



Estatística

Prof.^a M.a Luciane Nunes Ribeiro

Experimentos ou fenômenos aleatórios

São aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.

Espaço Amostral

Ao conjunto desses resultados possíveis damos o nome de espaço amostral ou conjunto universo, representado por **S**.

Cada um dos elementos de **S** que corresponde a um resultado recebe o nome de ponto amostral.

Eventos

Chamamos de evento qualquer subconjunto do espaço amostral **S** de um experimento aleatório.

Probabilidade

Chamamos de probabilidade de um evento A ($A \subset S$) o número real $P(A)$, tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Onde: $n(A)$ é o número de elementos de A;
 $n(S)$ é o número de elementos de S.

EXEMPLOS:

1) O lançamento de uma moeda.

$$S = \{Ca, Co\}$$

$$P(Ca) =$$

$$P(Co) =$$

1) O lançamento de duas moedas sucessivas.

$$S = \{(Ca, Co), (Ca, Ca), (Co, Co), (Co, Ca)\}$$

$$P(Ca, Co) =$$

$$P(Co, Co) =$$

1) O lançamento de um dado.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(n^{\circ} \text{ par}) =$$

$$P(6) =$$

Eventos Complementares

Sabemos que um evento pode ocorrer ou não. Sendo **p** a probabilidade de que ele ocorra (sucesso) e **q** a probabilidade de que ele não ocorra (insucesso), para um mesmo evento existe sempre a relação:

$$p+q = 1 \longrightarrow q = 1-p$$

Exemplo: Se a probabilidade de tirar 4 no lançamento de um dado é $p = 1/6$, logo a probabilidade de não tirar o 4 é:

$$q = 1 - p \longrightarrow q = 1 - 1/6 \longrightarrow q = 5/6$$

Eventos Independentes

Dizemos que dois eventos são independentes quando a realização ou a não realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa.

Exemplo: Lançamos dois dados. A probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado é: $p_1 = 1/6$

A probabilidade de obtermos 5 no segundo dado é: $p_2 = 1/6$

Logo, a probabilidade de obtermos, simultaneamente, 1 no primeiro e 5 no segundo é:

$$p = p_1 \times p_2 = 1/6 \times 1/6 = 1/36$$

Eventos Mutuamente Exclusivos

Dizemos que dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a realização de um exclui a realização do(s) outro(s).

Ou seja, $p = p_1 + p_2$

Exemplo:

- No lançamento de uma moeda, o evento “tirar cara” e o evento “tirar coroa” são mutuamente exclusivos, já que, ao se realizar um deles, o outro não se realiza, logo $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- A probabilidade de se tirar o 3 ou o 5 é: $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

REVISÃO

- Quando os eventos são independentes, multiplica a probabilidade de ocorrência de cada um.

$$p = p_1 \times p_2$$

- Quando os eventos são mutuamente exclusivos, soma a probabilidade de ocorrência de cada um.

$$p = p_1 + p_2$$

EXERCÍCIOS

1. Em um lote de 12 peças, quatro são defeituosas. Sendo retirada uma peça, calcule:
 - a) A probabilidade de essa peça ser defeituosa.
 - b) A probabilidade de essa peça não ser defeituosa.
 - c) A probabilidade, ao retirar duas peças consecutivas, de tirar duas peças defeituosas.

Combinação de Eventos.

Seja A e B eventos distintos:

- Ocorrência de A e de B é a interseção de eventos.
- Ocorrência de A ou de B é a união de eventos.

Exemplo 01: Seja A o evento “um dado apresenta um número par” e B o evento “o dado apresenta um número primo”. Calcule a probabilidade de ocorrência de A e de B e a probabilidade de ocorrência de A ou de B.

Exemplo

Jogam-se dois dados. O dado 1 pode apresentar qualquer uma das suas faces igualmente viáveis; o mesmo ocorre com o dado 2. Considerando os eventos A e B definidos por:

- Evento A: os números nos dados têm soma 8.
 - Evento B: os números nos dados são ambos pares.
-
- a) Quantos resultados são possíveis?
 - b) Qual a probabilidade de ocorrer A?
 - c) Qual a probabilidade de ocorrer B?
 - d) Qual a probabilidade de ocorrer A e B?
 - e) Qual é a probabilidade de ocorrer A, dado que ocorreu B?

Probabilidade Condicional

DEFINIÇÃO: Se A e B eventos em um espaço amostral (S, P) e suponhamos $P(B) \neq 0$. A probabilidade condicional de $P(A/B)$, isto é, a probabilidade de A dado B, é

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo

Seja A o evento “um estudante perde o ônibus escolar” e B o evento “o despertador do estudante está com defeito”. Qual é a probabilidade de o estudante perder o ônibus escolar, dado que seu despertador não funcionou?

