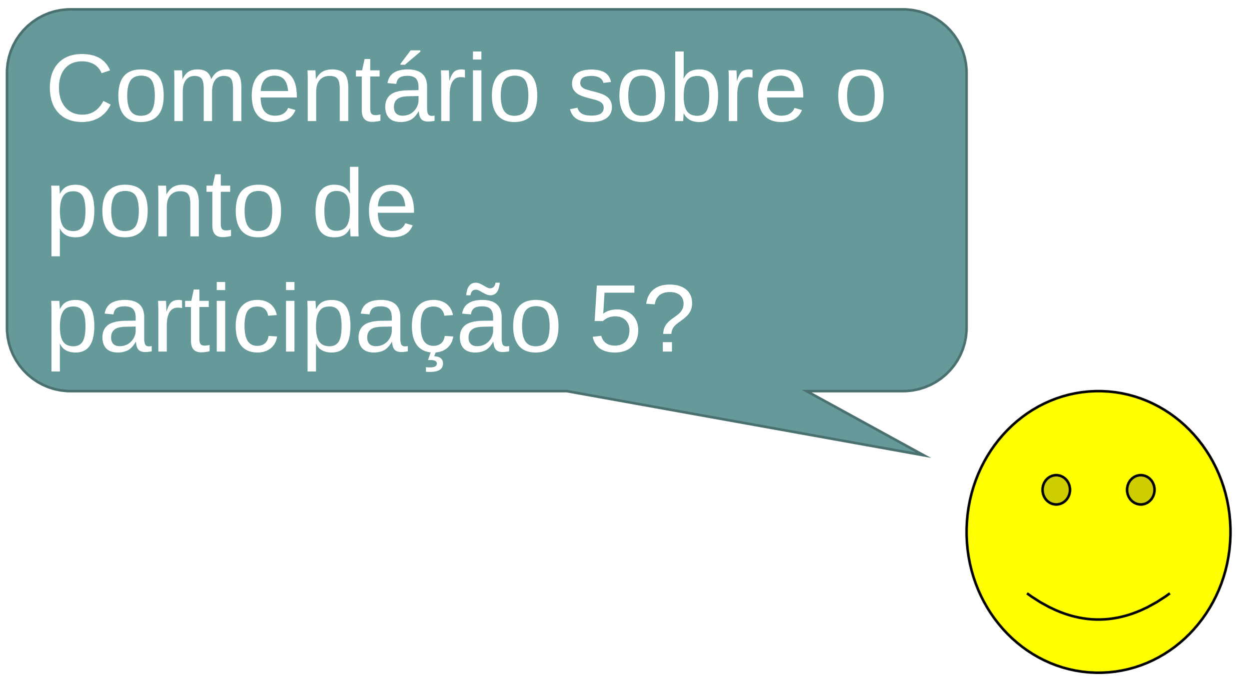
Fundamentos da Computação 1

Aula 15

Conteúdo

- Criando novas equivalências.
- Resolvendo questões lógicas com o método dedutivo.



Aplicando Equivalências Lógicas

$\sim(p \rightarrow q)$

Aplicar a propriedade da condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Aplicando Equivalências Lógicas

$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ Condicional

Aplicar a propriedade da condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Aplicando Equivalências Lógicas

$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ Condicional

$\equiv \sim\sim p \wedge \sim q$ De Morgan

Aplicar a propriedade de De Morgan

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Aplicando Equivalências Lógicas

$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ Condicional

$\equiv \sim\sim p \wedge \sim q$ De Morgan

$\equiv p \wedge \sim q$ Dupla Negação

Aplicar a propriedade da Dupla Negação

$\sim(\sim p) \equiv p$

Aplicando Equivalências Lógicas

$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ Condicional

$\equiv \sim\sim p \wedge \sim q$ De Morgan

$\equiv p \wedge \sim q$ Dupla Negação

- Concluímos que $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Aplicando Equivalências Lógicas

$\sim(p \rightarrow q)$	$\equiv \sim(\sim p \lor q)$	Condicional
	$\equiv \sim\sim p \land \sim q$	De Morgan
	$\equiv p \land \sim q$	Dupla Negação

- Concluímos que $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \land \sim q$
- Utilizamos este método, chamado método dedutivo, para demonstrar novas equivalências.

Resolver...

- Mostre que $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$
  - Dica: Aplicar as equivalências na seguinte seqüência:
    - Condicional
    - Condicional
    - Associativa
    - De Morgan
    - Condicional

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$ Condicional

Condicional

Associativa

De Morgan

Condicional

Propriedade da Condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Resolver...

$p \to (q \to r) \equiv p \wedge q \to r$

$p \to (q \to r) \equiv \sim p \vee \underline{(q \to r)}$ Condicional

Condicional

Associativa

De Morgan

Condicional

Propriedade da Condicional

$p \to q \equiv \sim p \vee q$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$ Condicional

$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$ Condicional

Associativa

De Morgan

Condicional

Propriedade da Condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$ Condicional

$\equiv \underline{\sim p \vee (\sim q \vee r)}$ Condicional

Associativa

De Morgan

Condicional

Propriedade Associativa

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$	Condicional
$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$	Condicional
$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$	Associativa
	De Morgan
	Condicional

Propriedade Associativa

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$	Condicional
$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$	Condicional
$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$	Associativa
	De Morgan
	Condicional

Leis de De Morgan

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$	Condicional
	$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$	Condicional
	$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$	Associativa
	$\equiv \sim(p \wedge q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	Condicional

Propriedade da Condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$	Condicional
$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$	Condicional
$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$	Associativa
$\equiv \sim (p \wedge q) \vee r$	De Morgan
$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$	Condicional

Propriedade da Condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Resolver...

