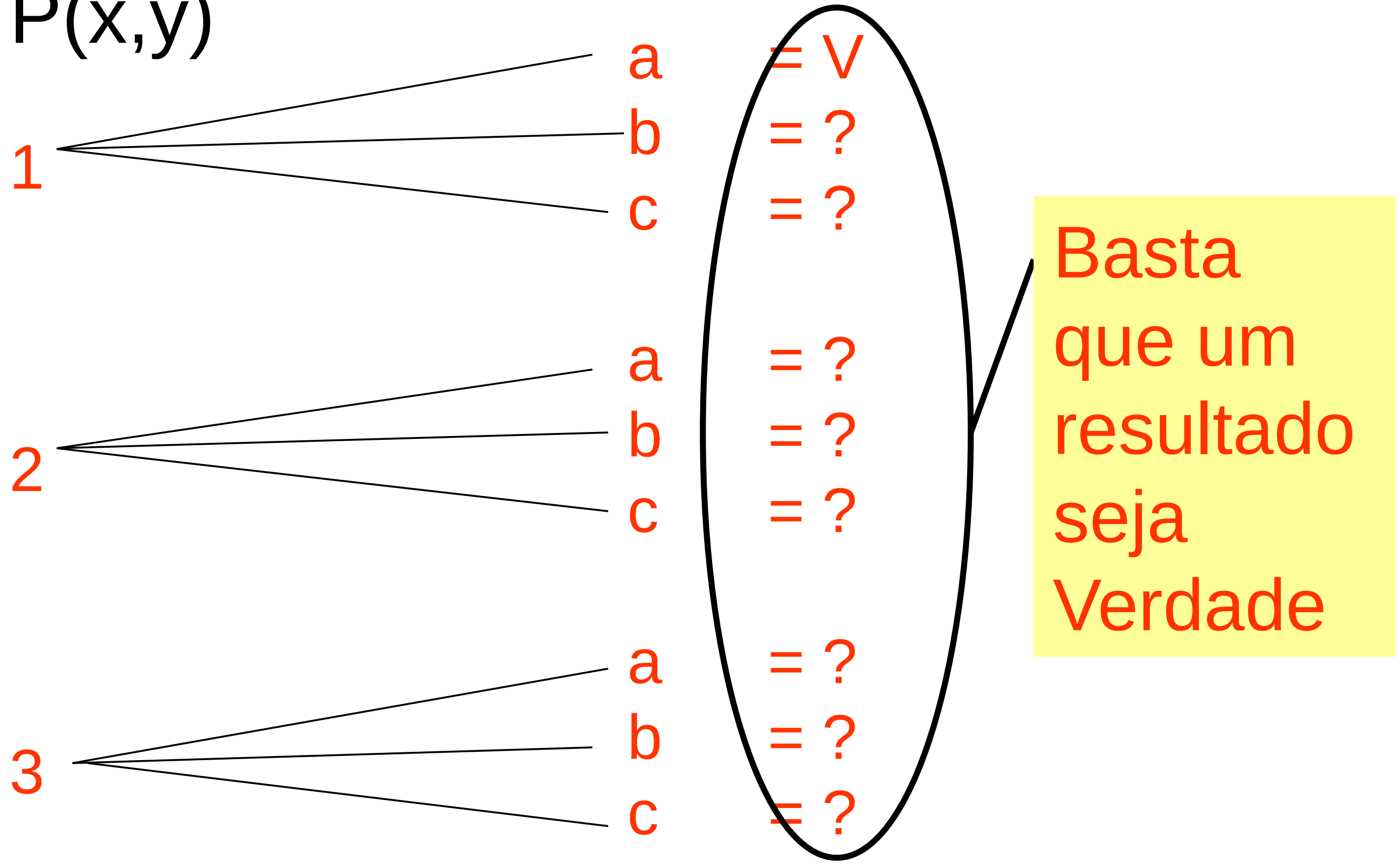
Pensando em quantificações como um laço

- $x \in \{1,2,3\}$ e $y\ \{a,b,c\}$
- $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$



Pensando em quantificações como um laço

- $x \in \{1,2,3\}$ e $y \ \{a,b,c\}$
- $\exists x \, \exists y \, P(x,y)$



Quantificadores Agrupados

- Como vimos a ordem dos quantificadores agrupados é importante, a menos que todos sejam iguais (∀ ou ∃).

Quantificadores Agrupados

- Como vimos a ordem dos quantificadores agrupados é importante, a menos que sejam todos sejam todos $\forall$ ou $\exists$.
- Exemplo:

  Q(x,y) = “x+y=0”