Exemplo

Joga-se uma moeda cinco vezes. Qual é a probabilidade de a primeira jogada dar CARA, sabendo-se que a última jogada deu CARA?

Independência

DEFINIÇÃO (Evento Independentes): Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Dizemos que esses eventos são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Independência

PROPOSIÇÃO: Sejam A, B eventos em um espaço amostral (S, P) e suponhamos $P(A)$ e $P(B)$ ambas diferentes de zero. Então as afirmações seguintes são equivalentes:

- 1) $P(A/B) = P(A)$.
- 2) $P(B/A) = P(B)$.
- 3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Exemplo

Uma sacola contém vinte bolas, dez delas são vermelhas e dez são azuis. Extraem-se aleatoriamente duas bolas da sacola. Seja A o evento “a primeira bola extraída é vermelha” e B o evento “a segunda bola extraída é vermelha”. Esses eventos são independentes?

Exemplo

Uma urna contém 15 bolas enumeradas de 1 a 15. Retira-se uma bola ao acaso e vê-se que o número é maior que 6. Qual a probabilidade desse número ser múltiplo de 3?

Variável Aleatória

Suponhamos um espaço amostral **S** e que a cada ponto amostral seja atribuído um número. Fica, então, definida uma função chamada variável aleatória, indicada por uma letra maiúscula, sendo seus valores indicados por letras minúsculas.

Exemplo

Se o espaço amostral relativo ao “lançamento simultâneo de duas moedas” é

$$\mathbf{S} = \{(\text{Ca}, \text{Co}), (\text{Ca}, \text{Ca}), (\text{Co}, \text{Co}), (\text{Co}, \text{Ca})\}$$

E se **X** representa “o número de caras” que aparecem, a cada ponto amostral podemos associar um número para **X**, de acordo com a tabela:

PONTO AMOSTRAL	X
(Ca, Ca)	2
(Ca, Co)	1
(Co, Ca)	1
(Co, Co)	0

Exemplo

Considerando a distribuição de frequência relativa ao número de acidentes diários em um estacionamento:

Número de Acidentes	Frequência
0	22
1	5
2	2
3	1
	$\Sigma = 30$

Número de Acidentes	Probabilidades
0	
1	
2	
3	
	$\Sigma =$

Exemplo

Se o espaço amostral relativo ao “lançamento simultâneo de duas moedas” é

$$\mathbf{S} = \{(\text{Ca}, \text{Co}), (\text{Ca}, \text{Ca}), (\text{Co}, \text{Co}), (\text{Co}, \text{Ca})\}$$

E se **X** representa “o número de caras” que aparecem, a cada ponto amostral podemos associar um número para **X**, de acordo com a tabela:

PONTO AMOSTRAL	X	P(X)
(Ca, Ca)	2	
(Ca, Co)	1	
(Co, Ca)	1	
(Co, Co)	0	

Distribuição de Probabilidade

Seja **X** uma variável aleatória que pode assumir os valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. A cada valor x_i correspondem pontos do espaço amostral. Associamos, então, a cada valor x_i a probabilidade p_i de ocorrência de tais pontos no espaço amostral. Assim, temos:

$$\sum p_i = 1$$

Os valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de seus correspondentes $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ definem uma distribuição de probabilidades.

Distribuição Binomial

Neste item, vamos considerar experimentos que satisfaçam as seguintes condições:

- O experimento deve ser repetido, nas mesmas condições, um número finito de vezes (n).
- As provas repetidas devem ser independentes, isto é, o resultado de uma não deve afetar os resultados das sucessivas.
- Em cada prova deve aparecer um dos dois possíveis resultados: sucesso ou insucesso.
- No decorrer do experimento, a probabilidade p do sucesso e a probabilidade q ($q = 1 - p$) do insucesso manter-se-ão constantes.

Resolveremos problemas do tipo: determinar a probabilidade de se obter k sucessos em n tentativas.

Distribuição Binomial

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

n é o número de provas;

x é o número de vezes de ocorrência do evento desejado;

p é a probabilidade de que o evento se realize em uma só prova (sucesso);

q = 1 - p é a probabilidade de que o evento não se realize no decurso dessa prova (insucesso);

Exemplo

Uma moeda é lançada cinco vezes seguidas e independentes. Calcule a probabilidade de serem obtidas três caras nessas cinco provas.

$$n = 5$$

$$x = 3$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$