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$	Condicional
$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$	Condicional
$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$	Associativa
$\equiv \sim (p \wedge q) \vee r$	De Morgan
$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$	Condicional

Mostramos a equivalência usando o método dedutivo

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

  - De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
  - De Morgan $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  - Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
  - Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
  - Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$

- De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- De Morgan $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \quad \equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)}$$

- De Morgan $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)}$$
$$\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q$$

- Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)}$$
$$\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q$$
$$\equiv \sim p \wedge p \vee \sim q$$

- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$
\begin{aligned}
\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \quad &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\
&\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \ \sim q \\
&\equiv \sim p \wedge (p \vee \ \sim q) \\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee \ (\sim p \wedge \sim q)
\end{aligned}
$$

- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$
\begin{aligned}
\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\
&\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\
&\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q)
\end{aligned}
$$

- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)}$$
$$\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \ \sim q$$
$$\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \ \sim q$$
$$\equiv (\sim p \wedge p) \vee \ (\sim p \wedge \sim q)$$
$$\equiv F \vee \ (\sim p \wedge \sim q)$$
$$\equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

Demonstrações

- Podemos utilizar este método também para mostrar que uma formula é uma tautologia ou contradição.
- Exemplo:
  - Demonstrar que (p ^ q) → (p v q) é uma tautologia
    - Usaremos: Condicional, De Morgan, Associativa e Comutativa.

Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ Condicional

Propriedade da Condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ Condicional

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$ De Morgan

Leis de De Morgan

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ Condicional

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$ De Morgan

$\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q$ Comutativa

Propriedade Associativa

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Propriedade Comutativa

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ Condicional

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$ De Morgan

$\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q$ Comutativa

$\equiv V \vee V$ Negação

Propriedade de Negação

$p \vee \sim p \equiv V$

Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ Condicional

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$ De Morgan

$\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q$ Comutativa

$\equiv V \vee V$ Negação

$\equiv V$

Logo é uma tautologia

Um algoritmo...

```
...
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000) ))
        então x = x +1;
        senão x = x+2;
```

Um algoritmo...

...

if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada) and (pressão < 1000)))

        então x = x +1;

        senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

Um algoritmo...

```
...
if (p and not (p and q))
        então x = x +1;
        senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

    então x = x +1;

    senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

p ^ (~p v ~q) Distributiva

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

    então x = x +1;

    senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

p ^ (~p v ~q) Distributiva

(p ^ ~p) v (p ^ ~q)

Um algoritmo...

```
...
if (p and not (p and q))
        então x = x +1;
        senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

p ^ (~p v ~q) Distributiva

$$\underbrace{(p \land \sim p)}_{?} \lor (p \land \sim q)$$

Um algoritmo...

```
...
if (p and not (p and q))
        então x = x +1;
        senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

p ^ (~p v ~q) Distributiva

(p ^ ~p) v (p ^ ~q)

Negação

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

p ^ (~p v ~q) Distributiva

$$\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \vee (p \wedge \sim q)$$

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

p ^ ~(p ^ q) De Morgan

p ^ (~p v ~q) Distributiva

(p ^ ~p) v (p ^ ~q)

$$\underbrace{F \ \ v\ (p \wedge \sim q)}_{?}$$

Um algoritmo...

```
...
if (p and not (p and q))
        então x = x +1;
        senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$$\underbrace{F \vee (p \wedge \sim q)}_{\text{Elementos neutros}}$$

Um algoritmo...

...

if (p and not (p and q))

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$

Um algoritmo...

...

if (p and not q)

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$

Um algoritmo...

...

if ((saída>entrada)and not (pressão < 1000))

então x = x +1;

senão x = x+2;

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$

Ponto de Participação 6

Indique qual a propriedade utilizada na equivalência:

~p ^ ~(~p ^ q) equivale a ~p ^ ~~p v ~q

- Propriedade dos Elementos Neutros
- Propriedade de Dominação
- Propriedade Comutativa
- Lei de De Morgan
- Propriedade Associativa

Exercícios

1) Mostre que $p \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia

- Dica: condicional; associativa; elemento neutro.

2) Mostre que $p \rightarrow q \equiv p \vee q \rightarrow q$

- Dica: partir da proposição maior. Condicional; De Morgan; Distributiva; Negação; Elemento Neutro; Condicional.

3) Mostre que $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p$

- Dica: Condicional; Distributiva; Negação; Elemento Neutro.

Exercícios

1) Demonstre que as proposições são tautológicas usando o método dedutivo.

$(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \sim p)$

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$

$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$

$p \wedge q \rightarrow p$

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Exercícios

2) Demonstre as equivalências usando o método dedutivo.

$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$

$(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$

$(p \rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$

$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow q \vee r$