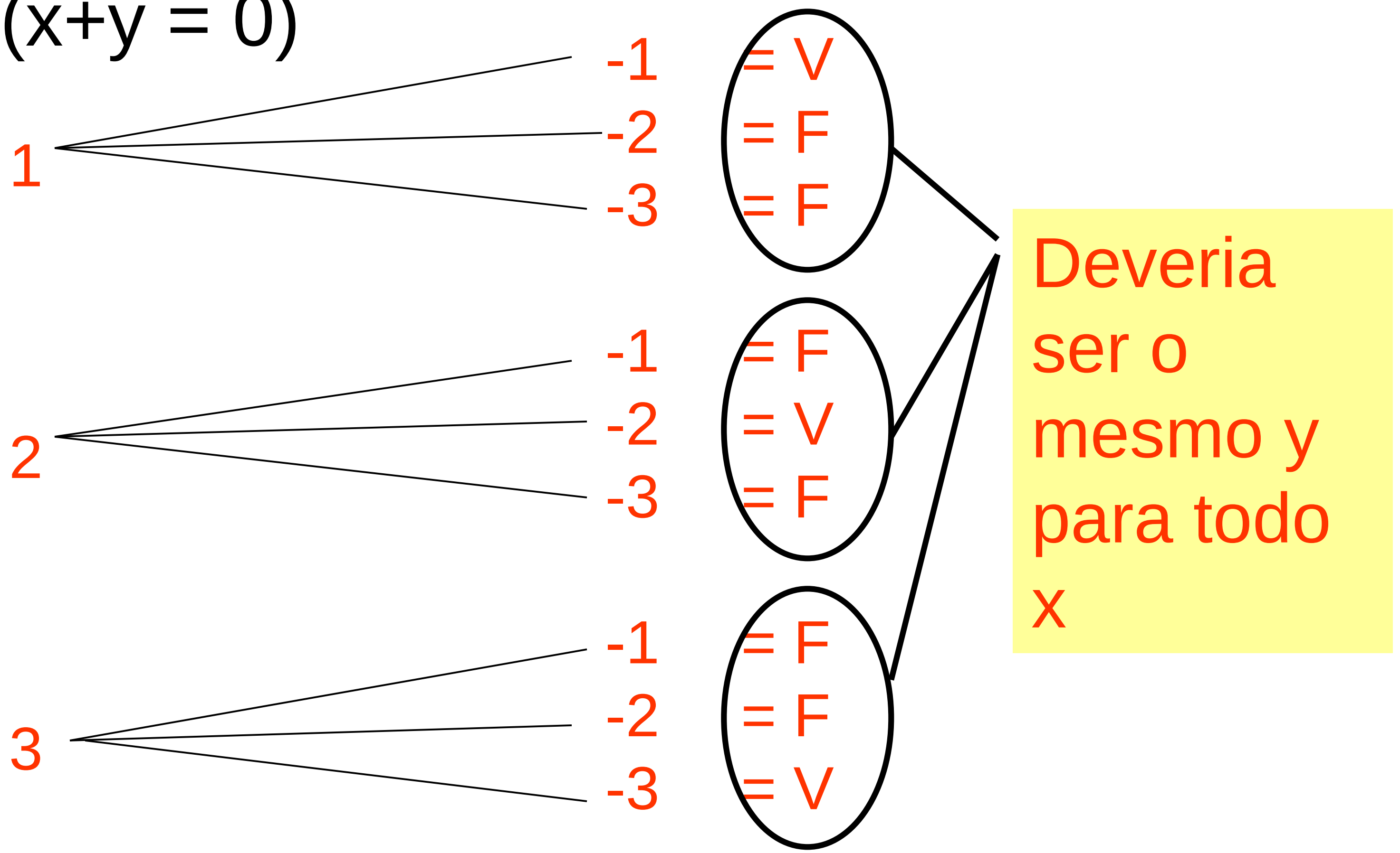
  Domínio = {números reais}

  $\exists y \ \forall x \ Q(x,y)$ Falso ou Verdadeiro?

Pensando....

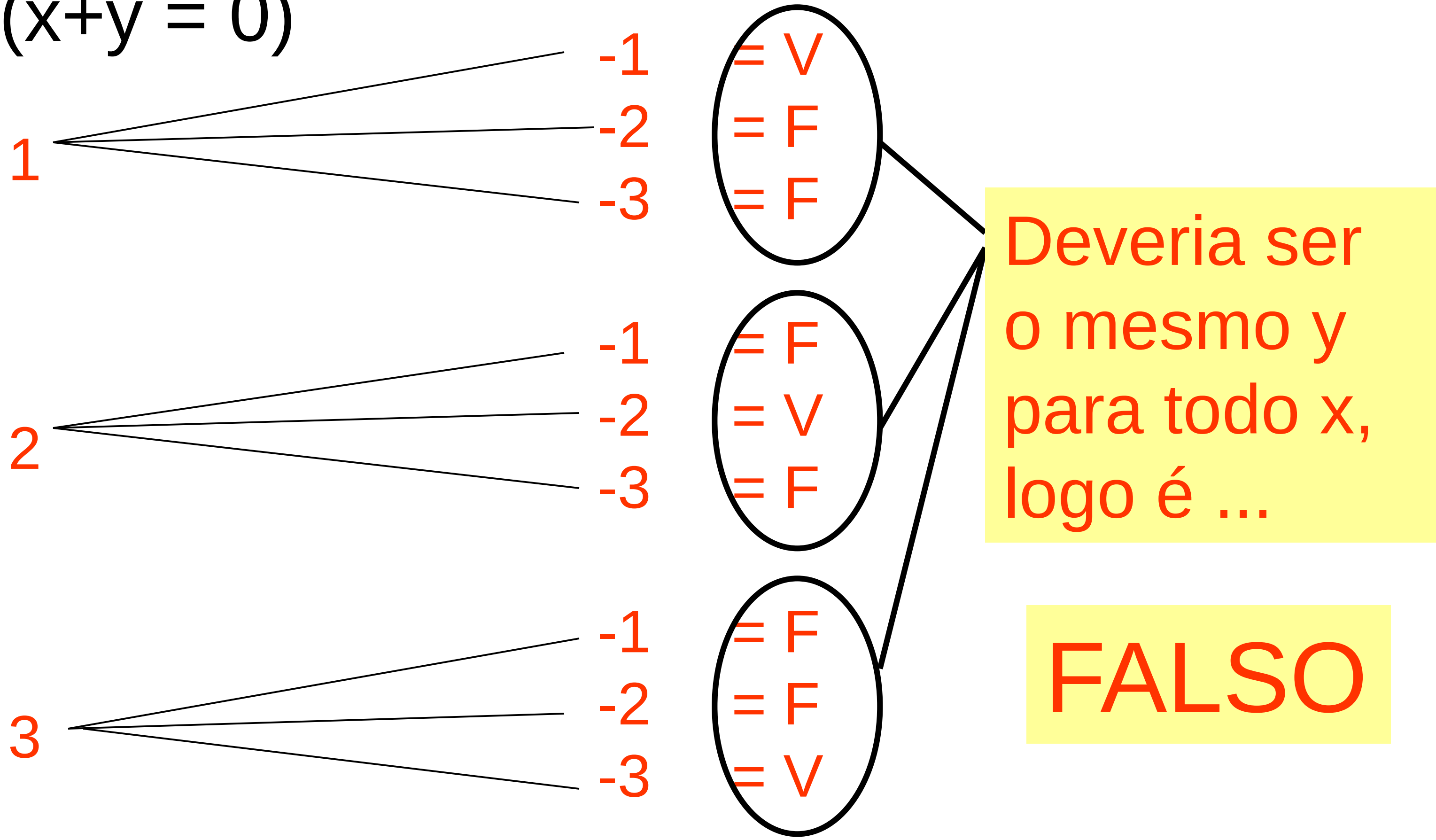
- x,y $\in$ R
- $\exists y\ \forall x(x+y = 0)$

Existe um número real y para todo numero real x



Pensando....

- x,y $\in$ R
- $\exists y \, \forall x (x+y = 0)$



Quantificadores Agrupados

- Como vimos a ordem dos quantificadores agrupados é importante, a menos que sejam todos sejam todos $\forall$ ou $\exists$.
- Exemplo:

  $Q(x,y)$ = "x+y=0"

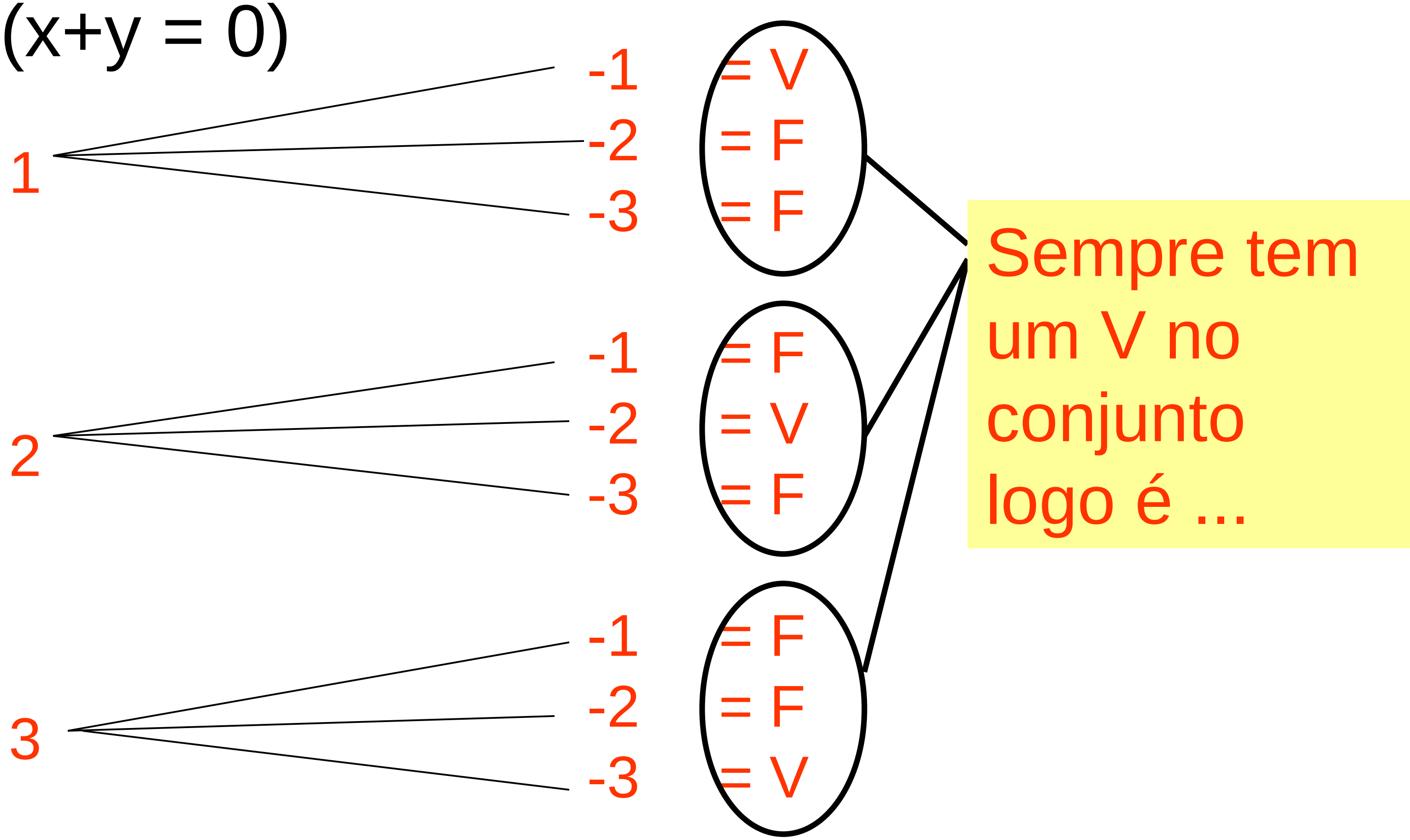
  Domínio = {números reais}

  $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ Falso !!!!

  $\forall x\ \exists y\ Q(x,y)$ Falso ou Verdadeiro?

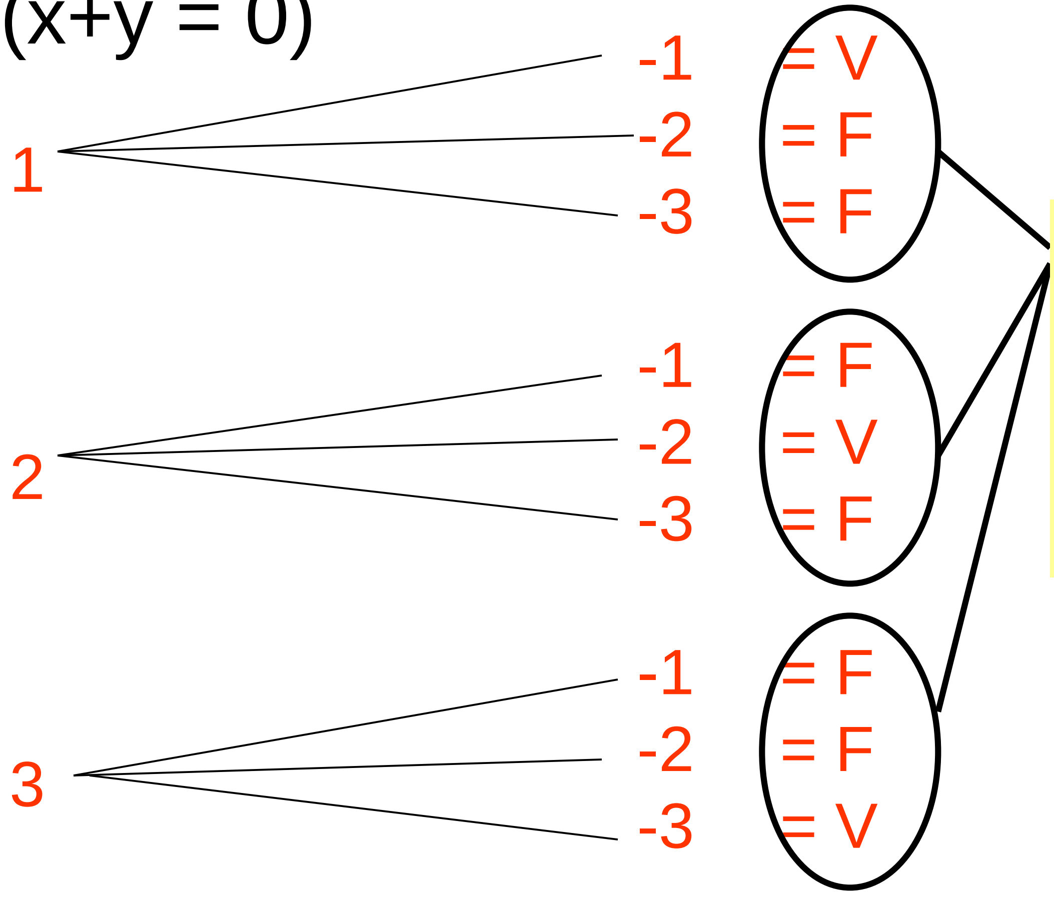
Pensando....

- $x,y \in R$
- $\forall x\ \exists y(x+y = 0)$



Pensando....

- $x,y \in R$
- $\forall x \; \exists y (x+y = 0)$



Sempre tem um V no conjunto logo é ...

Verdade

Quantificadores Agrupados

- Como vimos a ordem dos quantificadores agrupados é importante, a menos que sejam todos sejam todos ∀ ou ∃ .
- Exemplo:

  Q(x,y) =

  Domíni

ENTÃO ....
A ORDEM
IMPORTA!!!

$\exists y \forall x\, Q(x,y)$ Falso !!!!

$\forall x \exists y\, Q(x,y)$ Verdadeiro!!!

Quantificadores Agrupados

- Como vimos a ordem dos quantificadores agrupados é importante, a menos que sejam todos sejam todos ∀ ou ∃ .
- Exemplo:

  Q(x,y) = "x+y=0"

  D

  Podemos ter quantificações com mais de duas variáveis!!!

  ∃

  ∀ … o!!!

Traduzindo sentenças da matemática

- “A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva”

- Domínio = Z^+

Traduzindo sentenças da matemática

- "A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva"
- Domínio = Z^+

$\forall x \, \forall y \, (x+y > 0)$

Traduzindo sentenças da matemática

- "A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva"
- Domínio = Z^+

  $\forall x \, \forall y \, (x+y > 0)$
- Domínio = Z

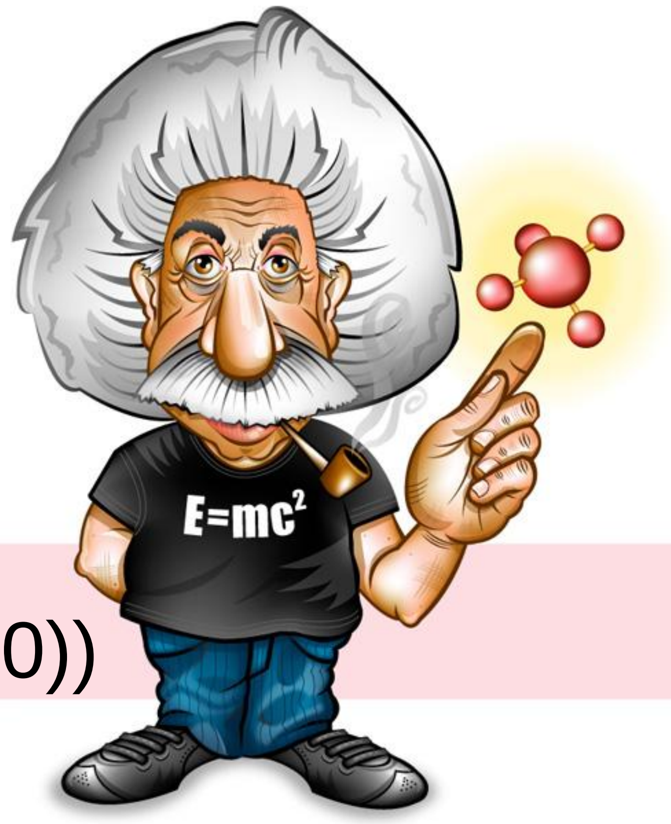
Traduzindo sentenças da matemática

- “A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva”
- Domínio = Z^+

$$\forall x\ \forall y\ (x+y > 0)$$

- Domínio = Z

$$\forall x\ \forall y\ (((x>0) \wedge (y>0)) \rightarrow (x+y > 0))$$



Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

  Domínio = { todas as pessoas}

  F(x) = “x é do sexo feminino”

  P(x) = “x tem filho”

  M(x,y) = “x é mãe de y”

Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

  Domínio = { todas as pessoas}

  F(x) = “x é do sexo feminino”

  P(x) = “x tem filho”

  M(x,y) = “x é mãe de y”

  ????? → ????

Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

  Domínio = { todas as pessoas}

  F(x) = “x é do sexo feminino”

  P(x) = “x tem filho”

  M(x,y) = “x é mãe de y”

  $(F(x) \wedge P(x)) \rightarrow$????

Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

  Domínio = { todas as pessoas}

  F(x) = "x é do sexo feminino"

  P(x) = "x tem filho"

  M(x,y) = "x é mãe de y"

  $(F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x,y)$ e os quantificadores?

Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

Domínio = { todas as pessoas}

F(x) = “x é do sexo feminino”

P(x) = “x tem filho”

M(x,y) = “x é mãe de y”

Todas as pessoas que são do sexo feminino e tem filhos.

$\forall x((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x,y))$

Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

Domínio = { todas as pessoas}

F(x) = “x é do sexo feminino”

P(x) = “x tem filho”

M(x,y) = “x é mãe de y”

Para todos os x’s existe um y.

$$\forall x((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y))$$

Traduzindo do Português

- Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém

  Domínio = { todas as pessoas}

  F(x) = “x é do sexo feminino”

  P(x) = “x tem filho”

  M(x,y) = “x é mãe de y”

Podemos por do lado de fora

$$\forall x \exists y\ ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x,y))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negados por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador.

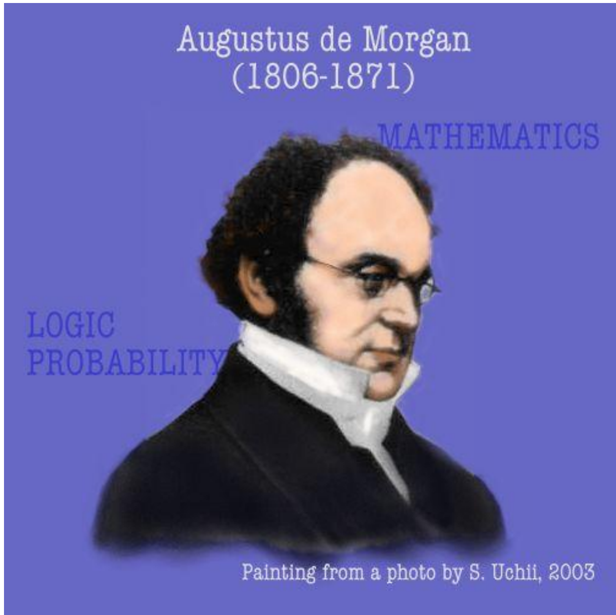
Quais eram as regras?

Negando Quantificadores Agrupados

- Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negados por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador.

$$\sim\forall x\ P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$$

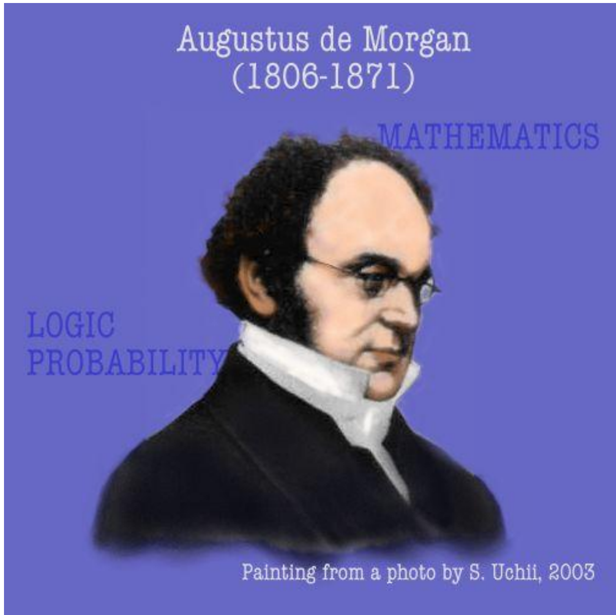
$$\sim\exists x\ P(x) \equiv \forall x \sim P(x)$$



Negando Quantificadores Agrupados

- Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negados por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador.

  $\sim \forall x \exists y\ (xy=1) \equiv$

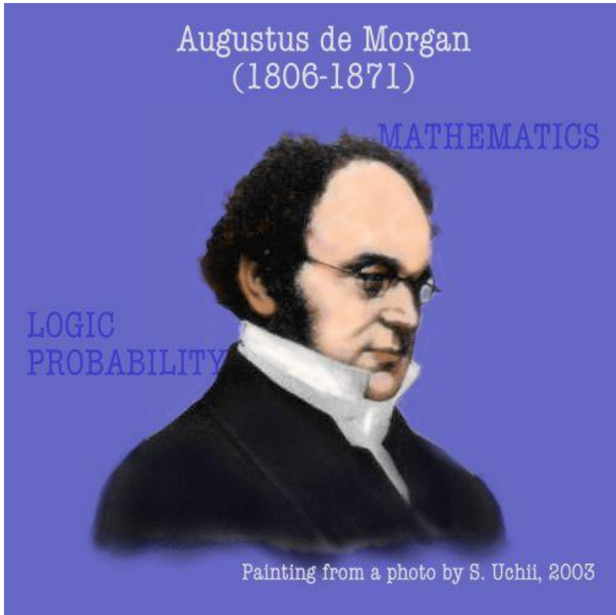


Negando Quantificadores Agrupados

- Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negados por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador.

$$\sim \forall x \exists y\ (xy=1) \equiv$$

$$\exists x \sim \exists y\ (xy=1) \equiv$$



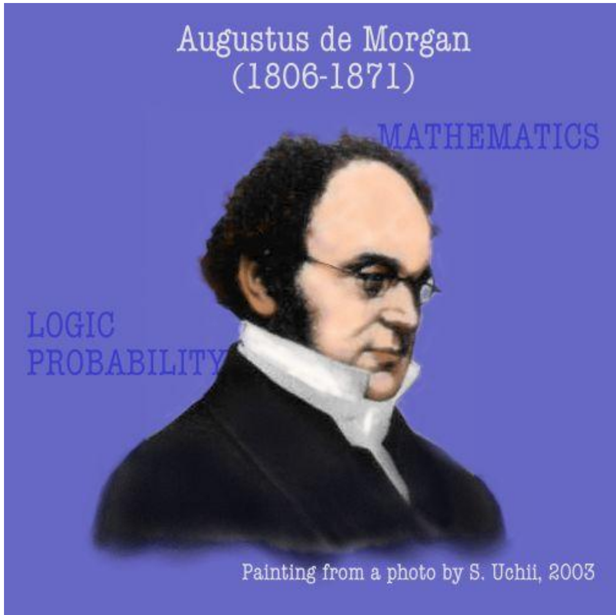
Negando Quantificadores Agrupados

- Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negados por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador.

$$\sim \forall x \exists y\ (xy=1) \equiv$$

$$\exists x \sim \exists y\ (xy=1) \equiv$$

$$\exists x\ \forall y \sim (xy=1) \equiv$$



Negando Quantificadores Agrupados

- Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negados por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador.

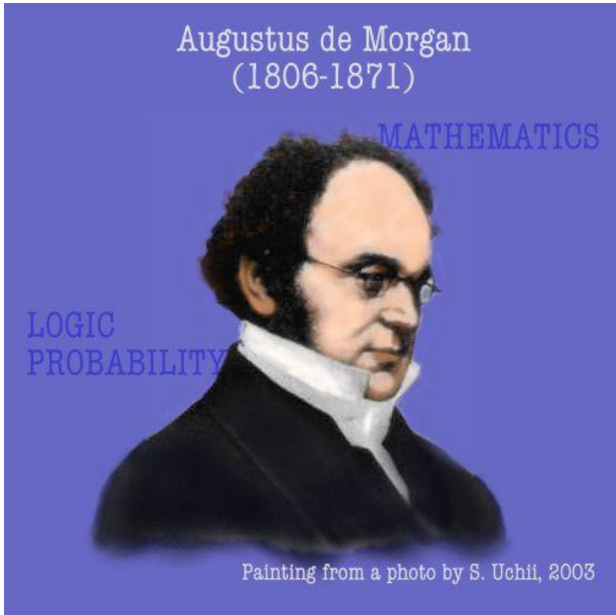
$$\sim \forall x \exists y\ (xy=1) \equiv$$

$$\exists x \sim \exists y\ (xy=1) \equiv$$

$$\exists x\ \forall y \sim (xy=1) \equiv$$

$$\exists x\ \forall y\ (xy \neq 1)$$

Verdade?



Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Vamos construir primeiro a afirmação!!!!

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

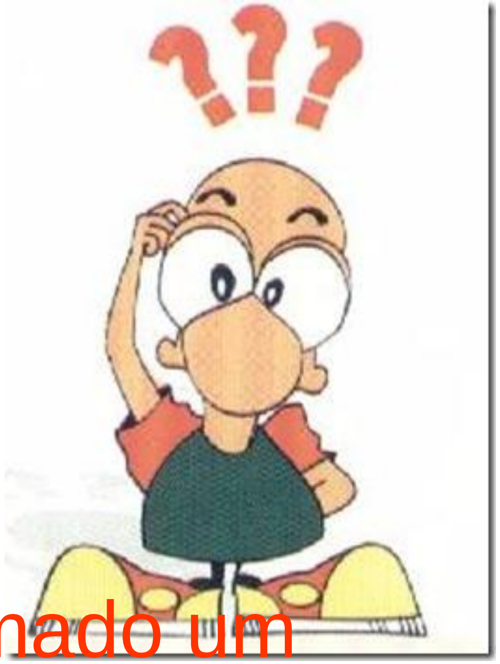
Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Quais predicados teremos que usar???

Negando Quantificadores Agrupados



- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Qual o conectivo???

P(w,f) ???? Q(f,a)

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Qual o quantificador de w???

(P(w,f) ^ Q(f,a))

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = "w tomou o avião f"

Q(f,a) = "f é um avião da linha a"

Domínio = {todas as mulheres}

"Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo"

Qual o quantificador de a???

$\exists w(P(w,f) \wedge Q(f,a))$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Qual o quantificador de f???

$$\exists w \forall a (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

$$\exists w \forall a \, \exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Negando!!!!!

$$\sim\exists w \forall a \, \exists f \, (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

De Morgan!!!!!

$$\sim\exists w \forall a\, \exists f\, (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = "w tomou o avião f"

Q(f,a) = "f é um avião da linha a"

Domínio = {todas as mulheres}

"Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo"

De Morgan Novamente!!!!!

$\forall w \sim \forall a \, \exists f \, (P(w,f) \wedge Q(f,a))$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

De Morgan Mais Uma Vez!!!!!

$$\forall w\ \exists a\ \sim\exists f\ (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

Eita De Morgan!!!!!

$$\forall w\ \exists a\ \forall f \sim (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo”

No Português!!!!!

$$\forall w \, \exists a \, \forall f \, (\sim P(w,f) \vee \sim Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

- Exemplo:

P(w,f) = “w tomou o avião f”

Q(f,a) = “f é um avião da linha a”

Domínio = {todas as mulheres}

“ Para toda mulher existe uma linha aérea tal que, para todos os aviões, essa mulher não tomou esse avião ou esse avião não é dessa linha aérea”

$$\forall w\ \exists a\ \forall f(\sim P(w,f) \vee \sim Q(f,a))$$

Negando Quantificadores Agrupados

Traduzindo para o português

- É complicado!!!!

Traduzindo para o português

- 1o. Passo:
  - Escrever por extenso o que os quantificadores e predicados da expressão significam.

Traduzindo para o português

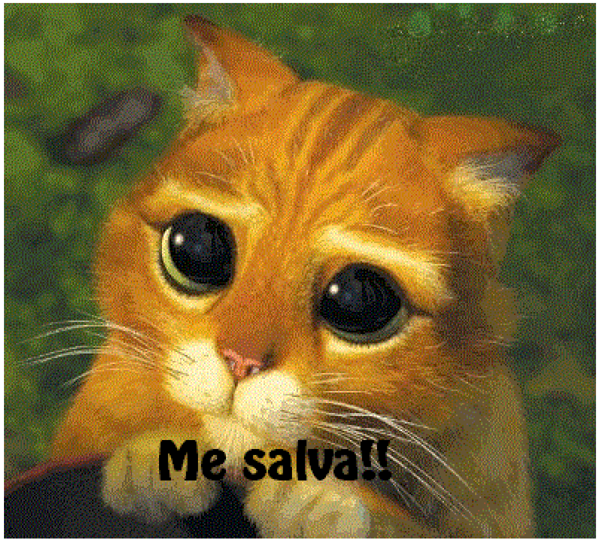
- Exemplo:

  C(x) = “x tem um computador”

  F(x,y) = “x e y são amigos”

  Domínio(x,y)= {estudantes da sua escola}

  $\forall x(C(x) \lor \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$



Traduzindo para o português

- Exemplo:

  C(x) = “x tem um computador”

  F(x,y) = “x e y são amigos”

  Domínio(x,y)= {estudantes da sua escola}

$$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$$

1o. Passo: Escrever por extenso o que os quantificadores e predicados da expressão significam.

Traduzindo para o português

- Exemplo:

  C(x) = “x tem um computador”

  F(x,y) = “x e y são amigos”

  Domínio(x,y)= {estudantes da sua escola}

$$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$$

Para todo estudante x da sua classe, x tem um computador ou existe um estudante y tal que y tem um computador e x e y são amigos!!!

Traduzindo para o português

- 2o. Passo:
  - Expressar esse significado em uma sentença o mais simples possível

Para todo estudante x da sua classe, x tem um computador ou existe um estudante y tal que y tem um computador e x e y são amigos!!!

Todo estudante da sua classe tem um computador ou tem um amigo que tem uma computador!!!

Traduzindo para o português

Podemos continuar???

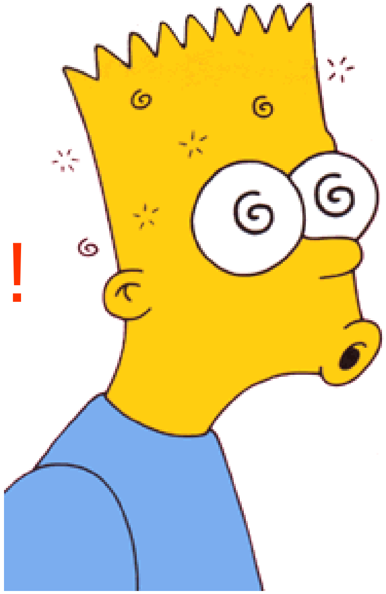
Exercício

F(x,y) = “x e y são amigos”

Domínio (x,y,z) = “estudantes da sua escola”

$\exists x \forall y \forall z\ ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \sim(F(y,z)))$

Traduzir para o português!!!!



Exercício

F(x,y) = “x e y são amigos”

Domínio (x,y,z) = “estudantes da sua escola”

$\exists x \forall y \forall z\ ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \sim(F(y,z)))$

Se os estudantes x e y são amigos e os estudantes x e z são amigos e, ainda mais, se y e z não são o mesmo estudante, então y e z não são amigos.

Exercício

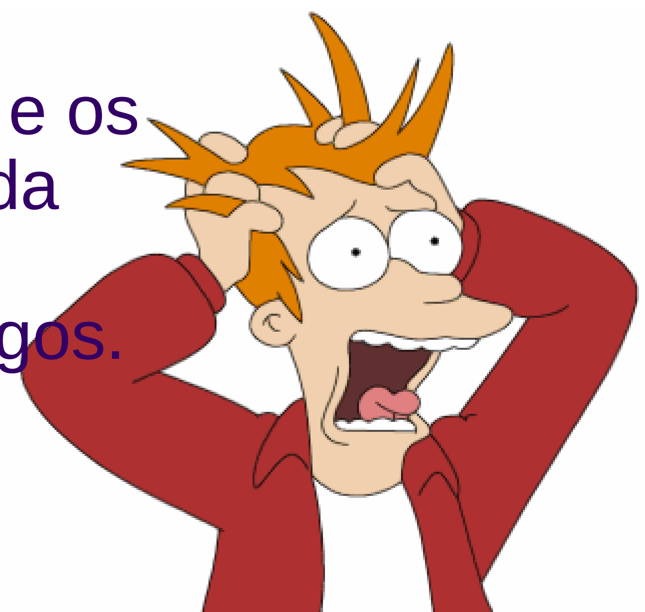
F(x,y) = "x e y são amigos"

Domínio (x,y,z) = "estudantes da sua escola"

$\exists x \forall y \forall z ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \sim(F(y,z)))$

Entenderam?!

Se os estudantes x e y são amigos e os estudantes x e z são amigos e, ainda mais, se y e z não são o mesmo estudante, então y e z não são amigos.



Exercício

F(x,y) = “x e y são amigos”

Domínio (x,y,z) = “estudantes da sua escola”

$\exists x \forall y \forall z((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \sim(F(y,z)))$

Com os quantificadores!!!

Existe um estudante tal que para todo estudante y e para todo estudante z diferente de y, se x e y são amigos e x e z são amigos então y e z não são amigos.

Exercício

F(x,y) = “x e y são amigos”

Domínio (x,y,z) = “estudantes da sua escola”

$\exists x \forall y \forall z ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \sim(F(y,z)))$

Simplificando!!!

Existe um estudante tal que nenhum par de amigos seus é também amigos entre si.

Exercício

F(x,y) = “x e y são amigos”

Domínio (x,y,z) = “estudantes da sua escola”

$\exists x \forall y \forall z((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \sim(F(y,z)))$

Simplificando!!!

Existe um estudante tal que nenhum par de amigos seus é também amigos entre si.

!!! Meus amigos não são amigos uns dos outros!!!

Perguntas?!!


Se óleo de soja é feito de soja
Do que é feito o óleo de bebê... Jesus!
Winkal.com/share/m/XFWM

Exercícios

- Rosen pg 58
  - 1
- Rosen pg 59
  - 9
  - 11 a), b)
- Rosen pg 61
  - 26,27,28